HAL
open science

Approche par une méthode d'homogénéisation du comportement des ouvrages en sols renforcés par colonnes ou tranchées

Maxime Gueguin

To cite this version:

Maxime Gueguin. Approche par une méthode d'homogénéisation du comportement des ouvrages en sols renforcés par colonnes ou tranchées. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : . tel-01057009v1

HAL Id: tel-01057009

https://theses.hal.science/tel-01057009v1

Submitted on 21 Aug 2014 (v1), last revised 6 Mar 2015 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST
École doctorale SIE

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR
de l'Université Paris-Est

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Maxime Gueguin

intitulée

Approche par une méthode d'homogénéisation du comportement des ouvrages en sols renforcés par colonnes ou tranchées

soutenue à Champs-Sur-Marne le 9 Juillet 2014
devant le jury composé de

Rapporteurs :	Antonella Cecchi	Università di Venezia
	Géry de Saxcé	Université de Lille 1
Examinateurs :	Yves Berthaud	Université Pierre et Marie Curie
	Alain Pecker	École des Ponts ParisTech
	Ghazi Hassen	Laboratoire Navier
Directeur :	Patrick de Buhan	Laboratoire Navier

Les hommes construisent trop
de murs et pas assez de ponts.

Isaac Newton

À Camille,

à mes parents,

à mon frère et ma sœur.

Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu le Professeur Yves Berthaud qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je voudrais également remercier les Professeurs Antonella Cecchi et Géry de Saxcé d'avoir accepté de rapporter mon mémoire et d'avoir suscité ma réflexion par leurs remarques constructives. Je tiens aussi à remercier Alain Pecker qui a suivi l'évolution de mes travaux et examiné avec attention le résultat final.

Je voudrais ensuite exprimer ma gratitude à mes encadrants Ghazi Hassen et Patrick de Buhan, sans qui une grande partie de ce travail n'aurait pas abouti. En plus de leur rigueur scientifique et de leur sens de la pédagogie, tous deux ont fait preuve de grandes qualités humaines dans leur encadrement. Leurs conseils et leurs méthodes de travail me serviront assurément tout au long de ma vie professionnelle.

Je remercie vivement les membres de l'équipe Multi-échelle du laboratoire Navier, chercheurs, secrétaires ou doctorants, pour la bonne ambiance qui y règne et pour les aides, les conseils et les soutiens qu'ils ont pu m'apporter pendant cette thèse. Je tiens en particulier à adresser un remerciement à Denis et à Camille pour les repas ou les cafés partagés.

Je souhaite remercier Alexandre, François, Jérémy, Maged et Mathilde pour les moments de détente que nous avons passé ensemble, fussent-ils sportifs ou non. Leur présence au quotidien a permis à cette thèse de passer plus vite et nos discussions m'auront fait avancer scientifiquement et humainement.

Je voudrais ensuite dire un grand merci à tous les amis qui partagent mon temps libre depuis longtemps. Je commencerais par les Bretons, Arnaud, Blandine, Mickaël, Marion, Nicolas, Pierre et Thomas, qui, malgré les années et la distance, ont su se montrer disponibles pour partager d'excellents moments. On a grandi ensemble et ils m'ont toujours permis de garder l'esprit éloigné des préoccupations du travail. Je poursuivrais en remerciant les personnes rencontrées à Cachan. J'ai bien sûr une pensée plus soutenue pour mes vieux frères Charles, Dorian et Mickaël, auxquels j'associe Annabelle, Marion et Caroline, avec qui j'ai eu le plaisir de passer des soirées inoubliables. J'espère continuer longtemps à écrire d'autres souvenirs avec chacun d'entre eux.

Je réserve une pensée chaleureuse à ma famille, et tout particulièrement à mes parents, à mon frère Renaud et à ma sœur Marie, ainsi qu'à leurs inséparables Aurélia, Arthur et Julien. Leur soutien, tout au long de ma vie "d'éternel étudiant", m'a constamment aidé à franchir les obstacles avec la confiance de celui qui est bien entouré. Ces quelques mots ne sauraient exprimer la gratitude que j'ai pour eux.

Je finirais en adressant un immense merci à Camille. Elle a su m'aider à surmonter les moments de doute par son écoute et sa patience. Il est certain que sans elle, ces trois années (et les précédentes) n'auraient pas été les mêmes.

Résumé

Ce travail s'inscrit dans le contexte des techniques de renforcement des sols, permettant d'améliorer les performances mécaniques de terrains de qualité médiocre. Parmi ces techniques, l'utilisation d'inclusions souples prenant la forme de colonnes ou de tranchées croisées connaît une diffusion croissante. Même si les aspects relatifs à leur procédé de construction sont aujourd'hui bien maîtrisés, les méthodes de dimensionnement de ces ouvrages en sols renforcés restent à améliorer.

Dans cette thèse, nous proposons d'utiliser la méthode d'homogénéisation afin d'analyser le comportement global des ouvrages en sols renforcés, dans le cadre de la théorie de l'élasticité (propriétés de rigidité) aussi bien que dans celle du calcul à la rupture (propriétés de résistance). Tenant compte de la périodicité géométrique des différentes configurations de renforcement, nous déterminons le comportement des sols renforcés tout d'abord au niveau local puis à l'échelle de l'ouvrage.

Pour évaluer les capacités de résistance des ouvrages en sols renforcés, les approches statique et cinématique du calcul à la rupture sont mises en œuvre analytiquement ou numériquement selon la nature du matériau de renforcement utilisé. Par des formulations numériques innovantes adaptées à cette théorie, nous parvenons notamment à évaluer les domaines de résistance macroscopiques des sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées, qui peuvent ensuite être pris en compte dans le comportement à la rupture des ouvrages en sols renforcés. Deux exemples d'application de cette procédure, relatifs au problème de capacité portante d'une semelle de fondation reposant sur un sol renforcé d'une part et à l'analyse de la stabilité d'un remblai d'autre part, sont effectués.

Mots-clés : Sols renforcés ; Homogénéisation périodique ; Élasticité ; Calcul à la rupture ; Domaine de résistance macroscopique ; Programmation semi-définie

Abstract

This work takes place in the context of soil reinforcement techniques, aimed at improving the mechnical performances of poor quality grounds. Among these techniques, the use of soft inclusions taking the form of columns or cross-trenches has known important developments. Even if the aspects relative to their construction process are presently well mastered, the design methods of such reinforced soil structures still remain to be greatly improved.

The present work advocates the use of the homogenization method for assessing the global behavior of reinforced soil structures, both in the context of linear elasticity (stiffness properties) and in the framework of yield design (strength properties). Taking into account the geometrical periodicity of the various reinforcement configurations, we thus determine the behavior of the reinforced soils first locally and then at the global scale.

To assess the strength capacities of reinforced soil structures, the static and kinematic approaches of the yield design theory are performed analytically or numerically depending on the kind of reinforcing material which is used. Adopting innovative numerical formulations dedicated to this theory, we can notably evaluate the macroscopic strength domains of column as well as cross-trench reinforced soils which can then be introduced in the yield design of reinforced soil structures. Two illustrative applications of this procedure are performed relating to the bearing capacity problem of a reinforced soil shallow foundation on the one hand, the stability analysis of an embankment on the other hand.

Key words : Reinforced soils ; Periodic homogenization ; Elasticity ; Yield design theory ; Macroscopic strength domain ; Semidefinite programming

Table des matières

Introduction 1

1 Revue bibliographique et justification de la méthode retenue 3

1.1 Différentes techniques de renforcement des sols 4
1.1.1 Renforcement par colonnes ballastées 4
1.1.2 Renforcement par colonnes traitées en place 5
1.1.3 Une nouvelle technique en développement : le *Trenchmix* 6
1.1.4 Synthèse des techniques de renforcement de sol étudiées 7
1.2 Les méthodes de dimensionnement usuelles 8
1.2.1 Dimensionnement vis-à-vis du tassement 8
1.2.2 Dimensionnement à la rupture des ouvrages 9
1.2.3 Limites des méthodes classiques de dimensionnement à la rupture . 10
1.3 Caractérisation mécanique des sols renforcés : une approche par homogénéisation 12
1.3.1 Évaluation du tassement des sols renforcés 12
1.3.2 Détermination du comportement à la rupture des sols renforcés . . 13
1.4 Plan du manuscrit 14
1.4.1 Comportement élastique des sols renforcés 14
1.4.2 Calcul à la rupture des sols renforcés de type cohérent/cohérent . . 14
1.4.3 Approche numérique du calcul à la rupture des sols renforcés 15

Comportement élastique des sols renforcés 17

2 Caractérisation du comportement élastique macroscopique des sols renforcés 19

2.1 Principe de la méthode d'homogénéisation périodique 20
2.1.1 Du problème initial au problème homogène associé 20
2.1.2 Comportement élastique macroscopique : résolution du problème auxiliaire 21
2.1.3 Un modèle simplifié de sol renforcé : le matériau multicouche 23
2.2 Évaluation de caractéristiques élastiques par des approches variationnelles . 27
2.2.1 Principes de minimum énergétiques 27
2.2.2 Encadrement du module de cisaillement longitudinal des sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées 28
2.3 Détermination de caractéristiques élastiques par des méthodes numériques 35
2.3.1 Mise en œuvre des calculs par éléments finis 35
2.3.2 Comparaisons avec les résultats analytiques 37

2.4 Efficacité comparée des différentes techniques de renforcement des sols . . . 39
2.4.1 Comparaison des modules d'Young 40
2.4.2 Comparaison des modules de cisaillement 41

3 Applications de la méthode d'homogénéisation à l'analyse de la réponse élastique d'un ouvrage en sol renforcé 45
3.1 Réduction du risque de liquéfaction des sols renforcés 46
3.1.1 Localisation des déformations de cisaillement 47
3.1.2 Évaluation du facteur de réduction du risque de liquéfaction 49
3.1.3 Analyse des résultats et commentaires 53
3.2 Tassement vertical, déplacement latéral et inclinaison de renversement d'une semelle sur une fondation en sol renforcé 55
3.2.1 Matrice de raideur structurelle 56
3.2.2 Calculs numériques à deux échelles 58
3.2.3 Comparaison des différents types de renforcement 61
3.2.4 Conclusions sur la démarche adoptée 65

Calcul à la rupture des sols renforcés de type cohérent/cohérent 67

4 Critère de résistance macroscopique d'un sol cohérent renforcé par un matériau purement cohérent 69
4.1 Domaine de résistance macroscopique d'un milieu hétérogène périodique . . 70
4.1.1 Critères de résistance locaux 71
4.1.2 Problème auxiliaire de calcul à la rupture 72
4.1.3 Définition cinématique du domaine de résistance macroscopique . . 73
4.2 Approches statique et cinématique du calcul à la rupture pour le problème auxiliaire 74
4.2.1 Principe de l'approche statique par l'intérieur 74
4.2.2 Principe de l'approche cinématique par l'extérieur 75
4.3 Le cas du matériau multicouche 77
4.3.1 Définition du problème auxiliaire 77
4.3.2 Critère de résistance macroscopique et cohésion anisotrope 79
4.4 Critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes 84
4.4.1 Minorant et majorant de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ 84
4.4.2 Estimations du critère et de la cohésion anisotrope 87
4.5 Critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé par tranchées croisées 89
4.5.1 Minorant et majorant de $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$ 89
4.5.2 Comparaison des critères correspondant aux différentes techniques . 93

5 Capacité portante sous chargement incliné de fondations en sols renforcés de type cohérent/cohérent 95
5.1 Encadrement du domaine des chargements potentiellement supportables pour un ouvrage 96
5.1.1 Définition du domaine $\mathbf{K}$ 96
5.1.2 Encadrement du domaine $\mathbf{K}$ 97
5.2 Capacité portante sous charge inclinée d'un sol de fondation renforcé par un matériau purement cohérent 99

5.2.1 Mode de chargement et puissance des efforts extérieurs 99
5.2.2 Expression de la puissance résistante maximale 101
5.2.3 Performances des différentes techniques de renforcement 103
5.2.4 Remarques conclusives 106

Approche numérique du calcul à la rupture des sols renforcés 107

6 Méthodes numériques appliquées à la résolution du problème auxiliaire de calcul à la rupture 109
6.1 Nécessité des méthodes numériques en calcul à la rupture 110
6.1.1 Remarques initiales 110
6.1.2 Un bref historique des méthodes numériques en calcul à la rupture . 111
6.2 Formulations numériques des approches du calcul à la rupture pour un problème 3D 114
6.2.1 Approche statique 114
6.2.2 Approche cinématique 119
6.3 Traitement d'un problème en conditions de déformations planes généralisées (GPS) 123
6.3.1 Conditions de déformations planes généralisées 123
6.3.2 Reformulation GPS de l'approche statique 125
6.3.3 Reformulation GPS de l'approche cinématique 129
6.3.4 Conclusions sur les formulations numériques développées 132

7 Évaluation numérique du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par un matériau frottant 135
7.1 Mise en place des simulations numériques 136
7.1.1 Problème de départ et conditions aux limites 136
7.1.2 Pilotage des trajets de chargement macroscopiques 137
7.1.3 Réduction du nombre de paramètres 138
7.2 Domaine de résistance macroscopique des sols renforcés par colonnes 140
7.2.1 Une approche statique analytique 140
7.2.2 Utilisation de la programmation semi-définie positive en GPS . . . 143
7.2.3 Précision des résultats et comparaison avec une évaluation simplifiée du critère de résistance macroscopique 146
7.3 Encadrement numérique du critère de résistance macroscopique des sols renforcés par tranchées croisées frottantes 148
7.3.1 Approches statique et cinématique numériques 148
7.3.2 Commentaires sur la précision des résultats 150
7.4 Comparaison des critères de résistance macroscopiques des sols renforcés par un matériau frottant 151
7.4.1 Renforcement par colonnes ou par tranchées croisées ? 151
7.4.2 Conclusions 153

8 Deux exemples d'application à des calculs d'ouvrages 155
8.1 Généralités sur l'utilisation d'un domaine de résistance macroscopique approximé dans un calcul d'ouvrage 156

8.1.1 Nécessité de disposer d'approximations simplifiées du critère macroscopique . . . 156
8.1.2 Méthode employée et statut théorique des approximations . . . 157
8.2 Approximations des domaines de résistance des sols renforcés . . . 159
8.2.1 Cas des sols renforcés de type cohérent/cohérent . . . 160
8.2.2 Cas des sols renforcés de type cohérent/frottant . . . 161
8.3 Application aux calculs de capacité portante sous charge inclinée de fondations renforcées . . . 166
8.3.1 Données du problème . . . 166
8.3.2 Résultats des calculs numériques . . . 168
8.3.3 Conclusions sur la capacité portante des sols renforcés . . . 175
8.4 Analyse de la stabilité d'un remblai reposant sur un sol renforcé . . . 176
8.4.1 Position du problème . . . 176
8.4.2 Comparaison des différentes techniques de renforcement . . . 177
8.4.3 Conclusions sur la stabilité de remblai reposant sur un sol renforcé . 181

Conclusions et perspectives 183

9 Conclusions et perspectives 185
9.1 Conclusions . . . 186
9.2 Perspectives . . . 189

Annexes 191

A Détails de calcul relatifs à l'encadrement du module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par colonnes 193
A.1 Obtention d'un majorant du module cisaillement longitudinal . . . 193
A.2 Obtention d'un minorant du module cisaillement longitudinal . . . 195

B Validation des formulations numériques sur l'exemple des sols renforcés par un matériau purement cohérent 197
B.1 Mise en place de la modélisation numérique . . . 197
B.1.1 Caractéristiques matérielles et pilotage des simulations numériques . 197
B.1.2 Présentation des maillages utilisés . . . 198
B.2 Analyse des évaluations numériques des critères macroscopiques . . . 199
B.2.1 Comparaison des encadrements numériques et analytiques . . . 199
B.2.2 Comparaison avec les résultats issus des calculs élastoplastiques . . 201

C Approximations d'un domaine de résistance par un ensemble d'ellipsoïdes 205
C.1 Présentation du principe d'approximation d'un ensemble borné par une somme d'ellipsoïdes . . . 205
C.1.1 Définitions de la somme d'ellipsoïdes . . . 205
C.1.2 Utilisation pour l'approximation d'un domaine de résistance borné . 206
C.2 Approximations de domaines non bornés . . . 208
C.2.1 Formulation générale . . . 208

C.2.2 Application à un domaine défini en déformations planes 210

D Formulation numérique d'un problème de calcul à la rupture en déformations planes utilisant un domaine de résistance approximé 213

D.1 Cas de l'approche statique 213

D.2 Cas de l'approche cinématique 216

Bibliographie 219

Introduction

Chapitre 1

Revue bibliographique et justification de la méthode retenue

Sommaire

1.1 Différentes techniques de renforcement des sols 4
1.1.1 Renforcement par colonnes ballastées 4
1.1.2 Renforcement par colonnes traitées en place 5
1.1.3 Une nouvelle technique en développement : le *Trenchmix* 6
1.1.4 Synthèse des techniques de renforcement de sol étudiées 7
1.2 Les méthodes de dimensionnement usuelles 8
1.2.1 Dimensionnement vis-à-vis du tassement 8
1.2.2 Dimensionnement à la rupture des ouvrages 9
1.2.3 Limites des méthodes classiques de dimensionnement à la rupture 10
1.3 Caractérisation mécanique des sols renforcés : une approche par homogénéisation 12
1.3.1 Évaluation du tassement des sols renforcés 12
1.3.2 Détermination du comportement à la rupture des sols renforcés 13
1.4 Plan du manuscrit 14
1.4.1 Comportement élastique des sols renforcés 14
1.4.2 Calcul à la rupture des sols renforcés de type cohérent/cohérent 14
1.4.3 Approche numérique du calcul à la rupture des sols renforcés 15

1.1 Différentes techniques de renforcement des sols

La pénurie actuelle de terrains constructibles de bonne qualité oblige à réaliser des ouvrages sur des sols de moins en moins favorables. Ce constat a amené les industriels à développer des techniques permettant d'améliorer les performances du sol initialement en place, de façon à assurer à ces ouvrages la même durée de vie que s'ils étaient construits sur des terrains de bonne qualité.

Dans le cas qui va nous préoccuper tout au long de ce manuscrit, celui de sols constitués d'argile molle, il existe de nombreuses raisons pour lesquelles un renforcement est nécessaire. En effet, ces sols fins mous et compressibles possèdent plusieurs caractéristiques qui peuvent s'avérer gênantes pour le bon fonctionnement de l'ouvrage :

- ils subissent des déformations importantes sous les charges qui leur sont appliquées, leur module d'Young étant rarement supérieur à une centaine de MPa ;
- ils sont fortement sensibles au risque de liquéfaction lors d'une sollicitation sismique ;
- leur résistance est souvent trop faible pour supporter les charges prévues dans les projets, leur cohésion se limitant à quelques dizaines de kPa.

C'est la raison pour laquelle des techniques de *renforcement de sols* se sont développées au cours des dernières décennies pour pallier ces différents problèmes. Les méthodes de traitement associées sont diverses et les habitudes de construction varient suivant les pays concernés. Dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéresserons plus particulièrement à deux techniques d'amélioration des sols : le renforcement par *colonnes ballastées* et le *traitement des sols en place*.

1.1.1 Renforcement par colonnes ballastées

La technique de renforcement par colonnes ballastées (*stone column* en anglais) consiste à remplacer une partie du sol en place par un matériau grenu, doté d'un fort angle de frottement interne et d'une cohésion négligeable [Balaam et Booker, 1981, Soyez, 1985, Dhouib et Blondeau, 2005, Magnan et Pilot, 2012]. La mise en place de ce matériau se fait en deux étapes principales, schématisées sur la Figure 1.1.

En premier lieu, un corps cylindrique (de plusieurs dizaines de centimètres de diamètre) est introduit dans le sol. La pénétration de cette *aiguille vibrante* est assurée à la fois par l'effet de son poids propre et par un *lançage*, réalisé à l'eau ou à l'air. La profondeur de forage peut atteindre une trentaine de mètres au maximum.

La seconde étape consiste à remplir cette cavité créée avec un matériau d'apport. Celui-ci est amené directement en fond de forage par l'outil servant à creuser. En remontant au fur et à mesure, l'aiguille permet de vibrocompacter ce matériau granulaire (graviers ou ballast). Le diamètre final de la colonne varie suivant le type de sol qui l'entoure, en général dans un intervalle compris entre 60cm et 1m.

FIGURE 1.1 – Technique de mise en place de colonnes ballastées *(sources : sites internet Franki Geotechnics et Keller Group).*

On répète alors cette opération de façon à obtenir des colonnes réparties périodiquement sur toute la zone à traiter. L'espacement entre les colonnes varie entre 1m et 6m, suivant les performances souhaitées. Cela représente une fraction volumique de renforcement comprise entre 10% et 40%.

Le module d'Young du matériau de renforcement ne dépasse pas quelques centaines de MPa. On qualifie les colonnes ballastées d'*inclusions "souples"*, par opposition à des inclusions "rigides" en béton ou en métal.

1.1.2 Renforcement par colonnes traitées en place

Une autre méthode de renforcement consiste à malaxer mécaniquement le sol en place (technique de *soil mixing*) avec un matériau d'apport, appelé *liant*. Ce liant peut être aussi bien de la chaux, du ciment ou un mélange de ces deux composants. Lorsque cette opération est réalisée sous forme de cylindres à base circulaire, on parle de colonnes traitées en place (*lime column* ou *lime-cement column*) [Broms, 1982, Cartier *et al.*, 1986, Broms, 2000]. De la même façon que pour les colonnes ballastées, la technique consiste à déstructurer le sol en place dans une phase de descente de l'outil, et à le mélanger avec le liant lors de la phase de remontée.

L'ajout d'un liant hydraulique permet d'obtenir une colonne de renforcement dont les performances de résistance sont accrues. Les zones traitées ont alors une cohésion plus importante que celle du sol en place (jusqu'à 20 fois) et, suivant la composition du liant, un angle de frottement interne soit faible, soit non négligeable (jusqu'à une trentaine de degrés) [Okyay et Dias, 2010]. Le module d'Young de ces colonnes traitées varie entre une dizaine de MPa et quelques GPa. On les qualifie également d'*inclusions "souples"*.

Classiquement, les diamètres de ces colonnes, réparties généralement de façon périodique, sont de l'ordre de 50cm. Avec une répartition tous les 1 à 5m, cela représente une proportion volumique de renforcement comprise entre 5% et 20%. La profondeur de traitement peut atteindre la trentaine de mètres avec les machines usuelles.

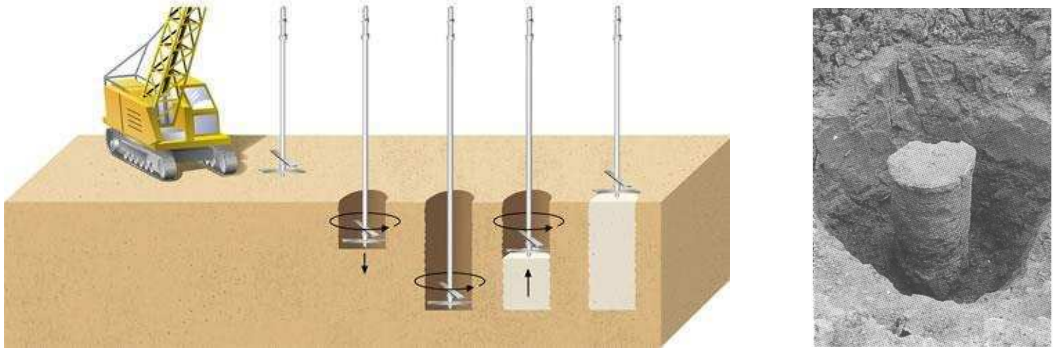


FIGURE 1.2 – Technique de mise en œuvre de colonnes traitées en place *(sources : site internet Purdue University et [Magnan et Pilot, 2012])*.

Une technique légèrement différente, appelée *jet grouting*, consiste à effectuer le malaxage sous forme de jets de liant sous pression. Cette dernière permet d'obtenir des colonnes d'environ 1.75m de diamètre sur une profondeur pouvant atteindre 70m.

1.1.3 Une nouvelle technique en développement : le *Trenchmix*

Une technique émergente depuis une dizaine d'années, appelée *Trenchmix*, consiste à utiliser le principe de *soil mixing*, mais en effectuant des renforcements sous forme de tranchées [Corneille et Ré, 2008]. Ces tranchées peuvent être toutes parallèles à un même plan vertical (*tranchées simples*) ou réparties suivant deux plans verticaux orthogonaux (*tranchées croisées*) [Jeanty *et al.*, 2013].

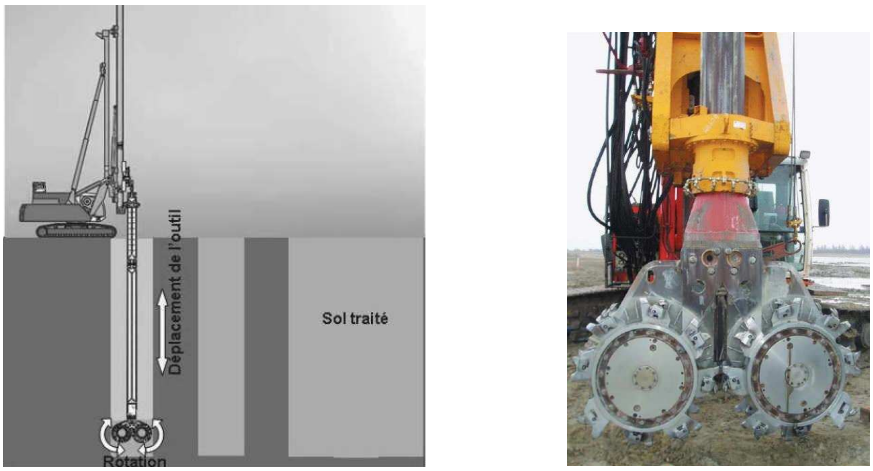


FIGURE 1.3 – Mise en œuvre de tranchées traitées en place par haveuse *(sources : [Jeanty* et al.*, 2013] et site internet Solétanche Bachy)*.

Les liants malaxés avec le sol en place sont les mêmes que pour les colonnes traitées en place. Il s'agit donc, soit de chaux, soit de ciment, soit d'un mélange chaux/ciment. Cette nouvelle technique de renforcement est donc parfois qualifiée de renforcement par *inclusions "souples"* ou *"semi-rigides"*, selon le type de liant retenu.

Une première méthode de construction consiste à utiliser une *haveuse*. Cette machine, constituée de deux outils cylindriques d'une largeur d'environ 50cm, permet de creuser des trous de section rectangulaire pendant une descente verticale. Elle malaxe ensuite le sol avec le liant lors de sa remontée. En effectuant les trous de façon contigüe (voir Figure 1.3), on parvient à constuire des tranchées, d'une épaisseur de 50cm sur quelques dizaines de mètres en profondeur.

La seconde technique pour construire ces tranchées est d'utiliser une machine appelée *trancheuse*, qui une fois enfoncée dans le sol, permet de le traiter tout en déplaçant la machine horizontalement (voir Figure 1.4). Ainsi, on peut effectuer la construction d'une tranchée de plusieurs mètres de longueur sans avoir à ressortir la trancheuse. L'outil en lui-même est constitué d'une chaîne qui malaxe le sol en tournant et d'une buse d'injection permettant d'ajouter du liant au fur et à mesure de l'avancée de la machine. L'épaisseur des tranchées creusées est comprise entre 30cm et 50cm et leur profondeur est limitée à une dizaine de mètres.

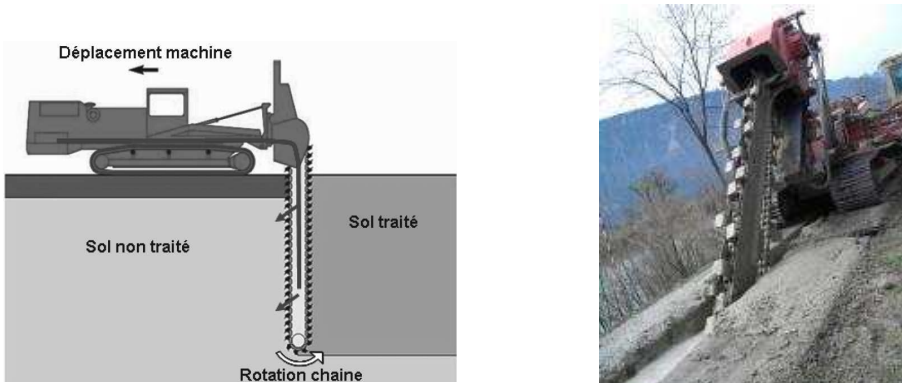


FIGURE 1.4 – Mise en œuvre de tranchées traitées en place par trancheuse *(sources : [Jeanty* et al.*, 2013] et site internet Stucky).*

Lorsqu'on réalise des tranchées croisées, pour les deux techniques de mise en œuvre, on espace les séries de tranchées d'une distance comprise entre 4m et 6m. Cela représente donc, suivant l'épaisseur de chaque tranchée, une fraction volumique de renforcement comprise entre 5% et 20%.

1.1.4 Synthèse des techniques de renforcement de sol étudiées

En conclusion de ce rapide inventaire des techniques de renforcement des sols, on peut répartir les types de sols renforcés en trois catégories. La première correspond à un renforcement par un matériau purement frottant : les colonnes ballastées.

La deuxième catégorie est celle d'un renforcement dont le matériau peut être considéré comme purement cohérent (traitement à la chaux).

Le dernier cas est celui d'un renforcement par un matériau cohérent dont l'angle de frottement n'est pas négligeable (mélange ciment/chaux).

Comme on a pu le voir, les deux derniers types de matériau de renforcement peuvent être introduits dans le sol en place sous la forme de colonnes ou de tranchées (simples ou croisées).

Les fourchettes des caractéristiques mécaniques des matériaux de renforcement sont données dans le Tableau 1.1, en fonction de la catégorie concernée. On y fait figurer également les fractions volumiques dans lesquelles ces matériaux sont usuellement introduits. Les propriétés mécaniques d'un sol argileux y sont rappelées.

	Sol argileux	Colonnes ballastées	Colonnes et tranchées croisées traitées par liant	
Module d'Young (en MPa)	1 à 50	10 à 200	10 à 200	200 à 2000
Angle de frottement	Négligeable	30° à 45°	Négligeable	10° à 25°
Cohésion (en kPa)	5 à 100	Négligeable	20 à 100	50 à 200
Fraction volumique de renforcement	–	15% à 40%	5% à 20%	

Table 1.1 – Résumé des caractéristiques des techniques de renforcement de sol étudiées

1.2 Les méthodes de dimensionnement usuelles

Nous avons pu voir que l'utilisation des renforcements des sols argileux est motivé par trois grands types de risque. Nous allons faire un rapide inventaire des méthodes de dimensionnement analytiques usuelles vis-à-vis de deux d'entre eux : le tassement excessif et la rupture de l'ouvrage, qui se réfèrent respectivement à l'Etat Limite de Service (ELS) et à l'Etat Limite Ultime (ELU) de l'ouvrage.

1.2.1 Dimensionnement vis-à-vis du tassement

Les dimensionnements analytiques relatifs à la réduction du tassement de massifs de sol renforcés par colonnes (ballastées ou traitées en place) reposent en majorité sur une approche en déformation. Pour les auteurs traitant le problème de cette façon, il s'agit de déterminer comment se fait le report des charges sollicitant l'ouvrage entre le sol et les inclusions de renforcement. L'objectif est d'évaluer les contraintes se propageant dans les colonnes et dans le sol en place, puis en utilisant les caractéristiques élastiques de l'un et l'autre des constituants, de calculer le tassement élastique de l'ouvrage.

Ce type de méthode a été développé il y une quarantaine d'années avec l'émergence des colonnes ballastées [Priebe, 1976, Balaam et Booker, 1981, Soyez, 1985]. On retrouve l'application de cette méthode, basée sur le modèle de *cellule élémentaire*, pour les renforcements par colonnes en général [Chow, 1996, Poorooshasb et Meyerhof, 1997]. Elle permet d'évaluer le tassement élastique de l'ouvrage, mais a l'inconvénient majeur de ne donner aucun statut aux résultats obtenus. En effet, les auteurs effectuent le report des charges, sans spécifier si la répartition choisie conduit à une minoration ou une majoration du tassement de l'ouvrage. De plus, le récent développement des techniques de renforcement par tranchées croisées fait que le problème du tassement n'a pas encore été traité spécifiquement pour cette configuration particulière.

1.2.2 Dimensionnement à la rupture des ouvrages

Les études analytiques de stabilité des ouvrages renforcés par colonnes reposent souvent sur l'utilisation de *cercles de glissement*, qui sont des mécanismes de ruine "par bloc" dans lesquels la ligne de rupture est circulaire (voir Figure 1.5).

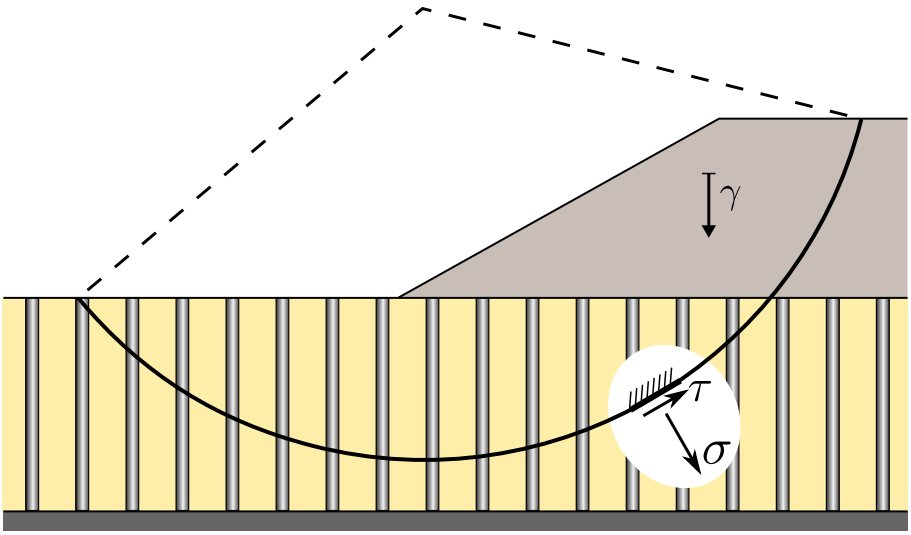


FIGURE 1.5 – Exemple de mécanisme de ruine utilisé pour analyser la stabilité d'ouvrages en sols renforcés par colonnes.

Le milieu hétérogène tridimensionnel que représente le sol renforcé par colonnes est alors modélisé comme un milieu 2D. On effectue l'équilibre en moment du bloc en rotation, sous l'effet de son poids propre et de l'action des contraintes s'exerçant le long de la ligne de rupture, notées ici σ pour la composante normale du vecteur contrainte et τ pour la composante tangentielle. Ces contraintes tiennent compte de la résistance des matériaux traversés par la ligne de rupture. La résultante en moment dépend donc des contraintes de cisaillement et notamment de la valeur maximale $\tau_{\max}$ admissible par le sol en place ou les colonnes ballastées.

Pour ne pas avoir à différencier les différents matériaux traversés par la ligne de rupture, des auteurs ont proposé de représenter la résistance du sol renforcé comme dépendant de *caractéristiques moyennes* [Priebe, 1976, DiMaggio, 1978, Christoulas *et al.*, 1997]. Ils

définissent ainsi la résistance mobilisable au cisaillement moyenne par :

$$\overline{\tau}_{\max} = \sup\left\{\tau \text{ sous la condition } |\tau| \leq \overline{C} - \sigma\overline{\tan\varphi}\right\}$$

où la cohésion moyenne $\overline{C}$ et l'angle de frottement $\overline{\varphi}$ sont évalués à partir des caractérisques de résistance du sol en place (C_s et φ_s) et du matériau de renforcement (C_r et φ_r) par les formules suivantes :

$$\overline{C} = (1-m)C_s + mC_r$$
$$\overline{\tan\varphi} = (1-m)\tan\varphi_s + m\tan\varphi_r$$

Le facteur de pondération m est alors, de façon générale, choisi comme la fraction volumique de renforcement. Dans les méthodes les plus élaborées, ce facteur est tabulé en fonction de la manière dont les contraintes se répartissent dans les constituants du sol renforcé [Priebe, 1995]. Toutefois, le fait d'utiliser un raisonnement à partir d'un *critère moyen* ne permet pas de donner un statut rigoureux aux évaluations qui en découlent pour les capacités de résistance des ouvrages renforcés. En effet, rien n'indique que ces caractéristiques moyennes représentent bien le critère de résistance du sol renforcé à l'échelle macroscopique.

1.2.3 Limites des méthodes classiques de dimensionnement à la rupture (d'après [de Buhan, 1986])

De façon plus générale, une méthode rigoureuse pour dimensionner les ouvrages consiste à se placer dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture [Salençon, 1983]. L'*approche cinématique* qui en découle, basée sur la considération de champs de vitesse virtuelle (ou "mécanisme de rupture"), permet d'évaluer la résistance d'un ouvrage. Parmi ces champs de vitesse, on peut considérer par exemple des blocs animés de mouvements de corps rigides, séparés par des surfaces de discontinuités de vitesse (comme sur la Figure 1.5).

Se plaçant dans cette catégorie de mécanismes de rupture, on met en lumière le fait que les ouvrages renforcés par colonnes posent un problème de fond du point de vue de leur analyse par le calcul à la rupture [de Buhan, 1986]. En effet, l'une des notions importantes relative à la mise en œuvre de cette approche cinématique est la *puissance résistante maximale*, définie comme suit pour un mécanisme ne présentant que des surfaces de discontinuité de vitesse :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{\Sigma} \pi(\underline{n}, [\underline{U}])\,\mathrm{d}\Sigma$$

où $[\underline{U}]$ est le saut de vitesse le long de la surface de discontinuité Σ de normale $\underline{n}$. Pour que la stabilité de l'ouvrage soit alors assurée, il est nécessaire que la puissance des efforts extérieurs développée dans le champ de vitesse considérée soit inférieure ou égale à cette puissance résistance maximale. La *fonction d'appui* π prend une expression différente selon que la surface de discontinuité traverse le sol en place ou la colonne.

- Dans le sol en place, de type argile molle dont l'angle de frottement peut être négligé, le saut de vitesse doit être *tangentiel à la surface de discontinuité*, ce qui correspond à l'expression suivante de la fonction d'appui [Salençon, 2013] :

$$\pi^s(\underline{n}, [\underline{U}]) = \begin{cases} C_s |\, [\underline{U}] \,| & \text{si } [\underline{U}] \cdot \underline{n} = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

- Dans la colonne, le matériau de renforcement étant à la fois cohérent et frottant, la fonction d'appui s'écrit [Salençon, 2013] :

$$\pi^r(\underline{n}, [\underline{U}]) = \begin{cases} C_r \cot \varphi_r \, [\underline{U}] \cdot \underline{n} & \text{si } [\underline{U}] \cdot \underline{n} \geq |\, [\underline{U}] \,| \sin \varphi_r \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

  ce qui signifie que le saut de vitesse doit être *au moins incliné d'un angle φ_r par rapport à la surface de discontinuité.*

Or, en considérant le *caractère tridimensionnel* des colonnes, il n'est pas possible de trouver une surface de rupture respectant simultanément les conditions dites de *pertinence* liées à ces deux types de matériaux. Comme indiqué sur la Figure 1.6, il faudrait en effet que le saut de vitesse à la traversée de cette surface de discontinuité soit à la fois tangentiel dans le sol en place et incliné d'un angle supérieur à φ_r dans les colonnes. Ce "verrouillage théorique" est toutefois levé lorsque les matériaux en présence sont tous deux purement cohérents. Dans ce cas, l'angle de frottement du matériau de renforcement étant nul, la discontinuité de vitesse doit être tangentielle à la surface de rupture au travers des deux constituants.

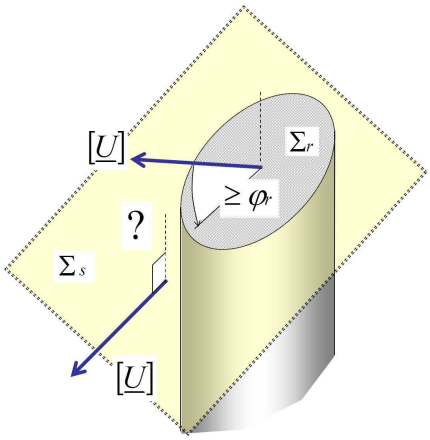


FIGURE 1.6 – Discontinuité de vitesse au travers d'une surface de rupture dans le cas des sols renforcés par colonnes ballastées *[de Buhan, 1986]*.

Les méthodes analytiques classiques du calcul à la rupture, performantes pour les milieux homogènes, ne peuvent donc pas donner de résultats satisfaisants pour des problèmes de stabilité d'ouvrages en milieux cohérents renforcés par des matériaux frottants (stabilité de remblai, capacité portante, ...).

1.3 Caractérisation mécanique des sols renforcés : une approche par homogénéisation

Comme nous venons de le souligner, les méthodes usuelles pour dimensionner les ouvrages en sols renforcés ne permettent pas d'avoir un cadre théorique satisfaisant, aussi bien pour les prévisions du tassement, que pour les évaluations des capacités de résistance. Il a donc fallu trouver des alternatives à ces méthodes pour pouvoir effectuer un dimensionnement rigoureux de ce type d'ouvrages. L'une d'elles consiste à modéliser entièrement le milieu hétérogène tridimensionnel et à utiliser des méthodes de type éléments finis (en élasticité ou en élastoplasticité) pour résoudre le problème complet.

Outre le fait que le modèle numérique à construire est adapté à une configuration de renforcement particulière (tout changement d'une telle configuration implique une reconstruction du maillage 3D), on s'aperçoit que pour certaines configurations de milieu renforcé, les résolutions tridimensionnelles directes sont très difficiles, voire impossibles. De nombreux auteurs ont donc cherché à définir des modèles numériques simplifiés, permettant de réduire les dimensions du problème, en partie répertoriés par [Huybrechts et Denies, 2013], mais qui ne fournissent pas de statut théorique à la solution.

L'alternative qui nous apparaît la plus intéressante est de recourrir à la *méthode d'homogénéisation* des sols renforcés, vus comme des milieux hétérogènes périodiques. Cette méthode est basée sur le concept intuitif de remplacement du milieu hétérogène initial par un milieu *homogène équivalent*. Elle donne un cadre théorique aux résultats obtenus, à la fois en élasticité [Duvaut, 1976] et en calcul à la rupture [de Buhan, 1986, Suquet, 1987]. Cette démarche, qui est le fil conducteur de ce manuscrit, a déjà été utilisée dans la littérature dans le domaine des sols renforcés [de Buhan *et al.*, 1989, di Prisco et Nova, 1993, Abdi *et al.*, 1994, Michalowski et Zhao, 1995].

1.3.1 Approche par une méthode d'homogénéisation du tassement des sols renforcés

Conscients que les méthodes de dimensionnements usuelles vis-à-vis du tassement des ouvrages renforcés, n'étaient pas satisfaisantes d'un point de vue théorique, des auteurs ont appliqué la méthode d'homogénéisation pour traiter le problème. On peut notamment retrouver des modèles simplifiés du comportement élastique des sols renforcés, obtenus à partir du principe de l'homogénéisation [Wang *et al.*, 2002].

En utilisant des approches basées sur les principes de minimum énergétiques, il est alors possible de déterminer des majorations ou des minorations des tassements réels. Le cas d'une semelle de fondation reposant sur un sol renforcé par colonnes a été étudié, pour une semelle rectangulaire [Bouassida *et al.*, 2003] ou pour une semelle circulaire [Ben Saïd *et al.*, 2004].

Toujours en se référant au cadre de l'homogénéisation périodique, des auteurs ont pris en compte le caractère élastoplastique des matériaux constituant les sols renforcés. Ainsi, en effectuant des calculs analytiques [Abdelkrim et de Buhan, 2007] ou en recourrant à une procédure numérique [Lee et Pande, 1998, Hassen *et al.*, 2010], ils sont parvenus à

évaluer le tassement d'une semelle de fondation sur un sol renforcé par colonnes.

Toutefois, du fait de son utilisation récente, la configuration de renforcement des sols par tranchées croisées n'a pas encore fait l'objet de ce genre d'étude. En particulier, le tassement d'un ouvrage renforcé selon une telle configuration d'inclusion n'a jamais été évalué. De plus, la réponse élastique d'un ouvrage, renforcé par colonnes ou tranchées croisées, sous un chargement autre que vertical n'a pas été étudiée dans le cas de renforcement par inclusions "souples" ou "semi-rigides".

1.3.2 Approche par une méthode d'homogénéisation du comportement à la rupture des sols renforcés

En ce qui concerne les sols renforcés par colonnes purement cohérentes, l'étude relative à leur résistance a été menée à une échelle locale et à l'échelle de l'ouvrage, toujours en se basant sur la méthode d'homogénéisation. Ainsi, le critère de résistance homogénéisé de ces géocomposites a été évalué, de façon rigoureuse, dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture [de Buhan, 1986, de Buhan et Taliercio, 1991, Jellali *et al.*, 2005] ou par des calculs élastoplastiques [Dvorak et Bahei-El-Din, 1979, Taliercio, 2005].

Profitant du fait que le "verrouillage théorique" à l'échelle de l'ouvrage, mis en lumière dans la section précédente, ne se présente pas dans le cas d'un matériau de renforcement purement cohérent, des auteurs ont ensuite cherché à évaluer les capacités de résistance des sols renforcés par colonnes. Pour des problèmes de capacité portante [Bouassida et Jellali, 2002, Jellali *et al.*, 2005] ou des problèmes de talus reposant sur un sol renforcé [Jellali *et al.*, 2011], l'utilisation de mécanismes de rupture permet d'encadrer le facteur de stabilité extême de l'ouvrage.

Le cas des sols renforcés par colonnes ballastées, bien que plus complexe toujours du fait du "verrouillage théorique" précédent, a également fait l'objet d'études à une échelle locale ainsi qu'à celle de l'ouvrage. Une approche par l'intérieur du critère de résistance de ce type de sols renforcés a notamment été proposée et utilisée directement dans un calcul analytique d'ouvrage [Jellali *et al.*, 2007]. En se servant de ce minorant du critère réel des colonnes ballastées, une procédure élastoplastique a été menée pour évaluer la capacité portante d'un ouvrage renforcé selon cette technique [Hassen *et al.*, 2010].

Ayant effectué cette revue de littérature relatives aux études portant sur la résistance des sols renforcés, on peut souligner deux points importants. Bien qu'étant traitable analytiquement, l'étude d'un ouvrage renforcé par colonnes purement cohérentes n'a pas été menée à la fois par une approche par l'extérieur et par l'intérieur, de façon à pouvoir encadrer la charge extrême supportable. Cela est encore plus vrai pour un renforcement par tranchées croisées purement cohérentes.

Ensuite, en raison d'une complexité théorique plus importante, le cas des sols renforcés par des matériaux frottants (cohérents ou non) n'a été que très partiellement traité dans la littérature. En particulier, l'encadrement du critère de résistance du milieu homogène équivalent n'a pas encore été défini. De surcroît, les capacités de résistance des ouvrages renforcés par colonnes ou tranchées croisées cohérentes et frottantes restent très

peu évaluées dans le cadre du calcul à la rupture.

1.4 Plan du manuscrit

On fait donc le constat que les méthodes de dimensionnement usuelles ne fournissent pas de cadre théorique clair, que ce soit pour justifier les performances des ouvrages en sols renforcés vis-à-vis du tassement, de la résistance ou, comme on le verra plus tard, du risque de liquéfaction. La méthode d'homogénéisation apparaît alors comme une alternative intéressante qui permet d'aborder ces problèmes de façon rigoureuse. Néanmoins, comme on a pu le voir, certaines configurations de renforcement (géométriques ou matérielles) restent relativement peu étudiées, en élasticité comme en matière de résistance.

Pour tenter de compléter les études des sols renforcés par des matériaux cohérents et/ou frottants, le présent manuscrit se décompose en trois parties. La première traite du comportement élastique de ces sols. La seconde porte sur des études analytiques des sols renforcés en se fondant sur la théorie du calcul à la rupture. Enfin la troisième partie, reposant sur des aspects numériques adaptés, complète l'étude des renforcements de sols par inclusions, toujours en calcul à la rupture. La répartition des chapitres est la suivante :

1.4.1 Comportement élastique des sols renforcés

Le chapitre 2 rappelle le cadre théorique de l'*homogénéisation périodique* en élasticité. Après avoir notamment introduit le tenseur d'élasticité *macroscopique* d'un sol renforcé, les performances des différentes configurations géométriques de renforcement sont investiguées à l'échelle de la *cellule de base*. Que ce soit en résolvant directement le *problème auxiliaire* d'élasticité ou en utilisant les principes de minimum énergétiques, les composantes de ce tenseur sont évaluées analytiquement. En effectuant ensuite des calculs numériques, une comparaison des configurations de renforcement est enfin menée, conduisant à souligner le caractère anisotrope du comportement élastique de ces composites, à une échelle locale.

L'utilisation de ces renforcements de sols est ensuite analysée à l'échelle de l'ouvrage dans le chapitre 3. Tout d'abord, on s'intéresse au comportement mécanique des sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées vis-à-vis du risque de liquéfaction. Des différences par rapport à la méthode de dimensionnement usuelle et entre les différentes configurations sont ainsi mises en lumière. Ensuite, toujours en procédant à une démarche d'homogénéisation des sols renforcés, le comportement élastique des ouvrages est étudié de façon numérique. En s'appuyant sur un exemple réaliste, la comparaison entre renforcement par colonnes ou tranchées croisées est effectuée, mettant clairement en évidence les avantages de cette dernière configuration.

1.4.2 Calcul à la rupture des sols renforcés de type cohérent/cohérent

Le chapitre 4 met en place le principe d'homogénéisation en *calcul à la rupture*. La notion importante de *domaine de résistance macroscopique* des sols renforcés est

présentée. Les approches statique et cinématique du calcul à la rupture sont ensuite effectuées sur le problème auxiliaire associé aux différentes configurations géométriques de renforcement. Les raisonnements analytiques portent sur des sols renforcés par des matériaux purement cohérents. En particulier, une comparaison des critères de résistance macroscopiques est menée, selon que le sol soit renforcé par colonnes ou par tranchées croisées.

Les sols renforcés par un matériau purement cohérent sont ensuite étudiés à l'échelle de l'ouvrage dans le chapitre 5. La définition du *domaine des chargements potentiellement supportables* par l'ouvrage homogénéisé y est donnée. En utilisant les critères de résistance obtenus au chapitre 4, une approche cinématique analytique est proposée pour le problème de capacité portante sous chargement incliné dans le cas des sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées purement cohérentes.

1.4.3 Approche numérique du calcul à la rupture des sols renforcés

Dressant le constat que les études analytiques demeurent insuffisantes pour traiter le cas des sols renforcés par des matériaux cohérents et frottants, nous proposons dans le chapitre 6 une formulation numérique du problème auxiliaire de calcul à la rupture. Les approches statique et cinématique y sont présentées comme des problèmes d'optimisation, prenant rigoureusement en compte les critères de résistance locaux des sols renforcés. Après avoir formulé ces approches dans le cas tridimensionnel, une simplification adaptée aux sols renforcés par inclusions linéaires est proposée, de façon à alléger les temps de calcul des simulations numériques.

Ces approches statique et cinématique numériques sont ensuite utilisées dans le chapitre 7 pour déterminer un encadrement des domaines de résistance macroscopiques des sols renforcés par un matériau cohérent et frottant. La configuration de renforcement par colonnes et celle par tranchées croisées sont étudiées. On analyse notamment les écarts d'encadrement du critère macroscopique relatif à l'une ou l'autre des techniques de renforcement. Enfin, une comparaison du domaine de résistance macroscopique des sols renforcés est proposée en fonction de la géométrie de l'inclusion.

Pour compléter l'étude des sols renforcés par un matériau cohérent et/ou frottant, le chapitre 8 propose enfin deux exemples d'application à l'échelle de l'ouvrage. Tout d'abord, une explication est apportée sur la façon dont les domaines de résistance macroscopiques des différentes configurations de sols renforcés peuvent être utilisés pour de tels calculs. Les approches statique et cinématique du calcul à la rupture sont ensuite mises en œuvre pour déterminer un encadrement de la charge extrême pour un problème de capacité portante sous chargement incliné et un problème de stabilité de remblai reposant sur un sol renforcé par l'une ou l'autre des techniques de renforcement.

Le Tableau 1.2 récapitule la répartition des différents développements de ce manuscrit.

	Élasticité	Calcul à la rupture		Nature du matériau de renforcement		
		analytique	numérique	purement cohérent	cohérent et frottant	purement frottant
Chap. 2	**(C)**	–	–	–	–	–
Chap. 3	**(O)**	–	–	–	–	–
Chap. 4	–	**(C)**		★		
Chap. 5	–	**(O)**		★		
Chap. 6	–		**(C)**			
Chap. 7	–	**(C)**	**(C)**		★	
Chap. 8	–		**(O)**	★	★	★
Ann. A	**(C)**	–	–	–	–	–
Ann. B	–		**(C)**	★		
Ann. C	–	**(C)**		★	★	★
Ann. D	–		**(O)**	★	★	★

Table 1.2 – Récapitulatif des points abordés par chapitre (développement à l'échelle : **(C)** de la cellule de base, **(O)** de l'ouvrage)

* *

*

Comportement élastique des sols renforcés

Chapitre 2

Caractérisation du comportement élastique macroscopique des sols renforcés

Résumé : *L'objet de ce chapitre est d'analyser le comportement élastique des sols renforcés par simples tranchées, colonnes ou tranchées croisées. Après avoir rappelé la méthode d'homogénéisation périodique qui sera adoptée pour l'ensemble du manuscrit, une définition du tenseur de rigidité macroscopique est donnée, basée sur la notion de problème auxiliaire et sa résolution. Deux méthodes usuelles d'évaluation de ses coefficients sont ensuite expliquées (approches variationnelles et numérique). Pour finir, une comparaison des différents modules d'élasticité macroscopiques des sols renforcés est menée, qui met en lumière l'attrait de la configuration de renforcement par tranchées croisées.*

Sommaire

2.1 Principe de la méthode d'homogénéisation périodique 20
2.1.1 Du problème initial au problème homogène associé 20
2.1.2 Comportement élastique macroscopique : résolution du problème auxiliaire . 21
2.1.3 Un modèle simplifié de sol renforcé : le matériau multicouche 23
2.2 Évaluation de caractéristiques élastiques par des approches variationnelles 27
2.2.1 Principes de minimum énergétiques 27
2.2.2 Encadrement du module de cisaillement longitudinal des sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées 28
2.3 Détermination de caractéristiques élastiques par des méthodes numériques 35
2.3.1 Mise en œuvre des calculs par éléments finis 35
2.3.2 Comparaisons avec les résultats analytiques 37
2.4 Efficacité comparée des différentes techniques de renforcement des sols 39
2.4.1 Comparaison des modules d'Young 40
2.4.2 Comparaison des modules de cisaillement 41

2.1 Principe de la méthode d'homogénéisation périodique

2.1.1 Du problème initial au problème homogène associé

De par leur processus de construction, les sols renforcés sont des milieux hétérogènes, dans lesquels la distribution des inclusions (colonnes, tranchées croisées, ...) est *périodique*. De tels matériaux composite sont donc l'assemblage de motifs élémentaires identiques. La première étape de l'homogénéisation périodique consiste à identifier ce motif, appelé *cellule de base*, qui se répète dans la configuration de sol renforcé étudiée.

D'une façon générale, la méthode d'homogénéisation que nous allons utiliser dans tout le manuscrit consiste à substituer au *milieu hétérogène périodique* un *milieu homogène équivalent* dont les propriétés sont dites *macroscopiques*. On passe alors d'un *problème initial* complexe à un *problème homogène associé* (voir Figure 2.1), dont les caractéristiques mécaniques ont été clairement identifiées.

Plus précisément, en se plaçant dans le cadre de l'élasticité linéaire, le sol initialement en place et le renforcement voient leur comportement caractérisé par des tenseurs de rigidité, notés respectivement $\mathbf{c}^s$ et $\mathbf{c}^r$. L'objectif premier de la méthode est de déduire, à partir de ces tenseurs et des caractéristiques géométriques de la cellule de base, l'expression du tenseur de rigidité macroscopique $\mathbf{C}^{hom}$ du milieu homogène équivalent.

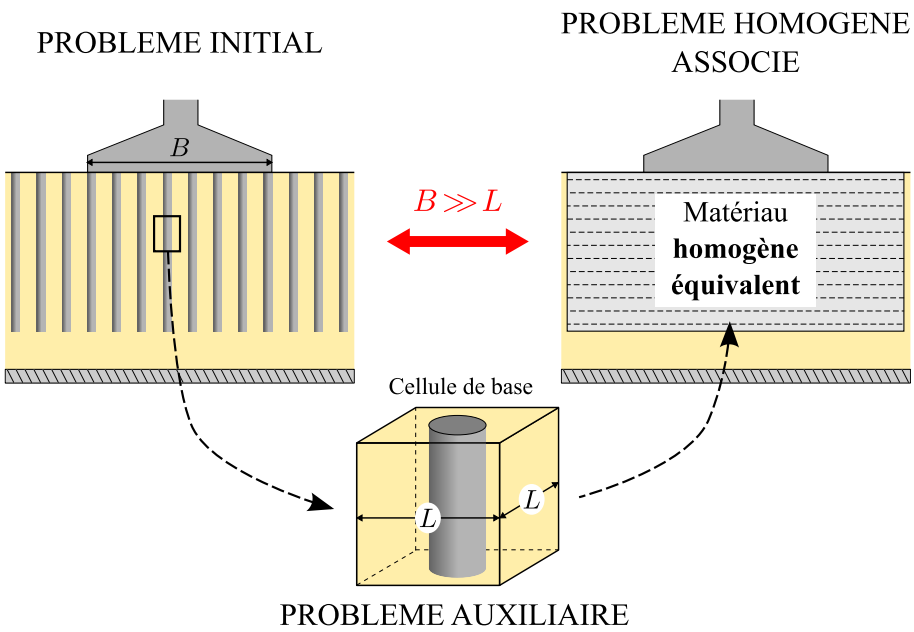


FIGURE 2.1 – Principe de la méthode d'homogénéisation.

La théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques élastiques a été developpée il y a plus de 30 ans, notamment par [Duvaut, 1976], [Bensoussan *et al.*, 1978] ou encore [Sánchez-Palencia, 1980]. Les raisonnements effectués s'appuient sur la technique des développements asymptotiques. Le résultat essentiel est que la détermination du comportement élastique macroscopique du matériau homogène équivalent repose sur la résolution

d'un problème d'élasticité, nommé *problème auxiliaire*, défini sur la cellule de base du sol renforcé de façon périodique, considérée alors comme une structure à part entière. Cette théorie prédit une bonne adéquation entre la solution du problème initial et celle du problème homogène associé, si la taille caractéristique du problème (B sur la Figure 2.1) est suffisamment grande devant la taille caractéristique de la cellule de base (notée L dans notre exemple).

2.1.2 Comportement élastique macroscopique : résolution du problème auxiliaire

2.1.2.1 Mode de chargement de la cellule de base

Afin de définir le chargement auquel est soumise la cellule de base, notée $\mathcal{C}$, on introduit tout d'abord deux notions importantes : l'*admissibilité statique* (SA) d'un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et l'*admissibilité cinématique* (CA) d'un champ de déplacement $\underline{\xi}$.

Un champ de contrainte est statiquement admissible si et seulement si :

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ SA} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = 0\,, & \forall \underline{x} \in \mathcal{C} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}^+) \cdot \underline{n}(\underline{x}^+) = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}^-) \cdot \underline{n}(\underline{x}^-)\,, & \forall \underline{x}^\pm \in \partial\mathcal{C} \end{cases} \tag{2.1}$$

La première relation est l'équation d'équilibre de la cellule de base en l'absence de forces volumiques. La seconde relation, appelée *condition d'antipériodicité*, exprime le fait que sur les bords $\partial\mathcal{C}$ de la cellule de base, les vecteurs contraintes en deux points $\underline{x}^+$ et $\underline{x}^-$, en vis-à-vis sur deux faces opposées, sont opposés (voir Figure 2.2).

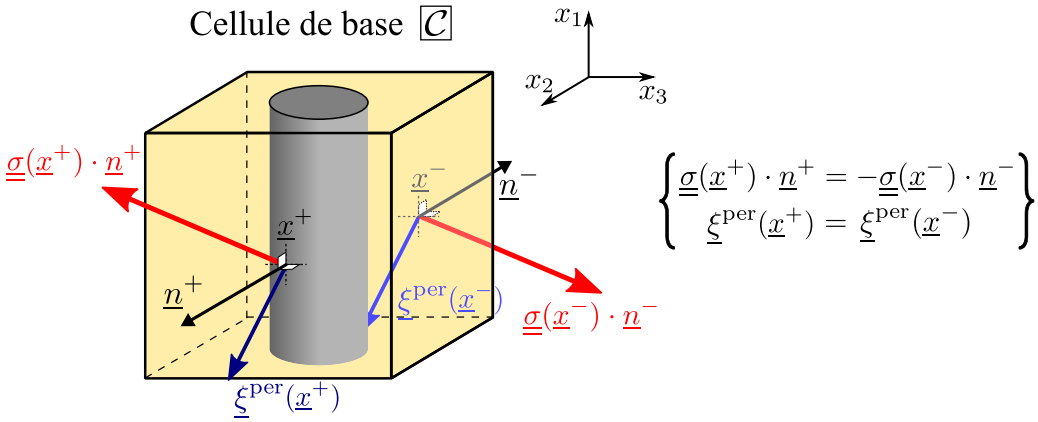


FIGURE 2.2 – Conditions d'antipériodicité du vecteur contrainte et fluctuation périodique du champ de déplacement.

L'admissibilité cinématique d'un champ de déplacement se traduit par :

$$\underline{\xi} \text{ CA} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{x} + \underline{\xi}^{\text{per}}(\underline{x})\,, & \forall \underline{x} \in \mathcal{C} \\ \underline{\xi}^{\text{per}}(\underline{x}^+) = \underline{\xi}^{\text{per}}(\underline{x}^-)\,, & \forall \underline{x}^\pm \in \partial\mathcal{C} \end{cases} \tag{2.2}$$

Dans ces relations, le champ de déplacement est décrit comme la somme d'un champ de déformation homogène, caractérisé par son gradient $\underline{\underline{F}}$, et d'une fluctuation $\underline{\xi}^{\text{per}}$

périodique en $\underline{x}$ (voir Figure 2.2).

Le travail de déformation d'un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ dans un champ de déplacement $\underline{\xi}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\begin{cases}\forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ SA} \\ \forall \underline{\xi} \text{ CA}\end{cases}, \quad W(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi}) &= \frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathcal{C}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi}\,\mathrm{d}\mathcal{C} = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathcal{C}} \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi}^{\text{per}})\,\mathrm{d}\mathcal{C} \\ &= \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \underline{\underline{F}} + \frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathcal{C}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi}^{\text{per}}\,\mathrm{d}\mathcal{C} \\ &= \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \underline{\underline{F}} + \frac{1}{|\mathcal{C}|}\underbrace{\int_{\partial\mathcal{C}} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\xi}^{\text{per}}\,\mathrm{d}S}_{=0}\end{aligned} \tag{2.3}$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne volumique de la grandeur considérée sur le cellule de base. L'intégrale relative à $\partial\mathcal{C}$ est nulle du fait de l'antipériodicité de $(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})$ et de la périodicité de $\underline{\xi}^{\text{per}}$. On introduit au passage la définition du champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé au champ de déplacement $\underline{\xi}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi} + {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi}\right) \tag{2.4}$$

Au final, on obtient la relation suivante :

$$\begin{cases}\forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ SA} \\ \forall \underline{\xi} \text{ CA}\end{cases}, \quad \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \tag{2.5}$$

Cette relation introduit le *tenseur de contrainte macroscopique* $\underline{\underline{\Sigma}}$ et le *tenseur de déformation macroscopique* $\underline{\underline{E}}$, qui sont les moyennes sur la cellule de base des champs *microscopiques* correspondants. Le tenseur de contrainte macroscopique est associé en dualité avec le tenseur de déformation macroscopique. Cette relation, appelée parfois *Lemme de Hill généralisé*, exprime le fait que la cellule de base est soumise à *un mode de chargement* à six paramètres.

2.1.2.2 Tenseur de rigidité macroscopique

Pour résoudre le problème auxiliaire d'élasticité, dans lequel la cellule de base est soumise au mode de chargement explicité précédemment, il s'agit de trouver un champ $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement admissible et un champ $\underline{\xi}$ cinématiquement admissible, qui soient associés en tout point de $\mathcal{C}$ par la loi de comportement élastique du matériau ($\mathbf{c}^s$ pour le sol et $\mathbf{c}^r$ pour le renforcement) :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{C}_m\,, \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbf{c}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \quad (m = s, r) \tag{2.6}$$

$\mathcal{C}_s$ désignant le sous-domaine occupé par le sol et $\mathcal{C}_r$ le sous-domaine occupé par le matériau de renforcement.

Étant donné le caractère linéaire du problème traité, la contrainte macroscopique, définie précédemment comme la moyenne du champ de contrainte, est reliée linéairement à la déformation macroscopique, moyenne du champ de déformation, par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle \mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \mathbf{C}^{hom} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \tag{2.7}$$

où $\mathbf{C}^{hom}$ est le *tenseur de rigidité macroscopique*, possédant les propriétés classiques de symétries majeure et mineures.

La Figure 2.3 résume la structure du problème auxiliaire d'élasticité sur la cellule de base $\mathcal{C}$, qui conduit à la détermination du tenseur de rigidité macroscopique.

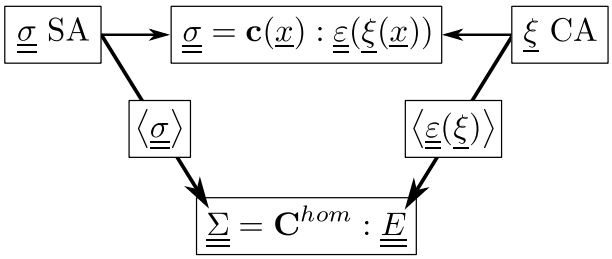


FIGURE 2.3 – Détermination du tenseur de rigidité macroscopique à partir de la résolution du problème auxilaire.

Pour les sols renforcés, compte tenu des symétries géométriques des cellules de base (présentées dans la suite de ce chapitre) et du caractère isotrope des matériaux constituant le sol et le renforcement, le tenseur de rigidité macroscopique ne fait intervenir que 9 composantes indépendantes (matériaux dits *isotropes transverses* ou *orthotropes*). Ainsi, en adoptant la notation de Voigt, on cherche de façon générale $\mathbf{C}^{hom}$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} \\ \Sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C^{hom}_{1111} & C^{hom}_{1122} & C^{hom}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C^{hom}_{2222} & C^{hom}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C^{hom}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C^{hom}_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & C^{hom}_{3131} & 0 \\ & & & & & C^{hom}_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

2.1.3 Un modèle simplifié de sol renforcé : le matériau multicouche

2.1.3.1 Mise en place du problème

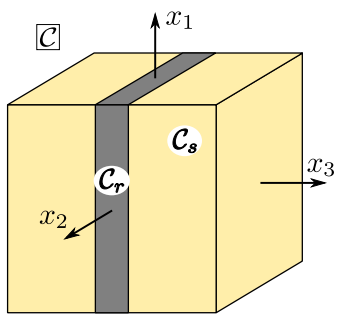


FIGURE 2.4 – Cellule de base d'un matériau multicouche.

Afin de mettre en œuvre la méthode de détermination du tenseur de rigidité macroscopique à partir de la résolution du problème auxiliaire d'élasticité, on s'intéresse

tout d'abord à un modèle simplifié de sol renforcé : le matériau multicouche. Pour un tel milieu composite, il existe une solution analytique exacte du problème auxiliaire d'élasticité.

Cette configuration géométrique correspond par exemple au cas d'un sol renforcé par simples tranchées disposées périodiquement et parallèles au plan formé par les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ du repère. La cellule de base $\mathcal{C}$ est représentée sur la Figure 2.4. Le matériau de renforcement est élastique linéaire isotrope, ayant pour coefficients de Lamé G_r et λ_r, et est introduit selon une fraction volumique η. η, également appelé *facteur de substitution*, est défini comme le rapport entre le volume occupé par le renforcement, noté $|\mathcal{C}_r|$, et le volume total de la cellule de base, noté $|\mathcal{C}|$. Le sol a pour caractéristiques élastiques G_s et λ_s.

En remarquant que les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ jouent des rôles totalement interchangeables, on peut simplifier la forme générale de $\mathbf{C}^{hom}$, donnée par (2.8), en utilisant le fait que :

$$C^{hom}_{1111} = C^{hom}_{2222}\,;\; C^{hom}_{1133} = C^{hom}_{2233} \text{ et } C^{hom}_{3131} = C^{hom}_{2323} \tag{2.9}$$

Il reste donc 6 composantes indépendantes (matériaux dits *quadratiques*) à déterminer en résolvant le problème auxiliaire pour obtenir le tenseur de rigidité macroscopique complet.

2.1.3.2 Explicitation de la solution du problème auxiliaire

Comme le suggère la Figure 2.3, on se donne un champ de déplacement cinématiquement admissible, et on cherche à déterminer un champ de contrainte qui lui est associé par la loi de comportement élastique des matériaux, de sorte que l'on puisse ensuite relier la moyenne de chacune de leur composante. Ainsi, on prend :

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} + \underline{\xi}^{\text{per}}(x_3) \tag{2.10}$$

où la fluctuation périodique $\underline{\xi}^{\text{per}}$ ne dépend que de x_3 ($\partial\xi_i/\partial x_1 = \partial\xi_i/\partial x_2 = 0$). La moyenne du champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé à ce champ de déplacement est alors directement égale au tenseur de déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$:

$$\left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}(x_3) \right\rangle = \underline{\underline{E}} \tag{2.11}$$

et le tenseur de déformation est de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x_3) = \underline{\underline{E}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \xi_1^{\text{per}}}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \xi_2^{\text{per}}}{\partial x_3} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \xi_1^{\text{per}}}{\partial x_3} & \frac{1}{2}\frac{\partial \xi_2^{\text{per}}}{\partial x_3} & \frac{1}{2}\frac{\partial \xi_3^{\text{per}}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Le champ de contrainte associé localement à ce champ de déformation par la loi de comportement élastique est donc de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_3) = \mathbf{c}(x_3) : \underline{\underline{\varepsilon}}(x_3) \tag{2.13}$$

de sorte que l'équation d'équilibre implique :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{i3} = \Sigma_{i3} \tag{2.14}$$

d'où

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_3) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_3) & \sigma_{12}(x_3) & \Sigma_{13} \\ \sigma_{12}(x_3) & \sigma_{22}(x_3) & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ avec } \langle \sigma_{\alpha\beta}(x_3) \rangle = \Sigma_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{2.15}$$

La condition d'antipériodicité du vecteur-contrainte sur les bords de la cellule de base est alors automatiquement assurée.

Ainsi, en prenant en compte la loi de comportement élastique dans chaque constituant, à savoir :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2G(x_3)\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda(x_3)\mathrm{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\,\mathbb{I} \text{ avec } (G(x_3), \lambda(x_3)) = (G_m, \lambda_m) \text{ si } \underline{x} \in \mathcal{C}_m \quad (m = s, r) \tag{2.16}$$

on obtient, compte tenu de (2.12) et (2.15), le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2G(x_3)E_{11} + \lambda(x_3)\left(E_{11} + E_{22} + E_{33} + \frac{\partial \xi_3^{\mathrm{per}}}{\partial x_3}\right) \\
\sigma_{22} &= 2G(x_3)E_{22} + \lambda(x_3)\left(E_{11} + E_{22} + E_{33} + \frac{\partial \xi_3^{\mathrm{per}}}{\partial x_3}\right) \\
\Sigma_{33} &= 2G(x_3)\left(E_{33} + \frac{\partial \xi_3^{\mathrm{per}}}{\partial x_3}\right) + \lambda(x_3)\left(E_{11} + E_{22} + E_{33} + \frac{\partial \xi_3^{\mathrm{per}}}{\partial x_3}\right) \\
\Sigma_{23} &= 2G(x_3)\left(E_{23} + \frac{1}{2}\frac{\partial \xi_2^{\mathrm{per}}}{\partial x_3}\right) \\
\Sigma_{13} &= 2G(x_3)\left(E_{13} + \frac{1}{2}\frac{\partial \xi_1^{\mathrm{per}}}{\partial x_3}\right) \\
\sigma_{12} &= 2G(x_3)E_{12}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

On est donc parvenu à trouver un champ de déplacement et un champ de contrainte, respectivement cinématiquement et statiquement admissibles, associés par une loi de comportement en tout point de la cellule de base. Ce sont donc les champs solutions du problème auxiliaire d'élasticité qui vont nous permettre de déterminier le tenseur d'élasticité macroscopique.

2.1.3.3 Tenseur de rigidité d'un matériau multicouche

En exprimant la moyenne des équations (2.17) et en utilisant le fait que la moyenne de $\partial \xi_i / \partial x_3$ est nulle, on identifie alors les différentes composantes du tenseur de rigidité

macroscopique :

$$C_{1111}^{hom} = \langle \lambda + 2G \rangle - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda + 2G} \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2G} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{1}{\lambda+2G} \right\rangle} \tag{2.18a}$$

$$C_{3333}^{hom} = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2G} \right\rangle^{-1} \tag{2.18b}$$

$$C_{1122}^{hom} = \langle \lambda \rangle - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda + 2G} \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2G} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{1}{\lambda+2G} \right\rangle} \tag{2.18c}$$

$$C_{1133}^{hom} = \frac{\left\langle \frac{\lambda}{\lambda+2G} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\lambda+2G} \right\rangle} \tag{2.18d}$$

$$C_{1313}^{hom} = \left\langle \frac{1}{G} \right\rangle^{-1} = C_{2323}^{hom} \tag{2.18e}$$

$$C_{1212}^{hom} = \langle G \rangle \tag{2.18f}$$

Ces résultats appellent les commentaires suivants. Lors d'une déformation de cisaillement E_{12} dans le plan du renforcement (x_1, x_2), la déformation dans le matériau multicouche est homogène et vaut E_{12}. En revanche, la contrainte qui lui est associée dépend du matériau considéré (sol ou renforcement). Cela correspond à l'hypothèse faite pour obtenir la borne dite de Voigt pour un matériau composite à deux phases [Hill, 1952], c'est-à-dire que le module de cisaillement macroscopique est égal à la moyenne du module de cisaillement des constituants du sol renforcé. Pour un matériau multicouche lorsque la sollicitation de cisaillement est dans le plan de renforcement, on parle alors de sollicitation dans le *plan fort* (voir Figure 2.5(a)).

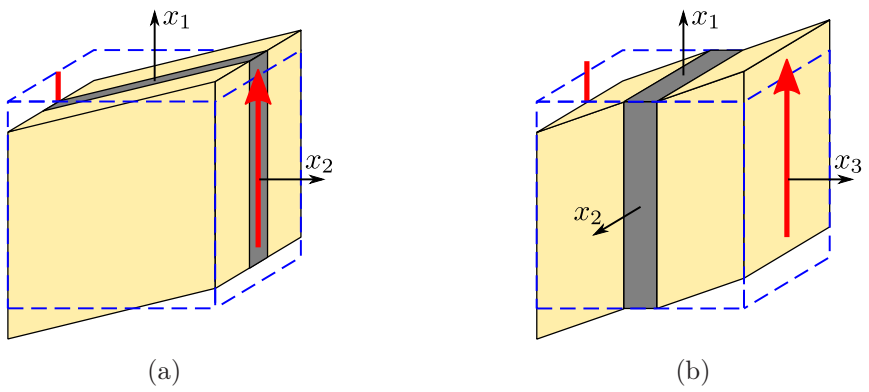


FIGURE 2.5 – Déformation d'un multicouche sollicité en cisaillement dans son "plan fort" (a) ou dans son "plan faible" (b).

À l'inverse, lorsque le cisaillement s'effectue dans un plan orthogonal au renforcement, par exemple (x_1, x_3) ou (x_2, x_3), la contrainte est constante dans l'ensemble de la cellule de base. Cette fois, c'est la déformation qui varie suivant le matériau constitutif. Le renforcement étant plus rigide, il se déforme beaucoup moins que le sol, comme représenté sur la Figure 2.5(b). Le module de cisaillement macroscopique donné par (2.18e) correspond alors à la borne de Reuss, obtenue sous l'hypothèse de contrainte

uniforme [Hill, 1952]. Pour le matériau multicouche, les plans orthogonaux au plan du renforcement sont considérés comme des *plans faibles*.

Le matériau multicouche représente un modèle de référence du comportement des sols renforcés. Comme on pourra l'observer par la suite, son comportement vis-à-vis du cisaillement suivant son plan fort ou l'un de ses plans faibles, constitue un encadrement de celui pour des configurations de renforcement par colonnes ou par tranchées croisées.

2.2 Évaluation de caractéristiques élastiques par des approches variationnelles

Hormis pour certains cas simples, comme le matériau multicouche, la détermination des coefficients du tenseur de rigidité macroscopique par résolution du problème auxiliaire d'élasticité est impossible analytiquement. Or, il est souvent utile, pour effectuer des calculs de structures par exemple, de disposer d'une expression analytique des composantes de $\mathbf{C}^{hom}$. Parmi les méthodes d'évaluation analytiques de ces coefficients, les approches variationnelles permettent d'obtenir des résultats ayant un statut connu (majorant ou minorant). Elles sont basées sur les principes de minimum énergétiques que nous allons rappeler ici.

2.2.1 Principes de minimum énergétiques

2.2.1.1 Minimum de l'énergie potentielle

On suppose que le problème auxiliaire d'élasticité à résoudre, schématisé par la Figure 2.3, est formulé à déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ imposée. Étant donné l'absence de forces de volume, l'énergie potentielle E^p du champ de déplacement solution $\underline{\xi}^{sol}$ se réduit à l'énergie élastique $W(\underline{\xi}^{sol})$ du champ de déformation et s'écrit alors :

$$E^p(\underline{\xi}^{sol}) = W(\underline{\xi}^{sol}) = \frac{1}{2}\left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{sol} : \underbrace{\mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{sol}}_{\underline{\underline{\sigma}}^{sol}} \right\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) \right\rangle}_{\underline{\underline{E}}} : \underbrace{\left\langle \underline{\underline{\sigma}} \right\rangle}_{\underline{\underline{\Sigma}}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{E}} : \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \tag{2.19}$$

et *le principe du minimum de l'énergie potentielle* s'écrit :

$$E^p(\underline{\xi}^{sol}) = \min_{\underline{\xi} \text{ CA } \underline{\underline{E}}} \left\{ E^p(\underline{\xi}) \right\} \tag{2.20}$$

On considère un champ de déplacement $\underline{\xi}'$ quelconque cinématiquement admissible avec $\underline{\underline{E}}$, au sens donné par (2.2). Pour les mêmes raisons que pour le champ solution, l'énergie potentielle de ce champ de déplacement se réduit à un terme :

$$E^p(\underline{\xi}') = W(\underline{\xi}') = \frac{1}{2}\left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' : \mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}}' \right\rangle \tag{2.21}$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}'$ est le champ de déformation associé à $\underline{\xi}'$. En appliquant la définition (2.20) et en remplaçant les différentes énergies par leur expression, l'inégalité suivante est toujours valable :

$$(\forall \underline{\underline{E}} \text{ donné}) \quad \forall \underline{\xi}' \text{ CA } \underline{\underline{E}}, \quad \underline{\underline{E}} : \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \leq \left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \mathbf{c}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \right\rangle \tag{2.22}$$

Cette dernière inégalité permet de déterminer des *majorants* performants des composantes de $\mathbf{C}^{hom}$.

2.2.1.2 Minimum de l'énergie complémentaire

Cette fois, on suppose que le problème auxiliaire d'élasticité est formulé à contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ imposée. Aucune condition en déplacement n'étant imposée sur les contours de la cellule de base, l'énergie complémentaire E^c du champ de contrainte solution $\underline{\underline{\sigma}}^{sol}$ se réduit à l'énergie élastique $W^*(\underline{\underline{\sigma}}^{sol})$ du champ de contrainte et s'écrit alors :

$$E^c(\underline{\underline{\sigma}}^{sol}) = W^*(\underline{\underline{\sigma}}^{sol}) = \frac{1}{2}\left\langle \underline{\underline{\sigma}}^{sol} : \underbrace{\mathbf{s} : \underline{\underline{\sigma}}^{sol}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{sol}} \right\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle}_{\underline{\underline{\Sigma}}} : \underbrace{\langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) \rangle}_{\underline{\underline{E}}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\Sigma}} : \mathbf{S}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} \tag{2.23}$$

où $\mathbf{S}^{hom} = (\mathbf{C}^{hom})^{-1}$ est le *tenseur de souplesse macroscopique* du sol renforcé. Le *principe du minimum de l'énergie complémentaire* s'écrit sous la forme suivante :

$$E^c(\underline{\underline{\sigma}}^{sol}) = \min_{\underline{\underline{\sigma}} \text{ SA } \underline{\underline{\Sigma}}} \left\{ E^c(\underline{\underline{\sigma}}) \right\} \tag{2.24}$$

On se donne un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}'$ quelconque statiquement admissible avec $\underline{\underline{\Sigma}}$, au sens de (2.1). L'énergie complémentaire associée à ce champ s'écrit, en l'absence de déplacement imposé sur le bord de $\mathcal{C}$:

$$E^c(\underline{\underline{\sigma}}') = W^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \frac{1}{2}\left\langle \underline{\underline{\sigma}}' : \mathbf{s} : \underline{\underline{\sigma}}' \right\rangle \tag{2.25}$$

Ainsi, du fait de (2.24), on peut écrire l'inéquation suivante :

$$(\forall \underline{\underline{\Sigma}} \text{ donné}) \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}' \text{ SA } \underline{\underline{\Sigma}}, \quad \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbf{S}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \left\langle \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) : \mathbf{s}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) \right\rangle \tag{2.26}$$

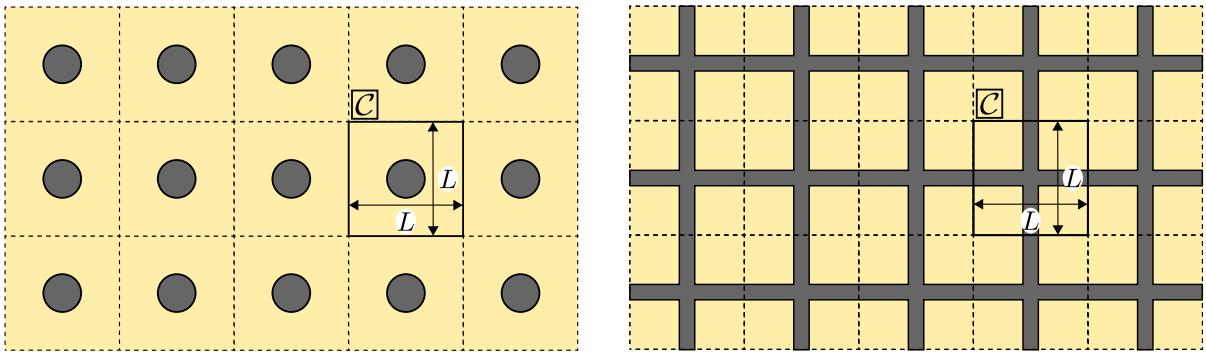
Cette expression permet d'obtenir des majorants des composantes de $\mathbf{S}^{hom}$, donc des *minorants* des composantes du tenseur de rigidité macroscopique.

