



**HAL**  
open science

# Méthodologie d'analyse structurelle et de restauration d'oeuvres sculptées

Laura Michel

► **To cite this version:**

Laura Michel. Méthodologie d'analyse structurelle et de restauration d'oeuvres sculptées. Autre. Université d'Orléans, 2013. Français. NNT : 2013ORLE2068 . tel-01058782

**HAL Id: tel-01058782**

**<https://theses.hal.science/tel-01058782>**

Submitted on 28 Aug 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ D'ORLÉANS**



**ÉCOLE DOCTORALE ENERGIE - MATERIAUX - SCIENCES  
DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS**

Laboratoire PRISME - CRMD

**THÈSE** présentée par :

**Laura MICHEL**

soutenue le : **10 décembre 2013**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Génie Civil**

**Méthodologie d'analyse structurelle et de restauration  
d'œuvres sculptées**

**THÈSE dirigée par :**

**Dashnor HOXHA**  
**Muzahim AL-MUKHTAR**

Professeur, Université d'Orléans  
Professeur, Université d'Orléans

**RAPPORTEURS :**

**Joëlle RISS**  
**Mountaka SOULEY**

Professeur, Université Bordeaux 1  
Directeur de Recherche, INERIS

**JURY :**

**Joëlle RISS**  
**Mountaka SOULEY**  
**Jian-Fu SHAO**  
**Pascal PERROTIN**  
**Dashnor HOXHA**  
**Muzahim AL-MUKHTAR**  
**Xavier BRUNETAUD**  
**Duc-Phi DO**

Professeur, Université Bordeaux 1  
Directeur de Recherche, INERIS  
Professeur, Université de Lille  
Maître de Conférences - HDR, Université de Savoie  
Professeur, Université d'Orléans  
Professeur, Université d'Orléans  
Maître de Conférences, Université d'Orléans  
Maître de Conférences, Université d'Orléans



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier M. Dashnor Hoxha, pour m'avoir conseillée, guidée, mais aussi encouragée, pendant ces trois années.

Je tiens également à remercier M. Muzahim Al-Mukhtar sans qui cette thèse n'aurait pas été possible ; il m'a fait confiance à l'issue de mon stage de M2 et m'a proposé cette thèse m'ouvrant entre autres les portes de la conservation du patrimoine culturel.

Mes remerciements vont également à M. Duc-Phi Do pour la gentillesse et sa patience, pour tous les conseils et les pénibles relectures en tous genres qu'il a bien voulu effectuer.

Je n'oublie pas M. Xavier Brunetaud qui m'a épaulée pendant ces années Orléannaises, je le remercie pour son soutien et ses idées précieuses.

Merci également à Mme Joëlle Riss et M. Montaka Souley pour avoir accepté de juger ce travail et pour la bienveillance qu'ils ont manifestée à mon égard. Je tiens aussi à remercier Ms. Pascal Perrotin et Jian-Fu Shao, qui m'ont tout comme les rapporteurs soumis de nombreuses remarques et suggestions qui m'ayant permis d'améliorer la qualité de ce mémoire, et je leur en suis très reconnaissant.

Je vous remercie d'avoir accepté de participer à mon jury de soutenance.

Je remercie Mme Christine Mounaïm-Rousselle et M. Azzedine Kourta, directeurs du laboratoire PRISME, ainsi que Mmes Marie-Louise Saboungie et Sylvie Bonnamy directrices du laboratoire CRMD, pour m'avoir accueilli au sein de ces institutions.

Je remercie grandement les acteurs du patrimoine culturel ayant participé au projet REPTURE pour leur accueil dans leur univers, leurs musées, etc. Merci aussi à Benoit Coignard, sa femme et son père pour leurs nombreuses et pédagogiques présentations du métier de restaurateur.

Mes remerciements vont aussi à Christophe Auvray, Laurent Shoumaker, Patrice et Momo pour l'hospitalité dont ils ont fait preuve lors des deux séjours que j'ai effectués dans leur laboratoire et pour le travail qu'ils ont réalisé sur mon projet.

Merci également à l'équipe enseignante au sens large, l'ambiance de travail

ne serait pas aussi bonne sans la camaraderie et la bonne ambiance de chacun. Merci à tous ceux qui ont participé aux discussions et aux franches rigolades devant une boisson chaude.

Je citerais ceux avec qui j'ai pu discuter de tout, notamment des angoisses et des joies de la thèse : Kévin, Audrey et Sarah, mais aussi Xavier qui a très bien porté sa double casquette, mais aussi Naïma, Delphine, Brigitte, Névilla, Lydie, Stanislas, Chantal, Mikaël, les techniciens : Pierre, Michel, Jérôme et Alain, mes co-bureaux : Sen, Ha et Buy...

C'est vous qui avez fait de mes années Orléannaises une aventure riche, joyeuse, étonnante et vivante...

Mes remerciements également à ceux du CRMD pour les bons moments partagés, Quentin, Ludovic, Julie, Alain, Roland, Pierre, Phiphi le mécano...

Milles merci à Nicole, Jenifer, sylvie et Annie pour vos conseils et merci d'avoir tâchée de me guider à travers le monde de la paperasse administrative.

Je pense aussi à la fin de ma thèse pendant laquelle le personnel du Locie m'a chaleureusement accueilli et fourni les conditions idéales pour terminer sereinement. Merci à Benoit, Elisabeth, Pascal, Jean-Patrick, Parfait, Nina, Thierry, Maxime, Michel et Julien.

Je remercie également ma famille et mes amis pour leur soutien quotidien, notamment tata André pour la logistique avec Virgule, ma mère pour les visites régulières, Marx et ma soeur pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon bien-être pendant ses trois ans. Merci aussi à Elodie, Maïwen, Cécilia et Marx pour leurs relectures attentives.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction, contexte</b>	<b>1</b>
<b>1 Reconstruction du modèle géométrique</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Numérisation des œuvres . . . . .	8
1.2.1 Réalisation d'un scan - fonctionnement . . . . .	8
1.2.2 Matériel . . . . .	9
1.2.3 Prises de vue . . . . .	10
1.2.4 Traitement des scans . . . . .	12
1.3 Opérations sur les scans . . . . .	16
1.3.1 Nettoyage du modèle géométrique . . . . .	16
1.3.2 Recalage . . . . .	16
1.3.3 Fusion . . . . .	19
1.4 Opérations sur les maillages . . . . .	20
1.4.1 Nettoyage . . . . .	21
1.4.2 Décimation . . . . .	24
1.4.3 Lissage . . . . .	26
1.4.4 Optimisation/adaptation . . . . .	27
1.4.5 Remontage du modèle géométrique . . . . .	28
1.5 Reconstruction des volumes et remaillage . . . . .	31
1.5.1 Volumes et interfaces . . . . .	32
1.5.2 Modélisation d'éléments de renfort . . . . .	35
1.6 Conclusion . . . . .	40
<b>2 Simulations du comportement mécanique</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction . . . . .	41
2.2 Description de FLAC3D . . . . .	43
2.2.1 Modélisation des interfaces . . . . .	45
2.2.2 Éléments structuraux 1D . . . . .	46

2.3	Hypothèses des calculs numériques . . . . .	49
2.4	Application à la statue de Neptune . . . . .	50
2.4.1	Simulation du comportement de l'œuvre sans restauration . . . . .	51
2.4.2	Vérification de la stabilité de l'œuvre restaurée par insertion de renforts . . . . .	52
2.4.3	Stabilité de la restauration par collage . . . . .	65
2.4.4	Conclusion sur la modélisation de la statue de Neptune . . . . .	72
2.5	Application à la statue de Cadmus . . . . .	73
2.5.1	Contexte . . . . .	73
2.5.2	Hypothèses de modélisation . . . . .	74
2.5.3	Paramètres de modélisation . . . . .	78
2.5.4	Vérification de la stabilité sous sollicitation statique . . . . .	78
2.5.5	Vérification de la stabilité sous sollicitations dynamiques . . . . .	79
2.5.6	Conclusion sur la modélisation de la statue de Cadmus . . . . .	82
2.6	Conclusion . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Expérimentations</b> . . . . .	<b>85</b>
3.1	Introduction . . . . .	85
3.2	Caractérisations physico-chimiques . . . . .	86
3.2.1	Caractérisations minéralogiques . . . . .	86
3.2.2	Caractérisations physico-chimiques . . . . .	89
3.2.3	Conclusion . . . . .	91
3.3	Essai non destructif . . . . .	91
3.3.1	Vitesses des ondes . . . . .	92
3.4	Essais destructifs : essais triaxiaux . . . . .	96
3.5	Caractérisation d'interfaces en contact . . . . .	99
3.5.1	Caractérisation mécanique des interfaces . . . . .	99
3.5.2	Caractérisation morphologique . . . . .	122
3.6	Conclusion . . . . .	133
<b>4</b>	<b>Modélisation prédictive</b> . . . . .	<b>135</b>
4.1	Introduction . . . . .	135
4.2	Analyse descriptive des variables . . . . .	138
4.2.1	Boîtes de Tukey . . . . .	139
4.2.2	Classification Hiérarchique Ascendante . . . . .	143
4.2.3	Matrice de corrélation . . . . .	145
4.2.4	Analyse en composantes principales (ACP) . . . . .	149
4.3	Modélisation prédictive . . . . .	153
4.3.1	Régression linéaire multiple . . . . .	154
4.3.2	Régression sur la matrice mécanique entière : PLS . . . . .	160

4.3.3 Résultats . . . . .	162
4.4 Conclusion . . . . .	165
<b>Conclusion</b>	<b>171</b>
<b>A Étude paramétrique : ancrage du tirant</b>	<b>175</b>
A.0.1 Constantes . . . . .	175
A.0.2 Variables . . . . .	176
<b>B Étude paramétrique sur le tirant, outil "cable"</b>	<b>179</b>
<b>C Étude paramétrique : outil "pile"</b>	<b>185</b>
<b>D Modélisation de l'anneau central des goujons</b>	<b>189</b>
<b>E Stabilité de la restauration par collage</b>	<b>193</b>
<b>F Résultats des analyse sur lames minces</b>	<b>197</b>
<b>G État de surface</b>	<b>203</b>
G.1 Ouverture . . . . .	204
G.2 Rugosité . . . . .	204
G.3 inadéquation et zone de contact . . . . .	207
<b>H Modèles de comportement des joints rocheux</b>	<b>209</b>
<b>I Résultats des essais mécaniques sur les joints</b>	<b>213</b>
I.1 Joints de marbre . . . . .	213
I.2 Joints de mortier . . . . .	215
<b>J Essais sur les joints rocheux</b>	<b>217</b>
<b>K Paramètres de morphologie</b>	<b>225</b>
<b>L Matrice de corrélation des variables</b>	<b>233</b>
<b>M Validations croisées sur les régressions pas à pas permettant de modéliser les Ks</b>	<b>239</b>
<b>N Résultats des régressions PLS</b>	<b>251</b>





# Table des figures

1.1	Fonctionnement d'un scanner laser utilisant la méthode de triangulation, tiré de Barbero et al [9] . . . . .	9
1.2	La statue Cadmus combattant le dragon . . . . .	11
1.3	Numérisation de Cadmus combattant le dragon . . . . .	12
1.4	Recalage, source : <a href="http://www.technodigit.com">http://www.technodigit.com</a> . . . . .	13
1.5	Comparaison des taux de convergence pour le recalage de maillages fractals pour l'algorithme ICP et plusieurs de ses variantes, Rusinkiewicz [15]. . . . .	15
1.6	Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé : recalage et résultat après fusion . . . . .	19
1.7	Poignée vue de l'intérieur d'un maillage fermé . . . . .	20
1.8	Erreurs sur le modèle de Cadmus combattant le dragon après fusion . . . . .	21
1.9	Illustration des poignées et correspondance avec le genre d'un objet, tiré de Martinez [19]. . . . .	24
1.10	Décimation du modèle de Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé . . . . .	25
1.11	Lissage du modèle de Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé . . . . .	27
1.12	Illustration de trois opérations d'adaptation, tiré de Sala [20] . . . . .	29
1.13	Emboitement de l'interface de la jambe gauche de Psyché . . . . .	31
1.14	Reconstruction des maillages surfaciques et volumiques sous GID . . . . .	32
1.15	Poutre et renforts modélisés en 3D par XU [27], Pull-out modélisé en 2D par Berto [26] et comparaison entre homogénéisation et modélisation 1D des renforts par Dias [28] . . . . .	36
1.16	Reconstitution du maillage de la statue de Psyché et de ses renforts simplifiés . . . . .	36
1.17	Ensemble goujon-fourreau-colle réalisé par DAO . . . . .	39
1.18	Reconstitution du maillage de la statue de Neptune avec l'empreinte de ses renforts . . . . .	39

2.1	Cycle de base de calcul par la méthode explicite des différences finies, tiré du manuscrit de Billaux [30] . . . . .	45
2.2	Connexion des éléments structuraux aux points du maillage par l'intermédiaire de ressorts . . . . .	47
2.3	Tendance au basculement, sous leur poids propre, des blocs de la statue non restaurée, a) basculement du torse vue de face, b) basculement de la tête vue de derrière . . . . .	51
2.4	Géométrie de la statue (a, b, c), goujons mis en place taraudés en haut et simple en bas (d) et ancrage du tirant (e) . . . . .	53
2.5	Exemple de modélisation du goujon entre base et genou : en partie basse, son extrémité est fixée . . . . .	55
2.6	Déplacements (m) dans le cas de la statue modélisée sans le tirant . . . . .	59
2.7	Contraintes normales sur les 3 interfaces de la statue modélisée sans le tirant, de gauche à droite : C, B et A, voir figure 2.4 (c) . . . . .	60
2.8	Contraintes tangentielles sur les trois interfaces de la statue modélisée sans le tirant, de gauche à droite : C, B et A, voir figure 2.4 (c) . . . . .	60
2.9	Déplacements (a) verticaux et (b) horizontaux . . . . .	62
2.10	Contraintes normales (en haut) et tangentielles (en bas) sur les trois interfaces de gauche à droite : C, B et A (figure 2.4 (c).) . . . . .	63
2.11	Contrainte maximale en compression sur la statue avec tous les éléments de renfort, interface B . . . . .	63
2.12	(a) Contraintes dans la statue autour de l'ancrage du tirant, (b) Impact des ancrages dans le marbre, (c) Comportement des goujons . . . . .	64
2.13	Comparaison entre les zones de frottement et les contraintes normales avec tous les éléments de renfort . . . . .	65
2.14	Contrainte dans la colle de l'interface du bas (simulation en position debout) . . . . .	68
2.15	Schéma des défauts de collage et des trois cas simulés . . . . .	69
2.16	Illustrations de la simulation en position couchée, représentation des zones d'appuis et des différents blocs . . . . .	70
2.17	Contraintes dans la colle avec défauts internes, gros plan sur la fracture basse . . . . .	71
2.18	Évolution de l'état de dégradation de l'œuvre, illustration entre une photo actuelle (à gauche) et antérieure (à droite) . . . . .	74
2.19	État de dégradation de l'œuvre . . . . .	75
2.20	Spectrogramme mesuré par Boulanger [50] et simulé des vibrations d'un siège de conducteur de camion (à gauche) Accélérogramme utilisé comme source de vibrations (à droite) . . . . .	77

2.21	Géométrie du modèle . . . . .	77
2.22	Contraintes principales maximum (à gauche) et minimum (à droite) dans l'œuvre soumise à son poids propre . . . . .	79
2.23	principales maximum (à gauche) et minimum (à droite) dans l'œuvre en cas de sollicitations dynamiques . . . . .	81
2.24	Contraintes de compression (à gauche) et de traction (à droite) dans l'œuvre protégée par un plâtre en cas de sollicitations dynamiques . . . . .	81
3.1	Méthodologie proposée pour l'identification des paramètres mécaniques du matériau d'une œuvre . . . . .	87
3.2	Résultat DRX . . . . .	90
3.3	Résultat Porosimétrie Hg . . . . .	91
3.4	Échantillon et système d'acquisition . . . . .	92
3.5	Résultats des essais dans les deux direction . . . . .	94
3.6	Représentation simplifiée dans la direction 2, de l'onde P et des deux ondes S polarisées suivant XX et XY . . . . .	94
3.7	Comparaison des déformations axiales et transversales au cours de la phase de compression isotrope . . . . .	97
3.8	Évolution des déformations axiales et transversales en fonction de $\sigma_1 - \sigma_3$ sous différentes pressions de confinement . . . . .	97
3.9	Détermination des valeur de C et $\varphi$ . . . . .	98
3.10	Modèles de rugosité de surfaces, tirée de Patton [67] . . . . .	100
3.11	Critère de rupture de Mohr-Coulomb utilisé par Patton, tiré du manuscrit de Saïd [70], a) Enveloppe bilinéaire pour les joints tenant compte des aspérités [71], b) Enveloppe linéaire pour les interfaces . . . . .	102
3.12	Contact entre éléments, tiré du manuscrit de Duriez [72] : a) Définition géométrique, b) Modélisation selon Cundal [73] . . . . .	102
3.13	Variation de la contrainte de cisaillement en fonction du déplacement tangentiel de Goodman [68, 71] . . . . .	103
3.14	Décomposition d'un essai de cisaillement , adapté de Gentier [76] . . . . .	105
3.15	Comportement en cisaillement en CNL, adapté de Goodman [68] . . . . .	105
3.16	Comportement en cisaillement du modèle de Barton, tiré de Barton [79] . . . . .	106
3.17	Schéma de la machine de cisaillement, adapté de Belem [84] . . . . .	109
3.18	Schéma des morphologies des joints, marbre à gauche et mortier à droite . . . . .	110
3.19	Résultat en compression simple, joints de marbre . . . . .	111

3.20	Résultat en compression simple, joints de mortier . . . . .	111
3.21	Mauvaise modélisation de la courbe de raideur normale du joint de marbre 2 par une fonction affine. . . . .	112
3.22	Détermination de $K_n$ pour le joint de mortier n°1, voir illustration des profils type des joints, figure 3.18 . . . . .	113
3.23	Évolution de la raideur normale, joints de marbre . . . . .	113
3.24	Évolution de la raideur normale, joints de mortier . . . . .	114
3.25	Utilisation du modèle de Bandis en compression simple, estimation de la fermeture maximale . . . . .	114
3.26	Cisaillement du joint de marbre 3 sous 2 MPa, essai 4 . . . . .	115
3.27	Cisaillement du joint de marbre 4, essais 1, 2 et 3 . . . . .	116
3.28	Cisaillement du joint de marbre 1, essais 2 . . . . .	116
3.29	Évolution de $K_s$ avec la contrainte normale, joints de marbre .	118
3.30	Évolution de $K_s$ avec la contrainte normale, joints de mortier .	119
3.31	Détermination de $K_s$ pour le joint de mortier n°1 selon deux ajustements : puissance en haut et linéaire en bas, voir illustration des profils type des joints, figure 3.18 . . . . .	120
3.32	Évolution de $K_s$ avec la contrainte normale, joints de marbre .	121
3.33	Définition du concept d'ordre des aspérités, illustré sur l'interface du bas de la statue de Neptune . . . . .	123
3.34	Rendu des surfaces scannées des joints de marbre n°1, 3 et 6 .	124
3.35	Valeurs prises par $D$ suivant plusieurs méthodes et en fonction de la finesse du maillage . . . . .	127
3.36	Valeurs centrées-réduites prises par $D$ suivant plusieurs méthodes et en fonction de la finesse du maillage . . . . .	128
3.37	Valeurs prises par $D$ en fonction de la finesse du maillage pour les méthodes du comptage de cubes et de triangulation . . . .	129
3.38	Valeurs prises par les différentes hauteurs calculées en fonction de la finesse du maillage . . . . .	129
3.39	Valeurs centrées et réduites par rapport à chaque joint (en haut) et par rapport à l'ensemble des joints étudiés (en bas) de $\theta$ et du cos de l'angle $\varphi$ calculées en fonction de la finesse du maillage . . . . .	130
3.40	Valeurs centrées et réduites par rapport à chaque joint de l'asymétrie et du Kurtosis calculées en fonction de la finesse du maillage . . . . .	131
3.41	Valeurs centrées et réduites par rapport à chaque joint des paramètres issus du variogramme et de paramètres spatiaux calculées en fonction de la finesse du maillage . . . . .	131
4.1	Lecture des boîtes de Tukey . . . . .	139

4.2	Boîtes de Tukey des variables de morphologie des joints . . . .	140
4.3	Boîtes de Tukey des variables mécaniques des joints de marbre	142
4.4	Boîtes de Tukey des variables mécaniques des joints de mortier	142
4.5	Dendrogramme des variables . . . . .	144
4.6	ACP sur la série d'essai sur marbre . . . . .	150
4.7	ACP sur la série d'essai sur mortier . . . . .	151
4.8	Graphique des régressions linéaires multiples de paramètres mécaniques pour le mortier et le marbre . . . . .	159
4.9	Variance expliquée et erreur aux moindres carrés en fonction du nombre de composante pour la série d'essai sur marbre . .	163
4.10	Variance expliquée et erreur aux moindres carrés en fonction du nombre de composante pour la série d'essai sur mortier . .	164
4.11	Corrélation entre la réponse du modèle et les variables mesu- rées pour la série d'essai sur marbre . . . . .	165
4.12	Corrélation entre la réponse du modèle et les variables mesu- rées pour la série d'essai sur mortier . . . . .	166
4.13	Poids des composantes pour chaque paramètre de morphologie et chaque composante pour la série d'essai sur marbre . . . .	167
4.14	Poids des composantes pour chaque paramètre de morphologie et chaque composante pour la série d'essai sur mortier . . . .	168
4.15	Résidus pour chaque paramètre mécanique pour la série d'essai sur marbre . . . . .	169
4.16	Résidus pour chaque paramètre mécanique pour la série d'essai sur mortier . . . . .	170
A.1	Géométrie du problème . . . . .	176
B.1	Variation de la cohésion normale de l'ancrage du tirant en fonction du pourcentage de sollicitation du goujon le plus chargé	179
B.2	Variation de la cohésion normale de l'ancrage du tirant en fonction de sa prétension . . . . .	180
B.3	A gauche : Effet de la prétension des tirants sur les goujons n°3, 4 et 5. A droite : Effet sur le marbre de deux valeurs testées de cohésion à l'ancrage du tirant, (a) $10^7\text{N/m}$ , (b) $8.10^2\text{N/m}$	182
B.4	Comparaison des déplacements horizontaux entre deux valeurs testées de cohésion à l'ancrage du tirant, (a) $10^7\text{N/m}$ , (b) $8.10^2\text{N/m}$ . . . . .	183
B.5	Influence de la cohésion d'ancrage sur la distribution des contraintes dans le marbre à l'interface B : a) sans cohésion, b) cohésion maximale . . . . .	183

C.1	Variation de la cohésion normale et de la raideur normale dans les goujons en fonction du pourcentage de sollicitation . . . . .	188
D.1	Géométrie des tests sur la modélisation des goujons . . . . .	191
E.1	Joint imparfait entre le marbre et la colle : pointe d'une fissure	195
E.2	Modélisation de la statue pour le calcul analytique des facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	195
E.3	Géométrie du problème de la solution analytique proposée par Forman et Shivakumar [104] . . . . .	196
E.4	Résultats des calculs analytiques sur le calcul des FICs : évolution pour les trois fractures du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la dimension du défaut . . . . .	196
G.1	Propriétés des fractures, tiré de Hakami [105] . . . . .	203
G.2	(a) Profils de fracture rugueuse, (b) Ouverture d'une fracture, $b(x, y)$ . . . . .	205
G.3	Profil de rugosité de la roche et valeur du JRC équivalent, tiré de Barton et Choubey, [108] . . . . .	206
I.1	Kn, joints de marbre . . . . .	213
I.2	Ks, joints de marbre . . . . .	214
I.3	C (Mpa) et $\varphi$ , joints de marbre . . . . .	214
I.4	Kn, joints de mortier . . . . .	215
I.5	Ks, joints de mortier . . . . .	216
I.6	$\varphi$ , C étant quasi nul, joints de mortier . . . . .	216
J.1	Schéma de la machine de cisaillement, adapté de Belem [84] . . . . .	217
J.2	À gauche, joint de mortier préparé selon le premier protocole GéoRessources et à droite, joint de marbre préparé selon le nouveau protocole . . . . .	221
J.3	Cycle de fermeture du joint de mortier n°2, les charges sont représentées, pas les décharges . . . . .	222
J.4	Schéma d'une courbe classique représentant la variation de la contrainte de cisaillement en fonction du déplacement tangentiel, tiré d'un ouvrage collectif de mécanique des roches [120]. . . . .	223
J.5	Schéma des morphologies des joints, marbre à gauche et mortier à droite . . . . .	223
K.1	Séparation des ondulations du joint de marbre n°2 . . . . .	228

# Liste des tableaux

1.1	Précisions de différents scanner-lasers : comparaison de données fournies par les fabricants et mesurées par Barbero [9] . . .	10
1.2	Liste non exhaustive des erreurs de maillage . . . . .	17
2.1	Paramètres de l'outil "cable" . . . . .	48
2.2	Paramètres de l'outil "pile" . . . . .	49
2.3	Paramètres utilisés dans la simulation de la restauration de Neptune avec renforts métalliques . . . . .	56
2.4	Paramètres utilisés dans la simulation de la restauration avec de la colle de Neptune . . . . .	67
2.5	Contraintes maximales simulés en position debout . . . . .	68
2.6	Contraintes maximales simulés avec et sans défauts de le collage, en position couchée . . . . .	70
2.7	Facteurs d'intensité de contrainte ( $KI \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0,5}$ ) en fonction de la dimension des défauts (m) . . . . .	72
2.8	Paramètres du modèle . . . . .	78
3.1	Paramètres élastiques . . . . .	95
3.2	Résultats . . . . .	98
3.3	Résultats des essais sur les joints de marbre et mortier . . . . .	121
3.4	Résultats de caractérisations morphologiques sur les joints de marbre et mortier . . . . .	126
4.1	Matrice de corrélation de l'ensemble des variables, soit 13 observations (partie 1) . . . . .	146
4.2	Matrice de corrélation de l'ensemble des variables, soit 13 observations (partie 2) . . . . .	147
4.3	Choix de la modélisation de la courbe $Ks$ : comparaison des deux validations croisées, lorsque le paramètre est noté entre parenthèse, c'est qu'il n'est ressorti qu'au cours d'une validation croisée, ce n'est pas significatif. . . . .	156



4.4	Récapitulatif des résultats de validation croisée des régressions pas à pas, (x) lorsque le paramètre sort au moins une fois . . .	157
4.5	Résultats des régressions linéaires multiples de paramètres mécaniques pour le mortier et le marbre . . . . .	158
4.6	$R^2$ . . . . .	164
A.1	Valeurs testées . . . . .	177
B.1	Paramètres utilisés dans l'étude paramétrique sur le tirant . .	180
C.1	Paramètres utilisés dans l'étude paramétrique sur les goujons .	186
C.2	Paramètres utilisés dans l'étude paramétrique sur les goujons .	186
D.1	Résultats des tests sur la modélisation des goujons . . . . .	190
J.1	Illustration des morphologies de joint de marbre . . . . .	219
J.2	Illustration des morphologies de joint de mortier . . . . .	220
L.1	Matrice de corrélation des variables calculée à partir des essais sur joints de mortier (partie 1) . . . . .	234
L.2	Matrice de corrélation des variables calculée à partir des essais sur joints de mortier (partie 2) . . . . .	235
L.3	Matrice de corrélation des variables calculée à partir des essais sur joints de marbre (partie 1) . . . . .	236
L.4	Matrice de corrélation des variables calculée à partir des essais sur joints de marbre (partie 2) . . . . .	237

# Introduction, contexte

La conservation et la restauration des œuvres d'art, notamment des statues, sont encore aujourd'hui confiées aux héritiers des traditions artistiques et artisanales. Leurs pratiques reposent sur des techniques éprouvées, mais cependant empiriques et les limitations qui en découlent ne permettent pas toujours de garantir la pérennité du patrimoine qui nous parvient endommagé.

Depuis quelques décennies, les techniques numériques d'acquisition 3D ont jeté un pont entre la pratique traditionnelle de la restauration de sculpture et le domaine de la mécanique, qui s'appuie sur les dernières avancées scientifiques et technologiques. Cependant, il est remarquable de constater que ces techniques se cantonnent à la production d'images de synthèse destinées à la reconstruction d'hypothèse historique, ou à des fins pédagogiques et de communication médiatique (image photo-réalistes, anastylose virtuelle, réalité augmentée). Les travaux actuels qui se rapprochent le plus de l'aide à la restauration touchent principalement la numérisation d'éléments architecturaux voire des éléments d'ornements, comme c'est le cas pour l'équipe d'histoire de l'art et d'archéologie de l'Université de Colombia, et l'équipe MAP/GAMSAU de l'école d'architecture de Marseille. Ces travaux se limitent à l'obtention d'un modèle descriptif de l'aspect de l'oeuvre à des fins conservatoires. La prise en compte de l'aspect mécanique est actuellement réduite à l'étude des structures architecturales maçonnées (Dept. of Struct Eng., Politecnico di Milano ; Dept. of Mechanics, Laboratory of Testing and Materials, National Technical University of Athens ; LMGC de Montpellier).

L'atelier Coignard de Dreux expérimente depuis vingt ans l'utilisation de la simulation informatique sur une série d'œuvres dont certaines monumentales (Colosse d'Alexandrie et statue de l'empereur Auguste d'Arles par exemple). Plus récemment, la statue de Neptune découverte avec le portrait de Jules César dans les eaux du Rhône a été restaurée par cette équipe sur la base d'une étude préalable comportant une numérisation 3D de chaque fragment, un remontage virtuel, une étude statique sommaire et la simulation des actes successifs de la restauration (perçement, mise en place d'inserts

métalliques, etc.). Dans le cadre d'un projet soutenu par la région Centre, « SACRE » pour « Suivi des Altérations, Caractérisation et Restauration des monuments en roche calcaire », le CRMD et le PRISME se sont intéressés aux processus d'altération des roches du patrimoine bâti et à leur conservation. Grâce à leur partenariat avec le LRMH et le MAP/GAMSAU, ces équipes ont élaboré et mis en application le concept de carnet de santé numérique du patrimoine, qui se trouve être une base d'informations essentielles pour la restauration. C'est pour capitaliser et développer ces avancées que le projet « REPTURE » pour « Restauration de sculptures : méthodologie transversale de caractérisation et d'analyse structurelle » a été conçu et proposé à la région Centre.

Ce projet, en partenariat entre l'atelier Coignard, le CRMD, le PRISME et les conservateurs des musées de la région Centre, vise à développer une méthodologie s'appuyant sur les dernières avancées scientifiques et technologiques afin de simuler les opérations de restauration et leur effet sur la structure de l'œuvre de manière à optimiser le processus, tester, et surtout garantir pérennité de l'œuvre.

Les objets d'étude de cette thèse sont les œuvres d'art mise à disposition par les partenaires du projet REPTURE. Tout d'abord, la statue de Neptune, déjà restaurée dont les interrogations quant à la recherche de la meilleure restauration donnèrent naissance au projet. Elle se trouve actuellement au musée départemental de l'Arles antique. Elle fut repêchée en morceaux lors de fouilles qui ont eu lieu dans le Rhône en 2007 par Luc Long et son équipe de la DRASSM, (Département des Recherches Archéologiques Subaquatiques et Sous-Marines du ministère de la Culture). Cette statue est fracturée en plusieurs morceaux : la tête, le tronc, le genou droit et un bloc constitué de la base et des pieds. La statue d'un mètre quatre-vingt de hauteur est datée de la première décennie du III<sup>me</sup> siècle après J.C. D'après Blanc [1], cette statue est en marbre Pentélique. Ce marbre est l'un des plus célèbres de la statuaire antique, un marbre des carrières du mont Pentélique, en Attique, à quelques kilomètres au nord-ouest d'Athènes, en Grèce, voir Ganniari-Papageorgiou [2]. La statue de Neptune a été restaurée par Benoit Coignard à l'aide d'un tirant et de cinq goujons. La statue de Psyché de Celestin-Anatole Calmel fait partie du patrimoine muséographique français, elle a été conçue pour être présentée au salon des artistes français de 1857. Après avoir transité par le musée du Louvre, elle est depuis 1922 en dépôt au musée de Bourges. Cette statue d'environ un mètre soixante est probablement en marbre. La statue de Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé a été sculptée par Louis-Marie Mercier Dupaty, elle est entrée à l'inventaire du musée du Louvre en 1822, a séjourné dans l'escalier du Louvre de 1823 à 1832, puis au jardin des tuileries jusqu'en 1936. En 1848, elle a effectué le voyage de Paris à

Orléans pendant trois mois et demi, pour être déposée au jardin des plantes d'Orléans en jusqu'en 1996. Depuis, elle est stockée dans une église afin de la protéger des conditions climatiques extérieures. Cette statue d'environ deux mètres de haut et un mètre soixante-dix de large est en marbre de Carrare. Le contexte dans lequel ces statues doivent être restaurées n'a rien à voir avec celui dans lequel les structures de génie civil et bâtiments le sont. En effet, la notion de patrimoine culturel est un concept assez récent, il date de 1956 quand l'UNESCO a créé l'ICCROM (International Centre for the Study of the Preservation and Restoration of Cultural Property), c'est à ce moment-là, que les sculptures furent incluses dans le patrimoine à protéger. En 1964, Venice charter [3] et en 2000, Krakow charter [4] sont les premières chartes à établir les limites d'une restauration en rappelant les notions éthiques, historiques et esthétiques, des définitions de conservation et restauration furent rappelées à cette occasion, mais surtout, la notion d'authenticité fut amenée. Ces chartes insistent sur le fait que les restaurations doivent être des actions limitées et que la manière dont elles sont exécutées implique la responsabilité des restaurateurs. De plus, ces chartes définissent l'action de restaurer comme une action extraordinaire, à mettre en œuvre uniquement dans les cas où les œuvres ne sont pas dans des situations pérennes et que la restauration permet de remettre l'œuvre dans son précédent état connu. Dans cette thèse nous nous proposons d'aider à la mise au point d'une méthodologie de restauration assurant la stabilité mécanique de la statue et permettant de respecter les règles énoncées plus haut.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet REPTURE et a pour objectif de mettre en place une méthodologie capable d'utiliser des données issues d'une acquisition 3D, ainsi que différentes hypothèses de restauration pour simuler les opérations de restaurations. Il s'agit à la fois de mettre en place une chaîne de traitement de données fiable et pertinente et d'utiliser les codes de calculs mécaniques les plus appropriés, voire les adapter, pour simuler des hypothèses de restauration sur œuvres endommagées. Les statues endommagées comportent bien souvent des parties brisées qu'il convient de rattacher à l'issue du processus de restauration. La prise en compte des propriétés mécaniques des interfaces entre les différents morceaux doit permettre de limiter les réparations et ainsi, l'atteinte à l'intégrité de l'œuvre. Cette thèse vise donc aussi l'étude expérimentale des liens entre les propriétés mécaniques des interfaces et leur morphologie, ainsi que leur analyse statistique afin d'étendre la portée de ces résultats. L'objectif est de déterminer les propriétés mécaniques d'un bloc comportant une fracture à partir d'un scan de l'interface fracturée. Cet apport permettra de simuler au plus juste le comportement d'une œuvre fracturée.

Les simulations numériques utilisées dans le domaine de l'ingénierie mé-

canique se basent sur des plans d'exécution en 2D ou 3D. Or, les œuvres d'art ne nous parviennent pas avec de tels plans. Leur géométrie ne répond généralement pas à des formes suffisamment simples pour pouvoir être déduites de quelques mesures isolées, d'autant plus quand les statues sont endommagées. Il convient donc d'en acquérir la géométrie de manière précise. Parmi le panel de techniques d'acquisition 3D, le laser scanner constitue la solution la plus appropriée pour les statues. Le premier chapitre présente les méthodes utilisées pour obtenir la modélisation géométrique de sculptures endommagées à l'aide d'un scanner laser. Si les techniques d'acquisition de la géométrie des objets complexes sont maintenant bien développées, les exigences de traitement des données vis-à-vis de la reconstruction 3D pour la simulation mécanique doivent être prises en compte et sont donc ici expliquées. La reconstruction d'un modèle pour la simulation numérique, de l'acquisition à la reconstruction, passe par la numérisation de la surface extérieure de l'objet, le traitement des scans visant à construire la géométrie, le traitement des modèles triangulés de la géométrie pour construire les maillages, et la reconstruction géométrique. Ces étapes sont illustrées par le travail réalisé sur deux œuvres provenant des réserves des musées de la région Centre : Cadmus et Psyché, ainsi que la statue de Neptune retrouvée dans le Rhône du musée de l'Arles antique.

Le deuxième chapitre s'appuie sur les modèles 3D denses obtenus dans le chapitre précédant pour vérifier tous les points clés garantissant la stabilité du comportement mécanique. L'objectif est l'aide aux choix des méthodes de restauration proposées et éventuellement leur optimisation en utilisant les outils d'analyse numérique des structures. Les calculs sont menés dans le cadre de la mécanique des milieux continus déformables. Le comportement des statues en roche fracturées et renforcées dépend étroitement du comportement des éléments de renforts et des interfaces entre les blocs. Une analogie constatée entre ce problème et ceux traités en géotechnique a permis de sélectionner un outil numérique bien approprié, permettant de simuler correctement le comportement des œuvres, tout en restant le plus simple possible, de manière à faciliter l'utilisation ultérieure par les acteurs de la restauration. Le logiciel retenu, FLAC3D, est appliqué à l'étude menée sur deux statues en marbre : de Neptune et Cadmus. A partir d'une synthèse des résultats de ces études, une critique des solutions mises en œuvre ou envisageables est proposée.

Le troisième chapitre traite la partie expérimentale, plusieurs méthodes de caractérisation visant à retrouver la provenance du matériau ou estimer les propriétés mécaniques de l'œuvre pour mener les simulations présentées au deuxième chapitre sont proposées. L'objectif est d'illustrer la démarche qu'un restaurateur pourra avoir en présence d'une statue à restaurer et dont il ne connaît pas la roche dont elle est faite. Comme il n'est pas possible

de prélever des échantillons de matériaux dans les œuvres à restaurer pour réaliser des essais mécaniques, il s'agit dans un premier temps de réaliser une identification du matériau, de manière à estimer ses propriétés. Cette identification se base sur une caractérisation physico-chimique réalisée sur des micro-prélèvements de poudre de roche lorsque ceux-ci sont possibles, voire d'essais non destructifs. Une fois la provenance du matériau déterminée, la mise en œuvre d'essais mécaniques destructifs sur des roches analogues sont envisageables pour déterminer les paramètres mécaniques des œuvres. Ainsi nous présentons des essais triaxiaux et une caractérisation du comportement des interfaces résultantes de la fracturation d'une œuvre par une étude expérimentale sur le comportement de joints cisailés. Cette dernière permet de déterminer les paramètres mécaniques nécessaires aux simulations, à condition d'établir le lien qui peut exister entre la morphologie d'un joint et son comportement mécanique. La morphologie des joints est obtenue par un scan fin de leur surface.

Le dernier chapitre de la thèse consiste à analyser statistiquement les potentielles corrélations entre les propriétés mécaniques et morphologiques des interfaces étudiées durant la campagne expérimentale. Cette étude doit permettre de construire un modèle prédictif de comportement mécanique à partir d'une morphologie d'interface. Dans un premier temps, des méthodes d'analyse statistique sur les paramètres mesurés lors des essais de cisaillement présentés au chapitre 3 sont appliquées. Les paramètres sont regroupés selon un caractère de similarité afin de réduire leur nombre, car un grand nombre de variables fortement corrélées entre elles peuvent conduire à des problèmes de colinéarité. Dans un deuxième temps, les résultats de cette analyse servent de base pour construire des modèles prédictifs obtenus grâce à des techniques de régressions statistiques multivariées.



# Chapitre 1

## Méthodologie de reconstruction de la géométrie d'œuvres sculptées : de la numérisation au maillage

### 1.1 Introduction

Pour la simulation, les modèles géométriques utilisés ordinairement dans l'industrie ou le génie sont reconstruits par dessin assisté par ordinateur (DAO). La complexité de la forme des œuvres d'art nous impose d'adopter une autre démarche en réalisant l'acquisition de l'œuvre avec un scanner laser. L'utilisation du numérique pour la reconstruction d'objet fracturé et plus largement dans le domaine statuaire a déjà été utilisé en France, entre autres par Schmith et al [5] et en dehors par Adan et al [6] ou encore Borri et al [7].

Ce chapitre traite de la modélisation géométrique de sculptures endommagées. Il s'agit de la description d'une des phases qui vise à proposer une méthodologie de restauration pour les statues endommagées. Ce chapitre présente les méthodes utilisées et est illustré par le travail réalisé sur trois œuvres provenant des réserves des musées de la région Centre : « Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé » de Louis-Marie Mercier Dupaty, « Neptune » retrouvée dans le Rhône et « Psyché » de Calmel. Ce chapitre se propose de répondre à plusieurs interrogations concernant la reconstruction géométrique d'œuvres d'art. Si les techniques d'acquisition de la géométrie des objets naturels est largement répandu et facilité, entre autre par les scanner 3D, les exigences vis-à-vis de cette reconstruction géométrique sont fonc-



tion de la finalité de l'acquisition. Dans les cas traités dans le cadre de cette thèse, l'utilisation de la géométrie acquise comme donnée d'entrée dans les simulations numériques impose un traitement particulier. Un compte rendu succinct des techniques utilisées dans la littérature est présenté en parallèle du travail sur les œuvres mentionnées. Enfin, une méthodologie s'appuyant sur des moyens techniques appropriés et disponibles dans notre laboratoire est proposée.

La reconstruction d'un modèle pour la simulation numérique, de l'acquisition à la reconstruction, passe par plusieurs étapes :

- La numérisation de la surface extérieure de l'objet
- Le traitement des scans visant à construire la géométrie
- Le traitement des modèles triangulés de la géométrie pour construire les maillages
- La reconstruction géométrique

Différentes manières de réaliser ces étapes sont présentées.

## 1.2 Numérisation des œuvres

### 1.2.1 Réalisation d'un scan - fonctionnement

Pour recueillir des informations précises sur la forme des objets à numériser, des appareils de levé avec ou sans contact peuvent être utilisés. Les scanners laser sont couramment utilisés dans le cas de numérisations 3D d'œuvres d'art. Ces appareils de mesure optique sans contact sont rapides et précis, voir Fontana [8].

La méthode de calcul des coordonnées 3D des points de la surface utilisée par les scanners laser à courte portée est la triangulation. Le faisceau laser du scanner balaye l'objet ligne après ligne, par le biais d'un miroir en rotation dont le mouvement est géré par un galvanomètre. À chaque scan, est associé un cliché photographique qui aidera l'opérateur à déterminer les positions relatives des zones scannées et permettra l'éventuelle coloration du scan. La surface de l'objet réfléchit chaque ligne, cette réflexion est enregistrée par un capteur CCD. La position des points d'une ligne est déterminée par le biais de règles trigonométriques grâce aux informations suivantes :

- les centres optiques de la caméra et de l'émetteur laser dont les positions sont décalées et connues, figure 1.1
- l'orientation de la source du laser
- l'emplacement du point sur le cliché pris au cours du scan.

Les données acquises représentées par les coordonnées des points numérisés sont transformées en un réseau de points connectés et converties dans un mo-

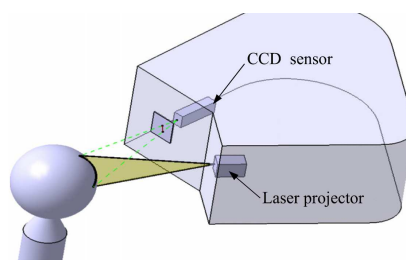


FIGURE 1.1 – Fonctionnement d'un scanner laser utilisant la méthode de triangulation, tiré de Barbero et al [9]

dèle continu qui est défini par ses surfaces. Les informations de connectivité sont conservées grâce au maillage polygonal créé par triangulation Delaunay.

La triangulation Delaunay permet de reconstituer une surface à partir de données discrètes, la grande majorité des algorithmes de reconstruction l'utilisent. Ce n'est cependant pas la seule permettant de reconstruire une surface à partir de données discrètes. Il existe d'autres méthodes comme la méthode Level Set, les fonctions à bases radiales et la méthode des moindres carrés mobiles.

La triangulation Delaunay d'un nuage de points représentant une surface convexe est basée sur le diagramme de Voronoï. À partir de l'axe médian entre chaque point, l'espace est divisé en cellules convexes, il en résulte que chaque cellule est associée à un point du nuage. Les points du nuage dont les cellules de Voronoï sont adjacentes sont reliés par des segments de droite, pour obtenir la triangulation Delaunay associée à ce nuage.

### 1.2.2 Matériel

L'acquisition du nuage de point est réalisée grâce à un scanner laser courte portée et un logiciel d'acquisition : Polygon Editing Tool. Le scanner laser est un appareil de levé déjà largement utilisé dans différents domaines de la conservation du patrimoine : paléontologie, architecture, statuaire, voir Fontana et al [8], muséologie, etc. Cet outil qui permet habituellement d'archiver l'état des biens culturels à un instant donné est devenu indispensable, Arbace [10] considère même qu'aucun processus de restauration sérieux ne peut aujourd'hui être planifié et exécuté sans l'aide de l'outil numérique.

Le scanner enregistre les coordonnées sphériques des points relevés dans un repère dont il est l'origine. Une image couleur est capturée en même temps que le scan. L'acquisition de la texture ne peut être réalisée que dans des conditions de luminosité moyenne. Le scanner ne fonctionnera pas au-dessus de 500 lux et la quantité de points levés sera diminuée sous une faible

	Accuracy of the manufacturers (mm)	$U$ (mm)
Camera	0.071	0.104
CMM	0.032	0.040
CT	0.100	0.295
Exascan	0.040	0.230
Atos	0.010	0.025

Tableau 1.1 – Précisions de différents scanner-lasers : comparaison de données fournies par les fabricants et mesurées par Barbero [9]

luminosité. Dans notre cas, cette image ne sert qu'à aider le recalage, car l'acquisition de la texture n'est pas nécessaire pour la simulation numérique.

Le matériel utilisé est un scanner laser sans contact de marque Konica Minolta, modèle Vivid 910 avec caméra à capteur CCD. Ce scanner est équipé de trois lentilles différentes qui permettent de réaliser des scans sur des objets dont la taille est comprise entre quelques centimètres et quelques mètres. À titre indicatif, la documentation technique [11] indique que le scanner peut au mieux lever à une cadence de 300000 points par seconde, avec un pas de 50  $\mu\text{m}$  et obtenir une précision comprise entre 10  $\mu\text{m}$  et 22  $\mu\text{m}$  selon la direction.

Cependant, la vérification de ces informations données en général par les fabricants de scanner laser a montré des performances bien en dessous de celle énoncées. La précision de différents appareils de levé a été mesurée par Barbero et al [9] sur divers objets calibrés et faits de matériaux différents. Cette étude a montré une incertitude élargie sur les scanners laser par rapport aux données fournies dans les documentations techniques. Cette incertitude est notée  $U$  sur le tableau 1.1 extrait de l'article de Barbero. En moyenne, sur les valeurs présentées dans ce tableau, il existe un facteur de trois entre la précision fournie par le fabriquant et celle qui a effectivement été mesurée par l'auteur.

Il faut aussi noter que l'incertitude est une fonction croissante de la distance entre la surface scannée et le scanner.

### 1.2.3 Prises de vue

L'objectif de la phase de scan est de balayer exhaustivement la surface de l'œuvre, la première étape est de déterminer les points de vues qui le permettront. Il faut prévoir une zone de recouvrement importante entre chaque scan pour aider le recalage. Certains scans complémentaires peuvent être planifiés spécifiquement pour l'étape de recalage. Il n'est pas nécessaire de tous les conserver, c'est-à-dire que ceux-ci ne seront pas incorporés dans le modèle



FIGURE 1.2 – La statue Cadmus combattant le dragon

final.

Si l'objet est manipulable, il suffira de trouver un support qui permettra de le présenter au scanner sous différents angles. En revanche, s'il ne l'est pas et selon les conditions d'éclairage, la complexité de sa forme, ainsi que l'encombrement de l'environnement, cette étape s'avère parfois fastidieuse. De manière générale, pour une quantité de données identiques, il vaut mieux préférer multiplier les points de vue différents, cela favorise le recalage et évite les occlusions (données manquantes).

L'illustration, figure 1.2 présente le cas d'une statue représentant Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé, sa numérisation a été réalisée dans une église au mois de janvier, soit sous des conditions d'éclairage relativement faible. La statue mesure deux mètres de haut avec un encombrement de  $2,5 \text{ m}^2$ . La numérisation de cette œuvre a nécessité une centaine de scans pour 500 Mo de données brutes recueillies. Malgré ces cent scans, il restait des occlusions, principalement à cause de la géométrie de l'œuvre, mais aussi à cause l'emplacement de la statue, déposée à proximité de colonnes empêchant d'avoir le recul nécessaire pour se positionner depuis certains points de vue. En effet, lors du balayage par le scanner, il faut s'assurer que la surface balayée recouvre d'environ 50% la surface balayée auparavant, ceci afin de faciliter le recalage des scans. Si la zone de recouvrement est trop faible le recalage sera mauvais voire impossible. Ainsi nous avons déterminé les positions et orientations du scanner de manière à capturer la plus grande partie possible de la surface de l'œuvre, les données manquantes se trouvaient dans les zones situées entre le corps de Cadmus et celui du dragon et sur les surfaces orientées vers le sol et le ciel et ce, malgré les précautions prises comme illustré sur la photographie de la figure 1.3.

L'opération d'acquisition se déroule de la manière suivante : l'intensité du faisceau laser est réglée en fonction de la brillance du support et un autofocus est réalisé pour évaluer la distance de travail avant chaque balayage. Une fois le scan acquis, sa qualité peut être appréciée dans la fenêtre d'affichage du logiciel Polygon Editing Tool (PET). Il est courant d'avoir des zones non scannées se situant pourtant dans la fenêtre de balayage. Ces problèmes



FIGURE 1.3 – Numérisation de Cadmus combattant le dragon

d'acquisition sont d'une part dus à la variation de la distance entre le scanner laser et les zones de l'œuvre scannées au sein de la même fenêtre. D'autre part, les propriétés de réflexion de lumière à la surface de l'objet, sa forme et la luminosité environnante peuvent jouer un rôle considérable. De notre expérience, plus la surface des matériaux est brillante ou blanche, plus le nombre de points acquis sera faible, mais les fabricants de scan avertissent également qu'une surface parfaitement noire et mat ne renverra rien non plus. Pour réaliser les scans des surfaces brillantes, nous les avons rendues plus terne en les humidifiant. Il existe d'autres méthodes consistant à couvrir la surface de l'objet d'une fine couche de poudre pour rendre mate la surface à scanner. Sur d'autres supports, nous avons choisi soit de protéger l'objet de la lumière, soit de l'éclairer avec une lumière artificielle.

#### 1.2.4 Traitement des scans

Un scan relevé depuis un seul point d'observation n'est pas suffisant pour acquérir de façon exhaustive toute la surface d'un objet, la multiplication des points de vues permet, en déplaçant l'objet ou le scanner, de numériser l'objet entier. Ceci amène à la nécessité de repositionner chacun des scans les uns par rapport aux autres, pour que l'ensemble des points se retrouvent dans un même repère : cette étape est appelée le recalage, figure 1.4. Le travail d'exploitation consiste à recalcr les nuages de points et procéder à un nettoyage du modèle.

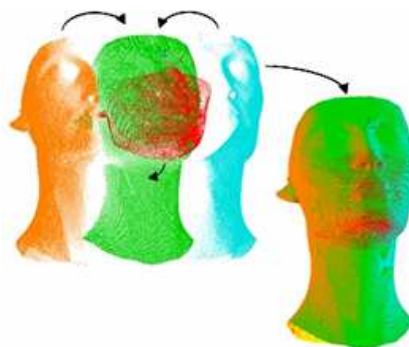


FIGURE 1.4 – Recalage, source : <http://www.technodigit.com>

Les principaux logiciels commerciaux utilisés, tels que Polygon Editing Tool, Rapid Form XOR, Geomagic Studio, et le module Digitized Shape Editor (DSE) de Catia de Dassault Systèmes [12] proposent différents algorithmes de recalage. Il peut s'agir de recalages manuels ou automatiques, qui peuvent être grossiers ou fins. Dans tous les cas, un scan sera toujours considéré comme étant le référent par rapport à l'autre qui sera mobile, et un recalage fin sera toujours précédé d'un recalage grossier. Le recalage peut avoir lieu entre scans ou groupes de scans :

- recalage par plusieurs points (transformation de l'ensemble par superpositions des points indiqués)
- recalage manuel à l'aide des trois directions du repère cartésien (transformation de l'ensemble suivant une distance, un angle)
- recalage par contraintes précédemment définies (transformation de l'ensemble suivant les contraintes, par exemple une ligne caractéristique)
- recalage au plus juste, processus itératif; il faudra que les scans soient préalablement recalés par une autre méthode pour que celle-ci fonctionne, il est possible de réaliser l'opération en ne prenant en compte qu'une partie des points seulement.
- recalage par sphère, dans les cas où la numérisation a été réalisée avec des balises sphériques (transformation de l'ensemble par superpositions au centre des sphères)

Le recalage est une transformation rigide, toutes les coordonnées étant des constantes, composée de trois paramètres de rotation (autour de chaque axe du repère) et trois de translation (dans la direction de chaque axe du repère). L'algorithme de recalage fin le plus souvent utilisé pour les maillages triangulaires obtenus par acquisitions successives au scanner laser est l'ICP (*Iterative Closest Point*), proposé par Besl [13]. Le scan global est une suite de  $n$  scans locaux. Le nuage de points d'un scan doit être recalé avec ce-

lui de deux autres scans, celui qui l'a précédé lors de la phase d'acquisition et celui qui l'a suivi. La difficulté se situe dans le fait que les nuages de point des scans ne se recouvrent pas totalement, mais seulement partiellement. La détermination des paramètres de cette transformation se fait, dans un premier temps, par différentes mises en correspondance : centres de gravité, primitives, lignes de niveau, etc. C'est un problème de minimisation, il s'agit de déterminer la transformation qui permettra de minimiser la distance moyenne entre les deux nuages à recaler dans les zones de chevauchement. La transformation rigide doit minimiser la distance quadratique moyenne entre les points des deux nuages sur les six degrés de liberté. Cependant, pour que l'algorithme converge vers le minimum global, le positionnement initial doit être suffisamment précis (il faut préalablement effectuer un recalage manuel ou par plusieurs points), sinon il y a de fortes chances pour que le recalage ne soit le résultat que d'un minimum local.

Soit  $\mathbf{o}_j$ , les  $N_o$  points du nuage référant  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{p}_i$ , les  $N_p$  points du nuage à recaler  $\mathbf{P}$  avec  $j \in \{1, 2, \dots, N_o\}$  et  $i \in \{1, 2, \dots, N_p\}$ . La fonction  $T : \mathbf{O} \mapsto \mathbf{P} = T(\mathbf{O})$ . On suppose que  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{P}$  se chevauchent car ils sont déjà partiellement recalés à l'aide d'un recalage grossier. L'objectif est de recaler les deux nuages dans un repère commun en trouvant la transformation rigide  $T$ , de telle sorte que  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{P}$  soient le mieux alignés possible au sens des moindres carrés. Le problème de minimisation peut-être formulé de la manière suivante, voir Du [14] :

$$\min_{T,j} \left[ \sum_{i=1}^{N_p} \|T(\mathbf{p}_i) - \mathbf{o}_j\|^2 \right] \quad (1.1)$$

La Transformation  $T$  est une combinaison d'une translation  $\mathbf{t}$  et d'une rotation  $\mathbf{R}$ . Pour ces deux nuages de point, l'algorithme ICP s'écrit :

$$\min_{R,t,j} \left[ \sum_{i=1}^{N_p} \|(\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}_i + \mathbf{t}) - \mathbf{o}_j\|^2 \right] \quad (1.2)$$

de telle sorte que :  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_m$  et  $\det(\mathbf{R}) = 1$

L'algorithme de recalage est itératif et donne des résultats rapides et précis. Les points les plus proches sont mis en correspondance,  $\mathbf{C}$ , à chaque itération,  $k$ , pour calculer la transformation en trois étapes. La première est la mise en correspondance des ensembles de points basés sur la proximité :

$$\mathbf{C}_k(i) = \arg \min_j \left[ \|(\mathbf{R}_{k-1} \cdot \mathbf{p}_i + \mathbf{t}_{k-1}) - \mathbf{o}_j\|^2 \right] \quad (1.3)$$

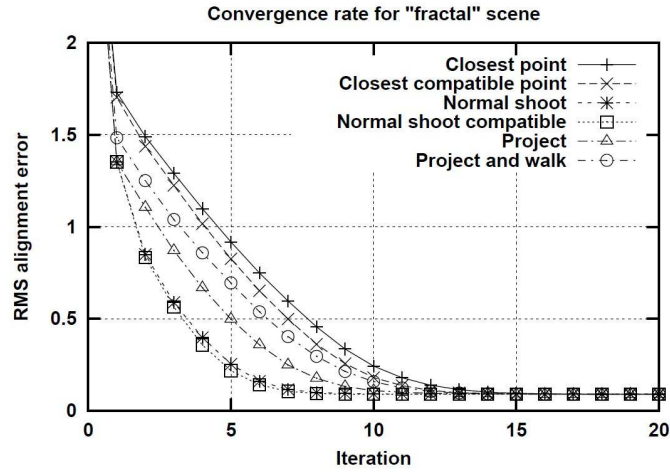


FIGURE 1.5 – Comparaison des taux de convergence pour le recalage de maillages fractals pour l’algorithme ICP et plusieurs de ses variantes, Rusinkiewicz [15].

La deuxième permet de calculer une nouvelle transformation entre les ensembles de points  $\{R_{k-1} \cdot p_i + t_{k-1}\}_{i=1}^{N_p}$  et  $\{o_{C_k(i)}\}_{i=1}^{N_p}$  par minimisation des moindres carrés.

$$(R_*, t_*) = \arg \min_{R^T R = I_m, \det(R) = 1, t} [\|R(R_{k-1} \cdot P_i + t_{k-1}) + t - o_{C_k(i)}\|^2] \quad (1.4)$$

La dernière permet de mettre à jour  $R_k$  et  $t_k$  :

$$R_k = R_* \cdot R_{k-1} \quad (1.5)$$

$$t_k = R_* \cdot t_{k-1} + t_* \quad (1.6)$$

Le recalage converge assez rapidement vers la solution. À chaque itération, la valeur de la déviation entre les deux entités à recaler diminue. L’opération s’arrête lorsque cette valeur atteint une limite que l’on se sera fixée. Cependant, certains logiciels comme le module DSE de Catia bloquent le nombre d’itération à vingt cinq, car comme le montre Rusinkiewicz [15], figure 1.5, le nombre d’itérations nécessaires à la convergence vers un résultat satisfaisant est bien inférieur. Ce blocage permet d’économiser un temps de calcul qui peut être élevé pour les maillages reposant sur un grand nombre de points.

Une fois tous les scans recalés par rapport à une référence, le modèle géométrique triangulé peut être créé par leur fusion, il représente alors la surface extérieure de l’objet numérisé. Le maillage obtenu par numérisation passe ainsi de données ordonnées, le balayage se faisant par lignes régulières, à désordonnées et inégalement réparties.



## 1.3 Opérations sur les scans

Avec le développement des technologies d'acquisition 3D numérique, s'est fait celui des logiciels permettant la manipulation de ces données. La plupart des étapes présentées dans cette section sont réalisées avec ces logiciels de manière automatique, semi automatique ou entièrement manuelle.

### 1.3.1 Nettoyage du modèle géométrique

Suite à l'opération de fusion, les modèles triangulés sont bien souvent de mauvaise qualité, la densité de points n'est pas homogène et ils comportent des erreurs, tableau 1.2. Les opérations permettant de corriger ces erreurs sont les nettoyages, lissages et optimisations, puis le maillage est reconstruit. À la suite de ces étapes, le modèle de la surface extérieure de l'œuvre est traité par un programme de maillage, appelé mailleur.

L'objectif est de convertir les modèles triangulés (géométriques), en des maillages sous une forme acceptable pour la simulation numérique. Les procédures de conversion du modèle géométrique en maillage sont illustrées dans la section 1.4. Le maillage constitué n'est pas identique au modèle géométrique original, des erreurs sont introduites, mais il se doit de rester réaliste. Les méthodes de corrections consistent en la simplification du modèle par lissage, l'élimination manuelle ou automatique des trous et saillies, et en réparant les erreurs d'auto-intersection, etc. C'est ainsi que ces étapes, partiellement automatisées, approximent la géométrie originale. Une fois le modèle dépourvu d'erreur, celui-ci pourra être optimisé. Le sujet est abordé dans l'article de Freytag [16] (vantant les méthodes de simulation sans maillage), où les limitations de la méthode exposée ci-dessus sont discutées. L'auteur considère ce processus de préparation des données comme étant fastidieux, peu rentable, peu pratique et surtout qu'il ne pourra pas être amélioré par le développement progressif des technologies proposées par les logiciels de maillage. Ainsi, il donne l'exemple du bruit dans le modèle de la statue du David, présenté dans l'étude de Borri [7]. Dans le cas de l'étude présentée ici, cette erreur est gardée en mémoire et considérée comme n'étant pas préjudiciable à la justesse des résultats. Elle s'ajoute à l'approximation de la réalité qu'est la simulation numérique.

### 1.3.2 Recalage

Le recalage doit se faire en plusieurs phases : un recalage grossier suivi d'un recalage fin. Dans tous les cas, ce sont des recalages rigides qui sont réalisés. Un premier recalage grossier est réalisé par le logiciel d'acquisition,

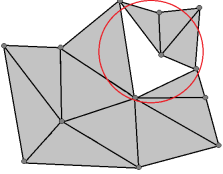
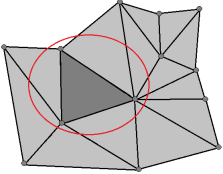
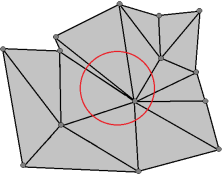
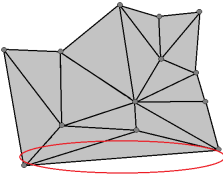
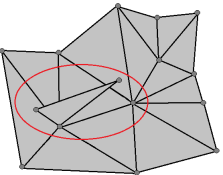
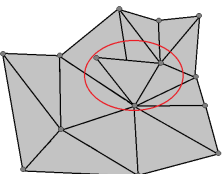
Erreurs	illustration
Trou dans le maillage	
Poly-face	
Petit angle	
Arrête longue	
Sommet non manifold	
Arrête non manifold	

Tableau 1.2 – Liste non exhaustive des erreurs de maillage

dans notre cas PET, il permet de visualiser les zones de l'œuvre qui n'ont pas encore été scannées. Ce premier recalage nécessite que l'utilisateur indique trois points, lui semblant être commun, pour chaque couple de scans. Le cliché pris en même temps que l'acquisition est d'une aide précieuse pour identifier précisément ces trois points. PET procède ensuite à un recalage automatique plus fin, mais qui s'avère encore insuffisant.

Avant de commencer le recalage fin avec le logiciel RapidForm XOR, les scans ont été individuellement nettoyés. Toutes les parties scannées ne correspondant pas à l'objet sont éliminées manuellement, il peut s'agir du support sur lequel l'objet est posé ou bien d'autres objets situés à proximité. Il reste toutefois des opérations à réaliser au fur et à mesure du recalage, ainsi nous avons du modifier les scans pour corriger les points suivants :

- Élimination des points déconnectés
- Élimination des aberrations (visuellement)
- Réduction des erreurs de numérisation
- Échantillonnage du nuage (réduction du nombre de points tout en gardant l'aspect de la géométrie)

Parfois, les points déconnectés d'un scan ne sont identifiables qu'après recalage avec un autre. Ils sont donc retirés après les premiers recalages et s'ils sont nombreux, les scans devront à nouveau être recalés.

Les erreurs dues à la numérisation proviennent essentiellement des zones nécessitant une incidence rasante du rayon laser. En effet, plus l'angle entre la normale de la surface scannée et la direction du laser se rapproche d'un angle droit, plus l'erreur sur la coordonnée des points relevés dans la direction du laser est importante. Pour corriger en partie ce défaut, toutes les facettes formant un angle entre  $0^\circ$  et  $20^\circ$  avec la direction du laser peuvent être retirées à l'import.

Il existe plusieurs méthodes de recalage sous RapidForm, qui ne sont malheureusement pas documentées. Cependant l'algorithme utilisé est celui de l'ICP décrit dans l'article de Besl [13], et le logiciel propose plusieurs fonctions. Les fonctions "Local based on Auto Guess" et "Global and Fine" permettent de réaliser des recalages fins entièrement automatiques. Dans tous les cas, l'algorithme ICP ne fonctionne correctement que si au moins 40% des scans à recaler se recouvrent.

La fonction "Local Based on Picked Point", qui ne fonctionne pas par ICP, est similaire au recalage du logiciel PET : l'opérateur doit proposer au moins trois points communs entre deux scans. L'utilisation de l'une ou l'autre des méthodes de recalage par ICP donne dans notre cas des résultats similaires, dans le cas de scans réalisés en nombre et qualité suffisantes. Il existe des fonctions qui analysent la précision du résultat d'un recalage entre scans, leur exécution indique l'écart maximal, moyen, la dispersion, etc. Une



FIGURE 1.6 – Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé : recalage et résultat après fusion

autre bonne manière de s’assurer que les scans sont bien alignés sans utiliser les fonctions d’analyse de la déviation est de faire pivoter l’image sur elle-même en affichant à tour de rôle l’un, l’autre puis les deux scans recalés afin d’apprécier visuellement la bonne superposition.

### 1.3.3 Fusion

Cette opération consiste à ramener l’ensemble des nuages de points à une seule entité. Initialement les nuages étaient séparément ordonnés, l’opération de fusion transforme le nuage fusionné en une entité désordonnée. Cette étape entraîne donc une hétérogénéité de la densité de point. Les zones à fort recouvrement seront bien plus représentées que les autres. Ainsi, lors de la fusion, il n’est pas conseillé de garder tous les scans qui ont servi au recalage. De plus, comme un recalage n’est jamais parfait, leurs multiplications entraîne une augmentation des erreurs dans le maillage qui en résulte.

La reconstruction de la géométrie de Cadmus a été relativement difficile, malgré nos précautions, certains scans étaient manquants, notamment dans les zones inaccessibles, voir figure 1.6.

Après recalage et fusion des maillages, ceux-ci doivent être traités pour être adaptés à leur future utilisation, ici, pour la simulation numérique et l’analyse de la rugosité des zones de contact entre blocs. Les opérations de traitements du maillage, décrites dans la section 1.4, se déroulent générale-

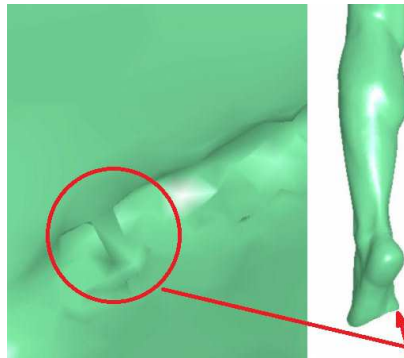


FIGURE 1.7 – Poignée vue de l'intérieur d'un maillage fermé

ment selon le processus suivant :

- Nettoyage
- Décimation
- Lissage
- Optimisation

## 1.4 Opérations sur les maillages

À cette étape, les modèles triangulés sont topologiquement de mauvaise qualité et doivent être nettoyés, c'est le cas de tous les modèles générés par scanner laser. Ils comportent, par exemple, des faces non manifold (plus de deux faces sont incidentes), de nombreux sommets sont définis par deux points, beaucoup de trous et des poignées, la figure 1.7 illustre ce qu'est une poignée. L'objectif du nettoyage est de construire un maillage surfacique "étanche", ce qui permettra par la suite de le retravailler pour l'adapter à l'utilisation que l'on souhaite en faire. Il s'agit la plupart du temps de le simplifier et de ramener la taille du modèle à un nombre de triangles raisonnable.

Le traitement réalisé sous le module DSE du logiciel Catia, [12], est le suivant :

- import du nuage au format STL
- Création des facettes triangulaires (pour la visualisation)
- Nettoyage des triangles isolés, des orientations incohérentes, rebouchage des trous, correction d'éléments non manifold, etc. Ces erreurs sont illustrées dans le tableau 1.2.
- Décimation (réduction du nombre de triangles)

Le modèle de Cadmus après fusion contenait beaucoup d'erreurs qu'il a fallu nettoyer. Ces erreurs sont illustrées sur la figure 1.8. Ce modèle compor-

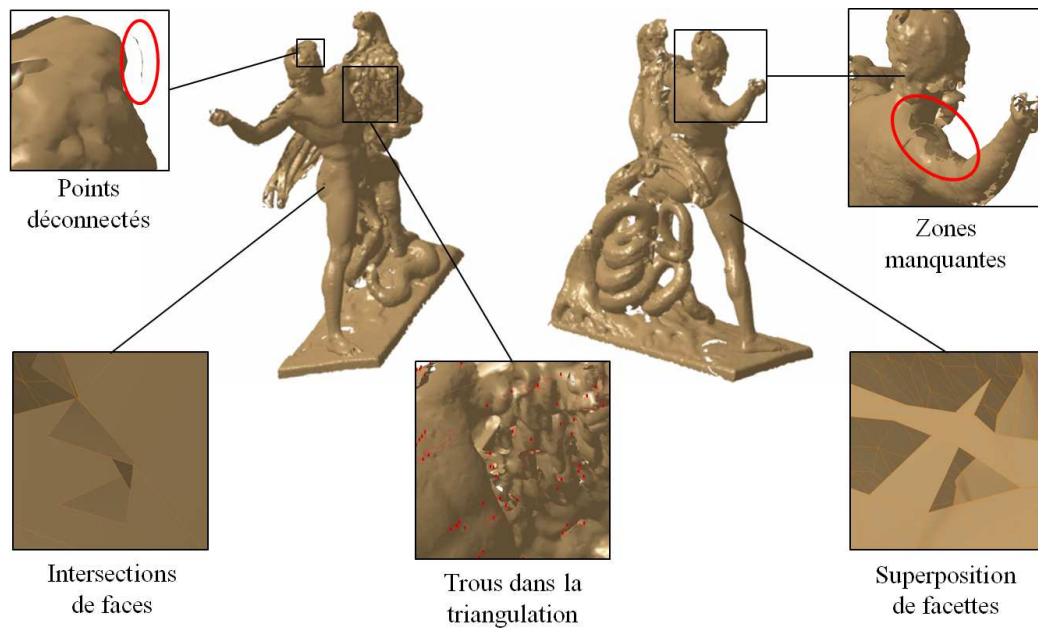


FIGURE 1.8 – Erreurs sur le modèle de Cadmus combattant le dragon après fusion

tait, entre autres, beaucoup de zones manquantes ou occlusions et de trous. La différence entre un trou et une zone manquante peut se définir par la nature de l'erreur. Un trou est une zone du modèle où, parce que la densité de points est insuffisante, la triangulation n'a pas été faite. Sa correction est relativement aisée et peut dans la plupart des cas se faire automatiquement par des outils présents dans les logiciels de CAO, voir section 1.4.1. En revanche, une zone manquante, correspond à une zone qu'aucun point de vue n'a pu couvrir. Elle est généralement plus étendue et le logiciel n'est pas capable de l'identifier et donc de la délimiter comme sur la figure 1.8 où seuls les frontières des trous sont illustrés en rouge. La correction des zones manquantes nécessite plusieurs interventions manuelles : nettoyage de points aberrants, création de nouveaux points et re-triangulation.

### 1.4.1 Nettoyage

Nettoyer un maillage signifie enlever toutes les petites incohérences géométriques et topologiques qui peuvent s'y trouver et ainsi, réaliser toutes les opérations qui vont le ramener à définir une surface étanche dans laquelle pourra s'insérer un unique volume. Pour cela il faudra supprimer ses points ou groupe de mailles déconnectés ou aberrants, boucher ses trous, suppri-

mer ses sommets et arêtes non manifold, supprimer les faces s'intersectant, inverser les normales de ses faces ayant des orientations incohérentes, etc.

### **Objets déconnectés**

Il arrive qu'après une numérisation 3D, il y ait beaucoup de petits morceaux détachés, sans rapport avec le reste de la surface. Ils peuvent provenir d'objets non désirés situés à proximité et rentrant dans le champ du scanner, ou de parties isolées et erronées telles que des effets de brillance ou d'incidence rasante. Ces objets sont de petits composants déconnectés, leur élimination peut se faire manuellement ou automatiquement. L'outil Mesh cleaner de Catia - DSE permet de réaliser cette opération en définissant le nombre maximal de triangles qu'une zone déconnectée peut contenir.

### **Arêtes trop longues et angles trop petits**

Les faces ayant ces caractéristiques peuvent être automatiquement identifiées, puis éliminées. Si l'on choisi de maîtriser la reconstruction de la surface à traiter, donc sans utiliser par exemple l'outil "Healing Wizard" de RapidForm, elles laisseront des trous dans le maillage qu'il convient de ne pas reboucher sans traitement manuel, sous peine de se retrouver dans exactement la même configuration.

Si le choix d'une intervention manuelle est fait, les faces adjacentes les plus proches doivent être manuellement supprimées et de nouveaux points doivent être introduits pour réorganiser l'agencement des mailles. Pour terminer, l'outil de rebouchage automatique pourra être utilisé.

### **Orientations incohérentes**

Une face est définie, dans le cas du maillage triangulaire de Cadmus par ses trois sommets, l'ordre dans lequel ceux-ci sont enregistrés est très important, car il va définir l'orientation des faces et le sens de leurs normales. Sur un maillage correctement orienté, les normales sont orientées vers l'extérieur de l'objet fermé.

Les faces isolées présentant une orientation erronée sont la plupart du temps détectées par le logiciel de CAO. Elles sont supprimées ou réorientées lors du nettoyage. S'il s'agit d'un groupe de maille connectées ayant ce défaut, les logiciels interprètent ce défaut comme des trous dans le maillage à la jointure entre les faces correctement orientées et celles qui ne le sont pas. Il ne faut surtout pas utiliser les outils de rebouchage des trous pour les corriger, car le maillage se retrouvera avec des poly-faces qu'il sera visuellement impossible d'identifier. La solution de ce type de problème est tout

naturellement d'utiliser les outils inversion des normales, même si la sélection manuelle requise est fastidieuse.

### **Fermer les trous**

Le système recherche les bords libres sur le maillage pour indiquer les trous, ils peuvent être sélectionnés manuellement ou automatiquement. Il existe plusieurs méthodes pour reboucher les trous d'un maillage qui s'appliqueront suivant la taille de ces trous, l'homogénéité des densités de points des zones déconnectées et la courbure de surface concernée.

Dans les zones a densité homogène et dans le cas de petits trous (petits en termes de nombre de bords qui composent leurs limites) pour lesquels il manque au maximum une dizaine de faces, une correction automatique pourra être utilisée. L'algorithme de remplissage utilise une technique qui ajoute une face entre deux bords de deux frontières adjacentes. L'algorithme choisi à chaque fois la paire de bord la plus proche, il s'agit cependant d'un remplissage simple sans insertion automatique de points.

Lorsque les trous sont de taille importante, il faut au préalable ajouter quelques ponts manuellement, surtout s'il y a peu de courbure sur la zone a reboucher. Le remplissage automatique peut ensuite être exécuté avec insertion de points.

Il est également possible de réaliser un remplissage plus sophistiqué avec insertion de points sur un maillage courbe. Suivant le logiciel utilisé dans ce cas, la taille du trou ne doit pas être trop importante, car l'outil n'est pas toujours performant, ce point particulier est abordé dans la publication de Pernot [17].

### **Objets non manifold**

Un maillage polygonal est manifold s'il satisfait à la propriété suivante : en tout point du maillage, il existe une sphère telle que l'intersection entre la sphère et le maillage est homéomorphe à un disque, Allegre [18]. Ceci peut se traduire pour un maillage non-manifold par le fait qu'il ne puisse pas posséder de volume intérieur, par opposition aux objets manifolds dans lesquels un volume intérieur peut être entièrement délimité de façon continue par ses faces. Si une face est supprimée sur un maillage manifold, il devient non-manifold car son volume interne n'est plus délimité. Une arête non manifold est une arête appartenant à plus de deux faces, et un sommet non manifold est partagé par deux ensembles de facettes non connectés.

Les objets non manifold doivent être supprimés, ils laisseront à leur emplacement des trous dans le maillage qui seront corrigés par la suite.



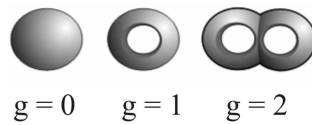


FIGURE 1.9 – Illustration des poignées et correspondance avec le genre d'un objet, tiré de Martinez [19].

Pour déterminer si le maillage est manifold, la relation d'Euler-Descartes est utilisée. Elle relie le nombre de composant de chaque entité du maillage, elle peut permettre de vérifier si un maillage ne contient pas d'erreurs et en connaissant le nombre de ses poignée, la définition d'une poignée est illustrée à la figure 1.9.

$$F + S = A + 2(1 - g) \quad (1.7)$$

Cette égalité est définie pour chaque maillage par  $S$  : le nombre de sommets,  $F$  : le nombre de faces,  $A$  : le nombre d'arêtes et  $g$  le genre de l'objet : le nombre de poignées dans un maillage, par exemple une tasse à café un objet de genre 1 à cause de son anse et un ballon, est objet de genre 0. Cette égalité est la généralisation de la relation d'Euler-Descartes qui est valable pour les volumes de genre zéro (les maillages de la statue de Psyché).

$$F + S = A + 2 \quad (1.8)$$

Ainsi, une fois le modèle nettoyé, si le volume est bien fermé, il doit à satisfaire cette égalité.

### 1.4.2 Décimation

Pour pouvoir exécuter un traitement de type décimation, il est impératif que le maillage soit dépourvu d'erreurs et bien fermé.

