



HAL
open science

Comportement homogénéisé des matériaux composites : prise en compte de la taille des éléments microstructuraux et des gradients de la déformation

Thu Huong Tran

► **To cite this version:**

Thu Huong Tran. Comportement homogénéisé des matériaux composites : prise en compte de la taille des éléments microstructuraux et des gradients de la déformation. Modélisation et simulation. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1144 . tel-01038058

HAL Id: tel-01038058

<https://theses.hal.science/tel-01038058>

Submitted on 23 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST
MARNE-LA-VALLÉE

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle (UMR
CNRS 8208)

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique

Présentée par :

Thu-Huong TRAN

sujet :

**Comportement homogénéisé des
matériaux composites : prise en compte
de la taille des éléments
microstructuraux et des gradients de la
déformation**

Soutenue le 23 octobre 2013 devant le jury composé de :

Claude BOUTIN
Samuel FOREST
Djimédo KONDO
Nicolas TRIANTAFYLLIDIS
Guy BONNET
Vincent MONCHIET

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse
Co-Directeur de thèse

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier profondément mon directeur de thèse, Monsieur Guy Bonnet, Professeur à l'Université Paris Est Marne la Vallée, pour m'avoir confié ce travail de recherches, ainsi que pour son guide, sa disponibilité et ses précieux conseils au cours de ces années. C'est lui qui m'a donné la chance de travailler avec Monsieur Vincent Monchiet, maître de conférences à l'Université Paris Est Marne la Vallée, mon co-directeur de thèse.

Mes plus sincères remerciements vont ainsi à M. Vincent Monchiet, pour m'avoir consacré beaucoup de temps, pour m'avoir guidé ainsi que pour ses encouragements envers moi pendant toutes ces années. Je souhaiterais d'exprimer également mes admirations de ses connaissances scientifiques et ses compétences fortes. J'ai l'impression d'avoir grandi grâce à lui, en apprenant énormément de choses non seulement du côté scientifique mais aussi de la manière de travailler sérieusement et efficacement.

Je remercie Monsieur Samuel Forest, Professeur à l'Ecole des Mines Paris Tech et, Monsieur Claude Boutin à l'Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, d'avoir accepté d'être rapporteurs, et je les en remercie, de même que pour leur participation au Jury. Ils ont également contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire, et je leur en suis très reconnaissante.

Je remercie également Monsieur Djimédo KONDO, président du Jury - Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, et Monsieur Nicolas TRIANTAFYLLIDIS, Professeur à l'Ecole polytechnique d'avoir l'honneur de participer au Jury de soutenance.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une pensée à tous mes amis au laboratoire MSME. J'ai pu travailler dans un cadre particulièrement agréable grâce à vous. Merci à tous pour votre bonne humeur, pour toutes ces séances de rires et de sourires, et pour toutes ces discussions autour d'un café amicale.

Mes dernières pensées iront vers ma famille, mes parents et ma soeur qui m'aiment pour toujours et qui me font confiance malgré tout. Grâce à eux que j'ai la force d'aller jusqu'au bout du chemin. Je dédie cette dernière ligne à remercier mon mari d'avoir toujours été à mes côtés, de m'avoir encouragé et de m'avoir beaucoup soutenue pendant les moments les plus difficiles.

Table des matières

Introduction générale	11
1 Modélisations continues à gradients de déformation : approches phénoménologiques et micromécaniques	15
1.1 Les modèles continus du second gradient	15
1.1.1 Modèle du second gradient de Toupin [61] et Mindlin [44] .	15
1.1.2 Théories d'ordre supérieur	21
1.2 Modélisations micromécaniques des effets de gradients de déformation	23
1.2.1 L'approche variationnelle de Drugan et Willis [72]	23
1.2.2 Homogénéisation avec conditions non homogènes au contour	27
1.3 Conclusion	35
2 Une approche basée sur les développements asymptotiques	37
2.1 L'approche par développement asymptotique aux ordres supérieurs	37
2.1.1 Principe de la méthode par développement asymptotique .	37
2.1.2 Les problèmes d'homogénéisation et leurs solutions	40
2.1.3 Solution générale	43
2.2 Le modèle macroscopique de Boutin 1996 [11]	45
2.2.1 Déformation macroscopique	45
2.2.2 Loi de comportement macroscopique	45
2.2.3 Équations d'équilibre à l'échelle macroscopique	46
2.2.4 Conditions aux limites	46
2.3 Une approche basée sur l'équivalence énergétique	47
2.3.1 Énergie élastique macroscopique	47
2.3.2 Loi de comportement homogénéisée	48
2.3.3 Équation d'équilibre macroscopique	49
2.4 Lien avec la théorie du second gradient	51
2.4.1 Comparaisons avec le modèle de Boutin	51
2.5 Calcul des tenseurs élastiques du second gradient pour le composite stratifié	52
2.5.1 Solutions des problèmes locaux	53
2.5.2 Expressions des coefficients élastiques	59
2.5.3 Illustration	62
2.6 Conclusion	69

3	Calculs des propriétés du second gradient par transformée de Fourier rapide	71
3.1	Résolution par TFR du problème à l'ordre 1	71
3.1.1	Représentation dans l'espace de Fourier	71
3.1.2	L'équation de Lippmann-Schwinger	73
3.1.3	Schéma de résolution en déformation	74
3.1.4	Formulation en contrainte	77
3.2	Algorithmes de résolution pour les problèmes d'ordre supérieur . .	80
3.2.1	Les problèmes d'ordre $n \geq 2$	80
3.2.2	Equations intégrales	81
3.2.3	Schéma de résolution en déformation	82
3.2.4	Formulation en contrainte	83
3.3	Applications	84
3.3.1	Composite à fibres	84
3.3.2	Composite avec renforts de section demi-cylindriques . . .	95
3.4	Conclusion	100
4	Extension aux composites non linéaires	103
4.1	Introduction	103
4.2	Application of the asymptotic series method for thermal properties of some non linear composites	103
4.2.1	Description of the problem	103
4.2.2	Derivation of the cell problems	104
4.3	Solutions to the cell problems	107
4.3.1	Solution at the first order	107
4.3.2	Solution at the second order	108
4.4	The micro-macro transition	109
4.4.1	Macroscopic temperature and gradients of temperature . .	109
4.4.2	The macroscopic potential	110
4.4.3	General expression for Ψ and derivation of the macroscopic law	111
4.5	Application to a stratified composite	112
4.5.1	Description of the problem	112
4.5.2	Solution at the first order	114
4.5.3	Solution at second order	115
4.5.4	Macroscopic potentials for the stratified composite	116
4.5.5	The case of linear constituents	117
4.5.6	Non linear case with $E_2 = E_3 = 0$	118
4.5.7	Non linear case with $E_1 = 0$	122
4.6	Conclusion	125
	Conclusion générale	127
	Annexe A : conditions aux limites du modèle de triple gradient de Mindlin	135
	Annexe B : calcul du champ u^2 pour le composite stratifié non-linéaire	137

Notations

• Notations tensorielles

a	scalaire,
\underline{a}	vecteur,
\mathbf{A}	tenseurs d'ordre deux,
\mathbb{A}	tenseurs d'ordre quatre,
\mathbf{i}	tenseur identité d'ordre deux,
\mathbb{I}	tenseur identité d'ordre quatre,
\cdot	produit contracté d'ordre un,
$\cdot \cdot$	produit contracté d'ordre deux,
$\cdot \cdot \cdot$	produit contracté d'ordre trois,
\odot_{n+2}	produit tensoriel d'ordre $n + 2$ ($n \geq 0$),
δ_{ij}	symbole de Kronecker.

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} &= A_{ik} B_{jl} \\(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} &= A_{il} B_{jk} \\(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} &= \frac{1}{2}(A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk})\end{aligned}$$

• Notations communes aux chapitres 1, 2 et 3

\underline{u}	champ de déplacement,
ε	tenseur des déformations microscopiques,
\mathbf{E}	tenseur des déformations macroscopiques,
$\nabla^n \mathbf{E}$	tenseur du gradient d'ordre n des déformations macroscopiques, $n = 1, 2, \dots$
σ	tenseur des contraintes microscopiques,
Σ^0	tenseur des contraintes macroscopiques,
Σ^n	tenseur des hypercontraintes macroscopiques d'ordre $n \geq 1$,
w	potentiel des déformations microscopiques,
W	potentiel des déformations macroscopiques,
\mathbb{C}	tenseur de rigidité,
\mathbb{S}	tenseur de souplesse,

• Notations propres au chapitre 3

$\underline{\xi}$ vecteur d'onde,
 $\underline{\Gamma}^0(\underline{\xi})$ opérateur de Green pour les déformations,
 $\underline{\Delta}^0(\underline{\xi})$ opérateur de Green pour les contraintes,

• **Notations propres aux chapitres 4**

u microscopic temperature,
 U macroscopic temperature,
 $\underline{\varepsilon}$ gradient of microscopic temperature,
 \underline{E} gradient of macroscopic temperature,
 \underline{K} double gradient of macroscopic temperature,
 $\underline{\sigma}$ microscopic flux,
 $\underline{\Sigma}^0$ macroscopic flux,
 $\underline{\Sigma}^1$ hyperflux ,
 ψ microscopic potential,
 Ψ macroscopic poteltial,

Introduction générale

Les approches par homogénéisation sont aujourd'hui largement utilisées pour la détermination des propriétés effectives des milieux hétérogènes. Elles introduisent deux échelles caractéristiques : l'échelle microscopique où l'hétérogénéité du matériau est apparente et l'échelle macroscopique (celle de l'ingénieur) où le matériau est considéré homogène. Elle supposent également la séparation stricte des échelles ce qui notamment conduit à des propriétés homogénéisées qui sont indépendantes de la taille des éléments microstructuraux. Les propriétés effectives dépendent alors uniquement de la morphologie de la microstructure et des propriétés des phases.

L'hypothèse de séparation des échelles apparaît raisonnable lorsque les longueurs d'ondes caractéristiques des fluctuations dans les champs macroscopiques sont grandes devant la taille des éléments microstructuraux. Pour un certain nombre de problèmes en mécanique, ces hypothèses s'avèrent non valides. C'est le cas notamment en mécanique de la rupture où la loi élastique prédit une singularité des champs mécaniques au voisinage de la pointe de la fissure. Un autre exemple est celui de la localisation qui se traduit par la concentration des déformations dans des zones très petites à l'échelle de laquelle la nature hétérogène du matériau devient apparente.

Des modèles introduisant les effets de taille de microstructure ont été proposés dans les années 60. Ce sont essentiellement les modèles du second gradient de Toupin [61, 62] et Mindlin [44, 46] auxquels on peut mentionner d'autres contributions dues à Mindlin [45], Green and Rivlin [27], Kröner [38], Eringen and Edelen [18]... Le modèle du second gradient est bâti sur une expression de l'énergie élastique qui est fonction de la déformation et de son gradient. Il introduit également une longueur interne caractéristique de la taille de la microstructure. Le modèle du second gradient est de nature non locale puisqu'il introduit des couplages entre les points matériels qui n'existent pas dans la théorie classique de l'élasticité. Les modèles qui incluent les effets du second gradient ont connu un fort regain d'intérêt dans les années 80 et 90 essentiellement pour leur capacité à corriger certaines incapacités des modèles usuels (locaux) de plasticité et d'endommagement, notamment pour décrire les phénomènes dominés par les effets de microstructure. Dans le contexte de la plasticité, on peut noter en outre les travaux de Aifantis [1], Fleck and Hutchinson [20, 21], Nix and Gao [56], Gao et al. [24, 24], Gurtin [30]. Ces théories ont été largement utilisées dans la littérature pour étudier la rupture [73, 35], la localisation en bandes de déformations [1, 75, 15, 43, 14], la propagation de fissures [65], la microindentation [5, 58, 56] ou encore les effets de tailles des inclusions et des cavités dans les milieux plastiques

[34, 40, 41, 39, 66, 50].

Toutefois, toutes les modélisations mentionnées ci-dessus qui incluent les gradients de déformation sont de nature phénoménologique dans le sens où ces effets microstructuraux sont postulés et non pas obtenus dans un cadre d'homogénéisation. La formulation de modèles non locaux dans le cadre des approches par changement d'échelle a fait l'objet d'importantes recherches depuis une trentaine d'année. On peut distinguer trois classes d'approches conduisant à une formulation non locale de la loi d'élasticité homogénéisée des milieux hétérogènes. La première classe sont les approches statistiques des milieux hétérogènes de Beran et McCoy [7] Diener et al. [16, 17], Drugan et Willis [72]. En outre, Drugan et Willis [72] ont proposé d'étendre l'approche variationnelle d'Hashin-Shtrikman [31, 32, 33] et Willis [67] en introduisant les gradient des moyennes d'ensemble.

D'autres approches sont basées sur la résolution du problème de la cellule élémentaire en généralisant les conditions classiques de déformation homogène au contour pour des conditions de gradient de déformation imposées [26, 22, 12, 13, 36, 37, 74]. Ces approches utilisent une généralisation du Lemme de Hill-Mandel pour obtenir les relations constitutives du modèle du second gradient équivalent. En particulier, Gologanu et al. [26] ont étendu le modèle de Gurson [29] en considérant des conditions de gradient de déformation imposées au bord de la sphère creuse. Cependant, comme déjà mentionné dans Fleck et Hutchinson [21], les résultats sont quelque peu surprenant puisque l'effet dominant des gradients de déformation n'est pas influencé par la fraction volumique de vide ou l'espacement entre les vides. D'autre part, les effets de gradient de déformation persistent même lorsque la fraction volumique des cavités est nulle. Des critiques des approches par conditions aux limites généralisées ont également été formulées par Yuan et al. [74]. Ce dernier suggère que le modèle macroscopique du second gradient obtenu par cette approche conduit à surévaluer les valeurs des coefficients du second gradient.

Une troisième classe de méthodes est basée sur l'utilisation des développements asymptotiques en homogénéisation périodique. Les effets des gradients de déformation macroscopique pouvant être obtenus en conservant les termes d'ordre supérieur du développement en série [23, 11]. Le lien avec les modèles du second gradient de Toupin [61] et Mindlin [44] n'a véritablement été mentionné que plus tard par Smyshlyaev et Cherednichenko [59] dans le cas particulier d'une sollicitation en déformation anti plane.

L'objet de ce travail de thèse est d'établir un cadre d'homogénéisation en élasticité tridimensionnelle pour le calcul des propriétés des milieux à gradients de déformation. L'approche combine les méthodes par développement asymptotique aux ordres supérieurs et les méthodes par transformée de Fourier rapide pour le calcul des propriétés du second gradient. La dernière partie de la thèse propose une première contribution portant sur l'extension au contexte non linéaire. Ce mémoire est constitué de quatre chapitres :

- Le premier chapitre est essentiellement de nature bibliographique. On présente les modélisations continues à gradient de déformation, les approches phénoménologiques dans un premier temps, puis les approches microméca-

niques basées sur les méthodes variationnelles ou les conditions aux limites en gradient de déformation.

- Au second chapitre on développe une approche alternative basée sur les développements asymptotiques aux ordres supérieurs. On rappelle les principaux résultats obtenus par Boutin [11] quant à la formulation des problèmes d’homogénéisation pour la cellule élémentaire périodique et la forme générale de la solution à tous les ordres. Le modèle macroscopique, obtenu par une relation d’équivalence énergétique aux deux échelles, donne une justification des modélisations phénoménologiques de milieux à gradient de déformation. On établit les lois d’homogénéisation pour le calcul des propriétés du milieu continu à gradient et, à titre d’illustration, on détermine les tenseurs d’élasticité du second gradient dans le cas particulier d’un composite stratifié.
- Au chapitre trois, on propose des méthodes numériques basées sur la transformée de Fourier pour la résolution des problèmes d’homogénéisation et le calcul des propriétés du second gradient. Ainsi on étend le schéma en déformation de Moulinec et Suquet [52] pour traiter les problèmes aux ordres supérieurs. On établit également les formes duales (en contrainte) de ces schémas itératifs, mieux adaptés pour traiter le cas des inclusions rigides. Des applications aux composites à fibres sont présentées en deuxième partie de chapitre 3.
- Au chapitre 4, on propose une première contribution visant à étendre l’approche pour traiter le cas des composites non linéaires. Pour des raisons de simplicité des écritures, on restreint notre analyse dans le cas de la conductivité thermique. Les effets non linéaires sont alors étudiés en considérant des lois régies par un potentiel du gradient de la température. On établit les équations des problèmes d’homogénéisation d’ordre supérieur et la forme générale de leur solution. Ensuite, on établit l’expression du potentiel macroscopique du composite non linéaire en incluant les effets du double gradient de la température. Dans la seconde partie de ce chapitre on présente une application au composite stratifié dont les phases sont régies par une loi en puissance.

Chapitre 1

Modélisations continues à gradients de déformation : approches phénoménologiques et micromécaniques

Ce premier chapitre, à caractère bibliographique essentiellement, propose de rappeler les modèles continus à gradient de déformation ainsi que les modélisations visant à intégrer ces effets dans un cadre d'homogénéisation.

Dans une première partie on présente donc les approches phénoménologiques qui ont été proposées dans les années 60 : d'abord le modèle du second gradient de Toupin [61] et Mindlin [44] puis le modèle de triple gradient de Mindlin [45]. On présente enfin la formulation de Green et Rivlin [27] qui généralise ces modèles en tenant compte des gradients de déformation de tous ordres.

Dans la seconde partie du chapitre, on propose de rappeler les principales contributions visant à intégrer les effets du second gradient dans le cadre de l'homogénéisation.

1.1 Les modèles continus du second gradient

1.1.1 Modèle du second gradient de Toupin [61] et Mindlin [44]

1.1.1.1 Loi de comportement

On considère un matériau élastique de volume \mathcal{D} dans un état statique, dont la frontière est notée $\partial\mathcal{D}$. Le vecteur de déplacement en un point quelconque est \underline{U} , et $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ est le vecteur position. Le tenseur des petites déformations \mathbf{E} est défini par :

$$E_{ij} = \text{sym}(\nabla_j U_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.1)$$

On admet que \mathbf{E} est dérivable et on note $\nabla\mathbf{E}$ son gradient dont les composantes sont notées : $\nabla_k E_{ij} = E_{ij,k}$. On constate que le tenseur d'ordre 3, $\nabla\mathbf{E}$, est symétrique par rapport à ses deux premiers indices, il dépend donc de 18 composantes

indépendantes. Dans le cadre de la théorie linéaire du second gradient, on admet que le potentiel d'élasticité est une fonction quadratique de \mathbf{E} et $\nabla \mathbf{E}$:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{0,0} : \mathbf{E} + h \mathbf{E} : \mathbb{C}^{0,1} :: \nabla \mathbf{E} + \frac{h^2}{2} \nabla \mathbf{E} :: \mathbb{C}^{1,1} :: \nabla \mathbf{E} \quad (1.2)$$

où h est la longueur interne, caractéristique de la taille des éléments microstructuraux. Dans l'expression (1.2), les symboles " : " et " :: " représentent le produit doublement et triplement contracté, définis tels que :

$$\begin{aligned} [\mathbb{C}^{0,0} : \mathbf{E}]_{ij} &= C_{ijkl}^{0,0} E_{kl} \\ [\mathbb{C}^{1,1} :: \nabla \mathbf{E}]_{ijk} &= C_{ijklmn}^{1,1} E_{lmn} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dans (1.2), $\mathbb{C}^{0,0}$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 tandis que $\mathbb{C}^{0,1}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$ sont les tenseurs d'élasticité du second gradient d'ordre 5 et 6 respectivement. Le tenseur de déformation étant symétrique, cela conduit, pour les tenseurs d'élasticité, à des relations d'invariance par permutation des indices qui sont données par :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{0,0} &= C_{jikl}^{0,0} = C_{ijlk}^{0,0}, \\ C_{ijklm}^{0,1} &= C_{jiklm}^{0,1} = C_{ijlkm}^{0,1}, \\ C_{ijklmn}^{1,1} &= C_{jiklmn}^{1,1} = C_{ijkmln}^{1,1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

que l'on appelle symétries mineures et auxquelles s'ajoutent les symétries majeures pour les tenseurs $\mathbb{C}^{0,0}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$:

$$C_{ijkl}^{0,0} = C_{klij}^{0,0}, \quad C_{ijklmn}^{1,1} = C_{lmnijk}^{1,1} \quad (1.5)$$

Les lois de comportement sont obtenues à partir des lois d'état associées au potentiel W . On associe aux variables d'état \mathbf{E} et $\nabla \mathbf{E}$ les variables duales Σ^0 et Σ^1 :

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C}^{0,0} : \mathbf{E} + h \mathbb{C}^{0,1} :: \nabla \mathbf{E} \\ \Sigma^1 &= \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{E}} = h \mathbb{C}^{1,0} : \mathbf{E} + h^2 \mathbb{C}^{1,1} :: \nabla \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.6)$$

où Σ^0 est le tenseur des contraintes et Σ^1 est appelée hypercontrainte. Les tenseurs Σ^0 et Σ^1 possèdent les mêmes symétries indicielles que \mathbf{E} et $\nabla \mathbf{E}$, à savoir $\Sigma_{ij}^0 = \Sigma_{ji}^0$ et $\Sigma_{ijk}^1 = \Sigma_{jik}^1$.

1.1.1.2 Représentation matricielle de la loi du second gradient

Comme pour le cas de l'élasticité usuelle, une représentation matricielle des tenseurs d'élasticité s'avère plus pratique pour représenter la loi de comportement du second gradient. On adopte les notations de Voigt modifiées (sur une base de tenseurs d'ordre deux et trois orthonormée) pour représenter le tenseur

des déformations et son gradient. Sous la forme contractée, le tenseur des déformations est représenté par un vecteur de dimension 6 :

$$[\mathbf{E}] \equiv \begin{bmatrix} E_1 = E_{11} \\ E_2 = E_{22} \\ E_3 = E_{33} \\ E_4 = \sqrt{2}E_{23} \\ E_5 = \sqrt{2}E_{13} \\ E_6 = \sqrt{2}E_{12} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Cette représentation est associée à la base $(\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_6)$ définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1, & \mathbf{f}_2 = \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2, & \mathbf{f}_3 = \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \\ \mathbf{f}_4 = \sqrt{2}\underline{e}_2 \otimes_s \underline{e}_3, & \mathbf{f}_5 = \sqrt{2}\underline{e}_1 \otimes_s \underline{e}_3, & \mathbf{f}_6 = \sqrt{2}\underline{e}_1 \otimes_s \underline{e}_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

où $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ sont les vecteurs de la base cartésienne dans laquelle sont représentées les composantes E_{ij} du tenseur des déformations. Dans (1.8), \otimes_s représente le produit symétrisé de deux vecteurs $\underline{u} \otimes_s \underline{v} = (\underline{u} \otimes \underline{v} + \underline{v} \otimes \underline{u})/2$. On pourra vérifier aisément que $\mathbf{f}_i : \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$.

Assez naturellement, on peut étendre cette représentation pour le tenseur gradient des déformations. Rappelons que ce dernier dépend de 18 composantes indépendantes, on peut donc introduire une base constituée de 18 tenseurs d'ordre trois qui permet de représenter $\nabla \mathbf{E}$ par un vecteur de dimension 18. Cette base est notée $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{18})$ et ses éléments sont définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{f}_1 \otimes \underline{e}_1, & \mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_2 \otimes \underline{e}_1, & \mathbf{v}_3 = \mathbf{f}_3 \otimes \underline{e}_1, \\ \mathbf{v}_4 = \mathbf{f}_6 \otimes \underline{e}_2, & \mathbf{v}_5 = \mathbf{f}_5 \otimes \underline{e}_3, & \mathbf{v}_6 = \mathbf{f}_2 \otimes \underline{e}_2, \\ \mathbf{v}_7 = \mathbf{f}_3 \otimes \underline{e}_2, & \mathbf{v}_8 = \mathbf{f}_1 \otimes \underline{e}_2, & \mathbf{v}_9 = \mathbf{f}_4 \otimes \underline{e}_3, \\ \mathbf{v}_{10} = \mathbf{f}_6 \otimes \underline{e}_1, & \mathbf{v}_{11} = \mathbf{f}_3 \otimes \underline{e}_3, & \mathbf{v}_{12} = \mathbf{f}_1 \otimes \underline{e}_3, \\ \mathbf{v}_{13} = \mathbf{f}_2 \otimes \underline{e}_3, & \mathbf{v}_{14} = \mathbf{f}_4 \otimes \underline{e}_2, & \mathbf{v}_{15} = \mathbf{f}_5 \otimes \underline{e}_1, \\ \mathbf{v}_{16} = \mathbf{f}_4 \otimes \underline{e}_1, & \mathbf{v}_{17} = \mathbf{f}_5 \otimes \underline{e}_2, & \mathbf{v}_{18} = \mathbf{f}_6 \otimes \underline{e}_3 \end{cases} \quad (1.9)$$

qui est une base orthonormée pour le produit triplement contracté :

$$\mathbf{v}_i : \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad (1.10)$$

Les composantes de $\nabla \mathbf{E}$ dans la base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{18})$ sont :

$$[\nabla \mathbf{E}] \equiv \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Où Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont des vecteurs colonnes de dimension 5 et Δ_4 est un vecteur colonne de dimension 3 définis par :

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} E_{1,1} = E_{11,1} \\ E_{2,1} = E_{22,1} \\ E_{3,1} = E_{33,1} \\ E_{6,2} = \sqrt{2}E_{12,2} \\ E_{5,3} = \sqrt{2}E_{13,3} \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} E_{2,2} = E_{22,2} \\ E_{3,2} = E_{33,2} \\ E_{1,2} = E_{11,2} \\ E_{4,3} = \sqrt{2}E_{23,3} \\ E_{6,1} = \sqrt{2}E_{12,1} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

et :

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} E_{3,3} = E_{33,3} \\ E_{1,3} = E_{11,3} \\ E_{2,3} = E_{22,3} \\ E_{4,2} = \sqrt{2}E_{23,2} \\ E_{5,1} = \sqrt{2}E_{13,1} \end{bmatrix}, \Delta_4 = \begin{bmatrix} E_{4,1} = \sqrt{2}E_{23,1} \\ E_{5,2} = \sqrt{2}E_{13,2} \\ E_{6,3} = \sqrt{2}E_{12,3} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Le choix de la représentation est le suivant :

- le vecteur colonne Δ_1 regroupe les composantes $E_{ij,k}$ du gradient de la déformation qui possèdent un nombre impair d'indice "1" et un nombre pair d'indices "2" ou "3",
- le vecteur colonne Δ_2 regroupe les composantes qui possèdent un nombre impair d'indice "2" et un nombre pair d'indices "1" ou "3",
- le vecteur colonne Δ_3 regroupe les composantes qui possèdent un nombre impair d'indice "3" et un nombre pair d'indices "1" ou "2",
- le vecteur colonne Δ_4 regroupe les composantes pour lesquelles les indices "1", "2" et "3" apparaissent une fois.

Ce choix de représentation est adapté notamment lorsque l'on étudie les groupes de symétrie des tenseurs d'élasticité du second gradient (voir par exemple [49]). Avec ces notations, la loi élastique du second gradient peut être réécrite sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} [\Sigma^0] &= [\mathbb{C}^{0,0}] [\mathbf{E}] + [\mathbb{C}^{0,1}] [\nabla \mathbf{E}] \\ [\Sigma^1] &= [\mathbb{C}^{1,0}] [\mathbf{E}] + [\mathbb{C}^{1,1}] [\nabla \mathbf{E}] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le tenseur des contraintes Σ^0 et des hypercontraintes Σ^1 sont alors représentés par des vecteurs colonnes de dimension 6 et 18. Les tenseurs élastiques $\mathbb{C}^{0,0}$, $\mathbb{C}^{0,1}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$ sont représentés par des matrices de dimensions 6×6 , 6×18 et 18×18 respectivement.

Considérons le cas particulier d'une problème bidimensionnel (en état plan de déformation) pour lesquels les composantes non nulles du tenseur de déformation et de son gradient sont :

$$[\mathbf{E}] \equiv \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_6 \end{bmatrix}, \quad [\nabla \mathbf{E}] \equiv \begin{bmatrix} E_{1,1} \\ E_{2,1} \\ E_{6,2} \\ E_{2,2} \\ E_{1,2} \\ E_{6,1} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Toujours pour le cas bidimensionnel, les matrices d'élasticité sont alors définies par :

$$\begin{aligned}
[\mathbb{C}^{0,0}] &= \begin{bmatrix} C_{11}^{0,0} & C_{12}^{0,0} & C_{16}^{0,0} \\ & C_{22}^{0,0} & C_{26}^{0,0} \\ \text{sym} & & C_{66}^{0,0} \end{bmatrix} \\
[\mathbb{C}^{0,1}] &= \begin{bmatrix} C_{111}^{0,1} & C_{121}^{0,1} & C_{161}^{0,1} & C_{122}^{0,1} & C_{112}^{0,1} & C_{162}^{0,1} \\ C_{211}^{0,1} & C_{221}^{0,1} & C_{261}^{0,1} & C_{222}^{0,1} & C_{212}^{0,1} & C_{262}^{0,1} \\ C_{611}^{0,1} & C_{661}^{0,1} & C_{661}^{0,1} & C_{622}^{0,1} & C_{612}^{0,1} & C_{662}^{0,1} \end{bmatrix} \\
[\mathbb{C}^{1,1}] &= \begin{bmatrix} C_{1111}^{1,1} & C_{1121}^{1,1} & C_{1161}^{1,1} & C_{1122}^{1,1} & C_{1112}^{1,1} & C_{1162}^{1,1} \\ & C_{2121}^{1,1} & C_{2161}^{1,1} & C_{2122}^{1,1} & C_{2112}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} \\ & & C_{6161}^{1,1} & C_{6122}^{1,1} & C_{6112}^{1,1} & C_{6162}^{1,1} \\ & & & C_{2222}^{1,1} & C_{2212}^{1,1} & C_{2262}^{1,1} \\ & & & & C_{1212}^{1,1} & C_{1262}^{1,1} \\ \text{sym} & & & & & C_{6262}^{1,1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Dans la relation ci-dessus, les coefficients $C_{ij}^{0,0}$, $C_{ijk}^{0,1}$ et $C_{ijkl}^{1,1}$ sont calculés à partir des composantes $C_{ijpq}^{0,0}$, $C_{ijpqr}^{0,1}$ et $C_{ijkpqr}^{1,1}$ selon les conventions suivantes :

$$C_{IP}^{0,0} = \alpha C_{ijpq}^{0,0}, \quad C_{IPr}^{0,1} = \alpha C_{ijpqr}^{0,1}, \quad C_{IkPr}^{1,1} = \alpha C_{ijkpqr}^{1,1} \tag{1.17}$$

où les indices I, P et le coefficient α sont définis par :

$$\begin{aligned}
I &= \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 9 - i - j & \text{si } i \neq j \end{cases} & P &= \begin{cases} p & \text{si } p = q \\ 9 - p - q & \text{si } p \neq q \end{cases} \\
\alpha &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } p = q \\ 2 & \text{si } i \neq j \text{ et } p \neq q \\ \sqrt{2} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

1.1.1.3 Equilibre interne et conditions aux limites

Le modèle du second gradient doit être complété par une équation d'équilibre interne en tout point du volume \mathcal{D} et des conditions de bord sur $\partial\mathcal{D}$. Ces relations sont obtenues à partir du principe des puissances virtuelles étendu au cas de milieux du second gradient. Avec la définition des variables duales dans (1.6), la densité de l'énergie potentielle élastique peut se réécrire sous la forme :

$$W = \boldsymbol{\Sigma}^0 : \mathbf{E} + \boldsymbol{\Sigma}^1 : \cdot \nabla \mathbf{E} \tag{1.19}$$

La variation de l'énergie potentielle élastique totale avec un déplacement arbitraire δU_i s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \delta W dV &= \int_{\mathcal{D}} (\Sigma_{ij}^0 \delta E_{ij} + \Sigma_{ijk}^1 \delta E_{ijk}) dV \\
&= \int_{\mathcal{D}} \left[\Sigma_{ij}^0 \nabla_j \delta U_i + \Sigma_{ijk}^1 \nabla_k (\nabla_j \delta U_i) \right] dV
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Afin de faire apparaître les intégrales sur le bord $\partial\mathcal{D}$, on réécrit (1.20) sous la forme :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} \delta W dV &= \int_{\mathcal{D}} \nabla_j \{ [\Sigma_{ij}^0 - \Sigma_{ijk,k}^1] \delta U_i \} dV \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \nabla_k [\Sigma_{ijk}^1 \nabla_j \delta U_i] dV \\ &- \int_{\mathcal{D}} [\Sigma_{ij,j}^0 - \Sigma_{ijk,jk}^1] \delta U_i dV\end{aligned}\tag{1.21}$$

Par application du théorème de divergence, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} \delta W dV &= \int_{\partial\mathcal{D}} [\Sigma_{ij}^0 - \Sigma_{ijk,k}^1] N_j \delta U_i dS \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} \Sigma_{ijk}^1 N_k \nabla_j \delta U_i dS \\ &- \int_{\mathcal{D}} [\Sigma_{ij,j}^0 - \Sigma_{ijk,jk}^1] \delta U_i dV\end{aligned}\tag{1.22}$$

où \underline{N} est le vecteur normal unitaire pris sur le bord $\partial\mathcal{D}$.

Dans la seconde intégrale dans l'expression (1.22), le gradient du déplacement $\delta\underline{U}$ n'est pas indépendant de $\delta\underline{U}$ sur la surface $\partial\mathcal{D}$. Effectivement lorsque $\delta\underline{U}$ est connu sur $\partial\mathcal{D}$ sa dérivée surfacique est également connue et seule la dérivée normale est véritablement indépendante de $\delta\underline{U}$. Afin d'exprimer les conditions de bord pour le modèle du second gradient, il convient de décomposer le gradient du déplacement en introduisant les opérateurs surfaciques :

$$\nabla_j \delta U_i = D_j \delta U_i + N_j D \delta U_i\tag{1.23}$$

avec les notations :

$$\begin{aligned}D_j &= \nabla_j - N_j D \\ D &= \nabla_i N_i\end{aligned}\tag{1.24}$$

où D_i est la dérivée tangentielle et D et la dérivée normale sur le bord $\partial\mathcal{D}$. A l'aide de ces notations, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{D}} \Sigma_{ijk}^1 N_k \nabla_j \delta U_i dS &= \int_{\partial\mathcal{D}} \Sigma_{ijk}^1 N_j N_k D \delta U_i dS \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} \Sigma_{ijk}^1 N_k D_j \delta U_i dS\end{aligned}\tag{1.25}$$

Il est possible, dans (1.25), d'exprimer la seconde intégrale à droite de l'égalité à partir du déplacement U_i au lieu de sa dérivée surfacique. Pour cela, on utilise l'intégration par partie :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{D}} \Sigma_{ijk}^1 N_k D_j \delta U_i dS &= \int_{\partial\mathcal{D}} D_j (\Sigma_{ijk}^1 N_k \delta U_i) dS \\ &- \int_{\partial\mathcal{D}} D_j (\Sigma_{ijk}^1 N_k) \delta U_i dS\end{aligned}\tag{1.26}$$

On admet que la frontière est à courbure continue, c'est à dire sans arêtes ni sommets. Par application du théorème de la divergence sur un surface fermée, on obtient :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} D_j(\Sigma_{ijk}^1 N_k \delta U_i) dS = \int_{\partial\mathcal{D}} (D_p N_p) \Sigma_{ijk}^1 N_j N_k \delta U_i dS \quad (1.27)$$

où $D_p N_p$ représente le double de la courbure moyenne de surface.

Finalement, en regroupant les égalités (1.22), (1.25), (1.26) et (1.27), on obtient la puissance virtuelle des efforts intérieurs sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \delta W dV &= \int_{\partial\mathcal{D}} ([\Sigma_{ij}^0 - \Sigma_{ijk,k}^1] N_j + L_j(\Sigma_{ijk}^1 N_k)) \delta U_i dS \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} \Sigma_{ijk}^1 N_j N_k D \delta U_i dS \\ &- \int_{\mathcal{D}} [\Sigma_{ij,j}^0 - \Sigma_{ijk,jk}^1] \delta U_i dV \end{aligned} \quad (1.28)$$

où l'on a posé : $L_j = N_j(D_k N_k) - D_j$.

La variation du travail des forces extérieures s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_{\partial\mathcal{D}} T_i^0 \delta U_i dS + \int_{\partial\mathcal{D}} T_i^1 D \delta U_i dS \\ &+ \int_{\mathcal{D}} F_i \delta U_i dV \end{aligned} \quad (1.29)$$

dans laquelle \underline{F} est la force de volume, \underline{T}^0 et \underline{T}^1 sont les vecteurs contraintes généralisés pour le milieu du second gradient. Le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\delta \int_{\mathcal{D}} W dV = \delta W_{ext} \quad (1.30)$$

En tenant compte de (1.28) et (1.29), on obtient, d'une part, l'équation d'équilibre interne :

$$\Sigma_{ij,j}^0 - \Sigma_{ijk,jk}^1 + F_i = 0 \quad (1.31)$$

et d'autre part les conditions sur le bord $\partial\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} T_i^0 = [\Sigma_{ij}^0 - \Sigma_{ijk,k}^1] N_j + L_j(\Sigma_{ijk}^1 N_k) \\ T_i^1 = \Sigma_{ijk}^1 N_j N_k \end{cases} \quad (1.32)$$

Le modèle de second gradient se complète donc de 3 équations d'équilibre (1.31) et des 6 conditions aux limites (1.32).

1.1.2 Théories d'ordre supérieur

Il est possible de formuler des théories de milieux à gradient en incorporant les dérivées d'ordre supérieur du gradient de la déformation. Ainsi la théorie introduite par Mindlin [45] inclut les effets du second gradient de la déformation (théorie du triple gradient du déplacement). Cette théorie est présentée en section (1.1.2.1). On présente ensuite la théorie plus générale de Green et Rivlin qui inclut les dérivées du champ de déformation à tous les ordres.

1.1.2.1 Modèle du triple gradient de Mindlin [45]

Le modèle de triple gradient de Mindlin est formulé avec un potentiel fonction de la déformation \mathbf{E} , du gradient de la déformation $\nabla \mathbf{E}$ et du double gradient de la déformation $\nabla^2 \mathbf{E}$ (dont les composantes sont $E_{ij,kl}$) :

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{0,0} : \mathbf{E} + h \mathbf{E} : \mathbb{C}^{0,1} :: \nabla \mathbf{E} \\ & + \frac{h^2}{2} \nabla \mathbf{E} :: \mathbb{C}^{1,1} :: \nabla \mathbf{E} + h^2 \mathbf{E} : \mathbb{C}^{0,2} :: \nabla^2 \mathbf{E} \\ & + h^3 \nabla \mathbf{E} :: \mathbb{C}^{1,2} :: \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{h^4}{2} \nabla^2 \mathbf{E} :: \mathbb{C}^{2,2} :: \nabla^2 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.33)$$

$\mathbb{C}^{0,2}$, $\mathbb{C}^{1,2}$ et $\mathbb{C}^{2,2}$ sont des tenseurs d'élasticité d'ordre 6, 7 et 8 respectivement. Ils possèdent les propriétés de symétrie :

$$\begin{aligned} C_{(ij)(kl)(mn)}^{0,2} &= C_{(ij)(mn)(kl)}^{0,2}; \\ C_{(ij)k(pq)(rt)}^{1,2} &= C_{(ij)k(rt)(pq)}^{1,2}; \\ C_{(ij)(kl)(pq)(rt)}^{2,2} &= C_{(pq)(rt)(ij)(kl)}^{2,2} = C_{(kl)(ij)(pq)(rt)}^{2,2} = C_{(ij)(kl)(rt)(pq)}^{2,2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

où : (ij) désigne l'invariance par permutation des indices i et j . A partir des lois d'état associées à W , on définit les variables duales :

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C}^{0,0} : \mathbf{E} + h \mathbb{C}^{0,1} :: \nabla \mathbf{E} + h^2 \mathbb{C}^{0,2} :: \nabla^2 \mathbf{E}, \\ \Sigma^1 &= \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{E}} = h \mathbb{C}^{1,0} : \mathbf{E} + h^2 \mathbb{C}^{1,1} :: \nabla \mathbf{E} + h^3 \mathbb{C}^{1,2} :: \nabla^2 \mathbf{E}, \\ \Sigma^2 &= \frac{\partial W}{\partial \nabla^2 \mathbf{E}} = h^2 \mathbb{C}^{2,0} : \mathbf{E} + h^3 \mathbb{C}^{2,1} :: \nabla \mathbf{E} + h^4 \mathbb{C}^{2,2} :: \nabla^2 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.35)$$

où : Σ^0 , Σ^1 et Σ^2 sont des tenseurs d'ordre 2, 3 et 4 respectivement, ayant les mêmes symétries que \mathbf{E} , $\nabla \mathbf{E}$ et $\nabla^2 \mathbf{E}$. A partir du principe des puissances virtuelles (voir annexe 4.6) on montre que l'équation d'équilibre interne s'écrit :

$$\Sigma_{ij,j}^0 - \Sigma_{ijk,jk}^1 + \Sigma_{ijkl,jkl}^2 + F_i = 0 \quad (1.36)$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} T_i^0 &= (\Sigma_{ij}^0 - \Sigma_{ijk,k}^1 + \Sigma_{ijkl,kl}^2) N_j \\ &+ L_j [(\Sigma_{ijk}^1 - \Sigma_{ijkl,l}^2) N_k + L_k (\Sigma_{ijkl}^2 N_l) - (D_j N_j) (\Sigma_{ijkl}^2 N_k N_l)] \\ T_i^1 &= (\Sigma_{ijk}^1 - \Sigma_{ijkl,l}^2) N_k N_j + L_k (\Sigma_{ijkl}^2 N_l) N_j + L_j (\Sigma_{ijkl}^2 N_k N_l) \\ T_i^2 &= \Sigma_{ijkl}^2 N_j N_k N_l \end{aligned} \quad (1.37)$$

Le modèle de triple gradient se compose de 3 équations scalaires d'équilibre (1.36) et 9 conditions aux limites (1.37).

1.1.2.2 Modèle de Green et Rivlin [28]

Le modèle de Green et Rivlin généralise les modèles de Mindlin [44, 45] en introduisant toutes les dérivées du tenseur des déformations. Le potentiel élastique est choisi de forme :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \sum_{m=0}^{m=+\infty} h^{n+m} \nabla^n \mathbf{E} \odot_{n+2} \mathbb{C}^{n,m} \odot_{m+2} \nabla^m \mathbf{E} \quad (1.38)$$

qui est quadratique par rapport à \mathbf{E} et à toutes ses dérivées $\nabla^n \mathbf{E}$. Par \odot_n on définit le produit n fois contracté de deux tenseurs d'ordre $\geq n$ et tel que $\mathbf{a} \odot_n \mathbf{b}$ est obtenu par contraction des n derniers indices de \mathbf{a} et des n premiers indices de \mathbf{b} . Les tenseurs élastiques $\mathbb{C}^{n,m}$ sont d'ordre $n+m+4$. Le potentiel ainsi définit, et introduit une infinité de variables d'état que \mathbf{E} , $\nabla \mathbf{E}$, $\nabla^2 \mathbf{E}$, etc. On définit alors, à partir des lois d'état, une infinité de variables duales :

$$\Sigma^n = \frac{\partial W}{\partial \nabla^n \mathbf{E}} = \sum_{m=0}^{m=+\infty} h^{n+m} \mathbb{C}^{n,m} \odot_{m+2} \nabla^m \mathbf{E} \quad (1.39)$$

où Σ^0 est la contrainte et Σ^1 , Σ^2 , etc. sont les hypercontraintes. Ces variables sont liées par la relation d'équilibre :

$$\Sigma_{ij,j}^0 - \Sigma_{ijk,jk}^1 + \Sigma_{ijkl,jkl}^2 - \dots + F_i = 0 \quad (1.40)$$

1.2 Modélisations micromécaniques des effets de gradients de déformation

On présente ici deux approches conduisant à une formulation non locale du comportement macroscopique des milieux composites. La première décrite dans [72], introduit les fluctuations des moyennes statistiques dans le cadre des approches variationnelles en homogénéisation linéaire de Hashin et Shtrikman [31, 32] et généralisées par Willis [67, 68, 69]. La deuxième classe d'approches consiste à remplacer les conditions usuelles de déformation homogène au contour du VER par de nouvelles conditions introduisant les gradients de la déformation macroscopique.

Les deux approches sont présentées et discutées en section 1.2.1 et 1.2.2.

1.2.1 L'approche variationnelle de Drugan et Willis [72]

1.2.1.1 Formulation variationnelle de Hashin-Shtrikman

Considérons un domaine infini V d'un milieu composite d'élasticité $\mathbb{C}(\underline{x})$, ici la dépendance de l'élasticité avec le vecteur position \underline{x} caractérise l'hétérogénéité des propriétés élastiques locales. Les équations décrivant la déformation du milieu continu sont celles de l'élasticité :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \operatorname{sym}(\nabla \underline{u}(\underline{x})) \end{cases} \quad (1.41)$$

où $\underline{u}(\underline{x})$, $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$ et $\underline{\sigma}(\underline{x})$ sont les champs de déplacement, de déformation et de contrainte microscopiques. En introduisant la polarisation $\underline{\tau}(\underline{x})$:

$$\underline{\tau}(\underline{x}) = (\mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}_0) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (1.42)$$

Le problème d'élasticité (1.41) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\sigma}(\underline{x})) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}^0 : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) + \underline{\tau}(\underline{x}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \operatorname{sym}(\nabla \underline{u}(\underline{x})) \end{cases} \quad (1.43)$$

Définissons par $\underline{u}_0(\underline{x})$, $\underline{\varepsilon}_0(\underline{x})$ et $\underline{\sigma}_0(\underline{x})$ la solution élastique pour le milieu homogène équivalent de rigidité \mathbb{C}^0 soumis à la même force de volume $\underline{f}(\underline{x})$. Ces champs vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\sigma}_0(\underline{x})) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \\ \underline{\sigma}_0(\underline{x}) = \mathbb{C}^0 : \underline{\varepsilon}_0(\underline{x}) \\ \underline{\varepsilon}_0(\underline{x}) = \operatorname{sym}(\nabla \underline{u}_0(\underline{x})) \end{cases} \quad (1.44)$$

En soustrayant les équations (1.44) à celles données dans (1.43) on obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\sigma}(\underline{x}) - \underline{\sigma}_0(\underline{x})) = 0 \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) - \underline{\sigma}_0(\underline{x}) = \mathbb{C}^0 : (\underline{\varepsilon}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}_0(\underline{x})) + \underline{\tau}(\underline{x}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}_0(\underline{x}) = \operatorname{sym}(\nabla(\underline{u} - \underline{u}_0(\underline{x}))) \end{cases} \quad (1.45)$$

Et qui conduit à l'équation de Lippmann-Schwinger :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}_0(\underline{x}) - \underline{\Gamma}^0(\underline{x}) * \underline{\tau}(\underline{x}) \quad (1.46)$$

où $\underline{\Gamma}_0(\underline{x})$ est le tenseur de Green associé au milieu de référence de rigidité \mathbb{C}^0 et "*" représente le produit de convolution :

$$\underline{\Gamma}_0(\underline{x}) * \underline{\tau}(\underline{x}) = \int_V \underline{\Gamma}^0(\underline{x} - \underline{x}') \underline{\tau}(\underline{x}') d\underline{x}' \quad (1.47)$$

En remplaçant la déformation $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$ dans (1.46) en fonction de la polarisation $\underline{\tau}(\underline{x})$, il vient :

$$(\mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}^0)^{-1} : \underline{\tau}(\underline{x}) + \underline{\Gamma}^0(\underline{x}) * \underline{\tau}(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}_0(\underline{x}) \quad (1.48)$$

Qui peut être obtenu en minimisant la fonctionnelle $\mathcal{H}(\underline{\tau}(\underline{x}))$ (cf. Willis [67]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\underline{\tau}(\underline{x})) = \frac{1}{V} \int_V \left[\underline{\tau}(\underline{x}) : (\mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}^0)^{-1} : \underline{\tau}(\underline{x}) + \underline{\tau}(\underline{x}) : \underline{\Gamma}^0(\underline{x}) * \underline{\tau}(\underline{x}) \right. \\ \left. - 2\underline{\tau}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}_0(\underline{x}) \right] dV \end{aligned} \quad (1.49)$$

La valeur de $\mathcal{H}(\underline{\tau}(\underline{x}))$ au point de stationarité est :

$$\mathcal{H}(\underline{\tau}(\underline{x})) = -\frac{1}{V} \int_V \underline{\tau}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}_0(\underline{x}) dV \quad (1.50)$$

1.2.1.2 Formulation non locale de Drugan et Willis [72]

En suivant la démarche de Willis [67, 69], Drugan et Willis [72] ont proposé une approche formulée au moyen de moyennes d'ensemble pour les propriétés macroscopiques du composite qui inclue des fluctuations statistiques des grandeurs moyennées. L'approche statistique de Willis [67] consiste à introduire la fonctionnelle $\mathcal{W}(\boldsymbol{\tau}(\underline{x}))$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\boldsymbol{\tau}(\underline{x})) = & \langle \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) : (\mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}^0)^{-1} : \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{x}) * \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \\ & - 2\boldsymbol{\tau}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (1.51)$$

où $\langle a(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$ est la moyenne d'ensemble de la quantité $a(\underline{x}, \alpha)$ qui vaut :

$$\langle a(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} a(\underline{x}) p(\alpha) d\alpha \quad (1.52)$$

et calculée sur l'ensemble des réalisations α d'un ensemble \mathcal{A} . Dans la relation du dessus, $p(\alpha)$ est la densité de probabilité de α dans \mathcal{A} .