2.2.2 Encadrement du module de cisaillement longitudinal des sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées

Comme exemple d'application des approches variationnelles, nous allons plus particulièrement étudier une des composantes du tenseur de rigidité macroscopique d'un sol renforcé par colonnes ou par tranchées croisées. Pour cela, on considère les deux types de configuration de renforcement suivants :

- Une répartition périodique de colonnes, de rayon ρ, suivant un maillage carré de côté L dans le plan horizontal (voir Figure 2.6(a)),

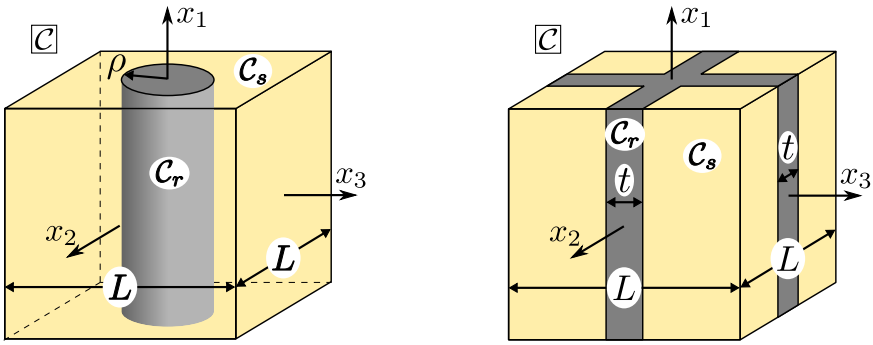
- Deux séries de tranchées, de largeur t, disposées parallèlement à deux plans verticaux orthogonaux l'un à l'autre et dont l'espacement L est régulier, tel qu'indiqué sur la Figure 2.6(b).



(a) (b)

FIGURE 2.6 – Sols renforcés par un réseau de colonnes (a) ou de tranchées croisées (b).

Pour ces deux configurations de sols renforcés, on choisit la cellule de base $\mathcal{C}$ comme un cylindre de sol de section carrée, noté par la suite $\mathcal{C}_s$, dans lequel la zone de renforcement $\mathcal{C}_r$ prend la forme soit d'un cylindre circulaire de rayon ρ (Figure 2.7(a)), soit de deux tranchées orthogonales d'épaisseur t (voir Figure 2.7(b)).



(a) (b)

FIGURE 2.7 – Cellule de base d'un sol renforcé par colonnes (a) ou par tranchées croisées (b).

Dans les deux cas, et pour toute la suite du manuscrit, on note $\underline{e}_1$ la direction verticale, correspondant à la direction de renforcement, et (x_2, x_3) le plan horizontal. On adopte la terminologie des composites à fibres, en nommant la direction portant l'axe de renforcement du sol, *direction longitudinale* et les directions qui lui sont orthogonales, *directions transversales*. Pour la suite du manuscrit, on note $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ deux directions transversales, orthogonales l'une à l'autre, et qui correspondent dans le cas de la configuration en tranchées croisées aux directions de renforcement.

Pour le sol renforcé par colonnes comme pour celui renforcé par tranchées croisées, étant donné la géométrie du renforcement, les rôles des deux directions transversales sont totalement interchangeables. Ainsi, si on en revient à la définition du tenseur de rigidité $\mathbf{C}^{hom}$, donnée par (2.8), seules 6 de ses composantes sont indépendantes pour de telles configurations de renforcement.

Afin d'analyser les différences de comportement de ces deux configurations vis-à-vis d'un risque lié aux séismes (voir section 3.1), nous allons porter notre attention sur la composante de $\mathbf{C}^{hom}$ régissant la réponse des sols renforcés lors d'un cisaillement dans un des plans verticaux ((x_1, x_2) ou (x_1, x_3)). Il s'agit donc de la composante $C^{hom}_{1212} = C^{hom}_{1313}$, qui peut directement être interprétée comme un *module de cisaillement longitudinal*, noté G_L.

Dans la suite de cette section, nous allons donc encadrer par des formules analytiques les modules $G_{L,col}$ et $G_{L,tc}$, correspondant aux sols renforcés par colonnes ou par tranchées croisées [Gueguin *et al.*, 2013a, Gueguin *et al.*, 2013c]. Les calculs font apparaître les modules de cisaillement du sol en place G_s et du renforcement G_r, ainsi que le facteur de substitution η.

$$\eta = \begin{cases} \dfrac{\pi\rho^2}{L^2} & \text{pour un renforcement par colonnes} \\ \dfrac{t(2L-t)}{L^2} & \text{pour un renforcement par tranchées croisées} \end{cases} \tag{2.27}$$

2.2.2.1 Cas du renforcement par colonnes

◇ Solution de Hashin-Rosen

L'évaluation du module de cisaillement longitudinal d'une matrice renforcée par des inclusions cylindriques circulaires a déjà fait l'objet de nombreuses études, en particulier dans le domaine des matériaux composites renforcés de manière unidirectionnelle par des fibres longues. L'une des méthodes d'évaluation, proposée par [Hashin et Rosen, 1964], consiste à approximer le milieu par un *assemblage de cylindres composites*. Chacun d'eux est composé d'un cylindre à base circulaire renforcé par une fibre à section circulaire concentrique. Avec ce choix de cellule de base, il existe une expression analytique des champs de déplacement et de contrainte solutions du problème à sollicitation de cisaillement longitudinal imposé. On obtient alors la solution exacte $G^{\text{hr}}_{L,col}$, issue du problème approximé de Hashin-Rosen, et rappelée dans [Russel, 1973, Hashin, 1983] :

$$G_{L,col} \simeq G^{\text{hr}}_{L,col} = G_s \frac{G_s(1-\eta) + G_r(1+\eta)}{G_s(1+\eta) + G_r(1-\eta)} \tag{2.28}$$

Une représentation de cette caractéristique élastique ainsi approximée sera donnée ultérieurement en fonction de la fraction volumique. Les zones de sol se trouvant entre les cylindres composites ne sont pas prises en compte dans le comportement homogénéisé du milieu. Une telle approximation semble adéquate pour un matériau renforcé par une fraction volumique connue de fibres ayant des propriétés identiques et des rayons variant de façon aléatoire.

◇ Obtention d'un majorant de $G_{L,col}$

Pour exprimer les champs de déplacement et de contrainte menant à l'encadrement de $G_{L,col}$, on découpe la cellule de base en trois zones. L'une correspond à la colonne (zone **1**) et les deux autres se trouvent dans le sol. La zone **2** est un cylindre creux à section circulaire de rayon intérieur ρ et de rayon extérieur $L/2$, tandis que la zone **3**

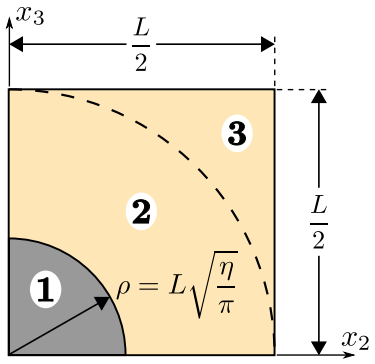


FIGURE 2.8 – Découpage de la cellule de base utilisé dans les approches variationnelles (cas d'un sol renforcé par colonnes).

correspond aux coins de la cellule de base (voir Figure 2.8).

Pour l'obtention d'un majorant du module de cisaillement longitudinal, à partir du principe du minimum de l'énergie potentielle présenté en 2.2.1.1, on part du champ de déplacement solution trouvé par [Hashin et Rosen, 1964], défini dans le cylindre composite $\mathbf{1}+\mathbf{2}$, que l'on complète dans la zone $\mathbf{3}$ par continuité du déplacement.

On impose à la cellule de base la déformation macroscopique homogène définie par :

$$\underline{\underline{E}} = E_{12}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \tag{2.29}$$

L'admissibilité cinématique d'un champ de déplacement $\underline{\xi}'$ se traduit alors par la condition aux limites suivante :

$$\underline{\xi}' \text{ CA } \underline{\underline{E}} \Leftrightarrow \underline{\xi}'(x_1, \pm L/2, x_3) = \pm\frac{L}{2}E_{12}\underline{e}_1 \tag{2.30}$$

On choisit alors de prendre le champ de déplacement, exprimé en coordonées cylindriques dans la base $(\underline{e}_R, \underline{e}_\Theta, \underline{e}_1)$, de la forme $\underline{\xi}' = g(R)\cos\Theta\underline{e}_1$. La déformation associée à ce champ s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}g(R)}{\mathrm{d}R}\cos\Theta(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_R \otimes \underline{e}_1) - \frac{1}{2}\frac{g(R)}{R}\sin\Theta(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_1) \tag{2.31}$$

avec $g(R)$ défini pour une zone i par :

$$g(R) = \alpha_i R + \frac{\beta_i}{R}, \qquad \text{dans la zone } i \ (= \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) \tag{2.32}$$

Les conditions liées à la continuité des vecteurs contraintes et des déplacements sont exploitées en annexe A. Elles permettent d'exprimer $g(R)$ en fonction de E_{12}.

Avec le tenseur de déformation macroscopique imposé de la forme (2.29), on a :

$$\underline{\underline{E}} : \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} = C^{hom}_{1212}E_{12}^2 = G_{L,col}E_{12}^2 \tag{2.33}$$

ce qui donne, d'après l'inégalité (2.22) :

$$\forall \underline{\xi}' \text{ CA } \underline{\underline{E}} = E_{12}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1), \quad G_{L,col} \leq \frac{\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \mathbf{c}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \rangle}{E_{12}^2} \tag{2.34}$$

L'obtention de l'expression analytique de la moyenne de l'énergie élastique de déformation sur la cellule de base et tous les détails de calculs sont développés en annexe A. Au final, on trouve un majorant du module de cisaillement longitudinal pour un sol renforcé par colonnes égal à :

$$G_{L,col} \leq G_{L,col}^{ub} = G_s \left(1 + \frac{2\eta(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\eta/\pi)(G_r - G_s)} \right) \tag{2.35}$$

◇ **Obtention d'un minorant de** $G_{L,col}$

La cellule de base est soumise à une contrainte macroscopique de la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{12}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \tag{2.36}$$

En vue d'appliquer le principe du minimum de l'énergie complémentaire, présenté en 2.2.1.2, on calcule tout d'abord l'énergie élastique de déformation de la solution exacte :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \mathbf{S}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} = S_{1212}^{hom} \Sigma_{12}^2 = \frac{\Sigma_{12}^2}{C_{1212}^{hom}} = \frac{\Sigma_{12}^2}{G_{L,col}} \tag{2.37}$$

En appliquant l'inégalité (2.26), on obtient alors l'expression d'un minorant de $G_{L,col}$, quelque soit le champ de contrainte choisi, statiquement admissible avec le tenseur de contrainte macroscopique (2.36) :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}' \text{ SA } \underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{12}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1), \quad G_{L,col} \geq \frac{\Sigma_{12}^2}{\left\langle \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) : \mathbf{s}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) \right\rangle} \tag{2.38}$$

Le champ de contrainte retenu est précisé dans l'Annexe A et les développements des calculs intermédiaires y sont donnés. Au final, le module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par colonnes est supérieur au minorant suivant :

$$G_{L,col} \geq G_{L,col}^{lb} = G_s \left(1 - \frac{2\eta(G_r - G_s)}{G_r + G_s + (4\eta/\pi)(G_r - G_s)} \right)^{-1} \tag{2.39}$$

Le minorant et le majorant de $G_{L,col}$ seront représentés dans la section 2.3.2.1, en fonction de la fraction volumique η. On discutera notamment de leur écart relatif. L'approximation donnée par [Hashin et Rosen, 1964] y sera également reportée. Les formules analytiques obtenues pour encadrer le module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par colonnes seront utilisées dans le prochain chapitre.

2.2.2.2 Cas du renforcement par tranchées croisées

◇ **Obtention d'un majorant de** $G_{L,tc}$

Pour procéder à l'encadrement du module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par tranchées croisées, la cellule de base, identifiée sur la Figure 2.7, est divisée en quatre zones (voir Figure 2.9). La zone **1** correspond à la partie occupée par le sol, la zone **4** est l'intersection des deux tranchées de renforcement, et les zones **2** et **3** sont les

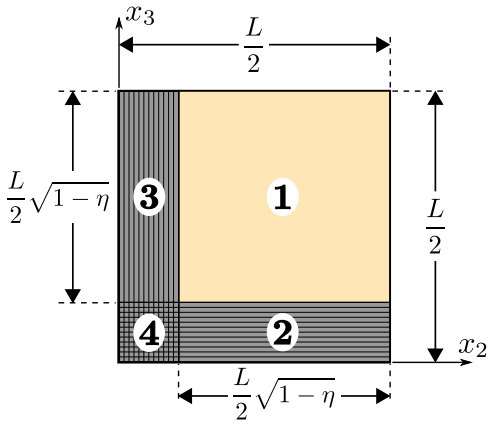


FIGURE 2.9 – Découpage de la cellule de base utilisé pour les approches variationnelles (cas d'un sol renforcé par tranchées croisées).

portions restantes de l'une et l'autre des tranchées croisées.

Pour l'obtention d'un majorant du module de cisaillement longitudinal, la cellule de base est soumise à une déformation macroscopique homogène $\underline{\underline{E}}$, dont l'expression est la même que (2.29). La condition d'admissibilité cinématique associée pour un champ de déplacement est donnée par (2.30).

On choisit un champ de déplacement $\underline{\xi}'$ continu linéaire par morceaux, dépendant des zones de la cellule de base, définies sur la Figure 2.9. Ce champ est exprimé de la manière suivante :

$$\underline{\xi}' = \begin{cases} \dfrac{E_{12}-\alpha}{\sqrt{1-\eta}}\left(x_2 - \dfrac{L}{2}(1-\sqrt{1-\eta}) + \dfrac{\alpha}{2}\right)\underline{e}_1 & \text{dans les zones } \mathbf{1} \text{ et } \mathbf{2} \\ \dfrac{\alpha}{1-\sqrt{1-\eta}}\, x_2\, \underline{e}_1 & \text{dans les zones } \mathbf{3} \text{ et } \mathbf{4} \end{cases} \tag{2.40}$$

La moyenne de l'énergie élastique est directement reliée à la déformation macroscopique E_{12} ainsi qu'au paramètre α, qui fera office par la suite de variable d'optimisation. Cette moyenne est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' : \mathbf{c} : \underline{\underline{\varepsilon}}' \right\rangle &= \frac{2}{|\mathcal{C}|}\left(\int_{\mathbf{1}} G_s \frac{(E_{12}-\alpha)^2}{1-\eta}\,\mathrm{d}\mathcal{C} + \int_{\mathbf{2}} G_r \frac{(E_{12}-\alpha)^2}{1-\eta}\,\mathrm{d}\mathcal{C} + \int_{\mathbf{3}\cup\mathbf{4}} G_r \frac{\alpha^2}{(1-\sqrt{1-\eta})^2}\,\mathrm{d}\mathcal{C} \right) \\ &= 2G_s\left[(E_{12}-\alpha)^2\left(1 + \frac{G_r}{G_s}\frac{1-\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}}\right) + \alpha^2 \frac{G_r}{G_s}\left(1 + \frac{\sqrt{1-\eta}}{1-\sqrt{1-\eta}}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.41}$$

L'inégalité (2.22) conduit alors à un majorant de $G_{L,tc}$:

$$\forall \alpha, \quad G_{L,tc} \leq \frac{\left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \mathbf{c}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \right\rangle}{E_{12}^2} \tag{2.42}$$

soit

$$G_{L,tc} \leq \min_{\alpha} \frac{\left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \mathbf{c}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \right\rangle}{E_{12}^2} \tag{2.43}$$

La valeur minimale de la moyenne de l'énergie élastique est obtenue pour une valeur du paramètre d'optimisation égale à :

$$\alpha = E_{12}\frac{\sqrt{1-\eta}+\frac{G_r}{G_s}(1-\sqrt{1-\eta})}{\sqrt{1-\eta}+\frac{G_r}{G_s}\left(1+\frac{\sqrt{1-\eta}}{1-\sqrt{1-\eta}}\right)} \tag{2.44}$$

On déduit donc, après calculs, que le majorant du module de cisaillement longitudinal pour un sol renforcé par tranchées croisées peut se mettre sous la forme suivante :

$$G_{L,tc} \leq G_{L,tc}^{ub} = G_r\frac{\sqrt{1-\eta}G_s+(1-\sqrt{1-\eta})G_r}{\sqrt{1-\eta}(1-\sqrt{1-\eta})G_s+(2-\eta-\sqrt{1-\eta})G_r} \tag{2.45}$$

◇ **Obtention d'un minorant de** $G_{L,tc}$

Pour obtenir un minorant du module de cisaillement longitudinal, la cellule de base est soumise à un tenseur de contrainte macroscopique de la forme $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{12}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$, qui correspond à un cisaillement dans le plan (x_1, x_2). On choisit un champ de contrainte constant par morceaux dans chaque zone de $\mathcal{C}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \begin{cases} \tau_1(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) & \text{dans } \mathbf{1} \cup \mathbf{3} \\ \tau_2(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) & \text{dans } \mathbf{2} \cup \mathbf{4} \end{cases} \tag{2.46}$$

qui respecte clairement l'antipériodicité du vecteur contrainte. La moyenne de ce champ doit être égale à la contrainte macroscopique, soit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle \Rightarrow \Sigma_{12} = \tau_1\sqrt{1-\eta} + \tau_2(1-\sqrt{1-\eta}) \tag{2.47}$$

L'énergie élastique est ensuite moyennée sur toute la cellule de base. Avec un champ de contrainte en cisaillement pur, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\sigma}}' : \mathbf{s} : \underline{\underline{\sigma}}' \rangle &= \frac{1}{|\mathcal{C}|}\left(\int_{\mathbf{1}} \frac{\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}'}{2G_s}\,\mathrm{d}\mathcal{C} + \int_{\mathbf{2}\cup\mathbf{3}\cup\mathbf{4}} \frac{\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}'}{2G_r}\,\mathrm{d}\mathcal{C}\right) \\ &= \tau_1^2\left(\frac{1-\eta}{G_s} + \frac{\sqrt{1-\eta}(1-\sqrt{1-\eta})}{G_r}\right) + \tau_2^2\frac{1-\sqrt{1-\eta}}{G_r} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Le principe du minimum de l'énergie complémentaire, réécrit pour ce problème dans (2.34), nous indique que pour $\underline{\underline{\sigma}}'$ statiquement admissible avec $\underline{\underline{\Sigma}}$, on aura :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}' \text{ SA } \underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{12}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1), \quad G_{L,tc} \geq \frac{\Sigma_{12}^2}{\langle \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) : \mathbf{s}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) \rangle} \tag{2.49}$$

Donc en substituant les différentes quantités calculées et en prenant comme variable d'optimisation $\beta = \tau_2/\tau_1$, $G_{L,tc}$ est minoré comme suit :

$$G_{L,tc} \geq \max_{\beta}\left\{G_s\frac{1-\eta+2\beta\sqrt{1-\eta}(1-\sqrt{1-\eta})+\beta^2(1-\sqrt{1-\eta})^2}{1-\eta+G_r/G_s(1-\sqrt{1-\eta})(\sqrt{1-\eta}+\beta^2)}\right\} \tag{2.50}$$

L'optimisation du paramètre β est ensuite effectuée analytiquement et on intègre sa valeur à l'expression précédente [Gueguin *et al.*, 2013a]. On obtient alors l'expression d'un

minorant du module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par tranchées croisées égal à :

$$G_{L,tc} \geq G_{L,tc}^{lb} = G_r \left(\frac{\sqrt{1-\eta}/G_s + (1-\sqrt{1-\eta})/G_r}{\sqrt{1-\eta}(1-\sqrt{1-\eta})/G_s + (2-\eta-\sqrt{1-\eta})/G_r} \right)^{-1} \tag{2.51}$$

Cette fois encore, les formules analytiques obtenues pour encadrer le module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par tranchées croisées seront utilisées dans le prochain chapitre, lors d'une étude portant sur le risque de liquéfaction de tels sols.

2.3 Détermination de caractéristiques élastiques par des méthodes numériques

La détermination des coefficients du tenseur d'élasticité macroscopique, passant par la résolution du problème auxiliaire d'élasticité exprimé sur la cellule de base, peut s'envisager de façon numérique, par exemple en utilisant un code de calcul par éléments finis. L'évaluation qui en ressort est alors purement numérique, et ne permet pas, contrairement aux approches variationnelles, d'obtenir une expression analytique de chacun des coefficients.

Pour effectuer l'étude numérique du sol renforcé par colonnes, on modélise le problème à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis Castem [Cast3M, 2003]. Après résolution du problème élastique avec les conditions aux limites de périodicité, un post-traitement est effectué pour évaluer les composantes de $\mathbf{C}^{hom}$ concernées. À titre de validation des méthodes employées, on effectuera une comparaison entre ces valeurs obtenues numériquement et les approximations présentées précédemment. Il convient donc de bien définir les modes de chargement et les conditions aux limites appliqués à la cellule de base.

2.3.1 Mise en œuvre des calculs par éléments finis

2.3.1.1 Conditions aux limites et traitements des calculs

On décide de charger la cellule de base étudiée en imposant une déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$. Pour cela, l'une des façons de faire est d'imposer des conditions de périodicité en déplacement aux différentes faces opposées de la cellule de base. Le champ de déplacement solution doit donc respecter les conditions représentées sur la Figure 2.10.

Avec un tel mode de chargement, on connaît déjà la moyenne du champ de déformation solution, qui vaut $\underline{\underline{E}}$. Pour pouvoir déterminer le tenseur de rigidité macroscopique du sol renforcé, en appliquant le schéma de résolution de la Figure 2.3, il faut déterminer la moyenne du champ de contrainte solution. Ainsi, on intègre numériquement le champ obtenu après résolution du problème d'élasticité linéaire :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \left(\int_{\mathcal{C}_s} \sigma_{ij} \, \mathrm{d}\mathcal{C}_s + \int_{\mathcal{C}_r} \sigma_{ij} \, \mathrm{d}\mathcal{C}_r \right) \tag{2.52}$$

Dans la section précédente, on a pu remarquer que le tenseur de rigidité macroscopique des sols renforcés par colonnes ou tranchées est formé de 6 composantes indépendantes.

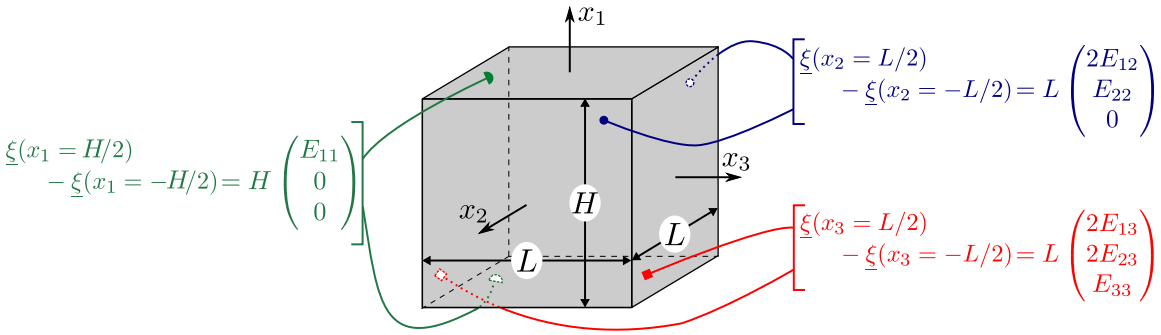


FIGURE 2.10 – Conditions aux limites périodiques en déplacement imposées à la modélisation numérique de la cellule de base.

En imposant au modèle numérique une série de déformations macroscopiques bien choisies, on peut obtenir toutes les composantes du tenseur de rigidité. En particulier, en définissant tout d'abord une sollicitation œdométrique, de la forme $\underline{\underline{E}} = E_{11}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$, on détermine les valeurs de C^{hom}_{1111} et C^{hom}_{1122}. Une seconde sollicitation œdométrique, de la forme $\underline{\underline{E}} = E_{22}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$, permet d'évaluer C^{hom}_{2222} et C^{hom}_{2233}. Enfin, les valeurs des composantes C^{hom}_{1212} et C^{hom}_{2323}, caractérisant le comportement du matériau composite lors de sollicitations de cisaillement, sont obtenues en imposant respectivement $\underline{\underline{E}} = E_{12}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$ et $\underline{\underline{E}} = E_{23}(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$.

À partir de ces quatre calculs distincts, on peut calculer les modules d'Young et de cisaillement longitudinaux et transversaux des différents sols renforcés, définis par les formules suivantes :

$$\begin{gathered} E_L = C^{hom}_{1111} - \frac{2(C^{hom}_{1122})^2}{C^{hom}_{2222} + C^{hom}_{2233}} \\ E_T = C^{hom}_{2222} + \frac{2(C^{hom}_{1122})^2(C^{hom}_{2222} - 2C^{hom}_{2233}) + C^{hom}_{1111}(C^{hom}_{2233})^2}{(C^{hom}_{1122})^2 - C^{hom}_{1111}C^{hom}_{2222}} \\ G_L = C^{hom}_{1212}, \quad G_T = C^{hom}_{2323} \end{gathered} \tag{2.53}$$

ainsi que les coefficients de Poisson égaux à :

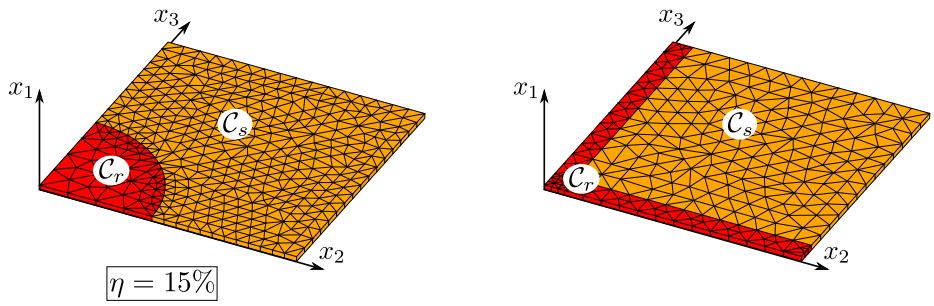
$$\begin{gathered} \nu_{LT} = \frac{C^{hom}_{1122}}{C^{hom}_{2222} + C^{hom}_{2233}}, \quad \nu_{TL} = \frac{C^{hom}_{1122}(C^{hom}_{2233} - C^{hom}_{2222})}{(C^{hom}_{1122})^2 - C^{hom}_{1111}C^{hom}_{2222}} \\ \nu_{TT} = \frac{(C^{hom}_{1122})^2 - C^{hom}_{1111}C^{hom}_{2323}}{(C^{hom}_{1122})^2 - C^{hom}_{1111}C^{hom}_{2222}} \end{gathered} \tag{2.54}$$

2.3.1.2 Maillages utilisés

On peut noter que, pour les deux configurations de sols renforcés, les propriétés élastiques des matériaux sont indépendantes de la coordonnée x_1. C'est également le cas de la géométrie, en considérant une longueur de renforcement très grande, et du chargement imposé. Cela implique que la solution du problème auxiliaire d'élasticité, notamment le champ de contrainte solution, sera également indépendante de cette coordonnée x_1. Ainsi, il suffit de modéliser uniquement une *tranche* de la cellule de base

pour effectuer l'analyse numérique du problème.

On discrétise les cellules de base associées à un renforcement par colonnes ou par tranchées croisées, en éléments prismatiques à 15 nœuds (PRI15), avec une seule rangée d'éléments suivant la direction de renforcement. Le maillage retenu pour chacune des configurations est représenté sur la Figure 2.11, pour un fraction volumique $\eta = 15\%$. Dans le cas du sol renforcé par colonnes, on prend soin de raffiner le maillage au niveau de l'interface entre le renforcement et sol en place.



(a) (b)

FIGURE 2.11 – Maillages d'un quart des cellules de base utilisés pour la modélisation numérique.

2.3.2 Comparaisons avec les résultats analytiques

On utilise la démarche numérique qui vient d'être indiquée pour comparer les valeurs numériques du module de cisaillement longitudinal des différents sols renforcés aux bornes théoriques calculées dans la section précédente. À titre d'exemple, on effectue cette comparaison avec les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$E_r/E_s = 10\,,\ \nu_s = 0.3\,,\ \nu_r = 0.2 \ \rightarrow\ G_r/G_s = 10.83 \tag{2.55}$$

et on fait varier le facteur de substitution dans une plage usuelle de valeurs pour les différentes techniques de renforcement ($\eta \in [0\%, 40\%]$).

2.3.2.1 Renforcement par colonnes

La comparaison entre les majorant et minorant analytiques, l'approximation de Hashin-Rosen et le résultat numérique est faite pour le module de cisaillement longitudinal $G_{L,col}$ (Figure 2.12). Les valeurs numériques (carrés) sont très proches de l'approximation $G^{\mathrm{hr}}_{L,col}$ (ligne continue) et toutes deux sont comprises entre les encadrements analytiques déterminés dans la section précédente ($G^{ub}_{L,col}$ en ligne pointillée et $G^{lb}_{L,col}$ en tirets). La qualité de ce minorant et de ce majorant se mesure également par l'écart relatif entre eux. Dans notre cas, sur la plage de fraction volumique retenue, cet écart ne dépasse pas 14.7%. On peut également souligner que, bien qu'elle n'ait aucun statut théorique particulier, la moyenne de ces deux expressions (ligne mixte) fournit, elle aussi, une excellente approximation du module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par colonnes.

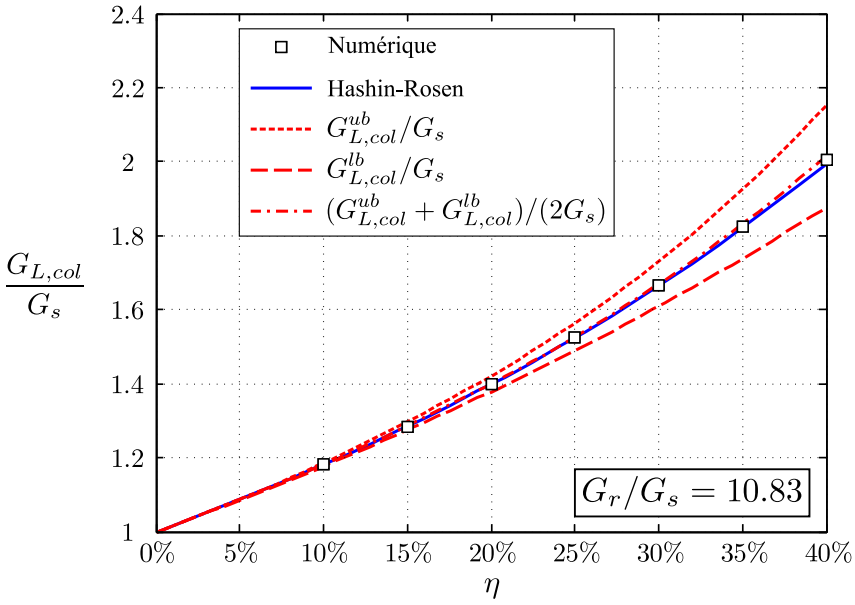


FIGURE 2.12 – Différentes estimations du module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par colonnes.

Une représentation de la déformée de la moitié de la cellule de base, soumise à un cisaillement longitudinal, est donnée par la Figure 2.13(a). Celle-ci, volontairement accentuée pour des raisons de clarté, nous renseigne sur le comportement du milieu hétérogène. En effet, si on se penche sur la déformation de chacun de ses constituants, de grandes disparités apparaissent. La colonne étant plus rigide que le sol, elle subit peu de déformation, alors que le sol est fortement déformé. Cette constatation rejoint celle établie pour le cas du sol multicouche soumis à un cisaillement dans son plan faible (voir section 2.1.3). On verra, dans le prochain chapitre, les conséquences que cela peut avoir sur les capacités d'un ouvrage en sol renforcé par colonnes.

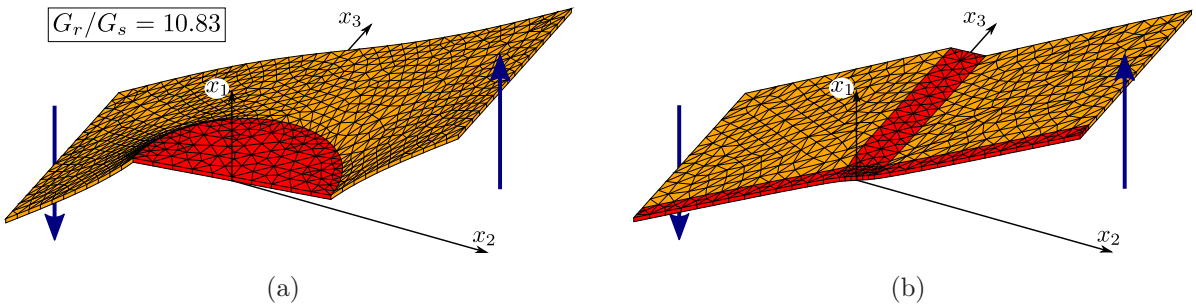


FIGURE 2.13 – Déformées associées au cisaillement longitudinal des sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées.

2.3.2.2 Renforcement par tranchées croisées

Comme pour la configuration de renforcement par colonnes, on compare les valeurs de $G_{L,tc}$ calculées numériquement aux encadrements théoriques exprimés précédemment. À l'instar du type de renforcement précédent, les minorant et majorant analytiques

encadrent bien la solution numérique (représentés sur la Figure 2.14). Ils sont également relativement proches puisque l'écart relatif entre l'un et l'autre ne dépasse pas 11.9% lorsque $\eta = 40\%$. Cette fois encore, la moyenne de ces deux encadrement (ligne mixte) constitue une excellente approximation de $G_{L,tc}$, bien qu'elle n'ait aucun statut théorique.

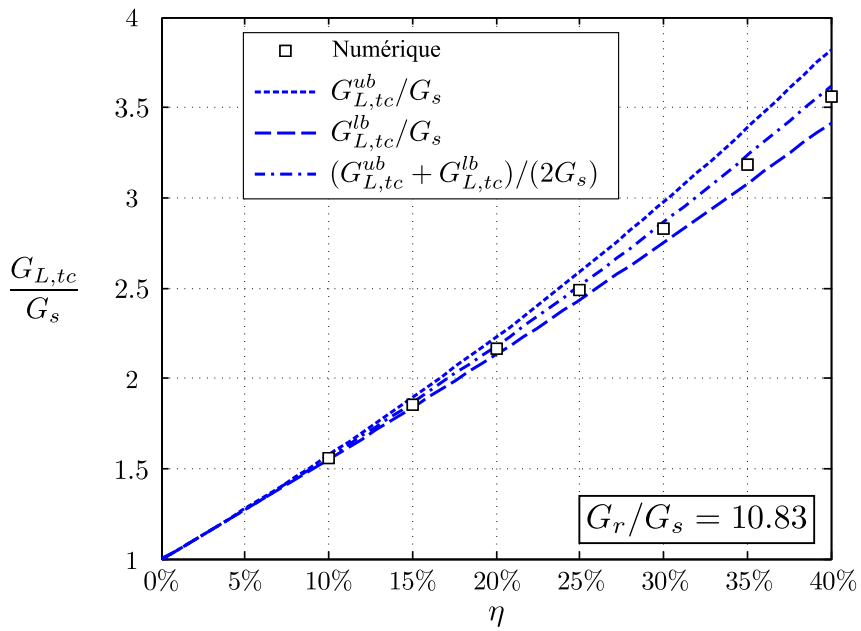


FIGURE 2.14 – Différentes estimations du module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par tranchées croisées.

La Figure 2.13(b) représente la configuration déformée de la moitié de la cellule de base d'un sol renforcé par tranchées croisées, soumis à un chargement de cisaillement longitudinal. On peut y remarquer que la tranchée qui est perpendiculaire au plan de chargement subit beaucoup moins de déformations que le sol. À l'inverse, l'autre tranchée contribue fortement à la rigidité en cisaillement du sol renforcé, comme dans un *effet de contreventement*. On verra plus en détails par la suite l'influence qu'a cet effet sur la réponse en cisaillement de cette configuration de renforcement.

2.4 Efficacité comparée des différentes techniques de renforcement des sols

On souhaite enfin comparer les performances des différentes configurations de renforcement pour ce qui est du gain par rapport aux propriétés élastiques du sol en place. Pour cela, on analyse les différentes caractéristiques macroscopiques des sols renforcés par simples tranchées, colonnes ou tranchées croisées. Ces comparaisons s'appuient sur les résultats issus de la modélisation numérique, qui vient d'être validée pour le module de cisaillement longitudinal. On garde les caractéristiques élastiques des matériaux données par (2.55) en faisant varier la fraction volumique de renforcement.

2.4.1 Comparaison des modules d'Young

2.4.1.1 Module d'Young longitudinal

Lorsque une sollicitation de traction/compression est appliquée suivant l'axe de renforcement, les trois techniques de renforcement possèdent, à même fraction volumique de renforcement, des rigidités élastiques très proches comme on peut le constater sur la Figure 2.15.

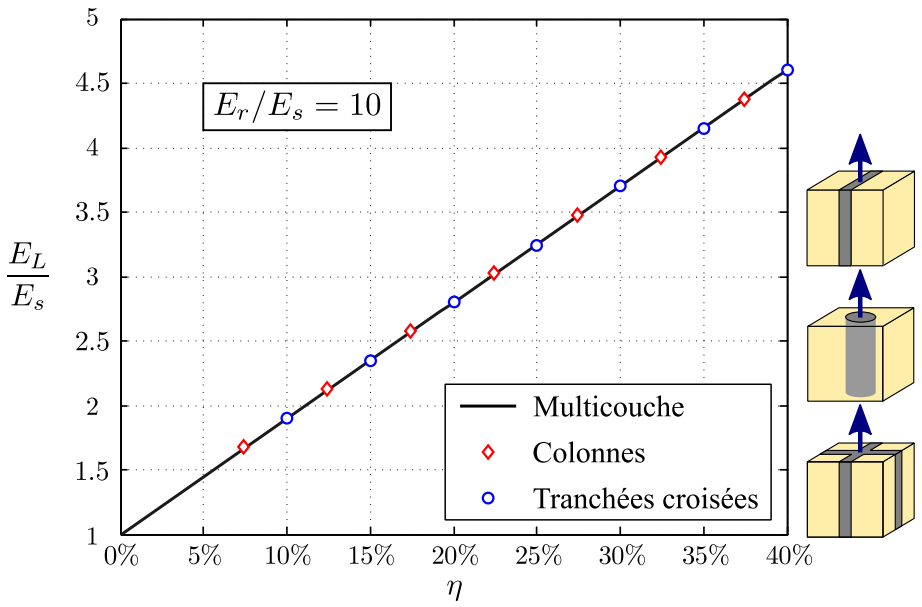


FIGURE 2.15 – Module d'Young longitudinal des sols renforcés.

Les seules petites différences que l'on peut observer entre les modules d'Young longitudinaux relatifs aux différentes techniques de renforcement s'expliquent par les coefficients de Poisson différents du sol et du matériau de renforcement. En cas d'égalité de ces deux coefficients, le module d'Young longitudinal des trois configurations de renforcement est égal à la moyenne volumique des modules d'Young de chacun des contituants.

2.4.1.2 Module d'Young transversal

Pour une sollicitation de traction/compression dans le plan horizontal, il faut noter que le sol renforcé par simples tranchées n'aura pas le même comportement suivant que le chargement est dans son plan fort ou dans son plan faible (voir section 2.1.3). À l'inverse, les deux autres configurations auront un comportement symétrique pour ce type de chargement. Les modules d'Young transversaux, obtenus numériquement pour les colonnes ou les tranchées croisées et analytiquement pour les simples tranchées (modèle multicouche), sont représentés sur la Figure 2.16.

Dans cette comparaison, on observe tout d'abord que pour $\eta = 15\%$, qui est un facteur de substitution usuel, le renforcement par colonnes améliore seulement de 30% la rigidité initiale du sol, tandis que le renforcement par simples tranchées orthogonales au plan de la sollicitation ne renforce que de 15%. En revanche, l'intérêt de la configuration en

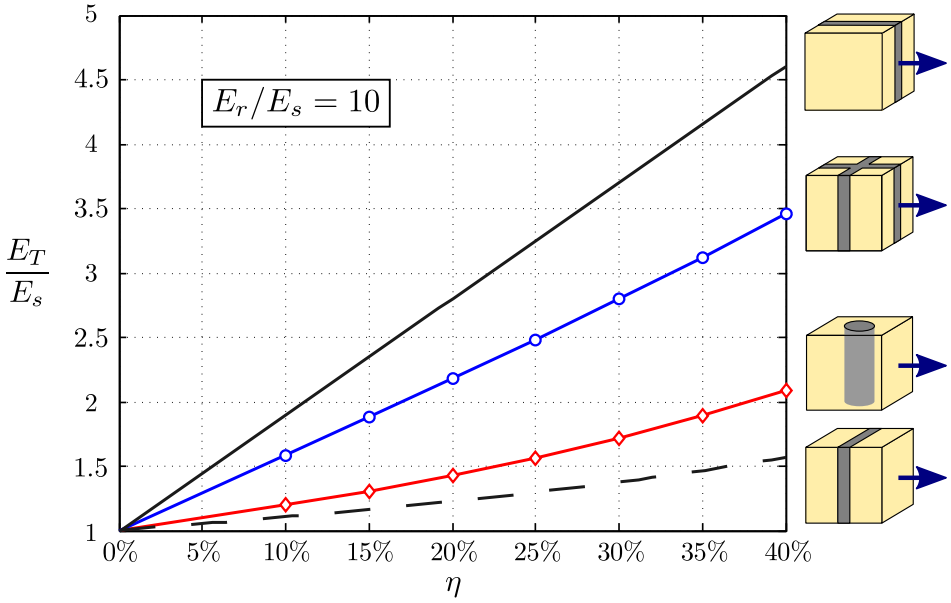


FIGURE 2.16 – Module d'Young transversal des sols renforcés.

tranchées croisées ressort clairement pour ce type de sollicitation dans le plan horizontal. L'amélioration apportée par ce type de renforcement, pour la même fraction volumique, est égale à 88%. Le cas le plus favorable est celui d'un renforcement par simples tranchées parallèles au plan de chargement. Cela correspond à une sollicitation dans le plan fort de ce matériau multicouche (136%). L'écart entre $E_{T,col}$ et $E_{T,tc}$ est encore accentué lorsque la fraction volumique augmente. Ainsi, pour la valeur extréme $\eta = 40\%$, le module d'Young transversal du sol renforcé par tranchées croisées est 1.65 fois plus grand que celui renforcé par colonnes.

2.4.2 Comparaison des modules de cisaillement

2.4.2.1 Module de cisaillement longitudinal

Un autre module important à analyser est le module de cisaillement longitudinal. Les deux valeurs du module de cisaillement du sol renforcé par simples tranchées suivant les plans parallèle et perpendiculaire au plan de renforcement, constituent respectivement un majorant et un minorant du module de cisaillement d'un matériau à deux phases. Ces bornes correspondent aux bornes de Voigt et de Reuss, qui peuvent être déterminées par la mise en œuvre des principes du minimum de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire. Leurs valeurs sont représentées en fonction de la fraction volumique sur la Figure 2.17, ainsi que les résultats numériques obtenus pour des renforcements par colonnes ou tranchées croisées.

Comme pour le module d'Young transversal, l'amélioration apportée par la configuration en tranchées croisées est manifeste. En effet, lorsque $\eta = 15\%$, le module de cisaillement d'un sol renforcé par cette technique est environ 1.88 fois plus grand que celui du sol initialement en place. Pour un renforcement par colonnes, l'amélioration n'est que de 29%. Ainsi, l'effet de contreventement souligné précédemment joue un rôle prépondérant dans le comportement du matériau homogénéisé. Contrairement au sol renforcé par

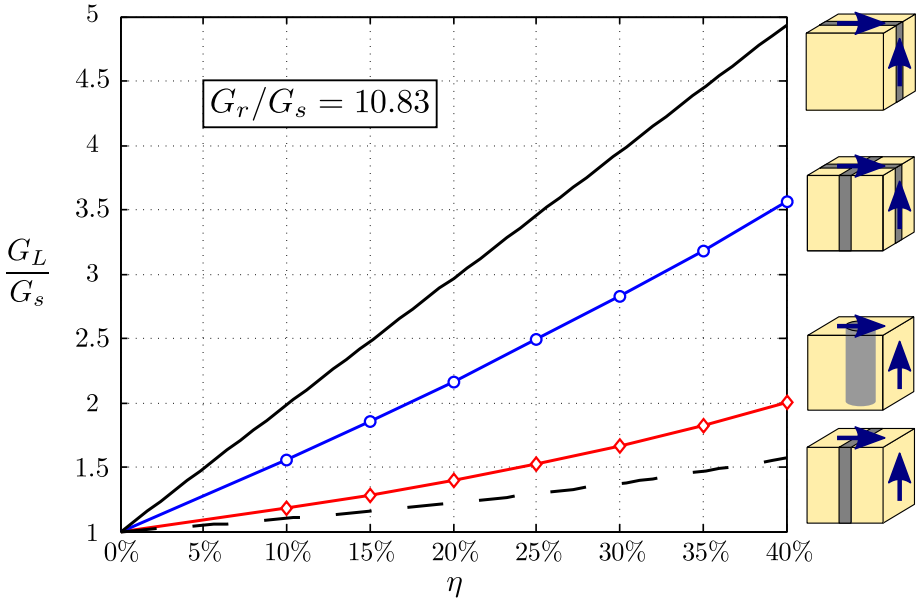


FIGURE 2.17 – Module de cisaillement longitudinal des sols renforcés.

simples tranchées, le renforcement par des tranchées orthogonales a l'avantage d'avoir un comportement équivalent dans l'un ou l'autre des plans de renforcement. Cela représente un avantage majeur lorsque la direction de la charge de cisaillement n'est pas connue à l'avance, ce qui sera le cas lors d'une sollicitation sismique par exemple (voir chapitre suivant).

2.4.2.2 Module de cisaillement transversal

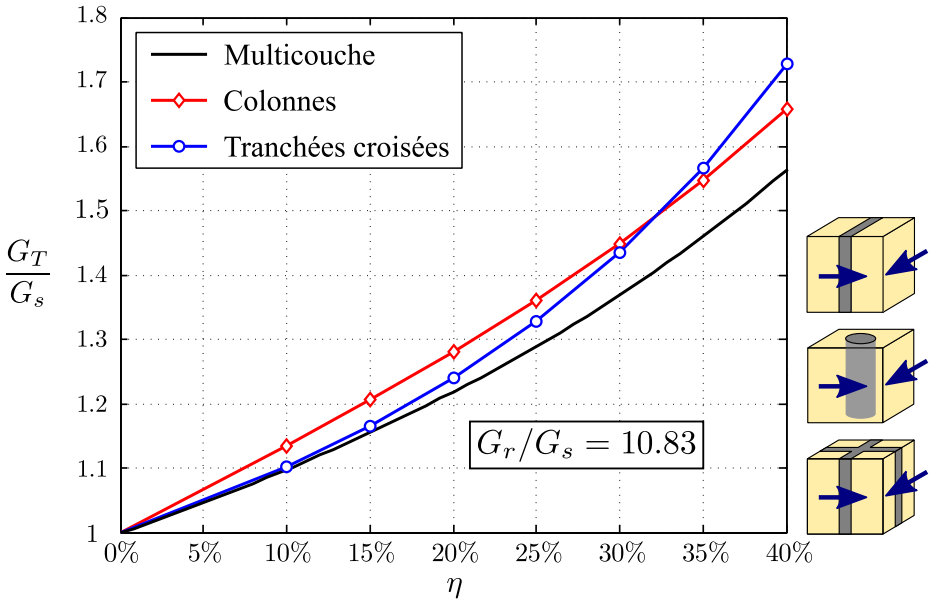


FIGURE 2.18 – Module de cisaillement transversal des sols renforcés.

À l'instar du module d'Young longitudinal, il est difficile de tirer une tendance sur le comportement des sols renforcés lorsqu'ils sont sollicités par un cisaillement dans le plan

horizontal. En effet, si on traite le problème de façon numérique avec les caractéristiques données par (2.55), le renforcement par colonnes apparaît plus performant que celui par tranchées croisées lorsque la fraction volumique est inférieure à 30%, et le rapport s'inverse ensuite (voir Figure 2.18). Pour des facteurs de substitution faibles, l'écart entre les trois techniques de renforcement ne dépasse pas quelques pourcents. L'amélioration de la rigidité initiale du sol se situe autour de 20%, que le sol soit renforcé par simples tranchées, colonnes ou tranchées croisées, lorsque $\eta = 15\%$.

De façon générale, au vu de l'étude analytique et numérique menée dans ce chapitre, on observe que le renforcement par tranchées croisées est plus performant que le renforcement par colonnes, lorsque le chargement s'exerce en dehors de la direction longitudinale. Que ce soit pour une traction/compression dans le plan horizontal ou un cisaillement dans un des plans verticaux, un effet de contreventement, bénéfique pour la résistance du sol renforcé, fait son apparition lorsque la technique de tranchées croisées est utilisée. La configuration en colonnes, sous ce genre de chargement, fait toujours intervenir une portion du sol non négligeable, ce qui limite l'action du renforcement.

Nous allons maintenant appliquer la méthode d'homogénéisation présentée en début de chapitre afin de déterminer les différences de comportement des ouvrages en sols renforcés. En analysant les remarques précédentes sur le comportement macroscopique des configurations de renforcement par colonnes ou tranchées croisées, on s'attend à observer des disparités de performances à l'échelle de l'ouvrage.

* *

*

Chapitre 3

Applications de la méthode d'homogénéisation à l'analyse de la réponse élastique d'un ouvrage en sol renforcé

Résumé : *Pour évaluer l'influence à l'échelle d'un ouvrage du type de renforcement utilisé, deux études sont proposées dans ce chapitre. i) La première étude porte sur le problème de liquéfaction. En faisant des hypothèses sur les déformations induites par un séisme, on montre que la configuration de renforcement par colonnes est inefficace pour parer ce risque, contrairement à ce qui est évoqué par les praticiens pour leurs dimensionnements. En revanche, l'amélioration due au renforcement par tranchées croisées est clairement mise en évidence. ii) La seconde consiste à analyser le comportement élastique d'une fondation renforcée par colonnes ou tranchées croisées se trouvant sous une semelle rigide. Sous un chargement vertical, on démontre l'apport des deux techniques sur la réduction du tassement élastique de la structure. L'efficacité de la configuration en tranchées croisées est évaluée pour un chargement horizontal ou un renversement de la semelle, et se trouve être bien supérieure à celle d'une fondation renforcée par colonnes.*

Sommaire

3.1 Réduction du risque de liquéfaction des sols renforcés 46
3.1.1 Localisation des déformations de cisaillement 47
3.1.2 Évaluation du facteur de réduction du risque de liquéfaction 49
3.1.3 Analyse des résultats et commentaires 53
3.2 Tassement vertical, déplacement latéral et inclinaison de renversement d'une semelle sur une fondation en sol renforcé 55
3.2.1 Matrice de raideur structurelle 56
3.2.2 Calculs numériques à deux échelles 58
3.2.3 Comparaison des différents types de renforcement 61
3.2.4 Conclusions sur la démarche adoptée 65

3.1 Réduction du risque de liquéfaction des sols renforcés

Les tremblements de terre sont connus pour créer des dégâts majeurs sur les structures et les ouvrages de Génie Civil, pouvant causer leur effondrement ou leur ruine. Parmi les risques induits par ces désastres naturels, la plus grande menace du point de vue du géotechnicien est ce qu'on appelle le *phénomène de liquéfaction* des sols. En effet, lorsqu'un séisme se produit, une onde de cisaillement cyclique se propage dans le sol. Dans un sol saturé (sables ou limons), cela entraîne une forte augmentation de la pression interstitielle qui fait chuter considérablement la résistance du sol et donc sa capacité portante.

Ce phénomène de liquéfaction a fait l'objet de recherches depuis plusieurs années [Seed et Idriss, 1971, Youd et Idriss, 2001] en fonction du type de sol et du profil sismique, et a régulièrement été modélisé [Popescu *et al.*, 1997, Koutsourelakis *et al.*, 2002]. En général, les amplitudes et les longueurs d'onde liées aux séismes sont telles que les sols sollicités peuvent être considérés comme restant dans leur domaine d'élasticité.

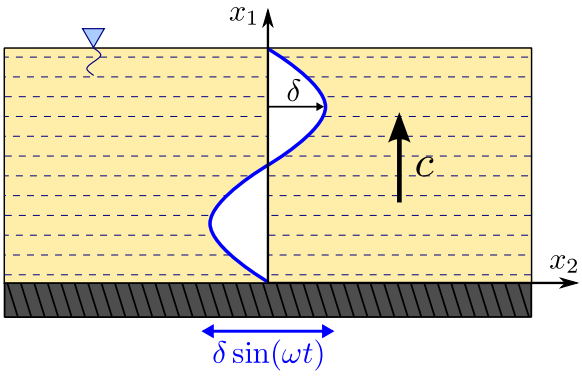


FIGURE 3.1 – Propagation verticale d'une onde sismique de cisaillement dans une couche de sol.

Le chargement induit au cours du temps par un séisme peut être modélisé par une onde harmonique de cisaillement, représentée à la Figure 3.1, qui est définie de la façon suivante :

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \delta \sin\left(\omega(t - x_1/c)\right) \underline{e}_2 \tag{3.1}$$

où δ est le déplacement horizontal maximum et ω est la pulsation. Ce sont toutes deux des caractéristiques du séisme étudié. c désigne la vitesse de propagation de l'onde de cisaillement, qui est un paramètre dépendant du sol où elle se propage. Cette vitesse est directement reliée au module de cisaillement G_s du sol considéré comme suit :

$$c = \sqrt{\frac{G_s}{\rho_s}} \tag{3.2}$$

avec ρ_s la masse volumique du sol saturé.

Le champ de déformation cyclique associé à ce déplacement horizontal est donc de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) = -\delta \frac{\omega}{2c} \cos\left(\omega(t - x_1/c)\right) \left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1\right) \tag{3.3}$$

dont l'amplitude de cisaillement pur γ_s vaut :

$$\gamma_s = \delta \frac{\omega}{2c} = \frac{\delta\omega}{2} \sqrt{\frac{\rho_s}{G_s}} \tag{3.4}$$

Cette amplitude est directement liée à l'augmentation de pression interstitielle dans le sol, qui régit le phénomène de liquéfaction pour un sol saturé. On peut remarquer dans son expression que le premier terme ne dépend que des caractéristiques du séisme, tandis que le second est fonction des caractéristiques du sol considéré, plus précisément de sa masse volumique et de son module de cisaillement.

3.1.1 Localisation des déformations de cisaillement

Les géotechniciens ont tenté de trouver des parades à ce phénomène de liquéfaction. Le renforcement des sols figure parmi les solutions pratiquées, notamment la technique des colonnes ballastées [Baez et Martin, 1993, Adalier *et al.*, 2003, Al-Homoud et Degen, 2006]. Pour un sol renforcé, la vitesse de propagation se calcule alors :

$$c^{hom} = \sqrt{\frac{G_L}{\langle\rho\rangle}} \tag{3.5}$$

où G_L est le module de cisaillement longitudinal du sol homogénéisé et $\langle\rho\rangle$ est la moyenne des masses volumiques de ses constituants. En reprenant (3.4), l'amplitude de la déformation de cisaillement pour un sol renforcé s'écrit donc :

$$\gamma^{hom} = \frac{\delta\omega}{2} \sqrt{\frac{\langle\rho\rangle}{G_L}} \tag{3.6}$$

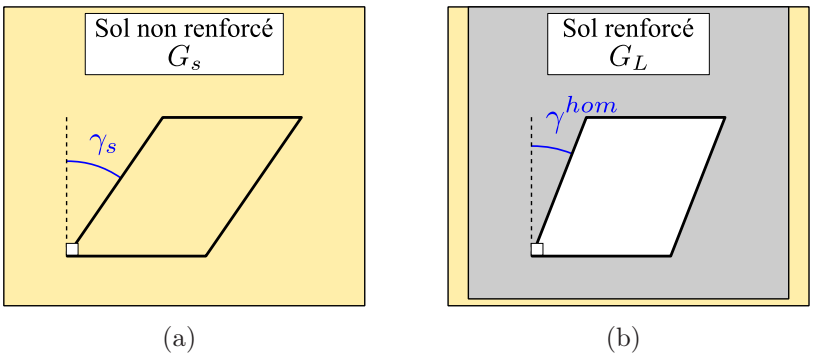


FIGURE 3.2 – Amplitude de la déformation de cisaillement dans le cas d'un sol non renforcé (a) ou en présence de renforcement (b).

Afin de simplifier les calculs à venir, on fait l'hypothèse que $\langle\rho\rangle \simeq \rho_s$. On constate alors que le rapport entre l'amplitude de la déformation pour le cas renforcé et celle pour le sol non renforcé vaut :

$$\frac{\gamma^{hom}}{\gamma_s} = \sqrt{\frac{G_s}{G_L}} \leq 1 \tag{3.7}$$

Ce rapport est clairement inférieur ou égal à l'unité, étant donné que le sol renforcé est globalement plus raide en cisaillement que le sol en place. L'amplitude pour le sol homogénéisé est donc plus faible que celle pour le sol non renforcé, comme schématisé sur la Figure 3.2.

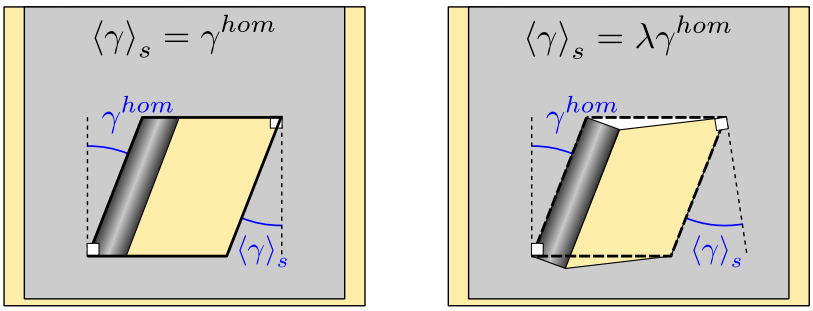
En fait, la comparaison adéquate à effectuer doit être celle entre l'amplitude de la déformation dans le cas non renforcé γ_s et la *valeur moyenne de l'amplitude de la déformation de cisaillement dans le domaine $\mathcal{C}_s$ occupé par le sol* en présence d'un renforcement, notée $\langle\gamma\rangle_s$. Cette moyenne est calculée de la façon suivante pour un tenseur de déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ donné :

$$\underline{\underline{E}} = \gamma^{hom}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \rightarrow \langle\gamma\rangle_s = \frac{1}{|\mathcal{C}_s|}\int_{\mathcal{C}_s} \varepsilon_{12}\,\mathrm{d}\mathcal{C}_s = \lambda\gamma^{hom} \tag{3.8}$$

où λ est appelé *facteur de localisation* [Gueguin *et al.*, 2013a, Gueguin *et al.*, 2013c].

Dans la pratique actuelle, les géotechniciens font implicitement l'hypothèse que le sol et le renforcement se déforment de façon identique sous une sollicitation de cisaillement [Baez et Martin, 1993]. En conséquence, le facteur de localisation est égal à l'unité, comme indiqué sur la Figure 3.3(a). Comme nous avons eu l'occasion de le souligner dans la section 2.1.3, cela correspond au cas d'un matériau multicouche cisaillé dans son plan de renforcement. Il s'agit du cas le plus favorable possible pour ce qui est de la raideur en cisaillement.

En réalité, cette hypothèse est très rarement vérifiée, notamment pour le renforcement par colonnes (voir section 2.3). Il faudra donc toujours évaluer $\langle\gamma\rangle_s$ pour savoir si le facteur de localisation est plus ou moins supérieur à l'unité. Une schématisation de ce cas général est donnée sur la Figure 3.3(b).



(a) (b)

FIGURE 3.3 – Facteur de localisation dans l'hypothèse d'une déformation homogène (a) et dans le cas général (b).

Pour déterminer si le sol renforcé risque d'être plus sujet au phénomène de liquéfaction que le sol non renforcé, il faut donc analyser la compétition entre le gain de raideur globale de cisaillement lié au renforcement et la localisation de l'amplitude de cisaillement dans le sol en présence de ce renforcement. On introduit pour ce faire un paramètre adimensionnel

exprimant la réduction du risque potentiel de liquéfaction du sol R, appelé *facteur de réduction du risque*, défini par :

$$R = \frac{\langle \gamma \rangle_s}{\gamma_s} = \lambda \sqrt{\frac{G_s}{G_L}} \tag{3.9}$$

Avec cette définition, on détecte une augmentation du risque de liquéfaction lorsque $R > 1$. La réduction de ce risque grâce à l'apport du renforcement se traduit par le fait que $R < 1$. On cherche désormais à évaluer le facteur de réduction du risque de liquéfaction pour les différentes configurations de renforcement présentées précédemment.

3.1.2 Évaluation du facteur de réduction du risque de liquéfaction

Pour quantifier le risque de liquéfaction des sols renforcés (par colonnes ou tranchées croisées), on considère les cellules de base décrites dans le chapitre 2 et représentées sur la Figure 2.7. Les études analytiques et numériques des différents modules de cisaillement longitudinaux ont déjà été effectuées dans le chapitre précédent (voir Fig.2.12 et Fig.2.14). La comparaison des encadrements de ces modules est rappelée sur la Figure 3.4 et fait apparaître l'intérêt indéniable du renforcement par tranchées croisées. Pour évaluer le facteur de réduction du risque de liquéfaction R, on s'intéresse au calcul du facteur de localisation λ pour chaque configuration de renforcement.

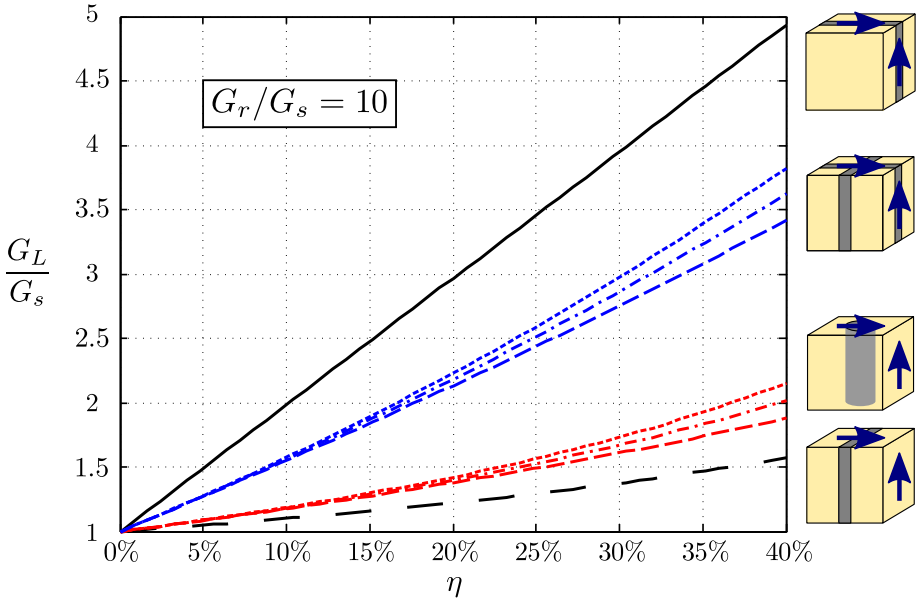


FIGURE 3.4 – Encadrements du module de cisaillement longitudinal pour les différentes configurations de renforcement.

3.1.2.1 Modélisation numérique

Dans un premier temps, des simulations numériques, calquées sur la démarche de la section 2.3, sont effectuées sur les cellules de base, à l'aide du code de calcul Castem [Cast3M, 2003]. λ est évalué en calculant numériquement la moyenne des déformations de cisaillement sur le domaine occupé par le sol, selon la définition (3.8).

Les déformées obtenues, volontairement exagérées pour des raisons de clarté, sont rappelées sur la Figure 3.5. Il est clair que les deux techniques de renforcement n'ont pas le même comportement, pour une sollicitation de cisaillement identique, notamment au niveau de la déformation dans le sol en place. Les résultats numériques de ces calculs seront comparés par la suite à des évaluations analytiques, ce qui permettra de voir les implications de cette observation.

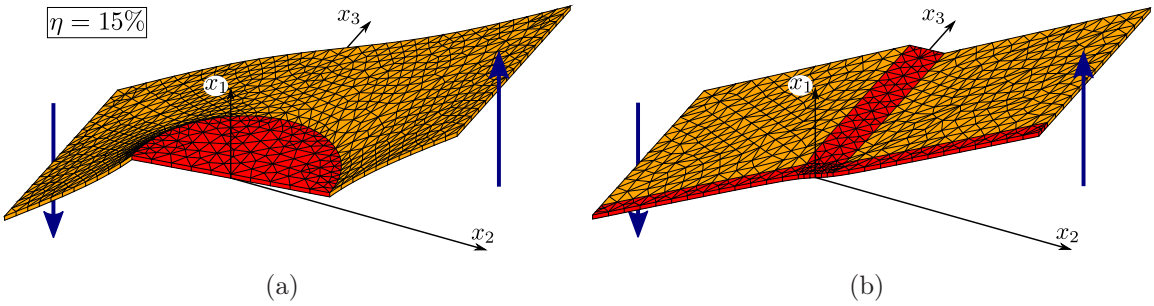


FIGURE 3.5 – Déformées associées au cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par colonnes (a) et par tranchées croisées (b).

3.1.2.2 Renforcement par colonnes

Deux estimations du facteur de réduction de risque, R^+_{col} et R^-_{col}, sont déduites à partir des champs de déplacement et de contrainte utilisés pour déterminer les majorant et minorant de $G_{L,col}$. Les champs de déplacement sont définis par zone, dont certaines correspondent uniquement au sol (voir section 2.2.2). Après avoir effectué quelques manipulations mathématiques sur le champ de déplacement donné par (A.2), on obtient la première estimation suivante :

$$\lambda^+_{col} = \frac{1}{1-\eta}\left(1 - \frac{2\eta}{1 + G_r/G_s + (4\eta/\pi)(1 - G_r/G_s)}\right) \tag{3.10}$$

ce qui donne

$$R^+_{col} = \lambda^+_{col}\sqrt{\frac{G_s}{G^{ub}_{L,col}}} \tag{3.11}$$

avec

$$G^{ub}_{L,col} = G_s\left(1 + \frac{2\eta(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\eta/\pi)(G_r - G_s)}\right) \tag{3.12}$$

La deuxième estimation du facteur de réduction de risque provient du champ de contrainte, utilisé pour la mise en œuvre du minorant de $G_{L,col}$ et défini par (A.13)-(A.15). En développant les calculs pour décrire les déformations dans les différents constituants de la cellule de base, on a :

$$R^-_{col} = \lambda^-_{col}\sqrt{\frac{G_s}{G^{lb}_{L,col}}} \tag{3.13}$$

avec

$$\lambda^-_{col} = \frac{G^{lb}_{L,col}}{G_s}\frac{1}{1-\eta}\left(1 - \frac{2\eta G_r/G_s}{1 + G_r/G_s - (4\eta/\pi)(1 - G_r/G_s)}\right) \tag{3.14}$$

et en rappelant que

$$G_{L,col}^{lb} = G_s \left(1 - \frac{2\eta(G_r - G_s)}{G_r + G_s + (4\eta/\pi)(G_r - G_s)} \right)^{-1} \tag{3.15}$$

On effectue ainsi la comparaison entre ces deux expressions analytiques de R et le résultat issu de la simulation numérique pour un sol renforcé par colonnes. On choisit de prendre un rapport des modules de cisaillement G_r/G_s entre le renforcement et le sol égal à 10. Le facteur de substitution variant sur une plage usuelle ($\eta \in [0\%, 40\%]$), les différentes évaluations sont représentées sur la Figure 3.6.

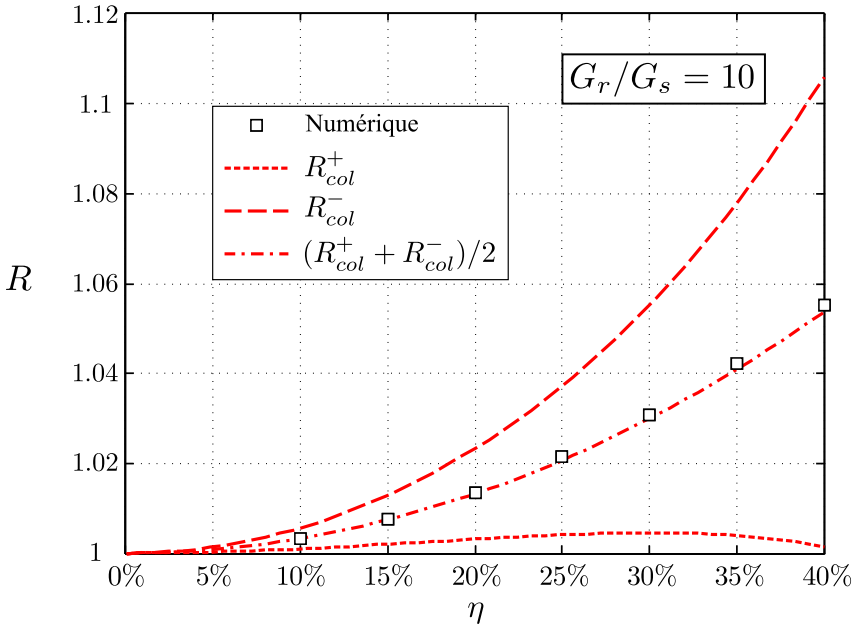


FIGURE 3.6 – Différentes estimations du facteur de réduction du risque de liquéfaction d'un sol renforcé par colonnes.

Tout d'abord, on peut constater que les deux estimations R_{col}^+ (pointillés) et R_{col}^- (tirets) encadrent la solution numérique (carrés), bien qu'elles n'aient *a priori* aucun statut de bornes pour R. Leur moyenne (en trait mixte) semble être une très bonne approximation du facteur de réduction du risque de liquéfaction. Toutes ces évaluations, numérique ou analytiques, montrent que le renforcement par colonnes n'est pas efficace, d'un point de vue mécanique, pour la réduction du risque de liquéfaction. Étant donné que toutes ces estimations de R sont supérieures à l'unité, on peut même considérer que le risque est légèrement accentué en présence de colonnes. La déformation de cisaillement est en effet principalement encaissée par le sol, comme nous l'avions déjà souligné dans le chapitre précédent et comme l'indique la déformée sur la Figure 3.5(a), annulant ainsi l'augmentation de la raideur.

3.1.2.3 Renforcement par tranchées croisées

On effectue exactement la même démarche pour obtenir des estimations du facteur de réduction du risque de liquéfaction pour les sols renforcés par tranchées croisées, notées

R_{tc}^{+} et R_{tc}^{-}. En partant du champ de déplacement (2.40), utilisé pour obtenir le majorant du module de cisaillement longitudinal dans cette configuration, on déduit les expressions suivantes :

$$R_{tc}^{+} = \lambda_{tc}^{+}\sqrt{\frac{G_s}{G_{L,tc}^{ub}}} \tag{3.16}$$

avec

$$\lambda_{tc}^{+} = \left(2 - \eta + \sqrt{1-\eta} + \sqrt{1-\eta}(1-\sqrt{1-\eta})G_s/G_r\right)^{-1} \tag{3.17}$$

et

$$G_{L,tc}^{ub} = G_r \frac{\sqrt{1-\eta}G_s + (1-\sqrt{1-\eta})G_r}{\sqrt{1-\eta}(1-\sqrt{1-\eta})G_s + (2-\eta-\sqrt{1-\eta})G_r} \tag{3.18}$$

De la même façon, en partant du champ de contrainte (2.46), on obtient une deuxième estimation du facteur de réduction du risque de liquéfaction :

$$R_{tc}^{-} = \lambda_{tc}^{-}\sqrt{\frac{G_s}{G_{L,tc}^{lb}}} \tag{3.19}$$

avec

$$\lambda_{tc}^{-} = \left(\sqrt{1-\eta} + (1-\sqrt{1-\eta})G_s/G_r\right)^{-1} \tag{3.20}$$

et

$$G_{L,tc}^{lb} = G_r \left(\frac{\sqrt{1-\eta}/G_s + (1-\sqrt{1-\eta})/G_r}{\sqrt{1-\eta}(1-\sqrt{1-\eta})/G_s + (2-\eta-\sqrt{1-\eta})/G_r}\right)^{-1} \tag{3.21}$$

Comme pour le renforcement par colonnes, une comparaison est faite entre les estimations analytiques R_{tc}^{+} (en pointillés) et R_{tc}^{-} (en tirets) et les résultats issus de simulations numériques (voir Figure 3.7).

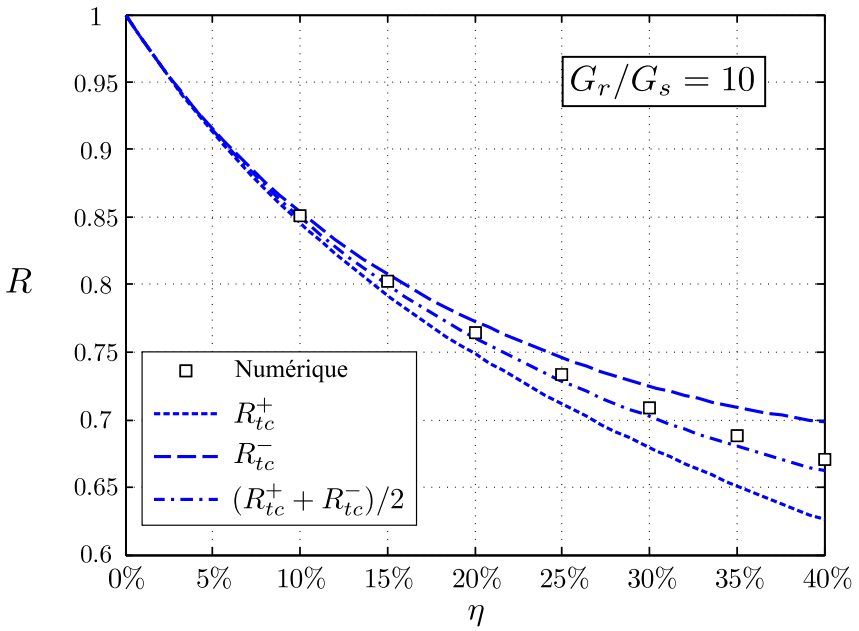


FIGURE 3.7 – Différentes estimations du facteur de réduction du risque de liquéfaction d'un sol renforcé par tranchées croisées.

Cette fois encore, les deux estimations encadrent la solution numérique (carrés) et leur moyenne (en trait mixte) constitue une excellente approximation du facteur de réduction du risque de liquéfaction. On constate que, pour cette configuration, les différentes estimations sont significativement inférieures à l'unité. Cela amène à penser que les tranchées croisées vont avoir un apport bénéfique vis-à-vis du risque de liquéfaction.

L'effet de contreventement, déjà évoqué dans le chapitre 2, fait que le sol est en partie "protégé" de la déformation de cisaillement grâce à la tranchée qui se trouve dans le plan de la sollicitation (voir Figure 3.5(b)).

3.1.3 Analyse des résultats et commentaires

Pour bien mettre en évidence les différences de comportement vis-à-vis du risque de liquéfaction entre le renforcement par colonnes et par tranchées croisées, on représente les résultats analytiques sur un même graphique. On fait également apparaître sur la Figure 3.8, le résultat obtenu en faisant l'hypothèse de déformation homogène pour l'ensemble du sol renforcé (en trait plein). En partant de ce postulat, retenu notamment par [Baez et Martin, 1993], le facteur de localisation λ est unitaire. Le facteur de réduction de risque vaut alors :

$$R = \sqrt{\frac{1}{1-\eta+\eta G_r/G_s}} \quad \text{en hypothèse de déformation homogène} \tag{3.22}$$

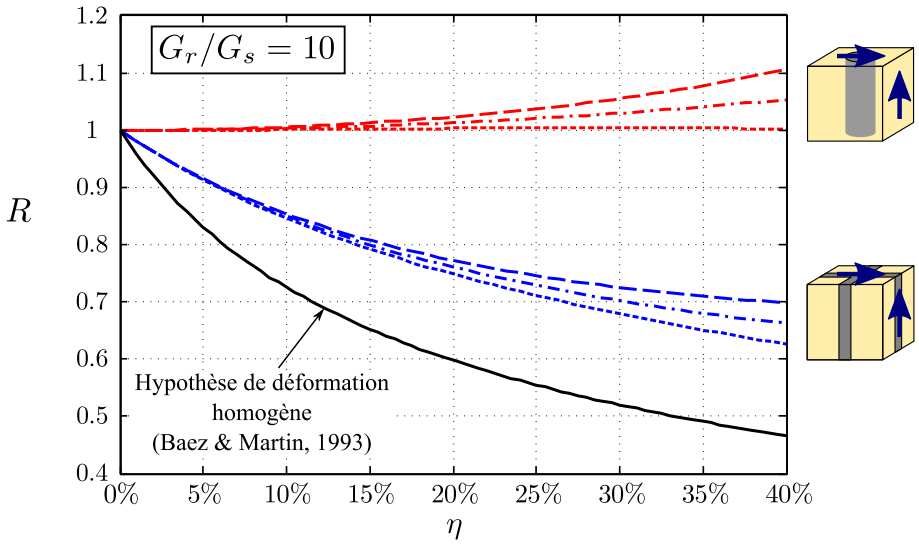


FIGURE 3.8 – Comparaison du facteur de réduction du risque de liquéfaction pour les différentes configurations de renforcement.

En adoptant un rapport des modules de cisaillement égal à 10, on s'aperçoit que, pour une fraction volumique de renforcement usuelle $\eta = 15\%$, le risque de liquéfaction du sol renforcé par colonnes est augmenté de moins de 1% (en prenant $(R^+_{col} + R^-_{col})/2$). En revanche, pour les mêmes caractéristiques, la configuration en tranchées croisées réduit le risque de près de 20%. L'avantage du renforcement des sols par tranchées croisées par rapport à un renforcement par colonnes vis-à-vis du risque de liquéfaction du sol en place

est donc clairement mis en évidence.

En ce qui concerne l'hypothèse de déformation homogène dans le sol renforcé, on constate qu'elle prédit une réduction importante du risque. En particulier, pour un facteur de substitution de 15%, le risque de liquéfaction est diminué de 35%. Il convient de remarquer que le postulat fait par Baez et Martin est valable uniquement dans un cas bien précis, celui d'une sollicitation de cisaillement dans le plan de renforcement d'un sol multicouche, dénommé plan fort (section 2.1.3). Il est, en revanche, totalement erroné dans le cas d'un sol renforcé par colonnes, comme le prouve les déformées obtenues numériquement.

En pratique, les géotechniciens utilisent cette hypothèse pour justifier l'emploi des colonnes pour lutter contre le risque de liquéfaction. On montre donc ici que cette justification est abusive, d'un point de vue mécanique. Mais il existe bien sûr d'autres effets, non pris en compte dans cette étude, qui peuvent rendre les colonnes ballastées efficaces, tels que le drainage ou l'amélioration des caractéristiques du sol au voisinage des colonnes lors de leur mise en œuvre par exemple.

Pour conclure sur l'utilisation des tranchées croisées comme technique de remédiation vis-à-vis du risque de liquéfaction des sols, une étude paramétrique rapide est menée en faisant varier le rapport des modules de cisaillement, pour différentes valeurs de la fraction volumique. On fait apparaître sur la Figure 3.9(a) la moyenne des estimations R_{tc}^{+} et R_{tc}^{-} pour différents η. En considérant un rapport des modules de cisaillement égal à 20, le facteur de réduction du risque de liquéfaction décroît de 0.67 à 0.58 lorsque η passe de 15% à 25%, puis ce facteur diminue encore de 0.58 à 0.52 entre $\eta = 25\%$ et $\eta = 35\%$. Cela suggère qu'il n'est pas nécessaire d'augmenter l'épaisseur des tranchées indéfiniment pour réduire le risque de liquéfaction de façon significative.

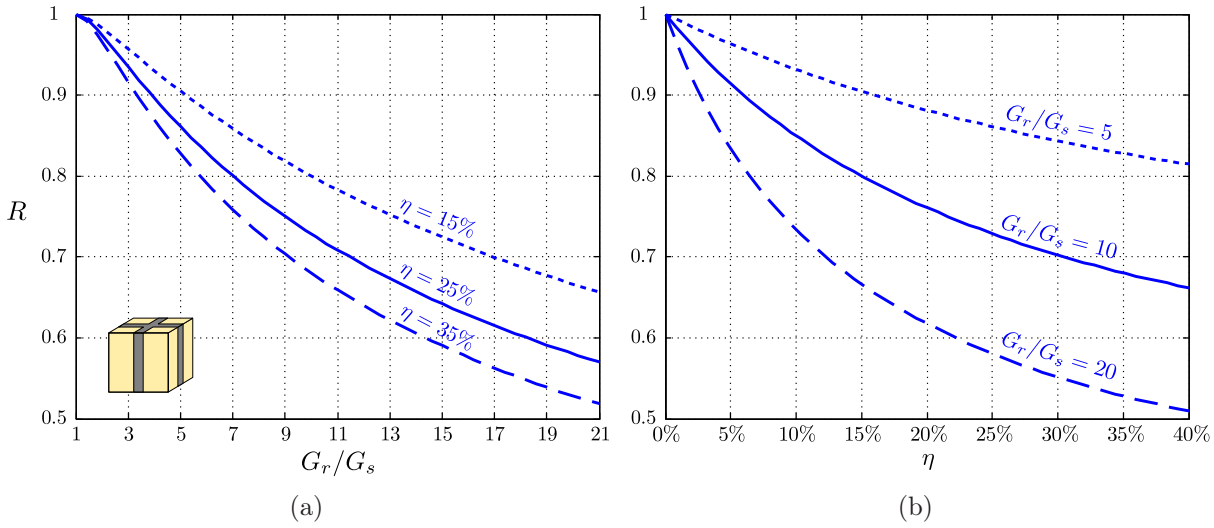


FIGURE 3.9 – Facteur de réduction du risque de liquéfaction d'un sol renforcé par tranchées croisées pour η fixé (a) ou pour G_r/G_s fixé (b).

De la même manière, pour une valeur de G_r/G_s fixée, l'influence de l'augmentation

de η est plus évidente pour de faibles rapports de modules de cisaillement (voir Figure 3.9(b)). Si on regarde ce qui ce passe pour $G_r/G_s = 20$, on s'aperçoit que R diminue rapidement pour de faibles valeurs du facteur de substitution, puis la diminution est plus lente lorsqu'on tend vers des fractions volumiques importantes.

En appliquant la méthode d'homogénéisation périodique au problème de liquéfaction des sols renforcés, on a pu mettre en lumière différentes estimations d'un facteur de réduction du risque de liquéfaction qui rend compte des effets de localisation de la déformation de cisaillement dans le sol en place lors d'un séisme. Nous avons pu remarquer que les justifications utilisées pour préconiser le renforcement par colonnes (basées sur l'hypothèse de déformation homogène) étaient erronées d'un point de vue mécanique. La configuration en colonnes aurait même tendance à légèrement augmenter le risque de liquéfaction, car elle tend à localiser les déformations dans le sol en place.

Cette étude a, en revanche, prouvé l'efficacité indéniable du renforcement par tranchées croisées. Un effet de contreventement se fait ressentir dans cette configuration, due à la structure de type *nid d'abeilles* qui "protège" le sol en place [Nguyen *et al.*, 2013]. En faisant une rapide analyse paramétrique, nous avons pu constater que l'évolution de R, en fonction du rapport des modules de cisaillement ou de la fraction volumique, était loin d'être linéaire. On peut donc envisager d'approfondir cette étude afin de trouver des paramètres mécaniques et géométriques optimisés vis-à-vis du risque de liquéfaction, tout en prenant en compte les impacts économiques des différentes configurations.