Les données issues des dispositifs d'acquisition sont généralement redondantes d'un point de vue géométrique. Cette redondance est intrinsèque au processus d'échantillonnage des surfaces sur des grilles régulières. Ainsi, il est possible de diminuer le nombre de points, en gardant des contraintes associées à la courbure, ce qui n'affectera que très peu la précision du modèle. La réduction s'applique essentiellement au niveau des surfaces planes ayant une densité de point élevée. Pour la statue de Cadmus, il a été impératif de réduire drastiquement le nombre de triangles du maillage (plus de cinq cents mille) afin d'adapter le modèle à la simulation numérique. En effet, les modèles doivent être légers pour rendre la simulation numérique rapide, voir simplement possible. Dans une certaine mesure, augmenter la définition

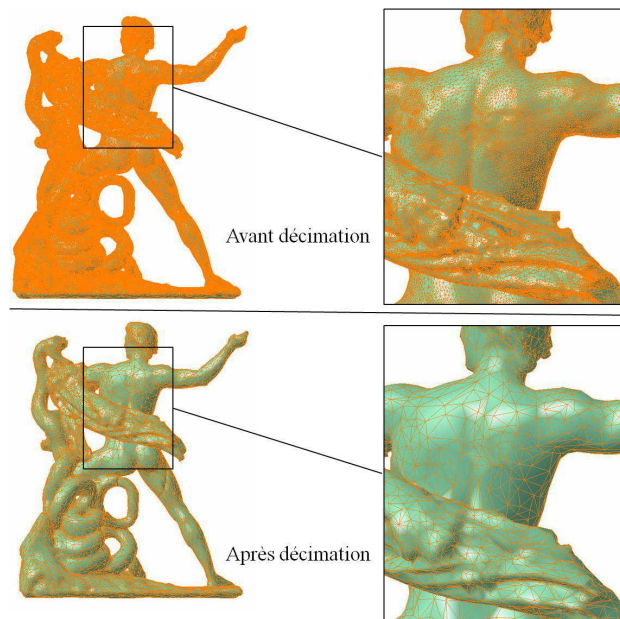


FIGURE 1.10 – Décimation du modèle de Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dirce

n'apporte pas de gain en terme de précision des résultats. Le risque est d'atteindre les limites des ressources informatiques : un nombre de points trop élevé empêchera le calcul de se faire en saturant la mémoire. Décimer un modèle permet également de réduire le temps de traitement pour toutes les opérations sur le maillage qui suivront celle-ci. L'objectif est de trouver le meilleur compromis entre précision du maillage et nombre de triangles, pour créer un maillage de la meilleure qualité possible. Là encore la précision désirée ne peut s'apprécier que visuellement, voir figure 1.10. Il est bien sûr possible de choisir de ne décimer qu'une partie du modèle, ce fut le cas du modèle de la statue de Psyché : les zones de contact entre blocs ont été bien moins décimées que le reste du modèle, afin de conserver plus de détails dans ces zones critiques pour la simulation.

La décimation peut se faire suivant deux méthodes :

- La décimation par déviation de corde, cette méthode permet de conserver la forme du modèle, même dans les zones à forte courbure. Lors du traitement, il est possible d'imposer une valeur maximale de déviation autorisée.
- La décimation par longueur d'arête, cette méthode ne permet pas de conserver exactement la forme du modèle, mais permet d'obtenir un maillage plus uniforme, un peu comme le ferait l'optimisation. Il est possible d'indiquer une valeur minimum

de taille d'arête pour le modèle, car la méthode supprime progressivement les triangles en commençant par ceux qui ont au moins une arête très petite vis-à-vis de toutes celles du modèle.

Pour les deux types de décimation, la portée du traitement peut se déterminer par l'indication d'un pourcentage cible du nombre de triangle à garder. La qualité du traitement peut être contrôlée par analyse de la déviation entre le maillage avant décimation et le maillage résultant de l'opération.

### 1.4.3 Lissage

Tout comme pour les opérations de décimation, pour exécuter un traitement de type lissage sur un maillage, il est impératif que celui-ci soit dépourvu d'erreurs et bien fermé.

Une erreur courante sur maillages issus de scans est l'apparition de bruit. L'erreur peut provenir de l'angle d'incidence de la source lumineuse, mais aussi des propriétés optiques du support (brillance). La numérisation de la statue de Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé a été réalisée dans de mauvaises conditions d'éclairage et sur du marbre qui est un matériau relativement brillant. La statue a de plus une géométrie propice aux incidences rasantes, ce qui a donné un rendu localement très bruité. Le bruit peut se manifester sous forme de points aberrants, avec l'apparition de petites déviations des points par rapport à la surface de l'objet (bruit gaussien). Le rendu donne l'impression de petites pointes dans le maillage.

Dans notre cas, ces erreurs doivent être corrigées avec attention, car elle peuvent être confondues avec les détails de la sculpture. Ainsi, c'est en comparant le maillage et des clichés de l'œuvre que nous avons visuellement pu déterminer les surfaces qui devaient être lissées et celles qui devaient rester intactes. La figure 1.11 illustre le rendu du lissage effectué sur le dos de la statue, le lissage a été réalisé sur la peau de Cadmus, celle du dragon et sur le socle, alors que les cheveux, la cape et la tête du lion n'ont pas été retouchés.

Dans la plupart des logiciels de traitement des nuages de point, il existe au moins deux méthodes de lissage : simple et double effet. Dans le manuel de l'utilisateur de Catia-DSE [12], il est conseillé d'utiliser la première méthode pour les maillages dont le contour est déjà assez lisse, c'est-à-dire sans arêtes vives, ce qui n'est pas le cas de Cadmus. En conservation du patrimoine, le lissage est avant tout une correction esthétique, dans notre cas il permet, dans une certaine mesure, la simplification des calculs qui suivront. Ainsi, le mieux est de tester les deux méthodes proposées et c'est celle qui donnera le meilleur résultat visuel qu'il faudra garder.

Cette première méthode ramène les sommets plus éloignés de la moyenne locale en direction du centre de gravité, elle a l'inconvénient de réduire le

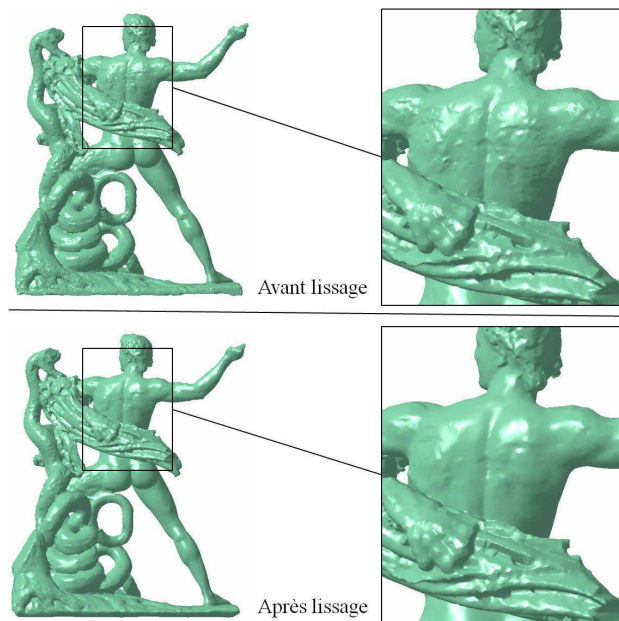


FIGURE 1.11 – Lissage du modèle de Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé

volume du maillage traité. La seconde méthode est dite à double effet, elle réduit moins le volume du modèle que la première. Dans ce cas, lorsqu'un sommet se situe trop vers l'intérieur, il est toujours ramené vers le centre de gravité, mais une compensation consiste à déplacer ses voisins vers l'extérieur, ce qui diminue l'effet de réduction du volume.

Pour les deux méthodes il est possible d'imposer une déviation maximum de la position théorique par rapport à la position d'origine. L'ensemble peut être quantifié par les outils d'analyse de la déviation proposés par Catia DSE.

#### 1.4.4 Optimisation/adaptation

Là encore, pour pouvoir exécuter un traitement de type optimisation, il est impératif que le maillage soit dépourvu d'erreurs et bien fermé.

Afin de minimiser la densité non-homogène des maillages, il est nécessaire d'optimiser leur qualité. Cette manipulation consiste à redistribuer et reformer les triangles d'un maillage, c'est ce traitement qui simplifiera le plus la géométrie des maillages pour les adapter à la simulation numérique, mais c'est aussi le traitement qui modifie le plus leur apparence.

Cet outil a été utilisé pour la reconstruction des modèles de Cadmus et Psyché. Cette opération a le désavantage de modifier le volume des maillages, car l'optimisation modifie son contour. Le maillage de Psyché n'a pas été

optimisé au niveau des interfaces correspondant aux fractures.

Il s'agit d'un traitement itératif qui découpe et réduit les arêtes du modèle. Pour illustrer le principe, le manuel de l'utilisateur de Catia [12], propose l'explication suivante : une arête trop longue est coupée en deux, une arête trop courte est supprimée. Par conséquent, il existe un rapport minimum entre la longueur d'arête maximale et minimale, sinon une arête qui vient d'être coupée pourrait être supprimée à l'itération suivante, etc.

La figure 1.12 illustre quelques optimisations. La décimation et l'optimisation/adaptation fonctionnent de manière différente. La décimation réduit localement la densité de facettes lorsque la géométrie est simple, augmentant donc leur taille et compliquant leur forme, tandis que l'optimisation/adaptation sert justement à homogénéiser la forme et la taille des facettes.

Tout d'abord, il est nécessaire de déterminer le nombre optimal de faces voisines pour chaque sommet  $S_{\text{opt}}$ . Pour les maillages 2D, la valeur optimale de l'angle des faces connectées à chaque sommet vaut  $\frac{\pi}{3}$ , voir Sala et Casagrande [20, 21]. Donc le nombre de triangles voisins nécessaires pour former les éléments autour d'un sommet est  $S_{\text{opt}} = 6$ .

En 3D, pour des maillages surfaciques convexes et sans poignées délimitant un contour fermé, le théorème de Descartes énonce que la somme des angles des faces doit être égale à  $2\pi$ . En surface, la somme des angles des tétraèdres liés par un même sommet doit tenir compte de la courbure du maillage :

$$\epsilon = 3\alpha - \pi \quad (1.9)$$

Avec  $\alpha$  évalué par le théorème du cosinus ou d'Al-Kashi. Le nombre optimal d'éléments composant chaque sommet d'un maillage surfacique 3D, F est (Sala [20]) :

$$F = 2.S_{\text{opt}} - 4 \quad (1.10)$$

avec  $S_{\text{opt}}$ , le nombre de sommets. Une fois le nombre optimal de voisins pour chaque sommet défini, les opérations d'adaptation sont effectuées de sorte que chaque élément ait un certain nombre de voisins qui n'est pas trop loin de l'optimal calculé.

### 1.4.5 Remontage du modèle géométrique

Plusieurs méthodes de remontage virtuel sont décrites dans la littérature. Il existe différentes configurations, tout dépend de la taille des morceaux à assembler, mais aussi de l'état d'usure des surfaces à mettre en contact. Selon le cas de figure dans lequel on se trouve, la méthode de résolution du problème va changer. Comme l'explique Arbace [10] dans son article, le

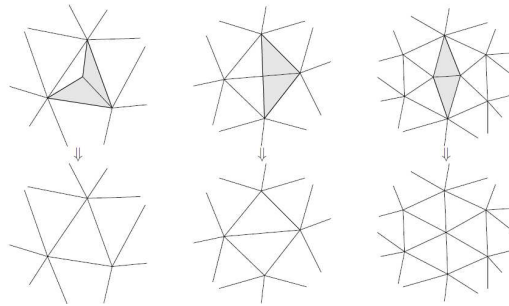


FIGURE 1.12 – Illustration de trois opérations d'adaptation, tiré de Sala [20]

mieux est de ne pas attendre, uniquement d'un algorithme, la solution de ce problème de "puzzle", ceci exprime le fait que ces opérations sont délicates et que le jugement au cas par cas est nécessaire pour résoudre ces problèmes.

Dans le cas de morceaux de taille permettant leur manipulation, l'analyse visuelle permet de ré-assembler les morceaux par juxtaposition de manière fiables. Cette analyse est plus évidente pour des interfaces ayant des irrégularités marquées provenant de fractures récentes, elle reste cependant la meilleure des méthodes à utiliser dans le cas de surfaces usées. La méthodologie consiste en la réalisation d'un nouveau scan recouvrant partiellement des morceaux adjacents, tout en maintenant en place les morceaux deux à deux dans leur position originelle, c'est-à-dire, avant la fracture. Il en ressort des données précises sur les positions relatives de ces deux fragments adjacents, pour aligner numériquement les deux pièces. L'alignement peut se faire avec les mêmes outils que ceux utilisés pour le recalage et les scans des groupes de blocs adjacents, présentés les uns face aux autres peuvent être vus comme des scans relais. Cette technique prévient de l'accumulation d'erreurs : l'espacement trop important entre blocs, ou au contraire, l'inter-pénétration. À la fin, les scans relais sont supprimés du modèle, mais l'information qu'ils ont transmis a été utilisée.

Pour des œuvres de grandes dimensions, la manipulation des blocs est difficile, par conséquent l'accostage manuel des surfaces l'est aussi. La technique présentée ici est celle employée par Benoit Coignard et décrite dans son rapport de restauration de la statue Neptune de Coignard [22]. Il s'agit d'une méthode d'emboîtement numérique. Il s'agit de détourner là aussi l'outil de recalage de scan pour recalibrer les blocs fracturés entre eux. Le résultat est moins bon que celui de la méthode précédente et cette erreur est amplifiée dans le cas de surface érodées, mais elle est utilisable dans le cas de fragments si grand ou si fragiles qu'ils ne peuvent être manipulés.

Deux méthodes d'appariements des surfaces fracturées sont présentées.

Celle de Benoît Coignard [22] suppose une bonne adaptation de la surface commune, donc difficile dans le cas de fragments avec des surfaces érodées.

Une fois les modèles géométriques triangulés réalisés, il faut pouvoir manuellement isoler les zones de contact sur chaque bloc (en les masquant par exemple). Cette étape est délicate, car le succès de l'opération peut être compromis si des surfaces de forme différente sont sélectionnées.

Pour garantir un résultat optimum, il faut procéder par itération, les principales étapes listées ci-dessous sont illustrées dans la figure 1.13.

- Sélectionner les deux surfaces à mettre en contact
- Suivant le logiciel utilisé, il peut être nécessaire d'inverser les normales d'une des surface (sous RapidForm, mais pas sous Catia)
- Utiliser l'outil de recalage des scans pour les aligner
- Contrôler le recalage en faisant une analyse de la déviation
- Répéter cette opération : au fur et à mesure les surfaces de contact sélectionnées sur les deux morceaux sont plus faciles à identifier et le recalage est plus fin.

A la suite de ces étapes, des écarts et/ou interpénétration restent entre les deux surfaces. Pourtant, les étapes listées permettent, a priori, de retrouver la meilleure solution possible. Ainsi, ces défauts résultent de la non-similarité des deux surfaces recalées, elle-même due à l'état d'usure des interfaces, mais aussi à l'acquisition et aux étapes simplificatrices de la géométrie que sont les optimisations, lissages, etc. Pour la simulation numérique, il est impératif que les volumes des blocs ne s'intersectent pas. Pour empêcher l'interpénétration, une étape supplémentaire à celles listées doit être rajoutée. Il faudra procéder à la translation d'une des interfaces dans la direction de la normale moyenne de ses facettes, la longueur optimum de la translation correspond à la déviation maximum relevée entre les deux interfaces.

La méthode qui suit peut être utilisée dans le cas où des interfaces rigoureusement identiques et parfaitement emboîtées sont nécessaires, comme par exemple dans le cas de la reconstruction pour la simulation du comportement aux interfaces. La méthode précédemment décrite n'offre pas les mêmes garanties. Après avoir recalé les deux blocs comme expliqué dans la partie précédente, l'idée est de n'utiliser qu'une des deux surfaces de contact scannées et de la dupliquer, l'autre sera simplement supprimée. Il faudra inverser les normales de la surface créée et coller cette nouvelle surface de contact sur les limites du maillage dont provenait celle qui a été supprimée en s'assurant de refermer hermétiquement les bords. En voici les étapes :

- Dupliquer le premier bloc (celui dont la zone de contact sera utilisée pour les deux blocs)
- Garder la partie du maillage correspondant à l'interface et supprimer le reste

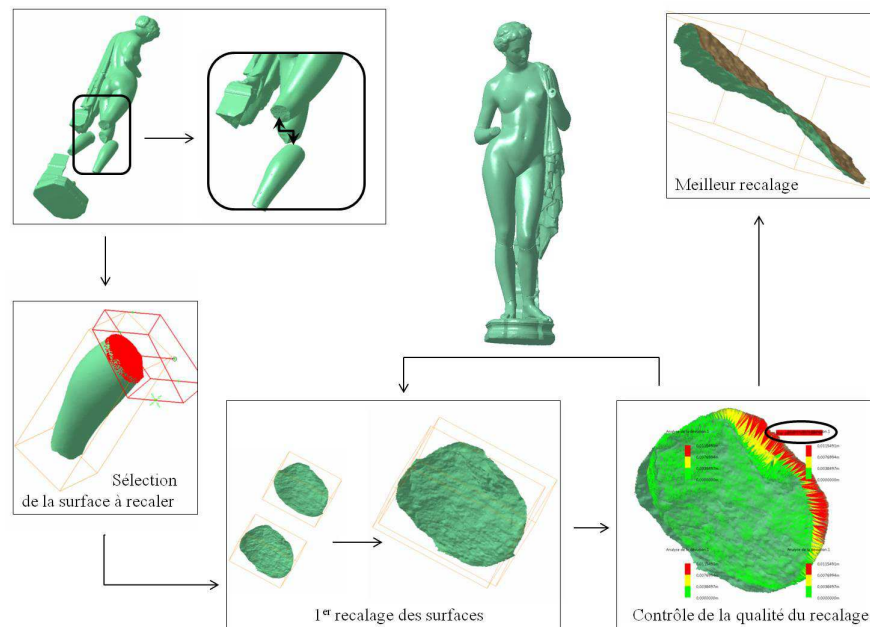


FIGURE 1.13 – Emboîtement de l'interface de la jambe gauche de Psyché

- Inverser les normales de cette partie de maillage, afin que les normales aux surfaces du bloc finalement reconstitué pointent toutes vers l'extérieur
- Sur le deuxième bloc, supprimer la partie de maillage correspondant à la zone de contact
- Assembler les maillages du deuxième bloc et de la zone de contact issue du premier
- Refermer "hermétiquement" le maillage issu de la fusion

## 1.5 Reconstruction des volumes et remailage pour la simulation

A ce stade du travail, la géométrie de l'œuvre est obtenue, elle représente en détails la surface de chacun des morceaux la constituant. L'utilisation de cette géométrie pour mettre en œuvre des analyses mécaniques via des codes de calculs, demande une discrétisation de l'espace qui n'est pas toujours compatible avec les points de support utilisés pour représenter cette géométrie. Non seulement il faut construire les volumes contenus par les surfaces reconstruites, mais il faut, de plus, procéder à des maillages volumiques et surfaciques qui sont compatibles entre eux et répondent strictement aux



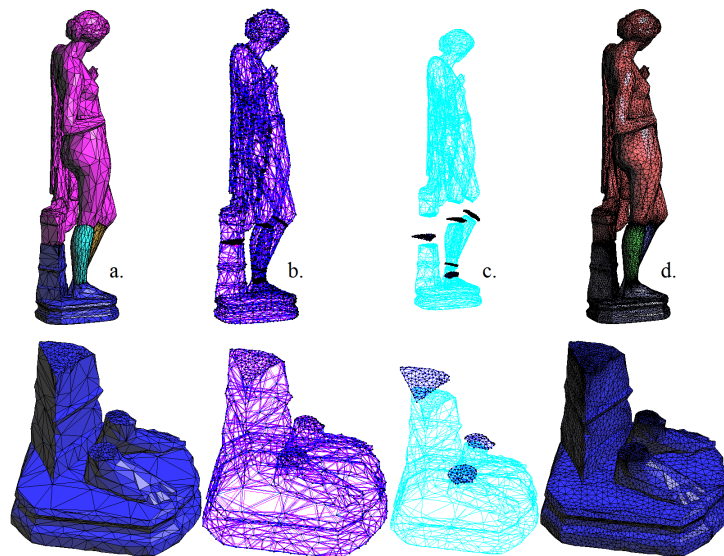


FIGURE 1.14 – Reconstruction des maillages surfaciques et volumiques sous GID

exigences des méthodes numériques. Ces exigences à prendre en compte sont liées aux maillages notamment en termes de représentation : sans trous ni de chevauchement d'éléments, d'aspects des éléments etc.

Les maillages actuels étant construits sur la base d'une représentation vectorielle des surfaces et de la géométrie, il devient donc nécessaire de passer à une telle représentation pour les surfaces, à moins de construire un nouveau maillage. De même nous devons restituer au modèle géométrique tous les éléments de renforts et toutes les modifications éventuelles pensées par le restaurateur, car celles-ci doivent être prises en compte d'une façon ou d'une autre dans l'analyse mécanique. Les contraintes liées au maillage seront traitées par la suite lors de l'introduction des éléments de renfort mécanique ou encore par la recherche d'une représentation adaptée dans le cas d'une restauration collée entre les blocs. Cette dernière étape du travail de préparation avant la simulation numérique proprement dite est illustrée par le travail réalisé sur la statue de Psyché, figure 1.14.

### 1.5.1 Volumes et interfaces

Le travail a été effectué en utilisant principalement le maillageur GID [23], bien que pour des problèmes et des situations particulières d'autres maillages ont été également utilisés (Catia). Pour cela, la géométrie créée précédemment a été importée sous un format adapté au maillageur (DXF, STL, etc.).

À l'import les entités les plus proches sont fusionnées selon une tolérance qui doit être fixée : pour la reconstitution du modèle de la statue de Psyché, celle-ci a été définie à  $10^{-5}$  m. La géométrie importée est constituée de points et d'une triangulation des surfaces numérisées (figure 1.14, a). Après l'import chaque triangle de la surface est connue comme une surface à part entière, (figure 1.14, b).

Bien que la discrétisation de l'espace (les maillages volumiques et surfaciques) puisse être faite à partir de là, il est souvent préférable de passer par une phase de groupement des triangles de la surface en entités plus grandes dont les limites sont identifiées par des NURBS (Non-Uniform Rational Basis Splines). Le fait de réaliser un maillage sur le support initial des nœuds importés conduirait souvent à un nombre élevé de degrés de libertés, incompatible avec les moyens de calculs actuellement disponibles. La création (automatique) des NURBS permet une reconstitution des surfaces tout en gardant un contrôle sur la finesse du maillage, qui de toute façon sera à refaire pour mettre en correspondance les éléments surfaciques et les éléments de volume. La représentation des surfaces par les NURBS est particulièrement utile dans la phase de la reconstitution des volumes à partir des surfaces fermées, les algorithmes travaillant sur les NURBS étant particulièrement efficaces.

## Volumes

La création des volumes est obtenue par remplissage de la surface fermée. Toutes les surfaces qui définissent le futur volume sont sélectionnées et le volume est créé automatiquement si le contour est fermé de manière étanche et le maillage est dépourvu d'erreurs. Il est parfois nécessaire d'optimiser le contour, si ça n'a pas été fait avant la création des NURBS pour rendre les dimensions de ses entités plus homogènes. La présence de poignées de très petite taille peut également générer des erreurs à cette étape. Les volumes de la statue Psyché sont représentés en bleu ciel à la figure 1.14, c.

## Interfaces

Dès lors que l'on souhaite simuler le comportement d'une œuvre comportant plusieurs morceaux, une bonne description géométrique des interfaces est impérative. Celles-ci jouent un rôle prépondérant dans le transfert des efforts et des déplacements au sein d'un ensemble de solides en contact.

Dans notre travail, nous utilisons principalement l'outil interface de FLAC3D décrit dans le chapitre 2. Nous présentons plusieurs façons de générer les interfaces pour qu'elles soient prise en compte par FLAC3D :

- Il est possible de les définir comme étant des entités géométriques à part entière avant l'import dans le mailleur. Dans ce cas, nous avons créé le maillage de l'interface depuis le fichier CAO (sous Catia). L'import de l'interface se fait avec le maillage surfacique de l'œuvre. Pour que les interfaces soient correctement créées, il faut importer un double de l'enveloppe surfacique extérieure des blocs au niveau de la zone de contact. En effet, il est impératif qu'il y ait une correspondance parfaite des nœuds homologues des maillages de l'interface et du bloc.
- Les interfaces de FLAC3D peuvent aussi être créées par le mailleur au moment du maillage. Il faudra prendre le soin d'indiquer au mailleur quels sont les points, mailles et NURBS à considérer. Nous avons effectué ce travail sous GID.
- La dernière méthode que nous avons testée est d'identifier ces éléments directement dans le logiciel de simulation, ici FLAC3D. Il faut indiquer au logiciel entre quelles entités créer l'élément interface, il est possible d'ajouter en plus un intervalle dans lequel ces éléments sont souhaités. Le logiciel identifie les zones en contact en calculant la distance entre les nœuds des différentes entités, la possibilité de modifier la tolérance de détection est laissée à l'utilisateur.

Parmi ces méthodes, la plus facile à mettre en œuvre est la première, c'est donc majoritairement par la création d'entités géométriques avant l'import dans le mailleur que nous avons défini les éléments interface de FLAC3D.

Les cinq interfaces de la statue Psyché sont représentées en bleu foncé à la figure 1.14, c. Pour les besoins de la simulation, des propriétés particulières sont affectées à ces surfaces 3D sélectionnées, elles sont détaillées au chapitre 2.

## Maillage

Pour réaliser le maillage de la géométrie automatiquement, GID n'a besoin que d'une information : la taille maximal des éléments du maillage qui vont être générés. L'opération de maillage consiste en la discrétisation des surfaces et volumes géométriques en plusieurs sous-éléments. Pour les maillages surfaciques composés de triangles, des éléments tétraédriques sont créés, un tétraèdre est défini par quatre nœuds à ses sommets et six arêtes droites les connectant.

C'est ainsi que de nouveaux triangles et tétraèdres ont été créés pour le maillage de Psyché. A l'issue du maillage, celui-ci peut être exporté dans un format d'entrée propre au logiciel de simulation. Nous avons utilisé une procédure qui a été développée au laboratoire PRISME, elle permet le transfert du maillage créé sous GID vers le logiciel FLAC3D.

A titre d'exemple le maillage de la statue Psyché, représenté sur la figure 1.14, est constitué de 41230 points représentant son contour extérieur et ses interfaces, tandis que ses volumes sont représentés par 181583 tétraèdres. Cela conduit donc à 49571 nœuds et à 148713 degrés de libertés.

### 1.5.2 Modélisation d'éléments de renfort

Il existe différentes façons de procéder à la reconstruction des éléments de renfort. Tout dépend de la simulation qui va être réalisée, figure 1.15.

Lorsque l'action mécanique des renforts est homogène dans le matériau, que leur nombre est important et qu'ils sont régulièrement répartis, il est possible d'utiliser une méthode d'homogénéisation. Par exemple, les travaux de Bleyer et Le Buhan [24] sur les procédures d'homogénéisation par modélisation macroscopique de matériaux renforcés par inclusions. Où encore, Cofie [25] modélisent la présence de racines de hêtre sous un chemin forestier par une couche épaisse ayant des propriétés différentes de celle du sol.

Lorsque le problème est traité en deux dimensions, les renforts peuvent être modélisés explicitement avec prise en compte du contact, comme dans l'essai de pull-out de barres en acier dans du béton modélisé par Berto, où l'objectif est de simuler le comportement de la liaison, voir Berto [26].

Pour une modélisation en trois dimensions, une simplification de la géométrie des éléments de renfort permet de les modéliser explicitement, comme dans le cas d'un assemblage de poutre en bois. Xu [27] modélisent des barres en acier nervurées par des éléments circulaires ; par contre, le glissement des deux matériaux n'est pas pris en compte.

Enfin, pour modéliser le comportement de massifs rocheux boulonnés, la prise en compte de la géométrie en trois dimensions et des contacts aux interfaces est nécessaire. Néanmoins, une simplification de la géométrie peut être réalisée en considérant les éléments de renfort comme des éléments 1D avec des caractéristiques 3D structurelles équivalentes. L'exemple est fait dans les travaux de Dias [28], la liaison entre le sol et une inclusion 1D est modélisée par une loi d'ancrage que l'auteur a développé et apporté au logiciel FLAC3D (Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions) développés par ITASCA [29].

Pour le cas de la statue de Neptune, deux stratégies ont été considérées pour décrire l'implantation et le comportement des éléments de renfort : la première vise à les représenter comme des éléments structurels 1D, à la manière de Dias [28], tandis que la seconde prend explicitement en compte la géométrie 3D des éléments modélisés, rendant ainsi possible de simuler le contact local entre chacun des éléments.

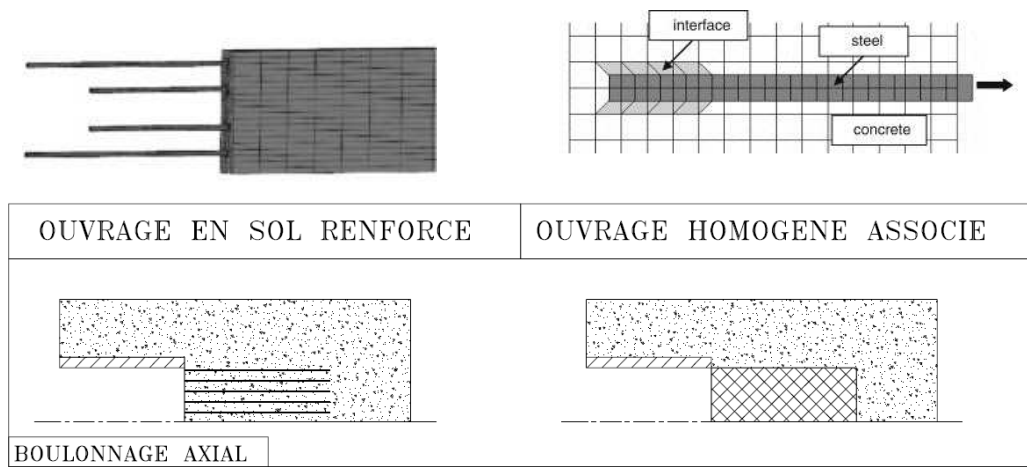


FIGURE 1.15 – Poutre et renforts modélisés en 3D par XU [27], Pull-out modélisé en 2D par Berto [26] et comparaison entre homogénéisation et modélisation 1D des renforts par Dias [28]

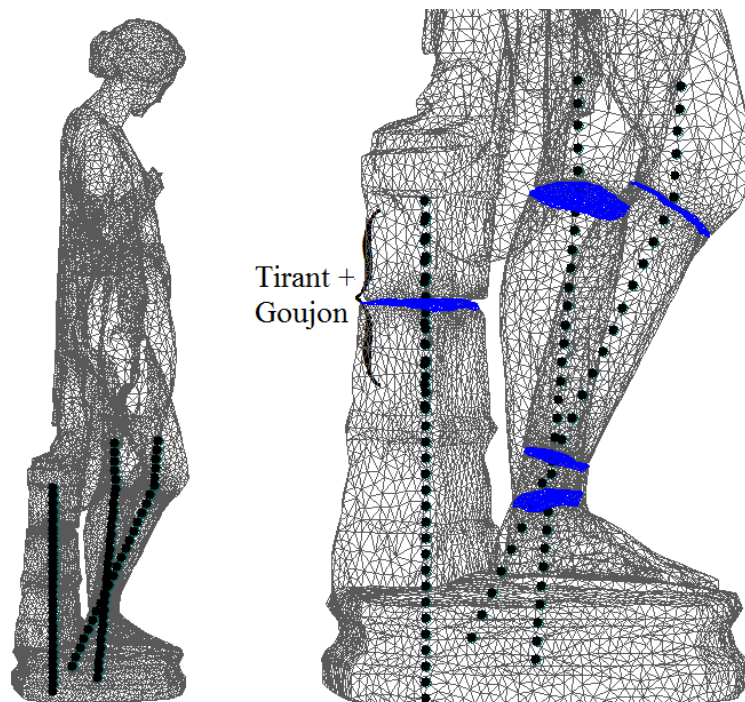


FIGURE 1.16 – Reconstitution du maillage de la statue de Psyché et de ses renforts simplifiés

### Modélisation des inserts en une dimension

La modélisation en une seule dimension est une modélisation simplifiée de la géométrie. Celle-ci a été réalisée grâce aux outils de modélisation des renforts intégrés au logiciel FLAC3D.

En effet, ce premier scénario a été adopté, car il réduit les ressources numériques nécessaires. Par ailleurs, l'implantation des inserts dans le volume de la sculpture est beaucoup plus aisée grâce à l'utilisation du code FLAC3D. En effet, l'une des difficultés de la modélisation des inserts est de soustraire les volumes représentant les éléments de restauration de ceux de l'œuvre.

De plus, la présence de plusieurs matériaux à modéliser autour de chaque goujon (la colle et les fourreaux) donnent lieu à de nombreuses interfaces. Ces interfaces apportent des éléments nouveaux à la simulation, justement modélisées par l'outil interface de FLAC 3D. Sans compter que ces éléments doivent eux aussi être modélisés, ce sont donc des maillages supplémentaires à créer. Les maillages de ces matériaux (colle, fourreaux, détail des pièces composant le système d'ancrage, etc.), dont la géométrie n'est pas prise en compte en 1D, doivent, de plus, être suffisamment fin pour traduire correctement le comportement au niveau des interfaces, ce qui induit qu'il y aura plus de mailles dans le modèle. Ainsi, la statue de Neptune a été modélisée en 3D et ses renforts en 1D.

Ces éléments 1D intègrent une loi de comportement, un modèle et un critère de rupture aux interfaces qui permettent de prendre en compte les caractéristiques des éléments en trois dimensions malgré leurs modélisations en une. Ceux-ci, ainsi que toutes les parties qui ne sont pas liées à la géométrie de ces renforts sont décrits au chapitre modélisation.

La géométrie des éléments de renfort est définie par des lignes reliées par des nœuds, elle peut néanmoins prendre des formes complexes. Les coordonnées de chaque nœuds permettent de la définir. Pour des renforts droits, seuls les nœuds des extrémités doivent être spécifiés, par la suite les nœuds internes sont créés automatiquement et régulièrement espacés à partir du nombre souhaité (autrement dit, de la précision des résultats désirée). Ces nœuds sont ensuite attachés au modèle volumique de la statue par la définition d'un système de liens.

Bien entendu, les éléments créés ont les caractéristiques des éléments 3D, il faut leur associer l'aire de la section qu'ils représentent, mais aussi les caractéristiques mécaniques du matériau qu'ils représentent : un module d'élasticité, une densité, une inertie, une raideur, etc.

Différents outils du logiciel ont été utilisés pour modéliser les renforts de la Psyché de Calmel et du Neptune retrouvé dans le Rhône :

- Pour le tirant de précontrainte : l'outil "cable" qui ne travaille qu'en

traction-compression

- Pour l’ancrage du tirant : l’outil "pile" modélisé par un coulis cohésif travaillant en traction-compression et flexion
- Pour les goujons : toujours l’outil "pile" mais sans la partie cohésive

Une description détaillée du fonctionnement de l’élément 1D se fera au chapitre suivant au cours de la présentation des simulation du comportement sur la statue de Neptune.

### Modélisation des inserts en trois dimensions

La méthode de modélisation géométrique 3D, plus réaliste, mais beaucoup plus lourde en terme de ressources numériques, a été explorée sur la statue de Neptune. La géométrie tridimensionnelle des inserts est explicitement modélisée toujours en utilisant le module DSE du logiciel de Catia. Après cela, les empreintes des inserts (leur négatif) sont implantées dans le modèle de la sculpture. Le module DSE de Catia permet de couper un maillage à l’intersection d’un autre. Ainsi, après plusieurs coupes et fusions, l’emplacement du volume de chaque insert (colle, fourreau et goujon) a pu être soustrait au modèle de l’œuvre pour créer la géométrie finale, voir figure 1.18. Cette étape ayant généré un certain nombre d’erreurs dans le maillage, elles ont dû être corrigées à la manière présentée dans les sections précédentes.

Chaque élément composant les renforts de l’œuvre a été explicitement modélisé, voir figure 1.17, chaque interface entre deux éléments à également due être indiquée au code de calcul, ce qui représente une cinquantaine de pièces et autant d’interfaces, pour plus de 2,5 Go de données. Ces géométries ont été réalisées dans le but d’être importées dans le logiciel Abaqus, un code d’analyse par éléments finis également développé par Dassault-Systèmes et compatible avec Catia, ce qui nous a épargné les étapes d’export et d’import vers le code de simulation numérique.

Les maillages surfaciques et volumiques ont été réalisés sous Abaqus.

Avec cette approche, la géométrie du système est décrite en détail, mais un plus grand nombre de paramètres sont nécessaires pour la modélisation, ainsi qu’un très grand nombre d’interfaces, qui peuvent entraîner des problèmes de convergence lors de la simulation.

Elle permet donc de connaître le rôle et les sollicitations de chaque pièce composant un renfort (cas notamment de la pièce d’ancrage très complexe). Il faut nuancer cependant ces avantages en précisant que les performances actuelles des ordinateurs et codes de calcul seraient à leur limite pour réaliser des calculs sur des structures aussi complexes, notamment en terme de nombre de maille des modèles.

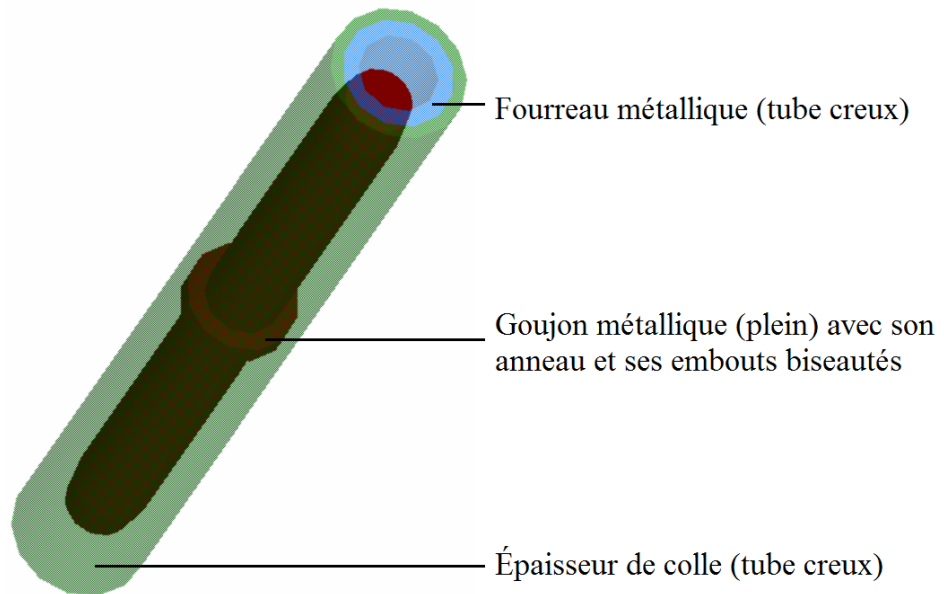


FIGURE 1.17 – Ensemble goujon-fourreau-colle réalisé par DAO

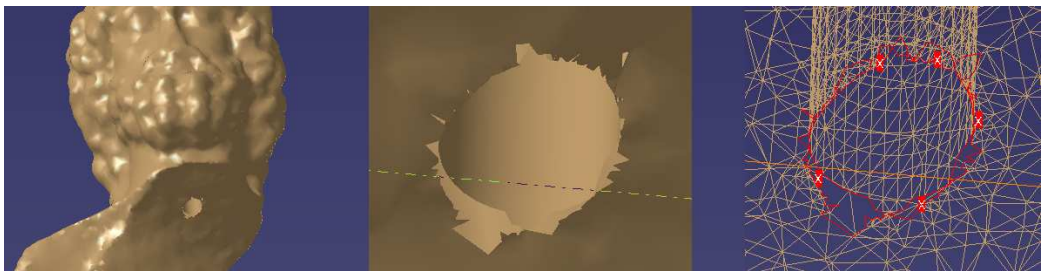


FIGURE 1.18 – Reconstitution du maillage de la statue de Neptune avec l’empreinte de ses renforts



## 1.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté de la façon la plus exhaustive possible la méthodologie de reconstruction géométrique, de l'acquisition à la reconstruction, que nous avons utilisés pour pouvoir mener des simulations numériques sur les œuvres sur lesquelles nous avons travaillé. Les différentes étapes de cette méthodologie proviennent soit de méthodes déjà éprouvées et proposées dans la littérature, soit du savoir faire acquis par les membres du projet REPTURE, ou encore de méthodes développées au cours de ce travail (une des méthodes d'appariement des surfaces facturées par exemple).

Dans un premier temps, les prises de vue et le recalage ont été présentés. Puis les opérations sur les maillages ont été détaillées, notamment les erreurs liées à ce mode d'acquisition. Enfin, après avoir reconstitué les volumes, nous avons présenté le modèle prêt à l'import dans le logiciel de simulation numérique.

Ainsi nous proposons une méthodologie de reconstruction numérique pour les œuvres d'art. Ce travail avait été abordé par Adan [6], mais pour reconstruire les pièces manquantes d'une œuvre. Nous proposons ainsi une méthode d'acquisition optimisée pour la simulation numérique, notamment en assurant la compatibilité du maillage produit avec les contraintes liées à la simulation.

Nous apportons une nouvelle techniques d'accostage de surfaces fracturées et scannées, spécifique à la réalisation de calcul numériques. De plus, la modélisation de renfort en une dimension pour des statues fracturées n'avait auparavant jamais été abordée, nous en montrerons les résultats dans le chapitre suivant. Nous avons également exploré la reconstruction des renforts en trois dimensions. C'est une approche plus réaliste, qui permet une visualisation plus fine de la répartition des contraintes au sein des renforts.. La transmissions des efforts entre ces pièces composant l'ancrage devient également accessible. Cette technique présente donc beaucoup d'avantages moyennant une difficulté accrue de modélisation géométrique et certainement un coup supplémentaire en terme de temps de calcul par rapport à la modélisation des renforts en une dimension.

# Chapitre 2

## Simulations numériques : comportement mécanique d'œuvres restaurées

### 2.1 Introduction

La numérisation des œuvres sculptées et la modélisation sur la base des nuages de points obtenus ouvrent des perspectives d'utilisation de ces géométries très variées. La manipulation de ces « clones numériques » par ordinateurs a guidé les travaux de restauration des restaurateurs Coignard [22] en facilitant, d'une part la manipulation virtuelle des blocs de roches de masses considérables et, d'autre part une analyse de la stabilité des statues par des outils simples de la mécanique des solides indéformables. Des analyses numériques plus approfondies peuvent être réalisées permettant à l'instar des travaux de Borri [7] portant sur le diagnostic de la statue de David sculptée par Michelangelo. Notons néanmoins que les travaux publiés dans le domaine de la conservation du patrimoine sculpté se restreignent au diagnostic de l'état des statues, sans faire appel à la notion de restauration d'œuvres fracturées.

Dans ce chapitre, la problématique de l'utilisation des outils d'analyses numériques pour la restauration des œuvres sculptées endommagées, voire fracturées est abordée via des exemples d'études menées sur deux statues en marbre : Neptune et Cadmus dans le cadre de la mécanique des milieux continus. L'approche de ce cadre permet d'aborder le comportement des statues sans fractures visibles ou en ayant un nombre limité et les effets des différentes techniques de restauration : renforcement, collage, etc.

Si le choix de l'outil numérique à utiliser est plus une question de commodité que de principe, il ne reste pas moins que les outils numériques de type

éléments finis, très largement répandus dans l'industrie et très performants sont très exigeants en termes de ressources numériques à mettre en œuvre, si bien que pour des applications industrielles, comme pour celles traitées dans ce travail, les outils de calcul en parallèle sont devenus incontournables. Cependant, et ceci malgré la démocratisation des centres de calcul haute performance, ces outils de calcul ne sont pas à la portée du plus grand nombre et restent encore réservés aux spécialistes du numérique.

En voulant proposer une méthode qui se doit d'être utilisable par les acteurs de la restauration, nous nous sommes tournés vers des outils numériques moins complexes et proches de la problématique du comportement des matériaux naturels (roches, roches). En effet, le comportement de ces statues en roche fracturée et renforcées dépend étroitement du comportement des éléments de renforts et des interfaces entre les blocs des œuvres endommagées. Une analogie constatée entre ce présent problème et ceux observés dans le domaine de la géotechnique a guidé le choix des outils numériques.

En groupant donc les critères d'un outil numérique relativement peu gourmand en ressources informatiques, mais encore suffisamment complet pour aborder des problèmes complexes de comportement des matériaux naturels et des interfaces, nous avons fait le choix de l'utilisation dans nos calculs du logiciel commercial FLAC3D (Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions) développé depuis une trentaine d'années par Itasca.

Bien qu'une partie de ce chapitre est dédiée aux détails techniques de la réalisation des différentes analyses numériques en statique et en dynamique avec FLAC3D, les questions abordées restent suffisamment générales et peuvent être traitées autrement.

Les questions auxquelles nous tentons de répondre via la modélisation numérique du comportement des statues endommagées/réparées se poseront chaque fois que la restauration d'une œuvre endommagée sera entreprise. On distinguera trois groupes/types de questions :

1. Est-ce que l'état actuel d'une œuvre sculptée, de surcroît endommagée et/ou fracturée permet d'envisager son exposition sans aucune restauration ? Est-ce que la stabilité globale de la structure peut être assurée sans risque pour les visiteurs et l'œuvre ? Dans la pratique, la réponse à ces questions est souvent donnée par les restaurateurs/sculpteurs et forme le cœur de leur métier. Ils sont aidés dans leurs décisions par des analyses de type solides indéformables, souvent suffisantes pour répondre de façon pertinente à ce type de questions. De ce point de vue, les analyses numériques détaillées n'ont pas pour objectif de répondre à cette question, bien qu'elles le puissent.
2. Dans quelles mesures, une proposition de restauration est-elle techni-

quement acceptable ? Quel impact aura sur la structure entière, la redistribution des contraintes inhérentes à la solution de restauration proposée ? Comment distinguer une alternative de restauration « optimale », quels critères définir ? Au-delà des critères esthétiques et historiques pris en compte par les restaurateurs, il s'agit dans ce cas d'étudier finement la distribution des contraintes au sein de la structure et de dimensionner la restauration le cas échéant. C'est principalement ce groupe de question qui seront au centre de l'analyse numérique proposée. Cette analyse doit prendre en compte le comportement de l'ensemble des éléments : blocs de roche, interfaces entre blocs et si nécessaire, tous les éléments de renfort qui viendront s'ajouter.

3. Quel serait le comportement de la structure/statue restaurée vis-à-vis des situations particulières auxquelles une œuvre restaurée peut éventuellement faire face ? En particulier, il est intéressant d'analyser à chaque fois que cela est possible, la pertinence de la restauration et l'impact de ses défauts sur la réponse de la statue à long terme, ainsi que sa réponse vis-à-vis de sollicitation dynamique. On initiera dans ce chapitre l'étude dynamique du transport routier d'une œuvre sculptée, laissant ouverte la question de son comportement vis-à-vis d'autres types de sollicitations dynamiques (séismes, vibrations dues au transport aérien etc.), tout en indiquant que la même méthodologie peut être utilisée pour étudier ces situations si les besoins se font ressentir.

Le chapitre est structuré de la manière suivante : dans un premier temps, une brève description du logiciel FLAC3D avec les principales caractéristiques des options utilisées dans ce travail sont présentées. La stratégie et les hypothèses des simulations numériques sont mises en lumière dans un deuxième temps. Enfin, des discussions autour des résultats obtenus sur les deux œuvres d'art permettent de clore ce chapitre.

## 2.2 Description du logiciel de calcul numérique : FLAC3D

FLAC3D (Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions) développé par la société Itasca Consulting Group Inc est un logiciel basé sur la méthode des différences finies explicites. Le principe de la méthode est de remplacer chaque dérivée par une expression algébrique écrite en termes de variables intervenant dans le système d'équation en des endroits discrets dans l'espace. Sur la figure 2.1, est illustré le principe de la méthode de calcul explicite. À chaque pas de temps de calcul, les vitesses, les déplacements et

les déformations aux nœuds sont déterminés. En utilisant une loi de comportement, les contraintes et donc les forces correspondantes sont évaluées. Une intégration explicite sur un pas de temps suffisamment petit (pseudo temps) pour que ces quantités soient considérées comme étant constantes, permet alors de déduire de l'équation dynamique du mouvement, les nouvelles vitesses nodales à partir des accélérations et les nouvelles valeurs des déplacements nodaux à partir de ces vitesses. La connaissance des déplacements aux nœuds d'un élément permet, à son tour, le calcul des déformations (considérées constantes sur l'élément ou sur un sous élément) et finalement le calcul des contraintes via l'intégration de la loi de comportement. La différence entre les forces « internes » (contraintes) et forces nodales sont les forces non-équilibrées (unbalanced force) qui s'introduisent dans le système à chaque nouvelle itération. L'état d'équilibre est atteint lorsque les forces non équilibrées deviennent négligeables devant les autres forces du système. L'avantage de la résolution explicite est qu'elle évite l'assemblage d'une matrice globale de rigidité et permet ainsi la réduction drastique des besoins en mémoire vive de l'ordinateur. En contre-partie, la résolution du système dynamique se fait via l'introduction d'un pseudo temps sans signification physique particulière, ce qui permet néanmoins la résolution d'un problème statique avec des outils et un algorithme globalement destiné aux problèmes dynamiques. De part la nature explicite de la résolution du problème dynamique, le schéma de résolution peut devenir rapidement instable et ceci avant qu'une solution statique soit obtenue. En partant des conditions de stabilité de la solution, un pas critique de pseudo temps est donc calculé automatiquement par le logiciel et le pas de pseudo temps est toujours maintenu inférieur à ce pas critique.

Cette résolution du problème statique par une procédure dynamique apporte un tel bénéfice par rapport à la demande de mémoire vive, qu'il justifie, à lui-seul, le choix de ce logiciel.

En statique, la matrice de masse qui intervient dans l'équation dynamique du mouvement, est calculée en utilisant les termes d'inertie numérique (avec les masses fictives aux nœuds). Au contraire, lors de calculs dynamiques, le logiciel utilise les masses réelles des nœuds, qui sont déduites à partir de la densité réelle des zones environnantes. Il en est de même pour la matrice d'amortissement : si dans les calculs statiques, une forte valeur de pseudo amortissement est utilisé afin d'obtenir la stabilité de la résolution, différents types d'amortissements et valeurs réelles sont utilisés dans un calcul dynamique. En particulier, un amortissement local est disponible dans le logiciel, il permet d'ajuster localement les masses aux nœuds, sans changer la masse globale (plus de détails sont disponibles dans le manuel de FLAC3D [29]). Ce type d'amortissement est souvent préférable à l'amortissement de type

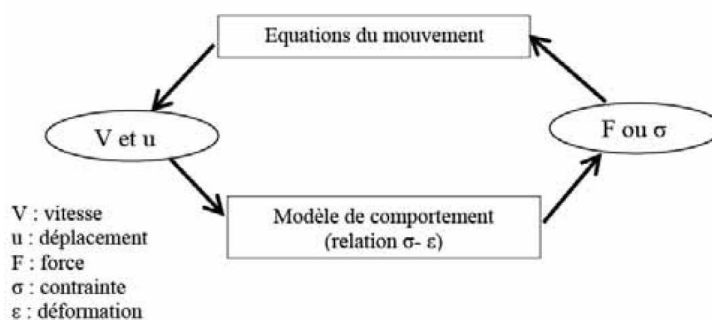


FIGURE 2.1 – Cycle de base de calcul par la méthode explicite des différences finies, tiré du manuscrit de Billaux [30]

de Rayleigh. Ce dernier décompose l'amortissement en deux composantes respectivement proportionnelles à la masse et à la rigidité.<sup>1</sup>

De plus, la présence d'outils de modélisation des interfaces et d'éléments structuraux dans FLAC3D, le rend particulièrement attirant pour nos problèmes de modélisation : restaurations de statues fracturées ou en plusieurs morceaux avec éléments de renfort. Nous décrivons, de façon succincte, l'approche de modélisation des interfaces et les principales caractéristiques des éléments structuraux utilisés dans notre travail.

### 2.2.1 Modélisation des interfaces

La notion d'interface est utilisée pour représenter les plans de contact sur lesquels deux solides déformables peuvent glisser ou se décoller l'un de l'autre. En effet dans les modélisations numériques, les interfaces sont caractérisées par deux lois de comportement, plus ou moins sophistiquées suivant leurs comportements normal et tangentiel respectif. Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature pour décrire le comportement d'interfaces, dont une partie est implantée et accessible dans la version de base de Flac3D, voir par exemple les travaux de Wu [31]. Dans le cas le plus simple, le comportement élastique de l'interface est caractérisé d'une part par la rigidité normale ( $k_n$ ) et d'autre part par la rigidité tangentielle ( $k_s$ ). Ainsi la pénétration normale et le glissement relatif des maillages (comportement avant la rupture) peuvent être déterminés en fonction des raideurs constants  $k_n$  et

1. Il est très utilisé en éléments finis, pour lesquels il permet de résoudre un problème dynamique comme un problème pseudo-statique par superposition des modes propres obtenus par analyse modale.

$k_s$  à travers les relations suivantes :

$$k_n = f_n / u_n \quad (2.1)$$

$$k_s = f_s / u_s \quad (2.2)$$

avec  $u_n$  et  $u_s$  respectivement le déplacement localement normal (ouverture ou fermeture dans le cas des joints rocheux) et tangentiel à l'interface.  $f_n$  et  $f_s$  sont les forces localement normales et tangentielles correspondantes à l'interface.

Quant aux critères de rupture des interfaces, dans le cas le plus simple, un critère de rupture fragile en traction est appliqué pour le comportement normal des interfaces : deux faces constituant l'interface seront détachées de façon fragile, dès que la contrainte de traction dépasse la résistance en traction de l'interface définie explicitement comme une des propriétés de l'interface. Le comportement tangentiel est régi par le critère de rupture de Mohr-Coulomb. Il présente la résistance totale comme la somme d'une résistance cohésive (représentée par la cohésion  $C$ ) et d'une résistance frottante (représentée par le produit de la contrainte normale à l'interface et la tangente de l'angle de frottement  $\varphi$ .) Des relations plus sophistiquées peuvent être utilisées sous la réserve de pouvoir identifier les paramètres liés à ces relations. Dans le cadre de la problématique de restauration des œuvres sculptées, les contraintes normales et tangentielles sur les interfaces resteront modérées et leurs variations faibles, si bien que leur comportement dans la gamme des sollicitations auxquelles elles sont soumises peut être approché par les relations simples venant d'être abordées.

Du point de vue technique, les interfaces sont définies par des éléments triangulaires, les contacts entre les différents maillages sont détectés au niveau des nœuds des éléments. Lors de la création des éléments d'interface, ceux-ci sont définis par l'un des deux maillages pouvant glisser l'un contre l'autre, l'élément interface est donc attaché à cette zone et l'autre maillage sert à détecter le contact.

### 2.2.2 Éléments structuraux 1D

Dans FLAC3D, des éléments structuraux comme les "cable" et les "pile", appelés "cable" et "pile" sont modélisés comme des éléments 1D caractérisés par un segment droit en deux points nodaux et ayant des propriétés de matériaux et de section transversale uniforme. Les liaisons, leurs degrés de liberté avec les forces nodales aux points du maillage (translation et rotation) sont faites via une matrice de rigidité déduite explicitement par les éléments structuraux équivalents en éléments finis, voir Mc Guire [32]. Ces éléments

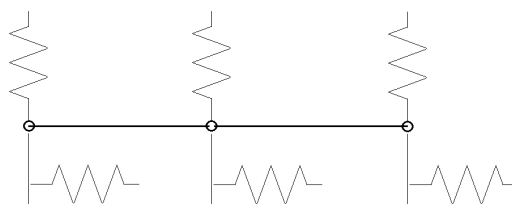


FIGURE 2.2 – Connexion des éléments structuraux aux points du maillage par l'intermédiaire de ressorts

se comportent élastiquement jusqu'au seuil de plasticité, ensuite, leur comportement devient parfaitement plastique. La différence entre les différents éléments structuraux de FLAC3D, réside dans les propriétés mécaniques et le type de sollicitations qu'ils peuvent transmettre. Ainsi, l'élément "cable" ne peut transmettre qu'une sollicitation en traction dans sa direction longitudinale, alors que les éléments « pile » peuvent également supporter et transmettre des forces de compression et des moments de flexion.

À chaque élément structural 1D est associé plusieurs propriétés intrinsèques représentant sa géométrie (section, moment quadratique, etc.). Ces paramètres sont calculés soit par des définitions exactes auxquels ils correspondent et issus de résultats expérimentaux, soit par des approximations proposées pour simplifier leurs manipulations et ayant un faible impact sur le résultat des calculs. De plus, l'interaction entre les éléments structuraux et le maillage du milieu est caractérisée par le biais des interfaces qui possèdent le même comportement que les éléments interfaces présentés précédemment. Ainsi, ces interactions sont caractérisées par leurs raideurs (normales et tangentielles) et un critère de rupture de type de Mohr-Coulomb nécessitant la définition d'une cohésion et d'un angle de frottement [29]. Numériquement, ces interfaces (entre ancrage de "cable" et maillage ou entre "pile" et maillage dans lequel il est inclus) sont représentées par des ressorts aux nœuds, voir figure 2.2. En calculant les déplacements relatifs à l'interface "cable"-maillage, une interpolation est utilisée pour calculer le déplacement du maillage dans la direction de l'outil "cable"/"pile" à chaque nœud (basé sur le champ de déplacement). Cette interpolation utilise des facteurs de pondération déterminés par la distance entre les points de la grille. La même interpolation du schéma est utilisée pour appliquer les forces développées à l'interface entre l'outil et le maillage.



### Élément structural "cable"

Cet outil "cable" permet de modéliser des éléments ne travaillant qu'en traction, comme les renforts par boulonnage dans les tunnels. La résistance au cisaillement de ces éléments est représentée par les propriétés de sa partie ancrée.

Ainsi, chaque élément "cable" est défini par sa propre géométrie, les propriétés du matériau dont il est constitué et les propriétés de son ancrage (coulis). Les paramètres des éléments "cable" modélisant un renfort sont résumés dans le tableau 2.1. De surcroît, une force de précontrainte (avec une valeur positive correspondant à la force de prétension de l'élément) peut également être prise en compte dans ce type d'élément.

paramètre	unité	définition
xcare	m <sup>2</sup>	surface de la section de métal (perpendiculaire au "cable", c'est-à-dire à l'axe X, même si le "cable" est incliné)
emod	Pa	module d'Young du métal E
ytens	Pa	résistance à la traction du métal (limite élastique)
gr_k	Pa	raideur à l'interface ancrage / roche, $k_g$
gr_coh	N/m	cohésion du coulis C
gr_per	m	périmètre du coulis, permet de prendre en compte le glissement entre la roche et le coulis
gr_fric	°	angle de frottement interne $\varphi$ à l'interface coulis / roche

Tableau 2.1 – Paramètres de l'outil "cable"

### Outil "pile"

L'outil "pile" est utilisé pour représenter les éléments pouvant travailler en traction, compression et flexion. Le principe de la résistance au cisaillement de cet élément est identique que celui de l'élément "cable" et donc caractérisé par les mêmes paramètres présentés dans le tableau 2.1. En outre, ces éléments présentent un comportement normal aux nœuds qui permet de simuler la résistance sous l'effet de la contrainte de confinement avec une possibilité de prendre en compte la formation d'un écart entre le maillage du milieu et l'élément "pile". Dans le cadre de ce travail, cette formation n'est pas considérée. La nature du comportement normal de l'élément "pile" est identique à celle du comportement tangentiel caractérisé par un angle

de frottement normal et une cohésion normale. Les paramètres de l'élément "pile" sont présentés dans le tableau 2.2.2.

paramètre	unité	définition
xcare	m <sup>2</sup>	surface de la section normale à l'axe X
emod	Pa	module d'Young E
xciy	m <sup>4</sup>	moment quadratique par rapport à l'axe Y
xciz	m <sup>4</sup>	moment quadratique par rapport à l'axe Z
xcj	m <sup>4</sup>	moment d'inertie polaire
dens	kg/m <sup>3</sup>	masse volumique apparente $\rho$
nu		coefficient de Poisson, $\nu$
per	m	périmètre du renfort
cs_scoh	N/m	cohésion tangentielle par unité de longueur
cs_sk	Pa	raideur tangentielle par unité de longueur
cs_ncoh	N/m	cohésion normale par unité de longueur
cs_nk	Pa	raideur normale par unité de longueur
cs_sfric	°	angle de frottement dans la direction tangentielle
cs_nfric	°	angle de frottement dans la direction normale

Tableau 2.2 – Paramètres de l'outil "pile"

## 2.3 Hypothèses des calculs numériques

Dans ce travail, l'objectif de la modélisation est de vérifier la stabilité des œuvres restaurées, dans les calculs qui suivent, nous considérons un comportement élastique du matériau constitutif des œuvres. Cette hypothèse est basée sur le fait que le chargement imposé à l'œuvre ne représente que son poids propre, ce qui engendre des contraintes relativement faibles au sein de l'œuvre, vis-à-vis des contraintes limites des matériaux dont elles sont constituées. De plus, nous supposons que les matériaux de ces œuvres sont homogènes et isotrope. Cette hypothèse n'est pas tout à fait exacte pour plusieurs raisons. La première est que les marbres sont des roches qui présentent un comportement anisotrope, mais dont il nous est impossible de déterminer visuellement la direction. La seconde est que ces marbres sont la plupart du temps, partiellement dégradés, surtout en surface à cause des conditions d'exposition des œuvres en extérieur. De même, la statue de Neptune est restée immergée pendant plusieurs siècles, ce qui a nécessairement conduit à de la dissolution à sa surface et donc, à l'augmentation de la porosité, au moins, à la surface de l'œuvre, ce qui a pu diminuer la résistance mécanique

de la roche.

Néanmoins, en considérant que suivant toutes les directions, le matériau se comporte comme dans la direction la plus faible, l'hypothèse adoptée ici va dans le sens de la sécurité. Cette hypothèse contribue cependant à sous-estimer les capacités de chargement de la structure et ira donc dans le sens de l'augmentation des sections des éléments de renfort. La stratégie et les hypothèses de modélisation des éléments de renfort sont abordées avec plus de détail dans les exemples des parties suivantes.

De plus, tous les calculs effectués dans ce travail sont réalisés en grandes déformations et les conditions aux limites sont fixées en bloquant les déplacements des points des statues en contact avec le sol.

## 2.4 Application à la statue de Neptune

Dans cette partie, nous utilisons les outils présentés précédemment pour répondre aux questions posées au début de ce chapitre. Ceux-ci sont appliqués à deux statues fracturées en marbre, dont les modèles géométriques et les maillages ont pu être obtenus en utilisant le principe de reconstruction des maillages présentés au chapitre 1. Parmi ces statues, celle de Neptune (il est rappelé que cette œuvre est fracturée en quatre morceaux (voir figure 2.4 (d)) a déjà été restaurée, cette analyse a posteriori a pour but d'illustrer la méthode.

Pour des raisons éthiques, les restaurations par insertion de renforts ou par collage se valent, la justification de cette affirmation peut-être comprise à la lecture des chartes régissant les pratiques en matière de conservation du patrimoine culturel, celles-ci sont énoncées dans l'introduction. Une évaluation de l'efficacité de chacune de ces techniques est proposée ici, via les simulations numériques.

Dans un premier temps, le résultat d'une simulation sur le comportement des blocs de l'œuvre remis en place sans restauration est proposé pour illustrer le comportement et les tendances au basculement de l'assemblage. Puis les résultats de deux simulations modélisant les deux types de restauration sont proposées dans la position d'exposition en musée, c'est-à-dire en position verticale. En effet, la restauration par renfort a l'avantage d'être entièrement démontable, ce qui facilite le déplacement de l'œuvre. Cette commodité n'est pas possible dans le cas d'une restauration par collage. Ainsi, d'autres calculs numériques simulant de possibles configurations pendant le déplacement de la statue ont été étudiés pour ce dernier type de restauration. Pour cela, nous avons considéré dans un premier temps une simulation du comportement de l'œuvre recollée en position horizontale. Le but de cette étude est de repro-

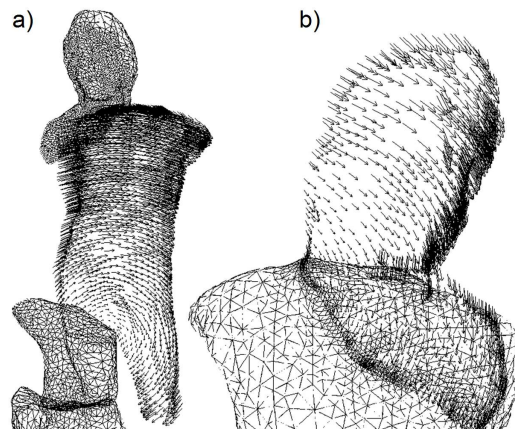


FIGURE 2.3 – Tendence au basculement, sous leur poids propre, des blocs de la statue non restaurée, a) basculement du torse vue de face, b) basculement de la tête vue de derrière

duire des gestes de manutention dans le cas où l'œuvre doit passer sous un portique, comme ce peut être le cas pour rejoindre un lieu d'exposition. Dans un deuxième temps une autre simulation est proposée, elle vise à reproduire les sollicitations que l'œuvre recollée serait amenée à supporter si elle était transportée en camion.

### 2.4.1 Simulation du comportement de l'œuvre sans restauration

Bien comprendre comment se comportent les blocs de la statue lorsqu'ils sont seulement empilés dans leur position originelle, permet d'appréhender comment les restaurations ont été envisagées. Cette étude permet aussi de cerner quelles sont les zones de faiblesse, de déterminer les directions et amplitudes des déplacements et d'estimer l'intensité des contraintes qui prendront place dans l'œuvre restaurée.

Bien sûr, la simulation montre que les blocs emboîtés ne tiennent pas en équilibre, la figure 2.3 illustre la tendance au basculement de deux d'entre eux. Ce résultat avait déjà été obtenu par le restaurateur par une analyse simple effectuée sur la base de la mécanique des solides indéformables. Les quatre blocs (blocs base, genou, torse et tête) de la statue se comportent différemment. Comme illustré sur la figure 2.3 a), le bloc torse bascule dans deux directions. Il se déverse vers l'avant et le côté et semble tourner autour des axes horizontaux passant par le centre de la statue, emmenant avec lui le bloc tête et le bloc genou. La position et la géométrie du bloc tronc sont telles

qu'il prend appui sur une zone qui n'est pas centrée sur la structure. Cette zone est située à l'intérieur de la cuisse droite sur son interface commune avec le genou. La figure 2.3 b) illustre le glissement du bloc tête le long de la fracture inclinée qu'elle forme avec le bloc torse. Le bloc base ne se déplace pas, à cause de la condition aux limites imposées.

### 2.4.2 Vérification de la stabilité de l'œuvre restaurée par insertion de renforts

Cette variante de restauration a été proposée par Coignard [22], et se base sur six éléments de renforts métalliques, dont le but est de stabiliser les quatre morceaux de la statue : il s'agit de cinq goujons métalliques inclus dans des fourreaux et un tirant précontraint. Chaque couple goujon-fourreaux est constitué d'un goujon introduit dans deux fourreaux ancrés dans les blocs de la statue par collage, le dispositif est illustré figure 2.4 (b et d). Le tirant de précontrainte est constitué d'un toron fixé dans le torse de la statue par un ancrage expansif dont l'expansion se fait en vissant un écrou, celui-ci est également illustré figure 2.4 (e). L'autre extrémité est fixée sous le pied droit et permet sa mise en tension, l'expansion est indépendante de cette dernière étape. D'un point de vue numérique, nous avons choisi d'utiliser les hypothèses simplificatrices de modélisation des renforts présentées en première partie de ce chapitre, l'utilisation des éléments structuraux 1D de FLAC3D. Étant donné la taille des renforts, leur discrétisation géométrique aurait créé des maillages extrêmement petits, ce qui aurait considérablement augmenté la durée d'exécution des calculs. En outre, l'objectif n'est pas de montrer la répartition des contraintes au sein de ces renforts, ni de vérifier leur dimensionnement puisque ceux-ci sont bel et bien en place et bien stables. En effet, l'objectif que nous nous fixons est de comprendre la manière dont sont réparties les contraintes au sein de l'œuvre et des interfaces. Ainsi, dans un premier temps, une justification du choix des types d'éléments structuraux 1D correspondant à chaque type de renfort est présentée. Ensuite, les choix de modélisation des interfaces entre les blocs et les paramètres utilisés pour cette simulation sont explicités. Pour finir cette partie, les discussions sur les résultats obtenus sont présentés.

#### Modélisation du tirant

Pour s'épargner la complexité de la modélisation géométrique de la pièce d'ancrage et du tirant, nous avons choisi d'utiliser l'outil "cable". L'ancrage est représenté par un outil qui simule la présence de coulis sur sa longueur. L'utilisation de cet outil implique qu'il n'y ait qu'une interface qui soit pris

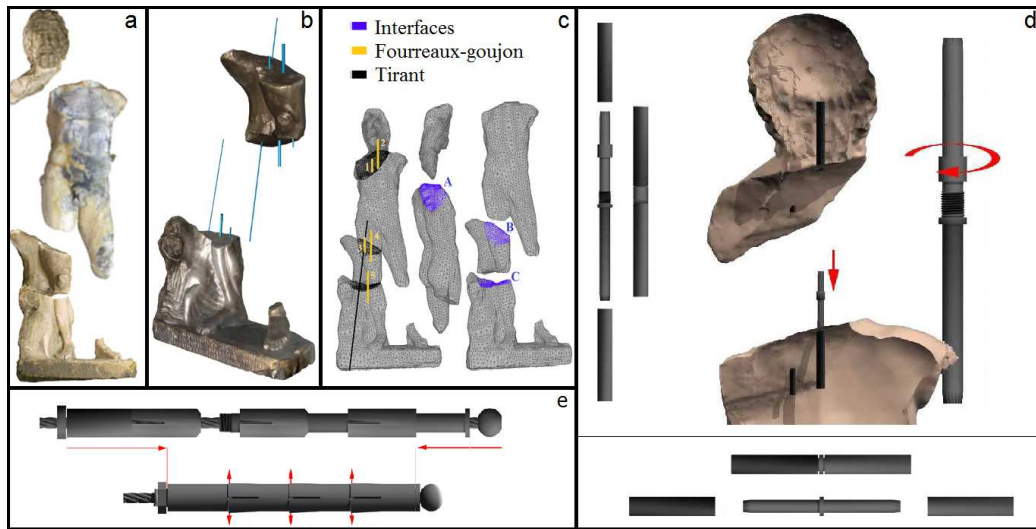


FIGURE 2.4 – Géométrie de la statue (a, b, c), goujons mis en place taraudés en haut et simple en bas (d) et ancrage du tirant (e)

en compte. Ainsi, à l'ancrage du tirant, l'action de l'interface entre le coulis et "cable" sera écartée en gardant un contact parfait entre ces deux matériaux. L'interface qui reste entre le coulis et la roche est caractérisée par les propriétés mécaniques exposées dans le tableau 2.1.

Le tirant a été modélisé comme s'il s'agissait d'un élément à section pleine cependant, celui-ci est composé de plusieurs fils croisés (toron). Par l'utilisation du coulis fictif à l'ancrage du tirant, seule la liaison la moins résistante des deux présentes entre roche-ancrage et ancrage-tirant est modélisée. En effet, la force qui lie l'ancrage à la roche a été obtenue par le serrage d'un boulon : pendant le serrage, celui-ci crée une expansion de la pièce d'ancrage, ce qui permet d'augmenter le contact avec la roche. C'est cette liaison qui est modélisée par une force de cohésion entre le coulis fictif et la roche.

D'autres possibilités ont été envisagées, elles font l'objet d'études paramétriques. La première consiste en l'augmentation de l'angle de frottement à cette interface (entre roche et métal), tout en négligeant la cohésion, cette première possibilité a plus de sens physique, car elle correspond à la réalité de la fracture non cohésive. Une autre possibilité est d'augmenter la valeur de la rigidité normale qui a également été étudiée. Suite à une étude paramétrique, annexe A, il semblerait que la variation de la valeur de la rigidité normale ait plus d'impact sur les résultats des calculs. Une autre étude paramétrique concernant cette rigidité normale est présentée en annexe B.

Ainsi, l'interaction entre le tirant et la statue est modélisée sur les 10 cm d'ancrage, le reste étant libre de glisser. En simplifiant cette interaction

entre la statue et l'ancrage, ce dernier est finalement modélisé comme étant un élément cohésif. La force cohésive de l'ancrage a été dimensionnée, puis vérifiée en s'assurant que l'expansion de l'ancrage nécessaire pour produire cette force de cohésion ne soit pas préjudiciable à la statue, cette vérification est présentée à la page 64.

### Modélisation des goujons et fourreaux

Il existe deux types de couple fourreau-goujon, de diamètre différent, les plus petits sont simples, tandis que les plus grands sont taraudés, voir figure 2.4 (d). Les goujons sont introduits dans les fourreaux collés au marbre, voir figure 2.4 (d). Il y a deux fourreaux pour un goujon, un supérieur et un inférieur. Les goujons ont été modélisés par l'outil "pile", les fourreaux collés au marbre sont considérés comme étant liés à la roche par un contact rigide. Ainsi, nous avons, comme dans le cas de l'ancrage du tirant, modélisé l'interface non cohésif entre deux métaux pour représenter le contact goujon / fourreau. En effet, la liaison entre le fourreau et la roche est cohésive et donc plus importante que celle entre le fourreau et le goujon, car rien ne lie un goujon à ses fourreaux, si ce n'est que le premier se trouve à l'intérieur des derniers. Nous avons, de plus, réalisé une étude paramétrique, annexe C, qui montre l'impact négligeable de la cohésion et de la raideur normale sur le taux de sollicitation de ces éléments. Lors d'un chargement axial, comme c'est le cas de l'œuvre lorsque la statue est en position verticale, le glissement entre les deux parties métalliques prime sur celui qui pourrait avoir lieu entre le marbre et l'acier. Il faut cependant prendre en compte l'anneau central des goujons de diamètre supérieur, au niveau de l'interface entre blocs qui limite le poinçonnement de la tête du goujon dans le marbre. L'anneau est fixé au centre de chaque goujon, son diamètre est égal à celui des fourreaux. Ainsi, quand les fourreaux arrivent en butée contre cet anneau, le déplacement n'est plus possible. Pour modéliser l'effet de l'anneau, le déplacement des goujons de petite taille a été bloqué dans la direction de la gravité (l'extrémité inférieure est fixée de manière rigide au maillage).

Les goujons et fourreaux de dimension supérieure, se comportent légèrement différemment car ils sont taraudés, mais d'un côté seulement. Cela signifie qu'il y a un côté où le goujon n'est pas libre de glisser dans le fourreau (la butée est imposée par le pas de vis), ce côté correspond à celui qui est placé en partie haute. Mécaniquement, le problème est identique, dans la modélisation, aucun glissement n'a été considéré en partie haute de ces éléments.

Plusieurs possibilités ont été envisagées, en agissant soit sur l'extrémité supérieure de l'élément, soit sur les deux extrémités, ou encore sur les nœuds

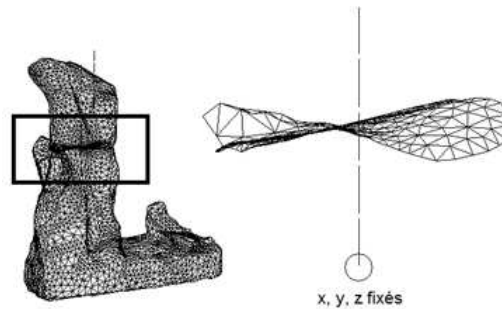


FIGURE 2.5 – Exemple de modélisation du goujon entre base et genou : en partie basse, son extrémité est fixée

intermédiaires. Différentes conditions de fixation ont été testées : nœud fixé par un contact rigide, uniquement dans certaines directions, ou encore imposer des conditions de raideur plutôt qu'un contact rigide. Des tests ont été effectués à différentes valeurs de cohésion et en bloquant suivant les directions, de manière rigide ou bien en imposant des contraintes de raideur sur certains nœuds de l'outil "pile", l'étude détaillée est présentée en annexe D. Finalement, ces éléments ont été modélisés comme illustré sur la figure 2.5.

### Paramètres de modélisation

Les paramètres utilisés pour cette modélisation sont rassemblés dans le tableau 2.3, il s'agit de paramètres des matériaux constitutifs de la statue (provenant de caractérisations de la littérature sur marbre Pentélique ou son analogue de Dionysos), des renforts (acier) et des paramètres caractérisant les différents types de contact entre ces matériaux.

**Études paramétriques** Parce que nous ignorons la valeur de certains paramètres, nous avons effectué des études paramétriques. Celles-ci permettent de mettre en évidence l'influence de certains paramètres sur le comportement final de la structure. Les paramètres déterminés de cette manière sont :

- la pré-tension dans le tirant
- la raideur à l'ancrage du tirant

**Le marbre Pentélique** Afin de servir de données d'entrée aux simulations numériques, les paramètres des matériaux s'acquièrent généralement par le biais de campagnes expérimentales. Cependant, le marbre de la statue de Neptune, identifié par Blanc [1] n'est plus disponible. Les paramètres du marbre que nous avons utilisés pour les simulations sur Neptune proviennent



<i>Marbre</i>	
Module d'Young, E [GPa]	45,6
Coefficient de Poisson, $\nu$	0,11
Masse volumique, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2780
<i>Interface</i>	
Raideur normale, $K_n$ [GPa/m]	5,5
Raideur tangentielle, $K_s$ [GPa/m]	2,75
Angle de frottement, $\phi$ [°]	39
<i>Goujons</i>	
Module d'Young, E [GPa]	193
Coefficient de Poisson, $\nu$	0,29
Masse volumique, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7850
Résistance à la traction, [MPa]	300
Ressort de cohésion normale, [MN/m]	10
Ressort de l'angle de frottement normal, [°]	26,6
Ressort de raideur normale, [GPa]	2,4
Ressort de cohésion tangentielle, [MN/m]	$8 \times 10^2$
Ressort de l'angle de frottement tangentiel, [°]	26,6
Ressort de raideur tangentielle, [GPa]	2,4
<i>Tirant</i>	
Résistance à la traction, [MPa]	700
Force de cohésion du coulis (sur la longueur d'ancrage), [MN/m]	$10^5$
Angle de frottement du coulis, [°]	26,6
Raideur du coulis, [GPa]	32

Tableau 2.3 – Paramètres utilisés dans la simulation de la restauration de Neptune avec renforts métalliques

de caractérisations de la littérature sur le marbre de Dionysos, très proche du marbre de Neptune.

Ainsi, le module d'Young varie de 45,6 (Papamichos, [33]) à 86,3 GPa (Prassianakis, [34]), ceci s'explique car les paramètres ont été mesurés de manière différente : par des tests de traction directe, compression triaxiale jusqu'à rupture, jusqu'à 50% de la contrainte maximale, par des tests d'indentation. Dans l'essai d'indentation, une force normale à l'échantillon est appliquée à un pénétrateur qui rentre dans l'éprouvette sous déplacement constant. Une cellule de charge et un capteur de déplacement (LVDT) mesurent respectivement la force appliquée et la profondeur de pénétration. À la suite des manipulations, deux paramètres ont été calculés, le module du plat de l'échelle d'indentation, IMF et la contrainte critique de transition, CTS. De ces paramètres, les propriétés des matériaux recherchés sont calculées. Ces tests ont été réalisés parfois dans des conditions favorables, parfois dans des conditions défavorables, sous contrainte de confinement, sur matériau sec ou dans l'ambiance du laboratoire. De plus, la valeur du module d'Young varie en fonction de l'anisotropie de la roche. Il faut aussi noter que dans l'étude de Papamichos [33], le matériau étudié a été vieilli artificiellement en subissant des cycles de variation de température et d'humidité afin de reproduire les conditions d'altération des marbres constituant les œuvres. C'est le cas du marbre de Neptune puisqu'en plus d'être vieux de 17 siècles, cette statue a été retrouvée sous l'eau.