En prenant la moyenne d'ensemble de l'équation (1.46) il est possible de relier $\boldsymbol{\varepsilon}_0(\underline{x})$ à $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0(\underline{x}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{x}) * \langle \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \quad (1.53)$$

En utilisant la relation ci-dessus dans (1.51), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\boldsymbol{\tau}(\underline{x})) = & \langle \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) : (\mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}^0)^{-1} : \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{x}) * \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \\ & - 2 \langle \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} : [\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{x}) * \langle \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}] \end{aligned} \quad (1.54)$$

La fonctionnelle $\mathcal{W}(\boldsymbol{\tau}(\underline{x}))$ est ensuite minimisée de manière à relier la moyenne statistique du champ de polarisation $\boldsymbol{\tau}(\underline{x})$ à $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$. On ne détaille pas davantage ici les calculs liés à la minimisation et au calcul de $\langle \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$ qui utilisent la transformée de Fourier et que l'on peut trouver dans [72]. On se concentre essentiellement sur le résultat final que l'on peut écrire sous la forme :

$$\langle \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} = \mathbb{T}(\underline{x}) * \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \quad (1.55)$$

Où l'opérateur $\mathbb{T}(\underline{x})$ a été évalué dans [72] dans l'espace de Fourier et pour un composite biphasé. La moyenne d'ensemble de la contrainte est ensuite obtenue à partir de la relation :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} = \mathbb{C}^0 : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} + \mathbb{T}(\underline{x}) * \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \quad (1.56)$$

qui est une loi d'élasticité non locale par la présence du produit de convolution entre $\mathbb{T}(\underline{x})$ et $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$. Lorsque les moyennes statistiques sont indépendantes de \underline{x} , la relation ci dessus devient :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} = [\mathbb{C}^0 + \langle \mathbb{T}(\underline{x}) \rangle_V] : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \quad (1.57)$$

On retrouve ainsi les résultats classiques de Willis [67]. Lorsque les moyennes statistiques ne sont plus indépendantes de \underline{x} , Drugan et Willis proposent d'utiliser un développement en série de Taylor pour $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}') \rangle_{\mathcal{A}} = & \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} + \nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \cdot (\underline{x} - \underline{x}') \\ & + \frac{1}{2} \nabla^2 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} : (\underline{x} - \underline{x}') \otimes (\underline{x} - \underline{x}') + \dots \end{aligned} \quad (1.58)$$

qui permet de calculer explicitement le produit de convolution de $\mathbb{T}(\underline{x})$ par $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$. Ainsi la loi élastique prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} = & [\mathbb{C}^0 + \mathbb{T}^0] : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} + \mathbb{T}^1 :: \nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \\ & + \mathbb{T}^2 :: \nabla^2 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} + \dots \end{aligned} \quad (1.59)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^0 &= \frac{1}{V} \int_V \mathbb{T}(\underline{x}') dx', \\ \mathbb{T}^1 &= \frac{1}{V} \int_V \mathbb{T}(\underline{x}') \otimes (\underline{x} - \underline{x}') dx', \\ \mathbb{T}^2 &= \frac{1}{2V} \int_V \mathbb{T}(\underline{x}') \otimes (\underline{x} - \underline{x}') \otimes (\underline{x} - \underline{x}') dx' \end{aligned} \quad (1.60)$$

1.2.1.3 Énergie élastique macroscopique

L'énergie élastique du système macroscopique est obtenue par intégration sur le volume élémentaire représentatif du milieu hétérogène :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} dx \quad (1.61)$$

Soit encore, en remplaçant $\langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$ par l'expression (1.59), on obtient :

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} \int_V \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} : \left\{ [\mathbb{C}^0 + \mathbb{T}^0] : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \right. \\ \left. + \mathbb{T}^1 :: \nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} + \mathbb{T}^2 :: \nabla^2 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \right\} dx \end{aligned} \quad (1.62)$$

Le terme proportionnel à $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$ et $\nabla^2 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$ est transformé en une intégrale quadratique en $\nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$ à l'aide de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_V \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} : \mathbb{T}^2 :: \nabla^2 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} dx = \\ \int_V \nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} : \tilde{\mathbb{T}}^2 :: \nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} dx \end{aligned} \quad (1.63)$$

où l'on a posé :

$$\tilde{T}_{ijkpqr}^2 = \frac{1}{2} (T_{ijpqrk}^2 + T_{pqijrk}^2) \quad (1.64)$$

Les raisons pour lesquelles l'intégrale de surface est nulle dans l'intégration par parties dans (1.63) ne sont pas fournies dans [72].

Ceci conduit finalement à une expression quadratique de l'énergie élastique W par rapport aux variables $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$ et $\nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} : [\mathbb{C}^0 + \mathbb{T}^0] : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \right. \\ \left. + \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} : \mathbb{T}^1 :: \nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} + \nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} : \tilde{\mathbb{T}}^2 :: \nabla \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\mathcal{A}} \right\} dx \end{aligned} \quad (1.65)$$

que l'on peut interpréter comme le potentiel d'élasticité d'un milieu du second gradient.

Une difficulté importante de l'approche réside dans le calcul des tenseurs \mathbb{T}^n pour $n = 0, 1, 2$ pour lesquels des expressions analytiques ne peuvent être obtenues que dans des cas particuliers de formes et de distribution des hétérogénéités. Dans [72], les auteurs ont obtenu des expressions dans le cas particulier d'une distribution isotrope d'inclusions de forme sphérique et pour des constituants isotropes. Ces résultats ont par la suite été complétés en incluant les dérivées de la déformation à l'ordre quatre [70], l'anisotropie élastique des phases [71] ou encore les effets de forme des hétérogénéités [47]. Ces résultats sont toujours obtenus au prix d'hypothèses simplificatrices portant sur la morphologie de la microstructure et la géométrie des hétérogénéités. Toutefois, ce type d'approche présente l'avantage de fournir des expressions analytiques pour les propriétés du second gradient au regard des approches basées sur l'utilisation de conditions au bord non homogène que l'on se propose de détailler dans la section qui suit.

1.2.2 Homogénéisation avec conditions non homogènes au contour

1.2.2.1 Description de l'approche

Une approche alternative pour formuler les modèles du second gradient dans un cadre d'homogénéisation consiste à remplacer la condition usuelle $\underline{u} = \mathbf{E}.\underline{x}$ au contour du volume élémentaire représentatif (VER) par de nouvelles conditions quadratiques en " \underline{x} " en faisant explicitement intervenir le gradient de la déformation macroscopique. Cette idée est généralement attribuée à Besdo [8, 9], bien que ces travaux ne présentent pas de véritable lien avec l'homogénéisation. C'est dans les travaux de thèse de Gologanu [25] (voir également [26]) que ces nouvelles conditions aux limites ont par exemple été utilisées en vue de construire des modèles régularisés pour les milieux poreux ductiles. Elles ont par la suite été appliquées par divers auteurs dans le contexte de l'homogénéisation linéaire et non linéaire [22, 12, 36, 74] (voir également l'introduction pour d'autres citations sur ces approches). Dans cette section on se restreint au cas de l'élasticité linéaire (voir [36] pour l'extension aux milieux hétérogènes non linéaires).

On considère un volume V d'un milieu hétérogène dont le comportement des phases est régi par les équations de l'élasticité linéaire. Au bord de ce volume, on applique les conditions en déplacement :

$$u_i = E_{ij}x_j + \frac{1}{2}D_{ijk}x_jx_k \quad (1.66)$$

Où le centre du repère est choisi tel que :

$$\frac{1}{V} \int_V \underline{x} dV = 0 \quad (1.67)$$

Le tenseur d'ordre 3, \mathbf{D} , représente le double gradient du déplacement macroscopique, $\mathbf{D} = \nabla^2 U$. Ces composantes sont $D_{ijk} = U_{i,jk}$. Le double gradient du déplacement est invariant par permutation de ces deux derniers indices, $D_{ijk} = D_{ikj}$. Le tenseur \mathbf{D} possède donc, comme le gradient de la déformation macroscopique, 18 composantes indépendantes. Ces deux tenseurs sont par ailleurs liés par la

relation :

$$E_{ij,k} = \frac{1}{2}(D_{ikj} + D_{jki}) \quad (1.68)$$

Ou encore par inversion de cette relation :

$$D_{ijk} = E_{ij,k} + E_{ik,j} - E_{jk,i} \quad (1.69)$$

On peut donc réécrire la condition de bord (1.66) en utilisant la déformation macroscopique et son gradient :

$$u_i = E_{ij}x_j + \frac{1}{2}[2E_{ij,k} - E_{jk,i}]x_jx_k \quad (1.70)$$

En invoquant le principe de superposition en élasticité, on peut étudier successivement les problèmes correspondant à une déformation macroscopique et un gradient de déformation imposés au contour du VER. La solution des problèmes élémentaires conduit donc à l'expression suivante pour la déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{A}^0(\underline{x}) : \mathbf{E} + h\mathbb{A}^1(\underline{x}) : \nabla \mathbf{E} \quad (1.71)$$

Dans la relation ci-dessus, $\mathbb{A}^0(\underline{x})$ et $\mathbb{A}^1(\underline{x})$ sont des tenseurs de localisation d'ordre 4 et 5 respectivement. On a également introduit une longueur caractéristique h de la microstructure (correspondant à la taille de la cellule élémentaire par exemple) si bien que $\mathbb{A}^0(\underline{x})$ et $\mathbb{A}^1(\underline{x})$ sont sans dimension.

L'énergie élastique macroscopique est obtenue par la relation de moyenne :

$$W = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_V = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_V \quad (1.72)$$

En injectant dans cette relation l'expression (1.71) on obtient exactement l'expression du potentiel d'élasticité du modèle de Mindlin (cf. equation (1.2)) pour :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{0,0} &= \langle C_{pqrs}(\underline{x}) A_{pqij}^0(\underline{x}) A_{rskl}^0(\underline{x}) \rangle_V \\ C_{ijklm}^{0,1} &= \langle C_{pqrs}(\underline{x}) A_{pqij}^0(\underline{x}) A_{rsklm}^1(\underline{x}) \rangle_V \\ C_{ijklmn}^{1,1} &= \langle C_{pqrs}(\underline{x}) A_{pqijk}^1(\underline{x}) A_{rslmn}^1(\underline{x}) \rangle_V \end{aligned} \quad (1.73)$$

Les tenseurs de localisation peuvent être obtenus en utilisant des outils classiques tel que les éléments finis. Un exemple est proposé à la fin de ce chapitre.

1.2.2.2 Généralisation du Lemme de Hill-Mandel

Il est possible de généraliser le Lemme de Hill-Mandel lorsque le VER est soumis aux conditions aux limites (1.66) ou (1.70). Cela permet en outre de formuler les relations de moyennes donnant la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}^0$ et l'hypercontrainte $\boldsymbol{\Sigma}^1$ telles que définies dans les relation (1.6).

Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ étant à divergence nulle, l'expression de l'énergie élastique (1.72) peut encore s'écrire :

$$W = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma_{ij}(\underline{x}) u_i(\underline{x}) n_j dS \quad (1.74)$$

En remplaçant le déplacement $\underline{u}(\underline{x})$ par (1.70) il vient :

$$W = \frac{1}{V} \left[\int_{\partial V} \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j x_k dS \right] E_{ik} + \frac{1}{2V} \left[\int_{\partial V} \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j x_p x_q dS \right] D_{ipq} \quad (1.75)$$

En utilisant à nouveau le théorème de la divergence et la condition $\sigma_{ij,j}(\underline{x}) = 0$ on observe que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j x_k dS &= \langle \sigma_{ik}(\underline{x}) \rangle_V \\ \frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j x_p x_q dS &= \langle \sigma_{ip}(\underline{x}) x_q + \sigma_{iq}(\underline{x}) x_p \rangle_V \end{aligned} \quad (1.76)$$

On obtient donc pour l'énergie élastique macroscopique :

$$W = \langle \sigma_{ij} \rangle_V E_{ij} + \langle \sigma_{iq}(\underline{x}) x_p \rangle_V D_{ipq} \quad (1.77)$$

En exprimant D_{ijk} en fonction des composantes $E_{ij,k}$ à partir de l'équation (1.69) on obtient :

$$W = \langle \sigma_{ij} \rangle_V E_{ij} + \langle \sigma_{ij}(\underline{x}) x_k \rangle_V E_{ij,k} \quad (1.78)$$

Ce qui conduit aux relations de moyennes suivantes pour la contrainte macroscopique et l'hypercontrainte :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^0 &= \langle \sigma_{ij} \rangle_V \\ \Sigma_{ijk}^1 &= \langle \sigma_{ij}(\underline{x}) x_k \rangle_V \end{aligned} \quad (1.79)$$

Dans la première relation ci-dessus, on retrouve la définition classique pour la contrainte macroscopique.

1.2.2.3 Analyse critique de l'approche

Cette approche est séduisante car elle est simple à mettre en oeuvre numériquement et peut être facilement étendue au cas non linéaire. Toutefois elle pose un problème sur le plan physique, puisque l'on observe la persistance des effets du second gradient en l'absence d'hétérogénéité à l'échelle locale.

Pour illustrer ce propos, considérons un composite constitué d'un arrangement régulier de fibres tel que décrit dans la figure ci-dessous.

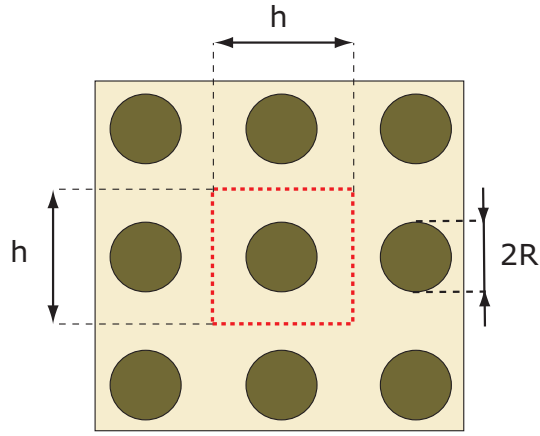


FIGURE 1.1 – Composite constitué d’un réseau périodique d’inclusions cylindriques de rayon R .

Le VER est défini par une cellule carrée de côté h contenant une fibre de rayon R . On note par $c = E_2/E_1$ le contraste entre les phases, E_1 étant le module de Young de la matrice et E_2 celui des inclusions. On admettra, pour des raisons de simplicité, que l’inclusion et la matrice ont la même valeur du coefficient de Poisson. Les composantes des tenseurs élastiques, donnés dans (1.73), dépendent des caractéristiques mécaniques des phases et de la géométrie de l’inclusion, ici le rayon R . Comme illustré sur la figure 1.2, il est possible de supprimer l’hétérogénéité de deux manières :

- en faisant tendre le rayon de des inclusions vers 0 (situation (a)),
- en faisant tendre le contraste vers 1 (situation (b)).

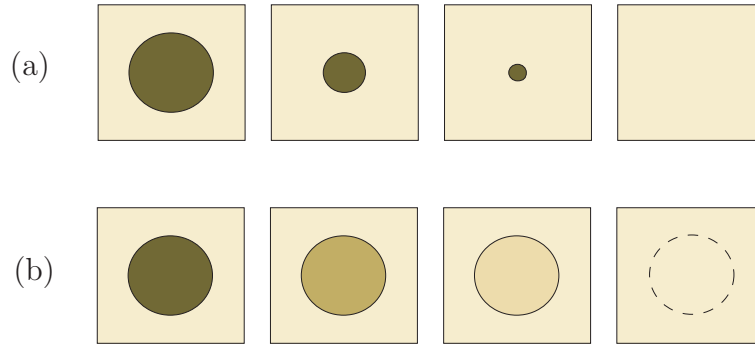


FIGURE 1.2 –

Les effets du gradient de la déformation macroscopique étant dus, à l’échelle macroscopique, à la présence d’une hétérogénéité à une échelle plus fine, les modules élastiques du second gradient doivent donc s’annuler pour ces deux cas particuliers correspondants à $R \rightarrow 0$ et $c \rightarrow 1$. Or les simulations numériques montrent au contraire que les effets du second gradient persistent lorsque la cellule tend à redevenir homogène.

Pour la microstructure décrite en figure (1.1), la cellule de base possède les symétries d’invariance par les réflexions d’axe Ox_1 et Ox_2 et par les rotations d’un

angle $\pi/2$. Le matériau est à symétrie tétragonale et la loi de comportement du second gradient s'écrit :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Sigma_1^0 \\ \Sigma_2^0 \\ \Sigma_6^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11}^{0,0} & C_{12}^{0,0} & 0 \\ C_{12}^{0,0} & C_{11}^{0,0} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^{0,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_6 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \Sigma_{11}^1 \\ \Sigma_{21}^1 \\ \Sigma_{62}^1 \\ \Sigma_{22}^1 \\ \Sigma_{12}^1 \\ \Sigma_{61}^1 \end{bmatrix} &= h^2 \begin{bmatrix} C_{1111}^{1,1} & C_{1121}^{1,1} & C_{1162}^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1121}^{1,1} & C_{2121}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1162}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} & C_{6262}^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1111}^{1,1} & C_{1121}^{1,1} & C_{1162}^{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & C_{1121}^{1,1} & C_{2121}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & C_{1162}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} & C_{6262}^{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1,1} \\ E_{2,1} \\ E_{6,2} \\ E_{2,2} \\ E_{1,2} \\ E_{6,1} \end{bmatrix} \quad (1.80)
\end{aligned}$$

Les composantes du second gradient sont obtenues en imposant successivement les chargements :

$$\begin{aligned}
\text{Chargement 1} &: E_{11,1} = 1 \quad E_{22,1} = 0 \quad E_{12,2} = 0 \\
\text{Chargement 2} &: E_{11,1} = 0 \quad E_{22,1} = 1 \quad E_{12,2} = 0 \\
\text{Chargement 3} &: E_{11,1} = 0 \quad E_{22,1} = 0 \quad E_{12,2} = 1
\end{aligned} \quad (1.81)$$

Chaque problème pour la cellule élémentaire est résolu par éléments finis. Sur les figures 1.3, 1.4, 1.5 sont représentées les variations des coefficients du second gradient avec le rayon des inclusions. Les calculs sont réalisés sur une cellule de base carrée de cotés normalisés égales à 1. Le contraste de propriétés élastiques est choisi égal à 5.

Sur les figures 1.6, 1.7, 1.8 on représente les variations des propriétés élastiques du second gradient avec le contraste pour des fibres de rayon $R = 0.25$. Sur les figures 1.3 à 1.8 on observe que les propriétés du second gradient sont non nulles lorsque le rayon des inclusions est nul et pour un contraste de propriétés égal à 1. En fait ce résultat n'est pas tout à fait surprenant puisque la cellule homogène soumise à un gradient de déformation se déforme élastiquement et possède donc une énergie élastique non nulle. En outre, les champs locaux pour la cellule homogènes soumise à des gradients de déformation sont représentés sur les figures 1.9, 1.10 et 1.11. Il est donc impossible d'obtenir la nullité des coefficients du second gradient pour une cellule homogène.

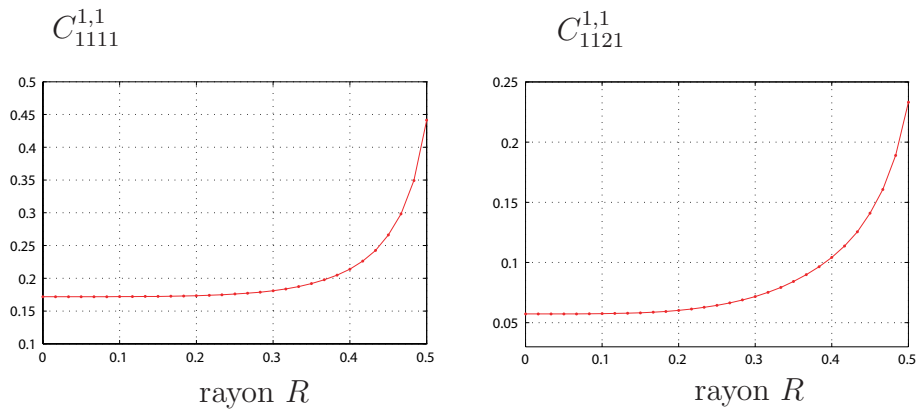


FIGURE 1.3 – Variations des coefficients $C_{1111}^{1,1}$ et $C_{1121}^{1,1}$ avec le rayon R des inclusions pour le composite à fibres

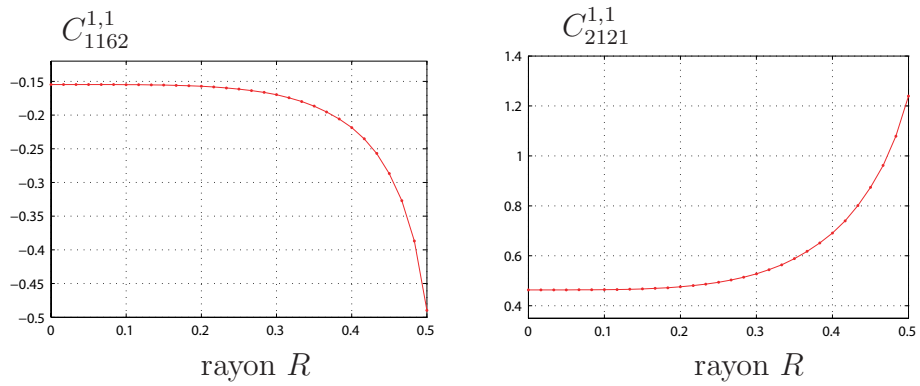


FIGURE 1.4 – Variations des coefficients $C_{1162}^{1,1}$ et $C_{2121}^{1,1}$ avec le rayon R des inclusions pour le composite à fibres

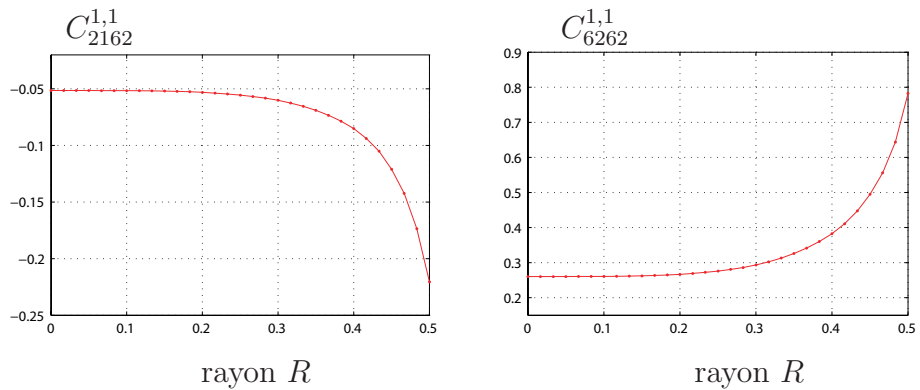


FIGURE 1.5 – Variations des coefficients $C_{2162}^{1,1}$ et $C_{6262}^{1,1}$ avec le rayon R des inclusions pour le composite à fibres

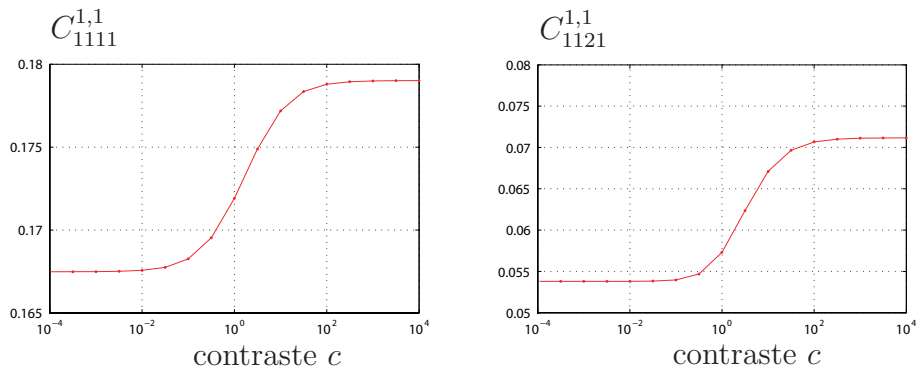


FIGURE 1.6 – Variations des coefficients $C_{1111}^{1,1}$ et $C_{1121}^{1,1}$ avec le contraste $c = E_2/E_1$ pour le composite à fibres

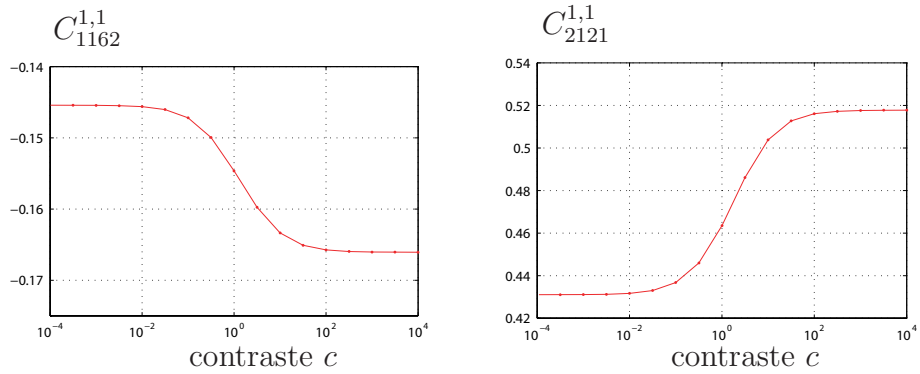


FIGURE 1.7 – Variations des coefficients $C_{1162}^{1,1}$ et $C_{2121}^{1,1}$ avec le contraste $c = E_2/E_1$ pour le composite à fibres

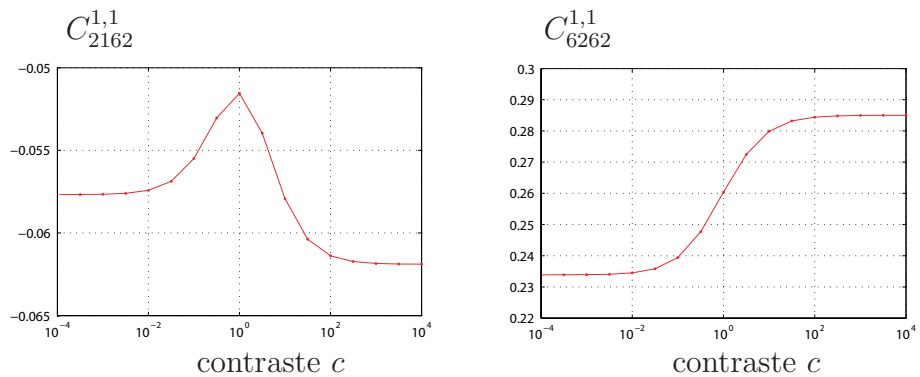


FIGURE 1.8 – Variations des coefficients $C_{2162}^{1,1}$ et $C_{6262}^{1,1}$ avec le contraste $c = E_2/E_1$ pour le composite à fibres

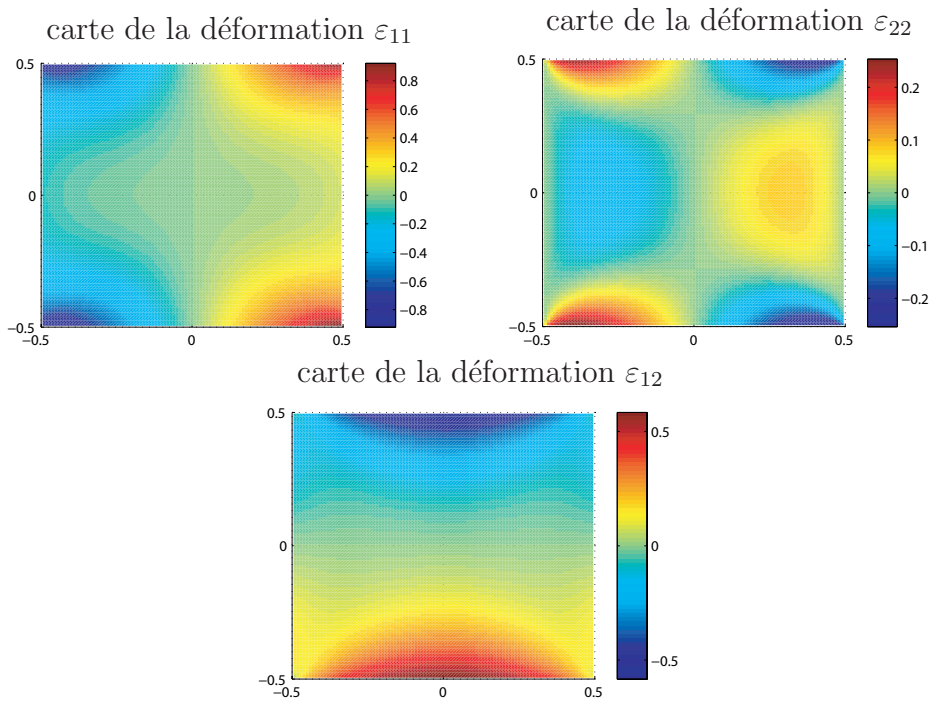


FIGURE 1.9 – Cartes des déformations locales pour la cellule homogène soumise au gradient de déformation $E_{11,1} = 1$

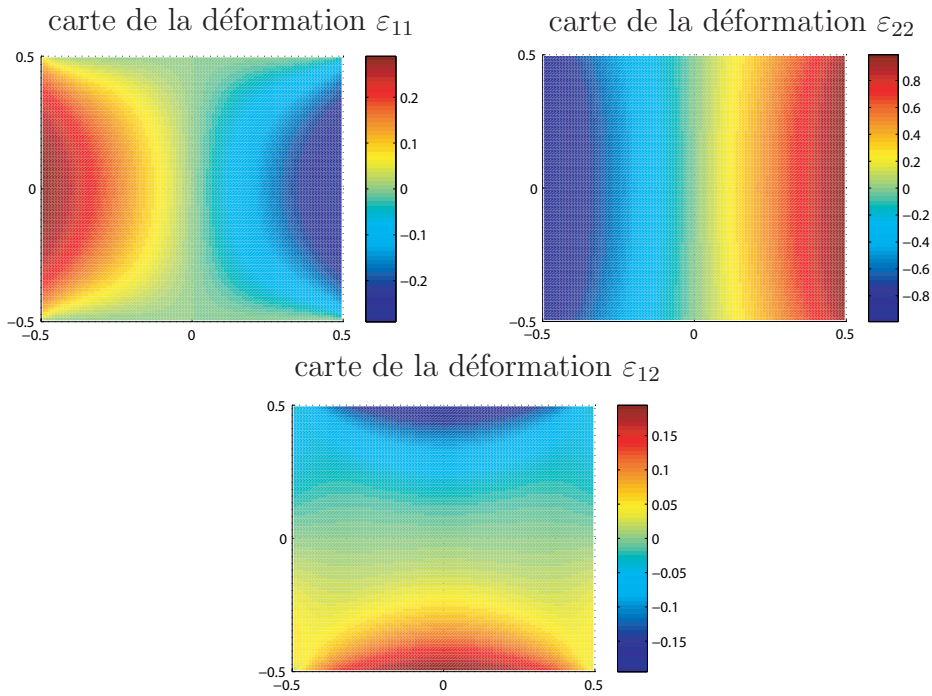


FIGURE 1.10 – Cartes des déformations locales pour la cellule homogène soumise au gradient de déformation $E_{22,1} = 1$

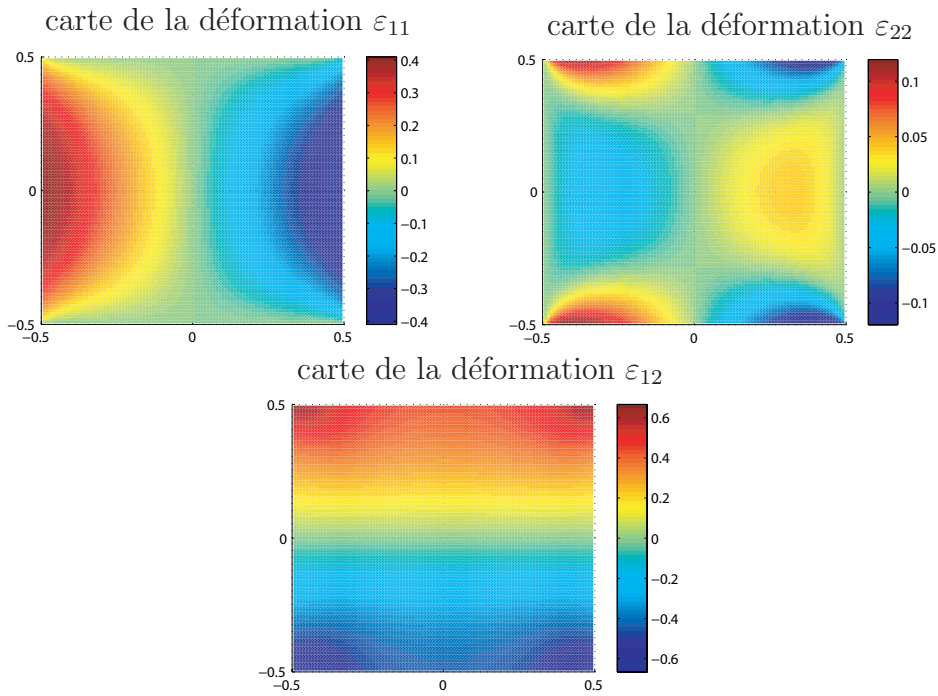


FIGURE 1.11 – Cartes des déformations locales pour la cellule homogène soumise au gradient de déformation $E_{12,2} = 1$

1.3 Conclusion

Deux classes d’approche micromécanique pour la détermination des propriétés du second gradient ont été présentées dans ce chapitre. La première introduit les gradients de déformation et des moyennes statistiques dans le cadre des approches variationnelles en homogénéisation linéaire. Bien que cette approche aboutit à des expressions analytiques, ces dernières sont obtenues pour des géométries très particulières et au prix de plusieurs hypothèses simplificatrices. On peut se demander comment mettre en oeuvre numériquement ce type d’approches sur d’autres microstructures. La seconde classe d’approches, basée sur les conditions aux limites quadratiques, présente un grand intérêt pratique : elle permet de traiter tout type de microstructure et peut être facilement adaptée pour traiter les milieux non linéaires. Elle présente toutefois deux défauts. D’abord, contrairement aux approches variationnelles, il n’existe pas à ce jour des résultats analytiques pour les propriétés du second gradient. D’autre part, on observe la persistance des effets du second gradient lorsque l’on supprime l’hétérogénéité locale. En vue de corriger les difficultés de ces approches on propose dans le chapitre qui suit une méthode alternative basée sur les développements asymptotiques.

Chapitre 2

Une approche basée sur les développements asymptotiques

On présente une approche basée sur l'utilisation des développements asymptotiques dans le cadre de l'homogénéisation périodique pour construire des modèles de milieux continus à gradient de déformation. La méthode par développement asymptotique, initialement introduite par Sanchez-Palencia [57], Bensoussan et al. [6], Suquet [60] dans le contexte des milieux hétérogènes périodiques, et revisitée ici en considérant les termes d'ordre supérieurs déjà étudiés par Boutin [10] pour le cas de la conductivité et Gambin et Kröner [23], Boutin [11] pour le cas de l'élasticité. On notera également les travaux de Triantafyllidis et Bardenhagen [63] pour les composites non linéaires, le cas que nous étudierons plus en détail au chapitre 4.

On rappelle en première partie de ce chapitre les résultats obtenus dans [11] pour la formulation des problèmes aux ordres supérieurs pour la cellule élémentaire du composite périodique ainsi que la forme générale de leurs solutions. Après une brève discussion de la formulation du modèle macroscopique de Boutin [11], on présente une approche alternative basée sur une condition d'équivalence énergétique aux deux échelles qui aboutit à la justification des modèles de milieux continus à gradient de déformation présentés au chapitre 1.

Dans la dernière partie de ce chapitre, on détermine les expressions analytiques des tenseurs du second gradient du modèle de Mindlin [44] dans le cas particulier d'un composite stratifié.

2.1 L'approche par développement asymptotique aux ordres supérieurs

2.1.1 Principe de la méthode par développement asymptotique

On considère un matériau composite élastique périodique défini par une cellule de base parallélépipédique et de trois vecteurs, notés \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 , qui caractérisent les invariances de translation. La cellule de base n'est pas défini de manière unique mais une cellule de forme parallélépipédique s'avère généralement bien adaptée pour la mise en oeuvre des méthodes de résolution numérique. Chacune des phases

constitutives du milieu hétérogène sont décrites par les équations de l'élasticité :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_X(\boldsymbol{\sigma}(\underline{X})) + \underline{f}(\underline{X}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{X}) = \mathbb{C}(\underline{X}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{X}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{X}) = \operatorname{sym}(\nabla_X \underline{u}(\underline{X})) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ désigne le vecteur position. $\underline{f}(\underline{X})$ est la force de volume. Par $\mathbb{C}(\underline{X})$ on définit le tenseur de rigidité du milieu hétérogène ; il est constant par phase et invariant par une translation quelconque suivant les vecteurs $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$. Les opérateurs div_X et ∇_X sont respectivement les opérateurs différentiels "divergence" et "gradient" pour lesquels les dérivées partielles sont prises par rapport aux composantes du vecteur position \underline{X} . Les interfaces entre les inclusions et la matrice sont considérées comme parfaites, ceci se traduisant par la continuité du champ de déplacement $\underline{u}(\underline{X})$ et du vecteur contrainte, $\underline{t}(\underline{X}) = \boldsymbol{\sigma}(\underline{X}) \cdot \underline{n}$. Le problème est défini par deux longueurs caractéristiques L et h . La première, L , définit la taille de la macrostructure étudiée ou la longueur d'onde associée au chargement macroscopique appliqué. La deuxième, h , décrit la taille des éléments microstructuraux, typiquement la taille de la cellule périodique ou des renforts, ou encore la distance entre deux inclusions voisines. On définit par $\epsilon = h/L$ le facteur d'échelle que l'on suppose petit devant 1. L'existence du petit paramètre ϵ suggère de chercher la solution du problème d'élasticité sous la forme d'un développement en puissance de ϵ . Rappelons ici les principales étapes de la méthode basée sur les développements asymptotiques :

- Introduisons les variables non dimensionnées $\underline{x} = \underline{X}/L$ et $\underline{y} = \underline{X}/h$ où \underline{x} est la variable dite lente tandis que \underline{y} est dite rapide.
- Dans les équations d'élasticité (2.1), les opérateurs différentiels sont décomposés en deux parties : $\nabla_X = \frac{1}{L}(\nabla_x + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y)$ et $\operatorname{div}_X = \frac{1}{L}(\operatorname{div}_x + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}_y)$ où les indices x et y indiquent que les dérivées sont prises par rapport aux variables x_i ou y_i pour $i = 1..3$. Le problème se réécrit donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y})) + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y})) + \underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) = \operatorname{sym}(\nabla_x \underline{u}(\underline{x}, \underline{y})) + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{sym}(\nabla_y \underline{u}(\underline{x}, \underline{y})) \end{cases} \quad (2.2)$$

où $\underline{f}(\underline{x}, \underline{y})$ est la force de volume.

- Le déplacement est exprimé sous la forme d'un développement en puissance de ϵ :

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) &= L \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \underline{u}^n(\underline{x}, \underline{y}) \\ &= L \left[\underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon \underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon^2 \underline{u}^2(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon^3 \underline{u}^3(\underline{x}, \underline{y}) + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

où les déplacements $\underline{u}^n(\underline{x}, \underline{y})$ sont des fonctions périodiques en \underline{y} et de période Y . Les $\underline{u}^n(\underline{x}, \underline{y})$ sont adimensionnés par la présence de la longueur caractéristique L placée devant le symbole "somme" dans l'équation (2.3).

- En regroupant les termes de même puissance en ϵ , on obtient une hiérarchie de problèmes d'élasticité posés sur la cellule élémentaire pour les déplacements

$\underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y})$, $\underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y})$, $\underline{u}^2(\underline{x}, \underline{y})$, etc.

Dans (2.2), la déformation s'écrit :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) &= \frac{1}{\epsilon} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^0) + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n [\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^n) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{n+1})] \\ &= \frac{1}{\epsilon} \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^0) + [\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^1)] + \epsilon [\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^1) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^2)] \\ &\quad + \epsilon^2 [\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^2) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^3)] + \dots\end{aligned}\tag{2.4}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ dénote le gradient symétrisé par rapport à la variable lente, $\boldsymbol{\varepsilon}_x = (\nabla_x + \nabla_x^t)/2$, tandis que $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ est le gradient symétrisé par rapport à la variable rapide, $\boldsymbol{\varepsilon}_y = (\nabla_y + \nabla_y^t)/2$. Dans (2.4), le champ de déformation doit rester fini lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Ceci suggère que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^0) = 0\tag{2.5}$$

Le déplacement $\underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y})$ n'est donc une fonction que de la variable \underline{x} uniquement, et on le note $\underline{U}^0(\underline{x})$. Le champ de contrainte s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \boldsymbol{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}); \quad \boldsymbol{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : [\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^n) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^{n+1})]\tag{2.6}$$

L'équation d'équilibre locale s'écrit :

$$\frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \left[\operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y})) + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y})) + \underline{f}^n(\underline{x}, \underline{y}) \right] = 0\tag{2.7}$$

avec la convention $\underline{f}^n(\underline{x}, \underline{y})$ est nulle quand $n \neq 0$ et $\underline{f}^n(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{y})$ pour $n = 0$. Chacun des termes de la série étant nul, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) &= 0 \\ \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y})) + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y})) + \underline{f}^n(\underline{x}, \underline{y}) &= 0 \quad \text{pour } n \geq 0\end{aligned}\tag{2.8}$$

L'intégration sur le volume de la cellule élémentaire de la deuxième relation dans (2.8) s'écrit :

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} dS + \operatorname{div}_x(\langle \boldsymbol{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V) + \langle \underline{f}^n(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = 0\tag{2.9}$$

où l'on a utilisé le théorème de la divergence pour réécrire $\langle \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y})) \rangle_V$ sous la forme d'une intégrale de surface sur le bord de la cellule élémentaire. Le vecteur $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}$ étant périodique, ceci résultant de l'équilibre de la cellule avec les cellules voisines, on a donc :

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} dS = 0\tag{2.10}$$

Il vient alors :

$$\operatorname{div}_x(\langle \boldsymbol{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V) + \langle \underline{f}^n(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = 0 \quad \text{pour } n \geq 0\tag{2.11}$$

Nous reviendrons plus tard sur l'interprétation de cette condition pour le modèle obtenu par homogénéisation. Il est possible d'éliminer (2.11) dans (2.8) :

$$\operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y})) + \underline{g}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (2.12)$$

où l'on a posé :

$$\underline{g}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y}) = \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}) - \langle \boldsymbol{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V) + \underline{f}^n(\underline{x}, \underline{y}) - \langle \underline{f}^n(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V \quad (2.13)$$

où : $\underline{g}^n(\underline{x}, \underline{y})$ peut être interprété comme une force de volume imposée en tout point de la cellule élémentaire. On constate que les solutions à chaque ordre sont obtenues de manière itérative puisque les termes sources à l'ordre n dépendent des champs obtenus à l'ordre précédent. Ces derniers se présentent dans (2.12) comme des forces de volume et dans (2.4) sous la forme d'un champ de polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^n)$. A ce stade, les effets microstructuraux peuvent s'interpréter par une chaîne de forces dont les amplitudes décroissent avec l'ordre en ϵ . Cela génère une série infinie de déplacements $\underline{u}^n(\underline{x}, \underline{y})$ dont le premier terme est $\underline{U}^0(\underline{x})$, qui n'est fonction que de la variable lente \underline{x} . La forme générale des champs $\underline{u}^n(\underline{x}, \underline{y})$ et les problèmes à résoudre pour chacun de ces champs sont décrits au paragraphe suivant.

2.1.2 Les problèmes d'homogénéisation et leurs solutions

2.1.2.1 Problème d'ordre 1

Le champ $\underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y})$ est la solution du problème d'ordre 1 considéré usuellement en homogénéisation périodique :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y})) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) + \mathbf{E}^0(\underline{x})) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) = \operatorname{sym}(\nabla_y \underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y})) \\ \underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y}) \text{ Y-périodique,} \\ \boldsymbol{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ Y-antipériodique} \end{cases} \quad (2.14)$$

où l'on a posé : $\mathbf{E}^0(\underline{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_x[\underline{U}^0(\underline{x})]$. Compte tenu de la linéarité des équations, le champ $\underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y})$ dépend linéairement de $\mathbf{E}^0(\underline{x})$ et peut être écrit sous la forme :

$$\underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}^1(\underline{x}) + \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^0(\underline{x}) \quad (2.15)$$

où le champ $\underline{U}^1(\underline{x})$ apparaît comme une constante d'intégration pour la variable \underline{y} . $\mathbb{Q}^0(\underline{y})$ est un champ périodique à moyenne nulle sur la cellule élémentaire, $\langle \mathbb{Q}^0(\underline{y}) \rangle_V = 0$. Le champ de déformation, $\boldsymbol{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$, s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y})) + \mathbf{E}^0(\underline{x}) = \mathbb{A}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^0(\underline{x}) \quad (2.16)$$

où $\mathbb{A}^0(\underline{y})$ est le tenseur de localisation défini par :

$$[\mathbb{A}^0(\underline{y})]_{ijpq} = \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial Q_{ipq}^0}{\partial y_j}(\underline{y}) + \frac{\partial Q_{j pq}^0}{\partial y_i}(\underline{y}) \right\} \quad (2.17)$$

Le champ de contrainte, $\boldsymbol{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y})$, s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{B}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^0(\underline{x}) \quad (2.18)$$

où l'on a posé : $\mathbb{B}^0(\underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : \mathbb{A}^0(\underline{y})$.

2.1.2.2 Problème d'ordre 2

Le champ à l'ordre 1 dépend des champs macroscopiques $\underline{U}^1(\underline{x})$ et $\mathbf{E}^0(\underline{x})$ qui apparaissent dans le problème d'ordre 2 sous la forme des variables de chargement $\mathbf{E}^1(\underline{x}) = \text{sym}(\nabla_x \underline{U}^1(\underline{x}))$ et $\nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x})$. Compte tenu de la linéarité des équations, il est possible d'étudier séparément la solution du problème où l'on impose $\mathbf{E}^1(\underline{x})$ et le problème où l'on impose $\nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x})$.

- Le premier sous-problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^{1a}(\underline{x}, \underline{y})) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{1a}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) + \mathbf{E}^1(\underline{x})) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) = \text{sym}(\nabla_y \underline{u}^{2a}(\underline{x}, \underline{y})) \\ \underline{u}^{2a}(\underline{x}, \underline{y}) \text{ Y-périodique,} \\ \boldsymbol{\sigma}^{1a}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ Y-antipériodique} \end{cases} \quad (2.19)$$

qui est identique au problème d'ordre 1 si l'on remplace $\mathbf{E}^0(\underline{x})$ par $\mathbf{E}^1(\underline{x})$. La solution s'écrit donc :

$$\underline{u}^{2a}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}^{2a}(\underline{x}) + \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^1(\underline{x}) \quad (2.20)$$

- Le deuxième sous-problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^{1b}(\underline{x}, \underline{y})) + \underline{g}^1(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{1b}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) + \boldsymbol{\eta}^1(\underline{x}, \underline{y})) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) = \text{sym}(\nabla_y \otimes \underline{u}^{2b}(\underline{x}, \underline{y})) \\ \underline{u}^{2b}(\underline{x}, \underline{y}) \text{ Y-périodique,} \\ \boldsymbol{\sigma}^{1b}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ Y-antipériodique} \end{cases} \quad (2.21)$$

dans lequel, les forces de volume $\underline{g}^1(\underline{x}, \underline{y})$ et le champ de déformation libre $\boldsymbol{\eta}^1(\underline{x}, \underline{y})$ sont définis par :

$$\begin{cases} \underline{g}^1(\underline{x}, \underline{y}) = [\mathbb{B}^0(\underline{y}) - \langle \mathbb{B}^0(\underline{y}) \rangle_V] : \nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x}) \\ \boldsymbol{\eta}^1(\underline{x}, \underline{y}) = \text{sym}[\mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x})] \end{cases} \quad (2.22)$$

La solution du problème (2.21) est linéaire en $\nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x})$, et peut être écrite sous la forme :

$$\underline{u}^{2b}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}^{2b}(\underline{x}) + \mathbb{Q}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x}) \quad (2.23)$$

où le tenseur d'ordre 5, $\mathbb{Q}^1(\underline{y})$, est périodique et à moyenne nulle sur la cellule élémentaire, $\langle \mathbb{Q}^1(\underline{y}) \rangle_V = 0$. A partir de (2.20) et (2.23), on obtient le champ total $\underline{u}^2(\underline{x}, \underline{y})$:

$$\underline{u}^2(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}^2(\underline{x}) + \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^1(\underline{x}) + \mathbb{Q}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x}) \quad (2.24)$$

où l'on a posé : $\underline{U}^2(\underline{x}) = \underline{U}^{2a}(\underline{x}) + \underline{U}^{2b}(\underline{x})$. Le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_y(\underline{u}^2(\underline{x}, \underline{y})) + \boldsymbol{\varepsilon}_x(\underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y})) \\ &= \mathbb{A}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^1(\underline{x}) + \mathbb{A}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où $\mathbb{A}^0(\underline{y})$ est défini par (2.17), et $\mathbb{A}^1(\underline{y})$ est défini par :

$$[\mathbb{A}^1(\underline{y})]_{ijpqr} = \frac{1}{2}(Q_{ipq}^0(\underline{y})\delta_{jr} + Q_{jrp}^0(\underline{y})\delta_{iq}) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial Q_{ipqr}^1}{\partial y_j}(\underline{y}) + \frac{\partial Q_{jrpq}^1}{\partial y_i}(\underline{y}) \right\} \quad (2.26)$$

Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) &= \mathbb{C}(\underline{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) \\ &= \mathbb{B}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^1(\underline{x}) + \mathbb{B}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

où l'on a posé : $\mathbb{B}^1(\underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : \mathbb{A}^1(\underline{y})$.