3.2 Tassement vertical, déplacement latéral et inclinaison de renversement d'une semelle sur une fondation en sol renforcé

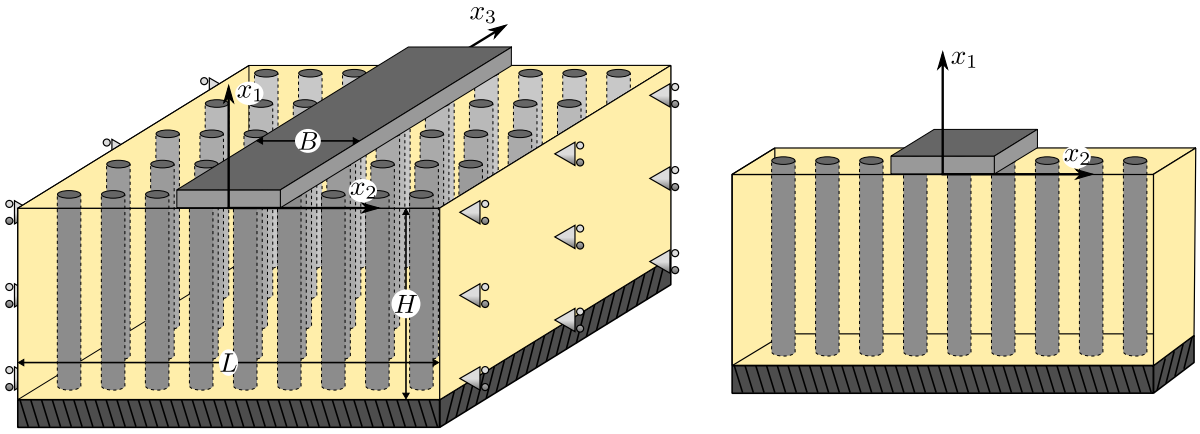
On souhaite étudier le comportement élastique global d'un massif de fondation en sol renforcé (par colonnes ou tranchées croisées) soumis à une sollicitation combinée. Pour cela, on considère une semelle rigide, de longueur infinie suivant la direction $\underline{e}_3$, reposant sur un sol (caractéristiques E_s et ν_s) entièrement renforcé suivant cette même direction et reposant sur un substratum rigide (voir Figure 3.10(a)). La largeur de la semelle suivant la direction $\underline{e}_2$ est notée B, H représente la hauteur de renforcement (caractéristiques E_r et ν_r) et L est la largeur du sol renforcé considéré.

La semelle est supposée indéformable et animée d'un mouvement de translation verticale δ_1 et horizontale δ_2, ainsi que d'un mouvement de rotation autour de l'axe Ox_3 d'angle φ. On suppose qu'il y a adhérence parfaite entre la semelle de fondation et le sol. Le déplacement à l'interface est alors caractérisé par :

$$\underline{\xi}(x_1 = 0, -B/2 \leq x_2 \leq B/2, x_3) = (\delta_1 - \varphi x_2)\underline{e}_1 + \delta_2 \underline{e}_2 \tag{3.23}$$

Des conditions aux limites de type *contact lisse* sont imposées sur les différents bords du sol renforcé :

$$\begin{cases} \underline{\xi} \cdot \underline{e}_1 = 0 \text{ et } \underline{e}_2 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1) = \underline{e}_3 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1) = 0\,, & \forall (x_2, x_3), x_1 = -H \\ \underline{\xi} \cdot \underline{e}_2 = 0 \text{ et } \underline{e}_1 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_2) = \underline{e}_3 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_2) = 0\,, & \forall (x_1, x_3), x_2 = \pm L/2 \end{cases} \tag{3.24}$$



(a) (b)

FIGURE 3.10 – Semelle filante reposant sur un massif de fondation en sol renforcé par colonnes.

Avec une telle configuration géométrique et un tel chargement, l'étude de l'ouvrage peut se réduire à l'analyse du comportement d'une *tranche* de sol renforcé comprise entre deux plans parallèles au plan vertical de normale $\underline{e}_3$ (voir Figure 3.10(b)). Cette tranche est considéré comme étant en *déformations planes* dans le plan (x_1, x_2) et des conditions de type contact lisse sont imposées sur les bords de normale $\underline{e}_3$. Toute la suite de l'étude consiste à évaluer la réponse structurelle de cet ouvrage dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des différents matériaux.

3.2.1 Matrice de raideur structurelle

3.2.1.1 Définition de $\underline{\underline{R}}$

Le mouvement de solide rigide imposé à la semelle engendre des efforts de réaction au niveau de l'interface entre cette dernière et le sol renforcé. On distingue alors trois paramètres de chargement associés aux paramètres cinématiques $(\delta_1, \delta_2, \varphi B)$, qui sont tous définis par unité de longueur suivant $\underline{e}_3$.

- Q_1 est la composante verticale (dans la direction $\underline{e}_1$) de la résultante des efforts extérieurs appliqués à la fondation, donnée par :

$$Q_1 = \int_{-B/2}^{B/2} \underline{e}_1 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1) \, \mathrm{d}x_2 \tag{3.25}$$

- Q_2 est la composante horizontale (dans la direction $\underline{e}_2$) de la résultante des efforts extérieurs appliqués à la fondation, définie par :

$$Q_2 = \int_{-B/2}^{B/2} \underline{e}_2 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1) \, \mathrm{d}x_2 \tag{3.26}$$

- M est le moment par rapport à l'axe de la semelle des efforts extérieurs appliqués à la fondation, donné par :

$$M = \int_{-B/2}^{B/2} -x_2 \underline{e}_1 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1) \, \mathrm{d}x_2 \tag{3.27}$$

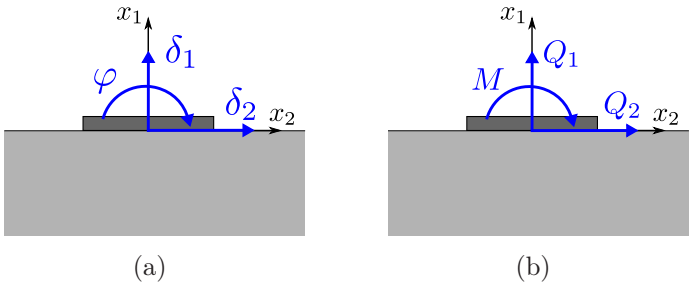


FIGURE 3.11 – Paramètres cinématiques (a) et paramètres de chargement associés (b).

Dans le contexte du comportement élastique linéaire des différents constituants, les paramètres cinématiques δ_1, δ_2 et φB sont reliés linéairement à leurs variables d'efforts généralisés Q_1, Q_2 et M/B, qui sont leur dual en termes d'énergie (Figure 3.11). Cette relation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ M/B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & R_{2\varphi} \\ 0 & R_{\varphi 2} & R_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \varphi B \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

où $\underline{\underline{R}}$ est la *matrice de raideur structurelle*, qui est symétrique. Ses composantes R_{ij} ont la dimension d'une contrainte. Les termes R_{12} et $R_{1\varphi}$ sont nuls car, lors d'un chargement purement vertical ($\delta_2 = 0$ et $\varphi = 0$), la symétrie du problème conduit à une composante horizontale des efforts extérieurs et une résultante des moments nulles.

Dans l'étude qui va suivre, on va comparer les différentes configurations de renforcement de sol pour une géométrie de la structure donnée (L, B et H). Les trois composantes diagonales de la matrice de raideur structurelle seront évaluées. Elles définissent la réponse élastique du sol renforcé à trois sollicitations distinctes :

- R_{11} est la *raideur verticale* de la structure
- R_{22} est la *raideur horizontale* de la structure
- $R_{\varphi\varphi}$ est la *raideur au renversement* de la structure

3.2.1.2 Quelques travaux antérieurs sur l'évaluation de la raideur verticale

Au vu de (3.28), un lien évident peut être établi entre le tassement adimensionnel δ_1/H, la pression verticale moyenne Q_1/B sous la semelle et la raideur verticale définie ci-dessus. On a en effet la relation

$$\frac{Q_1/B}{\delta_1/H} = R_{11}\frac{H}{B} \tag{3.29}$$

Plusieurs auteurs se sont intéressés au cas particulier $H = B$ pour lequel la semelle filante est appliquée sur la totalité de la surface du massif renforcé, de sorte que

$$R_{11}(H = B) = \frac{Q_1/B}{\delta_1/H} = E_{\text{œd}}^{hom} \tag{3.30}$$

où $E_{\text{œd}}^{hom}$ désigne le *module œdométrique macroscopique* du sol renforcé.

Des évaluations de ce module œdométrique ont été fournies par [Balaam et Booker, 1981, Chow, 1996] ou encore [Poorooshasb et Meyerhof, 1997] en s'appuyant sur le modèle de "cellule composite", sans préciser si de telles évaluations constituent des bornes de la valeur exacte. Plus récemment [Abdelkrim et de Buhan, 2007] ont obtenu le minorant suivant :

$$\frac{Q_1/B}{\delta_1/H} \geq \langle E \rangle + 2\frac{\langle \nu \rangle^2}{\langle (1+\nu)(1-2\nu)/E \rangle} \tag{3.31}$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne pondérée de la quantité $(\cdot)$, grâce à la mise en œuvre du principe de minimum en contrainte décrit en section 2.2.1.2, utilisant des champs de contrainte constants par morceaux.

Cette approche variationnelle en contrainte a été appliquée par [Bouassida *et al.*, 2003], directement sur l'ouvrage renforcé, c'est-à-dire sans passer par l'étape d'homogénéisation, puis par [Ben Saïd *et al.*, 2004] d'abord sur la cellule de base, ensuite sur l'ouvrage homogénéisé. Enfin, [Hassen *et al.*, 2010], s'appuyant sur les minorants des composantes du tenseur d'élasticité macroscopique obtenus par l'approche variationnelle à champs constants, ont effectué des calculs par éléments finis permettant d'estimer la raideur verticale d'une semelle filante sur un massif renforcé par colonnes.

Il convient de noter que, les calculs par éléments finis de l'ouvrage étant réputés "exacts", l'utilisation dans ces calculs de minorants des coefficients d'élasticité macroscopiques, implique nécessairement que l'évaluation de la raideur verticale qui en résulte constitue un minorant de la valeur exacte. En outre, le fait que, dans l'expression de ces minorants n'intervient que la fraction volumique du renforcement, entraine que de tels minorants seront valables quelque soit la forme géométrique des inclusions de renforcement, comme nous allons pouvoir le constater.

3.2.2 Calculs numériques à deux échelles

L'évaluation de $\underline{\underline{R}}$ par des calculs numériques directs où le sol et les renforcements seraient discrétisés séparément est rendu difficile par le caractère tridimensionnel et l'hétérogénéité de l'ouvrage qui nécessitent un maillage très fin pour calculer la raideur d'une telle structure hétérogène. Pour cette raison, en ayant adopté la démarche d'homogénéisation schématisée sur la Figure 2.1, nous allons utiliser des méthodes numériques pour résoudre successivement le problème auxiliaire d'élasticité défini sur la cellule de base, afin de déterminer les composantes du tenseur d'élasticité macroscopique, puis celui relatif à l'ouvrage, afin de déterminer les composantes de la matrice de raideur structurelle.

3.2.2.1 Résolution du problème auxiliaire d'élasticité

À l'échelle de la cellule de base, on résout le problème auxiliaire à l'aide du code aux éléments finis Castem [Cast3M, 2003]. On détermine ainsi les caractéristiques macroscopiques du sol renforcé. Dans la section 2.3, nous avons expliqué comment il est possible de déterminer les composantes de $\mathbf{C}^{hom}$ en appliquant différentes sollicitations

sur la cellule de base considérée. Les résultats issus de ces calculs ont déjà été qualifiés par rapport à des encadrements théoriques analytiques.

On effectue les calculs pour un sol renforcé par colonnes d'une part, et pour une configuration en tranchées croisées d'autre part. À chaque fois, on fixe une valeur pour la fraction volumique de renforcement η, ainsi que pour les caractéristiques mécaniques locales (E_s, ν_s, E_r, ν_r). Un exemple de maillages utilisés est présenté sur la Figure 3.12 (avec $\eta = 25\%$).

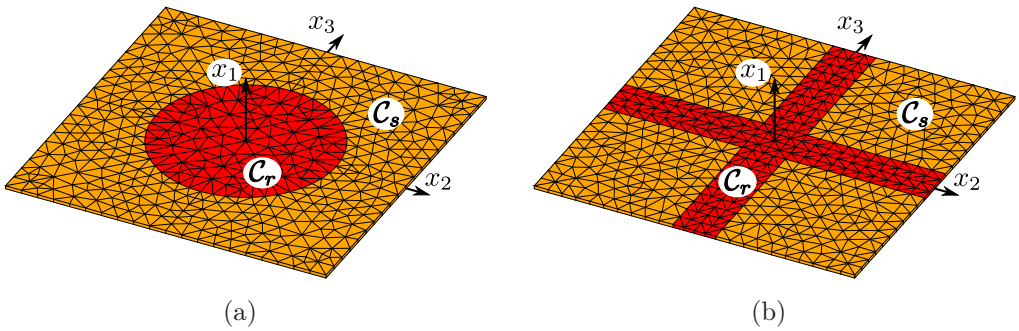


FIGURE 3.12 – Maillage de la cellule de base pour un renforcement par colonnes (a) ou par tranchées croisées (b).

Au final, grâce aux relations (2.53) et (2.54), on peut alors déterminer les modules d'Young et modules de cisaillement longitudinaux et transversaux pour ces deux matériaux composites orthotropes, ainsi que les trois coefficients de Poisson.

3.2.2.2 Calculs à l'échelle de l'ouvrage

Castem permet d'utiliser différents types de comportements classiques en mécanique. Parmi ceux-ci, il est possible d'implémenter la loi de comportement d'un matériau orthotrope. Il suffit pour cela d'indiquer la direction longitudinale, définie à la section 2.2.2, notée ici $\underline{e}_1$. On indique ensuite les modules d'Young E_L et E_T, les modules de cisaillement G_L et G_T ainsi que les coefficients de Poisson ν_{LT}, ν_{TL} et ν_{TT}. Enfin, on peut effectuer n'importe quel type de calcul élastique avec cette loi de comportement du matériau homogénéisé.

On considère désormais le problème à l'échelle de l'ouvrage homogénéisé, sollicité en déformations planes, le sol renforcé étant discrétisé en éléments finis uniquement dans le plan (x_1, x_2) (voir Figure 3.13). L'étude se fait avec les caractéristiques géométriques suivantes :

$$L = 100\text{m},\ H = 50\text{m},\ B = 20\text{m} \tag{3.32}$$

On impose des conditions aux limites de type contact lisse sur les bords latéraux et inférieurs de la structure (3.24). Le déplacement est prescrit pour la semelle rigide tandis que la surface supérieure se trouvant en dehors de la semelle est libre d'effort.

Une fois les caractéristiques mécaniques déterminées sur la cellule de base, avec un facteur de substitution et les caractéristiques des matériaux fixés, on considère désormais

que le sol renforcé est homogène avec un comportement orthotrope, dépendant soit de $\mathbf{C}_{col}^{hom}$ pour le renforcement par colonnes, soit de $\mathbf{C}_{tc}^{hom}$ pour la configuration en tranchées croisées. Trois simulations numériques sont ensuite effectuées pour évaluer la matrice de raideur structurelle (respectivement $\underline{\underline{R}}_{col}^{num}$ et $\underline{\underline{R}}_{tc}^{num}$).

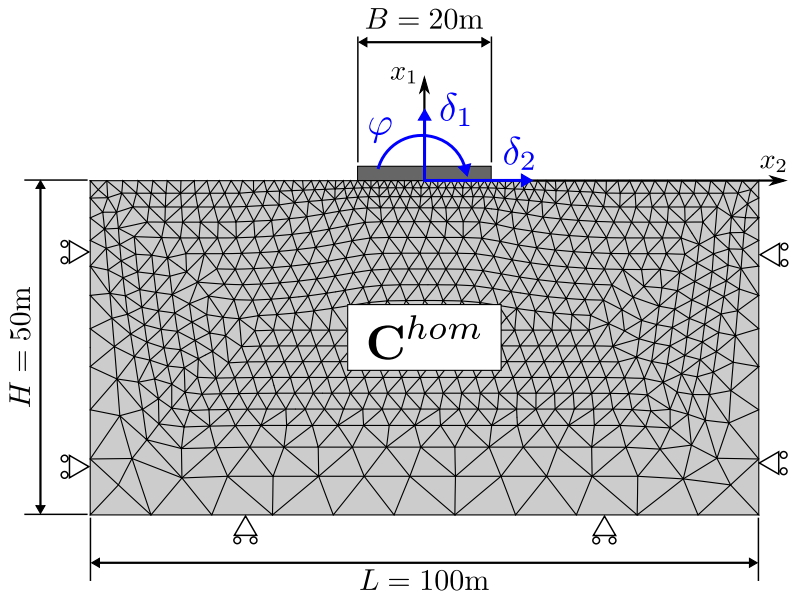


FIGURE 3.13 – Maillage utilisé pour déterminer la matrice de raideur structurelle d'un ouvrage en sol renforcé préalablement homogénéisé.

◇ **Chargement purement vertical** $(\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \varphi B = 0)$

Cette sollicitation permet de déterminer la première colonne de $\underline{\underline{R}}^{num}$. On calcule numériquement la résultante des efforts sous la semelle pour obtenir R_{11}^{num} :

$$R_{11}^{num} = \frac{\int_{-B/2}^{B/2} \sigma_{11} \, \mathrm{d}x_2}{\delta_1} \tag{3.33}$$

Au passage, on vérifie que la composante σ_{11} du champ de contrainte solution du problème est symétrique par rapport à l'axe $x_2 = 0$, alors que σ_{12} est antisymétrique par rapport à ce même axe. Cela permet de vérifier que :

$$\begin{aligned} R_{21}^{num} &= \frac{\int_{-B/2}^{B/2} \sigma_{12} \, \mathrm{d}x_2}{\delta_1} = 0 \\ \text{et } R_{\varphi 1}^{num} &= \frac{\int_{-B/2}^{B/2} -x_2 \sigma_{11} \, \mathrm{d}x_2}{\delta_1 B} = 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

◇ **Sollicitation latérale** $(\delta_1 = 0, \delta_2 = 1, \varphi B = 0)$

On impose cette fois un déplacement horizontal unitaire qui permet de déterminer les composantes figurant dans la deuxième colonne de $\underline{\underline{R}}^{num}$. On peut les calculer de la façon

suivante :

$$R_{22}^{num} = \frac{\int_{-B/2}^{B/2} \sigma_{12} \, \mathrm{d}x_2}{\delta_2} \tag{3.35}$$

$$R_{\varphi 2}^{num} = \frac{\int_{-B/2}^{B/2} -x_2 \sigma_{11} \, \mathrm{d}x_2}{\delta_2 B} \tag{3.36}$$

Cette fois, la composante σ_{11} de la solution est antisymétrique par rapport à l'axe $x_2 = 0$, ce qui permet de montrer que :

$$R_{12}^{num} = \frac{\int_{-B/2}^{B/2} \sigma_{11} \, \mathrm{d}x_2}{\delta_2} = 0 \tag{3.37}$$

◇ **Sollicitation de renversement** ($\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \varphi B = 1$) :

Pour finir, on impose une rotation d'angle φ à la semelle. On peut alors calculer les trois termes restants dans la matrice de raideur structurelle.

$$R_{2\varphi}^{num} = \frac{\int_{-B/2}^{B/2} \sigma_{12} \, \mathrm{d}x_2}{\varphi B} \tag{3.38}$$

$$R_{\varphi\varphi}^{num} = \frac{\int_{-B/2}^{B/2} -x_2 \sigma_{11} \, \mathrm{d}x_2}{\varphi B^2} \tag{3.39}$$

où σ_{11} est toujours antisymétrique par rapport à l'axe $x_2 = 0$, ce qui permet de prouver que :

$$R_{1\varphi}^{num} = \frac{\int_{-B/2}^{B/2} \sigma_{11} \, \mathrm{d}x_2}{\varphi B} = 0 \tag{3.40}$$

L'évaluation de la matrice de raideur structurelle nécessite d'effectuer trois calculs élastiques. Ce travail sera fait par la suite pour les différents types de renforcement et pour différentes valeurs de la fraction volumique η et du rapport de rigidité E_r/E_s.

3.2.3 Comparaison des différents types de renforcement

3.2.3.1 Raideur verticale

Dans un premier temps, on impose un chargement vertical sur les deux configurations de sols renforcés. On effectue une série de simulations en prenant les valeurs caractéristiques suivantes :

$$\eta = 15\%, \; \nu_s = 0.3, \; \nu_r = 0.2, \; E_r/E_s \in [1; 15] \tag{3.41}$$

On obtient comme résultats $R_{11,col}^{num}/E_s$ et $R_{11,tc}^{num}/E_s$ en fonction du rapport de rigidité (voir Figure 3.14). Le minorant issu de la méthode numérique implémentée par [Hassen *et al.*, 2010] est également représenté sur cette figure. En effectuant cette comparaison, on observe tout d'abord que l'écart relatif entre $R_{11,col}^{num}/E_s$ et ce minorant numérique ne dépasse pas 2.5%.

La deuxième observation que l'on peut faire porte sur les différences entre la raideur verticale du sol renforcé par colonnes et celle du sol renforcé par tranchées croisées. Pour

un faible rapport E_r/E_s, les deux techniques de renforcement ont un comportement très proche. Lorsque ce rapport augmente, la différence est accentuée et, lorsque $E_r/E_s = 10$, $R^{num}_{11,tc}/E_s$ est 1.1 fois plus important que $R^{num}_{11,col}/E_s$. Pour ce même rapport de rigidité, dans le cas du renforcement par colonnes, l'augmentation de la raideur structurelle verticale est de l'ordre de 90% par rapport au sol non renforcé ($E_r/E_s = 1$,$\nu_r = \nu_s$). Pour une fondation renforcée par tranchées croisées, cette amélioration est plus importante, proche de 110%.

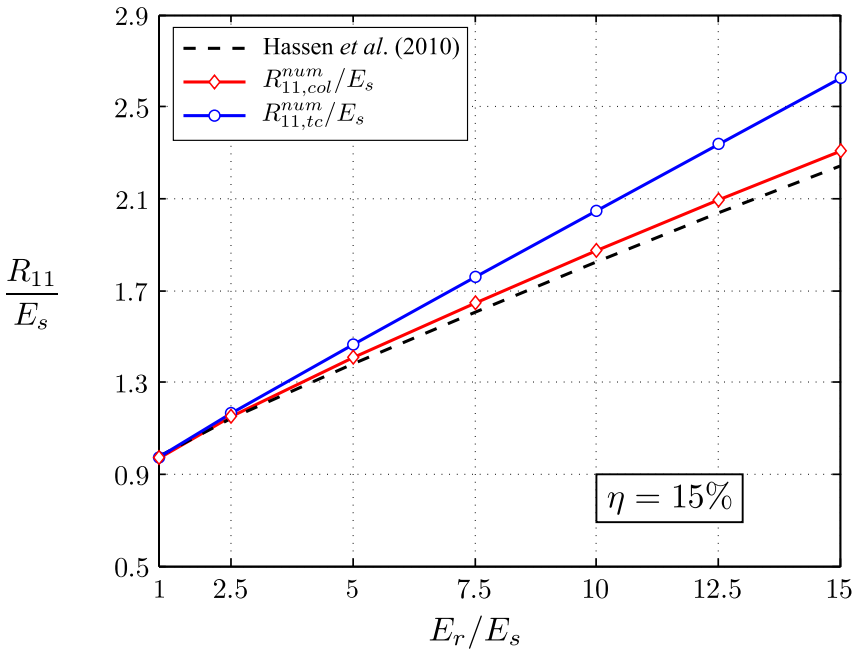


FIGURE 3.14 – Comparaison de différentes évaluations de la raideur verticale normalisée R_{11}/E_s d'une fondation renforcée.

Cette étude rapide nous conduit à comparer le tassement, directement lié à la raideur verticale de la structure par (3.29) toujours en fonction du rapport de rigidité et du type de renforcement. Pour les deux types de configuration, η prend les valeurs usuelles 15%, 25% et 35% (voir Figure 3.15). On étudie le tassement δ_1/H en prenant les caractéristiques suivantes :

$$Q_1/B = 100\text{kPa},\ E_s = 5\text{MPa} \tag{3.42}$$

Pour les deux types de renforcement, on s'aperçoit que, pour un rapport de rigidité fixé, la réduction du tassement en faisant passer η de 15% à 25% est plus importante que celle observée lorsque la fraction volumique passe de 25% à 35%. Ainsi, pour $E_r/E_s = 10$, la première réduction du tassement vaut 34% et la seconde 23% dans le cas d'un renforcement par colonnes. Les gains en matière de tassement sont respectivement de 35% et 26% pour la configuration en tranchées croisées. On peut également remarquer que pour un facteur de substitution donné, la réduction relative du tassement est de plus en plus faible lorsque le rapport de rigidité augmente.

On observe donc un léger avantage de la technique de renforcement par tranchées croisées pour ce qui est de la réduction du tassement par rapport au renforcement par

colonnes. À valeur E_r/E_s fixée, le gain que l'on peut attendre de cette configuration est de 10% par rapport aux sols renforcés par colonnes.

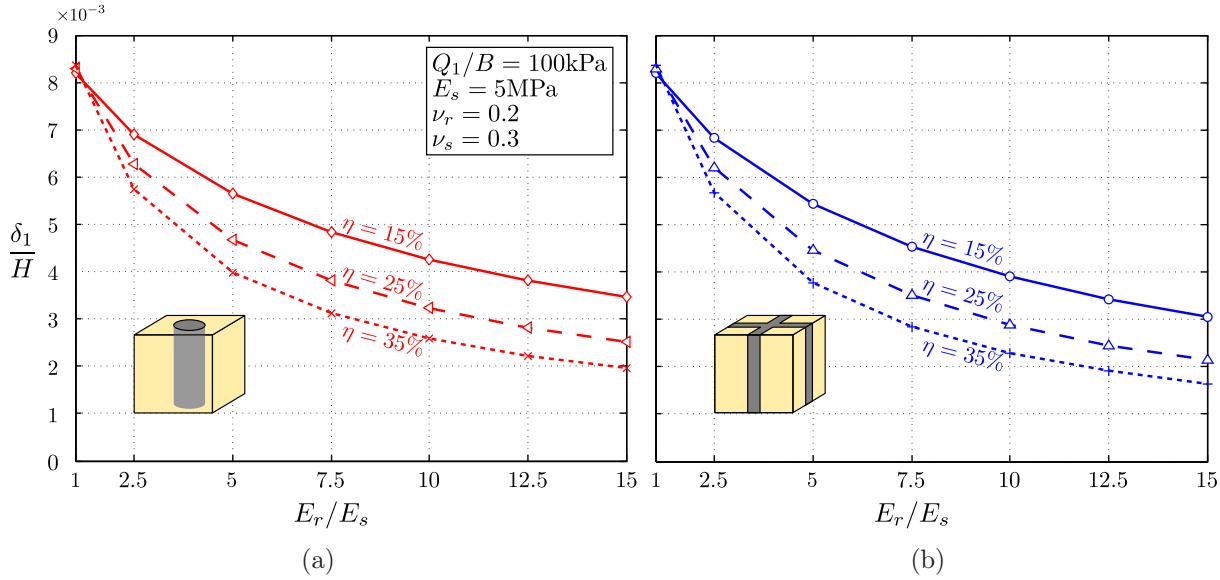


FIGURE 3.15 – Tassements en fonction de la fraction volumique pour un renforcement par colonnes (a) ou par tranchées croisées (b).

3.2.3.2 Raideur latérale

On effectue une autre comparaison entre les résultats numériques et le minorant obtenu par éléments finis [Hassen *et al.*, 2010] pour une sollicitation purement horizontale. On garde les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques que celles décrites par (3.41). On s'intéresse plus particulièrement aux écarts entre la raideur horizontale normalisée R_{22}/E_s d'une fondation renforcée par colonnes par rapport à celle renforcée par des tranchées croisées.

Comme représentée sur la Figure 3.16, la différence entre les deux types de renforcement est cette fois bien plus marquée que celle observée pour la raideur verticale. Pour des valeurs E_r/E_s faibles (inférieures à 2.5), la différence est ténue, mais elle s'accentue très nettement par la suite. En effet, lorsque le rapport de rigidité augmente, $R^{num}_{22,tc}/E_s$ continue de croître de façon quasi linéaire, tandis que la raideur horizontale du sol renforcé par colonnes semble tendre vers un palier. À titre de comparaison, avec un rapport de rigidité $E_r/E_s = 10$, l'amélioration apportée par le renforcement par colonnes n'est que de 33% par rapport au cas non renforcé, tandis qu'elle s'élève à 82% pour la fondation renforcée par tranchées croisées.

Cette grande différence peut s'expliquer par le fait que, dans le cas d'un chargement latéral de la fondation, le sol renforcé tend à être sollicité en cisaillement longitudinal. Or, nous avons pu mettre en lumière dans la section 2.4.2 la faible rigidité en cisaillement de la cellule de base renforcée par colonnes, et à l'inverse le très bon comportement du renforcement par tranchées croisées, grâce à l'effet de *contreventement*.

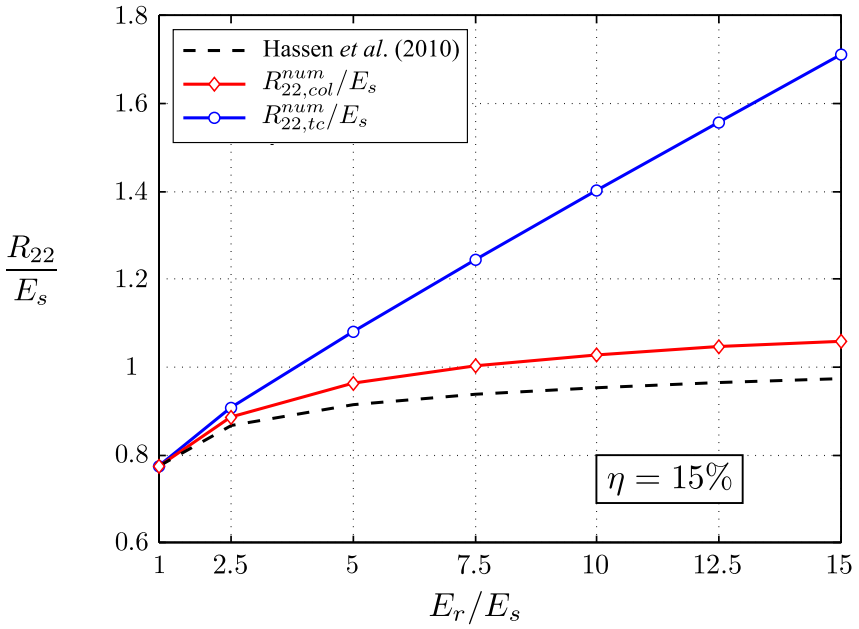


FIGURE 3.16 – Comparaison de la raideur horizontale normalisée R_{22}/E_s d'une fondation renforcée.

Le minorant numérique rend assez bien compte du comportement du renforcement par colonnes avec un écart relatif maximal de 7%. En revanche, il est très éloigné de la raideur horizontale du sol renforcé par tranchées croisées, le minorant utilisé pour évaluer le module de cisaillement longitudinal du milieu homogène équivalent n'étant pas optimisé pour rendre compte de cette géométrie.

3.2.3.3 Raideur vis-à-vis d'une sollicitation de renversement

La dernière comparaison concerne la raideur de la fondation renforcée vis-à-vis du renversement. On conserve les mêmes caractéristiques (3.41) que pour les deux modes de chargement. Les raideurs $R^{num}_{\varphi\varphi,col}/E_s$ et $R^{num}_{\varphi\varphi,tc}/E_s$ sont tracées en fonction du rapport de rigidité sur la Figure 3.17. On y représente également le minorant numérique [Hassen *et al.*, 2010], obtenu en appliquant un angle de rotation à la semelle.

L'écart entre la raideur vis-à-vis du renversement du sol renforcé par colonnes et celle de la configuration en tranchées croisées est à mi-chemin entre celui observé pour les deux comparaisons précédentes. En effet, l'évolution de $R^{num}_{\varphi\varphi,tc}/E_s$ semble presque linéaire, tandis que la raideur de l'ouvrage renforcé par colonnes croît de moins en moins, sans toutefois tendre clairement vers une valeur asymptotique. Pour un rapport de rigidité E_r/E_s fixé à 10, le gain de raideur vis-à-vis du renversement est de 80% pour la configuration en colonnes et de 112% pour le renforcement en tranchées croisées, toujours comparé au cas non renforcé.

Vis-à-vis d'un chargement de renversement une partie du sol renforcé est sollicitée en traction/compression suivant l'axe de renforcement mais aussi en cisaillement. Les modules d'Young longitudinaux des deux types de renforcement sont quasi identiques. En revanche, on a déjà souligné que leurs modules de cisaillement longitudinaux sont

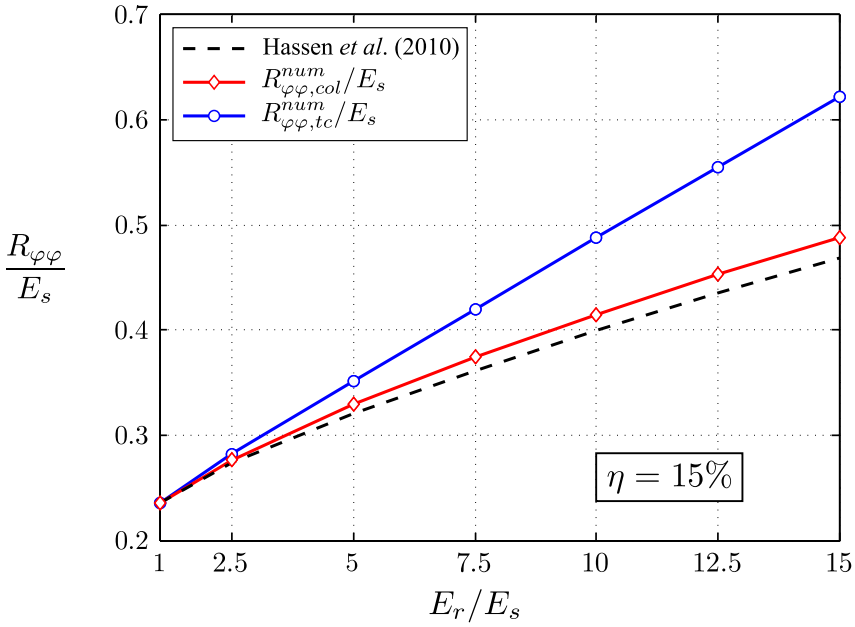


FIGURE 3.17 – Comparaison de la raideur normalisée vis-à-vis du renversement $R_{\varphi\varphi}/E_s$ d'une fondation renforcée.

très différents. Cela se traduit donc, à l'échelle de la structure, par un avantage du renforcement par tranchées croisées, pour une sollicitation de renversement.

Le minorant numérique est très proche de la raideur de la configuration en colonnes puisque l'écart relatif ne dépasse pas les 3%. Il rend également relativement bien compte du comportement de la fondation renforcée par tranchées croisées. Cela vient du fait que le minorant du module d'Young longitudinal est proche du module $E_{L,tc}$ alors que le minorant du module de cisaillement longitudinal pourrait être amélioré pour la configuration en tranchées croisées.

3.2.4 Conclusions sur la démarche adoptée

Au cours de cette étude, nous avons réussi à mettre entièrement en œuvre la méthode d'homogénéisation en élasticité. Tout d'abord, il s'est agi ici de déterminer le tenseur de rigidité macroscopique du sol renforcé ($\mathbf{C}^{hom}_{col}$ ou $\mathbf{C}^{hom}_{tc}$), ce qui a conduit à expliciter complètement le comportement orthotrope d'un sol renforcé par colonnes ou tranchées croisées. Comme on a pu le constater dans ce chapitre, la détermination des caractéristiques macroscopiques à partir de la résolution du problème auxiliaire sur la cellule de base est classique dans la littérature. En revanche, l'incorporation de ce comportement dans un calcul de structure est plus inédite.

Nous nous sommes donc attachés, dans un second temps, à implémenter modules d'Young, de cisaillement et coefficients de Poisson dans un code de calcul par éléments finis, pour une configuration donnée, et à utiliser celui-ci pour analyser le comportement d'un ouvrage en sol renforcé. Les calculs à l'échelle de la cellule de base étant indépendants des calculs à l'échelle de l'ouvrage, on peut tout à fait envisager de créer une bibliothèque de tenseurs de rigidité macroscopiques des sols renforcés, pour différentes

configurations géométriques et caractéristiques mécaniques. Cette bibliothèque peut ensuite être directement utilisée dans des calculs d'ouvrages.

Du point de vue de l'amélioration de la raideur de l'ouvrage dans le cas renforcé par rapport au cas non renforcé, les deux techniques de renforcement (colonnes ou tranchées croisées) sont efficaces. Malgré tout, on détecte un avantage du renforcement par tranchées croisées, en particulier dès que la charge commence à être inclinée par rapport à l'axe de renforcement. Cette observation est, bien sûr, directement liée à la différence de leur comportement macroscopique en cisaillement, déjà soulignée au chapitre précédent.

On a pu également remarquer que les méthodes de dimensionnement utilisées actuellement surestiment fortement le tassement élastique d'un ouvrage sous chargement vertical. De plus, certaines d'entre elles ne permettent pas d'avoir un statut rigoureux du résultat obtenu. En utilisant et en éprouvant la démarche complète présentée dans ce chapitre, il est possible d'optimiser ces dimensionnements pour des ouvrages donnés.

* *

*

Calcul à la rupture des sols renforcés de type cohérent/cohérent

Chapitre 4

Critère de résistance macroscopique d'un sol cohérent renforcé par un matériau purement cohérent

Résumé : *L'expression du problème auxiliaire défini dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture est formalisée dans ce chapitre. En premier lieu, un rapide rappel est fait sur les critères de résistance des constituants d'un milieu hétérogène, ainsi que sur les fonctions d'appui qui leur sont associées. Le domaine de résistance macroscopique de ce milieu est ensuite défini, soit en fonction des contraintes macroscopiques, soit en fonction du taux de déformation macroscopique. En partant de ces définitions, les approches par l'intérieur et par l'extérieur sont explicitées de façon à encadrer le domaine de résistance macroscopique. Ces approches sont ensuite illustrées pour différentes configurations de sols cohérents renforcés par un matériau purement cohérent. Elles amènent à comparer les performances d'un renforcement par colonnes et par tranchées croisées.*

Sommaire

4.1 Domaine de résistance macroscopique d'un milieu hétérogène périodique 70
4.1.1 Critères de résistance locaux . . . 71
4.1.2 Problème auxiliaire de calcul à la rupture . . . 72
4.1.3 Définition cinématique du domaine de résistance macroscopique . . . 73
4.2 Approches statique et cinématique du calcul à la rupture pour le problème auxiliaire . . . 74
4.2.1 Principe de l'approche statique par l'intérieur . . . 74
4.2.2 Principe de l'approche cinématique par l'extérieur . . . 75
4.3 Le cas du matériau multicouche . . . 77
4.3.1 Définition du problème auxiliaire . . . 77
4.3.2 Critère de résistance macroscopique et cohésion anisotrope . . . 79
4.4 Critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes . . 84
4.4.1 Minorant et majorant de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ . . . 84
4.4.2 Estimations du critère et de la cohésion anisotrope . . . 87
4.5 Critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé par tranchées croisées . . . 89
4.5.1 Minorant et majorant de $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$ . . . 89
4.5.2 Comparaison des critères correspondant aux différentes techniques . . . 93

Outre le comportement élastique du matériau considéré, d'autres informations intéressent l'ingénieur pour le dimensionnement d'un ouvrage. C'est particulièrement le cas des capacités de résistance du milieu étudié. Plusieurs techniques permettent d'évaluer les performances ultimes d'un matériau, avant sa ruine. On peut, par exemple, analyser l'évolution élastoplastique de ce matériau au cours d'un trajet de chargement donné jusqu'à l'apparition de la charge limite associée à un mécanisme de ruine plastique.

La *théorie du calcul à la rupture* est une autre façon, beaucoup plus directe et rapide, de parvenir à déterminer le comportement ultime d'un milieu sous un chargement donné. Dans ce mode de raisonnement, on considère que le trajet de chargement reste inconnu (contrairement à l'évolution élastoplastique) et on cherche uniquement à déterminer quelle est la charge *potentiellement supportable* par un matériau avant sa ruine. On obtient ainsi la valeur de la résistance la plus élevée qu'on puisse espérer pour ce matériau pour une sollicitation donnée. Cette théorie, qui est un prolongement de l'analyse limite, a été formalisée par [Salençon, 1983].

L'objectif de toute la suite de ce manuscrit est de mettre en œuvre la méthode d'homogénéisation périodique, explicitée précédemment dans le cadre de l'élasticité, dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture. Nombre de raisonnements formulés dans la section 2.1 restent valables. En particulier, le passage d'un problème initial hétérogène à un problème homogène associé se fait toujours par l'intermédiaire de la résolution d'un problème auxiliaire sur la cellule de base, et est toujours conditionné par le rapport des grandeurs caractéristiques de cette cellule de base et de la structure (voir Figure 2.1).

En revanche, le problème à résoudre est désormais un *problème de calcul à la rupture*, faisant intervenir les critères de résistance des constituants (et non leur tenseur de rigidité). Au final, la résolution du problème auxiliaire mène à la détermination d'un *domaine de résistance macroscopique* du milieu homogène équivalent. Tout l'enjeu de la suite de ce manuscrit est, en premier lieu, de déterminer les domaines de résistance macroscopiques des sols renforcés, et dans un second temps, de les utiliser pour des calculs à l'échelle de l'ouvrage.

Cette démarche d'homogénéisation a été appliquée au cas des milieux périodiques dans un contexte général [Suquet, 1987] et développée dans le contexte des sols renforcés par de Buhan dans son mémoire de thèse d'État [de Buhan, 1986].

4.1 Domaine de résistance macroscopique d'un milieu hétérogène périodique

La détermination des propriétés de résistance d'un milieu composite à partir de la résolution d'un problème sur la cellule de base a déjà donné lieu à des études numériques basées sur des calculs en élastoplasticité [Dvorak et Bahei-El-Din, 1979, Jiang *et al.*, 2002, Taliercio, 2005, Hassen *et al.*, 2013] ou plus précisément adaptées au contexte du calcul à la rupture [Francescato et Pastor, 1997, Pastor *et al.*, 2011]. On retrouve également dans la littérature l'emploi de méthodes analytiques pour évaluer de telles propriétés [Jellali *et al.*, 2005, Abdelkrim et de Buhan, 2007].

Nous allons ici définir le domaine de résistance macroscopique, au regard de la théorie du calcul à la rupture. On va voir notamment comment cette définition peut donner lieu à des évaluations, ayant un statut précis par rapport au domaine exact, obtenues à partir de la résolution de problèmes d'optimisation.

4.1.1 Critères de résistance locaux

Étant donné un élément de matière situé au point $\underline{x}$ d'un milieu Ω, l'ensemble des contraintes qu'il peut supporter forme un domaine dans l'espace des contraintes, appelé *domaine de résistance local*, noté $\mathbf{G}(\underline{x})$, et auquel on peut associer un *critère de résistance*, c'est-à-dire une fonction scalaire, définie comme suit :

$$\forall \underline{x} \in \Omega,\ f(\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in \mathbf{G}(\underline{x}) \tag{4.1}$$

Cette fonction vérifie les conditions suivantes :

$$f(\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \begin{cases} < 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}} \text{ est à l'intérieur de } \mathbf{G}(\underline{x}) \\ = 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}} \text{ est sur la frontière de } \mathbf{G}(\underline{x}) \\ > 0 & \text{si } \underline{\underline{\sigma}} \text{ est à l'extérieur de } \mathbf{G}(\underline{x}) \end{cases} \tag{4.2}$$

On peut souligner que le dernier cas est physiquement inadmissible, la ruine locale du matériau se produisant lorsque l'état de contrainte atteint la frontière du domaine de résistance.

Quelques remarques, utiles par la suite, peuvent être faites concernant le domaine de résistance d'un matériau quelconque. Tout d'abord, l'origine dans l'espace des contraintes, qui correspond à un état de contrainte nulle, appartient au domaine de résistance du matériau. D'autre part, l'expérience montre que $\mathbf{G}(\underline{x})$ est toujours un domaine *convexe*, pouvant être borné ou non suivant les directions de l'espace. Ces remarques sont illustrées sur la Figure 4.1.

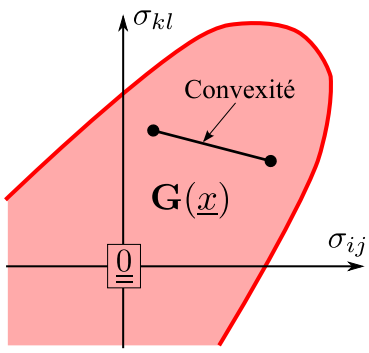


FIGURE 4.1 – Domaine de résistance convexe dans l'espace des contraintes.

Les fonctions de résistance f, supposées refléter le comportement d'un milieu, peuvent être très diverses, généralement formulées à partir d'essais expérimentaux. Il est cependant assez communément admis que le comportement des matériaux intervenant dans les

ouvrages de géotechnique peut être simplifié et modélisé par un critère de type *Mohr-Coulomb* pour les sols frottants (type sable) et de type *Tresca* pour les sols purement cohérents (type argile). Le critère de Mohr-Coulomb, qui fait intervenir une cohésion C et un angle de frottement φ, s'écrit :

$$f(\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) = \sigma_M(1 + \sin\varphi) - \sigma_m(1 - \sin\varphi) - 2C\cos\varphi \leq 0 \tag{4.3}$$

où σ_M et σ_m sont respectivement les contraintes principales majeure et mineure du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. On observe que le critère de Tresca constitue un cas particulier du critère de Mohr-Coulomb pour lequel $\varphi = 0$.

4.1.2 Problème auxiliaire de calcul à la rupture

Après avoir défini le critère local des constituants d'un milieu périodique hétérogène, nous cherchons désormais à caractériser le critère macroscopique de ce milieu. Les explications apportées au chapitre 2 restent valables en ce qui concerne la détermination d'une cellule de base, notée $\mathcal{C}$. Le *critère de résistance macroscopique* du milieu périodique découle de la résolution sur la cellule de base d'un *problème auxiliaire de calcul à la rupture*.

On appelle *domaine de résistance macroscopique* du milieu périodique, noté $\mathbf{G}^{hom}$, l'ensemble des contraintes macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$ pour lesquelles on peut trouver un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement admissible (SA) avec $\underline{\underline{\Sigma}}$ et respectant le critère de résistance local $\mathbf{G}(\underline{x})$ en chaque point de la cellule de base. Ce domaine se définit donc par :

$$\mathbf{G}^{hom} = \left\{\underline{\underline{\Sigma}} \,|\, \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ SA } \underline{\underline{\Sigma}};\, \forall \underline{x} \in \mathcal{C},\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in \mathbf{G}(\underline{x})\right\} \tag{4.4}$$

Les conditions d'admissibilité statique pour un champ de contrainte sont les mêmes que celles données dans le chapitre 2. On retrouve donc, en dehors de la *condition d'anti-périodicité*, les équations régissant l'équilibre ainsi que les relations entre la moyenne du champ de contrainte et le tenseur de contrainte macroscopique.

On peut également définir une fonction de résistance macroscopique, notée F. Ainsi, un tenseur de contrainte macroscopique appartient au domaine de résistance du milieu homogène équivalent lorsque :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{hom} \;\Leftrightarrow\; F(\underline{\underline{\Sigma}}) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ tel que } \begin{cases} \mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ \left[\underline{\underline{\sigma}}\right] \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{à travers } S_{\text{disc}} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ antipériodique} & \text{sur } \partial\mathcal{C} \\ \left\langle \underline{\underline{\sigma}} \right\rangle = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathcal{C}} \underline{\underline{\sigma}}\, \mathrm{d}\mathcal{C} = \underline{\underline{\Sigma}} & \\ f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \leq 0 & \forall \underline{x} \in \mathcal{C} \end{cases} \tag{4.5}$$

où S_{disc} désigne les éventuelles surfaces de discontinuité du champ de contrainte.

On peut remarquer que la convexité du domaine de résistance macroscopique reste respectée. Le fait que l'état de contrainte nulle appartienne à $\mathbf{G}^{hom}$ est également une conséquence directe de sa construction. Ces deux remarques seront utilisées tout au long de cette partie lorsqu'on élaborera des stratégies pour évaluer le critère de résistance macroscopique d'un milieu hétérogène.

4.1.3 Définition cinématique du domaine de résistance macroscopique

En effectuant la dualisation des équations d'équilibre précédentes, à l'aide du Principe des Puissances Virtuelles, il est possible de donner une définition équivalente du domaine de résistance macroscopique à partir d'un champ de vitesse $\underline{U}$ défini sur la cellule de base et cinématiquement admissible (CA) avec un *taux de déformation macroscopique* $\underline{\underline{D}}$. En vertu du lemme de Hill, appliqué au calcul à la rupture par Suquet [Suquet, 1982], la puissance d'un champ de contrainte statiquement admissible dans un champ de vitesse cinématiquement admissible s'écrit :

$$\begin{cases} \forall \underline{U} \text{ CA } \underline{\underline{D}} \\ \forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ SA } \underline{\underline{\Sigma}} \end{cases}, \quad P_e(\underline{U}) = |\mathcal{C}| \left\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{U}) \right\rangle = |\mathcal{C}| \left\langle \underline{\underline{\sigma}} \right\rangle : \left\langle \underline{\underline{d}} \right\rangle = |\mathcal{C}| \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \tag{4.6}$$

Les conditions d'admissibilité cinématique sont équivalentes à celles développées dans le chapitre 2, en remplaçant le champ de déplacement par le champ de vitesse. En particulier, $\underline{U}$ est cinématiquement admissible (CA) avec $\underline{\underline{D}}$ si :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{C},\ \underline{U}(\underline{x}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{x} + \underline{U}^{per}(\underline{x}) \text{ avec } \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} + {}^t\underline{\underline{F}}) \tag{4.7}$$

où $\underline{U}^{per}$ est une *fluctuation périodique* du champ de vitesse. Le champ de taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ s'obtient en tout point à partir du champ de vitesse de la façon suivante :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{U}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U} + {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U}\right) \tag{4.8}$$

La définition cinématique du domaine de résistance macroscopique peut alors être obtenue à partir de la détermination de ce qu'on appelle sa *fonction d'appui* π^{hom} définie par :

$$\forall \underline{\underline{D}},\ \pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \sup\left\{\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \,|\, \underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{hom}\right\} \tag{4.9}$$

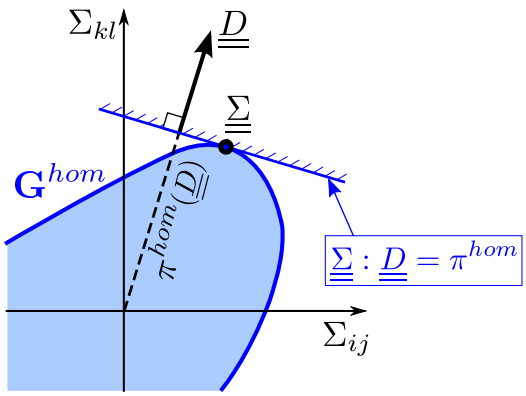


FIGURE 4.2 – Définition cinématique du domaine de résistance macroscopique.

On peut interpréter géométriquement cette fonction d'appui dans l'espace des contraintes macroscopiques, tel que représenté sur la Figure 4.2. Comme pour sa définition statique, le domaine de résistance macroscopique va dépendre du critère local des constituants du milieu hétérogène. Cette fonction d'appui est calculée de la façon suivante :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \min_{\underline{U} \text{ CA } \underline{\underline{D}}} \left\{ \left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \int_{\mathcal{C}} \pi(\underline{\underline{d}})\, \mathrm{d}\mathcal{C} \right\} \tag{4.10}$$

La fonction d'appui locale, en un point de la cellule de base, dépend du critère de résistance retenu. Elle répond à une définition analogue à celle de la fonction d'appui macroscopique (4.9), soit :

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{C},\ \pi(\underline{\underline{d}}) = \sup \left\{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \,|\, \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{G}(\underline{x}) \right\} \tag{4.11}$$

Pour un matériau de type Mohr-Coulomb, dont le critère de résistance est décrit par (4.3), on exprime la fonction d'appui comme suit [Salençon, 1983] :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \begin{cases} C \cot \varphi \, \mathrm{tr}\underline{\underline{d}} & \text{si } \mathrm{tr}\underline{\underline{d}} \geq \sin \varphi (|d_{\mathrm{I}}| + |d_{\mathrm{II}}| + |d_{\mathrm{III}}|) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.12}$$

et dans le cas d'un matériau de type Tresca ($\varphi = 0$), on a :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \begin{cases} C(|d_{\mathrm{I}}| + |d_{\mathrm{II}}| + |d_{\mathrm{III}}|) & \text{si } \mathrm{tr}\underline{\underline{d}} = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.13}$$

où d_{I}, d_{II} et d_{III} sont les valeurs propres du tenseur de taux de déformation $\underline{\underline{d}}$. Pour un matériau respectant ce type de critère, il y a beaucoup de taux de déformation pour lesquels il n'existe pas de charges limites. Dans ce cas, il est impossible de trouver une fonction d'appui finie. Il est donc nécessaire de prendre en compte des *conditions de pertinence* sur le champ de vitesse qui permettent de différencier les cas pour lesquels les taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ associés possèdent ou non une fonction d'appui bornée.

4.2 Approches statique et cinématique du calcul à la rupture pour le problème auxiliaire

Hormis dans des cas simples tels que celui du matériau multicouche (voir section 4.3), il n'est en général pas possible de déterminer exactement le critère de résistance macroscopique d'un milieu hétérogène périodique à partir de la résolution du problème auxiliaire.

Les deux formulations de ce problème, statique (4.4) et cinématique (4.9), peuvent être considérées comme des problèmes d'optimisation, dans lesquels le résultat ne sera plus le domaine de résistance exact, mais une approximation avec un statut bien défini. Ce sont les principes des approches statique et cinématique du calcul à la rupture, qui sont développés dans cette section.

4.2.1 Principe de l'approche statique par l'intérieur

L'approche statique par l'intérieur du domaine de résistance macroscopique consiste à explorer des champs de contrainte particuliers (définis analytiquement ou numériquement grâce à une discrétisation de la cellule de base en éléments finis) et à s'assurer que ces champs respectent en tout point de la cellule de base le critère de résistance local.

On a pu souligner auparavant que les domaines de résistance (locaux ou macroscopiques) possèdent la caractéristique de contenir l'état de contrainte nulle. L'une des méthodes possibles pour essayer de déterminer l'allure du domaine de résistance est donc

d'effectuer des *trajets de chargements radiaux*. Pour cela, étant donné une direction de chargement $\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}_i$ dans l'espace des contraintes macroscopiques, on se donne un champ de contrainte $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_i$ statiquement admissible avec ce chargement, et on cherche à maximiser la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}_i = \lambda_i \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}_i$ de telle sorte que le champ $\lambda_i \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_i$ satisfasse en tout point le critère de résistance.

$$\lambda_i^{\text{stat}} = \max \left\{ \lambda_i \,|\, \forall \underline{x} \in \mathcal{C},\ \lambda_i \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{x}) \in \mathbf{G}(\underline{x}) \right\} \tag{4.14}$$

La contrainte macroscopique $\lambda_i^{\text{stat}} \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}_i$ constitue un *minorant* de la contrainte macroscopique extrême $\lambda_i^{+} \underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}_i$, située sur la frontière du critère.

$$\lambda_i^{\text{stat}} \leq \lambda_i^{+} \tag{4.15}$$

En réitérant cette optimisation plusieurs fois avec différentes directions dans l'espace des contraintes, on peut construire un domaine $\mathbf{G}^{\text{stat}}$ qui aura le statut de *minorant* de $\mathbf{G}^{hom}$ ($\mathbf{G}^{\text{stat}} \subseteq \mathbf{G}^{hom}$). Il suffira pour cela de prendre l'enveloppe convexe des $\underline{\underline{\Sigma}}_i$ pour s'assurer qu'on a la meilleure définition possible de $\mathbf{G}^{\text{stat}}$. Ce raisonnement est présenté sur la Figure 4.3.

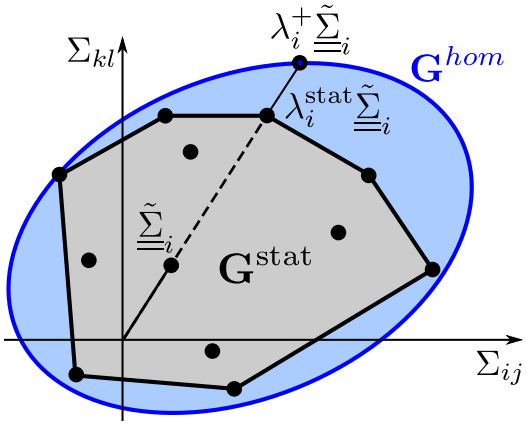


FIGURE 4.3 – Approche statique par l'intérieur du domaine de résistance macroscopique.

Cette approche est qualifiée d'*approche statique par l'intérieur* du calcul à la rupture. Le choix des champs de contrainte statiquement admissibles utilisés et/ou l'optimisation du problème (4.14) peuvent être effectués de façon analytique ou numérique suivant la complexité du problème auxiliaire de départ. Dans la suite de ce travail, nous aurons recours à l'une et l'autre des méthodes de résolution.

4.2.2 Principe de l'approche cinématique par l'extérieur

La définition cinématique de $\mathbf{G}^{hom}$ (équations (4.9) et (4.10)) donne également lieu au développement d'une approche basée sur un problème d'optimisation. Cette fois, les hypothèses à respecter portent sur le champ de vitesse, qui doit rester cinématiquement admissible et respecter les *conditions de pertinence* locales. Le problème d'optimisation à résoudre provient directement de la définition de la fonction d'appui macroscopique (4.10) où l'on cherche à minimiser la puissance résistante maximale $P_{rm} = |\mathcal{C}| \left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle$.

Comme pour l'approche statique, une des méthodes possibles pour évaluer $\mathbf{G}^{hom}$ consiste à fixer une direction pour le taux de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}_i$, à se donner un champ de vitesse CA avec $\underline{\underline{D}}_i$ (conditions réécrites dans (4.7)) et à minimiser la puissance résistante maximale P_{rm}, calculée comme la moyenne volumique des fonctions d'appui locales du milieu hétérogène. Le minimum obtenu est noté π_i^{cine}. Pour un taux de déformation donné, on reformule donc le problème ainsi :

$$\pi_i^{\text{cine}}(\underline{\underline{D}}_i) = \min_{\underline{U} \text{ CA } \underline{\underline{D}}_i} \left\{ P_{rm} = |\mathcal{C}| \left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle \mid \forall \underline{x} \in \mathcal{C},\, \pi(\underline{\underline{d}}) = \sup \left\{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \mid \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{G}(\underline{x}) \right\} \right\} \tag{4.16}$$

L'écart entre $\pi_i^{\text{cine}}(\underline{\underline{D}}_i)$ et la fonction d'appui macroscopique $\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}_i)$, dont elle est un *majorant*, dépendra du choix effectué pour le champ de vitesse.

En procédant à cette résolution pour plusieurs directions du taux de déformation macroscopique, on obtient un ensemble d'hyperplans dans l'espace des contraintes macroscopiques (voir Figure 4.4). Cet ensemble délimite un domaine $\mathbf{G}^{\text{cine}}$ qui est un *majorant* de $\mathbf{G}^{hom}$. On nomme cette méthode *approche cinématique par l'extérieur* du calcul à la rupture, puisque le domaine de résistance macroscopique exact du milieu hétérogène est un sous-domaine de celui déterminé par l'approche cinématique :

$$\mathbf{G}^{hom} \subseteq \mathbf{G}^{\text{cine}} = \bigcap_{\underline{\underline{D}}_i} \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} \mid \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}_i \leq \pi_i^{\text{cine}}(\underline{\underline{D}}_i) \right\} \tag{4.17}$$

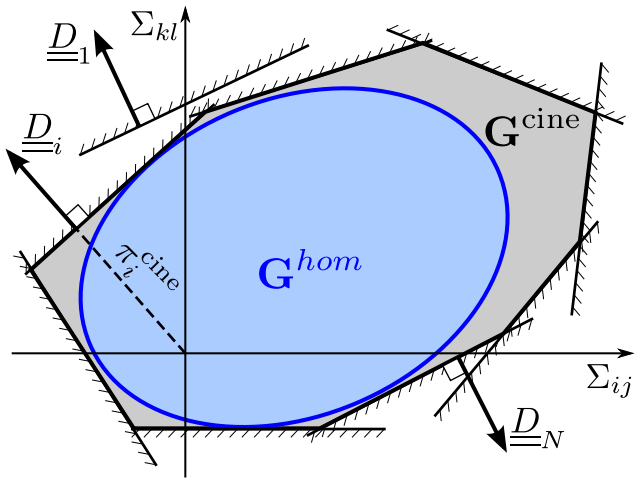


FIGURE 4.4 – Approche cinématique par l'extérieur du domaine de résistance macroscopique.

Encore une fois, les différentes étapes de cette méthode (choix des champs de vitesse, optimisation du problème) sont traitables analytiquement ou numériquement.

Les deux approches du calcul à la rupture sont souvent indispensables pour *encadrer la solution exacte du problème auxiliaire* sans avoir à la déterminer exactement. Dans certains cas particuliers (voir section 4.3), on prouve qu'on obtient la solution exacte du problème en observant la coïncidence des approches par l'intérieur et par l'extérieur. C'est, bien sûr, l'objectif visé pour tout problème de calcul à la rupture.

4.3 Le cas du matériau multicouche

On se propose désormais d'étudier le comportement d'un matériau multicouche (déjà traité dans le cas élastique linéaire en section 2.1.3), cette fois au sens du calcul à la rupture. Il s'agit donc ici de déterminer le domaine de résistance macroscopique d'un tel matériau. Pour cela, on développe les approches statique et cinématique du problème auxiliaire associé, en effectuant des résolutions analytiques. Cet exemple illustratif a été traité par [de Buhan, 1986] et conduit à mettre explicitement en évidence le caractère anisotrope de $\mathbf{G}^{hom}$ pour une telle configuration de milieu hétérogène périodique.

4.3.1 Définition du problème auxiliaire

La technique de *traitement à la chaux* est l'une des méthodes connues de renforcement des sols en place [Magnan et Pilot, 2012]. Le principe consiste à mélanger le sol avec de la chaux ou un mélange chaux/ciment (appelé *liant*), dont la cohésion est plus importante que celle du sol. Les deux matériaux constituants sont supposés avoir un faible angle de frottement, qui sera donc négligé dans la suite de ce chapitre.

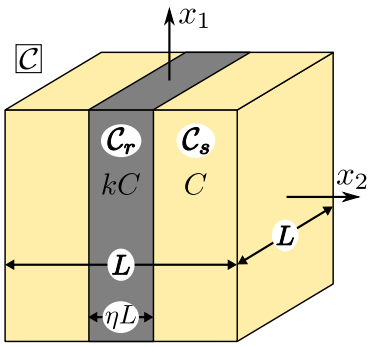


FIGURE 4.5 – Matériau multicouche avec une matrice de cohésion C et un renforcement de cohésion kC.

Un réseau de simples tranchées parallèles ainsi traitées en place peut être construit par la technique de *Trenchmix* [Corneille et Ré, 2008]. La cellule de base $\mathcal{C}$ d'un tel matériau multicouche a déjà été explicitée dans le cas de l'application du principe de l'homogénéisation en élasticité (voir Figure 4.5). Il s'agit désormais de déterminer son domaine de résistance macroscopique, sous l'*hypothèse de déformations planes* dans un des plans orthogonaux au réseau de tranchées (ici le plan (x_1, x_2)). Cela permet de passer d'un problème initialement tridimensionnel à une résolution bidimensionnelle.

La fraction volumique du renforcement est notée η. On a donc les relations suivantes :

$$\frac{|\mathcal{C}_s|}{|\mathcal{C}|} = 1 - \eta \text{ et } \frac{|\mathcal{C}_r|}{|\mathcal{C}|} = \eta \tag{4.18}$$

où $\mathcal{C}_s$ et $\mathcal{C}_r$ désignent respectivement le domaine occupé par le sol en place et par le renforcement.

L'interface entre les deux constituants est supposée *parfaitement adhérente*. Cette hypothèse se justifie par la technique de mise en place des renforcements traités à la chaux. En effet, on observe une zone de transition aux bords du renforcement dans laquelle la concentration de chaux est de plus en plus faible au fur et à mesure qu'on s'éloigne de celui-ci. Le risque de décohésion au niveau de l'interface entre le sol en place et le renforcement est donc négligeable, les deux se mélangent sur une certaine épaisseur.

Les matériaux sont tous deux modélisés comme devant respecter un critère de type Tresca, décrit dans (4.3) en prenant un angle de frottement nul. La cohésion du sol en place est notée C. Ce dernier est renforcé par des tranchées de cohésion kC, où k (≥ 1) est appelé *rapport de résistance*. Ainsi, les critères de résistance des deux constituants peuvent être exprimés comme suit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \begin{cases} f^s(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_M - \sigma_m - 2C, & \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_s \\ f^r(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_M - \sigma_m - 2kC, & \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_r \end{cases} \tag{4.19}$$

Avec l'hypothèse de déformations planes, il est judicieux de choisir σ_M et σ_m, désignant les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$, dans le plan (x_1, x_2). On peut donc réécrire les critères de Tresca en fonction des composantes des contraintes dans ce plan :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (2\sigma_{12})^2} \leq 2C, & \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_s \\ \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (2\sigma_{12})^2} \leq 2kC, & \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_r \end{cases} \tag{4.20}$$

ou bien encore de la façon suivante :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{22} - 2\sqrt{C^2 - \sigma_{12}^2} \leq \sigma_{11} \leq \sigma_{22} + 2\sqrt{C^2 - \sigma_{12}^2} \\ \qquad \text{avec } |\sigma_{12}| \leq C, \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_s \\ \sigma_{22} - 2\sqrt{(kC)^2 - \sigma_{12}^2} \leq \sigma_{11} \leq \sigma_{22} + 2\sqrt{(kC)^2 - \sigma_{12}^2} \\ \qquad \text{avec } |\sigma_{12}| \leq kC, \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_r \end{cases} \tag{4.21}$$

On peut également exprimer la fonction d'appui pour chaque constituant du matériau multicouche. En reprenant la formulation donnée par (4.13) pour la fonction d'appui du critère de Tresca, on aura :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \begin{cases} \pi^s(\underline{\underline{d}}), & \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_s \\ \pi^r(\underline{\underline{d}}), & \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_r \end{cases} \tag{4.22}$$

avec

$$\pi^s(\underline{\underline{d}}) = \begin{cases} C(|d_{\mathrm{I}}| + |d_{\mathrm{II}}|) & \text{si } \mathrm{tr}\underline{\underline{d}} = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.23a}$$

$$\pi^r(\underline{\underline{d}}) = \begin{cases} kC(|d_{\mathrm{I}}| + |d_{\mathrm{II}}|) & \text{si } \mathrm{tr}\underline{\underline{d}} = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.23b}$$

d_{I}, d_{II} désignant les valeurs principales de $\underline{\underline{d}}$ dans le plan (x_1, x_2).

4.3.2 Critère de résistance macroscopique et cohésion anisotrope

Pour évaluer le critère de résistance de ce multicouche sous l'hypothèse de déformations planes, nous allons recourir aux approches statique et cinématique du calcul à la rupture en utilisant des champs de contrainte et de taux de déformation homogènes par morceaux.

4.3.2.1 Approche statique

On choisit de prendre en compte un champ de contrainte homogène dans chaque constituant de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(s)} & \sigma_{12}^{(s)} & 0 \\ \sigma_{12}^{(s)} & \sigma_{22}^{(s)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{C}_s \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(r)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(r)} & \sigma_{12}^{(r)} & 0 \\ \sigma_{12}^{(r)} & \sigma_{22}^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{C}_r \end{cases} \tag{4.24}$$

où les $\sigma_{kl}^{(i)}$ ($i = s$ ou r) sont constants dans chacun des constituants, tandis que σ_{33}, constant dans toute la cellule de base, est pris comme contrainte principale intermédiaire dans chaque matériau.

Pour assurer la continuité du vecteur contrainte à l'interface entre les deux constituants, les relations suivantes apparaissent (voir Figure 4.5) :

$$\forall (x_1, x_2 = \pm \eta L/2, x_3),\ \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} \cdot (-\underline{e}_2) + \underline{\underline{\sigma}}^{(r)} \cdot \underline{e}_2 = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{12}^{(s)} = \sigma_{12}^{(r)} \\ \sigma_{22}^{(s)} = \sigma_{22}^{(r)} \end{cases} \tag{4.25}$$

Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est en équilibre avec le tenseur de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$, tel que :

$$\Sigma_{11} = \langle \sigma_{11} \rangle = (1-\eta)\sigma_{11}^{(s)} + \eta \sigma_{11}^{(r)} \tag{4.26a}$$

$$\Sigma_{22} = \langle \sigma_{22} \rangle = \sigma_{22}^{(s)} = \sigma_{22}^{(r)} \tag{4.26b}$$

$$\Sigma_{33} = \langle \sigma_{33} \rangle = \sigma_{33} \tag{4.26c}$$

$$\Sigma_{12} = \langle \sigma_{12} \rangle = \sigma_{12}^{(s)} = \sigma_{12}^{(r)} \tag{4.26d}$$

De sorte que le champ de contrainte s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) =& \Sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \Sigma_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \Sigma_{12}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \begin{cases} \sigma_{11}^{(s)} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{C}_s \\ \sigma_{11}^{(r)} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{C}_r \end{cases} \\ & \text{et } \Sigma_{11} = (1-\eta)\sigma_{11}^{(s)} + \eta \sigma_{11}^{(r)} \end{aligned} \tag{4.27}$$

De plus, les conditions ayant trait à l'équation d'équilibre et à l'antipériodicité du vecteur contrainte sur les bords de la cellule de base, sont automatiquement remplies pour ce type de champ de contrainte.

Comme exprimé dans (4.21), le respect des critères de résistance de chacun des constituants implique une série d'inéquations tenant compte du fait que σ_{33} est une contrainte principale intermédiaire. En appliquant ces inégalités au champ de contrainte retenu, on obtient :

$$\begin{cases} \Sigma_{22} - 2\sqrt{C^2 - \Sigma_{12}^2} \leq \sigma_{11}^{(s)} \leq \Sigma_{22} + 2\sqrt{C^2 - \Sigma_{12}^2} \text{ avec } |\Sigma_{12}| \leq C \\ \Sigma_{22} - 2\sqrt{(kC)^2 - \Sigma_{12}^2} \leq \sigma_{11}^{(r)} \leq \Sigma_{22} + 2\sqrt{(kC)^2 - \Sigma_{12}^2} \text{ avec } |\Sigma_{12}| \leq kC \end{cases} \tag{4.28}$$

Pour simplifier les notations, on pose alors :

$$S = \frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22}}{\sqrt{2}} \text{ et } T = \sqrt{2}\Sigma_{12} \tag{4.29}$$

En faisant l'hypothèse que $k \geq 1$, on obtient alors l'*approche par l'intérieur* du domaine de résistance macroscopique, noté $\mathbf{G}^{\text{stat}}$, sous la forme du système suivant :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{\text{stat}} \Leftrightarrow \begin{cases} |S| \leq (1-\eta)\sqrt{C^2 - T^2} + \eta\sqrt{2(kC)^2 - T^2} \\ |T| \leq \sqrt{2}C \end{cases} \tag{4.30}$$

Ce critère sera interprété graphiquement à la fin de cette section. On peut d'ores et déjà noter qu'une représentation dans le plan (S, T), c'est-à-dire le plan déviateur, est suffisante. En effet, à l'instar du critère de Tresca, le critère de résistance du matériau multicouche de type "cohérent/cohérent" sera un cylindre dont la base se trouve dans ce plan (S, T) et dont la génératrice est la première bissectrice du plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ associée aux états de contrainte isotropes.

4.3.2.2 Approche cinématique

Les champs de taux de déformation retenus sont constants par morceaux, de la forme :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{d}}^{(s)} = \begin{pmatrix} D_{11} & d_{12}^{(s)} = \frac{D_{12}-\delta}{1-\eta} & 0 \\ d_{12}^{(s)} & -D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{C}_s \\ \underline{\underline{d}}^{(r)} = \begin{pmatrix} D_{11} & d_{12}^{(r)} = \frac{\delta}{\eta} & 0 \\ d_{12}^{(r)} & -D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{C}_r \end{cases} \tag{4.31}$$

où δ est un paramètre arbitraire, utilisé ultérieurement comme variable d'optimisation.

On peut vérifier que ces champs :

- dérivent de champs de vitesse CA avec le taux de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$, c'est-à-dire de la forme (4.7), sous réserve que la condition suivante soit vérifiée :

$$D_{12} = \langle d_{12} \rangle = (1-\eta)d_{12}^{(s)} + \eta d_{12}^{(r)} = (1-\eta)\frac{D_{12} - \delta}{1-\eta} + \eta\frac{\delta}{\eta} \tag{4.32}$$

- vérifient la condition de pertinence $\mathrm{tr}\underline{\underline{d}} = 0$.

La puissance des efforts extérieurs dans un tel champ de vitesse s'écrit alors :

$$|\mathcal{C}|\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = |\mathcal{C}|(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})D_{11} + 2\Sigma_{12}D_{12} = |\mathcal{C}|\sqrt{2}(SD_{11} + TD_{12}) \tag{4.33}$$

avec les notations introduites en (4.29).

La puissance résistante maximale, dépendant des fonctions d'appui des deux constituants, associée à un tel mécanisme vaut :

$$\left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle = (1-\eta)\pi^s(\underline{\underline{d}}^{(s)}) + \eta\pi^r(\underline{\underline{d}}^{(r)}) \tag{4.34}$$

avec, en tenant compte de (4.23) et de la forme du champ de taux de déformation :

$$\begin{cases} \pi^s(\underline{\underline{d}}^{(s)}) = C(|d_{\mathrm{I}}^{(s)}| + |d_{\mathrm{II}}^{(s)}|) = 2C\sqrt{D_{11}^2 + (d_{12}^{(s)})^2} \\ \pi^r(\underline{\underline{d}}^{(r)}) = kC(|d_{\mathrm{I}}^{(r)}| + |d_{\mathrm{II}}^{(r)}|) = 2kC\sqrt{D_{11}^2 + (d_{12}^{(r)})^2} \end{cases} \tag{4.35}$$

Ainsi, on obtient l'expression suivante :

$$\left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle = 2C\left((1-\eta)\sqrt{D_{11}^2 + \frac{(D_{12}-\delta)^2}{(1-\eta)^2}} + \eta\sqrt{D_{11}^2 + \frac{\delta^2}{\eta^2}}\right) \tag{4.36}$$

L'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture donne alors :

$$\forall \underline{\underline{D}}, \quad \sqrt{2}(SD_{11} + TD_{12}) \leq \pi^{\mathrm{cine}}(\underline{\underline{D}}) = \min_{\delta} \left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle \tag{4.37}$$

et donc

$$\mathbf{G}^{hom} \subseteq \mathbf{G}^{\mathrm{cine}} = \bigcap_{\underline{\underline{D}}} \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} \,|\, \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi^{\mathrm{cine}}(\underline{\underline{D}}) \right\} \tag{4.38}$$

4.3.2.3 Un critère cohérent anisotrope

Il a été prouvé que les champs de contrainte et de taux de déformation utilisés pour les deux approches sont associés [de Buhan, 1986, de Buhan, 2013]. Les deux approches développées ici coïncident donc. L'expression du critère statique et celle de la fonction d'appui cinématique décrivent exactement le domaine de résistance macroscopique d'un matériau multicouche en conditions de déformations planes.

Les variables S et T peuvent également s'exprimer en fonction des contraintes principales majeure et mineure dans le plan (x_1, x_2), respectivement notées Σ_M et Σ_m, ainsi que de l'orientation θ de la contrainte principale majeure par rapport à la direction de renforcement $\underline{e}_1$.

$$S = \frac{\Sigma_M - \Sigma_m}{\sqrt{2}}\cos 2\theta \text{ et } T = \frac{\Sigma_M - \Sigma_m}{\sqrt{2}}\sin 2\theta \tag{4.39}$$

Le système d'inéquations (4.30) définissant le critère de résistance peut alors se réécrire sous une forme plus "pratique" :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{hom} \Leftrightarrow \Sigma_M - \Sigma_m \leq 2C^{hom}(\theta) \tag{4.40}$$

où C^{hom} peut être vue comme une *cohésion anisotrope macroscopique* du matériau multicouche, qui est représentée sur la Figure 4.6 sous forme d'un diagramme polaire de cohésion.

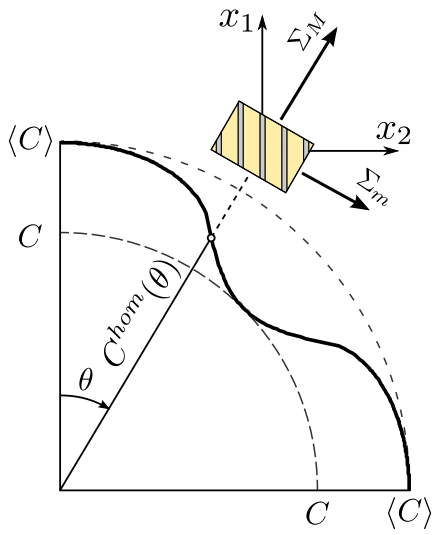


FIGURE 4.6 – Cohésion anisotrope d'un matériau multicouche dont les constituants sont purement cohérents.

Il est utile de souligner les propriétés de symétrie de cette cohésion :

$$C^{hom}(\theta) = C^{hom}(-\theta) = C^{hom}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{4.41}$$

ainsi que les valeurs particulières correspondant à ses extrema :

$$C^{hom}\left(\frac{\pi}{4}\right) = C \text{ et } C^{hom}(0) = C^{hom}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle C \rangle = (1-\eta)C + \eta k C \tag{4.42}$$

En analysant les résultats obtenus, on s'aperçoit que lorsque la sollicitation est un chargement de cisaillement pur ($\theta = \pi/4$), le renforcement n'apporte rien et le sol renforcé possède la même cohésion que le sol vierge. En revanche, le renforcement est maximal lorsqu'une des directions principales du tenseur des contraintes se confond avec l'axe des tranchées ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$). Dans ce cas, la cohésion du sol renforcé dépend du rapport de résistance k et de la fraction volumique η. Comme beaucoup de techniques dites de renforcement des sols en place, il convient de bien définir le terme renforcement. Ici, il n'y a pas de renforcement pour certaines sollicitations mécaniques. On verra même par la suite que certaines techniques affaiblissent le sol en place sous certains types de chargement.

Il convient également de représenter l'allure du critère de résistance macroscopique du matériau multicouche en déformations planes. Pour cela, on trace le critère dans le plan déviateur ($S = (\Sigma_{11} - \Sigma_{22})/\sqrt{2}, T = \sqrt{2}\Sigma_{12}$). Ce tracé correspond à la section droite du domaine de résistance cylindrique. Sur la Figure 4.7, le critère du matériau multicouche (ligne continue) est représenté dans un quart de ce plan déviateur. Les critères du sol en place et du matériau de renforcement sont rappelés (lignes

pointillées) et correspondent à des cercles dont le rayon est respectivement $\sqrt{2}C$ et $\sqrt{2}kC$.

Comme pour les contraintes, on peut paramétrer les taux de déformation macroscopiques en fonction des valeurs principales et de l'orientation de celles-ci. Ainsi, étant donné que $\underline{\underline{D}}$ est de trace nulle, on pose :

$$D_{11} = D\cos 2\beta\,,\ D_{22} = -D\cos 2\beta \text{ et } D_{12} = D\sin 2\beta \tag{4.43}$$

où D désigne le taux de déformation principal majeur et β l'angle formé par la direction principale majeure avec l'axe de renforcement $\underline{e}_1$. Avec ce paramétrage, on peut réécrire la fonction d'appui macroscopique du milieu hétérogène comme suit :

$$\pi^{hom} = \min_{\delta} \left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle = D\Pi(\beta) \tag{4.44}$$

$\Pi(\beta)$ est alors une fonction de l'orientation de la direction principale du taux de déformation et sera obtenue, pour β et D fixés, en optimisant la valeur de δ. Cette optimisation peut, par exemple, être effectuée numériquement. En particulier, pour $\beta = 0$, $\pi/4$ ou $\beta = \pi/2$, la valeur optimale est obtenue avec $\delta = 0$. On a alors :

$$\Pi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2C \text{ et } \Pi(0) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left\langle C\right\rangle \tag{4.45}$$

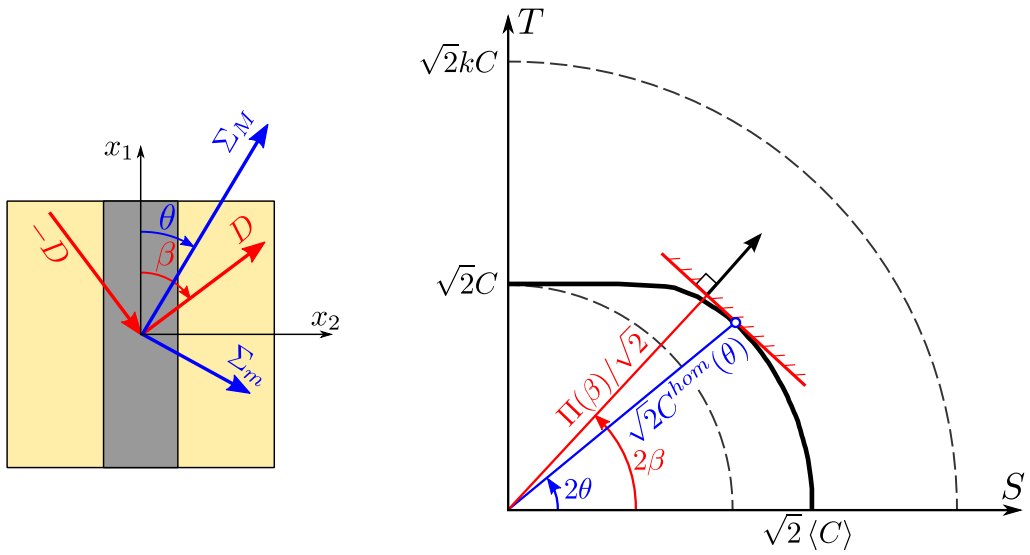


FIGURE 4.7 – Critère de résistance d'un matériau multicouche de matériaux purement cohérents.

En reprenant les paramètres concernant les tenseurs macroscopiques introduits dans (4.39) et (4.43) et en utilisant la définition cinématique donnée par (4.37), on peut réécrire le critère de résistance macroscopique d'un matériau multicouche de type cohérent/cohérent de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}^{hom} \Leftrightarrow \forall\beta\,,\quad (\Sigma_M - \Sigma_m)\cos\left(2(\theta-\beta)\right) \leq \Pi(\beta) \tag{4.46}$$

Les interprétations des angles θ et β par rapport à la configuration du renforcement sont données sur la Figure 4.7. Les deux fonctions $C^{hom}(\theta)$ et $\Pi(\beta)$, qui permettent de définir le critère de résistance macroscopique du multicouche, y sont représentées.

4.4 Critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes

La configuration la plus courante pour les zones traitées est celle d'un arrangement régulier de colonnes [Broms, 1982, Broms, 2000]. Dans ce cas, la répartition des colonnes dans les deux directions se fait sous la forme d'un maillage périodique dont la géométrie peut varier. Ici, comme dans le chapitre 2, nous choisissons de traiter le cas d'un maillage carré dans le plan horizontal. La cellule de base est donc celle représentée sur la Figure 4.8.

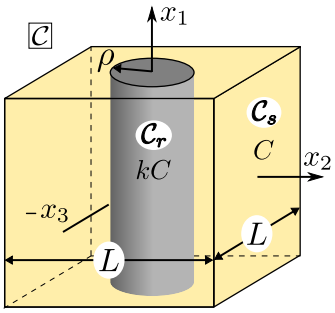


FIGURE 4.8 – Cellule de base associée à un sol de cohésion C renforcé par des colonnes de cohésion kC.

On rappelle que pour ce type de configuration, la fraction volumique de renforcement η, qui est le rapport entre le volume occupé par le renforcement $\mathcal{C}_r$ et le volume total de la cellule de base $\mathcal{C}$, s'exprime sous la forme suivante :

$$\eta = \frac{\pi \rho^2}{L^2} \tag{4.47}$$

où ρ désigne le rayon de la colonne de renforcement et L l'espacement entre deux colonnes.

La cohésion du sol en place est de nouveau notée C, celle du renforcement kC ($k \geq 1$) et l'adhérence est supposée parfaite entre ces matériaux. Les critères de résistance ainsi que les fonctions d'appui liés à ces critères sont donnés par (4.19) et (4.23).

On souhaite déterminer de façon analytique un encadrement théorique pour le domaine de résistance macroscopique $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ d'un tel matériau composite, sous la condition de déformations planes dans un des plans verticaux (ici le plan (x_1, x_2)).