De la même façon, le coefficient de poisson du marbre Pentélique varie de 0,11 dans la direction faible (Kourkoulis, [35]) à 0,33 (Stavropoulou, [36]). Des méthodes de caractérisation aux ultrasons ont été utilisées pour réaliser cette mesure ainsi que les tests classiques destructifs par traction directe, compression uniaxiale et flexion trois points. Les résultats obtenus par les procédures expérimentales (destructive et non destructive) ont été jugés compatibles les uns avec les autres. Cependant, sa résistance en compression est présentée dans l'étude de Perrier [37] comme étant égale à 109,1 MPa, cette valeur beaucoup plus élevée que celles des autres études n'a pas été prise en compte. En effet, cette même résistance en compression a été mesurée par des tests de compression triaxiale par Stavropoulou [36] qui trouve 94,2 MPa, la valeur mesurée par Papamichos lors d'un test d'indentation et confirmée par de la compression triaxiale est de 90,3 MPa.

Quant à la résistance en traction, elle a également été mesurée par Kourkoulis [35] en traction directe suivant les directions de l'anisotropie du matériau. Dans la direction forte, la résistance mesurée est de 10,8 MPa, dans l'intermédiaire, 9,5 MPa et dans la faible, 5,3 MPa. Perrier reporte la valeur la plus élevée avec 26,3 MPa et a été mesurée par Stavropoulou [36], celui-ci rapporte une résistance de 8,2 MPa.

**L'acier** L'acier inoxydable utilisé, AISI 316 ou X5CrNiMo, a des caractéristiques connues et les paramètres proviennent notamment des ouvrages de Duvaut, Hazard et Laroze [38, 39, 40]. Le moment plastique a été calculé par

$$M_{pl} = F_y.A.0,5.(h_1 + h_2) \quad (2.3)$$

$F_y$  étant la limite élastique de l'acier (Laroze, [40]),  $A$  est la surface de la section d'acier et  $(h_1 + h_2)$  est la distance entre les centres de gravité des zones tendues et comprimées de la section.

### Les paramètres des contacts entre matériaux

**roche/roche** Les différentes valeurs des angles de frottement du marbre relevées dans la littérature sont très proches :  $39,7^\circ$  et  $39,1^\circ$ , respectivement mesurées par Stavropoulou [36] et Papamichos [33]. Les valeurs de cohésion relevées par Ganniari-Papageorgiou [2] et toujours Stavropoulou [36] sont  $21,5$  et  $22,4 \text{MPa}$ .

Les paramètres de raideurs à l'interface des blocs fracturés ont été déterminés à partir de plusieurs sources. Sachant que  $k_n$  est de manière générale, supérieur à  $k_s$  et d'après Stavropoulou [36] :

$$\frac{k_n}{k_s} = 2 \quad (2.4)$$

La valeur de  $k_n = 5,5 \text{GPa/m}$  provenant de Li [41] et mesurée expérimentalement sur marbre a été utilisée.

**Acier/acier** Pour simuler correctement le contact entre fourreaux et goujons, la raideur axiale a été estimée par :

$$K = \frac{E.A}{L} \quad (2.5)$$

$E$  est le module d'Young,  $A$  la surface de la section et  $L$  la longueur (variant d'un renfort métallique à l'autre). Une valeur nulle a été prise pour la cohésion entre deux pièces métalliques. Ce paramètre varie donc avec la section de chaque goujon.

**Acier/roche** Pour simuler l'ancrage du tirant dans la roche, la raideur a également été estimée par l'équation 2.5. Quant au coefficient de frottement  $\mu$ , une valeur de  $\mu = 0,7$  est utilisé par Ganniari-Papageorgiou [2] dans

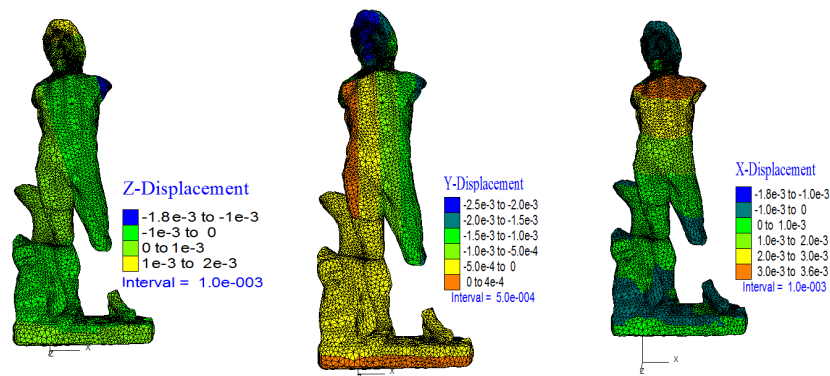


FIGURE 2.6 – Déplacements (m) dans le cas de la statue modélisée sans le tirant

sa modélisation d'une restauration des architraves du Parthénon en marbre Pentélique avec des barres en titane. Il est dit que cette modélisation utilisait les propriétés mécaniques exactes des matériaux impliqués, en se basant notamment sur Vardoulakis [42]. L'architrave était fracturée au centre et a été restaurée avec une barre de titane filetée. La barre a été insérée dans un trou de diamètre légèrement supérieur percé dans la roche. L'auteur explique que les tensions développées dans le marbre et le titane sont compatibles les unes avec les autres et qu'il n'y a pas de glissement relatif, ni d'arrachement entre les barres d'armature et le marbre. Tandis qu'une valeur de  $\mu = 0,5$  a été prise par Kourkoulis [43] entre le Pentéli et le titane toujours pour simuler le comportement entre la roche et son renfort métallique dans les restaurations du Parthénon.

### Discussion sur la stabilité de l'œuvre restaurée

Cette simulation se propose de quantifier les contraintes au sein de l'œuvre restaurée et d'identifier les éventuelles concentrations de contraintes qui peuvent avoir lieu en des points particuliers tels que les interfaces et les zones où les éléments de renfort sont implantés. Pour bien identifier l'action du tirant, les résultats d'une première simulation avec seulement les goujons sont présentés.

**Calcul avec uniquement les goujons** Dans ce cas, seuls les goujons reprennent des efforts, ce qui permet déjà de vérifier si l'ensemble est stable, cette simulation permet aussi de comprendre comment chacun de ces renforts est sollicité. Dans cet exemple le tirant a été modélisé, mais une cohésion nulle a été utilisée au niveau de son ancrage dans le marbre, si bien que le tirant n'est pas actif et peut glisser librement dans le marbre. La cohésion normale

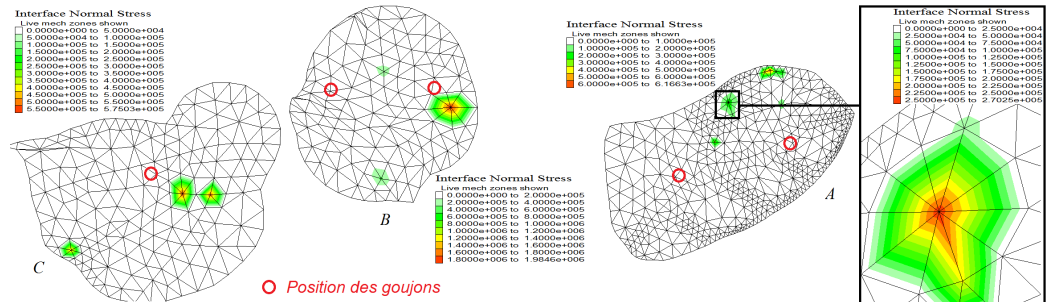


FIGURE 2.7 – Contraintes normales sur les 3 interfaces de la statue modélisée sans le tirant, de gauche à droite : C, B et A, voir figure 2.4 (c)

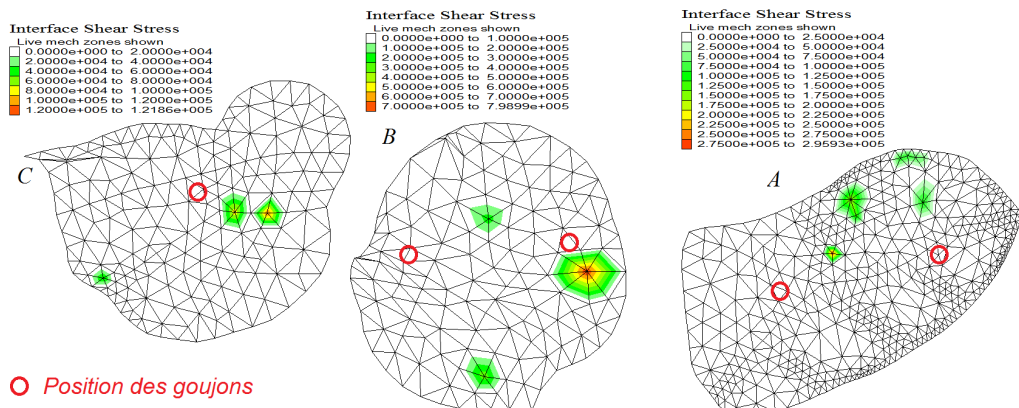


FIGURE 2.8 – Contraintes tangentielles sur les trois interfaces de la statue modélisée sans le tirant, de gauche à droite : C, B et A, voir figure 2.4 (c)

des goujons a été prise égale à  $10^2 \text{MN/m}$ , et la rigidité normale égale à  $2,4 \cdot 10^9 \text{Pa}$ .

À la suite du calcul, il apparaît que le goujon le plus sollicité ne l'est qu'à 9% de sa limite élastique, la cohésion tangentielle dans les goujons est égale à  $8 \cdot 10^2 \text{MN/m}$ . La statue est sous l'influence de son poids propre, la distribution des contraintes normales et tangentielles aux interfaces est présentée sur les figures 2.7 et 2.6; la répartition des efforts et la qualité de modélisation de l'interface est telle qu'un point de contact apparaît de façon bien plus marquée que les autres. En effet, la diminution du nombre de points scannés, faite pour créer un maillage de taille raisonnable applicable à la simulation, a un impact au niveau des interfaces (même si ces zones ont été bien moins décimées), cette simplification a pour effet de modifier les surfaces de contact et donc de les limiter car les maillages ont été repositionnés pour éviter leur inter-pénétration. Finalement, les charges sont assez mal réparties, ce qui donne lieu à des points de concentration des contraintes. La figure 2.7 montre qu'à l'interface B, un point de contact unique et bien marqué apparaît. Les contraintes de cisaillement génèrent également plusieurs points de contact aux interfaces, là encore, un seul apparaît nettement, il est situé à l'intérieur de la cuisse. Figure 2.6, le déplacement des blocs atteint 3,6 mm en déplacement horizontal sur le bloc torse. Sans l'action du tirant, la statue a tendance à pencher du côté de la jambe manquante, comme observé dans le calcul précédemment exposé et pour lequel aucun renfort n'a été modélisé.

**Calcul avec tous les éléments de renfort** Les valeurs des paramètres finalement choisis pour la modélisation ont été déterminés à la suite des études paramétriques, ils sont résumés dans le tableau 2.3, page 56.

La statue est plus stable quand le tirant est sollicité, c'est-à-dire quand une valeur de la cohésion suffisante est prise sur la longueur d'ancrage, ce qui améliore son action.

La figure 2.9 (a) montre que les déplacements verticaux sont limités dans la statue, au maximum 1,5mm dans les trois blocs inférieurs, ces déplacements peuvent être, en partie, la conséquence de l'écart initial entre les blocs, provenant de la numérisation. Sur l'ensemble de la statue on observe une légère dissymétrie des déplacements verticaux entre la partie reposant sur la jambe et l'autre, de l'ordre du millimètre dans le bloc tête et du dixième de millimètre dans le bloc tronc. C'est dans le bloc tête, qui ne bénéficie pas de l'action du tirant, que les déplacements verticaux sont les plus importants, jusqu'à 2,3mm, certainement dus à la forte inclinaison de cette interface. Les déplacements horizontaux, figure 2.9 (b) sont faibles, cette illustration montre toujours que la tête a un comportement différent du reste de la sta-

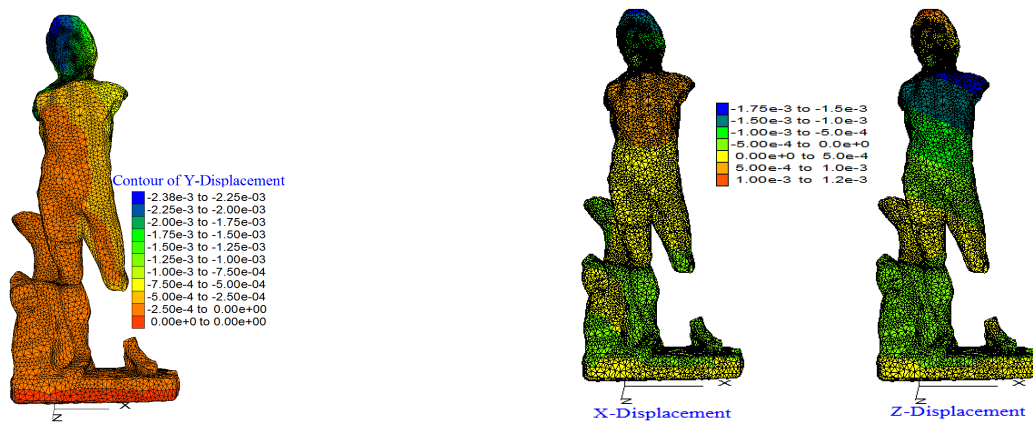


FIGURE 2.9 – Déplacements (a) verticaux et (b) horizontaux

tue, le haut du bloc tête a tendance à se déplacer vers la gauche (2mm) et vers l'avant (1mm) quand celui du tronc part vers la droite (1mm) et en arrière (2mm). Les deux blocs inférieurs sont peu mobiles.

Sur la figure 2.10, les goujons sont plus sollicités que dans les autres cas de la précédente étude paramétrique et il y a un impact sur les contraintes aux interfaces. Sur les trois interfaces, les contraintes normales sont bien supérieures (max 1,6MPa) aux contraintes tangentielles (max 0,75MPa). L'interface entre les blocs tête et tronc (A) est celle qui supporte le moins de contraintes normales (max 0,4MPa), ce qui peut en partie s'expliquer par la plus faible masse du bloc tête mais surtout par la topologie de l'interface. En effet, l'interface entre les blocs tronc et genou (B) se situe au dessus de l'interface entre les blocs base et genou (C), cependant il reprend des contraintes normales bien supérieures (max 1,6MPa contre max 0,6MPa à l'interface du dessous). C'est la répartition des contraintes qui est meilleure, les deux morceaux s'emboîtent mieux, ce peut être dû à l'usure de l'interface, à un mauvais positionnement des deux blocs au moment de la création de la géométrie (voir la partie du chapitre 1 qui concerne le remontage virtuel, page 28, mais aussi à la qualité de la retranscription par le scanner laser. La figure 2.11 montre les contraintes de compression qui transitent sur le contour de Neptune. Il existe une forte concentration au niveau de l'interface central (B), cette concentration de contraintes plus importantes qu'ailleurs se remarque également à la figure 2.12, (b) III. Les moments se développant dans la statue peuvent également être à l'origine de ces déséquilibres, même si ceux-ci sont diminués par l'action du tirant.

L'observation des contraintes tangentielles a tendance à confirmer cette hypothèse de mauvais emboîtement de l'interface centrale. Des contraintes

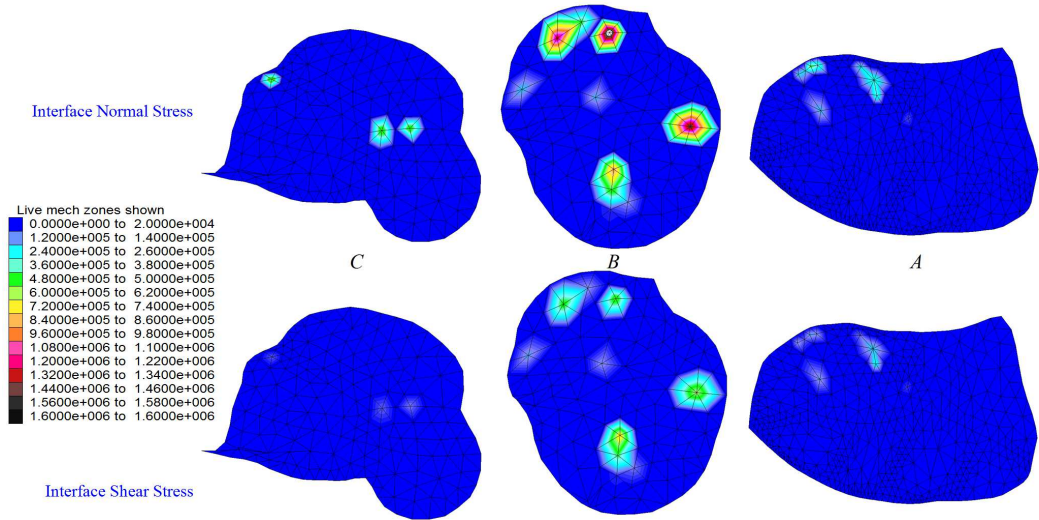


FIGURE 2.10 – Contraintes normales (en haut) et tangentielles (en bas) sur les trois interfaces de gauche à droite : C, B et A (figure 2.4 (c).)

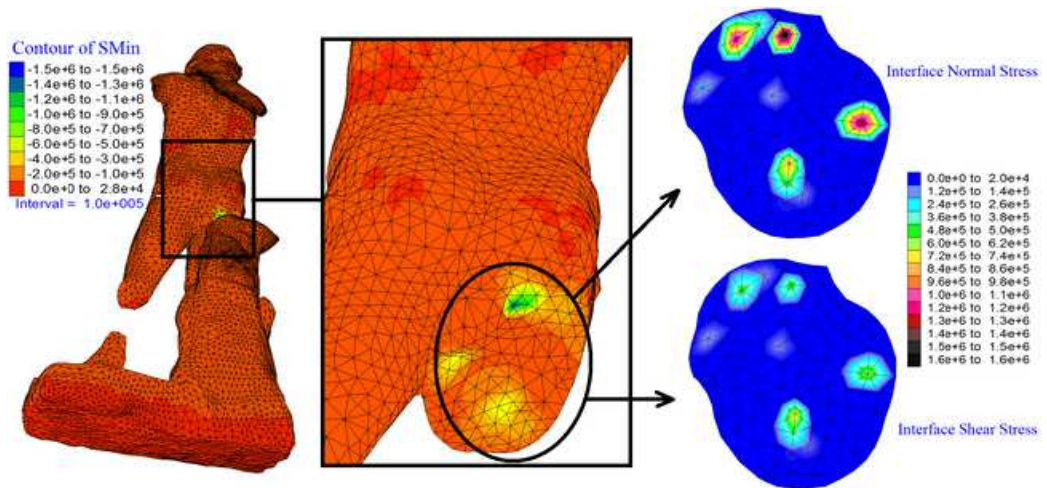


FIGURE 2.11 – Contrainte maximale en compression sur la statue avec tous les éléments de renfort, interface B



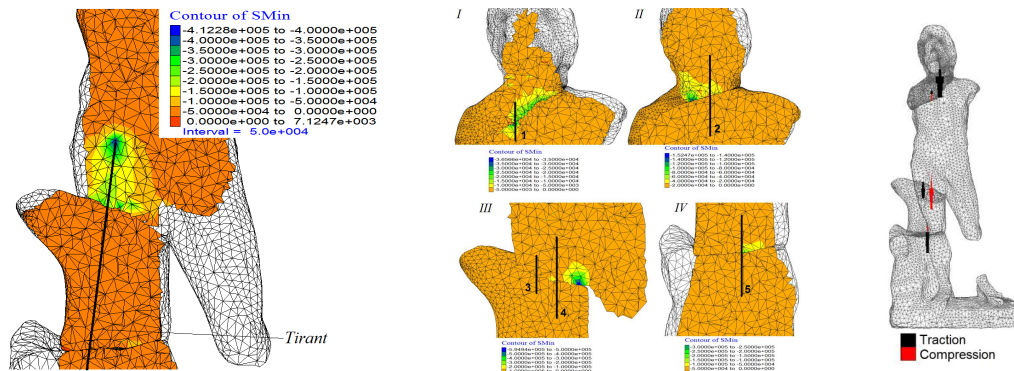


FIGURE 2.12 – (a) Contraintes dans la statue autour de l’ancrage du tirant, (b) Impact des ancrages dans le marbre, (c) Comportement des goujons

tangentiels négligeables prennent place dans l’interface entre les blocs base et genou (max  $0,08\text{MPa}$ ), presque dix fois inférieures aux contraintes tangentiels calculées à l’interface centrale. Cependant, il est également possible d’expliquer cette différence d’amplitude par la présence d’un couple de goujons à l’interface centrale et d’un goujon unique à l’interface inférieure. La présence du couple, ayant principalement pour but d’empêcher toute rotation, aurait également pour conséquence d’entraver l’embriquement optimal des surfaces qui se serait naturellement produit sous l’effet du chargement. La figure 2.9 (b) confirme qu’aucun déplacement vertical n’a lieu au niveau de l’interface B, ce qui n’est pas le cas aux interfaces A et C, le gradient est d’ailleurs plus important à l’interface A.

La cohésion de l’ancrage du tirant dans le marbre est de  $10^5\text{N/m}$ . La figure 2.12 (a) est une coupe longitudinale au niveau de l’ancrage du tirant, elle montre quels sont les effets de cet ancrage sur le marbre. Localement, les contraintes de traction dans la roche peuvent atteindre  $0,4\text{MPa}$ , ce qui ne pose pas de problème de résistance.

La figure 2.12 (b) expose des coupes longitudinales (I, II, III et IV) au niveau des goujons ; sur ces coupes les contraintes générées au niveau des interfaces masquent totalement l’effet de l’ancrage des goujons dans le marbre. L’utilité des goujons n°1 et 2 est d’éviter la rotation du bloc tête, tout comme celle du couple n°3 et 4 est d’éviter la rotation des blocs torse et genou. Le goujon n°4 reste comprimé jusqu’à  $10\text{MPa}$ , tout comme le goujon n°3 qui est toujours tendu, il s’agit d’un effet de la prétention du tirant qui se situe dans la même zone, voir figure 2.4 (c) et figure B.3 de l’annexe B. Tout ceci va de pair avec la tendance au renversement des trois blocs supérieurs constatée dans la modélisation sans renfort. En effet, le goujon comprimé n°4 est situé à proximité du point de basculement supposé.

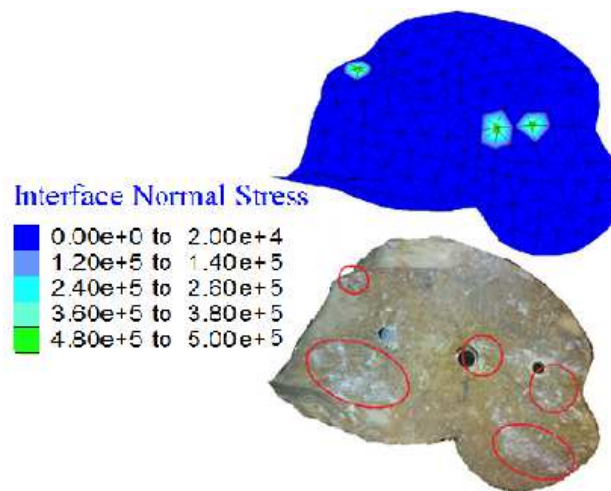


FIGURE 2.13 – Comparaison entre les zones de frottement et les contraintes normales avec tous les éléments de renfort

Cette modélisation est cohérente vis-à-vis de la stabilité avérée de la statue restaurée. Les différentes contraintes calculées restent bien inférieures aux limites élastiques des différents matériaux. Dans le cas d'une sollicitation uniquement statique, les différents renforts structuraux sont donc largement surdimensionnés. Le rôle déterminant du tirant sur les déplacements de la statue a été mis en évidence dans l'étude paramétrique. La partie la plus sollicitée de l'ensemble des trois blocs reliés par ce tirant est l'interface centrale (B). Les cartographies des contraintes aux interfaces sont cohérentes avec les zones de frottement observées (figure 2.13).

### 2.4.3 Stabilité de la restauration par collage

Cette partie traite des possibilités de restauration de la statue par collage à la résine Epoxy. Tout d'abord la stabilité de l'œuvre en position debout est présentée, suivie d'une étude de ses contraintes lors d'une étape de maintenance qui pourrait avoir lieu dans un musée. L'objectif est de vérifier la tenue globale d'une telle restauration dans tous les cas de figure, dans toutes les positions que la statue peut être amenée à prendre.

#### Modélisation des interfaces

Plusieurs hypothèses de modélisation ont été envisagées pour cette étude, tout d'abord, l'épaisseur de colle a été modélisée explicitement en recréant un maillage d'une épaisseur inférieure à deux millimètres pour chaque frac-

ture. Ces maillages ont été réalisés en dupliquant les parties de maillage de la zone de contact des blocs supérieurs et inférieurs. Puis à la suite d'une légère translation (correspondant à l'épaisseur de la colle), ces morceaux de maillage des zones de contact ont été assemblés pour créer un nouvel élément représentant le maillage de la colle, ils sont illustrés à la figure 2.16. Avec cette démarche, les blocs s'imbriquent parfaitement. Enfin ces nouveaux maillages représentant la colle et ceux représentant la roche, ont été liés rigidement.

L'autre modélisation consiste à négliger l'épaisseur de la colle et à utiliser l'outil "interface" de FLAC3D, la rupture de ces éléments est régie par une loi de Mohr-Coulomb. C'est principalement l'importante force de cohésion que nous avons appliquée qui lie les blocs, cette liaison est de plus, limitée par une résistance en traction qui correspond à celle du marbre.

Nous verrons par la suite que ces deux modélisations donnent des résultats similaires.

### Paramètres de modélisation

Le tableau 2.4 présente les paramètres utilisés pour cette modélisation.

**Les paramètres des matériaux** Les paramètres liés au marbre de Neptune sont les mêmes que ceux utilisés dans la simulation de la stabilité de la restauration par insertion de renforts, partie 2.4.2.

Quant aux propriétés de la colle, ce sont celles de l'Araldite AW106/HV 953U, elles proviennent des données du fabricant : Huntsman [44].

### Vérification de la stabilité en position verticale

Ces premières simulations ont été menées en position debout, comme lorsque la statue est exposée dans un musée, en supposant que les surfaces à encoller ont été parfaitement préparées et que donc, aucun défaut de collage n'est présent. Deux simulations ont été menées : dans la première, les interfaces ont été modélisés explicitement et l'hypothèse forte est que la rupture adhésive de l'interface entre le marbre et la colle n'est pas possible. Ainsi, l'objectif est de vérifier qu'aucune rupture cohésive ne risque de se produire au sein des matériaux : le marbre ou la colle.

La figure 2.14 montre la répartition des contraintes dans l'élément de colle inférieure, la répartition des contraintes confirme la tendance au dévers des blocs supérieurs de la statue présentée dans la simulation sans restauration.

Le tableau 2.5 récapitule les résultats de cette simulation en comparant les contraintes maximales de compression (valeurs négatives) et de tractions aux limites des deux matériaux. Le marbre n'est sollicité qu'à environ 10% de sa

<i>Marbre Pentelique</i>	
Module d'Young, E [GPa]	45,6
Coefficient de Poisson, $\nu$	0,11
Masse volumique, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2780
<i>Interface</i>	
Raideur normale, $K_n$ [GPa/m]	5,5
Raideur tangentielle, $K_s$ [GPa/m]	2,75
Angle de frottement, $\phi$ [°]	39
<i>Colle explicite</i>	
Module d'Young, E [GPa]	3,75
Coefficient de Poisson, $\nu$	0,39
Masse volumique, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1310
<i>Colle implicite</i>	
<i>Interface</i>	
Raideur normale, $K_n$ [GPa/m]	5,5
Raideur tangentielle, $K_s$ [GPa/m]	2,75
Angle de frottement, $\phi$ [°]	15
Cohésion, [MPa]	40,1
Résistance à la traction, [MPa]	15

Tableau 2.4 – Paramètres utilisés dans la simulation de la restauration avec de la colle de Neptune

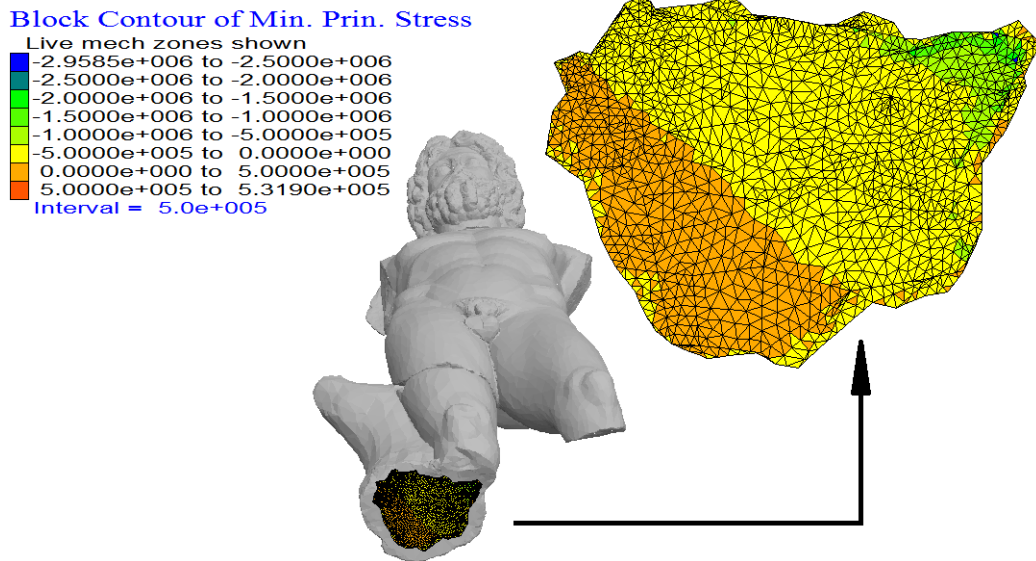


FIGURE 2.14 – Contrainte dans la colle de l'interface du bas (simulation en position debout)

limite de rupture en traction, tandis que la colle l'est à 20% en compression. Dans ce cas de figure idéalisé, où le collage est supposé parfait, la statue est stable et cette restauration équivaut celle avec renforts.

Cas simulés en position debout (valeurs négatives : contraintes de compression)	Marbre (Pa)		Colle (Pa)	
	Contraintes maximales	Contraintes limites (dans la direction faible)	Contraintes maximales	Contraintes limites
	-1,8.10 <sup>6</sup> à 6,1.10 <sup>5</sup>	-70.10 <sup>6</sup> à 5,3.10 <sup>6</sup>	-2,9.10 <sup>6</sup> à 9,2.10 <sup>5</sup>	±40.10 <sup>6</sup>

Tableau 2.5 – Contraintes maximales simulés en position debout

Pour la deuxième simulation, les interfaces ont été modélisées implicitement, ce qui permet, s'il y a rupture, de vérifier la stabilité de la restauration à l'interface entre le marbre et la colle dans le cas d'une rupture adhésive. Les contacts entre blocs ont été modélisés par l'outil "interface" de FLAC3D. Une importante cohésion a été prise, celle de la force de cohésion de la colle sur du marbre. Nous avons également spécifié une résistance en traction égale à celle qui est la plus basse des deux matériaux en contact : celle du marbre. En cas de contrainte de traction, c'est le matériau qui aura la moins bonne résistance en traction qui cédera.

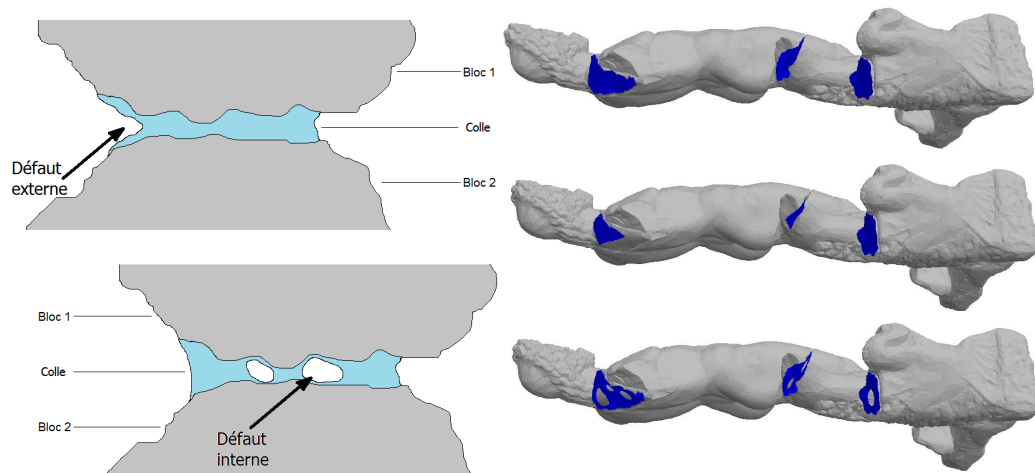


FIGURE 2.15 – Schéma des défauts de collage et des trois cas simulés

Les résultats de cette simulation ne montre pas de rupture d'interface, la stabilité de l'œuvre est assurée.

### Vérification de la stabilité en position horizontale

Nous avons également réalisés d'autres simulations dans le cas où le collage comporte des défauts, toujours pour vérifier la rupture cohésive du matériau. Deux types de collage avec défauts ont été réalisés : des défauts internes et externes. Les défauts internes correspondent à des bulles d'air piégées à l'interface. Les défauts externes représentent de mauvaises applications de la colle en périphérie de la fracture, liées à sa mise en œuvre sur des zones non parallèles (car les deux blocs sont usés sur les bords de la fracture), ce qui plutôt que de créer des éléments dont la frontière est plus épaisse, entraîne la formation d'un creusement sur toute la périphérie. Un schéma de principe illustre ces défauts à la figure 2.15, la modélisation des éléments colle avec les défauts internes et externes est également illustrée.

Pour savoir si ces défauts sont préjudiciables à la stabilité de la statue, comme pour l'étude précédente, les valeurs des contraintes de traction et de compression simulées dans les deux matériaux sont comparées à leurs valeurs limites. Les simulations sont cette fois-ci menées pour une position différente de la statue. Comme la restauration par collage ne permet pas son démontage, nous avons imaginé qu'il faudrait très certainement la déplacer en position horizontale pour la faire passer sous une porte par exemple. La modélisation a été pensée pour être réaliste, en imaginant qu'il faille porter l'œuvre en la soulevant par ses deux extrémités comme illustré à la figure 2.16.

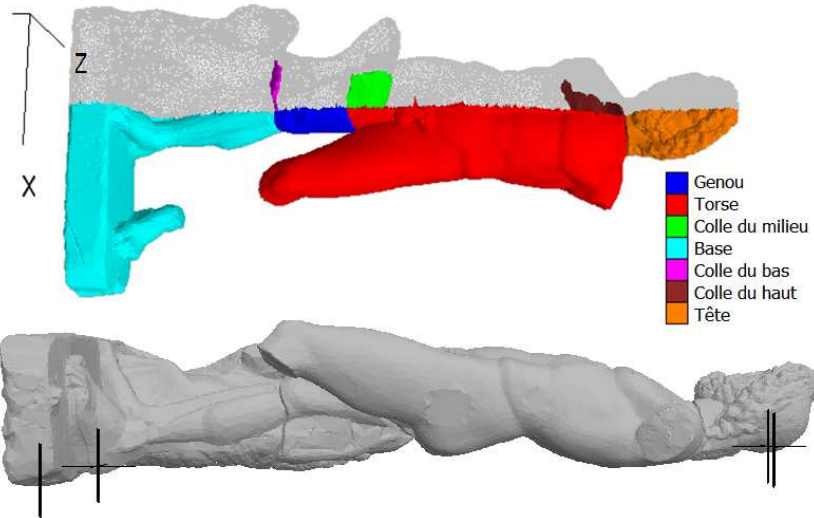


FIGURE 2.16 – Illustrations de la simulation en position couchée, représentation des zones d’appuis et des différents blocs

Cas simulés en position couché (valeurs négatives : contraintes de compression)	Marbre (Pa)		Colle (Pa)		
	Contraintes maximales	Contraintes limites (dans la direction faible)	Contraintes maximales	Contraintes limites	
Sans défauts de collage	-3,2.10 <sup>6</sup> à 2,6.10 <sup>6</sup>	-70.10 <sup>6</sup> à 5,3.10 <sup>6</sup>	-3,6.10 <sup>6</sup> à 2,8.10 <sup>6</sup>	±40.10 <sup>6</sup>	
Avec défauts de collage	Internes		-3,2.10 <sup>6</sup> à 2,7.10 <sup>6</sup>		-3,7.10 <sup>6</sup> à 2,9.10 <sup>6</sup>
	Externes		-6,2.10 <sup>6</sup> à 3.10 <sup>6</sup>		-6,8.10 <sup>6</sup> à 4.10 <sup>6</sup>

Tableau 2.6 – Contraintes maximales simulés avec et sans défauts de le collage, en position couchée

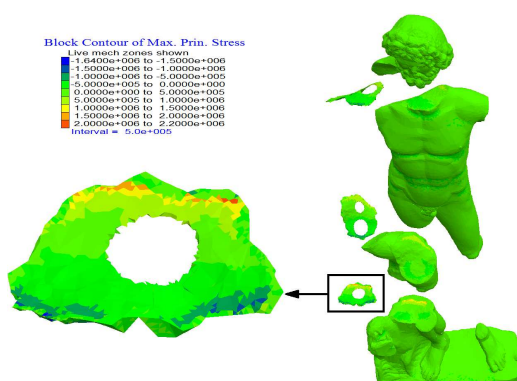


FIGURE 2.17 – Contraintes dans la colle avec défauts internes, gros plan sur la fracture basse

Les résultats sont présentés dans le tableau 2.6. Dans tous les cas de collage simulés, la stabilité de la statue n'est pas menacée. Il est intéressant de noter que les défauts de collage interne ne modifient que très peu le comportement de l'ensemble de la structure, ainsi les valeurs maximales relevées sont très proches en terme d'intensité et de localisation. Ceci s'explique par le fait que le centre des zones encollées, là où se situent les défauts, travaillent peu. Comme nous l'avons vu dans les parties précédentes, le bloc torse a tendance à pencher vers l'avant. La figure 2.17 montre la répartition des contraintes, principalement sur le bloc de colle inférieure. Ainsi, la partie située à l'arrière de la statue supporte des contraintes de traction, la partie située à l'avant est comprimée tandis que la zone centrale supporte peu de contraintes. La dernière simulation réalisée, dans le cas où il existe des défauts de collage sur le pourtour externe de la zone encollée montre des contraintes plus importantes approchant pour le marbre sa résistance limite en traction. Ainsi, il est plus préjudiciable pour l'œuvre que le collage ait des défauts externes que internes. Cependant, ces simulations ne proposent pas de cas où les deux types de défauts sont simulés en même temps. Après cette étude, il subsiste un doute quant à la validité d'une restauration par collage.

La présence de défauts de collage ne se traduit pas seulement par une concentration de contraintes, mais également par un risque de leur propagation (stable ou instable) en mode I, II ou mixte. L'évaluation d'un tel risque peut être fait en utilisant les outils de la mécanique de la rupture. Si l'on se place dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, en se basant sur les travaux de Hutchinson, Zhang, Zhou et Belytschko [45, 46, 47, 48], il est possible de calculer un facteur d'intensité de contrainte (KI) au niveau de l'interface entre la colle et le bloc de roche. L'étude détaillée indiquant les hypothèses de calcul et les bases théoriques de l'estimation du facteur d'in-



Interface	Profondeur de la fissure (m)					
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
A	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04
B	0,04	0,07	0,09	0,12	0,14	0,17
C	0,26	0,40	0,55	0,70	0,87	1,06

Tableau 2.7 – Facteurs d’intensité de contrainte ( $KI$  MPa.m<sup>0,5</sup>) en fonction de la dimension des défauts (m)

tensité de contrainte (FIC) est présentée en annexe E. Nous résumons dans le tableau 2.7, les facteurs d’intensité de contrainte pour les cas étudiés, en fonction du diamètre des défauts. Il en sort que dans les conditions du calcul présenté, un défaut d’un diamètre de 4 cm conduit à une valeur de facteur d’intensité de contrainte  $KI_{\text{équivalent}} = 0,71.10^6 \text{Pa.m}^{0,5}$ , au delà donc de la ténacité de la roche ( $KIC = 0,7.10^6 \text{Pa.m}^{0,5}$ , tiré de Lindborg, [49]).

Ces calculs montrent donc qu’une restauration par collage peut s’avérer inadaptée lors de manutention de ce type, il ne faut cependant pas oublier que ces calculs simplifiés donnent un résultat approché. Ainsi, si la restauration par collage avait été adoptée, toutes les précautions auraient du être prises pour que la taille des éventuelles défauts de collage reste inférieure à la taille critique calculée.

#### 2.4.4 Conclusion sur la modélisation de la statue de Neptune

Après tous ces cas de figure simulés, allant des cas simples aux plus élaborés, nous pouvons conclure que la restauration de Neptune adoptée est la plus réaliste. Compte tenu des données manquantes, principalement quant aux caractéristiques mécaniques des matériaux des œuvres (nature exacte du matériau, direction de l’anisotropie, existence ou non de zones de faiblesse, pré-tension du tirant, etc.), les simulations deviennent des problèmes à données limitées. Notre démarche a été de mettre en œuvre des simulations simples et d’introduire des informations estimées a priori, ce qui a permis de mener à des résultats cohérents.

## 2.5 Application à la statue de Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé

La statue de Cadmus, présentée dans l'introduction, est une œuvre actuellement stockée pour être protégée parce qu'elle présente des dégradations. Comme l'illustre la figure 2.18, ces dégradations sont de plus en plus importantes au fil du temps.

Pour être déplacée du jardin des plantes d'Orléans où elle était exposée, jusqu'à l'église où elle est actuellement stockée, un plâtre a été mis en place par précaution, pour éviter que ces dégradations ne s'amplifient, elles sont illustrées à la figure 2.19. Cette étude est une étude préliminaire qui permet de déterminer si une restauration de l'œuvre est nécessaire. Elle devra être suivie d'une deuxième étude numérique simulant les restaurations envisageables.

Dans un premier temps, nous présentons les hypothèses de modélisation, notamment celles faites sur la géométrie de l'œuvre. Dans un deuxième temps des simulations sont présentées et interprétées. La première vise à confirmer la stabilité de l'œuvre en place, sous son poids propre. La deuxième vise à reproduire les sollicitations que l'œuvre serait amenée à supporter, si elle était transportée en camion. Des simulations avec et sans plâtre sont présentées dans le cas d'une mauvaise évolution des altérations de l'œuvre.

### 2.5.1 Contexte

Comme l'illustre la figure 2.18, les dégradations de la statue de Cadmus sont en constante évolution. Sur cette illustration, une partie de la queue du dragon est manquante sur la photographie de droite prise dans l'église, par rapport à la photographie de gauche prise dans le jardin des plantes. La fissure la plus dangereuse pour la stabilité de l'œuvre est certainement celle qui se trouve actuellement sous le plâtre, en haut à gauche de la figure 2.19. Cette œuvre a été déplacée en 1996, nous pouvons donc supposer que ses dégradations ont peu évoluées, puisqu'elle est maintenant protégée des intempéries.

Une statue est bien entendue destinée à être exposée, son stockage à l'abri est une situation temporaire, la question qui se pose est de savoir s'il est nécessaire de restaurer cette œuvre pour sa pérennité. Il nous faut donc nous assurer que ses dégradations ne menacent pas son intégrité.

Pour répondre à cette question, nous avons exagéré la dégradation de la jambe plâtrée et avons vérifié la stabilité de l'œuvre en cas de transport routier.

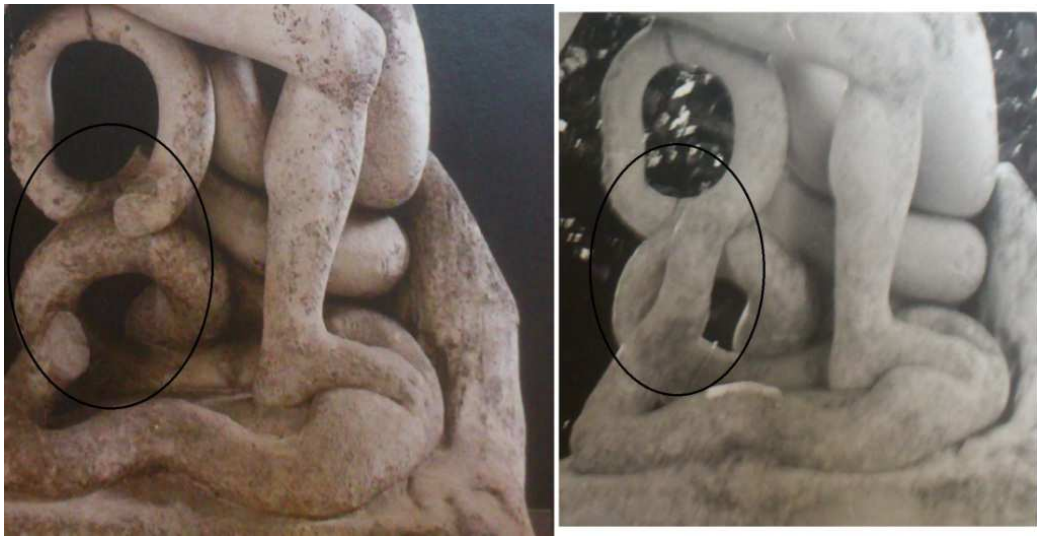


FIGURE 2.18 – Évolution de l'état de dégradation de l'œuvre, illustration entre une photo actuelle (à gauche) et antérieure (à droite)

## 2.5.2 Hypothèses de modélisation

### Modélisation géométrique des dégradations

Compte tenu du fait que les altérations de cette statue ne sont pas stabilisées, nous avons estimé que parmi toutes les évolutions envisageables de ces altérations, la fissure présente sur la jambe droite de la statue de Cadmus venant à devenir non cohérente, serait le défaut le plus préjudiciable pour l'œuvre.

Ainsi, nous avons spéculé sur l'accentuation de cette fissure, comme nous jugeons possible que cela se produise si aucune restauration n'est planifiée. Dans les simulations que nous présentons, un écart dans le maillage inférieur au centimètre a donc été réalisé au niveau de cette fissure, pour la rendre non cohérente.

Dans la toute dernière application proposée, le plâtre mis en place par le restaurateur est ajouté à la simulation pour contrôler son effet en cas de sollicitations dynamiques. Ce plâtre est considéré comme étant parfaitement lié au marbre de Cadmus.

### Description de la sollicitation dynamique

Nous avons opté pour une analyse dynamique non linéaire avec un accélérogramme synthétique modélisé à partir du spectrogramme exposé dans les travaux de Boulanger[50]. Pour cela, le site internet Seissoft [51] nous a

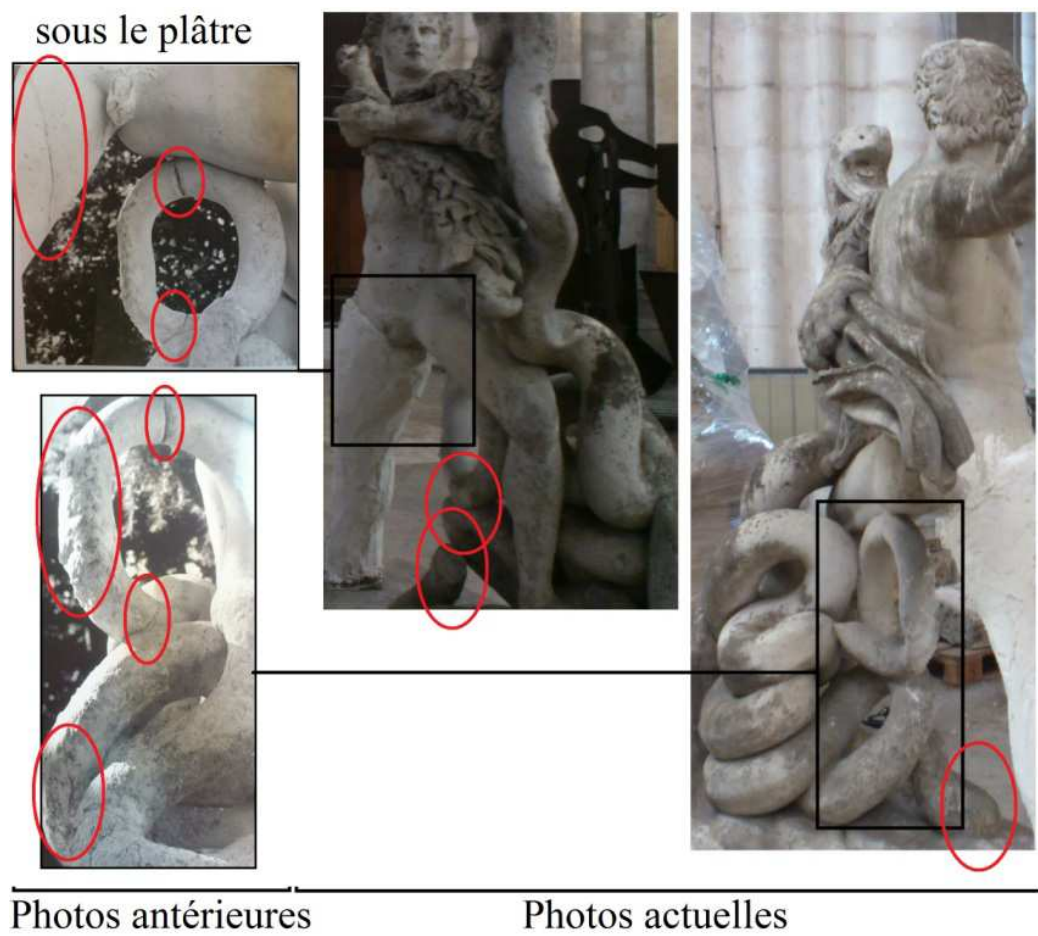


FIGURE 2.19 – État de dégradation de l'œuvre

apporté des solutions techniques. Des modélisations d'accélérogrammes sont présentées dans les travaux de Bayer [52] et Lam [53]. La stratégie que nous avons utilisée est de modéliser le signal comme une somme d'harmoniques finis :

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}t\right) + \mathbf{b}_i \cos\left(\frac{2\pi}{T_i}t\right) \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{a}$ , l'accélération,  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  des coefficients,  $T$ , la période et  $t$ , le temps.

Si l'analyse se limite à une période  $T_s$  maximal, à  $t = 0$  et  $t = T_s$ , l'accélération, la vitesse et les déplacements sont nuls, ce qui permet d'obtenir le système suivant. En posant

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad (2.7)$$

Pour  $t = 0$  :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{b}_i = 0 \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{a}_i}{\omega_i} = 0 \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{b}_i}{\omega_i^2} = 0 \quad (2.10)$$

Pour  $t = T_s$  :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{\mathbf{a}_i}{\omega_i} \cos(\omega_i T_s) + \frac{\mathbf{b}_i}{\omega_i} \sin(\omega_i T_s) = 0 \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \sin(\omega_i T_s) + \mathbf{b}_i \cos(\omega_i T_s) = 0 \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{a}_i}{\omega_i^2} \sin(\omega_i T_s) + \frac{\mathbf{b}_i}{\omega_i^2} \cos(\omega_i T_s) = 0 \quad (2.13)$$

Les coefficients  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{b}_i$  inconnus sont identifiés par une méthode des moindres carrés du problème de minimisation des différences entre le spectrogramme simulé et mesuré sur la bande de fréquences considérées.

Suite à cette procédure, le spectrogramme des accélérations est retrouvé à partir de la densité de puissance des vibrations du camion, voir figure 2.20, puis l'accélérogramme est simulé. C'est cet accélérogramme qui est programmé dans FLAC3D pour réaliser l'analyse dynamique.

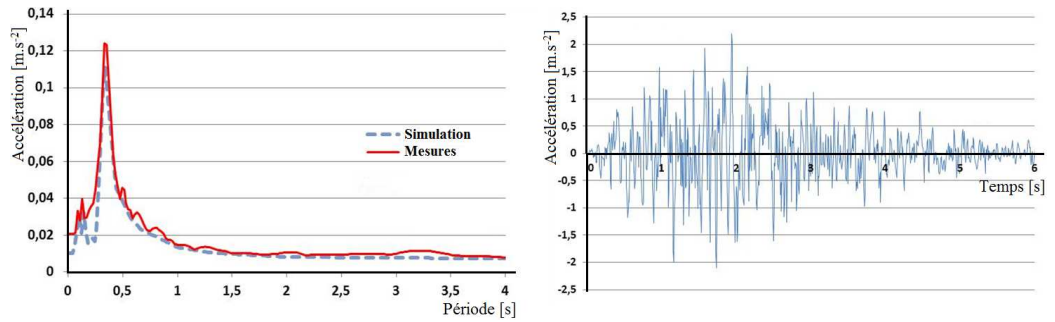


FIGURE 2.20 – Spectrogramme mesuré par Boulanger [50] et simulé des vibrations d'un siège de conducteur de camion (à gauche) Accélérogramme utilisé comme source de vibrations (à droite)

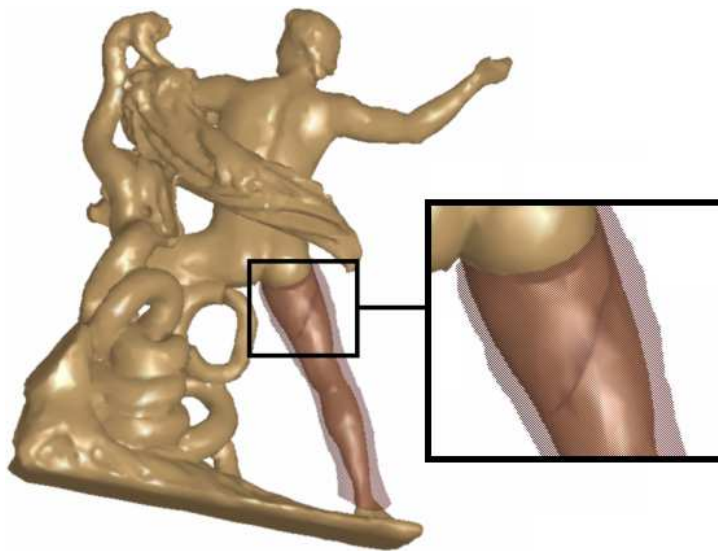


FIGURE 2.21 – Géométrie du modèle

<b>Paramètres du marbre de Carrare</b>	valeur
E (Pa)	$50.10^{10}$
$\nu$	0,23
masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	2720
<i>Interfaces :</i>	
Kn ( $\text{Pa.m}^{-1}$ )	$5,50.10^9$
Ks ( $\text{Pa.m}^{-1}$ )	$2,75.10^9$
angle de frottement ( $^\circ$ )	39,1
Cohésion (Pa)	0
<b>Paramètres du plâtre médical</b>	valeur
E (Pa)	$2,3.10^8$
$\nu$	0,39
masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	2800

Tableau 2.8 – Paramètres du modèle

### 2.5.3 Paramètres de modélisation

Les paramètres utilisés dans le modèle sont résumés dans le tableau 2.8. Ils sont pour la plupart issus de la littérature, d'autres, comme les paramètres de contact sont les mêmes que ceux utilisés pour la statue de Neptune, en accord avec Alber [54] et Migliazza [55]. La masse volumique du marbre de Carrare est celle utilisée par Qian [56] dans ses calculs. Le module d'Young provient de Alber [54], Backers [57] et Migliazza [55] et le coefficient de poisson de Backers [57] et Qian [56]. Les paramètres caractérisant les propriétés du plâtre proviennent des propriétés des plâtres médicaux traditionnels.

### 2.5.4 Vérification de la stabilité sous sollicitation statique

La première étape est de vérifier la stabilité de l'œuvre lorsqu'elle n'est soumise qu'à son poids propre. Cette simulation montre des déplacements de l'ordre du centième de millimètre, l'amplification de la fissure n'impose donc pas de déplacements parasites aux résultats de la simulation.

Les résultats en terme de contraintes sont présentés à la figure 2.22. Les contraintes de compression comme de traction sont inférieures à 1 MPa, ce qui n'est pas du tout préjudiciable pour le marbre de l'œuvre. Sous son poids propre, en cas de dégradation de son endommagement, la statue reste parfaitement stable.

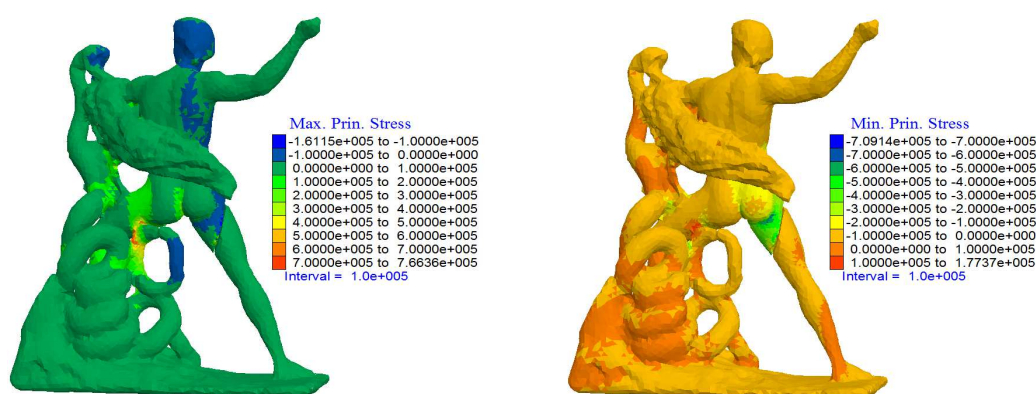


FIGURE 2.22 – Contraintes principales maximum (à gauche) et minimum (à droite) dans l'œuvre soumise à son poids propre

### 2.5.5 Vérification de la stabilité sous sollicitations dynamiques

Dans un premier temps, nous présentons dans cette partie les résultats d'un calcul sous sollicitations dynamiques, simulant le transport de la statue par voie routière. Pendant le transport, les œuvres sont sujettes à de grandes précautions pour les protéger des vibrations. L'amortissement mis en place se doit d'être performant, mais celui-ci n'est pas entièrement contrôlé, il est fonction de la nature de la voie, du style de conduite du conducteur, etc. Cependant, il existe peu de données publiées sur les vibrations enregistrées lors de mise en œuvre de mécanisme d'amortissement pendant les transports.

Nous utilisons les données publiées par Boulanger [50]. Elles représentent un spectrogramme relevé au dessus d'un siège de conducteur de camion pendant un trajet sur les routes belges, relativement bien entretenues. Pour éviter les problème de santé des chauffeurs routiers, ces sièges sont particulièrement bien amortis, cet amortissement est comparable à ce qui peut être mis en place pour le transport d'une statue. Ces données sont représentées et simulées à la figure 2.20, le détail de la simulation est exposé par la suite.

Les vibrations liées au transport présentées dans la partie 2.5.2 sont introduites dans le modèle comme conditions aux limites, elles sont appliquées sous un socle spécialement créé pour cette partie, sur lequel la statue repose. Seule la composante verticale de l'accélération est considérée pour ces simulations. De plus, pour limiter les temps de calculs, nous n'avons simulé dans FLAC3D que quelques secondes autour de l'accélération maximale. La conséquence est qu'il ne peut y avoir de prise en compte de fatigue du matériau. Avant de commencer la simulation dynamique, une simulation statique



est nécessaire. Elle permet, entre autres, d'associer le socle sous la statue en simulant l'enfoncement de l'œuvre en son sein. Ensuite, les propriétés de ce socle sont modifiées et il est rigidement lié à l'œuvre pour la simulation dynamique.

La figure 2.23 indique que les contraintes de compression dans l'œuvre dépassent les 70 MPa, ce qui est critique pour l'œuvre selon Backers [57] qui reporte des valeurs de résistance maximale en compression de 59 MPa, mais pas selon Migliazza [55] pour qui le marbre de Carrare peut supporter jusqu'à 90 MPa.

Pour ce dernier auteur, la résistance en traction du marbre est de 9 MPa, alors que celle calculée lors du transport est de 12 MPa. Dans le cas d'un transport et si l'état des dégradations de l'œuvre continue son évolution, la statue ne résistera pas à son transport.

Le principal endroit où une concentration de contraintes, et finalement un dépassement de la résistance du matériau est observé, se situe là où la section de la jambe fracturée est la plus faible, c'est-à-dire au niveau de la cheville droite de Cadmus. L'écart de déplacements horizontaux relevés entre le haut de la cuisse, juste en-dessous de la fissure et juste au-dessus sont d'ailleurs d'environ 4 cm. Finalement la statue reste en appui sur le serpent et la jambe gauche, tandis que la jambe droite oscille sous la sollicitation dynamique. C'est ainsi que des contraintes importantes se développent dans la cheville. Nous relevons en d'autres points des contraintes importantes, comme au niveau de cette fissure, car l'oscillation de la jambe crée des points de compression répétés sur la fissure. De même, les sections plus faibles d'appui au niveau du serpent sont soit tendues, soit comprimées, et dépassent les contraintes limites du marbre de l'œuvre.

La statue, si elle est dégradée, ne supportera donc pas un voyage en camion sur un nouveau lieu d'exposition. Premièrement parce que sa jambe fracturée oscille et deuxièmement parce que le serpent risque de se fracturer en de nombreux points.

Un plâtre est actuellement mis en place sur la fracture que nous avons amplifiée, nous avons voulu tester son efficacité dans les mêmes conditions de transport que celles déjà simulées. Nous avons fait l'acquisition géométrique de ce plâtre grâce au scanner laser, c'est donc l'exacte géométrie qui a servi lors du premier transport de l'œuvre, que nous avons simulé. Nous conservons la fissure non cohérente que nous avons amplifiée.

Dans ce cas, les contraintes de traction et compression sont légèrement moins importantes, voir figure 2.24. Ces contraintes ne dépassent d'ailleurs pas les valeurs maximales de résistance du marbre de Carrare énoncées plus haut. Ces valeurs sont de 44 MPa en compression pour 59 MPa à la rupture et de 4,5 MPa en traction pour 9 MPa à la rupture. L'écart entre les

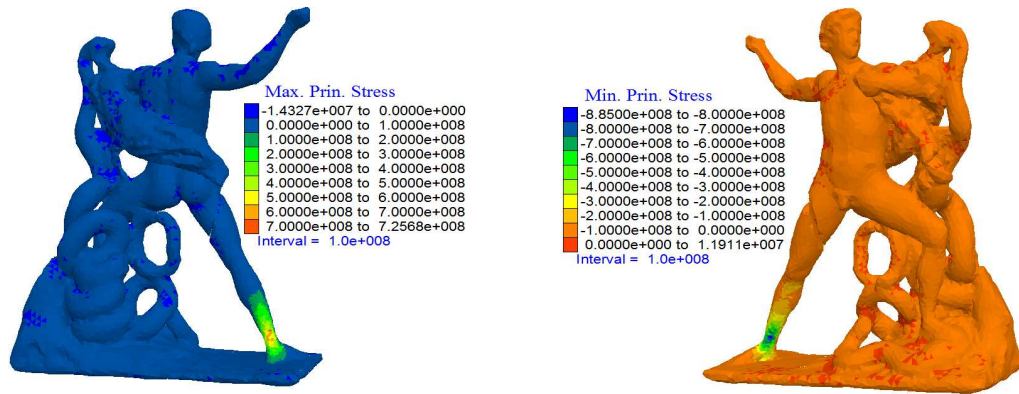


FIGURE 2.23 – principales maximum (à gauche) et minimum (à droite) dans l'œuvre en cas de sollicitations dynamiques

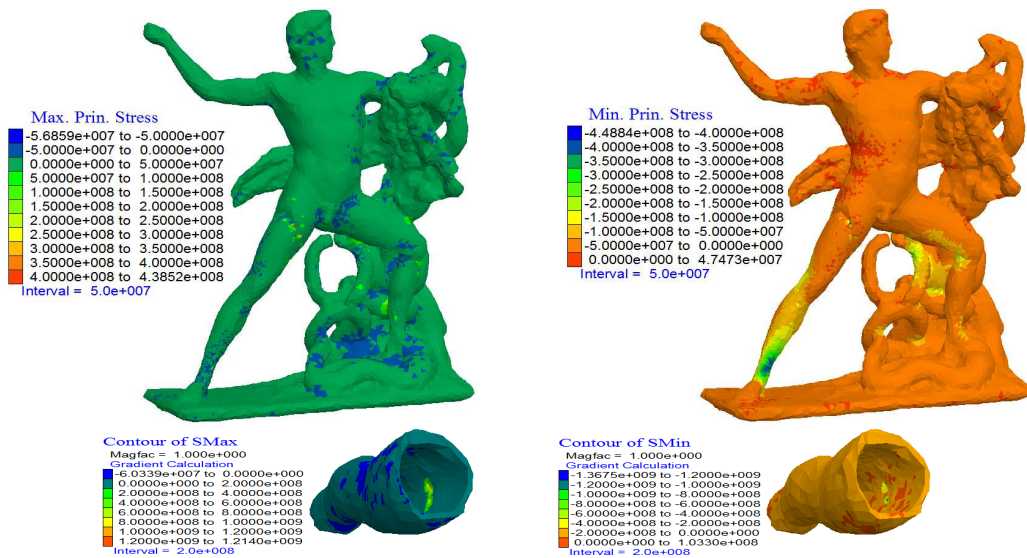


FIGURE 2.24 – Contraintes de compression (à gauche) et de traction (à droite) dans l'œuvre protégée par un plâtre en cas de sollicitations dynamiques

déplacements horizontaux entre le haut de la jambe juste au-dessus et juste en-dessous de la fissure sont plafonnés à 4 mm, dix fois moins importants que lorsque que le plâtre n'est pas présent. Tout ceci indique l'efficacité du plâtre : la jambe n'oscille pas dans ce calcul.

Ces résultats sont à interpréter avec précautions, car une des hypothèses fortes de ce calcul est l'utilisation d'un modèle élastique pour les matériaux. Ainsi, dans le calcul, les matériaux ne se rompent pas, il faut bien vérifier que leur résistance en traction et compression n'est pas dépassée. Dans cette simulation, le plâtre supporte des contraintes de traction et compression supérieures à 100 MPa, ce qui est bien évidemment impossible pour ce matériau. Ces contraintes sont concentrées en un point bien précis : au niveau de la partie pointue de la jambe fracturée, celle-ci vient perforer le plâtre. Hormis dans cette zone, le plâtre est soumis à des contraintes qui sont de l'ordre de 20 MPa. Stewart [58] fait mention de propriétés du plâtre en flexion, il reporte une résistance limite allant de 35 à 50 MPa. De plus, ce matériau étant composé d'un assemblage de couches tissées, sa rupture n'est pas fragile. Il est donc envisageable qu'une rupture locale n'empêche pas le plâtre de jouer son rôle anti-oscillation de la jambe, mais certainement dans de moindres mesures.

De même, les fortes contraintes en traction relevées proviennent essentiellement du choix de ne pas modéliser d'interface entre le marbre et le plâtre.

Le rôle positif du plâtre a donc été mis en évidence dans des conditions de simulation simplifiées qui ne permettent pas de conclure s'il y a ruine de cet élément de renfort sous sollicitations dynamiques.

### 2.5.6 Conclusion sur la modélisation de la statue de Cadmus

Les résultats de ces simulations montrent que même lorsque que les dégradations de l'œuvre sont exagérées dans les zones les plus sensibles, la statue reste stable sous son poids propre. En revanche, elle ne l'est pas sous sollicitations dynamiques : dans le cas d'un transport routier. Lorsque celle-ci est renforcée par un plâtre médical, nous ne pouvons pas conclure sur sa stabilité, même si le plâtre semble avoir un rôle bénéfique. Par précaution, nous estimons que la statue de Cadmus devrait être restaurée. Pour cesser la progression de son état d'altération, un renforcement de ses propriétés mécaniques comme une imprégnation à la résine semble plus réaliste que la mise en place de renforts métalliques comme pour la statue de Neptune.

## 2.6 Conclusion

L'utilisation des outils de la géotechnique appliqués à la conservation des œuvres est une démarche peu commune. Celle-ci se propose d'apporter, aux acteurs de la conservation du patrimoine culturel, une nouvelle manière de comprendre l'impact des éléments de renfort qu'ils conçoivent sur les statues qu'ils tentent de restaurer en suivant les règles très restrictives énoncées dans l'introduction de cette thèse.

Ainsi nous avons développé la méthodologie de modélisation numérique que nous proposons à travers l'exemple de deux œuvres.

Grâce à cette méthodologie, nous confirmons que les choix de restauration adoptés pour la restauration de la statue de Neptune sont réalistes. La nuance est que cette restauration n'a pas pu suivre la règle de la restauration minimale, puisqu'il est apparu que ses éléments de renfort étaient sur-dimensionnés. En effet à l'époque où la restauration a été pensée, les outils d'analyse numérique ne permettaient pas de travailler avec des maillages aussi lourds que ceux des œuvres sculptées dont la géométrie est complexe.

De même, suite à l'étude sur la statue de Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé, nous avons pu déterminer que cette statue, qui a vocation à être exposée, devait être restaurée pour préserver son intégrité. Nous n'avons pas pu mettre en évidence que la solution temporaire adoptée, qui consiste en la pose d'un plâtre sur la jambe endommagée, était une solution garantissant la préservation de l'œuvre lors d'un transport par voie routière.

Plus globalement, nous présentons une méthode de vérification de la stabilité d'une restauration qui diffère des méthodes se basant sur la mécanique des solides indéformables.



# Chapitre 3

## Caractérisations mécaniques et physico-chimiques

### 3.1 Introduction

Dans la méthodologie proposée pour la restauration des œuvres sculptées endommagées, la caractérisation des propriétés minéralogiques, physiques et mécaniques de tous les constituants est d'une importance capitale. A la différence des objets et des ouvrages habituels du génie civil, les œuvres sculptées représentent souvent des objets d'une taille relativement faible, du moins les œuvres visées dans ce travail. Elles sont faites d'un matériau naturel, la roche, dont l'origine est souvent incertaine, voire inconnue. De par son histoire géologique, une roche tout en ayant des propriétés proches du massif rocheux d'où elle est extraite, sera sujette à la variabilité spatiale, ce qui conditionne *in fine* son comportement. Cela rend important et nécessaire une caractérisation fine de chaque œuvre afin d'avoir une idée très claire de ses propriétés. Si l'on ajoute à cela, l'histoire géologique, l'histoire humaine d'une œuvre exprimée souvent par les stigmates du temps et sa sculpture, la nécessité de caractériser la roche s'impose, au delà de la caractérisation de sa provenance, car la roche constituant une œuvre sculptée est toujours particulière.

Les valeurs historiques et/ou artistiques qui font que chaque œuvre est un objet très particulier et unique demandent une préservation et une sauvegarde qui s'opposent aux exigences d'une caractérisation fine. En effet, cette caractérisation sous-entend des prélèvements pour préparer les échantillons à tester, alors même que ceux-ci sont prescrits pour préserver l'authenticité de l'œuvre. Confrontée à cette contradiction inhérente aux œuvres sculptées en roche, la méthodologie de caractérisation s'appuie alors sur une stratégie de croisement de toutes les pratiques de caractérisation non destructive des ma-

tériaux naturels. Tout en utilisant la palette entière des possibilités offertes par les méthodes non-destructives, l'identification de l'origine de la roche utilisée dans l'œuvre pourrait éventuellement ouvrir la perspective d'essais destructifs réalisés, cette fois-ci, sur des roches analogues.

Dans ce chapitre, cette méthodologie de caractérisation des roches des œuvres sculptées est illustrée par les travaux réalisés sur la statue Neptune. Nous présentons les essais dans l'ordre chronologique de réalisation que nous conseillons dans la méthodologie : d'abord les essais de caractérisation physico-chimiques et minéralogiques permettant non seulement de pouvoir éventuellement identifier l'origine de la roche, mais aussi d'avoir accès à des paramètres physiques tels que la masse volumique des grains solides, ou une estimation de la porosité totale. Par la suite, les essais de caractérisation non destructifs peuvent être mis en place, ceux-ci sont limités dans le cadre de ce travail aux mesures des vitesses des ondes ultrasonores, permettant, entre autres, d'estimer les paramètres mécaniques dynamiques en plus d'une exploration d'éventuelles hétérogénéités majeures de l'œuvre. Enfin nous présentons quelques résultats d'essais de caractérisation destructifs qu'il est toujours possible de réaliser sur des roches analogues, lorsqu'elle sont identifiées et accessibles.

La figure 3.1 schématise l'organisation d'une méthodologie pour déterminer les paramètres mécaniques nécessaires à la simulations du comportement d'une œuvre. Les cases à fond bleu sont celles faisant l'objet de ce chapitre.

## 3.2 Caractérisations minéralogiques et physico-chimiques

Ces caractérisations sont destructives, cependant, la quantité de matériau nécessaire à leur mise en œuvre est relativement faible.

### 3.2.1 Caractérisations minéralogiques

#### Marbre de Neptune

Ces caractérisations sont destructives, mais ont l'avantage de pouvoir être réalisées sur de toutes petites quantités de matériaux. Ainsi, dans le cas où certaines œuvres présentent des parties non visibles, telles que sous le socle de Neptune ou encore dans une cavité creusée par le sculpteur pour rajouter un accessoire à une statue, par exemple un trident, il est possible de supposer que les conservateurs ou propriétaires des œuvres autorisent un prélèvement. Blanc [1] a caractérisé le marbre de différentes sculptures en

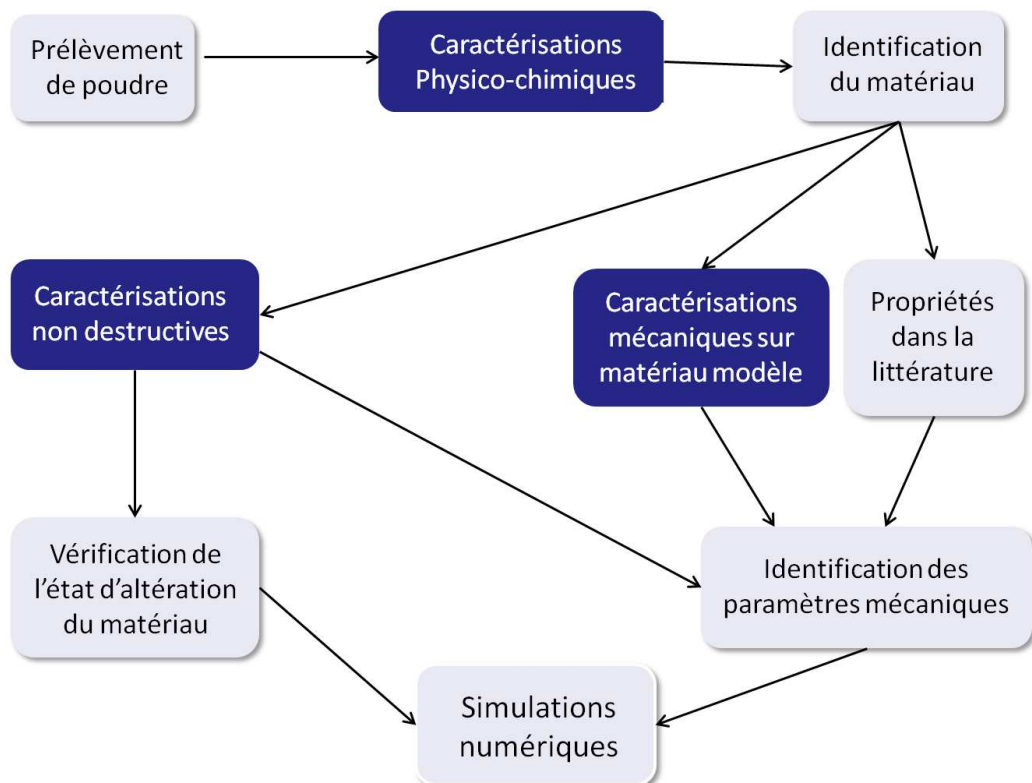


FIGURE 3.1 – Méthodologie proposée pour l'identification des paramètres mécaniques du matériau d'une œuvre



prélevant principalement au sein de micro-fractures. Il a également caractérisé le marbre de la statue de Neptune grâce à des micro-carottes prélevées par Benoit Coignard lorsqu'il perça l'œuvre pour y introduire des fourreaux. La taille des échantillons varie selon les caractérisations envisagées. Blanc fait référence à des échantillons de deux ou trois millimètres de large.

La méthodologie qu'il utilisa consiste à multiplier les méthodes de caractérisation et donc, la quantité d'informations recueillies. Ainsi, l'auteur effectua des caractérisations sur des sections minces, de la poudre, voir même quelques grains.

Il utilisa ainsi la microscopie optique, la cathodoluminescence et réalisa des analyses d'isotopes stables (très utilisées pour localiser la provenance de marbres blancs) et des analyses chimiques par ICP/MS, etc.

Blanc [1] montra ainsi que le marbre de Neptune est à grains fins, que sa texture est homéoblastic avec une forme de grains simple, saccharoidal et que quelques pyrites y sont présentes. Pour finir, il conclut que ce marbre provient du mont Pentéli.

La carrière du mont Pentéli est fermée depuis bien longtemps. Ainsi, il n'est désormais plus possible de se procurer de blocs pour le caractériser. Nous savons cependant, grâce aux multiples études de Kourkoulis et son équipe sur la restauration du Parthénon d'Athènes, qu'il existe un marbre dont les propriétés sont relativement proches de celles du marbre Pentélique : le marbre de Dionysos [59, 35, 60, 43, 36, 61, 34, 33]. Celui-ci est extrait à une cinquantaine de kilomètres du mont Pentéli et a été utilisé pour la restauration de monuments en marbre Pentélique.

### **Marbre de Dionysos**

Pour vérifier le pouvoir prédictif des caractérisations physico-chimiques qui peuvent être réalisées sur lames minces, une caractérisation de la provenance a été commandé au CICRP de Marseille. Le document est présenté en annexe F, page 197.

Des lames minces ont été prélevées du marbre de Dionysos, qui a servi de base aux essais de caractérisation des interfaces (présentés à la fin de ce chapitre).

L'auteur de l'expertise l'identifie comme étant un marbre blanc à grain fin et de texture hétéroblastique. Il décrit ses clichés en soulignant la nature des contours et de la structure de la roche. Enfin, il conclut que le faciès correspond parfaitement aux caractéristiques du marbre du Mont Penteli, mais que sa provenance pourrait être confirmée par d'autres analyses.

Pour mémoire, le marbre de Dionysos est le marbre actuellement en exploitation, le plus proche du marbre Pentélique. Les gisements sont d'ailleurs

distants d'une cinquantaine de kilomètres.

En conclusion, avec une simple analyse, il a été possible d'identifier la provenance de ce marbre avec une précision de 50 km, ce qui ne garantit aucunement qu'à cette distance deux roches peuvent être considérées comme analogues, comme ces le cas des deux marbres de cette étude.

### 3.2.2 Caractérisations physico-chimiques

Ces analyses apportent des informations sur la nature physique et/ou chimique des roches testées grâce à des micro-prélèvements. Individuellement, les résultats ne permettent pas l'identification des roches testées, mais il est parfois possible d'identifier le matériau en croisant les résultats de différentes analyses. Nous présentons ici, l'exemple d'une DRX et d'une porosimétrie mercure, mais il en existe bien d'autres comme l'ATG, la porosimétrie à l'eau, la chromatographie ionique, etc.