2.1.2.3 Problème d'ordre 3

Le problème d'homogénéisation d'ordre 3 peut être décomposé en trois sous-problèmes pour lesquels $\mathbf{E}^2(\underline{x}) = \text{sym}(\nabla_x \underline{U}^2(\underline{x}))$, $\nabla_x \mathbf{E}^1(\underline{x})$ et $\nabla_x^2 \mathbf{E}^0(\underline{x})$ sont les variables de chargement. Les deux premiers sous-problèmes sont identiques à ceux déjà traités à l'ordre 1 et 2, et dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} \underline{u}^{3a}(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}^{3a}(\underline{x}) + \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^2(\underline{x}) \\ \underline{u}^{3b}(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}^{3b}(\underline{x}) + \mathbb{Q}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}^1(\underline{x}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le troisième sous-problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^{2c}(\underline{x}, \underline{y})) + \underline{g}^2(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{2c}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) + \boldsymbol{\eta}^2(\underline{x}, \underline{y})) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) = \text{sym}(\nabla_y \underline{u}^{3c}(\underline{x}, \underline{y})) \\ \underline{u}^{3c}(\underline{x}, \underline{y}) \text{ Y-périodique,} \\ \boldsymbol{\sigma}^{2c}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ Y-antipériodique} \end{cases} \quad (2.29)$$

dans lequel, les forces de volume $\underline{g}^2(\underline{x}, \underline{y})$ et le champ de déformation libre $\boldsymbol{\eta}^2(\underline{x}, \underline{y})$ sont définis par :

$$\begin{cases} \underline{g}^2(\underline{x}, \underline{y}) = [\mathbb{B}^1(\underline{y}) - \langle \mathbb{B}^1(\underline{y}) \rangle_V] : \nabla_x^2 \mathbf{E}^0(\underline{x}) \\ \boldsymbol{\eta}^2(\underline{x}, \underline{y}) = \text{sym}(\mathbb{Q}^1(\underline{y}) : \nabla_x^2 \mathbf{E}^0(\underline{x})) \end{cases} \quad (2.30)$$

Compte tenu de la linéarité du problème (2.29), la solution \underline{u}^{3c} s'écrit :

$$\underline{u}^{3c}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}^{3c}(\underline{x}) + \mathbb{Q}^2(\underline{y}) : \nabla_x^2 \mathbf{E}^0(\underline{x}) \quad (2.31)$$

Où le tenseur d'ordre 6, $\mathbb{Q}^2(\underline{y})$, est fonction de la variable \underline{y} seule, il est périodique et à moyenne nulle sur le volume élémentaire, $\langle \mathbb{Q}^2(\underline{y}) \rangle_V = 0$. Le champ total $\underline{u}^3(\underline{x}, \underline{y})$ est obtenu en sommant les champs définis dans (2.28) et (2.31) ; il vient :

$$\underline{u}^3(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}^3(\underline{x}) + \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^2(\underline{x}) + \mathbb{Q}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}^1(\underline{x}) + \mathbb{Q}^2(\underline{y}) : \nabla_x^2 \mathbf{E}^0(\underline{x}) \quad (2.32)$$

avec $\underline{U}^3(\underline{x}) = \underline{U}^{3a}(\underline{x}) + \underline{U}^{3b}(\underline{x}) + \underline{U}^{3c}(\underline{x})$.

Les champs d'ordres supérieurs sont obtenus en employant la même stratégie.

2.1.3 Solution générale

La solution totale est obtenue en sommant les champs solution des problèmes d'ordre 0, 1, 2, ... Rappelons que les champs à l'ordre 0, 1, 2 et 3 ont pour expression :

$$\begin{aligned}
\underline{u}^0(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}^0(\underline{x}) \\
\underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}^1(\underline{x}) + \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^0(\underline{x}) \\
\underline{u}^2(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}^2(\underline{x}) + \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^1(\underline{x}) + \mathbb{Q}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}^0(\underline{x}) \\
\underline{u}^3(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}^3(\underline{x}) + \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}^2(\underline{x}) + \mathbb{Q}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}^1(\underline{x}) + \mathbb{Q}^2(\underline{y}) : \nabla_x^2 \mathbf{E}^0(\underline{x})
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Le champ de déplacement total, défini par (2.3), peut donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{U}(\underline{x}) + \epsilon \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}(\underline{x}) + \epsilon^2 \mathbb{Q}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) \\
&\quad + \epsilon^3 \mathbb{Q}^2(\underline{y}) : \nabla_x^2 \mathbf{E}(\underline{x}) + \dots
\end{aligned} \tag{2.34}$$

dans laquelle on a introduit les quantités :

$$\begin{aligned}
\underline{U}(\underline{x}) &= \underline{U}^0(\underline{x}) + \epsilon \underline{U}^1(\underline{x}) + \epsilon^2 \underline{U}^2(\underline{x}) + \dots \\
\mathbf{E}(\underline{x}) &= \mathbf{E}^0(\underline{x}) + \epsilon \mathbf{E}^1(\underline{x}) + \epsilon^2 \mathbf{E}^2(\underline{x}) + \dots
\end{aligned} \tag{2.35}$$

De manière plus compacte, on peut réécrire (2.34) sous la forme :

$$\underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{U}(\underline{x}) + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^{n+1} \mathbb{Q}^n(\underline{y}) \odot_{n+2} \nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x}) \tag{2.36}$$

$\nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x})$ désigne la dérivée n -ème de la fonction $\mathbf{E}(\underline{x})$ avec la convention $\nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x}) = \mathbf{E}(\underline{x})$ lorsque $n = 0$. Les tenseurs $\mathbb{Q}^n(\underline{y})$ d'ordre $n + 3$ sont périodiques et à moyenne nulle sur la cellule élémentaire, $\langle \mathbb{Q}^n(\underline{y}) \rangle_V = 0$. Ces tenseurs ne dépendent pas de la solution à l'échelle macroscopique, c'est à dire de la forme des fonctions $\nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x})$, mais dépendent uniquement des paramètres microstructuraux tels que les propriétés des phases ou la géométrie de la cellule élémentaire. Les champs de déformation et de contrainte s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) &= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \mathbb{A}^n(\underline{y}) \odot_{n+2} \nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x}) \\
\underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) &= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \mathbb{B}^n(\underline{y}) \odot_{n+2} \nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x})
\end{aligned} \tag{2.37}$$

où l'on a posé :

$$\mathbb{B}^n(\underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : \mathbb{A}^n(\underline{y}) \tag{2.38}$$

et où $\mathbb{A}^n(\underline{y})$ sont les tenseurs de localisation. Les composantes du tenseur $\mathbb{A}^n(\underline{y})$, notées $A_{ijpq\dots s}^n(\underline{y})$, sont calculées à partir de celles des tenseurs $\mathbb{Q}^n(\underline{y})$ et sont

invariantes par toute permutation des indices (i, j) , (p, q) et (r, \dots, s) . L'écriture des composantes de $\mathbb{A}^n(\underline{y})$ tenant compte de ces symétries nécessite quelques précautions. Considérons le tenseur \mathbf{T}^n d'ordre $n+2$ et de composantes $T_{pqr\dots s}^n$ qui sont invariantes par toute permutation des indices p, q et r, \dots, s . On définit alors le tenseur $\mathbb{A}^n(\underline{y})$ par :

$$\mathbb{A}^n(\underline{y}) \odot_{n+2} \mathbf{T}^n = \text{sym}(\mathbb{Q}^{n-1}(\underline{y}) \odot_{n+1} \mathbf{T}^n) + \text{sym}(\nabla_y \mathbb{Q}^n(\underline{y}) \odot_{n+2} \mathbf{T}^n) \quad (2.39)$$

pour $n \geq 0$, avec la convention $\mathbb{Q}^{n-1}(\underline{y}) = \mathbf{I}$ pour $n = 0$ et où \mathbf{I} est l'identité d'ordre deux.

On donne maintenant les problèmes pour la cellule élémentaire à résoudre pour calculer les tenseurs $\mathbb{Q}^n(\underline{y})$ pour $n = 0.. + \infty$. Le tenseur $\mathbb{Q}^0(\underline{y})$ est obtenu en résolvant le problème :

$$\begin{cases} \text{div}_y(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y})) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) + \mathbf{E}(\underline{x})) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) = \text{sym}(\nabla_y \underline{u}(\underline{x}, \underline{y})) \\ \underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) \text{ Y-périodique, } \langle \underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ Y-antipériodique} \end{cases} \quad (2.40)$$

La solution de ce problème est : $\underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}(\underline{x})$. Les problèmes d'homogénéisation d'ordre supérieur s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{div}_y(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y})) + \underline{g}^n(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) + \boldsymbol{\eta}^n(\underline{x}, \underline{y})) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) = \text{sym}(\nabla_y \underline{u}(\underline{x}, \underline{y})) \\ \underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) \text{ Y-périodique, } \langle \underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ Y-antipériodique} \end{cases} \quad (2.41)$$

dans lequel on pose successivement $n = 1, 2, 3\dots$ avec les forces de volume $\underline{g}^n(\underline{x}, \underline{y})$ et le champ de déformation libre $\boldsymbol{\eta}^n(\underline{x}, \underline{y})$ définis par :

$$\begin{cases} \underline{g}^n(\underline{x}, \underline{y}) = [\mathbb{B}^{n-1}(\underline{y}) - \langle \mathbb{B}^{n-1}(\underline{y}) \rangle_V] \odot_{n+2} \nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x}) \\ \boldsymbol{\eta}^n(\underline{x}, \underline{y}) = \text{sym}(\mathbb{Q}^{n-1}(\underline{y}) \odot_{n+1} \nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x})) \end{cases} \quad (2.42)$$

La solution des problèmes d'ordre supérieur (2.42) s'écrit $\underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbb{Q}^n(\underline{y}) \odot_{n+2} \nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x})$.

Ces problèmes d'homogénéisation sont hiérarchisés puisque la résolution du problème à un ordre quelconque nécessite de connaître les solutions aux ordres précédents. Le paramètre de chargement est la dérivée n -ième de la déformation $\mathbf{E}(\underline{x})$ qui apparaît dans les forces de volume $\underline{g}^n(\underline{x}, \underline{y})$ et le champ de déformation libre $\boldsymbol{\eta}^n(\underline{x}, \underline{y})$ pour $n \geq 1$. Ces champs dépendent également des tenseurs $\mathbb{Q}^n(\underline{y})$ qui sont obtenues aux ordres précédents.

D'un point de vue pratique, la solution des problèmes élémentaires (2.40) et (2.41) est calculée en posant $\mathbf{E}(\underline{x}) = \mathbf{E}$ (constant) pour (2.40) et $\nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x}) = \nabla_x^n \mathbf{E}$ (constant) pour (2.41). Ces problèmes peuvent être résolus analytiquement dans le cas particulier d'un composite stratifié (voir section (2.5)). Pour des microstructures plus complexes des méthodes usuelles par éléments finis ou par transformée de Fourier rapide (TFR) peuvent être adaptées.

En outre, on va présenter dans le chapitre suivant des schémas de résolution basés sur la TFR pour la résolution des problèmes d'ordre supérieur.

2.2 Le modèle macroscopique de Boutin 1996 [11]

On présente dans cette section l'approche par homogénéisation proposée par Boutin qui repose, à l'échelle macroscopique, sur la résolution d'une hiérarchie de problèmes élastiques pour la structure.

2.2.1 Déformation macroscopique

Les tenseurs $\mathbb{Q}^n(\underline{y})$, qui apparaissent dans l'expression du champ de déplacement microscopique (2.36), étant tous à moyenne nulle sur le volume V , il vient :

$$\langle \underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = \underline{U}(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \underline{U}^n(\underline{x}) \quad (2.43)$$

Ainsi le déplacement $\underline{U}(\underline{x})$ qui représente la translation du centre géométrique de la cellule, peut s'interpréter comme le déplacement macroscopique. Considérons maintenant les propriétés suivantes pour les tenseurs $\mathbb{A}^n(\underline{y})$ qui résultent des conditions de périodicité :

$$\langle \mathbb{A}^0(\underline{y}) \rangle_V = \mathbb{I}, \quad \langle \mathbb{A}^n(\underline{y}) \rangle_V = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité d'ordre quatre symétrisé. La moyenne du champ des déformations macroscopiques, données par (2.37), s'écrit donc :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = \mathbf{E}(\underline{x}) = \text{sym}(\nabla_x \underline{U}(\underline{x})) \quad (2.45)$$

Le tenseur $\mathbf{E}(\underline{x})$ peut donc s'interpréter comme le tenseur des déformations macroscopiques. Les tenseurs $\nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x})$ sont donc les dérivées du tenseur des déformations macroscopiques, adimensionnées par rapport à la longueur caractéristique L (rappelons que la variable \underline{x} est obtenue en divisant la variable d'espace \underline{X} par la longueur L).

2.2.2 Loi de comportement macroscopique

En prenant la moyenne du champ de contrainte local sur la volume de cellule élémentaire, on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \langle \boldsymbol{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V \quad (2.46)$$

avec :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V &= \mathbb{C}^0 : \nabla_x \underline{U}^0(\underline{x}) \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V &= \mathbb{C}^0 : \nabla_x \underline{U}^1(\underline{x}) + \mathbb{C}^1 :: \nabla_x^2 \underline{U}^0(\underline{x}) \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^2(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V &= \mathbb{C}^0 : \nabla_x \underline{U}^2(\underline{x}) + \mathbb{C}^1 :: \nabla_x^2 \underline{U}^1(\underline{x}) + \mathbb{C}^2 :: \nabla_x^3 \underline{U}^0(\underline{x}) \end{aligned} \quad (2.47)$$

etc.

Avec la définition de $\underline{U}(\underline{x})$ et $\underline{E}(\underline{x})$ dans (2.43) et (2.45), on peut réécrire (2.46) sous la forme :

$$\langle \underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \mathbb{C}^n \odot_{n+2} \nabla_x^n \underline{E}(\underline{x}) \quad (2.48)$$

où les tenseurs effectives \mathbb{C}^n d'ordre $n + 4$ sont définis par $\mathbb{C}^n = \langle \mathbb{B}^n(\underline{y}) \rangle_V$ et où les $\mathbb{B}^n(\underline{y})$ sont calculés à partir de (2.38) et (2.39).

2.2.3 Équations d'équilibre à l'échelle macroscopique

L'équilibre macroscopique (2.11) s'écrit pour $n = 1, 2, 3..$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x (\langle \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V) + \underline{F}(\underline{x}) &= 0 \\ \operatorname{div}_x (\langle \underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V) &= 0 \\ \operatorname{div}_x (\langle \underline{\sigma}^2(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V) &= 0 \\ \text{etc.} \end{aligned} \quad (2.49)$$

dans laquelle on a posé $\underline{F}(\underline{x}) = \langle \underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V$. En réinjectant les expressions (2.47) dans (2.49), on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x [\mathbb{C}^0 : \nabla_x \underline{U}^0(\underline{x})] &= -\underline{F}(\underline{x}) \\ \operatorname{div}_x [\mathbb{C}^0 : \nabla_x \underline{U}^1(\underline{x})] &= -\operatorname{div}_x [\mathbb{C}^1 : \nabla_x^2 \underline{U}^0(\underline{x})] \\ \operatorname{div}_x [\mathbb{C}^0 : \nabla_x \underline{U}^2(\underline{x})] &= -\operatorname{div}_x [\mathbb{C}^1 : \nabla_x^2 \underline{U}^1(\underline{x}) + \mathbb{C}^2 : \nabla_x^3 \underline{U}^0(\underline{x})] \\ \text{etc.} \end{aligned} \quad (2.50)$$

La réponse macroscopique est donc donnée par une hiérarchie de problèmes d'élasticité pour les champs de déplacement macroscopique $\underline{U}^n(\underline{x})$ ($n \geq 0$). Le champ $\underline{U}^0(\underline{x})$ est la solution élastique standard auquel s'ajoute les termes microstructuraux introduits par les déplacements $\underline{U}^n(\underline{x})$ pour $n \geq 1$. Le champ $\underline{U}^1(\underline{x})$ est la solution d'un problème élastique pour le milieu homogène de rigidité \mathbb{C}^0 en présence d'une force de volume qui dépend du double gradient de la déformation $\underline{E}^0(\underline{x}) = \nabla_x \underline{U}^0(\underline{x})$. Le champ $\underline{U}^2(\underline{x})$ dépend linéairement du double gradient de $\underline{E}^1(\underline{x}) = \nabla_x \underline{U}^1(\underline{x})$ et du triple gradient de $\underline{E}^0(\underline{x})$.

Conjointement aux équations d'équilibre, il reste à fournir les conditions aux limites sur le bord de la macrostructure.

2.2.4 Conditions aux limites

On présente ici les conditions aux limites formulées dans [11]. Ces conditions aux limites présentent un caractère approximatif puisqu'elles ne sont pas obtenues dans un cadre d'homogénéisation rigoureux similaire à celui qui fournit les équations de comportement (2.48) et (2.50). Les vraies conditions aux limites du modèle macroscopique doivent être en fait obtenues à partir des conditions aux limites de type Cauchy appliquées au milieu hétérogène. Toutefois, ces conditions

aux limites ne peuvent pas être obtenues dans le cadre des approches asymptotiques présentées dans ce chapitre puisque le milieu considéré est d'extension infinie (ce qui justifie par ailleurs les conditions de périodicité sur les bords de la cellule élémentaire). Les questions relatives à la détermination des conditions aux limites ne sont pas abordées dans ce travail mais elles restent cruciales pour l'homogénéisation des structures périodiques avec la prise en compte des effets microstructuraux. En particulier, les conditions aux limites peuvent introduire des effets de bord tels que ceux rencontrés en lien avec l'homogénéisation de structures périodiques [4].

La frontière du domaine \mathcal{D} est notée $\partial\mathcal{D}$ sur laquelle on considère des conditions en déplacement imposé (sur la portion $\partial\mathcal{D}_u$) et en efforts imposés (sur la portion $\partial\mathcal{D}_t$). La solution $\underline{U}^0(\underline{x})$ vérifie les conditions en déplacement sur $\partial\mathcal{D}_u$ et en efforts sur $\partial\mathcal{D}_t$:

$$\begin{cases} \underline{U}^0(\underline{x}) = \underline{U}_d(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \partial\mathcal{D}_u \\ [\mathbb{C}^0 : \nabla_x \underline{U}^0(\underline{x})] \cdot \underline{N} = \underline{T}_d & \forall \underline{x} \in \partial\mathcal{D}_t \end{cases} \quad (2.51)$$

Pour les champs $\underline{U}^n(\underline{x})$ avec ($n > 0$), on applique les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \underline{U}^n(\underline{x}) = 0 & \forall \underline{x} \in \partial\mathcal{D}_u \\ [\mathbb{C}^0 : \nabla_x \underline{U}^n(\underline{x})] \cdot \underline{N} = 0 & \forall \underline{x} \in \partial\mathcal{D}_t \end{cases} \quad (2.52)$$

Ainsi le déplacement global, $\underline{U}(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \underline{U}^n(\underline{x})$, est égal à $\underline{U}_d(\underline{x})$ sur le bord du domaine.

2.3 Une approche basée sur l'équivalence énergétique

Dans cette section, on présente une approche alternative pour la formulation du modèle macroscopique incluant les gradients de la déformation. Elle est basée sur une généralisation du lemme de Hill-Mandel qui permet d'inclure les termes de la série à tous les ordres. On établit en outre la connection entre le modèle macroscopique obtenu et les modèles phénoménologiques de Toupin [61], Mindlin [44] et Green et Rivlin [27].

2.3.1 Énergie élastique macroscopique

Introduisons l'énergie élastique macroscopique définie comme la moyenne sur la volume V de la cellule de base de l'énergie élastique microscopique :

$$W(\underline{x}) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V \quad (2.53)$$

En considérant l'expression des champs locaux de déformation et de contrainte dans (2.37), on obtient :

$$W(\underline{x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \sum_{m=0}^{m=+\infty} \epsilon^{n+m} \nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x}) \odot_{n+2} \mathbb{C}^{n,m} \odot_{m+2} \nabla_x^m \mathbf{E}(\underline{x}) \quad (2.54)$$

ou sous forme développée :

$$\begin{aligned}
W(\underline{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{E}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{0,0} : \mathbf{E}(\underline{x}) \\
&+ \epsilon \mathbf{E}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{0,1} :: \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) \\
&+ \epsilon^2 \mathbf{E}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{0,2} :: \nabla_x^2 \mathbf{E}(\underline{x}) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) :: \mathbb{C}^{1,1} :: \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) \\
&+ \epsilon^3 \mathbf{E}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{0,3} :: \nabla_x^3 \mathbf{E}(\underline{x}) + \epsilon^3 \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) :: \mathbb{C}^{1,2} :: \nabla_x^2 \mathbf{E}(\underline{x}) + \dots
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Dans les relations (2.54) et (2.55), les tenseurs $\mathbb{C}^{n,m}$ sont obtenus à partir des champs microscopiques selon la règle de moyenne :

$$\mathbb{C}^{n,m} = \langle [\mathbb{B}^n(\underline{y})]^T : \mathbb{A}^m(\underline{y}) \rangle_V = \langle [\mathbb{A}^n(\underline{y})]^T : \mathbb{B}^m(\underline{y}) \rangle_V \tag{2.56}$$

où $[\mathbb{B}^n(\underline{y})]^T$ et $[\mathbb{A}^n(\underline{y})]^T$ désignent respectivement les transposées des tenseurs $\mathbb{B}^n(\underline{y})$ et $\mathbb{A}^n(\underline{y})$ obtenus par permutation des deux premiers indices et des n derniers indices. Les tenseurs $\mathbb{C}^{n,m}$, d'ordre $n+m+4$, sont appelés tenseurs d'élasticité effectifs ou homogénéisés. Notons que $\mathbb{C}^{n,m}$ est la transposée du tenseur $\mathbb{C}^{m,n}$ obtenu en permutant le groupe des $n+2$ premiers indices avec le groupe des $m+2$ derniers indices. Les tenseurs de localisation $\mathbb{A}^n(\underline{y})$ et $\mathbb{B}^n(\underline{y})$ et donc les tenseurs $\mathbb{C}^{n,m}$, sont obtenus à partir de la résolution des problèmes sur la cellule élémentaire. Ces tenseurs effectifs dépendent donc uniquement des propriétés élastiques des constituants et de la morphologie de la microstructure.

2.3.2 Loi de comportement homogénéisée

L'énergie élastique macroscopique définie par (2.54) est quadratique par rapport à la déformation macroscopique $\mathbf{E}(\underline{x})$ et de ses dérivées $\nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x})$ pour $n = 1..+\infty$. On peut, en s'appuyant sur le formalisme thermodynamique usuel, définir les variables duales associées à $\nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x})$ pour $n = 0..+\infty$ en introduisant les lois d'état :

$$\Sigma^n(\underline{x}) = \frac{\partial W}{\partial \nabla_x^n \mathbf{E}} = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \epsilon^{n+m} \mathbb{C}^{n,m} \odot_{m+2} \nabla_x^m \mathbf{E}(\underline{x}) \tag{2.57}$$

$\Sigma^0(\underline{x})$ est la contrainte macroscopique, les tenseurs $\Sigma^n(\underline{x})$ ($n = 1..+\infty$), d'ordre $n+2$, sont appelés hypercontraintes macroscopiques. Notons que la contrainte macroscopique n'est pas définie par la moyenne volumique classique, $\Sigma^0(\underline{x}) \neq \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V$, ce qui constitue une différence importante avec le modèle de Boutin. Par contre, une relation entre la moyenne de la contrainte locale avec les variables duales peut être obtenue. Cette relation est établie dans la section suivante. Avec les définitions (2.57), pour les grandeurs duales, on observe que :

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V &= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \Sigma^n(\underline{x}) \odot_{n+2} \nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x}) \\
&= \Sigma^0(\underline{x}) : \mathbf{E}(\underline{x}) + \Sigma^1(\underline{x}) :: \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) + \Sigma^2(\underline{x}) :: \nabla_x^2 \mathbf{E}(\underline{x}) + \dots
\end{aligned} \tag{2.58}$$

que l'on peut interpréter comme une généralisation du lemme de Hill-Mandel. Notons dès à présent que la potentiel macroscopique et la loi d'élasticité obtenus sont ceux du modèle de Green et Rivlin [27] qui généralise le modèle de Toupin [61] et Mindlin [44] en introduisant les dérivées de la déformation macroscopique à tous les ordres.

Notons que le modèle de Green et Rivlin est également muni d'une équation d'équilibre pour la contrainte et les hypercontraintes. Dans la section qui suit, on démontre que cette équation peut être retrouvée à partir de l'équilibre statique de la cellule élémentaire.

2.3.3 Équation d'équilibre macroscopique

Dans cette section on établit l'équation d'équilibre macroscopique à partir de l'équilibre statique de la cellule de base. Pour cela, on se propose d'abord d'établir une règle de moyenne portant sur les contraintes et hypercontraintes. En remplaçant dans (2.53) la déformation par la première relation dans (2.37), il vient :

$$W(\underline{x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) : \mathbb{A}^n(\underline{y}) \rangle_V \odot_{n+2} \nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x}) \quad (2.59)$$

En vertu du lemme de Hill-Mandel généralisé par (2.58), on obtient :

$$\boldsymbol{\Sigma}^n(\underline{x}) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) : \mathbb{A}^n(\underline{y}) \rangle_V \quad (2.60)$$

Avec la définition $\mathbb{A}^0(\underline{y})$ donnée par (2.39). Pour $n = 0$ la relation (2.60) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^0(\underline{x}) &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} A_{pqij}^0(\underline{y}) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} \left[\frac{1}{2} (\delta_{pi} \delta_{qj} + \delta_{qi} \delta_{pj}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_{pij}^0(\underline{y})}{\partial y_q} + \frac{\partial Q_{qij}^0(\underline{y})}{\partial y_p} \right) \right] dV \quad (2.61) \\ &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV + \frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} \frac{\partial Q_{pij}^0(\underline{y})}{\partial y_q} dV \end{aligned}$$

Par application du théorème de la divergence et en considérant l'égalité $\partial/\partial y_i = -\epsilon \partial/\partial x_i$, il vient :

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} \frac{\partial Q_{pij}^0(\underline{y})}{\partial y_q} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma_{pq} n_q Q_{pij}^0(\underline{y}) dV + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} Q_{pij}^0(\underline{y}) dV \right] \quad (2.62)$$

Le premier terme à droite de l'égalité est nul car la fonction $Q_{pij}^0(\underline{y})$ est périodique tandis que le vecteur contrainte $\sigma_{pq} n_q$ est anti-périodique. À partir de (2.61) et (2.62) on obtient finalement :

$$\Sigma_{ij}^0(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} Q_{pij}^0(\underline{y}) dV \right] \quad (2.63)$$

De façon similaire, l'équation (2.60) s'écrit pour $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ijk}^1(\underline{x}) &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} A_{pqijk}^1(\underline{y}) dV \\
&= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} \left[\frac{1}{2} (Q_{pij}^0(\underline{y}) \delta_{qk} + Q_{qij}^0(\underline{y}) \delta_{pk}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_{pijk}^1(\underline{y})}{\partial y_q} + \frac{\partial Q_{qijk}^0(\underline{y})}{\partial y_p} \right) \right] dV \\
&= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{pk} Q_{pij}^0(\underline{y}) dV + \frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} \frac{\partial Q_{pijk}^1(\underline{y})}{\partial y_q} dV
\end{aligned} \tag{2.64}$$

En utilisant le théorème de la divergence, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} \frac{\partial Q_{pijk}^1(\underline{y})}{\partial y_q} dV &= \\
\frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma_{pq} n_q Q_{pijk}^1(\underline{y}) dV + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} Q_{pijk}^1(\underline{y}) dV \right]
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Encore une fois, le premier terme à droite de l'égalité (2.65) est nul dû à la périodicité de $Q_{pijk}^1(\underline{y})$ et l'anti-périodicité de $\sigma_{pq} n_q$. On en déduit donc à partir de (2.64) et (2.65) :

$$\Sigma_{ijk}^1(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{pk} Q_{pij}^0(\underline{y}) dV + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} Q_{pijk}^1(\underline{y}) dV \right] \tag{2.66}$$

En continuant ainsi pour $n > 1$ on obtient :

$$\Sigma_{i..jk}^n(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{pk} Q_{pi..j}^{n-1}(\underline{y}) dV + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{1}{V} \int_V \sigma_{pq} Q_{pi..jk}^n(\underline{y}) dV \right] \tag{2.67}$$

Enfin, par combinaison de ces relations, on obtient :

$$\langle \sigma_{ij}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = \Sigma_{ij}^0(\underline{x}) - \frac{\partial \Sigma_{ijk}^1(\underline{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial \Sigma_{ijkl}^2(\underline{x})}{\partial x_k \partial x_l} - \dots \tag{2.68}$$

En remplaçant (2.68) dans (2.11), l'équilibre du milieu équivalent s'exprime de la manière suivante à partir de la contrainte et les hypercontraintes macroscopiques :

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}^0(\underline{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \Sigma_{ijk}^1(\underline{x})}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^3 \Sigma_{ijkl}^2(\underline{x})}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} - \dots + \underline{F}(\underline{x}) = 0 \tag{2.69}$$

qui est l'équation d'équilibre de la théorie des milieux à gradient de Green et Rivlin [27].

2.4 Lien avec la théorie du second gradient

Le modèle macroscopique de milieu à gradient obtenu par homogénéisation coïncide avec la formulation générale de Green et Rivlin [27] qui généralise la théorie du second gradient de la déformation. Cette dernière peut être retrouvée dans (2.54) et (2.57) en conservant uniquement les termes en déformation et en gradient de la déformation. Ainsi le potentiel macroscopique (2.54) tronqué des termes en $\nabla_x^n \mathbf{E}(\underline{x})$ pour $n \geq 2$ s'écrit :

$$\begin{aligned} W(\underline{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{E}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{0,0} : \mathbf{E}(\underline{x}) + \epsilon \mathbf{E}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{0,1} : \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon^2 \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{1,1} : \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Notons que cette expression du potentiel ne correspond pas à une troncature à un ϵ donné. Effectivement, une troncature en $O(\epsilon^2)$ introduirait le terme $\mathbf{E}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{0,2} :: \nabla_x^2 \mathbf{E}(\underline{x})$ qui contient le double gradient de la déformation macroscopique alors qu'une troncature en $O(\epsilon)$ n'introduirait pas le terme quadratique $\nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{1,1} : \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x})$.

L'expression (2.70) peut être obtenue à partir de la relation d'homogénéisation (2.53), qui s'écrit également :

$$W(\underline{x}) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) : \mathbb{C}(\underline{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V \quad (2.71)$$

dans laquelle la déformation microscopique $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y})$, donnée par (2.37), est tronquée au premier ordre :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) \simeq \mathbb{A}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}(\underline{x}) + \epsilon \mathbb{A}^1(\underline{y}) : \nabla_x \mathbf{E}(\underline{x}) \quad (2.72)$$

Il apparaît que $W(\underline{x})$ est défini positif pour tout $\mathbf{E}(\underline{x})$ et $\nabla_x \mathbf{E}(\underline{x})$ si $\mathbb{C}(\underline{y})$ est lui même défini positif. Dans le cadre de cette approche, les tenseurs élastiques du second gradient obtenus sont alors définis positifs indépendamment de la microstructure, contrairement à ce qui est suggéré dans certains travaux de la littérature (voir par exemple Smyshlyaev et Cherednichenko [59]).

2.4.1 Comparaisons avec le modèle de Boutin

L'approche développée ici diffère de celle proposée initialement par Boutin [11] pour la formulation de la loi macroscopique.

1. Dans [11], la description macroscopique introduit une infinité de champs macroscopiques $\underline{U}^0(\underline{x}), \underline{U}^1(\underline{x}), \underline{U}^2(\underline{x}) \dots$ qui sont solutions d'une chaîne d'équations de Navier dans lesquelles apparaissent des termes sources qui dépendent des champs macroscopiques obtenus à l'ordre précédent. A l'échelle macroscopique, la loi de comportement conserve une structure hiérarchisée. Le modèle de milieu à gradient utilise une seule variable macroscopique indépendante, c'est le déplacement $\underline{U}(\underline{x})$, qui vérifie l'équation d'équilibre (2.69).

2. Dans [11], ce sont des conditions aux limites usuelles, de type Cauchy, qui sont appliquées au bord de la macrostructure alors que pour le modèle de milieu à gradient, on applique des conditions aux limites généralisées pour les contraintes et les hypercontraintes telles que (1.32) pour la théorie du second gradient.
3. Enfin dans [11], le modèle macroscopique introduit les tenseurs d'élasticité \mathbb{C}^n pour $n = 0, 1, 2, \dots$ alors que le modèle de milieu continu à gradient introduit les tenseurs élastiques $\mathbb{C}^{n,m}$ pour $n, m = 0, 1, 2, \dots$

Il existe toutefois une relation entre les tenseurs \mathbb{C}^n et les tenseurs $\mathbb{C}^{n,m}$. Pour établir ce lien, rappelons que la moyenne de la contrainte microscopique s'écrit dans l'approche de Boutin (cf. équation (2.48)) :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_V = C_{ijpq}^0 E_{pq} + \epsilon C_{ijpqr}^1 E_{pq,r} + \epsilon^2 C_{ijpqrs}^2 E_{pq,rs} + \dots \quad (2.73)$$

D'autre part, on peut également exprimer cette moyenne à partir des tenseurs d'élasticité $\mathbb{C}^{n,m}$ en utilisant conjointement la relation (2.68) avec (2.57). Cela conduit à :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle_V = & C_{ijpq}^{0,0} E_{pq} + \epsilon [C_{ijpqr}^{0,1} - C_{pqijr}^{0,1}] E_{pq,r} \\ & + \epsilon^2 [C_{ijpqrs}^{0,2} + C_{ijrspq}^{0,2} - C_{ijspqr}^{1,1}] E_{pq,rs} + \dots \end{aligned} \quad (2.74)$$

L'équivalence entre les termes de même puissance en ϵ dans les équations (2.73) et (2.74) conduit aux relations suivantes pour les tenseurs d'élasticité :

$$\begin{aligned} (1) \quad & C_{ijpq}^0 = C_{ijpq}^{0,0} \\ (2) \quad & C_{ijpqr}^1 = C_{ijpqr}^{0,1} - C_{pqijr}^{0,1} \\ (3) \quad & C_{ijpqrs}^2 = C_{ijpqrs}^{0,2} + C_{pqijrs}^{0,2} - \frac{1}{2}(C_{ijrpqs}^{1,1} + C_{ijspqr}^{1,1}) \\ (4) \quad & \text{etc.} \end{aligned} \quad (2.75)$$

2.5 Calcul des tenseurs élastiques du second gradient pour le composite stratifié

A titre d'application, on propose de déterminer les expressions exactes pour les composantes des tenseurs du second gradient dans le cas d'un composite stratifié. Notons que les expressions analytiques des composantes des tenseurs \mathbb{C}^n du modèle ont été calculées dans [11], toutefois il n'est pas possible d'obtenir directement les composantes des tenseurs $\mathbb{C}^{n,m}$ à partir de ces résultats. Le composite est décrit par la cellule élémentaire définie par la figure 2.1. Il est constitué de deux phases isotropes (1) et (2) ayant les épaisseurs $(1-\tau)h$ et τh respectivement, avec $0 \leq \tau \leq 1$. Les cotés de la cellule élémentaire sont normalisés et égaux à 1 si bien que la fraction volumique de la phase (1) est $1-\tau$ tandis que celle de la phase (2) est τ . On note par λ_1, μ_1 les modules élastiques de la phase (1), et par λ_2, μ_2 celles de la phase (2). Les phases sont périodiquement distribuées selon l'axe Ox_1 . Dans cette configuration les champs locaux fluctuent avec la variable y_1 que l'on va noter y pour des raisons de simplicité. Toujours pour simplifier les notations, la dépendance des variables mécaniques avec \underline{x} est omise dans la suite de ce chapitre.

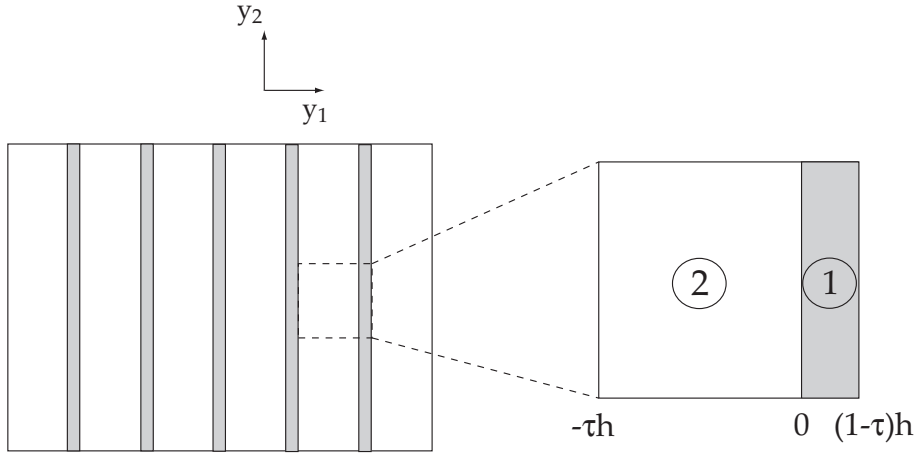


FIGURE 2.1 – Cellule élémentaire du composite stratifié.

Les tenseurs élastiques du modèle de second gradient de Mindlin, $\mathbb{C}^{0,0}$, $\mathbb{C}^{0,1}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$, nécessitent la résolution des problèmes d'homogénéisation d'ordre 1 et 2. Ils sont ensuite calculés à partir de la relation de moyenne (2.56) dans laquelle $\mathbb{A}^0(\underline{y})$ et $\mathbb{A}^1(\underline{y})$ sont définis par les relations (2.17) et (2.26).

2.5.1 Solutions des problèmes locaux

2.5.1.1 Problème d'ordre 1

Le problème à l'ordre 1 est résolu pour des conditions de déformations macroscopiques imposées à la cellule élémentaire, et dont la solution s'exprime sous forme indicelle :

$$u_i(\underline{y}) = Q_{ijk}^0(\underline{y})E_{jk} \quad (2.76)$$

Le champ de déformation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dy}(\underline{y}) + E_{11} = \frac{dQ_{1jk}^0}{dy}(\underline{y})E_{jk} + E_{11} \\ \varepsilon_{22} = E_{22} \\ \varepsilon_{33} = E_{33} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{du_2}{dy}(\underline{y}) + E_{12} = \frac{1}{2} \frac{dQ_{2jk}^0}{dy}(\underline{y})E_{jk} + E_{12} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{du_3}{dy}(\underline{y}) + E_{13} = \frac{1}{2} \frac{dQ_{3jk}^0}{dy}(\underline{y})E_{jk} + E_{13} \\ \varepsilon_{23} = E_{23} \end{array} \right. \quad (2.77)$$

Le champ de contrainte local s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{dQ_{1jk}^0}{dy}(y) E_{jk} + (\lambda + 2\mu) E_{11} + \lambda(E_{22} + E_{33}) \\ \sigma_{22} = \lambda \frac{dQ_{1jk}^0}{dy}(y) E_{jk} + (\lambda + 2\mu) E_{22} + \lambda(E_{11} + E_{33}) \\ \sigma_{33} = \lambda \frac{dQ_{1jk}^0}{dy}(y) E_{jk} + (\lambda + 2\mu) E_{33} + \lambda(E_{11} + E_{22}) \\ \sigma_{12} = \mu \frac{dQ_{2jk}^0}{dy}(y) E_{jk} + 2\mu E_{12} \\ \sigma_{13} = \mu \frac{dQ_{3jk}^0}{dy}(y) E_{jk} + 2\mu E_{13} \\ \sigma_{23} = 2\mu E_{23} \end{array} \right. \quad (2.78)$$

où λ et μ prennent les valeurs λ_1 et μ_1 dans la phase (1) et λ_2 et μ_2 dans la phase (2). En écrivant l'équilibre local pour le champ de contraintes, on obtient les 3 équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{dQ_{1jk}^0}{dy}(y) E_{jk} + (\lambda + 2\mu) E_{11} + \lambda E_{22} + \lambda E_{33} \right] &= 0 \\ \frac{d}{dy} \left[\mu \frac{\partial Q_{2jk}^0}{dy}(y) E_{jk} + 2\mu E_{12} \right] &= 0 \\ \frac{d}{dy} \left[\mu \frac{\partial Q_{3jk}^0}{dy}(y) E_{jk} + 2\mu E_{13} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

On constate que toutes les équations dans (2.79) sont de la forme :

$$\frac{d}{dy} \left[\alpha \frac{dQ^0}{dy}(y) + \beta \right] = 0 \quad (2.80)$$

où les paramètres α , β sont constants par phase et dans laquelle $Q^0(y)$ est une fonction périodique, à moyenne nulle sur la cellule élémentaire :

$$\begin{aligned} Q^0(y)|_{y=(1-\tau)h} &= Q^0(y)|_{y=-\tau h} \\ \int_{-\tau h}^{(1-\tau)h} Q^0(y) dy &= 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

et continue à l'interface : $[Q^0(y)]_{y=0} = 0$.

D'autre part, la continuité du vecteur contrainte à l'interface en $y = 0$ implique que le saut de la quantité, $\alpha \frac{\partial Q^0}{\partial y}(y) + \beta$, est nul en $y = 0$:

$$\left[\alpha \frac{\partial Q^0}{\partial y}(y) + \beta \right]_{y=0} = 0 \quad (2.82)$$

A partir de l'équation (2.79), on constate que les seules composantes non nulles du tenseur $Q^0(y)$ sont Q_{111}^0 , Q_{122}^0 , Q_{133}^0 , Q_{212}^0 et Q_{313}^0 correspondant aux 5 trajets de chargement dont 2 sont équivalents $E_{22} \equiv E_{33}$, $E_{12} \equiv E_{13}$. On obtient les expressions de Q_{111}^0 , Q_{122}^0 , Q_{133}^0 , Q_{212}^0 et Q_{313}^0 suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{111}^0(y) &= kf(y) \\ Q_{122}^0(y) &= Q_{133}^0(y) = k[D(\lambda)/D(\lambda + 2\mu)]f(y) \\ Q_{212}^0(y) &= Q_{313}^0(y) = mf(y) \end{aligned} \quad (2.83)$$

avec $f(y)$ est fonction de la variable y uniquement, définie par :

$$f(y) = \begin{cases} [y/h - (1 - \tau)/2]/(1 - \tau) & \text{dans (1)} \\ -[y/h + \tau/2]/\tau & \text{dans (2)} \end{cases} \quad (2.84)$$

et les expressions des coefficients k et m sont données par :

$$\begin{aligned} k &= H(\lambda + 2\mu)D(1/(\lambda + 2\mu)) \\ m &= H(\mu)D(1/\mu) \end{aligned} \quad (2.85)$$

où $H(\psi)$ et $D(\psi)$ sont définis, pour ψ quelconque, par :

$$\begin{aligned} H(\psi) &= \left[\frac{1 - \tau}{\psi_1} + \frac{\tau}{\psi_2} \right]^{-1} \\ D(\psi) &= \tau(1 - \tau)(\psi_1 - \psi_2) \end{aligned} \quad (2.86)$$

où ψ_1 et ψ_2 sont les valeurs de ψ dans les phases (1) et (2) respectivement.

2.5.1.2 Problème d'ordre 2

Considérons maintenant le problème à l'ordre 2 défini par les relations (2.41) pour $n = 1$ et dont la solution s'écrit (pour le composite stratifié) :

$$u_i(y) = Q_{ijkl}^1(y)E_{jk,l} \quad (2.87)$$

Les $Q_{ijkl}^1(y)$ sont des fonctions périodiques en y , à moyennes nulles sur la cellule élémentaire et continues à l'interface $y = 0$. Le champ de déformation s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{d}{dy}[u_1(y)] + \eta_{11}^1 = \frac{d}{dy}[Q_{1jkl}^1(y)]E_{jk,l} + \eta_{11}^1 \\ \varepsilon_{22} &= \eta_{22}^1 \\ \varepsilon_{33} &= \eta_{33}^1 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{d}{dy}[u_2(y)] + \eta_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dy}[Q_{2jkl}^1(y)]E_{jk,l} + \eta_{12}^1 \\ \varepsilon_{13} &= \frac{d}{dy}[u_3(y)] + \eta_{13}^1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dy}[Q_{3jkl}^1(y)]E_{jk,l} + \eta_{13}^1 \\ \varepsilon_{23} &= \eta_{23}^1 \end{aligned} \right. \quad (2.88)$$

où les composantes du tenseur d'ordre deux $\boldsymbol{\eta}^1(y)$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{11}^1 = Q_{111}^0(y)E_{11,1} + Q_{122}^0(y)E_{22,1} + Q_{133}^0(y)E_{33,1} \\ \eta_{22}^1 = Q_{212}^0(y)E_{12,2} \\ \eta_{33}^1 = Q_{313}^0(y)E_{13,3} \\ \eta_{12}^1 = \frac{1}{2}[Q_{111}^0(y)E_{11,2} + Q_{122}^0(y)E_{22,2} + Q_{133}^0(y)E_{33,2} + Q_{212}^0(y)E_{12,1}] \\ \eta_{13}^1 = \frac{1}{2}[Q_{111}^0(y)E_{11,3} + Q_{122}^0(y)E_{22,3} + Q_{133}^0(y)E_{33,3} + Q_{313}^0(y)E_{13,1}] \\ \eta_{23}^1 = \frac{1}{2}[Q_{212}^0(y)E_{12,3} + Q_{313}^0(y)E_{13,2}] \end{array} \right. \quad (2.89)$$

dans lesquelles les $Q_{ijk}^0(y)$ sont définis dans (2.83).

Le champ de contrainte s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{dQ_{1jkl}^1}{dy}(y)E_{jk,l} + \eta_{11}^1 \right) + \lambda(\eta_{22}^1 + \eta_{33}^1) \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\eta_{22}^1 + \lambda \left(\frac{dQ_{1jkl}^1}{dy}(y)E_{jk,l} + \eta_{11}^1 + \eta_{33}^1 \right) \\ \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\eta_{33}^1 + \lambda \left(\frac{dQ_{1jkl}^1}{dy}(y)E_{jk,l} + \eta_{22}^1 \right) \\ \sigma_{12} = \mu \left(\frac{dQ_{2jkl}^1}{dy}(y)E_{jk,l} + 2\eta_{12}^1 \right) \\ \sigma_{13} = \mu \left(\frac{dQ_{3jkl}^1}{dy}(y)E_{jk,l} + 2\eta_{13}^1 \right) \\ \sigma_{23} = 2\mu\eta_{23}^1 \end{array} \right. \quad (2.90)$$

La force de volume imposée à la cellule est définie par :

$$\underline{\underline{g}}^1(y) = [\mathbb{B}^0(y) - \langle \mathbb{B}^0(y) \rangle_V] : \nabla_x \mathbf{E}^0 \quad (2.91)$$

où $\mathbb{B}^0(y)$ est le tenseur solution du problème à l'ordre 1 dont les composantes (non nulles) peuvent être déduites à partir de l'équation (2.78) :

$$\begin{aligned} B_{1111}^0(y) &= B_{2222}^0(y) = (\lambda + 2\mu) \frac{dQ_{111}^0}{dy}(y) + \lambda + 2\mu \\ B_{1122}^0(y) &= B_{1133}^0(y) = (\lambda + 2\mu) \frac{dQ_{122}^0}{dy}(y) + \lambda \\ B_{2211}^0(y) &= B_{3311}^0(y) = \lambda \frac{dQ_{111}^0}{dy}(y) + \lambda \\ B_{2222}^0(y) &= B_{3333}^0(y) = (\lambda + 2\mu) \frac{dQ_{122}^0}{dy}(y) + \lambda + 2\mu \end{aligned} \quad (2.92)$$

et :

$$\begin{aligned}
B_{2233}^0(y) &= B_{3322}^0(y) = \lambda \frac{dQ_{122}^0}{dy}(y) + \lambda \\
B_{1212}^0(y) &= B_{1313}^0(y) = \mu \frac{dQ_{212}^0}{dy}(y) + 2\mu \\
B_{2323}^0(y) &= 2\mu
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Notons que $B_{ijkl}^0(y)$ sont constants par phase car les $Q_{ijk}^0(y)$ sont linéaires en y . $\underline{g}^1(y)$ s'écrit sous forme développée :

$$\begin{aligned}
g_1^1(y) &= (B_{1111}^0 - \langle B_{1111}^0 \rangle_V) E_{11,1} + (B_{1122}^0 - \langle B_{1122}^0 \rangle_V) E_{22,1} \\
&\quad + (B_{1133}^0 - \langle B_{1133}^0 \rangle_V) E_{33,1} + (B_{1212}^0 - \langle B_{1212}^0 \rangle_V) E_{12,2} \\
&\quad + (B_{1313}^0 - \langle B_{1313}^0 \rangle_V) E_{13,3} \\
g_2^1(y) &= (B_{1212}^0 - \langle B_{1212}^0 \rangle_V) E_{12,1} + (B_{2211}^0 - \langle B_{2211}^0 \rangle_V) E_{11,2} \\
&\quad + (B_{2222}^0 - \langle B_{2222}^0 \rangle_V) E_{22,2} + (B_{2233}^0 - \langle B_{2233}^0 \rangle_V) E_{33,2} \\
&\quad + (B_{2323}^0 - \langle B_{2323}^0 \rangle_V) E_{23,3} \\
g_3^1(y) &= (B_{1313}^0 - \langle B_{1313}^0 \rangle_V) E_{13,1} + (B_{3311}^0 - \langle B_{3311}^0 \rangle_V) E_{11,3} \\
&\quad + (B_{3333}^0 - \langle B_{3333}^0 \rangle_V) E_{33,3} + (B_{3322}^0 - \langle B_{3322}^0 \rangle_V) E_{22,3} \\
&\quad + (B_{2323}^0 - \langle B_{2323}^0 \rangle_V) E_{23,2}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{11}}{dy}(y) + g_1^1(y) &= 0 \\
\frac{d\sigma_{12}}{dy}(y) + g_2^1(y) &= 0 \\
\frac{d\sigma_{13}}{dy}(y) + g_3^1(y) &= 0
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Dans les équations (2.95), Les expressions des g_i^1 (2.94) et σ_{ij} (2.90) dépendent des 15 composantes : $E_{11,1}$, $E_{22,1}$, $E_{33,1}$, $E_{12,2}$, $E_{13,3}$, $E_{12,1}$, $E_{13,1}$, $E_{11,2}$, $E_{11,3}$, $E_{22,2}$, $E_{33,2}$, $E_{22,3}$, $E_{23,3}$, $E_{23,2}$. Toutefois le composite est invariante par rotation autour de l'axe Ox_1 (isotropie transverse), les problèmes soumis au composantes $E_{33,1}$, $E_{13,3}$, $E_{13,1}$, $E_{11,3}$, $E_{33,3}$, $E_{22,3}$, $E_{23,3}$ sont équivalents aux ceux correspondant à $E_{22,1}$, $E_{12,2}$, $E_{12,1}$, $E_{11,2}$, $E_{22,2}$, $E_{33,2}$, $E_{23,2}$ respectivement. On peut donc se restreindre aux 8 problèmes indépendants avec $E_{11,1}$, $E_{22,1}$, $E_{12,2}$, $E_{12,1}$, $E_{11,2}$, $E_{22,2}$, $E_{33,2}$, $E_{23,3}$ imposé à la cellule élémentaire (les 7 autres peuvent être obtenues par la permutation des indices 2 et 3). A partir de (2.95), les équations à résoudre sont :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy} \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{dQ_{1jkl}^1}{dy}(y) E_{jk,l} + (\lambda + 2\mu) [Q_{111}^0(y) E_{11,1} + Q_{122}^0(y) E_{22,1}] \right. \\
\left. + \lambda Q_{212}^0(y) E_{12,2} \right\} = 0 \\
\frac{d}{dy} \left\{ \mu \frac{dQ_{1jkl}^2}{dy}(y) E_{jk,l} + \mu [Q_{111}^0(y) E_{11,2} + Q_{122}^0(y) E_{22,2} + Q_{212}^0(y) E_{12,2}] \right\} = \\
2\mu(\langle \kappa \rangle_V - \kappa) E_{12,1} + \lambda(\langle \rho \rangle_V - \rho) E_{11,2} + (\lambda + 2\mu)(\langle \theta \rangle_V - \theta) E_{22,2} \\
+ \lambda(\langle \theta \rangle_V - \theta) E_{23,2} + 2(\langle \mu \rangle_V - \mu) E_{23,3}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

où : κ , ρ et θ sont constants par phase et dont les expressions sont :

$$\begin{aligned}\kappa &= m \frac{df(y)}{dy} + 1 \\ \rho &= k \frac{df(y)}{dy} + 1 \\ \theta &= k \frac{D(\lambda)}{D(\lambda + 2\mu)} \frac{df(y)}{dy} + 1\end{aligned}\tag{2.97}$$

avec les définitions de k , m , $D(\psi)$, $f(y)$ déjà données dans (2.84), (2.85) et (2.86). On constate que les équations dans (2.96) sont de forme suivante :

$$\frac{d}{dy} \left[\alpha \frac{dQ^1}{dy}(y) + \beta Q^0(y) \right] = \langle \chi \rangle - \chi\tag{2.98}$$

dans laquelle $Q^1(y)$ est une fonction périodique, à moyenne nulle sur la cellule élémentaire :

$$\begin{aligned}Q^1(y)|_{y=(1-\tau)h} &= Q^1(y)|_{y=-\tau h} \\ \int_{-\tau h}^{(1-\tau)h} Q^1(y) dy &= 0\end{aligned}\tag{2.99}$$

et continue à l'interface, c'est à dire en $y = 0$: $[Q^1(y)]_{y=0} = 0$.