4.4.1 Minorant et majorant de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$

4.4.1.1 Approche statique

Pour procéder à l'approche statique, [Jellali *et al.*, 2005] ont prouvé que l'utilisation d'un champ de contrainte constant par matériau permettait d'obtenir un minorant satisfaisant. Celle-ci coïncide avec l'approche statique développée dans la section précédente dans le cas du matériau multicouche. En reprenant l'expression donnée par (4.30), on définit donc un minorant $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat}}$ du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé

par colonnes par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}_{col}^{\text{stat}} \Leftrightarrow \begin{cases} |S| \leq (1-\eta)\sqrt{C^2 - T^2} + \eta\sqrt{2(kC)^2 - T^2} \\ |T| \leq \sqrt{2}C \end{cases} \tag{4.48}$$

où S et T correspondent aux définitions données par (4.29) et (4.39).

On a eu précédemment l'occasion de donner une autre interprétation du critère de résistance d'un sol composite de type cohérent/cohérent, en utilisant le concept de *cohésion anisotrope*. On peut donc décrire le minorant de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ par la condition suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}_{col}^{\text{stat}} \Leftrightarrow \Sigma_M - \Sigma_m \leq 2C_{col}^{\text{stat}}(\theta) \tag{4.49}$$

avec, pour rappel, Σ_M et Σ_m qui désignent les contraintes principales majeure et mineure dans le plan (x_1, x_2) et θ qui correspond à l'orientation de Σ_M par rapport à l'axe de renforcement $\underline{e}_1$.

Cette cohésion anisotrope déduite de l'expression (4.48) est une fonction scalaire dont l'expression sur l'intervalle $\theta \in [0; \pi/4]$ est la suivante.

$$C_{col}^{\text{stat}}(\theta) = \frac{C}{\sin 2\theta} \text{ pour } \theta \in \left[\theta_{col}^{-}; \frac{\pi}{4}\right] \tag{4.50}$$

avec l'angle limite θ_{col}^{-} défini par :

$$\theta_{col}^{-} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\eta\sqrt{k^2-1}}\right) \tag{4.51}$$

Sur l'intervalle $\theta \in [0; \theta_{col}^{-}]$, la cohésion anisotrope C_{col}^{stat} est solution de l'équation :

$$C_{col}^{\text{stat}}(\theta)\cos 2\theta = (1-\eta)\sqrt{C^2 - (C_{col}^{\text{stat}}(\theta))^2 \sin^2 2\theta} + \eta\sqrt{2(kC)^2 - (C_{col}^{\text{stat}}(\theta))^2 \sin^2 2\theta} \tag{4.52}$$

4.4.1.2 Approche cinématique

Jellali *et al.* ont également proposé une approche par l'extérieur du critère de résistance, dont la détermination repose sur l'utilisation combinée d'un champ de taux de déformation homogène dans toute la cellule et d'un mécanisme de bloc rigide en translation [Jellali *et al.*, 2005, Jellali *et al.*, 2011]. Ce majorant s'écrit :

$$\Sigma_M - \Sigma_m \leq 2C_{col}^{\text{Jell}}(\theta) = \min\left\{\frac{C}{\sin 2\theta}\,;\, \langle C \rangle\right\} \tag{4.53}$$

Nous montrons ici que ce dernier peut être amélioré en prenant un champ de taux de déformation analogue à celui du matériau multicouche [Gueguin *et al.*, 2014c]. Pour cela, on découpe la cellule de base en trois zones, comme montré sur la Figure 4.9 sur un quart de celle-ci. La colonne est représentée par la zone **1**. Les zones **2** et **3** se trouvent dans le sol.

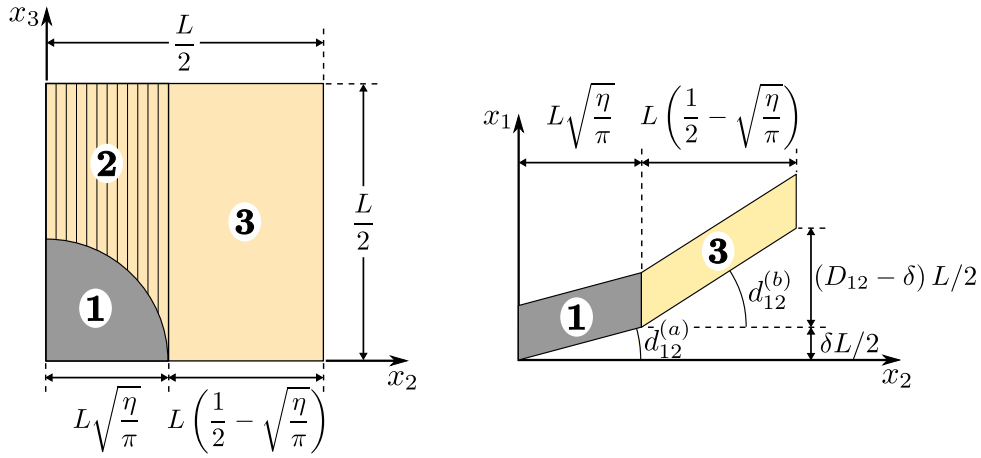


FIGURE 4.9 – Découpage de la cellule de base pour l'approche cinématique et champ de taux de déformation associé.

Le champ de taux de déformation est donc choisi constant par zone et défini de la façon suivante :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{d}}^{(a)} = \begin{pmatrix} D_{11} & d_{12}^{(a)} = \frac{D_{12}-\delta}{2\sqrt{\eta/\pi}} & 0 \\ d_{12}^{(a)} & -D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathbf{1} \cup \mathbf{2} \\ \underline{\underline{d}}^{(b)} = \begin{pmatrix} D_{11} & d_{12}^{(b)} = \frac{\delta}{1-2\sqrt{\eta/\pi}} & 0 \\ d_{12}^{(b)} & -D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathbf{3} \end{cases} \tag{4.54}$$

avec δ qui reste une variable d'optimisation. $\underline{\underline{d}}$ peut être associé à un champ de vitesse cinématiquement admissible avec le taux de déformation macroscopique, et on prouve en particulier que la moyenne de ce champ sur la cellule de base vaut :

$$\langle \underline{\underline{d}} \rangle = \frac{|\mathcal{C}_{\mathbf{1}\cup\mathbf{2}}|}{|\mathcal{C}|}\underline{\underline{d}}^{(a)} + \frac{|\mathcal{C}_{\mathbf{3}}|}{|\mathcal{C}|}\underline{\underline{d}}^{(b)} = 2\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\underline{\underline{d}}^{(a)} + \left(1-2\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\right)\underline{\underline{d}}^{(b)} = \underline{\underline{D}} \tag{4.55}$$

La puissance des efforts extérieurs développée se calcule de façon identique à celle exprimée par (4.33). La puissance résistante maximale induite par ce mécanisme se détermine comme suit :

$$\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle = \frac{|\mathcal{C}_r|}{|\mathcal{C}|}\pi^r(\underline{\underline{d}}^{(a)}) + \frac{|\mathcal{C}_{\mathbf{2}}|}{|\mathcal{C}|}\pi^s(\underline{\underline{d}}^{(a)}) + \frac{|\mathcal{C}_{\mathbf{3}}|}{|\mathcal{C}|}\pi^s(\underline{\underline{d}}^{(b)}) \tag{4.56}$$

où les fonctions d'appui dans chaque constituant sont celles exprimées dans (4.23). Après calculs et en reprenant le paramétrage du tenseur de taux de déformation macroscopique (4.43), on obtient la définition suivante pour la puissance résistante maximale :

$$\begin{aligned} \langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle = 2CD \Bigg(& \left(1-2\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\right)\sqrt{\cos^2 2\beta + \frac{(\sin 2\beta - \delta)^2}{(1-2\sqrt{\eta/\pi})^2}} \\ & + \left(2\sqrt{\frac{\eta}{\pi}} - \eta + k\eta\right)\sqrt{\cos^2 2\beta + \frac{\delta^2}{(2\sqrt{\eta/\pi})^2}} \Bigg) \end{aligned} \tag{4.57}$$

En utilisant un raisonnement identique à celui adopté pour l'approche cinématique du critère du matériau multicouche, on définit le majorant $\mathbf{G}_{col}^{\text{cine}}$ du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}_{col}^{\text{cine}} \Leftrightarrow \forall \beta\,, \quad \frac{\Sigma_{11}-\Sigma_{22}}{\sqrt{2}}\cos 2\beta + \sqrt{2}\Sigma_{12}\sin 2\beta \leq \frac{\Pi_{col}^{\text{cine}}(\beta)}{\sqrt{2}} \tag{4.58}$$

avec

$$D\Pi_{col}^{\text{cine}}(\beta) = \min_{\delta} \left\langle \pi(\underline{\underline{d}}) \right\rangle \geq \pi_{col}^{hom}(\underline{\underline{D}}) \tag{4.59}$$

où D et β désignent toujours respectivement la valeur principale majeure du taux de déformation et son orientation par rapport à l'axe de renforcement $\underline{e}_1$. La fonction scalaire Π_{col}^{cine} est calculée pour chaque angle β en optimisant la valeur de la variable δ.

Ainsi, on obtient l'encadrement suivant pour le domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes purement cohérentes :

$$\mathbf{G}_{col}^{\text{stat}} \subseteq \mathbf{G}_{col}^{hom} \subseteq \mathbf{G}_{col}^{\text{cine}} \tag{4.60}$$

4.4.2 Estimations du critère et de la cohésion anisotrope

On décide d'effectuer une comparaison des différents encadrements obtenus pour les valeurs caractéristiques suivantes :

$$\eta = 20\%,\ k = 20 \tag{4.61}$$

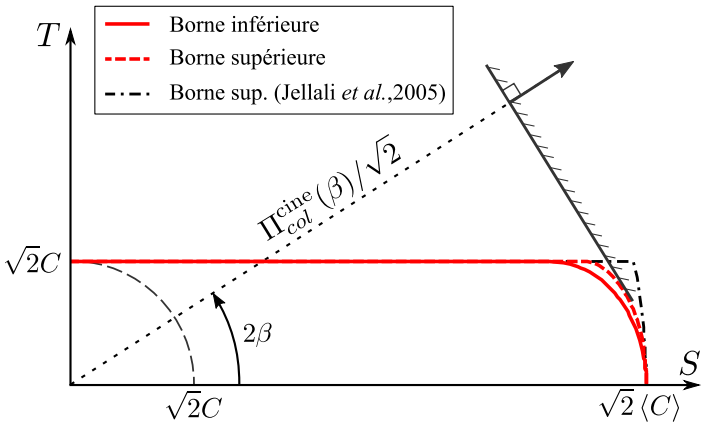


FIGURE 4.10 – Critère de résistance d'un sol renforcé par colonnes de type cohérent/cohérent ($k = 20$, $\eta = 20\%$).

Sur la Figure 4.10, on trace tout d'abord les domaines obtenus dans le plan déviateur des contraintes ($S = (\Sigma_{11} - \Sigma_{22})/\sqrt{2}, T = \sqrt{2}\Sigma_{12}$). On observe ainsi l'amélioration apportée par la méthode de calcul du majorant développé dans cette section (en tirets) par rapport à celui de [Jellali *et al.*, 2005] (en ligne tiretée). En effet, pour une orientation β fixée, l'écart relatif maximal entre notre majorant et le minorant (en ligne continue) ne dépasse pas 3.1%, alors qu'il est de 8.7% entre l'approche statique et l'approche cinématique proposées dans [Jellali *et al.*, 2005].

On fait également apparaître sur cette même figure, la fonction $\Pi_{col}^{\text{cine}}(\beta)$ définissant le majorant de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$. Cette fonction scalaire sera utilisée dans le chapitre suivant pour effectuer un calcul d'ouvrage. On représentera notamment son allure en fonction de l'orientation de la direction principale majeure du taux de déformation macroscopique.

Afin d'approfondir l'analyse du comportement du sol renforcé par colonnes de type cohérent/cohérent, on trace sur la Figure 4.11 l'encadrement du diagramme polaire de cohésion. Encore une fois, on peut souligner la forte anisotropie qui existe pour un tel matériau composite. On peut également remarquer que la plage sur laquelle minorant et majorant ne coïncident pas est très restreinte. Avec les valeurs retenues ($k = 20$, $\eta = 20\%$), cette plage correspond à $\theta \in]0; 7.5°]$. Pour les orientations de la direction principale majeure de la contrainte macroscopique supérieures à 7.5°, C_{col} est déterminée avec certitude.

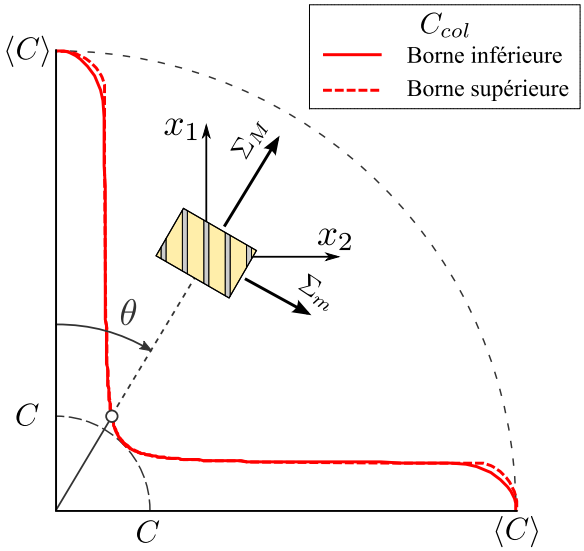


FIGURE 4.11 – Cohésion anisotrope d'un sol renforcé par colonnes de type cohérent/cohérent ($k = 20$, $\eta = 20\%$).

Les approches statique et cinématique effectuées se révèlent donc très efficaces pour déterminer un encadrement de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$. Dans l'annexe B, on qualifie cet encadrement en le comparant à des résultats numériques (obtenus par une procédure élastoplastique ou par un code numérique de calcul à la rupture élaboré à cet effet).

Les valeurs particulières prises par la cohésion d'un sol renforcé par colonnes sont les suivantes :

$$C_{col}\left(\frac{\pi}{4}\right) = C \text{ et } C_{col}(0) = C_{col}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle C \rangle \, (= 4.8C \text{ ici}) \tag{4.62}$$

On constate donc que, à l'instar du renforcement par simples tranchées, le renforcement par colonnes s'avère inefficace pour une sollicitation de cisaillement pur. En revanche, cette technique de renforcement améliore la résistance du sol en place (proportionnellement à η et k) lorsque les contraintes principales ont pour direction l'axe de renforcement et l'axe qui lui est orthogonal. Cette remarque rejoint en tout point les observations déjà faites pour le comportement élastique de ce type de configuration de renforcement (voir section 2.4).

4.5 Critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé par tranchées croisées

Une autre configuration possible pour le renforcement des sols par traitement à la chaux est l'agencement en tranchées croisées [Jeanty *et al.*, 2013]. Grâce au procédé de construction dénommé *Trenchmix*, on introduit dans le sol en place deux séries de tranchées orthogonales les unes par rapport aux autres et espacées d'une distance L. En considérant que les deux séries de tranchées sont de même épaisseur, notée t, on représente la cellule de base associée à ce matériau composite sur la Figure 4.12.

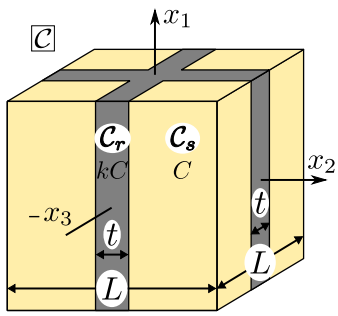


FIGURE 4.12 – Cellule de base associée à un sol de cohésion C renforcé par des tranchées croisées de cohésion kC.

Les matériaux constituant le sol renforcé renvoient à la même définition que pour le renforcement par colonnes (cohésion C pour le sol en place $\mathcal{C}_s$ et cohésion kC pour le renforcement $\mathcal{C}_r$). Les critères de résistance de chacun d'entre eux sont exprimés par (4.19). Le facteur de substitution η se calcule en fonction de l'épaisseur d'une tranchée par :

$$\eta = \frac{t(2L - t)}{L^2} \tag{4.63}$$

On conserve l'hypothèse d'adhérence parfaite entre le sol en place et les tranchées croisées. L'objectif de cette section est de déterminer un minorant et un majorant permettant d'encadrer le critère de résistance macroscopique de ce sol renforcé sous les conditions de déformations planes dans le plan (x_1, x_2). On note le domaine macroscopique du sol renforcé par tranchées croisées $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$.

4.5.1 Minorant et majorant de $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$

4.5.1.1 Approche statique par l'intérieur

Pour déterminer le minorant du critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé par tranchées croisées, on décompose la cellule de base en trois zones (comme indiqué sur la Figure 4.13 pour un quart de la cellule de base). Dans chacune de ces zones, le champ de contrainte est supposé homogène, ses composantes dans le plan (x_1, x_2) étant définies

de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^{(1a)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(1a)} & \sigma_{12}^{(1)} & 0 \\ \sigma_{12}^{(1)} & \sigma_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathbf{1}a \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(1b)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(1b)} & \sigma_{12}^{(1)} & 0 \\ \sigma_{12}^{(1)} & \sigma_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathbf{1}b \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(2)} & \sigma_{12}^{(2)} & 0 \\ \sigma_{12}^{(2)} & \sigma_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathbf{2} \end{cases} \tag{4.64}$$

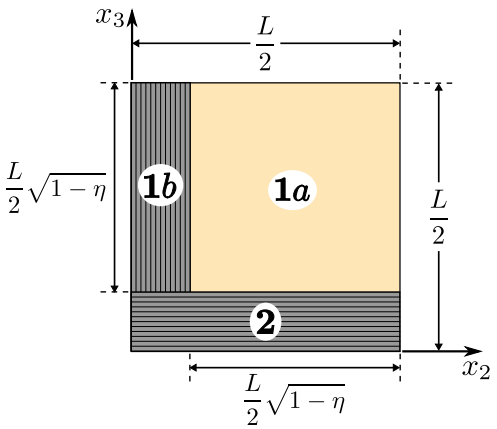


FIGURE 4.13 – Découpage de la cellule de base pour l'approche statique d'un sol renforcé par tranchées croisées.

La composante σ_{33} est prise identique dans les trois zones et choisie de façon à ce qu'elle soit la valeur principale intermédiaire du champ de contrainte. Ce champ est relié au tenseur de contrainte macroscopique par la condition suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \sqrt{1-\eta}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + \left(1 - \sqrt{1-\eta}\right) \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \tag{4.65}$$

où le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ est défini comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = \sqrt{1-\eta}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(1a)} + \left(1 - \sqrt{1-\eta}\right) \underline{\underline{\sigma}}^{(1b)} \tag{4.66}$$

Comme on a pu le montrer dans la section traitant du matériau multicouche, la condition que doit satisfaire le champ de contrainte dans la zone **2** est décrite par :

$$f^r(\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}^{(2)})^2 + (2\sigma_{12}^{(2)})^2} \leq 2kC \tag{4.67}$$

En adoptant le changement de variables (4.29), on réécrit le domaine de résistance dans la zone **2**, noté $\mathbf{G}^{(2)}$, comme suit :

$$(S^{(2)}, T^{(2)}) \in \mathbf{G}^{(2)} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(S^{(2)})^2 + (T^{(2)})^2} \leq \sqrt{2}kC \tag{4.68}$$

Dans le plan déviateur (S, T), ce domaine est représenté par un disque de rayon $\sqrt{2}kC$.

Une analogie très simple peut être faite entre le "composite" que forment les zones $\mathbf{1}a$ et $\mathbf{1}b$ et un matériau multicouche. Ainsi, en se servant des expressions obtenues dans (4.28), le champ de contrainte doit respecter les critères suivants :

$$\begin{cases} \sigma_{22}^{(1)} - 2\sqrt{C^2 - (\sigma_{12}^{(1)})^2} \leq \sigma_{11}^{(1a)} \leq \sigma_{22}^{(1)} + 2\sqrt{C^2 - (\Sigma_{12}^{(1)})^2} \\ \qquad \text{avec } |\sigma_{12}^{(1)}| \leq C \\ \sigma_{22}^{(1)} - 2\sqrt{(kC)^2 - (\sigma_{12}^{(1)})^2} \leq \sigma_{11}^{(1b)} \leq \sigma_{22}^{(1)} + 2\sqrt{(kC)^2 - (\sigma_{12}^{(1)})^2} \\ \qquad \text{avec } |\sigma_{12}^{(1)}| \leq kC \end{cases} \tag{4.69}$$

On a déjà montré (4.30) qu'un tel domaine, noté $\mathbf{G}^{(1)}$, peut être réécrit comme suit, en posant $S^{(1)} = (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}^{(1)})/\sqrt{2}$ et $T^{(1)} = \sqrt{2}\sigma_{12}^{(1)}$:

$$(S^{(1)}, T^{(1)}) \in \mathbf{G}^{(1)} \Leftrightarrow \begin{cases} |S^{(1)}| \leq \sqrt{1-\eta}\sqrt{C^2 - (T^{(1)})^2} \\ \qquad + \left(1 - \sqrt{1-\eta}\right)\sqrt{2(kC)^2 - (T^{(1)})^2} \\ |T^{(1)}| \leq \sqrt{2}C \end{cases} \tag{4.70}$$

En combinant les différents systèmes d'équations portant sur les contraintes macroscopiques, on définit l'approche statique par l'intérieur $\mathbf{G}_{tc}^{\text{stat}}$ du domaine de résistance macroscopique par le système d'équations suivant :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}_{tc}^{\text{stat}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{1-\eta}S^{(1)} + \left(1 - \sqrt{1-\eta}\right)S^{(2)} \\ \sqrt{2}\Sigma_{12} = \sqrt{1-\eta}T^{(1)} + \left(1 - \sqrt{1-\eta}\right)T^{(2)} \\ (S^{(1)}, T^{(1)}) \in \mathbf{G}^{(1)} \\ (S^{(2)}, T^{(2)}) \in \mathbf{G}^{(2)} \end{cases} \tag{4.71}$$

La définition de ce domaine donne lieu à une interprétation géométrique dans le plan déviateur (S, T). En effet, $\mathbf{G}_{tc}^{\text{stat}}$ (coloré en gris sur la Figure 4.14) peut être construit comme la somme du domaine $\mathbf{G}^{(1)}$ (coloré en rouge) et du domaine $\mathbf{G}^{(2)}$, pondérés par les fractions volumiques respectives des différentes zones. Cette somme est appelée *somme de Minkowski* et on la symbolise par $\oplus$ pour la suite du manuscrit. Si on note $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux ensembles d'un espace, leur addition au sens de Minkowski est définie par :

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \{a + b \,|\, a \in \mathbf{A}; b \in \mathbf{B}\} \tag{4.72}$$

Le minorant $\mathbf{G}_{tc}^{\text{stat}}$ du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par tranchées croisées peut, de nouveau, être définie à travers la notion de cohésion anisotrope :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}_{tc}^{\text{stat}} = \sqrt{1-\eta}\mathbf{G}^{(1)} \oplus \left(1 - \sqrt{1-\eta}\right)\mathbf{G}^{(2)} \Leftrightarrow \Sigma_M - \Sigma_m \leq 2C_{tc}^{\text{stat}} \tag{4.73}$$

Le minorant C_{tc}^{stat} de la cohésion anisotrope est également représenté sur la Figure 4.14. On calcule facilement les valeurs particulières prises par cette cohésion pour certaines orientations de la contrainte principale majeure :

$$C_{tc}^{\text{stat}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = C\left(\sqrt{1-\eta}(1-k) + k\right) \text{ et } C_{tc}^{\text{stat}}(0) = C_{tc}^{\text{stat}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle C \rangle \tag{4.74}$$

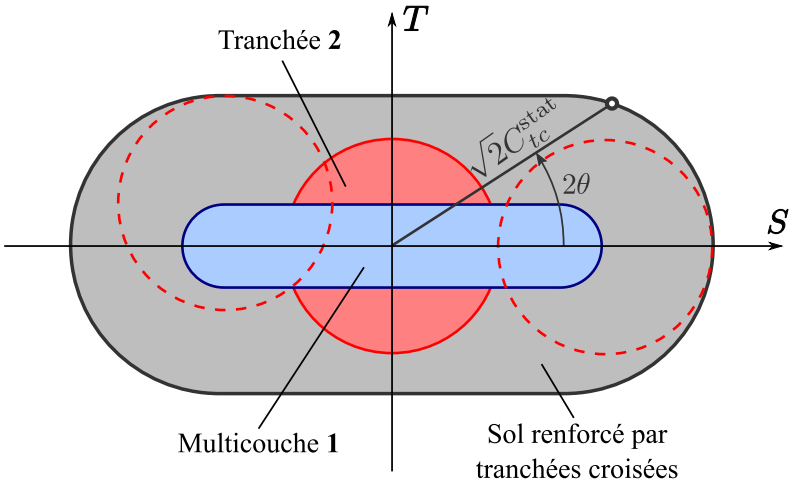


FIGURE 4.14 – Interprétation géométrique dans le plan déviateur du minorant du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par tranchées croisées.

Compte tenu de l'hypothèse $k \geq 1$, ces résultats soulignent déjà que le sol renforcé par tranchées croisées aura des performances accrues par rapport au sol en place pour une sollicitation de cisaillement pur, correspondant à $\theta = \pi/4$.

4.5.1.2 Approche cinématique

Pour cette approche cinématique, on considère de nouveau un champ de taux de déformation constant par morceaux, suivant les zones définies sur la Figure 4.15, numérotées de **1** à **4**. Pour respecter les conditions de compatibilité du champ de vitesse, le champ $\underline{\underline{d}}$ retenu est de la forme suivante :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{d}}^{(a)} = \begin{pmatrix} D_{11} & d_{12}^{(a)} = \frac{D_{12}-\delta}{\sqrt{1-\eta}} & 0 \\ d_{12}^{(a)} & -D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathbf{1} \cup \mathbf{2} \\ \underline{\underline{d}}^{(b)} = \begin{pmatrix} D_{11} & d_{12}^{(b)} = \frac{\delta}{1-\sqrt{1-\eta}} & 0 \\ d_{12}^{(b)} & -D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathbf{3} \cup \mathbf{4} \end{cases} \tag{4.75}$$

Le raisonnement utilisé pour calculer la puissance résistante maximale est en tout point identique à celui mené dans l'approche cinématique du critère des sols renforcés par simples tranchées ou par colonnes. On adopte le même paramétrage que dans (4.43) pour le taux de déformation macroscopique, et après calculs on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle = 2CD \Bigg(& \left(1 - \eta + k(\eta - 1 + \sqrt{1-\eta})\right) \sqrt{\cos^2 2\beta + \frac{(\sin 2\beta - \delta)^2}{1-\eta}} \\ & + k\left(1 - \sqrt{1-\eta}\right) \sqrt{\cos^2 2\beta + \frac{\delta^2}{(1-\sqrt{1-\eta})^2}} \Bigg) \end{aligned} \tag{4.76}$$

En utilisant cette expression, on définit $\Pi_{tc}^{\text{cine}}(\beta)$ de façon analogue à la fonction scalaire utilisée pour le majorant du domaine de résistance d'un sol renforcé par colonnes (4.59).

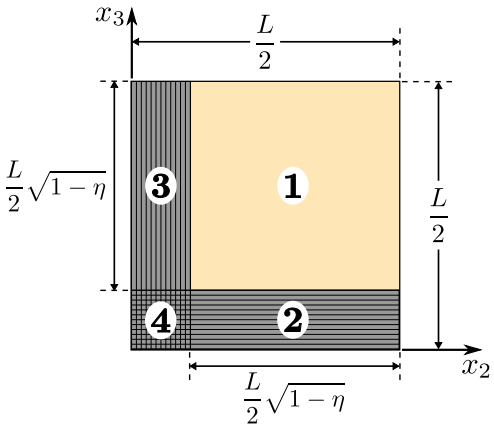


FIGURE 4.15 – Découpage de la cellule de base pour l'approche cinématique d'un sol renforcé par tranchées croisées.

L'approche cinématique menée ici conduit à un domaine $\mathbf{G}_{tc}^{\text{cine}}$ qui inclut le domaine de résistance d'un sol renforcé par tranchées croisées.

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}_{tc}^{\text{cine}} \Leftrightarrow \forall \beta\,, \quad \frac{\Sigma_{11}-\Sigma_{22}}{\sqrt{2}}\cos 2\beta + \sqrt{2}\Sigma_{12}\sin 2\beta \leq \frac{\Pi_{tc}^{\text{cine}}(\beta)}{\sqrt{2}} \tag{4.77}$$

Les résultats obtenus après optimisation sont très proches de ceux issus de l'approche statique (voir Figure 4.16). En effet, pour $k = 20$ et $\eta = 20\%$, si on compare la cohésion anisotrope définissant $\mathbf{G}_{tc}^{\text{cine}}$ à celle définissant $\mathbf{G}_{tc}^{\text{stat}}$, l'écart relatif ne dépasse pas 2.7% pour un θ fixé. Il est surtout intéressant de remarquer que pour des orientations des contraintes principales spécifiques ($\theta = 0$, $\theta = \pi/4$ ou $\theta = \pi/2$), les valeurs déterminées pour l'approche cinématique sont les mêmes que celles données par (4.74).

4.5.2 Comparaison des critères de résistance correspondant aux différentes techniques

La Figure 4.16 regroupe l'ensemble des estimations des critères de résistance pour les différentes configurations de renforcement. On se place une nouvelle fois dans le plan déviateur ($S = (\Sigma_{11} - \Sigma_{22})/\sqrt{2}, T = \sqrt{2}\Sigma_{12}$) et on fixe des caractéristiques géométriques et mécaniques déjà utilisées précédemment ($k = 20$, $\eta = 20\%$). En plus des résultats issus des approches statiques et cinématiques, on fait apparaître le critère de résistance du sol en l'absence de renforcement.

Cette comparaison illustre clairement, à fraction volumique de renforcement donnée, l'apport de la configuration en tranchées croisées par rapport à celle en colonnes. Dès lors que les directions principales du tenseur de contrainte macroscopique ne se confondent plus avec les axes du repère ($\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ ici), le renforcement par tranchées croisées est beaucoup plus performant que celui du renforcement par colonnes, notamment lorsque la sollicitation correspond à un cisaillement pur. En effet, pour $\theta = \pi/4$, le rapport entre les cohésions anisotropes des deux techniques de renforcement vaut $\sqrt{1-\eta}(1-k) + k$ ($= 4.8$ ici).

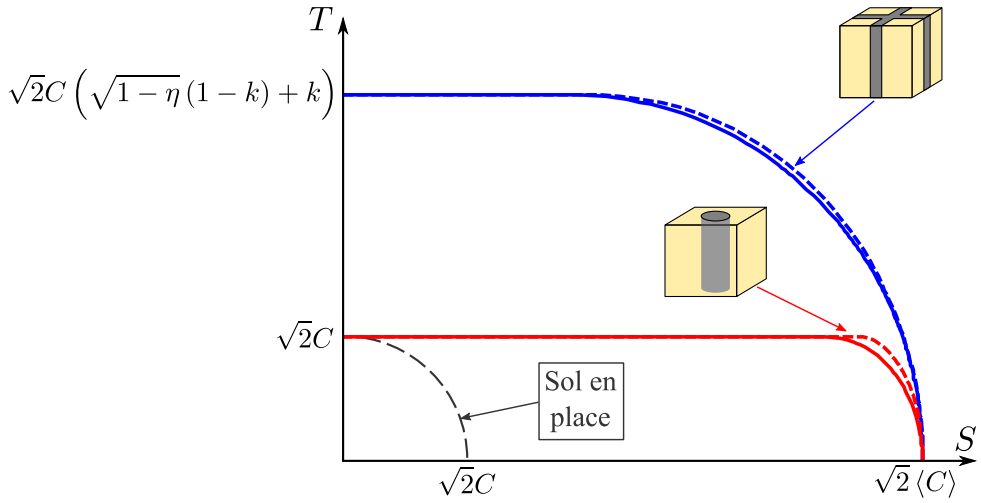


FIGURE 4.16 – Comparaison des différentes estimations du critère de résistance macroscopique pour des sols renforcés de type cohérent/cohérent ($k = 20$, $\eta = 20\%$).

Les approches du calcul à la rupture développées dans ce chapitre pour encadrer le domaine de résistance macroscopique d'un milieu hétérogène ont été utilisées pour différentes configurations de sols renforcés par un matériau purement cohérent. La formulation sous forme de cohésion anisotrope permet alors de bien mettre en évidence les sollicitations pour lesquelles le sol en place est effectivement renforcé et celles pour lesquelles le renforcement s'avère négligeable voire nul.

Les résultats analytiques mettent en lumière, comme en élasticité, un fort avantage des renforcements par tranchées croisées par rapport aux colonnes lorsque le cisaillement devient important. Le fait d'utiliser une structure en *nid d'abeille* pour le renforcement "protège" en quelque sorte le sol en place lors d'un cisaillement. Nous verrons dans le prochain chapitre la conséquence de ces différentes remarques sur le comportement à la rupture d'un ouvrage en sol renforcé par l'une ou l'autre des techniques.

* *

*

Chapitre 5

Capacité portante sous chargement incliné de fondations en sols renforcés de type cohérent/cohérent

Résumé : *Le but de ce chapitre est de présenter la suite de la méthode d'homogénéiasition en calcul à la rupture, en passant cette fois à l'échelle de l'ouvrage. En premier lieu, la notion de domaine des chargements potentiellement supportables relatif à ce dernier est présentée de façon générale. On évoque notamment les approches existantes permettant de l'encadrer. Dans un second temps, l'exemple d'un sol de fondation renforcé par un matériau purement cohérent est traité, en considérant un chargement incliné appliqué à une semelle infiniment rigide. En utilisant les domaines de résistance macroscopiques des renforcements par colonnes ou tranchées croisées évalués dans le chapitre précédent, on parvient à déterminer un majorant analytique rigoureux de la capacité portante de la fondation. Sous ce chargement, on constate alors la meilleure performance des sols renforcés par tranchées croisées par rapport aux sols renforcés par colonnes.*

Sommaire

5.1 Encadrement du domaine des chargements potentiellement supportables pour un ouvrage 96
5.1.1 Définition du domaine **K** 96
5.1.2 Encadrement du domaine **K** 97
5.2 Capacité portante sous charge inclinée d'un sol de fondation renforcé par un matériau purement cohérent 99
5.2.1 Mode de chargement et puissance des efforts extérieurs 99
5.2.2 Expression de la puissance résistante maximale 101
5.2.3 Performances des différentes techniques de renforcement 103
5.2.4 Remarques conclusives 106

5.1 Encadrement du domaine des chargements potentiellement supportables pour un ouvrage

La seconde étape de la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture consiste à mettre en œuvre les approches du calcul à la rupture sur l'ouvrage homogénéisé dont les capacités de résistance en tout point on été préalablement déterminées par la résolution du problème auxiliaire. La réponse à l'échelle de l'ouvrage est donc caractérisée par un domaine de résistance, appelé *domaine des chargements potentiellement supportables*. Le but de cette section est de donner une définition générale de ce domaine et de décrire les approches permettant de l'encadrer, de sorte qu'on puisse les appliquer par la suite sur des exemples d'application concrets.

5.1.1 Définition du domaine des chargements potentiellement supportables

On considère un domaine Ω, de frontière $\partial\Omega$, dans l'espace (x_1, x_2, x_3). Le chargement appliqué peut être de deux types :

- des forces volumiques à distance (comme par exemple l'action de pesanteur) qu'on caractérise par le champ vectoriel $\rho\underline{F}(\underline{x})$,
- des distributions d'efforts surfaciques, notées $\underline{T}(\underline{x})$, s'appliquant sur toute ou partie du contour $\partial\Omega$.

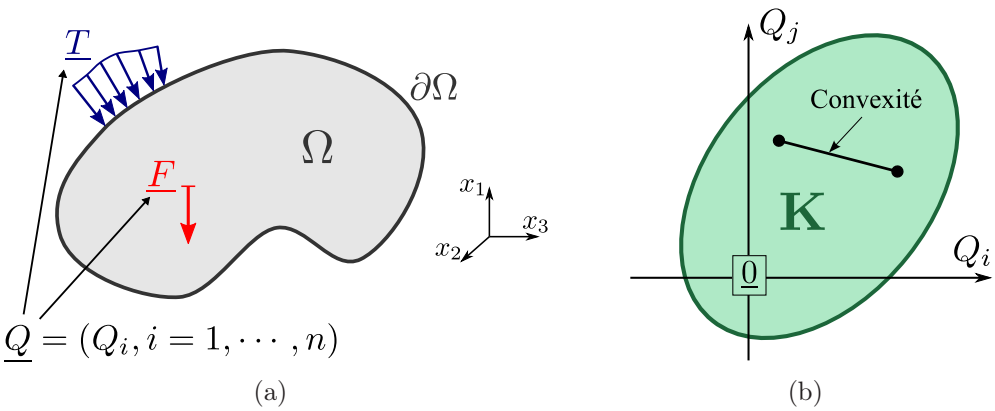


FIGURE 5.1 – Paramètres de chargements (a) et domaine des chargements potentiellement supportables associé (b).

Le chargement dépend d'un nombre fini de paramètres, $\underline{Q} = (Q_i,\ i = 1, \cdots n)$ dans la Figure 5.1(a), si et seulement si, pour un champ de vitesse $\underline{U}$ cinématiquement admissible avec les données en vitesse du problème, la puissance des efforts extérieurs dans ce champ de vitesse peut se mettre sous la forme :

$$P_e(\underline{U}) = \int_\Omega \rho\underline{F} \cdot \underline{U}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{U}\,\mathrm{d}S = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} \tag{5.1}$$

Le vecteur $\underline{\dot{q}}$ regroupe les *paramètres cinématiques généralisés*, associés par dualité au vecteur des *paramètres de chargement* $\underline{Q}$.

On cherche à déterminer l'ensemble des valeurs de $\underline{Q}$ qui peuvent être supportées par Ω. Cet ensemble constitue le *domaine des chargements potentiellement supportables* $\mathbf{K}$. Il est défini comme l'ensemble des chargements $\underline{Q}$ tels qu'il soit possible de trouver un champ de contrainte statiquement admissible avec $\underline{Q}$ et qui respecte le critère de résistance $\mathbf{G}(\underline{x})$ en tout point de Ω :

$$\mathbf{K} = \left\{\underline{Q} \,|\, \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ SA } \underline{Q}\,;\, \forall \underline{x} \in \Omega,\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in \mathbf{G}(\underline{x})\right\} \tag{5.2}$$

La frontière du domaine $\mathbf{K}$ est constituée de l'ensemble des *chargements extrêmes*. Ce domaine $\mathbf{K}$ possède des propriétés remarquables, qui découlent de celles du domaine de résistance $\mathbf{G}(\underline{x})$. En effet, le chargement nul $\underline{Q} = \underline{0}$ appartient à ce domaine, qui vérifie par ailleurs la propriété de convexité (voir Figure 5.1(b)).

Pour déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables, on peut choisir de procéder par *trajets de chargements radiaux* dans l'espace des vecteurs de chargement. Ainsi, se fixant une direction quelconque du trajet radial de chargement, notée $\underline{\tilde{Q}}$, on définit le facteur de chargement λ^+ comme :

$$\lambda^+ = \sup\left\{\lambda \,|\, \lambda\underline{\tilde{Q}} \in \mathbf{K}\right\} \tag{5.3}$$

$\lambda^+\underline{\tilde{Q}}$ est alors le chargement extrême, dans la direction de chargement $\underline{\tilde{Q}}$.

5.1.2 Encadrement du domaine K

5.1.2.1 Approche statique par l'intérieur

L'approche statique par l'intérieur du domaine des chargements potentiellement supportables découle directement de la définition (5.2). Procédant par exemple par trajet de chargement radial $\lambda\underline{\tilde{Q}}$, et en considérant un champ de contrainte $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ en équilibre avec $\underline{\tilde{Q}}$, on obtient un *minorant* $\lambda^{\text{stat}}\underline{\tilde{Q}}$ de la charge extrême $\lambda^+\underline{\tilde{Q}}$ grâce à la procédure de maximisation suivante :

$$\lambda^+ \geq \lambda^{\text{stat}} = \sup\left\{\lambda \,|\, \forall \underline{x} \in \Omega,\, \lambda\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{x}) \in \mathbf{G}(\underline{x})\right\} \tag{5.4}$$

5.1.2.2 Approche cinématique par l'extérieur

Par dualisation, on peut définir le domaine $\mathbf{K}$ à partir des champs de vitesse virtuels $\underline{U}$, cinématiquement admissibles avec les paramètres cinématiques $\underline{\dot{q}}$. Cette définition passe par le calcul préalable de la *puissance résistante maximale* d'un tel champ :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{d}})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{S^{\text{disc}}} \pi(\underline{n}, [\underline{U}])\,\mathrm{d}S \tag{5.5}$$

où $\pi(\underline{\underline{d}})$ et $\pi(\underline{n}, [\underline{U}])$ sont les fonctions d'appui du domaine de résistance $\mathbf{G}$, définies par :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \sup\left\{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \,|\, \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{G}\right\} \tag{5.6a}$$

$$\pi(\underline{n}, [\underline{U}]) = \sup\left\{(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{U}] \,|\, \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{G}\right\} \tag{5.6b}$$

$[\underline{U}]$ désignant les sauts de vitesse au travers d'une éventuelle surface de discontinuité de normale $\underline{n}$.

On peut alors écrire :

$$\underline{Q} \in \mathbf{K} \Rightarrow \begin{cases} \forall \underline{U} \text{ CA } \underline{\dot{q}} \\ P_e(\underline{U}) \leq P_{rm}(\underline{U}) \end{cases} \tag{5.7}$$

Pour définir l'approche cinématique permettant d'obtenir un *majorant du facteur de chargement extrême*, on utilise la contraposée de cette implication, soit :

$$\begin{cases} \exists \underline{U} \text{ CA } \underline{\dot{q}} \\ P_e(\underline{U}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} > P_{rm}(\underline{U}) \end{cases} \Rightarrow \underline{Q} \notin \mathbf{K} \tag{5.8}$$

Appliquée à des trajets de chargements radiaux, et en considérant des champs de vitesse tels que $\underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} > 0$, la définition (5.8) permet de donner l'expression d'un majorant λ^{cine} de la valeur extrême λ^+ :

$$\lambda^+ \leq \lambda^{\text{cine}} = \inf \left\{ \frac{P_{rm}}{\underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\dot{q}}} \,|\, \underline{U} \text{ CA } \underline{\dot{q}} \,;\, \underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} > 0 \right\} \tag{5.9}$$

L'interprétation des valeurs encadrant λ^+ est donnée sur la Figure 5.2. L'objectif final est d'appliquer les approches statique et cinématique du calcul à la rupture sur différents types d'ouvrages. On peut alors encadrer de façon plus ou moins précise le domaine des chargements potentiellement supportables de chaque structure pour un ensemble donné de paramètres de chargements.

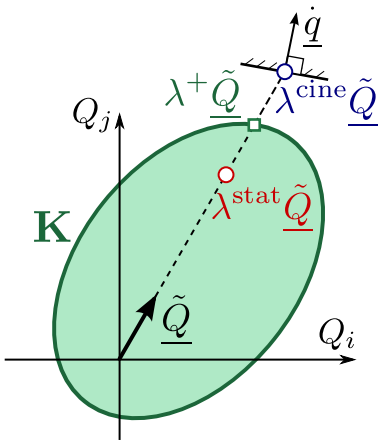


FIGURE 5.2 – Encadrement du facteur de chargement extrême λ^+ dans le cas de trajets de chargements radiaux.

Pour l'application de ces approches au domaine de chargements potentiellement supportables des ouvrages en sols renforcés, on s'intéressera désormais à des *problèmes de calcul à la rupture homogènes associés* (voir Figure 2.1). Le domaine de résistance, en tout point appartenant à une zone de sol renforcé, correspond au domaine de résistance macroscopique $\mathbf{G}^{hom}$, obtenu après résolution du problème auxiliaire de calcul à la rupture (voir chapitre 4).

5.2 Capacité portante sous charge inclinée d'un sol de fondation renforcé par un matériau purement cohérent

Comme premier exemple de calcul à la rupture d'un ouvrage en sol renforcé traité dans le cadre de la méthode d'homogénéisation, on s'intéresse au problème de capacité portante du sol sous l'action d'une semelle filante infiniment rigide, infinie suivant une des directions horizontales (notée $\underline{e}_3$ ici). Les renforcements considérés sont constitués d'un matériau purement cohérent, ayant la forme de colonnes ou de tranchées croisées. Les critères macroscopiques de ces sols renforcés, de type cohérent/cohérent, ont été évalués aux sections 4.4 et 4.5. On cherche à refléter, sur un problème homogène équivalent, l'impact des critères de résistance macroscopiques des sols renforcés par l'une ou l'autre des techniques de renforcement.

5.2.1 Mode de chargement et puissance des efforts extérieurs

On considère une semelle de fondation infiniment rigide, de largeur B, s'appuyant sur un sol renforcé. Un chargement de densité linéique suivant x_3 s'applique sur l'axe de cette semelle. Cette charge, dont la norme est notée Q, est inclinée d'un angle α par rapport à l'axe vertical $\underline{e}_1$ (voir Figure 5.3). Le sol renforcé est modélisé comme un *milieu homogène équivalent*, dont le critère est celui d'un sol purement cohérent, mais avec une cohésion anisotrope. Les cohésions retenues sont celles déterminées au chapitre 4 par les approches cinématiques pour l'une et l'autre des configurations de renforcement, notées respectivement C_{col}^{cine} et C_{tc}^{cine}. Pour les mêmes raisons que dans la section 3.2, le problème peut être traité en déformations planes dans un des plans verticaux, ici le plan (x_1, x_2).

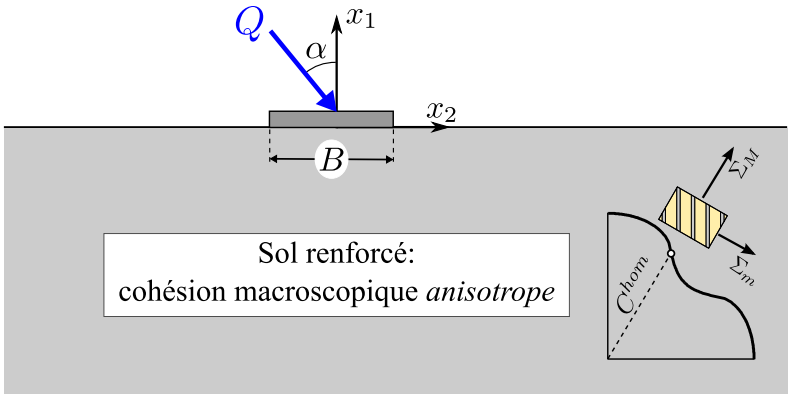


FIGURE 5.3 – Problème de capacité portante d'un sol renforcé sous chargement incliné.

On décide d'appliquer une approche cinématique à ce problème en utilisant un champ de vitesse inspiré du mécanisme de Prandtl, tel que représenté sur la Figure 5.4. Dans celui-ci, les deux blocs OIM et OJN sont animés d'un mouvement de translation et sont séparés par une zone en cisaillement OMN. Ce mécanisme est paramétré par deux variables, à savoir la norme de la vitesse des blocs, notée U, et l'ouverture Γ du secteur angulaire OIM. Les vitesses des blocs OIM et OJN sont tangentes respectivement aux lignes de discontinuité IM et NJ (conditions de pertinence). On exprime le champ de

vitesse dans l'éventail OMN en coordonnées polaires, attachées à l'origine O, de la façon suivante :

$$\underline{U} = U\underline{e}_\theta \tag{5.10}$$

de sorte que le champ de vitesse reste tangent à MN, qui est un arc de cercle, et continu au travers des lignes OM et ON.

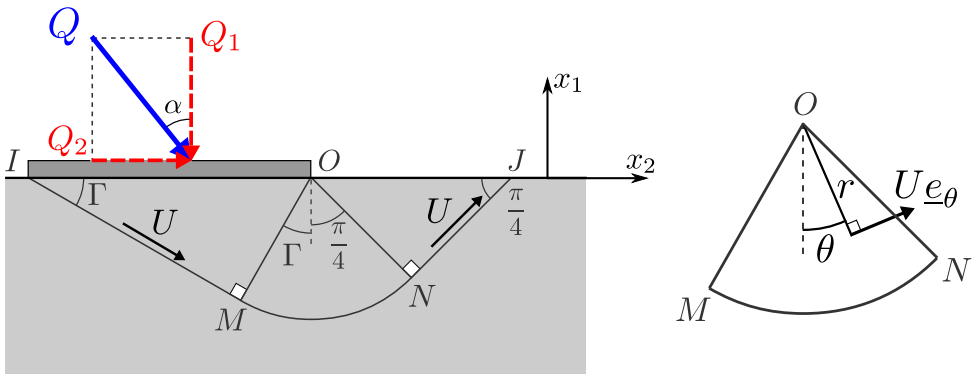


FIGURE 5.4 – Mécanisme de rupture utilisé pour l'approche cinématique du problème de capacité portante sous charge inclinée.

Par analogie avec la section précédente, le facteur de chargement (λ) correspond à la norme Q et la direction de chargement ($\underline{\tilde{Q}}$) est indiquée par le vecteur unitaire $-\cos\alpha\underline{e}_1 + \sin\alpha\underline{e}_2$. Il n'y a aucune force volumique (on peut montrer classiquement que le poids volumique n'a aucune influence sur la valeur de la capacité portante pour un matériau de type cohérent). On cherche alors à trouver un *majorant* de la charge extrême $\lambda^+ = Q^+$, pour une inclinaison donnée. La puissance des efforts extérieurs s'exprime donc de la façon suivante :

$$P_e(\underline{U}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = (-Q_1\underline{e}_1 + Q_2\underline{e}_2) \cdot \underline{\dot{q}} = Q(-\cos\alpha\underline{e}_1 + \sin\alpha\underline{e}_2) \cdot \underline{\dot{q}} \tag{5.11}$$

Avec le mécanisme de rupture choisi, le vecteur des paramètres cinématiques $\underline{\dot{q}}$ associés au chargement s'exprime en fonction de la norme de la vitesse des blocs et de l'ouverture angulaire du bloc OIM :

$$\underline{\dot{q}} = U(-\sin\Gamma\underline{e}_1 + \cos\Gamma\underline{e}_2) \tag{5.12}$$

avec lequel le champ de vitesse est cinématiquement admissible.

Avec les deux expressions précédentes, on vérifie que la puissance des efforts extérieurs est bien positive, puisque U est positive et $\Gamma \in]0, \pi/2[$. L'équation (5.9) nous permet alors de définir l'expression d'un majorant de la charge extrême :

$$\underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} = U\sin(\alpha + \Gamma) > 0 \;\Rightarrow\; Q^+ \leq \inf_{\Gamma} \frac{P_{rm}(\underline{U})}{U\sin(\alpha + \Gamma)} \tag{5.13}$$

Le calcul de la *puissance résistante maximale* est explicité dans la section qui suit.

5.2.2 Expression de la puissance résistante maximale

L'expression générale de la puissance résistante maximale est donnée par (5.5). Le mécanisme de rupture retenu possède une seule ligne de discontinuité de vitesse $IMNJ$ et une zone OMN siège d'un taux de déformation en cisaillement. Cela permet d'exprimer $P_{rm}(\underline{U})$ de la façon suivante :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{IMNJ} \pi^{hom}(\underline{n}, [\underline{U}])\,\mathrm{d}s + \int_{OMN} \pi^{hom}(\underline{\underline{d}})\,\mathrm{d}S \tag{5.14}$$

où $[\underline{U}]$ désigne le saut de vitesse au travers de la ligne $IJMN$.

Ici, on ne connaît pas l'expression exacte de la fonction d'appui des différents milieux homogènes équivalents. En revanche, en utilisant les résultats issus de l'encadrement des critères de résistance macroscopiques, la théorie du calcul à la rupture assure l'inégalité suivante :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{d}}) \leq d\Pi^{\text{cine}}(\beta) \tag{5.15}$$

où $d > 0$ est la valeur principale majeure du champ de taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ et β son orientation par rapport à l'axe de renforcement $\underline{e}_1$. La fonction scalaire Π^{cine} est égale à Π^{cine}_{col} lorsqu'on étudie le cas d'un sol renforcé par colonnes et Π^{cine}_{tc} dans une configuration en tranchées croisées.

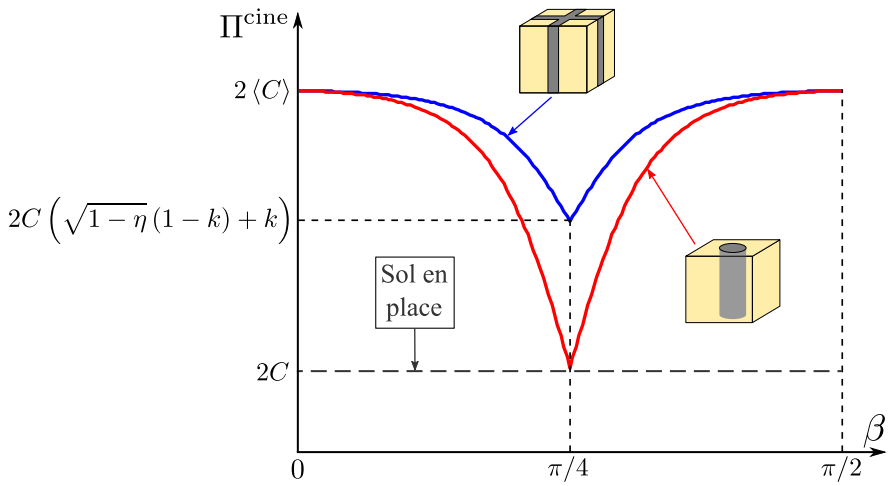


FIGURE 5.5 – Comparaison de la fonction Π^{cine} pour des sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées ($k = 20$, $\eta = 20\%$).

Compte tenu des expressions (4.57) et (4.76), la variation de ces fonctions en fonction de l'angle β peut être représentée sur la Figure 5.5. On y représente également la fonction Π^{cine} liée au sol non renforcé, qui est alors une constante valant deux fois la cohésion du sol. On y observe une caractéristique utile pour l'intégration à venir :

$$\Pi^{\text{cine}}(\beta) = \Pi^{\text{cine}}(-\beta) = \Pi^{\text{cine}}(\pi/2 - \beta) \tag{5.16}$$

De plus, on peut montrer l'égalité entre la fonction d'appui relative à un saut de vitesse au travers d'une surface et celle associée à un taux de déformation bien choisi

[Hassen *et al.*, 2013]. On peut en effet écrire :

$$\pi^{hom}(\underline{n}, [\underline{U}]) = \pi^{hom}\left(\underline{\underline{d}} = \frac{U}{2}(\underline{n} \otimes \underline{t} + \underline{t} \otimes \underline{n})\right) \leq \frac{U}{2}\Pi^{\text{cine}}(\beta) \tag{5.17}$$

β représentant ici l'angle formé entre l'axe de renforcement $\underline{e}_1$ et la première bissectrice du plan formé par la tangente $\underline{t}$ à la surface de discontinuité et sa normale (voir Figure 5.6).

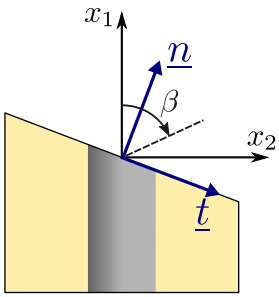


FIGURE 5.6 – Définition de l'angle β.

Ainsi, faute de pouvoir exprimer la valeur exacte de la puissance résistante maximale, on peut en obtenir un *majorant* pour un tel mécanisme sous la forme suivante :

$$P_{rm}(\underline{U}) \leq P_{rm}^{\text{cine}}(\underline{U}) = \int_{IMNJ} \frac{U}{2}\Pi^{\text{cine}}(\beta)\,\mathrm{d}s + \int_{OMN} d\Pi^{\text{cine}}(\beta))\,\mathrm{d}S \tag{5.18}$$

Les intégrations de la fonction d'appui sur les lignes de discontinuité de vitesse et dans la zone "en éventail" font apparaître la largeur de la semelle B, l'angle d'ouverture Γ ainsi que la norme de la vitesse U. En se référant à la remarque précédente, on obtient après calculs :

$$\begin{aligned} P_{rm}^{\text{cine}}(\underline{U}) =& \frac{BU}{2}\cos\Gamma\Pi^{\text{cine}}(\pi/4-\Gamma) + \frac{BU}{2}\sin\Gamma\Pi^{\text{cine}}(0) \\ &+ \frac{BU}{2}\sin\Gamma\int_{-\Gamma}^{\pi/4}\Pi^{\text{cine}}(\pi/4-\Theta)\,\mathrm{d}\Theta \\ &+ \int_{-\Gamma}^{\pi/4}\int_{0}^{B\sin\Gamma}\frac{U}{2R}\Pi^{\text{cine}}(\pi/4-\Theta)R\,\mathrm{d}R\mathrm{d}\Theta \end{aligned} \tag{5.19}$$

Au passage, on souligne que le mécanisme retenu n'est pas valable dans les cas extrêmes ($\Gamma = 0$ ou $\Gamma = \pi/2$). On a d'ailleurs une fonction singulière pour ces valeurs particulières d'ouverture angulaire.

En combinant les expressions (5.13) et (5.18), on sait que la charge ultime de la capacité portante, pour une inclinaison α fixée, est majorée par :

$$Q^{+}(\alpha) \leq Q_{\text{meca}}^{\text{cine}}(\alpha) = \min_{0<\Gamma<\pi/2} \frac{P_{rm}^{\text{cine}}}{U\sin(\alpha+\Gamma)} \tag{5.20}$$

On peut ajouter à ce premier majorant $Q_{\text{meca}}^{\text{cine}}$, un mécanisme de glissement de la semelle sur la surface du sol. Une discontinuité de vitesse apparaît alors au niveau de

l'interface notée OI sur la Figure 5.4. La puissance résistante maximale développée par un tel mécanisme est une dégénérescence du calcul précédent, obtenue en prenant $\Gamma = 0$. Cela revient à ne considérer que la contribution de la ligne de discontinuité IM (où M est confondu avec O) dans l'expression (5.19). On obtient alors un deuxième majorant de Q^+ sous la forme :

$$\begin{aligned} Q^+(\alpha) \leq Q^{\text{cine}}_{\text{gliss}} &= \frac{B\Pi^{\text{cine}}(\pi/4)}{2\sin\alpha} \\ &= \begin{cases} \dfrac{BC}{\sin\alpha} & \text{pour les colonnes} \\ \dfrac{BC\left(\sqrt{1-\eta}(1-k)+k\right)}{\sin\alpha} & \text{pour les tranchées croisées} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Au final, le meilleur majorant de la charge extrême potentiellement supportable s'obtient comme le minimum entre les deux majorants exprimés ci-dessus :

$$Q^+(\alpha) \leq \min\left\{Q^{\text{cine}}_{\text{meca}}(\alpha)\,;\, Q^{\text{cine}}_{\text{gliss}}(\alpha)\right\} \tag{5.22}$$

L'intégration et l'optimisation liées à $Q^{\text{cine}}_{\text{meca}}$ sont ensuite réalisées numériquement pour les différentes configurations de renforcement. Les résultats obtenus pour le majorant de $Q^+(\alpha)$ sont donc semi-analytiques. L'inclinaison de la charge est discrétisée de façon à pouvoir évaluer son influence sur la capacité portante de l'ouvrage en sol renforcé par colonnes ou tranchées croisées.

5.2.3 Comparaison des performances des différentes techniques de renforcement

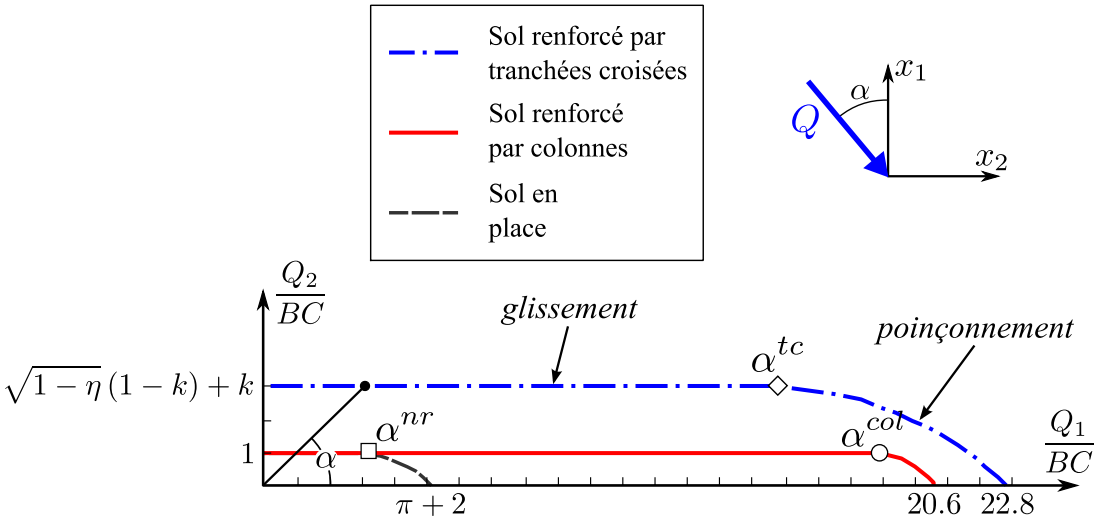


FIGURE 5.7 – Comparaison des majorants de la capacité portante d'un sol renforcé sous une charge inclinée ($k = 20$, $\eta = 20\%$).

Les résultats de cette approche cinématique sont représentés sur la Figure 5.7 dans le plan normalisé $(Q_2/BC, Q_1/BC)$, en prenant les caractéristiques adoptées dans le chapitre précédent ($k = 20$ et $\eta = 20\%$). Les angles α^{nr}, α^{col} et α^{tc} caractérisent la

limite entre les majorants $Q^{\text{cine}}_{\text{meca}}$ et $Q^{\text{cine}}_{\text{gliss}}$, respectivement pour un sol non renforcé, un sol renforcé par colonnes et un sol renforcé par tranchées croisées.

On observe tout d'abord sur cette figure que pour une charge purement verticale, on retrouve le résultat classique pour un sol non renforcé. En effet, pour $\alpha = 0$ (ou $Q_2 = 0$), la capacité portante ultime d'un sol purement cohérent vaut $Q^{+}_{nr}(0) = (\pi+2)BC$. L'angle d'ouverture associé à ce résultat est $\Gamma = \pi/4$, ce qui correspond à un mécanisme de Prandtl non symétrique.

De plus, on peut souligner que le reste du "bulbe" du majorant du critère de résistance du sol non renforcé est un résultat analytique qui coïncide avec celui obtenu dans la littérature [Salençon et Pecker, 1995].

Toujours en observant ce même graphique, la performance accrue apportée par le renforcement du sol sous la semelle est flagrante pour une charge verticale. Ainsi, pour les caractéristiques mécaniques retenues, on obtient un gain de la capacité portante verticale de 300% pour une configuration de renforcement en colonnes et de 345% pour les tranchées croisées.

Afin de mieux apprécier les différences entre les deux techniques, la Figure 5.8 reprend ces résultats dans le plan $(\alpha, Q/BC)$. On peut tout d'abord observer que l'ouvrage renforcé par colonnes voit ses performances décroître rapidement lorsque la charge s'écarte de la position verticale. Lorsque l'inclinaison est supérieure à l'angle α^{nr}, le renforcement devient inutile, la capacité portante de l'ouvrage renforcé se réduisant à celui de l'ouvrage non renforcé.

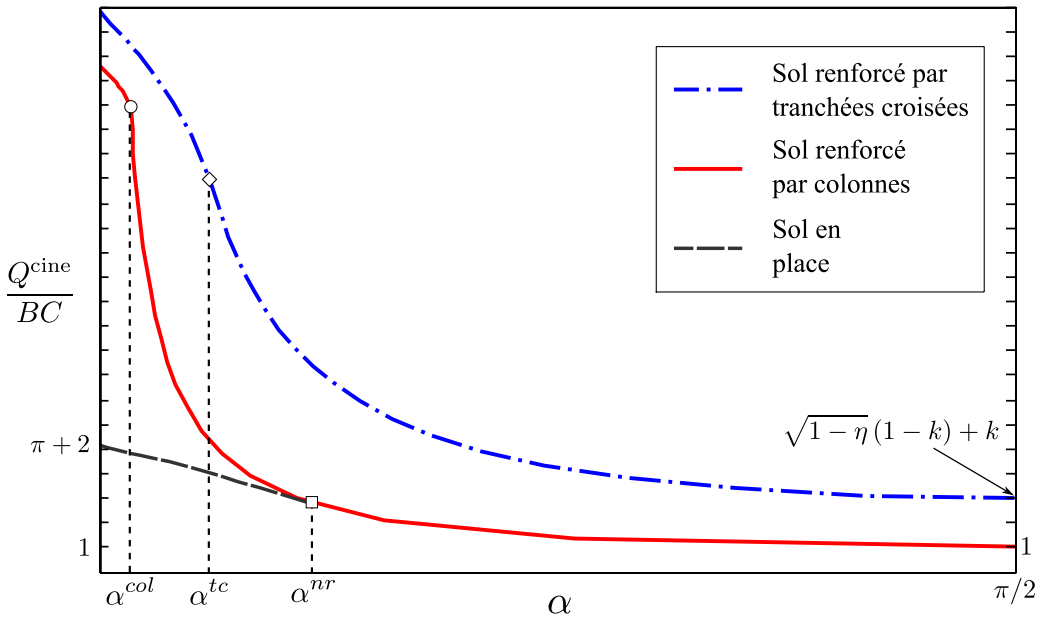


FIGURE 5.8 – Majorants de la capacité portante d'un sol renforcé en fonction de l'inclinaison de la charge.

En revanche, le renforcement par tranchées croisées améliore toujours la capa-

cité portante de l'ouvrage, même lorsque la charge est fortement inclinée. Ainsi, on s'aperçoit que pour un chargement purement horizontal ($\alpha = \pi/2$), le gain est de 200% par rapport à la situation sans renforcement ou avec une renforcement par colonnes.

La Figure 5.9 complète l'analyse de la différence de performance entre les sols renforcés par colonnes et ceux renforcés par tranchées croisées. Elle fait intervenir la fonction scalaire R^{cine} qui dépend de l'inclinaison α et qui est définie par :

$$R^{\text{cine}}(\alpha) = \frac{Q_{tc}^{\text{cine}}(\alpha)}{Q_{col}^{\text{cine}}(\alpha)} \tag{5.23}$$

Comme évoqué auparavant, l'évolution du rapport entre le majorant de la charge extrême d'un sol renforcé par tranchées croisées et celui relatif à un sol renforcé par colonnes, en fonction de l'inclinaison du chargement, fait apparaître trois phases.

- $0 \leq \alpha \leq \alpha^{col}$: les deux techniques de renforcement ont des performances équivalentes. R^{cine} est quasiment constant et proche de 1.10 avec les caractéristiques retenues ici.

- $\alpha^{col} \leq \alpha \leq \alpha^{tc}$: les performances des deux techniques décroissent mais de manière très différente. Le ratio entre les deux majorants augmente donc rapidement, passant de 1.10 à 3.01.

- $\alpha^{tc} \leq \alpha \leq \pi/2$: les mécanismes de glissement sont "activés" pour les deux types de renforcement. La différence entre les majorants de la charge ultime s'explique par des cohésions différentes vis-à-vis du cisaillement. R^{cine} est constant et prend la valeur analytique $\sqrt{1-\eta}(1-k)+k$.

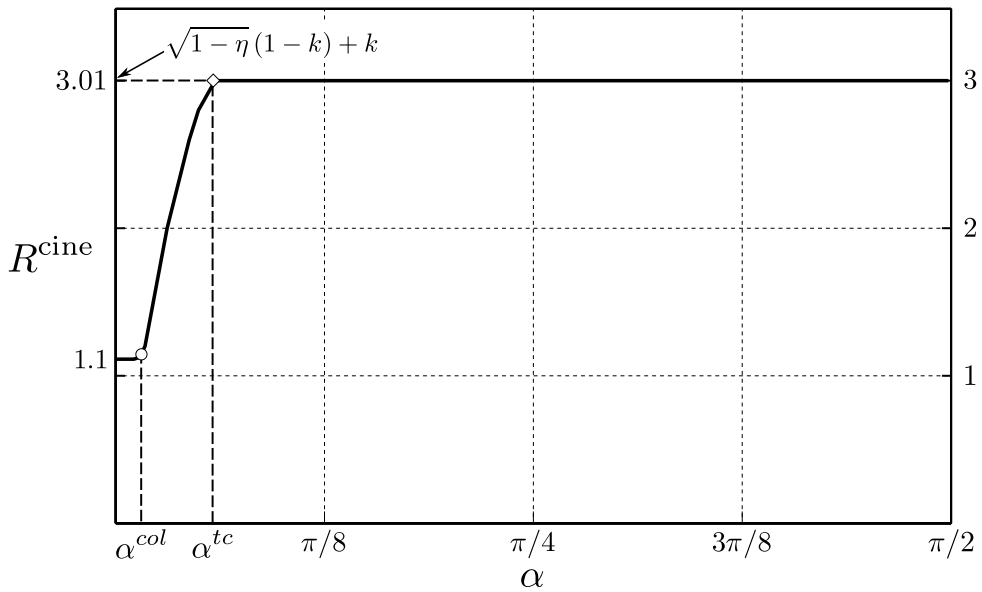


FIGURE 5.9 – Comparaison de la performance relative du renforcement par tranchées croisées par rapport à la configuration en colonnes.

Les résultats mettent en lumière, comme en élasticité (chapitre 3), un net avantage

de la technique de renforcement par tranchées croisées par rapport aux colonnes tout particulièrement lorsque la charge est inclinée. Cela s'explique notamment par le fait que la résistance en cisaillement longitudinal du sol renforcé par tranchées croisées est significativement supérieure à celle d'un sol renforcé par colonnes qui n'est autre que celle du sol en place.

En revanche, les performances observées sont équivalentes lorsque la charge est verticale, le mécanisme de rupture associé présentant donc peu de zones sollicitées en cisaillement longitudinal. Le cas du renforcement par simples tranchées n'est pas traité ici, mais au vu du critère de résistance d'un tel matériau multicouche, les performances observées sont proches de celles du renforcement par colonnes [de Buhan, 1986].

5.2.4 Remarques conclusives

L'utilisation du minorant des différents domaines de résistance dans un calcul d'ouvrage pourrait également être envisagée dans le cadre de calculs semi-analytiques. Pour cela, on pourra par exemple se rapporter au champ de contrainte proposé dans la littérature pour ce type de problème [Salençon et Pecker, 1995].

La détermination du domaine des chargements potentiellement supportables de l'ouvrage renforcé constitue l'objectif final de la démarche d'homogénéisation en théorie du calcul à la rupture. Ici, sur un exemple simple mais réaliste, nous sommes parvenus à déterminer un majorant de ce domaine de façon rigoureuse. Tous les calculs ont été conduits de façon analytique, seules certaines opérations d'intégration ont été effectuées numériquement.

Comme nous allons le constater dans la suite du manuscrit, il est rare de pouvoir déterminer des domaines de résistance macroscopiques analytiquement et il est tout aussi rare de pouvoir les utiliser dans des calculs d'ouvrages de façon analytique. C'est notamment le cas lorsque le matériau de renforcement obéit à un critère de résistance faisant intervenir des propriétés de frottement.C'est pourquoi, la dernière partie de ce manuscrit est dédiée à la mise en œuvre de la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture, fondée sur l'utilisation d'outils numériques puissants.

* *

*

Approche numérique du calcul à la rupture des sols renforcés

Chapitre 6

Méthodes numériques appliquées à la résolution du problème auxiliaire de calcul à la rupture

Résumé : *Afin de pouvoir traiter numériquement des problèmes auxiliaires de calcul à la rupture, ce chapitre revient tout d'abord sur les méthodes de type éléments finis existant dans la littérature. Les avancées faites dans ce domaine durant les dernières années sont présentées et une formulation numérique des approches statique et cinématique du calcul à la rupture est proposée. Elle repose sur la technique de programmation semi-définie positive récemment développée. Partant des simplifications apportées par la configuration particulière des sols renforcés par inclusions linéaire, on propose une formulation simplifiée du problème auxiliaire en conditions de "défomations planes généralisées" [Gueguin* et al.*, 2014b]. Les avantages de cette formulation par rapport à une formulation tridimensionnelle sont enfin mis en évidence.*

Sommaire

6.1 Nécessité des méthodes numériques en calcul à la rupture 110
6.1.1 Remarques initiales 110
6.1.2 Un bref historique des méthodes numériques en calcul à la rupture 111
6.2 Formulations numériques des approches du calcul à la rupture pour un problème 3D 114
6.2.1 Approche statique 114
6.2.2 Approche cinématique 119
6.3 Traitement d'un problème en conditions de déformations planes généralisées (GPS) 123
6.3.1 Conditions de déformations planes généralisées 123
6.3.2 Reformulation GPS de l'approche statique 125
6.3.3 Reformulation GPS de l'approche cinématique 129
6.3.4 Conclusions sur les formulations numériques développées 132

6.1 Nécessité des méthodes numériques en calcul à la rupture

6.1.1 Remarques initiales

Les méthodes numériques basées sur les éléments finis sont classiquement utilisées pour résoudre des problèmes de mécanique des milieux continus. Elles sont souvent implémentées dans des codes de calcul commerciaux pour différents types de comportement tels que l'élasticité, la thermoélasticité ou encore l'élastoplasticité. Cependant, il est très rare de retrouver dans ces logiciels des procédures numériques fondées sur la théorie du calcul à la rupture.

Pourtant, comme nous avons eu l'occasion de le souligner dans la partie précédente (chapitres 4 et 5), les études analytiques de problèmes de calcul à la rupture se heurtent rapidement à la complexité des géométries et/ou des chargements étudiés. Dans une majorité de cas, les champs de contrainte ou de vitesse que l'on peut manipuler "à la main" ne permettent pas d'obtenir des évaluations suffisamment précises du domaine des chargements potentiellement supportables.

S'intéressant plus spécifiquement à la méthode d'homogénéisation appliquée aux sols renforcés, l'évaluation analytique de leur critère de résistance macroscopique devient très difficile voire impossible dès lors que le renforcement est de type frottant (respectant un critère de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prager). À titre d'illustration, penchons nous sur le cas des sols renforcés par des colonnes ballastées, constituées de matériaux purement frottants.

Tout d'abord concernant la résolution du problème auxiliaire en calcul à la rupture, peu d'auteurs sont parvenus à définir une *borne statique analytique* du domaine de résistance macroscopique [Jellali *et al.*, 2007] et aucun, à notre connaissance, n'a réussi à obtenir une approche cinématique par l'extérieur complète.

Ensuite, lorsqu'on souhaite traiter de la stabilité d'un ouvrage en analysant le problème homogène équivalent, l'absence de définitions analytiques du domaine de résistance macroscopique ne permet pas de mettre en place des mécanismes de ruine ou des champs de contrainte conduisant à des résultats encadrant le domaine de stabilité de l'ouvrage. Des auteurs ont néanmoins tenté de mettre en œuvre des modèles semi-analytiques simplifiés pour parvenir à des évaluations d'un tel domaine avec un statut précis [Hassen *et al.*, 2010, Hassen *et al.*, 2013].

Pour toutes ces raisons, nous avons décidé de recourir à la formulation numérique des problèmes de calcul à la rupture. Dans ce chapitre nous développerons une formulation permettant d'effectuer la résolution du problème auxiliaire et dans le chapitre 8 nous verrons comment l'adapter pour traiter les calculs à l'échelle d'un ouvrage. Afin d'être en mesure de pouvoir utiliser les dernières techniques numériques dédiées au calcul à la rupture, il nous faut en premier lieu expliquer les différentes évolutions qu'a connu ce domaine de recherche.

6.1.2 Un bref historique des méthodes numériques en calcul à la rupture

Depuis près de quarante ans, des auteurs ont travaillé sur l'application de la méthode des éléments finis afin de pouvoir résoudre des problèmes de calcul à la rupture (ou d'analyse limite). Ils se sont aussi bien penchés sur l'approche statique que sur l'approche cinématique relatives à cette théorie (voir chapitre 4). Cette section a donc pour objectif de décrire l'évolution des méthodes numériques dans ce domaine durant les dernières décennies, en se concentrant plus particulièrement sur la résolution de problèmes de géotechnique. Le but n'est pas tant de livrer une liste exhaustive de la littérature sur le sujet, que l'on pourra trouver dans une étude synthétique réalisée par [Sloan, 2013]. Il s'agit surtout de souligner le lien étroit entre l'évolution de ces méthodes et le développement des logiciels d'optimisation.

6.1.2.1 Méthodes s'appuyant sur la linéarisation préalable des critères de résistance

L'idée de discrétiser le milieu en éléments finis et de résoudre un problème d'optimisation du type de (4.14) ou (4.16) a émergé il y a une quarantaine d'années. Appliquée à l'approche statique, cela consiste à maximiser le facteur de chargement en utilisant un champ de contrainte discrétisé, statiquement admissible et respectant le critère de résistance en tout point. Pour l'approche cinématique, on cherche à obtenir un champ de vitesse cinématiquement admissible minimisant la puissance résistante maximale.

Dans les années 1970 et 1980, les critères de résistance de type Drucker-Prager et Mohr-Coulomb étaient déjà connus, mais leur description analytique exacte ne pouvait pas être directement prise en compte par les logiciels d'optimisation. À l'époque, seule la *programmation linéaire* (LP dans la littérature) était développée. Pour obtenir des bornes inférieures et supérieures relatives à des problèmes bidimensionnels de géotechnique, l'idée a donc été de *linéariser* ces critères en utilisant autant de contraintes linéaires que possible. La précision du résultat obtenu était alors liée à la fois à la discrétisation du milieu et à l'approximation du critère retenu, la puissance des machines utilisées à l'époque pouvant amener à faire un choix entre ces deux sources d'erreur.

Les premiers auteurs ayant développé cette méthode dans le cadre de l'approche statique du calcul à la rupture ont utilisé des éléments finis triangulaires à trois nœuds (TRI3). Dans ce cas, les inconnues du problème sont les contraintes en chaque sommet des éléments [Lysmer, 1970, Pastor, 1983, Sloan, 1988]. Dans le cas de l'approche cinématique, deux développements sont apparus. L'utilisation d'un champ continu de vitesse basée sur des éléments triangulaires à six nœuds ou celle d'un champ discontinu avec des triangles à trois nœuds [Turgeman, 1983, Sloan, 1989, Sloan et Kleeman, 1995].

Le développement des méthodes numériques d'optimisation a permis, au début des années 2000, de mettre au point la *programmation non linéaire* (NLP). Cette évolution a alors donné l'opportunité de résoudre des problèmes avec plus de variables d'optimisation. Les critères utilisés étaient toujours linéarisés, mais leurs approximations étaient plus fines. Il existe de nombreux exemples reposant sur cette technique de programmation et traitant soit de l'approche statique [Lyamin et Sloan, 2002a, Krabbenhøft et Damkilde, 2003],

soit de l'approche cinématique [Lyamin et Sloan, 2002b, Vicente da Silva et Antao, 2007] de problèmes bidimensionnels.

À ce stade, on peut également souligner que les démarches de développement de ces méthodes numériques varient suivant les auteurs. Une première option consiste à utiliser des méthodes d'optimisation développé en interne, intégrant constamment les algorithmes de résolution les plus récents. Cela demande aux développeurs de mettre en place un système de veille pour se tenir au courant des dernières innovations, mais leur permet en contre-partie de maîtriser totalement les résultats obtenus, notamment la précision de la solution issue de l'optimisation. L'autre option revient à utiliser les solveurs de problèmes d'optimisation disponibles sur le marché comme des "boites noires" et à les appeler dans des programmes en langages informatiques usuels. C'est la position que nous adopterons par la suite. Parmi les solveurs existants, on peut citer, par exemple, SeDuMi [Sturm, 1999], Mosek [MOSEK,] ou IP-OPT [Waechter *et al.*, 2009].

6.1.2.2 Prise en compte des critères exacts

◇ Développement de la programmation conique et semi-définie positive

À partir de la deuxième moitié des années 2000, parvenant à exprimer analytiquement certains critères de résistance usuels sous la forme d'un cône faisant intervenir les contraintes, les scientifiques ont pu utiliser la programmation conique du second ordre (SOCP), nouvellement apparue, pour optimiser les champs de contrainte pour des problèmes bi ou tridimensionnels [Bisbos *et al.*, 2005, Makrodimopoulos et Martin, 2006, Kanno *et al.*, 2006, Kammoun *et al.*, 2010]. Cette formulation permet de prendre en compte exactement des critères tels que le critère de von Mises, de Drucker-Prager ou de Mohr-Coulomb en déformations planes.

De la même façon, certains auteurs ont prouvé que les *conditions de pertinence* liées à ces critères pouvaient également s'exprimer sous la forme de cônes. Cela leur a permis d'effectuer des approches cinématiques numériques de certains problèmes complexes. On peut citer par exemple [Makrodimopoulos et Martin, 2007, Krabbenhøft *et al.*, 2007, Makrodimopoulos et Martin, 2008, Garcea et Leonetti, 2011, Muñoz *et al.*, 2012], qui utilisent un champ de vitesse continu ou discontinu.

L'objectif étant toujours de prendre en compte le critère exact des matériaux intervenant dans la composition des sols, certains auteurs ont démontré que les critères de Mohr-Coulomb ou de Tresca en trois dimensions, qui font intervenir les valeurs propres des tenseurs de contrainte, pouvaient s'écrire sous la forme d'une *condition de semi-définie positivité* [Krabbenhøft *et al.*, 2008, Makrodimopoulos, 2010]. Les conditions de pertinence associées à ces critères peuvent également être écrites comme dépendant de matrices semi-définies positives. Une telle réécriture a tout d'abord été prouvée par [Martin et Makrodimopoulos, 2008] et appliquée récemment par [Gueguin *et al.*, 2014b].

À partir de telles formulations, explicitées ci-après, les approches statique et cinématique du calcul à la rupture peuvent donc être utilisées pour des problèmes tridimensionnels faisant intervenir des critères de type Mohr-Coulomb. L'optimisation

est alors menée grâce à des algorithmes de programmation semi-définie positive (SDP).

◇ Réécriture du critère de Mohr-Coulomb

Pour rappel, le critère de résistance de Mohr-Coulomb est de la forme :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_M(1+\sin\varphi) - \sigma_m(1-\sin\varphi) - 2C\cos\varphi \tag{6.1}$$

où C désigne sa cohésion et φ son angle de frottement. σ_M et σ_m sont respectivement les contraintes principales *majeure* et *mineure* du tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$. Les différents auteurs cités ci-dessus [Krabbenhøft *et al.*, 2008, Makrodimopoulos, 2010] ont montré que le respect du critère ($f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$) était strictement équivalent aux conditions de semi-définie positivité suivantes :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{X}}^\alpha = -\underline{\underline{\sigma}} + (k - a\zeta)\underline{\underline{\mathbb{I}}} \succeq 0 \\ \underline{\underline{X}}^\beta = \underline{\underline{\sigma}} + \zeta\underline{\underline{\mathbb{I}}} \succeq 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

dans lesquelles $\underline{\underline{\mathbb{I}}}$ représente le tenseur identité dans $\mathbb{R}^3$ et ζ est une variable uniquement destinée à réaliser l'optimisation à venir. a et k dépendent directement des caractéristiques de résistance :

$$a = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} \tag{6.3}$$

$$k = 2C\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \tag{6.4}$$

De plus, $\underline{\underline{A}} \succeq 0$ symbolise le fait que le tenseur symétrique $\underline{\underline{A}}$, de dimensions $n \times n$, est semi-défini positif. Par définition, cela se caractérise par la propriété suivante :

$$\underline{\underline{A}} \succeq 0 \Leftrightarrow \forall \underline{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{z} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{z} \geq 0 \tag{6.5}$$

De la même façon, on a déjà exprimé la fonction d'appui correspondant au critère de Mohr-Coulomb :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \begin{cases} C\cot\varphi\,\mathrm{tr}\underline{\underline{d}} & \text{si } \mathrm{tr}\underline{\underline{d}} \geq \sin\varphi(|d_{\mathrm{I}}| + |d_{\mathrm{II}}| + |d_{\mathrm{III}}|) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.6}$$

où d_{I}, d_{II} et d_{III} sont les déformations principales associées au tenseur du taux de déformation $\underline{\underline{d}}$. On peut alors prouver que cette définition de $\pi(\underline{\underline{d}})$ est équivalente au système d'équations suivant :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = k\mathrm{tr}\underline{\underline{d}}^\alpha \tag{6.7a}$$

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^\alpha - \underline{\underline{d}}^\beta \tag{6.7b}$$

$$-a\mathrm{tr}\underline{\underline{d}}^\alpha + \mathrm{tr}\underline{\underline{d}}^\beta = 0 \tag{6.7c}$$

$$\underline{\underline{d}}^\alpha, \underline{\underline{d}}^\beta \succeq 0 \tag{6.7d}$$

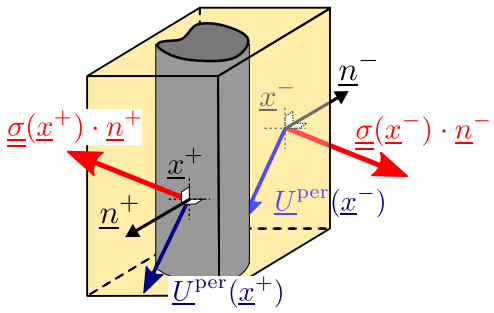
où $\underline{\underline{d}}^\alpha$ et $\underline{\underline{d}}^\beta$ sont des tenseurs d'ordre 2 utilisés lors d'une optimisation présentée par la suite.