#### Diffraction des rayons X (DRX)

La DRX est une technique d'analyse fondée sur la diffraction des rayons X sur des échantillons de quelques grammes de poudres arasées. La diffraction n'a lieu que sur la matière cristalline. L'appareil irradie l'échantillon de rayons X et mesure l'intensité des diffractions suivant l'orientation. Les résultats se présentent sous forme de diagramme de diffraction. Chaque pic de diffraction correspond à une phase minéralogique.

Une diffraction des rayons X a été réalisée sur un échantillon de poudre de marbre de Dionysos. Les résultats sont présentés à la figure 3.2. Le diagramme de diffraction nous indique que la phase majoritaire est du  $\text{CaCO}_3$ , il s'agit d'une roche majoritairement constituée de Calcite. Un des pics détectés, correspondant à environ  $28,3^\circ$  n'a pas pu être identifié. La troisième phase (minoritaire) composée de  $\text{SiO}_2$  indique la présence de Quartz.

Cette analyse permet de confirmer qu'il s'agit d'un marbre.

Une bibliothèque de diagramme de diffraction de différents matériaux est actuellement en train de se constituer, elle permettra d'identifier plus facilement le matériau par comparaison des diagrammes de diffraction réalisés et référencés.

#### La porosimétrie par intrusion de mercure

L'essai au porosimètre à mercure permet d'accéder à une courbe de distribution des diamètres d'accès aux pores. Il permet ainsi d'affiner la description de la porosité du matériau étudié en donnant une estimation de la dimension

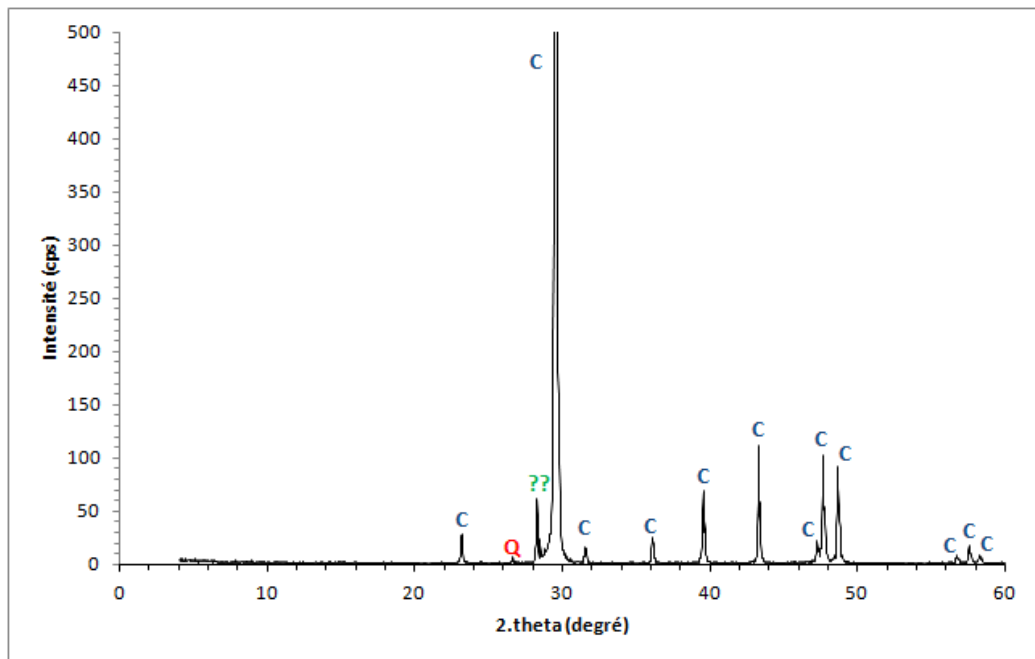


FIGURE 3.2 – Résultat DRX

caractéristique des pores. Les mesures sont ici réalisées sur des échantillons de dimensions de l'ordre du  $\text{cm}^3$ . L'appareil utilisé permet d'atteindre une gamme de pressions allant au-delà des 400 MPa, ce qui permet d'investir des pores de 3 nm de diamètre.

Une porosimétrie au mercure a été réalisée sur un échantillon de marbre de Dionysos. Les résultats sont présentés à la figure 3.3.

L'étude fait apparaître une porosité totale très faible, de l'ordre de 0,9%. Elle renseigne également sur la densité réelle de l'échantillon : 2,71.

La porosité du matériau est majoritairement constituée de deux gammes de pores. Une première gamme vers 200-300  $\mu\text{m}$  et une deuxième gamme de pores vers 0,1 - 1  $\mu\text{m}$ , cette dernière représente peut-être une porosité de fissure dans le matériaux et/ou des pores de surface (en effet, il est possible que des rayures ou éclats soient présents à la surface de l'échantillon, car il a été découpé à la scie diamantée).

Nous savons, grâce à l'analyse DRX, que le matériau est principalement constitué de  $\text{CaCO}_3$ , il est possible de faire le lien avec la valeur de la densité du minéral calcite, également 2,71. Ce matériau est donc quasiment entièrement constitué de calcite.

Sachant cela et connaissant la gamme de pore du matériau, il est possible d'identifier une certaine catégorie de marbre.

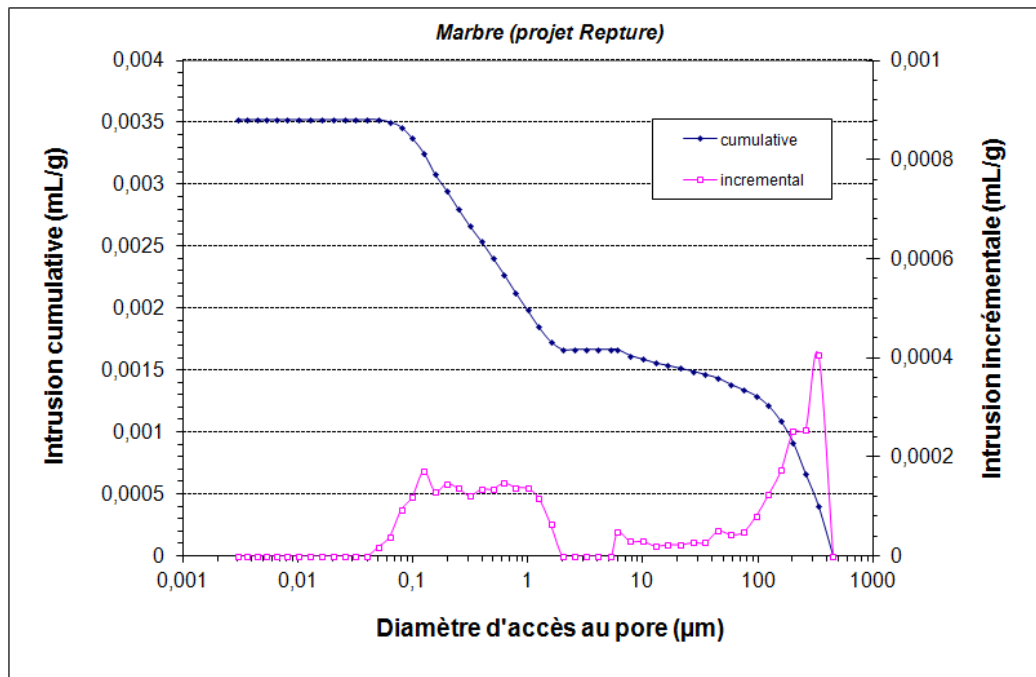


FIGURE 3.3 – Résultat Porosimétrie Hg

### 3.2.3 Conclusion

Les analyses physico-chimiques permettent déjà de renseigner le type de marbre en présence, elles peuvent constituer une étape préliminaire aux études minéralogiques. Plus leur nombre est important et plus les informations, une fois croisées, permettent de préciser la provenance d'une roche.

Les études minéralogiques, quant elles sont réalisables, permettent de mettre en évidence la provenance d'un matériau avec une faible erreur. La provenance, une fois identifiée, permet la réalisation d'essais destructifs sur des échantillons autres que ceux de l'œuvre (sur des matériaux analogues).

## 3.3 Essai non destructif

Si l'identification de la provenance n'est pas possible, des essais non destructifs peuvent être mis en place, ceux-ci permettent (pour certains) de retrouver, entre autres, les paramètres mécaniques du matériau. Ces paramètres permettent par la suite de cerner l'origine du matériau avec plus ou moins de précision, ou même d'évaluer l'état actuel de la roche par rapport à son état initial. Grâce à des corrélations établies, ces méthodes mesurent des propriétés physiques permettant d'en déduire les paramètres recherchés.

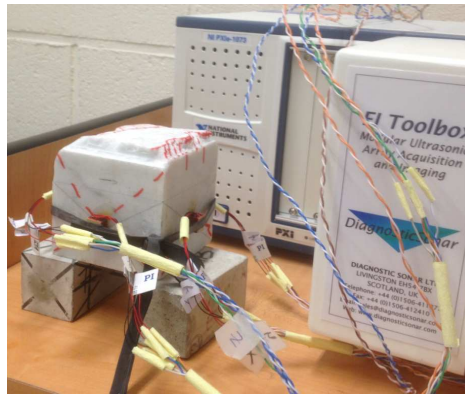


FIGURE 3.4 – Échantillon et système d'acquisition

De telles corrélations sont établies par exemple entre le module d'Young et la résistance en compression simple, entre les vitesses des ondes ou leur atténuation et le tenseur de rigidité (élastique) dynamique, entre les profils des joints et leur propriétés mécaniques, etc.

Parmi les méthodes non destructives, Li [62] utilise un scléromètre (ou marteau de Schmidt), ce qui lui permet de remonter au comportement mécanique d'une interface. Ainsi, avec un scléromètre, il mesure le JCS décrit dans l'équation G.4 en annexe G, page 203, ce qui lui permet de déterminer la force de cisaillement au pic de la roche fracturée qu'il étudie.

Un autre exemple est celui de Benoit Coignard, le restaurateur du projet REPTURE, qui s'est servi du scanner laser pour déterminer le volume de la statue de Neptune, en pesant les blocs de la statue, il a pu déterminer leurs densités, voir le rapport de restauration de la statue de Coignard [22].

### 3.3.1 Vitesses des ondes

Nous avons expérimenté la mesure de la vitesse des ondes ultrasonores, qui permet de comparer certaines propriétés élastiques d'un matériau dans différentes directions.

Les ondes ultrasonores se propagent dans les matériaux selon des vitesses qui dépendent du milieu et du type d'onde. Les deux principaux modes utilisés sont les ondes longitudinales (ondes de compression) et les ondes transversales (ondes de cisaillement). Dans les deux cas :

$$\lambda = \frac{v}{F} \quad (3.1)$$

avec  $\lambda$  : la longueur d'onde,  $F$  : la fréquence et  $v$  : la vitesse.

Dans le cas des ondes longitudinales, la direction de la vibration (polarisation) est la même que celle de la propagation de l'onde. En revanche, dans le cas des ondes transversales, elles se propagent dans une direction perpendiculaire à celle de la vibration. Pour plus de détails, voir le manuscrit de Eslami [63]. La propriété des ondes transversales et longitudinales utilisée dans cet essai est que leur vitesses sont liées aux propriétés mécaniques des matériaux :  $E$ , le module d'Young et  $\nu$ , le coefficient de Poisson :

$$\nu = \frac{v_P^2 - 2v_S^2}{2v_P^2 - 2v_S^2} \quad (3.2)$$

$$E = 2\rho v_S^2(1 + \nu) \quad (3.3)$$

avec  $\rho$  : la masse volumique,  $v_S$  : la vitesse transversale et  $v_P$  : la vitesse longitudinale. Ainsi, la mesure de la vitesse de propagation des ondes ultrasonores dans l'échantillon se fait en mesurant le temps de parcours d'une impulsion entre l'émetteur et le récepteur collés à la surface de l'échantillon.

Pour cela le dispositif expérimental de la figure 3.4, développé au sein de l'équipe Génie Civil du laboratoire PRISME a été utilisé. Les capteurs de ce dispositif sont des céramiques piézoélectriques permettant d'émettre (ou recevoir) une onde P et deux ondes S polarisées dans deux directions perpendiculaires.

Nous présentons les essais réalisés sur une roche identifiée comme analogue à celle de Neptune par les essais de caractérisation minéralogique. Il s'agit de la même roche que celle qui a servi aux essais triaxiaux et aux essais de cisaillement présentés dans ce chapitre. De même, ces essais ont été réalisés sur des échantillons cubiques de 8 cm de côté, prélevés selon le même plan que ceux des autres essais précédemment cités. Ils ont été caractérisés dans deux directions, voir figure 3.4.

L'objectif est de déterminer les caractéristiques élastiques dynamiques de la roche, à savoir son module d'élasticité dynamique et son coefficient de Poisson. Sachant que le plan d'anisotropie de la roche est difficilement identifiable à l'œil nu, nous ne pouvons, avec certitude, affirmer que nous allons pouvoir identifier l'anisotropie présumée du matériau. Les résultats de ces caractérisations sont présentés 3.5.

Le module d'Young dynamique a été calculé, il est en général plus élevé, mais néanmoins proche du module d'Young statique du matériau. Il en va de même pour le coefficient de Poisson dynamique qui est, quant à lui, en général plus faible que le coefficient de Poisson statique. Ces propriétés sont strictement identiques lorsque ces mesures sont effectuées dans un milieu parfaitement élastique, ce qui n'est pas le cas de la roche. Il peut y avoir

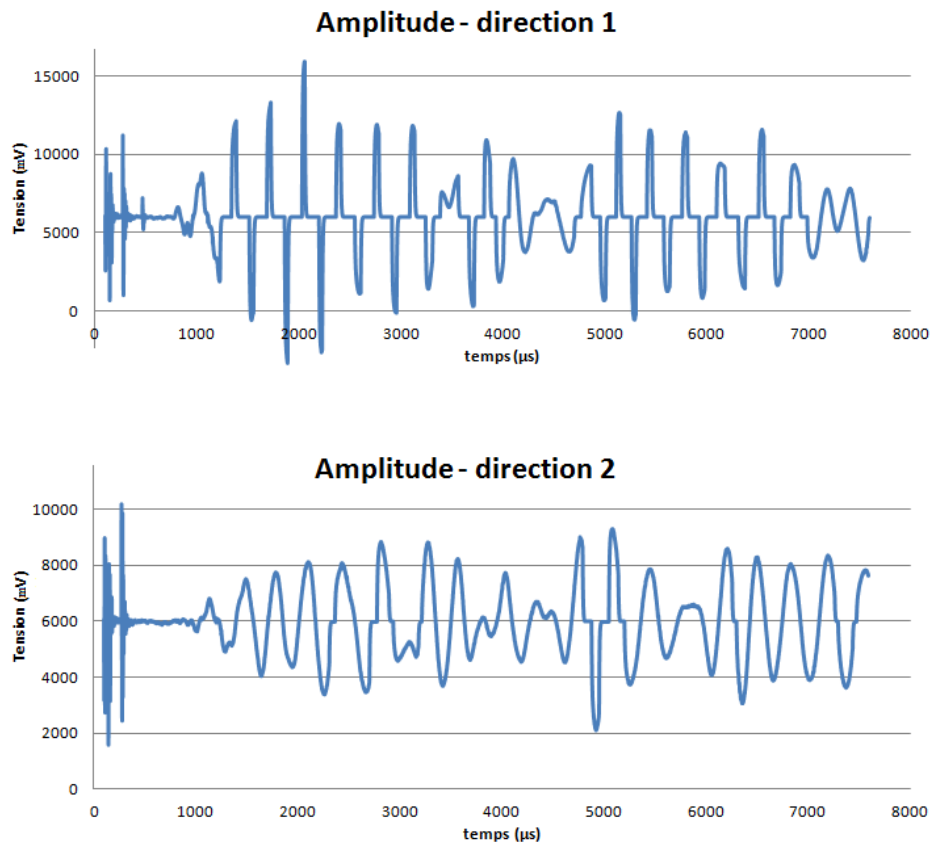


FIGURE 3.5 – Résultats des essais dans les deux direction

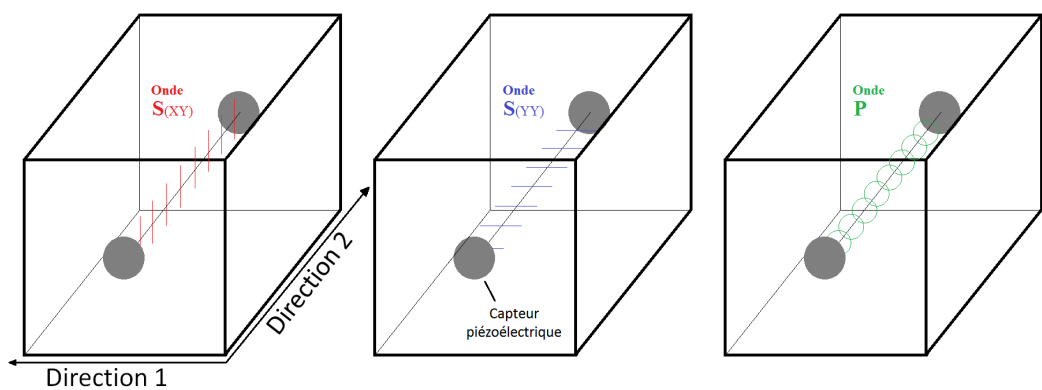


FIGURE 3.6 – Représentation simplifiée dans la direction 2, de l'onde P et des deux ondes S polarisées suivant XX et XY

direction 1	$v_P$ (m/s)	4384
	$v_S$ (m/s) : Polarisation XX	2909
	$v_S$ (m/s) : Polarisation XY	2303
	E (GPa) : via polarisation XX	50,8
	E (GPa) : via polarisation XY	37,6
	$\nu$ : via polarisation XX	0,11
	$\nu$ : via polarisation XY	0,31
direction 2	$v_P$ (m/s)	4329
	$V_S$ (polarisation XX)	3032
	$V_S$ (polarisation XY)	2538
	E (GPa) : via polarisation XX	50,7
	E (GPa) : via polarisation XY	43,2
	$\nu$ : via polarisation XX	0,02
	$\nu$ : via polarisation XY	0,24

Tableau 3.1 – Paramètres élastiques

un facteur trois d'écart entre ces propriétés, mais il est bien inférieur dans notre cas car ces mesures ont été effectuées à basse fréquence (100 kHz), les résultats des calculs sont présentés au tableau 3.1.

Ces résultats nous montrent que les vitesses des ondes P sont différentes, il en va de même en comparant les vitesses des ondes S respectivement dans chaque direction de polarisation. Ceci indique clairement que le matériau n'est pas isotrope, mais n'indique pas si les directions des capteurs sont orientées dans les directions de l'anisotropie. Le module d'Young prend la même valeur en polarisation XX, suivant qu'il s'agisse de l'une ou l'autre des deux directions, soit environ 51 GPa, en polarisation XY, sa valeur est plus faible, en dessous des valeurs relevées dans la littérature (qui s'échelonnent entre 45 et 85 GPa suivant les auteurs : Papamichos, Kourkoulis et Stavropoulou [33, 64, 35, 36]). Nous avons donc mesuré des valeurs soit en dessous soit se situant dans la limite inférieure des valeurs proposées dans la littérature.

Les résultats des calculs du coefficient de Poisson dynamique montrent des variations de 0,02 et 0,11 à 0,24 à 0,31 suivant la direction et la polarisation prise en compte. Kourkoulis [35], qui a fait le même type d'essai en ayant préalablement bien identifié l'orientation de la stratification de la roche propose des valeurs allant de 0,11 dans la direction faible à 0,26 dans la direction forte, d'autres auteurs comme Stavropoulou [36] présentent un coefficient de Poisson de 0,34, sans préciser la direction. Nos résultats sont semblables à ceux de la littérature, nous avons de plus caractérisé une direction plus faible que l'autre, mais nous ne pouvons pas affirmer qu'il s'agisse de la direction



la plus faible, ni de la direction la plus forte de l'anisotropie de la roche.

L'anisotropie de la roche a été partiellement mise en évidence. La valeur moyenne relevée pour le coefficient de Poisson dynamique est de 0,17 et de 45,6 GPa pour le module d'Young dynamique. Cette technique, à elle seule, ne permet pas l'identification du matériau, mais peut d'une part apporter une confirmation aux analyses physico-chimiques et minéralogiques et d'autre part mettre au jour la présence d'un éventuel endommagement du matériau (que nous n'avons pas recherché dans la caractérisation présentée).

### 3.4 Essais destructifs : essais triaxiaux

Des essais de compression triaxiale sur des échantillons normés (diamètre 38 mm et hauteur 76 mm) ont été réalisés sur la même roche que celle caractérisée par la mesure des vitesses des ultrasons (analogue à celle de Neptune).

L'objectif de ces essais est de vérifier l'anisotropie supposée de cette roche analogue, ainsi que la détermination des paramètres standards mécanique ( $E$ ,  $\nu$ ,  $c$  et  $\varphi$ ).

Comme abordé précédemment, le plan d'anisotropie de la roche est difficilement identifiable, cependant, les échantillons ont été carottés dans la direction perpendiculaire avec ce qui a été jugé, à l'œil nu, comme étant le plan d'anisotropie le plus probable. Ces échantillons ont été instrumentés avec des jauges de déformations axiales et latérales doubles. Pour tous les échantillons, la phase déviatorique a été précédée par une phase de compression isotrope allant jusqu'à 20 MPa puis par une décharge jusqu'à différentes pressions de confinement (0 MPa, 2 MPa, 6 MPa et 10 MPa). Les résultats de cette phase de confinement sont présentés sur la figure 3.7. Il est possible de constater que dans la plage des pressions de confinement testées, la variation des déformations dans la direction axiale des carottes ( $\epsilon_1$ ) et la direction transversale ( $\epsilon_3$ ) est équivalente : l'anisotropie du matériau n'apparaît pas de manière prononcée. Au-delà du constat d'une réponse anisotrope, ce résultat ne coïncide pas avec celui attendu pour cette roche, ceci pourrait s'expliquer par le fait que les deux directions testées ne sont pas forcément les directions ayant les propriétés les plus contrastées (le plan d'anisotropie et la direction normale avec ce plan).

L'évolution des déformations au cours du chargement déviatorique des essais triaxiaux est présentée sur la figure 3.8. Les cycles de déchargement, rechargement ont été réalisés afin de déceler un éventuel endommagement. Le constat général est que le comportement de cette roche reste réversible et linéaire, même très proche du pic. La résistance en compression simple est de 52 MPa, dans la littérature, elle est égale à environ 90 MPa, Stavropoulou

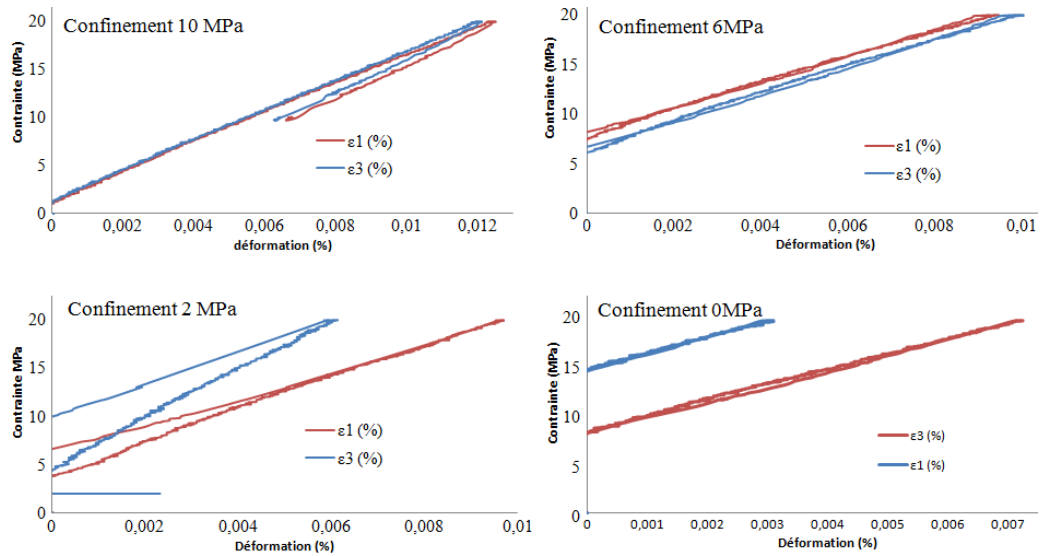


FIGURE 3.7 – Comparaison des déformations axiales et transversales au cours de la phase de compression isotrope

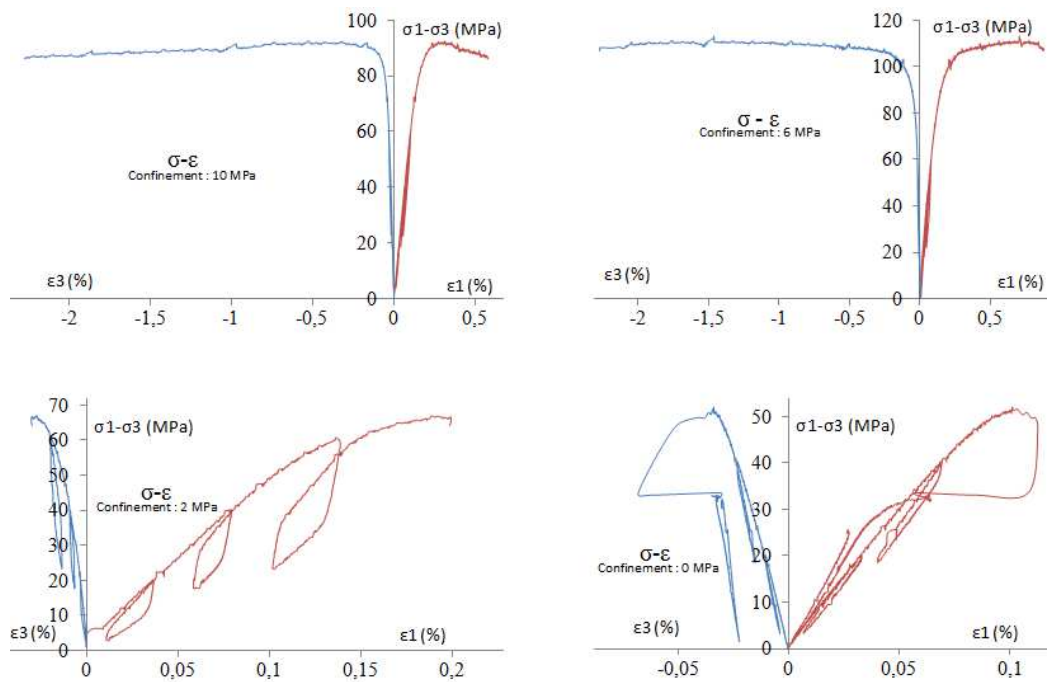
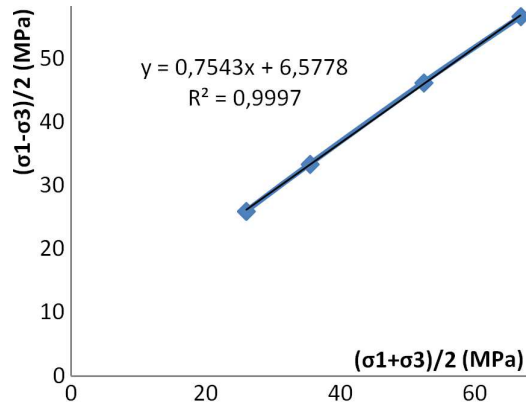


FIGURE 3.8 – Évolution des déformations axiales et transversales en fonction de  $\sigma_1 - \sigma_3$  sous différentes pressions de confinement

$\sigma_3$ (Mpa)	10	6	2	0	moyenne	Données littérature
E (GPa)	83,5	60,2	44,5	61,9	62,53	45 à 85 [33, 64, 35, 36]
Poisson	0,3	0,3	0,1	0,3	0,24	0,11 à 0,33 [33, 65, 35, 36]
$\varphi$	49°					39,1 et 39,7 [33, 36]
C (Mpa)	10,02					21,5 et 22,4 [33, 36]

Tableau 3.2 – Résultats

FIGURE 3.9 – Détermination des valeurs de C et  $\varphi$ 

et Papamichos [36, 33].

Le module d'Young et le coefficient de Poisson statique ont été calculés sur les enveloppes des courbes contrainte-déformation entre 20% et 40% de la résistance au pic. Les résultats sont résumés sur le tableau 3.2 et sont comparés avec des données de la littérature. Il faut noter que les résultats de l'essai sous 2 MPa de confinement présentent un module d'Young et un coefficient de Poisson bien inférieurs à ceux calculés pour les autres confinements. Néanmoins, ces résultats restent dans l'intervalle de ceux proposés dans la littérature.

En écrivant la loi de Mohr-Coulomb en terme de contraintes principales, il est possible d'identifier les paramètres  $c$  et  $\varphi$ . Dans le plan  $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$  ;  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  ce critère est présenté par une droite dont le coefficient directeur est égal à  $\sin \varphi$  alors que la valeur à l'origine coïncide avec  $c \cdot \cos \varphi$ , voir figure 3.9.

En conclusion de ces essais triaxiaux, nous n'avons pas pu mettre en évidence une anisotropie prononcée de cette roche et n'avons donc pu démontrer s'il s'agit ou non d'une roche isotrope. La difficulté de clairement identifier un plan de stratification pendant le carottage a très vraisemblablement influencé les résultats finaux, masquant l'anisotropie potentielle. Le fait que le module d'Young statique identifié par ces essais coïncide avec les valeurs moyennes rapportées dans la littérature, alors que la valeur de la cohésion se situe sous

les valeurs reportées, pourrait être un argument en faveur d'une direction de carottage des échantillons inclinée par rapport au plan d'anisotropie. En effet, il est connu que la résistance minimale (et donc la valeur minimale de cohésion également) se trouve dans une direction formant un angle entre  $30^\circ$  et  $60^\circ$  avec le plan d'anisotropie.

Ces essais permettent d'identifier certaines des propriétés mécaniques essentielles à la simulation numérique du comportement. Couplés à d'autres essais comme les essais conventionnels de caractérisations mécaniques, les résultats des essais triaxiaux apportent une parfaite connaissance du comportement de la roche.

## 3.5 Essais destructifs : caractérisation du comportement d'interfaces en contact frottant

Cette autre technique de caractérisation destructive apporte des informations sur le comportement aux interfaces lors d'un contact frottant. Les résultats de ces essais servent de données d'entrée pour les simulations du comportement mécanique présentées au chapitre précédent.

### 3.5.1 Caractérisation mécanique des interfaces

#### Objectif de la campagne expérimentale

Ces essais ont pour but de caractériser la morphologie et le comportement d'interfaces en contact frottant. L'objectif est de permettre l'évaluation du comportement mécanique d'une fracture en connaissant sa nature et en se servant uniquement de données décrivant sa morphologie, cet aspect est décrit dans le chapitre suivant. L'idée est qu'à l'avenir, lorsque la restauration d'une œuvre fracturée sera envisagée, les personnes en charge de simuler les potentielles restaurations puissent scanner les surfaces en contact et en déduire leur comportement en contact frottant sans avoir à réaliser d'essais sur celles-ci. L'application visée est donc l'amélioration de la prise en compte du comportement des interfaces fracturées lors de simulations numériques sur les œuvres d'art. Ces fractures sont, la plupart du temps, bien plus sollicitées en compression qu'en cisaillement.

#### Étude bibliographique

**Comportement des interfaces entre deux solides** Amontons fût l'un des premiers à formaliser ses observations sur ce type de problème. Les lois

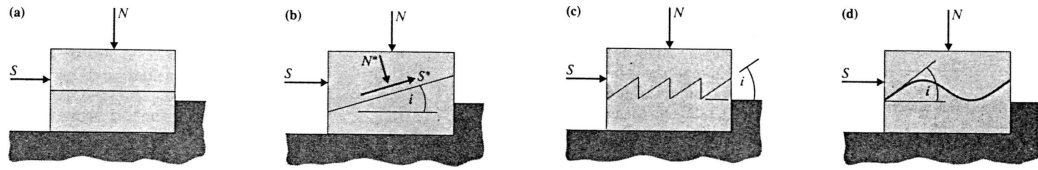


FIGURE 3.10 – Modèles de rugosité de surfaces, tirée de Patton [67]

d'Amontons [66] se résument en deux postulats :

1. La force de frottement  $F_t$  est proportionnelle à la charge normale appliquée  $F_n$ , le glissement entre deux objets en contact n'aura lieu qu'à partir du moment où la force tangentielle  $F_t$  nécessaire pour déplacer le solide est supérieur à une force minimale  $F_s$  ; à partir de là, le glissement est initié. Il en découle :

$$F_s = \mu_s F_t \quad (3.4)$$

avec  $\mu_s$ , le coefficient de frottement statique. Lorsque le glissement est en cours, une force  $F_d$  est nécessaire pour le maintenir. Cette force est également proportionnelle à la charge normale appliquée :

$$F_d = \mu_d F_n \quad (3.5)$$

avec  $\mu_d$ , le coefficient de frottement dynamique, sachant que  $\mu_d \leq \mu_s$ .

2. La force de frottement  $F_t$  est indépendante de la surface apparente de contact. Le fait que l'aire apparente de contact n'influe pas sur la force de frottement n'est pas très intuitif car, il faut penser à l'effet de la rugosité. Le contact effectif n'a lieu qu'au niveau des aspérités de surface, ainsi, l'aire de contact réelle,  $A_r$  se trouve être bien inférieure à l'aire apparente,  $A_a$ . Le rapport entre les deux aires dépend de la force normale appliquée. Si la déformation des aspérités est essentiellement plastique, l'aire réelle de contact est proportionnelle à la force appliquée :

$$A_r = \frac{F_n}{p_0} \quad (3.6)$$

où  $p_0$  est la pression de transition du domaine élastique vers le domaine plastique du matériau dont le module d'Young est le plus faible.

**Force de frottement** Des essais ont été conduits par Patton [67] qui a introduit un modèle 2D simple illustré figure 3.10, (a) représentant une surface de rupture parfaitement lisse qui possède un angle de frottement  $\phi$  pouvant être modélisé par  $\tau = \sigma \tan \phi$ . Si la direction de cisaillement est inclinée d'un

angle  $i$  par rapport à la fracture (b), la surface de fracture est inclinée d'un angle de frottement apparent de  $(\phi + i)$ , ainsi :

$$\tau = \sigma \tan(\phi + i) \quad (3.7)$$

Figure 3.10 (c) et (d), le cas est étendu à des surfaces de rupture non lisses, suite à des essais. Patton constate que l'équation 3.7 s'applique toujours.

En augmentant la valeur de la contrainte normale jusqu'à une valeur critique, lors du glissement, sur les surfaces inclinées, les aspérités n'ont plus d'effet et une valeur de la contrainte de cisaillement est atteinte. Il se produit une rupture au niveau des aspérités. Dans ces conditions, la fracture possède une cohésion due à la résistance au cisaillement,  $C$  découlant des aspérités et d'un angle de frottement interne de  $\phi_r < \phi_b + i$ , voir figure 3.11. Pour  $\sigma > \sigma_r$ , cette force de cisaillement peut s'écrire :

$$\tau_p = C + \sigma \tan \phi_r \quad (3.8)$$

**Comportement des joints, prise en compte des raideurs normale et tangentielle** Le comportement d'une interface ou d'un joint peut-être considéré comme un matériau élastique linéaire ou élastique non linéaire, mais aussi comme un matériau élastique parfaitement plastique dans le cas des joints rocheux.

Des modèles proposent de décrire le comportement de l'interface comme étant endommageable, ou alors plastique parfait, ou avec un écrouissage positif (durcissement), ou négatif (radoucissement) alors que les déformations résultantes peuvent se décrire par une contractance ou dilatance. Lors d'essais de compression (selon la direction  $\vec{n}$  de la figure 3.12 a.) et de cisaillement (selon la direction  $\vec{t}$  de la figure 3.12 a.), les grandeurs mesurables sont les déplacements relatifs, normal  $u_n$  et tangentiel  $u_s$ , de l'interface. En 1976, Goodman [68] propose de considérer  $\sigma_n$ ,  $\tau$ ,  $K_n$  et  $K_s$ .  $\sigma_n$  est la contrainte normale,  $\tau$  est la contrainte de cisaillement, pouvant être décrites selon le critère de Mohr-Coulomb.  $K_n$  et  $K_s$  sont les raideurs normale et tangentielle représentées sur la figure 3.12 b. Celles-ci sont déterminées expérimentalement par :

$$K_n = \frac{d\sigma_n}{du_n} \quad (3.9)$$

et

$$K_s = \frac{d\tau}{du_s} \quad (3.10)$$

L'utilisation de ces paramètres permet de modéliser le comportement des interfaces avec un modèle élastique linéaire plastique. La partie élastique des

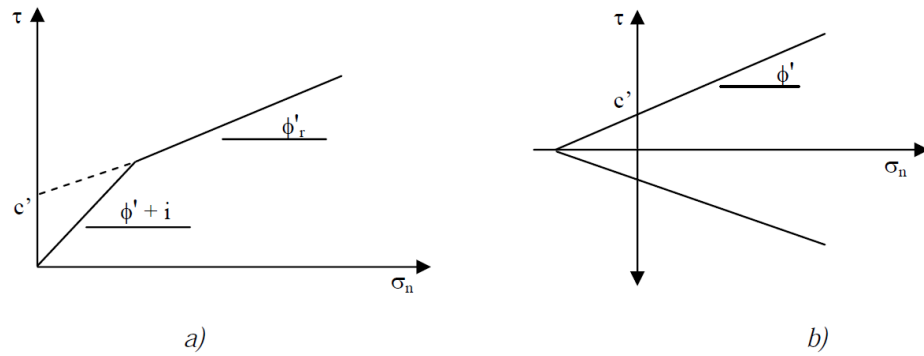


FIGURE 3.11 – Critère de rupture de Mohr-Coulomb utilisé par Patton, tiré du manuscrit de Said [70], a) Enveloppe bilinéaire pour les joints tenant compte des aspérités [71], b) Enveloppe linéaire pour les interfaces

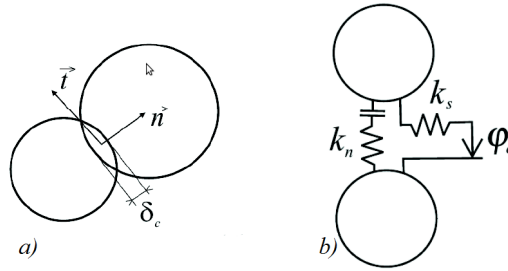


FIGURE 3.12 – Contact entre éléments, tiré du manuscrit de Duriez [72] : a) Définition géométrique, b) Modélisation selon Cundal [73]

modèles prend cette forme :

$$\begin{pmatrix} d\sigma_n \\ d\tau \end{pmatrix} = \underline{\underline{K}} \begin{pmatrix} du_n^e \\ du_s^e \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

avec

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Day et Potts [69] utilisent le critère de rupture de Mohr-Coulomb avec une règle d'écoulement associée (le comportement ne dépend pas de la contrainte moyenne), voir figure 3.11 b), celui-ci définit la fonction de charge :

$$F = |\tau| + \sigma_n \tan \varphi - c \quad (3.13)$$

Dans ce cas, lorsque la contrainte de cisaillement  $\tau$  atteint la limite de rupture de Mohr-Coulomb, la valeur de la raideur tangentielle devient nulle, alors que celle de la raideur normale reste inchangée.

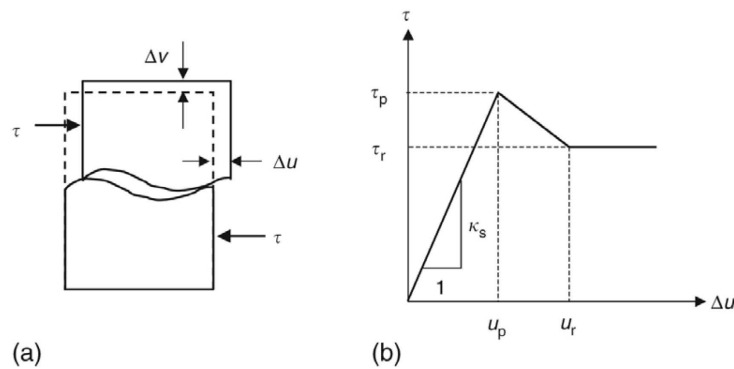


FIGURE 3.13 – Variation de la contrainte de cisaillement en fonction du déplacement tangentiel de Goodman [68, 71]

La détermination expérimentale de la raideur normale se fait par la courbe de la fermeture du joint en fonction de la contrainte normale  $\sigma_n$ , la pente de la droite l'ajustant correspond à  $\kappa_n$ . Les essais cycliques de charge-décharge en compression simple sur les joints rocheux montrent que le chemin emprunté lors des premier cycle n'est pas le même, à mesure que le nombre de charge-décharge augmente, il existe une hystérésis. Après quelques essais, les courbes de charge-décharge se confondent presque. Ainsi, Goodman [74] introduit un paramètre correspondant à une fermeture maximum du joint une fois stabilisé :  $V_m$ . Bandis [75] a montré qu'à rugosité équivalente, plus la roche à une forte résistance en compression, plus  $V_m$  diminue.

Le comportement d'une fracture sous cisaillement dépend fortement de la contrainte normale à laquelle elle est soumise.

La figure 3.13 représente une courbe idéalisée du déplacement tangentiel en fonction d'un cisaillement dans des conditions de contrainte normale constante d'un échantillon qui pourrait être celui qui est schématisé sur cette même figure. La courbe de la contrainte tangentielle croît proportionnellement aux déplacements sur la première partie, où la pente est égale à  $\kappa_s$ . Pendant cette phase, jusqu'à une contrainte égale à  $\tau_p$  (résistance au cisaillement de la fracture), les deux surfaces se déplacent et l'ouverture augmente, mais il y a peu de dégradations des surfaces. C'est à partir de  $\tau_p$  que les aspérités sont cisailées et qu'elles subissent des dommages irréversibles. Puis, la contrainte de cisaillement diminue jusqu'à une valeur appelée la contrainte résiduelle de cisaillement,  $\tau_r$ . Durant cette phase, les aspérités continuent d'être écrasées, la zone de contact augmente cependant entre les deux surfaces et la dilatance se poursuit de manière moins intense.



**Comportement au cours d'un essai de cisaillement** L'essai de cisaillement consiste à cisailer les deux épontes d'un joint sous charge normale constante. Lors de l'essai, le comportement varie en fonction du rapport de l'intensité des charges normales et tangentielles. Ce comportement peut être découpé en différentes phases qui sont présentées ici.

Nous nous intéressons majoritairement au comportement pré-pic, au cours duquel les zones de contact des deux épontes du joint vont évoluer, les phases de contractance, puis de dilatance vont se suivre. La surface de contact va d'abord diminuer, puis augmenter jusqu'à dépasser la surface de contact sans chargement, elle deviendra constante lorsque le comportement résiduel sera atteint.

Pour plus de précision, Gentier [76] décompose le comportement en cisaillement précédant  $\tau_p$  en trois phases qui sont illustrés à la figure 3.14 : avant I, I et II.

La pré-phase (avant I) n'existe que lors d'essais à contrainte normale constante (CNL : Constant Normal Load). Elle correspond au chargement normal du joint qui précède le chargement tangentiel. À ce stade, les zones de contact entre épontes sont faible et la contrainte normale est supportée par quelques points de contact. La fermeture se fait progressivement, elle dépend de la morphologie du joint et de la contrainte qui est appliquée.

La phase I correspond à l'application progressive de la contrainte de cisaillement, les forces de frottement apparaissent avec un comportement élastique des aspérités. Il se passe un transfert de contrainte sur les aspérités orientées dans la direction du cisaillement, celle-ci sont appelées aspérités à pente positive. Ainsi, la contrainte de cisaillement détourne l'application de la contrainte normale vers ces aspérités qui commencent à se déformer. Il n'y a, de fait, pas de contraintes appliquées sur les facettes à pente négative. Au même moment, le joint se referme, ce phénomène est appelé contractance, s'en suit automatiquement une augmentation de la surface de contact entre épontes, qui est défini par Tabor [77] comme "junction growth" en tribologie de l'emboutissage. Au cours de cette phase, le déplacement tangentiel est encore quasi-nulle, c'est dans cette phase que les fractures des œuvres d'art doivent être sollicitées.

Lorsque les contraintes de cisaillement deviennent non-linéaire, la phase II est atteinte et le déplacement tangentiel augmente lui aussi. Le joint ne se contracte plus, mais ce dilate (dilatance). Les zones de contact diminuent et donc la contrainte normale augmente sur les facettes en contact, jusqu'à ce que la rupture ait lieu. Selon Gentier [76], il n'existe pas de modélisation de cette phase connues dans la littérature.

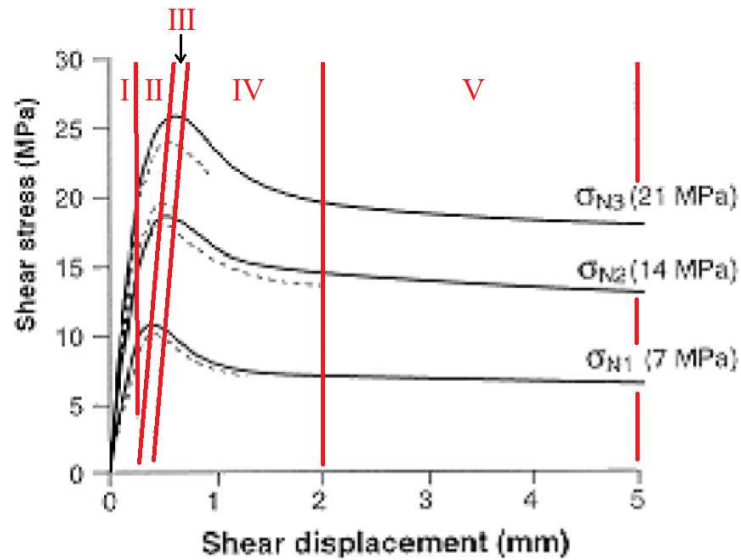


FIGURE 3.14 – Décomposition d'un essai de cisaillement , adapté de Gentier [76]

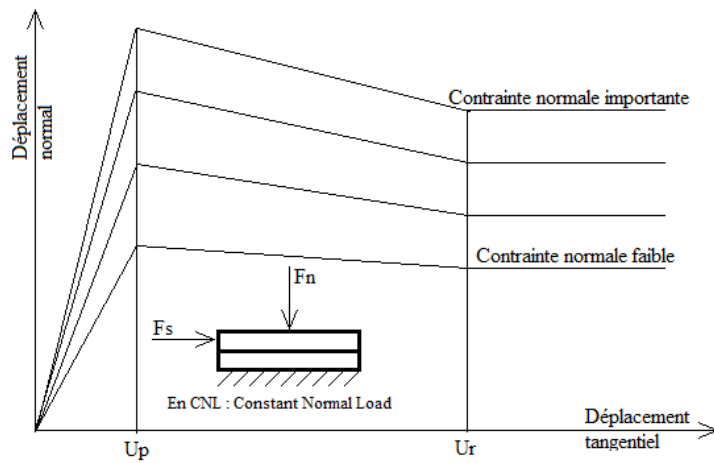


FIGURE 3.15 – Comportement en cisaillement en CNL, adapté de Goodman [68]

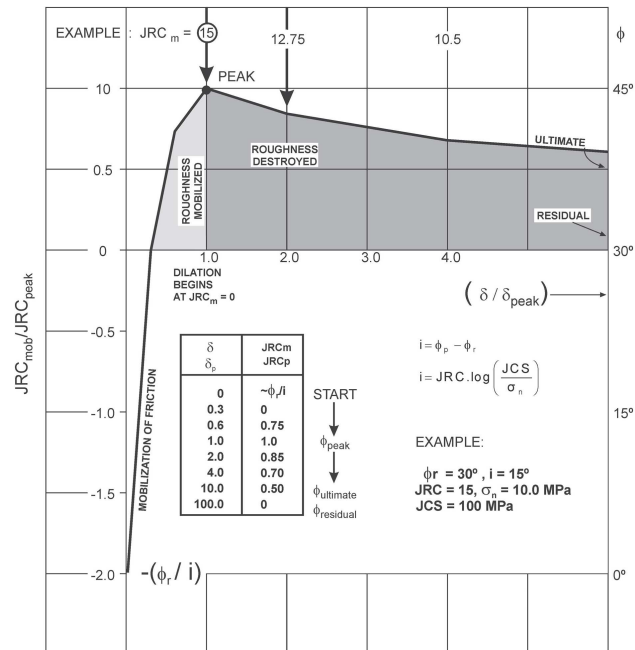


FIGURE 3.16 – Comportement en cisaillement du modèle de Barton, tiré de Barton [79]

**Prise en compte de l'état de surface pour décrire le comportement mécanique** Certains modèles empiriques tiennent plus ou moins compte de la rugosité de l'interface des joints.

Le modèle de Patton [67] fait intervenir l'angle des aspérités, alors que les modèles LADAR (voir annexe H, page 209) et ses dérivés font intervenir la proportion de surface cisillée au cours de l'essai.

Le modèle du JRC (voir annexe G, page 203) mobilisé de Barton et Bandis [78] permet de mieux prendre en compte l'état de surface du joint et considère la phase pré-pic, pour  $\frac{\delta}{\delta_{pic}} < 1$  dans la figure 3.16. Ce modèle est très compliqué car il faut au préalable déterminer le JRC, le JCS, la résistance en compression du matériau dont sont fait les joints, l'angle de frottement (par un tilt test), l'ouverture des joints, etc.

Dans leur étude, Grasselli et Egger [80] ne prennent en compte que les facettes orientées en direction du cisaillement  $A_0$ , elles sont choisies en faisant varier l'angle d'inclinaison qui sert de seuil. Une fois identifiées, ces facettes servent de base au calcul de paramètres tel que le rapport entre la surface des facettes qui s'opposent au cisaillement et la surface totale. Un autre coefficient est proposé, il s'agit de la pente de l'ajustement entre l'angle d'inclinaison des facettes et la surface correspondante B, il caractérise la distribution des

angles de déclivité apparente du joint.

Après avoir effectué des essais de cisaillement, ils proposent le critère de résistance du cisaillement au pic suivant :

$$\tau_p = \sigma_n \tan(\phi_r) [1 + e^{\left(\frac{-1\sigma_n}{\lambda_0 B \sigma_c}\right)}] \quad (3.14)$$

avec  $\tau_p$  : la résistance au cisaillement au pic,  $\sigma_n$  : la contrainte normale appliquée,  $\sigma_c$  : la résistance en compression du matériau intact,  $\phi_r$  : l'angle de frottement résiduel (post-pic).

Lopez [81] présente des modèles basés sur des paramètres de morphologie, sur les paramètres relevés, CLA, RMS,  $R_L$ ,  $Z_4$ ,  $R_a$ ,  $Z_3$ ,  $Z_2$ , RSK, RKU, CC et  $\theta_2$ , seuls  $R_L$ ,  $Z_4$ ,  $Z_3$  et  $\theta_2$  sont gardés pour la modélisation statistique. Les variables réponses du modèle sont  $\tau$  et  $V$ , la dilatance et les prédicteurs, ces quatre paramètres morphologiques ainsi que  $\sigma_n$  et  $V$ . Le modèle est validé par un cas de charge qui n'a pas été pris en compte dans la modélisation statistique.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous reprenons l'idée que le comportement mécanique dépendrait aussi de l'état de surface et tentons de construire des modèles empiriques prenant en compte la rugosité des joints.

**Exemple d'étude sur l'aspect morpho-mécanique de joints plans non emboîtés** Il existe des études qui ont été menées dans le but de prendre en compte l'évolution de la rugosité dans le comportement mécanique, comme ce que nous souhaitons faire. Celles-ci, relativement anciennes, s'intéressent d'avantage à la phase qui suit  $\tau_p$ , l'une d'entre elles est présentée par Lefèvre [82]. Il s'agit de l'analyse de joints rocheux par des mesures expérimentales afin de comprendre l'évolution de l'état des surfaces avec le cisaillement. L'auteur utilise un profilomètre, qui permet d'obtenir une résolution de  $50\mu\text{m}$  en profondeur et  $72\mu\text{m}$  en largeur avec une erreur de  $5\mu\text{m}$ . Les paramètres morphologiques déterminés sont :  $Z_2s$  qui correspond à la racine carrée de la moyenne quadratique des pentes moyennes des mailles composant la surface entière,  $Dw$  qui représente le degrés de dégradation totale des deux épontes du joint après cisaillement, sachant que  $0 < Dw < 1$ .

Les essais de cisaillement lui permettent d'obtenir quatre paramètres caractérisant le comportement des joints : la raideur tangentielle  $K_s$  qui traduit la déformabilité du joint, la résistance au cisaillement à la rupture  $\tau_p$ , la résistance résiduelle  $\tau_r$  et l'angle de dilatance au pic  $i$ . Les angles de frottement et le critère de rupture du joint peuvent être déterminés à partir des caractéristiques de résistance du joint. Dans les essais réalisés dans cet article de Lefèvre, l'augmentation des raideurs des joints en fonction du nombre de cycle (nombre de fois où le cisaillement est répété) est observée, ce qui

traduit une augmentation de l'adhérence des surfaces. Il est expliqué que le phénomène est en accord avec les résultats de Yoshinaka [83] et ceci par l'existence de plus d'adhérence entre surfaces peu ou pas rugueuses pour lesquelles l'aire de contact totale est beaucoup plus importante que sur les surfaces très rugueuses. Donc, la diminution de l'amplitude de la rugosité a tendance à augmenter l'adhérence entre les épontes. De plus, la raideur  $K_s$  croît à peu près linéairement avec la contrainte normale pour tous les cycles et pour toutes les morphologies. Le critère de rupture de Mohr-Coulomb est utilisé pour les joints en ignorant l'influence de la rugosité et en admettant que le comportement macroscopique est semblable entre les différentes morphologies de joints. Un autre constat est fait dans cet article, en faisant une analyse morphologique après chaque cycle, l'effet de la contrainte normale sur la rugosité s'annule après 1,2MPa, seule la succession de cycles de cisaillement fait évoluer l'état de surface (endommagement de la surface). Dernier constat : la rugosité secondaire semble jouer un rôle dans le frottement des interfaces des joints artificiels (non emboîtés et non imbriqués). Plus le joint est rugueux et moins l'angle de frottement au pic  $\phi_p$  est élevé.

### Campagne expérimentale

Contrairement à la majorité des études publiées, ces essais se concentrent sur la partie pré-glisement, jusqu'à son initiation. Nous ne cherchons donc pas à caractériser le comportement post-pic, ni l'usure de l'interface car l'objectif n'est pas de comprendre le comportement en endommagement des joints étudiés. Parmi les paramètres caractérisant le comportement mécanique, nous avons choisi de travailler avec un nombre minimum et en avons donc retenu quatre : la cohésion du joint  $C$ , l'angle de frottement  $\varphi$  et les deux raideurs  $K_n$  et  $K_s$ .

En première partie, des tests sont présentés puis les données qui en sont extraites sont traitées en vue de nourrir les modélisations statistiques prédictives qui enrichiront la prise en compte du comportement aux interfaces lors de simulations de restauration.

Ces simulations sont faites à partir d'un modèle provenant d'une géométrie définie par un nuage de point ayant une précision connue. La rugosité des interfaces apportée par le nuage de point est limitée soit par la précision de l'appareil d'acquisition, soit par une limite que l'on se sera fixée concernant la résolution envisageable pour modéliser une œuvre. Ainsi, il existe une information qui n'est pas transmise au modèle, c'est la variation de la rugosité de l'interface plus fine que la précision apportée par le nuage de point. Il est possible d'imaginer que lors d'essais de cisaillement, cette rugosité influence le résultat, alors que pour le moment, les comportements issus des

simulations ne prennent en compte que la rugosité apportée par le nuage de point. De même, les paramètres caractérisant la morphologie sont eux aussi dépendants de la finesse du nuage de point acquis, une étude sur la variation des valeurs prises par ces paramètres est présentée au paragraphe 3.5.2 de ce chapitre.

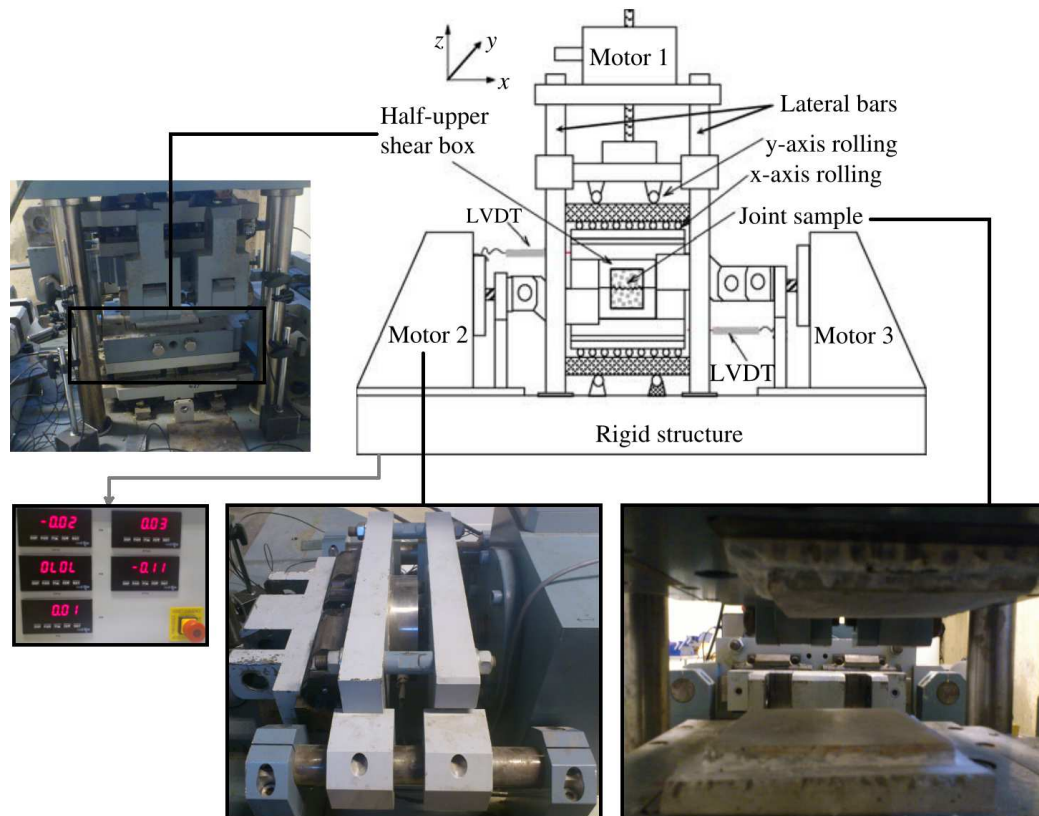


FIGURE 3.17 – Schéma de la machine de cisaillement, adapté de Belem [84]

Les essais ont été réalisés au laboratoire GéoRessources (UMR 7359) sur le site de l'École Nationale Supérieure de Géologie de Nancy. La machine de cisaillement est illustrée figure 3.17, page 109 de l'annexe J. De même, le détail du déroulement des essais est illustré dans cette annexe.

### Dépouillement des résultats : caractérisation mécanique

Le dépouillement des essais permet de déterminer les valeurs de  $C$  et  $\varphi$ , mais aussi l'évolution de  $K_n$  et  $K_s$  pour chaque essai. Les surfaces en contact de certains joints ont été volontairement usées afin de réaliser de nouveaux essais. Ces essais sont considérés comme des joints différents puisque la mor-

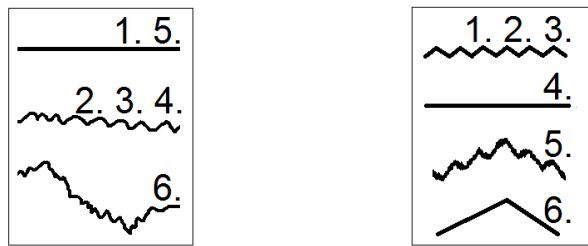


FIGURE 3.18 – Schéma des morphologies des joints, marbre à gauche et mortier à droite

phologie des deux épontes a changé. Pour servir de repère visuel, un schéma de la morphologie de chaque joint est proposé à la figure 3.18, de l'annexe J.

### Caractérisation du comportement normal : essais de compression

Pour chaque joint, les résultats du troisième essai de compression sont présentés, ces résultats sont présentés de façon plus détaillée en annexe I. La figure 3.19 illustre les résultats sur joints de marbre. Les sept courbes illustrent la variation de la fermeture des joints en fonction de la contrainte normale appliquée. Tout en bas, le joint 2 est le moins raide, au milieu, la majorité des joints testés sont confondus. Puis en haut, les joints usés 3 et 6 sont les plus raides. Le résultat du joint 2 diffère franchement de ceux des autres joints rugueux de forme visuellement identique. Si l'on met de côté ce résultat, il n'apparaît pas de tendance claire de comportement entre les joints de rugosité différente. Par contre les joints usés sont plus raides que les joints rugueux, cela dit, le joint lisse, qui peut être considéré comme usé, a un comportement semblable à celui des joints rugueux. Ces courbes ne sont pas linéaires, elles présentent une légère courbure.

La figure 3.20 illustre les résultats des joints de mortier. Tout en haut, le joint lisse est celui qui a la raideur la plus importante, suivi des trois joints rugueux (dans l'ordre, 3, 2 et 1), du joint scié en forme de chevron et pour terminer, le moins raide de tous est celui qui est bombé et rugueux à la fois.

En comparant les résultats des deux séries d'essais, on s'aperçoit que les joints de marbre sont plus raides que les joints de mortier, mais que l'allure des courbes est comparable. La tendance de raideur décroissante avec la rugosité visuellement observable envisagée pour les joints de marbre est confirmée grâce aux résultats des joints de mortier : plus un joint est rugueux, plus sa raideur normale est faible.

Parce qu'il ne nous a pas semblé raisonnable d'approcher les courbes de raideur normale par une fonction affine, voir figure 3.21, leur évolution a été approchée par morceau. L'évolution de leur pente a été tracée en fonction de

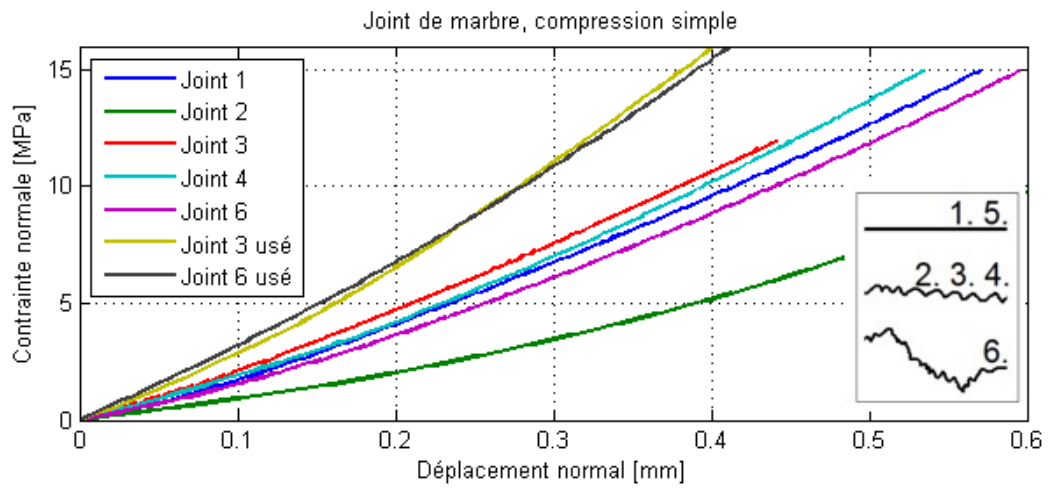


FIGURE 3.19 – Résultat en compression simple, joints de marbre

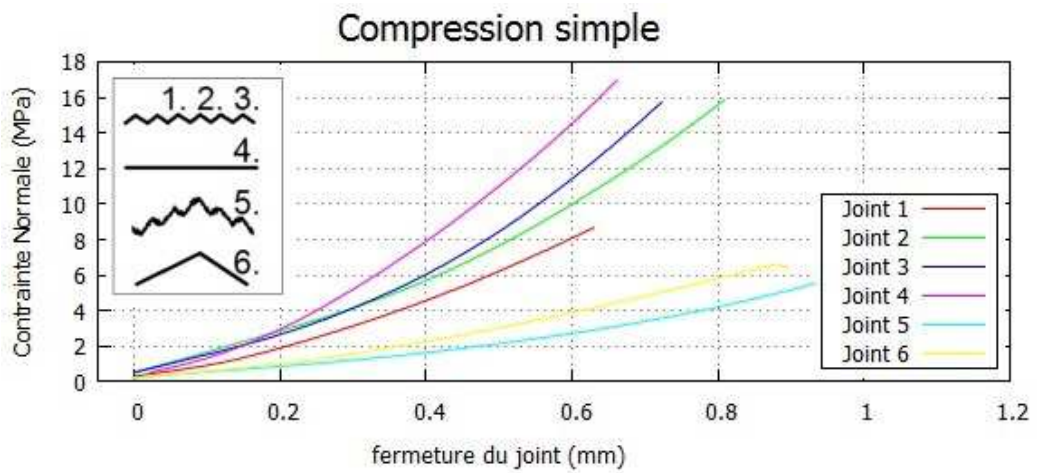


FIGURE 3.20 – Résultat en compression simple, joints de mortier



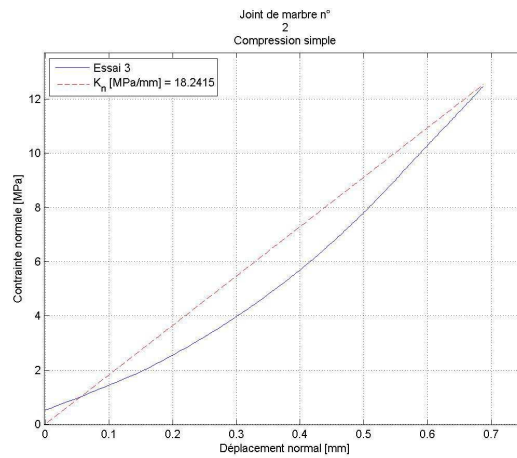


FIGURE 3.21 – Mauvaise modélisation de la courbe de raideur normale du joint de marbre 2 par une fonction affine.

la contrainte de compression. Ces évolutions ont par la suite été ajustées par des fonctions affines, caractérisées par deux paramètres, leur pente et leur ordonnée à l'origine. Un exemple est donné à la figure 3.22. L'évolution des raideurs est présentée aux figures 3.23 et 3.24.

Ayant connaissance de la raideur normale initiale (entre 0 et 2 MPa), nous n'avons pas pu mesurer  $V_m$  parce que la section des joints testés était trop importante et les capacités de la machine de cisaillement étaient atteintes, au maximum 100 kN. Ainsi, nous avons testé le modèle de Bandis sur les joints de marbre, en tentant de retrouver la valeur de la fermeture maximale. Cet exercice n'a rien donné car les résultats, figure 3.25, montrent une fermeture maximale en constante augmentation. Ce modèle, prenant en compte la raideur initiale, ne considère pas directement la rugosité du joint, même si, par cette information, celle-ci doit être quelque peu transmise.

Dans le cas de la restauration d'œuvre d'art, il paraît de plus délicat d'obtenir ces deux paramètres.

Ces ajustements permettent de caractériser  $K_n$  pour chaque joint, les coefficients des droites de régression sont les paramètres mécanique utilisés dans le chapitre suivant. Les pentes des ajustements sur joint de marbre semblent moins variables que celles des ajustements sur les joints de mortier. De même, le classement des ordonnées à l'origine fait apparaître les mêmes conclusions que précédemment. De ces évolutions de la raideur normale, il semblerait également que les joints moins rugueux ou usés aient des coefficients d'ajustement plus élevés.

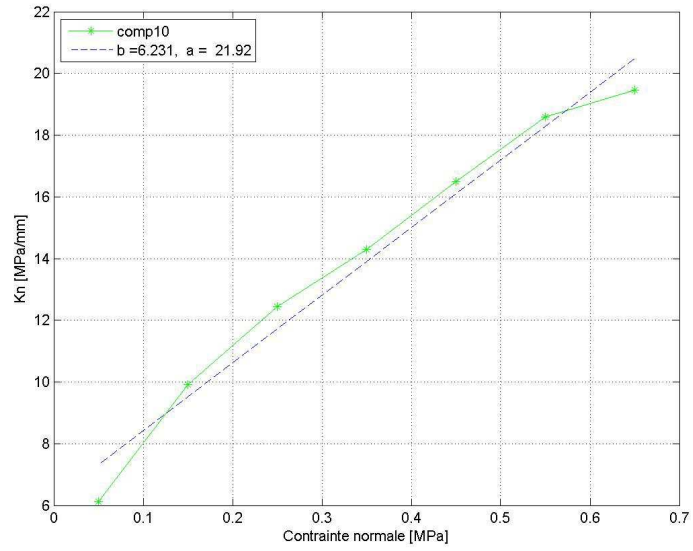


FIGURE 3.22 – Détermination de  $K_n$  pour le joint de mortier n°1, voir illustration des profils type des joints, figure 3.18

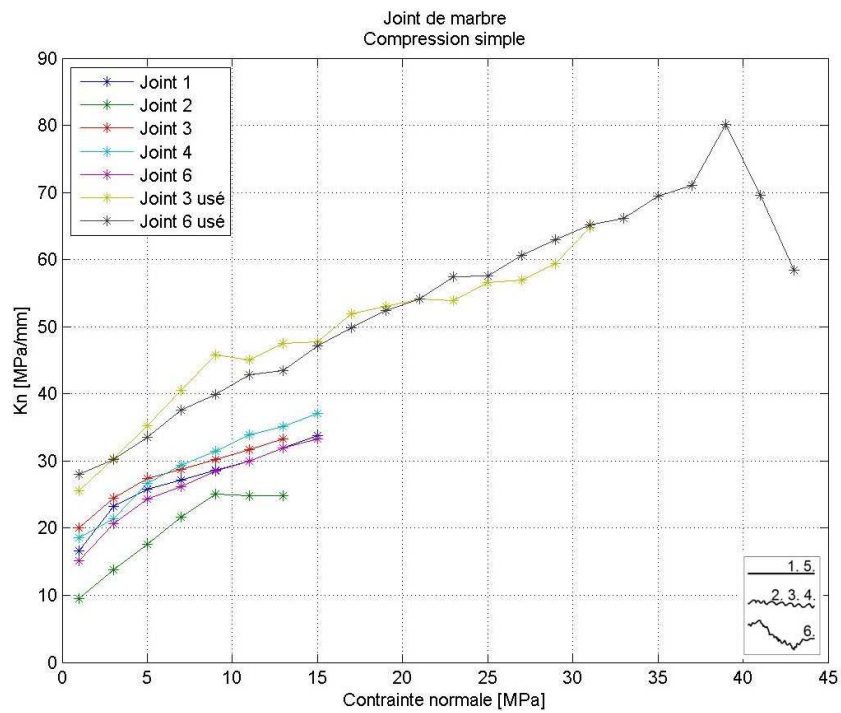


FIGURE 3.23 – Évolution de la raideur normale, joints de marbre

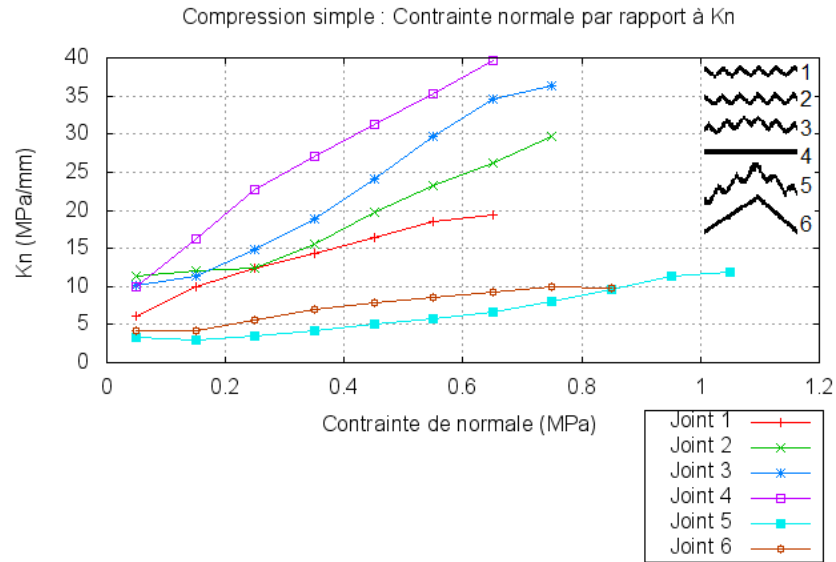


FIGURE 3.24 – Évolution de la raideur normale, joints de mortier

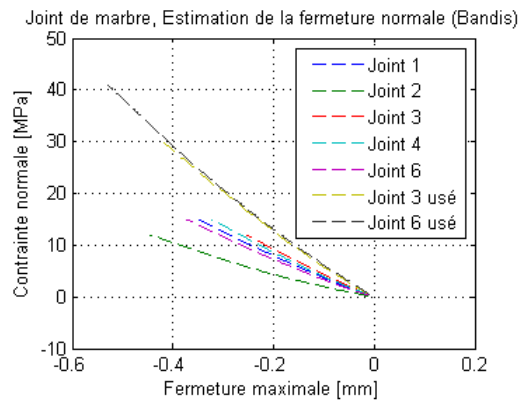


FIGURE 3.25 – Utilisation du modèle de Bandis en compression simple, estimation de la fermeture maximale

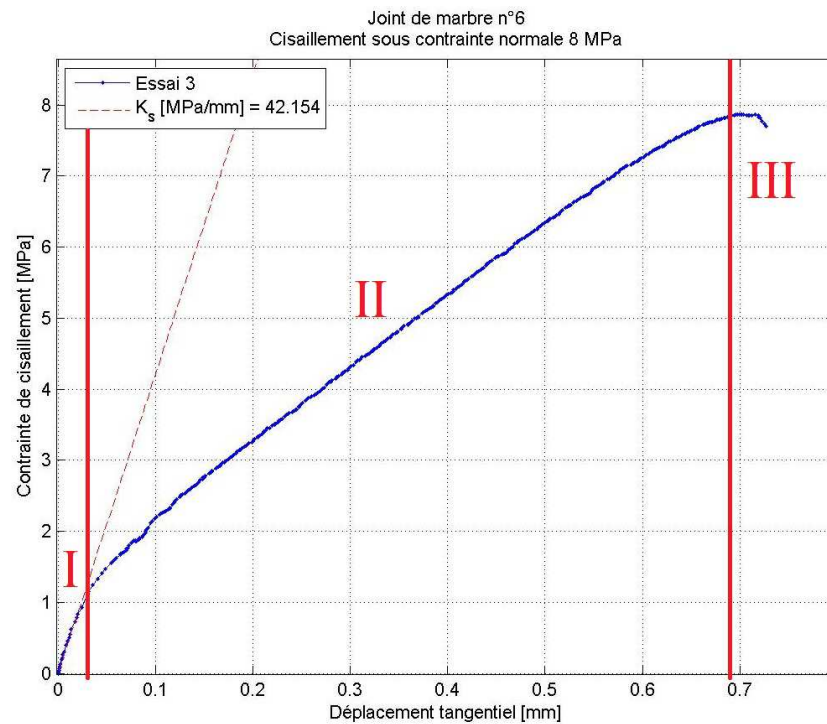


FIGURE 3.26 – Cisaillement du joint de marbre 3 sous 2 MPa, essai 4

**Comportement tangentiel : Essais de cisaillement direct à force normale constante (CNL)** La figure 3.26 présente le comportement typique des résultats que nous obtenons en cisaillement, ce comportement correspond à celui déjà décrit dans la bibliographie.

La première phase est caractérisée par son déplacement tangentiel faible. Elle correspond à l'application progressive de la contrainte de cisaillement, les forces de frottement apparaissent avec un comportement élastique des aspérités. Une seconde pente caractérise la phase II, le déplacement tangentiel augmente lui aussi. La phase III commence lorsque la contrainte maximale de cisaillement est atteinte, à  $\tau_p$ . C'est à cet instant que nos essais sont stoppés pour ne pas modifier l'état de surface des joints.

Tous les essais réalisés ont été répétés trois fois, la figure 3.27 présente l'exemple du cisaillement du joint de mortier 4 sous 6,5 MPa de contrainte normale. La bonne superposition de ces courbes prouve que l'état de surface n'est pas modifié, lorsque l'essai est stoppé au pic.

Plusieurs cas de charge de compression ont été appliqués aux joints pendant la compression, comme l'illustre la figure 3.28. Les différents chargement sont bien identifiés. La pente de la première partie linéaire de ces courbes représente la raideur tangentielle du joint. Cette raideur varie donc en fonction

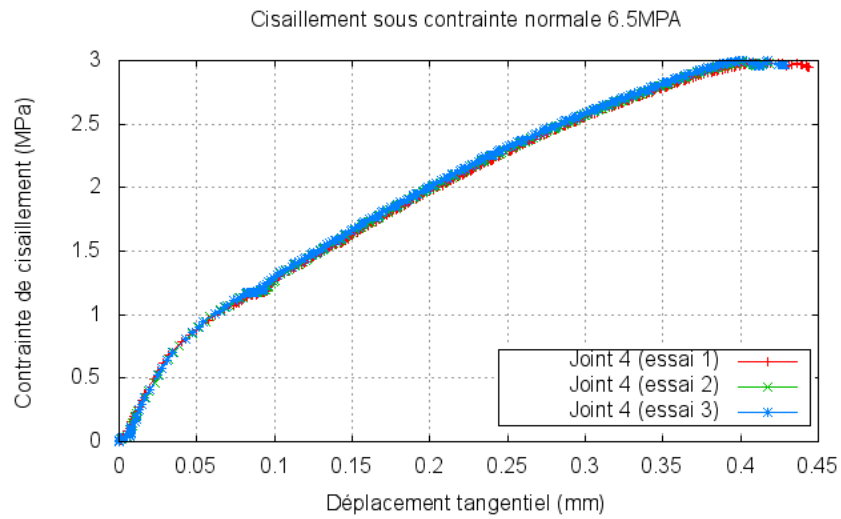


FIGURE 3.27 – Cisaillement du joint de marbre 4, essais 1, 2 et 3

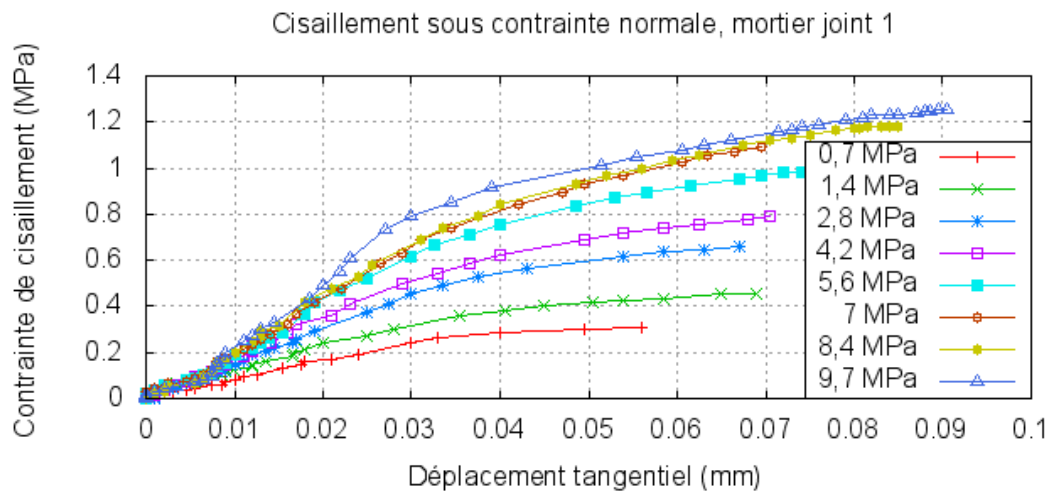


FIGURE 3.28 – Cisaillement du joint de marbre 1, essais 2

de l'intensité de la charge normale. Comme pour les raideurs normales, les raideurs tangentielles ont été tracées en fonction de la contrainte normale (figures 3.30 et 3.29).