D'autre part, la continuité du vecteur contrainte à l'interface en $y = 0$ implique que :

$$\left[\alpha \frac{dQ^1}{dy}(y) + \beta \right]_{y=0} = 0\tag{2.100}$$

Finalement, on obtient les composantes non nulles du tenseur $\mathbb{Q}^1(y)$:

$$\begin{aligned}Q_{1111}^1(y) &= hk(\langle F \rangle - F) \\ Q_{1221}^1(y) &= Q_{1331}^1(y) = hk(\langle F \rangle - F)D(\lambda)/D(\lambda + 2\mu) \\ Q_{1122}^1(y) &= Q_{1133}^1(y) = hm(\langle \eta F \rangle - \eta F) \\ Q_{2112}^1(y) &= Q_{3113}^1(y) = hk(\langle F \rangle - F) + (\langle F/\mu \rangle - F\mu)H(\lambda + 2\mu)D(\eta) \\ Q_{2222}^1(y) &= Q_{3333}^1(y) = hk(\langle F \rangle - F)D(\lambda)/D(\lambda + 2\mu) \\ &\quad + (\langle F/\mu \rangle - F\mu)H(\lambda + 2\mu)D(\phi) \\ Q_{2332}^1(y) &= Q_{3223}^1(y) = hk(\langle F \rangle - F)D(\lambda)/D(\lambda + 2\mu) \\ &\quad + (\langle F/\mu \rangle - F\mu)H(\lambda + 2\mu)D(\gamma) \\ Q_{2121}^1(y) &= Q_{3131}^1(y) = hm(\langle F \rangle - F) \\ Q_{2233}^1(y) &= Q_{3322}^1(y) = h(\langle F/\mu \rangle - F\mu)D(\mu)\end{aligned}\tag{2.101}$$

où la fonction $F(y)$ est définie par :

$$F(y) = \begin{cases} y[y/h - (1 - \tau)]/2(1 - \tau) & \text{dans (a)} \\ -y[y/h + \tau]/2\tau & \text{dans (b)} \end{cases}\tag{2.102}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
M(\psi) &= (1 - \tau)\psi_a + \tau\psi_b \\
\eta &= \lambda/(\lambda + 2\mu) \\
\gamma &= M(\eta)\eta + \lambda(1 - \eta)/H(\lambda + 2\mu) \\
\phi &= \gamma + 2\mu/H(\lambda + 2\mu)
\end{aligned} \tag{2.103}$$

2.5.2 Expressions des coefficients élastiques

Les composantes du tenseur $\mathbb{C}^{0,1}$ sont nulles pour des raisons de symétrie. Les composantes des tenseurs $\mathbb{C}^{0,0}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$ sont calculées par (2.56) avec les définitions (2.17) et (2.26) pour les tenseurs de localisation $\mathbb{A}^0(y)$ et $\mathbb{A}^1(y)$. Les composantes non nulles de $\mathbb{A}^0(y)$ sont :

$$\begin{aligned}
A_{1111}^0(y) &= \frac{dQ_{111}^0}{dy}(y) + 1 \\
A_{1122}^0(y) &= A_{1133}^0(y) = \frac{dQ_{122}^0}{dy}(y) \\
A_{1212}^0(y) &= A_{1313}^0(y) = \frac{dQ_{212}^0}{dy}(y)
\end{aligned} \tag{2.104}$$

où les expressions de Q_{111}^0 , Q_{122}^0 et Q_{212}^0 se trouvent dans (2.83). Les composantes non nulles de $\mathbb{A}^1(y)$ sont :

$$\begin{aligned}
A_{11111}^1(y) &= \frac{dQ_{1111}^1}{dy}(y) + Q_{111}^0 \\
A_{11221}^1(y) &= A_{11331}^1(y) = \frac{dQ_{1221}^1}{dy}(y) + Q_{122}^0 \\
A_{11122}^1(y) &= A_{11133}^1(y) = \frac{dQ_{1122}^1}{dy}(y) \\
A_{12112}^1(y) &= A_{13113}^1(y) = \frac{dQ_{2112}^1}{dy}(y) + Q_{111}^0 \\
A_{12222}^1(y) &= A_{13333}^1(y) = \frac{dQ_{2222}^1}{dy}(y) + Q_{122}^0 \\
A_{12332}^1(y) &= A_{13223}^1(y) = \frac{dQ_{2332}^1}{dy}(y) + Q_{133}^0 \\
A_{12121}^1(y) &= A_{13131}^1(y) = \frac{dQ_{2121}^1}{dy}(y) + Q_{212}^0 \\
A_{12233}^1(y) &= A_{13322}^1(y) = \frac{dQ_{2233}^1}{dy}(y)
\end{aligned} \tag{2.105}$$

où les expressions de Q_{1111}^1 , Q_{1221}^1 , Q_{1122}^1 , Q_{2112}^1 , Q_{2222}^1 , Q_{2332}^1 , Q_{2121}^1 et Q_{2233}^1 se trouvent dans (2.101).

On représente les tenseurs élastiques $\mathbb{C}^{0,0}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$ à l'aide de la représentation matricielle décrite en section 1.1.1.2 du chapitre 1. La représentation matricielle

du tenseur $\mathbb{C}^{0,0}$ est :

$$[\mathbb{C}^{0,0}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{0,0} & C_{12}^{0,0} & C_{12}^{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22}^{0,0} & C_{23}^{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22}^{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & C_{44}^{0,0} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55}^{0,0} & 0 \\ & & & & & C_{55}^{0,0} \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

où les composantes non nulles sont définies par :

$$\begin{aligned} C_{11}^{0,0} &= H(\lambda + 2\mu) \\ C_{22}^{0,0} &= C_{33}^{0,0} = H(\lambda + 2\mu)M(\gamma) + 2M(\mu) \\ C_{12}^{0,0} &= C_{13}^{0,0} = H(\lambda + 2\mu)M(\eta) \\ C_{23}^{0,0} &= H(\lambda + 2\mu)M(\gamma) \\ C_{44}^{0,0} &= 2M(\mu) \\ C_{55}^{0,0} &= C_{66}^{0,0} = 2H(\mu) \end{aligned} \quad (2.107)$$

Avec les notations H , M , γ et η définies dans (2.86) et (2.103). La représentation matricielle de $\mathbb{C}^{1,1}$ s'écrit :

$$[\mathbb{C}^{1,1}] = \begin{bmatrix} [A] & & & 0 \\ & [B] & & \\ & & [C] & \\ 0 & & & [D] \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

où les matrices $[A]$, $[B]$, $[C]$ et $[D]$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & C_{5353}^{1,1} & C_{5362}^{1,1} \\ & & & & C_{6262}^{1,1} \end{bmatrix}_{5 \times 5} \\ [B] &= \begin{bmatrix} C_{2222}^{1,1} & C_{2212}^{1,1} & C_{2232}^{1,1} & C_{2243}^{1,1} & 0 \\ & C_{1212}^{1,1} & C_{1232}^{1,1} & C_{1243}^{1,1} & 0 \\ & & C_{3232}^{1,1} & C_{3243}^{1,1} & 0 \\ \text{Sym} & & & C_{4343}^{1,1} & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5} \\ [C] &= \begin{bmatrix} C_{3333}^{1,1} & C_{3313}^{1,1} & C_{3323}^{1,1} & C_{3342}^{1,1} & 0 \\ & C_{1313}^{1,1} & C_{1323}^{1,1} & C_{1342}^{1,1} & 0 \\ & & C_{2323}^{1,1} & C_{2342}^{1,1} & 0 \\ \text{Sym} & & & C_{4242}^{1,1} & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5} \\ [D] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & C_{5252}^{1,1} & C_{5263}^{1,1} \\ & & C_{6363}^{1,1} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Les composantes non nulles du tenseur $\mathbb{C}^{1,1}$ sont :

$$\begin{aligned}
C_{2222}^{1,1} &= C_{3333}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{Q_4^2 Q_2}{3Q_1^2} \\
C_{1212}^{1,1} &= C_{1313}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2)^2 Q_2}{3(\lambda_1 + 2\mu_1)^2 (\lambda_2 + 2\mu_2)^2 Q_1} \\
C_{2323}^{1,1} &= C_{3232}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \mu_1^2 \mu_2^2 Q_2^3}{3(\lambda_2 + 2\mu_2)^2 (\lambda_1 + 2\mu_1)^2 Q_1^2} \\
C_{5252}^{1,1} &= C_{6363}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 Q_3}{6\mu_1^2 \mu_2^2 Q_2^2} \\
C_{6262}^{1,1} &= C_{5353}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{2(\mu_1 - \mu_2)^2 Q_5}{3\mu_1^2 \mu_2^2 Q_2^2} \\
C_{4242}^{1,1} &= C_{4343}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 Q_2}{6} \\
C_{1222}^{1,1} &= C_{1333}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) Q_4 Q_2}{3(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) Q_1^2} \\
C_{1232}^{1,1} &= C_{1323}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{\mu_1 \mu_2 (\lambda_2 - \lambda_1) (\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) Q_2^2}{3(\lambda_1 + 2\mu_1)^2 (\lambda_2 + 2\mu_2)^2 Q_1^2} \\
C_{2232}^{1,1} &= C_{3323}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{\mu_1 \mu_2 (\lambda_2 - \lambda_1) Q_4 Q_2^2}{3(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) Q_1^2} \\
C_{2243}^{1,1} &= C_{3342}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{\sqrt{2}(\mu_2 - \mu_1) Q_4 Q_2}{6Q_1} \\
C_{1243}^{1,1} &= C_{1342}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{\sqrt{2}(\mu_2 - \mu_1)(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) Q_2}{6(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) Q_1} \\
C_{3243}^{1,1} &= C_{2342}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{\sqrt{2}\mu_1 \mu_2 (\mu_2 - \mu_1) (\lambda_1 - \lambda_2) Q_2^2}{6(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) Q_1} \\
C_{5263}^{1,1} &= C_{6352}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 Q_3}{6\mu_1^2 \mu_2^2 Q_2^2} \\
C_{5362}^{1,1} &= C_{6253}^{1,1} = (1 - \tau)^2 \tau^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 Q_6}{3\mu_1^2 \mu_2^2 Q_2^2}
\end{aligned} \tag{2.110}$$

avec :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1 - \tau}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\tau}{\lambda_2 + 2\mu_2} \\
Q_2 &= \frac{1 - \tau}{\mu_1} + \frac{\tau}{\mu_2} \\
Q_3 &= (1 - \tau)\mu_1 + \tau\mu_2 \\
Q_4 &= (\mu_2 - \mu_1)Q_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\mu_1 \mu_2 Q_2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

et :

$$\begin{aligned}
 Q_5 &= \frac{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_2 + 2\mu_2}\tau + \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1}(1 - \tau) \\
 Q_6 &= \frac{\mu_2\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\tau + \frac{\mu_1\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}(1 - \tau)
 \end{aligned}
 \tag{2.112}$$

2.5.3 Illustration

2.5.3.1 Représentation des propriétés effectives avec la fraction volumique

A titre de première illustration, on propose d'étudier l'influence de la fraction volumique des phases sur les coefficients du second gradient. On considère les valeurs suivantes pour les coefficient de Poisson : $\nu_1 = 1/4$ et $\nu_2 = 1/3$. Le module de Young de la phase (1) est choisi égal à $1MPa$ tandis que $E_2 = 5MPa$. On représente sur les figures 2.2 et 2.3 la variation des coefficients non nuls du tenseur élastique $\mathbb{C}^{0,0}$ avec la fraction volumique τ . Dans les deux cas limites où la fraction volumique τ prend les valeurs 0 et 1, les propriétés élastiques effectives $\mathbb{C}^{0,0}$, s'identifient aux propriétés élastique des phases 1 ou 2.

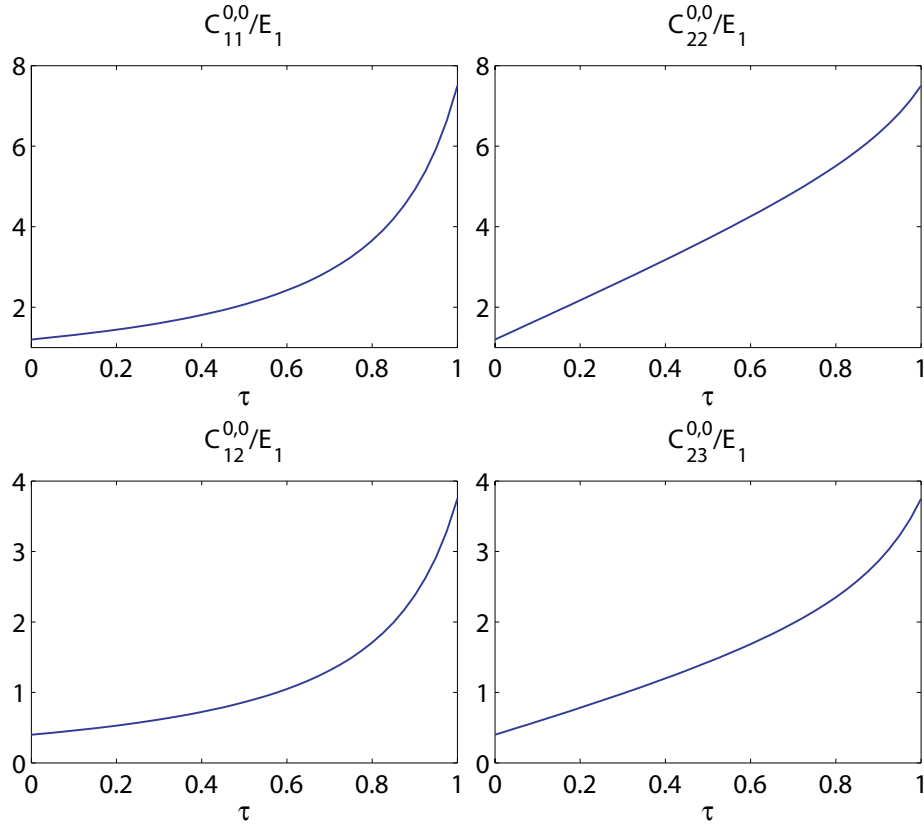


FIGURE 2.2 – Variation des coefficients élastiques $C_{11}^{0,0}$, $C_{22}^{0,0}$, $C_{12}^{0,0}$, $C_{23}^{0,0}$ avec le fraction volumique τ

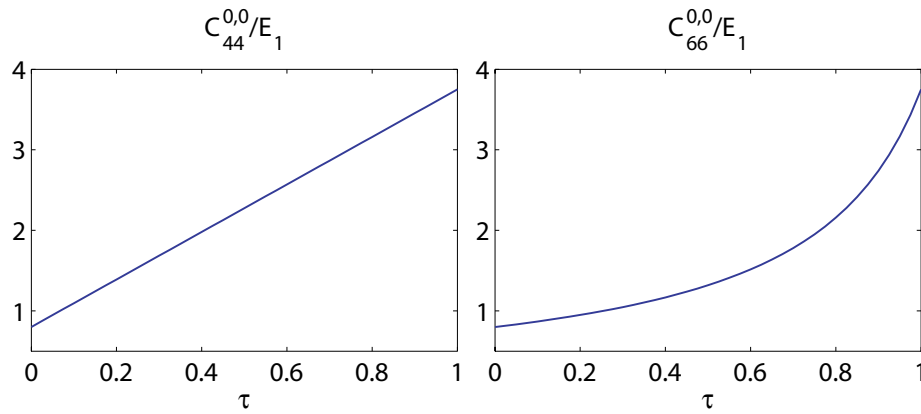


FIGURE 2.3 – Variation des coefficients élastiques $C_{44}^{0,0}$ et $C_{66}^{0,0}$ avec le fraction volumique τ

Sur les figures 2.4, 2.5 et 2.6 sont représentées les variations des composantes non nulles du tenseur élastique de second gradient $\mathbb{C}^{1,1}$ avec la fraction volumique τ . On observe que dans les cas limites $\tau = 0$ et $\tau = 1$, ces coefficients élastiques sont tous nuls. On a donc pas de persistance des effets du second gradient lorsque l'on supprime l'hétérogénéité à l'échelle locale.

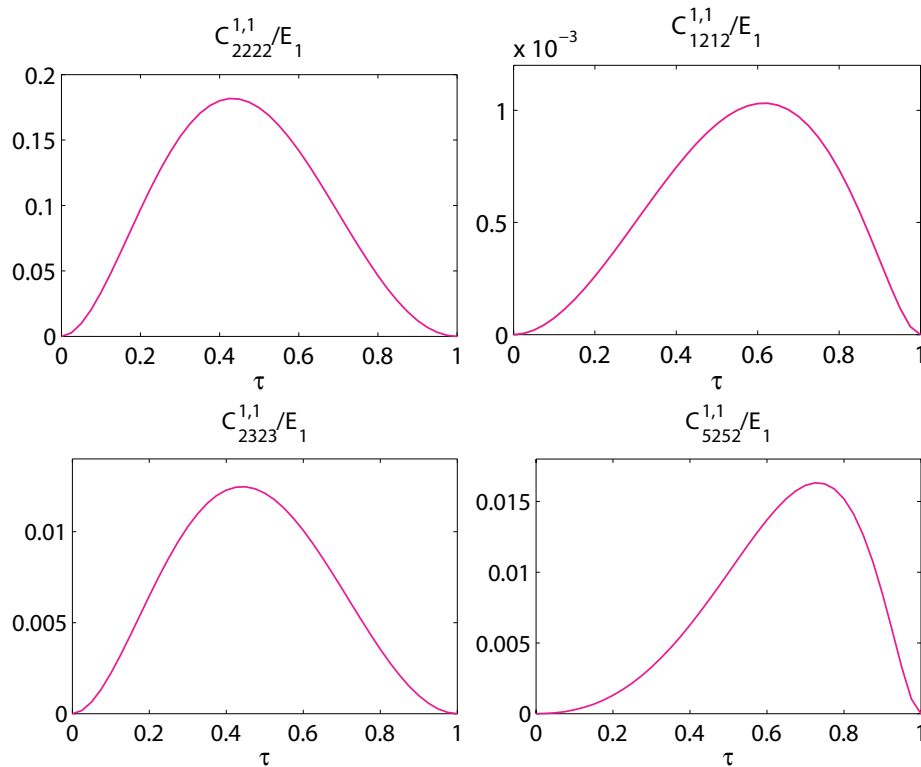


FIGURE 2.4 – Variation des coefficients élastiques $C_{2222}^{1,1}$, $C_{1212}^{1,1}$, $C_{2323}^{1,1}$ et $C_{5252}^{1,1}$ avec le fraction volumique τ

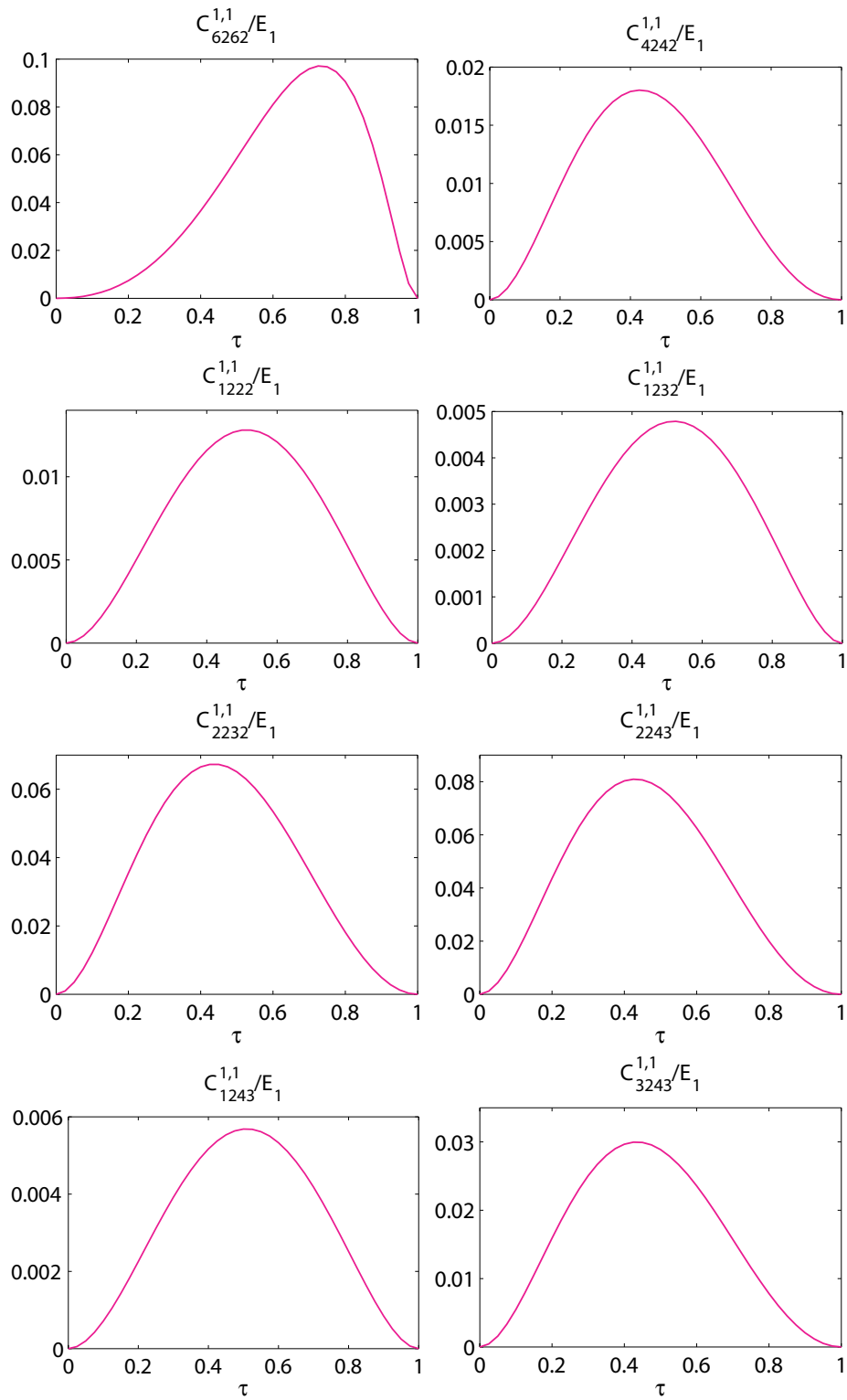


FIGURE 2.5 – Variation des coefficients élastiques $C_{6262}^{1,1}$, $C_{4242}^{1,1}$, $C_{1222}^{1,1}$, $C_{1232}^{1,1}$, $C_{2232}^{1,1}$, $C_{2243}^{1,1}$, $C_{1243}^{1,1}$ et $C_{3243}^{1,1}$ avec le fraction volumique τ

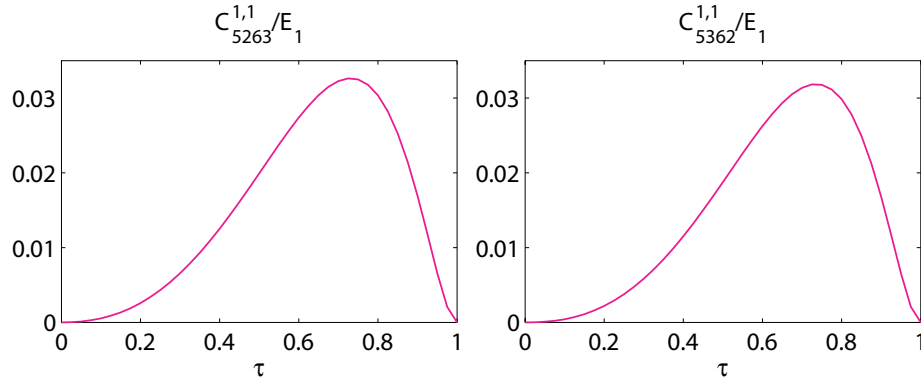


FIGURE 2.6 – Variation des coefficients élastiques $C_{5263}^{1,1}$ et $C_{5362}^{1,1}$ avec le fraction volumique τ

2.5.3.2 Influence du contraste sur les propriétés effectives

On propose maintenant d'examiner l'effet du contraste de propriétés élastiques locales sur les coefficients du second gradient. On considère toujours les mêmes valeurs pour les coefficients de Poisson, $\nu_1 = 1/4$ et $\nu_2 = 1/3$, on pose $E_1 = 1$ et on définit par, $c = E_2/E_1$, le contraste de propriétés variant de 10^{-4} à 10^4 . La fraction volumique τ est choisie égale à 0.3.

Sur la figure 2.7 on représente la variation des coefficients élastiques $C_{ij}^{0,0}$ avec le contraste c . On observe deux types de courbes, les coefficients $C_{11}^{0,0}$, $C_{12}^{0,0}$ et $C_{66}^{0,0}$ tendent vers zéro pour les faibles contrastes et saturent pour les forts contrastes. Les coefficients $C_{22}^{0,0}$, $C_{23}^{0,0}$ et $C_{44}^{0,0}$ convergent vers une valeur finie non nulle pour les petites valeurs du contraste et divergent pour les forts contrastes. Dans le cas d'un contraste infini cela correspond à un matériau parfaitement rigide dans les directions Ox_2 et Ox_3 .

Les variations des coefficients du second gradient avec le contraste sont représentées sur les figures 2.8, 2.9 et 2.10. On observe que certains coefficients convergent vers une valeur finie pour les faibles contrastes, c'est le cas notamment des coefficients $C_{5252}^{1,1}$, $C_{6262}^{1,1}$, $C_{5263}^{1,1}$, $C_{5362}^{1,1}$... Un certain nombre de coefficients divergent pour les faibles valeurs du contraste, c'est le cas notamment des coefficients C_{2222} , C_{2323} , C_{4242} ... Dans tous les cas on observe que les coefficients divergent pour le cas des inclusions parfaitement rigides (contraste infini). Cela suppose que les effets du second gradient seront les plus notables dans les domaines de très faible ou de très fort contraste.

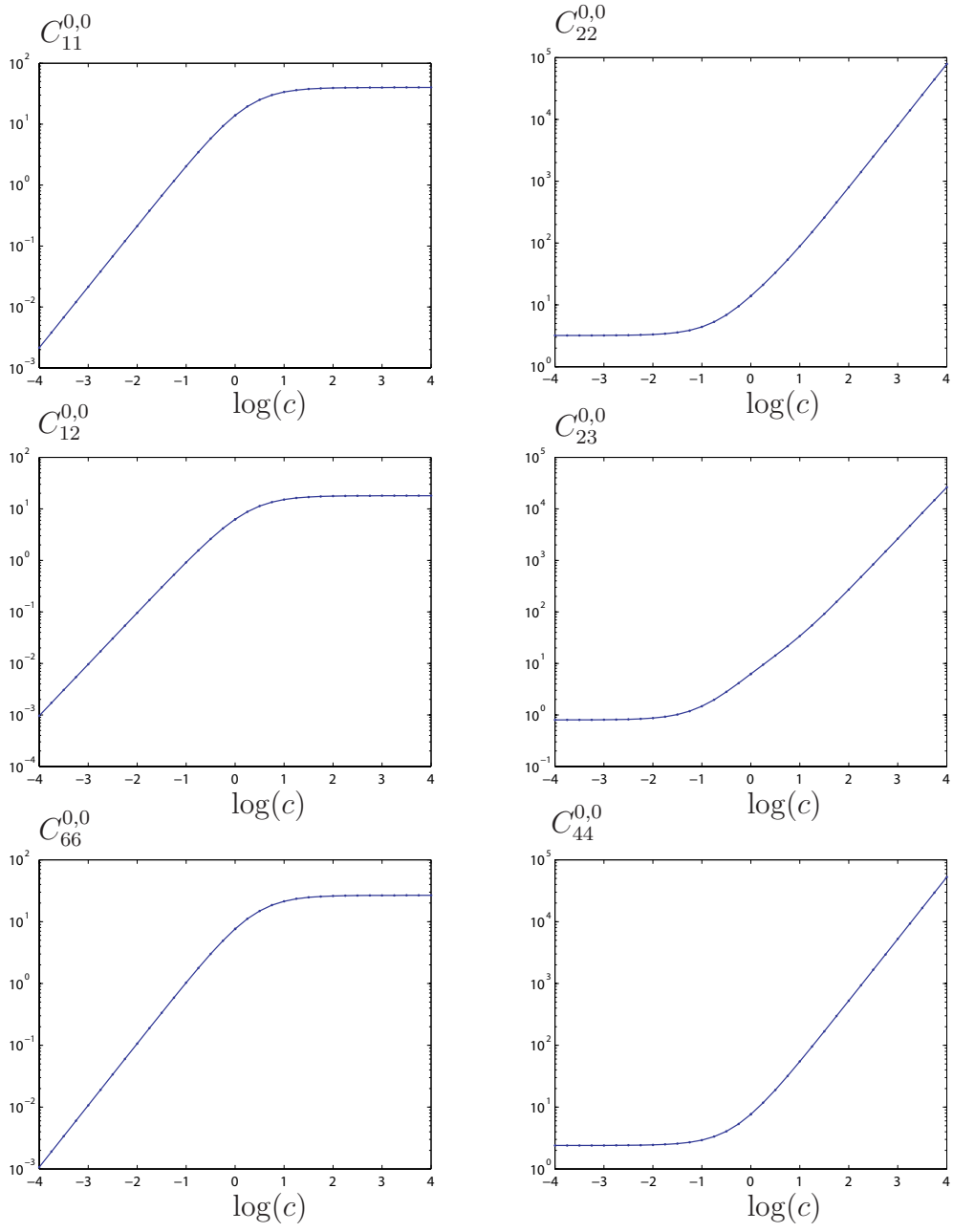


FIGURE 2.7 – Variation des coefficients élastiques $C_{ij}^{0,0}$ avec le contraste $c = E_2/E_1$ pour une fraction volumique $\tau = 0.3$

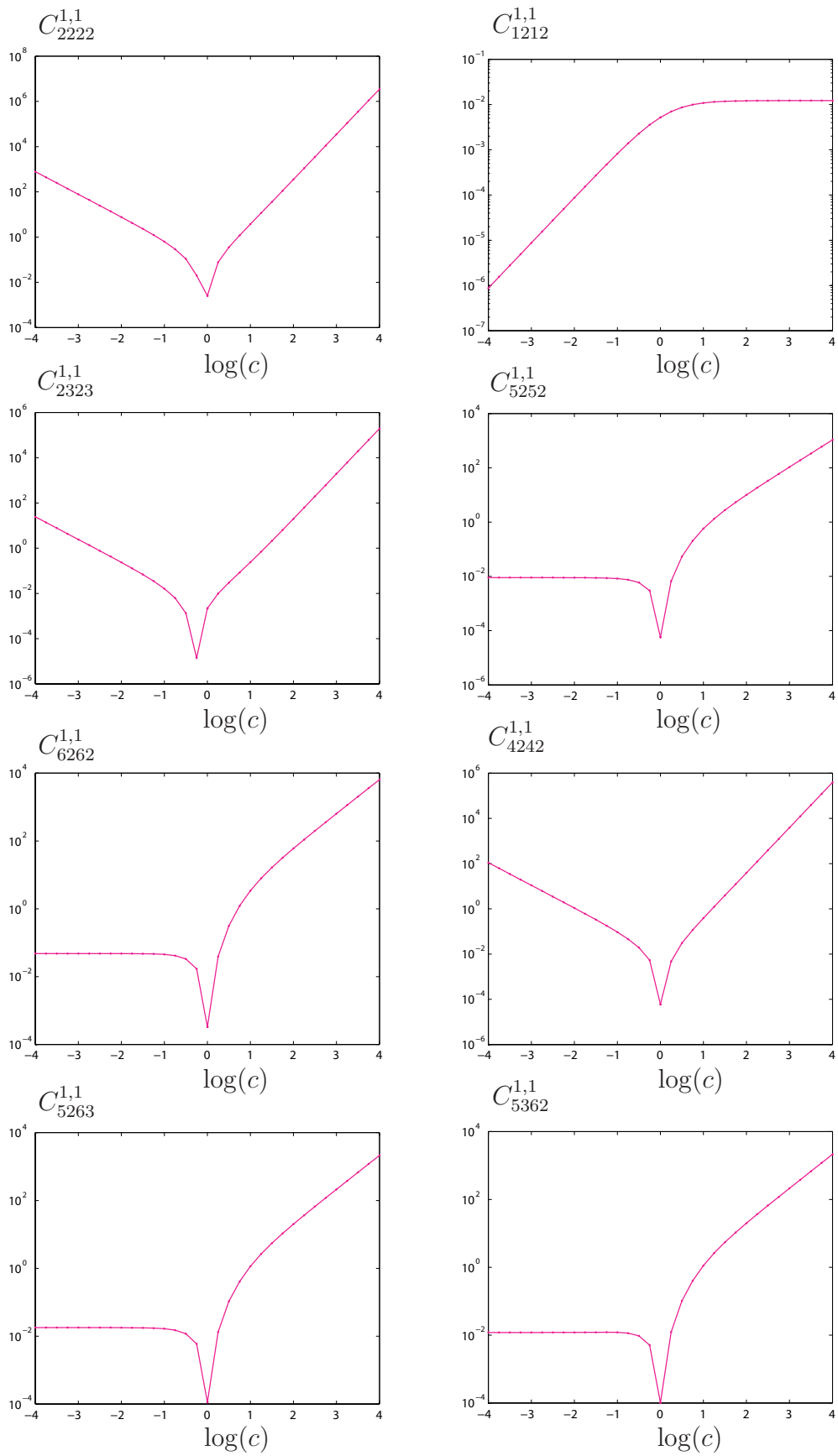


FIGURE 2.8 – Variation des coefficients élastiques $C_{ijkl}^{1,1}$ avec le contraste $c = E_2/E_1$ pour une fraction volumique $\tau = 0.3$

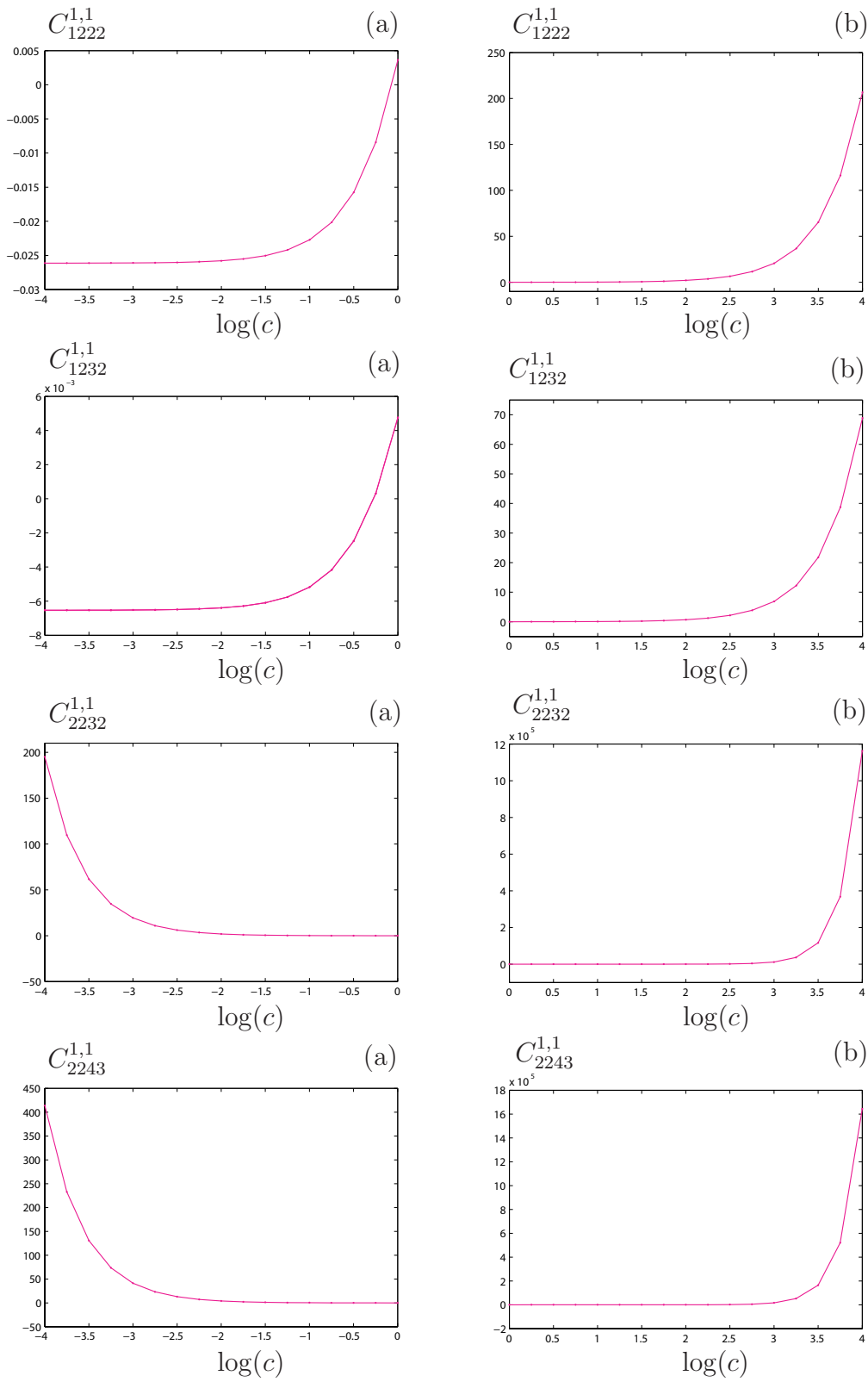


FIGURE 2.9 – Variation des coefficients élastiques $C_{ijkl}^{1,1}$ avec le contraste $c = E_2/E_1$ pour une fraction volumique $\tau = 0.3$; (a) cas de contraste $c \geq 1$; (b) cas de contraste $c \leq 1$.

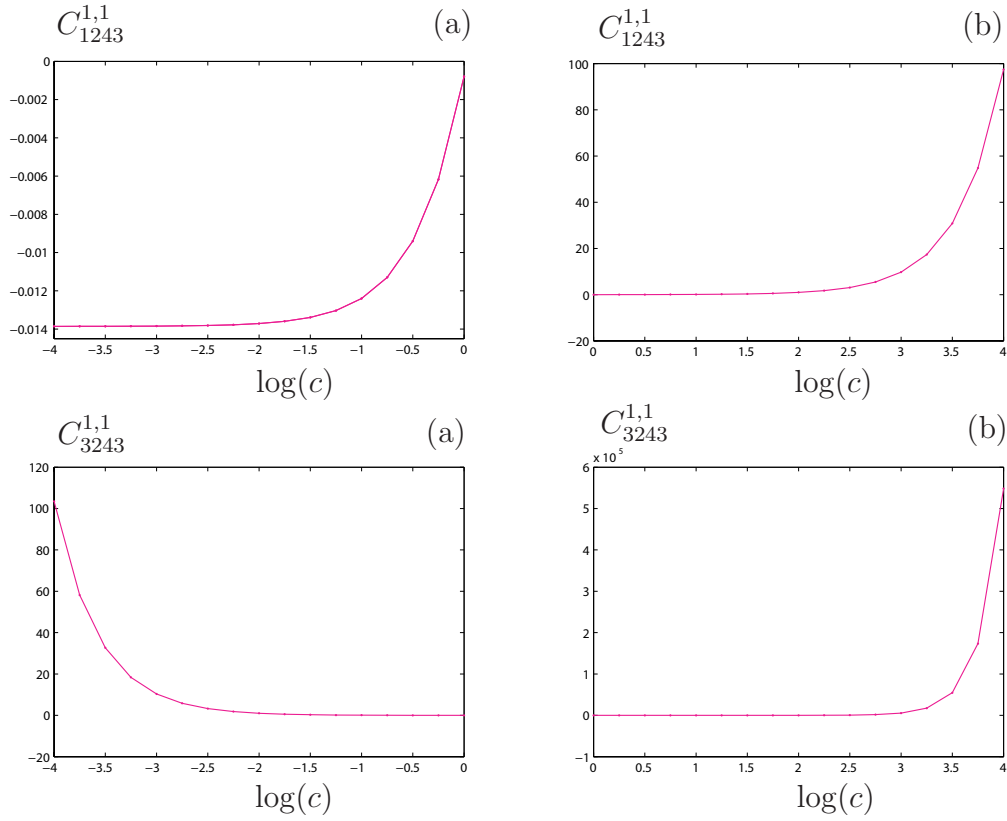


FIGURE 2.10 – Variation des coefficients élastiques $C_{ijkl}^{1,1}$ avec le contraste $c = E_2/E_1$ pour une fraction volumique $\tau = 0.3$; (a) cas de contraste $c \geq 1$; (b) cas de contraste $c \leq 1$.

2.6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons présenté une approche tridimensionnelle en élasticité linéaire pour le calcul des coefficients du second gradient. L'approche repose sur l'utilisation des développements asymptotiques à l'échelle locale et d'une transition d'échelle basée sur une équivalence énergétique entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Le calcul des coefficients homogénéisés d'ordre supérieur repose sur la résolution de problèmes élémentaires pour la cellule de base périodique. Les problèmes d'ordre supérieur sont définis par des forces de volume et des champs de polarisation dont les expressions dépendent des champs microscopiques obtenus à l'ordre précédent et font explicitement intervenir le gradient de la déformation macroscopique. Ces problèmes élémentaires peuvent être facilement implémentés en utilisant les outils numériques classiques tels que les éléments finis. Dans le chapitre qui suit on présente des algorithmes basés sur la transformée de Fourier rapide.

Le cadre d'homogénéisation proposé étend l'approche classique (locale) qui peut être par ailleurs retrouvée lorsque le facteur d'échelle tend vers zéro. D'autre part, pour des facteurs d'échelles non nuls, le modèle obtenu permet de retrouver celui déjà proposé par Green et Rivlin [27] et qui généralise le modèle du second gradient de Toupin [61] et Mindlin [44] en introduisant les gradients de la défor-

mation à tous les ordres. Insistons encore une fois sur le fait que le modèle de Mindlin est de nature phénoménologique tandis que l'approche développée dans ce chapitre permet de calculer les tenseurs du milieu à gradient à partir de la microstructure.

Enfin, il est important de noter que cette approche micromécanique ne présente pas de persistance des effets du gradient de la déformation en l'absence d'hétérogénéité à l'échelle locale. Ce résultat a pu être observé dans le cas d'un composite stratifié, d'autres illustrations au chapitre suivant pour d'autre type de microstructure confirmeront ce résultat. Rappelons que ces effets persistants des gradients de déformation constituent le défaut majeur des approches basées sur les conditions de bord quadratique, présentées au chapitre 1. En fait, on peut énoncer que ces effets microstructuraux persistants ne peuvent pas être observés dans le cadre des approches par développement asymptotique puisque les paramètres de chargement pour les problèmes d'ordre supérieur qui dépendent des fluctuations des champs obtenus à l'ordre précédent sont tous nuls.

Chapitre 3

Calculs des propriétés du second gradient par transformée de Fourier rapide

Dans l'objectif de déterminer les propriétés du second gradient à partir des images de microstructures, on propose des algorithmes basés sur la transformée de Fourier rapide (TFR) pour la résolution des problèmes sur la cellule élémentaire. Les approches par TFR ont été développées par le groupe du LMA de Marseille (cf. [52, 53, 42]) et sont bien adaptées pour traiter les microstructures complexes et les images pixélisées obtenues par les techniques modernes d'imagerie. Ces approches présentent un certain nombre d'avantages vis à vis des méthodes basées sur les éléments finis puisqu'elles ne nécessitent pas le maillage des phases, elles sont bien adaptées pour les conditions périodiques au bord de la cellule et permettent de réduire significativement les temps de calculs et coûts mémoire. Dans ce chapitre on rappelle le schéma de base formulé en déformation pour la résolution du problème sur la cellule soumis à une déformation homogène, puis, on propose des extensions pour traiter les problèmes d'ordre supérieur sur la cellule élémentaire. On établit également des schémas itératifs formulés en contraintes, mieux adaptés pour traiter les problèmes où les inclusions sont plus rigides que la matrice. Dans la dernière partie, on illustre ces approches pour le calcul des propriétés du second gradient dans le cas particulier de composites à fibres.

3.1 Résolution par TFR du problème à l'ordre 1

3.1.1 Représentation dans l'espace de Fourier

Le problème à l'ordre 1, décrit au chapitre précédent, est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}(\underline{y})) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}) + \mathbf{E}] \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}) = \operatorname{sym}[\nabla_y \underline{u}(\underline{y})] \\ \underline{u}(\underline{y}) \text{ Y-périodique,} \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ Y-antipériodique} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

La solution de ce problème, $\underline{u}(\underline{y}) = \mathbb{Q}^0(\underline{y}) : \mathbf{E}$, dépend linéairement de la déformation macroscopique \mathbf{E} et à moyenne nulle sur le volume de la cellule élémentaire

V , $\langle \underline{u}(\underline{y}) \rangle_V = 0$. Les conditions de périodicité des champs locaux qui sont imposées sur les faces opposées de la cellule élémentaire suggèrent de rechercher la solution du problème à l'aide de séries de Fourier. Pour toute fonction de la variable réelle \underline{y} , notée $F(\underline{y})$, on note donc par $F(\underline{\xi})$ sa transformée de Fourier définie par :

$$F(\underline{\xi}) = \frac{1}{V} \int_V F(\underline{y}) \exp(-i\underline{\xi} \cdot \underline{y}) dV \quad (3.2)$$

Ainsi $\underline{u}(\underline{\xi})$, $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi})$, $\underline{\sigma}(\underline{\xi})$ sont les transformées de Fourier des champs $\underline{u}(\underline{y})$, $\underline{\varepsilon}(\underline{y})$, $\underline{\sigma}(\underline{y})$. Notons que le terme correspondant au vecteur d'onde $\underline{\xi} = 0$ dans (3.2) correspond à la valeur moyenne de $F(\underline{y})$ sur la cellule élémentaire :

$$F(\underline{\xi} = 0) = \frac{1}{V} \int_V F(\underline{y}) dV = \langle F(\underline{y}) \rangle_V \quad (3.3)$$

L'équation de compatibilité et l'équation d'équilibre sont des équations aux dérivées partielles dans le domaine réel mais deviennent algébriques dans le domaine de Fourier. Le problème (3.1) se réécrit :

$$\begin{cases} i\underline{\sigma}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} = 0 \\ \underline{\sigma}(\underline{\xi}) = \mathbb{C}(\underline{\xi}) * (\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \underline{E}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = \frac{i}{2}(\underline{\xi} \otimes \underline{u}(\underline{\xi}) + \underline{u}(\underline{\xi}) \otimes \underline{\xi}) \end{cases} \quad (3.4)$$

où le symbole "*" représente le produit de convolution de $\mathbb{C}(\underline{\xi})$ par $(\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \underline{E})$. On propose maintenant un formalisme tensoriel qui permet de donner une interprétation géométrique aux conditions de compatibilité et d'équilibre. Le champ $\underline{\varepsilon}(\underline{y})$ dérive d'un déplacement si et seulement si :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) \quad \text{ou} \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = 0 \quad (3.5)$$

où les tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{P}(\underline{\xi})$ et $\mathbb{Q}(\underline{\xi})$ sont définis, pour tout $\underline{\xi} \neq 0$, par :

$$\mathbb{Q}(\underline{\xi}) = \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_3(\underline{\xi}), \quad \mathbb{P}(\underline{\xi}) = \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \quad (3.6)$$

et où les tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{E}_n(\underline{\xi})$ pour $n = 1..4$ sont les quatre premiers tenseurs de la base de Walpole [64]. On rappelle les expressions de ces tenseurs :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) = \frac{1}{2}\underline{Q}(\underline{\xi}) \otimes \underline{Q}(\underline{\xi}), & \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) = \underline{P}(\underline{\xi}) \otimes \underline{P}(\underline{\xi}) \\ \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) = \underline{Q}(\underline{\xi}) \underline{\otimes} \underline{Q}(\underline{\xi}) - \mathbb{E}_1(\underline{\xi}), & \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) = \underline{Q}(\underline{\xi}) \underline{\otimes} \underline{P}(\underline{\xi}) + \underline{P}(\underline{\xi}) \underline{\otimes} \underline{Q}(\underline{\xi}) \\ \mathbb{E}_5(\underline{\xi}) = \underline{P}(\underline{\xi}) \otimes \underline{Q}(\underline{\xi}), & \mathbb{E}_6(\underline{\xi}) = \underline{Q}(\underline{\xi}) \otimes \underline{P}(\underline{\xi}) \end{cases} \quad (3.7)$$

Dans les relations ci-dessus les tenseurs d'ordre deux $\underline{P}(\underline{\xi})$ et $\underline{Q}(\underline{\xi})$ sont définis, pour tout $\underline{\xi} \neq 0$, par :

$$\underline{P}(\underline{\xi}) = \frac{1}{|\underline{\xi}|^2} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi}, \quad \underline{Q}(\underline{\xi}) = \underline{I} - \underline{P}(\underline{\xi}) \quad (3.8)$$

et $\mathbf{P}(\underline{\xi}) = \mathbf{Q}(\underline{\xi}) = 0$ lorsque $\underline{\xi} = 0$. D'autre part, tout champ de contrainte auto-équilibré vérifie les relations :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) \quad (3.9)$$

Dans le domaine de Fourier, le problème posé sur la cellule élémentaire (3.4) se réécrit donc :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \mathbb{C}(\underline{\xi}) * (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \mathbf{E}) \\ \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0 \\ \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Notons que le système d'équations (3.10) est non local compte tenu de la présence du produit de convolution. Notons également que les tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{P}(\underline{\xi})$ et $\mathbb{Q}(\underline{\xi})$ sont deux projecteurs ayant les propriétés classiques suivantes :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \begin{cases} \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \mathbb{P}(\underline{\xi}) = \mathbb{P}(\underline{\xi}), & \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \mathbb{Q}(\underline{\xi}) = \mathbb{Q}(\underline{\xi}) \\ \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \mathbb{Q}(\underline{\xi}) = \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \mathbb{P}(\underline{\xi}) = 0 \\ \mathbb{I} = \mathbb{P}(\underline{\xi}) + \mathbb{Q}(\underline{\xi}) \end{cases} \quad (3.11)$$

où \mathbb{I} est l'identité d'ordre quatre dont les composantes sont $I_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$. Pour tout tenseur $\mathbf{a}(\underline{\xi})$, à moyenne nulle sur cellule élémentaire, le tenseur d'ordre deux $\mathbf{a}_Q(\underline{\xi}) = \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi})$ représente la projection de $\mathbf{a}_Q(\underline{\xi})$ sur le plan normal à $\underline{\xi}$ tandis que le tenseur $\mathbf{a}_P(\underline{\xi}) = \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \mathbf{a}(\underline{\xi})$ désigne la composante "hors plan" de $\mathbf{a}_Q(\underline{\xi})$.