Bien que de telles formulations, intervenant notamment dans les problèmes de géotechnique, soient connues, très peu d'auteurs les ont pour l'instant utilisées dans le cas tridimensionnel. Les développements numériques liés à ce type de problèmes sont décrits dans la suite de ce chapitre.

6.2 Formulations numériques des approches du calcul à la rupture pour un problème 3D

Dans cette section, nous allons expliciter les formulations numériques nécessaires pour traiter les problèmes tridimensionnels, que ce soit par une approche par l'intérieur ou par l'extérieur. Les explications fournies ici sont appliquées à notre problème de détermination du critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé (voir chapitre 4), dont les constituants sont du type Tresca ou Mohr-Coulomb. On prendra soin d'indiquer la façon dont sont construites les différentes matrices associées à la discrétisation du problème, en spécifiant celles qui sont liées au problème 3D en général et celles qui sont induites par la résolution particulière d'un problème auxiliaire pour un milieu périodique.

La première spécificité est que l'homogénéisation périoque implique que des conditions aux limites *périodiques* soient respectées sur le bord de la cellule de base. Si on choisit un milieu périodique quelconque, cela signifie que les vecteurs contraintes et les fluctuations de vitesse pour deux points situés en vis-à-vis sur deux faces opposées, doivent remplir des conditions respectivement d'*antipériodicité* et de *périodicité*. Ces conditions sont rappelées sur la Figure 6.1, où $\underline{x}^+$ et $\underline{x}^-$ sont les vecteurs position de ces deux points et $\underline{n}^+$ et $\underline{n}^-$ les normales sortantes des deux faces de la cellule de base en ces points.



$$\left\{\begin{array}{c}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}^+)\cdot\underline{n}^+ = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}^-)\cdot\underline{n}^- \\ \underline{U}^{\mathrm{per}}(\underline{x}^+) = \underline{U}^{\mathrm{per}}(\underline{x}^-)\end{array}\right\}$$

FIGURE 6.1 – Conditions aux limites imposées sur les frontières de la cellule de base en homogénéisation périodique.

La seconde particularité des formulations proposées a trait à la *fonction objectif* à minimiser dans l'une ou l'autre des approches. Ainsi, que l'on se rapporte à (4.14) pour l'approche statique ou à (4.16) pour l'approche cinématique, dans les deux cas, la fonction objectif (au sens de l'optimisation) est clairement reliée à l'un ou l'autre des tenseurs de contrainte ou de taux de déformation macroscopiques.

Ainsi, seuls les conditions aux limites et les chargements imposés seront spécifiques à la résolution d'un problème auxiliaire. Les autres développements numériques que nous allons maintenant décrire sont valables pour n'importe quel problème tridimensionnel de calcul à la rupture.

6.2.1 Approche statique

Les éléments finis 3D utilisés pour l'approche statique sont les mêmes que ceux trouvés dans la littérature ([Makrodimopoulos et Martin, 2006, Pastor *et al.*, 2011] par exemple).

La cellule de base est discrétisée en n_e tetrahèdres à quatre nœuds. Chaque élément e possède ses propres jeux de contraintes au niveau des quatre points d'évaluation, correspondant aux sommets de l'élément (voir Figure 6.2). Les fonctions de forme utilisées sont donc linéaires et permettent d'interpoler la valeur des contraintes dans l'élément.

Ainsi, pour un nœud i de l'élément e donné, le tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_i^e$ est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i^e = \begin{pmatrix} \sigma_{11,i}^e & \sigma_{12,i}^e & \sigma_{31,i}^e \\ \sigma_{12,i}^e & \sigma_{22,i}^e & \sigma_{23,i}^e \\ \sigma_{31,i}^e & \sigma_{23,i}^e & \sigma_{33,i}^e \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

et ses six composantes indépendantes peuvent être regroupées sous la forme d'une matrice-colonne, notée $\{\sigma\}_i^e$, et définie comme suit :

$${}^t\{\sigma\}_i^e = \left\{\sigma_{11,i}^e \quad \sigma_{22,i}^e \quad \sigma_{33,i}^e \quad \sigma_{23,i}^e \quad \sigma_{31,i}^e \quad \sigma_{12,i}^e\right\}, \quad i = 1, \ldots, 4 \tag{6.9}$$

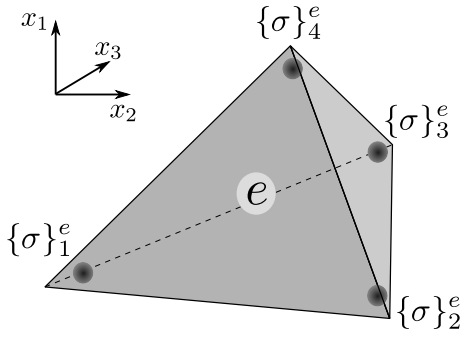


FIGURE 6.2 – Points d'évaluation des contraintes à l'intérieur d'un élément fini tétrahédrique utilisé pour l'approche statique.

En premier lieu, le champ de contrainte doit respecter le critère de résistance dans tout le milieu. Le choix d'éléments linéaires permet de s'assurer que le respect du critère de résistance au niveau des quatre sommets implique nécessairement le respect du critère sur tout l'élément, en raison de la *convexité* du critère. Comme on vient de le rappeler dans (6.2), en chaque nœud i de l'élément e, les deux formes bilinéaires symétriques $\underline{\underline{X}}_i^{\alpha,e}$ et $\underline{\underline{X}}_i^{\beta,e}$, répondant à la définition suivante, doivent être semi-définies positives :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}_i^e) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \underline{\underline{X}}_i^{\alpha,e} = -\underline{\underline{\sigma}}_i^e + (k_i - a_i\zeta_i^e)\underline{\underline{\mathbb{I}}} \succeq 0 \\ \underline{\underline{X}}_i^{\beta,e} = \underline{\underline{\sigma}}_i^e + \zeta_i^e\underline{\underline{\mathbb{I}}} \succeq 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

où a_i et k_i sont les paramètres de résistance définissant le critère au nœud i et ζ_i^e est une variable d'optimisation.

À l'instar de $\underline{\underline{\sigma}}_i^e$, les composantes des deux tenseurs précités sont rassemblées respectivement dans les matrices-colonnes $\{X^\alpha\}_i^e$ et $\{X^\beta\}_i^e$. En chaque point d'intégration, ces matrices sont définies par :

$$\{X^\alpha\}_i^e = -\{\sigma\}_i^e - \{L^\alpha\}_i^e\zeta_i^e + \{K\}_i^e \tag{6.11a}$$

$$\{X^\beta\}_i^e = \{\sigma\}_i^e + \{L^\beta\}_i^e\zeta_i^e \tag{6.11b}$$

avec

$$\{L^\alpha\}_i^e = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_i \\ a_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{L^\beta\}_i^e = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{K\}_i^e = \begin{Bmatrix} k_i \\ k_i \\ k_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.12}$$

Par souci de simplification, on adopte par la suite la notation suivante :

$$\{A\} \succeq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{A}} \succeq 0 \tag{6.13}$$

Ainsi, les conditions de semi-définie positivité de $\underline{\underline{X}}_i^{\alpha,e}$ et $\underline{\underline{X}}_i^{\beta,e}$ deviennent

$$\{X^\alpha\}_i^e, \{X^\beta\}_i^e \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, 4\,;\, e = 1, \ldots, n_e \tag{6.14}$$

Le respect du critère de résistance introduit donc une variable d'optimisation ζ_i^e en chaque sommet i de chaque élément e. Ces inconnues, tout comme les $\{\sigma\}_i^e$ liées au champ de contrainte, sont regroupées dans deux vecteurs globaux, notés $\{\zeta\}$ et $\{\sigma\}$, construits de la façon suivante :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\sigma\}_i^e \\ \vdots \end{Bmatrix}, \{\zeta\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \zeta_i^e \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 4\,;\, e = 1, \ldots, n_e \tag{6.15}$$

Au total, il y a donc $4 \times 7 \times n_e$ variables d'optimisation à déterminer pour obtenir le champ de contrainte dans toute la cellule de base. On peut alors rassembler toutes les équations locales (6.11a) et (6.11b) pour exprimer deux équations globales, dépendant de $\{\zeta\}$ et $\{\sigma\}$

$$\{\sigma\} + [\mathbf{L}^\alpha]\{\zeta\} = \{K\} - \{X^\alpha\} \tag{6.16a}$$

$$\{\sigma\} + [\mathbf{L}^\beta]\{\zeta\} = \{X^\beta\} \tag{6.16b}$$

dans lesquelles les différentes matrices sont construites comme suit :

$$[\boldsymbol{\Xi}] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \{\Xi\}_i^e & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{L}^\alpha, \mathbf{L}^\beta \text{ et } \{\Upsilon\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\Upsilon\}_i^e \\ \vdots \end{Bmatrix} \text{ avec } \Upsilon = K, X^\alpha, X^\beta \tag{6.17}$$

Ensuite, la divergence du champ de contrainte doit être nulle, soit :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \tag{6.18}$$

Les contraintes dans un élément e sont obtenues à partir des vecteurs en chaque point d'évaluation et de la matrice de fonctions de forme. Cette relation est décrite de la façon suivante :

$$\{\sigma\}^e(\underline{x}) = [N]^e(\underline{x}) \begin{Bmatrix} \{\sigma\}_1^e \\ \{\sigma\}_2^e \\ \{\sigma\}_3^e \\ \{\sigma\}_4^e \end{Bmatrix} \tag{6.19}$$

Par définition, la matrice des fonctions de forme est construite ainsi :

$$[N]^e(\underline{x}) = \begin{bmatrix} N_1^e(\underline{x})[\mathbf{I}_6] & N_2^e(\underline{x})[\mathbf{I}_6] & N_3^e(\underline{x})[\mathbf{I}_6] & N_4^e(\underline{x})[\mathbf{I}_6] \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

où les fonctions de forme $N_i^e(\underline{x})$ sont définies de façon classique dans le cadre de la méthode des éléments finis par :

$$N_i^e(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{au nœud } i \\ 0 & \text{sur les autres nœuds} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, 4 \tag{6.21}$$

La première équation d'équilibre discrétisée peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations, tel que :

$$[\mathbf{E}]\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \begin{bmatrix} [\mathbf{E}]_1^e & [\mathbf{E}]_2^e & [\mathbf{E}]_3^e & [\mathbf{E}]_4^e \end{bmatrix} & & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\sigma\}_1^e \\ \{\sigma\}_2^e \\ \{\sigma\}_3^e \\ \{\sigma\}_4^e \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{6.22}$$

dans lequel une matrice élémentaire d'équilibre est donnée par :

$$[\mathbf{E}]_i^e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_3} & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_2} \\ 0 & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_3} & 0 & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_3} & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

L'autre condition d'équilibre impose que le vecteur contrainte soit continu au travers des surfaces de discontinuité que sont les triangles séparant deux éléments adjacents. Cela implique que, entre chaque élément du maillage, le saut du vecteur contrainte soit nul. De plus, étant donné qu'on procède à l'homogénéisation du milieu périodique, le vecteur contrainte doit être *antipériodique* sur deux faces opposées de la cellule de base. Ces deux nouvelles conditions peuvent être traitées d'une façon similaire d'un point de vue numérique.

Soient en effet deux éléments adjacents g et h dont l'une des faces triangulaires, notée f, est commune (ou ayant des faces f^+ et f^- en vis-à-vis l'une de l'autre sur deux faces opposées du bord de la cellule de base). Le vecteur normal $\underline{n}^f$ à cette face a pour composantes :

$$\underline{n}^f = \begin{pmatrix} n_1^f \\ n_2^f \\ n_3^f \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

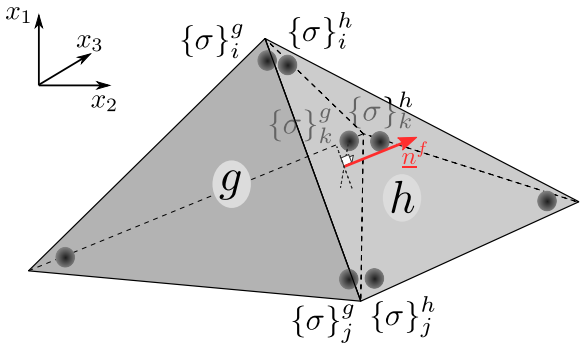


FIGURE 6.3 – Deux éléments adjacents g et h partageant une même face triangulaire f.

Les vecteurs de variables rattachés aux tenseurs de contrainte aux sommets situés sur la face triangulaire commune sont notés respectivement $\{\sigma\}_i^g$, $\{\sigma\}_j^g$, $\{\sigma\}_k^g$ pour l'élément g et $\{\sigma\}_i^h$, $\{\sigma\}_j^h$, $\{\sigma\}_k^h$ pour l'élément h, comme indiqué sur la Figure 6.3. On construit une matrice $[\mathbf{C}]$ ayant pour fonction de régir ces différentes relations linéaires de continuité :

$$[\mathbf{C}]\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \begin{bmatrix} [\mathbf{n}]^f & [0] & [0] & -[\mathbf{n}]^f & [0] & [0] \\ [0] & [\mathbf{n}]^f & [0] & [0] & -[\mathbf{n}]^f & [0] \\ [0] & [0] & [\mathbf{n}]^f & [0] & [0] & -[\mathbf{n}]^f \end{bmatrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\sigma\}_i^g \\ \{\sigma\}_j^g \\ \{\sigma\}_k^g \\ \{\sigma\}_i^h \\ \{\sigma\}_j^h \\ \{\sigma\}_k^h \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.25)$$

et qui dépend du vecteur normal $\underline{n}^f$, lequel intervient par le biais de la matrice :

$$[\mathbf{n}]^f = \begin{bmatrix} n_1^f & 0 & 0 & 0 & n_3^f & n_2^f \\ 0 & n_2^f & 0 & n_3^f & 0 & n_1^f \\ 0 & 0 & n_3^f & n_2^f & n_1^f & 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

En plus des conditions d'antipériodicité du vecteur contrainte, la moyenne du champ de contrainte doit être égale au tenseur de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$, ce qui constitue une deuxième spécificité liée à la résolution du problème auxiliaire. Par définition, en utilisant le fait que le champ de contrainte est linéaire sur chaque élément, la moyenne d'une composante σ_{kl} se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma_{kl} = \langle \sigma_{kl} \rangle &= \frac{1}{|\mathcal{C}|} \int_{\mathcal{C}} \sigma_{kl} \, \mathrm{d}\mathcal{C} = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{e=1}^{n_e} \int_e \sigma_{kl}^e \, \mathrm{d}\Omega_e \\ &= \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{e=1}^{n_e} |\Omega_e| \frac{\sigma_{kl,1}^e + \sigma_{kl,2}^e + \sigma_{kl,3}^e + \sigma_{kl,4}^e}{4} \end{aligned} \quad (6.27)$$

où $|\Omega_e|$ désigne le volume de l'élément e.

Comme expliqué dans la section 4.2.1, on peut piloter la contrainte macroscopique à l'aide d'un tenseur $\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}$, indiquant une direction de chargement dans l'espace des contraintes,

et d'un facteur multiplicatif à maximiser, noté λ. Ainsi, on obtient la relation suivante entre les inconnues liées au champ de contrainte et le tenseur de contrainte macroscopique :

$$\lambda\{\tilde{\Sigma}\} = [\mathbf{P}]\left\{\sigma\right\} \tag{6.28}$$

où

$$^t\{\tilde{\Sigma}\} = \left\{\tilde{\Sigma}_{11} \quad \tilde{\Sigma}_{22} \quad \tilde{\Sigma}_{33} \quad \tilde{\Sigma}_{23} \quad \tilde{\Sigma}_{31} \quad \tilde{\Sigma}_{12}\right\} \tag{6.29}$$

tandis que la matrice $[\mathbf{P}]$ est construite comme suit :

$$[\mathbf{P}] = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\left[\cdots \quad \tfrac{|\Omega_e|}{4}\left[[\mathbf{I}_6] \quad [\mathbf{I}_6] \quad [\mathbf{I}_6] \quad [\mathbf{I}_6]\right] \quad \cdots\right] \tag{6.30}$$

Au final, l'approche statique se ramène à l'optimisation définie dans (4.14). Pour la méthode par éléments finis développée ici, cela revient à maximiser le facteur de chargement λ sous les différentes contraintes liées au respect des critères locaux et à l'admissibilité statique.

$$\lambda^{\text{stat}} = \max\left\{\lambda \text{ sous les conditions (6.14), (6.16), (6.22), (6.25) et (6.28)}\right\} \tag{6.31}$$

c'est-à-dire :

$$\lambda^+(\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}) \geq \lambda^{\text{stat}}(\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}) = \max\lambda$$

$$\text{ss cond.} \quad \left[\begin{array}{l} \{X^\alpha\}_i^e,\ \{X^\beta\}_i^e \succeq 0\,, \quad i = 1,\ldots,4\,;\ e = 1,\ldots,n_e \\ \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{24n_e}] & [\mathbf{L}^\alpha] \\ [\mathbf{I}_{24n_e}] & [\mathbf{L}^\beta] \\ [\mathbf{E}] & [0] \\ [\mathbf{C}] & [0] \\ [\mathbf{P}] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\zeta\} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ -\{\tilde{\Sigma}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{K\} - \{X^\alpha\} \\ \{X^\beta\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \end{array}\right. \tag{6.32}$$

dans laquelle $\{\sigma\}$ et $\{\zeta\}$ sont les variables d'optimisation et λ^{stat} est la *fonction objectif*.

6.2.2 Approche cinématique

Pour l'approche cinématique, on choisit de discrétiser la cellule de base en n_e éléments tétrahédriques à six nœuds, le champ de vitesse étant donc quadratique sur chaque élément. On n'autorise aucune discontinuité de vitesse entre deux éléments adjacents. Le nombre de nœuds du maillage est n_p et chaque nœud possède trois degrés de liberté qui correspondent aux trois composantes de sa vitesse, notées (u, v, w). Pour un élément donné e, les inconnues des vitesses sont regroupées dans le vecteur suivant :

$$^t\{U\}^e = \left\{u_1^e \quad v_1^e \quad w_1^e \quad \cdots \quad u_{10}^e \quad v_{10}^e \quad w_{10}^e\right\} \tag{6.33}$$

Du fait de ce choix, le champ des taux de déformations $\underline{\underline{d}}$ est *linéaire* dans l'élément. Afin de s'assurer que la *condition de pertinence* soit respectée sur un élément, on montre que les faces de chaque élément doivent rester planes [Makrodimopoulos et Martin, 2007]. On nomme ces éléments, dont les six points formant une face sont sur un même plan, des *simplexes*. Il suffit alors de vérifier que la condition de pertinence est respectée au niveau des sommets pour être assuré qu'elle l'est en tout point de l'élément. Chaque élément e est donc associé à quatre points d'évaluation internes du taux de déformation, comme

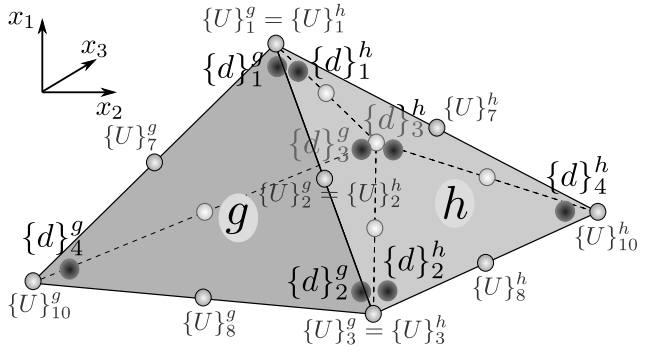


FIGURE 6.4 – Points d'évaluation internes du taux de déformation pour l'approche cinématique en 3D.

indiqué sur la Figure 6.4. Si on utilise la même notation simplifiée que pour l'approche statique le taux de déformation, en chaque sommet i de l'élément e, peut se mettre sous la forme :

$$^t\{d\}_i^e = \left\{ d_{11,i}^e \quad d_{22,i}^e \quad d_{33,i}^e \quad d_{23,i}^e \quad d_{31,i}^e \quad d_{12,i}^e \right\}, \quad i = 1, \ldots, 4 \tag{6.34}$$

Nous allons donc chercher à décrire le problème de minimisation, explicité dans (4.16), d'un point de vue numérique, en fonction de ces différentes variables. Tout d'abord, on peut utiliser la définition usuelle du tenseur de taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ (réexprimée dans (4.8)) pour relier $\{U\}^e$ et $\{d\}_i^e$. La série de relations qui en résulte peut s'écrire sous la forme du système d'équations suivant, dépendant des deux vecteurs d'inconnues élémentaires :

$$\{d\}_i^e - [\mathbf{B}]_i^e \{U\}^e = \{0\} \tag{6.35}$$

avec, la matrice élémentaire $[\mathbf{B}]_i^e$ construite comme suit :

$$[\mathbf{B}]_i^e = \begin{bmatrix} \cdots & \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_3} \\ 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_3} & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_1} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} & \cdots \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, 10 \tag{6.36}$$

L'expression des fonctions de forme $N_j^e(\underline{x})$ ainsi que de leurs dérivées peut être trouvée dans les ouvrages traitant de la méthode des éléments finis ([Dhatt et Touzot, 1981] par exemple).

L'assemblage des matrices ainsi que les vecteurs $\{d\}_i^e$ et $\{U\}^e$ élémentaires aboutit au système global suivant :

$$\{d\} - [\mathbf{B}]\{U\} = \{0\} \tag{6.37}$$

où les vecteurs d'inconnues globaux $\{d\}$ et $\{U\}$ sont définis de façon analogue à l'approche statique :

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{d\}_i^e \\ \vdots \end{Bmatrix}, \{U\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{U\}^e \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 4\,;\, e = 1, \ldots, n_e \tag{6.38}$$

et

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & [\mathbf{B}]_i^e & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{6.39}$$

Le respect de la condition de pertinence du champ de vitesse exige que les conditions (6.7b) à (6.7d) soient remplies en chaque point d'évaluation de chaque élément. À l'instar de l'approche statique, cela nécessite de définir deux tenseurs symétriques du second ordre $\underline{\underline{d}}^\alpha$ et $\underline{\underline{d}}^\beta$. Les vecteurs élémentaires numériques correspondants (au sens donné précédemment), notés $\{d^\alpha\}_i^e$ et $\{d^\beta\}_i^e$, sont exprimés en fonction du taux de déformation en chaque sommet i de l'élément e par :

$$\{d^\alpha\} - \{d^\beta\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{d^\alpha\}_i^e \\ \vdots \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{d^\beta\}_i^e \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{d\} \tag{6.40}$$

Les vecteurs globaux $\{d^\alpha\}$ et $\{d^\beta\}$ sont reliés par l'intermédiaire des matrices $[\mathbf{L}^\alpha]$ et $[\mathbf{L}^\beta]$. La définition de ces deux matrices a déjà été donnée dans le cadre de l'approche statique (voir équations (6.12) et (6.17)). On a donc ici :

$$-\,[\mathbf{L}^\alpha]\{d^\alpha\} + [\mathbf{L}^\beta]\{d^\beta\} = \{0\} \tag{6.41}$$

La dernière relation à mettre en place pour assurer la condition de pertinence du champ de vitesse impose que chaque tenseur élémentaire introduit pour l'optimisation soit semi-défini positif. Cela s'écrit sous la forme :

$$\{d^\alpha\}_i^e,\, \{d^\beta\}_i^e \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, 4\,;\, e = 1, \ldots, n_e \tag{6.42}$$

En plus de ces conditions, le champ de vitesse doit être cinématiquement admissible avec le tenseur du taux de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$. Cela se traduit par des équations reliant les vitesses en deux points en vis-à-vis sur deux faces opposées de la cellule de base et $\underline{\underline{D}}$ (voir Figure 6.1). Prenons deux faces opposées de la frontière de la cellule de base, notées f^+ et f^-. Les composantes des vitesses des six nœuds appartenant à l'une ou l'autre des faces sont regroupées dans un vecteur élémentaire $\{U\}_{i^\pm}$, tel que

$${}^t\{U\}_{i^\pm} = \left\{u_{i^\pm}^e \quad v_{i^\pm}^e \quad w_{i^\pm}^e\right\}, \quad i = 1, \ldots, 6 \tag{6.43}$$

où le nœud i^+ appartenant à la face f^+ est en vis-à-vis de i^-, situé sur la face f^-. Comme on aura l'occasion de le détailler dans un prochain chapitre, l'admissibilité cinématique fait alors apparaître la relation suivante :

$$\{U\}_{i^+} - \{U\}_{i^-} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \{\Delta x\}_i \tag{6.44}$$

où le vecteur $\{\Delta x\}_i$ exprime la différence entre les coordonnées de l'un et l'autre des nœuds concernés :

$$\{\Delta x\}_i = \begin{Bmatrix} x_1^{i^+} - x_1^{i^-} \\ x_2^{i^+} - x_2^{i^-} \\ x_3^{i^+} - x_3^{i^-} \end{Bmatrix} \tag{6.45}$$

La matrice globale $[\mathbf{V}]$ est construite de façon à rendre compte des différentes conditions aux limites liées à notre problème auxiliaire sur la cellule de base.

$$[\mathbf{V}]\{U\} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{U\}_{i^+} \\ \{U\}_{i^-} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{\tilde{V}\} \tag{6.46}$$

avec

$$\{\tilde{V}\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \begin{Bmatrix} D_{11}(x_1^{i^+} - x_1^{i^-}) + D_{12}(x_2^{i^+} - x_2^{i^-}) + D_{31}(x_3^{i^+} - x_3^{i^-}) \\ D_{12}(x_1^{i^+} - x_1^{i^-}) + D_{22}(x_2^{i^+} - x_2^{i^-}) + D_{23}(x_3^{i^+} - x_3^{i^-}) \\ D_{31}(x_1^{i^+} - x_1^{i^-}) + D_{23}(x_2^{i^+} - x_2^{i^-}) + D_{33}(x_3^{i^+} - x_3^{i^-}) \end{Bmatrix} \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{6.47}$$

Les autres conditions aux limites, consistant à fixer une ou plusieurs composantes de la vitesse en certains points (afin d'éliminer par exemple les mouvements rigidifiants), peuvent être prises en compte par une relation linéaire mise sous la forme :

$$[\mathbf{F}]\{U\} = \{0\} \tag{6.48}$$

Il reste enfin à calculer la *puissance résistante maximale* associée au champ de vitesse et exprimée précédemment dans (4.10). La moyenne des fonctions d'appui est directement liée au vecteur de variables $\{d^\alpha\}$ (voir équation (6.7a)). En raison de la linéarité de la fonction d'appui et du champ de taux de déformation, le calcul s'écrit :

$$\begin{aligned} \left\langle \pi\left(\underline{\underline{d}}\right)\right\rangle &= \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{e=1}^{n_e}\int_e \pi^e(\underline{\underline{d}})\,\mathrm{d}\Omega_e = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{e=1}^{n_e}|\Omega_e|\frac{\pi^e(\underline{\underline{d}}_1^e)+\pi^e(\underline{\underline{d}}_2^e)+\pi^e(\underline{\underline{d}}_3^e)+\pi^e(\underline{\underline{d}}_4^e)}{4} \\ &= \frac{{}^t\{\Pi\}\{d^\alpha\}}{|\mathcal{C}|} \end{aligned} \tag{6.49}$$

où $|\Omega_e|$ désigne encore le volume de l'élément e. Le vecteur global $\{\Pi\}$ se construit comme suit :

$${}^t\{\Pi\} = \left\{\cdots \quad \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}\, k_i \tfrac{|\Omega_e|}{4} \quad \cdots\right\} \tag{6.50}$$

Ainsi, en se référant à la définition (4.16) du problème de départ, l'approche cinématique numérique se réduit à un problème de minimisation de la puissance résistante maximale sous les contraintes liées à l'admissibilité cinématique et aux conditions de pertinence.

$$\pi^{\text{cine}} = \min\left\{\left\langle \pi\left(\underline{\underline{d}}\right)\right\rangle \text{ ss cond. (6.37), (6.40), (6.41), (6.42), (6.46) et (6.48)}\right\} \tag{6.51}$$

En utilisant les différentes formes discrétisées introduites précédemment, cela revient à résoudre

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) \leq \pi^{\text{cine}}(\underline{\underline{D}}) = \min \frac{{}^t\{\Pi\}\{d^\alpha\}}{|\mathcal{C}|}$$
$$\text{ss cond.} \quad \left[\begin{array}{l} \{d^\alpha\}_i^e,\ \{d^\beta\}_i^e \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, 4\,;\ e = 1, \ldots, n_e \\ -[\mathbf{L}^\alpha]\{d^\alpha\} + [\mathbf{L}^\beta]\{d^\beta\} = \{0\} \\ \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{24n_e}] & -[\mathbf{B}] \\ [\mathbf{I}_{24n_e}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{V}] \\ [0] & [\mathbf{F}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{U\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{d^\alpha\} - \{d^\beta\} \\ \{\tilde{V}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \end{array}\right. \tag{6.52}$$

Le minimum π^{cine} de la fonction objectif nous servira par la suite à définir un majorant du domaine de résistance macroscopique des sols renforcés. Un logiciel d'optimisation permettra d'avoir également les variables d'optimisation $\{d\}$ et $\{U\}$ correspondant à la solution optimale. On peut noter ici que seules certaines conditions aux limites (ici celles pilotées par $[\mathbf{V}]$) sont induites par le problème auxiliaire sur la cellule de base. Hormis cela, l'ensemble de la méthode développée dans cette section peut être appliqué à n'importe quel problème tridimensionnel de calcul à la rupture faisant intervenir des matériaux de type Mohr-Coulomb.

Comme nous l'avons expliqué auparavant, différents codes disponibles permettent d'effectuer le type d'optimisation mis en jeu dans les approches statique et cinématique. Parmi eux, nous avons choisi d'utiliser Mosek [MOSEK,]. Ce code est simple d'utilisation et peut être directement appelé dans les langages de programmation tels que Python, C++ ou sous Matlab. Il suffit donc de construire les différentes matrices intervenant dans les deux formulations et de les implémenter dans Mosek pour effectuer une résolution numérique du problème.

6.3 Traitement d'un problème en conditions de déformations planes généralisées (GPS)

Les développements des approches statique et cinématique peuvent être adaptés plus spécifiquement à notre problème. En effet, en prenant en compte la géométrie particulière des renforcements, on peut réduire le nombre de variables d'optimisation nécessaires, permettant d'obtenir les mêmes résultats que la modélisation en trois dimensions.

6.3.1 Conditions de déformations planes généralisées

Pour les sols renforcés par des inclusions linéaires suffisamment longues, telles que colonnes ou tranchées croisées, il apparaît que la géométrie ainsi que les propriétés mécaniques (et notamment de résistance) du milieu sont invariantes suivant la direction de renforcement, notée ici $\underline{e}_1$, et donc indépendantes de la coordonnée x_1. Ainsi, les champs de contrainte et de fluctuation de la vitesse à explorer pour les approches statique ou cinématique sont également indépendants de x_1. Cela signifie qu'on explore :

- des *champs de contrainte* sur la cellule de base de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}(x_2, x_3) \tag{6.53}$$

- et des *champs de vitesse* pouvant s'écrire :

$$\underline{U}(\underline{x}) = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x} + \underline{U}^{\text{per}}(x_2, x_3) \quad \text{avec } \underline{U}^{\text{per}}(x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(x_2, x_3) \\ \tilde{v}(x_2, x_3) \\ \tilde{w}(x_2, x_3) \end{pmatrix} \tag{6.54}$$

qui correspondent aux champs du taux de déformation suivants :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}) = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\tilde{d}}}(x_2, x_3) \tag{6.55}$$

avec

$$\underline{\underline{\tilde{d}}}(x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_3} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_3} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{6.56}$$

Le problème auxiliaire de calcul à la rupture, initialement tridimensionnel, peut donc être simplifié et attaché à une section quelconque de la cellule de base dans le plan (x_2, x_3), comme représenté sur la Figure 6.5. L'équivalence entre le modèle initial en trois dimensions et le modèle simplifié ainsi proposé, a déjà été testée dans différents domaines de la mécanique (par exemple : [Taliercio, 2005] pour l'élastoplasticité, [Cheng, 1998] pour la poroélasticité ou encore [Ahmadi et Aghdam, 2010] dans le cadre de la thermomécanique). Cette simplification est communément appelée *conditions de déformations planes généralisées* (*Generalized Plane Strain* ou GPS dans la littérature).

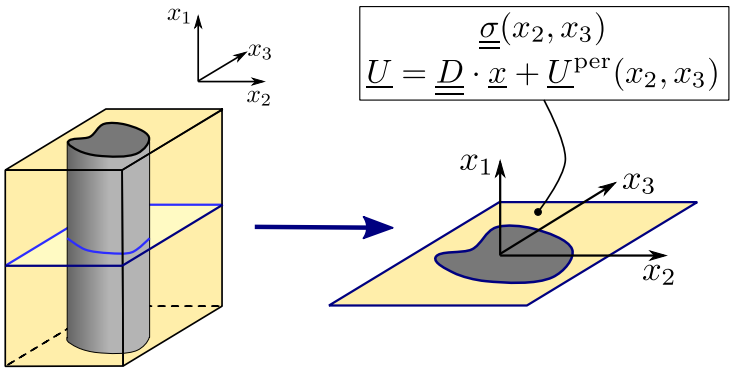


FIGURE 6.5 – Cellule de base en conditions de déformations planes généralisées.

Dans la suite du chapitre, nous allons donc exprimer les approches statique et cinématique d'un point de vue numérique, en s'appuyant sur les simplifications liées aux conditions de déformations planes généralisées [Gueguin *et al.*, 2014b]. En repartant des formulations générales précédentes, nous verrons que celles découlant de cette simplification permettent de réduire le nombre de variables d'optimisation.

6.3.2 Reformulation GPS de l'approche statique

Afin d'obtenir une approche par l'intérieur du domaine de résistance macroscopique, une section de la cellule de base est donc discrétisée en n_e éléments triangulaires à trois nœuds, compris dans le plan (x_2, x_3). Les trois sommets de ces éléments sont les points d'évaluation de la contrainte (voir Figure 6.6). Comme pour la résolution en trois dimensions, les inconnues en chaque point du maillage sont rassemblées dans des vecteurs globaux $\{\sigma\}$ et $\{\zeta\}$, tels que :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\sigma\}_i^e \\ \vdots \end{Bmatrix}, \ \{\zeta\} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \zeta_i^e \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3\,;\, e = 1, \ldots, n_e \tag{6.57}$$

où les ζ_i^e désignent toujours des variables d'optimisation au niveau des trois sommets de chacun des n_e éléments. On peut d'ores et déjà souligner que la formulation en GPS réduit de 7 $(= 6 + 1)$ le nombre d'inconnues par élément.

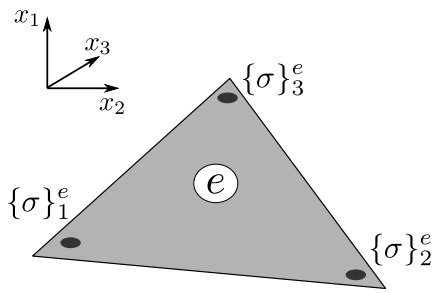


FIGURE 6.6 – Élément fini 2D utilisé pour l'approche statique en conditions de déformations planes généralisées.

Les relations entre les deux vecteurs globaux, induites par le respect du critère sur toute la cellule de base, sont semblables à (6.16).

$$\{\sigma\} + [\mathbf{L}^\alpha]\{\zeta\} = \{K\} - \{X^\alpha\} \tag{6.58a}$$

$$\{\sigma\} + [\mathbf{L}^\beta]\{\zeta\} = \{X^\beta\} \tag{6.58b}$$

où les définitions de $[\mathbf{L}^\alpha]$, $[\mathbf{L}^\beta]$ et $\{K\}$ sont données dans (6.12) et (6.17).

Les vecteurs globaux $\{X^\alpha\}$ et $\{X^\beta\}$ sont associés localement aux tenseurs élémentaires $\underline{\underline{X}}_i^{\alpha,e}$ et $\underline{\underline{X}}_i^{\beta,e}$. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction de ce chapitre, ces tenseurs élémentaires, définis aux points d'évaluation situés aux sommets de chaque élément, doivent être semi-définis positifs pour s'assurer que le critère de Mohr-Coulomb est respecté en ces points et donc dans toute la cellule de base. En adoptant la même notation que dans le cas 3D, cela se traduit par :

$$\{X^\alpha\}_i^e,\ \{X^\beta\}_i^e \succeq 0, \quad i = 1, 2, 3\,;\, e = 1, \ldots, n_e \tag{6.59}$$

Il faut également que le champ de contrainte soit statiquement admissible avec $\underline{\underline{\Sigma}}$. Pour cela, on s'assure tout d'abord qu'en l'absence de forces de volume, la divergence de

celui-ci est nulle. En tenant compte du fait que $\underline{\underline{\sigma}}$ est indépendant de x_1, on obtient :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(x_2, x_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \tag{6.60}$$

De la même façon que dans le cas 3D, la discrétisation de cette équation va faire intervenir les fonctions de forme $N_i^e(\underline{x})$ de ces éléments triangulaires. Au final, on peut exprimer cette première équation d'équilibre sous la forme du système linéaire suivant :

$$[\mathbf{E}]\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \big[[\mathbf{E}]_1^e \quad [\mathbf{E}]_2^e \quad [\mathbf{E}]_3^e\big] & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\sigma\}_1^e \\ \{\sigma\}_2^e \\ \{\sigma\}_3^e \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{6.61}$$

dans lequel la matrice élémentaire $[\mathbf{E}]_i^e$ provient directement de (6.60) :

$$[\mathbf{E}]_i^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_3} & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_2} \\ 0 & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_3} & \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.62}$$

Comme on a eu l'occasion de l'expliquer auparavant, le saut du vecteur contrainte entre deux éléments partageant une frontière doit être nul. De plus, notre problème spécifique d'homogénéisation d'un milieu périodique implique l'antipériodicité de ce vecteur contrainte sur les bords de la cellule de base. Le traitement de ces deux conditions d'admissibilité statique est réalisé de la façon suivante.

Sous les conditions de déformations planes généralisées, les vecteurs de variables liés aux éléments g et h, possédant une frontière f (segment) en commun (voir Figure 6.7) ou appartenant à deux segments opposés f^+ et f^-, sont notés $\{\sigma\}_i^g$, $\{\sigma\}_j^g$ d'une part et $\{\sigma\}_i^h$, $\{\sigma\}_j^h$ d'autre part. La relation entre ceux-ci est prise en compte par la matrice $[\mathbf{C}]$, définie par :

$$[\mathbf{C}]\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \begin{bmatrix} [\mathbf{n}]^f & [0] & -[\mathbf{n}]^f & [0] \\ [0] & [\mathbf{n}]^f & [0] & -[\mathbf{n}]^f \end{bmatrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\sigma\}_i^g \\ \{\sigma\}_j^g \\ \{\sigma\}_i^h \\ \{\sigma\}_j^h \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{6.63}$$

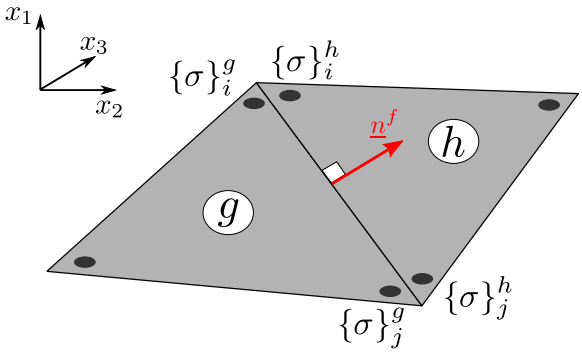


FIGURE 6.7 – Deux éléments adjacents g et h partageant un même segment.

La frontière entre ces deux éléments est un segment dont la normale $\underline{n}^f$ est dans le plan (x_2, x_3).

$$\underline{n}^f = \begin{pmatrix} 0 \\ n_2^f \\ n_3^f \end{pmatrix} \tag{6.64}$$

tandis que la matrice associée $[\mathbf{n}]^f$ est simplifiée par rapport au cas 3D :

$$[\mathbf{n}]^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & n_3^f & n_2^f \\ 0 & n_2^f & 0 & n_3^f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^f & n_2^f & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.65}$$

Une dernière condition impose l'égalité entre la moyenne du champ de contrainte et $\underline{\underline{\Sigma}}$. Les éléments choisis étant encore linéaires, cela se traduit par la discrétisation suivante :

$$\Sigma_{kl} = \langle \sigma_{kl} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{e=1}^{n_e} |\Omega_e| \frac{\sigma_{kl,1}^e + \sigma_{kl,2}^e + \sigma_{kl,3}^e}{3} \tag{6.66}$$

où $|\Omega_e|$ désigne cette fois l'aire de l'élément triangulaire e.

Procédant par trajets de chargement radiaux, on impose toujours la direction de chargement $\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}$ et on cherche à maximiser le facteur de chargement λ. La condition de moyenne (6.66) peut s'écrire :

$$\lambda\{\tilde{\Sigma}\} = [\mathbf{P}]\,\{\sigma\} \tag{6.67}$$

avec

$$[\mathbf{P}] = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \begin{bmatrix} \cdots & \frac{|\Omega_e|}{3} \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_6] & [\mathbf{I}_6] & [\mathbf{I}_6] \end{bmatrix} & \cdots \end{bmatrix} \tag{6.68}$$

On exprime donc l'approche statique numérique sous les conditions de déformations planes généralisées comme une optimisation sous contraintes semblable à (6.31).

$$\lambda^{\text{stat}} = \max\{\lambda \text{ sous les conditions (6.59), (6.58), (6.61), (6.63) et (6.67)}\} \tag{6.69}$$

soit de façon explicite :

$$\lambda^{+}(\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}) \geq \lambda^{\text{stat}}(\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}) = \max \lambda$$

$$\text{ss cond.} \quad \left[\begin{array}{l} \{X^{\alpha}\}_i^e,\ \{X^{\beta}\}_i^e \succeq 0, \quad i = 1,2,3\,;\ e = 1,\ldots,n_e \\ \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{18n_e}] & [\mathbf{L}^{\alpha}] \\ [\mathbf{I}_{18n_e}] & [\mathbf{L}^{\beta}] \\ [\mathbf{E}] & [0] \\ [\mathbf{C}] & [0] \\ [\mathbf{P}] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\zeta\} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ -\{\tilde{\Sigma}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{K\} - \{X^{\alpha}\} \\ \{X^{\beta}\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \end{array} \right. \tag{6.70}$$

dans laquelle $\{\sigma\}$ et $\{\zeta\}$ restent les variables d'optimisation et λ, la fonction objectif.

Au passage, on peut remarquer la grande différence pour ce qui est de la complexité du problème d'optimisation, entre l'approche statique en trois dimensions et celle en GPS. Fixons dans les deux cas le nombre d'éléments n_e et le nombre de lignes contenues dans la matrice $[\mathbf{C}]$, noté $\dim([\mathbf{C}])$ et qui correspond au nombre d'éléments adjacents dans le maillage plus le nombre d'éléments pour les faces de la cellule de base en vis-à-vis. Alors :

- dans le cas 3D : le système à résoudre fait intervenir $4 \times 19 \times n_e + 1$ variables d'optimisation avec $2 \times 4 \times n_e$ cônes de semi-définie positivité et $(2 \times 24 + 1) \times n_e + \dim([\mathbf{C}]) + 6$ contraintes linéaires.

- dans le cas GPS : l'optimisation est réduite à $3 \times 19 \times n_e + 1$ variables sous $2 \times 3 \times n_e$ cônes de semi-définie positivité et $(2 \times 18 + 1) \times n_e + \dim([\mathbf{C}]) + 6$ contraintes linéaires.

On peut donc espérer un réel gain de vitesse et de précision pour un même nombre d'éléments dans le maillage lorsqu'on utilise la formulation sous les conditions de déformations planes généralisées. Un code d'optimisation est, en effet, sensible à la fois au nombre de variables d'optimisation et au nombre de contraintes (coniques ou linéaires). Tous deux sont ici considérablement réduits.

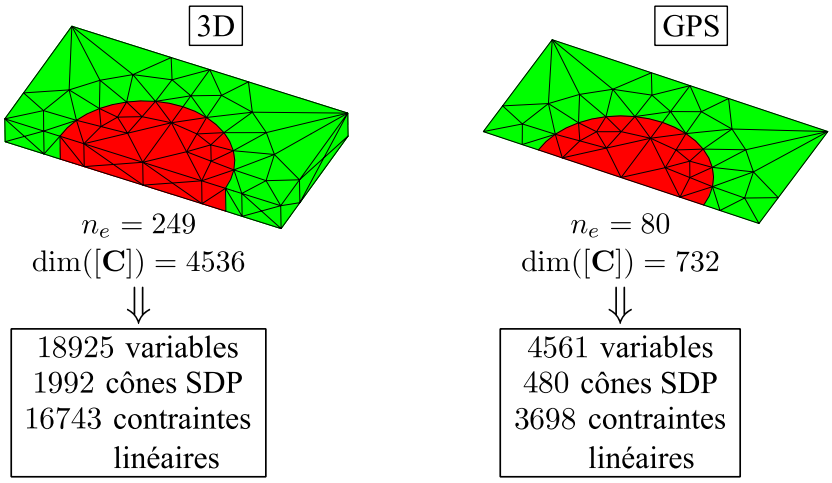


FIGURE 6.8 – Nombres de variables d'optimisation pour une approche statique 3D et GPS.

En outre, on peut ajouter que pour une finesse de maillage donnée dans le plan (x_2, x_3), le nombre d'éléments dans le cas GPS et dans le cas 3D ne sera pas identique, même quand on maille l'épaisseur de la cellule de base avec une seule rangée d'éléments en trois dimensions. Il en va de même pour le nombre de lignes de la matrice $[\mathbf{C}]$. On peut par exemple se référer à la Figure 6.8 qui illustre cette remarque dans le cas du maillage d'un sol renforcé par colonnes. L'avantage de la formulation GPS par rapport à une formulation 3D est encore plus évident compte tenu de ce constat.

6.3.3 Reformulation GPS de l'approche cinématique

Comme pour l'approche statique, on peut se servir des simplifications liées aux conditions de déformations planes généralisées pour réduire très sensiblement la dimension de l'étude de la cellule de base. Ainsi, une section de cette cellule de base est discrétisée, dans le plan (x_2, x_3), en n_e éléments triangulaires à six nœuds de type *simplexe*. Le champ de vitesse est toujours quadratique, continu au passage entre deux éléments. Les inconnues aux n_p nœuds du maillage sont les trois composantes de la fluctuation de la vitesse $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$. Ainsi pour un élément, ces inconnues sont rassemblées dans le vecteur élémentaire :

$$ {}^t\{\tilde{U}\}^e = \left\{\tilde{u}_1^e \quad \tilde{v}_1^e \quad \tilde{w}_1^e \quad \cdots \quad \tilde{u}_6^e \quad \tilde{v}_6^e \quad \tilde{w}_6^e\right\} \tag{6.71} $$

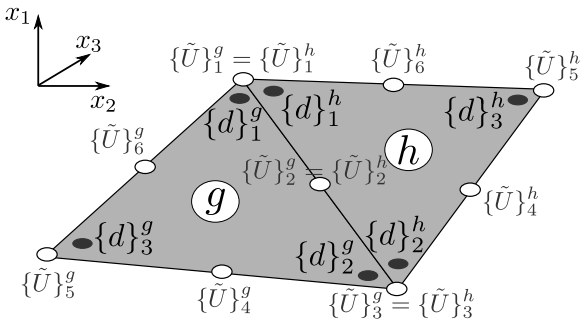


FIGURE 6.9 – Éléments triangulaires utilisés pour l'approche cinématique en condition de déformations planes généralisées.

Les points d'évaluation internes du taux de déformation restent les trois sommets de chaque élément (voir Figure 6.9). En utilisant la définition (6.55) pour exprimer $\underline{\underline{d}}$ en fonction de $\underline{\underline{\tilde{d}}}(x_2, x_3)$ et en calculant la fluctuation du taux de déformation réduit de façon similaire à (4.8), les vecteurs élémentaires relatifs aux fluctuations de vitesse et de taux de déformation sont reliés aux taux de déformation macroscopiques par :

$$ \{d\}_i^e - [\mathbf{B}]_i^e \{\tilde{U}\}^e - \{D\} = \{0\} \tag{6.72} $$

où les six composantes du tenseur du taux de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$ sont rassemblées dans le vecteur :

$$ {}^t\{D\} = \left\{D_{11} \quad D_{22} \quad D_{33} \quad D_{23} \quad D_{31} \quad D_{12}\right\} \tag{6.73} $$

et la matrice $[\mathbf{B}]_i^e$ est construite à partir des dérivées des fonctions de forme :

$$[\mathbf{B}]_i^e = \begin{bmatrix} \cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_3} \\ 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} & \cdots \end{bmatrix} \quad j = 1, \ldots, 6 \tag{6.74}$$

Les vecteurs de variables globaux sont alors reliés par le système linéaire suivant :

$$\{d\} - [\mathbf{B}]\{\tilde{U}\} - [\mathbf{M}]\{D\} = \{0\} \tag{6.75}$$

dans lequel

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \vdots \\ [\mathbf{I}_6] \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{6.76}$$

et $[\mathbf{B}]$ est construite à partir des entités élémentaires de la même manière que dans le cas 3D. Ici, seules les dimensions de cette dernière matrice sont réduites.

Le respect de la condition de pertinence pour un élément s'exprime par les conditions (6.7b) à (6.7d). Il faut donc encore une fois introduire des tenseurs élémentaires $\underline{\underline{d}}_i^{\alpha,e}$ et $\underline{\underline{d}}_i^{\beta,e}$ qui devront être semi-définis positifs et dont la définition fait intervenir $\underline{\underline{d}}_i^e$. Les trois conditions évoquées sont prises en compte de la façon suivante :

$$\{d^\alpha\} - \{d^\beta\} = \{d\} \tag{6.77}$$

$$-[\mathbf{L}^\alpha]\{d^\alpha\} + [\mathbf{L}^\beta]\{d^\beta\} = \{0\} \tag{6.78}$$

$$\{d^\alpha\}_i^e,\ \{d^\beta\}_i^e \succeq 0, \quad i = 1, 2, 3\,;\ e = 1, \ldots, n_e \tag{6.79}$$

Les matrices $[\mathbf{L}^\alpha]$ et $[\mathbf{L}^\beta]$ sont définies dans la partie traitant de l'approche statique du problème en trois dimensions (voir équations (6.12) et (6.17)).

L'admissibilité cinématique du champ de vitesse reste toujours à vérifier. Pour cela, on a vu dans le cas 3D que les fluctuations de vitesse des nœuds appartenant à deux éléments de frontière en vis-à-vis sur la cellule de base devaient être mises en relation. Ici, ces éléments de frontière sont deux segments (nommés toujours f^+ et f^-) composés de trois nœuds chacun. La relation de périodicité s'exprime simplement par :

$$\{\tilde{U}\}_{i^+} - \{\tilde{U}\}_{i^-} = \{0\} \tag{6.80}$$

avec

$${}^t\{\tilde{U}\}_{i^\pm} = \left\{\tilde{u}_{i^\pm}^e \quad \tilde{v}_{i^\pm}^e \quad \tilde{w}_{i^\pm}^e\right\} \tag{6.81}$$

où i^+ appartient à f^+ et i^- à f^-, son vis-à-vis sur la cellule de base.

On obtient au final l'expression suivante :

$$[\mathbf{V}]\{\tilde{U}\} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{\tilde{U}\}_{i^+} \\ \{\tilde{U}\}_{i^-} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{6.82}$$

Les autres conditions aux limites, permettant notamment d'éliminer les mouvements de solide rigide éventuels, sont introduites en respectant le système linéaire :

$$[\mathbf{F}]\{\tilde{U}\} = \{0\} \tag{6.83}$$

Les éléments finis utilisés impliquant toujours une variation linéaire du taux de déformation, on peut donc écrire que :

$$\left\langle \pi\left(\underline{\underline{d}}\right)\right\rangle = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{e=1}^{n_e} |\Omega_e| \frac{\pi^e(\underline{\underline{d}}_1^e) + \pi^e(\underline{\underline{d}}_2^e) + \pi^e(\underline{\underline{d}}_3^e)}{3} \tag{6.84}$$

où $|\Omega_e|$ représente l'aire de l'élément e. Comme c'était le cas en trois dimensions (voir équation (6.49)), cette relation peut s'écrire comme le produit entre le vecteur global d'optimisation $\{d^\alpha\}$ et le vecteur $\{\Pi\}$, défini comme suit :

$${}^t\{\Pi\} = \left\{\cdots \quad \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}\, k_i \tfrac{|\Omega_e|}{3} \quad \cdots\right\} \tag{6.85}$$

La minimisation de la puissance résistante maximale sous les différentes conditions évoquées nous permet d'obtenir une approche par l'extérieur de notre problème de calcul à la rupture.

$$\pi^{\text{cine}} = \min\left\{\left\langle \pi\left(\underline{\underline{d}}\right)\right\rangle \text{ ss cond. (6.75), (6.77), (6.78), (6.79), (6.82) et (6.83)}\right\} \tag{6.86}$$

En utilisant les formulations discrétisées spécifiques à la condition de déformations planes généralisées, le problème s'écrit sous la forme :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) \leq \pi^{\text{cine}}(\underline{\underline{D}}) = \min \frac{{}^t\{\Pi\}\{d^\alpha\}}{|\mathcal{C}|}$$
$$\text{ss cond.} \begin{bmatrix} \{d^\alpha\}_i^e,\ \{d^\beta\}_i^e \succeq 0, \quad i = 1,2,3\,;\, e = 1,\ldots,n_e \\ -[\mathbf{L}^\alpha]\{d^\alpha\} + [\mathbf{L}^\beta]\{d^\beta\} = \{0\} \\ \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{18n_e}] & -[\mathbf{B}] \\ [\mathbf{I}_{18n_e}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{V}] \\ [0] & [\mathbf{F}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{\tilde{U}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{M}]\{D\} \\ \{d^\alpha\} - \{d^\beta\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \tag{6.87}$$

où, en plus du minimum π^{cine} de la fonction objectif, on déterminera numériquement les fluctuations de vitesse $\{\tilde{U}\}$ et le champ de taux de déformation associé $\{d\}$.

Comme pour l'approche statique, on peut comparer la formulation 3D et la formulation GPS en matière de gain de performances numériques. Pour un nombre d'éléments n_e et un nombre de lignes contenues dans les matrices $[\mathbf{V}]$ et $[\mathbf{F}]$, notés respectivement $\dim([\mathbf{V}])$ et $\dim([\mathbf{F}])$, donnés, on note que :

- dans le cas 3D : le système à résoudre fait intervenir $4 \times 18 \times n_e + 3 \times n_p$ variables d'optimisation avec $2 \times 4 \times n_e$ cônes de semi-définie positivité et $3 \times 24 \times n_e + \dim([\mathbf{V}]) + \dim([\mathbf{F}])$ contraintes linéaires.

- dans le cas GPS : l'optimisation est réduite à $3 \times 18 \times n_e + 3 \times n_p$ variables avec $2 \times 3 \times n_e$ cônes de semi-définie positivité et $3 \times 18 \times n_e + \dim([\mathbf{V}]) + \dim([\mathbf{F}])$ contraintes linéaires.

Cela confirme, cette fois encore, l'intérêt de la formulation développée en conditions de déformations planes généralisées.

On peut également souligner que, comme pour l'approche statique, les maillages en trois ou en deux dimensions ne feront pas intervenir les mêmes nombres d'éléments et de nœuds, pour une finesse dans le plan (x_2, x_3) fixée. Ainsi, si on reprend les maillages présentés sur la Figure 6.8, mais avec des éléments quadratiques, on aura les dimensions de problèmes suivantes :

- modèle 3D : $n_e = 249$, $n_p = 542$, $\dim([\mathbf{V}]) = 1404$ et $\dim([\mathbf{F}]) = 106$,
  ce qui réprésente : 19554 variables, 1992 cônes SDP et 19438 contraintes linéaires.

- modèle GPS : $n_e = 80$, $n_p = 161$, $\dim([\mathbf{V}]) = 18$ et $\dim([\mathbf{F}]) = 32$,
  ce qui réprésente : 4803 variables, 480 cônes SDP et 4370 contraintes linéaires.

6.3.4 Conclusions sur les formulations numériques développées

Nous avons eu l'occasion dans ce chapitre de développer les formulations numériques liées aux deux approches du calcul à la rupture, en les appliquant à la résolution d'un problème auxiliaire défini dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Grâce à la programmation semi-définie positive (SDP), il est possible de traiter en trois dimensions des problèmes faisant intervenir des critères de type Mohr-Coulomb.

En appliquant les simplifications relatives à la détermination du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par inclusions linéaires, nous avons développé des formulations originales du problème auxiliaire en éléments finis en conditions de déformations planes généralisées (GPS), qui ont été reprises dans [Gueguin *et al.*, 2014b].

Les différentes approches numériques ainsi mises au point vont être mise en œuvre dans le prochain chapitre afin d'encadrer le critère de résistance macroscopique de sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées. Grâce aux formulations développées dans ce chapitre, on pourra traiter aussi bien le cas d'un renforcement cohérent et/ou frottant et comparer les résultats à ceux obtenus analytiquement au chapitre 4 ou par des calculs

élastoplastiques.

* *

*

Chapitre 7

Évaluation numérique du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par un matériau frottant

Résumé : *L'objectif majeur de ce chapitre est d'évaluer et de comparer les domaines de résistance macroscopiques des sols renforcés par des matériaux frottants. Après avoir mis en place le cadre du problème auxiliaire à résoudre, un raisonnement analytique est conduit qui permet de limiter le nombre de simulations numériques. En utilisant les formulations numériques des problèmes d'optimisation en conditions de déformations planes généralisées vues au chapitre précédent, un encadrement numérique du critère de résistance macroscopique est obtenu pour un renforcement par colonnes et par tranchées croisées. La précision de ces résultats est ensuite quantifiée en matière d'écart relatif entre minorants et majorants. Enfin, une comparaison des deux critères de résistance macroscopiques permet de mettre en évidence des valeurs très différentes de la résistance en cisaillement d'un sol renforcé selon qu'il s'agit d'un renforcement par colonnes ou par tranchées croisées.*

Sommaire

7.1 Mise en place des simulations numériques 136
7.1.1 Problème de départ et conditions aux limites 136
7.1.2 Pilotage des trajets de chargement macroscopiques 137
7.1.3 Réduction du nombre de paramètres 138
7.2 Domaine de résistance macroscopique des sols renforcés par colonnes . 140
7.2.1 Une approche statique analytique 140
7.2.2 Utilisation de la programmation semi-définie positive en GPS 143
7.2.3 Précision des résultats et comparaison avec une évaluation simplifiée du critère de résistance macroscopique 146
7.3 Encadrement numérique du critère de résistance macroscopique des sols renforcés par tranchées croisées frottantes 148
7.3.1 Approches statique et cinématique numériques 148
7.3.2 Commentaires sur la précision des résultats 150
7.4 Comparaison des critères de résistance macroscopiques des sols renforcés par un matériau frottant 151
7.4.1 Renforcement par colonnes ou par tranchées croisées ? 151
7.4.2 Conclusions 153

7.1 Mise en place des simulations numériques

Dans un premier temps, il convient de rappeler que l'objectif de ce chapitre est d'évaluer les domaines de résistance macroscopiques des sols renforcés par un matériau frottant, en déformations planes dans l'un des plans contenant l'axe de renforcement, ici le plan (x_1, x_2). Pour ce type de sols renforcés, il n'existe pas de résultats analytiques satisfaisants, surtout pour l'approche cinématique, contrairement au cas d'un renforcement par un matériau purement cohérent (voir chapitre 4). Nous allons donc utiliser les formulations numériques développées au chapitre précédent pour obtenir des résultats ayant un statut théorique bien défini de minorant ou de majorant. Il faut d'abord convenir des données de départ et des conditions imposées à notre modèle numérique.

7.1.1 Problème de départ et conditions aux limites

Les deux géométries de sols renforcés étudiées sont données sur la Figure 7.1. À gauche, on retrouve la cellule de base $\mathcal{C}$ correspondant à un sol renforcé par colonnes et à droite, celle caractérisant un sol renforcé par tranchées croisées.

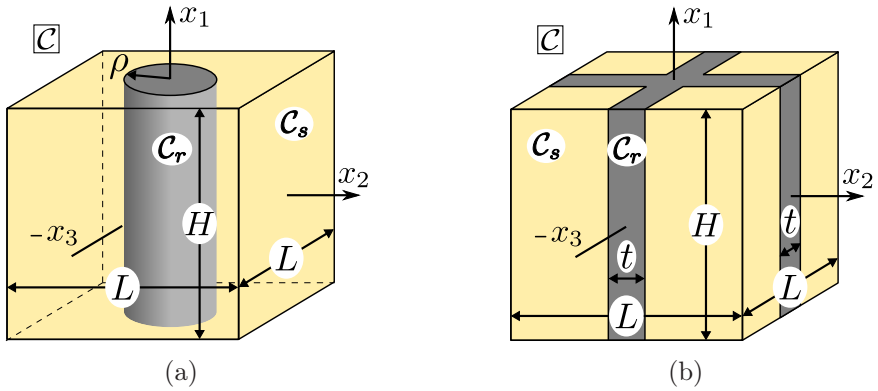


FIGURE 7.1 – Cellule de base associée à un sol renforcé par colonnes (a) ou par tranchées croisées (b).

Pour les deux configurations géométriques, on considère que l'angle de frottement du sol en place $\mathcal{C}_s$ est suffisamment faible pour être négligé. Ce matériau doit donc obéir à un critère de Tresca. En revanche, on considère que le matériau de renforcement $\mathcal{C}_r$ est potentiellement fortement frottant. Il peut également avoir une cohésion négligeable ou non, suivant les cas. Son critère de résistance est celui de Mohr-Coulomb. Ainsi, on peut résumer les propriétés de résistance locales de la façon suivante :

$$\begin{cases} C_s > 0 \text{ et } \varphi_s = 0, & \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_s \\ C_r \geq 0 \text{ et } \varphi_r > 0, & \forall \underline{x} \in \mathcal{C}_r \end{cases} \tag{7.1}$$

où (C_s, φ_s) sont respectivement la cohésion et l'angle de frottement du sol en place et (C_r, φ_r) ceux du matériau de renforcement. Pour les études numériques à venir, on fixera les valeurs prises par ces caractéristiques, ainsi que la fraction volumique de renforcement, toujours notée η.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous allons chercher à déterminer les différents critères de résistance dans l'espace des contraintes $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$. Comme on a déjà eu l'occasion de le souligner dans les chapitres traitant du comportement élastique de ces sols renforcés, il existe une symétrie matérielle et géométrique de la cellule de base. Si on ajoute à cela le fait que le chargement imposé est également symétrique par rapport au plan (x_1, x_2), on peut facilement montrer que l'étude numérique peut être effectuée sur une moitié de la cellule de base [Hassen *et al.*, 2013], comme indiqué sur la Figure 7.2.

En accord avec les conditions de déformations planes, une vitesse nulle suivant l'axe $\underline{e}_3$ est prescrite sur les faces de la cellule de base parallèles au plan (x_1, x_2). Il convient également d'empêcher tout mouvement rigidifiant éventuel en bloquant certains points spécifiques. Les conditions aux limites sont complétées en tenant compte du caractère périodique de l'homogénéisation menée ici. On applique donc des conditions de périodicité de la fluctuation de vitesse et d'antipériodicité du vecteur contrainte pour les faces latérales (de normale $\underline{e}_2$) de la cellule de base. L'ensemble de ces conditions aux limites est représenté sur la Figure 7.2, dans le cas du sol renforcé par colonnes.

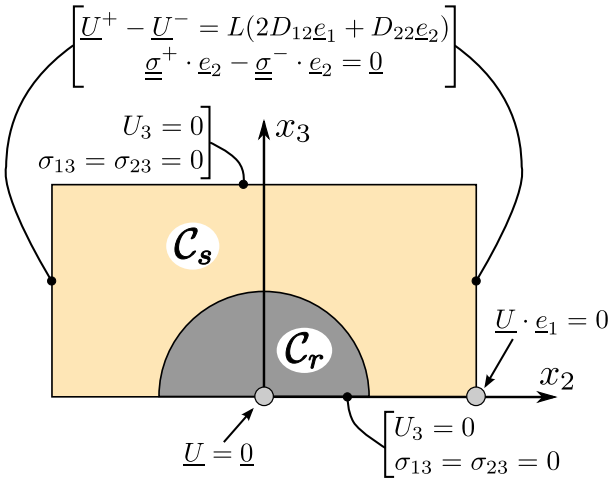


FIGURE 7.2 – Conditions aux limites imposées à la cellule de base pour la détermination du domaine de résistance macroscopique.

7.1.2 Pilotage des trajets de chargement macroscopiques

L'approche statique est effectuée en se donnant une direction $\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}$ dans l'espace des contraintes et en cherchant à maximiser le facteur multiplicatif de charge λ. S'intéressant au critère de résistance en *déformations planes* dans le plan (x_1, x_2), la composante $\tilde{\Sigma}_{33}$ doit rester libre (c'est-à-dire non prescrite). On utilise donc le tenseur paramétrisé suivant :

$$\underline{\underline{\tilde{\Sigma}}}(\gamma, \delta) = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\delta & \sin\delta & 0 \\ \sin\delta & \sin\gamma\cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Sigma}_{33}^{\text{libre}} \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

où les paramètres γ et δ représentent l'orientation du chargement radial dans l'espace $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$ (voir Figure 7.3(a)). Étant donné les différentes symétries géométriques et

matérielles, on peut noter que les critères de résistance macroscopiques sont symétriques par rapport au plan $\Sigma_{12} = 0$. Cela est vrai, que le sol soit renforcé par un matériau purement cohérent ou par un matériau frottant. On peut résumer cette propriété en observant que le signe de la composante de cisaillement du tenseur macroscopique n'influe pas sur le facteur de charge maximal calculé. Il suffit donc de faire varier l'angle δ entre 0 et $\pi/2$ tandis que l'angle γ, définissant l'orientation dans le plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$, parcourt l'intervalle compris entre $-\pi$ et π.

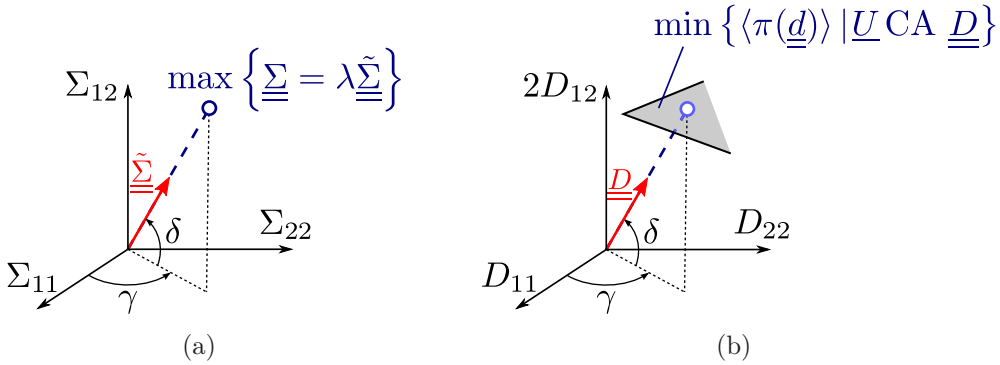


FIGURE 7.3 – Paramétrage des tenseurs macroscopiques pour l'approche statique (a) ou cinématique (b).

Pour l'approche cinématique, la direction de chargement est directement donnée par le tenseur du taux de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$. On utilise le même type de paramétrage que précédemment :

$$\underline{\underline{D}}(\gamma, \delta) = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\delta & \frac{1}{2}\sin\delta & 0 \\ \frac{1}{2}\sin\delta & \sin\gamma\cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

qui permet de garder la cellule de base en condition de déformations planes dans le plan (x_1, x_2).

L'espace dual de $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$, au sens de la puissance de déformation, est alors $(D_{11}, D_{22}, 2D_{12})$ (voir Figure 7.3). Il existe également une symétrie du domaine de résistance dans cet espace par rapport au plan $D_{12} = 0$. Les angles γ et δ parcourent donc les mêmes intervalles que dans l'approche statique.

7.1.3 Réduction du nombre de paramètres à faire varier dans la détermination numérique du critère macroscopique

De façon générale le domaine de résistance macroscopique d'un sol purement cohérent renforcé par inclusions (colonnes ou tranchées croisées) cohérentes et frottantes dépend de quatre paramètres :

$$\mathbf{G}^{hom} = \mathbf{G}^{hom}(C_s, C_r, \varphi_r, \eta) \tag{7.4}$$

Or nous allons voir qu'au lieu d'être obligé de faire varier ces quatre paramètres, l'équivalence suivante

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 \in \mathbf{G}_0^{hom}(C_s = 1, C_r = 0, \varphi_r, \eta) \Leftrightarrow \underline{\underline{\Sigma}} = C_s\underline{\underline{\Sigma}}_0 + \frac{C_r}{\tan\varphi_r}\mathbb{I} \in \mathbf{G}^{hom}(C_s, C_r, \varphi_r, \eta) \tag{7.5}$$

nous permet de réduire l'analyse paramétrique à l'exploration de deux paramètres : la fraction volumique de renforcement η et l'angle de frottement φ_r du renforcement.

Nous allons tout d'abord démontrer l'implication suivante :

$$\forall \underline{\underline{\Sigma}}_0 \in \mathbf{G}_0^{hom} \Rightarrow \underline{\underline{\Sigma}} = C_s \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \frac{C_r}{\tan\varphi_r}\mathbb{I} \in \mathbf{G}^{hom} \tag{7.6}$$

Or, on sait qu'un tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}_0$ appartient à $\mathbf{G}_0^{hom}$ s'il respecte les conditions suivantes :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 \in \mathbf{G}_0^{hom} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}_0 \text{ SA avec } \underline{\underline{\Sigma}}_0 \text{ (au sens du mode de chargement périodique)} \\ (\sigma_0)_M - (\sigma_0)_m \leq 2 \quad \text{dans } \mathcal{C}_s \\ (\sigma_0)_M - (\sigma_0)_m + ((\sigma_0)_M + (\sigma_0)_m)\sin\varphi_r \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_r \end{cases} \tag{7.7}$$

Il en résulte alors que le champ de contrainte défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = C_s \underline{\underline{\sigma}}_0 + \frac{C_r}{\tan\varphi_r}\mathbb{I} \tag{7.8}$$

est statiquement admissible avec $\underline{\underline{\Sigma}} = C_s\underline{\underline{\Sigma}}_0 + C_r/\tan\varphi_r\mathbb{I}$ et vérifie en tout point de la cellule de base :

- le critère de résistance du sol en place de cohésion C_s :

$$\begin{aligned} \sigma_M - \sigma_m &= C_s\left[\left((\sigma_0)_M + \frac{C_r}{\tan\varphi_r}\right) - \left((\sigma_0)_m + \frac{C_r}{\tan\varphi_r}\right)\right] \\ &= C_s\left((\sigma_0)_M - (\sigma_0)_m\right) \leq 2C_s \end{aligned} \tag{7.9}$$

- ainsi que celui du renforcement de cohésion C_r et d'angle de frottement φ_r :

$$\begin{aligned} (\sigma_M - \sigma_m) + (\sigma_M + \sigma_m)\sin\varphi_r = {} & C_s\left((\sigma_0)_M - (\sigma_0)_m\right) \\ & + C_s\left((\sigma_0)_M + (\sigma_0)_m\right) \\ & + \left(2\frac{C_r}{\tan\varphi_r}\right)\sin\varphi_r \leq 2C_r\cos\varphi_r \end{aligned} \tag{7.10}$$

La contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ appartient donc au domaine $\mathbf{G}^{hom}$, d'où le résultat annoncé.

La relation reciproque :

$$\forall \underline{\underline{\Sigma}} = C_s\underline{\underline{\Sigma}}_0 + \frac{C_r}{\tan\varphi_r}\mathbb{I} \in \mathbf{G}^{hom} \Rightarrow \underline{\underline{\Sigma}}_0 \in \mathbf{G}_0^{hom} \tag{7.11}$$

se démontrant aisément, l'identité (7.5) est ainsi établie.

La détermination de $\mathbf{G}_0^{hom}$, c'est-à-dire du domaine de résistance relatif à un sol de cohésion unitaire renforcé par un matériau purement frottant, suffit ainsi pour déterminer complétement $\mathbf{G}^{hom}$ dans le cas général. Ce dernier se déduit en effet de $\mathbf{G}_0^{hom}$ par homothétie de rapport C_s par rapport à l'origine, suivie d'une translation égale à $C_r/\tan\varphi_r$ le long de l'axe des contraintes isotropes ($\Sigma_{11} - \Sigma_{22}, \Sigma_{12} = 0$).

Il est également facile de montrer à partir de (7.5) que :

$$\forall \underline{\underline{D}}, \quad \pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = C_s\pi_0^{hom}(\underline{\underline{D}}) + \frac{C_r}{\tan\varphi_r}\left(\mathrm{tr}\underline{\underline{D}}\right) \tag{7.12}$$

7.2 Domaine de résistance macroscopique des sols renforcés par colonnes

En utilisant les différentes remarques de la section précédente, nous allons chercher à évaluer le domaine de résistance d'un sol renforcé par des colonnes frottantes, à l'aide des formulations numériques présentées au chapitre 6. Au préalable, on s'est assuré que les différentes méthodes numériques programmées sont bien en accord avec des résultats analytiques ou numériques existants (voir annexe B). Nous utiliserons les formulations numériques en conditions de déformations planes généralisées et nous vérifierons qu'elles mènent à des résultats en accord avec les approches analytiques disponibles.

On considère qu'une colonne de renforcement est obtenue par un traitement à la chaux du sol en place. Il existe différentes façons de caractériser ce matériau de renforcement. On peut notamment considérer que celui-ci respecte un critère de Mohr-Coulomb avec une cohésion et un angle de frottement non négligeables. Dans la littérature, on trouve des résultats d'essais faits en laboratoire qui rassemblent les valeurs obtenues pour différents types de liant (chaux, chaux+ciment, ciment) [Okyay et Dias, 2010]. Le facteur de substitution retenu sera le même pour la configuration de renforcement en colonnes et pour celle en tranchées croisées (section suivante). Pour la suite de ce chapitre, on prend les caractéristiques suivantes :

$$\eta = 0.2\,,\ \frac{C_r}{C_s} = 2\,,\ \varphi_r = 25^\circ \tag{7.13}$$

7.2.1 Une approche statique analytique [Jellali *et al.*, 2007]

Une approche statique peut tout d'abord être développée de façon analytique. On considère pour cela un champ de contrainte statiquement admissible avec $\underline{\underline{\Sigma}}$, mis sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^{(s)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(s)} & \Sigma_{12} & 0 \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{C}_s \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(r)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(r)} & \Sigma_{12} & 0 \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{pmatrix} & \text{si } \underline{x} \in \mathcal{C}_r \end{cases} \tag{7.14}$$

où la composante Σ_{33} est choisie de sorte qu'elle soit contrainte intermédiaire dans chaque matériau.

Dans le chapitre 4, on a déjà utilisé le fait que le critère de Tresca, que doit respecter le sol de cohésion C_s, peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f^s(\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}) \leq 0 &\Leftrightarrow \sigma_M^{(s)} - \sigma_m^{(s)} - 2C_s \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |\Sigma_{12}| \leq C_s \\ Y_s^- \leq \sigma_{11}^{(s)} \leq Y_s^+ \end{cases} \end{aligned} \tag{7.15}$$

avec

$$Y_s^\pm = \Sigma_{22} \pm 2\sqrt{C_s^2 - \Sigma_{12}^2} \tag{7.16}$$

On peut également reformuler le critère de Mohr-Coulomb de façon à ce que la composante $\sigma_{11}^{(r)}$ respecte un système d'inéquations. Ainsi, la fonction de résistance $f^r(\underline{\underline{\sigma}}^{(r)})$ peut se réécrire sous la forme des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} f^r(\underline{\underline{\sigma}}^{(r)}) \leq 0 \;&\Leftrightarrow\; \sigma_M^{(r)}(1+\sin\varphi_r) - \sigma_m^{(r)}(1-\sin\varphi_r) - 2C_r\cos\varphi_r \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma_{22} \leq \dfrac{C_r}{\tan\varphi_r} \\ |\Sigma_{12}| \leq C_r - \Sigma_{22}\tan\varphi_r \\ Y_r^- \leq \sigma_{11}^{(r)} \leq Y_r^+ \end{cases} \end{aligned} \tag{7.17}$$

dans lesquelles

$$Y_r^{\pm} = \left(\Sigma_{22} - \frac{C_r}{\tan\varphi_r}\right)(1+2\tan^2\varphi_r) \pm \frac{2\sqrt{(\Sigma_{22}\tan\varphi_r - C_r)^2 - \Sigma_{12}^2}}{\cos\varphi_r} + \frac{C_r}{\tan\varphi_r} \tag{7.18}$$

En combinant les deux systèmes obtenus et en ajoutant le fait que la moyenne du champ de contrainte doit être égale au tenseur macroscopique, on aboutit à l'obtention d'une *approche par l'intérieur* analytique du domaine de résistance macroscopique du sol renforcé par colonnes :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}_{col}^{\text{stat,an}} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \Sigma_{22} \leq \dfrac{C_r}{\tan\varphi_r} \\ |\Sigma_{12}| \leq \min\{C_s; C_r - \Sigma_{22}\tan\varphi_r\} \\ (1-\eta)Y_s^- + \eta Y_r^- \leq \Sigma_{11} \leq (1-\eta)Y_s^+ + \eta Y_r^+ \end{cases} \tag{7.19}$$

On peut visualiser cette approche statique analytique à partir d'une construction géométrique utilisant les domaines de résistance des matériaux constituant le sol renforcé. La Figure 7.4 schématise cette contruction dans le plan $\Sigma_{12} = 0$, en faisant apparaître le critère de résistance du sol et celui du renforcement, ainsi que $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat,an}}$ (domaine grisé).

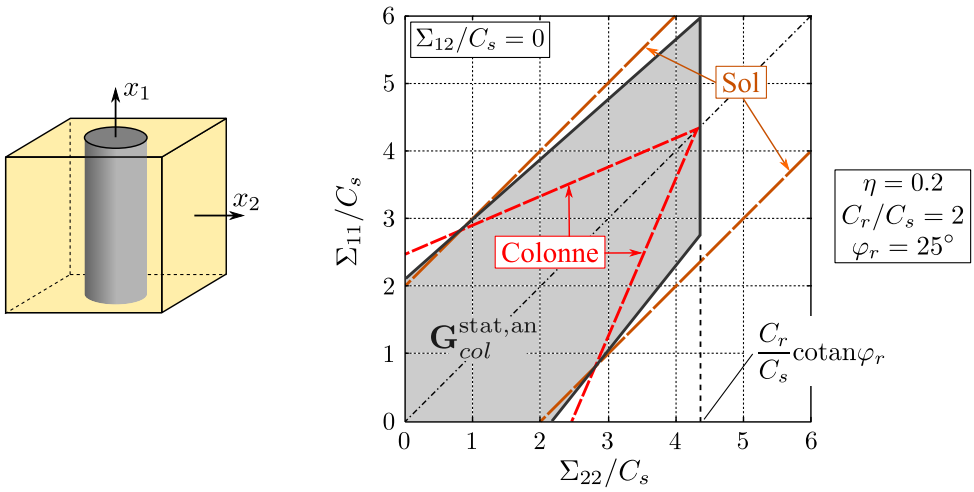


FIGURE 7.4 – Approche statique analytique d'un sol renforcé par colonnes en matériau cohérent/frottant dans le plan $\Sigma_{12} = 0$.

On représente ce minorant de $\mathbf{G}_{col}$ sur la Figure 7.5, dans l'espace des contraintes $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$. La définition de cette approche statique peut susciter quelques commentaires. Tout d'abord, on observe le caractère fortement anisotrope et non borné du domaine macroscopique obtenu, caractéristiques qui découlent directement des critères de résistance locaux et de la géométrie.

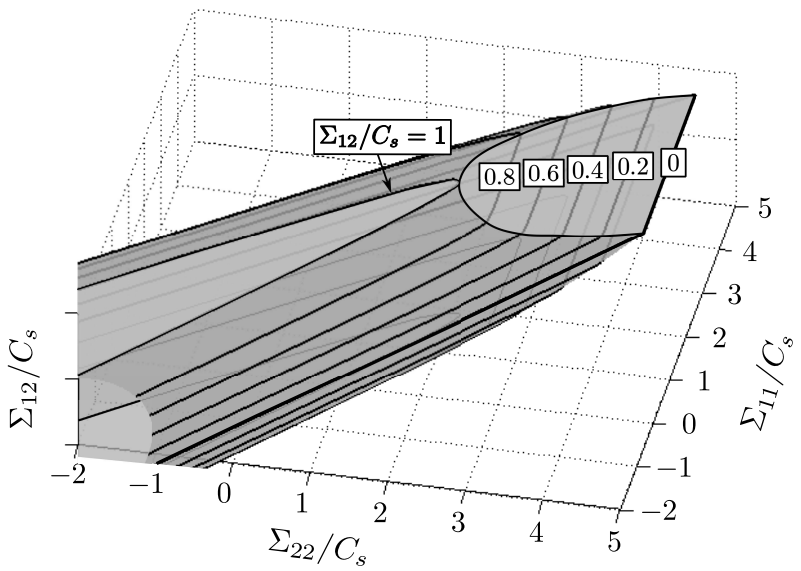


FIGURE 7.5 – Représentation de l'approche statique analytique d'un sol renforcé par colonnes ($\eta = 0.2, C_r/C_s = 2, \varphi_r = 25°$).

Ensuite, comme pour le renforcement des sols par des colonnes purement cohérentes, on s'aperçoit que le minorant de la résistance en cisaillement pur ($\Sigma_{12} > 0$) de ce matériau composite est limitée par la cohésion du sol C_s. On peut montrer à l'aide d'une approche cinématique très simple que la valeur maximale possible de la contrainte de cisaillement Σ_{12} est égale à C_s. On retrouve ce résultat avec les calculs numériques qui vont suivre.

Par ailleurs, ainsi que cela apparaît clairement sur la Figure 7.4, la première inégalité de (7.19) montre que, selon l'approche statique ainsi réalisée, la contrainte transversale Σ_{22} ne peut pas dépasser la valeur maximale $C_r/\tan\varphi_r$. Cette limitation est due au champ de contrainte particulier choisi, constant par morceaux, qui ne prend pas en compte le fait que la colonne est entourée par le sol en place. Certains auteurs ont proposé un champ de contrainte plus complexe permettant de remédier en partie à cette lacune dans le cas des sols renforcés par colonnes ballastées [Jellali *et al.*, 2007].

Cette approche statique, qui donne une première évaluation par l'intérieur du critère de résistance macroscopique, va maintenant être comparée à l'évaluation par voie numérique du critère.