Dans le cas du marbre, les pentes de la majorité de l'évolution des  $K_s$  semblent identiques, le joint dont la surface n'est pas plane (6) a un comportement différent, la pente de l'évolution des  $K_s$  est plus importante, il en va de même pour ce même joint lorsqu'il est usé. Le joint lisse a un comportement intermédiaire entre les joints rugueux et les joints courbés et rugueux. Ce qui veut dire que la raideur tangentielle d'un joint courbe et rugueux augmente plus vite sous la contrainte normale que celle d'un joint lisse, et que celle d'un joint rugueux et plan. De plus, le caractère usé d'un joint ne modifie que passablement son comportement tangentiel.

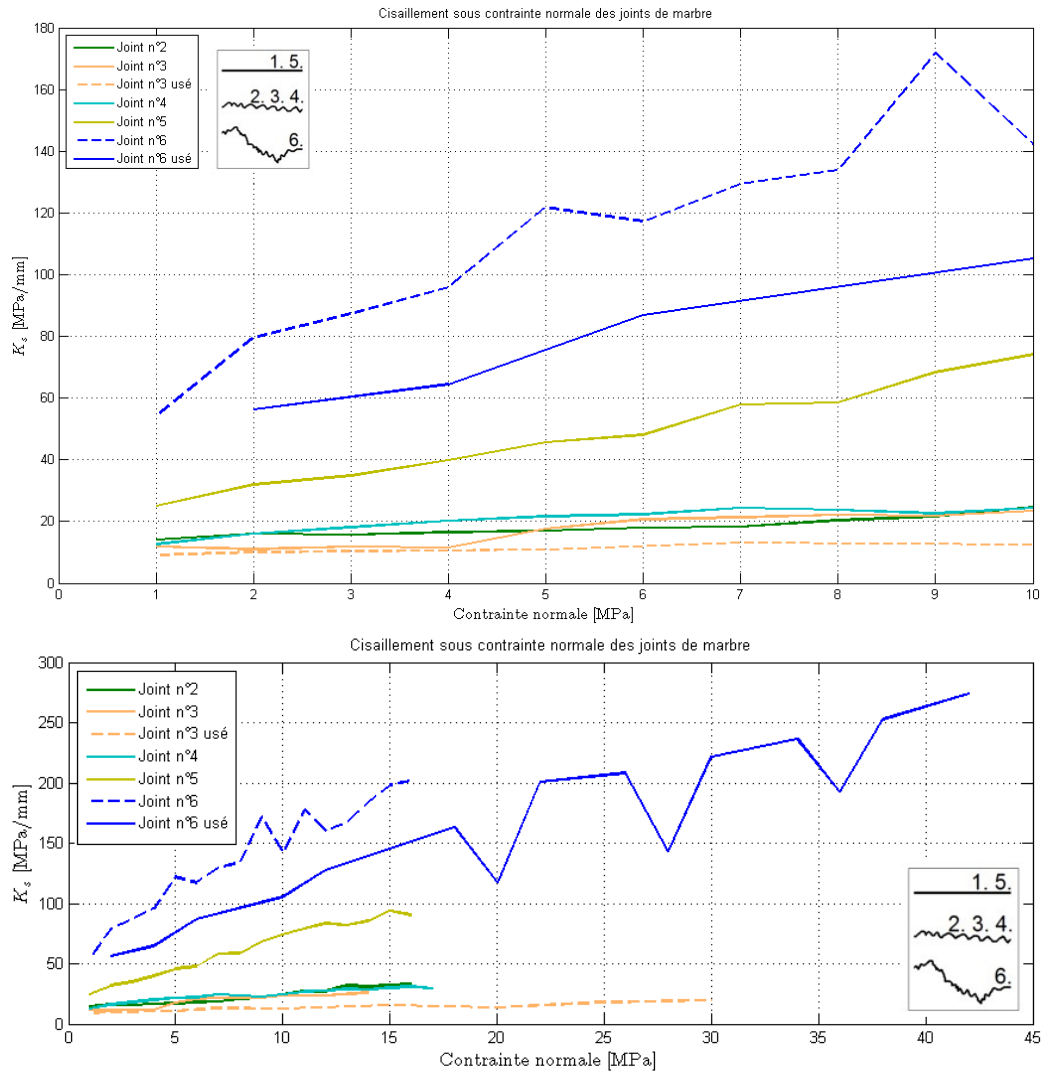
Dans le cas du mortier, les pentes de l'évolution des  $K_s$  sont visuellement identiques, seule l'ordonnée à l'origine change. Ainsi, à contrainte normale constante, le joint lisse est moins raide que les joints rugueux, eux aussi moins raides que les joints à surfaces courbes.

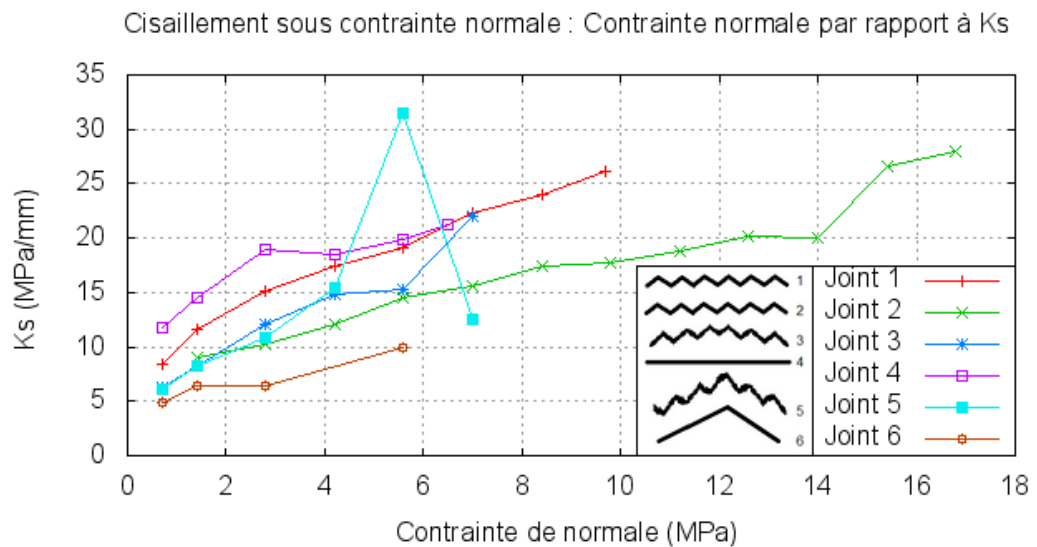
De ces deux séries d'essais, comparativement, il ne ressort visuellement pas de tendance du comportement tangentiel des joints courbes. Cependant, dans les deux cas, le joint lisse est plus raide que les joints rugueux plans. Les résultats des ajustements permettrons d'autres analyses.

Ainsi, la variation des raideurs tangentielles en fonction de la contrainte normale a également été ajustée linéairement. Cependant, les droites affines ajustent très mal l'évolution de  $K_s$ , c'est pourquoi nous proposons également un ajustement puissance, voir figure 3.31. À l'image des deux séries de résultats, sur l'exemple présenté à la figure 3.31, l'ajustement puissance est légèrement meilleur.

$C$ ,  $\varphi$  sont calculés pendant les essais de cisaillement, en allant jusqu'à la rupture du joint, les valeurs de  $\tau_{pic}$  et la contrainte normale  $\sigma_n$  sont relevées pour chaque essais, les courbes des joints de marbre sont présentées à la figure 3.32. L'angle de frottement du joint lisse est plus faible que celui des autres joints, hormis le joint 3, et globalement, les valeurs prisent par  $\varphi$  augmentent avec la rugosité des joints. Seul le joint 6 a une cohésion (plus faible lorsque celui-ci est usé. Le fait d'attribuer une cohésion à un joint qui n'a rien de cohésif est considéré par Barton [79] comme une erreur.

L'angle de frottement des joints n'est pas propre au matériau dont il est fait, les résultats de ces essais l'illustrent : l'angle de frottement varie avec l'état de surface du joint. De plus, les surfaces en contact augmentent avec le chargement normal, cette cohésion pourrait être une mauvaise interprétation du fait que l'angle de frottement ne serait pas constant, justement à cause de l'augmentation de la surface de contact. Ce cas de figure serait particulièrement important pour les joints à surface courbe.

FIGURE 3.29 – Évolution de  $K_s$  avec la contrainte normale, joints de marbre

FIGURE 3.30 – Évolution de  $K_s$  avec la contrainte normale, joints de mortier

Il faut aussi noter que les valeurs de déplacements tangentiels au moment de la rupture des joints ont été comparées, celles-ci augmentent avec la charge normale. Ainsi le modèle proposé par Goodman 3.15 ne pourrait pas servir à modéliser nos données.

Les résultats de l'ensemble des paramètres calculés sont présentés au tableau 3.3.

L'analyse des coefficients  $K_{s_a}$ ,  $K_{s_1}$  et  $K_{s_2}$  des droites de régression linéaire et puissance de  $K_s$  ne permet pas d'établir un lien entre la morphologie apparente et leurs valeurs. Il semblerait cependant que  $K_{s_b}$  soit plutôt lié au rugosité de premier ordre, comme définit à la figure 3.33 : sa valeur diminue quand la rugosité augmente, cette remarque est surtout valable pour les joints de mortier. En effet, selon Yoshinaka [83], les raideurs  $K_s$  des joints rugueux sont inférieures à celles des joints plus lisses.

Parce que l'ajustement puissance ne permet pas de faire un lien immédiat avec la morphologie et parce qu'il n'a jamais été utilisé dans la littérature, il ne sera pas conservé pour la suite de cette étude.

En effet, les valeurs prises par les coefficients  $K_{n_a}$  et  $K_{n_b}$  sont tellement différentes d'un matériau à l'autre qu'il est difficile d'observer une quelconque tendance. En s'intéressant aux résultats des joints de mortier, il semblerait qu'il y ait un effet des aspérités de premier ordre. Là encore, l'augmentation des valeurs de  $K_{n_b}$  semble aller de pair avec le fait que les interfaces soient de plus en plus lisse.  $K_{n_b}$  correspond à la réponse élastique du joint en terme de déformation sous une contrainte normale  $\sigma_n$ . Cette réponse n'est



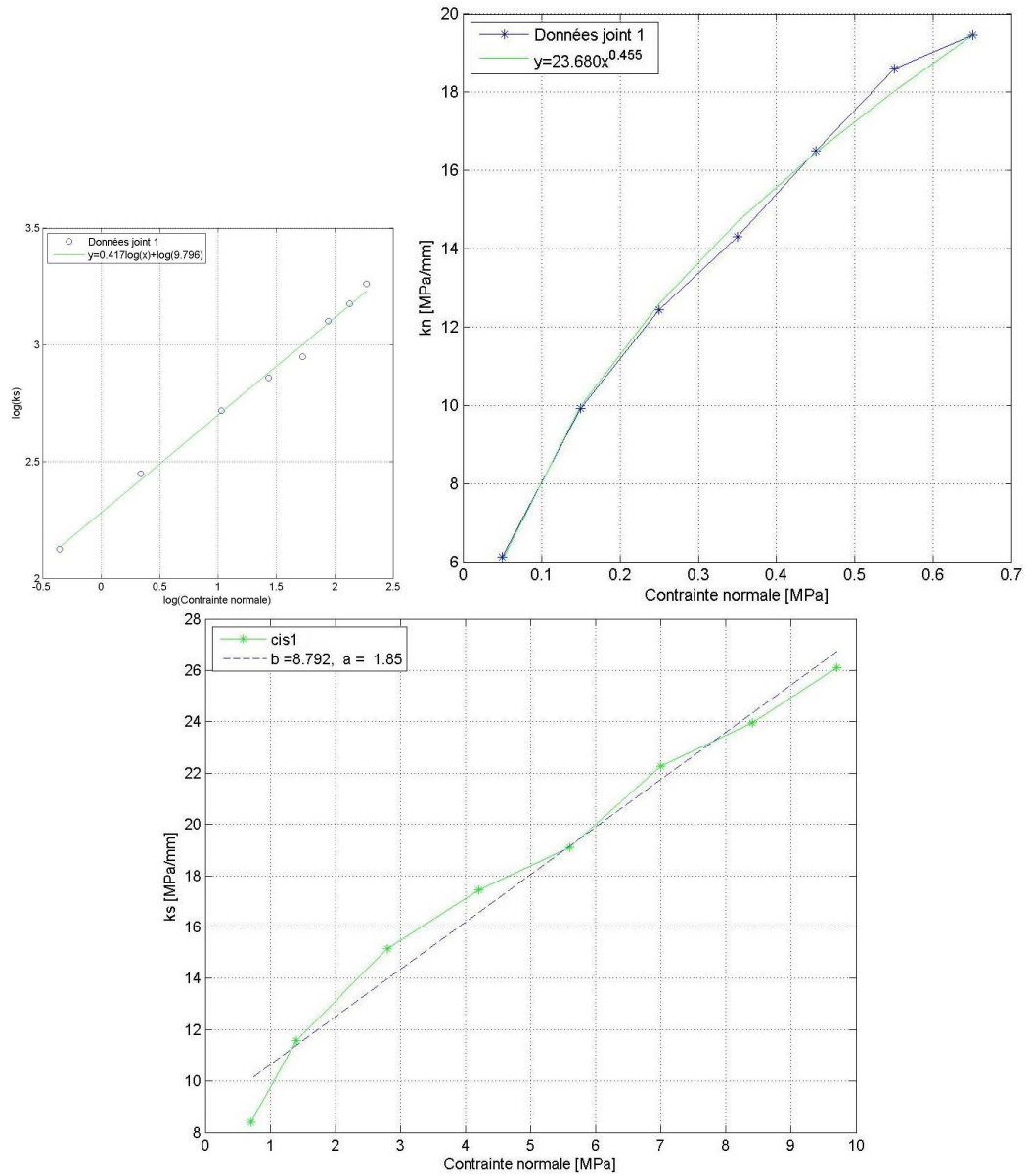


FIGURE 3.31 – Détermination de  $K_s$  pour le joint de mortier n°1 selon deux ajustements : puissance en haut et linéaire en bas, voir illustration des profils type des joints, figure 3.18

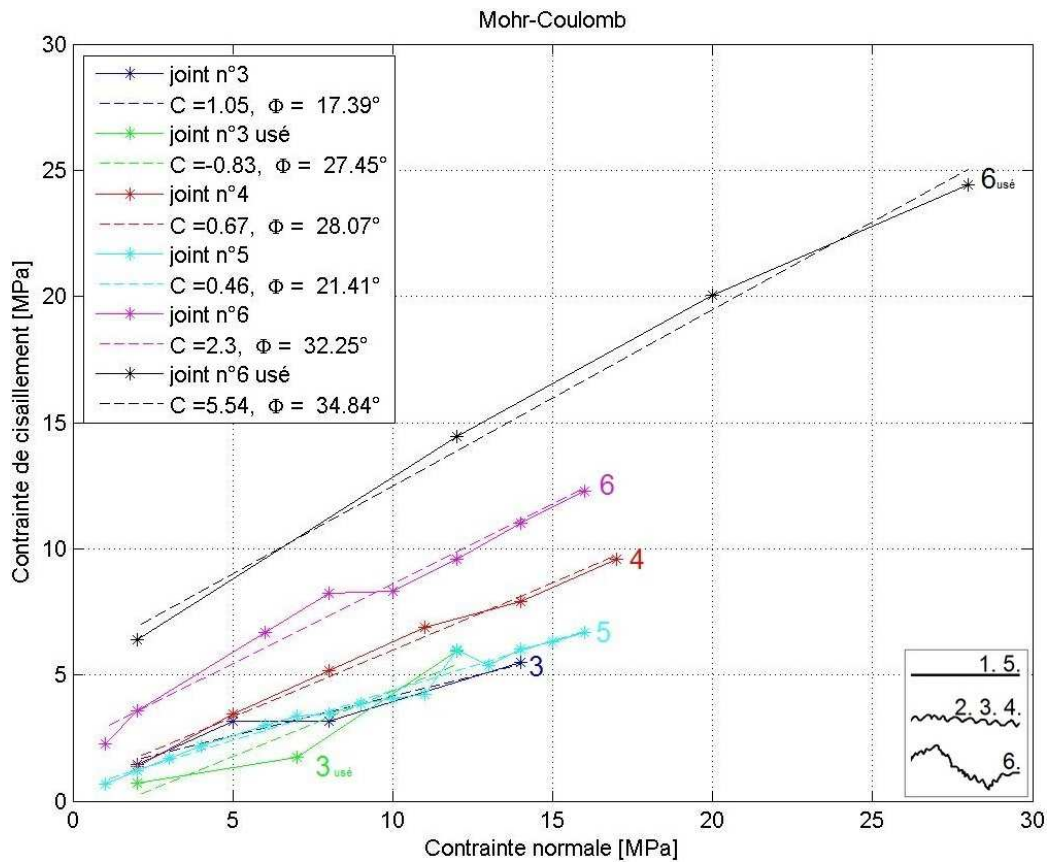


FIGURE 3.32 – Évolution de  $K_s$  avec la contrainte normale, joints de marbre

	$K_{s_a}$	$K_{s_b}$ (Mpa/mm)	$K_{s_1}$	$K_{s_2}$	$Kn_a$	$Kn_b$ (Mpa/mm)	C (Mpa)	$\phi$ (°)
mo1	1,85	8,79	9,80	0,42	21,92	6,23		
mo2	1,12	7,33	6,88	0,44	27,93	7,62		
mo3	2,24	5,06	7,27	0,50	41,67	5,85		
mo4	1,42	12,47	13,32	0,25	48,49	9,05	-0,08	25,00
mo5	2,32	5,75	7,20	0,52	9,50	1,37	0,05	39,99
mo6	0,95	4,47	5,47	0,30	8,24	3,66		
ma1 et 5	4,76	22,75	21,61	0,52	1,05	18,71	0,46	21,41
ma2	1,39	10,96	11,39	0,34	1,35	10,16		
ma3	1,26	10,02	9,33	0,38	1,02	20,85	1,05	17,39
ma4	1,17	17,83	12,91	0,30	1,32	18,58	0,67	28,07
ma6	4,69	32,73	54,21	0,46	1,21	16,62	2,30	32,25
ma3 <sub>usé</sub>	0,53	15,09	8,57	0,21	1,08	30,73	-0,83	27,45
ma6 <sub>usé</sub>	4,94	56,28	34,51	0,52	1,04	30,56	5,54	34,84

mo : joint de mortier, ma : joint de marbre

a et b sont les coefficients des ajustements linéaires  $y=ax+b$ , 1 et 2 sont les coefficients des ajustements puissances

Tableau 3.3 – Résultats des essais sur les joints de marbre et mortier

pas constante, elle augmente en même temps que la contrainte normale.  $Kn_b$  représente la valeur théorique de  $Kn$  pour  $\sigma_n = 0$ .

**Conclusion** Pour les deux séries d'essais, les raideurs normale et tangentielle des joints ne sont pas des constantes.

En compression, le comportement des joints de marbre est plus raide que celui des joints de mortier, de plus, plus un joint est rugueux, plus sa raideur normale est faible.

En cisaillement, les joints lisses sont plus raides que les joints rugueux plans. Les courbes à la rupture tracées dans le plan de Coulomb, montrent que l'angle de frottement augmente avec la rugosité des joints et que leur cohésion est, la plupart du temps, nulle ou négligeable. Ce résultat peut être confirmé par les valeurs de cohésion nulles trouvées pour les deux joints de mortier pour lesquels ce calcul a été réalisé.

### 3.5.2 Caractérisation morphologique

Pérales [85] définit la rugosité comme les irrégularités de surface de la roche à l'échelle du grain. Nous l'avons constaté suite aux essais, la rugosité d'une surface influence son comportement mécanique en compression et en cisaillement. Elle peut se caractériser de plusieurs façons : JRC (Joint Roughness Coefficient) mis au point par Barton [86], facteurs statistiques, séries de Fourier, mais aussi par des méthodes fractales et spectrales, voir annexe G.

Comme nous l'avons déjà présenté, nous pensons que le comportement mécanique dépendrait aussi de l'état de surface des joints. C'est-à-dire la forme de la surface d'une éponte et de l'adéquation entre les deux épontes. L'adéquation fait référence au fait qu'un joint soit emboîté ou non emboîté. Cette problématique se retrouve plus souvent dans l'étude des joints appliquée à la compréhension du comportement de massifs rocheux fracturés, dans lesquels, il peut y avoir des mouvements relatifs entre les deux parties du joint, ce qui nuirait à un bon emboîtement. Les conséquences sont bien évidemment une diminution de la surface de contact entre les deux épontes. Cet aspect sera pris en compte par la suite, car des fractures usées, comme celles de Neptune, dont les blocs ont séjourné plusieurs siècles sous l'eau, se remet forcément moins bien en place que des fractures plus récentes. De plus, le type de sollicitation imposée au joint va solliciter des zones différentes des épontes. Lors d'un essai de compression simple, les zones mobilisées sont très différentes de celles qui le sont lorsque le joint résiste au cisaillement.

Ainsi, cette partie se propose de caractériser et quantifier la rugosité des joints cisailés, dans le but de mettre au jour d'éventuels liens avec le comportement mécanique par le biais de méthodes statistiques. La morphologie des

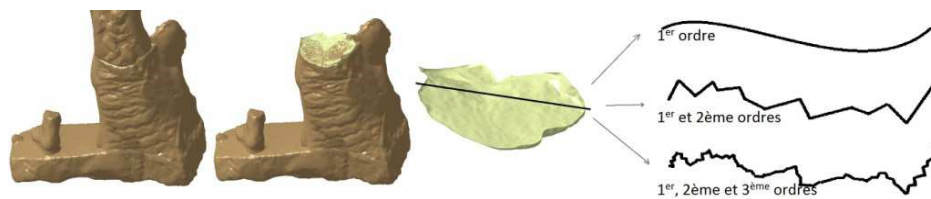


FIGURE 3.33 – Définition du concept d'ordre des aspérités, illustré sur l'interface du bas de la statue de Neptune

joint est supposée constante pendant la durée de l'essai, ainsi l'acquisition de la morphologie des joints, qui a été réalisée à la fin des essais mécaniques est supposée être identique à celle du joint avant son cisaillement. En effet, après analyse d'image, Gentier [76] a montré que l'état de surface était peu changeant pendant la phase pré-pic, les aspérités commencent à s'user pendant la phase résiduelle.

### Acquisition et calcul des paramètres de morphologie

La caractérisation géométrique ne peut se faire qu'après avoir fait l'acquisition de ses irrégularités. Parmi les appareils de mesure, les plus utilisés sont les appareils de mesure avec contact, comme par exemple le palpeur pour caractériser les surfaces métalliques usinées. Sa principale limite provient du rayon de courbure de sa pointe, pour cela, il est courant d'en utiliser deux, dont le rayon de courbure est différent.

Il existe aussi des appareils de mesure sans contact, tels que la télémétrie, l'interférométrie, la conoscopie, l'analyse du front d'onde, la thermographie, la photogrammétrie, la vidéogrammétrie, la détection par utilisation de l'astigmatisme (comme le scanner laser que nous avons utilisé).

Parmi la multitude de méthodes permettant de caractériser la morphologie, et le nombre important de paramètres le permettant, nous avons choisi d'utiliser le même outil qui a permis de numériser les œuvres pour la simulation numérique ainsi que des paramètres communément utilisés en géosciences, en s'attachant à ce que cette caractérisation ne soit pas faite le long d'un profil.

Pour caractériser la rugosité, les surfaces ont été scannées au scanner laser courte portée et les paramètres de rugosité extraits. Une illustration du résultat des scans est présentée à la figure 3.34, seule l'éponte inférieure a été prise en compte pour calculer les paramètres de morphologie. Le logiciel Gwyddion [87] spécialisé pour l'analyse de données SPM (scanning probe microscopy) a été utilisé pour calculer la plupart des paramètres. Il sert habituellement à analyser les données obtenues par les techniques de microscopie à sonde

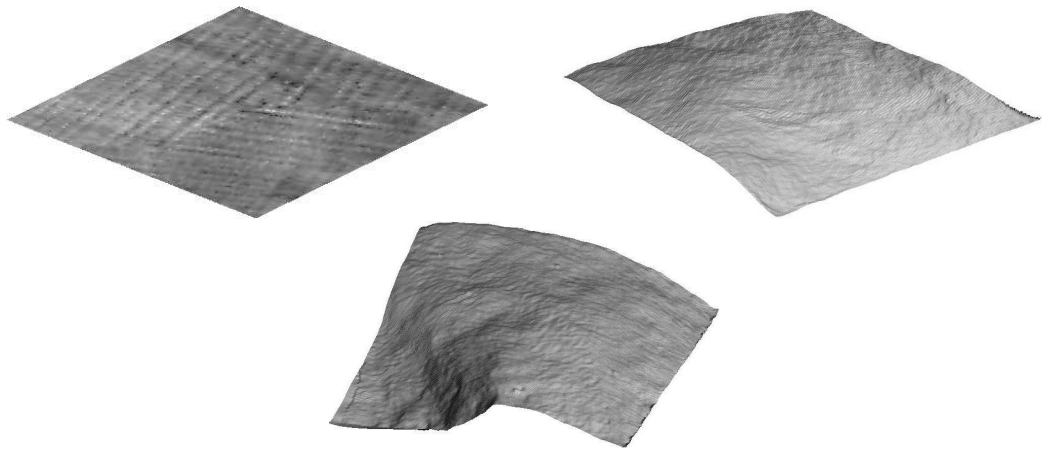


FIGURE 3.34 – Rendu des surfaces scannées des joints de marbre n°1, 3 et 6

atomique.

Avant de calculer la valeur des paramètres pour chaque joint, les données ont été préparées de la façon suivante :

- Le niveau zéro des données a été fixé au point le plus bas de chaque interface
- Les bords ont été rognés, pour que le joint tienne dans un rectangle
- L'offset (décalage horizontal) a été supprimé
- Les données ont été mise à l'échelle (dimensions et unités)

Les paramètres choisis sont présentés plus en détail dans l'annexe K, page 225. Certains d'entre eux proviennent de la norme ISO 25178-2 [88], d'autres sont décrits dans les travaux de Belem et Gademawla [89, 90] et l'un d'entre eux est même proposé pour répondre à la problématique posée par l'ordre des aspérités.

Les paramètres calculés sont les suivants :

- moy, hauteur moyenne
- Rmax, hauteur maximum
- Rd, hauteur médiane
- Ra, hauteur moyenne arithmétique
- Rsk, asymétrie de la distribution des hauteurs
- Rku, Kurtosis : facteur d'aplatissement de la distribution des hauteurs
- R1, rapport de la surface projetée sur le plan horizontal sur la surface dépliée
- $\theta$ , angle moyen entre la direction verticale et la normale de la surface
- $\cos \phi$ , le cosinus de l'angle entre l'axe horizontal perpendiculaire à la direction de cisaillement et la projection de la normale sur le plan horizontal

- $D_p$ , dimension fractale obtenue par la méthode partitionnement
- $D_{cc}$ , dimension fractale obtenue par la méthode du comptage de cube
- $D_{tr}$ , la dimension fractale calculée par la méthode de triangulation
- $D_{sp}$ , dimension fractale obtenue par la méthode du spectre de puissance
- $Pal$ , le palier : ordonnée du variogramme, valeur maximum à partir de laquelle le variogramme se stabilise
- $Por$ , la portée : valeur de l'abscisse du variogramme correspondant à la portée
- $L$ , la longueur d'autocorrélation calculée en approchant la fonction d'auto-corrélation dans la direction de cisaillement
- $C$ , la coupure

Le récapitulatif des paramètres calculés pour cette étude sur la morphologie des joints est présenté dans le tableau 3.4.

### **Validation des paramètres de morphologie et comparaison entre les valeurs qu'ils prennent suivant la précision du maillage**

Les paramètres précédemment présentés étant calculés, les questions de la validité et de la stabilité de leurs valeurs par rapport à la densité de points levés par l'appareil d'acquisition se pose.

Une quantité importante de paramètres de morphologie a été calculée, or, l'objectif n'est pas de réaliser une liste exhaustive de paramètres caractérisant l'état de surface des joints cisailés. Afin de discriminer lesquels manquent de sens physique, lesquels sont les plus pertinents et lesquels sont les moins redondant en terme d'information apportée, leurs valeurs et le sens qu'elles ont seront analysés. Par exemple si une hauteur négative est calculée, le paramètre hauteur pourra être écarté.

Pour répondre à la question de la stabilité, une étude sur des joints dont la morphologie est différente est proposée. Tous les paramètres ont été recalculés pour différentes précisions, nous avons choisi d'exprimer la densité en nombre de points par  $\text{mm}^2$  de surface projetée sur le plan horizontal. Dans cette étude, celle-ci varie de  $0,06 \text{ pts/mm}^2$  à  $6,87 \text{ pts/mm}^2$ , ce qui correspond à une plage très étendue, allant pour le scanner laser d'un scan très grossier à un nuage de points composé de plusieurs scans relativement précis et recalés (donc superposés). Les surfaces sur lesquelles ces tests ont été réalisés sont de natures différentes, l'une est lisse, la deuxième est plane, mais rugueuse, tandis que la troisième combine rugosité du premier et du second ordre sont illustrées en figure 3.34, page 124. Ces surfaces sont nommées  $j1$ ,  $j3$  et  $j6$  dans les figures qui suivent.

L'objectif est de déterminer un seuil minimal au delà duquel la valeur des

	moy (m)	Rmax (m)	Rd (m)	Ra (m)	Rsk	Rku	Rf (%)	$\theta$ (°)	cos $\varphi$	Dp	Dcc	Dtr	Dsp	Pallier (m <sup>2</sup> )	Portée (m)	L (m)	C %	Rsk2	Rku2
mo1	1,94E-03	4,29E-03	1,93E-03	4,31E-04	2,27E-01	0,47	96,58%	0,40	0,94	2,36	2,21	2,28	2,01	1,09E-06	9,47E-02	5,22E-03	0,90%	-4,44E-01	2,79
mo2	6,98E-03	1,31E-02	7,46E-03	2,24E-03	-3,13E-01	-0,52	95,52%	6,80	0,01	2,12	2,08	2,07	1,76	6,36E-06	6,12E-02	7,57E-03	1,20%	2,09E-01	2,07
mo3	8,24E-03	1,28E-02	8,84E-03	2,05E-03	-7,33E-01	-0,16	95,63%	1,80	-1,00	2,11	2,10	2,12	1,83	2,13E-05	5,18E-02	1,50E-02	2,50%	-9,08E-01	7,37
mo4	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	3,41E-04	1,61	100,00%	0,00	0,98	2,92	2,62	2,65	3,51	2,86E-32	3,47E-02	1,22E-04	0,00%	-4,30E+00	63,59
mo5	1,14E-02	1,92E-02	1,20E-02	3,37E-03	-5,22E-01	-0,27	93,22%	4,40	-0,48	2,04	2,07	2,09	1,83	2,70E-05	4,83E-02	1,77E-02	2,80%	-4,02E-01	6,24
mo6	8,86E-03	1,73E-02	8,77E-03	3,74E-03	-3,83E-03	-1,08	94,56%	1,10	0,99	2,05	2,08	2,08	1,85	8,40E-05	5,03E-02	1,87E-02	2,10%	1,20E-01	4,20
ma1 et 5	8,37E-05	1,68E-04	8,33E-05	9,50E-06	1,02E-01	1,48	99,95%	0,00	0,99	2,67	2,28	2,39	2,52	3,75E-10	6,23E-02	9,94E-04	0,00%	-4,09E-01	2,22
ma2	8,63E-03	1,53E-02	8,91E-03	3,67E-03	-1,48E-01	-1,35	95,25%	9,50	-0,11	2,05	2,04	2,03	2,35	6,04E-06	5,09E-02	1,24E-02	1,40%	1,20E-01	2,26
ma3	4,32E-03	7,64E-03	4,69E-03	1,74E-03	-3,57E-01	-1,09	94,03%	4,20	-0,98	2,05	2,10	2,09	2,25	3,12E-05	7,39E-02	1,75E-02	0,60%	-3,77E-01	1,90
ma4	4,63E-03	8,92E-03	5,46E-03	1,83E-03	-5,12E-01	-0,99	97,18%	4,40	-1,00	2,10	2,09	2,08	2,30	3,52E-05	7,43E-02	1,66E-02	1,00%	-2,33E-01	2,00
ma6	8,29E-03	2,09E-02	7,07E-03	4,32E-03	6,17E-01	-0,58	89,73%	8,20	-0,25	1,99	2,05	2,05	2,37	5,78E-05	3,91E-02	1,32E-02	3,00%	9,45E-01	12,19
ma3usé	2,72E-03	5,09E-03	2,75E-03	1,02E-03	-4,95E-02	-0,95	97,74%	2,90	-0,97	2,03	2,08	2,12	2,24	7,76E-06	5,01E-02	1,16E-02	0,50%	-3,22E-01	1,52
ma6usé	1,15E-02	1,57E-02	1,23E-02	2,46E-03	-1,15E+00	0,80	91,74%	6,30	0,75	2,17	2,05	2,04	2,23	5,42E-05	7,38E-02	1,22E-02	1,70%	-1,22E+00	11,05

Tableau 3.4 – Résultats de caractérisations morphologiques sur les joints de marbre et mortier

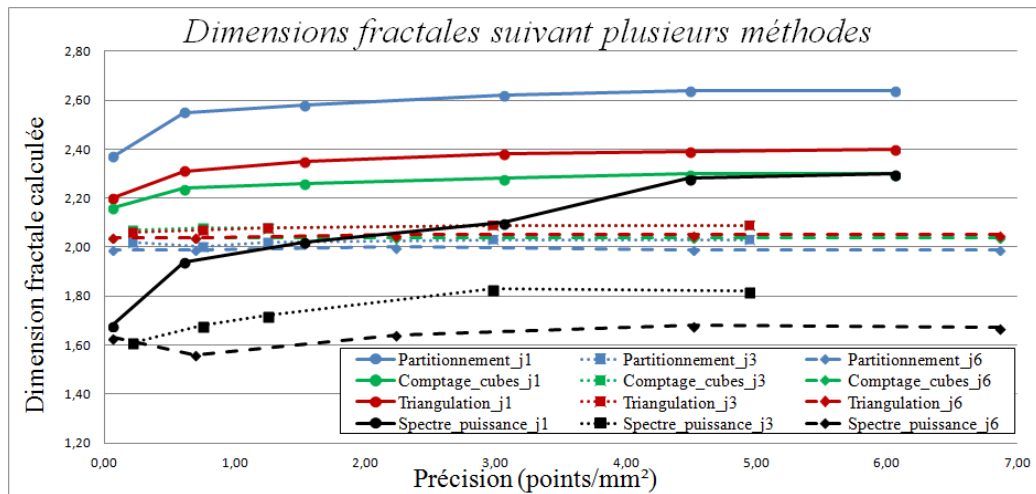


FIGURE 3.35 – Valeurs prises par  $D$  suivant plusieurs méthodes et en fonction de la finesse du maillage

paramètres de morphologie calculée n'est pas stable. Quelle est la densité en deçà de laquelle, les nuages de points sont considérés comme n'étant pas représentatif de la surface 3D à caractériser. Il ressort également de cette étude, une précision minimum à atteindre pour caractériser la morphologie au delà de laquelle les points supplémentaires sont superflus.

**Dimension fractale** La dimension fractale d'un objet 3D prend une valeur entre 2 et 3, plus la surface est lisse, plus la valeur prise par  $D$  est élevée. Les paramètres suivants représentent la dimension fractale des surfaces des joints, calculée de façons différentes.

- $D_p$  : par la méthode de partitionnement
- $D_{cc}$  : par la méthode du comptage de cubes
- $D_{tr}$  : par la méthode de triangulation
- $D_{sp}$  : par la méthode du spectre de puissance

Sur la figure 3.35, la dimension fractale  $D_{sp}$  indique des valeurs inférieures à 2, ce paramètre peut donc être éliminé.

La variabilité de la valeur de  $D$  ne permet pas de distinguer clairement son évolution en fonction de la précision. L'illustration figure 3.36 représente les mêmes paramètres, centrés et réduits suivant leurs variations pour chaque joint, elle montre la tendance à la diminution de la valeur de  $D$  en fonction de la précision. Le paramètre  $D_p$  n'a pas un comportement régulier, de plus il prend la valeur 1,99 pour joint 6, ce paramètre peut aussi être éliminé.

Figure 3.37, les valeurs réelles de  $D$  sont à nouveau tracées en ordonnée, les



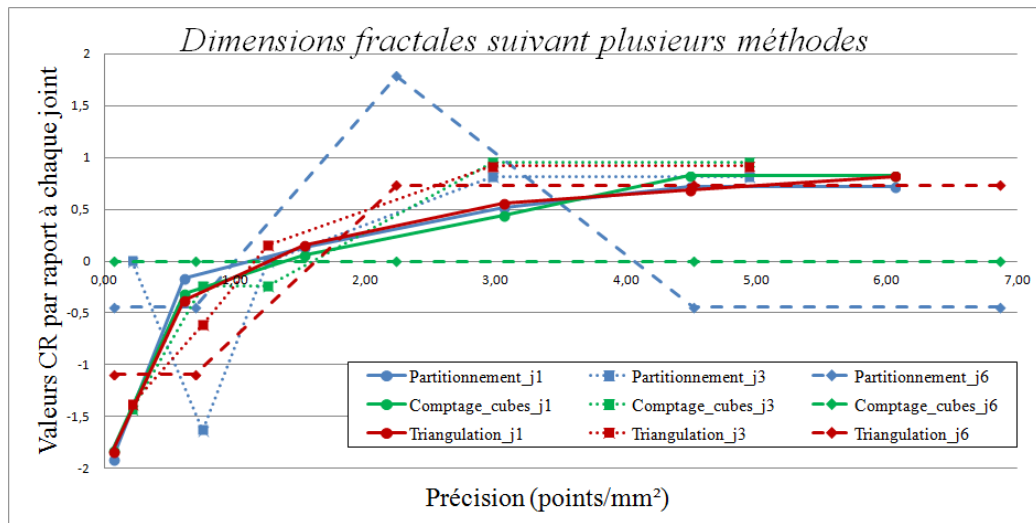


FIGURE 3.36 – Valeurs centrées-réduites prises par  $D$  suivant plusieurs méthodes et en fonction de la finesse du maillage

variations de  $D$  pour les joints rugueux sont moins importantes que pour le joint lisse. Ainsi plus un joint est lisse et plus un maillage précis sera nécessaire pour estimer précisément ce paramètre. Une précision de trois points par millimètre carré peut être fixée comme limite inférieure.

**Paramètres d'amplitude :** L'amplitude des hauteurs du maillage mesurées sont la hauteur moyenne, la hauteur médiane, la hauteur maximum et la hauteur moyenne arithmétique. La figure 3.38 représente ces hauteurs, centrées et réduites suivant leurs variations pour chaque joint et en fonction de la précision du maillage. Là encore, il semble que la valeur des hauteurs atteigne un palier aux alentours de deux points par millimètre carré. Cependant, la hauteur maximum est stable pour une précision moindre ; un peu moins d'un point par millimètre carré.

#### Autres paramètres :

**Angles** L'angle  $\theta$  représente l'inclinaison globale du joint par rapport à la verticale, tandis que l'angle  $\varphi$  représente l'inclinaison par rapport à l'axe de la direction de cisaillement. Ainsi, c'est le  $\cos \varphi$  qui est le paramètre pris en compte, car que le joint soit orienté d'un côté ou de l'autre, cela n'influence pas son comportement mécanique.

La figure 3.39, en bas, ne montre pas de tendance particulière pour  $\cos \varphi$  en fonction de la finesse du maillage, par contre l'angle  $\theta$  se stabilise avant

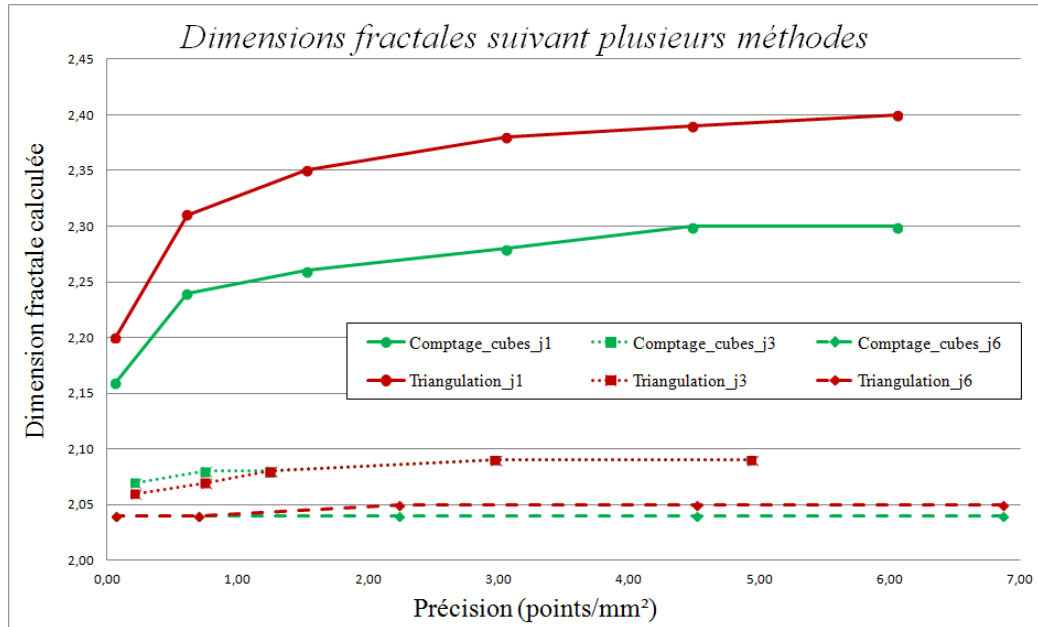


FIGURE 3.37 – Valeurs prises par D en fonction de la finesse du maillage pour les méthodes du comptage de cubes et de triangulation

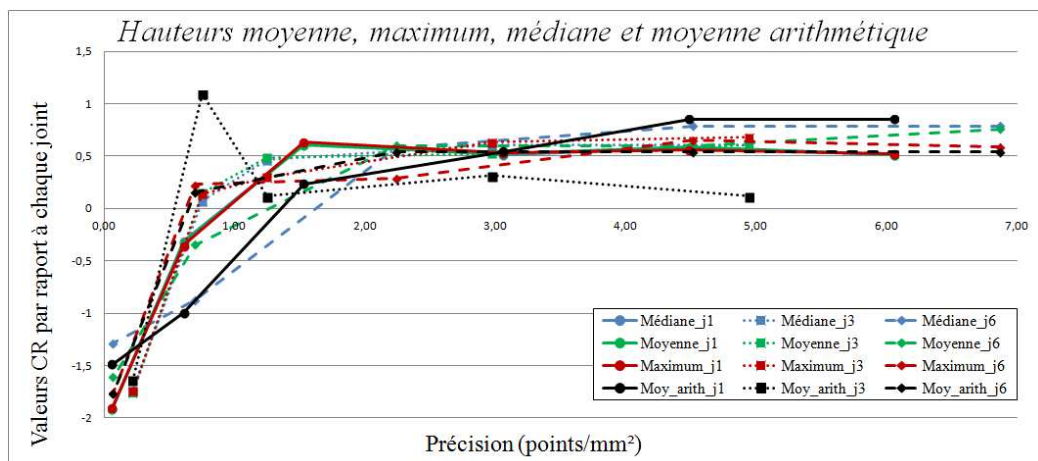


FIGURE 3.38 – Valeurs prises par les différentes hauteurs calculées en fonction de la finesse du maillage

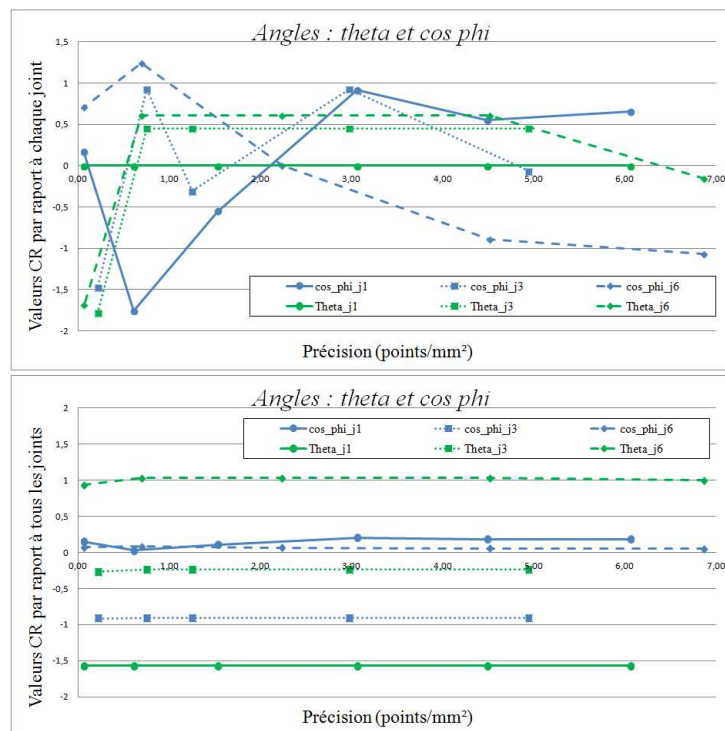


FIGURE 3.39 – Valeurs centrées et réduites par rapport à chaque joint (en haut) et par rapport à l'ensemble des joints étudiés (en bas) de  $\theta$  et du cos de l'angle  $\varphi$  calculées en fonction de la finesse du maillage

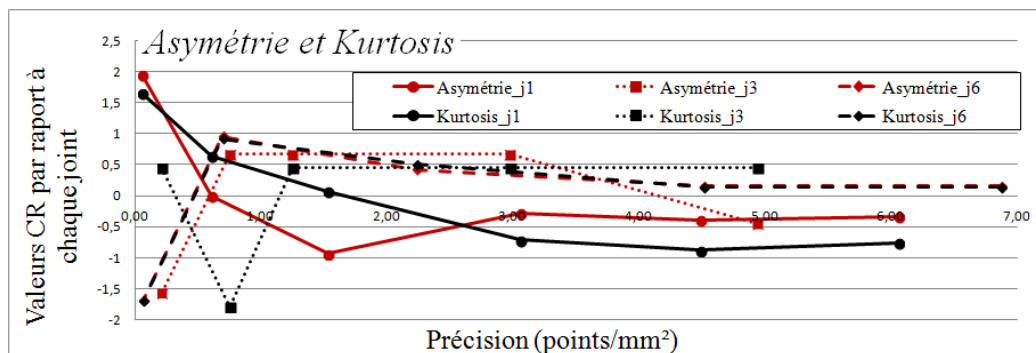


FIGURE 3.40 – Valeurs centrées et réduites par rapport à chaque joint de l'asymétrie et du Kurtosis calculées en fonction de la finesse du maillage

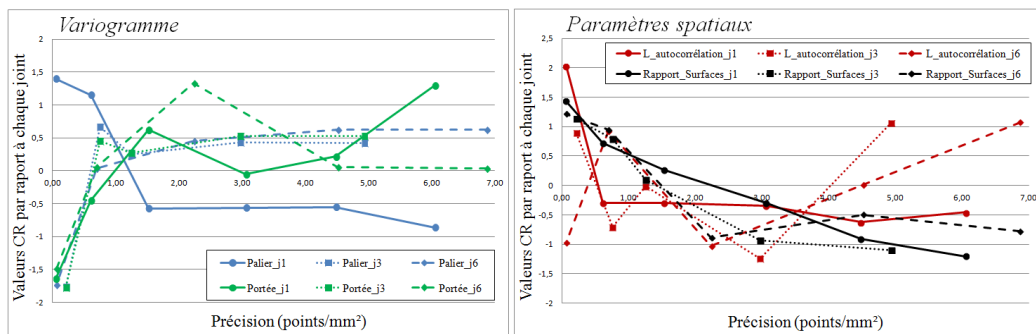


FIGURE 3.41 – Valeurs centrées et réduites par rapport à chaque joint des paramètres issus du variogramme et de paramètres spatiaux calculées en fonction de la finesse du maillage

un point par millimètre carré. L'observation de la partie droite de ce graphique montre que lorsque les valeurs sont centrées réduites avec celles relevées sur tous les joints, les valeurs de ces paramètres liés aux angles sont globalement constantes, pour un joint donné et quelque soit la précision choisie.

**Paramètres dérivés des moments statistiques** L'asymétrie et le Kurtosis dérivent respectivement des moments d'ordre 3 et 4. La figure 3.40 montre une tendance commune de ces deux paramètres : pour de faibles précisions et pour les joints lisses, leurs valeurs sont élevées et se stabilisent avant deux points par millimètre carré, tandis que pour les joints rugueux, ces valeurs augmentent avec celle de la précision et se stabilisent avant d'atteindre un point par millimètre carré.

**Paramètres spatiaux** Les paramètres présentés dans ce paragraphe sont la portée et le palier, la longueur d'auto-corrélation et le ratio de surface. Le palier est la valeur maximum que peut prendre le variogramme, tandis que la portée est la valeur correspondant à cette valeur maximum. La longueur d'auto-corrélation est issue de la modélisation de la courbe d'auto-corrélation par une gaussienne et le ratio de surface correspond au rapport de la surface projetée sur le plan de cisaillement sur la surface réelle calculée par triangulation (surface dépliée).

Un comportement similaire à celui de l'angle  $\theta$ , lorsque les valeurs sont centrées réduites avec celles des autres joints, est observé : pour un joint donné, les valeurs prises par ces paramètres sont globalement constantes quelle que soit la précision choisie. À l'observation de la figure 3.41, le palier a également un comportement déjà observé, celui des moments : pour ces paramètres, la précision fait décroître leurs valeurs avant d'arriver à se stabiliser et inversement dans le cas des joints rugueux.

Même si les valeurs prises par ces paramètres sont globalement stables quelque soit la précision, une limite peut être fixée à deux points par millimètre carré.

**Commentaires** Sur l'ensemble des paramètres, une précision de deux points par millimètre carré est requise, sauf pour l'estimation de la dimension fractale. Au delà, aucune information n'est apportée. Ainsi pour cette étude, il est possible de comparer des maillages très, voir trop précis avec des maillages atteignant la limite fixée.

De plus, une variation inverse de certains paramètres, quand ils décrivent des joints lisses à été observée. Ces paramètres sont le Kurtosis, l'asymétrie et le palier, sachant qu'il n'est pas évident de leur donner un sens physique dans le cas d'un joint lisse.

Enfin, des quatre méthodes de calcul de la dimension fractale, deux ont été écartées : celle du partitionnement et celle du spectre de puissance.

## Conclusion

Deux types de caractérisation ont été présentés, celles qui concernent le comportement mécanique et celles qui concernent l'état de surface.

Les résultats des caractérisations mécaniques servent de données d'entrée aux simulations numériques présentées dans la partie précédente. Sans apporter d'éléments nouveaux quant à la compréhension des mécanismes au cours du cisaillement, les caractérisations mécaniques ont confirmé les différents comportements déjà observés.

Les caractérisations morphologiques ont été réalisées pour être couplées aux caractérisations mécaniques. Nous avons déterminé quelle est la précision requise pour ces caractérisations avec les scanners laser et avons écarté certains paramètres non réalistes parmi la multitude calculée. De plus, nous proposons un nouveau paramètre, qui a pour objet de caractériser la séparation entre l'apport de la rugosité fine (inférieure à deux millimètres), de la plus grossière.

Ainsi, l'ensemble des caractérisations mécaniques et morphologiques a permis d'établir une base de données, utilisée au chapitre suivant, visant à nourrir un modèle de comportement des joints pré-pic.

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre s'est attaché à présenter la partie expérimentale de cette thèse. Ces expérimentations ont soit pour but la caractérisation des paramètres mécaniques de roches d'œuvres d'art, soit celui de la provenance du matériau des œuvres. Pour suivre les règles s'appliquant au patrimoine culturel, comme celles préconisées dans la charte de Venise (Venice charter [3]), des exemples d'expérimentations caractérisant le matériau des sculptures ont été utilisés. Elles ont été choisies, car elles sont non-destructives ou le moins destructives possible. Dans ce chapitre, elles sont néanmoins en nombres insuffisants pour permettre de caractériser le matériau de chaque œuvre avec certitude, notamment pour ce qui est de l'hétérogénéité de la roche. Elles ont été présentées à titre d'exemple pour laisser entrevoir leur pouvoir prédictif une fois leurs résultats croisés. Nous avons présenté des caractérisations physico-chimiques et minéralogique qui nous ont permis d'identifier la provenance de la roche avec une certaine précision et des caractérisations non destructives de la vitesse d'ultrasons qui ont permis de déceler l'anisotropie du matériau.

Les caractérisations destructives présentées sont à placer une fois la provenance identifiée, sur des échantillons analogues. Elles ont permis d'identifier les paramètres élastiques de la roche et les paramètres de comportement aux interfaces. Les essais sur les joints en contact frottant ont également permis de former une base de travail qui sera exploitée dans le chapitre suivant pour pouvoir construire des liens entre comportement mécanique et état de surface.



# Chapitre 4

## Modélisation du comportement aux interfaces

### 4.1 Introduction

Nous avons décrit dans le chapitre précédent différentes techniques de caractérisation non destructives, applicables directement sur les roches des statues et les techniques destructives applicables uniquement sur des roches analogues une fois cette analogie établie. Si le premier groupe de méthodes est souhaitable, et il sera d'avantage privilégié dans la restauration, il n'en reste pas moins qu'à l'heure actuelle certains paramètres clefs ne sont pas accessibles via ce type de méthodes. En particulier, il n'existe pas de techniques non-destructives de caractérisation des paramètres mécaniques concernant les joints. Il est néanmoins possible de caractériser, en utilisant les techniques de digitalisation décrites dans les chapitres précédents, avec beaucoup de finesse la géométrie de ces interfaces et d'en déduire les paramètres morphologiques de surfaces, dont un certain nombre ont déjà été décrits dans le chapitre précédent. Devant la multitude de ces paramètres de morphologie décrivant un état de surface, nous proposons l'utilisation de combinaisons de ces paramètres. Ces combinaisons permettant de déduire, via des corrélations établies sur des matériaux connus, les paramètres mécaniques des joints évitant alors de passer par des essais de cisaillement des joints qui sont possibles uniquement sur des roches analogues. Le résultat est donc une méthode de caractérisation non destructive des joints. L'objectif de ce chapitre est alors d'établir un lien entre les paramètres morphologiques décrivant les surfaces, les propriétés mécaniques de la roche et les propriétés mécaniques des interfaces.

Afin de connaître l'implication des propriétés du matériau roche sur les



propriétés des joints, et donc pour répondre à la question : deux morphologies identiques conduisent-elles aux mêmes paramètres mécaniques de joint, indépendamment du matériau qui constitue les blocs ? Une analyse statistique a été réalisée à la fois sur le marbre analogue à celui de la statue de Neptune et qui nous intéresse directement et sur un mortier.

Les essais présentés au chapitre 3 font apparaître plusieurs paramètres caractérisant la rugosité des interfaces de contact entre deux épontes d'une roche fracturée :

- les paramètres morphologiques :
  - $moy$ , hauteur moyenne
  - $R_{max}$ , hauteur maximum
  - $R_d$ , hauteur médiane
  - $R_a$ , hauteur moyenne arithmétique
  - $R_{sk}$ , asymétrie de la distribution des hauteurs
  - $R_{ku}$ , Kurtosis : facteur d'aplatissement de la distribution des hauteurs
  - $R_l$ , rapport de la surface projetée sur le plan horizontal sur la surface dépliée
  - $\theta$ , angle moyen entre la direction verticale et la normale de la surface
  - $\cos \phi$ , le cosinus de l'angle moyen entre l'axe horizontal perpendiculaire à la direction de cisaillement et la projection de la normale sur le plan horizontal
  - $D_p$ , dimension fractale obtenue par la méthode partitionnement
  - $D_{cc}$ , dimension fractale obtenue par la méthode du comptage de cube
  - $D_{tr}$ , la dimension fractale calculée par la méthode de triangulation
  - $D_{sp}$ , dimension fractale obtenue par la méthode du spectre de puissance
  - $P_{al}$ , le palier : ordonnée du variogramme, valeur maximum à partir de laquelle le variogramme se stabilise
  - $P_{or}$ , la portée : valeur de l'abscisse du variogramme correspondant à la portée
  - $L$ , la longueur d'autocorrélation calculée en approchant la fonction d'auto-corrélation dans la direction de cisaillement
  - $C$ , la coupure
- Quant aux paramètres caractérisant la réponse mécaniques des joints, nous chercherons à approcher :
  - $K_s(\sigma_n)$ , la raideur tangentielle
  - $K_n(\sigma_n)$ , la raideur normale
  - $Coh$ , la cohésion
  - $\varphi$ , l'angle de frottement

Il est à noter que pour chaque joint,  $\text{Coh}$  et  $\varphi$  sont des constantes, alors que  $\text{Ks}$  et  $\text{Kn}$  varient avec la contrainte normale.

Afin de dégager un modèle prédictif de comportement mécanique à partir d'une morphologie d'interface, nous proposons d'appliquer des méthodes d'analyse statistique sur les paramètres associés aux essais réalisés (voir chapitre 3). Les résultats sont regroupés sous la forme de deux matrices, dont les colonnes correspondent aux paramètres (variables) et les lignes aux joints étudiés (observations) : la matrice  $X$  relative aux paramètres morphologiques, doit permettre d'expliquer la matrice  $Y$  associée aux paramètres mécaniques. On appelle alors les colonnes de  $X$  les variables prédictives ou explicatives, tandis que les colonnes de  $Y$  sont appelées variables à expliquer. De plus, afin d'éviter les effets d'échelles dus aux différents ordres de grandeur des variables (prédictives et/ou explicatives), chaque paramètre est normalisé (centré et réduit)<sup>1</sup>.

Partant de là, les variables sont traitées à l'aide d'une analyse descriptive : les paramètres sont regroupés selon un caractère de similarité afin de réduire leur nombre. Par exemple, un grand nombre de variables fortement corrélées entre elles peuvent apporter plus de complexité que d'information pertinente, comme cela est constaté ci-après avec les paramètres représentant la dimension fractale des interfaces. Ainsi, les variables sont discriminées et certaines sont écartées lors de l'analyse descriptive. Les résultats de cette analyse servent ensuite de base pour construire des modèles prédictifs obtenus grâce à des techniques de régression statistique.

En substance, les méthodes descriptives sont utilisées pour mieux connaître la matrice des variables morphologiques  $X$ . Les boîtes de Tukey renseignent la nature de la série statistique de chaque variable individuellement, la classification hiérarchique ascendante permet de regrouper ces variables, toujours en se basant sur les valeurs que prennent les séries statistiques, les matrices de corrélations indiquent les corrélations entre deux variables, uniquement deux à deux et enfin, l'analyse en composantes principales (ACP) permet de mettre à jour les corrélations entre toutes les variables en représentant l'évolution simultanée de l'ensemble de ces variables par l'utilisation des vecteurs propres.

La matrice des variables morphologiques  $X$  est composée des données recueillies sur le marbre et le mortier. Puisqu'il ne s'agit que de paramètres morphologiques, il n'y a pas de raison de travailler séparément les données issues des deux séries d'essais. En revanche, les paramètres mécaniques varient d'une série à l'autre puisque les deux matériaux possèdent des comporte-

---

1. lorsque cela ne perturbe pas l'interprétation des résultats de la méthode d'analyse statistique

ments mécaniques différents. Ainsi pour la partie prédictive nous travaillons sur les deux séries prises séparément.

Les régressions permettent de construire un modèle statistique liant les variables à expliquer aux variables explicatives par une relation fonctionnelle. La validation croisée est une méthode de ré-échantillonnage utilisée pour l'évaluation des modèles prédictif. Nous utilisons la méthode de validation croisée sur la régression pas à pas. Nous nous servons de la régression pas à pas en phase exploratoire, son objet est la construction de modèles avec les meilleurs prédicteurs, nous en détournons l'objectif pour nous permettre d'optimiser le choix des paramètres. Ce choix est répété de plusieurs façons par validation croisée, puis une régression multiple linéaire sur chaque variable réponse est mise en œuvre pour construire le modèle de régression finale.

En dernière partie, la régression PLS (Partial Least Squared) a été utilisée pour modéliser la réponse de l'ensemble des variables à expliquer. Son fonctionnement revient à la mise en œuvre d'une ACP sur la matrice des prédicteurs, Tenenhaus [91], tout en imposant que les composantes ainsi créées expliquent bien la matrice des variables réponses pour permettre leurs prédictions.

## 4.2 Analyse descriptive des variables

Pour commencer, nous présentons une approche descriptive de l'ensemble des données, permettant d'extraire les corrélations entre les variables : il sera alors possible de discerner les variables qui apportent la même information. À noter que l'observation des variables et l'interprétation du lien qui peut exister entre elles, permet de souligner certaines relations apparaissant comme accidentelles (surtout lorsque ces corrélations ne ressortent que sur une série d'essais).

Les variables  $K_n$  et  $K_s$  n'étant pas des constantes pour chaque joint, nous avons choisi de les exprimer en les approximant par les coefficients de régression linéaire et puissance de la façon suivante :

- $ksa$ , premier coefficient de la régression linéaire de la courbe des  $K_s$  sur celle des contraintes normales
- $ksb$ , deuxième coefficient de la régression linéaire de la courbe des  $K_s$  sur celle des contraintes normales
- $ks1$ , premier coefficient de la régression puissance de la courbe des  $K_s$  sur celle des contraintes normales
- $ks2$ , deuxième coefficient de la régression puissance de la courbe des  $K_s$  sur celle des contraintes normales

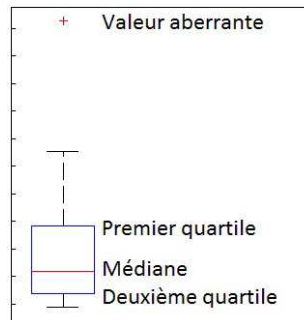


FIGURE 4.1 – Lecture des boîtes de Tukey

- $Kna$ , premier coefficient de la régression linéaire de la courbe des  $Kn$  sur celle des contraintes normales
- $Kn_b$ , deuxième coefficient de la régression linéaire de la courbe des  $Kn$  sur celle des contraintes normales

### 4.2.1 Boîtes de Tukey

#### Présentation de la méthode

Les boîtes de Tukey, ou boîtes à moustache, ou encore box plot, correspondent à une méthode de représentation de séries de données statistiques quantitatives. Dans cette représentation, la boîte représente 50% de l'ensemble des observations : la valeur médiane étant tracée, à gauche (et à droite) de celle-ci correspond 25% des observations. La longueur des segments aux extrémités de la boîte (les moustaches de la boîte) traduit la dispersion du premier et du dernier quartile des plus petites valeurs des observations. Ainsi, d'une part, la position de la médiane traduit l'asymétrie de la distribution, et d'autre part, l'étendue des moustaches rend compte de la dispersion de la série (figure 4.1).

Les boîtes de Tukey des paramètres morphologiques et mécaniques de l'ensemble des joints sont présentés sur la figure 4.2. Elles sont regroupées sur quatre graphiques différents. Chaque graphique représente les paramètres morphologiques ayant des valeurs numériques comprises sur des intervalles d'amplitude comparable et/ou dans un même voisinage.

#### Résultats et analyse

**Les boîtes de Tukey des paramètres morphologiques X.** Elles sont présentées sur la figure 4.2. Lorsqu'une observation se trouve au-delà des

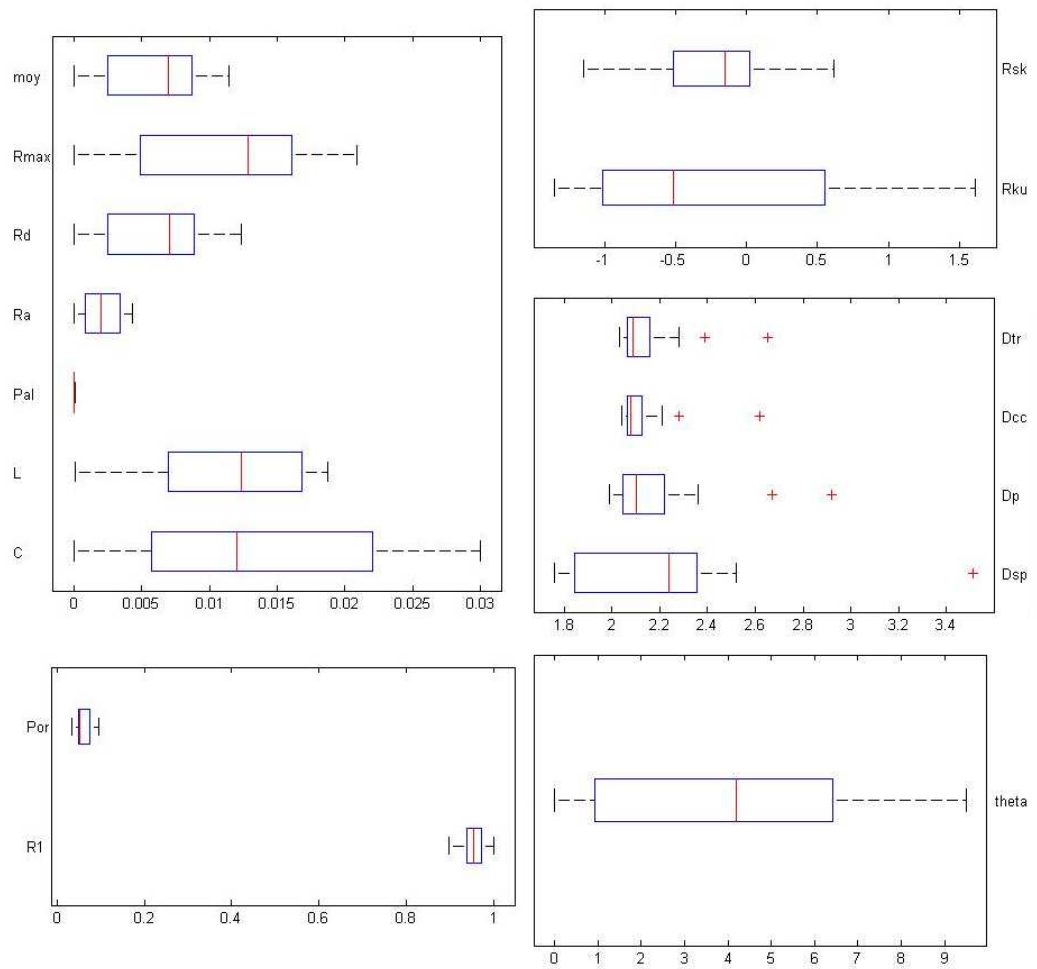


FIGURE 4.2 – Boîtes de Tukey des variables de morphologie des joints

valeurs adjacentes (valeurs aberrantes), elle peut être considérée comme extrême. Il convient alors d'en vérifier la raison. C'est le cas des variables morphologiques mesurant la dimension fractale d'une interface qui ont une ou deux valeurs extrêmes,  $D_{sp}$ ,  $D_{tr}$ ,  $D_p$  et  $D_{cc}$ . Dans le cas étudié ces valeurs sont associées à l'observation du joint lisse et sont expliquées par le fait qu'une surface lisse ne peut pas être auto-affine (statistiquement auto-similaire). Il n'y a donc rien d'aberrant dans ces valeurs pour justifier leur suppression dans les analyses qui suivront.

**Les boîtes de Tukey des paramètres mécaniques  $Y$ .** Elles sont tracées en séparant celles issues des essais sur mortier  $Y_{\text{mortier}}$  (figure 4.4) de celles issues des essais sur marbre  $Y_{\text{marbre}}$  (figure 4.3), car nous présumons que le comportement mécanique de joint de nature différente est différent, surtout pour les raideurs. Les boîtes à moustache associées à la variable cohésion et angle de frottement des joints de mortier n'ont pas été tracées, car seules deux mesures ont été effectuées. Hormis  $K_{s2}$ , les variables mécaniques ont une grande étendue de valeur, alors que les paramètres spatiaux et d'amplitude ont une tendance centrale. Il est possible d'imaginer que de petites variations de morphologie relevées produisent de grande variations de la réponse mécanique mesurée. De même, l'étendue des boîtes à moustache de  $K_{na}$ ,  $K_{s1}$  et  $K_{sb}$  n'est pas la même pour les deux séries, ce qui montre bien que le comportement mécanique des joints des deux matériaux est différent. Cependant, les boîtes de  $K_{s2}$  sont comparables pour les deux séries. De même, les valeurs prises par  $K_{s1}$  et  $K_{sb}$  pour les deux joints présentent une grande dispersion. Enfin, les boîtes à moustache de  $K_{s1}$  n'ont pas une distribution symétrique. Ceci peut s'interpréter par le fait que lorsqu'il y a une variation de la réponse mécanique, celle-ci est franche.

La variable mécanique  $Coh$  a une valeur extrême, cette valeur correspond à l'observation du joint n°6'. Ce point aberrant décalé sur la droite, se démarque aussi parce que l'ensemble de la série n'est pas symétrique (la valeur médiane est à gauche). Comme nous avons peu d'observations pour cette variable mécanique, cette série sera à traiter avec précaution par la suite.

Il est intéressant de noter que, parmi les variables représentant la dimension fractale calculée selon différentes méthodes, la boîte de la variable  $D_{sp}$  diffère légèrement des autres par la position de sa médiane et son étendue. Elle ne présente de plus qu'une valeur extrême, alors que les autres en présentent deux. Ces quatre boîtes sont cependant regroupées, car elle présentent la même échelle numérique. De même, les paramètres d'amplitudes de hauteurs ont eux aussi la même échelle numérique, et la même dispersion. L'amplitude de  $Ra$  est cependant bien inférieure à celle de la moyenne, car la

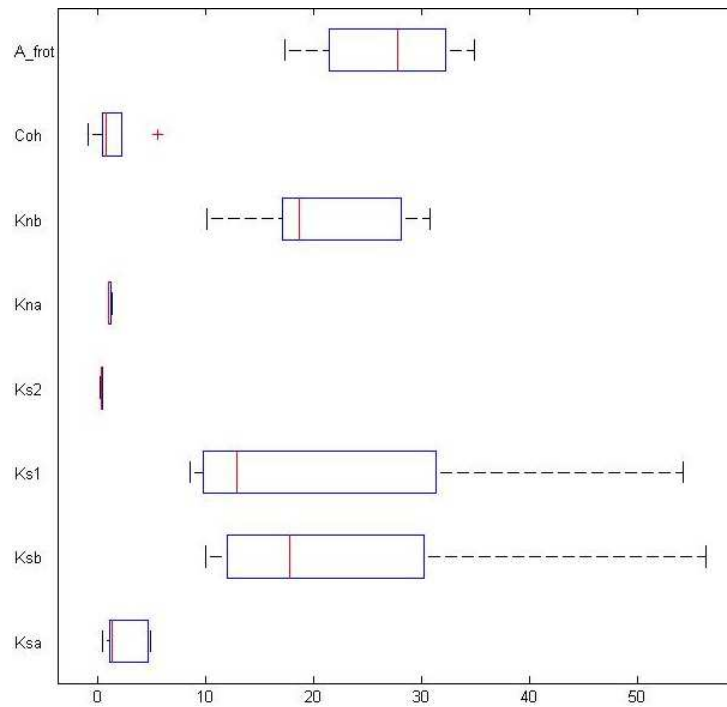


FIGURE 4.3 – Boîtes de Tukey des variables mécaniques des joints de marbre

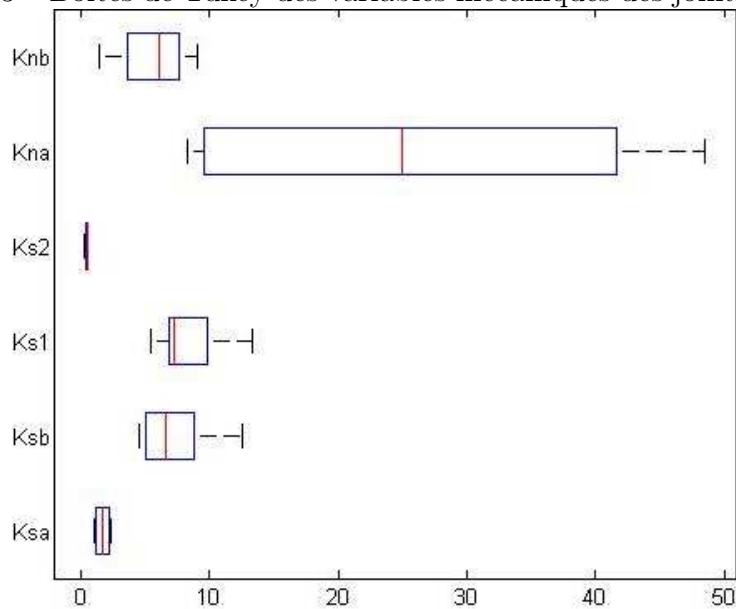


FIGURE 4.4 – Boîtes de Tukey des variables mécaniques des joints de mortier

première représente la valeur absolue des variations des hauteur, tandis que l'autre la variation des hauteur.

### Bilan

Ainsi, l'utilisation de cette méthode nous permet de constater que la plupart des paramètres mécanique n'ont pas la même étendue ni la même échelle numérique suivant qu'ils proviennent de l'une ou l'autre des séries d'essais réalisées, à l'exception de Ks2. Nous avons, en revanche noté, que les paramètres d'amplitude des hauteurs et de dimension fractale présentent, quant à eux, des boîtes dont la forme, l'étendue et la longueur des moustaches est relativement similaires.

Finalement, les Boîtes de Tukey rendent compte de la dispersion des paramètres morphologiques et mécaniques autour d'une valeur médiane. Elles ne permettent cependant pas de classer les variables selon un critère quantitatif.

## 4.2.2 Classification Hiérarchique Ascendante

L'objectif ici est de grouper des variables qui se ressemblent selon un critère quantitatif.

### Présentation de la méthode

Un algorithme de classification itératif, appelé Classification Hiérarchique Ascendante (CHA), est appliqué aux variables. Pour commencer, les deux variables les plus proches de tout le groupe de données sont réunies suivant un critère d'agglomération. À l'étape suivante, les deux variables ou groupe de variables les plus proches sont à nouveau réunis. L'algorithme s'arrête lorsqu'il n'y a plus qu'un seul groupe.

Le critère utilisé est celui du lien moyen (average linkage). Il correspond à la distance moyenne entre chaque paire d'éléments  $(x_{ri}, x_{sj})$  provenant de deux séries  $r$  et  $s$  :

$$d(r, s) = \frac{1}{n_r n_s} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_s} \text{dist}(x_{ri}, x_{sj}), i \in (1, \dots, n_r), j \in (1, \dots, n_s) \quad (4.1)$$

avec  $n_r$  et  $n_s$ , le nombre d'observation,  $x_{ri}$  et  $x_{sj}$  sont les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  observations des groupes  $r$  et  $s$ .

Les étapes de la classification des variables sont visualisées à l'aide d'un dendrogramme. Il s'agit d'une représentation d'un ensemble sous forme d'arborescence : deux branches se rejoignent lorsqu'elles vérifient un même critère. La valeur numérique associée au critère correspond à l'endroit de rami-



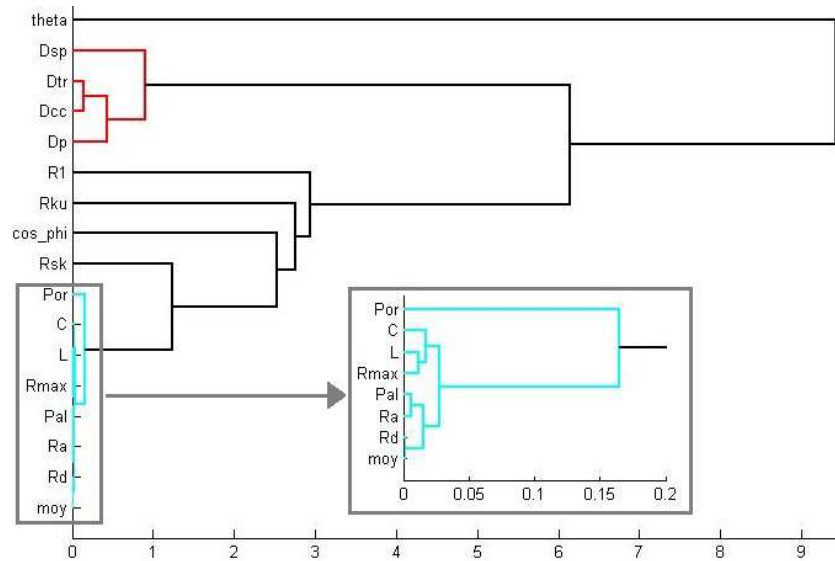


FIGURE 4.5 – Dendrogramme des variables

fication des deux branches. Ici donc, l'abscisse d'une ramification correspond à la valeur numérique de la distance comme calculée ci-dessus.

### Résultats et analyse

Le dendrogramme des variables de morphologie, figure 4.5 permet de se rendre compte qu'un premier groupe est lié, il correspond aux variables d'amplitude des hauteurs, à la longueur d'autocorrélation, le palier, la portée et la coupure.

Un autre groupe est composé des variables représentant la dimension fractale, il faudra les discriminer pour n'en garder qu'une, ceci a d'ailleurs été partiellement réalisé au chapitre précédent, puisque  $D_{sp}$  et  $D_p$  ont été éliminés à cause de valeurs aberrantes.

### Bilan

Nous conservons de cette analyse que  $\theta$ ,  $R_1$ ,  $R_{ku}$ ,  $\cos \phi$  et  $R_{sk}$  ne sont pas des variables particulièrement liées. En revanche, dans les deux groupes liés que nous avons identifié, seule une variable par groupe peut être gardée pour la modélisation prédictive.

L'algorithme CHA permet de coupler itérativement deux à deux les (groupes de) paramètres morphologiques. Une fois un couple formé, un second couple est formé selon le même critère, avec un troisième paramètre (ou un couple de paramètres).

Cependant, le lien (la corrélation) entre l'un des paramètres du premier couple et le troisième paramètre n'est plus accessible : à chaque étape de l'arborescence, les corrélations individuelles entre variables disparaissent. Il est donc difficile, au delà des toutes premières ramifications, de donner une interprétation aux liens entre les paramètres.