3.1.2 L'équation de Lippmann-Schwinger

La réécriture du problème d'inhomogénéité sous la forme d'une équation intégrale utilisant les opérateurs de Green s'appuie sur la solution du problème d'inclusion (au sens d'Eshelby [19]) correspondant à un milieu fictif, homogène, de rigidité \mathbb{C}^0 soumis à une polarisation $\boldsymbol{\tau}(\underline{y})$.

Considérons donc ce problème auxiliaire : une cellule de base constituée d'un milieu élastique homogène de rigidité \mathbb{C}^0 (on notera par $\mathbb{S}^0 = (\mathbb{C}^0)^{-1}$ le tenseur de souplesse associé) est soumise à un champ de polarisation $\boldsymbol{\tau}(\underline{y})$ (noté $\boldsymbol{\tau}(\underline{\xi})$ dans le domaine de Fourier) défini en tout point $\underline{y} \in V$. Les équations de ce problème auxiliaire sont :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{\xi}) \\ \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = 0, \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

La solution de (3.12) s'exprime au moyen de l'opérateur de Green périodique associé au milieu de référence de rigidité \mathbb{C}^0 . Dans l'espace de Fourier, la déformation est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) = -\boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) : \boldsymbol{\tau}(\underline{\xi}) \quad (3.13)$$

pour tout $\underline{\xi} \neq 0$. $\boldsymbol{\Gamma}^0$ est le tenseur de Green pour les déformations. Pour le milieu isotrope, de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 , l'expression analytique de $\boldsymbol{\Gamma}^0$ est donnée, pour tout $\underline{\xi} \neq 0$, par :

$$\boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}) = \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_2(\underline{\xi}) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbb{E}_4(\underline{\xi}) \quad (3.14)$$

et prend la valeur $\Gamma^0(\underline{\xi}) = 0$ lorsque $\underline{\xi} = 0$. Dans (3.14), les tenseurs $\mathbb{E}_2(\underline{\xi})$ et $\mathbb{E}_4(\underline{\xi})$ sont les éléments de la base de Walpole définis par (3.7). Notons que le tenseur de Green pour les déformations possède les propriétés suivantes :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : \Gamma^0(\underline{\xi}) = \Gamma^0(\underline{\xi}), \quad \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \Gamma^0(\underline{\xi}) = 0 \quad (3.15)$$

ce qui exprime le fait que le champ $\varepsilon(\underline{\xi})$ défini par (3.13) est un champ compatible. Revenons au problème d'inhomogénéité qui nous intéresse ici. Introduisons dans (3.10) la polarisation $\tau(\underline{y})$ définie par :

$$\tau(\underline{y}) = (\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0) : \varepsilon(\underline{y}) + \mathbb{C}(\underline{y}) : \mathbf{E} \quad (3.16)$$

Alors, le champ de déformation $\varepsilon(\underline{\xi})$, solution du problème d'inhomogénéité (3.10), est obtenu en résolvant l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\underline{y}) &= -\Gamma^0(\underline{y}) * [(\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0) : \varepsilon(\underline{y}) + \mathbb{C}(\underline{y}) : \mathbf{E}] \\ &= -\Gamma^0(\underline{y}) * \{(\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0) : [\varepsilon(\underline{y}) + \mathbf{E}] + \mathbb{C}^0 : \mathbf{E}\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dans l'équation ci-dessus, le produit $\Gamma^0(\underline{y}) * [\mathbb{C}^0 : \mathbf{E}]$ est nul car $\mathbb{C}^0 : \mathbf{E}$ est constant, en conséquence :

$$\varepsilon(\underline{y}) = -\Gamma^0(\underline{y}) * \{(\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0) : [\varepsilon(\underline{y}) + \mathbf{E}]\} \quad (3.18)$$

Une méthode possible pour résoudre cette équation intégrale consiste à développer la solution en série de Neumann ce qui fait l'objet de la section qui suit.

3.1.3 Schéma de résolution en déformation

La difficulté liée à la résolution de l'équation (3.18) réside dans la présence du produit de convolution. La résolution par l'inversion de l'opérateur $\mathbb{I} + \Gamma^0(\underline{y}) * (\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0)$ étant numériquement trop coûteuse, la solution est calculée à l'aide du schéma itératif suivant :

$$\varepsilon^{i+1}(\underline{y}) = -\Gamma^0(\underline{y}) * \{(\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0) : [\varepsilon^i(\underline{y}) + \mathbf{E}]\} \quad (3.19)$$

Qui équivaut à un développement en série de Neumann de l'opérateur $\mathbb{I} + \Gamma^0(\underline{y}) * (\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0)$ (cf. [52, 53]). Le schéma itératif est initialisé avec le champ $\varepsilon^1(\underline{y}) = 0$. Une simplification du schéma itératif (3.19) est possible. Pour tout champ $\varepsilon^i(\underline{\xi})$ compatible et à moyenne nulle sur le volume de la cellule élémentaire, on a la propriété suivante :

$$\forall \underline{\xi} \neq 0 : \Gamma^0(\underline{y}) : \mathbb{C}^0 : \varepsilon^i(\underline{y}) = \varepsilon^i(\underline{y}) \quad (3.20)$$

en tenant compte aussi du fait que $\Gamma^0(\underline{y}) * [\mathbb{C}^0 : \mathbf{E}]$ est nul, le schéma itératif (3.19) peut être réécrit sous la forme :

$$\varepsilon^{i+1}(\underline{y}) = \varepsilon^i(\underline{y}) - \Gamma^0(\underline{y}) * [\mathbb{C}(\underline{y}) : (\varepsilon^i(\underline{y}) + \mathbf{E})] \quad (3.21)$$

Le premier terme de la série est : $\varepsilon^{i=0}(\underline{y}) = 0$. A convergence du schéma itératif ($\varepsilon^{i+1}(\underline{y}) = \varepsilon^i(\underline{y})$), on a :

$$\Gamma^0(\underline{y}) * [\mathbb{C}(\underline{y}) : (\varepsilon^i(\underline{y}) + \mathbf{E})] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(\underline{y}) * [\mathbb{C}(\underline{y}) : (\varepsilon^i(\underline{y}) + \mathbf{E})] = 0 \quad (3.22)$$

Qui exprime l'équilibre du champ de contrainte $\sigma^i(\underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : (\varepsilon^i(\underline{y}) + \mathbf{E})$.

3.1.3.1 Algorithme de résolution

Dans cette section on décrit l'algorithme numérique basé sur la TFR initialement introduit par Moulinec et Suquet [52]. En vue de l'intégration numérique du schéma itératif (3.21), la transformée de Fourier "exacte" est remplacée par la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$F(\underline{\xi}_n) = \sum_{k=-N}^{k=N} F(\underline{y}_k) \exp(i\underline{\xi}_k \cdot \underline{y}_n) \quad (3.23)$$

Les $\underline{\xi}_n$ sont les vecteurs d'ondes discrets définis par $(\underline{\xi}_n)_k = 2n\pi/b_k$, où $(\underline{\xi}_n)_k$ sont les composantes du vecteur $\underline{\xi}_n$ dans la direction y_k . Les \underline{y}_n définissent la position des points d'une grille régulièrement espacée dans l'espace réel. Le choix du nombre de vecteurs d'ondes utilisés pour réaliser la TFD correspond donc à la résolution de l'image.

L'algorithme itératif est résumé dans le tableau ci-dessous :

Etape i=1 :	$\varepsilon^1(\underline{\xi}_n) = 0$	
Etape i :	$\varepsilon^i(\underline{\xi}_n)$ est connu	
	$\varepsilon^i(\underline{y}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\varepsilon^i(\underline{\xi}_n))$	
	$\sigma^i(\underline{y}_n) = \mathbb{C}(\underline{y}_n) : [\varepsilon^i(\underline{y}_n) + \mathbf{E}]$	(3.24)
	$\sigma^i(\underline{\xi}_n) = \mathcal{F}(\sigma^i(\underline{y}_n))$	
	test de convergence	
	$\varepsilon^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \varepsilon^i(\underline{\xi}_n) - \mathbf{\Gamma}^0(\underline{\xi}_n) : \sigma^i(\underline{\xi}_n)$	

Où \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} désignent respectivement la transformée de Fourier et son inverse. Le champ de déplacement est calculé à partir de $\varepsilon(\underline{\xi})$ par la relation :

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{\xi}) &= -\frac{i}{|\underline{\xi}|^2} \left[2\varepsilon(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} - \frac{1}{|\underline{\xi}|^2} (\underline{\xi} \cdot \varepsilon(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi}) \underline{\xi} \right] & \forall \underline{\xi} \neq 0 \\ \underline{u}(\underline{\xi}) &= 0 & \underline{\xi} = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

D'un point de vue numérique, l'utilisation de la TFR permet de réduire considérablement les temps de calcul. En ce qui concerne la convergence, celle-ci est considérée comme assurée lorsque les équations d'équilibre (3.22) sont assurées avec une précision suffisante. Si l'on s'intéresse principalement à la convergence des propriétés homogénéisées, un schéma de convergence plus simple peut être mis en oeuvre et l'on utilise dans ce qui suit le test de convergence suivant :

$$\frac{\|\varepsilon^{i+1}(\underline{y}_n) - \varepsilon^i(\underline{y}_n)\|}{\|\varepsilon^i(\underline{y}_n)\|} < \epsilon \quad \text{et} \quad \frac{\|\sigma^{i+1}(\underline{y}_n) - \sigma^i(\underline{y}_n)\|}{\|\sigma^i(\underline{y}_n)\|} < \epsilon \quad (3.26)$$

où $\|\bullet\|$ désigne la norme de Frobenius. La valeur $\epsilon = 10^{-3}$ est considérée dans l'ensemble des applications proposées dans ce chapitre. Les modules élastiques

λ_0, μ_0 du milieu de référence sont choisis de manière à assurer la convergence du schéma itératif. Les conditions de convergence sont (cf. [52]) :

$$\forall \underline{x} \in V : 2k_0 > k(\underline{y}) > 0, \quad 2\mu_0 > \mu(\underline{y}) > 0 \quad (3.27)$$

où $k_0 = \lambda_0 + 2\mu_0/3$ est le module de compressibilité. Pour les applications numériques on choisit :

$$k_0 = \frac{k_{min} + k_{max}}{2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_{min} + \mu_{max}}{2} \quad (3.28)$$

où k_{min} et μ_{min} sont les plus petites valeurs prises par $k(\underline{y})$ et $\mu(\underline{y})$, k_{max} et μ_{max} étant les plus grandes valeurs.

3.1.3.2 Utilisation des fonctions de forme

Dans l'approche initiale [52], le tenseur d'élasticité exact $\mathbb{C}(\underline{y})$ est remplacé par le tenseur $\mathbb{C}(\underline{y}_n)$ calculé aux points \underline{y}_n de la grille régulière qui consiste à remplacer la géométrie réelle par une image pixélisée. Lorsque les renforts ont des formes géométriques simples (sphère, cylindre, ellipsoïde) il est possible d'obtenir l'expression exacte de la transformée de Fourier des fonctions caractéristiques $I(\underline{y})$, appelées "fonctions de forme" et notées $I(\underline{\xi})$, elles sont à la base d'approximation pour les propriétés élastiques des milieux périodiques obtenues par Nemat-Nasser et Hori [54].

La cellule de base est constituée de deux ou plusieurs phases élastiques notées $\alpha = 1, 2, \dots$ occupant les volumes V_α dans la cellule ($\sum V_\alpha = V$). On note par $\mathbb{C}_\alpha(\underline{y})$ le tenseur de rigidité de la phase α et on définit par $\mathbb{S}_\alpha = (\mathbb{C}_\alpha)^{-1}$ le tenseur de souplesse associé. On a :

$$\mathbb{C}(\underline{y}) = \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{y}) \mathbb{C}_{\alpha}, \quad \mathbb{S}(\underline{y}) = \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{y}) \mathbb{S}_{\alpha} \quad (3.29)$$

Les $I_{\alpha}(\underline{y})$ sont des fonctions caractéristiques qui dépendent uniquement de la géométrie et de la répartition spatiale des différentes phases ; elles sont définies par :

$$I_{\alpha}(\underline{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{y} \in V_{\alpha} \\ 0 & \text{si } \underline{y} \in V - V_{\alpha} \end{cases} \quad (3.30)$$

Ces fonctions satisfont la condition $\sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{y}) = 1$. Les fonctions de forme des phases α sont les transformées de Fourier des fonctions caractéristiques :

$$I_{\alpha}(\underline{\xi}) = \frac{1}{V} \int_{V_{\alpha}} \exp(-i\underline{x} \cdot \underline{\xi}) dV \quad (3.31)$$

Elles possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\xi} \neq 0 : \sum_{\alpha} I_{\alpha}(\underline{\xi}) &= 0 \\ \text{pour } \underline{\xi} = 0 : I_{\alpha}(\underline{\xi}) &= c_{\alpha} \end{aligned} \quad (3.32)$$

où c_α est la fraction volumique de la phase α . On constate que la fonction de forme de la matrice (repéré avec l'indice 1) est donnée par $I_1(\underline{\xi}) = -\sum_{\alpha \neq 1} I_\alpha(\underline{\xi})$ quand $\underline{\xi} \neq 0$. Ainsi pour un composite biphasé, seul le calcul de la fonction de forme associée à l'inclusion est requise. La fonction de forme de la matrice est alors tout simplement définie par : $I_1(\underline{\xi}) = -I_2(\underline{\xi})$ (ici $I_2(\underline{\xi})$ désigne la fonction de forme de l'inclusion).

Dans le domaine de Fourier, la loi d'élasticité s'exprime par le produit de convolution des fonctions de forme par le tenseur des déformations :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{\xi}) = \mathbb{C}(\underline{\xi}) * (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \mathbf{E}) = \sum_{\alpha} \mathbb{C}_\alpha : \left[I_\alpha(\underline{\xi}) * (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \mathbf{E}) \right] \quad (3.33)$$

Le produit de convolution est alors effectué en utilisant la transformée de Fourier rapide. Le schéma itératif basé sur l'utilisation des fonctions de forme est décrit ci-dessous pour un composite biphasé :

Etape i=1 :	$\mathbf{e}^1(\underline{\xi}_n = 0) = \mathbf{E}$	
Etape i :	$\mathbf{e}^i(\underline{\xi}_n)$ est connu	
	$\mathbf{e}^i(\underline{y}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{e}^i(\underline{\xi}_n))$	
	$\tilde{I}_2(\underline{y}_n) = \mathcal{F}^{-1}(I_2(\underline{\xi}_n))$	
	$\mathbf{e}_2^i(\underline{y}_n) = \tilde{I}_2(\underline{y}_n) \mathbf{e}^i(\underline{y}_n)$	(3.34)
	$\mathbf{e}_2^i(\underline{\xi}_n) = \mathcal{F}(\mathbf{e}_2^i(\underline{y}_n))$	
	$\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n) = \mathbb{C}_1 : \mathbf{e}^i(\underline{\xi}_n) + (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : \mathbf{e}_2^i(\underline{\xi}_n)$	
	test de convergence	
	$\mathbf{e}^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \mathbf{e}^i(\underline{\xi}_n) - \Gamma^0(\underline{\xi}_n) : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n)$	

où l'on posé $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{E}$ la déformation totale.

L'utilisation des fonctions de forme permet d'obtenir une convergence régulière sur les propriétés homogénéisées avec le raffinement de la grille puisqu'elle utilise une description exacte de la microstructure (ces résultats ont été montrés dans la thèse de T.-K. Nguyen [55]). De plus, les propriétés effectives obtenues à chaque itération constituent des bornes des propriétés effectives.

3.1.4 Formulation en contrainte

Une formulation en contrainte peut s'avérer mieux adaptée pour traiter les microstructures en présence d'inclusion très rigide. Cette formulation duale, que l'on décrit dans ce paragraphe, utilise le tenseur de souplesse $\mathbb{S}(\underline{y})$ et l'opérateur de Green pour les contraintes.

3.1.4.1 Equation intégrale en contrainte

Revenons au problème d'inclusion défini par (3.12) et dont la solution est exprimée par (3.13) pour la déformation. Ecrivons la solution du problème d'inclusion

avec la contrainte. Pour cela on remplace (3.13) dans la seconde relation dans (3.12), il vient alors :

$$\underline{\sigma}(\underline{y}) = -\mathbb{C}^0 : \underline{\Gamma}^0(\underline{y}) * \underline{\tau}(\underline{y}) + \underline{\tau}(\underline{y}) \quad (3.35)$$

Introduisons maintenant dans cette dernière relation l'opérateur de Green pour les contraintes. Pour tout tenseur d'ordre deux $\underline{\tau}(\underline{y})$, on a la propriété suivante :

$$\underline{\Gamma}^0(\underline{y}) * \underline{\tau}(\underline{y}) = \mathbb{S}^0 : (\underline{\tau}(\underline{y}) - \langle \underline{\tau}(\underline{y}) \rangle_V) - \mathbb{S}^0 : \underline{\Delta}^0(\underline{y}) * [\mathbb{S}^0 : \underline{\tau}(\underline{y})] \quad (3.36)$$

où $\underline{\Delta}^0(\underline{y})$ est l'opérateur de Green pour les contraintes, défini dans l'espace de Fourier, et pour un milieu de référence isotrope, par :

$$\underline{\xi} \neq 0 : \underline{\Delta}^0(\underline{\xi}) = \frac{2\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)}{\lambda_0 + 2\mu_0} \mathbb{E}_1(\underline{\xi}) + 2\mu_0 \mathbb{E}_3(\underline{\xi}) \quad (3.37)$$

et $\underline{\Delta}^0(\underline{\xi}) = 0$ pour $\underline{\xi} = 0$. En utilisant la relation (3.36) dans l'équation (3.35), il vient :

$$\underline{\sigma}(\underline{y}) = \langle \underline{\tau}(\underline{y}) \rangle_V + \underline{\Delta}^0(\underline{y}) * [\mathbb{S}^0 : \underline{\tau}(\underline{y})] \quad (3.38)$$

En tenant compte de l'expression $\underline{\sigma}(\underline{y}) = \mathbb{C}(\underline{y}) : [\underline{\varepsilon}(\underline{y}) + \underline{\mathbf{E}}]$, le champ de polarisation $\underline{\tau}(\underline{y})$ dans (3.16) peut être réécrit sous la forme :

$$\underline{\tau}(\underline{y}) = -\mathbb{C}^0 : [\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0] : \underline{\sigma}(\underline{y}) + \mathbb{C}^0 : \underline{\mathbf{E}} \quad (3.39)$$

Introduisons l'expression ci-dessus pour $\underline{\tau}(\underline{y})$, la relation (3.35) devient alors :

$$\underline{\sigma}(\underline{y}) = \langle \underline{\tau}(\underline{y}) \rangle_V - \underline{\Delta}^0(\underline{y}) * [(\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0) : \underline{\sigma}(\underline{y}) - \underline{\mathbf{E}}] \quad (3.40)$$

Le produit $\underline{\Delta}^0(\underline{y}) * \underline{\mathbf{E}}$ est nul car $\underline{\mathbf{E}}$ est constant sur la cellule élémentaire. D'autre part, on a $\underline{\tau}(\underline{y}) = \underline{\sigma}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0 : \underline{\varepsilon}(\underline{y})$, en tenant compte de $\langle \underline{\varepsilon}(\underline{y}) \rangle_V = 0$, on a $\langle \underline{\tau}(\underline{y}) \rangle_V = \langle \underline{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V$. L'équation intégrale en contrainte s'écrit donc finalement :

$$\underline{\sigma}(\underline{y}) = \langle \underline{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V - \underline{\Delta}^0(\underline{y}) * [(\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0) : \underline{\sigma}(\underline{y})] \quad (3.41)$$

Dans la relation ci-dessus, le paramètre de chargement, qui est la déformation macroscopique $\underline{\mathbf{E}}$, n'apparaît plus. La relation (3.41) doit être complétée de la condition suivante :

$$\langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \underline{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V = \underline{\mathbf{E}} \quad (3.42)$$

qui exprime que la déformation totale due au champ de contrainte $\underline{\sigma}(\underline{y})$ doit être à moyenne égale à $\underline{\mathbf{E}}$. Il est possible de combiner la relation (3.41) et (3.42) de manière à obtenir une seule équation, adaptée pour une résolution à l'aide d'un schéma itératif :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\underline{y}) = & \langle \underline{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V - \underline{\Delta}^0(\underline{y}) * [(\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0) : \underline{\sigma}(\underline{y})] \\ & - \alpha \mathbb{C}^0 : [\langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \underline{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V - \underline{\mathbf{E}}] \end{aligned} \quad (3.43)$$

où α est un coefficient précisé plus tard. En prenant la moyenne sur le volume de la cellule de la relation ci-dessus, on trouve :

$$\alpha \mathbb{C}^0 : [\langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \underline{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V - \underline{\mathbf{E}}] = 0 \quad (3.44)$$

qui est équivalent à (3.42) pour $\alpha \neq 0$.

3.1.4.2 Schéma itératif en contrainte

On propose le schéma itératif suivant pour la résolution de l'équation intégrale (3.43) :

$$\sigma^{i+1}(\underline{y}) = \langle \sigma^i(\underline{y}) \rangle_V - \Delta^0(\underline{y}) * [(\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0) : \sigma^i(\underline{y})] - \alpha \mathbb{C}^0 : [\langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \sigma^i(\underline{y}) \rangle_V - \mathbf{E}] \quad (3.45)$$

et qui est initialisé avec une contrainte nulle : $\sigma^{i=1}(\underline{y}) = 0$.

Notons que, dans le schéma ci-dessus, le champ de contrainte $\sigma^i(\underline{y})$ est toujours à l'équilibre (quelque soit i). Or pour tout champ à l'équilibre, on a la propriété suivante :

$$\Delta^0(\underline{y}) * [\mathbb{S}^0 : \sigma^i(\underline{y})] = \sigma^i(\underline{y}) - \langle \sigma^i(\underline{y}) \rangle_V \quad (3.46)$$

On peut donc réécrire le schéma itératif (3.45) sous la forme :

$$\sigma^{i+1}(\underline{y}) = \sigma^i(\underline{y}) - \Delta^0(\underline{y}) * [\mathbb{S}(\underline{y}) : \sigma^i(\underline{y})] - \alpha \mathbb{C}^0 : [\langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \sigma^i(\underline{y}) \rangle_V - \mathbf{E}] \quad (3.47)$$

A la convergence, c'est à dire lorsque $\sigma^{i+1}(\underline{y}) = \sigma^i(\underline{y})$, on a :

$$\Delta^0(\underline{y}) * [\mathbb{S}(\underline{y}) : \sigma^i(\underline{y})] + \alpha \mathbb{C}^0 : [\langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \sigma^i(\underline{y}) \rangle_V - \mathbf{E}] = 0 \quad (3.48)$$

Qui est vérifiée si le champ $\varepsilon(\underline{y}) = \mathbb{S}(\underline{y}) : \sigma^i(\underline{y})$ est compatible et à moyenne égale à \mathbf{E} sur la cellule élémentaire.

L'algorithme mis en oeuvre pour la résolution en contraintes est résumé ci-dessous :

Etape i=1 : $\sigma^1(\underline{\xi}_n) = 0$
 Etape i : $\sigma^i(\underline{\xi}_n)$ est connu
 $\sigma^i(\underline{y}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\sigma^i(\underline{\xi}_n))$
 $\varepsilon^i(\underline{y}_n) = \mathbb{S}(\underline{y}_n) : \sigma^i(\underline{y}_n)$
 $\varepsilon^i(\underline{\xi}_n) = \mathcal{F}(\varepsilon^i(\underline{y}_n))$
 test de convergence

$$\begin{cases} \sigma^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \sigma^i(\underline{\xi}_n) - \Delta^0(\underline{\xi}_n) : \varepsilon^i(\underline{\xi}_n) & \text{pour } \underline{\xi} \neq 0 \\ \sigma^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \sigma^i(\underline{\xi}_n) - \alpha \mathbb{C}^0 : [\varepsilon^i(\underline{\xi}_n) - \mathbf{E}] & \text{pour } \underline{\xi} = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Pour ce schéma en contrainte on utilise le critère de convergence (3.26). Les conditions assurant la convergence du schéma itératif sont :

$$\forall \underline{x} \in V : \frac{2}{k_0} > \frac{1}{k(\underline{y})} > 0, \quad \frac{2}{\mu_0} > \frac{1}{\mu(\underline{y})} > 0 \quad (3.50)$$

Pour les applications numériques nous choisissons :

$$k_0 = \frac{1}{\frac{1}{2k_{min}} + \frac{1}{2k_{max}}}, \quad \mu_0 = \frac{1}{\frac{1}{2\mu_{min}} + \frac{1}{2\mu_{max}}} \quad (3.51)$$

Notons enfin que la valeur $\alpha = 1$ a été utilisée dans les calculs, et correspond à un choix optimal vis à vis de la vitesse de convergence du schéma.

3.2 Algorithmes de résolution pour les problèmes d'ordre supérieur

On se propose d'étendre les schémas itératifs, formulés en déformation et en contrainte, pour la résolution des problèmes d'ordre supérieurs requis pour le calcul des propriétés du milieu à gradient de déformation.

3.2.1 Les problèmes d'ordre $n \geq 2$

Avant toute chose, rappelons que les problèmes d'ordre supérieur qui sont à résoudre s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y(\underline{\sigma}(y)) + \underline{f}^n(y) = 0 \\ \underline{\sigma}(y) = \mathbb{C}(y) : [\underline{\varepsilon}(y) + \underline{\eta}^n(y)] \\ \underline{\varepsilon}(y) = \operatorname{sym}(\nabla_y \underline{u}(y)) \\ \underline{u}(y) \text{ Y-périodique, } \langle \underline{u}(y) \rangle_V = 0, \\ \underline{\sigma}(y) \cdot \underline{n} \text{ Y-antipériodique} \end{cases} \quad (3.52)$$

où la force de volume $\underline{f}^n(y)$ et le champ de déformation libre $\underline{\eta}^n(y)$ sont définis par :

$$\begin{cases} \underline{f}^n(y) = [\mathbb{B}^{n-1}(y) - \langle \mathbb{B}^{n-1}(y) \rangle_V] \odot_{n+2} \nabla^n \mathbf{E} \\ \underline{\eta}^n(y) = \operatorname{sym}(\mathbb{Q}^{n-1}(y)) \odot_{n+1} \nabla^n \mathbf{E} \end{cases} \quad (3.53)$$

La différence entre les problèmes d'ordre supérieur et celui déjà traité dans les sections précédentes réside dans la présence de forces de volume et des déformations libres.

Appliquons la transformée de Fourier aux équations (3.52) :

$$\begin{cases} i \underline{\sigma}(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} + \underline{f}^n(\underline{\xi}) = 0 \\ \underline{\sigma}(\underline{\xi}) = \mathbb{C}(\underline{\xi}) * [\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \underline{\eta}^n(\underline{\xi})] \\ \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = \frac{i}{2} (\underline{\xi} \otimes \underline{u}(\underline{\xi}) + \underline{u}(\underline{\xi}) \otimes \underline{\xi}) \end{cases} \quad (3.54)$$

Que l'on peut réécrire encore, en utilisant les opérateurs \mathbb{P} et \mathbb{Q} introduits au début de chapitre, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(\underline{\xi}) = \mathbb{C}(\underline{\xi}) * [\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \underline{\eta}^n(\underline{\xi})] \\ \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{P}(\underline{\xi}) : (\underline{\sigma}(\underline{\xi}) + \underline{\theta}^n(\underline{\xi})) = 0 \\ \forall \underline{\xi} \neq 0 : \mathbb{Q}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

où $\underline{\theta}^n(\underline{\xi})$ est un tenseur d'ordre deux, fonction de $\underline{f}^n(\underline{\xi})$, défini par :

$$\underline{\theta}^n(\underline{\xi}) = \frac{i}{\|\underline{\xi}\|^4} \left[\underline{\xi} \otimes \underline{\xi} \underline{f}^n(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} - (\underline{f}^n(\underline{\xi}) \otimes \underline{\xi} + \underline{\xi} \otimes \underline{f}^n(\underline{\xi})) \|\underline{\xi}\|^2 \right] \quad (3.56)$$

et vérifiant la propriété : $i \underline{\theta}^n(\underline{\xi}) \cdot \underline{\xi} = \underline{f}^n(\underline{\xi})$.

3.2.2 Equations intégrales

Comme pour le problème d'ordre 1 la résolution du problème d'inhomogénéité est traitée en utilisant la solution d'un problème auxiliaire. Considérons donc un milieu de référence de rigidité élastique \mathbb{C}^0 , et la polarisation $\boldsymbol{\tau}(\underline{y})$ définie par :

$$\boldsymbol{\tau}(\underline{y}) = (\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}) + \mathbb{C}(\underline{y}) : \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y}) \quad (3.57)$$

La relation contrainte déformation s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{y}) \quad (3.58)$$

On retrouve l'expression reliant tenseurs de contraintes et de polarisation, compte tenu du fait que $\boldsymbol{\varepsilon}$ est de moyenne nulle. La solution du problème d'inclusion (en présence d'une force de volume) est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}) = -\boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * [\boldsymbol{\tau}(\underline{y}) + \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y})] \quad (3.59)$$

En remplaçant (3.57) dans (3.59), on obtient une équation intégrale pour la déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}) = -\boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * [(\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}) + \mathbb{C}(\underline{y}) : \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y}) + \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y})] \quad (3.60)$$

Il s'agit d'une équation similaire à (3.18) dont la solution peut être également obtenue par développement en série de Neumann et donc à l'aide d'un schéma itératif formulé en déformation. Avant de présenter ce schéma de résolution, établissons l'équation intégrale pour la contrainte qui conduit au second schéma de résolution.

Remplaçons l'expression (3.59), pour la déformation, dans la relation (3.58). On obtient l'expression suivante pour la contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) = -\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y}) - \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * \boldsymbol{\tau}(\underline{y}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{y}) \quad (3.61)$$

Utilisons à nouveau la propriété (3.36) pour faire apparaître l'opérateur de Green en contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) = -\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y}) + \langle \boldsymbol{\tau}(\underline{y}) \rangle_V + \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{y}) * [\mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\tau}(\underline{y})] \quad (3.62)$$

Exprimons maintenant le champ de polarisation $\boldsymbol{\tau}(\underline{y})$, donné par (3.57), à partir de la contrainte :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(\underline{y}) &= [\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0] : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}) + \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y})) + \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y}) \\ &= -\mathbb{C}^0 : [\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0] : \mathbb{C}(\underline{y}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}) + \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y})) + \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y}) \\ &= -\mathbb{C}^0 : [\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0] : \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) + \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

En remplaçant (3.63) dans (3.62), il vient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) &= -\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y}) + \langle \boldsymbol{\tau}(\underline{y}) \rangle_V \\ &\quad - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{y}) * [(\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) - \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y})] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Enfin, dans la relation (3.58), le champ de déformation est à moyenne nulle, on a donc $\langle \boldsymbol{\tau}(\underline{y}) \rangle_V = \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V$. L'équation intégrale pour le champ de contrainte s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) = & \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V - \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y}) \\ & - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{y}) * [(\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) - \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y})] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Rappelons que dans l'équation ci-dessus, $\boldsymbol{\eta}^n(\underline{y})$ et $\boldsymbol{\theta}^n(\underline{y})$ sont connus et sont obtenus en calculant la solution du problème à l'ordre précédent. Comme pour le problème à l'ordre 1, la moyenne sur la cellule du champ de contrainte, $\langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V$ est indéterminée. Il convient donc de compléter l'équation intégrale (3.65) avec la condition suivante :

$$\langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V = 0 \quad (3.66)$$

qui exprime que le champ de déformation associé à $\boldsymbol{\sigma}(\underline{y})$ est à moyenne nulle sur le volume élémentaire. Encore une fois, il est possible de combiner les relations (3.65) et (3.66) sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) = & \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V - \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y}) \\ & - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{y}) * [(\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) - \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y})] - \alpha \mathbb{C}^0 : \langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}) \rangle_V \end{aligned} \quad (3.67)$$

avec $\alpha \neq 0$.

3.2.3 Schéma de résolution en déformation

La solution de l'équation intégrale (3.60) est obtenue à partir d'un développement en série de Neumann. Chacun des termes de cette série étant obtenu à l'aide du schéma itératif suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{y}) = -\boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * [(\mathbb{C}(\underline{y}) - \mathbb{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{y}) + \mathbb{C}(\underline{y}) : \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y}) + \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y})] \quad (3.68)$$

Le premier terme de la série étant $\boldsymbol{\varepsilon}^{i=1}(\underline{y}) = 0$. En vue de l'intégration numérique du schéma itératif, la transformée de Fourier exacte est ensuite remplacée par la transformée de Fourier discrète comme présenté dans la partie (3.1.3.1). L'algorithme numérique est décrit ci-dessous :

Etape i=1 :	$\boldsymbol{\varepsilon}^1(\underline{\xi}_n) = 0$	
Etape i :	$\boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi}_n)$ est connu	
	$\boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{y}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi}_n))$	
	$\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}_n) = \mathbb{C}(\underline{y}_n) : [\boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{y}_n) + \boldsymbol{\eta}(\underline{y}_n)]$	(3.69)
	$\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}_n))$	
	test de convergence	
	$\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi}_n) - \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}_n) : (\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n) + \boldsymbol{\theta}(\underline{\xi}_n))$	

Ce schéma de résolution en déformation est similaire à celui utilisé pour la résolution du problème à l'ordre 1. La différence porte sur la présence des tenseurs

$\boldsymbol{\eta}^n(\underline{y}_n)$ et $\boldsymbol{\theta}(\underline{\xi}_n)$. Ces derniers sont indépendants du champ $\boldsymbol{\varepsilon}^i$, ils sont calculés puis stockés avant d'effectuer la résolution par le schéma itératif. Ces tenseurs dépendent des champs obtenus à l'ordre précédent, c'est à dire des tenseurs $\mathbb{Q}^{n-1}(\underline{y})$ et $\mathbb{B}^{n-1}(\underline{y})$ (voir équation (3.53)) et dépendent également du gradient de la déformation macroscopique $\nabla_x \mathbf{E}$ qui apparaît comme le paramètre de chargement pour les problèmes d'ordre supérieur pour la cellule élémentaire. Pour la résolution du problème d'ordre 2, ce paramètre est le premier gradient de la déformation $\nabla_x \mathbf{E}$ qui dépend de 18 composantes indépendantes pour les problèmes tridimensionnels et de 6 composantes indépendantes pour les problèmes bidimensionnels. En vue du calcul des composantes des tenseurs du second gradient, on a donc 18 problèmes élémentaires à résoudre pour le cas 3D et 6 pour le cas 2D. Le critère de convergence utilisé pour stopper le schéma itératif est celui déjà appliqué pour le problème à l'ordre 1 (c.f. équation (3.26)). De même on utilise le milieu de référence défini par (3.28). Enfin, on notera qu'une reformulation du schéma itératif en utilisant les fonctions de forme est également possible.

3.2.4 Formulation en contrainte

L'équation intégrale formulée en contrainte (c.f. équation (3.67)) est résolue à l'aide du schéma itératif :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{y}) = & \langle \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}) \rangle_V - \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y}) \\ & - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{y}) * [\mathbb{S}(\underline{y}) - \mathbb{S}^0] : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}) - \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y}) - \alpha \mathbb{C}^0 : \langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}) \rangle_V \end{aligned} \quad (3.70)$$

Or pour tout champ $\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y})$ en équilibre avec la force de volume $\underline{f}^n(\underline{y})$, on a :

$$\boldsymbol{\Delta}^0(\underline{y}) * [\mathbb{S}^0 : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y})] = \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}) - \langle \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}) \rangle_V + \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y}) \quad (3.71)$$

Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y})$ dans (3.70) étant à l'équilibre avec la force de volume $\underline{f}^n(\underline{y})$ à chaque itération, on peut donc simplifier la relation de récurrence en utilisant la propriété ci-dessus. Ceci conduit au nouveau schéma :

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{y}) = \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}) - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{y}) * [\mathbb{S}(\underline{y}) : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}) - \boldsymbol{\eta}^n(\underline{y})] - \alpha \mathbb{C}^0 : \langle \mathbb{S}(\underline{y}) : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}) \rangle_V \quad (3.72)$$

et dont le premier terme de la série est : $\boldsymbol{\sigma}^{(i=1)} = -\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{y}) * \boldsymbol{\theta}^n(\underline{y})$.

L'algorithme de résolution en contrainte est résumé ci-dessous :

Etape i=1 :	$\boldsymbol{\sigma}^1(\underline{\xi}_n) = -\mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\Gamma}^0(\underline{\xi}_n) : \boldsymbol{\theta}(\underline{\xi}_n)$	
Etape i :	$\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n)$ est connu	
	$\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}_n) = \mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n))$	
	$\boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{y}_n) = \mathbb{S}(\underline{y}_n) : \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{y}_n) - \boldsymbol{\eta}(\underline{y}_n)$	(3.73)
	test de convergence	
	$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n) - \boldsymbol{\Delta}^0(\underline{\xi}_n) : \boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi}_n) & \text{pour } \underline{\xi} \neq 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\underline{\xi}_n) = \boldsymbol{\sigma}^i(\underline{\xi}_n) - \alpha \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^i(\underline{\xi}_n) & \text{pour } \underline{\xi} = 0 \end{cases}$	

Dans ce second schéma de résolution, le paramètre de chargement est toujours le gradient de la déformation qui est contenu dans $\boldsymbol{\eta}(\underline{y}_n)$ et $\boldsymbol{\theta}(\underline{\xi}_n)$. Le critère de convergence utilisé est défini par (3.26) et on choisit le milieu de référence défini par (3.51).

3.3 Applications

3.3.1 Composite à fibres

A titre d'application, on considère un composite à fibres de sections cylindriques, qui sont arrangées suivant un réseau tétragonal comme illustré sur la figure 3.1. La cellule de base est carrée de côté h et contient une fibre de rayon a placée au centre de la cellule. Les valeurs suivantes sont considérées pour le coefficient de Poisson de la matrice et de l'inclusion : $\nu_M = 1/4$ et $\nu_I = 1/3$. Le module de Young de la matrice, E_M est normalisé (égal à $1MPa$) tandis que celui de l'inclusion est $E_I = cE_M$ où c est le contraste. Le nombre de vecteurs d'ondes est choisi égal à 128 ce qui correspond à une résolution de l'image de 256×256 pixels. Les calculs sont réalisés avec le rayon de la fibre égal à 0.3 (la taille de la cellule élémentaire étant normalisée avec $h = 1$).

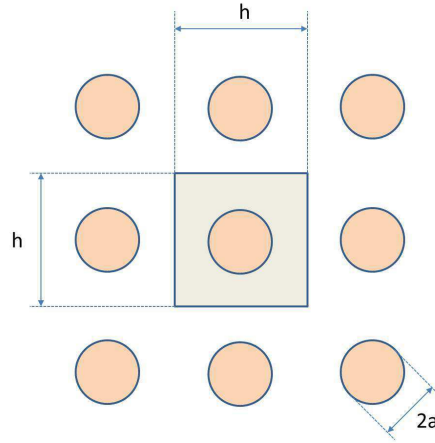


FIGURE 3.1 – Cellule élémentaire d'un composite à fibres de sections cylindriques.

On détermine les tenseurs élastiques du milieu du second gradient, c'est à dire les tenseurs $\mathbb{C}^{0,0}$, $\mathbb{C}^{0,1}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$ d'ordres 4, 5 et 6 respectivement. Les problèmes pour la cellule élémentaire périodique sont résolus dans le cas particulier d'un état plan de déformation. Ainsi les composantes non nulles du tenseur de la déformation macroscopique sont E_{11} , E_{22} , E_{12} et celles du gradient de la déformation macroscopique sont $E_{11,1}$, $E_{22,1}$, $E_{12,2}$, $E_{11,2}$, $E_{22,2}$, $E_{12,1}$ (on note par $E_{ij,k}$ la dérivée de E_{ij} par rapport à x_k). Une représentation matricielle de la loi élastique du second gradient pour des états plans de déformation est donnée en section (1.1.1.2) du chapitre 1.

Les tenseurs $\mathbb{C}^{0,0}$, $\mathbb{C}^{0,1}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$ sont obtenus par la résolution des problèmes d'homogénéisation à l'ordre 1 et 2. Le problème d'homogénéisation à l'ordre 1 est celui de la cellule de base soumise à une déformation macroscopique \mathbf{E} qui est résolu à l'aide du schéma en déformation (3.24) (ou (3.34) utilisant les fonctions de forme) ou le schéma en contrainte (3.49). Plus précisément, c'est la formulation en déformation qui est appliquée pour les problèmes où l'inclusion est plus souple que la matrice (contraste inférieur à 1) tandis que l'approche en contrainte est mise en oeuvre lorsque l'inclusion est plus rigide que la matrice (contraste supérieur à 1) (voir figure 3.2). Au contraire, pour le problème à l'ordre 2, le

schéma en contrainte (3.73) est optimal lorsque l'inclusion est plus souple que la matrice (dans ce cas, le nombre d'itérations à convergence sature pour les faibles contrastes), alors que les schémas en déformations (3.69) et en contraintes divergent pour les problèmes d'inclusions rigides (contraste supérieur à 1) (voir figure 3.3). Toutefois, le nombre d'itérations à convergence est moins élevé pour le schéma en contraintes. Le problème à l'ordre 2 est donc résolu par la formulation en contraintes pour les deux types de contrastes.

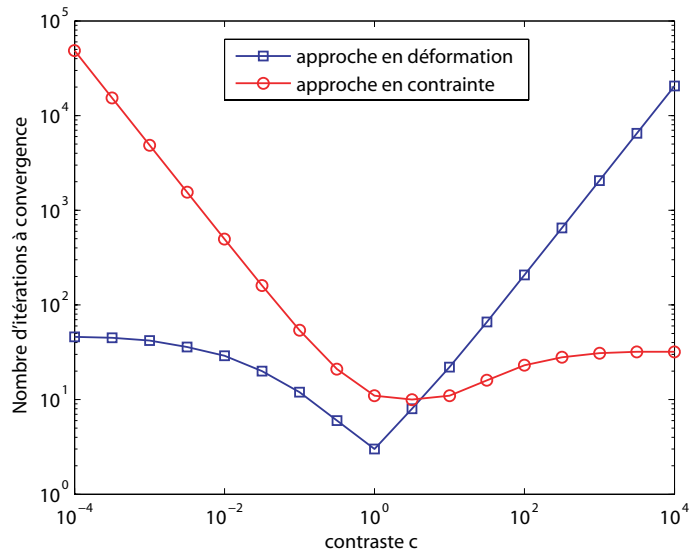


FIGURE 3.2 – Nombre d'itérations à convergence des schémas en fonction du contraste pour les problèmes d'ordre 1.

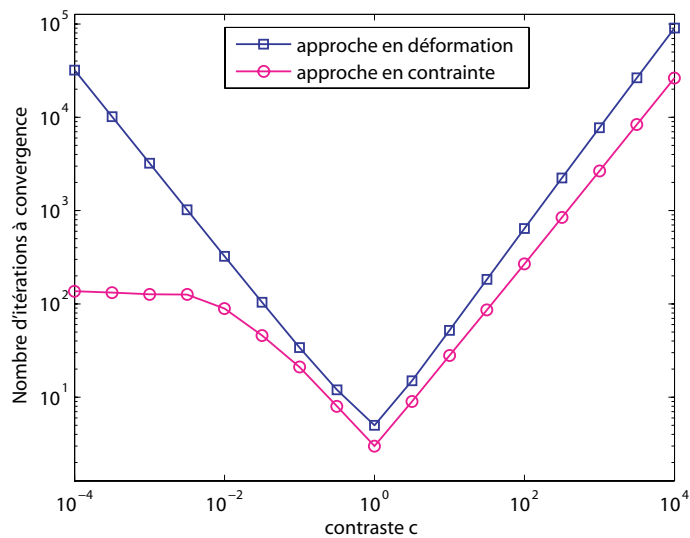


FIGURE 3.3 – Nombre d'itérations à convergence des schémas en fonction du contraste pour les problèmes d'ordre supérieur.

Le problème à l'ordre 1 est résolu en imposant les valeurs suivantes aux composantes du champ de déformations macroscopique :

- (1) $E_1(= E_{11}) = 1$; les autres $E_{ij} = 0$
- (2) $E_2(= E_{22}) = 1$; les autres $E_{ij} = 0$
- (3) $E_6(= \sqrt{2}E_{12}) = 1$; les autres $E_{ij} = 0$

Rappelons que la solution du problème à l'ordre 1 s'écrit $u_i(y_1, y_2) = Q_{ijk}^0(y_1, y_2)E_{jk}$. Le calcul des composantes $u_1(y_1, y_2)$ et $u_2(y_1, y_2)$ pour chacun des chargements mentionnés ci-dessus fournit donc les composantes $Q_{ijk}^0(y_1, y_2)$ du tenseur $\mathbb{Q}^0(\underline{y})$. Sur les figures 3.4 et 3.5 on représente les variations des composantes $Q_{ijk}^0(y_1, y_2)$ avec les coordonnées y_1 et y_2 .

Les champs locaux ainsi déterminés pour le problème à l'ordre 1, ceux-ci sont réinjectés dans les expressions de $\boldsymbol{\eta}^2(\underline{y})$ et $\boldsymbol{\theta}^2(\underline{y})$ du problème à l'ordre 2. Ce dernier est résolu avec le schéma itératif en déformation (3.69) pour les contrastes inférieurs à 1 et avec le schéma en contrainte (3.73) pour les contrastes supérieurs à 1.

Le problème d'ordre 2 est résolu pour les six chargements suivants :

- (1) $h = 1 : E_{1,1}(= E_{11,1}) = 1$; les autres $E_{ij,k} = 0$
- (2) $h = 2 : E_{2,1}(= E_{22,1}) = 1$; les autres $E_{ij,k} = 0$
- (3) $h = 3 : E_{6,1}(= \sqrt{2}E_{12,1}) = 1$; les autres $E_{ij,k} = 0$
- (4) $h = 4 : E_{1,2}(= E_{11,2}) = 1$; les autres $E_{ij,k} = 0$
- (5) $h = 5 : E_{2,2}(= E_{22,2}) = 1$; les autres $E_{ij,k} = 0$
- (6) $h = 6 : E_{6,2}(= \sqrt{2}E_{12,2}) = 1$; les autres $E_{ij,k} = 0$

Pour chacun des chargements, le déplacement $u_i(y_1, y_2) = Q_{ijkl}^1(y_1, y_2)E_{jk,l}$ fournit les composantes du tenseur $\mathbb{Q}^1(y_1, y_2)$. Sur les figures 3.6 et 3.7, on représente les variations des composantes (non nulles) $Q_{ijkl}^1(y_1, y_2)$ du tenseur \mathbb{Q}^1 , et sur les figures de 3.8 à 3.13 on représente les cartes des déformations locales $\varepsilon_{11}(y_1, y_2)$, $\varepsilon_{22}(y_1, y_2)$, $\varepsilon_{12}(y_1, y_2)$, correspondant aux six trajets de chargement.

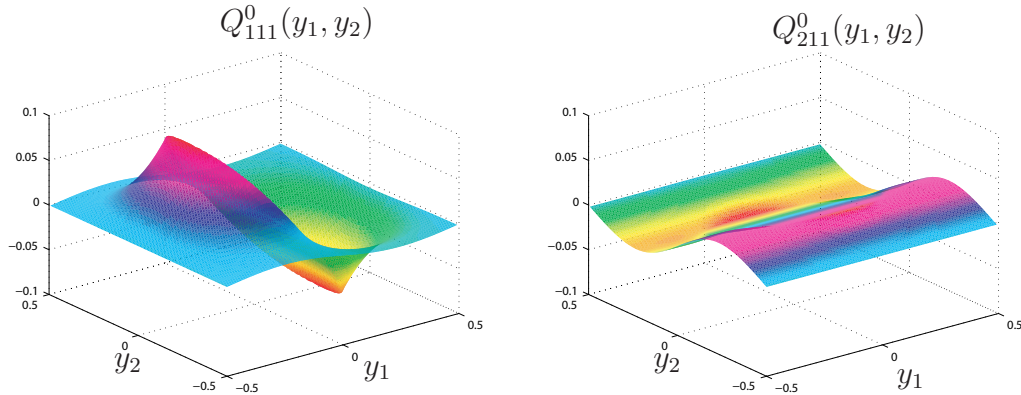


FIGURE 3.4 – Variation des composantes non nulles $Q_{111}^0(y_1, y_2)$ et $Q_{211}^0(y_1, y_2)$ - solution du problème d'ordre 1 pour un composite à fibres de section cylindrique.