7.2.2 Utilisation de la programmation semi-définie positive sous les conditions de déformations planes généralisées

Seule la modélisation d'une moitié de la cellule de base est nécessaire pour mener à bien la détermination numérique de l'encadrement du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes. Pour les approches statique et cinématique, on utilise la même discrétisation de cette cellule dans le plan (x_2, x_3) en changeant le type d'éléments choisis (triangles à 3 ou 6 nœuds). Le maillage retenu est représenté sur la Figure 7.6. Il est raffiné au niveau de l'interface entre le sol et la colonne. Comme expliqué au chapitre précédent, le nombre d'inconnues du problème d'optimisation lié à l'approche statique est directement proportionnel au nombre d'éléments n_e. Pour l'approche cinématique, la taille du problème d'optimisation fait aussi intervenir le nombre de nœuds n_p du maillage. Pour le maillage choisi, on a $n_e = 340$ et $n_p = 715$.

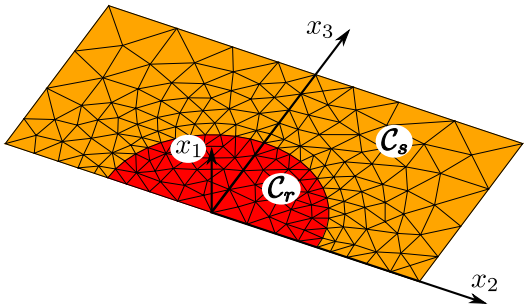


FIGURE 7.6 – Maillage utilisé pour une configuration de renforcement par colonnes avec $\eta = 0.2$.

En analysant les critères de résistance du sol en place (Tresca) et du renforcement (Mohr-Coulomb), on constate que certaines directions du taux de déformation macroscopique ne sont pas à prospecter, car conduisant à une valeur infinie de la fonction d'appui. En effet, lorsque par exemple $D_{11} + D_{22} \leq 0$, aucune des deux conditions de pertinence locales ne peut être remplie, de sorte que le domaine de résistance macroscopique ne sera pas borné dans ces directions. Ce constat est confirmé par l'approche statique analytique précédente. Ainsi, pour l'approche cinématique numérique, l'angle γ peut uniquement décrire l'intervalle $[-\pi/4, 3\pi/4]$ (voir Figure 7.3(b)).

On décide de discrétiser les angles des directions macroscopiques avec un pas de 1°. Pour l'approche statique, cela représente donc 32401 problèmes d'optimisations faisant intervenir 19381 inconnues devant respecter 12714 contraintes linéaires et 2040 contraintes coniques de type semi-définies positives. Sur un ordinateur de bureau standard, ces calculs sont effectués en 138580 secondes, soit un peu plus de 38 heures (et donc quelques secondes par problème d'optimisation). Pour l'approche cinématique, on a 16201 problèmes à résoudre avec 20505 variables d'optimisation sousmises à 18457 contraintes linéaires et 2040 contraintes coniques. Cette approche par l'extérieur est déterminée en 130000 secondes (environ 36 heures) avec le même ordinateur, soit également quelques secondes pour chaque problème.

On représente sur la Figure 7.7 l'approche par l'intérieur ainsi obtenue du domaine

de résistance macroscopique pour un sol renforcé par colonnes, dans l'espace normalisé $(\Sigma_{11}/C_s, \Sigma_{22}/C_s, \Sigma_{12}/C_s)$. On peut tout de suite souligner que l'approche statique numérique confirme le fait que le sol renforcé possède une résistance limitée à C_s lorsque la sollicitation est un cisaillement pur. Comme on s'y attendait, l'évaluation numérique de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ est un convexe non borné dans certaines directions de chargement.

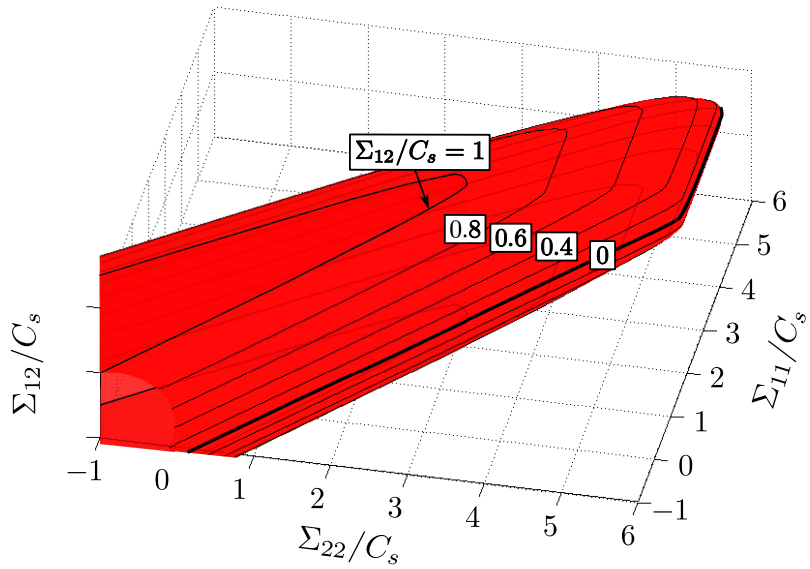


FIGURE 7.7 – Évaluation numérique par l'intérieur du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes.

Afin de mieux percevoir la forme de ce domaine, on effectue des coupes de l'encadrement de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ en faisant varier Σ_{12}/C_s. La Figure 7.8(a) fait apparaître les coupes de $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat}}$ dans le plan $(\Sigma_{11}/C_s, \Sigma_{22}/C_s)$ pour différentes valeurs du cisaillement.

Pour s'assurer que le minorant numérique $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat}}$ de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ est proche du domaine de résistance réel, on peut la comparer visuellement avec le majorant obtenu par l'approche cinématique. Sur les Figures 7.8(b) à 7.8(d), on trace donc $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat}}$ et $\mathbf{G}_{col}^{\text{cine}}$ pour $\Sigma_{12}/C_s = 0, 0.5$ ou 1. On y fait figurer également le minorant $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat,an}}$ obtenu analytiquement.

On observe que $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat,an}}$ sous-estime fortement la résistance du sol renforcé par colonnes notamment pour les Σ_{22} positifs. En revanche, il est intéressant de constater que les directions de $\underline{\underline{\Sigma}}$ pour lesquelles la charge limite est infinie sont très bien identifiées par cette simple méthode analytique.

Deuxièmement, on remarque que le minorant et le majorant numériques sont visiblement proches dans toutes les directions de l'espace. Ce qui permet de conclure à la bonne précision de l'encadrement obtenu, notamment en ce qui concerne la détermination de l'ensemble des normales extérieures au domaine $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ pour lesquelles ce dernier est borné.

Avant d'analyser plus spécifiquement la précision de ces résultats numériques, il est très important de souligner une caractéristique des sols cohérents renforcés par un matériau

frottant. En effet, le terme renforcement laisse penser que l'on améliore les performances du sol quelle que soit la sollicitation qui lui est appliquée. On rappelle que la résistance du sol en place est infinie lorsqu'il est sousmis à une traction isotrope du type $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} > 0$. Or, si l'on observe la Figure 7.8, on s'aperçoit que la résistance du sol renforcé par colonnes frottantes est limitée pour cette même sollicitation. En revanche, les performances du sol en place sont effectivement accrues lorsque les composantes Σ_{11} ou Σ_{22} sont fortement négatives (compressions). On constatera que c'est également le cas pour la configuration en tranchées croisées. Il faut donc être vigilant dans l'emploi de ce vocabulaire et ne pas perdre de vue cette remarque importante.

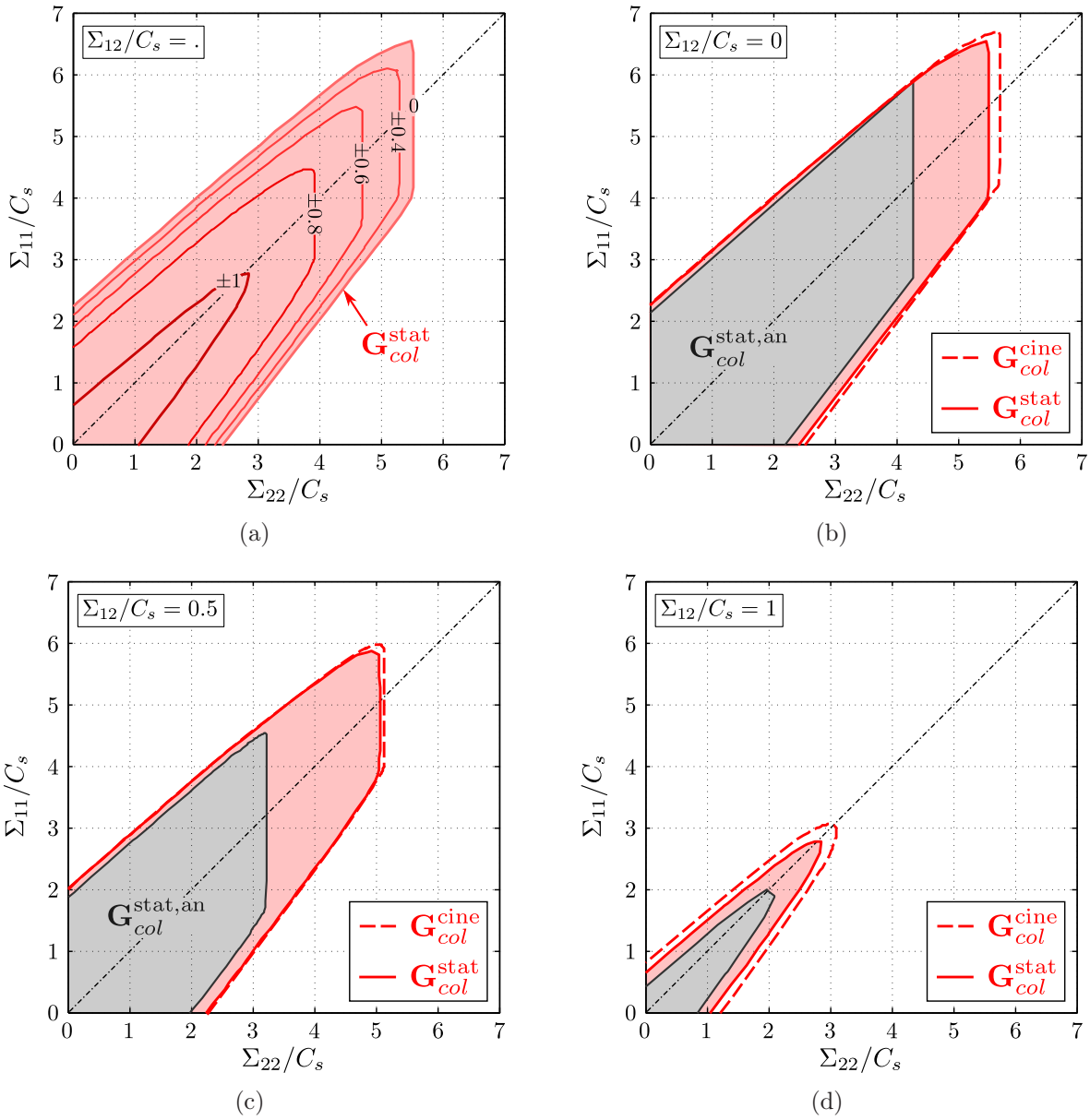


FIGURE 7.8 – Coupes des évaluations de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ pour différentes valeurs de Σ_{12}/C_s.

7.2.3 Précision des résultats et comparaison avec une évaluation simplifiée du critère de résistance macroscopique

On sait que tout domaine de résistance macroscopique convexe peut être défini dans l'espace des contraintes, soit par un ensemble de points appartenant à sa frontière (ensemble des contraintes macroscopiques extrêmes), soit par un ensemble d'hyperplans tangents dont on connaît les normales et les distances par rapport à l'origine (ensemble des taux de déformation macroscopiques et des fonctions d'appui associées).

Pour pouvoir comparer l'écart entre $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat}}$ et $\mathbf{G}_{col}^{\text{cine}}$, on cherche à définir des quantités comparables pour les deux ensembles. On se propose donc de calculer l'écart relatif entre $\pi_{col}^{\text{cine}}(\underline{\underline{D}})$, obtenue directement, et $\pi_{col}^{\text{stat}}(\underline{\underline{D}})$, où

$$\pi_{col}^{\text{stat}}(\underline{\underline{D}}) = \sup_{\underline{\underline{\Sigma}}} \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \,|\, \underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbf{G}_{col}^{\text{stat}} \right\} \tag{7.20}$$

est calculée en post-traitement, en fonction des angles γ et δ paramétrisant les normales extérieures $\underline{\underline{D}}$ aux deux domaines (voir équation (7.3)).

La fonction d'appui du majorant de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ est donnée sur la Figure 7.9(a). Comme on l'a déjà remarqué précédemment, cette fonction n'est finie que pour certaines orientations du taux de déformation macroscopique. On profite de cette remarque pour établir une définition qui nous sera utile par la suite :

$$\{\underline{\underline{D}}\}_{col}^{\text{cine}} = \left\{ \underline{\underline{D}} \,|\, \pi_{col}^{\text{cine}}(\underline{\underline{D}}) < +\infty \right\} \tag{7.21}$$

où $\{\underline{\underline{D}}\}_{col}^{\text{cine}}$ peut donc être vu comme le cône des normales extérieures à $\mathbf{G}_{col}^{\text{cine}}$. La fonction d'appui du majorant du domaine macroscopique est relativement régulière sur cet ensemble, ce qui facilitera l'approximation faite dans le prochain chapitre.

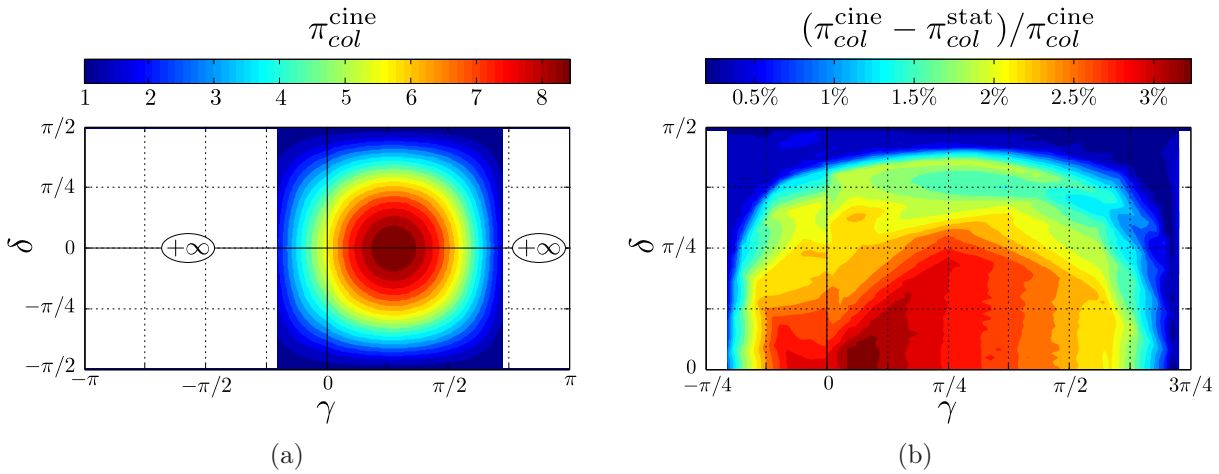


FIGURE 7.9 – (a) Fonction d'appui du majorant de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$, (b) Mesure de l'écart relatif d'encadrement de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ en fonction des angles (γ, δ).

Sur la Figure 7.9(b), on représente l'écart relatif $(\pi_{col}^{\text{cine}} - \pi_{col}^{\text{stat}})/\pi_{col}^{\text{cine}}$ sur la moitié de $\{\underline{\underline{D}}\}_{col}^{\text{cine}}$, le reste étant obtenu par symétrie par rapport à l'axe $\delta = 0$. On s'aperçoit

que les directions pour lesquelles cet écart est maximal correspondent à un cisaillement faible. Comme on avait pu le pressentir en observant les coupes de l'encadrement de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$, l'écart entre les résultats des approches numériques est très faible. En effet, il y a, au maximum, 3.4% de différence entre les deux et cet écart relatif vaut en moyenne 1.8%. Cette remarque permet de confirmer la qualité des résultats numériques issus des formulations développées au chapitre 6.

Pour compléter l'analyse du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes, on souhaite comparer le résultat obtenu à une simplification couramment répandue dans la littérature. Certains auteurs partent du principe que le critère de résistance macroscopique du sol renforcé correspond ni plus ni moins à un critère de Mohr-Coulomb [DiMaggio, 1978, Priebe, 1995, Christoulas *et al.*, 1997]. Pour eux, la cohésion et l'angle de frottement du matériau composite peuvent se déterminer analytiquement ou expérimentalement. La façon la plus simple de calculer ces caractéristiques est de prendre la moyenne des caractéristiques locales, pondérée par les fractions volumiques respectives des constituants. Ainsi, le domaine de résistance macroscopique est approximé par :

$$\mathbf{G}_{col}^{hom} \sim \overline{\mathbf{G}^{hom}}(\overline{C} = \langle C \rangle \,, \tan\overline{\varphi} = \langle \tan\varphi \rangle) \tag{7.22}$$

Si on applique cette formule au sol renforcé par colonnes, le critère de résistance est de la forme suivante :

$$\overline{\mathbf{G}^{hom}} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} \,|\, f^{hom} = \Sigma_M(1+\sin\overline{\varphi}) - \Sigma_m(1-\sin\overline{\varphi}) - 2\overline{C}\cos\overline{\varphi} \leq 0 \right\} \tag{7.23}$$

avec, pour l'application numérique, $\overline{C} = 1.2C_s$ et $\overline{\varphi} \simeq 5.3°$.

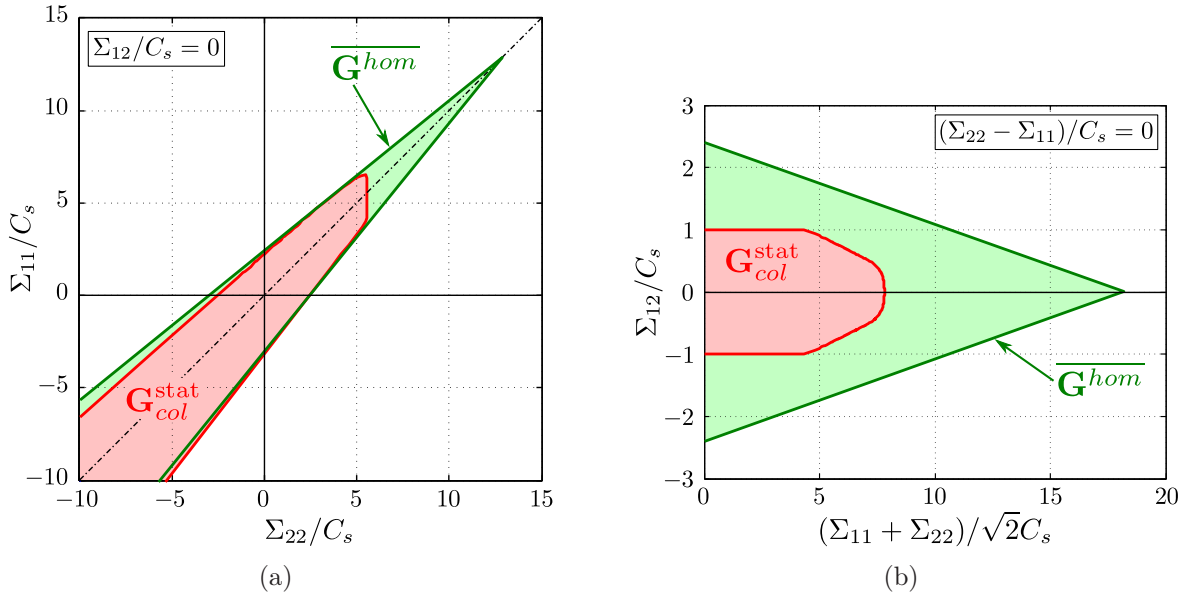


FIGURE 7.10 – Comparaison de $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat}}$ avec l'approximation $\overline{\mathbf{G}^{hom}}$: (a) coupe pour $\Sigma_{12}/C_s = 0$ (b) coupe pour $(\Sigma_{22} - \Sigma_{11})/C_s = 0$.

Deux coupes de l'approximation de ce critère de résistance sont présentées sur la Figure 7.10. À gauche, on trace $\overline{\mathbf{G}^{hom}}$ et $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat}}$ dans le plan $\Sigma_{12}/C_s = 0$. On s'aperçoit

que la résistance en traction isotrope du modèle simplifié est fortement supérieure à celle prédite par le critère obtenu numériquement et que l'ouverture angulaire du cône des normales extérieures de ce critère simplifié est bien plus étroite que celle du critère numérique. Sur la Figure 7.10(b), on observe en effet que l'adoption d'un tel critère simplifié revient à surestimer énormément la résistance en cisaillement pur du sol renforcé. Le fait que celle-ci soit limitée à la cohésion du sol en place n'est plus du tout pris en compte.

Ce domaine de résistance macroscopique moyenné est donc une évaluation peu performante de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$. De plus, elle ne possède aucun statut particulier par rapport à la solution exacte. On verra dans le chapitre suivant quelle influence cela peut avoir sur la résistance d'ouvrages en sol renforcé par colonnes.

7.3 Encadrement numérique du critère de résistance macroscopique des sols renforcés par tranchées croisées frottantes

On s'intéresse désormais à un sol renforcé par des tranchées croisées, dont la cellule de base est schématisée sur la Figure 7.1(b). Pour effectuer les simulations numériques, on garde les caractéristiques géométriques et matérielles indiquées dans (7.13). On procède aux approches statique et cinématique numériques du problème afin d'encadrer le domaine de résistance macroscopique $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$. Ce domaine sera comparé à celui du sol renforcé par colonnes obtenues pour les mêmes caractéristiques (7.13).

7.3.1 Approches statique et cinématique numériques

On choisit volontairement un maillage dont le nombre d'éléments est proche de celui utilisé dans la configuration de renforcement par colonnes. Ainsi, le nombre d'inconnues des problèmes d'optimisation relatifs aux approches statique et cinématique sera proche de celui des problèmes précédents. Le maillage retenu comprend $n_e = 304$ éléments. Il est représenté sur la Figure 7.11. Pour la mise en œuvre de l'approche cinématique, le maillage adoptée comprend $n_p = 659$ nœuds.

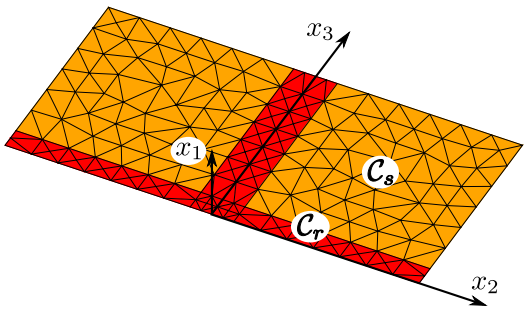


FIGURE 7.11 – Maillage utilisé pour une configuration de renforcement par tranchées croisées avec $\eta = 0.2$.

On conserve le même paramétrage des sollicitations macroscopiques ($\underline{\underline{\Sigma}}$ ou $\underline{\underline{D}}$) que celui utilisé pour la détermination du domaine de résistance macroscopique des sols renforcés par colonnes (voir Figure 7.3). Une discrétisation de 1° est adoptée pour les paramètres angulaires, restreints dans les mêmes intervalles que dans le cas précédent.

Pour obtenir $\mathbf{G}_{tc}^{\text{stat}}$, il faut résoudre 32401 problèmes d'optimisation. On détermine, pour chaque problème, 17329 inconnues qui doivent respecter 22538 contraintes linéaires et 1824 contraintes coniques de type semi-définies positives. Le temps de calcul effectif est de 123490 secondes, soit environ 34 heures, toujours avec le même ordinateur. La détermination de $\mathbf{G}_{tc}^{\text{cine}}$ fait appel à la résolution de 16201 problèmes, dont les 18393 variables d'optimisation sont restreintes par 32765 contraintes linéaires et 1824 contraintes coniques. La durée de ces calculs numériques est de 109130 secondes (ou 30 heures).

On représente le minorant de $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$ dans l'espace $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$ sur la Figure 7.12. La résistance en traction uniaxiale suivant la direction $\underline{e}_2$ est relativement faible et directement liée à la cohésion du matériau de renforcement, comme on pouvait s'y attendre au vu de la géométrie de la cellule de base. En revanche, il est important de noter que, contrairement au renforcement par colonnes, la résistance en cisaillement longitudinal du sol renforcé n'est pas limitée par la cohésion du sol. C'est une caractéristique primordiale, qui permet d'espérer un gain substantiel, au niveau du calcul d'ouvrage, par rapport au sol non renforcé, dans le cas où de telles sollicitations de cisaillement sont mises en jeu.

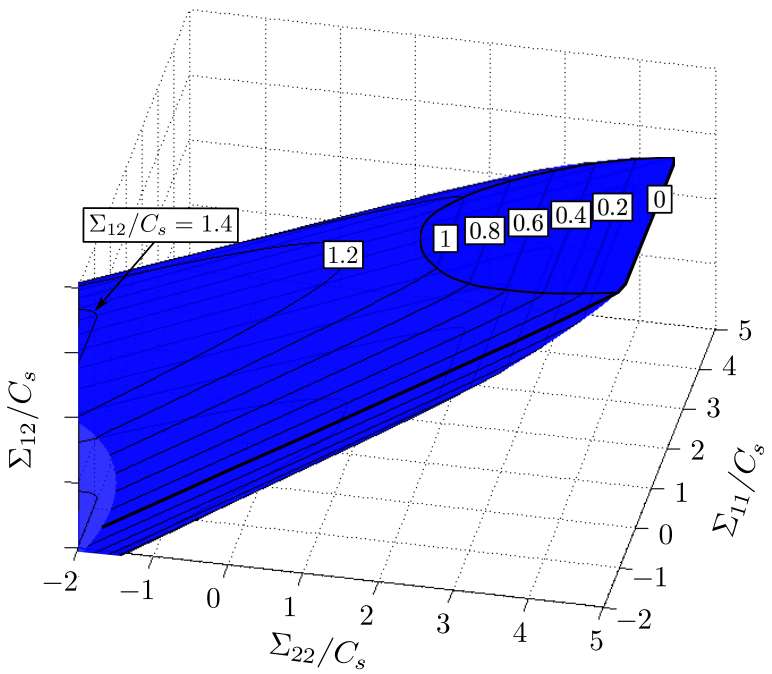
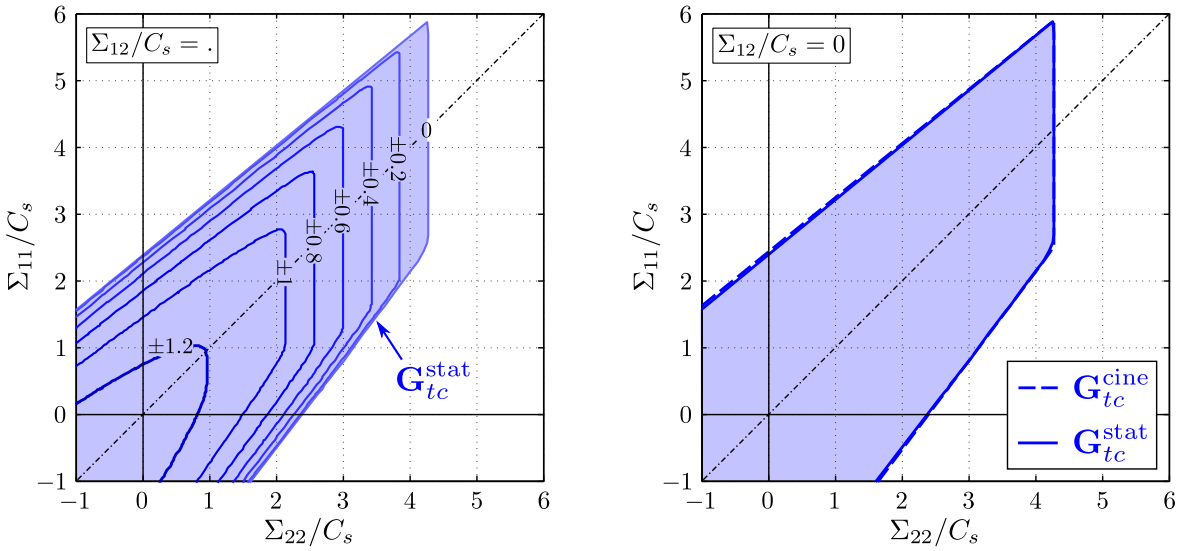


FIGURE 7.12 – Évaluation numérique par l'intérieur du domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par tranchées croisées.

Des coupes de ce domaine sont effectuées pour différentes valeurs de Σ_{12}/C_s (voir Figure 7.13(a)). On y constate bien que, pour une sollicitation de traction selon la

direction $\underline{e}_2$, la résistance du sol renforcé vaut $C_r/\tan\varphi_r$ ($\simeq 4.29$ pour notre application numérique). La Figure 7.13(b) correspond aux coupes de $\mathbf{G}_{tc}^{\text{stat}}$ et $\mathbf{G}_{tc}^{\text{cine}}$ pour un cisaillement nul. On observe que l'encadrement obtenu numériquement est très resserré, voire indistinguable à l'œil nu.

Si on trace les courbes pour d'autres valeurs de Σ_{12}/C_s, on observe la même proximité pour toutes les directions de sollicitation. Le fait que les deux encadrements soient si proches signifie que les champs (de contrainte et de vitesse) obtenus après optimisation du problème auxiliaire, sont très proches des champs associés à la valeur exacte de la sollicitation extrême.



(a) (b)

FIGURE 7.13 – Coupes des évaluations numériques de $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$ pour différentes valeurs de Σ_{12}/C_s.

7.3.2 Commentaires sur la précision des résultats

On représente sur la Figure 7.14(a), la fonction d'appui π_{tc}^{cine} sur l'ensemble des directions pour lesquelles la valeur de cette fonction est finie, noté $\{\underline{\underline{D}}\}_{tc}^{\text{cine}}$. On peut observer encore une fois la régularité de cette fonction. Par ailleurs, l'ensemble des normales extérieures à ce majorant est analogue à celui d'un critère de type Mohr-Coulomb. Il est aussi rassurant de voir que la fonction d'appui est finie sur un intervalle angulaire plus petit que celui prospecté ($\gamma \in [-\pi/4, 3\pi/4]$).

Afin de quantifier la qualité des deux approches, on étudie l'écart relatif entre le minorant et le majorant sur l'ensemble des directions pour lesquelles on détecte une valeur extrême dans le cas de l'approche cinématique. L'écart relatif $(\pi_{tc}^{\text{cine}} - \pi_{tc}^{\text{stat}})/\pi_{tc}^{\text{cine}}$ est reporté sur la Figure 7.14(b).

La première remarque porte sur la valeur maximale de cet écart. Avec un maillage moyennement raffiné, on parvient à avoir une différence relative entre le minorant et le majorant de 1.16% au maximum. Le fait de prendre un maillage avec plus d'éléments ne paraît donc pas nécessaire.

Comme on a pu le souligner auparavant, l'écart d'encadrement est très peu influencé par la direction du taux de déformation. Pour une grande partie de ces directions, $(\pi_{tc}^{\text{cine}} - \pi_{tc}^{\text{stat}})/\pi_{tc}^{\text{cine}}$ est proche de la valeur moyenne, environ 0.4%. Cet écart relatif s'annule quasiment pour certaines directions de $\{\underline{\underline{D}}\}_{tc}^{\text{cine}}$. Cela confirme l'excellente performance des méthodes numériques qui permettent d'évaluer le critère macroscopique avec une grande précision.

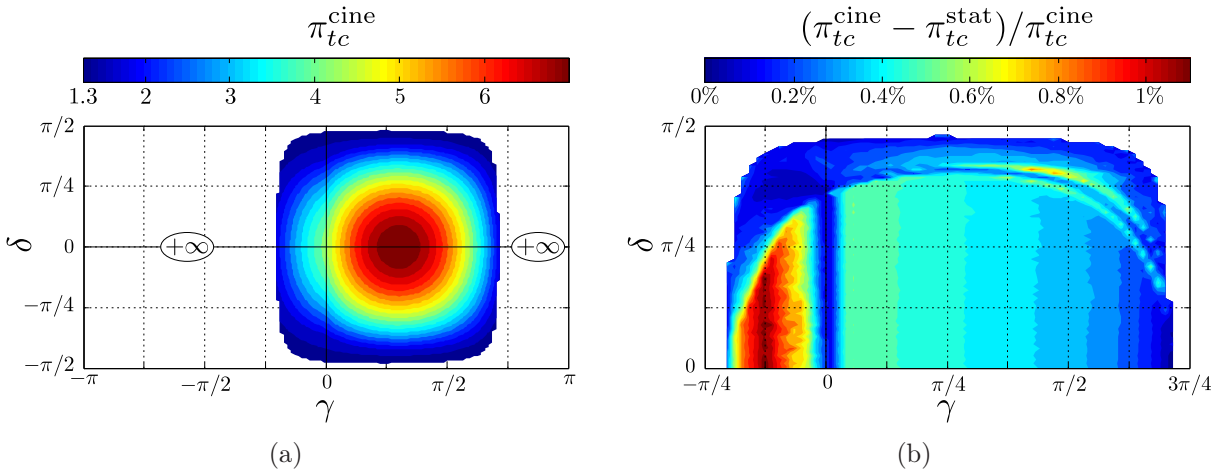


FIGURE 7.14 – (a) Fonction d'appui du majorant de $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$, (b) Mesure de l'écart relatif d'encadrement de $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$ en fonction de (γ, δ).

7.4 Comparaison des critères de résistance macroscopiques des sols renforcés par un matériau frottant

7.4.1 Renforcement par colonnes ou par tranchées croisées ?

L'objectif final de ce chapitre est de comparer les domaines de résistance obtenus pour les sols renforcés par colonnes ou par tranchées croisées. Pour cela, on va analyser les différences entre les domaines regroupant l'ensemble des normales extérieures aux critères, ainsi que les coupes de ces critères pour différentes valeurs de cisaillement.

La grande différence entre les deux configurations peut s'observer sur la Figure 7.15(a). Les deux ensembles $\{\underline{\underline{D}}\}_{col}^{\text{cine}}$ et $\{\underline{\underline{D}}\}_{tc}^{\text{cine}}$ y sont représentés en fonction de leur orientation dans l'espace, caractérisée par (γ, δ). On s'aperçoit que la direction $(D_{11} = D_{22} = 0, D_{12} \geq 0)$ (orientation $\delta = \pi/2$), fait partie des normales extérieures au domaine de résistance du sol renforcé par colonnes, ce qui n'est pas le cas pour le renforcement par tranchées croisées. Cela traduit le fait que la résistance en cisaillement pur d'un sol renforcé par tranchées croisées est infinie, tandis que pour $\mathbf{G}_{col}^{hom}$, cette

résistance est limitée à la cohésion C_s du sol en place.

Pour ce qui concerne les autres régions de $\{\underline{\underline{D}}\}_{col}^{\text{cine}}$ et $\{\underline{\underline{D}}\}_{tc}^{\text{cine}}$, les différences sont ténues. On peut notamment évoquer le fait que l'ouverture angulaire est quasi identique pour les deux critères en l'absence de cisaillement ($\delta = 0$).

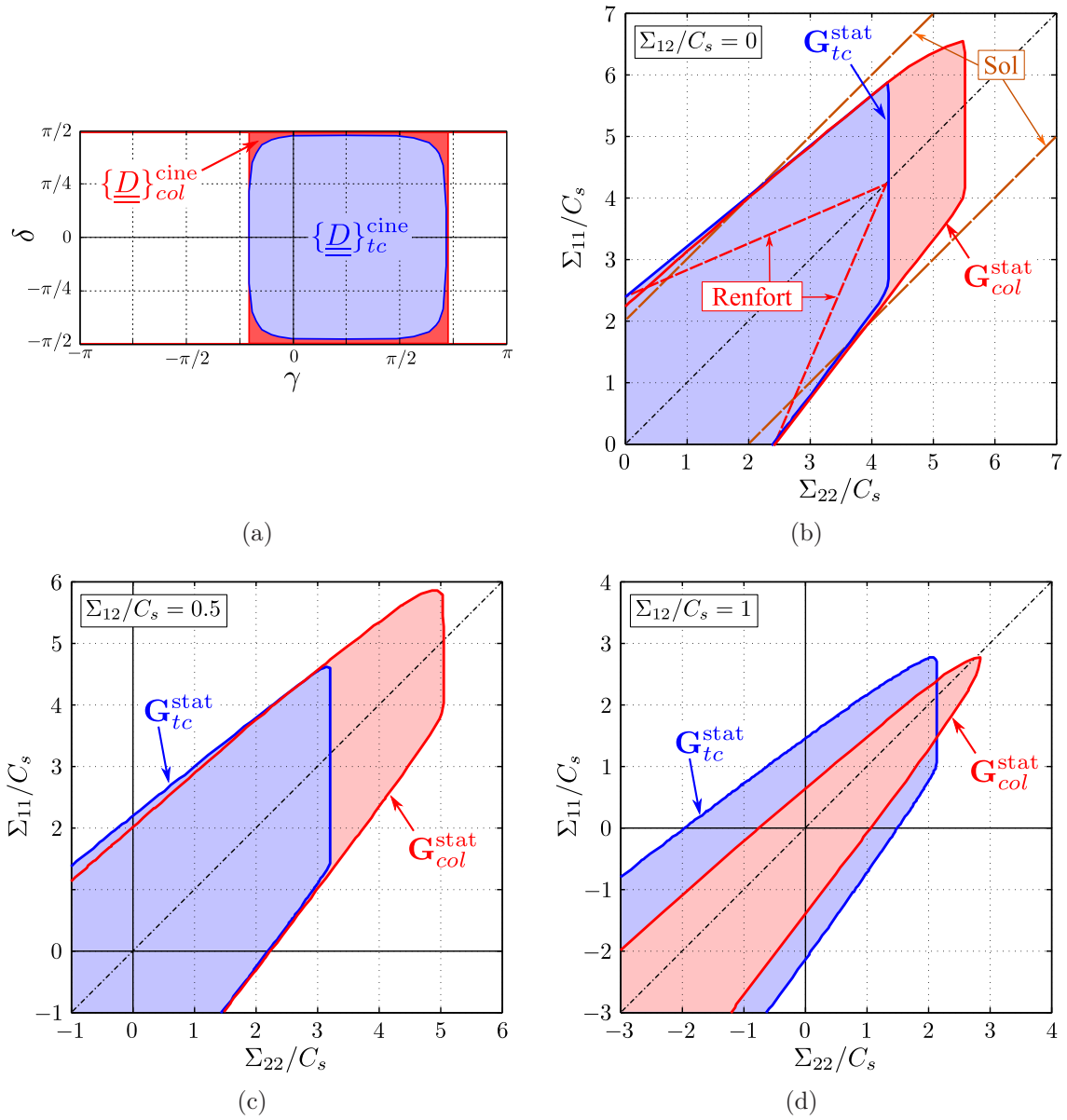


FIGURE 7.15 – Comparaison de $\mathbf{G}_{col}^{\text{stat}}$ et $\mathbf{G}_{tc}^{\text{stat}}$ pour différentes valeurs de Σ_{12}/C_s.

Des coupes des majorants de $\mathbf{G}_{col}^{hom}$ et $\mathbf{G}_{tc}^{hom}$ sont représentées sur les Figures 7.15(b) à (d). Pour un cisaillement nul, on rappelle également les critères locaux du matériau de renforcement et du sol en place. Dans ce plan, le sol renforcé par colonnes est plus performant pour des sollicitations de traction suivant l'axe $\underline{e}_2$. Le fait que le sol en place entoure la colonne de renforcement apporte un effet bénéfique qu'on ne retrouve pas dans la configuration en tranchées croisées. Encore une fois, pour de telles sollicitations, il n'est

pas exact de parler de *renforcement du sol en place*, puisque la résistance macroscopique est plus faible que celle du sol en place. En revanche, l'une et l'autre des configurations permet d'améliorer sa résistance pour de fortes compressions suivant $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$.

Pour $\Sigma_{12}/C_s = 0.5$, la configuration de renforcement par colonnes conserve un net avantage sur celle par tranchées croisées pour des valeurs positives de Σ_{22}. En revanche, pour $\Sigma_{12} = C_s$, on atteint la limite de résistance du domaine $\mathbf{G}^{hom}_{col}$, et, pour cette valeur particulière du cisaillement, le renforcement par tranchées croisées apparaît bien plus performant. Par exemple, si on prend une valeur nulle pour Σ_{22}, on double la résistance macroscopique pour Σ_{11} positif et on augmente d'un tiers cette résistance pour Σ_{11} négatif, simplement en changeant la configuration géométrique du renforcement, à fraction volumique constante de ce dernier.

Enfin, il faut insister sur le fait qu'il est possible de continuer à effectuer des coupes pertinentes de $\mathbf{G}^{hom}_{tc}$ pour des valeurs de $\Sigma_{12} > C_s$, alors que ces coupes seront vides pour le domaine de résistance macroscopique d'un sol renforcé par colonnes.

7.4.2 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons pu mettre en œuvre les formulations numériques de calcul à la rupture sous les conditions de déformations planes généralisées sur un problème de géotechnique. D'un point de vue analyse numérique, nous avons pu constater la précision des optimisations réalisées, sur deux configurations de sols renforcés. Il est important de souligner qu'en plus d'être très proches (au maximum quelques pourcents d'écart relatif), les évaluations obtenues ont un statut d'*encadrement* pour les domaines de résistance macroscopiques étudiés.

À ce stade, il faut également évoquer le faible temps de calculs nécessaire pour effectuer les milliers d'optimisations numériques. En effet, pour obtenir la définition précise du minorant ou du majorant de $\mathbf{G}^{hom}$, les résolutions ne prennent pas plus d'une cinquantaine d'heures. Si on veut effectuer une évaluation numérique du critère avec une procédure élastoplastique (donc itérative), pour une même discrétisation de l'espace, les calculs peuvent durer plusieurs centaines d'heures [Hassen *et al.*, 2013]. Les résultats obtenus fourniront des informations supplémentaires (évolution du trajet de chargement), mais sans que l'on puisse donner un statut d'encadrement à ces résultats.

Par un raisonnement analytique simple, on a eu l'occasion de relier les domaines de résistance numériques, obtenus pour une valeur donnée de la cohésion du matériau de renforcement, à ceux que l'on obtiendrait pour une autre valeur de C_r. De ce fait, les comparaisons faites, pour ces caractéristiques de renforcement, sont également valables pour une cohésion du matériau de renforcement plus ou moins importante.

En ce qui concerne la comparaison des performances des sols renforcés par colonnes ou par tranchées croisées, on a pu voir que la différence majeure réside dans le fait que la configuration en colonnes conduit à une résistance au cisaillement longitudinal maximale égale à la cohésion du sol en place lors d'un cisaillement pur. Pour l'une et

l'autre des géométries d'inclusions, on a pu souligner que le terme de "renforcement" pouvait, pour certaines sollicitations, être un abus de langage qui cache quelques subtilités.

Il est donc utile de s'intéresser à l'influence que ces différentes remarques peuvent avoir sur un calcul d'ouvrage. Comme pour les résultats ayant trait au comportement élastique de ces sols renforcés, on s'attend à observer une différence de charge ultime potentiellement supportable accrue dans le cas d'un renforcement par tranchées croisées lorsque le mécanisme de rupture fait intervenir un cisaillement important.

* *

*

Chapitre 8

Deux exemples d'application à des calculs d'ouvrages

Résumé : *Ce chapitre aborde la résolution numérique de calculs à la rupture d'ouvrages renforcés. Après avoir expliqué la nécessité d'approximer les domaines de résistance macroscopiques de ces sols renforcés déterminés au chapitre précédent, une présentation détaillée de la démarche utilisée est donnée. Elle insiste notamment sur le statut des résultats obtenus par cette méthode. Les approximations des critères de résistance de sols renforcés par colonnes ou tranchées croisées sont alors présentées, pour différents types de matériau de renforcement. Ces approximations sont ensuite utilisées pour déterminer des minorants et majorants de la charge extrême pour différents ouvrages classiques en géotechnique. Il s'agit tout d'abord d'étudier la capacité portante d'un sol sous l'action d'un chargement incliné en présence de renforcements, puis d'analyser la stabilité d'un talus reposant sur un sol renforcé.*

Sommaire

8.1 Généralités sur l'utilisation d'un domaine de résistance macroscopique approximé dans un calcul d'ouvrage 156
8.1.1 Nécessité de disposer d'approximations simplifiées du critère macroscopique 156
8.1.2 Méthode employée et statut théorique des approximations 157
8.2 Approximations des domaines de résistance des sols renforcés 159
8.2.1 Cas des sols renforcés de type cohérent/cohérent 160
8.2.2 Cas des sols renforcés de type cohérent/frottant 161
8.3 Application aux calculs de capacité portante sous charge inclinée de fondations renforcées 166
8.3.1 Données du problème 166
8.3.2 Résultats des calculs numériques 168
8.3.3 Conclusions sur la capacité portante des sols renforcés 175
8.4 Analyse de la stabilité d'un remblai reposant sur un sol renforcé 176
8.4.1 Position du problème 176
8.4.2 Comparaison des différentes techniques de renforcement 177
8.4.3 Conclusions sur la stabilité de remblai reposant sur un sol renforcé 181

8.1 Généralités sur l'utilisation d'un domaine de résistance macroscopique approximé dans un calcul d'ouvrage

8.1.1 Nécessité de disposer d'approximations simplifiées du critère macroscopique

Les critères de résistance macroscopiques des sols renforcés par un matériau frottant ne pouvant être définis simplement par des formules analytiques (voir chapitre 7), seul le recours à des calculs numériques permet de les évaluer. Ils sont alors obtenus sous la forme de polyhèdres, dépendant d'un très grand nombre d'hyperplans, ce qui rend leur utilisation directe dans un calcul d'ouvrage très difficile, voire impossible.

En vue d'utiliser directement ce type de résultats, une première approche cinématique a été mise en œuvre, utilisant un mécanisme simple de blocs en translation pour le problème de capacité portante d'un sol renforcé par colonnes ballastées [Hassen *et al.*, 2013]. Cette méthode consiste à évaluer numériquement la fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique d'un tel sol renforcé relative à une discontinuité de vitesse, en fonction de l'orientation de la normale de la surface de discontinuité et de l'angle de décollement de la discontinuité de vitesse. Étant donné que le mécanisme retenu pour l'approche cinématique ne fait intervenir que deux blocs, on peut alors effectuer l'optimisation de ce mécanisme en cherchant "manuellement" le jeu d'angles qui donne le majorant le plus petit, donc le plus proche de la charge extrême potentiellement supportable par l'ouvrage.

Bien qu'elle soit parfaitement rigoureuse, cette méthode est en pratique limitée à des mécanismes de rupture très simples, faisant intervenir très peu de variables d'optimisation. Pour des problèmes de structure pour lesquels le mécanisme de rupture ne peut être préssenti aisément, on ne peut donc plus l'utiliser. C'est la raison pour laquelle il nous faut trouver une alternative. Une première méthode, dans le même esprit que la méthode précédente, consiste à employer des outils numériques pour discrétiser l'ouvrage et à utiliser directement les équations des hyperplans définissant le domaine de résistance macroscopique. Le seul inconvénient (mais de taille !) est qu'il faut définir un très grand nombre d'inégalités linéaires en chaque point d'évaluation des contraintes, dans l'approche statique, ou des taux de déformation, dans l'approche cinématique. Cela rend alors cette méthode très coûteuse en temps de calcul dès lors que le problème discrétisé comprend un nombre important d'éléments.

L'approche que nous avons retenue dans le présent travail se déroule en deux temps :

- Approximations du critère de résistance macroscopique mettant en jeu un faible nombre de paramètres
- Introduction de ces approximations dans un calcul numérique sur l'ouvrage homogénéisé

De telles approximations sont basées sur le *principe de somme d'ensembles*, faisant

intervenir des ellipsoïdes (voir annexe C pour plus de détails). Cette méthode permet d'encadrer les domaines de résistance obtenus numériquement, à l'aide d'un nombre restreint de paramètres [Bleyer et de Buhan, 2013, Gueguin *et al.*, 2013b]. L'utilisation de telles approximations dans le cas de l'approche statique ou cinématique est expliquée dans l'annexe D pour un ouvrage en conditions de déformations planes, type de problème que nous allons traiter dans ce chapitre.

8.1.2 Méthode employée et statut théorique des approximations

8.1.2.1 Approximations du domaine de résistance macroscopique

Pour comprendre quelles sont les étapes de la méthode originale utilisée dans tout ce chapitre, il convient tout d'abord de s'intéresser au traitement réservé au domaine de résistance macroscopique exact, noté $\mathbf{G}^{hom}$. Pour une configuration géométrique et matérielle donnée, on a vu dans le chapitre précédent qu'il était impossible (sauf cas particuliers tels que le matériau multicouche) d'obtenir une évaluation exacte du critère de résistance macroscopique. En revanche, en effectuant numériquement les approches statique et cinématique du calcul à la rupture, on a pu déterminer un minorant $\mathbf{G}^{\text{stat}}$ et un majorant $\mathbf{G}^{\text{cine}}$ du domaine macroscopique. La définition de ces critères de résistance (numériques) dépend, entre autres, de la discrétisation retenue pour l'espace de chargement (voir Figure 8.1).

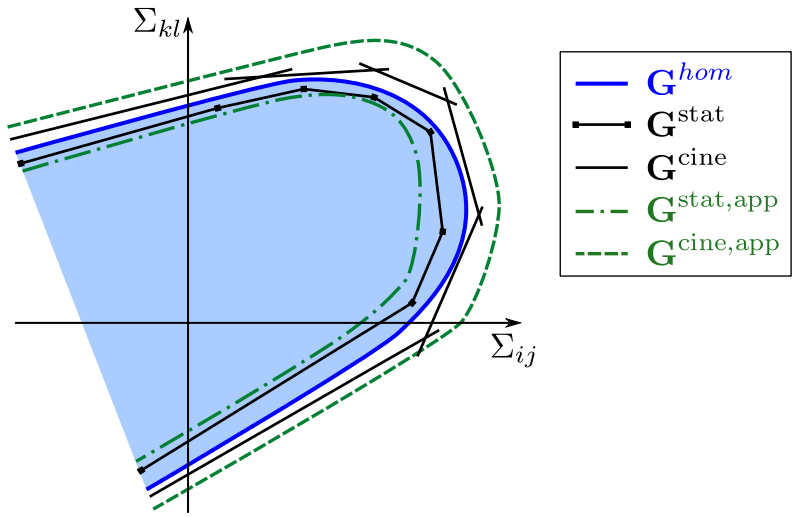


FIGURE 8.1 – Représentation des différentes évaluations d'un domaine de résistance macroscopique.

Pour les raisons évoquées en préambule, il est nécessaire d'effectuer des approximations analytiques des critères de résistance macroscopiques numériques $\mathbf{G}^{\text{stat}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine}}$, tout en essayant de garder un statut d'encadrement. On note $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ l'approximation par l'intérieur du minorant $\mathbf{G}^{\text{stat}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$ l'approximation par l'extérieur du majorant $\mathbf{G}^{\text{cine}}$. Cela permet de conserver un statut de minorant pour $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et de majorant pour $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$, comme représenté sur la Figure 8.1. Ce sont de telles approximations analytiques qui vont être ensuite utilisées dans les différents calculs d'ouvrages qui vont suivre.

On sait que le domaine de résistance macroscopique exact $\mathbf{G}^{hom}$ est compris entre $\mathbf{G}^{\text{stat}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine}}$, mais sa position exacte reste inconnue. En revanche, l'écart relatif entre ces deux évaluations numériques est tout à fait quantifiable, comme on a pu le montrer au chapitre précédent. De la même façon, les écarts entre ces encadrements numériques et leurs approximations par l'intérieur $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et par l'extérieur $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$ peuvent également être quantifiés. Ces écarts sont uniquement dus à l'utilisation de la méthode d'approximation par un ensemble d'ellipsoïdes et dépendent notamment du nombre d'ellipsoïdes utilisés [Gueguin *et al.*, 2013b].

Au final, on a une chaîne d'inclusions de domaines au sein de laquelle se positionne le domaine de résistance macroscopique (voir Figure 8.2). En vue d'obtenir la meilleure définition possible de $\mathbf{G}^{hom}$, on cherche donc à réduire au maximum les valeurs des différents écarts précités.

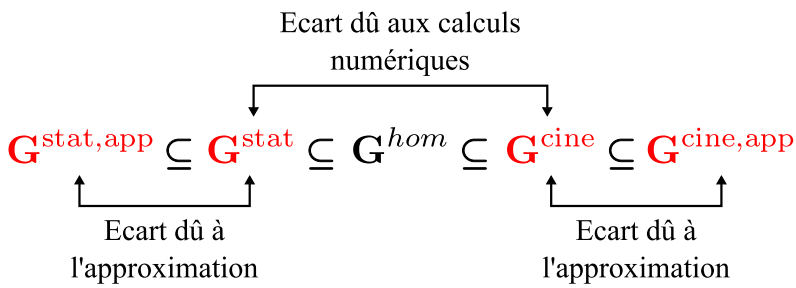


FIGURE 8.2 – Chaîne d'inclusions des différentes évaluations d'un domaine de résistance (en rouge : domaines évaluables).

8.1.2.2 Encadrement du chargement extrême de l'ouvrage homogénéisé

Nous allons ensuite utiliser les différentes approximations de $\mathbf{G}^{hom}$ pour évaluer le facteur de chargement extrême λ^+ pour différentes configurations d'ouvrages. Pour cela, on se sert des formulations des approches statique et cinématique du calcul à la rupture en les appliquant au problème concerné (voir annexe D). Les résultats obtenus sont notés λ^{s} pour le minorant du facteur de chargement extrême et λ^{c} pour son majorant. Compte tenu des relations d'inclusion des différents domaines, on obtient une série d'inégalités représentée sur la Figure 8.3.

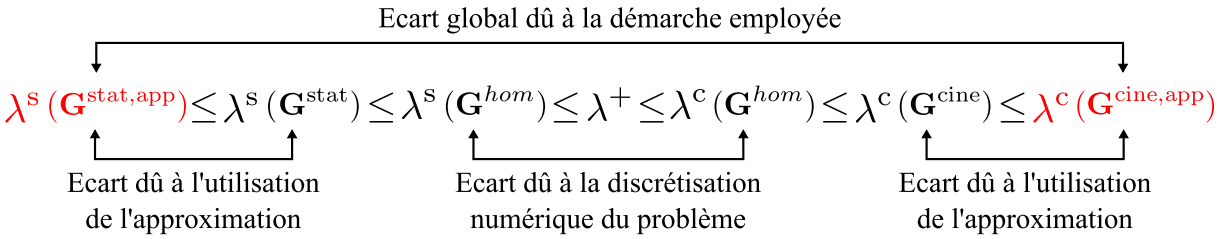


FIGURE 8.3 – Relations entre les différentes évaluations du facteur de chargement (en rouge : quantité évaluable).

Pour analyser la signification des résultats que l'on va faire apparaître dans la suite de ce chapitre, on peut déjà souligner que, même si l'on avait accès au critère de résistance macroscopique exact du sol renforcé, le fait d'utiliser une discrétisation plus ou moins fine du maillage lié à l'ouvrage crée un premier écart. En effet, le minorant numérique $\lambda^{\mathrm{s}}(\mathbf{G}^{hom})$ et le majorant numérique $\lambda^{\mathrm{c}}(\mathbf{G}^{hom})$ encadrent le facteur de chargement extrême avec une incertitude non nulle. L'écart entre ces deux évaluations n'est pas quantifiable puisque $\mathbf{G}^{hom}$ est inconnu. Néanmoins, on peut en avoir une idée pour un maillage donné en faisant le calcul pour un matériau obéissant à un critère isotrope de type Tresca ou Mohr-Coulomb.

Si l'on pouvait se servir directement de $\mathbf{G}^{\mathrm{stat}}$ et $\mathbf{G}^{\mathrm{cine}}$, on effectuerait une approche statique et une approche cinématique numériques sur l'ouvrage, en utilisant respectivement l'un et l'autre. On obtiendrait alors une encadrement du facteur de chargement extrême λ^+, pour lequel $\lambda^{\mathrm{s}}(\mathbf{G}^{\mathrm{stat}})$ serait un minorant et $\lambda^{\mathrm{c}}(\mathbf{G}^{\mathrm{cine}})$ un majorant.

Étant donné qu'aucun des minorants et des majorants de λ^+ que nous venons de citer n'est quantifiable, on utilise les approximations du domaine de résistance macroscopique pour obtenir un encadrement de ce facteur de chargement. On effectue séparément une approche statique numérique, utilisant $\mathbf{G}^{\mathrm{stat,app}}$, qui donne un minorant $\lambda^{\mathrm{s}}(\mathbf{G}^{\mathrm{stat,app}})$ et une approche cinématique, relative à $\mathbf{G}^{\mathrm{cine,app}}$, permettant d'évaluer un majorant $\lambda^{\mathrm{c}}(\mathbf{G}^{\mathrm{cine,app}})$. Par cette méthode rigoureuse, on détermine alors numériquement un intervalle global contenant λ^+.

8.2 Approximations des domaines de résistance macroscopiques des sols renforcés

Pour pouvoir mettre en œuvre la démarche qui vient d'être décrite sur différents calculs d'ouvrage, il faut donc tout d'abord passer par une étape d'approximation des différents critères avec la méthode expliquée dans l'annexe C. Dans cette section, nous allons aussi nous intéresser aux écarts relatifs entre les approximations par l'intérieur et par l'extérieur des domaines de résistance macroscopiques de différents types de sols renforcés, ce qui nous permettra de qualifier les performances de ces approximations.

On rappelle en préambule que tout critère de résistance peut se décrire de manière équivalente par sa fonction d'appui. Ainsi, on note $\pi^{\mathrm{stat,app}}$ la fonction d'appui relative à $\mathbf{G}^{\mathrm{stat,app}}$ et $\pi^{\mathrm{cine,app}}$ celle concernant $\mathbf{G}^{\mathrm{cine,app}}$. On quantifie donc l'écart relatif entre les deux approximations en évaluant le rapport $(\pi^{\mathrm{cine,app}} - \pi^{\mathrm{stat,app}})/\pi^{\mathrm{cine,app}}$ pour chaque configuration de renforcement.

On considère toujours que les inclusions de renforcement sont portées par la direction verticale $\underline{e}_1$ et que la direction $\underline{e}_2$ désigne une des directions horizontales, parallèle à un des plans de renforcement dans le cas des sols renforcés par tranchées croisées. De plus, on garde la même notation pour caractériser l'espace des taux de déformation $(D_{11}, D_{22}, 2D_{12})$, qui dépend donc des angles (γ, δ), où γ désigne l'orientation dans le plan (D_{11}, D_{22}) et δ est relié directement à la composante de cisaillement D_{12} (voir Figure 7.3). On représentera les écarts relatifs entre approximations en fonction de ces deux angles.

8.2.1 Cas des sols renforcés de type cohérent/cohérent

On traite tout d'abord le cas des sols cohérents renforcés par des matériaux purement cohérents, pouvant être introduits dans le sol initialement en place sous forme de colonnes ou de tranchées croisées. Les critères de résistance macroscopiques de ces sols renforcés ont été obtenus analytiquement dans le chapitre 4 et numériquement dans l'annexe B. Pour les deux géométries de renforcement, on choisit les caractéristiques suivantes :

$$\eta = 0.2\,,\ \frac{C_r}{C_s} = 20 \text{ et } \varphi_r = 0^\circ \tag{8.1}$$

Pour chaque configuration de renforcement, on effectue successivement l'approximation par l'intérieur de $\mathbf{G}^{\text{stat}}$ et l'approximation par l'extérieur de $\mathbf{G}^{\text{cine}}$ en utilisant une somme de 2 ellipsoïdes. Une fois les paramètres des ellipsoïdes déterminés par optimisation, en utilisant l'expression (C.8), on calcule les fonctions d'appui de ces domaines, notées respectivement $\pi^{\text{stat,app}}$ et $\pi^{\text{cine,app}}$, en fonction de l'angle δ (γ restant égal à $3\pi/4$).

8.2.1.1 Renforcement par colonnes

Sur la Figure 8.4, on représente l'écart relatif entre l'approximation par l'intérieur et par l'extérieur du critère macroscopique d'un sol renforcé par colonnes purement cohérentes.

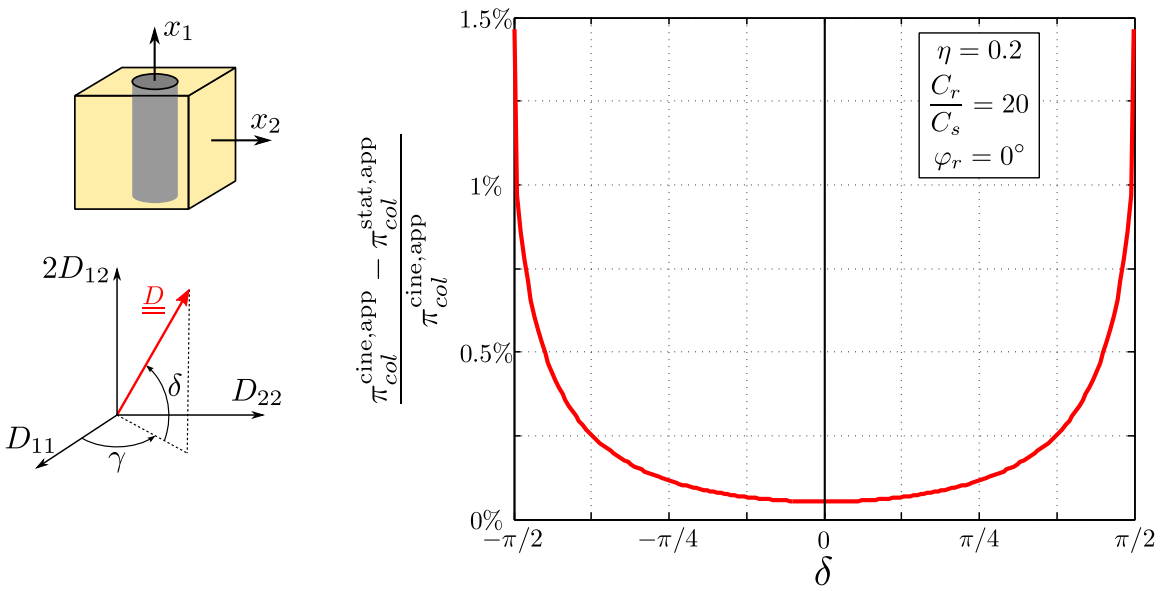


FIGURE 8.4 – Écart relatif entre les approximations du critère de résistance d'un sol cohérent renforcé par colonnes purement cohérentes.

En premier lieu, on note que cet écart relatif reste positif quel que soit δ, ce qui est un résultat attendu (et souhaité) étant donné les relations apparaissant sur la Figure 8.2 et que l'on observera bien sûr pour tous les couples d'approximations à venir.

L'écart relatif entre les deux approximations du domaine de résistance macroscopique vaut en moyenne 0.21%. Son maximum de 1.46% est atteint pour $\delta = \pm\pi/2$, ce qui

correspond à une sollicitation de cisaillement pur dans le plan (x_1, x_2). Ce faible écart de l'encadrement numérique confirme l'intérêt de l'utilisation de sommes d'ellipsoïdes pour approximer le domaine $\mathbf{G}^{hom}$. L'utilisation de plus de 2 ellipsoïdes pour ces approximations réduirait l'erreur moyenne mais augmenterait le temps des calculs de structures ultérieurs. Cela ne semble donc pas nécessaire, étant donné le faible écart relatif observé.

8.2.1.2 Renforcement par tranchées croisées

De la même façon, la Figure 8.5 fait apparaître l'écart relatif entre les approximations du critère de résistance macroscopique d'un sol renforcé par des tranchées croisées purement cohérentes. Pour cette configuration de renforcement, la valeur maximale prise par cet écart est égale à 4.32% et la moyenne sur toutes les directions pertinentes de taux de déformation vaut 0.52%.

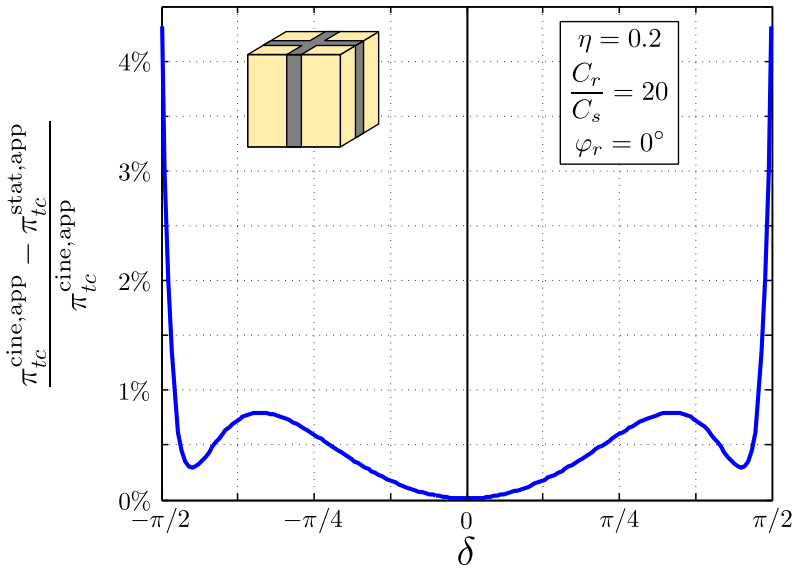


FIGURE 8.5 – Écart relatif entre les approximations du critère de résistance d'un sol cohérent renforcé par tranchées croisées purement cohérentes.

Encore une fois, l'analyse de l'écart relatif montre que les approximations effectuées fournissent un intervalle de confiance très resserré encadrant le domaine de résistance $\mathbf{G}_{tc}$. Pour les mêmes raisons que pour le renforcement par colonnes, on utilisera dans les calculs d'ouvrages à venir ces approximations numériques ne faisant intervenir que la somme de 2 ellipsoïdes.

8.2.2 Cas des sols renforcés de type cohérent/frottant

8.2.2.1 Renforcement par colonnes ballastées

On s'intéresse en premier lieu aux sols renforcés par *colonnes ballastées*. Pour cette technique de renforcement, les colonnes, réparties périodiquement suivant un maillage carré, sont constituées d'un matériau granulaire vibrocompacté ou de ballast [Priebe, 1995]. Ce renforcement est donc fortement frottant et de cohésion négligeable.

On cherche à déterminer les approximations du domaine de résistance d'un tel sol renforcé avec les caractéristiques usuelles suivantes :

$$\eta = 0.2\,,\ C_r = 0 \text{ et } \varphi_r = 40^\circ \tag{8.2}$$

On met tout d'abord en œuvre numériquement les approches statique et cinématique sur le problème auxiliaire sur la cellule de base, de la même façon que dans le chapitre précédent. En utilisant exactement la même démarche que celle expliquée dans la section 7.1, on obtient alors les domaines $\mathbf{G}^{\text{stat}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine}}$, respectivement minorant et majorant de $\mathbf{G}^{hom}_{col}$.

Ces deux domaines sont ensuite approximés en utilisant la même méthode que précédemment, cette fois avec une somme de 5 ellipsoïdes. Les coupes de l'approximation par l'intérieur $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et de l'approximation par l'extérieur $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$ sont reportées sur la Figure 8.6, pour $\Sigma_{12}/C_s = 0$ et $(\Sigma_{22} - \Sigma_{11})/C_s = 0$.

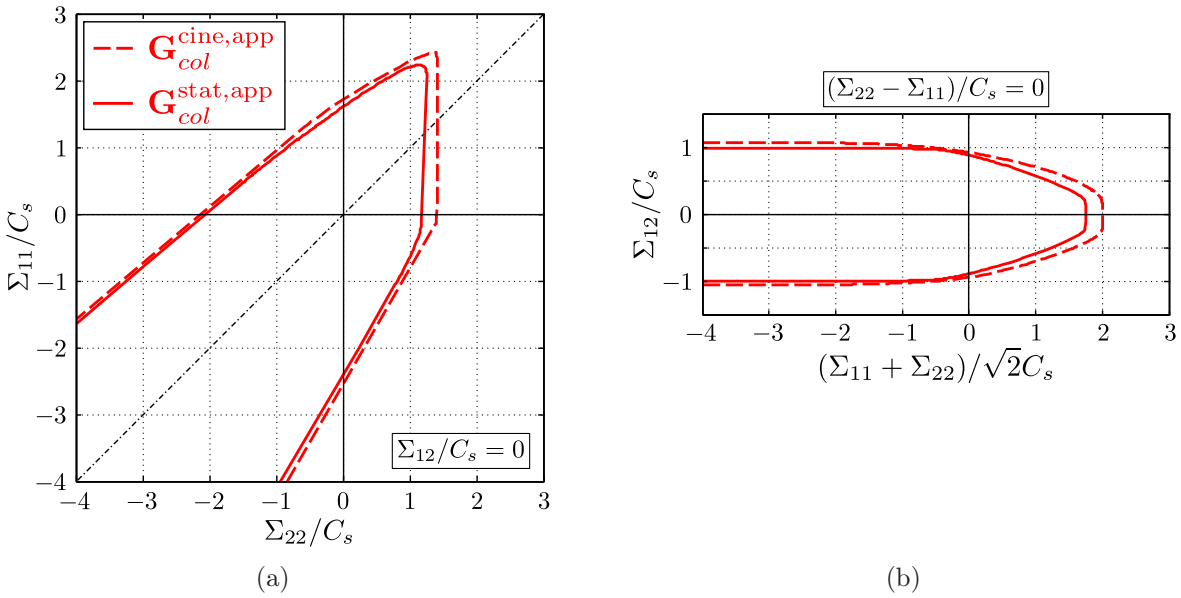


FIGURE 8.6 – Coupes des approximations par sommes de 5 ellipsoïdes du domaine de résistance d'un sol renforcé par colonnes ballastées ($\eta = 0.2$, $C_r = 0$ et $\varphi_r = 40^\circ$) : (a) $\Sigma_{12}/C_s = 0$, (b) $(\Sigma_{22} - \Sigma_{11})/C_s = 0$.

On sait que le critère de résistance macroscopique exact se trouve entre ces deux approximations numériques. On peut donc souligner que les remarques du chapitre précédent relatives au comportement macroscopique des sols renforcés par colonnes restent valables : pour une sollicitation de cisaillement pur dans les axes x_1 et x_2, la résistance du sol renforcé par colonnes ballastées est toujours limitée par la cohésion C_s, même lorsque la cohésion du renforcement est nulle.

De plus, bien que $C_r = 0$, le fait que la colonne soit entourée par le sol initialement en place apporte une résistance non nulle au sol renforcé pour une sollicitation de traction pure suivant la direction $\underline{e}_2$ [Jellali *et al.*, 2007, Hassen *et al.*, 2013].

Pour apprécier la performance des approximations cinématique et statique numériques, on représente sur la Figure 8.7 leur écart relatif en fonction de (γ, δ). On peut souligner au passage que, comme dans le chapitre précédent, bon nombre de directions du taux de déformation macroscopique ne conduisent pas à une charge limite. Sur cette figure, la partie colorée correspond donc au domaine de pertinence $\{\underline{\underline{D}}\}_{col}^{\text{cine}}$ pour un sol renforcé par colonnes ballastées.

On peut remarquer que, de façon générale, l'écart relatif entre $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$ n'est pas symétrique par rapport à l'axe $\delta = 0$, ce qui provient du fait que les approximations elles-mêmes ne respectent pas la condition de symétrie par rapport au plan $\Sigma_{12} = 0$. En pratique, lors des différentes optimisations permettant d'obtenir $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$, on n'impose effectivement pas cette condition particulière. De même, on ne privilégie aucune direction du taux de déformation lorsqu'on minimise la distance globale entre l'approximation et le domaine à approximer.

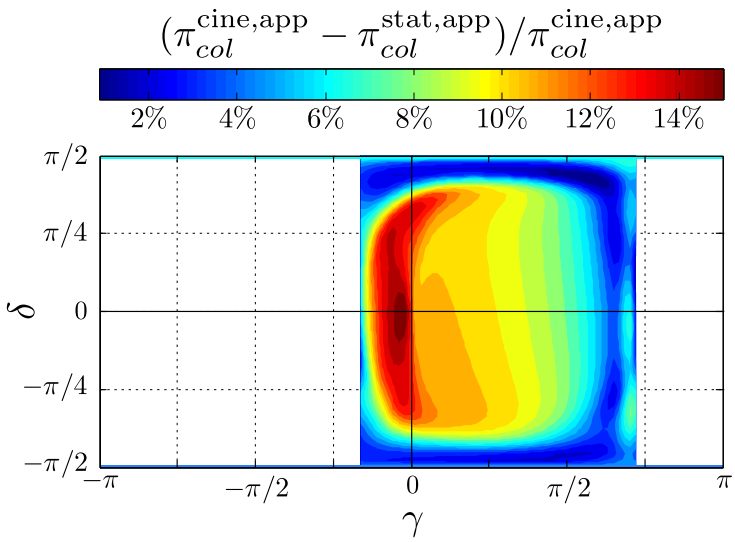


FIGURE 8.7 – Écart relatif entre $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$ pour un renforcement par colonnes ballastées ($\eta = 0.2$, $C_r = 0$ et $\varphi_r = 40°$).

Avec un ensemble de 5 ellipsoïdes, l'écart relatif entre les approximations par l'intérieur et par l'extérieur vaut en moyenne 8.03%. Il est égal au maximum à 15.71% et au minimum à 0.89%. L'intervalle de confiance entre $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$ peut donc être considéré comme suffisamment resserré pour ne pas avoir à augmenter le nombre d'ellipsoïdes utilisés pour ces approximations.

8.2.2.2 Renforcement par un matériau cohérent et frottant

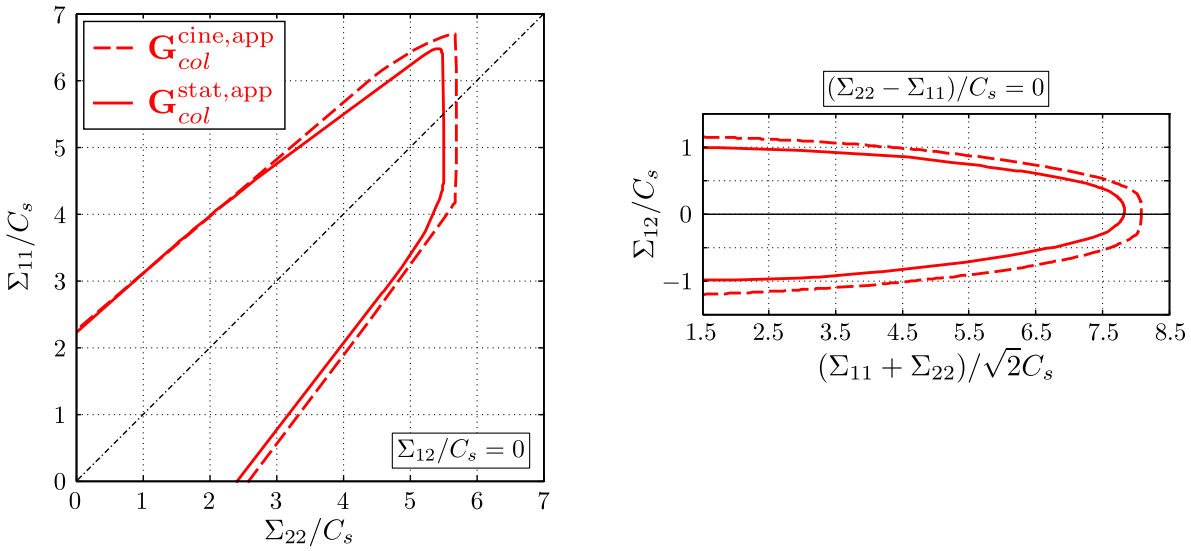
Le deuxième cas de sols renforcés par un matériau frottant est celui des inclusions traités à la chaux, que ce soit sous forme de colonnes ou de tranchées croisées. Les domaines de résistance macroscopiques de ces sols composites ont déjà été étudiés dans les sections 7.2 et 7.3. Pour les calculs d'ouvrage à venir, on garde les mêmes caractéristiques usuelles

pour ce genre de renforcement :

$$\eta = 0.2\,,\ \frac{C_r}{C_s} = 2 \text{ et } \varphi_r = 25^\circ \tag{8.3}$$

◇ **Cas des colonnes**

On encadre le domaine de résistance d'un sol renforcé par colonnes traitées à l'aide de deux ensembles issus de la somme de 5 ellipsoïdes. Deux coupes de ces domaines approximés sont représentées sur la Figure 8.6. L'intervalle les séparant contient à la fois l'encadrement ($\mathbf{G}^{\text{stat}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine}}$) dont ils sont issus et le domaine de résistance macroscopique exact $\mathbf{G}^{hom}_{col}$.



(a) (b)

FIGURE 8.8 – Coupes des approximations du domaine de résistance d'un sol renforcé par colonnes ($\eta = 0.2$, $C_r = 2C_s$ et $\varphi_r = 25^\circ$) : (a) $\Sigma_{12}/C_s = 0$, (b) $(\Sigma_{22} - \Sigma_{11})/C_s = 0$.

La Figure 8.9 fait apparaître l'écart relatif entre $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$ sur le domaine de pertinence déterminé numériquement pour cette configuration de renforcement. La moyenne de cet écart relatif vaut 5.81% et ses valeurs extrémales sont de 21.88% et 0.50%. Encore une fois, il ne semble pas nécessaire d'utiliser plus de 5 ellipsoïdes, sans risquer d'alourdir les calculs à venir.

En effet, l'approximation des domaines macroscopiques par une somme de 8 ellipsoïdes, par exemple, améliore bien l'écart relatif entre $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$. En revanche, il s'avère que cette amélioration n'apporte que peu à la qualité des encadrements des charges extrêmes des ouvrages qui sont présentés en sections 8.3 et 8.4.

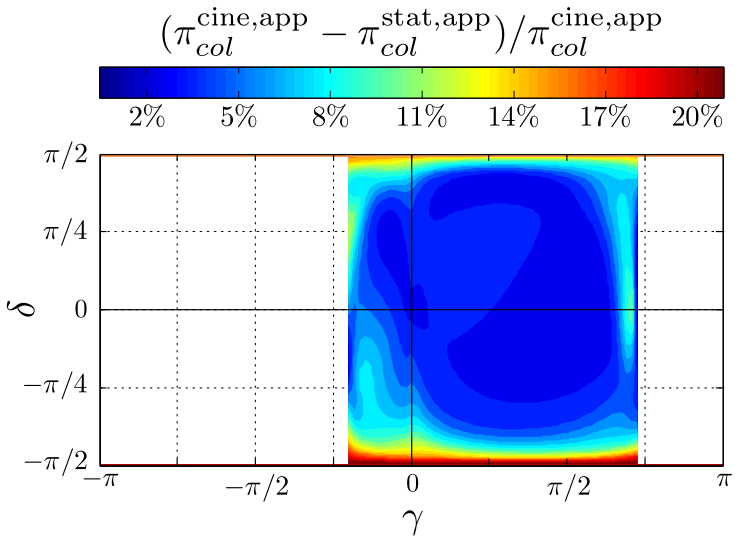
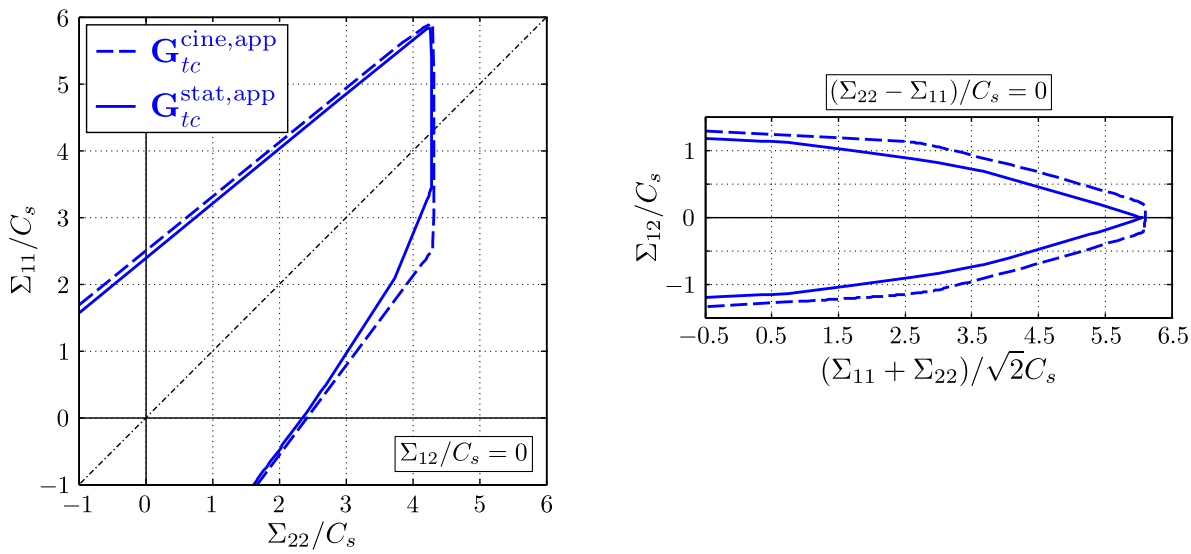


FIGURE 8.9 – Écart relatif entre $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$ pour un renforcement par colonnes ($\eta = 0.2$, $C_r = 2C_s$ et $\varphi_r = 25°$).

◇ Cas des tranchées croisées

On approxime enfin le domaine de résistance d'un sol renforcé par le même matériau (8.3) mais sous forme de tranchées croisées. Les approximations par l'intérieur et par l'extérieur, faisant toujours intervenir 5 ellipsoïdes, sont représentées dans des vues en coupe sur la Figure 8.10. L'intervalle entre $\mathbf{G}_{tc}^{\text{stat,app}}$ et $\mathbf{G}_{tc}^{\text{cine,app}}$ est notamment très faible pour une sollicitation de traction pure suivant la direction $\underline{e}_2$.



(a) (b)

FIGURE 8.10 – Coupes des approximations du domaine de résistance d'un sol renforcé par tranches croisées ($\eta = 0.2$, $C_r = 2C_s$ et $\varphi_r = 25°$) : (a) $\Sigma_{12}/C_s = 0$, (b) $(\Sigma_{22} - \Sigma_{11})/C_s = 0$.

On reporte sur la Figure 8.11 l'écart relatif entre ces deux approximations sur le

domaine de pertinence $\{\underline{\underline{D}}\}^{\text{cine}}$. Cet écart vaut en moyenne 3.90%, au maximum 18.19% et sa valeur minimale est quasi-nulle, à savoir 0.69%.

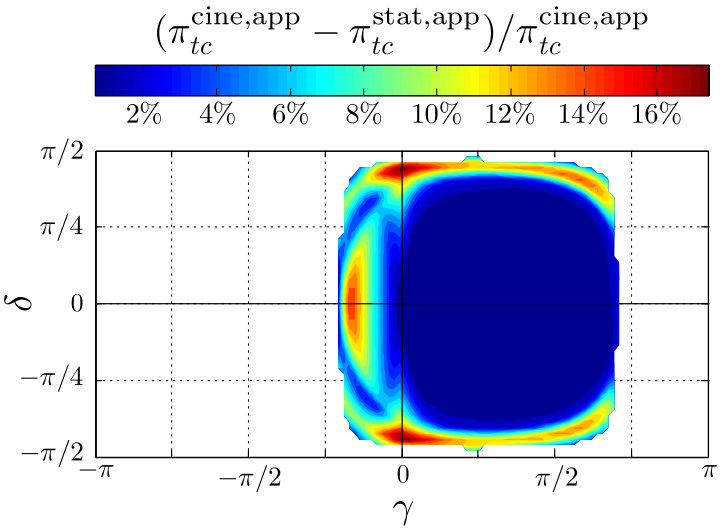


FIGURE 8.11 – Écart relatif entre $\mathbf{G}^{\text{stat,app}}$ et $\mathbf{G}^{\text{cine,app}}$ pour un renforcement par tranchées croisées ($\eta = 0.2$, $C_r = 2C_s$ et $\varphi_r = 25°$).

La fin de ce chapitre va être consacrée à l'utilisation des approximations des critères de ces différents types de sols renforcés. On précise que le domaine $\{\underline{\underline{D}}\}$ des directions pertinentes peut être décrit par cinq paramètres (voir annexe C).