### 4.2.3 Matrice de corrélation

La méthode présente permet de quantifier les liens entre chacun des paramètres, deux à deux.

#### Présentation de la méthode

La matrice de corrélation est une technique statistique bivariée (entre deux variables). Elle est composée de coefficients de corrélation renseignant l'influence que les variables ont les unes vis-à-vis des autres. Ces coefficients sont toujours compris entre  $-1$  et  $1$ . Plus leur valeur s'approche de  $0$  et plus les variables sont dé-corrélées (indépendantes). Et inversement, plus leur valeur s'approche de  $|1|$ , plus les variables sont corrélées. Elles varient de façon opposée lorsque le coefficient de corrélation est négatif.

Un coefficient de corrélation  $\rho$  correspond au rapport de la covariance entre deux variables sur le produit de leurs écart-types. Il est donc calculé, pour chaque couple de variables  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , de la façon suivante :

$$\rho = \frac{\mathbb{E}[(\mathbf{a} - \mathbb{E}(\mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbb{E}(\mathbf{b}))]}{\sqrt{\mathbb{E}[(\mathbf{a} - \mathbb{E}(\mathbf{a}))^2]\mathbb{E}[(\mathbf{b} - \mathbb{E}(\mathbf{b}))^2]}} \quad (4.2)$$

avec  $\mathbb{E}$ , l'espérance mathématique d'une variable.

#### Résultats et analyse

La matrice de corrélation présentée sur le tableau 4.1 et 4.2 est issue du calcul des coefficients de corrélation sur l'ensemble des variables ( $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ ) provenant des essais sur les deux types de joint. L'analyse de cette matrice permet d'obtenir des renseignements sur :

1. La redondance d'information : quelles sont les variables  $\mathbf{X}$  qui transmettent la même information ?

Sur les matrices des corrélations des variables de  $\mathbf{X}$  entre elles, un constat marquant est que les quatre premières variables ainsi que la coupure sont fortement corrélées positivement. De même, le rapport des surfaces est fortement non-corrélé avec ces variables. Ce qui signifie que retenir une variable sur les six simplifierait le modèle et n'enlèverait

Tableau 4.1 – Matrice de corrélation de l'ensemble des variables, soit 13 observations (partie 1)

	moy (m)	Rmax (m)	Rd (m)	Ra (m)	Rsk	Rku	R1 %	$\theta$ °	$\cos\phi$	Dp	Dec	Dtr	Dsp	Palier (m <sup>2</sup> )
moy (m)	1,00	0,94	0,99	0,86	-0,47	-0,42	-0,81	0,62	-0,20	-0,70	-0,70	-0,76	-0,58	0,61
Rmax (m)	0,94	1,00	0,90	0,97	-0,18	-0,53	-0,87	0,67	-0,22	-0,75	-0,72	-0,77	-0,56	0,67
Rd (m)	0,99	0,90	1,00	0,81	-0,57	-0,41	-0,76	0,60	-0,22	-0,69	-0,70	-0,75	-0,59	0,57
Ra (m)	0,86	0,97	0,81	1,00	-0,04	-0,64	-0,82	0,71	-0,23	-0,75	-0,70	-0,76	-0,46	0,68
Rsk	-0,47	-0,18	-0,57	-0,04	1,00	0,00	0,13	-0,13	0,25	0,20	0,26	0,31	0,27	-0,11
Rku	-0,42	-0,53	-0,41	-0,64	0,00	1,00	0,41	-0,53	0,65	0,87	0,74	0,79	0,53	-0,35
R1 (%)	-0,81	-0,87	-0,76	-0,82	0,13	0,41	1,00	-0,66	0,20	0,70	0,67	0,72	0,45	-0,68
$\theta$ (°)	0,62	0,67	0,60	0,71	-0,13	-0,53	-0,66	1,00	-0,36	-0,62	-0,62	-0,69	-0,21	0,20
$\cos\phi$	-0,20	-0,22	-0,22	-0,23	0,25	0,65	0,20	-0,36	1,00	0,63	0,50	0,52	0,30	0,02
Dp	-0,70	-0,75	-0,69	-0,75	0,20	0,87	0,70	-0,62	0,63	1,00	0,95	0,97	0,75	-0,50
Dec	-0,70	-0,72	-0,70	-0,70	0,26	0,74	0,67	-0,62	0,50	0,95	1,00	0,98	0,81	-0,46
Dtr	-0,76	-0,77	-0,75	-0,76	0,31	0,79	0,72	-0,69	0,52	0,97	0,98	1,00	0,76	-0,51
Dsp	-0,58	-0,56	-0,59	-0,46	0,27	0,53	0,45	-0,21	0,30	0,75	0,81	0,76	1,00	-0,30
Palier (m <sup>2</sup> )	0,61	0,67	0,57	0,68	-0,11	-0,35	-0,68	0,20	0,02	-0,50	-0,46	-0,51	-0,30	1,00
Portée (m)	-0,15	-0,25	-0,09	-0,33	-0,25	0,03	0,03	-0,12	0,07	-0,07	-0,22	-0,16	-0,34	-0,10
L (m)	0,70	0,71	0,70	0,72	-0,35	-0,79	-0,63	0,38	-0,60	-0,86	-0,76	-0,81	-0,59	0,68
C%	0,85	0,92	0,80	0,84	-0,12	-0,37	-0,80	0,43	-0,24	-0,64	-0,60	-0,62	-0,56	0,61
Ksa (mm <sup>-1</sup> )	0,19	0,18	0,15	0,09	-0,01	0,52	-0,36	0,14	0,33	0,17	-0,04	0,02	0,10	0,20
Ksb (Mpa/mm)	0,21	0,14	0,20	0,08	-0,24	0,33	-0,39	0,32	0,22	0,03	-0,12	-0,13	0,22	0,31
Ks1 (Mpa/mm)	0,18	0,30	0,10	0,29	0,25	0,22	-0,54	0,40	0,15	-0,02	-0,10	-0,10	0,25	0,35
Ks2	0,43	0,35	0,43	0,19	-0,28	0,32	-0,43	0,16	0,10	-0,08	-0,27	-0,21	-0,41	0,07
Kna (mm <sup>-1</sup> )	-0,23	-0,27	-0,21	-0,36	-0,05	0,43	0,37	-0,42	0,18	0,50	0,61	0,56	0,22	-0,37
Knb (Mpa/mm)	-0,16	-0,23	-0,15	-0,22	-0,18	0,03	-0,04	0,18	-0,19	-0,08	-0,16	-0,14	0,24	0,05
Coh (Mpa)	0,62	0,50	0,61	0,42	-0,47	0,17	-0,64	0,61	0,33	-0,21	-0,35	-0,40	-0,18	0,76
$\phi$ (°)	0,25	0,17	0,26	0,03	-0,29	0,24	-0,25	0,55	-0,33	-0,06	-0,09	-0,09	0,07	-0,34

Tableau 4.2 – Matrice de corrélation de l'ensemble des variables, soit 13 observations (partie 2)

	Portée (m)	L (m)	C %	Ksa (mm <sup>-1</sup> )	Ksb (Mpa/mm)	Ks1 (Mpa/mm)	Ks2	Kna (mm <sup>-1</sup> )	Knb (Mpa/mm)	Coh (Mpa)	φ °
moy (m)	-0,15	0,70	<b>0,85</b>	0,19	0,21	0,18	0,43	-0,23	-0,16	0,62	0,25
Rmax (m)	-0,25	0,71	<b>0,92</b>	0,18	0,14	0,30	0,35	-0,27	-0,23	0,50	0,17
Rd (m)	-0,09	0,70	<b>0,80</b>	0,15	0,20	0,10	0,43	-0,21	-0,15	0,61	0,26
Ra (m)	-0,33	0,72	<b>0,84</b>	0,09	0,08	0,29	0,19	-0,36	-0,22	0,42	0,03
Rsk	-0,25	-0,35	-0,12	-0,01	-0,24	0,25	-0,28	-0,05	-0,18	-0,47	-0,29
Rku	0,03	-0,79	-0,37	0,52	0,33	0,22	0,32	0,43	0,03	0,17	0,24
R1 (%)	0,03	-0,63	<b>-0,80</b>	-0,36	-0,39	-0,54	-0,43	0,37	-0,04	-0,64	-0,25
θ (°)	-0,12	0,38	0,43	0,14	0,32	0,40	0,16	-0,42	0,18	0,61	0,55
cosφ	0,07	-0,60	-0,24	0,33	0,22	0,15	0,10	0,18	-0,19	0,33	-0,33
Dp	-0,07	<b>-0,86</b>	-0,64	0,17	0,03	-0,02	-0,08	0,50	-0,08	-0,21	-0,06
Dcc	-0,22	-0,76	-0,60	-0,04	-0,12	-0,10	-0,27	0,61	-0,16	-0,35	-0,09
Dtr	-0,16	<b>-0,81</b>	-0,62	0,02	-0,13	-0,10	-0,21	0,56	-0,14	-0,40	-0,09
Dsp	-0,34	-0,59	-0,56	0,10	0,22	0,25	-0,41	0,22	0,24	-0,18	0,07
Palier (m <sup>2</sup> )	-0,10	0,68	0,61	0,20	0,31	0,35	0,07	-0,37	0,05	0,76	-0,34
Portée (m)	<i>1,00</i>	-0,01	-0,27	0,01	0,13	-0,16	0,21	-0,23	0,19	0,40	-0,03
L (m)	-0,01	<i>1,00</i>	0,64	-0,22	-0,10	-0,09	0,01	-0,41	-0,03	0,17	-0,10
C%	-0,27	0,64	<i>1,00</i>	0,25	0,06	0,30	0,46	-0,07	-0,36	0,38	0,24
Ksa (mm <sup>-1</sup> )	0,01	-0,22	0,25	<i>1,00</i>	0,76	<b>0,81</b>	0,73	-0,25	0,29	0,69	0,40
Ksb (Mpa/mm)	0,13	-0,10	0,06	0,76	<i>1,00</i>	0,79	0,31	-0,40	0,70	<b>0,92</b>	0,44
Ks1 (Mpa/mm)	-0,16	-0,09	0,30	0,81	0,79	<i>1,00</i>	0,35	-0,33	0,42	0,66	0,39
Ks2	0,21	0,01	0,46	0,73	0,31	0,35	<i>1,00</i>	-0,03	-0,15	0,55	0,42
Kna (mm <sup>-1</sup> )	-0,23	-0,41	-0,07	-0,25	-0,40	-0,33	-0,03	<i>1,00</i>	-0,54	-0,29	-0,04
Knb (Mpa/mm)	0,19	-0,03	-0,36	0,29	0,70	0,42	-0,15	-0,54	<i>1,00</i>	0,41	0,24
Coh (Mpa)	0,40	0,17	0,38	0,69	0,92	0,66	0,55	-0,29	0,41	<i>1,00</i>	0,31
φ (°)	-0,03	-0,10	0,24	0,40	0,44	0,39	0,42	-0,04	0,24	0,31	<i>1,00</i>

que peu d'information. Par la suite, ce groupe de variables est appelé 1<sup>er</sup> groupe corrélé.

De même, un deuxième groupe fortement corrélé est formé par les variables représentant les différentes façons de calculer la dimension fractale, lui-même fortement non-corrélé à la longueur d'autocorrélation. Par la suite, ce groupe de cinq variables est appelé 2<sup>ème</sup> groupe corrélé.

Les variables corrélées de ces deux groupes avaient déjà été partiellement identifiées par le dendrogramme.

2. Les bons prédicteurs : quelles sont les variables mécaniques les plus fortement corrélées aux variables morphologiques ?

Le tableau 4.1 et 4.2 montre que les variables de raideur tangentielle approchée linéairement sont partiellement expliquées par  $Rku$ ,  $Rl$ ,  $\theta$  et  $\cos \phi$ , alors que lorsque la raideur tangentielle est approchée par une loi puissance, elle est partiellement expliquée par le premier groupe corrélé,  $Rku$  et  $Dsp$ .

Le premier paramètre de la raideur normale  $Kna$  est assez bien expliqué par le deuxième groupe corrélé, le palier,  $\theta$ , le kurtosis et la longueur d'autocorrélation, tandis que le deuxième paramètre n'est, quant à lui, que partiellement expliqué par la coupure.

Les variables du critère de Mohr-Coulomb proviennent essentiellement des données sur les joints de marbre. La cohésion est bien expliquée par les variables du premier groupe, ainsi que par l'asymétrie,  $\theta$  et la palier. L'angle de frottement est principalement expliqué par  $\theta$ .

Enfin, il apparaît que  $Ksa$  et  $Ks1$  sont très fortement corrélés et que  $C$  et  $Ksb$  le sont encore plus, cette dernière remarque provient en grande partie des essais sur marbre.

Les deux matrices de corrélations associées à l'essai sur marbre et à celui sur mortier sont reportées en Annexe L. Il est possible d'y voir une fausse corrélation apparaissant entre les deux séries d'essais. Il s'agit de  $Ks2$  et  $\cos \phi$ . Ces variables sont fortement corrélées dans le cas du marbre, fortement non-corrélées dans le cas du mortier et donc non corrélées sur la matrice des corrélations de l'ensemble des variables.

## Bilan

Pour résumer, l'analyse de la matrice de corrélation linéaire confirme ce que nous soupçonnions déjà : parmi nos variables, certaines sont très fortement corrélées. Leur présence dans un modèle descriptif ou prédictif ainsi que l'utilisation de certaines méthodes statistiques pourrait se révéler problématique. Il sera possible par exemple de réaliser des régression multiples et

PLS (Partial Least Squares Regression), en revanche, l'analyse cluster n'est pas indiquée dans ce cas.

La matrice de corrélation permet de quantifier pour chaque paire d'éléments la corrélation qui les lie. Cependant cette corrélation ne traduit qu'un seul critère (ici  $\rho$ ), et il peut être difficile de discerner clairement des groupes inter-corrélés à la lecture de la matrice.

#### 4.2.4 Analyse en composantes principales (ACP)

La description d'un ensemble d'essais possédant de nombreux paramètres de nature variée ne s'effectue généralement pas qu'au travers d'un seul critère. Il apparaît naturel alors d'utiliser une méthode d'analyse descriptive multicritères.

##### Présentation de la méthode

L'ACP est une méthode permettant de quantifier les informations (les composantes) qui influent le plus sur une série de données. En effet les composantes principales traduisent la variance de la série selon une direction, qui est alors sujette à interprétation. Une description complète de la méthode et de la façon d'en interpréter les résultats est présentée dans l'ouvrage de Jackson [92]. La représentation graphique d'une ACP permet :

1. De se rendre compte si les éléments de la série sont bien représentés, individuellement, par une composante : à chaque composante et pour chaque variable correspond une valeur de norme inférieure à 1. Plus cette valeur est proche de 1, meilleure est la description de la variable par la composante.
2. De distinguer les groupes de paramètres constituant la série qui se représentent bien grâce à une composante.
3. De mesurer selon une composante, l'importance des (non) corrélations entre deux paramètres : c'est le cas lorsque leur valeur numérique est proche de 1 (au signe près).

Nous avons effectué deux ACP sur l'ensemble des paramètres morphologiques  $X$  et mécaniques  $Y$  : une relative aux essais avec le marbre (figure 4.6) et l'autre avec le mortier (figure 4.7)

##### Résultats et analyse

Pour les deux matériaux, les deux ACP montrent que les deux premières composantes principales suffisent à expliquer plus de 70% des paramètres (et

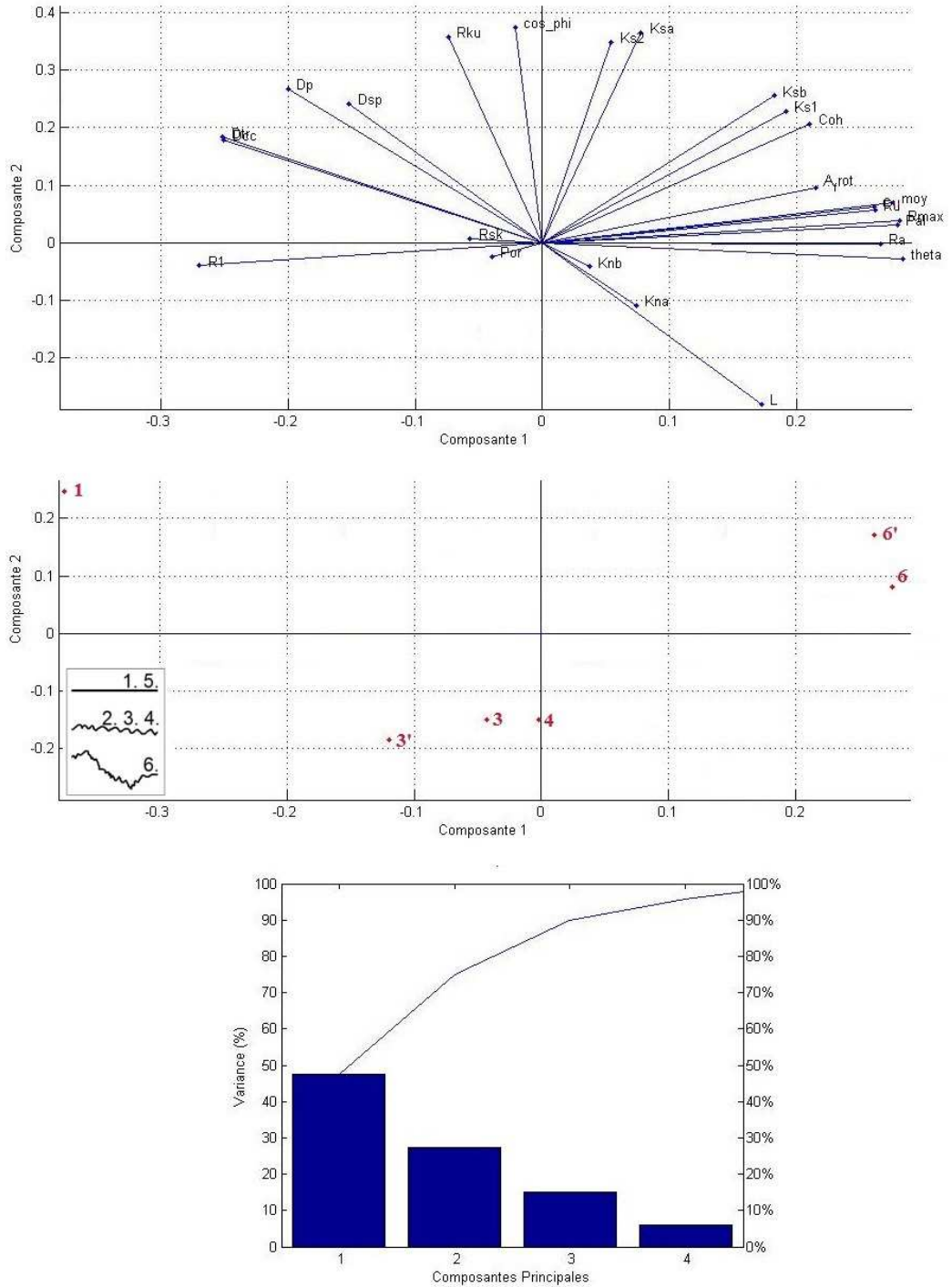


FIGURE 4.6 – ACP sur la série d'essai sur marbre

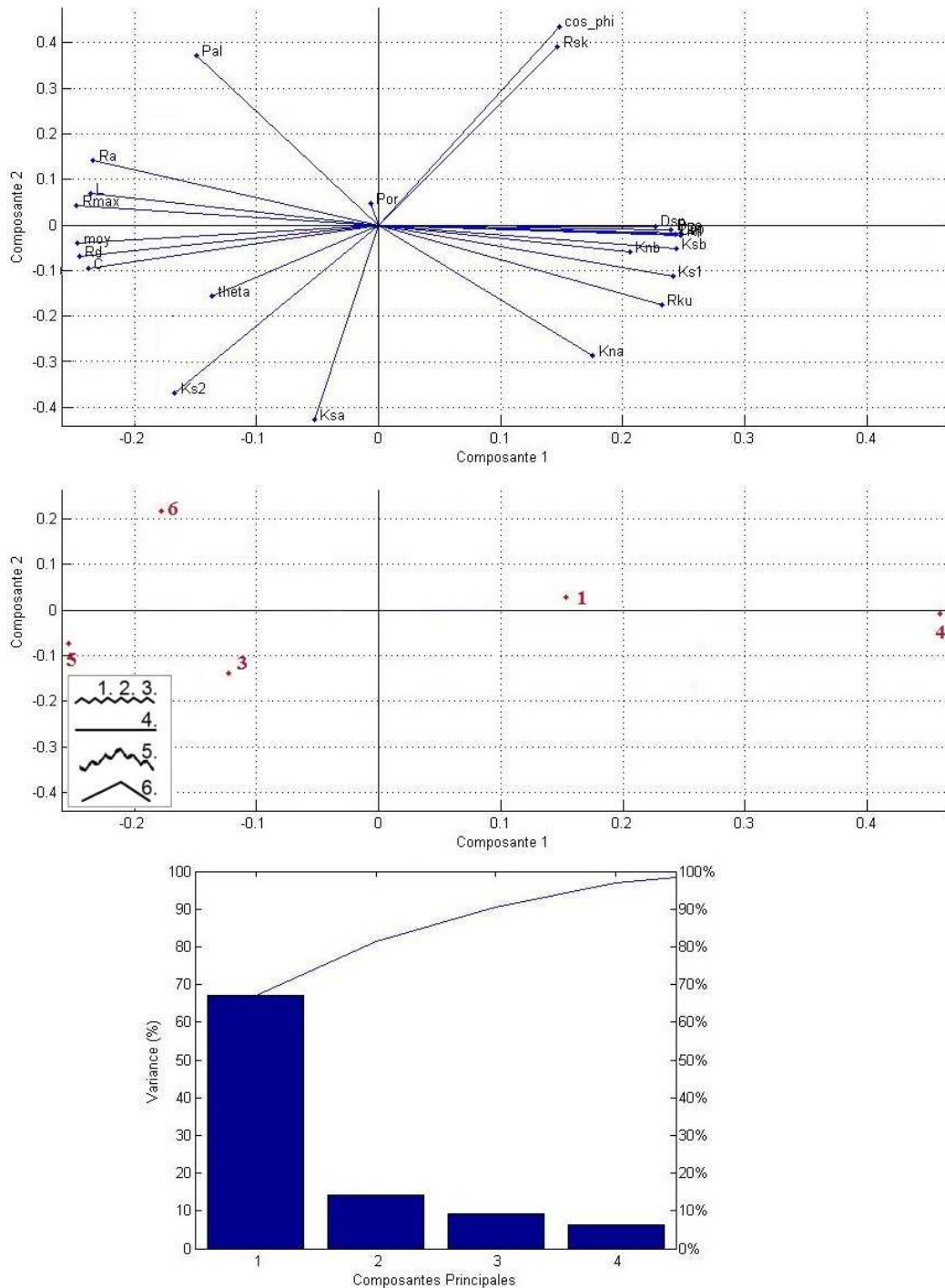


FIGURE 4.7 – ACP sur la série d’essai sur mortier



plus de 90% si on tient compte des quatre premières composantes principales), comme on peut le voir sur les figures 4.6 et 4.7.

**ACP sur le marbre - figure 4.6** On observe que la majorité des paramètres (tous à l'exception de quatre d'entre eux) se représentent à mesure comparable soit avec la première ou la seconde composante principale. En effet, leur variance sur chacun des deux axes avoisine les 25%. Ce qui s'interprète aussi par le fait qu'aucun des paramètres morphologique ou mécanique n'est très bien corrélé par une composante principale. Également, on distingue deux sous-groupes de paramètres fortement corrélés entre eux : les paramètres de dimension fractale et ceux d'amplitude. Cette tendance a été obtenue par CHA. Enfin, l'interprétation de la première composante principale est réalisée grâce au positionnement des différents joints sur le graphique : le joint numéroté 1 présente une interface lisse (aspérité d'ordre 0), les joints numérotés 3 et 4 possèdent une aspérité d'ordre 1 et enfin les joints numérotés 6 (et 6') présentent une aspérité d'ordre 1+2. Il apparaît alors que la direction de la première composante principale indique l'ordre croissant des aspérités. Ainsi, les paramètres de dimension fractale  $y$  sont non-corrélés aux paramètres d'amplitude : ces deux types de variables rendent compte (relativement) de la rugosité de l'interface d'un joint de marbre, mais les paramètres associés à la dimension fractale augmentent sachant que les paramètres d'amplitude décroissent.

**ACP sur le mortier - figure 4.7** Excepté la portée et  $\theta$ , tous les paramètres reportés ont une variance comprise entre 20% et 45% par rapport aux deux premières composantes principales. De manière analogue au cas du marbre, on retrouve les deux sous-groupes de paramètres d'amplitude et de dimension fractale. Également, des représentants des paramètres de raideur normale et tangentielle sont regroupés entre eux ( $Kna$ ,  $Knb$ ,  $Ksb$  et  $Ks1$ ). Au vu du positionnement des joints selon leur ordre d'aspérité (joint numéroté 4 : lisse ; joints numérotés 1, 2 et 3 : aspérité d'ordre 1 ; joints numérotés 6 : aspérité d'ordre 2 et joints numéroté 5 : aspérité d'ordre 1+2), la direction de la première composante principale indique l'ordre décroissant des aspérités des interfaces des joints de mortier. L'interprétation des résultats de cette ACP est similaire au cas précédant : les paramètres associés à la dimension fractale (ainsi que ceux des raideurs normales et tangentielles) et les paramètres d'amplitude sont corrélés avec la nature rugueuse de l'interface, mais varient de façon opposée.

## Bilan

Les ACP nous ont permis de déceler ou confirmer des comportements commun entre les paramètres issues des deux séries d'essais :

- premier axe de la rugosité,
- groupement de paramètre de morphologie corrélés : dimension fractale, amplitude de hauteur,
- groupement de paramètre mécaniques corrélés :  $Kna$ ,  $Kn_b$ ,  $Ksb$  et  $Ks1$ ,
- corrélation ou non-corrélation entre le premier axe et les paramètres corrélés entre eux (mécanique et morphologique)

Ces ACP nous permet surtout de constater à quel point nos paramètres de morphologie sont dépendants, il est impératif d'en éliminer un bon nombre avant de débiter une régression linéaire, sous peine d'obtenir des résultats erronés.

## 4.3 Modélisation prédictive

L'objectif est de décrire les relations entre  $Y$  et  $X$ , en l'absence de modèle théorique. Les régressions permettent de construire un modèle statistique sur les observations précédentes (une observation par essai) permettant de relier plusieurs variables à expliquer  $Y$  à des variables explicatives  $X$  par une relation fonctionnelle, cette relation peut être linéaire ou non, seul le cas linéaire est considéré dans cette étude. Un modèle statistique est empirique et modélise sans connaissances particulières sur les mécanismes en jeu. Les modélisations utilisées utilisent des régressions multivariées. Parmi les méthodes prédictives qui existent, certaines sont utilisées pour prédire des données qualitatives, d'autres quantitatives, corrélées ou non, d'une ou plusieurs variables à expliquer... Nous choisissons dans un premier temps d'utiliser une méthode simple, la régression linéaire multiple. Elle permet de prédire individuellement chaque variable mécanique (chaque colonne de  $Y$ ) par plusieurs paramètres de morphologie de  $X$ . Grâce aux analyses descriptives, nous savons que certaines des variables caractérisant l'état de surface des joints sont fortement corrélées, nous commençons par les trier. L'objectif étant de ne garder que les variables peu ou pas corrélées entre elles. Les résultats des régressions linéaires n'étant que partiellement concluant, nous mettons en œuvre par la suite des techniques de régression orthogonalisées. Par le biais de variables artificielles construites à partir des variables naturelles (mesurées), ces techniques permettent avant tout de ne pas avoir à réduire la dimension de la matrice des variables explicatives.

### 4.3.1 Régression linéaire multiple

L'objectif d'une régression linéaire est de décrire les relations entre une variable à expliquer et les variables explicatives. Elle permet également de prédire la variable par régression linéaire au sens des moindres carrés. Elle utilise plusieurs variables explicatives pour déterminer l'équation de l'hyperplan expliqué dans l'espace des paramètres explicatifs. Dans le cas de la régression linéaire la relation entre la variable expliquée et les variables explicatives est donc supposée linéaire :

$$\mathbf{y} = \varepsilon + \mathbf{b}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{c} \quad (4.3)$$

Avec :

- $\mathbf{y}$ , le vecteur des valeurs observées d'une variable à expliquer, dans notre cas,  $\mathbf{y}$  correspond à l'une des colonnes de  $\mathbf{Y}$
- $\varepsilon$ , le vecteur des résidus (différence  $\mathbf{y}$  observé et  $\mathbf{y}$  estimé)
- $\mathbf{b}_i$ , le coefficient de régression du  $i^{\text{ème}}$  prédicteur
- $\mathbf{X}_i$ , le  $i^{\text{ème}}$  prédicteur de la matrice des prédicteurs
- $\mathbf{c}$ , constante de régression

#### Présentation de la démarche : validations croisées sur régressions pas à pas

Dans cette partie, nous réalisons une régression linéaire des variables morphologiques (prédicteurs) sur chacune des variables mécaniques (à expliquer). Cependant, nous disposons d'un nombre important de variables à explicatives (paramètre morphologique) par rapport au nombre d'individus (essais). Nous savons de plus que certains de ces prédicteurs sont corrélés (colinéaires). Si l'on souhaite que notre modèle soit explicatif, il faut que celui-ci soit relativement simple, c'est la raison pour laquelle il nous faut discriminer ces variables corrélées (principe de parcimonie en statistique).

Pour commencer, en se servant des conclusions de l'étude précédente nous réduisons la taille de la matrice  $\mathbf{X}$ . De même, nous discriminons les deux approches pour modéliser la courbe de  $\mathbf{Ks}$  (réduction de la matrice  $\mathbf{Y}$ ). L'objectif est de prédire chaque variable de  $\mathbf{Y}$  par  $\mathbf{X}$ .

Pour avoir une bonne prédiction, les régressions linéaires se font habituellement sur un nombre d'observation supérieur à celui dont nous disposons, à savoir sept pour la série sur le marbre (six pour l'angle de frottement et la cohésion) et également six pour la série sur le mortier.

C'est la raison pour laquelle nous continuons la discrimination des variables morphologiques en réalisant une régression pas à pas, c'est une méthode de sélection progressive ascendante qui fonctionne avec le  $\mathbf{R}^2$ .<sup>2</sup>

---

2. De manière générale, un coefficient de détermination  $\mathbf{R}^2$  peut être utilisé pour déter-

L'algorithme pas à pas (ou stepwise) débute avec la variable de  $X$  dont le coefficient de corrélation est le plus élevé. Puis, à chaque pas, la variable qui fait augmenter le plus le  $R^2$  est entrée dans le modèle. Dans ce cas, le  $R^2$  correspond à un test de Fisher qui détermine l'augmentation de la valeur du coefficient de régression.

En même temps, la possibilité de retirer du modèle les variables qui ne réduisent pas significativement  $R^2$  est laissée. Pour éviter que le cycle soit sans fin, des niveaux d'entrée et de sortie sont spécifiés. Nous avons appliqué un seuil pour entrer dans le modèle de 0,05 et de 0,1 pour en sortir.

### Choix des paramètres approximant $K_s$

$K_s$  est dépendant de  $\sigma_n$ , nous avons modélisé son évolution en fonction de  $\sigma_n$  par deux approximations, l'une est linéaire et l'autre puissance. Il nous faut maintenant choisir entre les deux modélisations. Nous allons opérer ce choix en comparant les validations croisées des régressions pas à pas de chaque paramètre décrivant  $K_s$  sur la matrice des  $X$ . Le choix se fait en gardant la méthode de modélisation de  $K_s$  dont la régression pas à pas se fait avec un maximum de paramètres.

Ainsi, nous avons effectué une validation croisée sur les régressions pas à pas de chacun de ces paramètres, ce qui signifie que nous avons réalisé la régression pas à pas sur l'ensemble des essais (observations), puis que cette même régression a été réalisée en retirant tour à tour les valeurs des variables relatives à un essai. Les résultats sont présentés au tableau 4.3 et les résultats détaillés sont présentés en annexe M, page 239.

Pour la série d'essais sur mortier, il apparaît qu'aucun paramètre de  $X$  ne ressort de cette validation croisée, ce qui signifie que dans chaque cas testé, aucun paramètre ne rentre dans le modèle de  $K_{sa}$ , selon les critères d'entrée et de sortie de la régression pas à pas.

$R_{ku}$ ,  $\cos \phi$  et  $C$ , mais aussi partiellement  $\theta$ ,  $R_1$ ,  $P_{al}$  et  $L$  entrent dans le modèle de  $K_{sa}$  dans le cas de la série d'essais sur marbre.

Pour prédire la variable  $K_{sb}$ , relevée sur les joints de mortier,  $R_{ku}$ ,  $L$  et  $C$  entrent dans le modèle et  $R_d$  et  $D_{tr}$  partiellement. Par contre, sur les joints de marbre, aucun paramètre ne ressort vraiment, seul  $R_{ku}$ ,  $R_1$  et  $C$ , ressortent une fois chacun.

Il paraît donc compromis de se servir de la modélisation linéaire de la courbe des  $K_s$  puisque dans le cas des deux séries d'essais, il est impossible de prédire ces deux coefficients.

---

miner si une équation de régression est adaptée pour représenter la distribution de points, celui-ci est borné entre 0 et 1.

	mortier	marbre
Ksa		Rku, ( $\theta$ ), (R1), $\cos \phi$ , (Pal), (L), C
Ksb	(Rd), Rku, (Dtr), L, C	(Rku), (R1), (C)
Ks1	Rku, $\cos \phi$ , (Pal)	(Rd), Rku, ( $\cos \phi$ ), (Pal), (L), C
Ks2	$\cos \phi$ , (R1)	(Rku), R1, $\cos \phi$

Tableau 4.3 – Choix de la modélisation de la courbe Ks : comparaison des deux validations croisées, lorsque le paramètre est noté entre parenthèse, c'est qu'il n'est ressorti qu'au cours d'une validation croisée, ce n'est pas significatif.

En revanche, la modélisation linéaire de ce même paramètre fait apparaître deux coefficients : Ks1 et Ks2 dont les validations croisées montrent qu'il est possible de les prédire avec au moins un paramètre de morphologie.

Par la suite, nous allons donc garder la modélisation puissance pour la courbe de Ks.

### Réduction de X

Maintenant, l'objectif est de déterminer le nombre optimum de paramètres de morphologie (variables prédictives) qui entreront dans le modèle servant à prédire les paramètres mécaniques (Ks1, Ks2, Kna, Knb pour la série d'essais sur mortier et Ks1, Ks2, Kna, Knb, Coh et  $\varphi$  pour la série sur les joints de marbre).

Les régressions linéaires multiples peuvent donner de très mauvais résultats si les prédicteurs sont corrélés. Certains ont déjà été éliminés lors d'une première étape : l'étude de la stabilité des paramètres en fonction de la précision du maillage, au chapitre 3, page 125.

En effet, parmi les variables d'amplitude de hauteur, nous gardons Rd, car c'est la variable qui est globalement la plus corrélée à Y et en même temps, la moins corrélée aux autres variables explicatives de X.

La portée et Rsk sont vraiment très peu corrélés à Y. Ils sont donc écartés de la régression, contrairement à Rku, qui est corrélé à Y, et est ainsi gardé pour la régression.

Parmi les différentes façons de calculer la dimension fractale, nous gardons le modèle qui apparaît être le plus corrélé à Y, particulièrement pour les joints de mortier

Quant aux paramètres Rd, Rku, R1,  $\theta$ ,  $\cos \phi$ , Dtr, Pal, L, C, il est difficile de trancher à partir des résultats des analyses précédentes, une nouvelle fois, nous faisons appel à la validation croisée.

	mortier	marbre
<b>Ks1</b>	<b>Rku, <math>\cos \phi</math>, (Pal)</b>	<b>(Rd), Rku, (<math>\cos \phi</math>), (Pal), (L), C</b>
<b>Ks2</b>	<b><math>\cos \phi</math>, (R1)</b>	<b>(Rku), R1, <math>\cos \phi</math></b>
<b>Kna</b>	<b>(R1), (<math>\theta</math>), (Dtr)</b>	
<b>Knb</b>	<b>R1, Dtr, L, (C)</b>	
<b>Coh</b>	/	<b>Rd, <math>\cos \phi</math>, (Dtr)</b>
<b><math>\varphi</math></b>	/	<b>(Rd)</b>

Tableau 4.4 – Récapitulatif des résultats de validation croisée des régressions pas à pas, (x) lorsque le paramètre sort au moins une fois

Les résultats des validations croisées sur les variables issues des essais sur marbre et mortier sont présentés au tableau 4.4.

Avec cette méthode et dans le cas du marbre, il ressort que **Kna** et **Knb** ne peuvent pas être approchés par les variables de morphologie sélectionnés. Dans le cas du mortier, celle de **Kna** peut également difficilement être réalisée. En revanche, la régression de **Knb** peut être réalisée avec **R1**, **Dtr** et **L**. **Ks1** peut être régressée avec **Rku** et  $\cos \phi$  pour les joints de mortier et avec **Rku** et **C** pour joints de marbre et éventuellement le palier dans les deux cas. De plus, **Ks2** peut essentiellement être expliqué par  $\cos \phi$  et **R1**. L'angle de frottement ne peut pas non plus être expliqué par ces paramètres, même si dans un des cas testé, sans le joint n°3 de marbre, il peut être expliqué par **Rd**.

Cette méthode appliquée à la variable cohésion des joints de marbre montre que seuls, les paramètres **Rd** et  $\cos \phi$  entrent dans le modèle.

Une fois les variables choisies à partir de la validation croisée, la régression multiple est réalisée pour chacun des paramètres mécaniques.

Les résultats sont présentés au tableau 4.5 et les illustrations de ces régressions sont présentées à la figure 4.8.

La valeur de corrélation global  $R^2$  pour chacun des paramètres mécaniques (sauf pour **Ks2**) est de l'ordre de 95%, ce qui signifie que les régressions sont bien prédictives. Les régressions de **Ks2** des deux matériaux sont de qualité médiocre, ce qui rend donc le modèle peu adapté pour la prédiction de ce paramètre mécanique.

En conclusion de cette partie, on peut remarquer que nous avons pu prédire correctement quatre variables mécanique, **Ks1** pour le marbre et le mortier, **Knb** pour le mortier et la cohésion pour le marbre. Ces régressions n'ont cependant pas de portée prédictive plus large que celle des paramètres mécaniques, sur le matériau considéré et dans des états de contraintes similaires à ceux rencontrés lors de la réalisation des essais.

	Variables à expliquer	Ks1	Ks2	Knb	Coh
mortier	prédicteurs	Rku, $\cos \phi$	$\cos \phi$ , R1	R1, Dtr, L	/
	constante	8,1999	1,9417	-149,1813	/
	coeff 1	2,8877	-0,0855	195,6487	/
	coeff 2	0,4102	-1,5805	-14,1814	/
	coeff 3	/	/	-134,2973	/
	Résidus	-0,1364	0,0817	-0,5063	/
		0,1688	0,0094	0,2968	/
		-0,0499	-0,0145	-0,0022	/
		0,0727	-0,0266	0,1799	/
		-0,0411	0,0105	0,1786	/
	-0,014	-0,0606	-0,1468	/	
	R <sup>2</sup>	1	0,8029	0,9887	
marbre	prédicteurs	Rku, C	$\cos \phi$ , R1	/	Rd, $\cos \phi$
	constante	6,6	1,4958	/	-0,6275
	coeff 1	8,50	0,1154	/	445,616
	coeff 2	1570,1	-1,1361	/	1,0046
	Résidus	2407,1	0,0411	/	0,056
		-5778	-0,0597	/	/
		2520,7	0,066	/	0,5739
		-1013,7	0,0255	/	-0,1384
		5365,1	0,0139	/	0,0322
		2127,3	-0,0649	/	-0,4476
-5628,6		-0,0219	/	-0,0761	
	R <sup>2</sup>	0,9355	0,8117	/	0,9771

Tableau 4.5 – Résultats des régressions linéaires multiples de paramètres mécaniques pour le mortier et le marbre

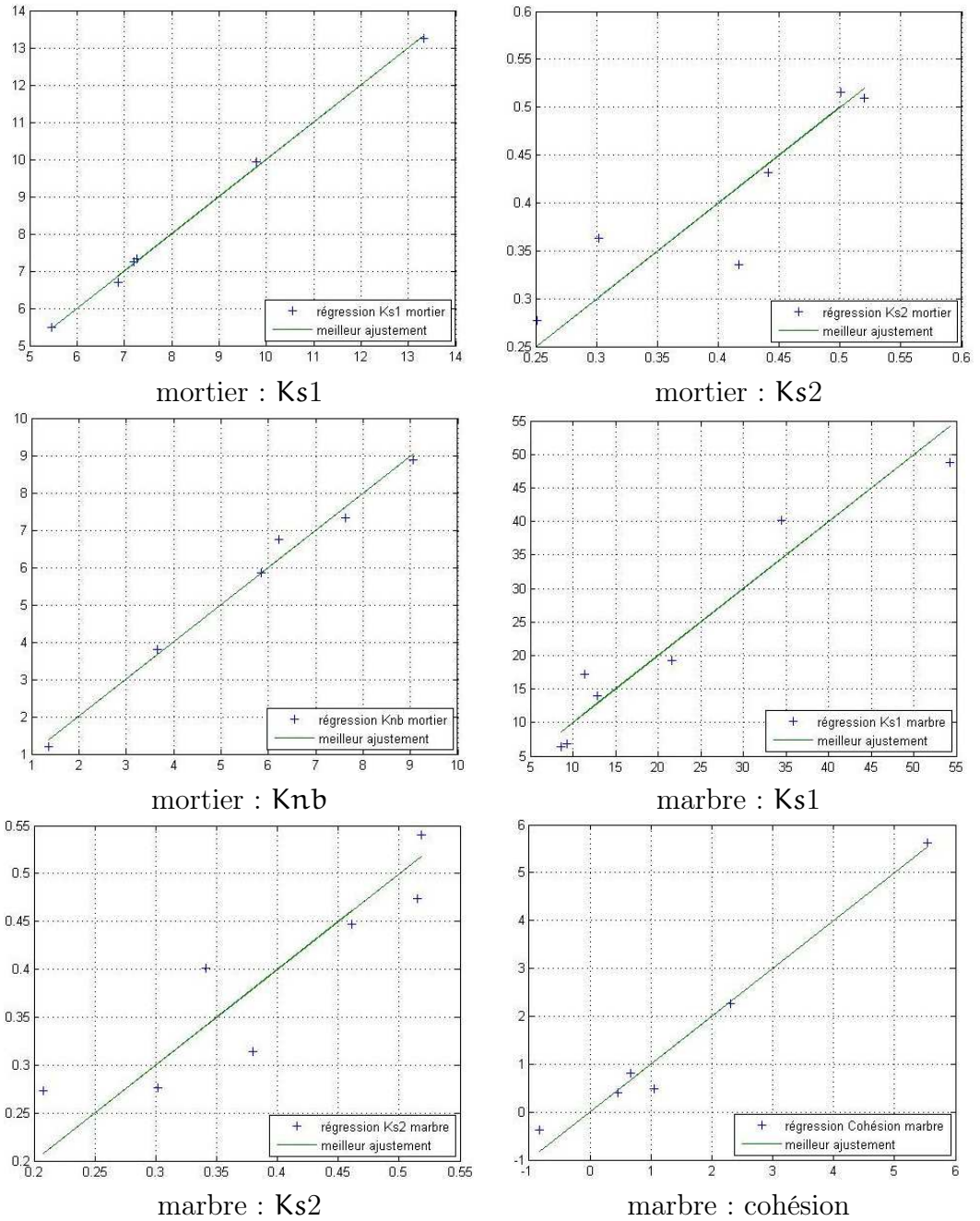


FIGURE 4.8 – Graphique des régressions linéaires multiples de paramètres mécaniques pour le mortier et le marbre



Malgré le soin apporté au choix des paramètres, ces régressions linéaires multiples ne sont donc pas concluantes. Plusieurs raisons peuvent être évoquées. Ces régressions ont été réalisées sur des variables trop corrélées. Le faible nombre de joint testés n'a pas permis de prendre en compte un nombre important de paramètres morphologiques, de fait, un faible nombre de paramètres réduit l'information qu'elles transmettent. Ces deux remarques sont en opposition, puisqu'en augmentant le nombre de variable de morphologie, le risque est important d'augmenter le nombre de variables corrélées. La méthode n'est pas assez performante pour atteindre l'objectif que l'on s'est fixé : trouver des relations entre les deux matrices issues des séries d'essais réalisés (morphologie et mécanique) ayant une portée prédictive.

### 4.3.2 Régression sur la matrice mécanique entière : PLS

Afin d'améliorer le caractère prédictif généralisable, nous nous sommes tournés vers des méthodes prédictives qui sont connues pour donner de bonnes prévisions dans le cas où le nombre des individus (observations) est inférieur au nombre de variables.

Les données de départ sont les variables naturelles, donc celles utilisées précédemment, à savoir les données de morphologie et mécaniques présentées dans les tableaux 3.3 et 3.4 du chapitre précédent.

Les modèles de régression multiple comme celui que nous avons utilisé dans la partie précédente sert de base à de nombreuses méthodes multivariées comme la régression sur composantes principales (PCR), la corrélation canonique, la Partial Least Squares Regression (régression PLS), l'analyse discriminante...

La régression PLS, tout comme la PCR fait partie des techniques de régression orthogonalisées ou factorielles, Massy [93]. Elle utilise la décomposition des variables naturelles en variables artificielles sur lesquelles la régression est réalisée, elle prend ses origines dans les travaux relatifs à l'analyse canonique de Hotelling [94]. En réalisant une régression sur ces composantes, des variables artificielles, il est possible d'expliquer en un nombre plus restreint de coefficient, la variabilité observée sur les variables prédictives.

De plus, la PLS est utilisée dans les cas où les prédicteurs sont fortement corrélés, elle permet de limiter le problème de la colinéarité des variables explicatives. En effet, les composantes orthogonales n'apportent pas d'information répétitive à la régression. Dans le cas de variables corrélées, les dernières composantes peuvent être interprétées comme étant le bruit lors de la manipulation expérimentale et écartées de la régression, voir Lebart [95]. Le nombre de composantes à conserver est déterminé par un choix sur la quantité de variance expliquée par les coefficients de régression à conserver,

le critère couramment choisi est d'atteindre entre 70 et 80% de la variance expliquée.

Enfin, la méthode appliquée est la PLS2, à la différence de la PLS1, elle permet de réaliser une régression de la totalité de la matrice des  $Y$  avec la totalité de la matrice des  $X$ . Les principales méthodes permettant de lier deux matrices sont détaillées dans le manuscrit de thèse de Bougeard [96].

Pour résumer, nous choisissons d'utiliser une régression PLS, car elle offre plusieurs avantages :

- elle permet de travailler sur des variables corrélées
- elle permet d'expliquer les variables réponses  $Y$  en un plus faible nombre qu'il n'y a de variables explicatives  $X$
- elle permet de travailler sur plusieurs variables réponses  $Y$ .

### Description de la méthode PLS

La PLS est une régression linéaire qui a pour objectif de modéliser  $Y$  par  $X$  par une relation de la forme :

$$Y = XB + \epsilon \quad (4.4)$$

L'algorithme utilisé est le SIMPLS de Jong [97], il fonctionne sur des variables  $X$  et  $Y$  centrées.

La régression PLS2 est réalisée en recherchant des composantes orthogonales sur  $X$  et des composantes sur  $Y$  qui sont bien corrélées entre elles et explicatives de leur propre groupe en utilisant le critère de Tucker. Le critère à optimiser est de maximiser  $\text{cov}(X, Y)$  sous contraintes d'orthogonalité entre composantes.  $X$  et  $Y$  sont décomposées en loadings (ou charges) :  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ ,  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$  et composantes (ou facteurs)  $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ ,  $(\omega_1, \dots, \omega_r)$ .

Ceci se fait par la recherche de

$$\xi_1 = X\mathbf{u}_1 \quad (4.5)$$

et

$$\omega_1 = Y\mathbf{v}_1 \quad (4.6)$$

solutions de  $\max_{\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=1} \text{cov}(X\mathbf{u}, Y\mathbf{v})$ , avec  $\xi_{\mathbf{h}}$  et  $\omega_{\mathbf{h}}$ , les variables latentes pour  $1 < \mathbf{h} < r$ , avec  $r$ , le nombre de composante.

Une fois les composantes déterminées, la régression des variables à expliquer sur les composantes  $X$  est réalisée. Puis la régression est "traduite" en fonction de  $X$  et non de ses composantes. L'algorithme d'exécution de la régression multivariée est présenté en détail dans l'ouvrage de Tenenhaus [91].

### 4.3.3 Résultats

Les régressions PLS sont réalisées sur les deux séries d'essai en prenant en compte l'ensemble des paramètres morphologiques, nous n'avons cependant gardé qu'un mode de calcul de la dimension fractale, celui du comptage de cube, car c'est celui qui donne le modèle le plus prédictif. Ces régressions sont faites sur les quatre variables de mécanique  $Ks1$ ,  $Ks2$ ,  $Kna$  et  $Knb$  dans le cas de la série d'essai sur mortier et sur les six variables mécaniques  $Ks1$ ,  $Ks2$ ,  $Kna$ ,  $Knb$ ,  $Coh$  et  $\varphi$  dans le cas de la série d'essai sur marbre.

Nous présentons les résultats des deux régressions en parallèle.

L'étape préliminaire est de déterminer le nombre de composante nécessaire à la régression. Pour cela nous avons tracé les graphes de la variance expliquée en fonction du nombre de composante entrant dans le modèle et les graphes de la moyenne de l'erreur aux moindres carrés des variables réponse en fonction du nombre de composante. Ces graphes sont présentés aux figures 4.9 et 4.10.

Les paramètres mécaniques de la série marbre ont déjà presque 80% de variance expliquée sur deux axes, mais l'apport de deux composantes supplémentaires permet presque d'expliquer toute leur variance. Le gain en terme d'erreur tout comme le gain de variance expliquée se fait également avant le deuxième axe.

La variance des paramètres mécaniques de la série mortier est bien moins expliquée par les quatre premier axes, avec à peine plus de 70% de variance expliquée. Comme dans la régression de la série sur marbre, l'apport des deux premières composantes permet d'expliquer la majorité des 70% de variance. L'importance de l'erreur aux moindres carré marque également presque un palier après le deuxième axe.

Nous choisissons de garder les quatre premières composantes pour les deux séries, même s'il serait envisageable d'en garder seulement deux. Parce que le gain de 80 à presque 100% est intéressant dans le cas du marbre et parce que 60% de variance expliquée est trop faible dans le cas du mortier.

Pour visualiser la corrélation entre la réponse du modèle et les variables mesurées avec les quatre composantes retenues, les graphes des figures 4.11 pour le marbre et 4.12 pour le mortier ont été réalisés. Pour plus de lisibilité entre les différentes variables mécaniques dont les valeurs numériques n'ont pas la même échelle, ces graphes représentent les corrélations entre les variables normalisées.

Ces variables sont bien approchées dans le cas du mortier et très bien approchées dans le cas du marbre, car la dispersion du nuage de point est assez faible. Pour les deux régressions,  $Kna$  et  $Knb$  sont moins bien prédits que  $Ks1$  et  $Ks2$  qui sont bien alignés sur une droite. L'angle de frottement est

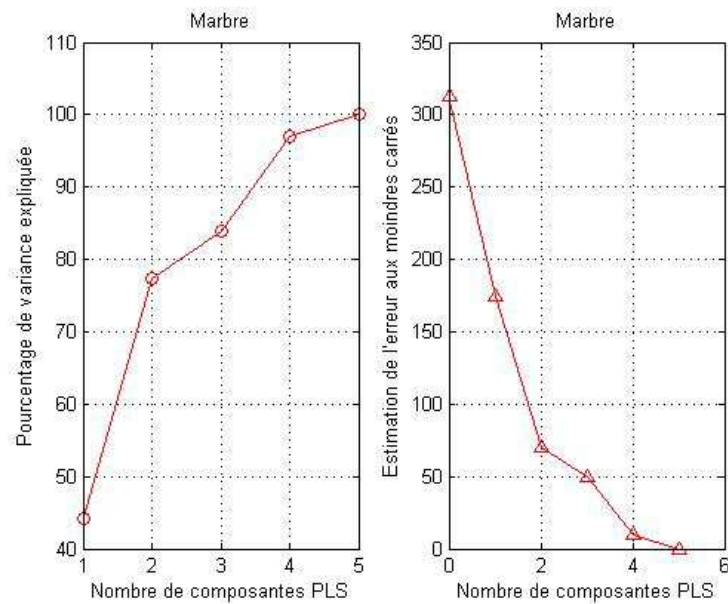


FIGURE 4.9 – Variance expliquée et erreur aux moindres carrés en fonction du nombre de composante pour la série d’essai sur marbre

également moins bien prédit dans le cas du marbre. Le tableau 4.6 présentant les résultats du calcul des  $R^2$  sur chacune de ces variables mécanique confirme que la régression PLS ne permet pas de bien approcher  $K_{na}$  pour les deux série d’essais et qu’à l’inverse, le coefficients des  $K_s$  sont très bien expliqués.

Un aperçu des poids des variables morphologiques sur chacune des quatre composantes confirme que pour  $K_{s1}$  et  $K_{s2}$  et  $Coh$  la réponse du modèle est bien corrélée aux variables artificielles (composantes). Ce même constat est valable pour  $K_{nb}$  et  $\varphi$  dans le cas des joints de marbre. Pour  $K_{nb}$ , ce résultat s’oppose aux résultats de la régression linéaire multiple qui avait permis de modéliser cette même variable dans le cas du mortier, mais pas du marbre. Ceci montre que les régressions linéaires multiples sur des variables corrélées sont à prendre avec précaution, même si effectivement les résultats sont similaires dans le cas des deux coefficients de  $K_s$ .

Le graphe des poids des variables morphologiques sur les quatre composantes présentées aux figures 4.13 et 4.14 renseigne sur l’importance de la prédiction associée à chaque composante principale. Il apparait que dans le cas des deux séries, la dernière composante explique la majorité de la variance des paramètres de morphologie.

Le calcul des résidus pour chaque paramètre est représenté aux figures 4.15 et 4.16, pour le marbre et le mortier respectivement. La variation des

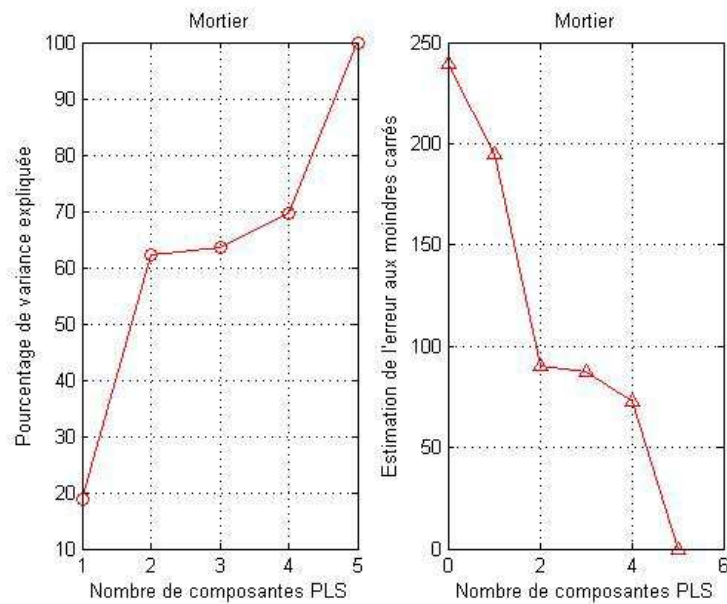


FIGURE 4.10 – Variance expliquée et erreur aux moindres carrés en fonction du nombre de composante pour la série d'essai sur mortier

résidus d'un joint à l'autre entre les variables à expliquer est la même, ceci est dû à la méthode de construction de la régression PLS réalisée sur les composantes orthogonales de  $X$  et les composantes de  $Y$  corrélées. Ainsi les valeurs des joints de marbre n°3 et 4 et de mortier n°5 sont bien moins modélisées.

Le détail des résultats de ces régressions est présenté en annexe N.

Suite à cette régression, nous pouvons établir un lien entre la morphologie et les paramètres de raideur tangentielle pour les deux séries d'essais. Le paramètre  $K_{nb}$  peut être modélisé correctement dans le cas du marbre, alors qu'il était mieux modélisé par régression linéaire multiple présenté à la section

	mortier	marbre
$K_{s1}$	0,9999	0,9999
$K_{s2}$	0,987	0,9984
$K_{na}$	0,6926	0,2366
$K_{nb}$	0,4786	0,8716
Coh	/	0,9901
$\varphi$	/	0,8684

Tableau 4.6 –  $R^2$

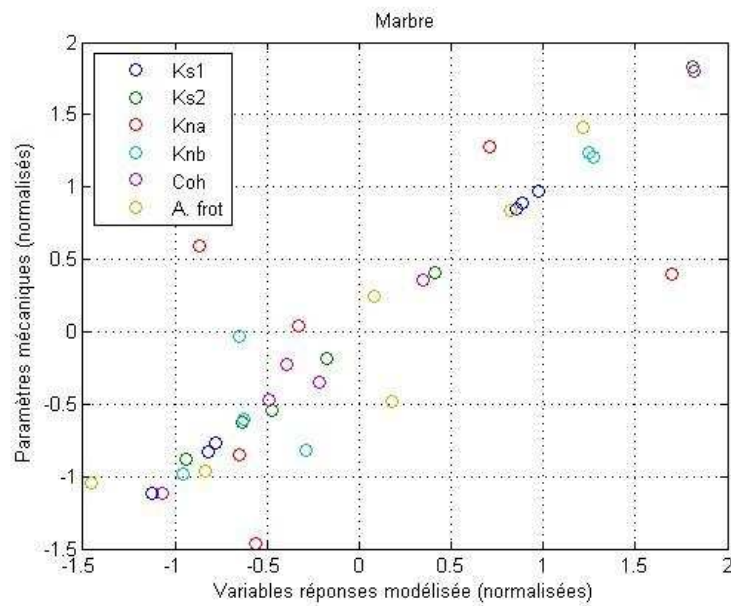


FIGURE 4.11 – Corrélation entre la réponse du modèle et les variables mesurées pour la série d’essai sur marbre

précédente.

## 4.4 Conclusion

L’objectif de ce chapitre était d’établir un lien entre les paramètres morphologiques et les paramètres mécaniques des joints dans le but de trouver un moyen d’identifier le comportement mécanique des interfaces des blocs de roches des statues, sans avoir recours aux essais de cisaillement sur des joints de roches analogues. Pour cela des méthodes statistiques ont été utilisées sur les paramètres relevés suite aux essais présentés dans le chapitre précédent. Au delà des différences entre les paramètres provenant des essais de marbre ou de mortier, nous avons démontré que certains paramètres de morphologie sont fortement dépendants et que certains groupes de paramètre particulièrement corrélés apparaissent (dimension fractale et paramètre d’amplitude des hauteurs).

Ces études descriptives nous ont permis de remarquer que les corrélations qui existaient entre paramètres provenant de la série d’essais sur marbre se retrouvaient sur ceux provenant de la série d’essais sur mortier.

Enfin, cette première partie de chapitre nous a permis de discriminer certains paramètres, ceux liés au mode de calcul de la dimension fractale et

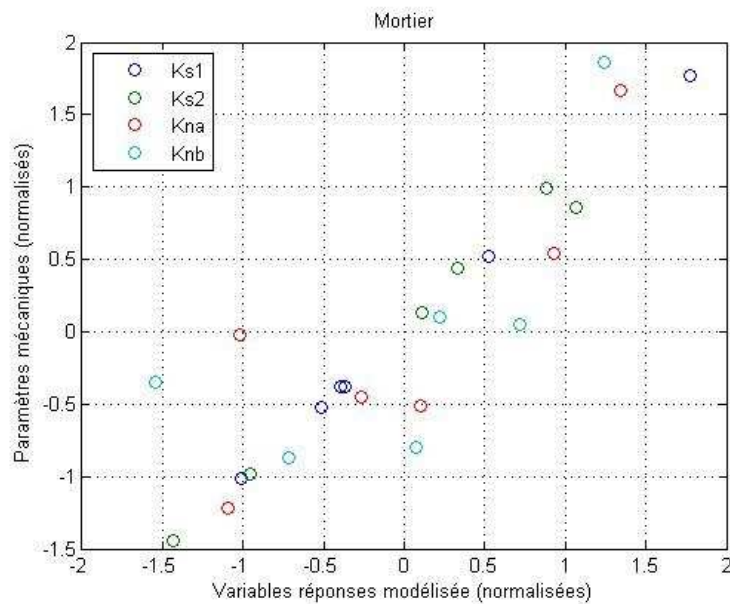


FIGURE 4.12 – Corrélation entre la réponse du modèle et les variables mesurées pour la série d’essai sur mortier

ceux liés à la façon de modéliser la raideur tangentielle. Elle nous a également permis de sélectionner les paramètres pour les régressions linéaires multiples et pas à pas.

La deuxième partie a présenté deux sortes de régressions, linéaire multiple pas à pas, sur les variables naturelle et PLS sur des variables artificielles. Suite à ces régressions, nous pouvons établir un lien entre la morphologie et les paramètres de raideur tangentielle pour les deux séries d’essais. Même s’il a été possible de modéliser le comportement normal dans certain cas, il n’est pas possible de généraliser le fait qu’il soit possible de l’approcher avec des paramètres de morphologie. Ainsi, il manque une information permettant de l’expliquer. De même, la cohésion a pu être modélisée grâce à la série de joint de marbre.

La régression multiple n’a pas permis de trouver des éléments de comparaison entre les liens qui unissent les paramètres mécaniques et morphologiques au sein des deux séries d’essais sur le marbre et sur le mortier. De même à chaque fois que ces régressions ont été conduites sur les résultats des deux séries groupées, leur résultats étaient plus que médiocres. Pour bien comprendre la situation, nous rappelons que les deux séries ont été conduites sur des matériaux différents et sous des états de contraintes différents parce que la section des joints de marbre était plus petite lors des essais, ceux-ci

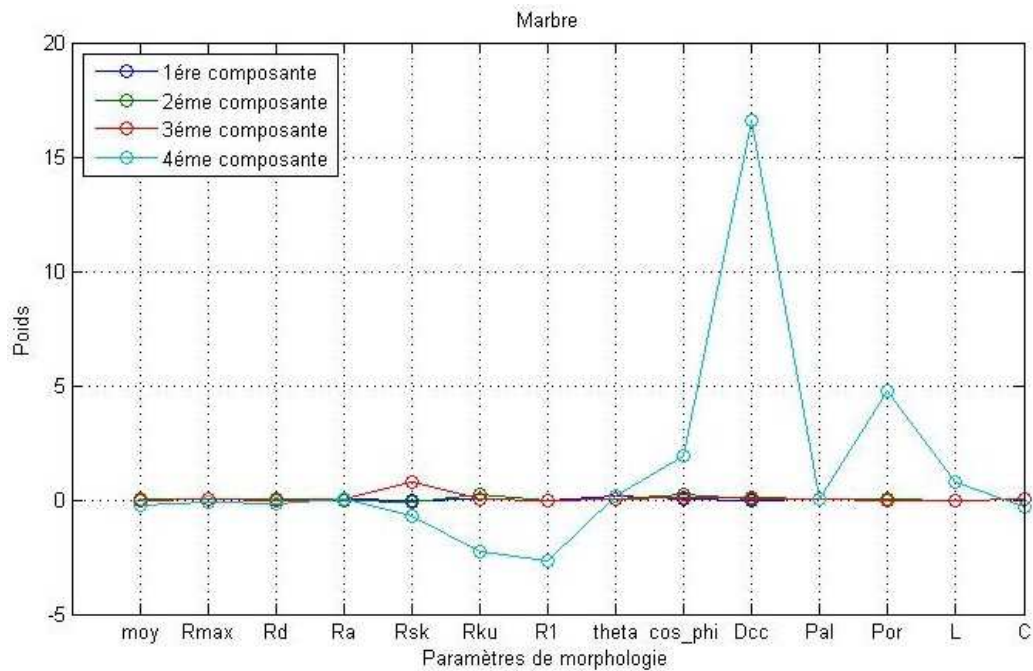


FIGURE 4.13 – Poids des composantes pour chaque paramètre de morphologie et chaque composante pour la série d'essai sur marbre

ont été réalisés sous des contraintes normales bien supérieures.

La méthodologie présentée dans ce dernier chapitre consiste en la mise en œuvre de techniques descriptives (Boîtes de Tukey, CHA, ACP) amorçant une analyse prédictive (Régressions multivariées). L'objectif est de proposer un modèle permettant de traduire la réponse mécanique d'une interface selon ses aspérités, et cela à partir des essais expérimentaux que nous avons réalisés. Pour chacun des deux matériaux (mortier et marbre), un modèle d'ordre réduit (le nombre de paramètres morphologiques pertinents passe de 14 à 4) est obtenu, permettant d'expliquer de façon satisfaisante la majorité des paramètres mécaniques.



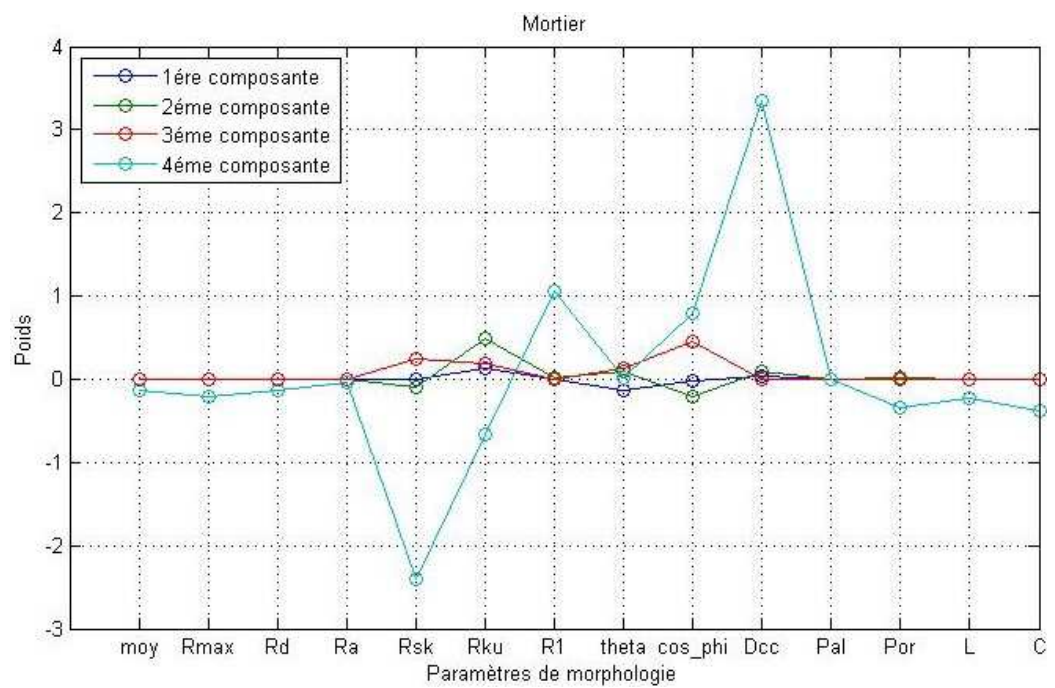


FIGURE 4.14 – Poids des composantes pour chaque paramètre de morphologie et chaque composante pour la série d'essai sur mortier

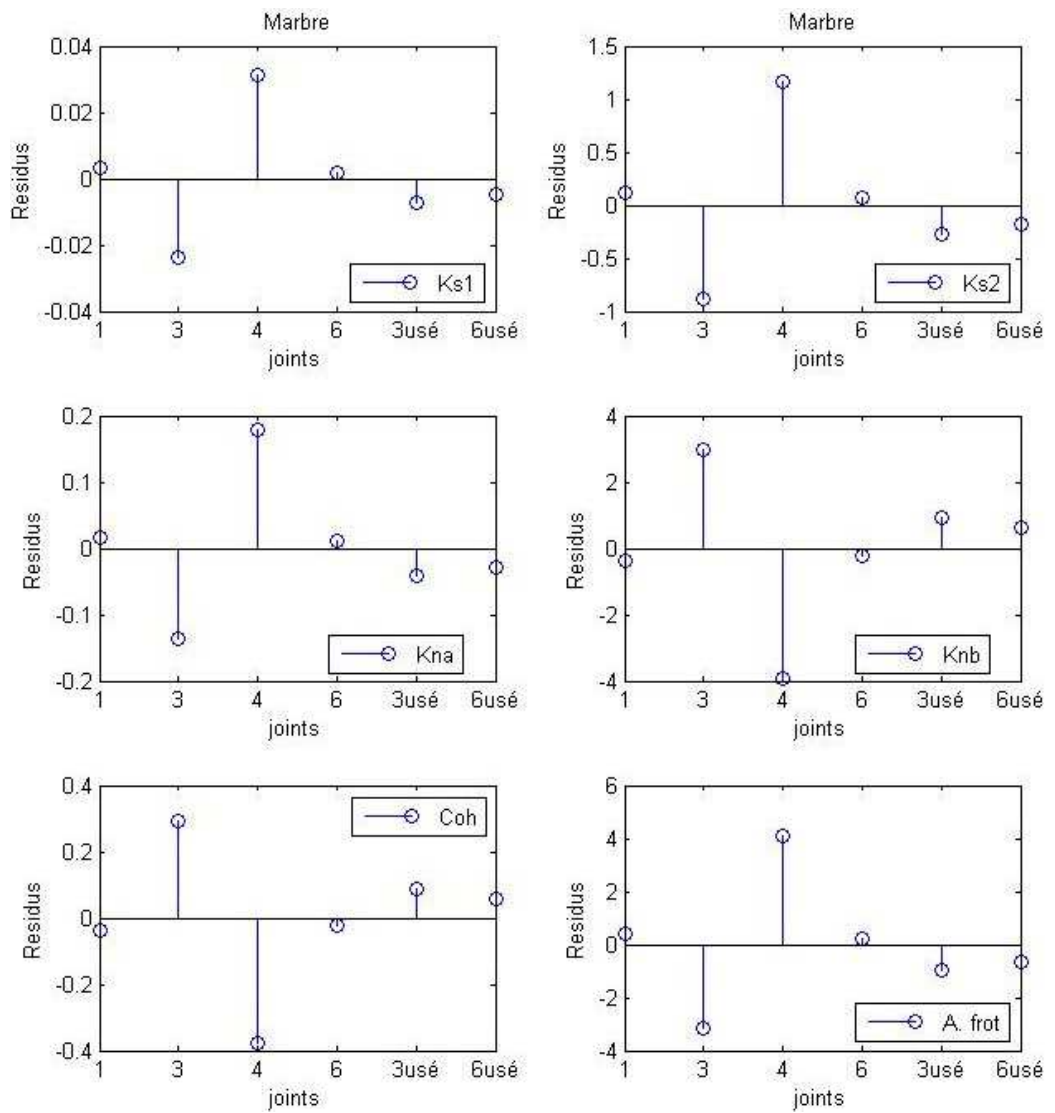


FIGURE 4.15 – Résidus pour chaque paramètre mécanique pour la série d’essai sur marbre

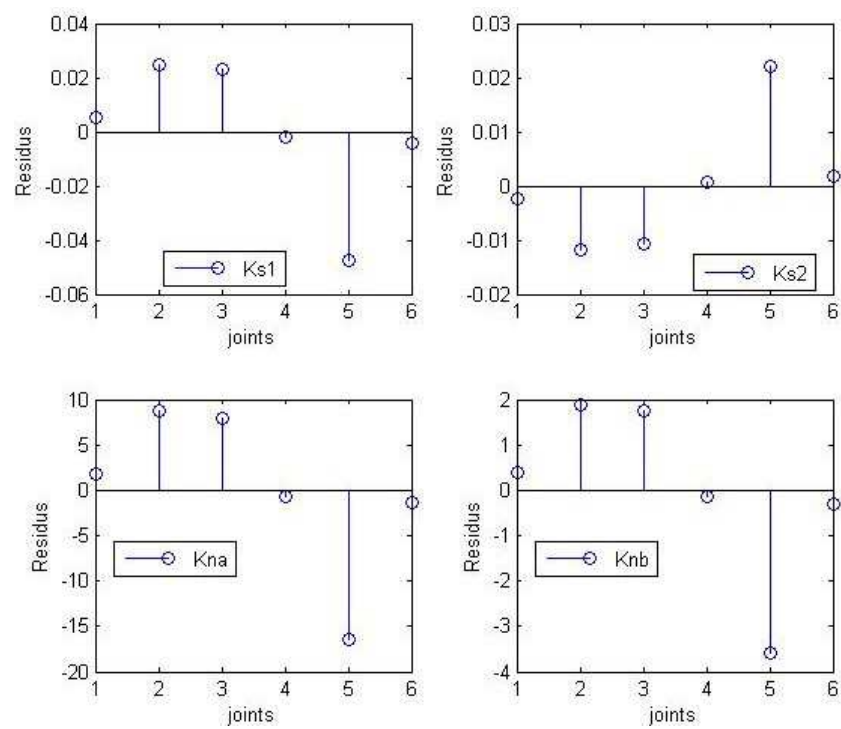


FIGURE 4.16 – Résidus pour chaque paramètre mécanique pour la série d'essai sur mortier

# Conclusion

Cette thèse a pour objectif de développer une méthodologie permettant de simuler le comportement mécanique de statues endommagées, en prenant en compte les surfaces fracturées et en tenant compte des différentes hypothèses de restauration. Le premier objectif est d'apporter aux acteurs de la conservation du patrimoine culturel une nouvelle manière d'évaluer le rôle et la pertinence des éléments de renfort qu'ils conçoivent sur les statues à restaurer. Le deuxième est de dimensionner au plus juste chaque élément ce qui permet ainsi de limiter l'impact des renforts sur l'intégrité de l'œuvre. Il s'agit ainsi de définir les contraintes auxquelles doivent satisfaire les données d'acquisition 3D pour garantir leur utilisation dans un code de calcul mécanique, de choisir et/ou adapter des outils de simulation mécanique existants proposant le meilleur rapport performance/complexité, d'étudier les propriétés mécaniques des contacts frottant entre les interfaces issues des fractures afin d'en tenir compte dans les calculs, et d'être capable de les estimer à partir de la connaissance du matériau et de la morphologie des surfaces en contact.

Le premier chapitre a précisé les contraintes auxquelles doivent satisfaire les données d'acquisition 3D au cours de la procédure de création de ces données (depuis leur acquisition, jusqu'à leur préparation pour la simulation). La méthodologie de reconstruction géométrique a ainsi été présentée dans son ensemble, et a été illustrée par deux exemples de statue. Dans un premier temps, les prises de vue et le recalage ont été présentés. Puis les opérations sur les maillages ont été détaillées (correction de toutes les données erronées potentiellement nuisibles pour la simulation numérique ultérieure). Le bon compromis entre précision géométrique et simplicité du maillage est discuté selon le type de surface : les surfaces extérieures « naturelles » de l'œuvre doivent plutôt rester simples tandis que les surfaces fracturées doivent être définies les plus précisément possible. Différentes techniques d'accostage des morceaux fracturés sont présentées pour réassembler les statues. Les modélisations 1D et 3D des renforts métalliques ont été explorées. Enfin, après avoir reconstitué les volumes, nous avons présenté le modèle prêt à l'import dans

le logiciel de simulation numérique : FLAC3D. Ainsi nous proposons une méthodologie de reconstruction numérique pour la simulation mécanique des œuvres d'art. Ce travail avait été abordé par Adan [6], mais pour reconstruire les pièces manquantes d'une œuvre. Nous proposons ici une méthode d'acquisition optimisée pour la simulation numérique, notamment en assurant la compatibilité du maillage produit avec les contraintes liées à la simulation.

Le deuxième chapitre propose la simulation numérique de statues restaurées par le code de calcul mécanique issu du domaine de la géotechnique, FLAC3D. La modélisation 1D des renforts s'est montrée bien appropriée, la simulation du comportement global est satisfaisante et nécessite des ressources informatiques raisonnables. Grâce à cette méthodologie, nous confirmons la pertinence des choix de restauration adoptés pour la statue de Neptune. La nuance est que cette restauration n'a pas pu suivre la règle de la restauration minimale, puisqu'il est apparu que ses éléments de renfort étaient surdimensionnés. De même, suite à l'étude sur la statue de " Cadmus combattant le dragon de la fontaine de Dircé", nous avons pu déterminer que cette statue (qui a vocation à être exposée) devait être restaurée pour préserver son intégrité. Nous n'avons pas pu mettre en évidence l'efficacité de la solution temporaire adoptée, lors d'un transport par voie routière.

Le troisième chapitre concerne la synthèse de la partie expérimentale de ce manuscrit. Les expériences menées ont eu deux principales objectifs : caractériser le matériau constituant l'œuvre et caractériser son comportement mécanique. Pour suivre les règles s'appliquant au patrimoine culturel, comme celles préconisées dans la charte de Venise [3], les caractérisations compatibles avec ces contraintes sont présentées. Elles sont principalement basées sur des micro-prélèvements ou du contrôle non destructif et permettent d'identifier la provenance des matériaux. Les caractérisations destructives présentées, une fois cette provenance identifiée ont permis de déterminer les paramètres élastiques de la roche et les paramètres de comportement aux interfaces. Les essais sur les joints en contact frottant ont également permis de former une base de travail exploitée par la suite pour pouvoir construire des liens entre comportement mécanique et état de surface.

L'objectif du dernier chapitre est d'établir un lien entre les paramètres morphologiques et les paramètres mécaniques des joints dans le but d'identifier le comportement mécanique des interfaces des blocs de roches des statues, sans avoir recours aux essais de cisaillement sur des joints de roches analogues. La méthodologie présentée s'appuyant sur des outils statistiques consiste en la mise en œuvre de techniques descriptives amorçant une analyse prédictive. Cette approche conduit à un modèle permettant de traduire la réponse mécanique d'une interface selon ses aspérités, et cela à partir des essais expérimentaux que nous avons réalisés. Nous avons démontré que cer-

tains paramètres de morphologie sont fortement dépendants permettant de discerner certains groupes de paramètres apportant une information redondante pour la mise en œuvre des régressions linéaires. Ensuite, des régressions linéaire multiples sur les variables naturelle, et PLS sur des variables artificielles sont appliquées. Suite à ces régressions, nous pouvons établir, pour chacun des deux matériaux, un modèle d'ordre réduit qui permet d'expliquer de façon satisfaisante la majorité des paramètres mécaniques.