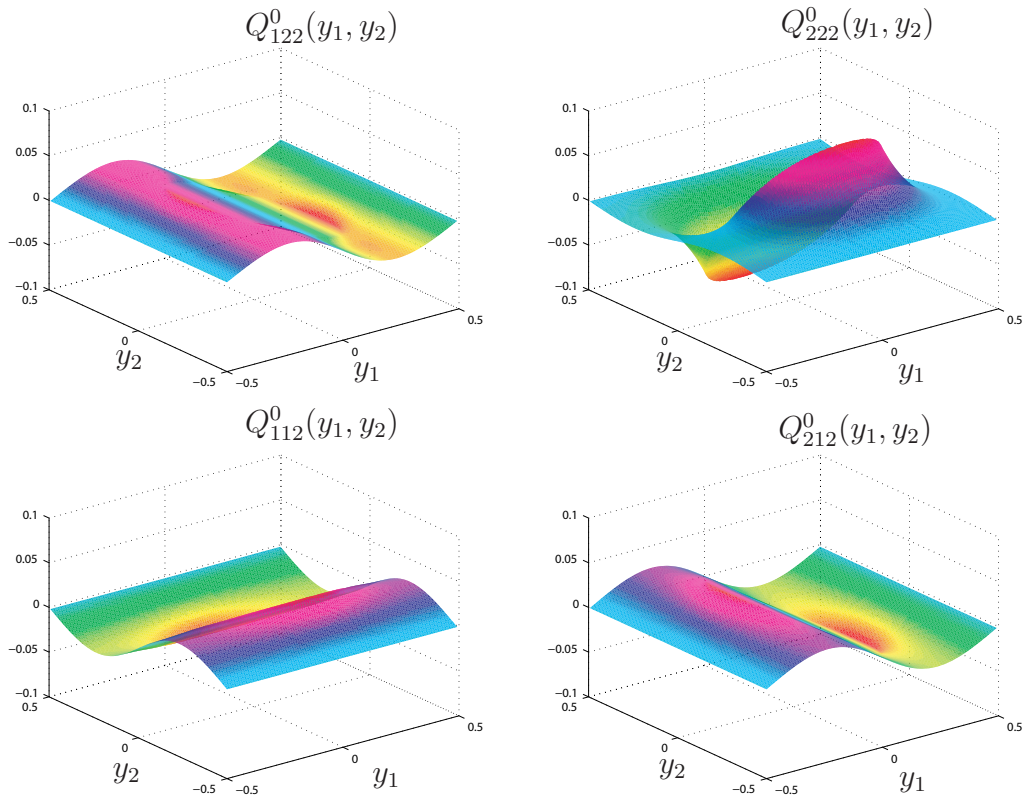


FIGURE 3.5 – Variation des composantes non nulles $Q_{122}^0(y_1, y_2)$, $Q_{222}^0(y_1, y_2)$, $Q_{112}^0(y_1, y_2)$ et $Q_{212}^0(y_1, y_2)$ - solution du problème d'ordre 1 pour un composite à fibres de section cylindrique.

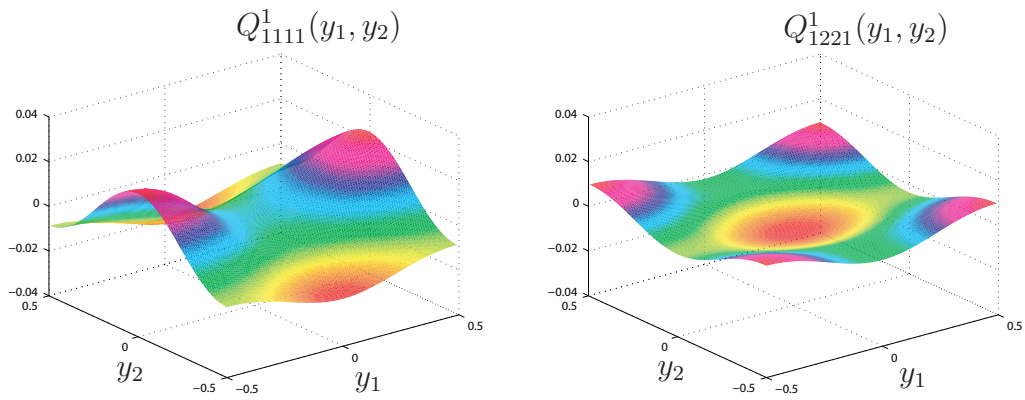


FIGURE 3.6 – Variation des composantes non nulles $Q_{1111}^1(y_1, y_2)$ et $Q_{1221}^1(y_1, y_2)$ - solution du problème d'ordre 2 pour un composite à fibres de section cylindrique.

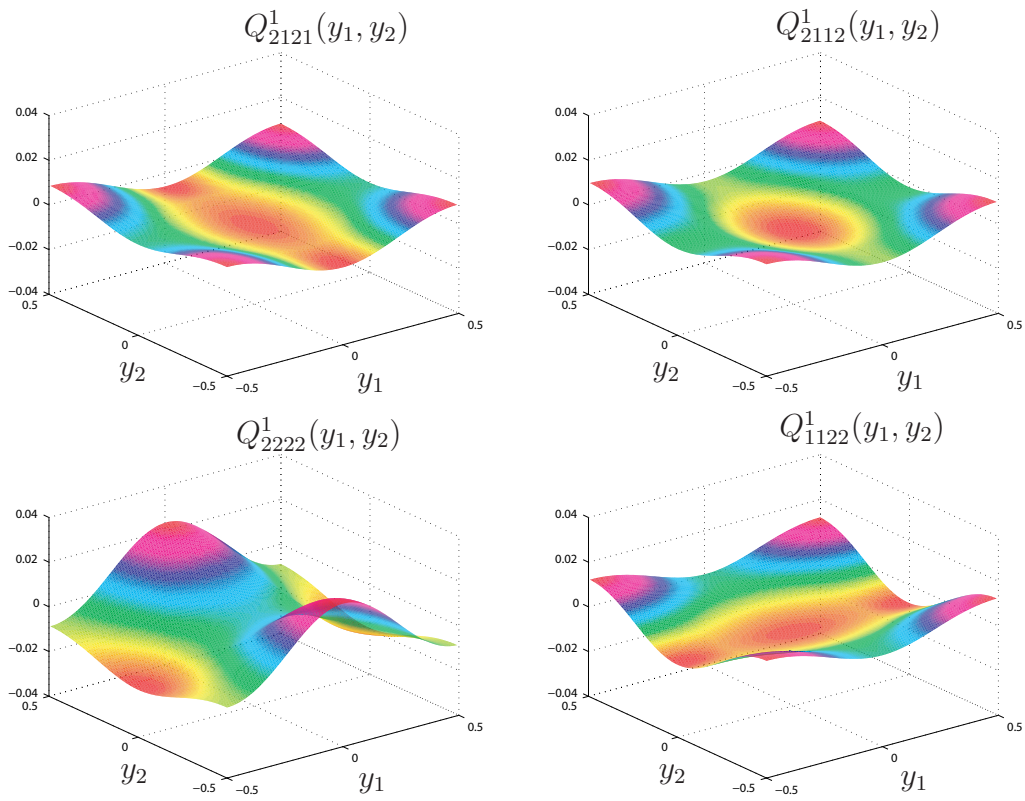


FIGURE 3.7 – Variation des composantes non nulles $Q_{2121}^1(y_1, y_2)$, $Q_{2112}^1(y_1, y_2)$, $Q_{2222}^1(y_1, y_2)$ et $Q_{1122}^1(y_1, y_2)$ - solution du problème d'ordre 2 pour un composite à fibres de section cylindrique.

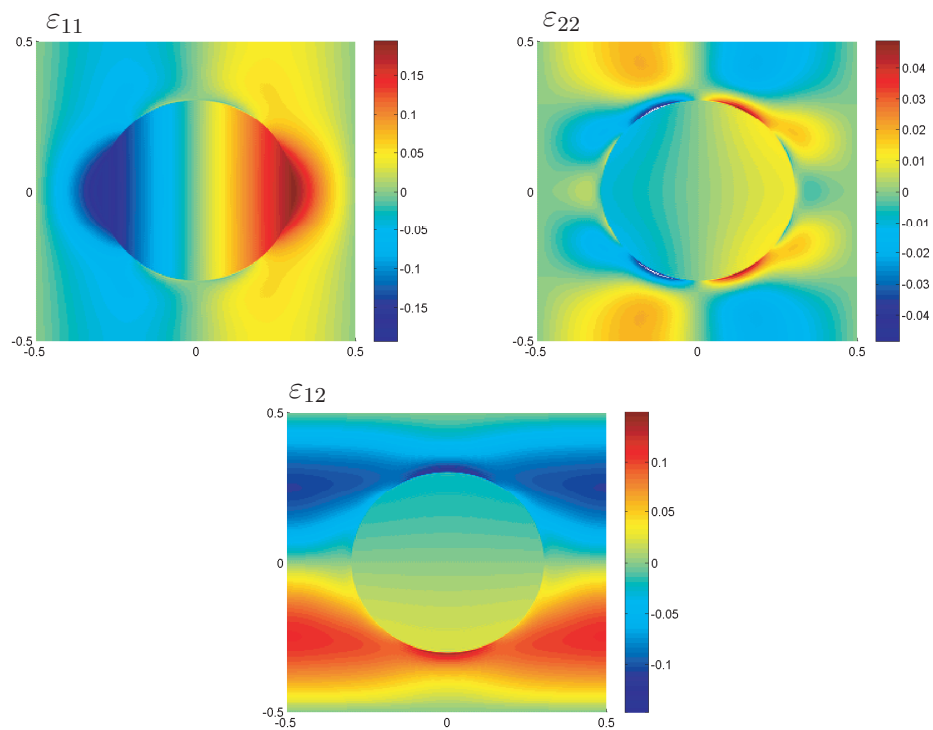


FIGURE 3.8 – Cartes des déformations locales pour la cellule périodique soumise au gradient de déformation $E_{1,1} = 1$

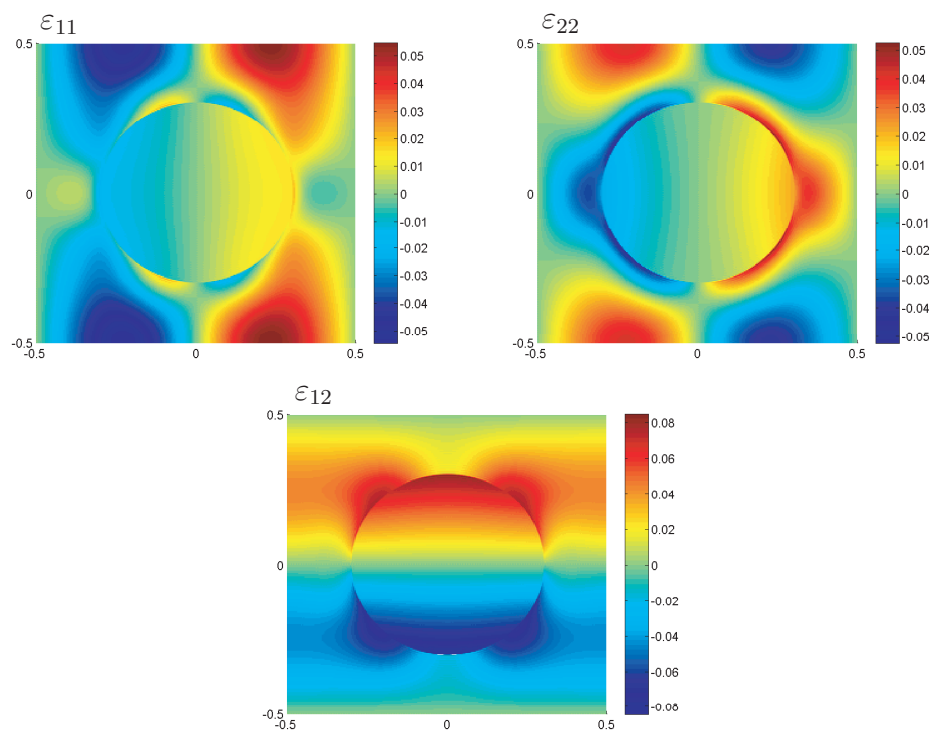


FIGURE 3.9 – Cartes des déformations locales pour la cellule périodique soumise au gradient de déformation $E_{2,1} = 1$

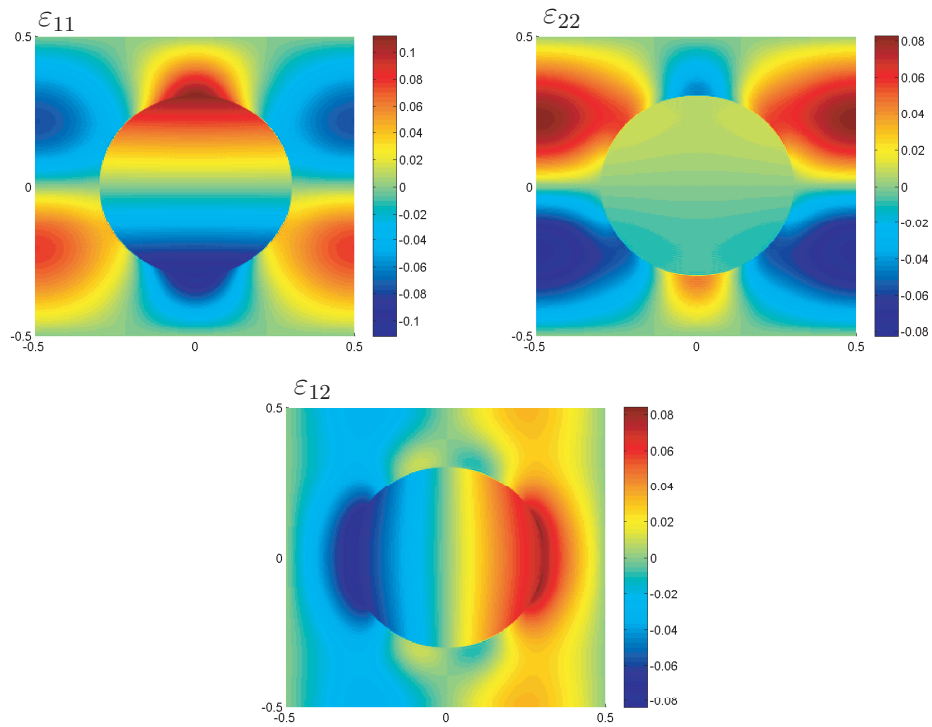


FIGURE 3.10 – Cartes des déformations locales pour la cellule périodique soumise au gradient de déformation $E_{6,1} = 1$

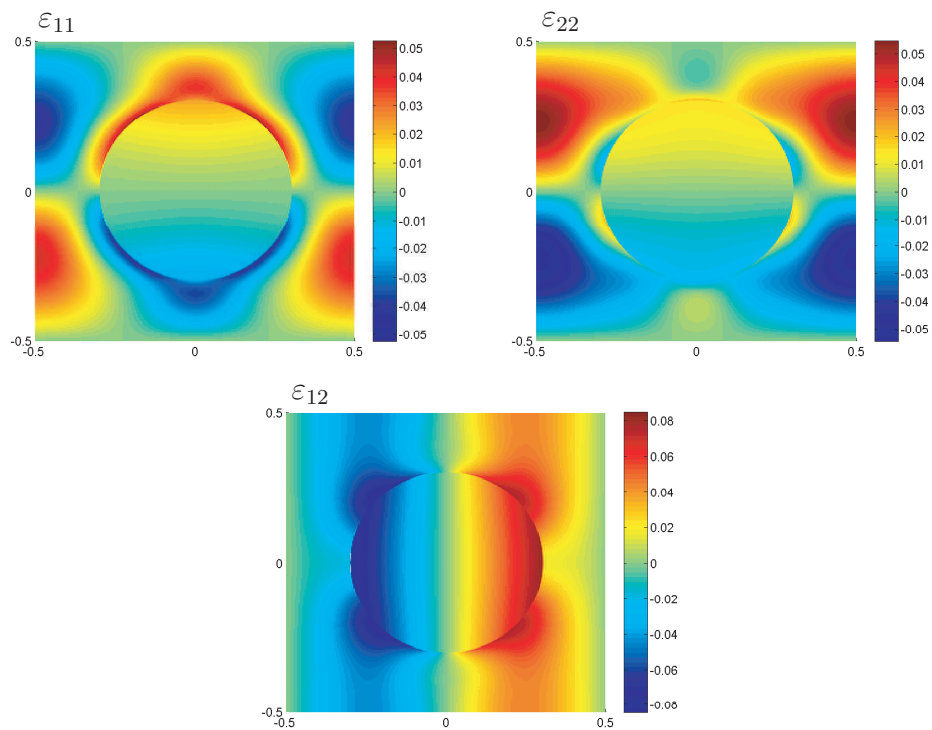


FIGURE 3.11 – Cartes des déformations locales pour la cellule périodique soumise au gradient de déformation $E_{1,2} = 1$

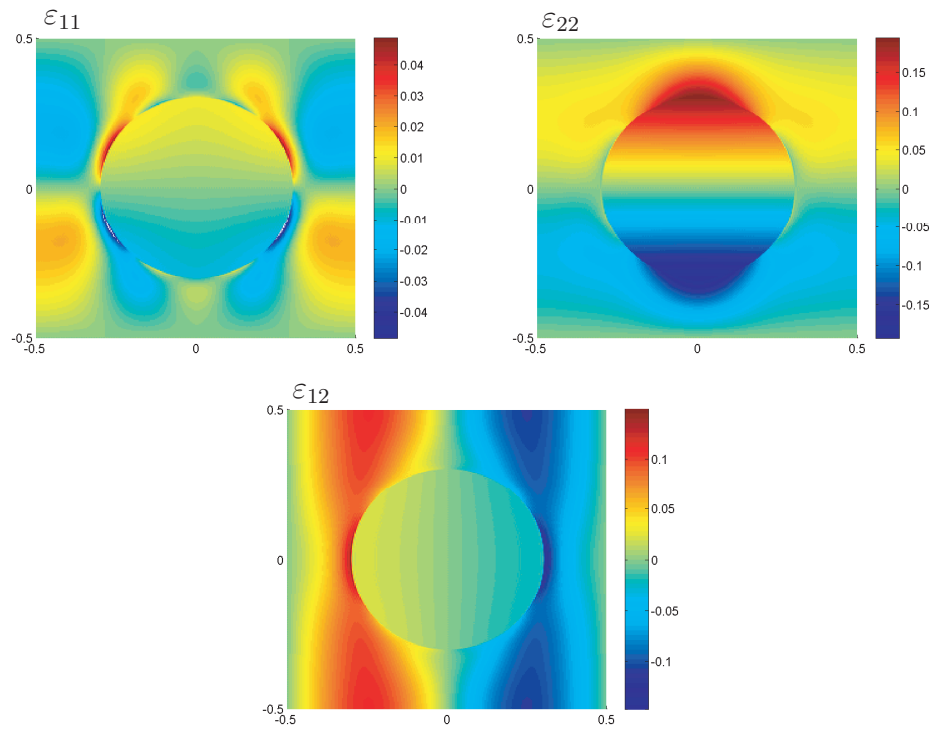


FIGURE 3.12 – Cartes des déformations locales pour la cellule périodique soumise au gradient de déformation $E_{2,2} = 1$

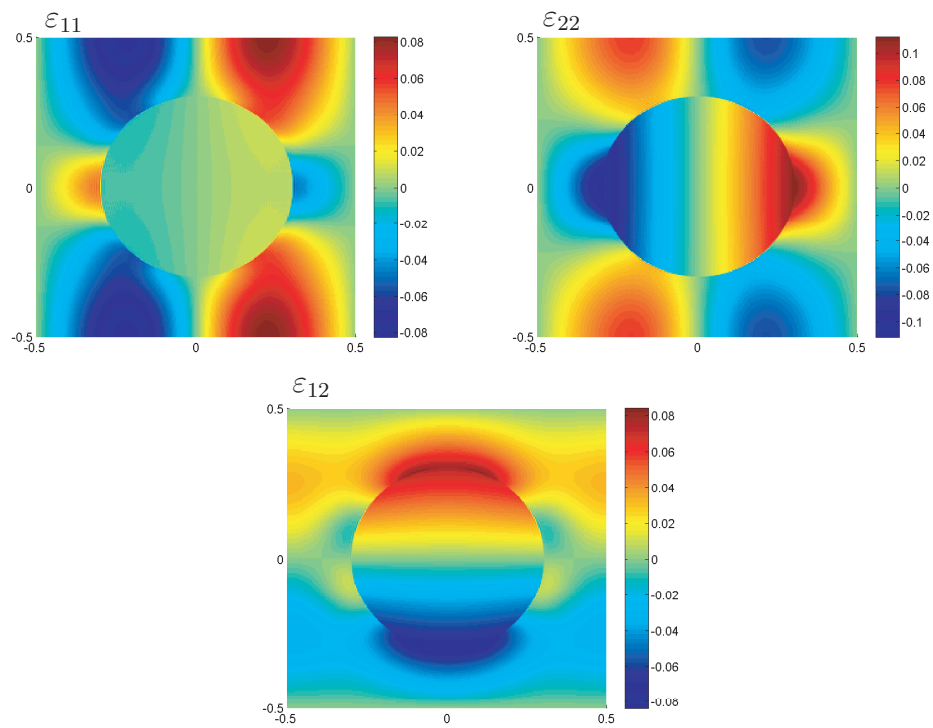


FIGURE 3.13 – Cartes des déformations locales pour la cellule homogène soumise au gradient de déformation $E_{6,2} = 1$

Les champs locaux ainsi obtenus, on détermine alors les propriétés effectives du second gradient par la relation d'homogénéisation (2.56) du chapitre 2. Les tenseurs élastiques sont représentés sous la forme matricielle donnée par les expressions (1.16) présentées au chapitre 1 dans le cas de l'anisotropie la plus générale pour laquelle le matériau ne présente aucune symétrie matérielle. La loi élastique du second gradient introduit alors 45 coefficients indépendants.

La microstructure étudiée présente des symétries : (i) l'invariance par réflexion suivant les deux axes Ox_1 et Ox_2 , (ii) l'invariance par toute rotation d'un angle $\pi/2$ autour de l'axe Ox_3 . Dans ce particulier certaines composantes des tenseurs du second gradient sont nulles. En outre, toutes celles du tenseurs $\mathbb{C}^{0,1}$ sont égales à zéro (qui est une conséquence de la centrosymétrie). Les tenseurs $\mathbb{C}^{0,0}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$ se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} [\mathbb{C}^{0,0}] &= \begin{bmatrix} C_{11}^{0,0} & C_{12}^{0,0} & 0 \\ C_{12}^{0,0} & C_{11}^{0,0} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^{0,0} \end{bmatrix} \\ [\mathbb{C}^{1,1}] &= \begin{bmatrix} C_{1111}^{1,1} & C_{1121}^{1,1} & C_{1162}^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1121}^{1,1} & C_{2121}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1162}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} & C_{6262}^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1111}^{1,1} & C_{1121}^{1,1} & C_{1162}^{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & C_{1121}^{1,1} & C_{2121}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & C_{1162}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} & C_{6262}^{1,1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Dans le cas $2D$ les matrices $C^{0,0}$ et $C^{1,1}$ sont définies respectivement par 3 et 6 composantes indépendantes.

Sur la figure (3.14) on représente la variation des six composantes non nulles de la matrice $C^{1,1}$ en fonction du rapport $2a/h$, où l'on rappelle que a désigne le rayon de la fibre et h le demi coté de la cellule élémentaire, pour un contraste c choisi égal à 5.

On observe que dans le cas limite où $a = 0$, ce qui correspond à un milieu homogène de modules élastiques E_M et ν_M , alors les coefficients du second gradient sont tous nuls. On n'observe donc pas de persistance des effets de gradient lorsque l'on supprime l'hétérogénéité locale, résultat déjà observé dans le cas du composite stratifié.

On observe d'autre part que les effets du second gradient sont les plus prononcés lorsque l'on atteint le seuil de percolation correspondant ici à $2a = h$.

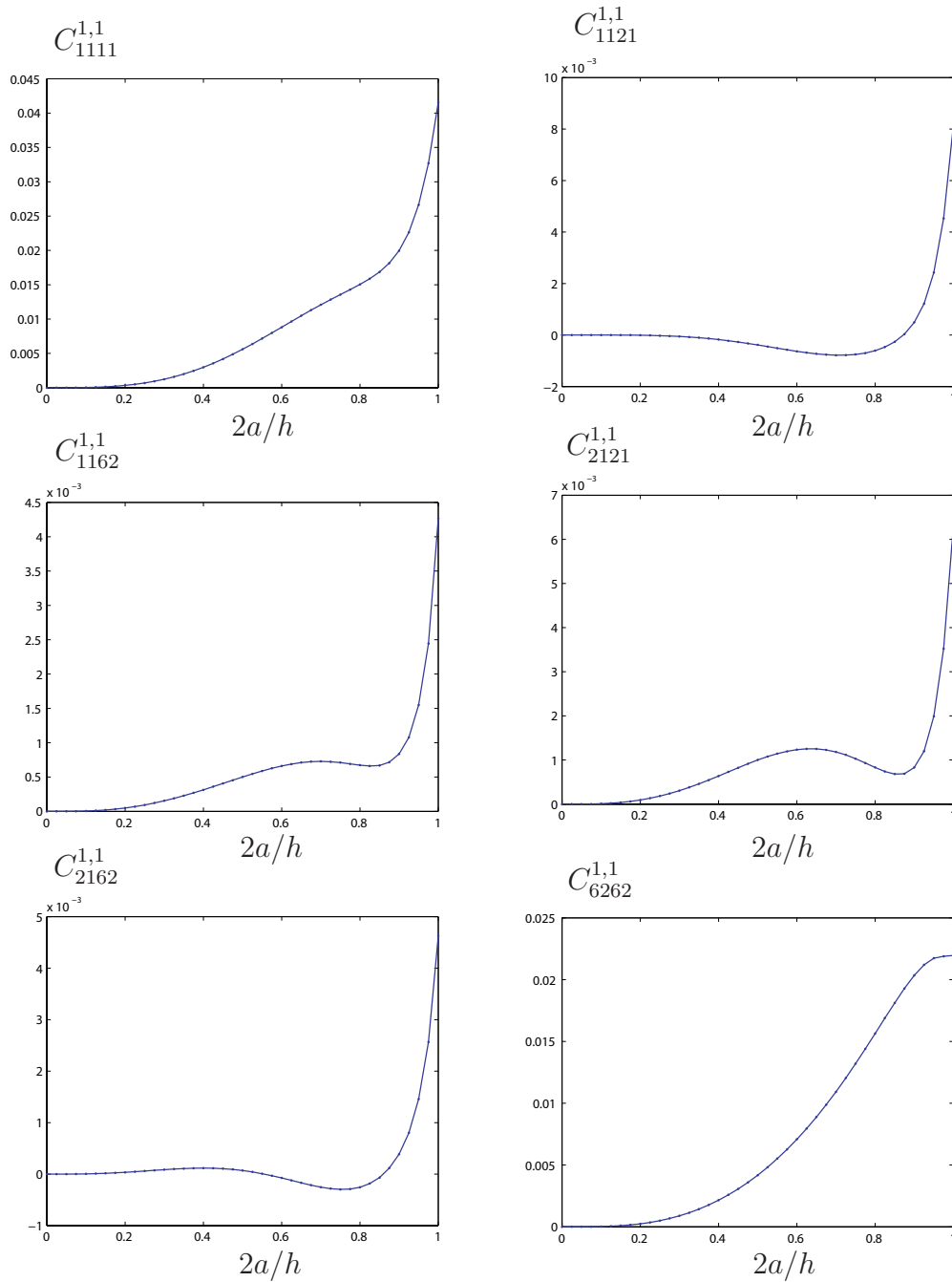


FIGURE 3.14 – Variation des coefficients élastiques du second gradient $C_{1111}^{1,1}$, $C_{1121}^{1,1}$, $C_{1162}^{1,1}$, $C_{2121}^{1,1}$, $C_{2162}^{1,1}$ et $C_{6262}^{1,1}$ pour le composite à fibres de section cylindrique en fonction de la fraction volumique $2a/h$, contraste $c = 5$.

On propose maintenant d'examiner les variations des propriétés du second gradient avec le contraste $c = E_I/E_M$. Le cas de la cavité correspond au cas limite $c = 0$ tandis celui de l'inclusion rigide correspond à $c = +\infty$. Les figures 3.15 et 3.16 représentent les variations des coefficients du second gradient pour c variant de 10^{-4} à 10^4 .

Afin de bien observer les variations avec le contraste, les coefficients $C_{1111}^{1,1}$, $C_{2121}^{1,1}$ et

$C_{6262}^{1,1}$ sont représentés avec un repère logarithmique alors que pour les autres coefficients, on a adopté une représentation classique en ordonnée et logarithmique en abscisse.

On observe, pour les fortes valeurs du contraste (inclusion plus rigide que la matrice), une saturation du module élastique dans le cas des inclusions très rigides. Dans le domaine des contrastes inférieurs à 1 (inclusion plus souple que la matrice), on n'observe pas de saturation lorsque l'on diminue la valeur du contraste. Les propriétés du second gradient semblent diverger dans le cas limite d'une cavité. On notera également que certains coefficients élastiques ($C_{1121}^{1,1}$ et $C_{2162}^{1,1}$) du second gradient prennent des valeurs négatives dans le domaine des contrastes supérieurs à 1.

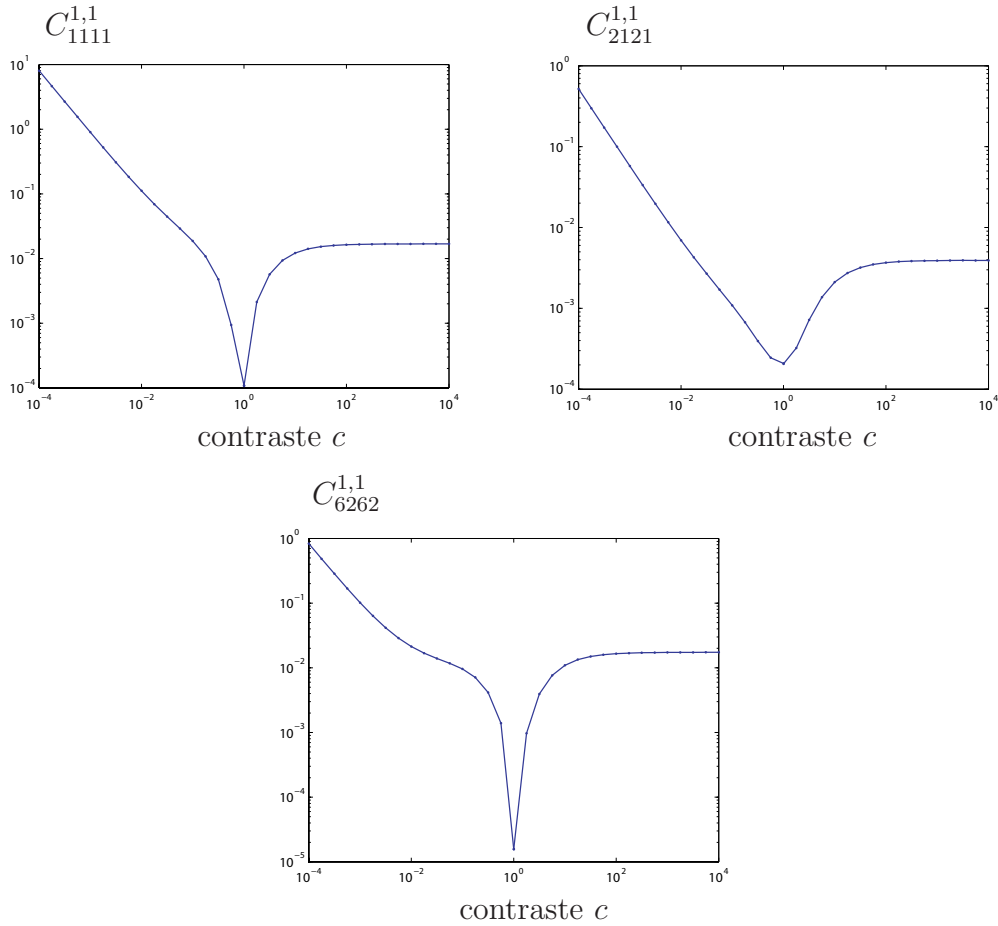


FIGURE 3.15 – Variation des coefficients élastiques du second gradient $C_{1111}^{1,1}$, $C_{2121}^{1,1}$, $C_{6262}^{1,1}$ (dans un repère logarithmique) pour le composite à fibres de section cylindrique en fonction du contraste $c = E_I/E_M$.

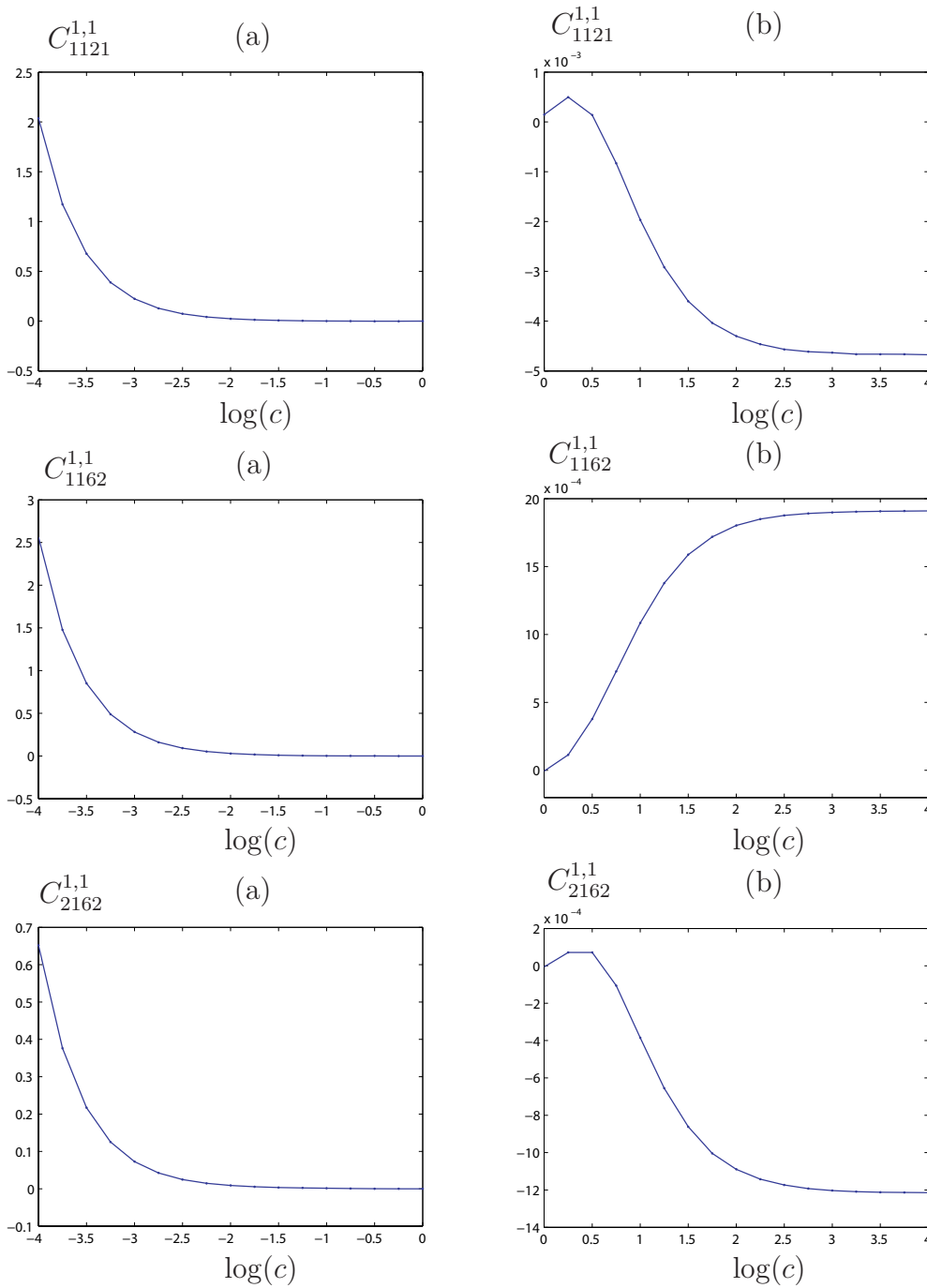


FIGURE 3.16 – Variation des coefficients élastiques du second gradient $C_{1121}^{1,1}$, $C_{1162}^{1,1}$, $C_{2162}^{1,1}$ pour le composite à fibres de section cylindrique en fonction du contraste $c = E_I/E_M$; (a) cas de contraste $c \geq 1$; (b) cas de contraste $c \leq 1$.

3.3.2 Composite avec renforts de section demi-cylindriques

On considère un second exemple correspondant à une microstructure constituée d'un arrangement périodique de fibres hémicylindriques. La cellule élémentaire, décrite sur la figure 3.17, est rectangulaire de cotés h et $2h$. Les renforts ont pour

section des demi disques de rayon a . Les coefficients de Poisson de la matrice et de l'inclusion sont $\nu_M = 1/4$ et $\nu_I = 1/3$. Les modules d'Young sont $E_M = 1$ et $E_I = 2$.

Cette microstructure ne possède pas la symétrie d'axe Ox_2 ce qui a pour conséquence de distinguer la microstructure levogyre de la microstructure dextrogyre. Les propriétés élastiques classiques (le tenseur $\mathbb{C}^{0,0}$) sont insensible à la chiralité, mais ce n'est pas le cas pour les propriétés du second gradient. Les coefficients du second gradient de milieu dextrogyre ne sont égales à ceux du milieu levogyre. Toutefois les propriétés du milieu levogyre peuvent être obtenues par permutation des composantes du milieu levogyre (ces permutations étant associées à l'inversion de l'axe Ox_2 par $-Ox_2$). On note par $C_{ijklm}^{0,1}$ les composantes du tenseur élastique d'ordre cinq $\mathbb{C}^{0,1}$ du milieu levogyre et par $C_{ijklm}^{0,1*}$ celles du milieu dextrogyre, la relation entre les coefficients des deux milieux est : $C_{ijklm}^{0,1} = -C_{ijklm}^{0,1*}$. Tandis que pour le tenseur d'ordre six $\mathbb{C}^{1,1}$, les coefficients sont insensibles à la chiralité.

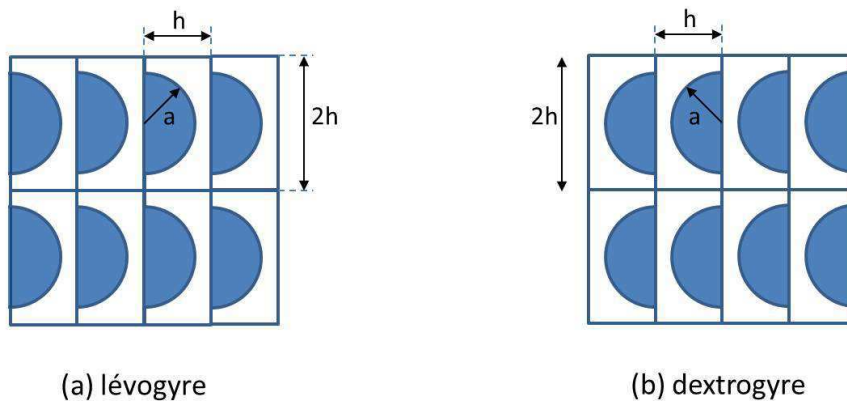


FIGURE 3.17 – Cellule élémentaire d'un composite avec renforts de sections demi-cylindriques.

Les matrices avec des composantes non nulles dans le plan des tenseurs $\mathbb{C}^{0,0}$, $\mathbb{C}^{0,1}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$ sont données par :

$$[\mathbb{C}^{0,0}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{0,0} & C_{12}^{0,0} & 0 \\ C_{12}^{0,0} & C_{22}^{0,0} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^{0,0} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (3.75)$$

$$[\mathbb{C}^{0,1}] = \begin{bmatrix} C_{111}^{0,1} & C_{121}^{0,1} & C_{162}^{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{211}^{0,1} & C_{221}^{0,1} & C_{262}^{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{622}^{0,1} & C_{612}^{0,1} & C_{661}^{0,1} \end{bmatrix}_{3 \times 6} \quad (3.76)$$

$$[\mathbb{C}^{1,1}] = \begin{bmatrix} C_{1111}^{1,1} & C_{1121}^{1,1} & C_{1162}^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1121}^{1,1} & C_{2121}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1162}^{1,1} & C_{2162}^{1,1} & C_{6262}^{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2222}^{1,1} & C_{2212}^{1,1} & C_{2261}^{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2212}^{1,1} & C_{1212}^{1,1} & C_{1261}^{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2261}^{1,1} & C_{1261}^{1,1} & C_{6161}^{1,1} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.77)$$

Les coefficients élastiques non nuls sont au nombre de 25. La matrice $[\mathbb{C}^{0,0}] =$ dépend de 4 composantes, $[\mathbb{C}^{0,1}] =$ de 9 composantes et $[\mathbb{C}^{1,1}] =$ de 12 composantes non nulles dans la matrice $C^{0,1}$. Les variations des coefficients du second gradient avec le rapport a/h sont représentées sur les figures 3.18, 3.19 et 3.20.

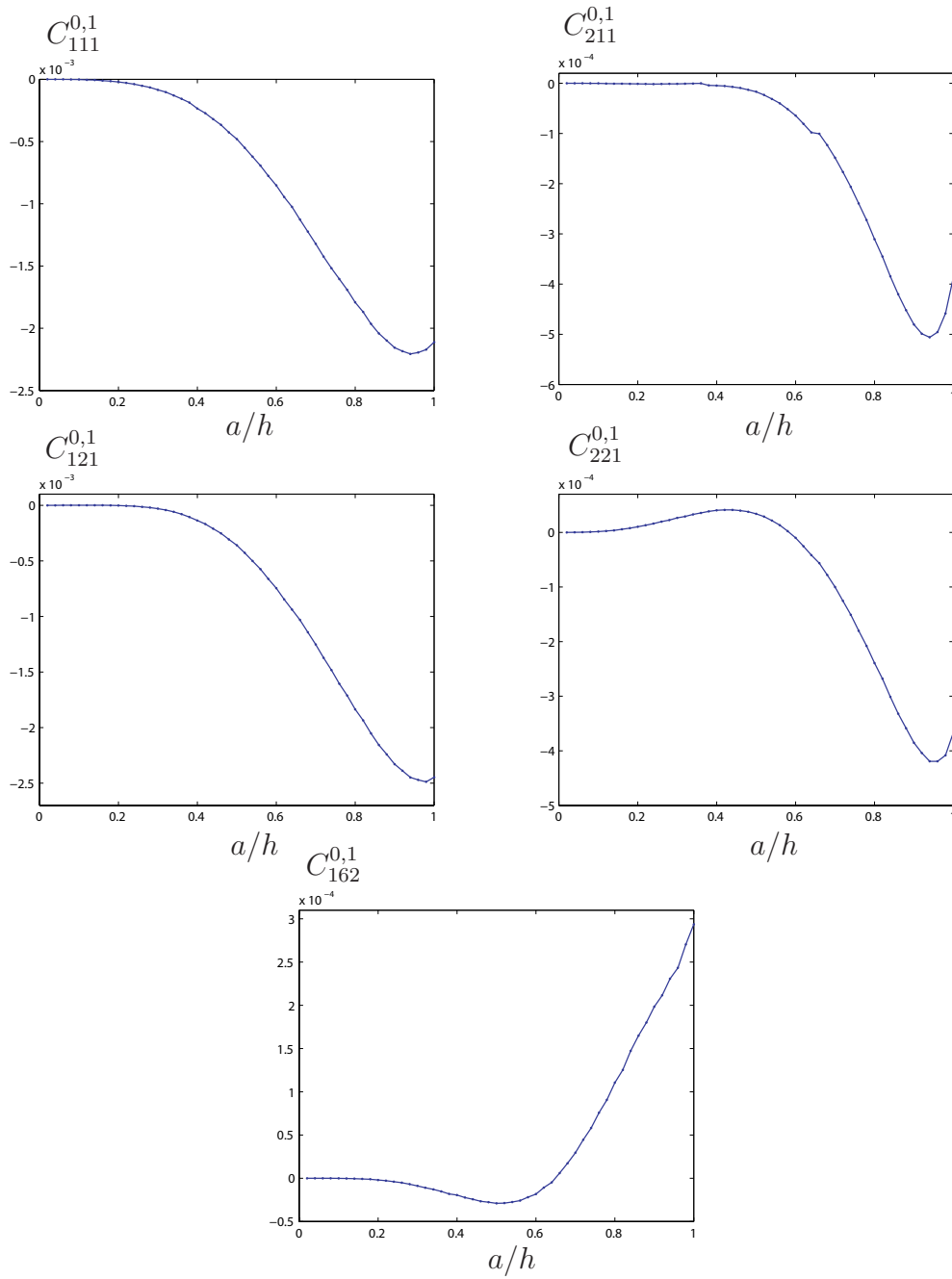


FIGURE 3.18 – Coefficients élastiques de $\mathbb{C}^{0,1}$ pour le composite à fibres de section demi-cylindrique en fonction du rapport a/h .

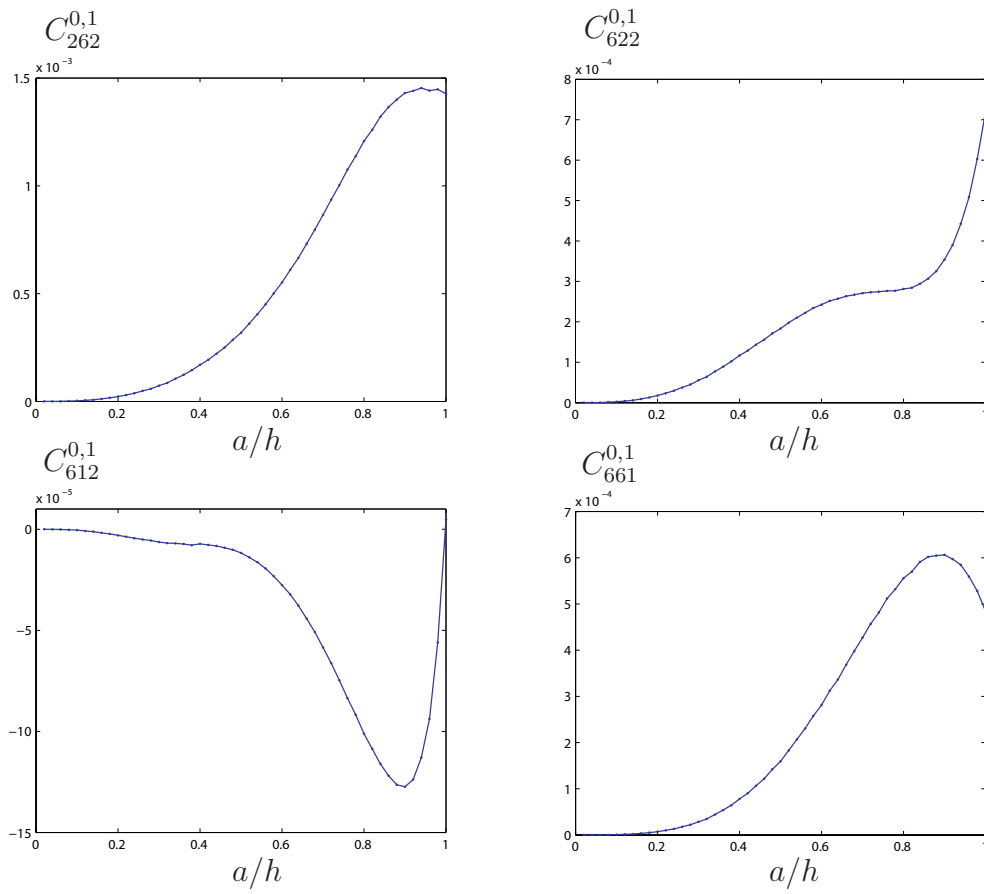


FIGURE 3.19 – Coefficients élastiques de $\mathbb{C}^{0,1}$ pour le composite à fibres de section demi-cylindrique en fonction du rapport a/h .

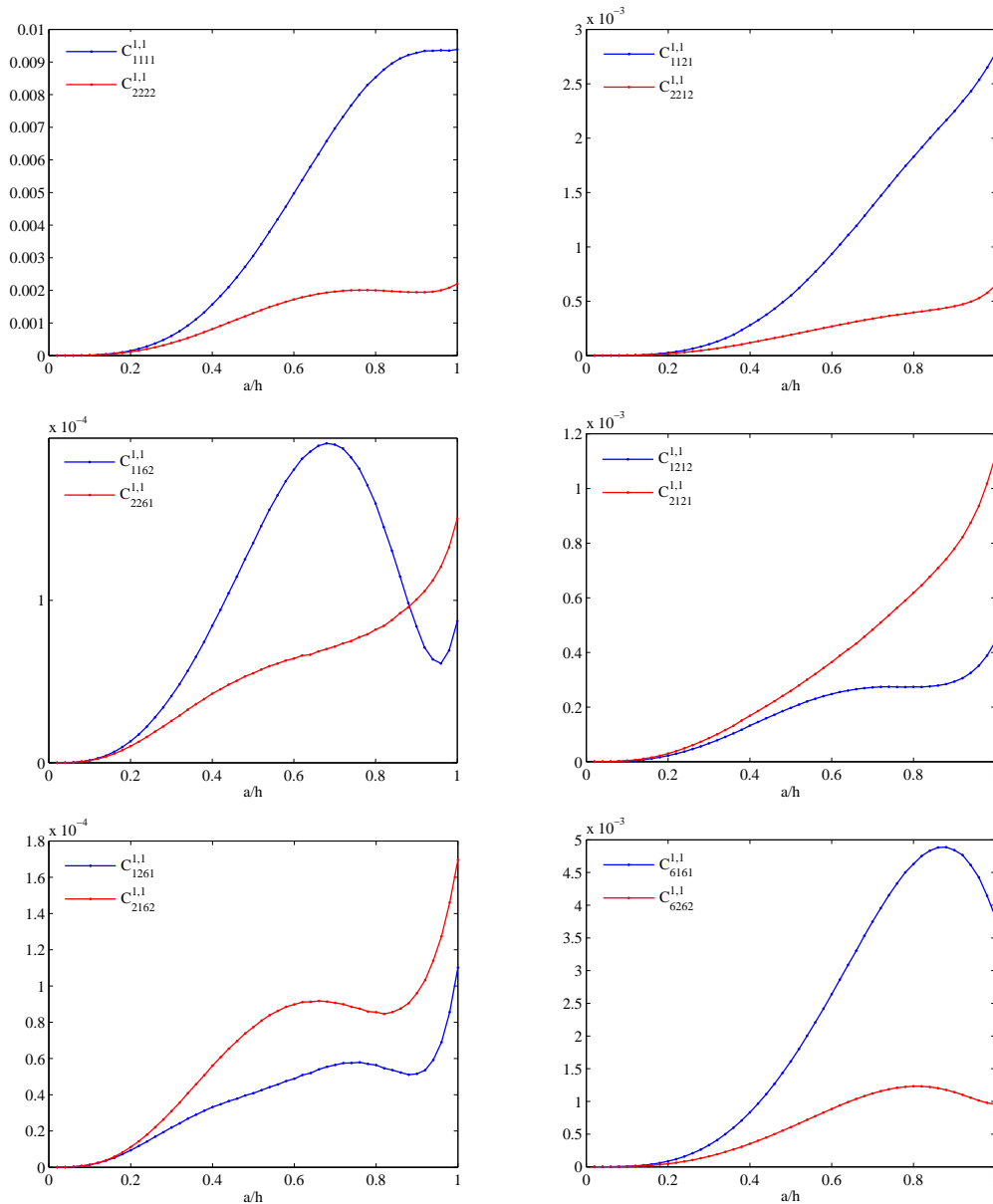


FIGURE 3.20 – Coefficients élastiques de $\mathbb{C}^{1,1}$ pour le composite à fibres de section demi-cylindrique en fonction du rapport a/h .