L'implémentation des différents domaines approximés dans un calcul d'ouvrage numérique est donnée dans l'annexe D. On va se servir de ces outils numériques, et notamment de la "bibliothèque" de critères de résistance macroscopiques que nous venons de créer, pour déterminer des minorants et des majorants de la charge extrême pour différents types d'ouvrages en sols renforcés.

8.3 Application aux calculs de capacité portante sous charge inclinée de fondations renforcées

8.3.1 Données du problème

La première application que nous allons faire de ces différents domaines de résistance approximés est celle d'un problème de capacité portante d'un massif de sol renforcé soumis à l'action d'une charge inclinée appliquée par l'intermédiaire d'une semelle infiniment rigide. Cette semelle est filante suivant la direction $\underline{e}_3$ et sollicitée le long de son axe par une densité linéique de charge plus ou moins inclinée par rapport à l'axe vertical de renforcement (noté $\underline{e}_1$). En cela, on retrouve totalement le problème développé analytiquement dans le chapitre 5. On rappelle notamment que le problème peut être traité en déformations planes, dans le plan (x_1, x_2). On ajoute la prise en compte de la gravité, qui n'a pas d'influence sur la charge extrême pour des sols purement cohérents.

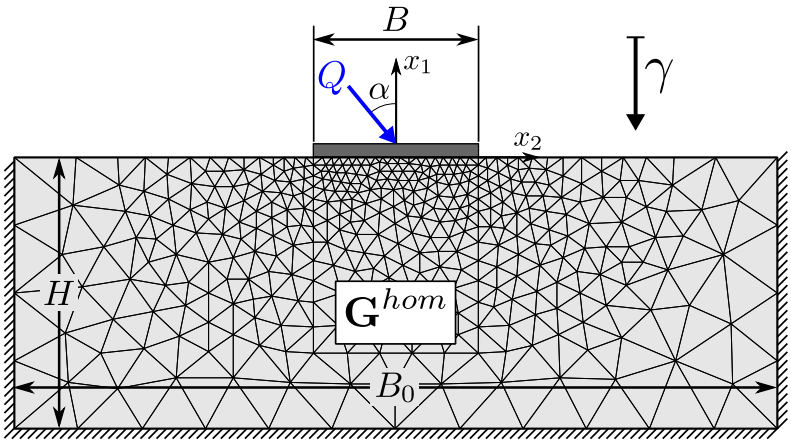


FIGURE 8.12 – Maillage retenu pour les approches statique et cinématique d'un problème de capacité portante sous charge inclinée.

Le problème considéré se réfère à un sol entièrement renforcé, dont le domaine de résistance macroscopique anisotrope correspond au domaine approximé, sur lequel repose la semelle de largeur B. Le but de cette section est de déterminer un encadrement du chargement extrême Q^+ (capacité portante), pour différentes configurations de renforcement.

La hauteur du massif en sol renforcé est notée H et B_0 représente sa largeur. Le maillage retenu pour les approches statique et cinématique est représenté sur la Figure 8.12. On impose des conditions d'encastrement au niveau des bords latéraux et du bord inférieur du milieu homogénéisé, soit :

$$\begin{aligned} \underline{U}(x_1 = -H, -B_0/2 \leq x_2 \leq B_0/2) = \underline{0} \\ \underline{U}(-H \leq x_1 \leq 0, x_2 = \pm B_0/2) = \underline{0} \end{aligned} \tag{8.4}$$

La surface supérieure se trouvant à l'extérieur de la semelle de fondation est libre d'efforts ($\underline{T}(x_1 = 0, |x_2| > B/2) = \underline{0}$). On suppose une adhérence parfaite entre la semelle et le sol renforcé.

L'équilibre en résultante de la semelle et en moment par rapport à l'axe Ox_3, avec le point O de coordonnées $(0, 0, 0)$, s'écrivent :

$$\begin{aligned} -Q\cos\alpha &= \int_{-B/2}^{B/2} -\underline{e}_1 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1)\,\mathrm{d}x_2 \\ Q\sin\alpha &= \int_{-B/2}^{B/2} \underline{e}_2 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1)\,\mathrm{d}x_2 \\ \int_{-B/2}^{B/2} -x_2\underline{e}_1 \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1)\,\mathrm{d}x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Pour l'approche cinématique, on examine alors des champs de vitesse, respectant la condition suivante :

$$\underline{U}(x_1 = 0, -B/2 \leq x_2 \leq B/2) = (\dot{\delta}_1 - \dot{\omega}x_2)\underline{e}_1 + \dot{\delta}_2\underline{e}_2 \tag{8.6}$$

où $\dot{\delta}_1$ et $\dot{\delta}_2$ désignent respectivement les vitesses de translation horizontale et verticale d'un point quelconque de l'axe de la semelle et $\dot{\omega}$ sa vitesse de rotation autour de son axe Ox_3.

À noter que les mécanismes utilisés au chapitre 5 correspondent à une simple translation de la semelle sans rotation. On peut penser que le fait de faire jouer une telle rotation permette d'améliorer les majorants cinématiques obtenus numériquement.

Pour toute la suite de cette section, on prend les caractéristiques géométriques suivantes pour le problème de capacité portante :

$$B_0 = 70\text{m},\ H = 25\text{m},\ \text{et}\ B = 15\text{m} \tag{8.7}$$

De plus, on considère que le matériau du sol initialement en place et celui constituant le renforcement ont un poids volumique identique γ, que nous prenons égal à 18kN/m^3.

8.3.2 Résultats des calculs numériques

Avant de traiter le cas des sols renforcés, on effectue les approches statique et cinématique numériques pour une semelle reposant sur un sol non renforcé. Les encadrements de $Q/(BC_s)$ qui en résultent sont représentés sur la Figure 8.13 en fonction de l'inclinaison α. On y fait apparaître également le majorant obtenu analytiquement dans le chapitre 5.

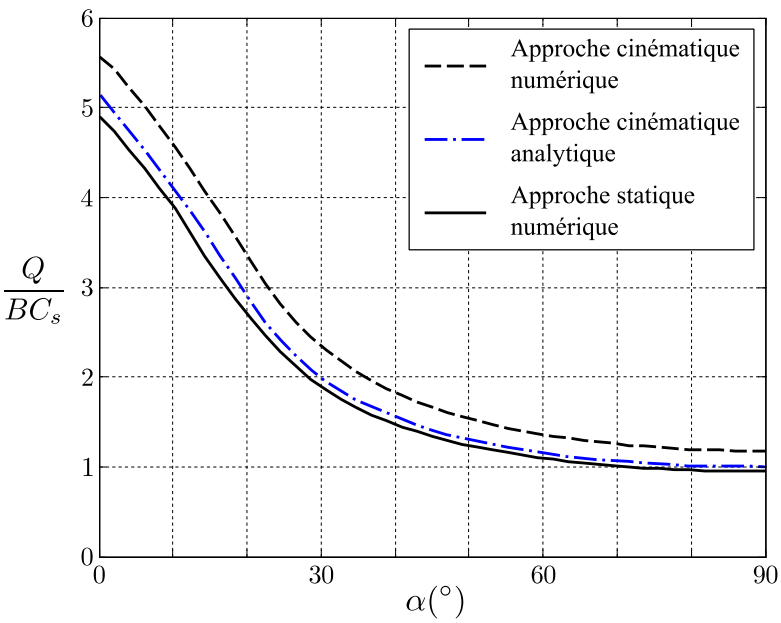


FIGURE 8.13 – Encadrements analytique et numériques de la capacité portante d'un sol non renforcé en fonction de l'inclinaison de la charge.

On peut tout d'abord remarquer que le minorant numérique (ligne continue) est très proche du majorant analytique (ligne mixte). En effet, quelle que soit l'inclinaison du chargement, l'écart relatif d'encadrement est quasi constant, environ égal à 4.7%. Le majorant obtenu numériquement (ligne tiretée) est lui toujours supérieur à celui

obtenu analytiquement. Toutefois, leur écart relatif varie entre 7.6%, lorsque la charge est verticale, et 14.8%, lorsque $\alpha = 90°$.

Il faut souligner ici que, bien que le maillage soit raffiné sous la semelle de fondation, avec le type d'éléments finis retenu pour l'approche cinématique, il est difficile d'obtenir la valeur exacte pour un chargement vertical [Makrodimopoulos et Martin, 2007]. Il a été prouvé que le fait de permettre des discontinuité de vitesse entre les éléments finis améliorait l'efficacité de l'approche cinématique numérique, pour une même finesse de maillage [Makrodimopoulos et Martin, 2008]. La comparaison avec le majorant analytique nous permet malgré tout de conclure sur les bonnes performances des formulations numériques.

Il convient également d'analyser l'écart relatif entre les résultats issus des deux approches numériques. Lorsque α est nul, l'écart est minimal et vaut 11.9%. La valeur maximale de 18.7% est atteinte pour une charge purement latérale. Il est important de garder en tête l'évolution de cet écart pour les résultats numériques à venir. En effet, on a pu voir en section 8.1.2.2 que, pour un maillage fixé, cet écart est inclus dans l'écart global entre minorant et majorant lorsque l'on utilise un domaine de résistance approximé.

8.3.2.1 Renforcement par inclusions en matériau cohérent

On analyse désormais le comportement de l'ouvrage lorsqu'il est renforcé par un matériau purement cohérent, sous forme de colonnes ou de tranchées croisées. Les domaines utilisés sont ceux présentés en section 8.2.1. Sur la Figure 8.14, on représente l'évolution des minorants et majorants pour la capacité portante de l'ouvrage en fonction de l'inclinaison α de la charge. En plus de l'encadrement de la charge extrême pour un ouvrage renforcé par colonnes (en rouge) ou tranchées croisées (en bleu), on fait apparaître les résultats numériques pour un ouvrage dont le matériau répondrait à un critère de résistance *moyen* (en vert), c'est-à-dire avec un angle de frottement nul et une cohésion isotrope valant $\overline{C} = \langle C \rangle = (1-\eta)C_s + \eta C_r$, soit $\overline{C} = 4.8C_s$ pour un rapport de résistance $C_r/C_s = 20$ et une fraction volumique de renforcement $\eta = 0.2$.

En premier lieu, on peut remarquer que ce critère *moyen* surestime largement la capacité portante du sol renforcé par colonnes. En effet, le rapport entre les résultats numériques pour les deux types de renforcement varie d'un facteur 1.15 à un facteur 4.8 en fonction de l'inclinaison de la charge. Comme on pouvait s'y attendre en observant les critères de résistance de ces matériaux, donnés au chapitre 4, le rapport entre l'encadrement issu des domaines approximés et celui relatif au domaine *moyen* est accentué lorsque la charge est fortement inclinée. La surestimation est moins importante dans le cas d'un renforcement par tranchées croisées puisque le rapport des encadrements de la capacité portante est compris entre 1.06 et 1.17. Cela est principalement dû au fait que la cohésion anisotrope d'un sol renforcé par tranchées croisées se rapproche de la cohésion isotrope moyenne (voir Figure 4.16).

La deuxième partie de l'analyse porte sur l'écart entre les encadrements numériques dans le cas des renforcements par colonnes ou par tranchées croisées. Pour la configuration en colonnes, l'écart relatif qui sépare le minorant et le majorant vaut entre 10.5% et 44%. Dans le cas des tranchées croisées, cet écart d'encadrement varie

entre 10.8% et 28%. Cet écart entre minorant et majorant trouve son explication dans les approximations des domaines. En effet, on a pu souligner dans la section précédente que les approximations obtenues étaient moins performantes pour une sollicitation de cisaillement pur. Cet écart d'approximation, cumulé à l'écart observé pour un ouvrage non renforcé lorsque la charge est fortement inclinée, mène à un encadrement moins resserré lorsque α est proche de 90°. En revanche, pour une charge verticale les écarts relatifs observés sont du même ordre que celui dans le cas non renforcé.

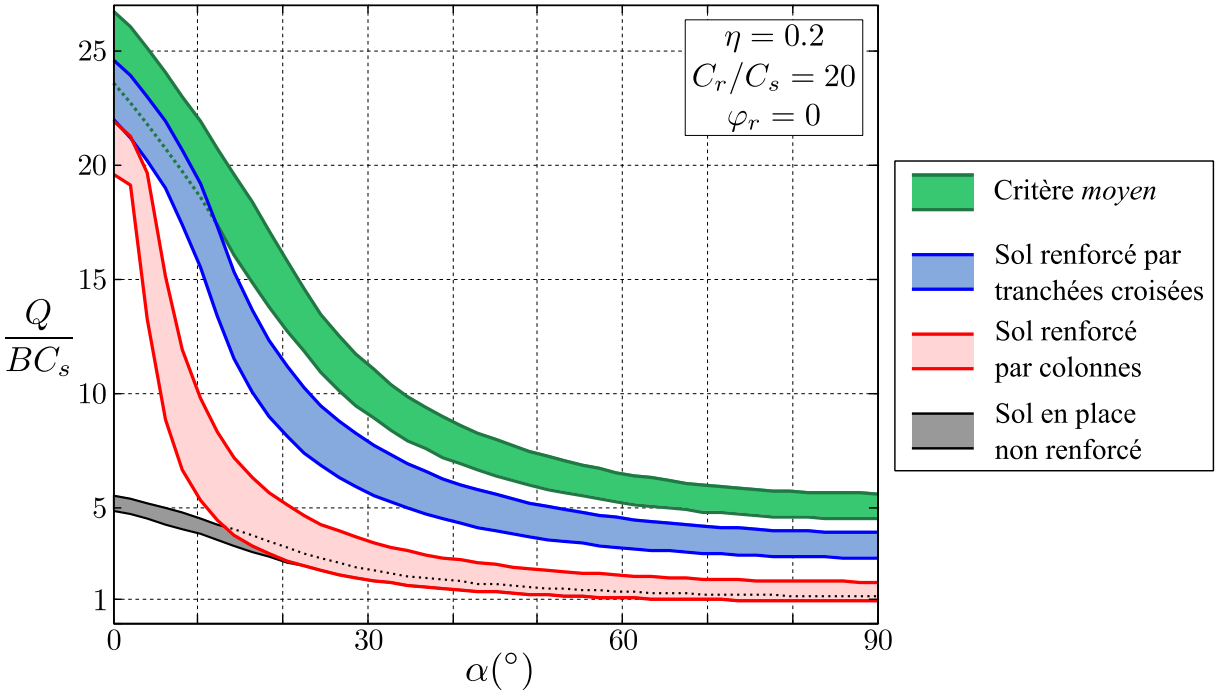


FIGURE 8.14 – Encadrements numériques de la capacité portante en fonction de l'inclinaison de la charge pour un renforcement purement cohérent.

Pour ne pas alourdir la Figure 8.14, on décide de ne pas faire apparaître les majorants analytiques obtenus pour ce problème au chapitre 5 (voir Figure 5.8). On peut tout de même vérifier la très bonne adéquation entre ces résultats analytiques et les encadrements numériques. L'écart relatif entre le minorant numérique et le majorant analytique ne dépasse pas 4.6% pour un renforcement par colonnes et 3.5% dans le cas des tranchées croisées. Le majorant numérique est toujours moins performant que l'analytique. Néanmoins le mécanisme de rupture qui en découle est proche de celui que nous avions retenu analytiquement (voir Figure 8.15).

La comparaison des différents encadrements confirme les résultats obtenus analytiquement. En effet, on s'aperçoit que le "fuseau" encadrant la capacité portante d'un sol renforcé par colonnes est supérieur à celui du cas non renforcé, notamment lorsque l'inclinaison de la charge n'est pas trop importante. Passé un certain angle d'inclinaison, le fait de renforcer le sol initialement en place n'apporte plus rien. En revanche, la capacité portante d'un sol renforcé par tranchées croisées est toujours plus importante que celle du cas non renforcé. Ainsi, pour un matériau de renforcement purement cohérent, il semble

bien plus avantageux, à fraction volumique égale, de disposer le renforcement sous forme de tranchées croisées.

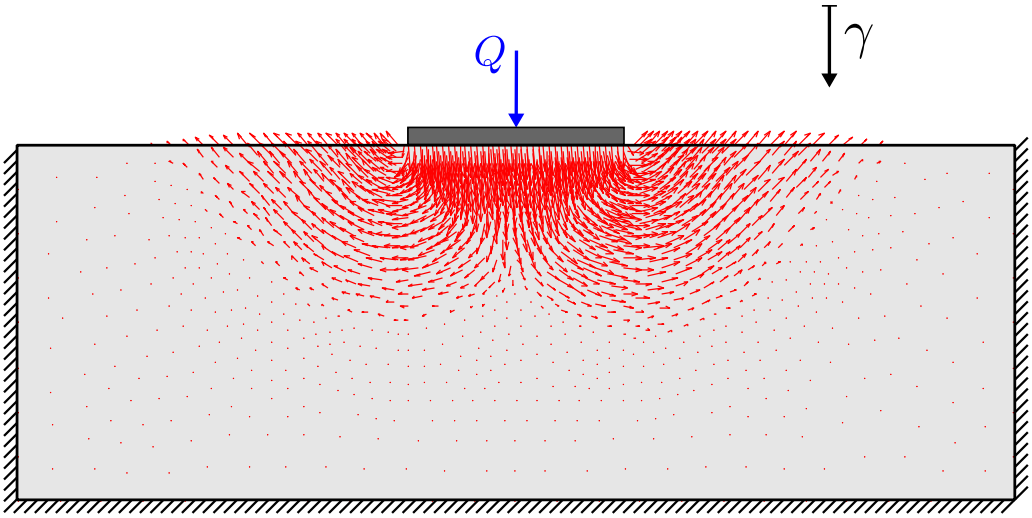


FIGURE 8.15 – Mécanisme de rupture associé à la capacité portante d'un sol renforcé par tranchées croisées purement cohérentes sous charge verticale.

8.3.2.2 Renforcement par colonnes ballastées

Le second type de renforcement que nous allons analyser est le renforcement par colonnes ballastées, c'est-à-dire avec un matériau de renforcement purement frottant. On utilise pour cela les deux domaines de résistance approximés de la section 8.2.2.1. On fait apparaître sur la Figure 8.16 le minorant et le majorant de la capacité portante qui en résultent (en rouge). On rappelle les résultats numériques obtenus pour le sol non renforcé (en noir) et ceux utilisant une cohésion et un angle de frottement moyens (en vert). Avec les caractéristiques mécaniques retenues, le critère *moyen*, utilisé classiquement pour les dimensionnements des ouvrages, est un critère de type Mohr-Coulomb avec $\overline{C} = 0.8C_s$ et $\overline{\varphi} = 9.5°$.

On peut d'ores et déjà remarquer que, comme on s'y attendait, l'efficacité du renforcement du sol par colonnes ballastées est maximale lorsque le chargement est uniquement vertical. Dans ce cas, la capacité portante est multipliée par un facteur compris entre 2.3 et 2.8. En revanche, lorsque α augmente, le renforcement apporte de moins en moins de résistance supplémentaire à l'ouvrage. Encore une fois, cela s'explique par le fait que la résistance en cisaillement longitudinal du sol renforcé par colonnes est limitée par la cohésion du sol initialement en place C_s.

Il faut également noter que le critère *moyen* semble relativement bien permettre d'évaluer la capacité portante du sol renforcé par colonnes ballastées lorsque la charge est proche de la position verticale. En effet, lorsque α est nul, l'écart relatif entre les deux minorants concernés est de 17.5%, tout comme celui entre les deux majorants. On retrouve une bonne adéquation entre les résultats lorsque la semelle est sollicitée par un chargement purement horizontal, puisque l'écart relatif maximal est de 14%. En revanche, pour α compris entre 5° et 25°, le domaine *moyen* a tendance à surestimer la

capacité portante du sol renforcé par colonnes ballastées, l'écart relatif entre les deux valant jusqu'à 35%. On observe donc ici que, contrairement au cas cohérent/cohérent, le dimensionnement d'un ouvrage en utilisant un critère *moyen* ne conduit pas à un résultat ayant un statut précis par rapport au résultat "exact". Il peut être plus ou moins proche de celui-ci, pour une même structure, suivant la sollicitation appliquée.

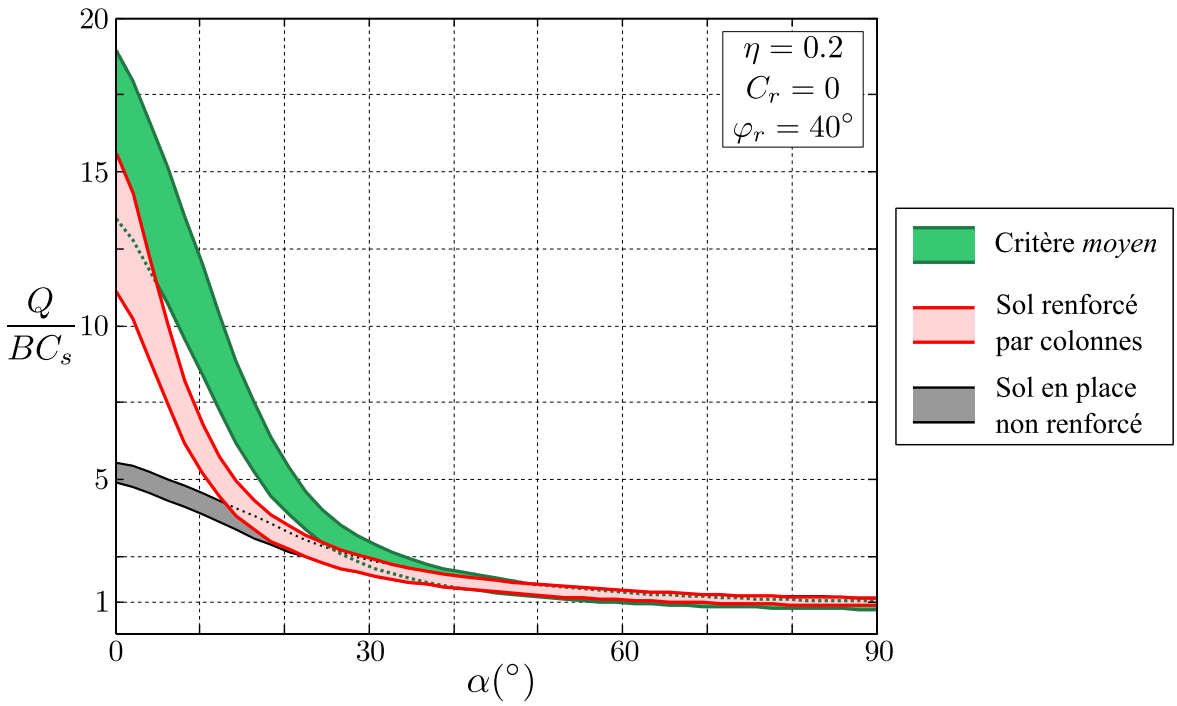


FIGURE 8.16 – Encadrements numériques de la capacité portante en fonction de l'inclinaison de la charge dans le cas de colonnes ballastées.

Enfin, il convient de commenter l'écart relatif entre le minorant et le majorant obtenus numériquement pour le cas du sol renforcé par colonnes ballastées. À l'écart déjà observé dans le cas du sol non renforcé, qui peut s'élever jusqu'à 18.7%, s'ajoute l'écart dû aux différentes étapes de la méthode d'approximation du critère exact. Ainsi, lorsque le chargement est purement vertical, cet écart relatif total entre minorant et majorant vaut 28.7%, tandis qu'il est égal à 20.7% lorsque l'inclinaison de la charge vaut 90°. Il est logique que cet intervalle soit plus ou moins resserré puisque les champs de contrainte ou de taux de déformation qui interviennent sont différents selon l'inclinaison. Or, on a pu voir sur la Figure 8.7 que l'écart relatif entre les domaines approximant le domaine de résistance exact varie suivant la sollicitation.

8.3.2.3 Renforcement par inclusions en matériau cohérent et frottant

On s'intéresse enfin au cas des sols renforcés par des matériaux cohérents et frottants, dont les domaines de résistance macroscopiques obtenus numériquement au chapitre 7 ont été approximés à la section 8.2.2.2. Tout d'abord, sur la Figure 8.17, on analyse la capacité portante en fonction de l'inclinaison pour un sol renforcé par colonnes (en rouge) et pour un critère *moyen* (en vert), de type Mohr-Coulomb avec un angle de

frottement $\overline{\varphi} = 5.3°$ et une cohésion $\overline{C} = 1.2C_s$. Les domaines de résistance macroscopiques de ces deux milieux homogènes équivalents avaient été comparés sur la Figure 7.10.

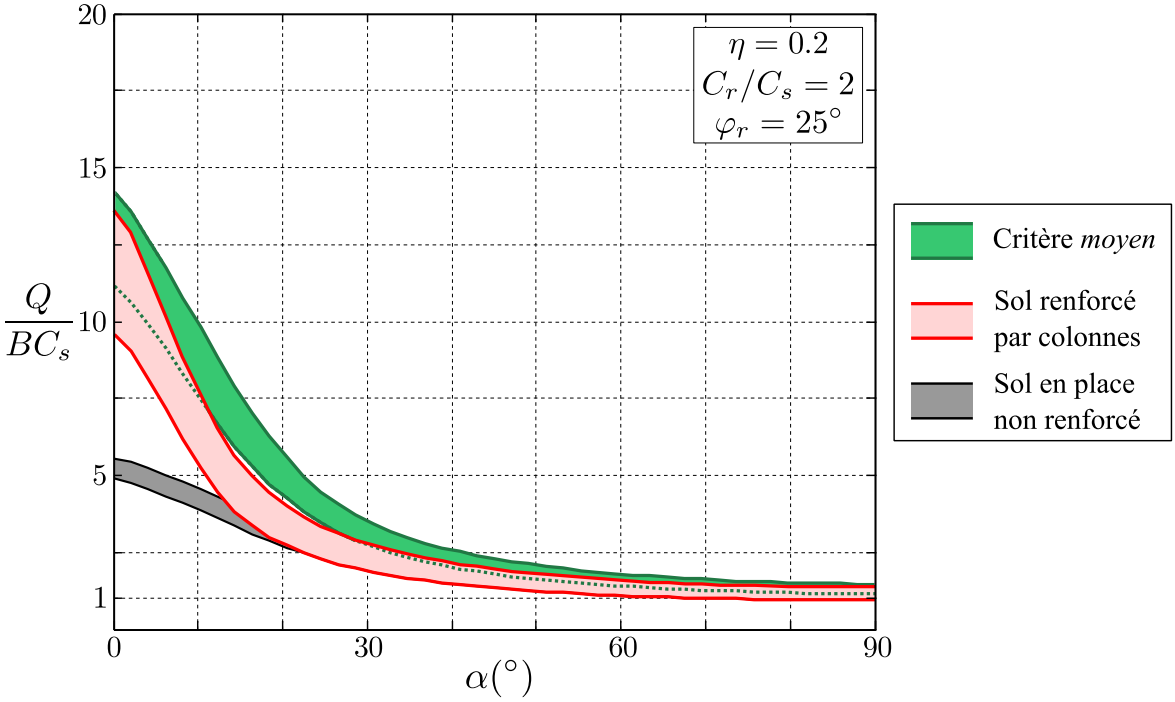


FIGURE 8.17 – Encadrements numériques de la capacité portante en fonction de l'inclinaison de la charge dans le cas de colonnes cohérentes et frottantes.

Pour cette configuration de renforcement, on s'aperçoit que le critère *moyen* conduit à une bonne évaluation de la capacité portante d'un sol renforcé par colonnes. Ainsi, pour une charge purement verticale, l'écart relatif entre les deux minorants et les deux majorants numériques s'élève respectivement à 14.1% et 4.2%. L'écart entre les deux majorants s'annule presque lorsque le chargement est horizontal, sollicitation pour laquelle l'écart entre le minorant issu du critère *moyen* et celui issu du domaine approximé par l'intérieur, vaut 16.9%.

L'écart séparant le minorant et le majorant de la capacité portante du sol renforcé par colonnes est évalué à environ 32% pour les différentes inclinaisons de la charge. À l'instar de la configuration de renforcement précédente, cet écart d'encadrement de la charge extrême est en partie dû aux approximations de critère. On a toutefois une idée assez précise de l'amélioration à attendre de ce type de renforcement.

On compare justement sur la Figure 8.18 la capacité portante d'un sol renforcé par colonnes (en rouge) ou par tranchées croisées (en bleu), toutes les autres caractéristiques étant égales par ailleurs. On rappelle que les domaines de résistance macroscopiques de ces deux configurations avaient été comparés à la fin du chapitre 7.

Pour une charge verticale, on peut s'attendre à un facteur d'amélioration par rapport au cas non renforcé compris entre 1.95 et 2.44 pour un renforcement par colonnes et à un facteur d'amélioration variant de 2.42 à 3.15 pour une configuration en tranchées

croisées. Le fait de renforcer le sol par des tranchées croisées procurerait un léger avantage par rapport au renforcement par colonnes lorsque la charge quitte la position verticale. Toutefois, lorsque α vaut 90°, il n'y a pas d'amélioration de la résistance pour la configuration de renforcement par colonnes et très peu pour celle par tranchées croisées (facteur d'amélioration ~ 1.03).

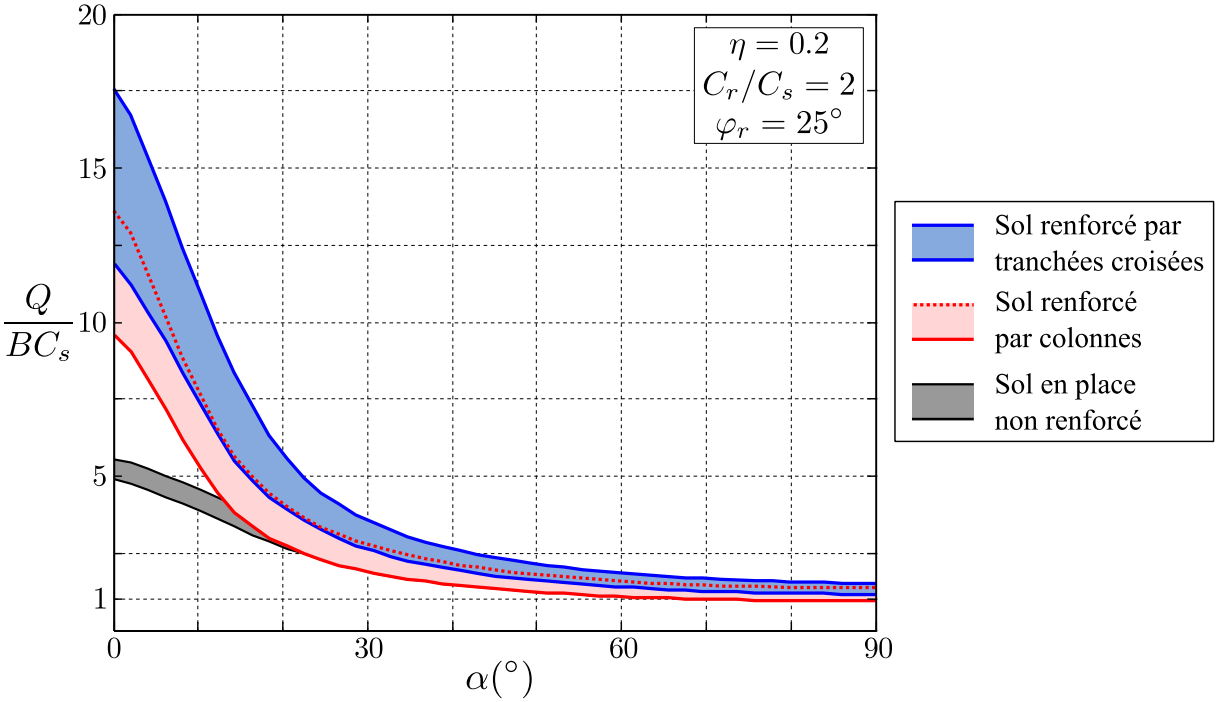


FIGURE 8.18 – Comparaison de la capacité portante en fonction de l'inclinaison de la charge pour différentes techniques de renforcement par un matériau cohérent et frottant.

Comme pour le renforcement par colonnes, l'écart entre les résultats issus de l'approche statique et de l'approche cinématique n'est pas nul pour un renforcement par tranchées croisées. Ainsi, pour $\alpha = 0$, l'écart relatif entre minorant et majorant numérique vaut 32.2% et il décroît ensuite jusqu'à atteindre 24.0%, lorsque la charge s'appliquant sur la semelle de fondation est purement horizontale.

Afin de compléter l'analyse du comportement d'un sol renforcé par tranchées croisées cohérentes et frottantes, on représente le mécanisme de rupture optimal pour un chargement vertical de la semelle de fondation (voir Figure 8.19). On constate alors par comparaison avec la Figure 8.15 que ce mécanisme diffère sensiblement de celui obtenu lorsque le renforcement est purement cohérent. En effet, celui observé ici se développe moins en profondeur, la prise en compte de la gravité amplifiant le caractère superficiel de ce mécanisme [Gueguin *et al.*, 2013b]. Le mécanisme fait intervenir un basculement de la semelle de fondation.

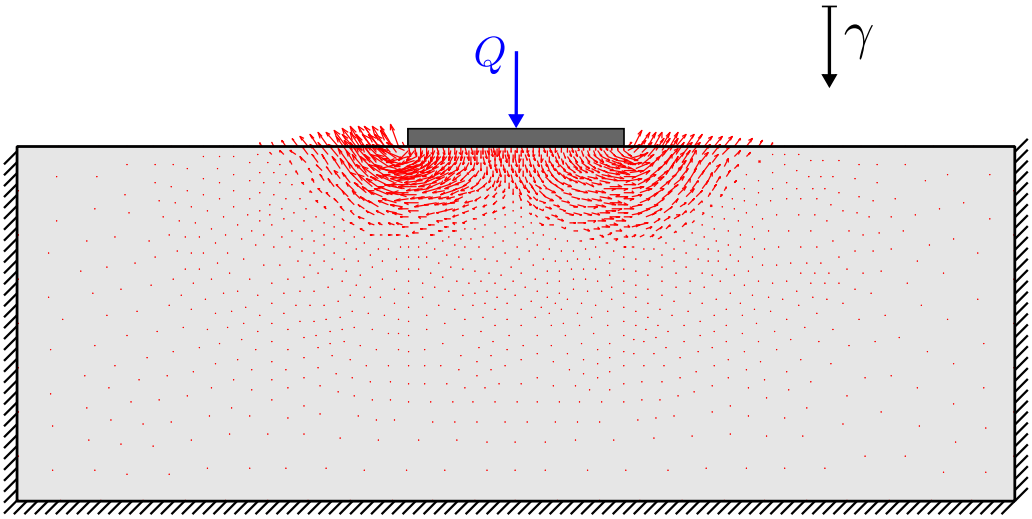


FIGURE 8.19 – Mécanisme de rupture associé à la capacité portante d'un sol renforcé par tranchées croisées cohérentes et frottantes sous une charge verticale.

8.3.3 Conclusions sur la capacité portante des sols renforcés

Pour le problème de capacité portante d'un sol purement cohérent soumis à une charge inclinée, on a pu constater que, lorsque le matériau de renforcement est purement cohérent, le fait d'utiliser une configuration en tranchées croisées était plus avantageux que le renforcement par colonnes. En revanche, l'avantage n'est pas aussi important lorsque le matériau de renforcement est à la fois cohérent et frottant. Dans ce cas, les deux techniques ont un apport plus prononcé lorsque la charge est verticale et quasiment nul si cette charge est purement horizontale.

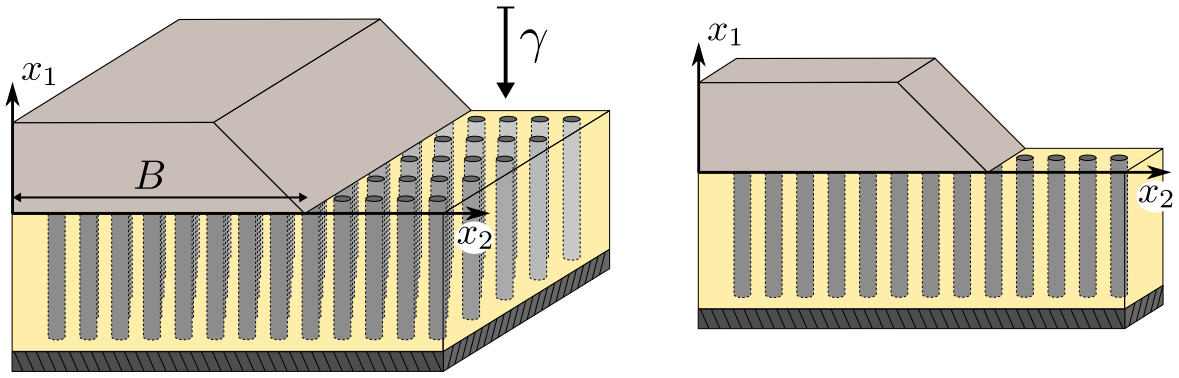
On a pu voir également que pour ce type d'ouvrage, les critères *moyens* correspondaient mieux au comportement du renforcement par tranchées croisées qu'à celui par colonnes. L'écart entre la résistance de l'ouvrage renforcé par colonnes et la résistance relative au critère *moyen* est notamment important lorsque le matériau de renforcement est fortement cohérent. La méthode de dimensionnement consistant à prendre un critère isotrope dont les caractéristiques sont les moyennes pondérées des caractéristques des différents composants doit donc être utilisée avec la plus grande précaution puisqu'elle peut mener à des écarts importants par rapport à la solution "exacte", ce qui sera également observé dans la prochaine section.

Enfin, il est intéressant de comparer les résultats pour un ouvrage renforcé par colonnes ballastées à ceux obtenus pour un ouvrage renforcé par des colonnes cohérentes et frottantes, avec un angle de frottement plus faible que celui des colonnes ballastées. Pour ces deux configurations de renforcement, à fraction volumique égale, il semble plus avantageux d'utiliser un matériau de renforcement sans cohésion mais ayant un angle de frottement plus grand. En effet, lorsque la charge est purement verticale, la capacité portante est plus forte pour la technique de renforcement par colonnes ballastées. En revanche, lorsque cette charge est fortement inclinée, les deux techniques s'avèrent aussi peu efficaces l'une que l'autre pour améliorer la résistance de l'ouvrage par rapport au cas non renforcé.

8.4 Analyse de la stabilité d'un remblai reposant sur un sol renforcé

8.4.1 Position du problème

Le second exemple d'analyse de stabilité d'ouvrage que l'on traite est celui d'un remblai reposant sur un sol renforcé par l'une ou l'autre des techniques de renforcement étudiées (voir Figure 8.20(a) pour le renforcement par colonnes). On suppose que ce talus est infini suivant une direction horizontale et que le sol est infiniment renforcé suivant cette même direction, notée $\underline{e}_3$ ici. Ainsi, à l'instar de l'exemple précédent, le problème initial peut se ramener à l'étude d'une tranche d'ouvrage comprise entre deux plans parallèles au plan (x_1, x_2), comme indiqué sur la Figure 8.20(b), des conditions de type contact lisse étant imposées sur ces deux plans.



(a) (b)

FIGURE 8.20 – Problème de stabilité de remblai sur sol renforcé.

La longueur de la base du remblai dans le plan (x_1, x_2) est notée B et sa hauteur H. Le seul chargement appliqué à cet ouvrage est son poids propre. On fait ici l'hypothèse que les poids volumiques des matériaux constituant le talus, le sol initialement en place et le matériau de renforcement sont identiques et tous égaux à γ. La stabilité de cet ouvrage est alors gouvernée par le *facteur de stabilité* adimensionnel $\gamma H/C_s$. Pour assurer la stabilité de l'ouvrage, ce facteur doit être inférieur à un facteur extrême, que nous allons chercher à encadrer par une approche cinématique et une approche statique.

Le remblai est constitué d'un matériau purement frottant, d'angle de frottement ϕ, et sa pente forme un angle Θ avec l'axe vertical de renforcement $\underline{e}_1$. On note h la hauteur de sol renforcé et B_0 sa largeur. On considérera successivement les cas où le matériau de renforcement est purement cohérent, purement frottant ou cohérent/frottant.

Il paraît encore une fois très difficile et même impossible de résoudre le problème par une méthode de résolution directe, du fait des hétérogénéités de l'ouvrage. On remplace donc la partie occupée par le sol renforcé par un milieu homogène équivalent. Le problème peut alors être traité en déformations planes dans le plan (x_1, x_2). On discrétise alors l'ouvrage dans ce plan par des éléments finis (voir Figure 8.21) et on effectue les deux approches du calcul à la rupture de façon numérique. En plus du chargement gravitaire,

on impose au modèle des conditions d'encastrement sur les bords latéraux et inférieur du maillage.

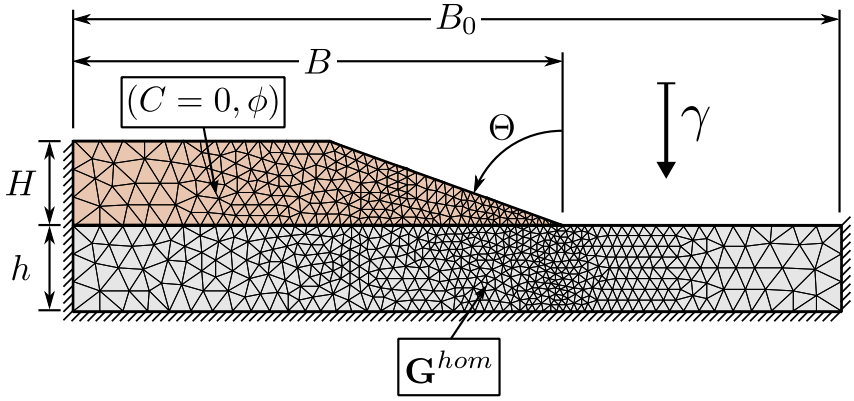


FIGURE 8.21 – Maillage retenu pour les approches statique et cinématique d'un problème de stabilité de remblai sur sol renforcé.

Le remblai étant constitué d'un matériau purement frottant (non compacté), on considère comme application numérique le cas où :

$$\phi = 30^\circ \tag{8.8}$$

et on prend les caractéristiques géométriques suivantes pour l'ouvrage :

$$B_0 = 90\text{m},\ H = h = 10\text{m},\ B = 57\text{m et } \Theta = 70^\circ \tag{8.9}$$

8.4.2 Comparaison des différentes techniques de renforcement

On détermine tout d'abord de façon numérique un minorant et un majorant pour le facteur de stabilité du remblai reposant sur un sol non renforcé. On obtient alors que la valeur extrême de $\gamma H/C_s$ est comprise entre 6.27 et 6.45, soit un écart relatif de 2.8%, bien meilleur que dans le problème de capacité portante. On cherche également à confronter cet encadrement à un résultat issu d'une procédure élastoplastique numérique, menée avec le logiciel Plaxis [Brinkgreve et Vermeer, 1999]. Avec des caractéristiques géométriques et matérielles identiques, on évalue ce facteur de chargement extrême comme étant égal à 6.28, qui est bien compris dans l'intervalle précité. Il convient de souligner que les calculs numériques menant à l'obtention du minorant et du majorant s'effectuent en quelques secondes, là où il faut plusieurs minutes pour procéder au calcul élastoplastique. On cherche donc maintenant à comparer ces valeurs dans le cas non renforcé aux résultats numériques obtenus en présence de renforcement.

8.4.2.1 Renforcement par un matériau cohérent

En premier lieu, on effectue les calculs numériques pour un renforcement du sol par un matériau purement cohérent, sous forme de colonnes (en rouge sur la Figure 8.22) ou de tranchées croisées (en bleu). Les résultats obtenus dans le cas non renforcé sont rappelés ici (en noir). On y ajoute les encadrements et l'évaluation issue d'un

calcul élastoplastique (en vert) dans le cas où le milieu homogène équivalent correspond à un critère de résistance *moyen*, de type Tresca avec une cohésion $\overline{C} = \langle C \rangle = 4.8C_s$.

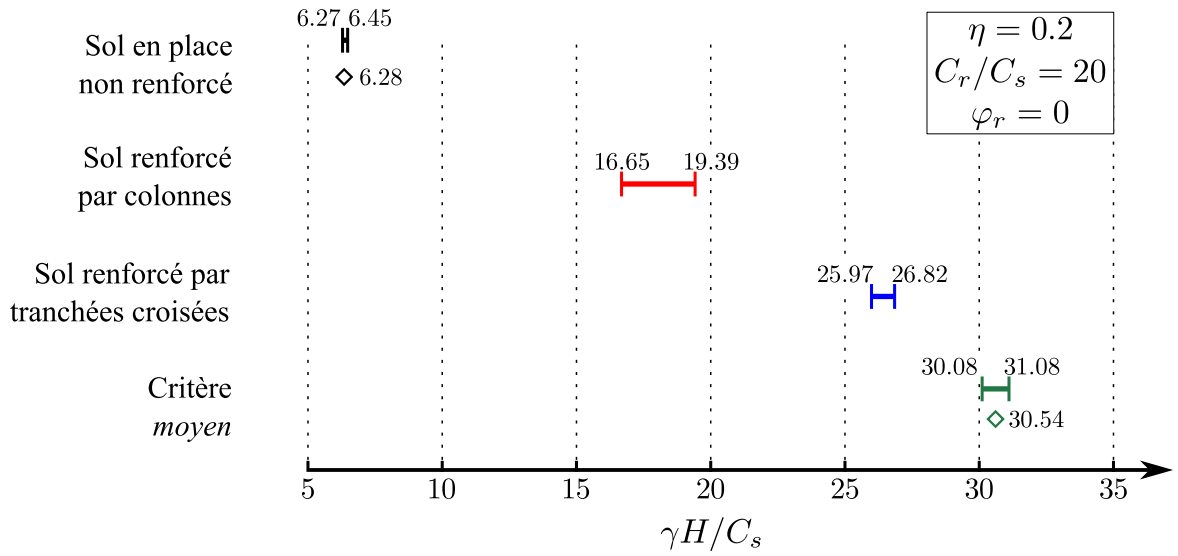


FIGURE 8.22 – Encadrements et évaluations élastoplastiques (puces) pour le facteur de stabilité d'un talus reposant sur un sol renforcé par un matériau purement cohérent.

Si l'on compare le minorant et le majorant obtenus pour le renforcement par colonnes à ceux issus du critère *moyen*, on s'aperçoit que ce dernier surestime d'un facteur 1.6 à 1.8 le facteur de stabilité extrême "exact". Cette remarque avait déjà été faite sur ce même type d'ouvrage par [Jellali *et al.*, 2011], dans le cadre d'une approche cinématique analytique. Cette méthode de dimensionnement approchée donne un résultat également supérieur à celui déterminé dans le cas d'un renforcement par tranchées croisées, mais dans une moindre mesure. On constate au passage la bonne adéquation entre le résultat élastoplastique et l'encadrement numérique lorsqu'on utilise un critère *moyen*.

En ce qui concerne le renforcement par colonnes, on peut considérer qu'il améliore la résistance de l'ouvrage d'un facteur 2.7 à 3.0 par rapport au cas non renforcé. Cette amélioration est plus prononcée lorsque le matériau de renforcement est introduit sous forme de tranchées croisées, puisque le facteur de stabilité est multiplié par environ 4.1. Dans les deux cas, l'encadrement numérique de la charge extrême est relativement précis, puisque l'écart relatif entre minorant et majorant vaut 14.1% pour un renforcement par colonnes et 3.2% pour la configuration en tranchées croisées.

La bonne performance de l'ouvrage renforcé par tranchées croisées peut trouver son explication dans le mécanisme de rupture mis en jeu (voir Figure 8.23). En effet, dans ce cas comme dans celui du renforcement par colonnes ou du sol non renforcé, ce mécanisme sollicite une grande partie du sol en cisaillement. Or, on a déjà eu l'occasion d'indiquer auparavant que la configuration en tranchées croisées améliore la résistance macroscopique du sol initialement en place sous cette sollicitation, là où le renforcement par colonnes s'avère inefficace.

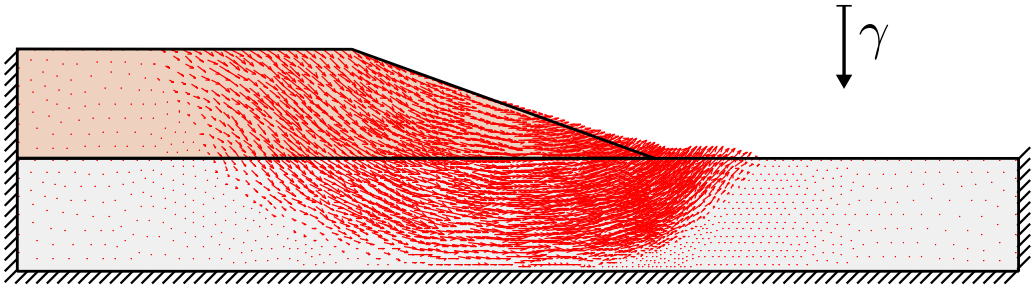


FIGURE 8.23 – Mécanisme de rupture associé à la stabilité d'un talus reposant sur un sol renforcé par tranchées croisées purement cohérentes.

8.4.2.2 Renforcement par des colonnes ballastées

La deuxième technique de renforcement étudiée est celle des colonnes ballastées. Sur la Figure 8.24, on représente le minorant et le majorant déterminés numériquement en utilisant les domaines de résistance approximés de la section 8.2.2.1 (en rouge). Les résultats obtenus pour un critère *moyen* (avec $\overline{C} = 0.8C_s$ et $\overline{\varphi} = 9.5°$) y figurent également (en vert), ainsi que ceux relatifs au cas non renforcé (en noir).

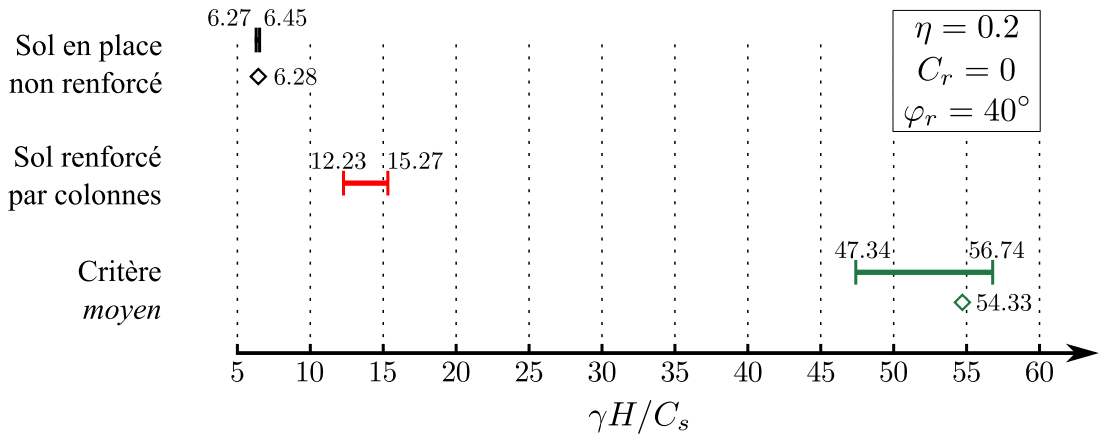


FIGURE 8.24 – Encadrements et évaluations élastoplastiques (puces) pour le facteur de stabilité d'un talus reposant sur un sol renforcé par colonnes ballastées.

On constate une nouvelle fois que l'utilisation du domaine de résistance *moyen* amène à surestimer le facteur de stabilité extrême du sol renforcé par colonnes. En effet, il y a ici un facteur multiplicatif proche de 3.8 entre cette méthode de dimensionnement approchée et la solution obtenue avec le critère approximé [Gueguin *et al.*, 2014a]. Contrairement au cas de la capacité portante traitée dans la section précédente, le critère *moyen* semble très largement surestimer la valeur de chargement extrême pour le problème du talus reposant sur un sol renforcé.

En matière de gain de résistance de l'ouvrage renforcé par colonnes ballastées par rapport au cas non renforcé, le facteur de stabilité est multiplié par un facteur 1.95 à 2.36 en présence de renforcement. De plus, l'encadrement obtenu est relativement resserré puisque l'écart entre le minorant et le majorant s'élève à un peu moins de 20%. Cela

donne donc du crédit à un tel résultat.

Il est intéressant de remarquer que le mécanisme de rupture développé est alors relativement différent de celui observé pour le cas du sol non renforcé. Celui-ci se développe dans la partie supérieure de la zone de sol renforcé, comme l'indique la Figure 8.25.

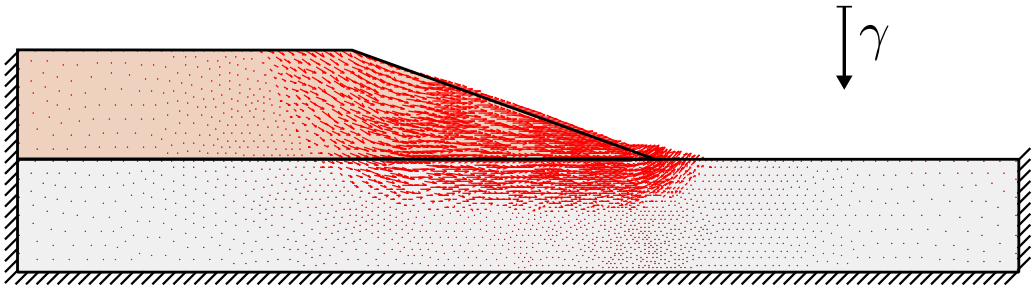


FIGURE 8.25 – Mécanisme de rupture associé à la stabilité d'un talus reposant sur un sol renforcé par colonnes ballastées.

8.4.2.3 Renforcement par un matériau cohérent et frottant

Une dernière comparaison est effectuée pour les sols renforcés par un matériau cohérent et frottant. Les résultats sont représentés sur la Figure 8.26 pour les différentes configurations de renforcement, à savoir un ouvrage renforcé par colonnes (en rouge) ou par tranchés croisées (en bleu). On y fait apparaître le calcul élastoplastique et l'encadrement numérique du facteur de stabilité d'un talus reposant sur un sol homogénéisé (en vert), dont le critère de résistance est le critère *moyen* présenté dans la section précédente ($\overline{C} = 1.2C_s$, $\overline{\varphi} = 5.3°$).

Les résultats issus de la méthode de dimensionnement approché sont en accord avec ceux obtenus pour un ouvrage renforcé par tranchées croisées. En utilisant le critère *moyen*, on peut prévoir une augmentation des performances initiales proches d'un facteur 2.9. Pour une configuration en tranchées croisées, la résistance initiale de l'ouvrage est multipliée par un facteur compris entre 2.8 et 3.6. Dans le cas d'un renforcement de l'ouvrage par colonnes, le facteur de stabilité est amélioré par rapport au cas non renforcé d'un facteur 1.7 à 2.4, ce qui reste relativement éloigné des résultats obtenus avec le critère de résistance *moyen*. Pour un matériau de renforcement cohérent et frottant, il semble là encore plus avantageux de disposer le renforcement sous forme de tranchées croisées, pour un facteur de substitution donné.

En matière de précision des encadrements déterminés numériquement, l'écart relatif entre minorant et majorant est égal à 29.3% pour la configuration en colonnes et à 26.6% pour un renforcement par tranchées croisées. Cela représente un intervalle suffisamment précis pour accorder une bonne confiance aux résultats numériques.

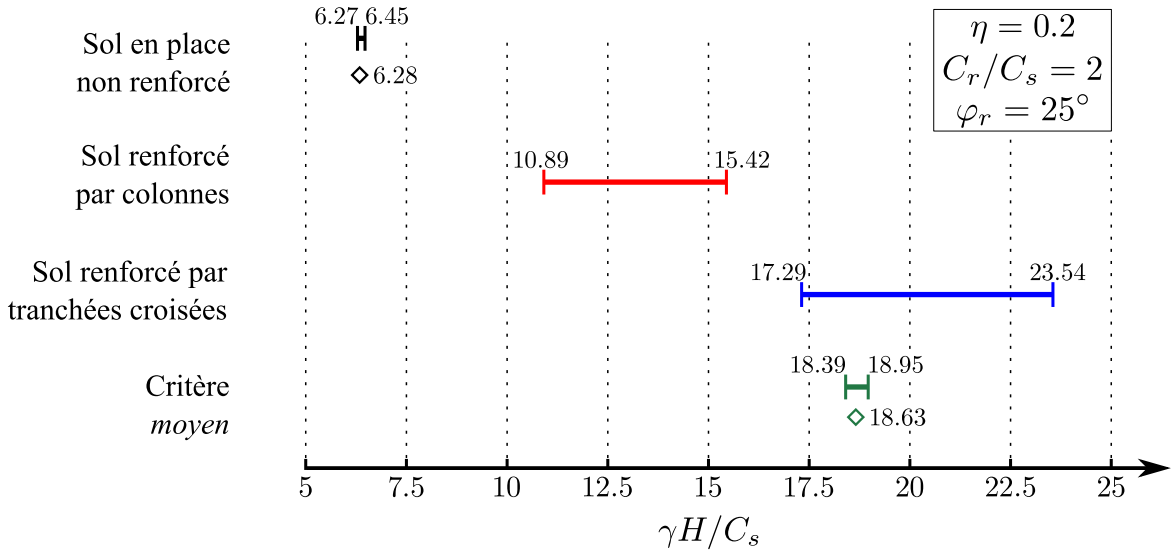


FIGURE 8.26 – Encadrements et évaluations élastoplastiques (puces) pour le facteur de stabilité d'un talus reposant sur un sol renforcé par un matériau cohérent et frottant.

8.4.3 Conclusions sur la stabilité de remblai reposant sur un sol renforcé

On a pu voir dans cette section, qu'à fraction volumique de renforcement donnée, il était préférable de disposer le matériau de renforcement sous forme de tranchées croisées plutôt que sous forme de colonnes, que ce matériau soit purement cohérent ou à la fois cohérent et frottant. Cette remarque trouve son explication dans la différence de résistance sous une sollicitation de cisaillement longitudinal, entre la configuration en colonnes et en tranchées croisées. Cependant, les écarts de performance observés ici sont de l'ordre de 35%.

En ce qui concerne l'influence du choix du matériau d'apport pour une géométrie de renforcement sous forme de colonnes, il est difficile de priviligier soit un matériau purement frottant, soit un matériau cohérent et frottant. L'écart relatif entre le minorant de $\gamma H/C_s$ de l'ouvrage renforcé par colonnes ballastées et celui de l'ouvrage renforcé par des colonnes à la fois frottantes et cohérentes est de 11%, cet écart se réduisant à 1% si l'on compare les deux majorants liés à ces techniques de renforcement de sols.

On retiendra qu'il faut être vigilant dans l'utilisation d'un critère simplifié, prenant des caractéristiques moyennes, puisqu'elle peut amener à surestimer fortement la résistance apportée par le renforcement, comme on a pu le voir dans le cas des colonnes ballastées. Ce critère approché semble en revanche plus adapté à la prédiction du comportement de l'ouvrage renforcé par tranchées croisées, à l'instar de l'étude de la capacité portante.

Grâce à la méthode d'approximation des domaines de résistance macroscopiques par des sommes d'ellipsoïdes, on a pu effectuer un calcul de stabilité d'ouvrages impossible à traiter analytiquement dès lors que le matériau de renforcement n'est pas purement cohérent [Jellali *et al.*, 2011]. Malgré l'utilisation de ces critères de résistance approximés, on obtient des encadrements rigoureux du facteur de stabilité extrême, avec une précision

tout à fait acceptable. De plus, les temps de calculs sont raisonnables, puisque l'obtention numérique d'un minorant ou d'un majorant se fait en quelques dizaines de secondes.

* *

*

Conclusions et perspectives

Chapitre 9

Conclusions et perspectives

Sommaire

9.1 Conclusions **186**
9.2 Perspectives **189**

9.1 Conclusions

Les points développés dans ce manuscrit donnent lieu à plusieurs conclusions sur les méthodes utilisées et sur les résultats tant qualitatifs que quantitatifs concernant les sols renforcés étudiés.

Que ce soit pour étudier les performances élastiques ou de résistance de matériaux et de structures hétérogènes, on a pu voir que la méthode d'homogénéisation était une alternative performante par rapport aux calculs directs. En effet, en passant par la formulation d'un problème auxiliaire puis à celle d'un problème homogène équivalent au problème initial, on effectue une résolution préalable complexe à l'échelle de la cellule de base permettant de simplifier considérablement la résolution à l'échelle de l'ouvrage. On constate alors que l'utilisation de la méthode d'homogénéisation présente un grand intérêt lorsqu'on veut étudier différents ouvrages pour une configuration donnée de renforcement (géométrie et matériaux). Comme nous avons pu le souligner tout au long du manuscrit, la construction d'une "bibliothèque" de comportements mécaniques macroscopiques regroupant différentes configurations apparaît de façon naturelle lorsqu'on utilise la méthode d'homogénéisation pour résoudre les problèmes tridimensionnels complexes.

Du point de vue de l'élasticité, les approches variationnelles, basées sur les principes de minimum énergétiques, permettent d'obtenir des formules analytiques simples décrivant le comportement élastique macroscopique du milieu considéré. En les appliquant à la résolution du problème auxiliaire, nous avons par exemple pu déterminer un encadrement rigoureux du module de cisaillement longitudinal des sols renforcés (chapitre 2). Ces études analytiques sont un complément efficace aux calculs numériques. Dans ce manuscrit, les calculs numériques par éléments finis ont été corroborés par les résultats issus des approches variationnelles, ce qui a renforcé le degré de confiance attaché à leur usage. Ces approches analytiques et/ou numériques nous ont permis d'analyser le comportement élastique des sols renforcés pour répondre à deux grandes problématiques, celle du tassement et celle du risque de liquéfaction (chapitre 3).

Après avoir constaté que la réponse de ces sols à une sollicitation sismique était liée à leur module de cisaillement longitudinal, nous avons pu évaluer l'impact de la géométrie de l'inclusion de renforcement sur le comportement global du sol renforcé. En soulignant pourquoi la méthode actuelle de dimensionnement vis-à-vis du risque de liquéfaction ainsi engendré, n'était pas satisfaisante d'un point de vue mécanique, nous avons proposé des évaluations rigoureuses de la réduction de ce risque pour des sols renforcés par colonnes ou par tranchées croisées. Dans cette recherche, il apparaît que le comportement d'un sol renforcé par colonnes est bien différent de celui qui lui est prédit par la méthode de dimensionnement classique, et que cette géométrie de renforcement n'a aucun effet bénéfique pour la réduction du risque de liquéfaction du sol en place. En revanche, avec des propriétés élastiques et une fraction volumique de renforcement équivalentes, le risque de liquéfaction est considérablement réduit si le matériau de renforcement est introduit sous forme de tranchées croisées.

La seconde problématique est celle de la réponse élastique des sols renforcés au niveau de l'ouvrage. Tout d'abord, il a fallu déterminer les caractéristiques élastiques

macroscopiques de ces sols en fonction de la géométrie de renforcement retenue. A l'échelle de la cellule de base, on constate déjà que lorsque la sollicitation appliquée est un cisaillement dans un plan incluant l'axe de renforcement, la configuration en tranchées croisées est plus rigide que celle du renforcement par colonnes. En effectuant l'analyse sur un exemple d'ouvrage renforcé par l'une ou l'autre des techniques, on s'aperçoit que les disparités observées à l'échelle de la cellule de base se répercutent à l'échelle de l'ouvrage. Ainsi, le tassement vertical élastique d'une semelle reposant sur un sol renforcé par colonnes est équivalent à celui d'un sol renforcé par tranchées croisées. En revanche, lorsque la sollicitation fait intervenir un cisaillement important (chargement latéral de la semelle par exemple), à facteur de substitution égal, le renforcement par tranchées croisées procure une rigidité supérieure à l'ouvrage.

En ce qui concerne la capacité de résistance des sols renforcés, le recours à la théorie du calcul à la rupture nous a ensuite permis de traiter cette problématique dans le cas de sols purement cohérents en présence de renforcement. En l'appliquant à l'échelle de la cellule de base, elle permet d'obtenir une définition du domaine de résistance macroscopique de ces milieux hétérogènes. On obtient également une définition pour le domaine des chargements potentiellement supportables par un ouvrage en sol renforcé. La mise en œuvre de l'approche statique et de l'approche cinématique du calcul à la rupture nous a conduit à encadrer, analytiquement ou numériquement, ces domaines de résistance de façon rigoureuse.

En s'intéressant aux différentes propriétés de résistance que pouvait avoir le matériau de renforcement, nous avons tout d'abord analysé le cas d'un renforcement purement cohérent. En effet, pour ce type de matériau, les approches du calcul à la rupture peuvent être menées analytiquement. Ainsi, nous avons pu étudier le critère de résistance de sols renforcés, lorsque le renforcement est introduit sous forme de colonnes ou de tranchées croisées (chapitre 4). Nous avons constaté que les deux configurations sont équivalentes lorsque la sollicitation ne fait pas intervenir de cisaillement longitudinal. En revanche, pour un cisaillement pur, le renforcement par tranchées croisées procure une résistance significativement plus grande que le renforcement par colonnes. Ce constat est également valable à l'échelle d'un ouvrage. Sur l'exemple d'une semelle de fondation reposant sur un sol renforcé, nous avons pu montrer analytiquement que la résistance vis-à-vis d'un chargement purement vertical est bien supérieure à celle du sol non renforcé, que le renforcement prenne la forme de colonnes ou de tranchées croisées (chapitre 5). En revanche, le sol renforcé par colonnes a des performances équivalentes au sol vierge lorsque la charge est fortement inclinée, alors que le renforcement par tranchées croisées garde un effet fortement bénéfique.

Comme cela a pu être souligné dans la littérature, nous avons constaté que le cas des renforcements par des matériaux dont l'angle de frottement n'est pas négligeable, ne peut pas être traité analytiquement de façon satisfaisante. Nous avons donc décidé d'utiliser les méthodes numériques adaptées au calcul à la rupture pour résoudre le problème auxiliaire ainsi que le problème homogène équivalent à l'échelle de l'ouvrage, en nous appuyant sur les dernières avancées dans le domaine.

Une formulation numérique innovante des approches du calcul à la rupture a été

ensuite proposée (chapitre 6). En partant d'hypothèses sur les champs de contrainte et de vitesse, induites par les conditions de déformations planes généralisées, nous avons obtenu des encadrements numériques rigoureux du critère macroscopique pour différentes configurations de renforcement de sols par un matériau frottant. La vitesse et la précision de ces méthodes ont notamment été discutées et les différents encadrements numériques obtenus corroborés par les résultats analytiques disponibles (chapitre 7). En particulier, ces calculs ont permis de confirmer que la résistance d'un sol renforcé par colonnes frottantes est limitée en cisaillement longitudinal par la cohésion du sol en place. Pour un même matériau de renforcement et une même fraction volumique de ce dernier, nous avons montré que ce n'est pas le cas pour une configuration en tranchées croisées.

Désireux de pouvoir analyser l'influence à l'échelle des ouvrages en sols renforcés des disparités observées à l'échelle de la cellule de base, nous avons appliqué les méthodes numériques du calcul à la rupture sur différents exemples illustratifs (chapitre 8). Nous avons tout d'abord dû passer par une étape d'approximation des critères de résistance macroscopiques obtenus numériquement. Les domaines ainsi approximés étant des encadrements rigoureux des domaines réels, nous avons encadré de manière rapide et efficace le domaine des chargements potentiellement supportables pour deux ouvrages types.

Tout d'abord, le cas d'une semelle reposant sur un massif de sol renforcé par colonnes ballastées ou par des colonnes ou des tranchées croisées frottantes et cohérentes a été étudié. Pour ces deux types de matériau de renforcement, l'inclinaison de la charge sollicitant la semelle a une forte influence sur la capacité portante de l'ouvrage. Ainsi, lorsque cette charge est fortement inclinée, les colonnes ballastées, tout comme les colonnes ou tranchées croisées frottantes et cohérentes, n'apportent aucune résistance significative supplémentaire au sol en place. Pour un même matériau de renforcement, le renforcement par tranchées croisées est légèrement plus efficace que la configuration en colonnes dès lors que le chargement est incliné.

Enfin, une étude a été faite pour analyser la stabilité d'un talus reposant sur un sol renforcé par un matériau frottant, cohérent ou non. Cette étude est inédite puisqu'elle est difficile à modéliser de façon tridimensionnelle et impossible à traiter analytiquement. En utilisant l'ensemble de la démarche numérique mentionnée précédemment, on constate que le fait de renforcer le sol par des tranchées croisées procure une résistance plus importante au sol en place et donc une bien meilleure stabilité de ce type d'ouvrage qu'un renforcement sous forme de colonnes. L'explication provient du fait que l'ouvrage est sollicité en grande partie en cisaillement, et que la résistance macroscopique correspondant à ces deux géométries de renforcement est différente sous ce type de sollicitation.

Pour ce qui est de la résistance apportée au sol en place par l'une ou l'autre des techniques de renforcement, nos différentes études ont montré qu'il est difficile de donner l'avantage au renforcement par colonnes ou par tranchées croisées. Ainsi, quand le chargement appliqué à l'ouvrage implique un fort cisaillement, il semble que, pour un matériau et une fraction volumique de renforcement donnés, il soit plus avantageux d'introduire ce renforcement sous forme de tranchées croisées. En dehors de ce type de chargement, chaque ouvrage en sols renforcés doit être analysé de telle sorte qu'il soit possible d'apprécier si l'écart de performances entre ces deux configurations de renforcement est conséquent.

9.2 Perspectives

Des essais expérimentaux en centrifugeuse portant sur le risque de liquéfaction des sols menés par l'Institut Français des Sciences et des Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR), sont actuellement en cours. Ces essais ont pour but d'évaluer l'influence d'un renforcement par tranchées croisées sur le comportement d'un sol liquéfiable lors d'un séisme. Une suite logique des travaux menés dans cette thèse serait donc de comparer les résultats obtenus numériquement (chapitre 3) aux résultats issus de ces essais, réalisés sur des modèles réduits. En cas de bonne corrélation, la méthode numérique présentée dans la première partie de la thèse permettrait de quantifier les performances d'un renforcement de sol sous forme de tranchées croisées, sans avoir recours à des essais expérimentaux coûteux.

Nous avons souligné dans ce manuscrit comment la théorie du calcul à la rupture permet d'évaluer directement les chargements extrêmes potentiellement supportables par des ouvrages. Il apparaît que les méthodes numériques mettant en œuvre cette théorie sont une alternative très efficace aux calculs élastoplastiques, beaucoup plus longs et fastidieux. Le développement récent de ces méthodes doit désormais permettre de les utiliser dans des logiciels commerciaux. On a pu montrer que les formulations proposées ici en 2D, en 3D ou en conditions de déformations planes généralisées (chapitre 6 et annexe D) étaient tout à fait implémentables dans de tels logiciels. Une diffusion de ces nouvelles méthodes numériques auprès de leurs utilisateurs potentiels serait donc un des objectifs à se fixer pour les prochaines années. Leur mise à disposition représenterait alors un outil supplémentaire pour les ingénieurs d'étude lors de la conception d'ouvrages de génie civil (géotechnique, béton armé, structures métalliques, ...).

De façon plus spécifique, les travaux effectués au cours de cette thèse dans le cadre du calcul à la rupture ouvrent plusieurs pistes d'approfondissement. Dans le cas d'un renforcement de sol cohérent par un matériau à la fois frottant et cohérent, les critères de résistance macroscopiques ont été évalués pour une fraction volumique de renforcement et un angle de frottement donnés (chapitre 7). Il pourrait être intéressant de prolonger cette étude en faisant varier ces deux paramètres, qui sont, comme on a pu l'expliquer, les seuls paramètres influençant la forme du domaine de résistance macroscopique. On verrait sans doute apparaître des invariances de forme, suivant le paramètre fixé. De la même manière, les calculs d'ouvrages ont été menés pour des problèmes avec des caractéristiques géométriques fixées (chapitre 8). Sur le cas du remblai reposant sur un sol renforcé par exemple, il pourrait être utile d'observer l'influence de la profondeur de renforcement sur la stabilité globale du remblai.

L'outil numérique qui a été développé à l'occasion de cette thèse nous permet également d'envisager l'étude de sols renforcés sous d'autres hypothèses que celles retenues ici. En particulier, il est tout à fait envisageable de changer la nature du sol en place. Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés au renforcement de sols argileux, pouvant donc être considérés comme purement cohérents. Rien n'empêche de déterminer les domaines de résistance macroscopiques dans le cas où le sol en place est de type sablonneux. De plus, nous avons admis ici l'hypothèse d'une adhérence parfaite entre le matériau de renforcement et le sol en place (chapitres 4 et 7). Toutefois, il est possible

de modifier ce comportement en prenant en compte une discontinuité de vitesse entre les deux constituants. On peut notamment penser à une loi d'interface de type Coulomb. Dans les deux cas, on obtiendrait alors des domaines de résistance macroscopiques différents de ceux présentés ici. Leur implémentation pour des calculs d'ouvrages se déroulerait alors de la même manière que celle décrite dans le présent manuscrit.

Dans les modélisations numériques relatives à l'approche cinématique du calcul à la rupture, nous avons utilisé des éléments finis sans discontinuités de vitesse. Il a été prouvé que le fait de prendre en compte de telles discontinuités pouvait sensiblement améliorer la précision des résultats obtenus. La démarche d'homogénéisation numérique proposée ici, et notamment l'utilisation d'approximations du domaine de résistance macroscopique, reste valable en prenant des éléments finis autorisant de telles discontinuités de vitesse. Les majorants obtenus dans le chapitre 8 seraient sans doute meilleurs, pour un maillage donné, en prenant en compte de tels éléments. L'autre piste peut consister à utiliser des approches numériques cinématiques ou statiques successives et à déterminer les zones où un raffinement du maillage est nécessaire. Cette dernière méthode aurait toutefois l'inconvénient de nécessiter à chaque calcul un remaillage complet du problème étudié.

Enfin, il pourrait être intéressant de recourrir à la méthode d'approximation d'un domaine de résistance macroscopique (annexe C et D) déterminé sur la base de résultats expérimentaux. En effet, la méthode présentée dans ce manuscrit permet d'approximer de façon rigoureuse des domaines convexes (bornés ou non) et d'implémenter le domaine ainsi approximé dans la mise en œuvre de l'approche statique ou cinématique du calcul à la rupture. Il est donc possible d'effectuer des simulations numériques pour un problème homogène associé dont le comportement à la rupture aurait été préalablement déterminé par des essais en laboratoire. Ces simulations conduiraient alors à des minorants ou des majorants du chargement extrême potentiellement supportable par un tel ouvrage homogénéisé.

* *

*

Annexes

Annexe A

Détails de calcul relatifs à l'encadrement du module de cisaillement longitudinal d'un sol renforcé par colonnes

A.1 Obtention d'un majorant du module cisaillement longitudinal

Le champ de contrainte associé au champ de déformation (2.31) est relié au tenseur de déformation par la loi d'élasticité de la zone considérée. Ainsi, on a :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \begin{cases} 2G_r\underline{\underline{\varepsilon}}' & \text{dans la zone } \mathbf{1} \\ 2G_s\underline{\underline{\varepsilon}}' & \text{dans les zones } \mathbf{2} \text{ et } \mathbf{3} \end{cases} \tag{A.1}$$

En utilisant l'admissibilité cinématique du champ de déplacement avec le tenseur de déformation macroscopique définie par (2.30), on peut exprimer $g(R)$ en fonction de E_{12}.

$$\begin{cases} \underline{\xi}'_{\mathbf{1}}(R=0) \neq \infty \\ \underline{\xi}'_{\mathbf{1}}(R=\rho) = \underline{\xi}'_{\mathbf{2}}(R=\rho) \\ \underline{\underline{\sigma}}'_{\mathbf{1}}(R=\rho)\cdot\underline{e}_R = \underline{\underline{\sigma}}'_{\mathbf{2}}(R=\rho)\cdot\underline{e}_R \\ \underline{\xi}'_{\mathbf{2}}(R=L/2) = \underline{\xi}'_{\mathbf{3}}(R=L/2) \\ \underline{\xi}'_{\mathbf{3}}(R=L/2,\Theta=0) = \dfrac{L}{2}E_{12}\underline{e}_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ g(R) = \begin{cases} E_{12}\dfrac{2G_s}{G_r+G_s-(4\rho^2/L^2)(G_r-G_s)}R & \text{dans la zone } \mathbf{1} \\ E_{12}\dfrac{(G_r+G_s)R-\rho^2(G_r-G_s)/R}{G_r+G_s-(4\rho^2/L^2)(G_r-G_s)} & \text{dans la zone } \mathbf{2} \\ E_{12}R & \text{dans la zone } \mathbf{3} \end{cases} \tag{A.2}$$

En utilisant la loi d'élasticité de chaque zone, la moyenne de l'énergie de déformation

sur la cellule de base est calculée comme suit :

$$\begin{aligned}\left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \mathbf{c}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \right\rangle &= \frac{1}{|\mathcal{C}|} \int_{\mathcal{C}} 2G(\underline{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \, \mathrm{d}\mathcal{C} \\ &= \frac{1}{|\mathcal{C}|} \left(\int_{\mathbf{1}} 2G_r \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}' \, \mathrm{d}\mathcal{C} + \int_{\mathbf{2}} 2G_s \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}' \, \mathrm{d}\mathcal{C} + \int_{\mathbf{3}} 2G_s \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}' \, \mathrm{d}\mathcal{C} \right)\end{aligned} \tag{A.3}$$

En appliquant le principe du travail virtuel (égalité de Clapeyron) à l'union des zones **1** et **2**, on aboutit à l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbf{1}\cup\mathbf{2}} 2G(\underline{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \, \mathrm{d}\mathcal{C} = \int_{\mathbf{1}\cup\mathbf{2}} \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}' \, \mathrm{d}\mathcal{C} = \int_{S_{\mathbf{23}}} (\underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{e}_R) \cdot \underline{\xi}' \, \mathrm{d}S \tag{A.4}$$

où $S_{\mathbf{23}}$ désigne l'interface entre les zones **2** et **3** du découpage de la cellule de base. À partir des expressions (A.1) et (A.2), on prouve que

$$\underline{\xi}'(R = L/2) = g(R = L/2) \cos\Theta \underline{e}_1 = \frac{L}{2} E_{12} \cos\Theta \underline{e}_1 \tag{A.5a}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}'(R = L/2) \cdot \underline{e}_R = G_s \left. \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R} \right|_{R=L/2} \cos\Theta \underline{e}_1 \tag{A.5b}$$

Ainsi, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{1}\cup\mathbf{2}} 2G(\underline{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \, \mathrm{d}\mathcal{C} &= \frac{L^2}{4} G_s E_{12} \left. \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R} \right|_{R=L/2} \int_0^{2\pi} (\cos\Theta)^2 \, \mathrm{d}\Theta \\ &= \frac{\pi L^2}{4} G_s E_{12} \left. \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R} \right|_{R=L/2}\end{aligned} \tag{A.6}$$

Dans la zone **3**, l'énergie de déformation élastique se calcule aisément grâce au fait que

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = E_{12}(\cos\Theta(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_R \otimes \underline{e}_1) - \sin\Theta(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_1)) = E_{12}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \tag{A.7}$$

et on obtient alors

$$\int_{\mathbf{3}} 2G_s \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}' \, \mathrm{d}\mathcal{C} = \int_{\mathbf{3}} 4G_s (\varepsilon'_{12})^2 \, \mathrm{d}\mathcal{C} = L^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) G_s E_{12}^2 \tag{A.8}$$

Au final, on exprime la moyenne de l'énergie de déformation élastique sur la cellule de base de la façon suivante :

$$\left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \mathbf{c}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \right\rangle = E_{12}^2 G_s \left[1 - \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{E_{12}} \left. \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R} \right|_{R=L/2} \right) \right] \tag{A.9}$$

en utilisant la définition de la fraction volumique η donnée par (2.27),

$$\left. \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R} \right|_{R=L/2} = E_{12} \frac{G_r + G_s + (4\eta/\pi)(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\eta/\pi)(G_r - G_s)} \tag{A.10}$$

On utilise enfin le principe du minimum de l'énergie potentielle réécrit dans l'équation (2.34) et on obtient l'expression d'un majorant de $G_{L,col}$:

$$G_{L,col} \leq G_s \left[1 - \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{G_r + G_s + (4\eta/\pi)(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\eta/\pi)(G_r - G_s)} \right) \right] \tag{A.11}$$

A.2 Obtention d'un minorant du module cisaillement longitudinal

En reprenant le découpage de la cellule de base défini sur la Figure 2.8, on considère le champ de contrainte de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \sigma'_{1R}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_R \otimes \underline{e}_1) + \sigma'_{1\Theta}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_1) \tag{A.12}$$

Dans les zones **1** et **2**, on choisit un champ de contrainte associé au champ de déplacement utilisé pour l'obtention du majorant précédent. On aura ainsi :

$$\begin{cases} \sigma'_{1R} = \dfrac{2G_sG_r}{G_r + G_s - (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}\cos\Theta \\ \sigma'_{1\Theta} = -\dfrac{2G_sG_r}{G_r + G_s - (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}\sin\Theta \end{cases}, \quad 0 \leq R \leq \rho \tag{A.13}$$

$$\begin{cases} \sigma'_{1R} = G_s\dfrac{G_r + G_s + (\rho/R)^2(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}\cos\Theta \\ \sigma'_{1\Theta} = -G_s\dfrac{G_r + G_s - (\rho/R)^2(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}\sin\Theta \end{cases}, \quad \rho \leq R \leq L/2 \tag{A.14}$$

et, afin de respecter la condition de continuité du vecteur contrainte entre les zones **2** et **3**, on prend le champ suivant dans la zone **3** :

$$\begin{cases} \sigma'_{1R} = G_s\dfrac{G_r + G_s + (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}\cos\Theta \\ \sigma'_{1\Theta} = -G_s\dfrac{G_r + G_s + (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}\sin\Theta \end{cases}, \quad \text{dans la zone } \mathbf{3} \tag{A.15}$$

Le champ de contrainte ainsi défini respecte les conditions de continuité de σ'_{1R} au travers des interfaces et les équations d'équilibre dans chaque zone. De plus, on peut prouver que le champ de contrainte microscopique construit est statiquement admissible avec le tenseur de contrainte macroscopique :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle &= \frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathcal{C}} \underline{\underline{\sigma}}' \,\mathrm{d}\mathcal{C} = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\partial\mathcal{C}} \underline{x} \otimes (\underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n}) \,\mathrm{d}S \\ &= G_s\frac{G_r + G_s + (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) = \underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \tag{A.16}$$

dans le cas où la contrainte de cisaillement macroscopique vaut :

$$\Sigma_{12} = G_s\frac{G_r + G_s + (4\eta/\pi)(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\eta/\pi)(G_r - G_s)} \tag{A.17}$$

La moyenne de l'énergie élastique est donnée par :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) : \mathbf{s}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) \rangle = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\left(\int_{\mathbf{1}} \frac{\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}'}{2G_r}\,\mathrm{d}\mathcal{C} + \int_{\mathbf{2}} \frac{\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}'}{2G_s}\,\mathrm{d}\mathcal{C} + \int_{\mathbf{3}} \frac{\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}'}{2G_s}\,\mathrm{d}\mathcal{C}\right) \tag{A.18}$$

où, dans les zones **1** et **2**, la valeur de cette énergie est la même que celle calculée dans (A.6). Cela amène à montrer que :

$$\frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathbf{1}\cup\mathbf{2}} \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x})}{2G(\underline{x})}\,\mathrm{d}\mathcal{C} = \frac{\pi L^2}{4|\mathcal{C}|} G_s \frac{G_r + G_s + (4\eta/\pi)(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\eta/\pi)(G_r - G_s)} = \frac{\pi}{4}\Sigma_{12} \tag{A.19}$$

Le champ de contrainte étant constant dans la zone **3**, l'énergie élastique est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathbf{3}} \frac{\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}'}{2G_s}\,\mathrm{d}\mathcal{C} &= \frac{L^2(1-\pi/4)}{G_s|\mathcal{C}|}\left(G_s \frac{G_r + G_s + (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\rho^2/L^2)(G_r - G_s)}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\Sigma_{12}^2}{G_s}\end{aligned} \tag{A.20}$$

Enfin, le principe du minimum de l'énergie complémentaire exprimé par (2.38) permet d'obtenir l'expression d'un minorant de $G_{L,col}$:

$$\begin{aligned}G_{L,col} \geq & \frac{\Sigma_{12}^2}{(\pi/4)\Sigma_{12} + (1-\pi/4)\Sigma_{12}^2/G_s} \\ = & \frac{G_s}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{G_r + G_s + (4\eta/\pi)(G_r - G_s)}{G_r + G_s - (4\eta/\pi)(G_r - G_s)}\right)^{-1} + 1 - \frac{\pi}{4}}\end{aligned} \tag{A.21}$$

* *

*

Annexe B

Validation des formulations numériques sur l'exemple des sols renforcés par un matériau purement cohérent

Pour être validées, les formulations numériques que nous avons mises en place dans le chapitre 6 doivent être confrontées à d'autres sources de résultats. Il s'agit de vérifier ici leur adéquation avec les résultats analytiques ou issus d'une procédure élastoplastique, pour les sols renforcés par un matériau purement cohérent. Dans le chapitre 4, les critères de résistance macroscopiques de ce type de sols renforcés ont été encadrés de façon semi-analytique dans le cas d'un renforcement par tranchées croisées ou par colonnes. Nous allons donc comparer les résultats d'une modélisation 2D de la cellule de base en déformations planes généralisées, basée sur la programmation semi-définie positive, à ces résultats analytiques.