Concernant la reconstruction géométrique d'œuvres d'art à partir d'un nuage de point en l'orientant vers la mise au point de modèle pour simulation numérique, plusieurs méthodes ont été explorées. Parmi ces méthodes, certaines sont issues de la littérature, d'autres constituent notre contribution aux problématiques de reconstruction géométrique d'œuvres d'art. Une perspective à ce travail pourrait être l'utilisation d'autres techniques d'acquisition 3D comme la photogrammétrie déjà maîtrisée au sein du CRMD. Cette technique apporterait d'autres contraintes mais réduirait l'investissement matériel à un appareil photographique. Parce que la simulation numérique nécessite des données d'entrée, nous avons proposé une méthodologie de caractérisation envisageable sur les supports particuliers que sont les objets du patrimoine. Notre méthodologie repose cependant sur des moyens assez lourds et pas forcément accessible à tous restaurateurs d'œuvre. Enfin, pour éviter la réalisation de caractérisations coûteuses, nous avons réalisé des essais de compression et de cisaillement sur joints rocheux, tout en caractérisant leur état de surface. L'objectif était de proposer aux restaurateurs des corrélations entre morphologie et réponse mécanique, espérant ainsi qu'avec une caractérisation de l'état de surface d'une fracture, ils puissent retrouver les paramètres mécaniques de contact. La prise en compte des paramètres de la roche intact apporterait peut-être un caractère généralisable à d'autres matériaux. De même une caractérisation sur un nombre plus élevé de matériaux testés permettrait sûrement d'affiner ces corrélations.



# Annexe A

## Étude paramétrique du cisaillement entre deux blocs reliés par un tirant, outil "cable"

Dans cette annexe, une première étude paramétrique est présentée. En faisant varier les caractéristiques des matériaux, on cherche à connaître l'influence des paramètres utilisés. Cette étude a pour but de déterminer comment modéliser le contact entre roche et métal au niveau de l'ancrage du tirant.

Prise en compte d'une loi élastique pour les blocs en tuffeau et d'une loi de Mohr-Coulomb pour les câbles en acier inoxydable.

### A.0.1 Constantes

#### Géométrie

Blocs : chacun est constitué de 3 mailles dans les directions x et y et de 2 dans la direction z.

Câble : il est constitué de 6 segments, son diamètre est de 10 mm (surface :  $7,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ ) et de 20 mm (périmètre : 0,063 m) avec le coulis. Il relie 2 points : (1, 5; 1, 5; 0, 5) et (1, 5; 1, 5; 3, 5).

#### Propriétés mécaniques

Propriété mécanique de la roche : masse volumique du tuffeau :1420 [98]  $\text{kg/m}^3$ , module élastique K (bulk =  $5,6 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ ), module de cisaillement G (shear=  $4,2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ ) [98]

Propriétés mécaniques du câble : module d'Young (emod =  $2,05 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ), résistance à la traction (limite élastique) (ytens=  $1,85 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ ), propriété de



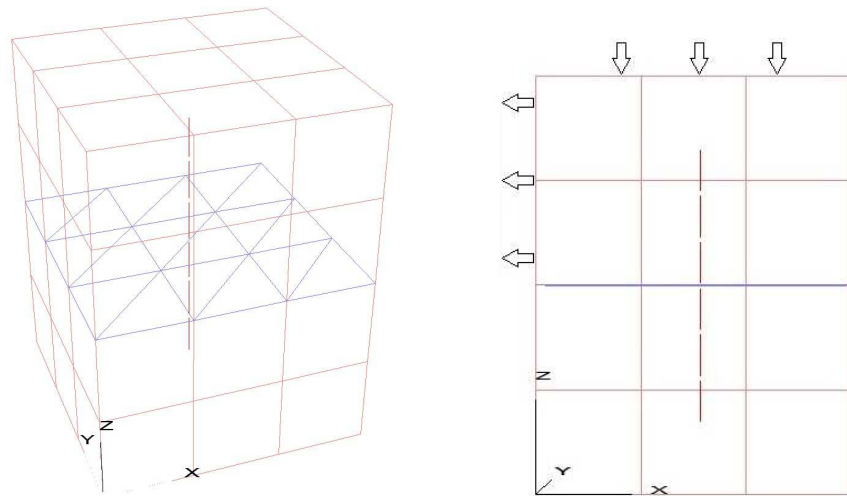


FIGURE A.1 – Géométrie du problème

l'inox [99] dans "Dimensionnement des structures"

Propriétés de l'interface : raideur de cisaillement à l'interface (hypothèse :  $10 k_s = G$  ;  $k_s = 4, 2 \cdot 10^7 \text{Pa}$ ) = contrainte tangentielle / déplacement. En générale, les raideurs d'interface sont égales à 10 fois celles des régions voisines, entre 10 et 100 MPa pour les roches [29].

### Conditions aux limites

- Une contrainte de compression appliquée sur la face du haut du bloc du haut de  $-0,5 \text{ MPa}$ .
- Contrainte de traction appliquée sur la face de gauche sur le bloc du haut (plan yz) de  $-0.5 \text{ MPa}$ .
- Prise en compte de l'accélération de la pesanteur.
- les faces bloquées appartiennent toutes au bloc du bas, ce sont :
  - celle du bas selon z
  - celles de devant et derrière selon y
  - celles de gauche et de droite selon x

### A.0.2 Variables

- Propriété mécanique du coulis :  $E = 14 \cdot 10^6 \text{Pa}$  et  $\nu = 0.25$  [100]
- La cohésion du coulis  $C$  (gr\_coh). Calculs effectués avec valeurs de  $c = 50, 250$  et  $500 \text{ kPa}$
  - L'angle de frottement interne  $\phi$ , (gr\_fric = 30, 40 et 50°) [101] (mortier-brique)

Tableau A.1 – Valeurs testées

Tests	Variables			Résultats			déplacemt X (mm)	déplacemt Z (mm)	contrainte "cable" (MPa)
	Coulis gr_coh (Pa.m)	Coulis gr_fric (°)	Coulis gr_kn (Pa)	Interface fric (°)	Interface coh (Pa)	Interface kn (Pa/m)			
<b>2</b>	<b>25.10<sup>4</sup></b>	<b>40</b>	<b>9,3.10<sup>6</sup></b>	<b>20</b>	<b>50</b>	<b>5,6.10<sup>8</sup></b>	<b>-4.82</b>	<b>-5.43</b>	<b>96.6</b>
1	5.10 <sup>4</sup>	40	9,3.10 <sup>6</sup>	20	50	5,6.10 <sup>8</sup>	-4.82	-5.4	96.6
3	5.10 <sup>5</sup>	40	9,3.10 <sup>6</sup>	20	50	5,6.10 <sup>8</sup>	-4.82	-5.4	96.6
4	25.10 <sup>4</sup>	<b>30</b>	9,3.10 <sup>6</sup>	20	50	5,6.10 <sup>8</sup>	-4.82	-5.4	96.6
5	25.10 <sup>4</sup>	<b>50</b>	9,3.10 <sup>6</sup>	20	50	5,6.10 <sup>8</sup>	-4.82	-5.40	96.6
6	25.10 <sup>4</sup>	40	9,3.10 <sup>7</sup>	20	50	5,6.10 <sup>8</sup>	-4.83	-5.40	282
7	25.10 <sup>4</sup>	40	9,3.10 <sup>6</sup>	<b>10</b>	50	5,6.10 <sup>8</sup>	-4.82	-5.4	96.6
8	25.10 <sup>4</sup>	40	9,3.10 <sup>6</sup>	<b>30</b>	50	5,6.10 <sup>8</sup>	-4.82	-5.4	96.6
9	25.10 <sup>4</sup>	40	9,3.10 <sup>6</sup>	20	<b>0</b>	5,6.10 <sup>8</sup>	-4.82	-5.40	96.6
10	25.10 <sup>4</sup>	40	9,3.10 <sup>6</sup>	20	<b>100</b>	5,6.10 <sup>8</sup>	-4.82	-5.4	96.6
11	25.10 <sup>4</sup>	40	9,3.10 <sup>6</sup>	20	50	5,6.10 <sup>9</sup>	-3.58	-3.66	46.7

- La raideur du coulis (gr\_kn = 9,3.10<sup>6</sup>Pa [100] et 9,3.10<sup>7</sup>Pa)  
Propriété mécanique de la roche (tuffeau) : E = 1.10<sup>9</sup>Pa et ν = 0.2 [98]  
Propriété mécanique de l'interface :
- L'angle de frottement interne à l'interface roche / roche, (fric = 10, 20, 30°) [85] (brique-brique)
- Cohésion à l'interface roche / roche, (coh = 0, 50, 100 Pa) [101] (mortier-brique)
- Raideur normale à l'interface (hypothèse : kn = K = 5,6.10<sup>8</sup>Pa (pour une roche en tuffeau) et kn = 10 K = 5,6.10<sup>9</sup>Pa) = contrainte normale / déplacement

Les déplacements sont du même ordre dans la majorité des cas, légèrement plus faibles dans le cas 11. La contrainte dans le tirant est plus importante dans le cas 6, et moins importante dans le cas 11. Les variations de la cohésion et de l'angle de frottement à l'interface n'ont aucun effet, tout comme les variations de la cohésion et de l'angle de frottement du coulis. Alors qu'une valeur dix fois plus élevée de la raideur normale à l'interface a pour effet de limiter les déplacements dans la direction perpendiculaire à l'interface, mais aussi dans sa direction parallèle et de divisé par deux la contrainte dans le câble, une valeur dix fois plus élevée de la raideur normale du coulis multiplie presque par trois les contraintes dans le câble. Il y a deux façons d'agir sur l'intensité de la contrainte dans le câble : la première limite le glissement du

câble dans le coulis, celui-ci ne peut donc relâcher toute les contraintes qu'il emmagasine ; la seconde consiste à limiter la pénétration du bloc du haut en augmentant la raideur normale à l'interface, la chute de la contrainte dans le câble est donc une conséquence de la faiblesse des déplacements par rapport aux autres cas.

## Annexe B

# Étude paramétrique sur le tirant, outil "cable"

Cette troisième étude paramétrique concerne un paramètre de l'outil "cable" utilisé dans la modélisation du tirant de la statue Neptune. Elle a permis de déterminer la valeur de la cohésion au niveau de l'ancrage, il s'agit de la cohésion dans le coulis qui représente dans le cas de Neptune la cohésion entre la roche et l'ancrage du tirant, le contact entre l'ancrage et le tirant est supposé parfait. Des valeurs de cohésion  $10$  à  $10^7$  N/M ont été testées. L'ordre de grandeur de ces valeurs est plus large que celui relevé dans la littérature. Ces valeurs de paramètres sont comparées aux sollicitations qu'elles engendrent dans les goujons, le tirant, le marbre et la localisation de ces sollicitations. Les valeurs des autres paramètres, constantes dans chaque cas, sont présentées au tableau B.1.

Dans un premier temps, les différentes valeurs de cohésion sont comparées, figure B.1, comme dans l'étude précédente, au pourcentage de sollicitation maximum à chaque nœud du goujon le plus chargé qu'elles engendrent. Il

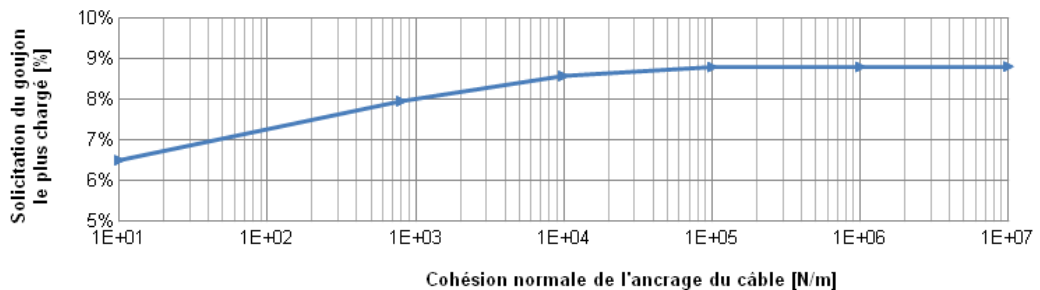


FIGURE B.1 – Variation de la cohésion normale de l'ancrage du tirant en fonction du pourcentage de sollicitation du goujon le plus chargé

<i>Pentelic marble</i>	
Elasticity modulus, E [GPa]	45.6
Poisson's ratio, $\nu$	0.11
Density, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2780
<i>Interface elements</i>	
Normal stiffness, $K_n$ [GPa/m]	5.5
Shear stiffness, $K_s$ [GPa/m]	2.75
Friction angle, $\phi$ [°]	39
Cohesion, C [Pa]	10
<i>Stud elements</i>	
Elasticity modulus, E [GPa]	193
Poisson's ratio, $\nu$	0.29
Density, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7850
Yield tensile strength, [MPa]	300
Normal coupling spring cohesion, [N/m]	$8 \times 10^2$
Normal coupling spring friction angle, [°]	26.6
Normal coupling spring stiffness, [GPa]	2.4
Shear coupling spring cohesion, [N/m]	10
Shear coupling spring friction angle, [°]	26.6
Shear coupling spring stiffness, [GPa]	2.4
<i>Pull cable elements</i>	
Elasticity modulus, E [GPa]	205
Yield tensile strength, [MPa]	700
Grout cohesive strength (anchorage length), [N/m]	Variable
Grout friction angle, [°]	26.6
Grout stiffness, [GPa]	32

Tableau B.1 – Paramètres utilisés dans l'étude paramétrique sur le tirant

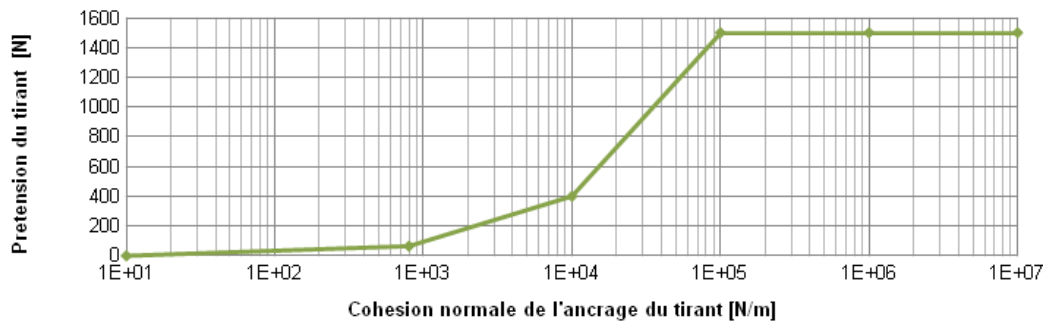


FIGURE B.2 – Variation de la cohésion normale de l'ancrage du tirant en fonction de sa prétension

semble que l'augmentation de cette valeur a pour effet de plus solliciter les goujons jusqu'à un seuil de  $10^5 \text{N/m}$ . Ceci s'explique par le fait que pour des valeurs faibles, il y a glissement au niveau de l'ancrage donc l'effet du tirant est réduit. Sur la figure B.2, on peut constater l'effet de ce glissement sur la prétension du tirant, la prétension initiale imposée est de  $2000 \text{N}$ , la chute de  $500 \text{N}$  dans les cas où il n'y a pas glissement s'explique par l'espace vide présent entre les blocs qui est refermé en premier lieu. Les  $2000 \text{N}$  imposés initialement correspondent à 40% de la force maximale applicable au câble du tirant (limite élastique). Le seuil de  $10^5 \text{N/m}$  se retrouve. Le résultat illustré à la figure B.4 présente pour comparaison, les déplacements horizontaux dans la direction X de deux cas de cohésion,  $8.10^2 \text{N/m}$ , dont la valeur de prétension finale est de  $65 \text{N}$  et  $10^7 \text{N/m}$  qui a une valeur de prétension finale de  $1500 \text{N}$ . Il y a bien moins de déplacements horizontaux du bloc tronc dans le cas (a) où le tirant a de l'influence que dans le cas (b), l'utilité du tirant est donc de maintenir le bloc tronc bien en place et de l'empêcher de se déverser vers la gauche. C'est d'ailleurs dans le but de recentrer les masses des blocs supérieurs sur les inférieurs et donc d'éviter le déversement qu'il a été conçu par Benoit Coignard [22]. Seulement, la conséquence est que le bloc tête se déverse plus dans le cas où l'action du tirant est limitée. La conséquence de la décharge de prétension du tirant lorsque la valeur de sa cohésion est faible se constate à droite de la figure B.3. En effet, le marbre est sollicité en traction autour de l'ancrage avec une valeur de cohésion élevée, maximum  $0,4 \text{MPa}$ , alors que dans le cas où la valeur est faible, on ne distingue pas les effets de cet ancrage dans la roche. Sachant que la valeur de résistance en traction du marbre la plus faible relevée dans la littérature et dans la direction la plus faible de son anisotropie a été mesurée à  $5,3 \text{MPa}$  par un test de traction direct par Kourkoulis [35]. Sur cette figure, on constate aussi qu'une prétension importante du tirant augmente les contraintes dans le marbre au niveau de l'interface B, entre le bloc torse et le bloc genou (de 0 à  $0,4 \text{MPa}$ ). L'illustration de gauche de cette même figure présente l'impact de la valeur de la cohésion du tirant sur les goujons n°3, 4 et 5. Cet impact ne se retrouve pas de manière quantitativement égale entre les goujons. Dans tous les cas, le goujon n°4, situé dans la partie droite de l'interface centrale (jambe côté manquant), est comprimé, plus ou moins en fonction de la précontrainte du câble de traction. La même constante s'applique à la broche n°3 qui est toujours tendue, même avec une prétension élevée dans le câble de traction. Le goujon n°3 est aussi plus sollicité que les autres puisque son diamètre est de  $7 \text{mm}$  alors que celui des goujons n°4 et 5 est de  $12 \text{mm}$ . Le goujon n°4 se situe légèrement à gauche du point de bascule supposé, ce qui signifie que la prétension du tirant le charge certainement en recentrant les charges au dessus de lui. Le goujon le plus sensible est le goujon tendu n°3 qui se

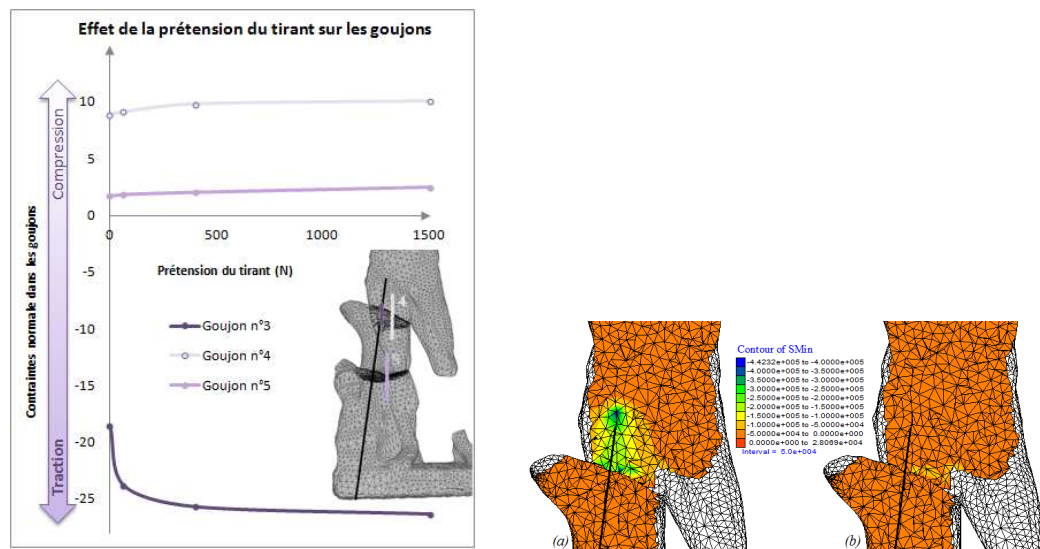


FIGURE B.3 – A gauche : Effet de la prétension des tirants sur les goujons n°3, 4 et 5. A droite : Effet sur le marbre de deux valeurs testées de cohésion à l'ancrage du tirant, (a)  $10^7 \text{N/m}$ , (b)  $8.10^2 \text{N/m}$

situé à l'avant du passage du tirant, le comportement attendu serait que le goujon se décharge à mesure que le tirant se charge. Le comportement inverse observé peut s'expliquer par le fait que la tension du tirant referme la fracture par l'arrière, cela a tendance à créer dans une certaine mesure des forces de traction dans ce goujon. La variation de contrainte dans le goujon n°5 n'est pas significative, et l'observation des déplacements verticaux dans le cas où le tirant est tendu et dans le cas où il ne l'est peu n'est pas significative non plus. Comme le restaurateur n'avait aucun moyen de mesurer la force de tension appliquée au tirant quand il a resserré les vis de prétention, il était nécessaire que le tirant soit surdimensionné, suite à cette étude, on peut affirmer qu'il peut résister au moins aux possibilités que nous avons testées.

Lorsque la tension du tirant est nulle, cas où la cohésion normale du tirant est de  $10^1 \text{N/m}$ , les goujons supportent un effort de traction de  $19,5 \text{MPa}$ , tandis que dans l'ouvrage de Laroze [40], il est mentionné que la résistance à la traction pour l'acier inoxydable avant d'entrer dans la région de plastique est de  $200 \text{MPa}$ , ce qui indique que les goujons sont surdimensionnés pour résister aux efforts auxquels ils sont soumis dans le cas statique.

Quant au comportement des interfaces, l'augmentation de la cohésion de l'ancrage du tirant augmente également l'interpénétration des blocs. La figure B.5 montre comment les contraintes sont mieux réparties sur l'interface lorsque l'action du tirant est maximale, ce qui, de plus, a l'avantage de baisser

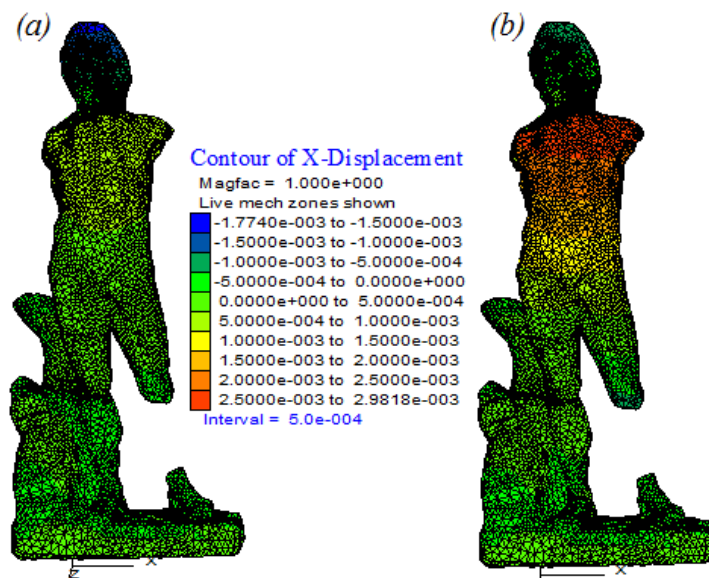


FIGURE B.4 – Comparaison des déplacements horizontaux entre deux valeurs testées de cohésion à l’ancrage du tirant, (a)  $10^7\text{N/m}$ , (b)  $8.10^2\text{N/m}$

les valeurs maximales au niveau des points de contact.

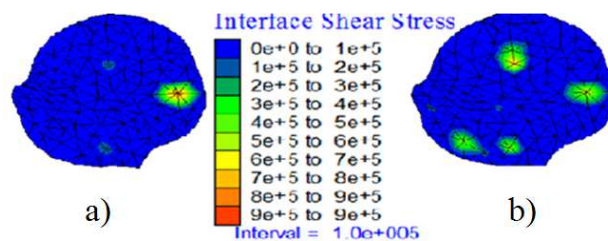


FIGURE B.5 – Influence de la cohésion d’ancrage sur la distribution des contraintes dans le marbre à l’interface B : a) sans cohésion, b) cohésion maximale





## Annexe C

# Étude paramétrique sur la modélisation des goujons, outil "pile"

Cette première étude vise à déterminer l'impact de la variation des valeurs de cohésion et de raideur normale au niveau des interfaces des couples fourreaux-goujons, qui sont des paramètres inconnus et difficilement mesurables. Concernant la raideur normale des interfaces, des formules empiriques, confirmées en pratique, peuvent être utilisées pour limiter une plage de valeurs possibles [DIA 05]. Dans le cas de notre étude la plage des valeurs étudiées de la raideur normale est comprise entre  $2.4 \times 10^9$  et  $2 \times 10^{10}$  Pa. Concernant la cohésion normale des interfaces, l'incertitude est beaucoup plus grande et une plage de valeurs très large a été testée avec des valeurs allant de 10 N/m (cohésion quasi nulle) à 106 N/m (cohésion quasi parfaite). Les résultats de cette étude paramétrique montrent que l'incidence des valeurs de ces paramètres sur la distribution des contraintes dans les inserts et dans le corps de statue est limitée. Ainsi, quelques soient les valeurs des ces paramètres, les contraintes développées au sein de ces éléments sont faibles et donc les couples fourreaux-goujons sont assez peu sollicités. Même dans un des cas les plus défavorables, lorsque la cohésion est de 105 N/m et la raideur de  $2 \times 10^{10}$  GPa, la contrainte maximale n'atteint que 65 MPa pour l'insert n°3 situé entre le torse et le genou. De plus, la raideur normale est peu influente. Pour des valeurs de cohésion élevée, une raideur de  $2 \times 10^{10}$  Pa sollicite à hauteur de 5 % les inserts métalliques (voir Figure C.1) comparativement à sa limite élastique. La flexion du goujon n°1 génère une compression du marbre en aval de la pente de la fracture et une traction en amont, (voir Figure C.2). Pour une valeur maximale de la cohésion de 106 N/m, la contrainte maximale atteint 0.1 MPa. Le travail des goujons en

<i>Pentelic marble</i>	
Elasticity modulus, E [GPa]	45.6
Poisson's ratio, $\nu$	0.11
Density, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2780
<i>Interface elements</i>	
Normal stiffness, $K_n$ [GPa/m]	5.5
Shear stiffness, $K_s$ [GPa/m]	2.75
Friction angle, $\phi$ [°]	39
Cohesion, C [Pa]	10
<i>Stud elements</i>	
Elasticity modulus, E [GPa]	193
Poisson's ratio, $\nu$	0.29
Density, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7850
Yield tensile strength, [MPa]	300
Normal coupling spring cohesion, [N/m]	Variable
Normal coupling spring friction angle, [°]	26.6
Normal coupling spring stiffness, [GPa]	Variable
Shear coupling spring cohesion, [N/m]	10
Shear coupling spring friction angle, [°]	26.6
Shear coupling spring stiffness, [GPa]	2.4
<i>Pull cable elements</i>	
Elasticity modulus, E [GPa]	205
Yield tensile strength, [MPa]	700
Grout cohesive strength (anchorage length), [N/m]	10 <sup>7</sup>
Grout friction angle, [°]	26.6
Grout stiffness, [GPa]	32

Tableau C.1 – Paramètres utilisés dans l'étude paramétrique sur les goujons

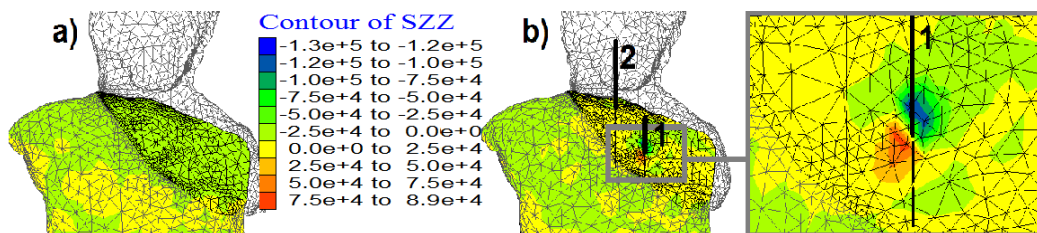


Tableau C.2 – Paramètres utilisés dans l'étude paramétrique sur les goujons

flexion est donc faible lorsque l'on crée une force de précontrainte suffisante dans le tirant. Leur chargement en compression l'est aussi car les charges transitent principalement par les interfaces en blocs de roche.

Cette étude concerne les paramètres de l'outil pile utilisé dans la modélisation des goujons. Elle a permis de déterminer la valeur de la cohésion normale et de la raideur normale. Dans un premier temps des valeurs de cohésion normale ont été testées de 10 à  $10^6 \text{N/M}$ . Dans un deuxième temps les mêmes calculs ont été effectués en changeant la valeur de la raideur normale,  $2,4 \cdot 10^9$  et  $2 \cdot 10^{10} \text{Pa}$ . Ce qui a permis de connaître d'une part l'influence de chaque valeur testée mais aussi de connaître l'influence de la combinaison des paramètres de cohésion et raideur normales. Ces valeurs de paramètres sont comparées aux sollicitations qu'elles engendrent dans les goujons. Les valeurs des autres paramètres, constants dans chaque cas, sont présentées au tableau C.1. La figure C.1 montre l'impact du changement de valeur sur le pourcentage de sollicitation maximum à chaque nœud du goujon le plus chargé. Ces sollicitations ont été calculées à partir des valeurs des forces et des moments dans les trois directions fournis par FLAC3D à chaque nœuds et pour les deux types de goujons : de diamètre 7mm et 12mm. De ces résultats, les contraintes normales et de cisaillement ont été calculées à chaque nœud. Pour chaque contrainte, la valeur du nœud le plus chargé a été relevé, ce sont ces valeurs maximales de contrainte normale et tangentielle qui ont été utilisés pour tracer la courbe présentée à la figure C.1. On observe tout d'abord que la variation de la valeur de la raideur normale a peu d'influence par rapport à la variation de la cohésion normale. Cette influence est même quasi nulle pour des valeurs de cohésion normale inférieures à  $10^3 \text{N/m}$ . Donc une manière de faire en sorte que les goujons transmettent les efforts dans des ordres de grandeur de sollicitations raisonnables, si la valeur de cohésion normale utilisée ne peut être augmentée sans être irréaliste, on peut toujours augmenter la valeur de la raideur normale. Sachant que l'effet de ce paramètre s'inverse en-dessous d'une valeur de cohésion normale située  $3 \cdot 10^2$  et  $10^3 \text{N/m}$ . L'importance de la valeur de la cohésion normale est croissante. A partir d  $10^5 \text{N/m}$ , la valeur de la cohésion normale agit significativement sur le modèle et la valeur de la raideur normale n'a plus d'influence.

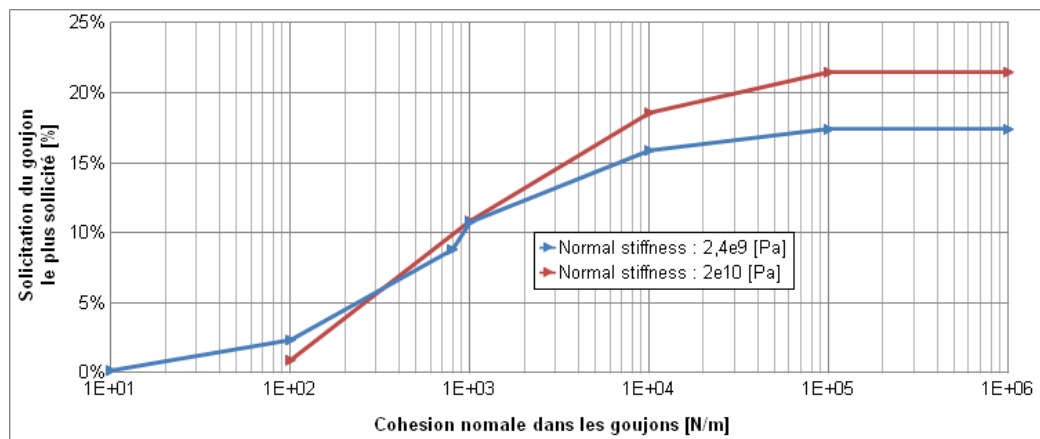


FIGURE C.1 – Variation de la cohésion normale et de la raideur normale dans les goujons en fonction du pourcentage de sollicitation

## Annexe D

# Étude paramétrique sur la modélisation de l'action de l'anneau centrale des goujons, outil "pile"

Cette annexe présente l'étude qui a permis de modéliser l'effet de cet anneau central des goujons. Différents moyens ont été testés, en faisant varier la zone fixée : extrémité supérieure, supérieure et inférieure, sur les nœuds intermédiaires, etc., mais également plusieurs conditions de fixation : nœud fixé par un contact rigide, uniquement dans certaines directions, ou encore imposer des conditions de raideur plutôt qu'un contact rigide. Ces tests ont été effectués à différentes valeurs de cohésions et en bloquant suivant les directions, de manière rigide ou bien en imposant des contraintes de raideur sur certains nœuds de l'outil "pile".

A la suite de cette étude, il apparaît que le calcul ne converge que dans certains cas. Lorsque les deux extrémités sont liées rigidement au marbre, le calcul ne converge pas et on constate, entre autres, que la barre comprimée se tord de façon excessive et la conséquence est qu'elle se déplace à l'intérieur du marbre, ce qui est physiquement impossible. En ajoutant ce type de liaison rigide à tous les nœuds, le problème est réglé et le calcul converge, mais dans ces conditions, on utilise l'équivalent de l'outil "beam" précédemment testé et écarté car il empêche tout mouvement des goujons dans le marbre, ce qui représente également mal la réalité.

D'autres calculs ont été menés en liant rigidement des composantes des nœuds des extrémités et en ajoutant aux nœuds intermédiaires des contraintes de raideur ou des liaisons rigides dans les directions perpendiculaires à la barre. Ces calculs n'ont toujours pas convergé.

190 ANNEXE D. MODÉLISATION DE L'ANNEAU CENTRAL DES GOUJONS




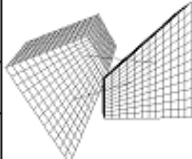

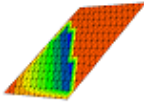
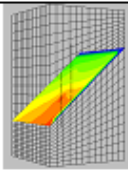
model elas bulk 1.95e10 shear 2.05e10, dens=1000, interface kn 5.5e9 ks 2.75e9 fric 39.1 coh 10, pile : emod=1.93e11 density=7850 nu=0.29 coh=0 k=1.23e9 fric=16.7 ; metal/metal				
pile Co (Nm)	conditions, k(Pa)	Image	Converge	Déplacement maximal
0	Noeuds des extrémités rigides en x,y,z		non	9,50E-02
0	Noeud rigide au milieu, en x,y,z		non	6,00E+02
0	Noeuds des extrémités rigides en x,y,z et k=5e19		non	1,70E-02
0	Aucune		non	1,00E+02
10	Aucune		non	5,50E-02
0	Tous les noeuds rigides en y et z		non	1,90E-01
0	Noeud du bas rigide en x,y,z + tous les noeuds rigides en y et z		oui	3,00E-02
1,00E-05	Noeuds des extrémités bloquées en y,z et k=5.4e11 en z		oui	5,20E+00
1,00E-05	Noeuds des extrémités, k=5.4e11 en z		non	2,30E+00
1,00E-03	Noeuds des extrémités, k=5.4e11 en z		non	1,14E+00
1,00E-05	Noeuds des extrémités, k=5.4e11 en z et k=1e9 à tous les noeuds en x et y		non	8,80E-02
1,00E-05	Noeuds des extrémités, k=1e8 en z et k=1e9 à tous les noeuds en x et y		oui	1,10E-02
1,00E-05	Noeuds des extrémités, k=1e4 en z et k=1e9 à tous les noeuds en x et y		oui	1,30E-02

Tableau D.1 – Résultats des tests sur la modélisation des goujons

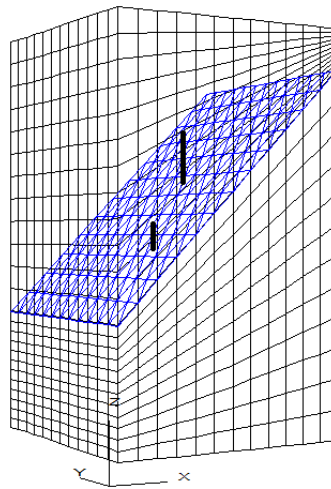


FIGURE D.1 – Géométrie des tests sur la modélisation des goujons

Un calcul ayant convergé consistait à ne lier rigidement les nœuds des extrémités que dans les directions orthogonales à la barre, la direction longitudinale n'était limitée que par une contrainte de raideur. Seulement le résultat était aberrant car les blocs se déplaçaient beaucoup trop et les barres « traversaient » les blocs.

Un autre calcul sans contrainte aux nœuds a été réalisé, il n'a pas convergé et la barre glissait à l'infini. Puis, une cohésion de  $10\text{N/m}$  a été imposée le long du goujon, dans ce cas le calcul ne converge pas mais le comportement de la barre semble correct.

Par la suite il est apparu que les calculs convergeaient plus facilement en appliquant une valeur de cohésion non-nulle, mais parfaitement négligeable.

Toujours en agissant sur les deux nœuds des extrémités, mais au lieu de les bloquer par une liaison rigide, des contraintes de raideur ont été appliquées, des contraintes de raideur sont également appliquées aux nœuds intermédiaires pour éviter que la barre ne « traverse » le marbre. Les résultats de ces modélisations sont satisfaisants, lorsque les contraintes de raideur ne sont pas trop élevées les calculs convergent, les comportements des barres, des interfaces, les déplacements semblent normaux. Cependant, il reste à déterminer quelle valeur de raideur attribuer aux nœuds intermédiaires alors qu'il ne s'agit que de compenser un comportement artificiellement créé en liant les deux extrémités.

Pour éviter cela, un seul nœud peut être lié de façon rigide, le calcul ne converge pas lorsque ce nœud est celui du milieu, au niveau de l'anneau, mais lorsqu'il s'agit du nœud inférieur, le calcul converge, avec des conditions de rigidité, puis de raideur dans les directions orthogonales à la barre, mais aussi



sans celles-ci.

C'est cette modélisation sans contraintes aux nœuds intermédiaires qui a été adoptée dans le calcul final. Ainsi, aucun déplacement relatif entre goujons et fourreaux de part et d'autres de l'anneau central ne peut avoir lieu, mais un déplacement entre l'outil pile et le marbre. Le point fixe étant la partie basse du goujon inférieur dans la modélisation alors qu'en réalité c'est au niveau de l'anneau qu'il se situe.

Les contraintes récupérées par les goujons et transmises d'un bloc à l'autre par leur intermédiaire se transmettent au niveau de l'anneau qui lui-même est en contact avec les fourreaux collés. Ceux-ci redistribuent ces contraintes le long des parois forées. Là encore, il n'y a pas de cohésion, mais seulement un angle de frottement entre goujons et fourreaux. Vu la géométrie de la statue et le chargement, les déplacements se feront d'abord entre goujons et fourreaux puis lorsque les fourreaux sont en butée contre l'anneau entre les fourreaux et la colle, si l'on considère que la liaison fourreaux-colle est plus fragile que la liaison colle-marbre. Or, la modélisation ne permet pas de différencier la nature de la liaison en fonction de tel ou tel cas. Ainsi, par les paramètres appliqués qui correspondent à l'angle de frottement entre métaux et à une cohésion faible, la modélisation ne prend pas en compte le cisaillement qui peut avoir lieu au niveau de la colle.

# Annexe E

## Stabilité de la restauration par collage

Cette annexe est une partie complémentaire à celle du chapitre 2 qui traite des possibilités de restauration de la statue par collage à la résine Epoxy. Elle se propose plus particulièrement de vérifier la fissuration entre la colle et le marbre lors d'une étape de manutention qui pourrait avoir lieu dans un musée. La modélisation a été pensée pour être réaliste, en imaginant qu'il faille porter l'œuvre en la soulevant par ses deux extrémités comme illustré à la figure 2.16 du chapitre 2 page 70.

L'étude sur la restauration par collage de la statue de Neptune a montré qu'il est plus préjudiciable pour l'œuvre que le collage ait des défauts externes qu'internes. Après cette étude il subsiste un doute quant à la validité d'une restauration par collage, et cela, à cause du risque de fissuration.

Cette annexe présente les calculs analytiques simplifiés des facteurs d'intensité de contrainte de chaque interface (pointe de fissure) qui ont été menés pour différentes longueurs de fissure initiale dans le but de quantifier le risque de fissuration.

**Les paramètres des matériaux** Les paramètres liés au marbre de Neptune sont les mêmes que pour ceux utilisés dans les simulations du chapitre 2, partie 2.4.2. De plus, le facteur d'intensité de contrainte critique,  $K_{ICM} = 0,7 \cdot 10^6 \text{Pa} \cdot \text{m}^{0,5}$ , provient de l'étude de Lindborg [49].

Les propriétés de la colle sont également celles de l'Araldite AW106/HV 953U présentées dans ce même chapitre. Le facteur d'intensité de contrainte critique de la colle est de  $K_{ICG} = 2,9 \times 10^6 \text{Pa} \cdot \text{m}^{0,5}$  [102], il s'agit de celui d'une colle similaire à l'Araldite AW106/HV 953U, l'Araldite 600W, qui est également un produit Huntsman.

**Vérifications à la fissuration** Pour s'en assurer, nous avons utilisé la mécanique de la rupture pour effectuer une dernière vérification en calculant le facteur d'intensité de contrainte au raz des défauts de la colle. Cette zone peut représenter l'initiation d'une fissure, la pointe d'une fissure pouvant se situer là où le matériau forme un angle aigu, la figure E.1 illustre le propos. Cette étude s'intéresse toujours au cas de la rupture cohésive du matériau, l'objectif est d'apprécier le risque de propagation dans le cas où l'œuvre est en position couché, portée par ses deux extrémités pendant une phase de manutention. Ainsi, des contraintes de traction, dommageables pour le matériau, vont prendre effet en partie basse de la statue. Des solutions analytiques que l'on trouve dans les handbooks de mécanique de la rupture ont été utilisées pour estimer  $K_I$ . Ces solutions analytiques n'existent que pour des géométries particulières et bien plus simple que celle d'une sculpture. Ainsi, nous avons dû simplifier la géométrie de l'œuvre. La figure E.2 présente les hypothèses simplificatrices faites : la géométrie complexe est illustrée a) et le b) illustre le fait que les fractures aient été projetées sur le plan  $xz$ . La statue est modélisée comme une poutre sur deux appuis. Pour les calculs des moments de flexion, l'hypothèse d'une poutre à section droite a été faite, un  $M_f$  différent a été calculé pour chaque fissure. Cette section a été prise égale à l'aire réelle de l'œuvre au niveau de la projection, puis, les moments quadratiques ont été calculés pour une section rectangulaire équivalente, figure E.2 d), en prenant en compte le fait que les fractures sont excentrées de l'axe neutre moyen de la statue entière, figure E.2 e). Pour plus de réalisme, nous avons également fait varier le chargement le long de la poutre qui représente l'œuvre, figure E.2 c), en appliquant une charge fixe superposée à une charge répartie. Puis, nous pouvons calculer la valeur de la contrainte de traction maximale extraite dans la direction  $Y$  :  $\sigma_{yy}$ , voir figure E.2.

Les facteurs d'intensité de contrainte ont été estimés en appliquant la formule analytique de Newman et Raju [103] dans le cas d'initiation de fissures de surface (pour représenter les défauts externes de collage), la géométrie est illustrée à la figure E.3. Dans notre cas,  $\sigma_0 = \sigma_{yy}$  et nous présentons des résultats en fonction de la profondeur de la fissure,  $a$ . Dans un second temps, ils peuvent être comparés au  $K_{IC}$  de chaque matériau, car, seule la ténacité du marbre est connue, et non celle du marbre collé. Ainsi, avec la géométrie simplifiée et en suivant les résultats de Hutchinson [45], le graphe figure E.4 nous indique que la fracture inférieure est sensible à la fissuration si des défauts d'encollage créent des fissures de quatre centimètres. En effet, le  $K - I$  calculé dépasse la ténacité du marbre ( $K_{ICM} = 0,7 \cdot 10^6 \text{Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$  [49]). Ainsi la ténacité de la résine epoxy ( $K_{ICG} = 2,9 \cdot 10^6 \text{Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$  [102]) est supérieure aux facteurs d'intensité de contrainte estimés pour les trois fractures.

Avec ces hypothèses, le paramètre de Dundur  $\epsilon$  vaut 0,049 et la fonction de

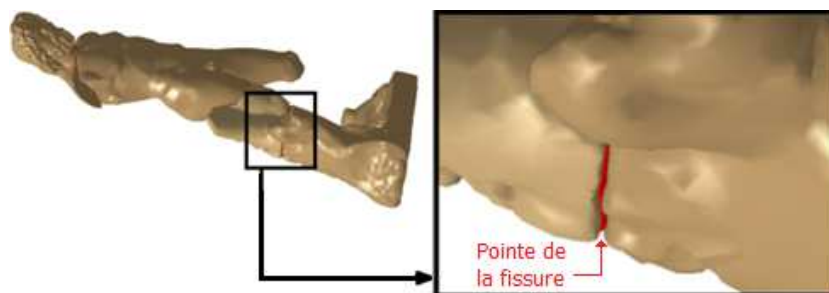


FIGURE E.1 – Joint imparfait entre le marbre et la colle : pointe d’une fissure

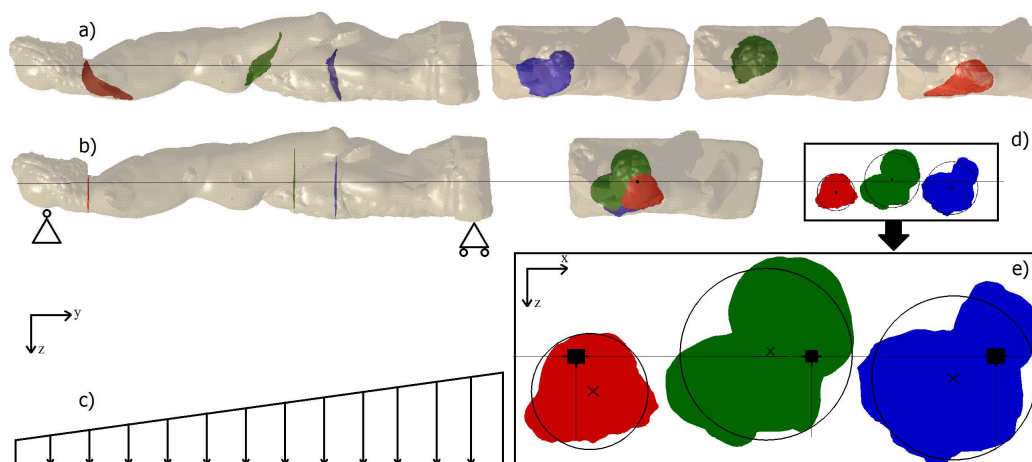


FIGURE E.2 – Modélisation de la statue pour le calcul analytique des facteurs d’intensité de contrainte

correction  $f_I(\alpha, \epsilon)$  varie entre 0,95 (pour  $a=0,01m$ ) et 0,98 (pour  $a=0,07m$ ) ; ainsi le résultat de la longueur de fissure critique est légèrement différent.

L’estimation des facteurs d’intensité de contrainte nous a permis de montrer le défaut de stabilité que nous présumons dans une condition particulière : la maintenance de l’œuvre. Il est donc possible d’affirmer que la restauration par collage, si elle est mal réalisée, menace l’intégrité de l’œuvre.

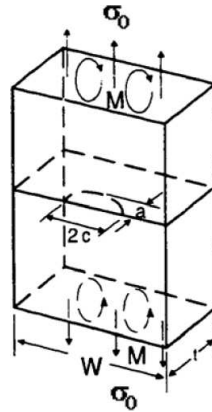


FIGURE E.3 – Géométrie du problème de la solution analytique proposée par Forman et Shivakumar [104]

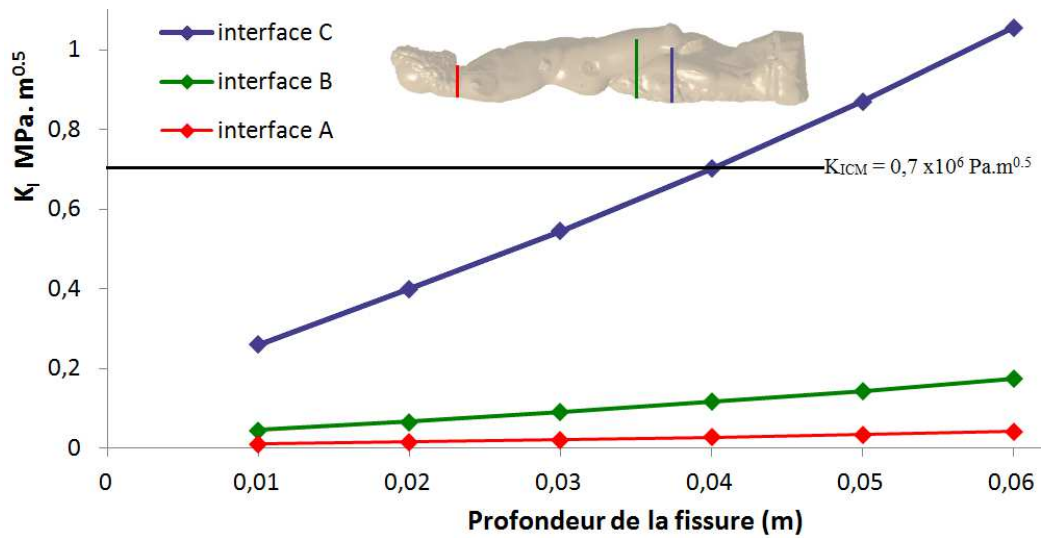


FIGURE E.4 – Résultats des calculs analytiques sur le calcul des FICs : évolution pour les trois fractures du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la dimension du défaut

## Annexe F

# Résultats des analyse sur lames minces

Ces analyses sur lames minces prélevées sur du marbre de Dionysos, la roche analogue choisie dans notre étude, elles ont été réalisées par le CICRP.

Le document présenté par l'auteur des analyses, Philippe Bromblet, est reproduit dans cette annexe.

30 septembre 2013

# Analyse lames minces Orléans

Philippe Bromblet

CICRP

## **N°1 Marbre blanc à veines grises (Grèce)**

Il s'agit d'un marbre blanc à grain fin (taille moyenne des cristaux 500µm)

Maximum grain size (MGS) 1mm

Texture hétéroblastique

Contours courbes à indentés

Structure mosaïque

Faible orientation (stress)

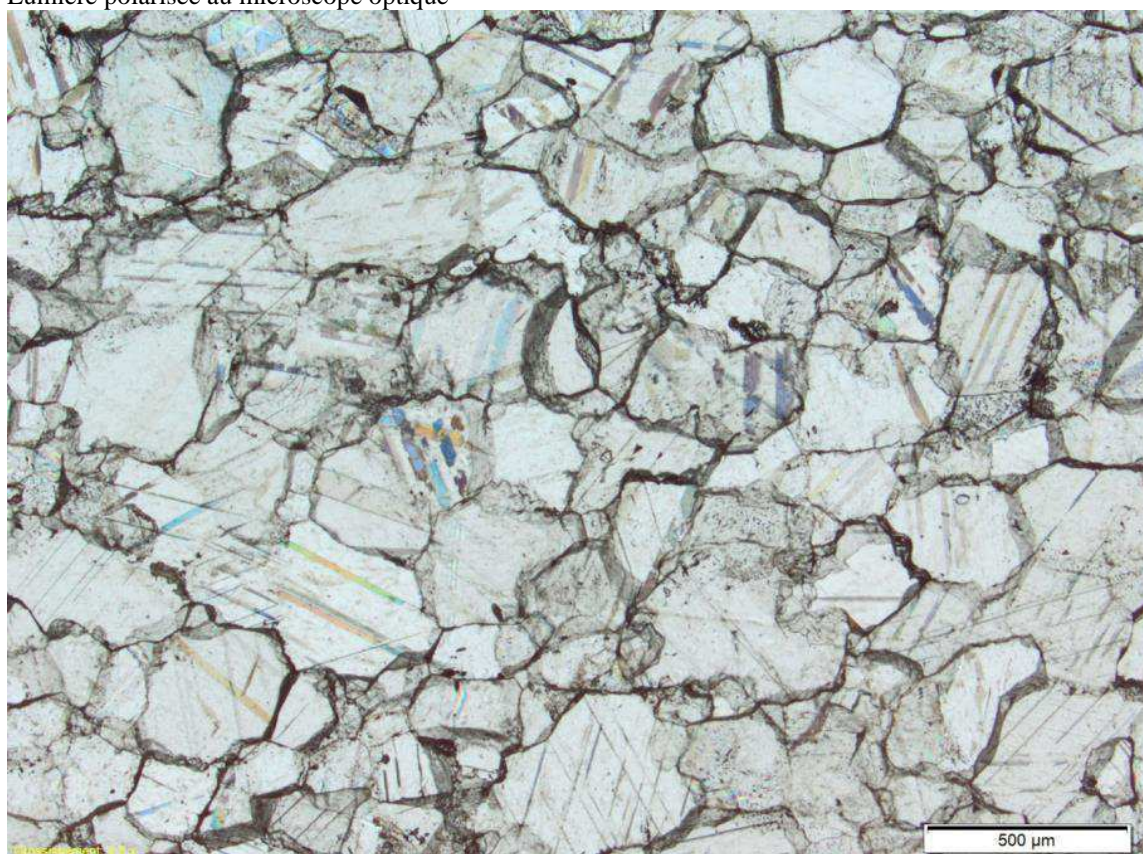
Ce faciès correspond parfaitement aux caractéristiques du marbre du Mont Penteli au nord d'Athènes.

La provenance pourrait être confirmée par des analyses isotopiques (carbone, oxygène) et l'étude du cathodofaciès.

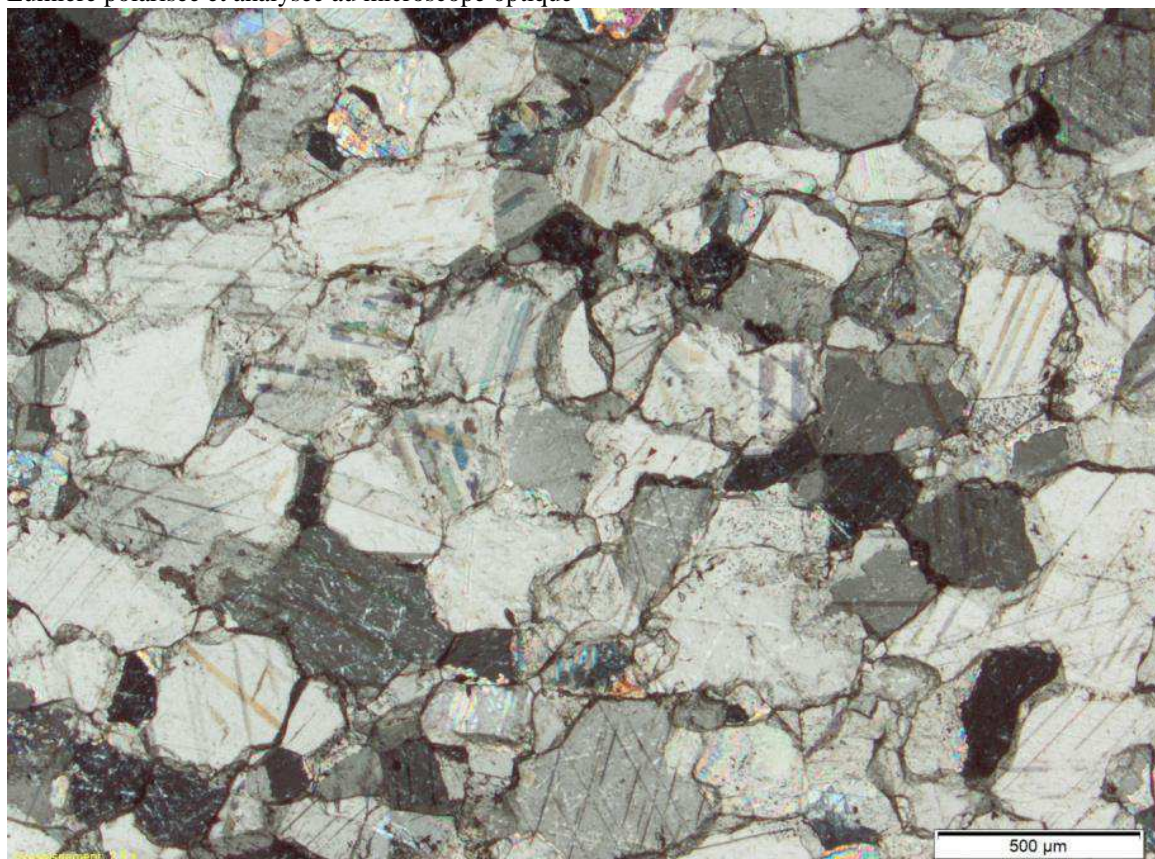
Référence bibliographique :

Lazzarini L., Archaeometric aspects of white and coloured marbles used in antiquity: the state of art, *Per Mineral*. 2004, 73, Special issue 3: A show case of the Italian research in applied petrology, 113-125.

Lumière polarisée au microscope optique



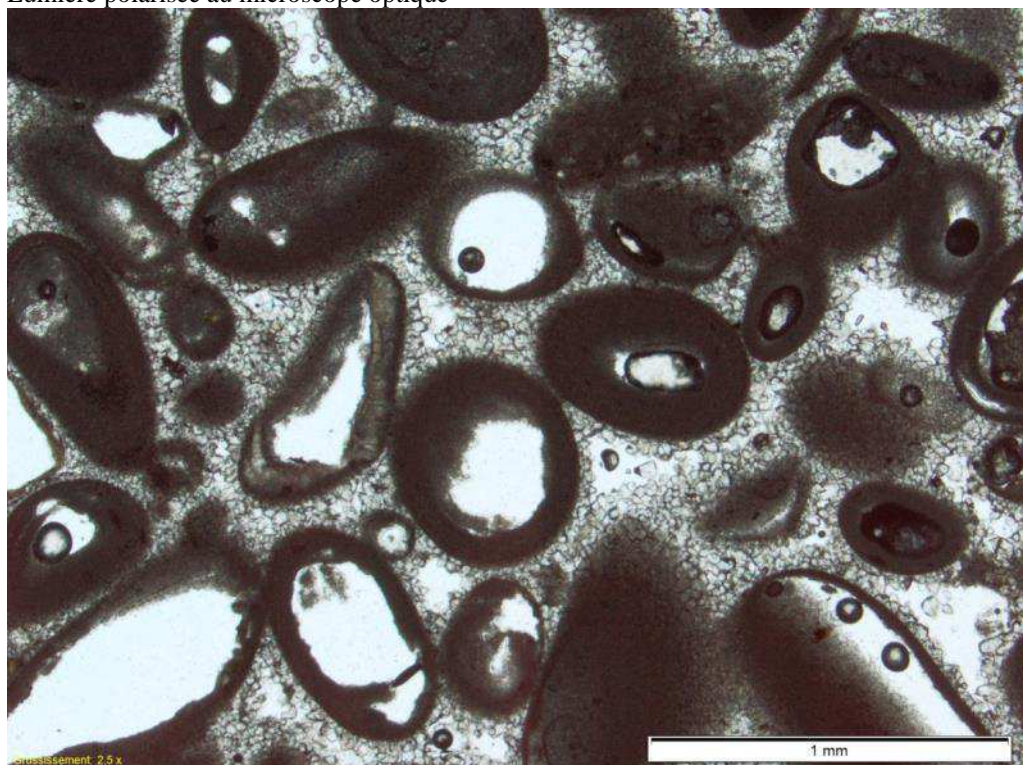
Lumière polarisée et analysée au microscope optique



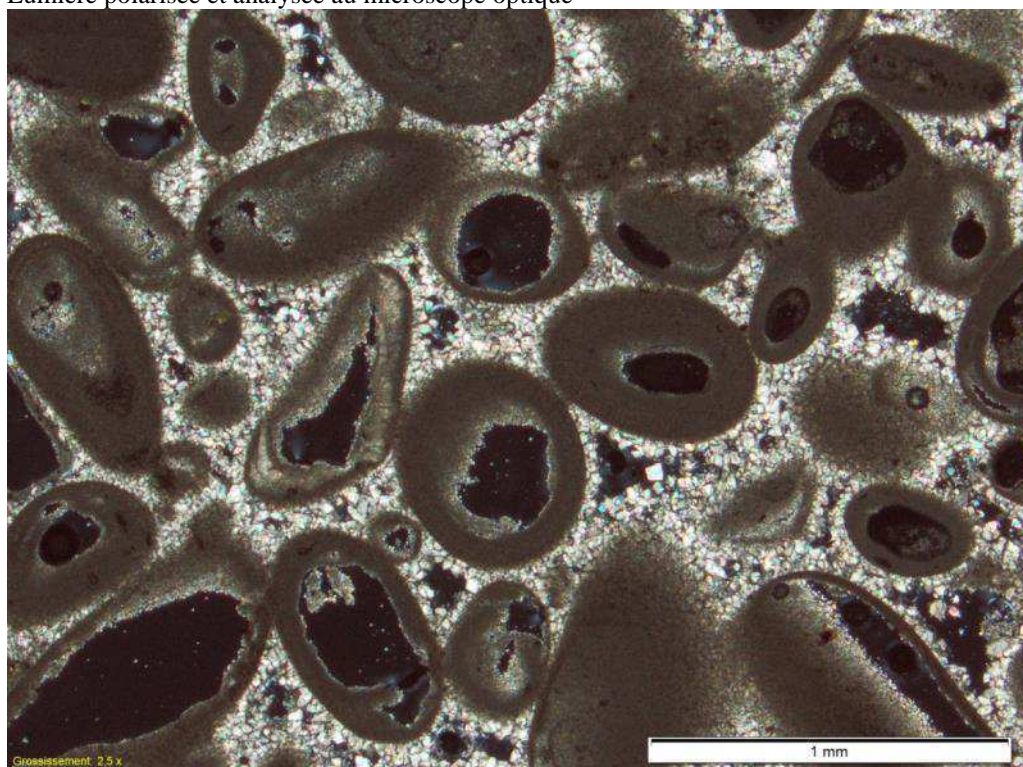


**N°5 Historic Namrud (cœur) :** Il s'agit d'un calcaire oolithique à ciment de calcite sparitique (oosparite ou grainstone à oolithes selon les classifications respectives de Folk et Dunham). La cimentation est tardive et incomplète.

Lumière polarisée au microscope optique

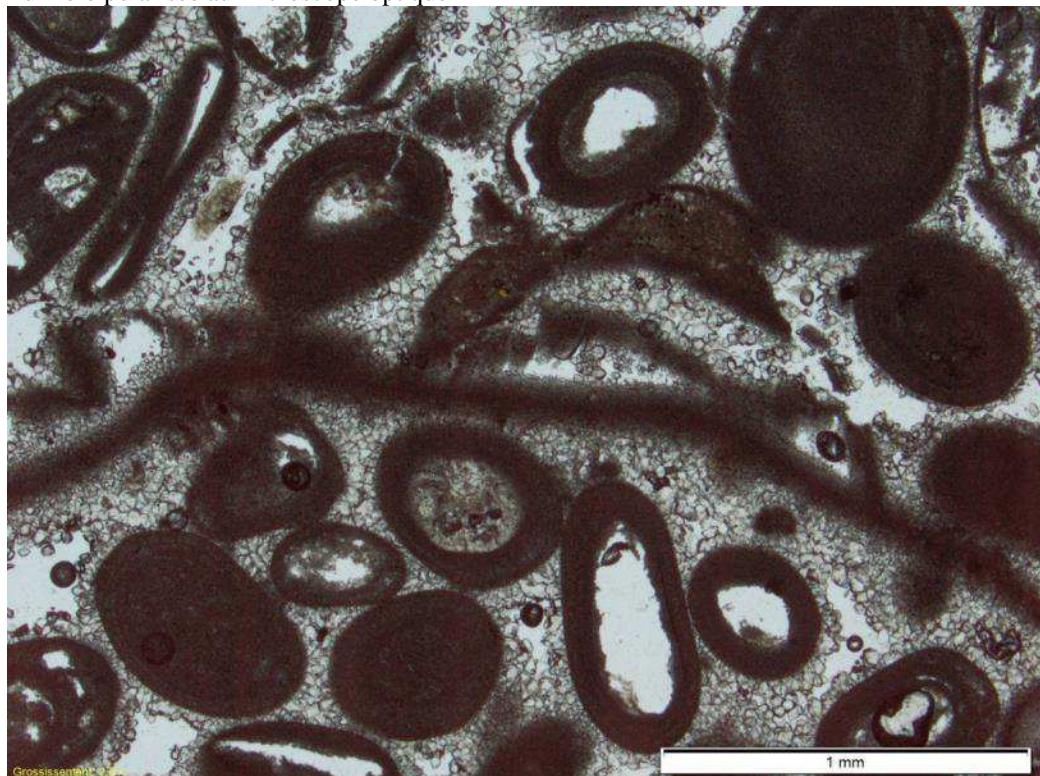


Lumière polarisée et analysée au microscope optique

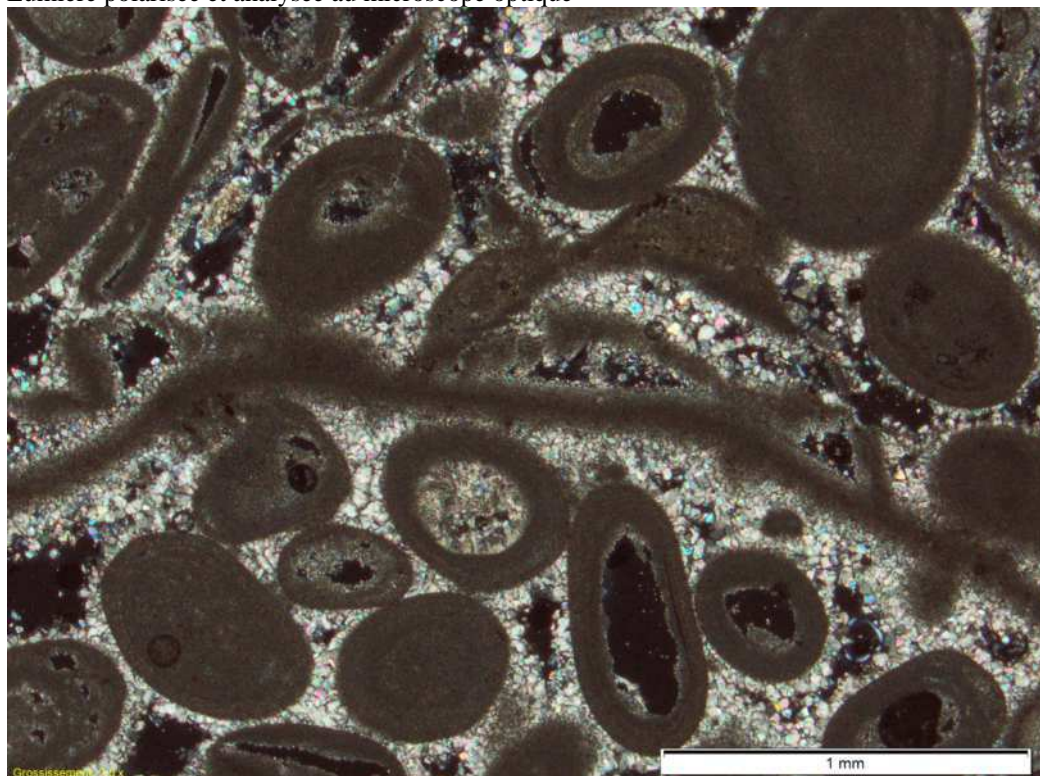


**N°6 Historic Namrud (surface) :** Il s'agit du même calcaire oolithique (oosparite ou grainstone à oolithes selon les classifications respectives de Folk et Dunham). La macroporosité entre les grains (oolithes) est plus importante que dans l'échantillon précédent (à cœur) = dissolution

Lumière polarisée au microscope optique

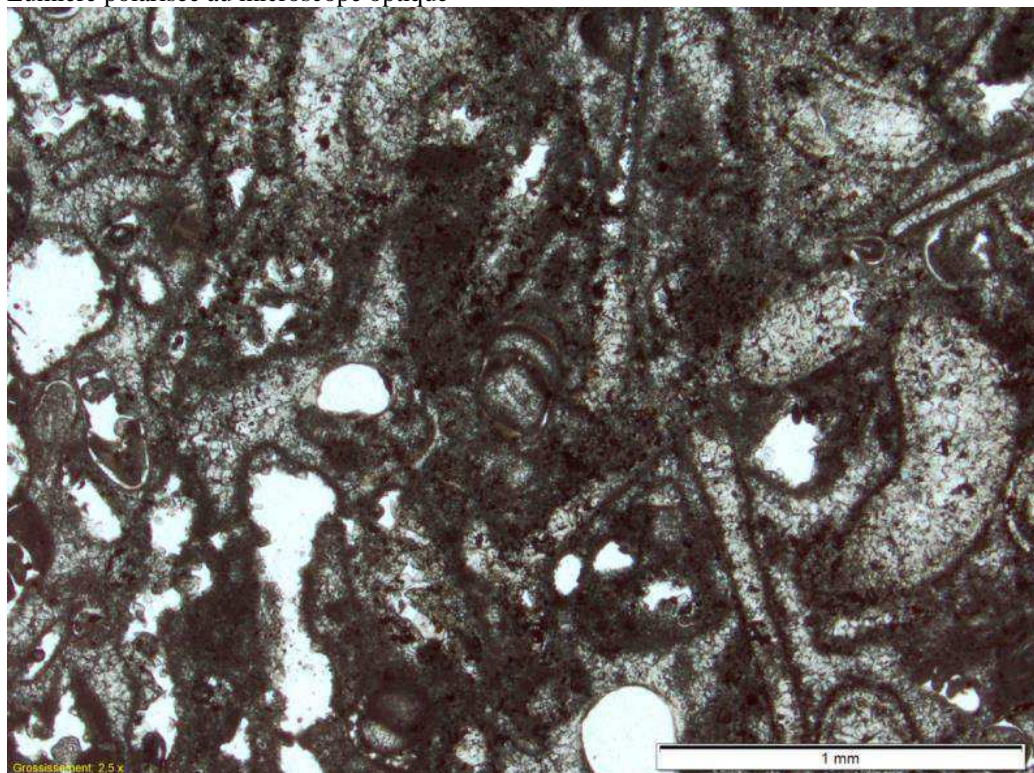


Lumière polarisée et analysée au microscope optique

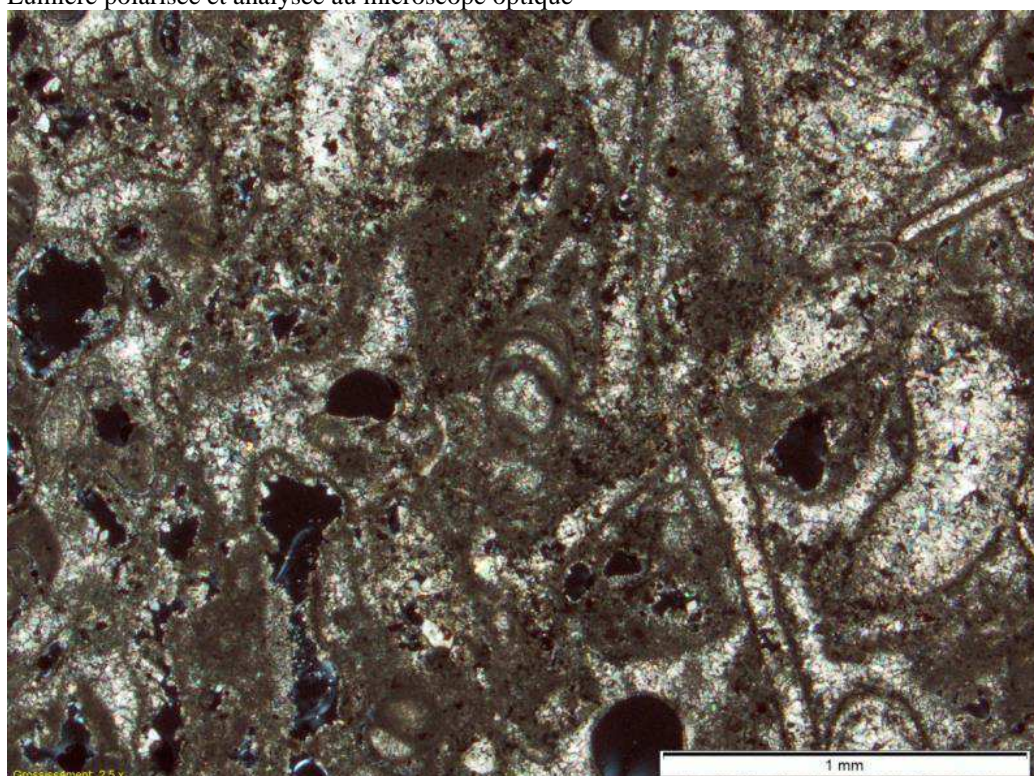


**N°7 fresh stone Namrud** : Calcaire bioclastique (lamellibranches, gastéropodes...) à ciment sparitique (bioparite ou grainstone à bioclastes selon les classifications respectives de Folk et Dunham). Le faciès diffère des échantillons 5 et 6, mais le matériau appartient aussi à une plateforme carbonatée marine peu profonde de milieu agité. Il peut donc provenir du même site d'extraction (à quelques dizaines de mètres) que les échantillons 5 et 6.

Lumière polarisée au microscope optique



Lumière polarisée et analysée au microscope optique



# Annexe G

## État de surface

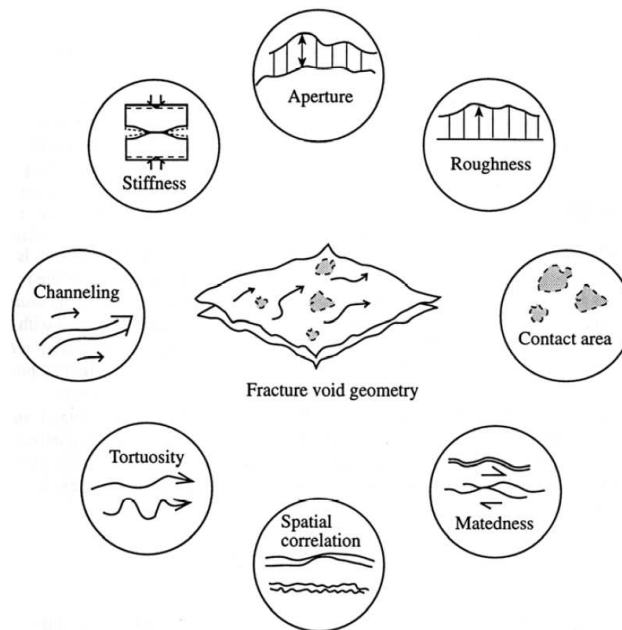


FIGURE G.1 – Propriétés des fractures, tiré de Hakami [105]

La caractérisation des surfaces de fracture au sein des roches est assez imprécise. Hakami [105] propose une liste de propriétés permettant de décrire cette géométrie, elle est illustrée sur le schéma de la figure G.1.

Barton [106] définit ces mêmes propriétés de la manière suivante :

- ouverture (aperture) : séparation entre deux surfaces,
- rugosité (roughness) : distribution des hauteurs ou de la forme des surfaces,

- zones de contact (contact area) : zones où les surfaces sont en contact et peuvent transférer des contraintes,
- inadéquation (matedness) : correspondance et emboîtement entre surfaces,
- corrélation spatiale (spatial correlation) : variation de taille des ouvertures d'un point à l'autre,
- raideur ou rigidité (stiffness) : propriété mécanique du joint,
- tortuosité et channeling : paramètres liés à l'écoulement d'un fluide dans un joint.

Ces propriétés dépendent de l'espace vide de la fracture.

Cette étude bibliographique porte sur la caractérisation des interfaces entre joints rocheux. Les parties concernant la caractérisation de la rugosité et celle des raideurs sont beaucoup plus développées au chapitre 3, car elles servent de base à la partie expérimentale sur les joints.

## G.1 Ouverture

La morphologie des joints est le plus souvent décrite le long de profils, ainsi Zimmerman [107] définit une fracture rocheuse en 2D par trois distances,  $d$ ,  $z_1$  et  $z_2$ , voir figure G.2 (a), ce qui permet de décrire une fonction pour définir son ouverture :

$$h(x, y) = d - z_1(x, y) - z_2(x, y) \quad (\text{G.1})$$

où  $h$  est l'ouverture et sa valeur moyenne peut s'écrire :

$$h_L = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L h(x, y) dx \quad (\text{G.2})$$

En 3D, Hakami [105] donne une définition de l'ouverture  $b(x, y)$ , voir figure G.2 (b), où  $h$  est l'ouverture. Sa valeur moyenne peut s'écrire :

$$h_L = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \iint_A b(x, y) dx dy \quad (\text{G.3})$$

## G.2 Rugosité

Pérales [85] définit la rugosité comme les irrégularités de surface de la roche à l'échelle du grain. La rugosité d'une surface influence son comportement en cisaillement. Elle peut se caractériser de plusieurs façons : JRC

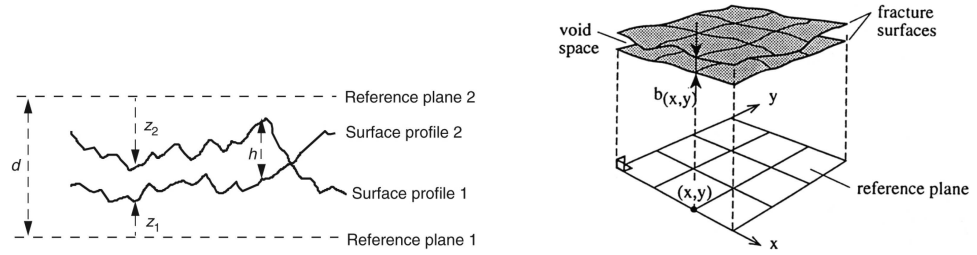


FIGURE G.2 – (a) Profils de fracture rugueuse, (b) Ouverture d'une fracture,  $b(x, y)$

(Joint Roughness Coefficient) mis au point par Barton [86], facteurs statistiques, séries de Fourier, mais aussi par des méthodes fractales et spectrales. Les travaux de Barton et Choubey [108] permettent de quantifier l'état de surface d'une fracture par l'indice JRC, de 0 pour une surface lisse à 20 pour une surface rugueuse. Le JRC peut être caractérisé selon deux méthodes, la première est visuelle et l'autre est empirique. La méthode visuelle se base sur la comparaison entre le profil de l'interface étudiée et les profils de la figure G.3 sur laquelle différents états de surfaces sont représentés avec le JRC leur correspondant.

La méthode empirique permet de retrouver le coefficient JRC par le biais de l'essai de basculement (ou tilt test). Les deux épontes formant le joint sont inclinées jusqu'au glissement. L'angle d'inclinaison  $\alpha$  est déterminé et le JRC calculé par :

$$\text{JRC} = \frac{\alpha_s - \phi_r}{\log \frac{\text{JCS}}{\sigma_{n0}}} \quad (\text{G.4})$$

où JCS (Joint Compressive Strength) est la résistance en compression uniaxiale du matériau,  $\alpha_s$  est l'angle d'inclinaison au départ du glissement,  $\sigma_{n0}$  est la contrainte normale au joint au départ du glissement et  $\phi_r$  est l'angle de frottement résiduel. La contrainte normale est calculée par :

$$\sigma_{n0} = \frac{W \cos \beta_s}{A} \quad (\text{G.5})$$

où  $w$  est la masse du bloc supérieur,  $A$ , la surface de contact brute et  $\beta_s$  est l'angle d'inclinaison. Une valeur de JRC est alors affectée à chaque profil.