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé des algorithmes utilisant la transformée de Fourier rapide pour le calcul des propriétés du second gradient. Dans un premier temps, les problèmes de la cellule élémentaire à tous les ordres sont réécrits sous la forme d'équations intégrales de type Lippmann-Schwinger utilisant les opérateurs de Green du milieu périodique. Dans le second temps, ces équations intégrales sont résolues à l'aide d'un schéma itératif qui utilise la TFR. Ainsi, l'approche classique formulée en déformation, et initialement introduite par Moulinec

et Suquet [52] pour traiter le problème d'ordre 1, a été étendue pour la résolution des problèmes d'ordre $n \geq 2$. D'autre part, nous avons proposé une formulation duale (formulée en contrainte) de ces schémas itératifs qui apparaît mieux adaptée pour traiter le cas des inclusions plus rigides que la matrice.

Des illustrations aux composites renforcés par des inclusions cylindriques à section circulaire et hémicirculaire ont été proposées dans la dernière partie de ce chapitre. Les propriétés du second gradient sont alors reconstruites à partir des images de microstructure en étudiant notamment l'influence de taille des renforts ou du contraste de propriétés élastiques locales. Le cas des renforts à section hémicirculaire a mis en évidence notamment la sensibilité des propriétés du second gradient avec la chiralité de la microstructure déjà mis en évidence dans la littérature (c.f. [2], [3])

Chapitre 4

Extension aux composites non linéaires

4.1 Introduction

On propose d'étendre les résultats obtenus au chapitre 2 pour des composites non linéaires. Compte tenu de la difficulté supplémentaire liée à la non linéarité de comportement des phases, on propose de restreindre l'analyse au contexte de la conductivité thermique. Les résultats généraux obtenus pourront néanmoins être facilement réécrits pour le cas de l'élasticité non linéaire.

Dans la première partie du chapitre, on étend l'approche par développement asymptotique pour un composite dont le comportement des phases est décrit par une loi dérivant d'un potentiel. On établit ainsi les problèmes d'homogénéisation d'ordre supérieur ainsi que la solution générale des problèmes aux ordres 1 et 2. On aboutit ensuite l'expression générale du potentiel macroscopique incluant les effets du double gradient de la température macroscopique (qui est équivalent, pour le cas de la thermique, aux effets du gradient de la déformation macroscopique en élasticité).

Dans la seconde partie du chapitre, on détermine les expressions analytiques du potentiel macroscopique pour le cas d'un composite stratifié dont les phases sont régies par une loi en puissance. Ce chapitre est issu d'un article en cours de publication qui a été rédigé en anglais.

4.2 Application of the asymptotic series method for thermal properties of some non linear composites

4.2.1 Description of the problem

We consider a periodic, non linear composite whose local constituents have the following behavior :

$$\underline{\sigma}(\underline{X}) = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{X}, \underline{\varepsilon}(\underline{X})) \quad (4.1)$$

where ψ is defined by :

$$\psi(\underline{X}, \underline{\varepsilon}(\underline{X})) = \sum_r \chi_r(\underline{X}) \psi_r(\underline{\varepsilon}(\underline{X})) \quad (4.2)$$

$\chi_r(\underline{X})$ are the characteristic functions of the phases and $\psi_r(\underline{X})$ for $r = 1, 2, \dots$ are non linear functions of the gradient of temperature $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$, which define the local behavior in the phase "r". Each potential $\psi_r(\underline{\varepsilon}(\underline{X}))$ is assumed to be C^∞ with respect to the variable $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$. The gradient of temperature and the flux comply with :

$$\operatorname{div}_X(\underline{\sigma}(\underline{X})) = 0, \quad \underline{\varepsilon}(\underline{X}) = \nabla_X u(\underline{X}) \quad (4.3)$$

where $u(\underline{X})$ is the temperature. In the above relation, the indice "X" in div_X and ∇_X means that the derivation is made with respect to the vector position \underline{X} . This distinction is needed since two space variables, namely a slow and a rapid position vector, will be introduced by the asymptotic method. For simplicity, the volumic sources have not been considered in the balance equation. Additionally, the temperature and the flux are continuous across the interfaces between the inclusions and the matrix :

$$[u(\underline{X})]_\Gamma = 0, \quad [\underline{\sigma}(\underline{X}) \cdot \underline{n}]_\Gamma = 0 \quad (4.4)$$

in which \underline{n} is the outward normal unit vector taken on the interface Γ . The notation $[\bullet]_\Gamma$ represents the jump of \bullet across the interface Γ defined as follows : $[\bullet]_\Gamma = \bullet^+ - \bullet^-$, where \bullet^+ and \bullet^- are the values of \bullet calculated on both sides of Γ .

4.2.2 Derivation of the cell problems

We now employ the asymptotic expansion method in order to derive the general form of the local response of the periodic composites due to an external loading. Classically, we introduce the two non-dimensional space variables $\underline{x} = \underline{X}/L$ and $\underline{y} = \underline{X}/h$ where h and L are respectively the characteristic lengthscale of the microstructural elements (the size of the unit cell, of the inclusions, the distance between two neighboring inclusions...) while L denotes a characteristic length of the studied macrostructure or the characteristic size related to the applied loading. Variable \underline{x} is called slow variable while \underline{y} is the rapid one. All the fields, i.e. temperature, gradient of temperature and flux, are assumed to depend on these two variables. The dependence on \underline{x} is attributed to the applied macroscopic loading while the variations with \underline{y} are the fluctuation due to the local heterogeneity. Due to the periodicity of the microstructure, the characteristic functions $\chi_r(\underline{y})$ only depend on the rapid variable \underline{y} . The local behavior (4.1) reads :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{y}, \underline{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y})) \quad \text{with : } \psi(\underline{y}, \underline{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y})) = \sum_r \chi_r(\underline{y}) \psi_r(\underline{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y})) \quad (4.5)$$

The scale factor, $\epsilon = h/L$, is assumed to be small compared to 1 but not negligible. In presence of this small parameter, the solution at local scale can be expanded

as a power series in ϵ :

$$u(\underline{x}, \underline{y}) = L \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n u^n(\underline{x}, \underline{y}) \quad (4.6)$$

where $u^n(\underline{x}, \underline{y})$ are y -periodic and non dimensional due to the presence of the lengthscale L before the sum. The gradient operator is decomposed into two parts : $\nabla \bullet = \frac{1}{L}(\nabla_x \bullet + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y \bullet)$, where the indices x and y indicate that the derivatives are taken with respect to \underline{x} and \underline{y} respectively. It leads to :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\varepsilon}^{-1}(\underline{x}, \underline{y}) + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \underline{\varepsilon}^n(\underline{x}, \underline{y}) \quad (4.7)$$

where $\underline{\varepsilon}^{-1}(\underline{x}, \underline{y})$ and $\underline{\varepsilon}^n(\underline{x}, \underline{y})$ for $n \geq 0$ read :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^{-1}(\underline{x}, \underline{y}) &= \nabla_y u^0(\underline{x}, \underline{y}) \\ \underline{\varepsilon}^n(\underline{x}, \underline{y}) &= \nabla_x u^n(\underline{x}, \underline{y}) + \nabla_y u^{n+1}(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{for } n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

The gradient of temperature must remain finite when the scale factor tends to zero. Consequently, $\underline{\varepsilon}^{-1}(\underline{x}, \underline{y})$ must be zero and $u^0(\underline{x}, \underline{y})$ is only function of the slow space variable, \underline{x} . It is thereafter denoted $U(\underline{x})$. The gradient of temperature, $\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$, reads :

$$\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{E}(\underline{x}) + \nabla_x u^1(\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{with : } \underline{E}(\underline{x}) = \nabla_x U(\underline{x}) \quad (4.9)$$

The microscopic flux takes also the form of a power series in ϵ :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \underline{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}) \quad (4.10)$$

with :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) &= \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) \\ \underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) \cdot \underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) \\ \underline{\sigma}^2(\underline{x}, \underline{y}) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) \cdot \underline{\varepsilon}^2(\underline{x}, \underline{y}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) : (\underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) \otimes \underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y})) \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

In the equilibrium equation (the first equation in (4.3)), the divergence operator is decomposed into two divergence operators with respect to the space variables \underline{x} and \underline{y} . The balance equation reads then :

$$\frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}_y(\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y})) + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \epsilon^n \left[\operatorname{div}_y(\underline{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y})) + \operatorname{div}_x(\underline{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y})) \right] = 0 \quad (4.12)$$

By collecting all the terms having the same power in ϵ we obtain :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y(\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y})) &= 0 \\ \operatorname{div}_x(\underline{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y})) + \operatorname{div}_y(\underline{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y})) &= 0 \quad \text{for } n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

By taking the average of each term in (4.13) over the volume of the cell, we obtain :

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} dS &= 0 \\ \operatorname{div}_x(\langle \underline{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V) + \int_{\partial V} \underline{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} dS &= 0 \quad \text{for } n \geq 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

in which the divergence theorem has been used in order to replace the volume integral by an integral over the boundary ∂V of the cell. All surface integrals are null as a consequence of the equilibrium between two neighboring cells. It remains :

$$\operatorname{div}_x(\langle \underline{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V) = 0 \quad \text{for } n \geq 0 \quad (4.15)$$

It is possible to eliminate (4.15) in equations (4.13) :

$$\operatorname{div}_x^*(\underline{\sigma}^n(\underline{x}, \underline{y})) + \operatorname{div}_y(\underline{\sigma}^{n+1}(\underline{x}, \underline{y})) = 0 \quad \text{for } n \geq 0 \quad (4.16)$$

in which we have introduced div_x^* , defined, for any function $\underline{f}(\underline{x}, \underline{y})$, by :

$$\operatorname{div}_x^* [\underline{f}(\underline{x}, \underline{y})] = \operatorname{div}_x [\underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) - \langle \underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V] \quad (4.17)$$

Finally, by replacing the expressions (4.11) in the first equation in (4.13) and in equations (4.16), we get a hierarchy of equations for the unknowns $u^1(\underline{x}, \underline{y})$, $u^2(\underline{x}, \underline{y})$, $u^3(\underline{x}, \underline{y})$, etc. The problem at the first order reads :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y [\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y})] = 0, & \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{E}(\underline{x}) + \nabla_y u^1(\underline{x}, \underline{y})) \\ [u^1(\underline{x}, \underline{y})]_\Gamma = 0, & [\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}]_\Gamma = 0, \\ u^1(\underline{x}, \underline{y}) \text{ } \underline{y} \text{ - periodic,} & \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ } \underline{y} \text{ - antiperiodic} \end{cases} \quad (4.18)$$

In the above equation we search the solution $u^1(\underline{x}, \underline{y})$ for a given value of $\underline{E}(\underline{x})$. The problem at the second order is :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y [\underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y})] = -\operatorname{div}_x^* [\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y})], \\ \underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) \cdot [\nabla_y u^2(\underline{x}, \underline{y}) + \nabla_x u^1(\underline{x}, \underline{y})] \\ [u^2(\underline{x}, \underline{y})]_\Gamma = 0, & [\underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}]_\Gamma = 0, \\ u^2(\underline{x}, \underline{y}) \text{ } \underline{y} \text{ - periodic,} & \underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ } \underline{y} \text{ - antiperiodic} \end{cases} \quad (4.19)$$

In the second order problem, $u^1(\underline{x}, \underline{y})$ and $\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$ are known since they are computed as the solutions of the first order problem. In equation (4.19), the unknown

variable is $u^2(\underline{x}, \underline{y})$.

The problem at the third order takes the form :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y [\underline{\sigma}^2(\underline{x}, \underline{y})] = -\operatorname{div}_x^* [\underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y})], \\ \underline{\sigma}^2(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) \cdot [\nabla_y u^3(\underline{x}, \underline{y}) + \nabla_x u^2(\underline{x}, \underline{y})] \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) : (\underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) \otimes \underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y})) \\ [u^3(\underline{x}, \underline{y})]_\Gamma = 0, \quad [\underline{\sigma}^2(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}]_\Gamma = 0, \\ u^3(\underline{x}, \underline{y}) \text{ } \underline{y} \text{ - periodic, } \quad \underline{\sigma}^2(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ } \underline{y} \text{ - antiperiodic} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

In these equations $u^1(\underline{x}, \underline{y})$, $u^2(\underline{x}, \underline{y})$, $\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$ and $\underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y})$ are determined by computing the solution of the first and second order cell problems. The unknown is the temperature $u^3(\underline{x}, \underline{y})$.

To summarize, each term of the series (4.6) is computed iteratively as the solution of a hierarchy of cell problems for which (4.18), (4.19) to (4.20) are the first three problems. It must be noted that the first order cell problem is non linear for $u^1(\underline{x}, \underline{y})$ since ψ is a non linear function of the gradient of temperature. On the other hand, the second order and third order cell problems (given by (4.19) and (4.20)), and also higher order ones, are linear for the temperatures $u^2(\underline{x}, \underline{y})$, $u^3(\underline{x}, \underline{y})$, etc. They can be interpreted as linear conductivity problems for a heterogeneous material having the conductivity $C_{ij}(\underline{y}) = \psi_{,\varepsilon_i \varepsilon_j}(\underline{\varepsilon}^0)$ and in presence of source terms. Note also that the conductivity $C_{ij}(\underline{y})$ depends on $\underline{E}(\underline{x})$ and is heterogenous not only from one phase to another but also within the phases since it depends on the field ε^0 .

Let us recall that the first cell problem is commonly considered in homogenization for computing the macroscopic response of non linear composites. In this first problem, the loading parameter is $\underline{E}(\underline{x})$, the solution of this problem does not introduce double gradient effects. As shown in the following, these effects are captured at higher orders. Following [11], in the case of linear elasticity, we propose to derive the general form of the solution of these cell problems. Due to their complexity, only the cell problems at first and second order are considered.

4.3 Solutions to the cell problems

4.3.1 Solution at the first order

The solution of the first order cell problem can be read :

$$u^1(\underline{x}, \underline{y}) = u^1(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \quad (4.21)$$

where $u^1(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$ has a non linear dependence with the variable $\underline{E}(\underline{x})$ and is periodic according to \underline{y} . The average of $u^1(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$ over the volume of the unit cell is considered as being null :

$$\langle u^1(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \rangle_V = 0 \quad (4.22)$$

It is possible to add in \underline{u}^1 a term which is only a function of the macroscopic coordinates \underline{x} and which appears as a constant of integration for the rapid space variable \underline{y} . However the introduction of this term increases the complexity of the problem but does not affect the final result. For this reason this additional term is not considered here.

The gradient of temperature $\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$ reads :

$$\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{E}(\underline{x}) + \nabla_{\underline{y}} u^1(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \quad (4.23)$$

It must be observed that $\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$ depends on the macroscopic spatial variable \underline{x} through the macroscopic quantity $\underline{E}(\underline{x})$. So we put :

$$\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\varepsilon}^0(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \quad (4.24)$$

Since $\underline{u}^1(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$ is periodic, the average over the volume of the unit cell of its gradient is null :

$$\langle \underline{\varepsilon}^0(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \rangle_V = \underline{E}(\underline{x}) \quad (4.25)$$

The first term in the expansion of the flux, $\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y})$, is given by :

$$\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} (\underline{\varepsilon}^0(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})) \quad (4.26)$$

which also depends on the spatial variable \underline{x} through $\underline{E}(\underline{x})$ and we put thereafter $\underline{\sigma}^0(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$.

4.3.2 Solution at the second order

In the second homogenization problem (4.19), we replace $u^1(\underline{x}, \underline{y})$ and $\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})$ by their expressions given by (4.21) and (4.24). It leads to :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\underline{y}} [\underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y})] = - \left[\frac{\partial \underline{\sigma}^0}{\partial \underline{E}} - \langle \frac{\partial \underline{\sigma}^0}{\partial \underline{E}} \rangle_V \right] : \mathbf{K}(\underline{x}), \\ \underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}} (\underline{\varepsilon}^0) \cdot \left[\nabla_{\underline{y}} u^2(\underline{x}, \underline{y}) + \frac{\partial u^1}{\partial \underline{E}} \mathbf{K}(\underline{x}) \right] \\ [u^2(\underline{x}, \underline{y})]_{\Gamma} = 0, \quad [\underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}]_{\Gamma} = 0, \\ u^2(\underline{x}, \underline{y}) \text{ } \underline{y} \text{ - periodic, } \quad \underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n} \text{ } \underline{y} \text{ - antiperiodic} \end{cases} \quad (4.27)$$

In equation (4.27), the dependence of u^1 , $\underline{\varepsilon}^0$ and $\underline{\sigma}^0$ with $\underline{E}(\underline{x})$ and \underline{y} has been omitted for simplicity and the second order tensor $\mathbf{K}(\underline{x})$ is defined by $K_{ij}(\underline{x}) = U_{,ij}(\underline{x})$ and only depends on the macroscopic space variable \underline{x} . This problem is linear for the displacement $u^2(\underline{x}, \underline{y})$. The solution has a non linear dependence with $\underline{E}(\underline{x})$ but linearly depends on the forcing term $\mathbf{K}(\underline{x})$. It can then be put into the form :

$$u^2(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbf{Q}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) : \mathbf{K}(\underline{x}) \quad (4.28)$$

where $\mathbf{Q}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$ is a second order tensor which has a null average over the volume of the cell :

$$\langle \mathbf{Q}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \rangle_V = 0 \quad (4.29)$$

The field $\underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y})$ reads :

$$\underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) = \mathbf{A}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) : \mathbf{K}(\underline{x}) \quad (4.30)$$

in which the components of tensor $\mathbf{A}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$ are given by :

$$\begin{aligned} A_{ijk}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u^1}{\partial E_j}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \delta_{ik} + \frac{\partial u^1}{\partial E_k}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \delta_{ij} \right] \\ &+ \frac{\partial Q_{jk}}{\partial y_i}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Since $u^1(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$ has a null volume average over a period and $\mathbf{Q}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$ is \underline{y} -periodic, $\mathbf{A}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$ has also a null volume average :

$$\langle \mathbf{A}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) \rangle_V = 0 \quad (4.32)$$

The flux $\underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y})$ reads :

$$\underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0) \cdot \mathbf{A}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) : \mathbf{K}(\underline{x}) \quad (4.33)$$

4.4 The micro-macro transition

In this section we derive the macroscopic potential for the equivalent gradient non linear solid. The approach of homogenization uses an equivalence between the macroscopic energy and the one computed by averaging the energy at the local scale. The double gradient effects and the dependence with the microstructural length are introduced by keeping the second order terms in the series expansion. The consideration of the triple gradient is possible but is not reached in the present paper since the computation of higher order terms of the series will be needed.

4.4.1 Macroscopic temperature and gradients of temperature

The total displacement $u(\underline{x}, \underline{y})$ is obtained from (4.6) in which it is recalled that $u^0(\underline{x}, \underline{y}) = U(\underline{x})$ and $u^1(\underline{x}, \underline{y})$, $u^2(\underline{x}, \underline{y})$ are respectively given by in (4.21) and (4.28) :

$$u(\underline{x}, \underline{y}) = U(\underline{x}) + \epsilon u^1(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) + \epsilon^2 \mathbf{Q}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) : \mathbf{K}(\underline{x}) + o(\epsilon^3) \quad (4.34)$$

Since $u^1(\underline{E}^0(\underline{x}), \underline{y})$ and $\mathbf{Q}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})$ have a null volume average over the period V (see equations (4.22) and (4.29)), the mean value of the displacement $u(\underline{x}, \underline{y})$ is :

$$\langle u(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = U(\underline{x}) + o(\epsilon^3) \quad (4.35)$$

$U(\underline{x})$ can be interpreted as the macroscopic temperature. The total gradient of temperature is obtained by adding the one in (4.24) and the other in (4.30). It reads :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\varepsilon}^0(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) + \epsilon \mathbf{A}(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y}) : \mathbf{K}(\underline{x}) + o(\epsilon^2) \quad (4.36)$$

Accounting for relations (4.25) and (4.32), the average of the gradient of temperature in (4.36) is :

$$\langle \underline{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = \underline{E}(\underline{x}) + o(\epsilon^2) \quad (4.37)$$

Interestingly, it is observed that $\underline{E}(\underline{x}) = \nabla_x U(\underline{x}) + o(\epsilon^2)$ which can then be interpreted as the macroscopic gradient of temperature and $\mathbf{K}(\underline{x})$ is the macroscopic double gradient of temperature. Consequently, the temperature (4.34) and its gradient (4.36) are completely defined as function of the macroscopic relevant variable. In order to formulate the macroscopic model for the non linear composite, we now compute the expression of the macroscopic potential.

4.4.2 The macroscopic potential

The macroscopic potential, denoted by $\Psi(\underline{x})$, is obtained from the standard average rule :

$$\Psi(\underline{x}) = \langle \psi(\underline{\varepsilon}(\underline{x}, \underline{y})) \rangle_V \quad (4.38)$$

By expanding along power series, the macroscopic potential becomes :

$$\Psi(\underline{x}) = \Psi_0(\underline{x}) + \epsilon \Psi_1(\underline{x}) + \epsilon^2 \Psi_2(\underline{x}) + o(\epsilon^3) \quad (4.39)$$

in which $\Psi_0(\underline{x})$ is defined by :

$$\Psi_0(\underline{x}) = \langle \psi(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) \rangle_V \quad (4.40)$$

and functions $\Psi_n(\underline{x})$ for $n = 1, 2$ are given by :

$$\begin{aligned} \Psi_1(\underline{x}) &= \langle \psi_{,\underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) \cdot \underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V \\ \Psi_2(\underline{x}) &= \langle \psi_{,\underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) \cdot \underline{\varepsilon}^2(\underline{x}, \underline{y}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \psi_{,\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) : (\underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) \otimes \underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y})) \rangle_V \end{aligned} \quad (4.41)$$

Note that, from equations (4.8) and (4.11), we have :

$$\begin{aligned} \Psi_1(\underline{x}) &= \langle \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V \\ &= \langle \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\nabla_x u^1(\underline{x}, \underline{y}) + \nabla_y u^2(\underline{x}, \underline{y})] \rangle_V \end{aligned} \quad (4.42)$$

The flux $\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y})$ being divergence free, we have :

$$\langle \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \nabla_y u^2(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = \int_{\partial V} [\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}] u^2(\underline{x}, \underline{y}) dS \quad (4.43)$$

Moreover, $\underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}$ is antiperiodic while $u^2(\underline{x}, \underline{y})$ is periodic, the last integral is null and it remains for $\Psi_1(\underline{x})$:

$$\Psi_1(\underline{x}) = \langle \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \nabla_x u^1(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V \quad (4.44)$$

Similarly, we have :

$$\langle \psi_{,\underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y})) \cdot \underline{\varepsilon}^2(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V = \langle \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \nabla_x u^2(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V \quad (4.45)$$

By accounting for the last relation together with (4.11), function Ψ_2 can then be put into the form :

$$\Psi_2(\underline{x}) = \langle \underline{\sigma}^0(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \nabla_x u^2(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V + \frac{1}{2} \langle \underline{\sigma}^1(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) \rangle_V \quad (4.46)$$

The macroscopic potential is defined by (4.39) together with definitions (4.40), (4.44) and (4.46). It must be noted that the macroscopic potential Ψ , truncated at the second order, only depends on the solutions at the first and second orders.

4.4.3 General expression for Ψ and derivation of the macroscopic law

In the expression of $\Psi_0(\underline{x})$, $\Psi_1(\underline{x})$ and $\Psi_2(\underline{x})$ given by (4.40), (4.44) and (4.46), we now replace u^1 , u^2 , $\underline{\varepsilon}^1$ and $\underline{\sigma}^1$ by their expressions given by (4.21), (4.28), (4.30), (4.33). It leads to :

$$\begin{aligned} \Psi_0(\underline{x}) &= \langle \psi(\underline{\varepsilon}^0(\underline{E}(\underline{x}), \underline{y})) \rangle_V \\ \Psi_1(\underline{x}) &= \mathbf{\Phi}_1(\underline{E}(\underline{x})) : \mathbf{K}(\underline{x}) \\ \Psi_2(\underline{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{K}(\underline{x}) : \mathbf{\Phi}_2(\underline{E}(\underline{x})) : \mathbf{K}(\underline{x}) + \mathbf{\Phi}_3(\underline{E}(\underline{x})) : \nabla_x \mathbf{K}(\underline{x}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Tensors $\mathbf{\Phi}_1(\underline{E}(\underline{x}))$, $\mathbf{\Phi}_2(\underline{E}(\underline{x}))$ and $\mathbf{\Phi}_3(\underline{E}(\underline{x}))$ are non linear functions of the macroscopic gradient of temperature, \underline{E} ; their components are computed by the following relations :

$$\begin{aligned} \Phi_{1ij} &= \frac{1}{2} \langle \sigma_i^0 \frac{\partial u^1}{\partial E_j} + \sigma_j^0 \frac{\partial u^1}{\partial E_i} \rangle_V \\ \Phi_{2ijpq} &= \frac{1}{2} \langle \sigma_i^0 \frac{\partial Q_{pq}}{\partial E_j} + \sigma_j^0 \frac{\partial Q_{pq}}{\partial E_i} + \sigma_p^0 \frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_q} + \sigma_q^0 \frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_p} \rangle_V \\ &\quad + \langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_m \partial \varepsilon_n} A_{mij} A_{npq} \rangle_V \\ \Phi_{3ijk} &= \frac{1}{2} \langle \sigma_i^0 Q_{jk} + \sigma_j^0 Q_{ik} + \sigma_k^0 Q_{ij} \rangle_V \end{aligned} \quad (4.48)$$

in which, again, the dependence of \underline{u}^1 , $\underline{\varepsilon}^0$, $\underline{\sigma}^0$, \mathbf{Q} and \mathbf{A} with $\underline{E}(\underline{x})$ and \underline{y} has been omitted for simplicity. The macroscopic potential computed with (4.47) is a non linear function of $\underline{E}(\underline{x})$. However, $\Psi(\underline{x})$ is quadratic with respect to the double gradient $\mathbf{K}(\underline{x})$ and also contains a term proportional to the triple

gradient of temperature $\nabla_x \mathbf{K}(\underline{x})$. This last term is neglected in the following since only the effect of the double gradient is investigated. Note also that the analysis of the effects of triple gradient would require the resolution of the third order cell problem (giving the temperature u^3). So, by eliminating $\Phi_3(\underline{E}(\underline{x}))$ in the macroscopic potential, the macroscopic potential is only a function of $\underline{E}(\underline{x})$ and $\mathbf{K}(\underline{x})$.

When the case of linear constituent is considered, the solution of the first order cell problem, u^1 , is linear with $\underline{E}(\underline{x})$, so that it is the same for fields $\underline{\varepsilon}^0$ and $\underline{\sigma}^0$. On the other hand, u^2 , $\underline{\varepsilon}^1$ and $\underline{\sigma}^1$ are independent of $\underline{E}(\underline{x})$. Consequently, the potential Ψ_0 is quadratic with respect to $\underline{E}(\underline{x})$, Ψ_1 is linear with $\underline{E}(\underline{x})$ and $\mathbf{K}(\underline{x})$ while Ψ_2 is independent of $\underline{E}(\underline{x})$ and is quadratic with respect to $\mathbf{K}(\underline{x})$. The macroscopic potential Ψ is then quadratic with respect to $\underline{E}(\underline{x})$ and $\mathbf{K}(\underline{x})$, and the resulting model can be interpreted as a Mindlin [44] type gradient model written here for the case of conductive materials.

In the non linear case, it is interesting to observe that the expression of the macroscopic potential differs from one already proposed in the literature. Indeed, in [21] the authors have proposed to extend the Mindlin [44] strain gradient model for non linear materials. In that theory, the macroscopic potential is a non linear function with respect to both the macroscopic strain and its gradient while in the present work it is quadratic with the gradient of $\underline{E}(\underline{x})$.

As usually done in the thermodynamic framework, it is possible to derive the macroscopic law as :

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}^0(\underline{x}) &= \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{E}} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \underline{E}}(\underline{E}(\underline{x})) + \epsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial \underline{E}}(\underline{E}(\underline{x})) : \mathbf{K}(\underline{x}) \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{2} \mathbf{K}(\underline{x}) : \frac{\partial \Phi_2}{\partial \underline{E}}(\underline{E}(\underline{x})) : \mathbf{K}(\underline{x}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\Sigma^1(\underline{x}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} = \epsilon \Phi_1(\underline{E}(\underline{x})) + \epsilon^2 \Phi_2(\underline{E}(\underline{x})) : \mathbf{K}(\underline{x})$$

In which $\underline{\Sigma}^0(\underline{x})$ is the macroscopic flux and $\Sigma^1(\underline{x})$ is a two order tensor called hyperflux in reference to the strain gradient model of Mindlin [44] which introduces the hyperstress.

4.5 Application to a stratified composite

In this section we propose to derive explicit solutions of cell problems and to compute an analytic form for the macroscopic potential Ψ . To this end we consider the simple case of a stratified composite material whose constituents obey a power law type relation.

4.5.1 Description of the problem

As a first illustration we consider the case of a three dimensional layered material. The period (shown on figure 4.1) is constituted of two materials, represented by (a) and (b), having the respective thickness f_a and f_b . The dimensions of the cell are normalized at 1; consequently f_a and f_b represent the volume fractions of the phases. The layers being periodically distributed along the axis Ox_1 , the

temperature locally oscillates with the non dimensional coordinate y_1 which varies from $-f_b$ to f_a in a period (y_1 is denoted y thereafter for simplicity). The composite is subjected to a multiaxial loading involving the components E_i for $i = 1, 2, 3$ of the gradient of macroscopic temperature and the components K_{ij} , for $i, j = 1, 2, 3$ of the double gradient of macroscopic temperature. Also for simplicity, the dependence of the macroscopic variables \underline{E} and \underline{K} with the macroscopic coordinates x_1, x_2 and x_3 is omitted.

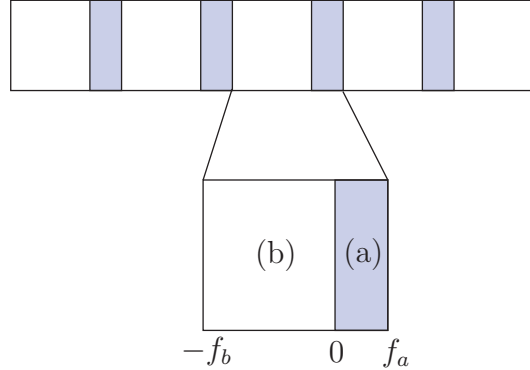


FIGURE 4.1 – The unit cell of the periodic stratified composite

In this application, the potential giving the constitutive law of the individual constituents is chosen on the form :

$$\psi_\alpha(\underline{\varepsilon}) = \frac{\tau_\alpha}{1 + m_\alpha} (\varepsilon)^{m_\alpha+1} \quad (4.50)$$

where τ_α is the conductivity and m_α the power law exponent of the constituent α (for $\alpha = a$ or $\alpha = b$) which is assumed to be positive. In the previous definition, ε is defined by :

$$\varepsilon = \sqrt{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}} \quad (4.51)$$

The definition of potential $\psi_\alpha(\underline{\varepsilon})$ in (4.50) provides the following non linear elastic response :

$$\underline{\sigma}(\underline{\varepsilon}) = \tau_\alpha (\varepsilon)^{m_\alpha-1} \underline{\varepsilon} \quad (4.52)$$

The double derivative of the potential according to the gradient of temperature (which appears in the second order cell problem) is :

$$\mathbf{C}(\underline{\varepsilon}) = \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial \underline{\varepsilon} \partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}) = \tau_\alpha (\varepsilon)^{m_\alpha-1} \left[\mathbf{I} + (m_\alpha - 1) \frac{\underline{\varepsilon} \otimes \underline{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right] \quad (4.53)$$

in which \mathbf{I} is the two order identity tensor. In the next section, we aim at deriving the local solution of the first and second order cell problems.

4.5.2 Solution at the first order

The problem at the first order can be put into the form :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_1^0}{dy}(y) = 0, \\ \begin{bmatrix} \sigma_1^0(y) \\ \sigma_2^0(y) \\ \sigma_3^0(y) \end{bmatrix} = P(y) \begin{bmatrix} E_1 + \frac{du^1}{dy}(y) \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \\ [u^1(y)]_{y=0} = 0, \quad [\sigma_1^0(y)]_{y=0} = 0, \\ u^1(y) \text{ } y\text{-periodic}, \quad \sigma_1^0(y) \text{ } y\text{-periodic} \end{array} \right. \quad (4.54)$$

with :

$$P(y) = \begin{cases} \tau_a \left[\left(E_1 + \frac{du^1}{dy}(y) \right)^2 + E_2^2 + E_3^2 \right]^{m_a-1} & \text{in } (a) \\ \tau_b \left[\left(E_1 + \frac{du^1}{dy}(y) \right)^2 + E_2^2 + E_3^2 \right]^{m_b-1} & \text{in } (b) \end{cases} \quad (4.55)$$

From the first equation in (4.54) and due to the continuity of the traction at the interface, the components σ_1^0 is constant in the cell. This suggests to choose the displacement $u^1(y)$ as a piecewise linear function of the coordinate y . The displacement being continuous at the interface, periodic and with a null volume average, it has the following expression :

$$u^1(\underline{E}, \underline{y}) = \alpha F(y) \quad (4.56)$$

in which α is an unknown functions of the macroscopic loading parameter \underline{E} and $F(y)$ is given by :

$$F(y) = \begin{cases} F_a(y) = \frac{1}{2} - \frac{y}{f_a} & \text{for } y \in (a) \\ F_b(y) = \frac{1}{2} + \frac{y}{f_b} & \text{for } y \in (b) \end{cases} \quad (4.57)$$

The components of $\underline{\varepsilon}^0(\underline{E}, \underline{y})$ are :

$$\begin{cases} \varepsilon_1^0(y) = E_1 + \alpha F'(y) \\ \varepsilon_2^0 = E_2 \\ \varepsilon_3^0 = E_3 \end{cases} \quad (4.58)$$

The components of the flux $\underline{\sigma}^0(y)$ are :

$$\begin{cases} \sigma_{1a}^0 = \tau_a(\varepsilon_a)^{m_a-1} \left[E_1 - \frac{\alpha}{f_a} \right] \\ \sigma_{2a}^0 = \tau_a(\varepsilon_a)^{m_a-1} E_2 \\ \sigma_{3a}^0 = \tau_a(\varepsilon_a)^{m_a-1} E_3 \\ \sigma_{1b}^0 = \tau_b(\varepsilon_b)^{m_b-1} \left[E_1 + \frac{\alpha}{f_b} \right] \\ \sigma_{2b}^0 = \tau_b(\varepsilon_b)^{m_b-1} E_2 \\ \sigma_{3b}^0 = \tau_b(\varepsilon_b)^{m_b-1} E_3 \end{cases} \quad (4.59)$$

with :

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \sqrt{\left[E_1 - \frac{\alpha}{f_a}\right]^2 + E_2^2 + E_3^2} \\ \varepsilon_b &= \sqrt{\left[E_1 + \frac{\alpha}{f_b}\right]^2 + E_2^2 + E_3^2}\end{aligned}\quad (4.60)$$

In (4.59), σ_{ia}^0 and σ_{ib}^0 refer to the values of $\sigma_i^0(\underline{y})$ in the phase (a) and (b). The stress σ_1^0 being continuous across the interface, it provides a non linear equation for the unknown function α :

$$\tau_a(\varepsilon_a)^{m_a-1} \left[E_1 - \frac{\alpha}{f_a}\right] = \tau_b(\varepsilon_b)^{m_b-1} \left[E_1 + \frac{\alpha}{f_b}\right] \quad (4.61)$$

An explicit solution for α cannot be determined for the general case of arbitrary values of the power-law exponent m_a and m_b . However α can be obtained numerically by solving this non linear equation. Note that α is a function of the two transversely isotropic invariants $I_1(\underline{E}) = E_1$ and $I_2(\underline{E}) = \sqrt{E_2^2 + E_3^2}$.

4.5.3 Solution at second order

The second order problem (4.27) can be put into the form :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_1^1}{dy}(y) + gF'(y) = 0, \\ \begin{bmatrix} \sigma_1^1(y) \\ \sigma_2^1(y) \\ \sigma_3^1(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(y) \\ C_{12}(y) \\ C_{13}(y) \end{bmatrix} \frac{du^2}{dy}(y) + \begin{bmatrix} \tau_1(y) \\ \tau_2(y) \\ \tau_3(y) \end{bmatrix} F(y), \\ [u^2(y)]_{y=0} = 0, \quad [\sigma_1^1(y)]_{y=0} = 0, \\ u^2(y) \text{ } y\text{-periodic}, \quad \sigma_1^1(y) \text{ } y\text{-periodic} \end{array} \right. \quad (4.62)$$

in which the components $C_{ij}(y)$ are given by :

$$C_{ij}(y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j}(\underline{\varepsilon}^0) \quad (4.63)$$

g and $\underline{\tau}(y)$ are defined by :

$$\begin{aligned}g &= -f_a f_b [C_{ija} - C_{ijb}] K_{ij} + (f_b C_{i1a} + f_a C_{i1b}) \beta_j K_{ij} \\ \tau_i(y) &= C_{ik}(y) \beta_j K_{jk}\end{aligned}\quad (4.64)$$

where it is recalled that K_{ij} is the macroscopic double gradient of temperature which is the macroscopic loading variable for the second order cell problem. In (4.64), the components β_i for $i = 1, 2, 3$ are given by :

$$\beta_i = f_a f_b \frac{C_{i1a} - C_{i1b}}{f_b C_{11a} + f_a C_{11b}} \quad (4.65)$$

The details about the derivations of g , $\tau(y)$ and β_i can be found in appendix 4.6. In this appendix, is also detailed the derivation of the solution of the problem (4.62). The temperature $u^2(y)$ is a piecewise quadratic function with respect to the coordinate y and reads :

$$\begin{aligned} u_a^2(y) &= \frac{\tau_{1a} + g}{2C_{11a}} \left[\frac{f_a^2}{6} - y + \frac{y^2}{f_a} \right] - \frac{\tau_{1b} + g}{C_{11b}} \frac{f_b^2}{12} \\ u_b^2(y) &= -\frac{\tau_{1b} + g}{2C_{11b}} \left[\frac{f_b^2}{6} + y + \frac{y^2}{f_b} \right] + \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11a}} \frac{f_a^2}{12} \end{aligned} \quad (4.66)$$

The field $\underline{\varepsilon}^1$ is given by :

$$\begin{cases} \varepsilon_{1a}^1(y) = \left[e_1 - \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11a}} \right] F_a(y), \\ \varepsilon_{1b}^1(y) = \left[e_1 - \frac{\tau_{1b} + g}{C_{11b}} \right] F_b(y), \\ \varepsilon_{2a}^1(y) = e_2 F_a(y), & \varepsilon_{2b}^1(y) = e_2 F_b(y), \\ \varepsilon_{3a}^1(y) = e_3 F_a(y), & \varepsilon_{3b}^1(y) = e_3 F_b(y) \end{cases} \quad (4.67)$$

with :

$$e_i = \beta_j K_{ij} \quad (4.68)$$

The components of the flux $\underline{\sigma}^1$ are :

$$\begin{cases} \sigma_{1a}^1(y) = -g F_a(y), & \sigma_{1b}^1(y) = -g F_b(y) \\ \sigma_{2a}^1(y) = \left[\tau_{2a} - C_{12a} \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11a}} \right] F_a(y), \\ \sigma_{2b}^1(y) = \left[\tau_{2b} - C_{12b} \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11b}} \right] F_b(y), \\ \sigma_{3a}^1(y) = \left[\tau_{3a} - C_{13a} \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11a}} \right] F_a(y), \\ \sigma_{3b}^1(y) = \left[\tau_{3b} - C_{13b} \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11b}} \right] F_b(y) \end{cases} \quad (4.69)$$

4.5.4 Macroscopic potentials for the stratified composite

All the local field solutions of the first and second order problems being evaluated, it is now possible to compute the macroscopic potential given by relations (4.48).

The first one, Ψ_0 , is obtained by replacing the expression of $\underline{\varepsilon}^0(y)$ given by (4.58) in equation (4.40); it results :

$$\Psi_0 = \frac{f_a \tau_a}{1 + m_a} (\varepsilon_a)^{1+m_a} + \frac{f_b \tau_b}{1 + m_b} (\varepsilon_b)^{1+m_b} \quad (4.70)$$

in which ε_a and ε_b are given by (4.60) and α is solution of equation (4.61). The flux $\underline{\sigma}^0(y)$ being a piecewise constant function, we have :

$$\Psi_1 = \left[f_a \sigma_{ia}^0 \frac{\partial}{\partial E_j} \langle u^1(y) \rangle_{V_a} + f_b \sigma_{ib}^0 \frac{\partial}{\partial E_j} \langle u^1(y) \rangle_{V_b} \right] K_{ij} \quad (4.71)$$

in which $\langle \bullet \rangle_{V_a}$ and $\langle \bullet \rangle_{V_b}$ denote the average of the quantity "•" over the volume of the phases a and b . The displacement $u^1(y)$ is proportional to $F(y)$ (see equation (4.55)), so, due to the property $\langle F(y) \rangle_{V_a} = 0$ and $\langle F(y) \rangle_{V_b} = 0$, the potential Ψ_1 is null. This can be also interpreted as the consequence of the centrosymmetry of the studied periodic structure (note that this term is null when the cell is symmetric with respect to three mutual orthogonal planes that is the case for the stratified composite). Let us now compute the last potential Ψ_2 (let us recall that Ψ_2 contains a term which is discarded since it introduces a dependence on the triple gradient of temperature). Again, since $\sigma_i^0(y)$ is a piecewise constant function, Ψ_2 can be computed as follows :

$$\Psi_2(\underline{x}) = \left[f_a \sigma_{ia}^0 \frac{\partial}{\partial E_j} \langle u^2(y) \rangle_{V_a} + f_b \sigma_{ib}^0 \frac{\partial}{\partial E_j} \langle u^2(y) \rangle_{V_b} \right] K_{ij} + \frac{1}{2} \langle \sigma_i^1(y) \varepsilon_i^1(y) \rangle_V \quad (4.72)$$

By replacing the expressions of $u^2(y)$, $\varepsilon_i^1(y)$ and $\sigma_i^1(y)$, we obtain :

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & -\frac{f_a f_b}{12} (\sigma_{ia}^0 - \sigma_{ib}^0) \frac{\partial}{\partial E_j} \left[f_a \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11a}} + f_b \frac{\tau_{1b} + g}{C_{11b}} \right] K_{ij} \\ & + \frac{f_a}{24} \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11a}} [g - C_{12a} e_2 - C_{13a} e_3] \\ & + \frac{f_b}{24} \frac{\tau_{1b} + g}{C_{11b}} [g - C_{12b} e_2 - C_{13b} e_3] \\ & + \frac{1}{24} [(f_a \tau_{2a} + f_b \tau_{2b}) e_2 + (f_a \tau_{3a} + f_b \tau_{3b}) e_3] - \frac{1}{12} g e_1 \end{aligned} \quad (4.73)$$

At this stage, it is difficult to obtain a simple expression Ψ_2 (mainly due to the presence of the derivative with respect to E_i) except for special cases of macroscopic loadings or of power law exponents. These particular cases are examined in the following sections.

4.5.5 The case of linear constituents

In this section we consider the particular case of linear constituents that corresponds to $m_a = m_b = 1$. The solution for α is :

$$\alpha = f_a f_b \frac{\tau_a - \tau_b}{f_a \tau_b + f_b \tau_a} E_1 \quad (4.74)$$

In that case, α linearly depends on E_1 and is independent of E_2 and E_3 . Potential $\Psi_0(\underline{E})$ is quadratic with respect to the field \underline{E} and reads :

$$\Psi_0(\underline{E}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_a \tau_b}{f_a \tau_b + f_b \tau_a} E_1^2 + (f_a \tau_a + f_b \tau_b) (E_2^2 + E_3^2) \right] \quad (4.75)$$

while Ψ_2 is given by

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & \frac{f_a^2 f_b^2}{24} \left[\frac{f_a}{\tau_a} + \frac{f_b}{\tau_b} \right] (\tau_a - \tau_b)^2 (K_{22} + K_{33})^2 \\ & + \frac{f_a^2 f_b^2 (f_a \tau_a + f_b \tau_b) (\tau_a - \tau_b)^2}{24 (f_a \tau_b + f_b \tau_a)^2} (K_{12}^2 + K_{13}^2) \end{aligned} \quad (4.76)$$

4.5.6 Non linear case with $E_2 = E_3 = 0$

In this section we assume that the macroscopic components E_2 and E_3 are null and also K_{22} , K_{23} and K_{33} . The remaining non null macroscopic components are E_1 , K_{11} , K_{12} and K_{13} .

In this particular case, it is not possible to compute an explicit solution of the non linear equation (4.61), however, the difficulty of the problem is greatly reduced because α is only a function of the macroscopic variable E_1 .

Let us first compute $\Psi_0(E_1)$ defined by (4.40) in which the field $\underline{\varepsilon}^0$ is given by (4.58). Note that since $E_2 = 0$ and $E_3 = 0$, the components $\varepsilon_2^0(y)$ and $\varepsilon_3^0(y)$ are both null. The expression of $\Psi_0(E_1)$ is :

$$\Psi_0(E_1) = \frac{f_a \tau_a}{1 + m_a} (\varepsilon_a)^{1+m_a} + \frac{f_b \tau_b}{1 + m_b} (\varepsilon_b)^{1+m_b} \quad (4.77)$$

with :

$$\varepsilon_a = E_1 - \frac{\alpha}{f_a}, \quad \varepsilon_b = E_1 + \frac{\alpha}{f_b} \quad (4.78)$$

We now aim at computing the expression Ψ_2 . Note that for the considered macroscopic loading, we have :

$$\begin{cases} g = 0, \\ \tau_{1a} = C_{11a} \beta_1 K_{11}, \quad \tau_{2a} = C_{22a} \beta_1 K_{12}, \quad \tau_{3a} = C_{33a} \beta_1 K_{13}, \\ \tau_{1b} = C_{11b} \beta_1 K_{11}, \quad \tau_{2b} = C_{22b} \beta_1 K_{12}, \quad \tau_{3b} = C_{33b} \beta_1 K_{13}, \\ e_1 = K_{11} \beta_1, \quad e_2 = K_{12} \beta_1, \quad e_3 = K_{13} \beta_1 \end{cases} \quad (4.79)$$

in which :

$$\begin{cases} C_{11a} = m_a \tau_a (\varepsilon_a)^{m_a-1}, \quad C_{22a} = C_{33a} = \tau_a (\varepsilon_a)^{m_a-1} \\ C_{11b} = m_b \tau_b (\varepsilon_b)^{m_b-1}, \quad C_{22b} = C_{33b} = \tau_b (\varepsilon_b)^{m_b-1} \end{cases} \quad (4.80)$$

while the components C_{ija} and C_{ijb} are null for $i \neq j$. The value of β_1 is :

$$\beta_1 = f_a f_b \frac{m_a \tau_a (\varepsilon_a)^{m_a-1} - m_b \tau_b (\varepsilon_b)^{m_b-1}}{f_b m_a \tau_a (\varepsilon_a)^{m_a-1} + f_a m_b \tau_b (\varepsilon_b)^{m_b-1}} \quad (4.81)$$

while $\beta_2 = \beta_3 = 0$.

In the definition of Ψ_2 (see equation (4.73)) the term which contains the derivative with respect to E_1 is null because $\sigma_{1a}^0 = \sigma_{1b}^0$ (that is the consequence of the continuity of the traction at the interface for the first order problem) and $\sigma_{2a}^0 = \sigma_{2b}^0 = \sigma_{3a}^0 = \sigma_{3b}^0 = 0$. The final expression for Ψ_2 is :

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} \Phi_2(E_1) (K_{12}^2 + K_{13}^2) \quad (4.82)$$

where $\Phi_2(E_1)$ reads :

$$\Phi_2(E_1) = \frac{f_a^2 f_b^2}{12} [f_a \tau_a (\varepsilon_a)^{m_a-1} + f_b \tau_b (\varepsilon_b)^{m_b-1}] \times \left[\frac{m_a \tau_a (\varepsilon_a)^{m_a-1} - m_b \tau_b (\varepsilon_b)^{m_b-1}}{f_b m_a \tau_a (\varepsilon_a)^{m_a-1} + f_a m_b \tau_b (\varepsilon_b)^{m_b-1}} \right]^2 \quad (4.83)$$

Particularly, it must be observed that for $m_a = 1$ and $m_b = 1$ we recover the second term in (4.76).