B.1 Mise en place de la modélisation numérique

B.1.1 Caractéristiques des matériaux et pilotage des simulations numériques

On cherche à encadrer numériquement les critères de résistance de sols renforcés par un matériau purement cohérent. On s'intéresse ici aux deux configurations de renforcement (colonnes ou tranchées croisées) qui ont fait l'objet d'une étude analytique dans le chapitre 4. Les cellules de base $\mathcal{C}$ associées à ces deux configurations sont notamment représentées sur la Figure 7.1.

Comme pour l'étude analytique de ce problème, on considère comme négligeables les angles de frottement des deux matériaux. Le rapport entre leur cohésion est toujours noté k. De sorte qu'on caractérise le comportement des deux matériaux dans les approches numériques de la façon suivante :

$$C_s = C = \frac{C_r}{k},\ \varphi_s = \varphi_r = 0 \tag{B.1}$$

À titre d'exemple, et jusqu'à la fin de cette annexe, on fixe les valeurs suivantes pour

ces caractéristiques :

$$\eta = 0.2 \text{ et } k = 20 \tag{B.2}$$

Les simulations numériques sont effectuées en choisissant soit la direction dans l'espace des contraintes macroscopiques $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$ pour l'approche statique, soit la direction dans l'espace des taux de déformation macroscopiques $(D_{11}, D_{22}, 2D_{12})$ pour l'approche cinématique. On a expliqué dans le chapitre 7 qu'on paramètrise alors les deux directions macroscopiques par deux angles, notés $(\gamma, \delta) \in ([0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2])$. Ici, on connaît la forme théorique que vont prendre les critères de résistance macroscopiques (cylindres infinis de génératrice l'axe $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$).

D'après la condition de pertinence des matériaux de type Tresca, pour le pilotage des simulations de l'approche cinématique, on aura :

$$\mathrm{tr}\underline{\underline{D}} = 0 \Rightarrow D_{11} = D_{22} \Rightarrow \gamma = 3\pi/4 \text{ ou } -\pi/4 \tag{B.3}$$

De la même façon, pour l'approche statique, on sait que la section dans le plan déviateur $(\Sigma_{22} - \Sigma_{11}, \Sigma_{12})$ du domaine de résistance dans l'espace des contraintes macroscopiques correspond aux états de contraintes détectés pour $\gamma = 3\pi/4$ ou $-\pi/4$ et $\delta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

De plus, on remarque que les critères attendus présentent une symétrie par rapport au plan $\Sigma_{11} - \Sigma_{22} = 0$. Il suffit donc d'évaluer les domaines de résistance macroscopiques dans le demi-espace $(\Sigma_{22} - \Sigma_{11} \geq 0, \Sigma_{12} \geq 0)$ et de les compléter grâce aux différentes symétries. La Figure B.1 représente la façon dont on va piloter les tenseurs macroscopiques pour les approches cinématique et statique, avec la plage de variation suivante des angles (γ, δ) :

$$\gamma = 3\pi/4,\ \delta \in [0, \pi/2] \tag{B.4}$$

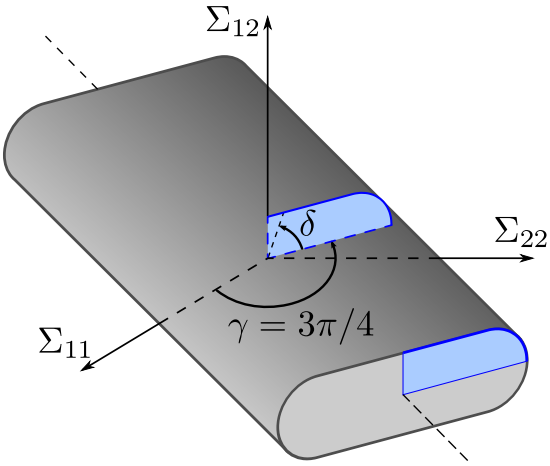


FIGURE B.1 – Plage de variation des angles γ et δ.

B.1.2 Présentation des maillages utilisés

Pour effectuer les calculs numériques, basés sur les approches du calcul à la rupture ou utilisant une procédure élastoplastique, on a déjà expliqué que la modélisation d'une

moitié de la cellule de base était suffisante. Une fois la valeur du facteur de substitution η fixée, on utilise la même finesse de maillage pour les approches cinématique et statique ainsi que pour les calculs élastoplastiques. Dans tous ces calculs, on se place dans les conditions de déformations planes généralisées, ce qui permet de modéliser chaque cellule de base par sa section par un plan orthogonal à la direction de renforcement.

On rappelle que pour l'approche statique, les éléments constituant le maillage sont des triangles à 3 nœuds (TRI3). En revanche, pour l'approche cinématique et pour les calculs élastoplastiques, ces mêmes éléments sont transformés en triangles à 6 nœuds (TRI6). Les maillages utilisés pour le sol renforcé par colonnes et pour la configuration en tranchées croisées sont représentés sur les Figures 7.6 et 7.11, avec $\eta = 0.2$. Ils ont les caractéristiques suivantes :

- renforcement par colonnes : $n_e = 340$ et $n_p = 715$.
- renforcement par tranchées croisées : $n_e = 304$ et $n_p = 659$.

où n_e désigne le nombre d'éléments dans le maillage et n_p le nombre de nœuds dans le cas d'éléments de type TRI6. On garde volontairement ces nombres proches pour les deux configurations, afin de comparer la précision de l'encadrement obtenu, et suffisamment faibles pour garantir la rapidité des calculs.

B.2 Analyse des évaluations numériques des critères macroscopiques

On effectue les calculs numériques de façon à obtenir des minorants et des majorants des domaines de résistance pour les deux types de sols renforcés. Le pas de discrétisation de δ retenu est égal à 1° de manière à obtenir une description suffisamment fine de ces évaluations. Sur un ordinateur de bureau standard, les 91 optimisations liées aux approches statique ou cinématique sont effectuées en moins d'une dizaine de minutes. Comme attendu, le temps maximal est atteint pour évaluer l'approche cinématique du renforcement par colonnes, car c'est le problème faisant intervenir le plus de variables d'optimisation.

B.2.1 Comparaison des encadrements numériques et analytiques

Dans un premier temps, on souhaite comparer les résultats obtenus numériquement à ceux issus d'une démarche analytique, présentés au chapitre 4. Cet encadrement, représenté sur la Figure 4.16, était déjà relativement resserré, celui obtenu numériquement l'est encore plus. Une représentation graphique des évaluations obtenues par le calcul à la rupture numérique n'est pas approriée, les deux courbes se superposant presque. Le minorant et le majorant obtenus numériquement sont compris dans le faisceau formé par l'encadrement analytique, que le sol soit renforcé par colonnes ou par tranchées croisées.

Pour pouvoir effectuer une analyse adéquate, on représente donc l'écart entre les minorants et les majorants obtenus, d'une part grâce à l'étude analytique et d'autre part en effectuant des simulations numériques. Pour cette comparaison, on utilise la

notion déjà introduite de *cohésion anisotrope* (voir chapitre 4). Pour les deux types d'encadrement, on analyse l'écart relatif $(C^{\text{cine}} - C^{\text{stat}})/C^{\text{cine}}$, qui est une fonction de l'angle entre la direction de renforcement et la direction de sollicitation, noté $\theta \in [0, \pi/4]$.

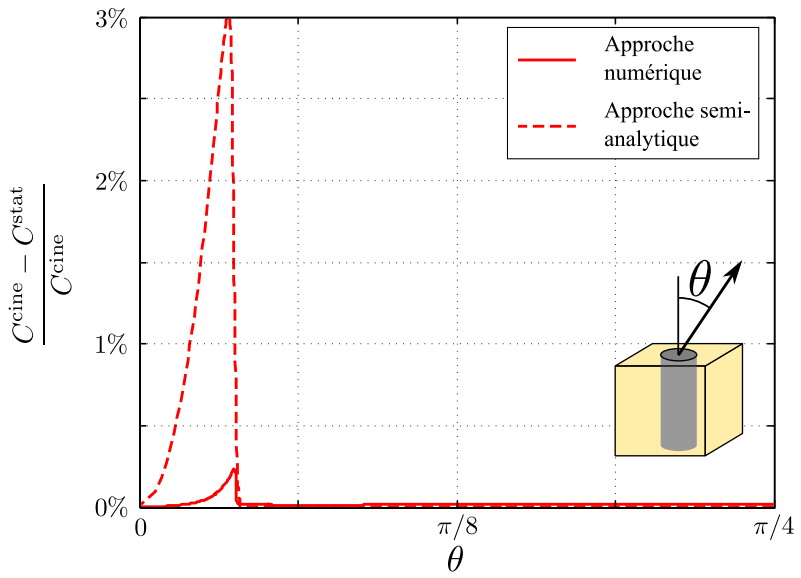


FIGURE B.2 – Écarts relatifs des encadrements du critère de résistance d'un sol renforcé par colonnes purement cohérentes.

La Figure B.2 fait apparaître ces écarts relatifs pour un renforcement par colonnes. Sur cette figure, on retrouve que l'écart maximal entre le minorant et le majorant analytiques (ligne pointillée), exprimés précédemment, est environ égal à 3%. On observe également que ces encadrements de la cohésion du sol renforcé par colonnes, C_{col}, sont égaux pour $\theta = 0$ et $\theta \in [7.5°, 45°]$. Le même écart relatif est tracé pour l'encadrement déterminé numériquement (ligne continue). Cette fois, le rapport $(C_{col}^{\text{cine}} - C_{col}^{\text{stat}})/C_{col}^{\text{cine}}$ ne dépasse pas 0.25%. L'écart relatif moyen, proportionnel à l'aire du domaine situé sous la courbe, a également été réduit. On constate donc l'amélioration apportée par la formulation numérique du problème de calcul à la rupture.

Sur la Figure B.3, on représente ce même écart relatif pour une configuration en tranchées croisées, en s'intéressant cette fois aux évaluations de C_{tc}.

On a déjà pu remarquer que l'encadrement analytique déterminé pour le sol renforcé par tranchées croisées étaient plus resserrées que dans le cas des renforcements par colonnes. Cela se confirme ici, puisque l'écart relatif maximal entre ce minorant et ce majorant vaut 1.25% (ligne pointillée). L'angle θ à partir duquel cet écart est nul est plus grand que dans la configuration précédente. Il est environ égal à 28° dans le cas des tranchées croisées. Comme précédemment, les méthodes basées sur les éléments finis conduisent à un encadrement plus resserré que celui obtenu analytiquement. En effet, si on observe le rapport $(C_{tc}^{\text{cine}} - C_{tc}^{\text{stat}})/C_{tc}^{\text{cine}}$ tracé en ligne continue, on s'aperçoit qu'il n'excède pas 0.27%. Cette fois encore, on améliore également la valeur moyenne de cet écart relatif.

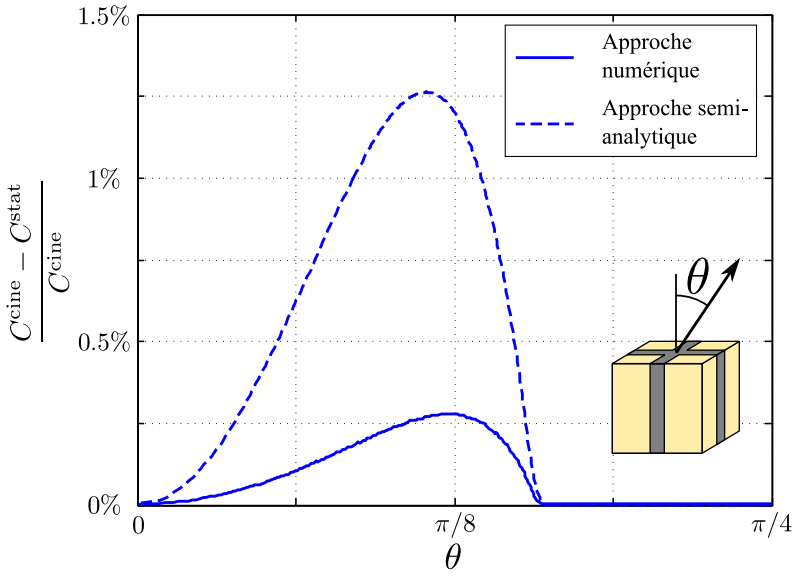


FIGURE B.3 – Écarts relatifs des encadrements du critère de résistance d'un sol renforcé par tranchées croisées purement cohérentes.

B.2.2 Comparaison avec les résultats issus des calculs élastoplastiques

Pour confirmer la validité et la précision des encadrements déterminés numériquement à partir des formulations développées dans le chapitre 6, on se propose de comparer les résultats obtenus avec ceux issus d'une procédure de calcul élastoplastique. Une routine de calcul *ad hoc* a été développée qui permet de traiter les matériaux de type Mohr-Coulomb, et donc aussi ceux de type Tresca. Dans cette procédure, des éléments TRI6 spéciaux ont été implémentés afin de résoudre des problèmes dans l'hypothèse de déformations planes généralisées. La démarche permettant de mener à bien les calculs élastoplastiques dans le cas d'un sol renforcé par colonnes ballastées a fait l'objet d'une publication récente [Hassen *et al.*, 2013]. Nous allons nous servir de cette procédure et utiliser les maillages décrits sur les Figures 7.6 et 7.11 pour en déduire des approximations de C_{col} et C_{tc}.

On se doit tout d'abord de rappeler qu'un résultat issu d'une procédure élastoplastique, noté ici C^{ep}, n'a pas de statut par rapport à la solution exacte du problème auxiliaire. En particulier, il est important de noter qu'une évaluation obtenue de cette façon n'a aucune raison de respecter l'encadrement (analytique ou numérique). La procédure élastoplastique permet toutefois de fournir une évaluation précise du critère de résistance macroscopique réel.

Pour les deux types de configurations, on cherche à déterminer les rapports $(C^{\text{ep}} - C^{\text{stat}})/C^{\text{ep}}$ et $(C^{\text{cine}} - C^{\text{ep}})/C^{\text{ep}}$, qui seront tous les deux positifs si la solution élastoplastique est dans le faisceau formé par le minorant numérique C^{stat} et le majorant numérique C^{cine}.

Pour la configuration en colonnes, on effectue 10 calculs élastoplastiques en faisant

varier l'angle pilotant le tenseur du taux de déformation macroscopique, fixé entre 0 et $\pi/2$. Ceux-ci sont effectués en une vingtaine de minutes, avec le même ordinateur que précédemment et une précision controlée. On trace ensuite les deux rapports évoqués, en utilisant les encadrements numériques calculés dans la section précédente (voir Figure B.4). On observe que l'écart relatif entre le calcul élastoplastique et le minorant (carrés pleins) n'excède pas 0.22% et celui entre C_{col}^{ep} et C_{col}^{cine} (cercles) est inférieur à 0.05%. On a donc une très bonne corrélation entre les calculs élastoplastiques et les résultats issus du calcul à la rupture.

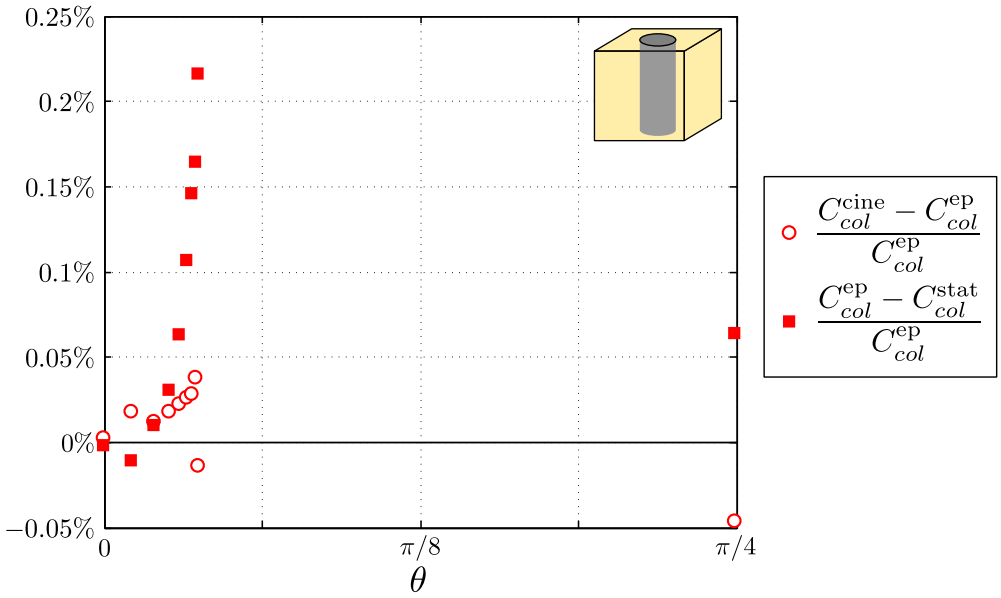


FIGURE B.4 – Écarts relatifs entre l'encadrement de C_{col} et son évaluation par calculs élastoplastiques.

À partir de cette figure, on peut également déterminer si la solution élastoplastique est plus proche du minorant ou du majorant, utilisant la propriété suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{C^{\text{ep}} - C^{\text{stat}}}{C^{\text{ep}}} \leq \dfrac{C^{\text{cine}} - C^{\text{ep}}}{C^{\text{ep}}} \Leftrightarrow C^{\text{ep}} \leq \dfrac{C^{\text{stat}} + C^{\text{cine}}}{2} \Leftrightarrow C^{\text{ep}} \text{ plus proche de } C^{\text{stat}} \\ \dfrac{C^{\text{ep}} - C^{\text{stat}}}{C^{\text{ep}}} \geq \dfrac{C^{\text{cine}} - C^{\text{ep}}}{C^{\text{ep}}} \Leftrightarrow C^{\text{ep}} \geq \dfrac{C^{\text{stat}} + C^{\text{cine}}}{2} \Leftrightarrow C^{\text{ep}} \text{ plus proche de } C^{\text{cine}} \end{cases} \tag{B.5}$$

Si on applique cette propriété à la courbe tracée ici, on s'aperçoit que, pour la très grande majorité des orientations θ, l'approche cinématique est plus proche de C_{col}^{ep}.

On représente sur la Figure B.5 le rapport entre l'encadrement numérique et 19 calculs élastoplastiques pour une configuration de renforcement par tranchées croisées. Le pas de discrétisation du tenseur du taux de déformation utilisé dans les calculs directs est cette fois fixé à 5°. Ces calculs sont réalisés en une quinzaine de minutes.

À l'instar de la configuration en colonnes, on obtient des résultats élastoplastiques proches à la fois de C_{tc}^{stat} (carrés pleins) et de C_{tc}^{cine} (cercles). L'écart maximal ne dépasse pas respectivement 0.15% et 0.18%. On peut ajouter que, cette fois, les calculs directs

donnent des résultats alternativement plus proches du minorant ou du majorant.

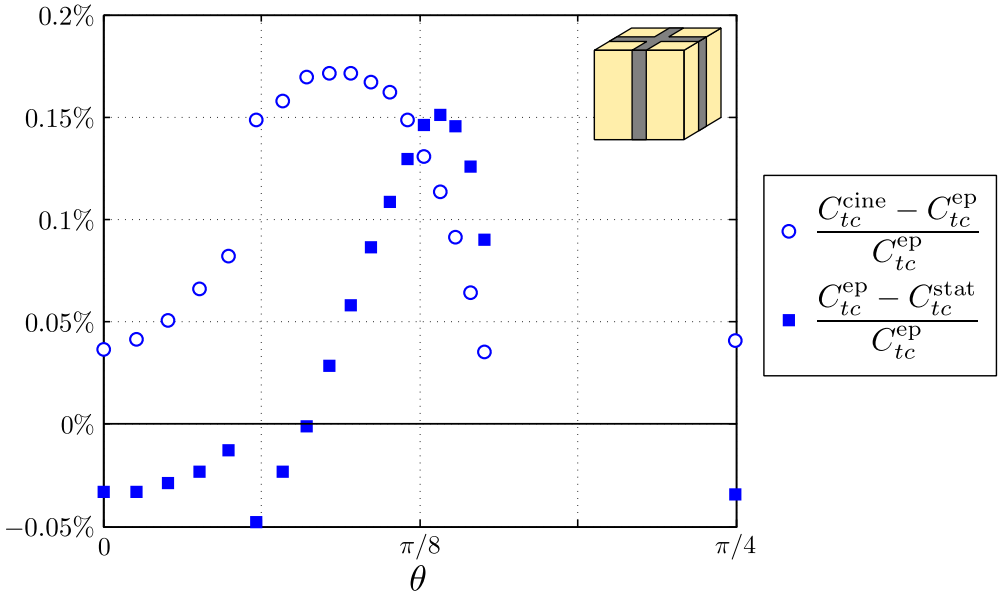


FIGURE B.5 – Écarts relatifs entre l'encadrement de C_{tc} et son évaluation par calculs élastoplastiques.

Comme on s'y attendait, pour les deux configurations géométriques, certaines solutions issues de la procédure élastoplastique ne sont pas comprises dans les encadrements numériques. Cette remarque nous pousse à être vigilant vis-à-vis des résultats obtenus par cette procédure. Elle permet en effet d'obtenir les états limites par des calculs incrémentaux, mais elle ne conduit qu'à une évaluation du domaine de résistance macroscopique, sans statut particulier. C'est la raison principale pour laquelle nous avons développé les formulations numériques des problèmes auxiliaires dans la théorie du calcul à la rupture. De plus, on remarque que le temps de calcul nécessaire pour mener à bien une procédure élastoplastique est plus long que celui d'une série d'optimisations numériques.

Dans cette annexe, nous avons eu l'occasion de tester les formulations de type éléments finis introduites dans le chapitre 6. Sur l'exemple des sols renforcés par un matériau cohérent, nous avons observé à la fois une très bonne adéquation avec des résultats issus de calculs élastoplastiques, mais également constaté que les encadrements obtenus numériquement amélioraient les résultats provenant d'approches analytiques. On peut donc désormais les utiliser avec confiance sur des problèmes plus complexes, tels que celui du renforcement par inclusions frottantes.

* *

*

Annexe C

Approximations d'un domaine de résistance par un ensemble d'ellipsoïdes

C.1 Présentation du principe d'approximation d'un ensemble borné par une somme d'ellipsoïdes

C.1.1 Définitions de la somme d'ellipsoïdes

Comme on a pu le remarquer dans le chapitre 7, on est souvent dans l'incapacité d'exprimer analytiquement les conditions liées aux domaines de résistance macroscopiques des sols renforcés. Que ce soit sous la forme d'une fonction de résistance ou d'une fonction d'appui, il est pourtant nécessaire de disposer d'une expression simple, même approchée, de façon à pouvoir effectuer des calculs d'ouvrages.

Une des solutions, proposée par [Bleyer et de Buhan, 2013], consiste à utiliser un jeu d'ellipsoïdes pour réaliser une approximation du critère de résistance. Cette surface quadratique fermée a pour avantage d'être facilement définissable, en fonction des points appartenant à sa frontière ou de ses normales extérieures. Ainsi, en considérant un tenseur de contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$, la fonction de résistance d'un ellipsoïde s'exprime comme :

$$f^{\text{ell}}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{A} : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{\Sigma}} - 1 \leq 0 \tag{C.1}$$

où $\mathbb{A}$ est un tenseur d'ordre 4 défini positif contenant les informations sur les dimensions et l'orientation de l'ellipsoïde et $\underline{\underline{a}}$, un tenseur symétrique d'ordre 2 se rapportant aux coordonnées de son centre.

Une définition duale de cet ellipsoïde peut s'écrire à l'aide d'une fonction d'appui :

$$\pi^{\text{ell}}(\underline{\underline{D}}) = \sup_{f^{\text{ell}}(\underline{\underline{\Sigma}})\leq 0} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \sqrt{\underline{\underline{D}} : \mathbb{B} : \underline{\underline{D}}} + \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{D}} \tag{C.2}$$

avec, encore une fois, $\mathbb{B}$, un tenseur d'ordre 4 qui renseigne sur la taille et l'orientation de l'ellipsoïde et $\underline{\underline{b}}$ un tenseur d'ordre 2 exprimant la position de son centre.

Mathématiquement, les différentes entités sont reliées par les équations suivantes :

$$\mathbb{B} = \left(1 + \frac{1}{4}\underline{\underline{a}} : \mathbb{A}^{-1} : \underline{\underline{a}}\right) \mathbb{A}^{-1} \tag{C.3}$$

$$\underline{\underline{b}} = \frac{1}{2}\mathbb{A}^{-1} : \underline{\underline{a}} \tag{C.4}$$

Pour pouvoir espérer avoir des approximations précises des domaines de résistance macroscopiques, l'utilisation d'un seul ellipsoïde n'est pas suffisante. C'est la raison pour laquelle on utilise une somme de plusieurs ellipsoïdes. Dans le chapitre 4, on a déjà évoqué le fait qu'une somme ensembliste (ou de Minkowski) répondait à une définition précise (voir (4.72)). Ainsi, le domaine de résistance formé par la somme de N ellipsoïdes se caractérise comme suit :

$$\mathbf{G}^{N\text{ell}} = \mathbf{G}^1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{G}^N = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} \,|\, \underline{\underline{\Sigma}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{\Sigma}}^i \,;\, \underline{\underline{\Sigma}}^i \in \mathbf{G}^i \right\} \tag{C.5}$$

L'avantage de cette définition est que le critère de résistance définissant $\mathbf{G}^{N\text{ell}}$ peut s'exprimer facilement en fonction du critère de chaque ellipsoïde i le composant. On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$f^{N\text{ell}}(\underline{\underline{\Sigma}}, \mathbb{J}^i, \underline{\underline{a}}) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{\Sigma}}^i + \underline{\underline{a}} \\ \|{}^t\mathbb{J}^i : \underline{\underline{\Sigma}}^i\| \leq 1\,, \quad \forall i = 1, \cdots, N \end{cases} \tag{C.6}$$

avec

$$\|\underline{\underline{\bullet}}\| = \sqrt{\sum (\bullet_{ij})^2} \tag{C.7}$$

$\underline{\underline{a}}$, tenseur d'ordre 2, caractérise le centre d'un des ellipsoïdes (choisi de façon arbitraire). Le terme $\mathbb{J}^i$ désigne un tenseur d'ordre 4, rassemblant les facteurs de Cholesky des $\mathbb{B}^i$, tel que $\mathbb{B}^i = {}^t\mathbb{J}^i\mathbb{J}^i$.

La dualisation de cette définition mène à l'expression de la fonction d'appui du domaine $\mathbf{G}^{N\text{ell}}$. On peut prouver que cette fonction $\pi^{N\text{ell}}$ s'écrit simplement comme la somme suivante :

$$\pi^{N\text{ell}}(\underline{\underline{D}}, \mathbb{J}^i, \underline{\underline{b}}) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\underline{\underline{D}} : \mathbb{B}^i : \underline{\underline{D}}} + \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{D}} = \sum_{i=1}^{N} \|\mathbb{J}^i : \underline{\underline{D}}\| + \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{D}} \tag{C.8}$$

où les $\mathbb{B}^i$ et $\underline{\underline{b}}$ répondent aux définitions (C.3) et (C.4).

C.1.2 Utilisation pour l'approximation d'un domaine de résistance borné

Pour approximer au mieux un domaine de résistance $\mathbf{G}^{num}$ que l'on a déterminé numériquement (soit par l'approche statique par l'intérieur par le biais d'un ensemble de points appartenant à la surface, soit par l'approche cinématique à travers une fonction d'appui discrétisée), il faut minimiser la distance globale entre la somme de l'ensemble

d'ellipsoïdes à déterminer et ce domaine. On sait qu'on peut facilement passer de la définition statique à la définition cinématique en dualisant les équations. Ainsi, on note π^{num} la fonction d'appui du domaine que l'on souhaite approximer, borné dans toutes les directions de l'espace des contraintes, et $\pi^{N\text{ell}}$, celle de la somme de N ellipsoïdes.

Outre le fait de disposer d'une approximation performante, on souhaite que celle-ci possède un statut théorique connu par rapport au domaine étudié. Pour ce faire, il suffit simplement d'ajouter une condition d'inégalité entre les fonctions d'appui des deux domaines. Pour avoir une approximation, notée $\mathbf{G}_{\boxminus}^{N\text{ell}}$, *inscrite* dans le domaine $\mathbf{G}^{num}$, on impose que $\pi_{\boxminus}^{N\text{ell}}$ soit inférieure à π^{num} pour chacune des directions de $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{gathered}\min_{\mathbb{J}^i,\underline{\underline{b}}} \sum_{\underline{\underline{D}}\in\mathbb{R}^6} \left(\pi^{num}(\underline{\underline{D}}) - \pi_{\boxminus}^{N\text{ell}}(\underline{\underline{D}},\mathbb{J}^i,\underline{\underline{b}})\right)^2 \\ \text{avec } \pi^{num}(\underline{\underline{D}}) \geq \pi_{\boxminus}^{N\text{ell}}(\underline{\underline{D}},\mathbb{J}^i,\underline{\underline{b}})\,, \quad \forall \underline{\underline{D}} \in \mathbb{R}^6\end{gathered} \tag{C.9}$$

Le domaine approximé *inscrit* est alors défini par :

$$\mathbf{G}_{\boxminus}^{N\text{ell}} = \bigcap_{\underline{\underline{D}}} \left\{\underline{\underline{\Sigma}} \,|\, \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi_{\boxminus}^{N\text{ell}}(\underline{\underline{D}},\mathbb{J}^i,\underline{\underline{b}})\right\} \tag{C.10}$$

À l'inverse, pour obtenir une approximation *circonscrite* ($\mathbf{G}_{\boxplus}^{N\text{ell}}$), $\pi_{\boxplus}^{N\text{ell}}$ doit toujours être plus grande que la fonction d'appui du critère.

$$\begin{gathered}\min_{\mathbb{J}^i,\underline{\underline{b}}} \sum_{\underline{\underline{D}}\in\mathbb{R}^6} \left(\pi^{num}(\underline{\underline{D}}) - \pi_{\boxplus}^{N\text{ell}}(\underline{\underline{D}},\mathbb{J}^i,\underline{\underline{b}})\right)^2 \\ \text{avec } \pi^{num}(\underline{\underline{D}}) \leq \pi_{\boxplus}^{N\text{ell}}(\underline{\underline{D}},\mathbb{J}^i,\underline{\underline{b}})\,, \quad \forall \underline{\underline{D}} \in \mathbb{R}^6\end{gathered} \tag{C.11}$$

Ce domaine approximé *circonscrit* est exprimé de façon analogue au domaine précédent.

$$\mathbf{G}_{\boxplus}^{N\text{ell}} = \bigcap_{\underline{\underline{D}}} \left\{\underline{\underline{\Sigma}} \,|\, \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi_{\boxplus}^{N\text{ell}}(\underline{\underline{D}},\mathbb{J}^i,\underline{\underline{b}})\right\} \tag{C.12}$$

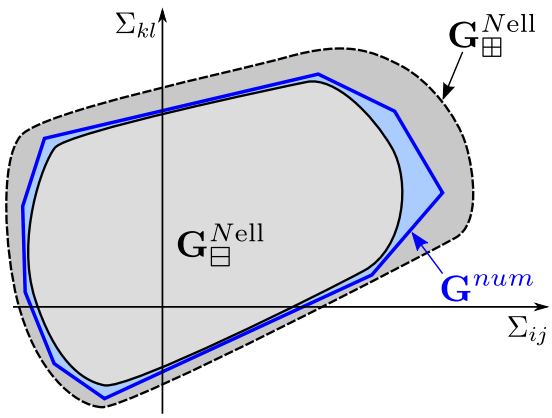


FIGURE C.1 – Approximations inscrite et circonscrite par des sommes d'ellipsoïdes d'un domaine de résistance borné.

Au final, on peut obtenir deux domaines composés d'une somme d'ellipsoïdes qui approximent, par l'intérieur ou l'extérieur, le domaine de résistance $\mathbf{G}^{num}$ (voir Figure C.1). On est alors assuré d'avoir les relations d'inclusion suivantes :

$$\mathbf{G}_{\boxminus}^{N\text{ell}} \subseteq \mathbf{G}^{num} \subseteq \mathbf{G}_{\boxplus}^{N\text{ell}} \tag{C.13}$$

C.2 Approximations de domaines non bornés

C.2.1 Formulation générale

On souhaite ensuite se servir des domaines issus des approximations précédentes dans des calculs d'ouvrages. Or, on a vu au chapitre 7 que les critères de résistance macroscopiques des sols renforcés ne sont pas bornés dans toutes les directions de l'espace des contraintes. Le domaine de résistance macroscopique réel peut donc faire intervenir deux cônes (voir Figure C.2). Le premier, noté $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}^{num}$, contient les directions du tenseur de contrainte macroscopique pour lesquelles il n'existe pas de charge limite. Le second cône, obtenu par dualité à partir du précédent et noté $\{\underline{\underline{D}}\}^{num}$, représente l'ensemble des directions du taux de déformation pour lesquelles la fonction d'appui est finie, et peut être défini comme le *cône des normales extérieures* au domaine $\mathbf{G}^{num}$.

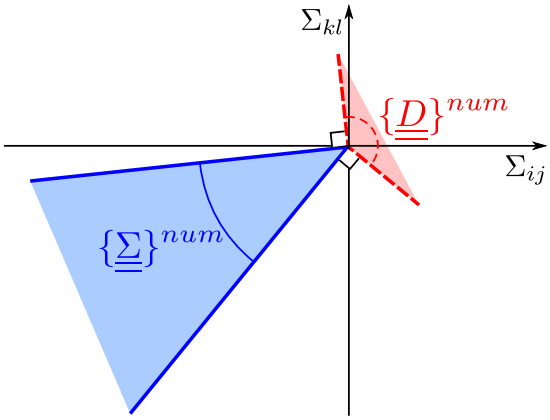


FIGURE C.2 – Représentation des cônes associés à un domaine de résistance non borné défini numériquement.

L'écart moyen quadratique entre le domaine de résistance et son approximation doit être minimal sur cet ensemble. Cela signifie que la détermination des domaines approximés inscrit ou circonscrit découle toujours d'une optimisation, définie respectivement par (C.9) ou (C.11), mais où les relations d'inégalités des fonctions d'appui sont imposées sur $\{\underline{\underline{D}}\}^{num}$ et non sur tout $\mathbb{R}^6$.

Au final, les domaines approximés issus d'une somme de N ellipsoïdes pour un domaine de résistance non borné sont définis de la façon suivante :

$$\mathbf{G}_{\boxdot}^{\text{app}} = \bigcap_{\underline{\underline{D}}} \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} \,|\, \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi_{\boxdot}^{\text{app}}(\underline{\underline{D}}) \right\} \text{ avec } \pi_{\boxdot}^{\text{app}} = \begin{cases} \pi_{\boxdot}^{N\text{ell}}(\underline{\underline{D}}, \mathbb{J}^i, \underline{b}) & \text{si } \underline{\underline{D}} \in \{\underline{\underline{D}}\}^{num} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{C.14}$$

On considère donc les domaines $\mathbf{G}_{\boxminus}^{\text{app}}$ et $\mathbf{G}_{\boxplus}^{\text{app}}$, respectivement approximations par l'intérieur et par l'extérieur d'un domaine de résistance réel, dont les tenseurs caractéristiques ont été déterminés après avoir effectué l'optimisation évoquée ci-dessus. On utilise leur définition pour effectuer une approche statique ou une approche cinématique permettant d'encadrer la charge extrême potentiellement supportable par un ouvrage.

Il est très difficile de prendre en compte directement les cônes $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}^{num}$ ou $\{\underline{\underline{D}}\}^{num}$ dans les formulations numériques des approches statique et cinématique. De ce fait, nous allons proposer une méthode originale, complétant celle décrite précédemment, de façon à prendre en compte le fait que le domaine de résistance n'est pas borné suivant certaines directions.

Pour l'approche statique du calcul à la rupture, pour garder un statut de minorant au résultat numérique obtenu, nous allons utiliser le domaine approximé par l'intérieur $\mathbf{G}_{\boxminus}^{\text{app}}$. On cherche à mettre un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement admissible pour le problème et qui respecte le critère de résistance local en tout point. C'est uniquement cette deuxième condition qui nous préoccupe ici. Pour prendre en compte le fait que le domaine de résistance est une somme de N ellipsoïdes, on revient à la définition (C.6). On décompose le champ de contraintes de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{\sigma}}^{i} + \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{\sigma}}^{\text{pert}} \tag{C.15}$$

Le terme $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{pert}}$ est introduit pour pouvoir exprimer le fait que le critère approximé possède une résistance infinie suivant certaines directions de chargement. Ainsi, les différents tenseurs de contraintes élémentaires doivent rester dans des domaines définis par :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{G}_{\boxminus}^{\text{app}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{\sigma}}^{i}\right) \in \mathbf{G}_{\boxminus}^{N\text{ell}} = \left\{\underline{\underline{\sigma}} \,|\, f_{\boxminus}^{N\text{ell}}(\underline{\underline{\sigma}}, \mathbb{J}^{i}, \underline{\underline{0}}) \leq 0\right\} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\text{pert}} \in \{\underline{\underline{\Sigma}}\}_{\boxminus}^{\text{app}} \end{cases} \tag{C.16}$$

Le cône $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}_{\boxminus}^{\text{app}}$ est alors une approximation de $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}^{num}$. Pour pouvoir garder un statut rigoureux de minorant au résultat obtenu par l'approche statique numérique définie, il faut que ces deux cônes de directions du tenseur des contraintes macroscopiques respectent la relation d'inclusion suivante (voir Figure C.3) :

$$\{\underline{\underline{\Sigma}}\}_{\boxminus}^{\text{app}} \subseteq \{\underline{\underline{\Sigma}}\}^{num} \tag{C.17}$$

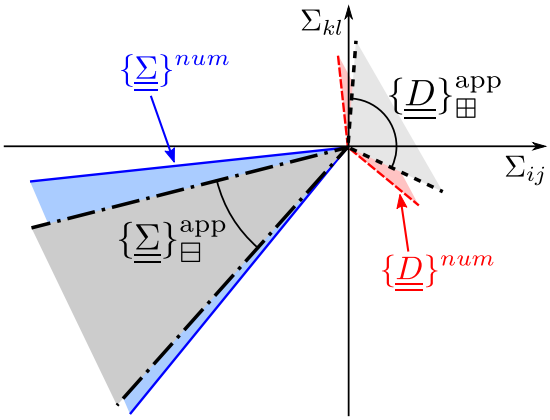


FIGURE C.3 – Représentation des cônes associés aux approximations d'un domaine non borné défini numériquement.

Ce cône $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}^{\text{app}}_{\boxminus}$ peut être défini par une fonction $f^{\text{app}}_{\boxminus}(.)$, dépendant de divers paramètres choisis, plus ou moins nombreux suivant la complexité de l'ensemble $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}^{num}$.

Afin de réaliser une approche cinématique rigoureuse du problème, on utilise $\mathbf{G}^{\text{app}}_{\boxplus}$. On cherche alors à déterminer un champ de vitesse cinématiquement admissible avec les conditions aux limites de ce problème et qui assure les conditions de pertinence du domaine macroscopique. Ne pouvant directement utiliser $\{\underline{\underline{D}}\}^{num}$, on considère que le cône des normales extérieures du domaine approximé est l'ensemble $\{\underline{\underline{D}}\}^{\text{app}}_{\boxplus}$. Ainsi, la fonction d'appui du critère utilisé s'exprime sous la forme :

$$\pi^{\text{app}}_{\boxplus}(\underline{\underline{d}}) = \begin{cases} \pi^{\text{Nell}}_{\boxplus}(\underline{\underline{d}}, \mathbb{J}^i, \underline{\underline{b}}) & \text{si } \underline{\underline{d}} \in \{\underline{\underline{D}}\}^{\text{app}}_{\boxplus} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{C.18}$$

Cette fois, afin de garder un statut de majorant pour le résultat découlant de l'approche cinématique numérique, le cône $\{\underline{\underline{D}}\}^{\text{app}}_{\boxplus}$ doit être inclus dans l'ensemble des normales extérieures au domaine macroscopique à approximer (voir Figure C.3) :

$$\{\underline{\underline{D}}\}^{\text{app}}_{\boxplus} \subseteq \{\underline{\underline{D}}\}^{num} \tag{C.19}$$

où la définition de $\{\underline{\underline{D}}\}^{\text{app}}_{\boxplus}$ peut faire intervenir un nombre limité de paramètres choisis.

Au final, on aboutit à la définition de deux domaines de résistance non bornés, encadrant rigoureusement $\mathbf{G}^{num}$ dans tout l'espace des contraintes (voir Figure C.4). Le choix des cônes $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}^{\text{app}}_{\boxminus}$ et $\{\underline{\underline{D}}\}^{\text{app}}_{\boxplus}$ est lié au domaine de résistance macroscopique initial, obtenu numériquement que l'on a à approximer. Dans la suite de cette annexe, au vu des domaines manipulés, on les mettra sous la forme de cônes du second-ordre.

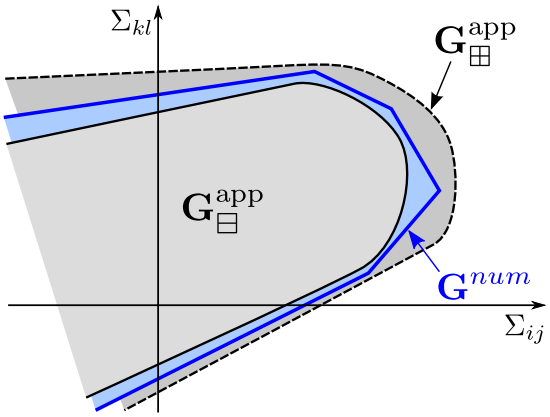


FIGURE C.4 – Approximations inscrite et circonscrite d'un domaine de résistance macroscopique non borné par des sommes d'ellipsoïdes complétées par des cônes.

C.2.2 Application à un domaine de résistance défini en déformations planes

De nombreux problèmes de géotechnique peuvent être considérés comme pouvant être traités en déformations planes dans un plan bien choisi, noté ici (x_1, x_2). C'est par

exemple le cas du calcul de la capacité portante d'un massif de sol sollicité par une semelle infinie suivant la direction orthogonale à ce plan, ou d'un remblai soumis à son poids propre. C'est la raison pour laquelle dans les chapitres 4 et 7, nous avons évalué les domaines de résistance des sols renforcés dans l'hypothèse de déformations planes.

Pour ce type de problèmes, la fonction de résistance du critère dépend des trois composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le plan. Le respect du critère se caractérise donc par la condition :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) \leq 0 \tag{C.20}$$

Pour prendre en compte l'aspect non borné du critère approximé, il convient de choisir la forme de $f_{\boxminus}^{\text{app}}$ en fonction de ces trois composantes. En s'inspirant des fonctions de résistance de critères connus, on choisit de prendre :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \{\underline{\underline{\Sigma}}\}_{\boxminus}^{\text{app}} \Leftrightarrow f_{\boxminus}^{\text{app}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \kappa_1\sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\kappa_2\sigma_{12})^2} + \kappa_4\frac{\sigma_{11} + \kappa_3\sigma_{22}}{2} - \kappa_5 \leq 0 \tag{C.21}$$

où les κ_i permettent de faire varier les directions pour lesquelles il n'existe pas de charge limite. En particulier, avec cette paramétrisation, on peut retrouver le critère de Mohr-Coulomb en déformations planes en prenant :

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 1,\ \kappa_4 = \sin\varphi \text{ et } \kappa_5 = C\cos\varphi \tag{C.22}$$

De la même façon, pour pouvoir procéder à une approche cinématique, il faut choisir une méthode pour décrire la condition de pertinence du domaine de résistance approximé. Pour cela, on doit paramétrer le domaine regroupant les directions du taux de déformation pour lesquelles la fonction d'appui est finie. En déformations planes, ce domaine $\{\underline{\underline{D}}\}$ ne fait intervenir que les composantes comprises dans le plan (x_1, x_2) :

$$\{\underline{\underline{D}}\}_{\boxplus}^{\text{app}} = \{\underline{\underline{D}}\}_{\boxplus}^{\text{app}}(d_{11}, d_{22}, d_{12}) \tag{C.23}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on choisit de définir ce domaine en fonction de paramètres à identifier :

$$\underline{\underline{d}} \in \{\underline{\underline{D}}\}_{\boxplus}^{\text{app}} \Leftrightarrow \varpi_1 d_{11} + \varpi_2 d_{22} \geq \varpi_3\sqrt{\varpi_4^2(d_{11} - d_{22})^2 + \varpi_5^2(2d_{12})^2} \tag{C.24}$$

À titre d'exemple, on retrouve le domaine de pertinence du critère de Mohr-Coulomb en fixant les valeurs suivantes aux ϖ_i :

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_4 = \varpi_5 = 1 \text{ et } \varpi_3 = \sin\varphi \tag{C.25}$$

Les caractéristiques κ_i et ϖ_i dépendent respectivement des cônes $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}^{num}$ ou $\{\underline{\underline{D}}\}^{num}$, et donc du domaine de résistance $\mathbf{G}^{num}$ obtenu numériquement. Cette méthode d'approximation des domaines de résistance macroscopiques des sols renforcés est appliquée au chapitre 8.

* *

*

Annexe D

Formulation numérique d'un problème de calcul à la rupture en déformations planes utilisant un domaine de résistance approximé

D.1 Cas de l'approche statique

L'objectif est ici de déterminer le chargement extrême potentiellement supportable par l'ouvrage homogénéisé sous un chargement donné. Comme on l'a souligné dans le chapitre 5, le mode de chargement fait intervenir un vecteur $\underline{Q}$ dépendant d'un facteur de chargement multiplicatif à optimiser. Si le trajet de chargement est effectué de façon radiale, $\underline{Q}$ dépend d'une direction de chargement $\underline{\tilde{Q}}$ et d'un facteur de chargement λ (voir équation (5.3)).

On a notamment défini l'approche statique (5.4) permettant d'évaluer le domaine des chargements potentiellement supportables pour un milieu Ω. Dans le cas d'un critère de résistance macroscopique approximé, le minorant λ^{s} de la charge extrême λ^{+} se détermine comme suit :

$$\lambda^{+} \geq \lambda^{\mathrm{s}} = \sup \left\{ \lambda \,|\, \underline{\underline{\sigma}} \text{ SA } \lambda \underline{\tilde{Q}} \,;\, \forall \underline{x} \in \Omega,\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in \mathbf{G}_{\boxminus}^{\mathrm{app}}(\underline{x}) \right\} \tag{D.1}$$

où $\mathbf{G}_{\boxminus}^{\mathrm{app}}(\underline{x})$ est un domaine de résistance local, non borné et correspondant à une approximation par l'intérieur du domaine réel, faisant intervenir la somme de N ellipsoïdes.

Comme pour les approches statiques du chapitre 6 (dont on garde les notations et les simplifications d'écriture), on décide d'utiliser des éléments linéaires en contraintes pour traiter des problèmes de structure en déformations planes dans le plan (x_1, x_2). On discrétise donc la structure en n_e éléments de type TRI3, dont chaque sommet est un point d'évaluation de la contrainte. Pour un nœud i de l'élément e, le tenseur des contraintes recherché en déformations planes est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i^e = \begin{pmatrix} \sigma_{11,i}^e & \sigma_{12,i}^e & 0 \\ \sigma_{12,i}^e & \sigma_{22,i}^e & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}^{\mathrm{libre}} \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

On regroupe ses composantes dans le vecteur $\{\sigma\}_i^e$, exprimé comme suit :

$$^t\{\sigma\}_i^e = \left\{\sigma_{11,i}^e \quad \sigma_{22,i}^e \quad \sigma_{12,i}^e\right\}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{D.3}$$

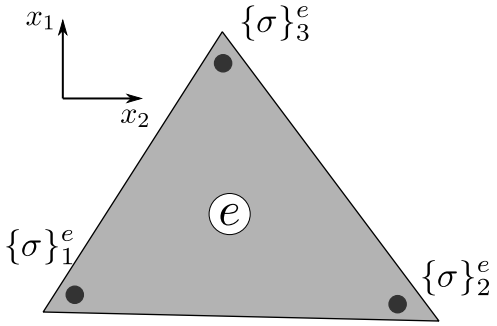


FIGURE D.1 – Élément utilisé pour l'approche statique en déformations planes.

On a déjà pu expliquer au chapitre 4 que l'admissibilité statique du champ de contrainte retenu avec le chargement est assurée en respectant trois types de relations : équation d'équlibre portant sur la divergence de $\underline{\underline{\sigma}}$, continuité du vecteur contrainte entre éléments adjacents et conditions aux limites. Pour la structure discrétisée, les différentes relations d'admissibilité statique peuvent alors se mettre sous la forme d'un système linéaire faisant intervenir le vecteur d'inconnues global $\{\sigma\}$ et λ :

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ SA} \Leftrightarrow [\mathbf{A}^{\text{stat}}]\{\sigma\} = \lambda\{\mathbf{a}^{\text{stat}}\} + \{\mathbf{a}_0^{\text{stat}}\} \tag{D.4}$$

On souhaite que ce champ de contrainte respecte, en tout point, le domaine de résistance local $\mathbf{G}_{\boxminus}^{\text{app}}(\underline{x})$. Le principe de l'approximation est introduit dans l'annexe C, où est donnée notamment la définition suivante du critère approximé :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in \mathbf{G}_{\boxminus}^{\text{app}}(\underline{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{ell}} + \underline{a} + \underline{\underline{\sigma}}^{\text{pert}} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\text{ell}} \in \mathbf{G}_{\boxminus}^{N\text{ell}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\text{pert}} \in \{\underline{\underline{\Sigma}}\}_{\boxminus}^{\text{app}} \end{cases} \tag{D.5}$$

Si on reprend le critère borné défini par la somme de N ellipsoïdes (C.6), on sait que la partie du champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{ell}}$ doit respecter la condition suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{ell}} \in \mathbf{G}_{\boxminus}^{N\text{ell}}(\underline{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{ell}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \underline{\underline{\sigma}}^k \\ \|{}^t\mathbb{J}^k : \underline{\underline{\sigma}}^k\| \leq 1, \quad \forall k = 1, \cdots, N \end{cases} \tag{D.6}$$

où le tenseur $\mathbb{J}^k$ définit les dimensions et l'orientation du k-ième ellipsoïde utilisé dans l'approximation. En écrivant cette condition pour le problème numérique discrétisé, cette première condition de résistance s'écrit au nœud i de l'élément e sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i^{\text{ell},e} \in \mathbf{G}_{\boxminus}^{N\text{ell}} \Leftrightarrow \begin{cases} \{\sigma^{\text{ell}}\}_i^e = \left[\cdots \quad {}^t[\mathbf{J}]_i^{e,k} \quad \cdots\right] \begin{Bmatrix} \vdots \\ \{s\}_i^{e,k} \\ \vdots \end{Bmatrix} \text{ avec } \{s\}_i^{e,k} = \begin{Bmatrix} s_{1,i}^{e,k} \\ s_{2,i}^{e,k} \\ s_{3,i}^{e,k} \end{Bmatrix} \\ \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} (s_{j,i}^{e,k})^2} \leq 1, \quad k = 1, \ldots, N \end{cases} \tag{D.7}$$

De même, le cône $\{\underline{\underline{\Sigma}}\}_{\boxminus}^{\text{app}}$, permettant de prendre en compte le caractère non borné du critère approximé, a été introduit dans l'annexe C. Avec la définition donnée par (C.21), la partie du champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{pert}}$ doit remplir la condition suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{pert}} \in \{\underline{\underline{\Sigma}}\}_{\boxminus}^{\text{app}} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\kappa_1\sigma_{22}}{2}\right)^2 + (\kappa_2\sigma_{12})^2} + \kappa_4\frac{\sigma_{11}+\kappa_3\sigma_{22}}{2} - \kappa_5 \leq 0 \tag{D.8}$$

où les paramètres κ sont fixés et à déterminer en préalable au calcul. En passant à une formulation discrétisée de cette condition, on obtient en chaque nœud du maillage :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i^{\text{pert},e} \in \mathbf{G}^{\text{pert}} \Leftrightarrow \begin{cases} \{\sigma^{\text{pert}}\}_i^e = [\mathbf{R}]_i^e\{r\}_i^e \text{ avec } {}^t\{r\}_i^e = \begin{bmatrix} r_{1,i}^e & r_{2,i}^e & r_{3,i}^e & r_{4,i}^e \end{bmatrix} \\ [\mathbf{K}]_i^e\{r\}_i^e = \kappa_{5,i}^e \\ \sqrt{(r_{3,i}^e)^2 + (r_{4,i}^e)^2} \leq r_{1,i}^e \end{cases} \tag{D.9}$$

Les matrices élémentaires sont définies de la façon suivante :

$$[\mathbf{R}]_i^e = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2\kappa_{1,i}^e}{\kappa_{1,i}^e+\kappa_{3,i}^e} & \dfrac{2\kappa_{3,i}^e}{\kappa_{1,i}^e+\kappa_{3,i}^e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{\kappa_{1,i}^e+\kappa_{3,i}^e} & -\dfrac{2}{\kappa_{1,i}^e+\kappa_{3,i}^e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\kappa_{2,i}^e} \end{bmatrix} \text{ et } [\mathbf{K}]_i^e = \begin{bmatrix} 1 & \kappa_{4,i}^e & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

Ainsi, en combinant (D.5), (D.7) et (D.10), le respect du critère de résistance approximé pour le problème discrétisé peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{G}_{\boxminus}^{\text{app}} \Leftrightarrow \begin{cases} \{\sigma\}_i^e - {}^t[\mathbf{J}]_i^e\{s\}_i^e - [\mathbf{R}]_i^e\{r\}_i^e = \{a\}_i^e \\ [\mathbf{K}]_i^e\{r\}_i^e = \kappa_{5,i}^e \\ \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{3}(s_{j,i}^{e,k})^2} \leq 1, \quad k = 1,\ldots,N \qquad i = 1,2,3\,;\, e = 1,\ldots,n_e \\ \sqrt{(r_{3,i}^e)^2 + (r_{4,i}^e)^2} \leq r_{1,i}^e \end{cases} \tag{D.11}$$

où le vecteur élémentaire $\{a\}_i^e$ contient les coordonnées du centre d'un ellipsoïde intervenant dans l'approximation au nœud i de l'élément e.

En utilisant la définition (D.1) et en regroupant les conditions (D.4) et (D.11) sous une forme globale, on est assuré de trouver un minorant de la charge ultime potentiellement supportable par la structure en effectuant l'optimisation du système suivant :

$$\lambda^{\text{s}} = \max\left\{\lambda \text{ tq } \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{3}(s_{j,i}^{e,k})^2} \leq 1, \quad k = 1,\ldots,N \\ \sqrt{(r_{3,i}^e)^2 + (r_{4,i}^e)^2} \leq r_{1,i}^e \end{array}\right\} i = 1,2,3\,;\, e = 1,\ldots,n_e \\ \begin{bmatrix} [\mathbf{A}^{\text{stat}}] & [0] & [0] \\ [\mathbf{I}_{9n_e}] & -{}^t[\mathbf{J}] & -[\mathbf{R}] \\ [0] & [0] & [\mathbf{K}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{s\} \\ \{r\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda\{\mathbf{a}^{\text{stat}}\} + \{\mathbf{a}_0^{\text{stat}}\} \\ \{a\} \\ \{\kappa_5\} \end{Bmatrix} \end{array}\right]\right\} \tag{D.12}$$

Il suffit ensuite d'adapter les équations relatives aux chargements et aux conditions aux limites pour traiter les problèmes de stabilité en déformations planes. On applique cette formulation numérique dans le chapitre 8 pour déterminer un minorant des chargements extrêmes pour des ouvrages en sol renforcé.

D.2 Cas de l'approche cinématique

Le chapitre 5 donne également une définition du majorant du facteur de chargement extrême λ^+, qui fait intervenir le vecteur des paramètres cinématiques $\underline{\dot{q}}$ associé au vecteur des paramètres de chargement $\underline{\tilde{Q}}$. Ainsi, en adaptant (5.9) au cas d'un domaine respectant un critère $\mathbf{G}_{\boxplus}^{\text{app}}(\underline{x})$, approximant le domaine réel par l'extérieur, on a :

$$\lambda^+ \leq \lambda^{\text{c}} = \inf \left\{ \frac{P_{rm}^{\text{app}}}{\underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\dot{q}}} \,|\, \underline{U} \text{ CA } \underline{\dot{q}} ;\, \underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} > 0 \right\} \tag{D.13}$$

où P_{rm}^{app} est la puissance résistante maximale associée à $\mathbf{G}_{\boxplus}^{\text{app}}$, toujours composé d'une somme de N ellipsoïdes. Dans la suite, et sans changer le statut de la quantité calculée, on imposera $\underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} = 1$.

Comme dans le chapitre 6, on maille le milieu Ω avec n_e éléments *simplexes* de type TRI6. Pour un problème en déformations planes dans le plan (x_1, x_2), les inconnues de vitesse sont comprises dans ce plan et sont notées (u, v). On impose toujours que les discontinuités de vitesse entre les éléments soient nulles. Ainsi les variables nodales de la vitesse, notées u_i^e et v_i^e, sont communes à deux éléments adjacents. Les points d'évaluation internes du taux de déformation sont les trois sommets de chaque élément (voir Figure D.2). Pour un élément e, on regroupe les différentes inconnues dans les vecteurs élémentaires suivant :

$$^t\{U\}^e = \left\{ u_1^e \quad v_1^e \quad \cdots \quad u_6^e \quad v_6^e \right\} \tag{D.14}$$

$$^t\{d\}_i^e = \left\{ d_{11,i}^e \quad d_{22,i}^e \quad 2d_{12,i}^e \right\}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{D.15}$$

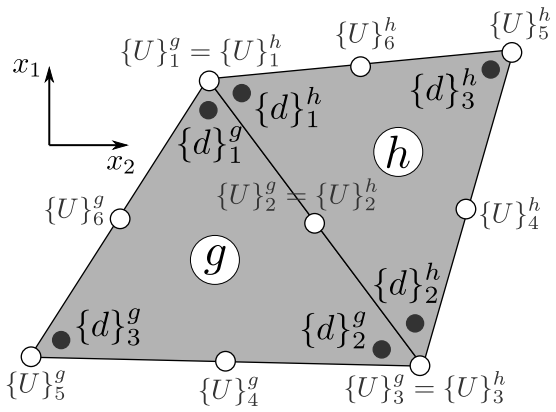


FIGURE D.2 – Éléments utilisés pour l'approche cinématique en déformations planes.

Le lien entre ces deux vecteurs élémentaires est toujours issu de la relation entre le taux de déformation et la vitesse :

$$\{d\}_i^e - [\mathbf{B}]_i^e \{U\}^e = \{0\} \tag{D.16}$$

avec, pour un problème en déformations planes :

$$[\mathbf{B}]_i^e = \begin{bmatrix} \cdots & \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x_1} \end{bmatrix} & \cdots \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, 6 \tag{D.17}$$

où les $N_j^e(\underline{x})$ désignent les fonctions de forme.

L'admissibilité cinématique du champ de vitesse peut, à l'instar de la formulation pour déterminer le domaine de résistance macroscopique, se réduire à un système linéaire :

$$[\mathbf{A}^{\text{cine}}]\{U\} = \{\mathbf{a}^{\text{cine}}\} \tag{D.18}$$

où les entités $[\mathbf{A}^{\text{cine}}]$ et $\{\mathbf{a}^{\text{cine}}\}$ dépendent des conditions aux limites du problème.

L'expression du produit scalaire $\underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\dot{q}}$ peut se mettre sous la forme d'un produit entre le vecteur d'inconnues de vitesse et un vecteur global, dépendant du chargement effectué :

$$\underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} = 1 \;\rightarrow\; {}^t\{F\}\{U\} = 1 \tag{D.19}$$

Pour calculer la puissance résistante maximale associée à $\mathbf{G}_{\boxplus}^{\text{app}}$, il faut revenir à sa définition (C.8), donnée pour une somme d'ellipsoïdes :

$$P_{rm}^{\text{app}} = \int_\Omega \pi_{\boxplus}^{N\text{ell}}(\underline{\underline{d}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{N} \|\mathbb{J}^k : \underline{\underline{d}}\| + \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{d}} \right) \mathrm{d}\Omega \tag{D.20}$$

où $\mathbb{J}^k$ et $\underline{\underline{b}}$ définissent l'ensemble formé par les N ellipsoïdes (orientation, dimensions et centre). Sous la forme discrétisée, cela peut se calculer de la façon suivante :

$$P_{rm}^{\text{app}} = \sum_{e=1}^{n_e} |\Omega_e| \left[\sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{N} t_i^{e,k} + {}^t\{b\}_i^e \{d\}_i^e \right) \right] = {}^t\{T\}\{t\} + {}^t\{b_\Omega\}\{d\}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} (y_{j,i}^{e,k})^2} \leq t_i^{e,k}, \quad k = 1, \ldots, N \\ \{y\}_i^e = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \begin{Bmatrix} y_{j,i}^{e,k} \\ y_{j,i}^{e,k} \\ y_{j,i}^{e,k} \end{Bmatrix} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ [\mathbf{J}]_i^{e,k} \\ \vdots \end{bmatrix} \{d\}_i^e \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3\,;\, e = 1, \ldots, n_e) \tag{D.21}$$

où

$${}^t\{T\} = \left\{ \cdots \quad |\Omega_e| \left\{ \cdots \quad 1 \quad \cdots \right\} \quad \cdots \right\} \tag{D.22}$$

$${}^t\{b_\Omega\} = \left\{ \cdots \quad |\Omega_e| {}^t\{b\}_i^e \quad \cdots \right\} \tag{D.23}$$

Reste à tenir compte de la *condition de pertinence* qui permet de distinguer les taux de déformation pour lesquels la fonction d'appui est infinie. Dans l'annexe C, on indique une façon de définir le cône de pertinence $\{\underline{\underline{D}}\}^{\text{app}}_{\boxplus}$. En ce qui concerne le problème discrétisé, cette condition doit être satisfaite au niveau de chaque sommet :

$$\{d\}^e_i \in \{\underline{\underline{D}}\}^{\text{app}}_{\boxplus} \Leftrightarrow \begin{cases} [\mathbf{M}]^e_i\{d\}^e_i - [\mathbf{Z}]^e_i\{z\}^e_i = \{0\} \\ [\mathbf{L}]^e_i\{z\}^e_i = \{0\} \\ \sqrt{(z^e_{3,i})^2 + (z^e_{4,i})^2} \leq z^e_{1,i} \end{cases} \quad (i = 1,2,3\,;\, e = 1,\ldots,n_e) \tag{D.24}$$

avec

$$^t\{z\}^e_i = \begin{bmatrix} z^e_{1,i} & z^e_{2,i} & z^e_{3,i} & z^e_{4,i} \end{bmatrix} \tag{D.25}$$

et, du fait du paramétrage de $\{\underline{\underline{D}}\}^{\text{pert}}$ retenu (C.24) :

$$[\mathbf{M}]^e_i = \begin{bmatrix} \varpi^e_{1,i} & \varpi^e_{2,i} & 0 \\ \varpi^e_{4,i} & -\varpi^e_{4,i} & 0 \\ 0 & 0 & \varpi^e_{5,i} \end{bmatrix}, \; [\mathbf{Z}]^e_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } [\mathbf{L}]^e_i = \begin{bmatrix} \varpi^e_{3,i} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{D.26}$$

On effectue ensuite les assemblages des différents vecteurs et matrices globaux de façon analogue au chapitre 6. Au final, en tenant compte des différentes conditions qui viennent d'être décrites, le problème numérique à optimiser pour obtenir un majorant de la charge extrême λ^+ est le suivant :

$$\lambda^{\text{c}} = \min\left({}^t\{T\}\{t\} + {}^t\{b_\Omega\}\{d\}\right)$$

$$\text{tel que} \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{3}(y^{e,k}_{j,i})^2} \leq t^{e,k}_i, \quad k = 1,\ldots,N \\ \sqrt{(z^e_{3,i})^2 + (z^e_{4,i})^2} \leq z^e_{1,i} \end{array}\right\} i = 1,2,3\,;\, e = 1,\ldots,n_e \\ \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{9n_e}] & -[\mathbf{B}] & [0] & [0] \\ [0] & [\mathbf{A}^{\text{cine}}] & [0] & [0] \\ \{0\} & {}^t\{F\} & \{0\} & \{0\} \\ [\mathbf{J}] & [0] & -[\mathbf{I}] & [0] \\ [\mathbf{M}] & [0] & [0] & -[\mathbf{Z}] \\ [0] & [0] & [0] & [\mathbf{L}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{U\} \\ \{y\} \\ \{z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\mathbf{a}^{\text{cine}}\} \\ 1 \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \end{array}\right. \tag{D.27}$$

En exprimant les conditions d'admissibilité cinématique de façon à traiter le problème de structure concerné, on obtient après optimisation numérique la valeur du majorant λ^{c} pour un domaine respectant un critère approximé. De plus, on a accès au champ de vitesse (mécanisme de rupture) associé.

* *

*

Bibliographie

[Abdelkrim et de Buhan, 2007] Abdelkrim, M. et de Buhan, P. (2007). An elastoplastic homogenization procedure for predicting the settlement of a foundation on a soil reinforced by columns. *European Journal of Mechanics–A/Solids*, 26(4):736–757.

[Abdi *et al.*, 1994] Abdi, R., de Buhan, P. et Pastor, J. (1994). Calculation of the critical height of a homogenized reinforced soil wall : a numerical approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 18(7):485–505.

[Adalier *et al.*, 2003] Adalier, K., Elgamal, A., Meneses, J. et Baez, J. I. (2003). Stone columns as liquefaction countermeasure in non-plastic silty soils. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 23(7):571–584.

[Ahmadi et Aghdam, 2010] Ahmadi, I. et Aghdam, M. M. (2010). Generalized plane strain meshless local petrov-galerkin method for micromechanics of thermo-mechanical loading of composites. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 5(4):549–566.

[Al-Homoud et Degen, 2006] Al-Homoud, A. S. et Degen, W. S. (2006). Marine stone columns to prevent earthquake induced soil liquefaction. *Geotechnical and Geological Engineering*, 24(3):775–790.

[Baez et Martin, 1993] Baez, J. I. et Martin, G. R. (1993). Advances in the design of vibro systems for the improvement of liquefaction resistance. *In Symposium Ground Improvement*, pages 1–16, Canada. Seventh Annual Vancouver Geotechnical Society.

[Balaam et Booker, 1981] Balaam, N. P. et Booker, J. R. (1981). Analysis of rigid rafts supported by granular piles. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 5(4):379–403.

[Ben Saïd *et al.*, 2004] Ben Saïd, B., Bouassida, M. et de Buhan, P. (2004). Estimation par une méthode d'homogénéisation du tassement d'une fondation sur un sol renforcé par colonnes. *In Symposium International sur l'Amélioration des Sols en Place*, pages 59–66.

[Bensoussan *et al.*, 1978] Bensoussan, A., Papanicolau, G. et Lions, J. L. (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures.* Access Online via Elsevier.

[Bisbos *et al.*, 2005] Bisbos, C. D., Makrodimopoulos, A. et Pardalos, P. M. (2005). Second-order cone programming approaches to static shakedown analysis in steel plasticity. *Optimization Methods and Software*, 20(1):25–52.

[Bleyer et de Buhan, 2013] Bleyer, J. et de Buhan, P. (2013). Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3d composite frame structures. *Computers and Structures*, 129:86–98.

[Bouassida *et al.*, 2003] Bouassida, M., Guetif, Z., De Buhan, P. et Dormieux, L. (2003). Estimation par une approche variationnelle du tassement d'une fondation rigide sur sol renforcé par colonnes. *Revue Française de Géotechnique*, 102(102):21–29.

[Bouassida et Jellali, 2002] Bouassida, M. et Jellali, B. (2002). Capacité portante ultime d'un sol renforcé par une tranchée. *Revue Française de Génie Civil*, 6(7-8):1381–1395.

[Brinkgreve et Vermeer, 1999] Brinkgreve, R. B. J. et Vermeer, P. A. (1999). *Plaxis : finite element code for soil and rock analyses : version 7*. Balkema.

[Broms, 1982] Broms, B. (1982). Lime columns in theory and practice. *In Proc. Int. Conf. of Soil Mechanics, Mexico*, pages 149–165.

[Broms, 2000] Broms, B. (2000). Lime and lime/columns. summary and visions. *In Proceedings of the 4 th International Conference on Ground Improvement Geosystems : Keynotes Lecture*, pages 43–93, Helsinky.

[Cartier *et al.*, 1986] Cartier, G., Waschkowski, E., Poitout, M. J. et Dunoyer, H. (1986). Expérimentation d'une technique innovante de stabilisation de remblais instables par colonnes de sol traité en place. *Bull. Liaison Lab. Ponts Chaussées*, 144:5–18.

[Cast3M, 2003] Cast3M (2003). Online at http ://www-cast3m.cea.fr.

[Cheng, 1998] Cheng, A. H. (1998). On generalized plane strain poroelasticity. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 35(2):183–193.

[Chow, 1996] Chow, Y. K. (1996). Settlement analysis of sand compaction pile. *Soils and Foundations*, 36(1):111–113.

[Christoulas *et al.*, 1997] Christoulas, S., Giannaros, C. et Tsiambaos, G. (1997). Stabilization of embankment foundations by using stone columns. *Geotechnical and Geological Engineering*, 15(3):247–258.

[Corneille et Ré, 2008] Corneille, S. et Ré, A. (2008). Trenchmix : une technique d'amélioration de sol qui contribue au développement durable. *Travaux*, 854:47–50.

[de Buhan, 1986] de Buhan, P. (1986). Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés. Thèse d'Etat. Paris VI.

[de Buhan, 2013] de Buhan, P. (2013). Homogénéisation en calcul à la rupture : du matériau à l'ouvrage. Cours de Master Recherche. École Nationale des Ponts et Chaussées.

[de Buhan *et al.*, 1989] de Buhan, P., Mangiavacchi, R., Nova, R., Pellegrini, G. et Salençon, J. (1989). Yield design of reinforced earth walls by a homogenization method. *Géotechnique*, 39(2):189–201.

[de Buhan et Taliercio, 1991] de Buhan, P. et Taliercio, A. (1991). A homogenization approach to the yield strength of composite materials. *European Journal of Mechanics–A/Solids*, 10(2):129–154.

[Dhatt et Touzot, 1981] Dhatt, G. et Touzot, G. (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Presses Université Laval.

[Dhouib et Blondeau, 2005] Dhouib, A. et Blondeau, F. (2005). *Colonnes ballastées : techniques de mise en oeuvre, domaines d'application, comportement, justification, contrôle, axes de recherche et développement*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

[di Prisco et Nova, 1993] di Prisco, C. et Nova, R. (1993). A constitutive model for soil reinforced by continuous threads. *Geotextiles and Geomembranes*, 12(2):161–178.

[DiMaggio, 1978] DiMaggio, J. A. (1978). Stone columns for highway construction. Rapport technique, Technical Report No. FHWA-DP-46-1, US Department of Transport, Federal Highway Administration.

[Duvaut, 1976] Duvaut, G. (1976). Analyse fonctionnelle en mécanique des milieux continus. homogénéisation. *In* Koiter, W., éditeur : *Theoretical and Applied Mechanics*, pages 119–131, Amsterdam. North-Holland Publishing Company.

[Dvorak et Bahei-El-Din, 1979] Dvorak, G. J. et Bahei-El-Din, Y. A. (1979). Elastic-plastic behavior of fibrous composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(1):51–72.

[Francescato et Pastor, 1997] Francescato, P. et Pastor, J. (1997). Lower and upper numerical bounds to the off-axis strength of unidirectional fiber-reinforced composites by limit analysis methods. *European Journal of Mechanics–A/Solids*, 16(2):213–234.

[Garcea et Leonetti, 2011] Garcea, G. et Leonetti, L. (2011). A unified mathematical programming formulation of strain driven and interior point algorithms for shakedown and limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(11): 1085–1111.

[Gueguin *et al.*, 2013a] Gueguin, M., de Buhan, P. et Hassen, G. (2013a). A homogenization approach for evaluating the longitudinal shear stiffness of reinforced soils : column

versus cross trench configuration. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(18):3150–3172.

[Gueguin *et al.*, 2013b] Gueguin, M., Hassen, G., Bleyer, J. et de Buhan, P. (2013b). An optimization method for approximating the macroscopic strength criterion of stone column reinforced soils. *In Proceedings of the 3rd International Symposium on Computational Geomechanics*, pages 484–494.

[Gueguin *et al.*, 2013c] Gueguin, M., Hassen, G. et de Buhan, P. (2013c). Assessing the liquefaction risk reduction of reinforced soils : a homogenization approach. *In Proceedings of the 3rd International Symposium on Computational Geomechanics*, pages 505–515.

[Gueguin *et al.*, 2014a] Gueguin, M., Hassen, G. et de Buhan, P. (2014a). Approximations of the macroscopic strength criterion of reinforced soils, with application to structural analyses. *In Proc. 14th Int. Conf. of Int. Assoc. Comp. Meth. Adv. Geomech.*

[Gueguin *et al.*, 2014b] Gueguin, M., Hassen, G. et de Buhan, P. (2014b). Numerical assessment of the macroscopic strength criterion of reinforced soils using semidefinite programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99(7):522–541.

[Gueguin *et al.*, 2014c] Gueguin, M., Hassen, G. et de Buhan, P. (2014c). Ultimate bearing capacity of a foundation reinforced by columns or cross trenches under inclined loads : homogenization approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, In Press. DOI :10.1002/nag.2307.

[Hashin, 1983] Hashin, Z. (1983). Analysis of composite materials. *Journal of Applied Mechanics*, 50(2):481–505.

[Hashin et Rosen, 1964] Hashin, Z. et Rosen, B. W. (1964). The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics*, 31:223–232.

[Hassen *et al.*, 2010] Hassen, G., de Buhan, P. et Abdelkrim, M. (2010). Finite element implementation of a homogenized constitutive law for stone column-reinforced foundation soils, with application to the design of structures. *Computers and Geotechnics*, 37(1):40–49.

[Hassen *et al.*, 2013] Hassen, G., Gueguin, M. et de Buhan, P. (2013). A homogenization approach for assessing the yield strength properties of stone column reinforced soils. *European Journal of Mechanics–A/Solids*, 37:266–280.

[Hill, 1952] Hill, R. (1952). The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 65(5):349–354.

[Huybrechts et Denies, 2013] Huybrechts, N. et Denies, N. (2013). General report of tc 211 ground improvement. *In Proceedings of the 18th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, pages 2417–2424.

[Jeanty *et al.*, 2013] Jeanty, J. M., Mathieu, F., Benhamou, L. et Berthelot, P. (2013). Importance et applications des inclusions de grande inertie. *In Proceedings of the 18th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, pages 2505–2508.

[Jellali *et al.*, 2005] Jellali, B., Bouassida, M. et de Buhan, P. (2005). A homogenization method for estimating the bearing capacity of soils reinforced by columns. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(10):989–1004.

[Jellali *et al.*, 2007] Jellali, B., Bouassida, M. et de Buhan, P. (2007). A homogenization approach to estimate the ultimate bearing capacity of a stone column reinforced foundation. *International Journal of Geotechnical Engineering*, 1(9):61–69.

[Jellali *et al.*, 2011] Jellali, B., Bouassida, M. et de Buhan, P. (2011). Stability analysis of an embankment resting upon a column-reinforced soil. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 35(11):1243–1256.

[Jiang *et al.*, 2002] Jiang, M., Jasiuk, I. et Ostoja-Starzewski, M. (2002). Apparent elastic and elastoplastic behavior of periodic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 39(1):199–212.

[Kammoun *et al.*, 2010] Kammoun, Z., Pastor, F., Smaoui, H. et Pastor, J. (2010). Large static problem in numerical limit analysis : A decomposition approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 34(18):1960–1980.

[Kanno *et al.*, 2006] Kanno, Y., Martins, J. A. C. et Pinto da Costa, A. (2006). Three-dimensional quasi-static frictional contact by using second-order cone linear complementarity problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(1):62–83.

[Koutsourelakis *et al.*, 2002] Koutsourelakis, S., Prévost, J. H. et Deodatis, G. (2002). Risk assessment of an interacting structure–soil system due to liquefaction. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 31(4):851–879.

[Krabbenhøft et Damkilde, 2003] Krabbenhøft, K. et Damkilde, L. (2003). A general non-linear optimization algorithm for lower bound limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(2):165–184.

[Krabbenhøft *et al.*, 2007] Krabbenhøft, K., Lyamin, A. V. et Sloan, S. W. (2007). Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs. *International Journal of Solids and Structures*, 44(5):1533–1549.

[Krabbenhøft *et al.*, 2008] Krabbenhøft, K., Lyamin, A. V. et Sloan, S. W. (2008). Three-dimensional mohr-coulomb limit analysis using semidefinite programming. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(11):1107–1119.

[Lee et Pande, 1998] Lee, J. S. et Pande, G. N. (1998). Analysis of stone-column reinforced foundations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22(12):1001–1020.

[Lyamin et Sloan, 2002a] Lyamin, A. V. et Sloan, S. W. (2002a). Lower bound limit analysis using non-linear programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(5):573–611.

[Lyamin et Sloan, 2002b] Lyamin, A. V. et Sloan, S. W. (2002b). Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(2):181–216.

[Lysmer, 1970] Lysmer, J. (1970). Limit analysis of plane problems in soil mechanics. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations*, 96:1311–1334.

[Magnan et Pilot, 2012] Magnan, J. P. et Pilot, G. (2012). Amélioration des sols. *Techniques de l'Ingénieur : Construction*, 1(C255):1–14.

[Makrodimopoulos, 2010] Makrodimopoulos, A. (2010). Remarks on some properties of conic yield restrictions in limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 26(11):1449–1461.

[Makrodimopoulos et Martin, 2006] Makrodimopoulos, A. et Martin, C. M. (2006). Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(4):604–634.

[Makrodimopoulos et Martin, 2007] Makrodimopoulos, A. et Martin, C. M. (2007). Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(6):835–865.

[Makrodimopoulos et Martin, 2008] Makrodimopoulos, A. et Martin, C. M. (2008). Upper bound limit analysis using discontinuous quadratic displacement fields. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(11):911–927.

[Martin et Makrodimopoulos, 2008] Martin, C. M. et Makrodimopoulos, A. (2008). Finite-element limit analysis of mohr–coulomb materials in 3d using semidefinite programming. *Journal of Engineering Mechanics*, 134(4):339–347.

[Michalowski et Zhao, 1995] Michalowski, R. et Zhao, A. (1995). Continuum versus structural approach to stability of reinforced soil. *Journal of Geotechnical Engineering*, 121(2):152–162.

[MOSEK,] MOSEK. The mosek optimization software. Available from : http ://www. mosek. com [August 2014].

[Muñoz *et al.*, 2012] Muñoz, J. J., Huerta, A., Bonet, J. et Peraire, J. (2012). A note on upper bound formulations in limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(8):896–908.

[Nguyen *et al.*, 2013] Nguyen, T. V., Rayamajhi, D., Boulanger, R. W., Ashford, S. A., Lu, J., Elgamal, A. et Shao, L. (2013). Design of dsm grids for liquefaction remediation. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 139(11):1923–1933.

[Okyay et Dias, 2010] Okyay, U. S. et Dias, D. (2010). Use of lime and cement treated soils as pile supported load transfer platform. *Engineering Geology*, 114(1):34–44.

[Pastor *et al.*, 2011] Pastor, F., Kondo, D. et Pastor, J. (2011). Numerical limit analysis bounds for ductile porous media with oblate voids. *Mechanics Research Communications*, 38(5):350–354.

[Pastor, 1983] Pastor, J. (1983). Application de la théorie de l'analyse limite aux milieux isotropes et orthotropes de révolution. Thèse d'Etat. INP Grenoble.

[Poorooshasb et Meyerhof, 1997] Poorooshasb, H. B. et Meyerhof, G. G. (1997). Analysis of behavior of stone columns and lime columns. *Computers and Geotechnics*, 20(1):47–70.

[Popescu *et al.*, 1997] Popescu, R., Prévost, J. H. et Deodatis, G. (1997). Effects of spatial variability on soil liquefaction : some design recommendations. *Géotechnique*, 47(5): 1019–1036.

[Priebe, 1976] Priebe, H. J. (1976). Abschätzung des setzungsverhaltens eines durch stopfverdichtung verbesserten baugrundes. *Die Bautechnik*, 53(5):160–162.

[Priebe, 1995] Priebe, H. J. (1995). The design of vibro replacement. *Ground Engineering*, 28(10):31–37.

[Russel, 1973] Russel, W. B. (1973). On the effective moduli of composite materials : effect of fiber length and geometry at dilute concentrations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 24(4):581–600.

[Salençon, 1983] Salençon, J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite.* Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

[Salençon, 2013] Salençon, J. (2013). *Yield design.* ISTE–Wiley, Hoboken, NJ USA.

[Salençon et Pecker, 1995] Salençon, J. et Pecker, A. (1995). Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. i : Purely cohesive soil. *European*

Journal of Mechanics–A/Solids, 14(3):349–375.

[Sánchez-Palencia, 1980] Sánchez-Palencia, E. (1980). Non-homogeneous media and vibration theory. *In* Springer-Verlag, éditeur : *Non-homogeneous media and vibration theory*, volume 127.

[Seed et Idriss, 1971] Seed, H. B. et Idriss, I. M. (1971). Simplified procedure for evaluating soil liquefaction potential. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations*, 97(9):1249–1273.

[Sloan, 1988] Sloan, S. W. (1988). Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 12(1):61–77.

[Sloan, 1989] Sloan, S. W. (1989). Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 13(3):263–282.

[Sloan, 2013] Sloan, S. W. (2013). Geotechnical stability analysis. *Géotechnique*, 63(7): 531–572.

[Sloan et Kleeman, 1995] Sloan, S. W. et Kleeman, P. W. (1995). Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1):293–314.

[Soyez, 1985] Soyez, B. (1985). Méthodes de dimensionnement des colonnes ballastées. *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 135(135):35–51.

[Sturm, 1999] Sturm, J. F. (1999). Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1-4):625–653.

[Suquet, 1982] Suquet, P. (1982). Plasticité et homogénéisation. Thèse d'Etat. Paris VI.

[Suquet, 1987] Suquet, P. (1987). *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*, chapitre Homogenization techniques for composite, pages 193–278. Numéro 272 de Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin.

[Taliercio, 2005] Taliercio, A. (2005). Generalized plane strain finite element model for the analysis of elastoplastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 42(8):2361–2379.

[Turgeman, 1983] Turgeman, S. (1983). Contribution au calcul des charges limites en milieux isotropes et orthotropes de révolution par une approche cinématique numérique. Thèse d'Etat. INP Grenoble.

[Vicente da Silva et Antao, 2007] Vicente da Silva, M. et Antao, A. N. (2007). A non-linear programming method approach for upper bound limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(10):1192–1218.

[Waechter *et al.*, 2009] Waechter, A., Laird, C., Margot, F. et Kawajir, Y. (2009). Introduction to ip-opt : A tutorial for downloading, installing, and using ip-opt.

[Wang *et al.*, 2002] Wang, J. G., Leung, C. F. et Ichikawa, Y. (2002). A simplified homogenisation method for composite soils. *Computers and Geotechnics*, 29(6):477–500.

[Youd et Idriss, 2001] Youd, T. L. et Idriss, I. M. (2001). Liquefaction resistance of soils : summary report from the 1996 nceer and 1998 nceer/nsf workshops on evaluation of liquefaction resistance of soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 127(4):297–313.