Figures 4.2 and 4.3 show the variations of $\Psi_0(E_1)$ and $\Phi_2(E_1)$ as function of the macroscopic variable E_1 for $m_a = m_b = 0.5$. The volume fraction of the two phases, f_a and f_b , are chosen equal to 0.7 and 0.3 respectively. The values of the phases conductivity are $\tau_a = 1$ and $\tau_b = c\tau_a$ where c is the contrast. For the applications the following values of the contrast have been considered $c = 1$, $c = 2$ and $c = 5$. The case $c = 1$ corresponds to an homogeneous material at the local scale having the conductivity $\tau_a = \tau_b = 1$. In this particular case the macroscopic potential exhibit no microstructural effects since the potential $\Phi_2(E_1)$ is null. For other values of the contrast c , the potential $\Phi_2(E_1)$ is non null and appears to be singular for $E_1 = 0$. The reason is that the second order cell problem involves the double derivative of the power law potential $\psi(\underline{\varepsilon})$ (given by (4.50)) which is also singular for $\underline{\varepsilon} = 0$.

The macroscopic flux $\underline{\Sigma}^0$ and hyperflux Σ^1 must remain finite at each point of the macrostructure, this suggests that in the area where the macroscopic gradient of temperature tends to zero, the double gradient of temperature must also tends to zero so that $\Psi_2(E_1)$ and its derivative remain finite.

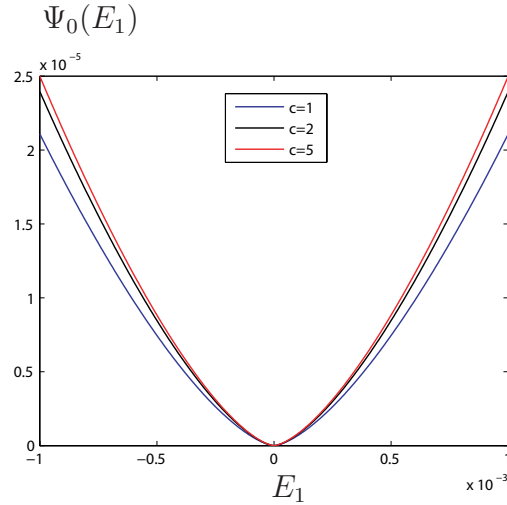


FIGURE 4.2 – Variation of the macroscopic potential Ψ_0 with the variable $E_1 = [-10^{-3}, 10^{-3}]$.

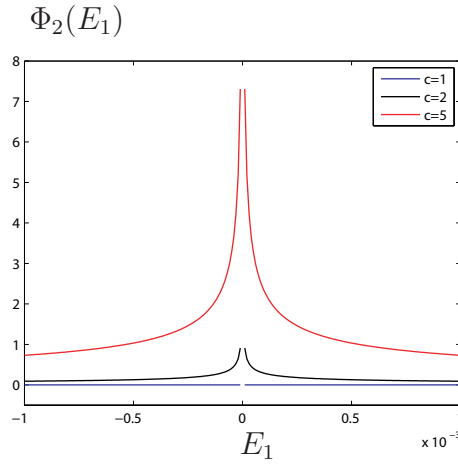


FIGURE 4.3 – Variation of the macroscopic potential Φ_2 with the variable $E_1 = [-10^{-3}, 10^{-3}]$.

We now investigate the effect of the microstructure on the macroscopic response of the non linear composite. The macroscopic potential being given by :

$$\Psi = \Psi_0(E_1) + \frac{1}{2}\epsilon^2\Phi_2(E_1)(K_{12}^2 + K_{13}^2), \quad (4.84)$$

we introduce the non dimensional quantity $\delta^2 = \epsilon^2(K_{12}^2 + K_{13}^2)/E_1^2$ such that :

$$\Psi(E_1, \delta) = \Psi_0(E_1) + \frac{1}{2}\delta^2 E_1^2 \Phi_2(E_1) \quad (4.85)$$

The variation of the macroscopic potential $\Psi(E_1, \delta)$ with E_1 for two values of the non dimensional variable δ are represented on figure (4.4). The macroscopic potential with gradient effects (corresponding to $\delta = 5$) is compared to the one obtained without gradient effects ($\delta = 0$).

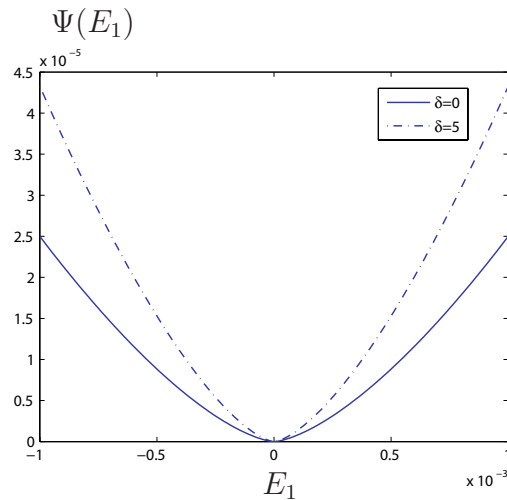


FIGURE 4.4 – Variation of the macroscopic potential Ψ with respect to the variable E_1 in case $m_a = m_b = 0.5$.

The macroscopic flux Σ^0 computed from (4.49) reads :

$$\Sigma^0(E_1, \delta) = \frac{\partial \Psi_0}{\partial E_1}(E_1) + \frac{\delta^2 E_1^2}{2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial E_1}(E_1) \quad (4.86)$$

On figure (4.5), we represent the variations of the macroscopic flux with the macroscopic gradient of temperature for $\delta = 0$ and $\delta = 5$. It can be observed an important effect of the microstructure on the macroscopic response of the composite. The consequences of this effect on the reponse of structures must be obviously confirmed by the full implementation of the macroscopic law in the computation of the response of the loading on a structure.

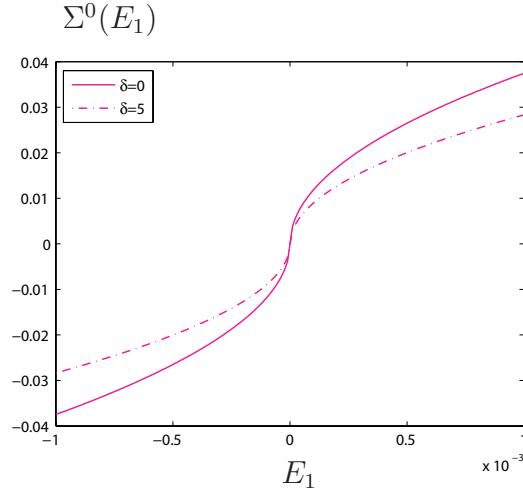


FIGURE 4.5 – Variation of the macroscopic stress Σ^0 with the variable E_1 in case $m_a = m_b = 0.5$

We consider the particular case corresponding to $m_a = m_b = 0$ (that is equivalent to the rigid plastic material written here for the case of conductivity). The macroscopic potential is given by (4.82) together with (4.83) which depends on α solution of the non linear equation (4.61) which can be read for $m_a = m_b = m$ as :

$$f(\alpha, m) = \tau_a \left(E_1 - \frac{\alpha}{f_a}\right)^m - \tau_b \left(E_1 + \frac{\alpha}{f_b}\right)^m = 0 \quad (4.87)$$

the coefficient α also depends on m . So, when the limit $m \rightarrow 0$ is taken in (4.83), the limit $m \rightarrow 0$ must also be taken for α . The solution α of equation (4.87) is :

$$\alpha = E_1 \frac{1 - c^n}{\frac{1}{f_a} + c^n \frac{1}{f_b}} \quad (4.88)$$

where $c = \tau_b/\tau_a$ and $n = 1/m$. When m tends to 0, n tends to ∞ . The expressions of ε_a and ε_b which enter the expression of $\Phi_2(E_1)$ are :

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= E_1 - \frac{\alpha}{f_a} = E_1 \frac{c^n}{f_b + f_a c^n} \quad \text{in the phase (a)} \\ \varepsilon_b &= E_1 + \frac{\alpha}{f_b} = E_1 \frac{1}{f_b + f_a c^n} \quad \text{in the phase (b)} \end{aligned} \quad (4.89)$$

There are three limits for α , ε_a and ε_b when $m \rightarrow 0$ (or equivalently $n \rightarrow \infty$) depending on the value of c :

- (1) When $\begin{cases} c > 1 \\ n \rightarrow \infty \end{cases}$, we have : $\alpha = -E_1 f_b$ and $\begin{cases} \varepsilon_a = E_1/f_a \\ \varepsilon_b = 0 \end{cases}$
- (2) When $\begin{cases} c < 1 \\ n \rightarrow \infty \end{cases}$, we have : $\alpha = E_1 f_a$ and $\begin{cases} \varepsilon_a = 0 \\ \varepsilon_b = E_1/f_b \end{cases}$
- (3) When $\begin{cases} c = 1 \\ n \rightarrow \infty \end{cases}$, we have : $\alpha = 0$ and $\begin{cases} \varepsilon_a = E_1 \\ \varepsilon_b = E_1 \end{cases}$

Among these three solutions, only one is physically admissible, this is solution (3). When m tends to zero, the local response of the phases is :

$$\begin{cases} \varepsilon_{1a} = 0 \\ \varepsilon_{1a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sigma_{1a} \leq \tau_a \\ \sigma_{1a} = \tau_a \end{cases}, \quad \begin{cases} \varepsilon_{1b} = 0 \\ \varepsilon_{1b} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sigma_{1b} \leq \tau_b \\ \sigma_{1b} = \tau_b \end{cases} \quad (4.90)$$

On the other hand, equation (4.61) is equivalent to $\sigma_{1a}^0 = \sigma_{1b}^0$ which is the consequence of the equilibrium of the flux through the interface $y = 0$. When the limit $m = 0$ is taken, the local flux attains the saturation values τ_a and τ_b respectively in phases (a) and (b), which is admissible only if $\tau_a = \tau_b$. This corresponds to solution (3).

However, the local relation between the flux and the gradient of temperature is not bijective since for a zero gradient of temperature there exists an infinite value for the flux comprised between 0 and τ_a in phase (a) or τ_b in phase (b). This has the consequence to show two other solutions (1) and (2) which are unphysical.

Only the solution (3) is considered corresponding to $\alpha = 0$. In this case, the macroscopic potential $\Phi_2(E_1)$ tends to zero for $m = 0$ and the microstructural effects vanish.

4.5.7 Non linear case with $E_1 = 0$

The composite is subjected to a macroscopic loading under plane conditions (in the plane Ox_2x_3). Consequently the components E_1 , K_{11} , K_{12} and K_{13} are considered as being null. The solution of the non linear equation (4.61) is $\alpha = 0$. First, $\Psi_0(E_2, E_3)$ is given by :

$$\Psi_0(E_2, E_3) = \frac{f_a \tau_a}{1 + m_a} E^{1+m_a} + \frac{f_b \tau_b}{1 + m_b} E^{1+m_b} \quad (4.91)$$

with :

$$E = \sqrt{E_2^2 + E_3^2} \quad (4.92)$$

For the considered macroscopic loading, we have :

$$\begin{cases} g = -f_a f_b (C_{ija} - C_{ijb}) K_{ij}, \\ \tau_{1a} = \tau_{2a} = \tau_{3a} = \tau_{1b} = \tau_{2b} = \tau_{3b} = 0, \\ e_1 = e_2 = e_3 = 0 \end{cases} \quad (4.93)$$

where C_{ij} reads :

$$\begin{cases} C_{11a} = \tau_a E^{m_a-1}, & C_{12a} = C_{13a} = 0 \\ C_{22a} = \tau_a E^{m_a-3} [E_3^2 + m_a E_2^2] \\ C_{23a} = \tau_a (m_a - 1) E^{m_a-3} E_2 E_3 \\ C_{33a} = \tau_a E^{m_a-1} [E_2^2 + m_a E_3^2] \end{cases} \quad (4.94)$$

in phase (a) and reads :

$$\begin{cases} C_{11b} = \tau_b E^{m_b-1}, & C_{12b} = C_{13b} = 0 \\ C_{22b} = \tau_b E^{m_b-3} [E_3^2 + m_b E_2^2] \\ C_{23b} = \tau_b (m_b - 1) E^{m_b-3} E_2 E_3 \\ C_{33b} = \tau_b E^{m_b-3} [E_2^2 + m_b E_3^2] \end{cases} \quad (4.95)$$

in phase (b).

The macroscopic potential then reduces to (detailed calculation is given in appendix 4.6) :

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & -\frac{f_a^2 f_b^2}{24} AF \frac{K_{ij} E_i E_j}{E^2} \left[AK_{pp} + B \frac{K_{pq} E_p E_q}{E^2} \right] \\ & + \frac{f_a^2 f_b^2}{12} AD \left[BK_{ii} \frac{K_{pq} E_p E_q}{E^2} + C \left(\frac{K_{pq} E_p E_q}{E^2} \right)^2 + 2B \frac{K_{ip} E_p K_{iq} E_q}{E^2} \right] \\ & + \frac{f_a^2 f_b^2}{24} D \left[AK_{ii} + B \frac{K_{ij} E_i E_j}{E^2} \right] \end{aligned} \quad (4.96)$$

with :

$$\begin{aligned} A &= \tau_a E^{m_a-1} - \tau_b E^{m_b-1}, \\ B &= (m_a - 1) \tau_a E^{m_a-1} - (m_b - 1) \tau_b E^{m_b-1}, \\ C &= \tau_a (m_a - 1) (m_a - 3) E^{m_a-1} - \tau_b (m_b - 1) (m_b - 3) E^{m_b-1}, \\ D &= \frac{f_a}{\tau_a E^{m_a-1}} + \frac{f_b}{\tau_b E^{m_b-1}}, \\ F &= \frac{f_a (m_a - 1)}{\tau_a E^{m_a-1}} + \frac{f_b (m_b - 1)}{\tau_b E^{m_b-1}} \end{aligned} \quad (4.97)$$

The macroscopic potential can be put into the form $\Psi_2 = \frac{1}{2} \mathbf{K} : \Phi_2(E_2, E_3) : \mathbf{K}$. Since \mathbf{K} has only three non null components, the macroscopic potential can be put into the matricial form :

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_{22} \\ K_{33} \\ \sqrt{2} K_{23} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_{2222} & \Phi_{2233} & \sqrt{2} \Phi_{2223} \\ & \Phi_{2222} & \sqrt{2} \Phi_{2223} \\ \text{sym} & & 2\Phi_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{22} \\ K_{33} \\ \sqrt{2} K_{23} \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

The components Φ_{ijkl} are given by :

$$\begin{aligned}
\Phi_{2222} &= -\frac{f_a^2 f_b^2}{12} \left[A^2 D + 2(A^2 F - 4ABD) \frac{E_2^2}{E^2} + (2ABF - 2ACD - B^2 D) \frac{E_2^4}{E^4} \right] \\
\Phi_{2233} &= -\frac{f_a^2 f_b^2}{6} \left[A^2 F - A^2 D - 2ABD + (2ABF - 2ACD - B^2 D) \frac{E_2^2 E_3^2}{E^4} \right] \\
\Phi_{2223} &= -\frac{f_a^2 f_b^2}{6} \frac{E_2 E_3}{E^2} \left[A^2 F - 4ABD + (2ABF - 2ACD - B^2 D) \frac{E_2^2}{E^2} \right] \\
\Phi_{2323} &= -\frac{f_a^2 f_b^2}{12} \left[(2ABF - B^2 D - 2ACD) \frac{E_2^2 E_3^2}{E^4} - 2ABD \right]
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Interestingly, in the case $m_a = m_b = 0$ we obtain :

$$\begin{aligned}
\Phi_{2222} &= -\frac{1}{12} \frac{(2E_2^2 - E_3^2) E_3^2}{E^5} P \\
\Phi_{2233} &= \frac{5}{6} \frac{E_2^2 E_3^2}{E^5} P \\
\Phi_{2223} &= \frac{1}{6} \frac{(2E_2^2 - 3E_3^2) E_2 E_3}{E^5} P \\
\Phi_{2323} &= -\frac{1}{12} \frac{(E_2^2 + 2E_2 E_3 - E_3^2)(E_2^2 - 2E_2 E_3 - E_3^2)}{E^5} P
\end{aligned} \tag{4.100}$$

with :

$$P = \frac{f_a^2 f_b^2 (f_a \tau_b + f_b \tau_a) (\tau_a - \tau_b)^2}{\tau_b \tau_a} \tag{4.101}$$

So the microstructural effects do not vanish when $E_2 = E_3 = 0$ and $m \rightarrow 0$. On figure 4.6 we represent the variations of the components of $\Phi_2(E_2, E_3)$ with $E_2 = E_3 = [-10^{-3}, 10^{-3}]$ for a contrast $c = \tau_b/\tau_a = 2$. For the applications, the volume fraction of phases (a) and (b) are 0.7 and 0.3 respectively.

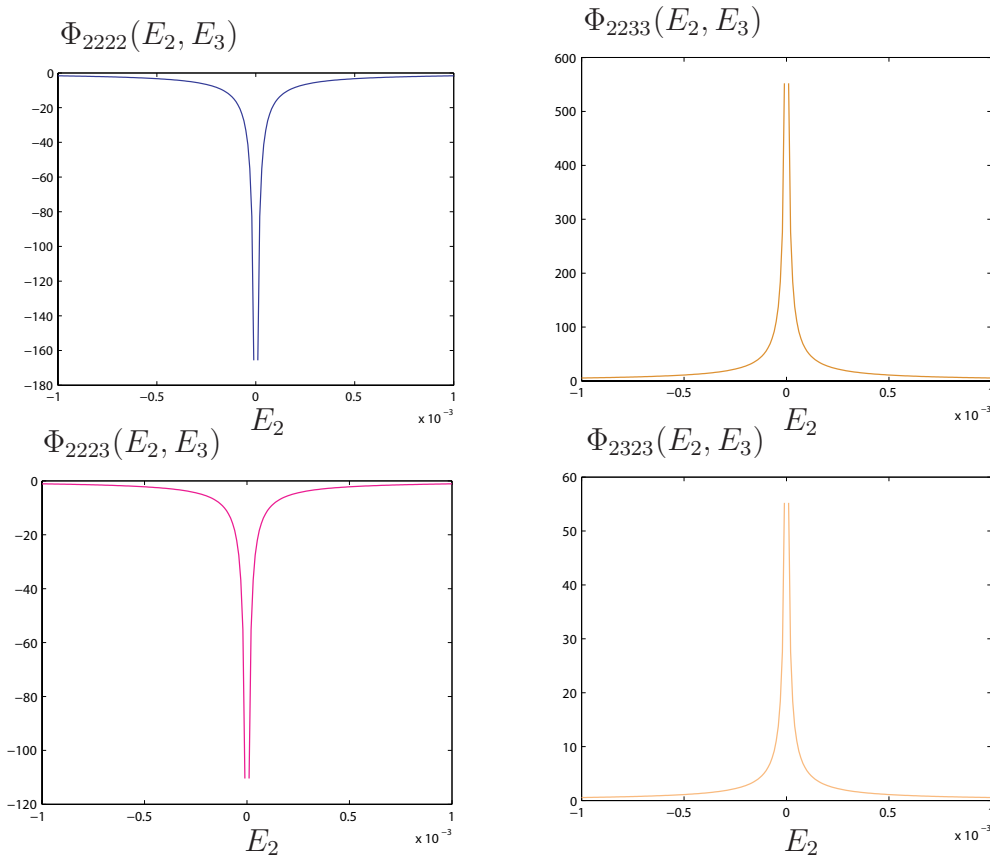


FIGURE 4.6 – Variation of the components $\Phi_{ijkl}(E_2, E_3)$ with the variable $E_2 = E_3 = [-10^{-3}, 10^{-3}]$ for a contrast $c = 2$.

Again, we observe that the components of $\Phi_2(E_2, E_3)$ are singular for $E_2 = E_3 = 0$.

4.6 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons étendu l’approche par développement asymptotique pour traiter les composites non linéaires dans le contexte de la conductivité thermique. Le comportement de chaque phase est supposé décrit par une loi en potentiel. Chaque terme de la série asymptotique est obtenu par la résolution d’un problème pour le cellule élémentaire qui est de nature non linéaire au premier ordre puis linéaire aux ordres supérieurs. Nous avons établi la forme générale de la solution du problème à l’ordre 1 et 2, les effets du double gradient de la température et de taille de la microstructure étant obtenus à l’ordre 2. Nous avons ensuite établi la forme générale du potentiel macroscopique en incluant les effets du double gradient de la température. La loi de comportement obtenue généralise ainsi le modèle de second gradient de Mindlin [44] (écrit pour la conductivité thermique) en incorporant les effets non linéaires. Un des résultats les plus remarquables est que le potentiel macroscopique est une fonction non linéaire du gradient de la température, mais une fonction quadratique du double gradient.

Nous avons proposé des expressions analytiques du potentiel macroscopique dans le cas d'un composite stratifié sous certaines conditions de chargement macroscopique ($E_2 = E_3 = 0$ ou $E_1 = 0$). Nous avons pu montrer que les termes liés aux effets de microstructure deviennent singuliers lorsque le gradient de température est nul. Ceci suppose un effet de blocage des effets de microstructure lorsque le gradient de température tend vers zéro. Les capacités prédictives du modèle obtenu devront toutefois être confirmées dans le cadre d'un calcul de structures faisant intervenir les propriétés déterminées dans ce chapitre.

Conclusion générale

Ce travail a été dédié à la modélisation micromécanique des effets de gradient de déformation et de taille des éléments microstructuraux pour les composites linéaires et non linéaires. L'approche repose sur l'utilisation des développements asymptotiques avec le facteur d'échelle qui permet d'exprimer les effets des gradients de la déformation sur la réponse locale du milieu hétérogène. Chaque terme de la série asymptotique est obtenu en résolvant un problème pour la cellule élémentaire du milieu périodique. Le problème à l'ordre 1, usuellement considéré en homogénéisation périodique, consiste à résoudre un problème au limite avec des conditions de périodicité et un champ de déformation macroscopique imposé en moyenne à la cellule élémentaire. Les problèmes d'ordres supérieurs introduisent les effets non locaux recherchés. Les problèmes élémentaires associés introduisent pour la cellule périodique des forces de volume et des champs de polarisation qui dépendent des gradients de la déformation macroscopique. Tous ces problèmes sont hiérarchisés puisque les termes sources des problèmes à l'ordre supérieur dépendent explicitement des champs obtenus à l'ordre précédent. La loi macroscopique est alors obtenue en écrivant une condition d'équivalence énergétique entre les deux échelles. D'autre part la loi d'équilibre macroscopique est obtenue en écrivant l'équilibre statique de la cellule élémentaire. Résumons les avantages de l'approche développée pour le cas des composites élastiques :

- elle donne une justification physique des modélisations continues à gradient de déformation proposées par Toupin [61], Mindlin [44], Green et Rivlin [27],
- les coefficients élastiques d'ordre supérieur sont calculés à partir de la microstructure (géométrie de la cellule élémentaire et propriétés des phases),
- l'approche basée sur le potentiel d'élasticité assure la définie positivité des tenseurs du milieu du second gradient,
- on n'observe pas de persistance des effets du second gradient lorsque l'on supprime l'hétérogénéité locale (contraste égal à un ou taille des inclusions tendent vers zéro) ce qui assure la validité de la démarche d'homogénéisation.

D'autre part, nous avons proposé des algorithmes basés sur la transformée de Fourier rapide et les opérateurs de Green du milieu périodique pour le calcul des coefficients du milieu à gradient. Ces approches sont remarquables d'efficacité bien qu'elles peuvent conduire à des temps de calcul important dans certaines situation de contrastes extrêmes, comme nous avons pu l'observer pour l'arrangement périodique de cavités cylindriques. Sur ce point on peut espérer obtenir des améliorations en adaptant d'autres schémas de résolution tel que la formulation mixte introduite dans [48].

La dernière partie de ce travail a été dédiée à une extension de l'approche pour les composites non linéaires, situation que nous avons abordé dans le contexte de la conductivité thermique avec des phases régies par des lois en potentiel. Nous

avons établi les équations des problèmes d'ordre supérieur et la forme générale de leur solution. Le potentiel macroscopique, obtenu par homogénéisation, est une fonction non linéaire du gradient de la température et quadratique par rapport au double gradient de la température. Le modèle obtenu généralise donc la théorie du second gradient (écrite pour le cas de la conductivité thermique) pour les matériaux non linéaires à loi en potentiel.

Naturellement, les modélisations présentées ainsi que les résultats obtenus ouvrent de nombreuses perspectives parmi lesquelles, nous pouvons mentionner les deux suivantes :

- la détermination de bornes ou d'estimations des propriétés du second gradient en adaptant les approches variationnelles d'Hashin-Shtrikman [31, 32] ou les approches de type Mori-Tanaka [51]. Notons par ailleurs que les approches variationnelles de Drugan et Willis [72] présentées au premier chapitre offrent des expressions analytiques dans certains cas particuliers de forme d'inclusion et de répartition spatiales. Ce type de résultats s'avérerait notamment très intéressant pour construire des modèles d'endommagement régularisés pour les milieux poreux à cavité sphérique ou des milieux fissurés.
- Il serait par ailleurs crucial de pouvoir étendre ces approches dans le contexte des milieux plastiques. En outre, il est reconnu que les phénomènes de localisation des déformations, où les effets microstructuraux deviennent prépondérants, apparaissent en régime non linéaire. L'étude de la localisation avec des modèles à gradient de déformation a fait l'objet de nombreux travaux, notamment ceux de Aifantis [1], Zbib and Aifantis [75], Chambon et al. [14]. Toutefois les effets de microstructure sont toujours abordés avec des modèles ad-hoc et non obtenu par homogénéisation. Notons qu'à ce jour il n'existe pas de consensus sur la forme des lois de plasticité à gradient. L'approche par homogénéisation permettra de préciser la manière dont se manifeste, à l'échelle macroscopique, les effets du gradient de la déformation plastique.

Bibliographie

- [1] E.C. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic modes. *Trans. ASME J. Eng. Mater. Technol.*, 106 :326–330, 1984.
- [2] N. Auffray. *Comportement des matériaux cellulaires ; élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), 2008.
- [3] N. Auffray, R. Bouchet, and Y. Bréchet. Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain-gradient elasticity behavior. *Int. J. Sol. Struct.*, 46 :440–454, 2009.
- [4] J.L. Auriault and G. Bonnet. Surface effects in composite materials : two simple examples. *Int. J. Engrg. Science*, 25(3) :307–323, 1987.
- [5] M.R. Begley and J.W. Hutchinson. The mechanics of size-dependent indentation. *J. Mech. Phys. Solids.*, 46 :2049–2068, 1998.
- [6] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G.C. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, 1978.
- [7] M.J. Beran and J.J. McCoy. Mean field variations in a statistical sample of heterogeneous linearly elastic solids. *Int. J. Solids Struct.*, 6(8) :1035–1054, 1970.
- [8] D. Besdo and H.-U. Dorau. Inelastic behaviour of plane frictionless block-systems described as cosserat media. *Arch. Mech.*, 65 :124–125, 1985.
- [9] D. Besdo and H.-U. Dorau. Zur modellierung von verbundmaterialien als homogenes cosserat - kontinuum. *Z. Angew. Math. Mech.*, 68 :153–155, 1988.
- [10] C. Boutin. Microstructural influence on heat conduction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38(17) :3181–3195, 1995.
- [11] C. Boutin. Microstructural effects in elastic composites. *Int. J. Sol. Struct.*, 33(7) :1023–1051, 1996.
- [12] F. Bouyge, I. Jasiuk, and M. Ostoja-Starzewski. A micromechanically based couple-stress model of an elastic two-phase composite. *Int. J. Sol. Struct.*, 38 :1721–173, 2001.
- [13] F. Bouyge, I. Jasiuk, and M. Ostoja-Starzewski. A micromechanically based couple-stress model of an elastic orthotropic two-phase composite. *Eur. J. Mech. A*, 21 :465–481, 2002.

- [14] R. Chambon, D. Caillerie, and T. Matsuchima. Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies. *Int. J. Sol. Struct.*, 38 :8503–8527, 2001.
- [15] R. de Borst and H.B. Muhlhaus. Gradient-dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Methods in Engineering*, 35 :521–539, 1992.
- [16] G. Diener, C.H. Raabe, and J. Weissbarth. Bounds for the non-local effective properties of random media. *J. Mech. Phys. solids*, 29(3) :181–198, 1981.
- [17] G. Diener, C.H. Raabe, and J. Weissbarth. Bounds for the non-local effective properties of random media ii. *J. Mech. Phys. solids*, 30(5) :305–322, 1982.
- [18] A.C. Eringen and D.G.B Edelen. On nonlocal elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 10 :233–248, 1972.
- [19] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem. *Proc. Roy. Soc. London A*, 241 :376–396, 1957.
- [20] N.A. Fleck and J.W. Hutchinson. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(12) :1825–1857, 1993.
- [21] N.A. Fleck and J.W. Hutchinson. Strain gradient plasticity. *Adv. Appl. Mech.*, 33 :295–361, 1997.
- [22] S. Forest. Mechanics of generalized continua : construction by homogenization. *J. Phys. IV*, pages 39–48, 1998.
- [23] B. Gambin and E. Kroner. High order terms in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media. *Phys. Stat. Sol.(b)*, 151 :513–519, 1989.
- [24] H. Gao, Y. Huang, W.D. Nix, and J.W. Hutchinson. Mechanism-based strain gradient plasticity - i theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47(6) :1239–1263, 1999.
- [25] M. Gologanu. *Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1997.
- [26] M. Gologanu, J.B. Leblond, G. Perrin, and J. Devaux. Recent extensions of gurson’s model for porous ductile metals. continuum micromechanics.
- [27] A.E. Green and R.S. Rivlin. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17 :113–147, 1964.
- [28] A.E. Green and R.S. Rivlin. Simple force and stress mutltipoles. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16 :325–353, 1965.
- [29] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. part i. - yield criterion and flow rules for porous ductile media. *J. Engrg. Mater. Technology.*, 99 :2–15, 1977.

- [30] M.E. Gurtin and L. Anand. A theory of strain-gradient plasticity for isotropic, plastically irrotational materials. part i : Small deformations. *Int. J. Sol. Struct.*, 53 :1624–1649, 2005.
- [31] Z. Hashin and S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 10(4) :335–342, 1962.
- [32] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behavior of polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 10 :343–352, 1962.
- [33] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11(2) :127–140, 1963.
- [34] Y. Huang, H. Gao, W.D. Nix, and J.W. Hutchinson. Mechanism-based strain gradient plasticity ii. analysis. *J. Mech. Phys. solids*, 48 :99–128, 2000.
- [35] Y. Huang, L. Zhang, T.F. Guo, and K.C. Hwang. Mixed mode near-tip fields for cracks in materials with strain-gradient effects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45 :439–465, 1997.
- [36] V. Kouznetsova, M.G.D. Geers, and W.A.M. Brekelmans. Multi-scale constitutive modeling of heterogeneous materials with gradient enhanced computational homogenization scheme. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 54 :1235–1260, 2002.
- [37] V. Kouznetsova, M.G.D. Geers, and W.A.M. Brekelmans. Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :5525–5550, 2004.
- [38] E. Kröner. *Int. j. solids struct.* 3 :731–742, 1967.
- [39] Z. Li and M. Huang. Combined effects of void shape and void size - oblate spheroidal microvoid embedded in infinite non-linear solid. *Int. J. Plasticity*, 21(3) :625–650, 2005.
- [40] B. Liu, X. Qiu, Y. Huang, K.C. Hwang, M. Li, and C. Liu. The size effect on void growth in ductile materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51 :1171–1187, 2003.
- [41] B. Liu, M. Li Y. Huang, K.C. Hwang, and C. Liu. A study of the void size effect based on the taylor dislocation model. *International Journal of Plasticity*, 21(11) :2107–2122, 2005.
- [42] J.-C. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet. A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 52 :139–160, 2001.
- [43] L.P. Mikkelsen. Necking in rectangular tensile bars approximated by 2-d gradient dependent plasticity model. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18 :805–818, 1999.

- [44] R.D. Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16 :51–78, 1964.
- [45] R.D. Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Sol. Struct.*, 1 :417–438, 1965.
- [46] R.D. Mindlin and N.N. Eshel. On first strain gradient theory in linear elasticity. *Int. J. Sol. Struct.*, 4 :109–124, 1968.
- [47] V. Monchiet and G. Bonnet. A micromechanics-based non local constitutive equation and minimum rve size estimates for random elastic composites containing aligned spheroidal heterogeneities. *J. Mech. Phys. Solids*, 57 :1578–1595, 2009.
- [48] V. Monchiet and G. Bonnet. A polarization-based fast numerical method for computing the effective conductivity of composites. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 89(11) :1419–1436, 2012.
- [49] V. Monchiet and G. Bonnet. Algebra of transversely isotropic sixth order tensors and solutions to higher order homogenization problems. *J. Elasticity*, 110(2) :159–183, 2013.
- [50] V. Monchiet and G. Bonnet. A gurson-type model accounting for void size effects. *International Journal of Solids and Structures*, 50(2) :320–327, 2013.
- [51] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 :571–574, 1973.
- [52] H. Moulinec and P. Suquet. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites. *C. R. Acad. Sci.*, 318(11) :1417–1423, 1994.
- [53] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 157 :69–94, 1998.
- [54] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*. North-Holland, 1999.
- [55] T.-K. Nguyen. *Homogénéisation numérique de structures périodiques par transformée de Fourier : matériaux composites et milieux poreux*. PhD thesis, Université Paris-Est Marne-la-Vallée, 2010.
- [56] W.D. Nix and H. Gao. Indentation size effects in crystalline materials : a law for strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 46 :411–425, 1998.
- [57] E. Sanchez-Palencia. Comportements local et macroscopique d’un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Engng Sci.*, 12 :331–351, 1974.
- [58] J.Y. Shu and N.A. Fleck. The prediction of a size effect in micro-indentation. *Int. J. Solids Struct.*, 35 :1363–1383, 1998.

- [59] V.P. Smyshlyaev and K.D. Cherednichenko. On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :1325–1357, 2000.
- [60] P. Suquet. *Plasticité et homogénéisation*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1982.
- [61] R. Toupin. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11(1) :385–414, 1962.
- [62] R. Toupin. Theories of elasticity with couple-stress. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17(2) :85–112, 1964.
- [63] N. Triantafyllidis and S. Bardenhagen. The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models. *J. Mech. Phys. Solids*, 44 :1891–1928, 1996.
- [64] L.J. Walpole. Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Adv. App. Mech.*, 21 :169–243, 1981.
- [65] Y. Wei and J.W. Hutchinson. Steady-state crack growth and work of fracture for solids characterized by strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 45(8) :1253–1273, 1997.
- [66] J. Wen, Y. Huang, K.C. Hwang, C. Liu, and M. Li. The modified gurson model accounting for the void size effect. *Int. J. Plasticity*, 21(2) :381–395, 2005.
- [67] J.R. Willis. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 25(3) :185–202, 1977.
- [68] J.R. Willis. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Advances in Applied Mechanics*, 21 :1–78, 1981.
- [69] J.R. Willis. The overall elastic response of composite materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50 :1202–1209, 1983.
- [70] Drugan W.J. Micromechanics-based variational estimates for a higher-order nonlocal constitutive equation and optimal choice of effective moduli for elastic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :1359–1387, 2000.
- [71] Drugan W.J. Two exact micromechanics-based nonlocal constitutive equations for random linear elastic composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 51 :1745–1772, 2003.
- [72] Drugan W.J. and Willis J.R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(4) :497–524, 1996.
- [73] Z.C. Xia and J.W. Hutchinson. Crack tip fields in strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and physics of solids*, 44 :1621–1648, 1996.

- [74] X. Yuan, Y. Tomita, and T. Andou. A micromechanical approach of nonlocal modeling for media with periodic microstructures. *Mech. Res. Comm.*, 35 :126–133, 2008.
- [75] H.M. Zbib and E.C. Aifantis. On the structure and width of shear bands. *Scripta Metallurgica*, 22(5) :703–708, 1988.

Annexe A : conditions aux limites du modèle de triple gradient de Mindlin

La variation de l'énergie élastique totale du volume \mathcal{D} , avec un déplacement arbitraire $\delta\underline{U}$, s'écrit donc :

$$\delta \int_{\mathcal{D}} W dV = \int_{\mathcal{D}} (\Sigma^1 : \nabla \delta\underline{U} + \Sigma^2 : \cdot \nabla^2 \delta\underline{U} + \Sigma^3 :: \nabla^3 \delta\underline{U}) dV \quad (4.102)$$

Par application du théorème de la divergence, il est possible de mettre (4.102) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta \int_{\mathcal{D}} W dV = & - \int_{\mathcal{D}} (\Sigma_{ij,j}^1 - \Sigma_{ijk,jk}^2 + \Sigma_{ijkl,jkl}^3) \delta U_i dV \\ & + \int_{\partial\mathcal{D}} (\Sigma_{ij} - \Sigma_{ijk,k}^2 + \Sigma_{ijkl,kl}^3) N_j \delta U_i dS \\ & + \int_{\partial\mathcal{D}} (\Sigma_{ijk}^2 - \Sigma_{ijkl,l}^3) N_k \nabla_j \delta U_i dS + \int_{\partial\mathcal{D}} \Sigma_{ijkl}^3 N_l \nabla_k \nabla_j \delta U_i dS \end{aligned} \quad (4.103)$$

Dans l'équation (4.103), les deux variables δU_i et $\nabla_j \delta U_i$ ne sont pas indépendantes, $\nabla_j \delta U_i$ peut donc être décomposée en deux parties :

$$\nabla_j \delta U_i = D_j \delta U_i + N_j D \delta U_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} D_i = \nabla_i - N_i D \\ D = \nabla_i N_i \end{cases} \quad (4.104)$$

où : $D_j \delta U_i$ est le gradient surfacique de δU_i et $D \delta U_i$, le gradient normal de δU_i . Dans l'équation (4.103), l'intégrale ayant $\nabla_j \delta U_i$ comme coefficient peut donc être transféré aux deux intégrales en appliquant le théorème de différentiel et de divergence, l'une ayant δU_i comme coefficient et l'autre ayant $D \delta U_i$ comme coefficient. Une manière similaire est utilisée pour la transformée de l'intégrale associée au double gradient de la variation de déplacement $\nabla_k \nabla_j \delta U_i$ aux autres intégrales ayant δU_i , $D \delta U_i$ et $D^2 \delta U_i$ comme coefficients indépendants. L'équation (4.103)

devient finalement :

$$\begin{aligned}
\delta \int_{\mathcal{D}} W dV &= - \int_{\mathcal{D}} (\Sigma_{ij,j}^1 - \Sigma_{ijk,jk}^2 + \Sigma_{ijkl,jkl}^3) \delta U_i dV \\
&+ \int_{\partial \mathcal{D}} (\Sigma_{ij}^1 - \Sigma_{ijk,k}^2 + \Sigma_{ijkl,kl}^3) N_j \delta U_i dS \\
&+ \int_{\partial \mathcal{D}} \{L_j [(\Sigma_{ijk}^2 - \Sigma_{ijkl,l}^3) N_k + L_k (\Sigma_{ijkl}^3 N_l) - (D_j N_j) (\Sigma_{ijkl}^3 N_k N_l)]\} \delta U_i dS \quad (4.105) \\
&+ \int_{\partial \mathcal{D}} \{(\Sigma_{ijk}^2 - \Sigma_{ijkl,l}^3) N_k N_j + L_k (\Sigma_{ijkl}^3 N_l) N_j + L_j (\Sigma_{ijkl}^3 N_k N_l)\} D \delta U_i dS \\
&+ \int_{\partial \mathcal{D}} (\Sigma_{ijkl}^3 N_j N_k N_l) D^2 \delta U_i dS
\end{aligned}$$

où : $L_i = N_i (D_k N_k) - D_i$. Le principe de stationnarité de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\delta \int_{\mathcal{D}} W dV = \int_{\mathcal{D}} F_i \delta U_i dV + \int_{\partial \mathcal{D}} (T_i^1 \delta U_i + T_i^2 \delta U_i + T_i^3 \delta^2 U_i) dS \quad (4.106)$$

où : \underline{F} est la force de volume et $\underline{T}^1, \underline{T}^2, \underline{T}^3$ sont les vecteurs des tractions surfaciques généralisées.

Annexe B : calcul du champ u^2 pour le composite stratifié non-linéaire

The first equation in (4.27), reads, for the stratified composite :

$$\frac{d\sigma_1^1}{dy}(y) = - \left[\frac{\partial \underline{\sigma}^0}{\partial \underline{E}} - \langle \frac{\partial \underline{\sigma}^0}{\partial \underline{E}} \rangle_V \right] : \mathbf{K} \quad (4.107)$$

Accounting for the definition (4.11) for $\underline{\sigma}^0(y)$ and expression (4.58) for $\underline{\varepsilon}^0(y)$, it follows that :

$$\frac{\partial \sigma_i^0}{\partial E_j}(y) = C_{ij}(y) + C_{i1}(y)\beta_j F'(y) \quad (4.108)$$

in which we have introduced :

$$\beta_i = \frac{\partial \alpha}{\partial E_i} \quad (4.109)$$

Note that the component $\sigma_1^0(y)$ is constant in cell, consequently :

$$C_{i1a} - \frac{C_{11a}}{f_a}\beta_j = C_{i1b} + \frac{C_{11b}}{f_b}\beta_j \quad (4.110)$$

That leads, for β_i , to :

$$\beta_i = f_a f_b \frac{C_{i1a} - C_{i1b}}{f_b C_{11a} + f_a C_{11b}} \quad (4.111)$$

It follows that :

$$\frac{\partial \sigma_i^0}{\partial E_j}(y) = C_{ij}(y) + f_a f_b C_{i1}(y) \frac{C_{j1b} - C_{j1a}}{f_b C_{11a} + f_a C_{11b}} F'(y) \quad (4.112)$$

and :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial E_j} [\sigma_i^0(y) - \langle \sigma_i^0(y) \rangle_V] = \\ & -f_a f_b \left[C_{ija} - C_{ijb} - \frac{(f_b C_{i1a} + f_a C_{i1b})(C_{j1a} - C_{j1b})}{f_b C_{11a} + f_a C_{11b}} \right] F'(y) \end{aligned} \quad (4.113)$$

Relation (4.107) can then be put into the simple form :

$$\frac{d\sigma_1^1}{dy}(y) + gF'(y) = 0 \quad (4.114)$$

In which g is given by :

$$g = -f_a f_b \left[C_{ija} - C_{ijb} - \frac{(f_b C_{i1a} + f_a C_{i1b})(C_{j1a} - C_{j1b})}{f_b C_{11a} + f_a C_{11b}} \right] K_{ij} \quad (4.115)$$

By integration, we obtain, for $\sigma_1^1(y)$:

$$\sigma_1^1(y) = p - gF(y) \quad (4.116)$$

in which p is a constant which has to be determined.

The components of $\underline{\tau}(y)$ in the second relation in (4.62), are computed as follows :

$$\begin{aligned} \tau_i(y)F(y) &= C_{ik}(y) \frac{\partial u^1}{\partial E_j}(y) K_{jk} \\ &= C_{ik}(y) \beta_j K_{jk} F(y) \\ &= \frac{f_a f_b}{2(f_b C_{11a} + f_a C_{11b})} C_{ik}(y) (C_{j1a} - C_{j1b}) K_{jk} F(y) \end{aligned} \quad (4.117)$$

It follows that :

$$\frac{du^2}{dy}(y) = \frac{p - [g + \tau_1(y)]F(y)}{C_{11}(y)} \quad (4.118)$$

The temperature u^2 being periodic, its derivative has a null volume average that leads to $p = 0$. The integration of u^2 is trivial and leads to (4.66) when the continuity at $y = 0$ and the condition $\langle u^2(y) \rangle_V = 0$ are considered.

Below are given the detailed expressions of the components of $C_{ij}(y)$:

$$\begin{cases} C_{11a} = \tau_a(\varepsilon_a)^{m_a-1} [1 + (m_a - 1)(E_1 - \alpha/f_a)^2/\varepsilon_a^2] \\ C_{12a} = \tau_a(m_a - 1)(\varepsilon_a)^{m_a-3} [E_1 - \alpha/f_a] E_2 \\ C_{13a} = \tau_a(m_a - 1)(\varepsilon_a)^{m_a-3} [E_1 - \alpha/f_a] E_3 \\ C_{22a} = \tau_a(\varepsilon_a)^{m_a-1} [1 + (m_a - 1)E_2^2/\varepsilon_a^2] \\ C_{23a} = \tau_a(m_a - 1)(\varepsilon_a)^{m_a-3} E_2 E_3 \\ C_{33a} = \tau_a(\varepsilon_a)^{m_a-1} [1 + (m_a - 1)E_3^2/\varepsilon_a^2] \end{cases} \quad (4.119)$$

in the phase a and reads :

$$\begin{cases} C_{11b} = \tau_b(\varepsilon_b)^{m_b-1} [1 + (m_b - 1)(E_1 + \alpha/f_b)^2/\varepsilon_b^2] \\ C_{12b} = \tau_b(m_b - 1)(\varepsilon_b)^{m_b-3} [E_1 + \alpha/f_b] E_2 \\ C_{13b} = \tau_b(m_b - 1)(\varepsilon_b)^{m_b-3} [E_1 + \alpha/f_b] E_3 \\ C_{22b} = \tau_b(\varepsilon_b)^{m_b-1} [1 + (m_b - 1)E_2^2/\varepsilon_b^2] \\ C_{23b} = \tau_b(m_b - 1)(\varepsilon_b)^{m_b-3} E_2 E_3 \\ C_{33b} = \tau_b(\varepsilon_b)^{m_b-1} [1 + (m_b - 1)E_3^2/\varepsilon_b^2] \end{cases} \quad (4.120)$$

in the phase b .

Annexe C : calcul du potentiel macroscopique Ψ_2 pour le cas non-linéaire $E_1 = 0$

Let us begin with the general expression of $\Psi_2(\underline{E}, \mathbf{K})$ in (4.73) that should be recalled here :

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & -\frac{f_a f_b}{12} (\sigma_{ia}^0 - \sigma_{ib}^0) \frac{\partial}{\partial E_j} \left[f_a \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11a}} + f_b \frac{\tau_{1b} + g}{C_{11b}} \right] K_{ij} \\ & + \frac{f_a}{24} \frac{\tau_{1a} + g}{C_{11a}} [g - C_{12a} e_2 - C_{13a} e_3] \\ & + \frac{f_b}{24} \frac{\tau_{1b} + g}{C_{11b}} [g - C_{12b} e_2 - C_{13b} e_3] \\ & + \frac{1}{24} [(f_a \tau_{2a} + f_b \tau_{2b}) e_2 + (f_a \tau_{3a} + f_b \tau_{3b}) e_3] - \frac{1}{12} g e_1 \end{aligned} \quad (4.121)$$

where :

$$\tau_{1a} = \tau_{2a} = \tau_{3a} = \tau_{1b} = \tau_{2b} = \tau_{3b} = e_1 = e_2 = e_3 = 0 \quad (4.122)$$

It becomes for Ψ_2 :

$$\Psi_2 = -\frac{f_a f_b}{12} (\sigma_{ia}^0 - \sigma_{ib}^0) \frac{\partial(gD)}{\partial E_j} K_{ij} + \frac{g^2 D}{24} \quad (4.123)$$

where we posed :

$$D = \frac{f_a}{C_{11a}} + \frac{f_b}{C_{11b}} = \frac{f_a}{\tau_a E^{m_a-1}} + \frac{f_b}{\tau_b E^{m_b-1}} \quad (4.124)$$

Note also that :

$$\begin{cases} \sigma_{1a}^0 - \sigma_{1b}^0 = 0 \\ \sigma_{2a}^0 - \sigma_{2b}^0 = A E_2 \\ \sigma_{3a}^0 - \sigma_{3b}^0 = A E_3 \end{cases} \quad (4.125)$$

with :

$$A = \tau_a E^{m_a-1} - \tau_b E^{m_b-1} \quad (4.126)$$

Therefore we have :

$$(\sigma_{ia}^0 - \sigma_{ib}^0)K_{ij} = AE_iK_{ij} \quad (4.127)$$

On the other hand, expression of g reads :

$$g = -f_a f_b [(C_{22a} - C_{22b})K_{22} + (C_{33a} - C_{33b})K_{33} + (C_{23a} - C_{23b})K_{23}] \quad (4.128)$$

with :

$$\begin{cases} C_{22a} - C_{22b} = A + B \frac{E_2^2}{E^2} \\ C_{33a} - C_{33b} = A + B \frac{E_3^2}{E^2} \\ C_{23a} - C_{23b} = B \frac{E_2 E_3}{E^2} \end{cases} \quad (4.129)$$

with :

$$B = (m_a - 1)\tau_a E^{m_a - 1} - (m_b - 1)\tau_b E^{m_b - 1} \quad (4.130)$$

g can be rewritten as follows :

$$g = -f_a f_b \left[AK_{ii} + B \frac{K_{ij} E_i E_j}{E^2} \right] \quad (4.131)$$

Its derivative with respect to E_i is given by :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial E_i} &= -f_a f_b \left[\frac{\partial A}{\partial E_i} K_{pp} + \frac{\partial(B/E^2)}{\partial E_i} K_{pq} E_p E_q + \frac{B}{E^2} \frac{\partial(E_p E_q)}{\partial E_i} K_{pq} \right] \\ &= -\frac{f_a f_b}{E^2} \left[BK_{pp} E_i + C \frac{K_{pq} E_p E_q}{E^2} E_i + 2BK_{ip} E_p \right] \end{aligned} \quad (4.132)$$

where :

$$C = \tau_a(m_a - 1)(m_a - 3)E^{m_a - 1} - \tau_b(m_b - 1)(m_b - 3)E^{m_b - 1} \quad (4.133)$$

The derivative of D whose expression is (4.124), with respect to E_i is given by :

$$\frac{\partial D}{\partial E_i} = -\frac{F}{E^2} E_i \quad (4.134)$$

with :

$$F = \frac{f_a(m_a - 1)}{\tau_a E^{m_a - 1}} + \frac{f_b(m_b - 1)}{\tau_b E^{m_b - 1}} \quad (4.135)$$

By substituting (4.131), (4.124), (4.132) et (4.134) into the expression of Ψ_2 in (4.123), we obtain finally :

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= -\frac{f_a^2 f_b^2}{24} AF \frac{K_{ij} E_i E_j}{E^2} \left[AK_{pp} + B \frac{K_{pq} E_p E_q}{E^2} \right] \\ &+ \frac{f_a^2 f_b^2}{12} AD \left[BK_{ii} \frac{K_{pq} E_p E_q}{E^2} + C \left(\frac{K_{pq} E_p E_q}{E^2} \right)^2 + 2B \frac{K_{ip} E_p K_{iq} E_q}{E^2} \right] \\ &+ \frac{f_a^2 f_b^2}{24} D \left[AK_{ii} + B \frac{K_{ij} E_i E_j}{E^2} \right] \end{aligned} \quad (4.136)$$