Tse et Curden [109] définissent le JRC par le calcul du RMS par  $n$  le nombre de points mesurés et  $z$  l'amplitude de la rugosité :

$$\text{RMS} = \left[ \frac{1}{n} \int_{x=0}^{x=n} z^2 dx \right]^{0.5} \quad (\text{G.6})$$

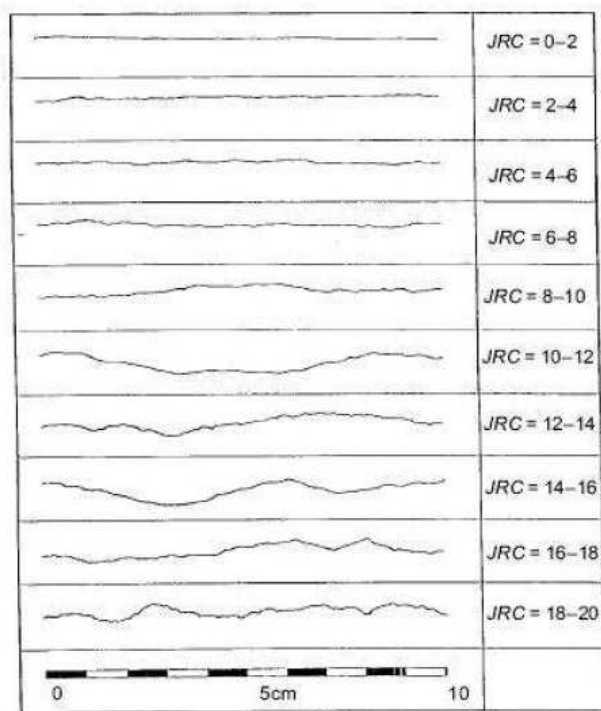


FIGURE G.3 – Profil de rugosité de la roche et valeur du JRC équivalent, tiré de Barton et Choubey, [108]

### G.3 inadéquation et zone de contact

L'inadéquation fait référence au fait qu'un joint soit emboîté ou non emboîté. Cette problématique se retrouve plus souvent dans l'étude des joints appliqués à la compréhension du comportement de massifs rocheux fracturés, dans lesquels, il peut y avoir des mouvements relatifs entre les deux parties du joint, ce qui nuirait à un bon emboîtement. La recalcification des joints naturels peut également être une cause de mauvais emboîtement. Les conséquences sont bien évidemment une diminution de la surface de contact entre les deux épontes. Cet aspect sera pris en compte par la suite, car une fracture usée, comme celles de Neptune, dont les blocs ont séjourné plusieurs siècles sous l'eau se remet forcément moins bien en place qu'une fracture plus récente. De plus, le type de sollicitation imposée au joint va solliciter des zones différentes des épontes. Lors d'un essai de compression simple, les zones mobilisées sont très différentes de celles qui le sont lorsque le joint résiste au cisaillement.

Nous apportons également un nouveau paramètre de morphologie qui doit encore être évalué. La base de donnée est cependant très restrictive car elle ne s'applique que sur deux matériaux différents et sur un faible nombre d'éléments différents. Une campagne expérimentale plus importante est nécessaire pour pouvoir construire avec plus de certitude des liens entre comportement mécanique et état de surface.





# Annexe H

## Modèles de comportement des joints rocheux

Il existe beaucoup de modèles de comportement permettant d'estimer les valeurs de la contrainte de cisaillement résiduelle et au pic (critère de rupture) en fonction de la contrainte normale. Peu de modèles se concentrent sur la partie pré-pic. Le comportement en compression est aussi présenté.

En CNL, Goodman [68] modélise le comportement tangentiel d'un joint comme illustré à la figure 3.15 page 105, avec  $U_p$  et  $U_r$ , les déplacements correspondant à l'initiation des comportements au pic et résiduels; à ces déplacements correspondent aussi des contraintes au pic  $\tau_p$  et résiduelles  $\tau_r$ . Dans ce modèle,  $U_p$  et  $U_r$  sont fixes, quel que soit l'état de contrainte normale.

En compression, Bandis [75] propose :

$$\sigma_n = \frac{unKn_iV_m}{V_m + un} \quad (\text{H.1})$$

avec  $V_m$  : la fermeture maximum du joint,  $K_{ni}$  : raideur normale initiale du joint. D'autres modèles existent comme le modèle exponentiel. Plus récemment, Rong [110] a proposé deux autres modèles, appelés  $g - \delta$  et  $g - \lambda$ .

Le modèle LADAR de Ladanyi [111] prédisant la rupture de la rugosité et le glissement. Il faut connaître l'angle de dilatance à  $\tau_p$  (de la courbe du déplacement normale sur le déplacement tangentiel)  $v$ , l'angle de frottement de surfaces lisses du même matériau  $\phi_\mu$ , la résistance en compression du matériau dont les joints sont fait, le pourcentage de surface en contact  $\alpha_s$ , etc.

$$\tau_p = \frac{\sigma_n(1 - \alpha_s)(\dot{v} + \tan \phi_\mu) + \alpha_s S_r}{1 - (1 - \alpha_s)(\dot{v} \tan \phi_f)} \quad (\text{H.2})$$

avec  $\phi_f$  : l'angle de frottement du joint (Mohr Coulomb),  $S_r$  : la résistance en cisaillement du matériau dont sont fait les joints.

$$\alpha_s = 1 - \left(1 - \frac{\sigma_n}{\sigma_t}\right)^{1,5} \quad (\text{H.3})$$

$$\dot{v} = \left(1 - \frac{\sigma_n}{\sigma_t}\right)^4 \tan i_0 \quad (\text{H.4})$$

avec  $i_0$  : l'angle de dilatance sans contrainte normale

Ce modèle LADAR a servi de base à la construction du modèle de Saeb et Amadei [112]. Il précise une partie linéaire en pré-pic (qui correspond à la définition de  $K_s$ ) :

$$\tau = K_s u_s \quad (\text{H.5})$$

En post-pic,  $u_n$  est une fonction de  $u_s$  et  $\sigma_n$ . Ce modèle utilise le modèle de Bandis en compression, équation H.1.

Le comportement normal de ce modèle a été révisé par Souley [113] qui considère que la fermeture du joint  $V_m$  ne varie pas avec le nombre de cycle. Ce modèle prend en compte le durcissement du joint en sollicitation normale :

$$K_{ni(1)} = \frac{K_{ni(u_n l)} + K_{ni}}{2} \quad (\text{H.6})$$

avec  $K_{ni}$  : la raideur normale initiale,  $K_{ni(1)}$  : la raideur normale initiale au premier cycle,  $K_{ni(u_n l)}$  : la raideur normale initiale en décharge lors de l'essai de compression.

Le modèle de Saeb et Amadei a également été revu par Usefzadeh [114] qui propose un comportement en cisaillement en CNL, dont une phase en pré-pic :

$$K_{tn} = \frac{\partial \tau}{\partial v} = K_{nn} \left(1 - \left(1 - \frac{u}{u_p}\right)^2\right) \frac{\partial \tau_p}{\partial \sigma_n} \quad (\text{H.7})$$

$$K_{tt} = \frac{\partial \tau}{\partial u} = K_{nt} \left(1 - \left(1 - \frac{u}{u_p}\right)^2\right) \frac{\partial \tau_p}{\partial \sigma_n} + 2 \frac{\tau_p}{u_p} \left(1 - \frac{u}{u_p}\right) \quad (\text{H.8})$$

avec

$$\tau_p = \sigma_n (\phi_\mu + i) (1 - \alpha_s) + \alpha_s S_r \quad (\text{H.9})$$

et

$$K_{tt} = \frac{K_{tn} K_{nt}}{K_{nn}} + 2 \frac{\tau_p}{u_p} \left(1 - \frac{u}{u_p}\right) \quad (\text{H.10})$$

$$\begin{Bmatrix} \partial \sigma_n \\ \partial \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{nt} \\ K_{tn} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial v \\ \partial u \end{Bmatrix} \quad (\text{H.11})$$

Simon [115, 116] présente un modèle appelé CSDS qui propose la modélisation empirique du comportement en cisaillement, phase pré-pic incluse, à partir des données résiduelles et au pic en CNL :

$$\tau = \mathbf{a} + \mathbf{b} \exp^{-c\mathbf{u}} - \mathbf{d} \exp^{-e\mathbf{u}} \quad (\text{H.12})$$

$\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{e}$  sont des paramètres du modèle,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} > 0$ ,  $\mathbf{c} < \mathbf{e}$ , avec  $\mathbf{a} = \tau_r$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c} = \frac{5}{\mathbf{u}_r}$  et  $\tau$  est la contrainte de cisaillement,  $\mathbf{U}$  le déplacement en cisaillement.

Ici, les déplacements  $\mathbf{U}_p$  et  $\mathbf{U}_r$  sont considérés comme étant indépendants de la contrainte normale. L'auteur propose de déterminer  $\tau_r$  par le modèle de Mohr Coulomb sans cohésion, de trouver  $\mathbf{U}_p$  avec le modèle de Barton et Bandis [78] et  $\tau_p$  avec le modèle LADAR modifié de Saeb [111, 117].



# Annexe I

## Résultats des essais mécaniques sur les joints

### I.1 Joints de marbre

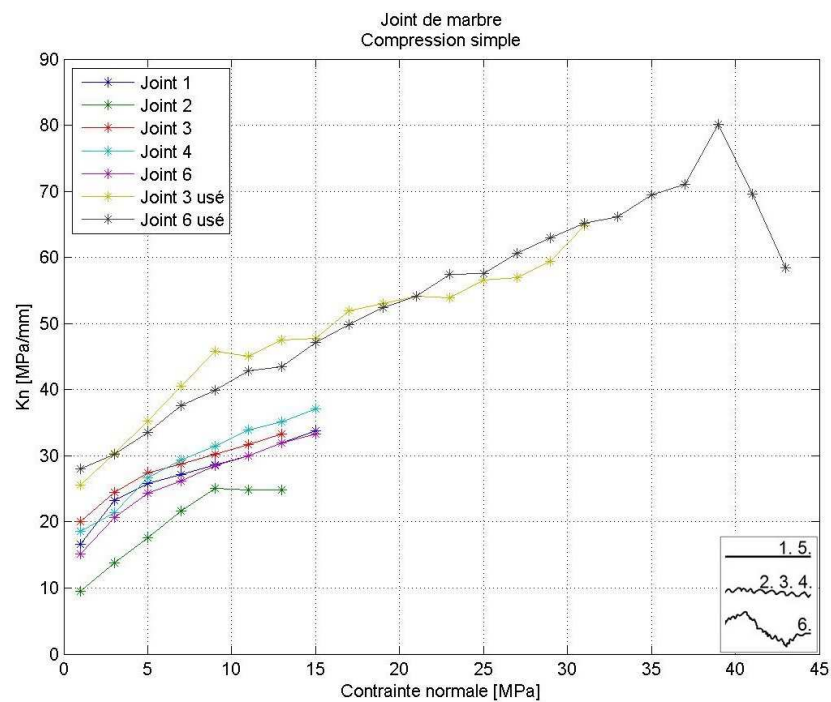


FIGURE I.1 – Kn, joints de marbre

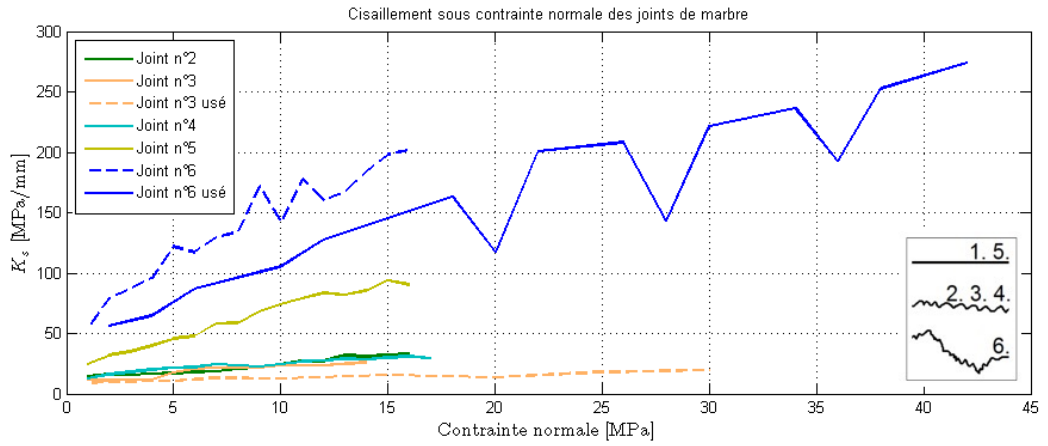


FIGURE I.2 –  $K_s$ , joints de marbre

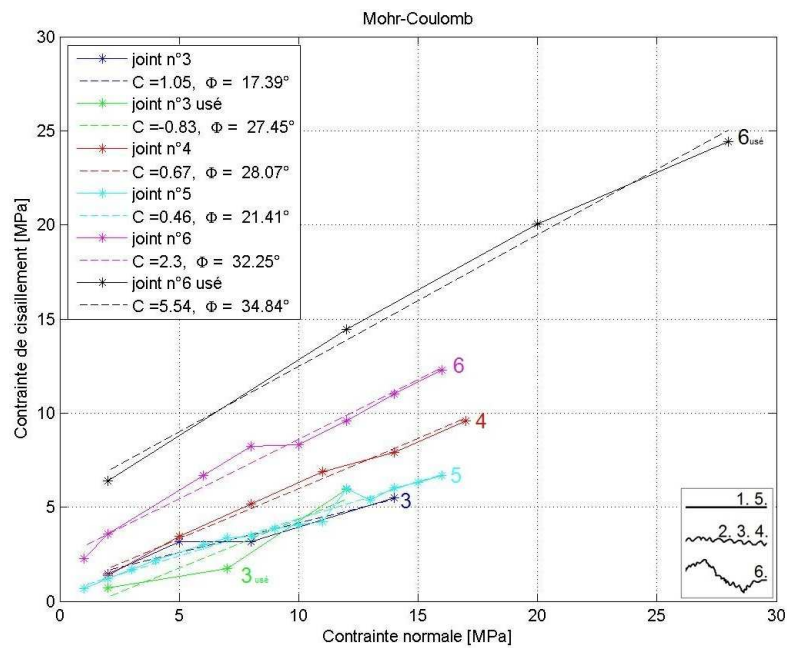


FIGURE I.3 – C (Mpa) et  $\phi$ , joints de marbre

## I.2 Joints de mortier

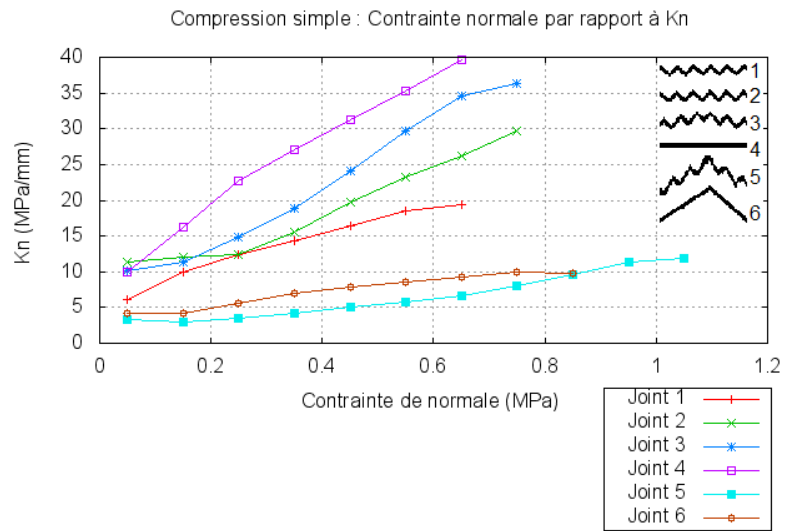


FIGURE I.4 –  $K_n$ , joints de mortier



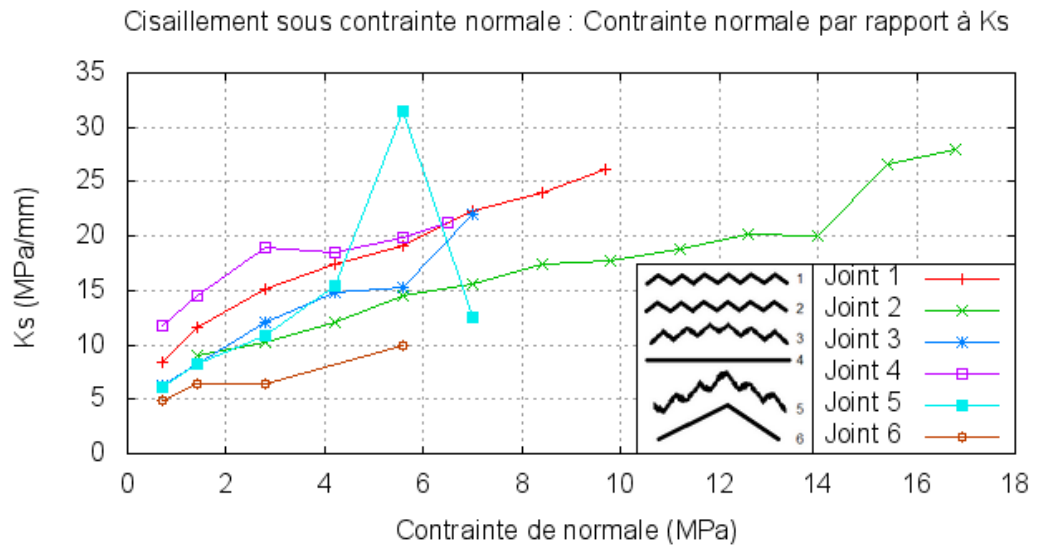


FIGURE I.5 –  $K_s$ , joints de mortier

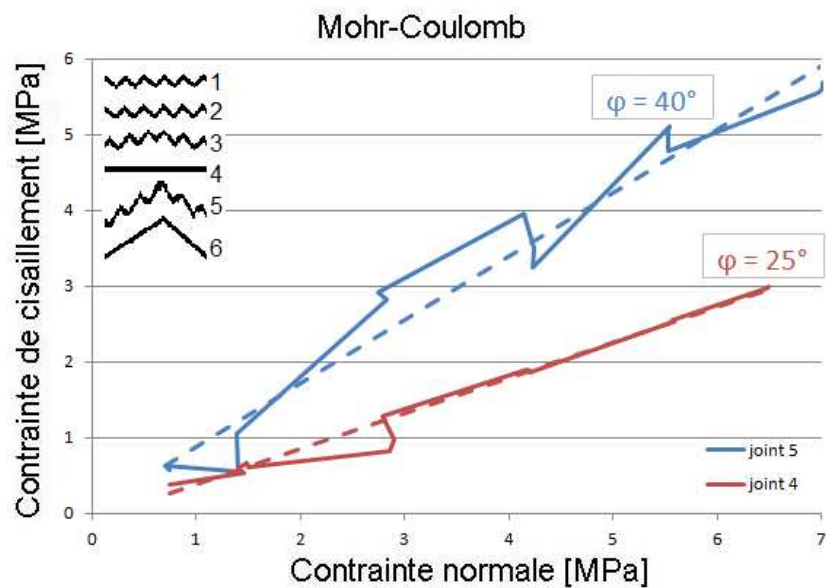


FIGURE I.6 –  $\phi$ ,  $C$  étant quasi nul, joints de mortier

## Annexe J

# Campagne expérimentale sur les joints rocheux, déroulement des essais

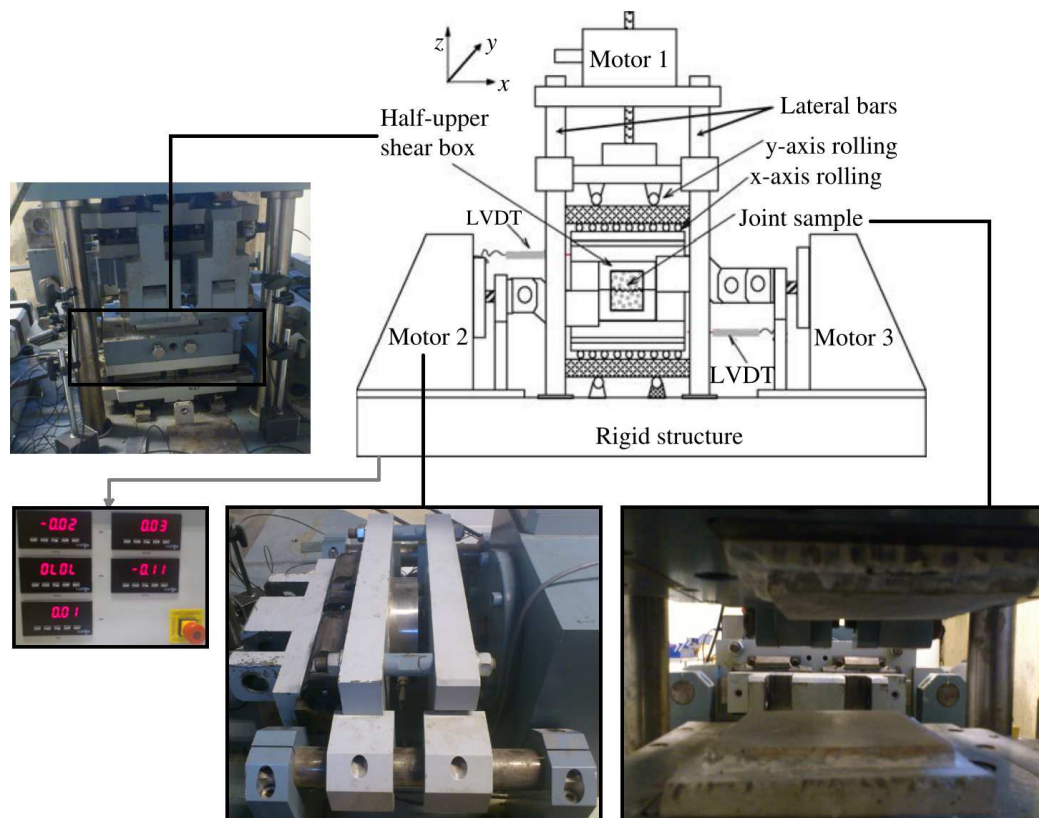


FIGURE J.1 – Schéma de la machine de cisaillement, adapté de Belem [84]

**Machine de cisaillement** Les essais ont été réalisés au laboratoire Géo-Ressources (UMR 7359) sur le site de l'École Nationale Supérieure de Géologie de Nancy. La machine de cisaillement est illustrée figure J.1. Cette appareil permet de réaliser des essais de compression simple et de cisaillement direct grâce à deux systèmes de mise en charge (vertical et horizontal), sur des joints d'au maximum 12 cm de coté. Les essais de cisaillement direct peuvent être réalisés à contrainte normale constante (CNL : Constant Normal Load) ou à raideur normale constante (CNS : Constant Normal Stiffness). Les essais présentés, ont été réalisés à CNL, car contrairement aux fractures des massifs rocheux, dans le cas des œuvres d'art, rien n'empêche la dilatance des épontes au cours du cisaillement.

Le joint mis en place dans la boîte de cisaillement et est soumis à un effort normal constant qui est appliqué sur la surface de l'échantillon. Ainsi, s'il y a glissement lors du cisaillement, l'évolution des surfaces en contact et donc de la contrainte appliquée sont négligées. L'effort horizontal est fourni par deux moteurs à courant continu, les vitesses de ces moteurs peuvent être changées et précisément contrôlées.

**Préparation des joints** Beaucoup plus d'études sur les joints ont été menées sur des états de surface créés artificiellement. Soit par la réplique de joints naturel comme celles de Flamand ou Sabbadini [118, 119], soit en créant à la scie les formes désirées comme dans l'étude de Patton [67]. Les essais que nous avons menés ont également été faits sur des joints artificiels.

Deux séries de joints de structures différentes ont été réalisées, la première série a été réalisée en mortier (d'un rapport  $\frac{e}{c}$  de 0,4) et la deuxième en marbre de Dionysos (le marbre s'approchant le plus de celui de la statue de Neptune). Les joints ont été fabriqués soit par sciage, soit par fracture du matériau. Les surfaces rugueuses ont été réalisées par flexion deux ou trois points en tentant de d'imposer deux types de forme à la fracture, la première plutôt plane, mais néanmoins rugueuse et la deuxième plutôt courbe, toujours rugueuse. Une entaille à la scie sur blocs, plus ou moins orientée a (relativement) permis de guider le front de fissuration. Ces joints sont présentés dans les tableaux J.2 et J.1. Les éprouvettes sont de forme cubique, celles en mortier mesurent 120 mm de côté, tandis que les celles de marbre mesurent 80 mm de côté, car elles ont préparées selon des protocoles différents pour être introduit dans la boîte.

**Mise en place des joints** Avant la première série d'essais, le protocole de préparation des joints pour leur mise en place dans la boîte de la machine de cisaillement nous a été transmis par le laboratoire GéoRessources. Ce



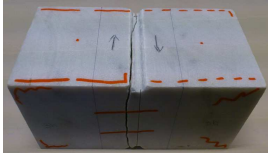
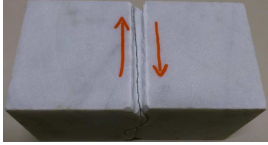
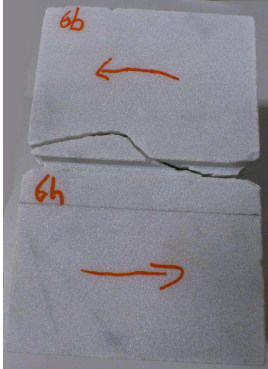
Échantillon n°	Illustrations
1 et 5 : interface lisse, droit	
2 : interface rugueux, droit	
3 : interface rugueux, droit	
4 : interface rugueux, droit	
6 : interface rugueux, non-droit	

Tableau J.1 – Illustration des morphologies de joint de marbre







Échantillon n°	Illustrations
1 : interface rugueux, droit	
2 : interface rugueux, droit	
3 : interface rugueux, droit	
4 : interface lisse, droit	
5 : interface rugueux, non-droit	
6 : interface lisse, non-droit	

Tableau J.2 – Illustration des morphologies de joint de mortier



FIGURE J.2 – À gauche, joint de mortier préparé selon le premier protocole GéoRessources et à droite, joint de marbre préparé selon le nouveau protocole

protocole est prévu pour préparer des carottes prélevées sur site, de forme cylindrique. Les joint de mortier ont été inclus dans un moule aux dimensions de la boîte, dans lequel un autre mortier de composition semblable a été coulé. Pour protéger les joints, le protocole prévoit de couler une couche de plâtre à mi hauteur du moule, entre deux couches de mortier. Pour éviter que du plâtre ne s'infiltré dans les joints, nous les avons protégés en périphérie avec une bande de pâte à modeler. Une fois le mortier pris, les échantillons ont été démoulés et nettoyés du plâtre et de la pâte à modeler. Ce protocole, très efficace, à tout de même le désavantage d'être long et lourd en terme de mise en œuvre.

Pour préparer la deuxième série de joints, les joints de marbre, nous avons mis au point un nouveau protocole avec les membres du laboratoire GéoRessource. Ce protocole nous a également permis de réduire la taille des échantillons, car nous ne possédons qu'une faible quantité de ce marbre importé de Grèce. Nous avons ainsi fait fabriquer des cales en acier qui ont été collées aux échantillons avant d'être mis en place dans la boîte. La diminution de la section des joints a également permis de les tester sous de plus grandes contraintes normales.

Les joints préparés par les deux protocoles sont illustrés à la figure J.2. Nous n'avons pas noté de différences particulières lors de la mise en place des échantillons préparés selon le premier ou le deuxième protocole.

### Déroulement des essais

Les paramètres  $C$ ,  $\varphi$  et les raideurs tangentielles et normales pour chaque éprouvette seront mesurés. Ces essais sont conduits en faisant varier les contraintes normales et tangentielles. Pour ne pas user les interfaces, la plu-

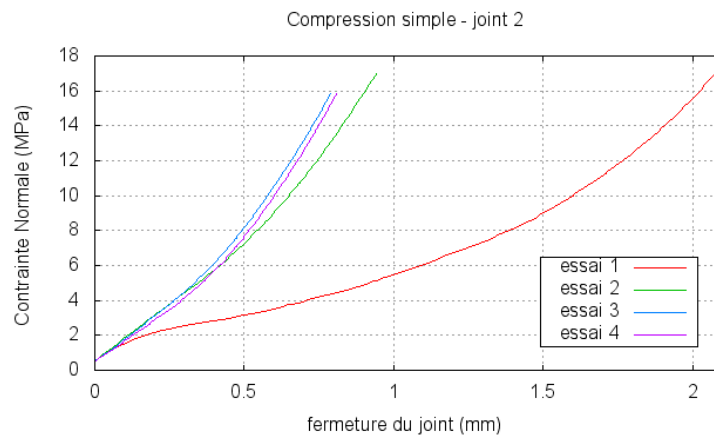


FIGURE J.3 – Cycle de fermeture du joint de mortier n°2, les charges sont représentées, pas les décharges

part des essais ont été stoppés avant l'initiation du premier glissement pour calculer les raideurs, mais pour calculer  $C$ ,  $\varphi$ , certains ont été conduits jusqu'à la rupture du joint. Malgré cela, nous considérons que la morphologie du joint reste inchangée du début à la fin de la série d'essais.

**compression simple** Une fois les deux demis épontes mises en place dans la machine de cisaillement, seul le moteur vertical est actif. Une charge de compression dont l'augmentation est constante est appliquée par l'intermédiaire d'un moteur à qui nous avons imposé une vitesse de déplacement de 0,5 mm/minute. En même temps, quatre capteurs LVDT relèvent le déplacement entre les deux épontes et un capteur de force mesure la charge appliquée. Les mesures de contraintes appliquées et de déplacement sont donc enregistrées selon un pas d'acquisition pré-déterminé en fonction du besoin. Les essais de compression ont été réalisés avant ceux de cisaillement, car ils permettent d'ajuster la mise en place des deux épontes.

La fermeture et la réouverture d'un joint ne suivent pas les mêmes chemins sur les premiers cycle de charge-décharge, comme illustré à la figure J.3, il existe une hystérésis. Ainsi, les résultats présentés proviennent du troisième essais de compression.

**cisaillement direct** Dans cette configuration, les moteurs horizontaux et verticaux sont actifs. Une contrainte normale quasi-constante de compression est appliquée par l'intermédiaire du capteur de force vertical, tandis que les moteurs verticaux se déplacent à une vitesse constante de 0,1 mm/minute. Le joint est ainsi cisailé. Dès qu'il y a rupture du joint (c'est-à-dire glissement

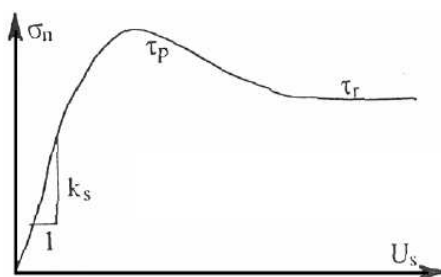


FIGURE J.4 – Schéma d’une courbe classique représentant la variation de la contrainte de cisaillement en fonction du déplacement tangentiel, tiré d’un ouvrage collectif de mécanique des roches [120].

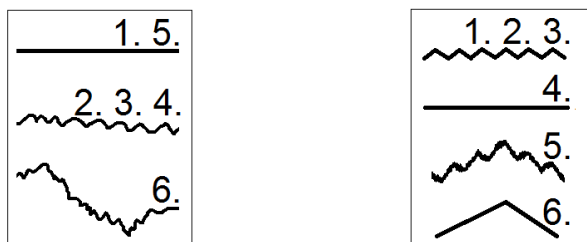


FIGURE J.5 – Schéma des morphologies des joints, marbre à gauche et mortier à droite

relatif des épontes), les moteurs sont stoppés, les contraintes tangentielles sont maintenues constantes et une nouvelle consigne est transmise au moteur vertical pour imposer un nouveau palier de contrainte normale. Le joint est donc cisailé à plusieurs contraintes normales quasi-fixe, car la surface de contact est supposée constante lors de l’essai.

Au cours de cet essai, en plus des quatre capteur LVDT verticaux mesurant le déplacement vertical, deux capteurs LVDT horizontaux mesurent le déplacement dans la direction du cisaillement.

Le comportement pendant la première partie de l’essai est élastique,  $K_s$  est déterminé en calculant la pente de la droite contrainte/déplacement. Puis, la contrainte de cisaillement augmente moins rapidement, le joint commence à être endommagé, cette phase peu être considérée comme plastique, car il n’y a toujours pas rupture. Enfin une contrainte de cisaillement maximale est atteinte, elle est souvent appelée  $\tau_{pic}$  dans la littérature, puis elle décroît avant de se stabiliser à  $\tau_r$ , la résistance résiduelle qui correspond à la partie endommagement. Un schéma du comportement tangentiel est présenté figure J.4.





# Annexe K

## Paramètres de morphologie

Les paramètres choisis pour caractériser la morphologie des épontes cisailées sont présentés ci-dessous, certains d'entre eux sont définis par la norme ISO 25178-2 [88] d'autres sont décrits dans les travaux de Belem et Gadelmawla [89, 90] et l'un d'entre eux est proposé pour répondre à la problématique posée.

**Paramètres d'amplitude** Amplitude des hauteurs du maillage.

**hauteur moyenne** (moy)

$$Ra = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (\text{K.1})$$

**Rugosité médiane** (Rd) : hauteur médiane :

$$Rd = \frac{1}{2}(z_{\max} - z_{\min}) \quad (\text{K.2})$$

**Rugosité maximum** (Rmax) : hauteur maximum :

$$R_{\max} = z_{\max} \quad (\text{K.3})$$

**Rugosité moyenne** (Ra) : hauteur moyenne arithmétique, moment d'ordre 1, moyenne calculée avec la valeur absolue des données (moyenne nulle) avec  $n$ , le nombre de point du maillage :

$$Ra = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |z_i| \quad (\text{K.4})$$

**Moment d'ordre t** Le moment centré d'ordre  $t$  est défini par :

$$\mu_t = \sum_{i=1}^n [z_i - \mathcal{E}(z)]^t P_z \quad (\text{K.5})$$

Avec  $z$  est une variable aléatoire réelle de loi de probabilité  $P$  et d'espérance  $\mathcal{E}(z)$ . Ce moment intervient dans le calcul des paramètres qui suivent.

**Asymétrie** (Rsk) : asymétrie de la distribution des hauteurs, ce paramètre est influencé par les pics isolés, calculée à partir du moment d'ordre 3 des données :

$$Rsk = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} (\sum_{i=1}^n z_i^2)^{3/2}} \sum_{i=1}^n z_i^3 \quad (\text{K.6})$$

**Kurtosis** (Rku) : facteur d'aplatissement de la distribution des hauteurs, ce paramètre est fortement influencé par des saillies ou creux isolés, il est calculé au maximum à partir du moment d'ordre 4 des données.

$$Rku = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{1}{n^{-1} (\sum_{i=1}^n z_i^2)^2} \sum_{i=1}^n z_i^4 \quad (\text{K.7})$$

**Ratio de surface** (R1) : rapport de la surface projetée sur le plan  $xy$ , sur la surface dépliée.

Sur une grille régulière, l'aire de la surface dépliée ( $S_d$ ) est évaluée en calculant la surface formée par les quatre triangles pouvant être représentés par le centre de chaque groupe de quatre pixels. Ainsi, Chaque pixel est défini par huit triangles. En limite de surface, les pixels de bord sont copiés.

$$R1 = \frac{Sp}{Sd} \quad (\text{K.8})$$

**Paramètres hybrides**

**Les angles**  $\theta$  et  $\varphi$  sont calculés en moyennant les vecteurs normaux des facettes.

$\theta$  : angle entre la direction verticale et la normale.  $\theta = 0$  pour des facettes horizontales et augmente avec la pente. Sa valeur est toujours positive :

$$\theta = \arctan \operatorname{hypot}\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) \quad (\text{K.9})$$

$\cos\varphi$  : cosinus de l'angle direct entre l'axe x et la projection de la normale sur le plan xy calculé de la façon suivante :

$$\cos\varphi = \cos \arctan_2\left(\frac{dz}{dy}, -\frac{dz}{dx}\right) \quad (\text{K.10})$$

**Nouveau paramètre : la coupure (C)** Nous introduisons ce nouveau paramètre qui est basé sur la fréquence de profils. Ces profils sont pris dans la direction de cisaillement, sur une bande de largeur égale au tiers de celle de l'échantillon dans la direction perpendiculaire au cisaillement. Dans l'optique de séparer les ordres de rugosité, le profil est décomposé en plusieurs signaux, en allant des signaux de grandes fréquences jusqu'aux plus petites, grâce aux transformées de Fourier. Toutes les étapes sont réalisées à l'aide du logiciel Gwyddion.

Le profil peut ensuite être construit en enlevant certaines fréquences. Nous avons choisi de le reconstruire en enlevant les fréquences qui correspondent aux fortes amplitudes. Celles qui sont conservées permettent de reconstruire la partie du profil dont l'amplitude maximale est égale à un millimètre.

Pour quantifier la valeur de cette fréquence à partir de laquelle la coupure a lieu, la fréquence de Nyquist (très utilisée en traitement du signal pour l'optimisation de l'échantillonnage) est utilisée. Ce paramètre exprime le fait qu'un signal devant être discrétisé, doit l'être avec un pas suffisant pour être représentatif de ce qu'il doit approcher (ce problème est d'ailleurs évoqué en fin de ce chapitre au paragraphe 3.5.2, pour une toute autre application : celui du pas à choisir pour l'acquisition des données).

Ainsi, la fréquence de Nyquist correspond à la valeur du pas minimum, celui-ci doit être égal au minimum à deux fois la fréquence maximum du signal à discrétiser. Quand le pas vaut exactement deux fois cette fréquence, la "coupure" vaut 1, soit 100% de la fréquence de Nyquist. Cependant, dans notre application, nous ne cherchons pas à optimiser la discrétisation d'un signal, mais au contraire à retirer des informations. C'est ainsi que l'on définit le premier paramètre que nous introduisons, il s'agit d'un pourcentage de la valeur de la coupure à la fréquence de Nyquist. Par définition, notre

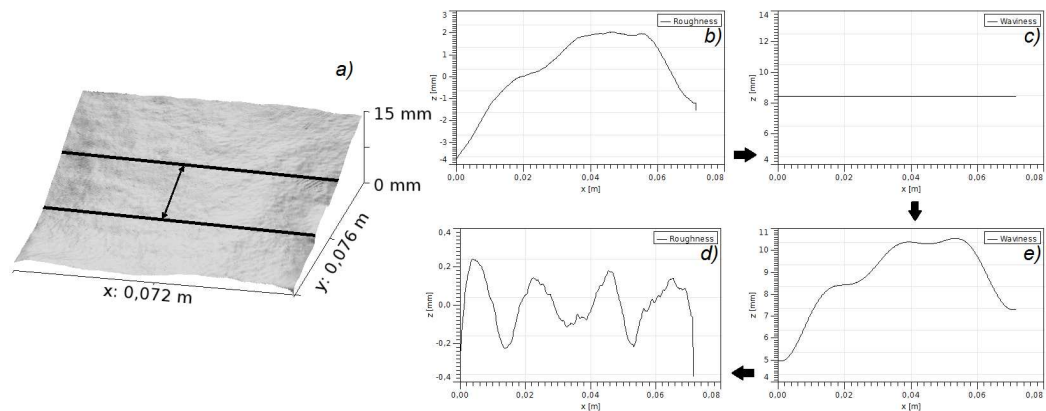


FIGURE K.1 – Séparation des ondulations du joint de marbre n°2

coupure est inférieure à 1. Sa valeur est choisie pour que l'ondulation du profil du joint étudié soit séparée entre une ondulation de grande amplitude qui correspondrait aux aspérités de premier ordre et une ondulation, la rugosité, qui correspondrait aux aspérités de second ordre.

La figure K.1 en détaille les étapes de construction. En partant du joint de marbre n°2, son profil est tracé dans la direction du cisaillement (axe  $x$ ) sur le a) figure K.1. En ne décomposant pas le signal, nous partons de la rugosité originelle, b) figure K.1 et d'une ondulation dont la fréquence et l'amplitude sont nulles, c) figure K.1. La coupure est déterminée pour que l'amplitude de la rugosité du second ordre ne dépasse pas le millimètre, d) figure K.1, il reste l'ondulation, qui correspond à la forme globale que prend le joint, e) figure K.1.

Pour résumer, la coupure ( $C$ ) est la limite à partir de laquelle l'amplitude de la surface est inférieure à 1mm.

**Dimension fractale (D)** Les fractales sont par définition auto-similaire. La dimension fractale caractérise les surfaces ayant des propriétés aléatoires. Les surfaces rugueuses sont dites auto-affines, il s'agit d'une généralisation de l'auto-similarité. Une partie d'un objet auto-affine est similaire à l'objet entier après une mise à l'échelle, une dimension fractale calculée pour une surface rugueuse est locale car elle n'est pas unique. L'auto-affinité doit être interprétée statistiquement [119].

Nous avons utilisé plusieurs méthodes pour caractériser cette dimension dont la plupart dérivent de la méthode des boîtes.

Un travail préliminaire sur les nuages de points est nécessaire avant de calculer la dimension fractale. Les nuages sont découpés pour avoir une forme carrée dans le plan  $xy$ . Puis les points sont interpolés linéairement pour être

régulièrement espacés. La valeur interpolée en un point est calculée à partir des trois vertex du triangle contenant le point obtenu par triangulation de Delaunay.

**la méthode de partitionnement** Cette méthode consiste à diviser la surface étudiée en boîtes carrées régulières comme exposé dans Mannelquist [121]. La variance de la hauteur est calculée pour une taille de boîte particulière. Ainsi, la dimension fractale est calculée à partir de la pente  $\alpha$  de la régression puissance (régression linéaire par moindres carrés des points du graphe log-log) de la variance.

$$D_p = 3 - \frac{\alpha}{2} \quad (\text{K.11})$$

**la méthode du comptage de cubes** Le nuage de point est découpé en boîtes carrées en lui superposant un maillage de cubes, la méthode est présentée dans les travaux de Zahn [122]. Au départ, la taille de chaque boîte est égale à la demi largeur (ou longueur) de la taille du nuage. Chaque boîte contenant au moins un point est comptabilisé. Puis de nouvelles boîtes sont créées en divisant par deux chaque arêtes de chaque boîte. De nouveau, chaque boîte contenant au moins un point est comptabilisé et l'opération est répétée jusqu'à ce que la dimension du côté des boîtes soit égale à l'écart entre deux points adjacents. Puis, en traçant la courbe du nombre de maille comptabilisé (ayant au moins un point) à chaque étape en fonction de l'inverse de la dimension du côté de la boîte à chaque étape, il est possible de l'ajuster par une régression puissance. La dimension fractale correspond à la pente  $\alpha$  de cette régression.

$$D_{cc} = \alpha \quad (\text{K.12})$$

**la méthode de triangulation** Cette méthode dérive de celle du comptage de boîtes et est présentée par Douketis [123]. Une maillage triangle uniforme est projeté sur le nuage de point. Celui-ci est donc déformé, ce qui crée à la surface du nuage, un maillage non uniforme composé de triangles inclinés par rapport au plan xy. L'aire totale des triangles projeté est calculée. L'opération est répétée en divisant par deux la taille du maillage uniforme projeté et la nouvelle air projeté est calculée. L'opération est répétée jusqu'à ce que la dimension du maillage uniforme atteigne l'écart entre deux points adjacents du nuage. Puis, en traçant la courbe de la surface à chaque étape en fonction du log de la dimension du côté du maillage uniforme à chaque étape, il est possible de l'ajuster par une régression linéaire de pente  $\alpha$ . La

dimension fractale est calculée grâce à  $\alpha$  :

$$D_{tr} = \alpha + 2 \quad (K.13)$$

**la méthode du spectre de puissance** Ce calcul de la dimension fractale ne dérive pas de la méthode des boîtes, il est abordé dans les travaux de Zahn et Mannelquist, [124, 121]. Une transformée de Fourier est appliquée sur le profil de chaque nuage du point permettant d'évaluer tous les spectres de puissance qui seront ensuite moyennés. La dimension fractale est calculée à partir de la pente  $\alpha$  de la régression puissance du spectre de puissance

$$D_{sp} = 3,5 - \frac{\alpha}{2} \quad (K.14)$$

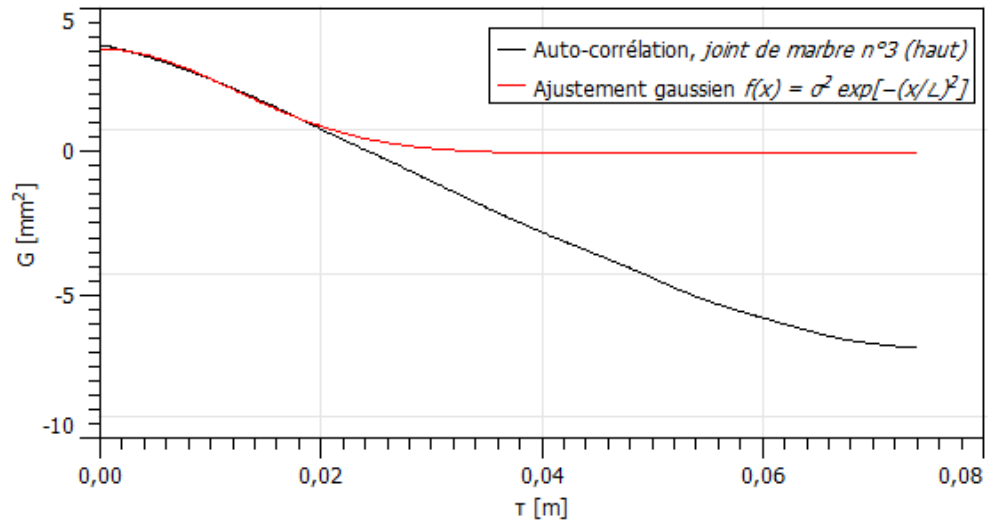
## Paramètres spatiaux

**Longueur d'auto-corrélation** La fonction d'auto-corrélation d'un profil peut être calculée pour apporter une information directionnelle. Elle permet de traiter un signal en le corrélant avec lui même. Cette fonction introduit la notion d'ordre [125] et caractérise la ressemblance de la rugosité depuis un point d'observation sur un profil. Ainsi, il existe une longueur qui traduit la distance à laquelle il n'y a plus de ressemblance, c'est la longueur d'auto-corrélation. La courbe d'autocorrélation est censée être symétrique et avoir son maximum en 0. S'il n'y a pas de répétition dans le signal, il n'est pas périodique. La corrélation renvoie des valeurs positives ou négatives suivant que les variations sont périodiques ou anti-périodiques. Sur un maillage, la fonction  $G_x$  d'auto-corrélation est définie dans la direction  $x$  par :

$$G_x(m) = \frac{1}{N(M-m)} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{M-m} Z_{k+m,l} \cdot Z_{k,l} \quad (K.15)$$

avec  $N, M$  : dimensions du maillage dans les directions  $x$  et  $y$ ,  $\tau x = x_1 - x_2$  : la distance entre deux points de coordonnées  $x_1, x_2$ ,  $m = \frac{\tau x}{\Delta x}$  et  $\Delta x$  est l'intervalle d'échantillonnage. La longueur d'auto-corrélation,  $L$  se trouve dans l'équation de la gaussienne  $f(x)$  ajustée à  $G_x(m)$  dans sa partie positive :

$$f(x) = \sigma^2 \exp\left(-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \quad (K.16)$$



Avec, dans le cas du joint de marbre n°3,  $\sigma = 1,9103\text{mm} \pm 1,9\mu\text{m}$  et  $L = 17,248\text{mm} \pm 81\mu\text{m}$

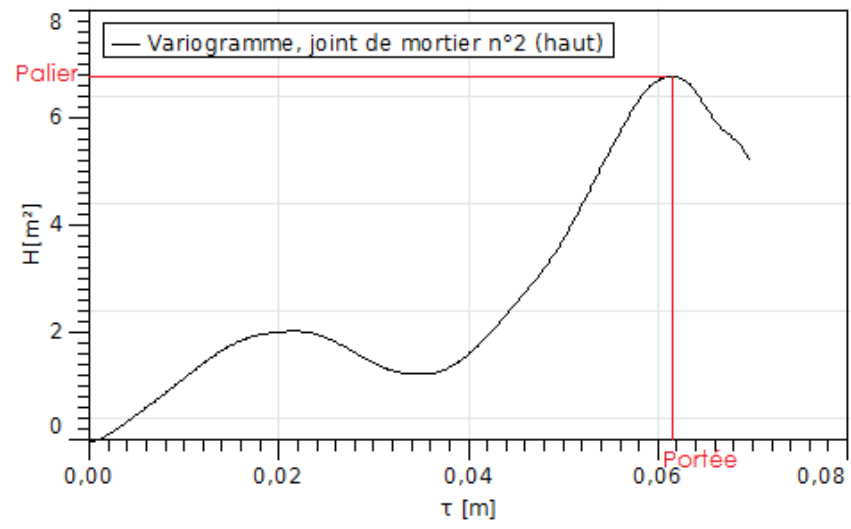
**Portée et palier** La portée et le palier sont déterminés par corrélation hauteur-hauteur ou variogramme. La différence entre le variogramme et la fonction d'autocorrélation est faible. Dans le cas de la fonction d'autocorrélation des distances entre points sont sommés, alors que dans le cas du variogramme, ces valeurs représentent le carré des différences entre points. Le variogramme d'un profil exprime la variance des accroissements, il apporte une information directionnelle. Le palier est la valeur maximum, à partir de laquelle le variogramme se stabilise, alors que la portée est une longueur qui traduit la distance à partir de laquelle l'accroissement est stable.

Sur un maillage, le variogramme  $H_x(\tau_x)$  est définie dans la direction  $x$  par :

$$H_x(\tau_x) = \frac{1}{N(M-m)} \sum_{l=1}^N \sum_{n=1}^{M-m} (Z_{n+m,l} - Z_{n,l})^2 \quad (\text{K.17})$$

avec  $N, M$  : dimension du maillage dans les directions  $x$  et  $y$ ,  $\tau_x = x_1 - x_2$  : la distance entre deux points de coordonnées  $x_1, x_2$ ,  $m = \frac{\tau_x}{\Delta x}$  et  $\Delta x$  est l'intervalle d'échantillonnage.





## Annexe L

# Matrice de corrélation des variables

La matrice de corrélation des variables présentée au tableaux L.1 et L.2 provient des essais sur mortier et celle présentée tableaux L.3 et L.4, des essais sur marbre. La matrice de corrélation des essais sur mortier ne présente pas les coefficients de corrélation des variables du critère de Mohr-Coulomb, car celles-ci n'ont été déterminées que pour deux des six joints. Ces tableaux nous permettent de visualiser quelles sont les variables corrélées et quelles sont celles qui ne le sont pas, dans tous les cas de figure.

Sur l'ensemble de ces tableaux, globalement les variables les moins corrélées sont les variables de X avec celles de Y et celles qui le sont le plus, sont les variables de X entre elles.

Tableau L.1 – Matrice de corrélation des variables calculée à partir des essais sur joints de mortier (partie 1)

	moy m	Rmax m	Rd m	Ra m	Rsk	Rku	R1 %	$\theta$ °	$\cos\phi$	Dp	Dcc	Dtr	Dsp
moy (m)	1,00	0,99	1,00	0,94	-0,68	-0,83	-0,93	0,56	-0,64	-0,89	-0,84	-0,87	-0,76
Rmax (m)	0,99	1,00	0,98	0,98	-0,56	-0,89	-0,94	0,56	-0,52	-0,91	-0,86	-0,89	-0,78
Rd (m)	1,00	0,98	1,00	0,92	-0,71	-0,82	-0,92	0,59	-0,68	-0,89	-0,83	-0,86	-0,76
Ra (m)	0,94	0,98	0,92	1,00	-0,45	-0,90	-0,88	0,47	-0,36	-0,85	-0,78	-0,83	-0,70
Rsk	-0,68	-0,56	-0,71	-0,45	1,00	0,32	0,45	-0,50	0,97	0,49	0,44	0,48	0,38
Rku	-0,83	-0,89	-0,82	-0,90	0,32	1,00	0,87	-0,49	0,30	0,94	0,92	0,95	0,88
R1 (%)	-0,93	-0,94	-0,92	-0,88	0,45	0,87	1,00	-0,54	0,49	0,95	0,93	0,93	0,89
$\theta$ (°)	0,56	0,56	0,59	0,47	-0,50	-0,49	-0,54	1,00	-0,51	-0,55	-0,56	-0,61	-0,53
$\cos\phi$	-0,64	-0,52	-0,68	-0,36	0,97	0,30	0,49	-0,51	1,00	0,53	0,51	0,52	0,48
Dp	-0,89	-0,91	-0,89	-0,85	0,49	0,94	0,95	-0,55	0,53	1,00	0,99	0,99	0,97
Dcc	-0,84	-0,86	-0,83	-0,78	0,44	0,92	0,93	-0,56	0,51	0,99	1,00	0,99	0,99
Dtr	-0,87	-0,89	-0,86	-0,83	0,48	0,95	0,93	-0,61	0,52	0,99	0,99	1,00	0,97
Dsp	-0,76	-0,78	-0,76	-0,70	0,38	0,88	0,89	-0,53	0,48	0,97	0,99	0,97	1,00
Palier (m <sup>2</sup> )	0,58	0,66	0,54	0,78	-0,01	-0,71	-0,53	-0,11	0,12	-0,53	-0,46	-0,49	-0,38
Portée (m)	-0,21	-0,16	-0,21	-0,24	0,42	-0,11	-0,14	-0,03	0,19	-0,21	-0,32	-0,23	-0,44
L (m)	0,93	0,93	0,91	0,93	-0,52	-0,83	-0,88	0,24	-0,47	-0,85	-0,79	-0,80	-0,72
C %	0,94	0,90	0,94	0,84	-0,69	-0,74	-0,90	0,33	-0,69	-0,86	-0,81	-0,81	-0,76
Ksa (1/mm)	0,23	0,10	0,26	-0,06	-0,54	0,18	-0,24	-0,04	-0,66	-0,15	-0,15	-0,08	-0,16
Ksb (Mpa/mm)	-0,90	-0,91	-0,89	-0,88	0,52	0,92	0,90	-0,34	0,52	0,95	0,92	0,93	0,88
Ks1 (Mpa/mm)	-0,88	-0,92	-0,86	-0,90	0,42	0,99	0,90	-0,51	0,42	0,97	0,95	0,97	0,91
Ks2	0,62	0,53	0,65	0,34	-0,71	-0,39	-0,67	0,57	-0,85	-0,67	-0,70	-0,66	-0,71
Kna (1/mm)	-0,62	-0,70	-0,58	-0,73	-0,13	0,71	0,80	-0,26	-0,11	0,68	0,67	0,65	0,64
Knb (Mpa/mm)	-0,81	-0,82	-0,80	-0,79	0,32	0,62	0,87	-0,18	0,32	0,71	0,66	0,64	0,60

Tableau L.2 – Matrice de corrélation des variables calculée à partir des essais sur joints de mortier (partie 2)

	Palier m <sup>2</sup>	Portée m	L m	C %	Ksa mm <sup>-1</sup>	Ksb Mpa/mm	Ks1 Mpa/mm	Ks2	Kna mm <sup>-1</sup>	Knb Mpa/mm
moy (m)	0,58	-0,21	0,93	0,94	0,23	-0,90	-0,88	0,62	-0,62	-0,81
Rmax (m)	0,66	-0,16	0,93	0,90	0,10	-0,91	-0,92	0,53	-0,70	-0,82
Rd (m)	0,54	-0,21	0,91	0,94	0,26	-0,89	-0,86	0,65	-0,58	-0,80
Ra (m)	0,78	-0,24	0,93	0,84	-0,06	-0,88	-0,90	0,34	-0,73	-0,79
Rsk	-0,01	0,42	-0,52	-0,69	-0,54	0,52	0,42	-0,71	-0,13	0,32
Rku	-0,71	-0,11	-0,83	-0,74	0,18	0,92	0,99	-0,39	0,71	0,62
R1 (%)	-0,53	-0,14	-0,88	-0,90	-0,24	0,90	0,90	-0,67	0,80	0,87
θ (°)	-0,11	-0,03	0,24	0,33	-0,04	-0,34	-0,51	0,57	-0,26	-0,18
cos φ	0,12	0,19	-0,47	-0,69	-0,66	0,52	0,42	-0,85	-0,11	0,32
Dp	-0,53	-0,21	-0,85	-0,86	-0,15	0,95	0,97	-0,67	0,68	0,71
Dcc	-0,46	-0,32	-0,79	-0,81	-0,15	0,92	0,95	-0,70	0,67	0,66
Dtr	-0,49	-0,23	-0,80	-0,81	-0,08	0,93	0,97	-0,66	0,65	0,64
Dsp	0,38	-0,44	-0,72	-0,76	-0,16	0,88	0,91	-0,71	0,64	0,60
Palier (m <sup>2</sup> )	1,00	-0,25	0,78	0,55	-0,35	-0,69	-0,67	-0,19	-0,63	-0,60
Portée (m)	-0,25	1,00	-0,16	-0,10	0,11	-0,05	-0,10	0,29	-0,28	0,01
L (m)	0,78	-0,16	1,00	0,95	0,21	-0,95	-0,86	0,45	-0,66	-0,87
C %	0,55	-0,10	0,95	1,00	0,46	-0,92	-0,81	0,69	-0,55	-0,85
Ksa (1/mm)	-0,35	0,11	0,21	0,46	1,00	-0,15	0,07	0,72	0,08	-0,38
Ksb (Mpa/mm)	-0,69	-0,05	-0,95	-0,92	-0,15	1,00	0,96	-0,55	0,61	0,74
Ks1 (Mpa/mm)	-0,67	-0,10	-0,86	-0,81	0,07	0,96	1,00	-0,49	0,67	0,65
Ks2	-0,19	0,29	0,45	0,69	0,72	-0,55	-0,49	1,00	-0,23	-0,48
Kna (1/mm)	-0,63	-0,28	-0,66	-0,55	0,08	0,61	0,67	-0,23	1,00	0,82
Knb (Mpa/mm)	-0,60	0,01	-0,87	-0,85	-0,38	0,74	0,65	-0,48	0,82	1,00

Tableau I.3 – Matrice de corrélation des variables calculée à partir des essais sur joints de marbre (partie 1)

	moy m	Rmax m	Rd m	Ra m	Rsk	Rku	Rl %	$\theta$ °	cos $\phi$	Dp	Dcc	Dtr	Dsp	Palier m <sup>2</sup>
moy (m)	1,00	<b>0,90</b>	<b>0,98</b>	<b>0,81</b>	-0,37	-0,14	<b>-0,82</b>	<b>0,86</b>	0,16	-0,53	-0,78	-0,79	-0,44	0,67
Rmax (m)	0,90	1,00	<b>0,82</b>	<b>0,97</b>	0,04	-0,30	<b>-0,90</b>	<b>0,93</b>	0,01	-0,64	-0,79	-0,79	-0,27	0,71
Rd (m)	0,98	0,82	1,00	0,72	-0,52	-0,13	-0,74	<b>0,80</b>	0,16	-0,50	-0,77	-0,79	-0,50	0,63
Ra (m)	0,81	0,97	0,72	1,00	0,19	-0,45	<b>-0,82</b>	<b>0,97</b>	-0,10	-0,67	-0,78	-0,77	-0,19	0,57
Rsk	-0,37	0,04	-0,52	0,19	1,00	-0,16	0,02	0,01	-0,12	0,02	0,21	0,27	0,57	-0,21
Rku	-0,14	-0,30	-0,13	-0,45	-0,16	1,00	0,17	-0,51	<b>0,87</b>	<b>0,84</b>	0,67	0,68	0,50	-0,01
Rl (%)	-0,82	-0,90	-0,74	-0,82	0,02	0,17	1,00	-0,74	0,00	0,59	0,69	0,70	0,38	-0,85
$\theta$ (°)	0,86	0,93	0,80	0,97	0,01	-0,51	-0,74	1,00	-0,11	-0,70	<b>-0,84</b>	<b>-0,84</b>	-0,30	0,45
cos $\phi$	0,16	0,01	0,16	-0,10	-0,12	0,87	0,00	-0,11	1,00	0,72	0,45	0,47	0,56	-0,04
Dp	-0,53	-0,64	-0,50	-0,67	0,02	0,84	0,59	-0,70	0,72	1,00	<b>0,93</b>	<b>0,92</b>	0,75	-0,45
Dcc	-0,78	-0,79	-0,77	-0,78	0,21	0,67	0,69	-0,84	0,45	0,93	1,00	<b>0,99</b>	0,74	-0,53
Dtr	-0,79	-0,79	-0,79	-0,77	0,27	0,68	0,70	-0,84	0,47	0,92	0,99	1,00	0,75	-0,57
Dsp	-0,44	-0,27	-0,50	-0,19	0,57	0,50	0,38	-0,30	0,56	0,75	0,74	0,75	1,00	-0,41
Palier (m <sup>2</sup> )	0,67	0,71	0,63	0,57	-0,21	-0,01	-0,85	0,45	-0,04	-0,45	-0,53	-0,57	-0,41	1,00
Portée (m)	-0,06	-0,37	0,09	-0,47	-0,81	0,22	0,21	-0,37	0,02	0,24	0,19	0,08	-0,30	0,11
L (m)	0,44	0,47	0,46	0,49	-0,27	-0,78	-0,50	0,52	-0,76	-0,88	-0,79	-0,85	-0,78	0,53
C %	0,78	0,96	0,67	0,91	0,21	-0,19	-0,89	0,80	0,03	-0,55	-0,66	-0,65	-0,14	0,77
Ksa (1/mm)	0,27	0,27	0,21	0,12	0,06	0,81	-0,37	-0,01	0,84	0,50	0,30	0,30	0,47	0,42
Ksb (Mpa/mm)	0,60	0,44	0,59	0,20	-0,41	0,62	-0,53	0,16	0,62	0,12	-0,15	-0,14	-0,13	0,66
Ksl (Mpa/mm)	0,49	0,65	0,37	0,54	0,30	0,36	-0,71	0,36	0,43	-0,03	-0,15	-0,13	0,21	0,71
Ks2	0,27	0,21	0,23	0,09	-0,07	0,77	-0,35	0,00	0,83	0,54	0,35	0,31	0,46	0,37
Kna (1/mm)	0,26	0,41	0,25	0,54	0,18	-0,54	-0,02	0,58	-0,26	-0,35	-0,39	-0,40	0,12	-0,03
Knб (Mpa/mm)	-0,01	-0,23	0,04	-0,43	-0,48	0,30	0,00	-0,40	0,00	-0,02	-0,05	0,00	-0,56	0,20
C (Mpa)	0,89	0,67	0,90	0,52	-0,53	0,40	-0,70	0,61	0,54	-0,08	-0,39	-0,42	-0,24	0,76
$\varphi$ (°)	0,76	0,72	0,72	0,61	-0,18	0,11	-0,53	0,66	0,23	-0,33	-0,59	-0,52	-0,26	0,63

Tableau L.4 – Matrice de corrélation des variables calculée à partir des essais sur joints de marbre (partie 2)

	Portée m	L m	C %	Ksa mm <sup>-1</sup>	Ksb Mpa/mm	Ks1 Mpa/mm	Ks2	Kna mm <sup>-1</sup>	Knb Mpa/mm	Coh Mpa	$\varphi$ °
moy (m)	-0,06	0,44	0,78	0,27	0,60	0,49	0,27	0,26	-0,01	<b>0,89</b>	0,76
Rmax (m)	-0,37	0,47	<b>0,96</b>	0,27	0,44	0,65	0,21	0,41	-0,23	0,67	0,72
Rd (m)	0,09	0,46	0,67	0,21	0,59	0,37	0,23	0,25	0,04	<b>0,90</b>	0,72
Ra (m)	-0,47	0,49	<b>0,91</b>	0,12	0,20	0,54	0,09	0,54	-0,43	0,52	0,61
Rsk	<b>-0,81</b>	-0,27	0,21	0,06	-0,41	0,30	-0,07	0,18	-0,48	-0,53	-0,18
Rku	0,22	-0,78	-0,19	0,81	0,62	0,36	0,77	-0,54	0,30	0,40	0,11
R1 (%)	0,21	-0,50	<b>-0,89</b>	-0,37	-0,53	-0,71	-0,35	-0,02	0,00	-0,70	-0,53
$\theta$ (°)	-0,37	0,52	<b>0,80</b>	-0,01	0,16	0,36	0,00	0,58	-0,40	0,61	0,66
cos $\phi$	0,02	-0,76	0,03	<b>0,84</b>	0,62	0,43	<b>0,83</b>	-0,26	0,00	0,54	0,23
Dp	0,24	<b>-0,88</b>	-0,55	0,50	0,12	-0,03	0,54	-0,35	-0,02	-0,08	-0,33
Dcc	0,19	-0,79	-0,66	0,30	-0,15	-0,15	0,35	-0,39	-0,05	-0,39	-0,59
Dtr	0,08	<b>-0,85</b>	-0,65	0,30	-0,14	-0,13	0,31	-0,40	0,00	-0,42	-0,52
Dsp	-0,30	-0,78	-0,14	0,47	-0,13	0,21	0,46	0,12	-0,56	-0,24	-0,26
Palier (m <sup>2</sup> )	0,11	0,53	0,77	0,42	0,66	0,71	0,37	-0,03	0,20	0,76	0,63
Portée (m)	1,00	0,20	-0,47	-0,08	0,13	-0,40	0,14	-0,29	0,29	0,25	-0,28
L (m)	0,20	1,00	0,37	-0,53	-0,15	-0,12	-0,45	0,28	0,01	0,12	0,11
C %	-0,47	0,37	1,00	0,39	0,48	0,81	0,27	0,36	-0,20	0,57	<b>0,72</b>
Ksa (1/mm)	-0,08	-0,53	0,39	1,00	0,78	<b>0,82</b>	0,93	-0,31	0,05	0,66	0,40
Ksb (Mpa/mm)	0,13	-0,15	0,48	0,78	1,00	0,71	0,66	-0,30	0,47	<b>0,92</b>	0,78
Ks1 (Mpa/mm)	-0,40	-0,12	0,81	0,82	0,71	1,00	0,66	-0,04	-0,02	0,61	0,64
Ks2	0,14	-0,45	0,27	0,93	0,66	0,66	1,00	-0,34	-0,08	0,69	0,15
Kna (1/mm)	-0,29	0,28	0,36	-0,31	-0,30	-0,04	-0,34	1,00	-0,69	-0,16	0,36
Knb (Mpa/mm)	0,29	0,01	-0,20	0,05	0,47	-0,02	-0,08	-0,69	1,00	0,24	0,33
C (Mpa)	0,25	0,12	0,57	0,66	0,92	0,61	0,69	-0,16	0,24	1,00	0,61
$\varphi$ (°)	-0,28	0,11	0,72	0,40	0,78	0,64	0,15	0,36	0,33	0,61	1,00



# Annexe M

## Validations croisées sur les régressions pas à pas permettant de modéliser les Ks

Cette méthode est mise en œuvre dans le but de déterminer quelle est la méthode de modélisation de  $K_s(\sigma_n)$  (linéaire ou puissance) qui est le mieux modélisée en régression pas à pas. Parce que le nombre d'observation est faible, nous utilisons la validation croisée.

Les résultats sont présentés de la façon suivante :

**Coeff** Coefficient de la régression de la variable à expliquer estimée par la variable de X.

**Std.Err** Erreur standard : erreur type du paramètre estimé par la variable de X.

**Status** Exprime si la variable de X reste ou sort du modèle.

**P**  $R^2$ , dans ce cas il correspond à un test de Fisher pour déterminer si l'augmentation de la valeur du coefficient de régression estimé est nulle.

Les validations croisées sur régressions pas à pas qui sont présentées dans cette annexe permettent de modéliser Ksa, Ksb, Ks1, Ks2 sur les paramètres : Rd, Rku, R1, theta, cos  $\varphi$ , Dtr, Pal, L, C.

```
Ksa
tous les joints
Initial columns included: aucune
Final columns included: aucune
      'Coeff'      'Std.Err.'      'Status'      'P'
Rd      [ 0.2645]      [ 0.4822]      'Out'          [0.6125]
Rku      [ 0.1820]      [ 0.4916]      'Out'          [0.7299]
R1      [-0.2414]      [ 0.4852]      'Out'          [0.6450]
theta    [-0.0366]      [ 0.4997]      'Out'          [0.9451]
cos phi  [-0.6626]      [ 0.3745]      'Out'          [0.1515]
Dtr      [-0.0823]      [ 0.4983]      'Out'          [0.8768]
```



Pa1	[-0.3460]	[ 0.4691]	'Out'	[0.5017]
L	[ 0.2069]	[ 0.4892]	'Out'	[0.6940]
C	[ 0.4596]	[ 0.4441]	'Out'	[0.3592]

La valeur maximum de la valeur de p pour un terme qui entre dans le modèle est 0.05 et la valeur minimum pour sortir un terme du modèle est 0.10.

Joint en moins =

1

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.4053]	[ 0.5278]	'Out'	[0.4985]
[ 0.1472]	[ 0.5711]	'Out'	[0.8132]
[-0.2721]	[ 0.5556]	'Out'	[0.6579]
[ 0.0297]	[ 0.5771]	'Out'	[0.9621]
[-0.8083]	[ 0.3399]	'Out'	[0.0978]
[-0.1091]	[ 0.5739]	'Out'	[0.8614]
[-0.3104]	[ 0.5488]	'Out'	[0.6113]
[ 0.2916]	[ 0.5523]	'Out'	[0.6341]
[ 0.5486]	[ 0.4827]	'Out'	[0.3384]

Joint en moins =

2

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.3499]	[ 0.5408]	'Out'	[0.5637]
[ 0.0673]	[ 0.5760]	'Out'	[0.9144]
[-0.3141]	[ 0.5481]	'Out'	[0.6068]
[ 0.6233]	[ 0.4515]	'Out'	[0.2613]
[-0.8154]	[ 0.3342]	'Out'	[0.0925]
[-0.2626]	[ 0.5571]	'Out'	[0.6695]
[-0.5375]	[ 0.4869]	'Out'	[0.3502]
[ 0.1316]	[ 0.5723]	'Out'	[0.8330]
[ 0.4328]	[ 0.5205]	'Out'	[0.4667]

Joint en moins =

3

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.1655]	[ 0.5694]	'Out'	[0.7902]
[ 0.2631]	[ 0.5570]	'Out'	[0.6689]
[-0.2442]	[ 0.5599]	'Out'	[0.6921]
[ 0.0237]	[ 0.5772]	'Out'	[0.9699]
[-0.5050]	[ 0.4983]	'Out'	[0.3855]
[ 0.0239]	[ 0.5772]	'Out'	[0.9696]
[-0.3823]	[ 0.5335]	'Out'	[0.5253]
[ 0.0813]	[ 0.5754]	'Out'	[0.8966]
[ 0.3174]	[ 0.5475]	'Out'	[0.6028]

Joint en moins =

4

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.1845]	[ 0.5674]	'Out'	[0.7665]
[ 0.6513]	[ 0.4381]	'Out'	[0.2338]
[-0.1511]	[ 0.5707]	'Out'	[0.8083]
[-0.1400]	[ 0.5717]	'Out'	[0.8223]
[-0.6532]	[ 0.4372]	'Out'	[0.2320]
[ 0.2949]	[ 0.5517]	'Out'	[0.6300]
[-0.4541]	[ 0.5144]	'Out'	[0.4424]
[ 0.1036]	[ 0.5742]	'Out'	[0.8684]
[ 0.4731]	[ 0.5086]	'Out'	[0.4209]

Joint en moins =

5

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.1033]	[ 0.5743]	'Out'	[0.8687]
[ 0.3243]	[ 0.5461]	'Out'	[0.5944]
[ 0.1271]	[ 0.5727]	'Out'	[0.8386]
[-0.3203]	[ 0.5469]	'Out'	[0.5992]
[-0.5724]	[ 0.4734]	'Out'	[0.3133]
[ 0.0900]	[ 0.5750]	'Out'	[0.8856]
[-0.4612]	[ 0.5123]	'Out'	[0.4344]
[-0.0686]	[ 0.5760]	'Out'	[0.9127]
[ 0.2083]	[ 0.5647]	'Out'	[0.7368]

Joint en moins =

6

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.5282]	[ 0.4902]	'Out'	[0.3602]
[-0.2441]	[ 0.5599]	'Out'	[0.6924]
[-0.5405]	[ 0.4857]	'Out'	[0.3470]
[-0.2343]	[ 0.5613]	'Out'	[0.7044]
[-0.5615]	[ 0.4777]	'Out'	[0.3246]
[-0.3349]	[ 0.5440]	'Out'	[0.5817]
[ 0.7742]	[ 0.3654]	'Out'	[0.1243]
[ 0.7593]	[ 0.3757]	'Out'	[0.1365]
[ 0.7724]	[ 0.3667]	'Out'	[0.1258]

Ksb

tous les joints

Initial columns included: aucune

Step 1, added column 8, p=0.00421191

Final columns included: 8

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.1460]	[ 0.4496]	'Out'	[0.7668]
[ 0.4453]	[ 0.2167]	'Out'	[0.1322]
[ 0.2768]	[ 0.3638]	'Out'	[0.5021]
[-0.1215]	[ 0.1784]	'Out'	[0.5447]
[ 0.0919]	[ 0.2043]	'Out'	[0.6834]
[ 0.4668]	[ 0.1603]	'Out'	[0.0619]
[ 0.1053]	[ 0.2893]	'Out'	[0.7399]
[-0.9465]	[ 0.1613]	'In'	[0.0042]
[-0.1878]	[ 0.5952]	'Out'	[0.7730]

Joint en moins =

1

Initial columns included: aucune

Step 1, added column 8, p=0.0137573

Final columns included: 8

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.2779]	[ 0.4905]	'Out'	[0.6281]
[ 0.4305]	[ 0.2491]	'Out'	[0.2262]
[ 0.2305]	[ 0.4881]	'Out'	[0.6833]
[-0.1648]	[ 0.1921]	'Out'	[0.4815]
[ 0.1272]	[ 0.2241]	'Out'	[0.6277]
[ 0.4626]	[ 0.2047]	'Out'	[0.1523]
[ 0.0857]	[ 0.3291]	'Out'	[0.8190]
[-0.9489]	[ 0.1822]	'In'	[0.0138]
[-0.1545]	[ 0.6827]	'Out'	[0.8420]

Joint en moins =

2

Initial columns included: aucune  
Step 1, added column 6, p=0.00440978  
Final columns included: 6

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.1570]	[ 0.3025]	'Out'	[0.6556]
[ 0.3874]	[ 0.3659]	'Out'	[0.4007]
[-0.3338]	[ 0.4516]	'Out'	[0.5368]
[ 0.0701]	[ 0.1928]	'Out'	[0.7509]
[ 0.0347]	[ 0.1766]	'Out'	[0.8625]
[ 0.9761]	[ 0.1254]	'In'	[0.0044]
[-0.1782]	[ 0.1506]	'Out'	[0.3583]
[-0.4280]	[ 0.3065]	'Out'	[0.2974]
[-0.1846]	[ 0.3951]	'Out'	[0.6864]

Joint en moins =

3

Initial columns included: aucune  
Step 1, added column 2, p=0.00830902  
Final columns included: 2

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.2851]	[ 0.2649]	'Out'	[0.3943]
[ 0.9635]	[ 0.1545]	'In'	[0.0083]
[ 0.4324]	[ 0.2293]	'Out'	[0.2000]
[ 0.1077]	[ 0.2063]	'Out'	[0.6538]
[ 0.0678]	[ 0.1954]	'Out'	[0.7618]
[ 0.1914]	[ 0.6020]	'Out'	[0.7806]
[-0.1358]	[ 0.2547]	'Out'	[0.6472]
[-0.4591]	[ 0.1386]	'Out'	[0.0803]
[-0.3912]	[ 0.1226]	'Out'	[0.0858]

Joint en moins =

4

Initial columns included: aucune  
Step 1, added column 8, p=0.0164725  
Final columns included: 8

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.0023]	[ 0.4282]	'Out'	[0.9961]
[ 0.2214]	[ 0.2670]	'Out'	[0.4942]
[-0.3690]	[ 0.2874]	'Out'	[0.3278]

[-0.0193]	[ 0.2377]	'Out'	[0.9427]
[ 0.0796]	[ 0.2395]	'Out'	[0.7713]
[ 0.1972]	[ 0.2711]	'Out'	[0.5426]
[-0.1221]	[ 0.3695]	'Out'	[0.7724]
[-0.9423]	[ 0.1932]	'In'	[0.0165]
[ 0.1235]	[ 0.5496]	'Out'	[0.8431]

Joint en moins =

5

Initial columns included: aucune  
 Step 1, added column 9, p=0.00737385  
 Step 2, added column 2, p=0.0233351  
 Step 3, added column 1, p=0.0378889  
 Final columns included: 1 2 9

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.1991]	[ 0.0119]	'In'	[0.0379]
[ 0.5246]	[ 0.0081]	'In'	[0.0099]
[-0.0198]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[ 0.0065]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[-0.0071]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[-0.0115]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[-0.0049]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[-0.0125]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[-0.7251]	[ 0.0082]	'In'	[0.0072]

Joint en moins =

6

Initial columns included: aucune  
 Step 1, added column 9, p=0.0173341  
 Final columns included: 9

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.1769]	[ 0.6852]	'Out'	[0.8204]
[ 0.4527]	[ 0.1892]	'Out'	[0.1391]
[ 0.3053]	[ 0.4793]	'Out'	[0.5893]
[-0.1668]	[ 0.2363]	'Out'	[0.5533]
[ 0.2565]	[ 0.5312]	'Out'	[0.6769]
[ 0.5044]	[ 0.1860]	'Out'	[0.1134]
[ 1.0870]	[ 0.4872]	'Out'	[0.1554]
[ 3.1931]	[ 4.4066]	'Out'	[0.5440]
[-0.9403]	[ 0.1964]	'In'	[0.0173]

Ks1

tous les joints

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.5822]	[ 0.4065]	'Out'	[0.2254]
[ 0.7071]	[ 0.3536]	'Out'	[0.1162]
[ 0.8044]	[ 0.2970]	'Out'	[0.0536]
[-0.2592]	[ 0.4829]	'Out'	[0.6199]
[-0.1055]	[ 0.4972]	'Out'	[0.8423]
[ 0.6529]	[ 0.3787]	'Out'	[0.1598]
[-0.6261]	[ 0.3899]	'Out'	[0.1836]
[-0.6639]	[ 0.3739]	'Out'	[0.1505]
[-0.5501]	[ 0.4176]	'Out'	[0.2581]

Joint en moins =

1

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.7467]	[ 0.3841]	'Out'	[0.1471]
[ 0.7673]	[ 0.3703]	'Out'	[0.1300]
[ 0.8380]	[ 0.3150]	'Out'	[0.0763]
[-0.3343]	[ 0.5441]	'Out'	[0.5825]
[-0.0592]	[ 0.5763]	'Out'	[0.9246]
[ 0.6836]	[ 0.4214]	'Out'	[0.2032]
[-0.7201]	[ 0.4006]	'Out'	[0.1701]
[-0.7673]	[ 0.3703]	'Out'	[0.1300]
[-0.6274]	[ 0.4496]	'Out'	[0.2572]

Joint en moins =

2

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.5911]	[ 0.4657]	'Out'	[0.2939]
[ 0.7508]	[ 0.3814]	'Out'	[0.1437]
[ 0.8125]	[ 0.3366]	'Out'	[0.0947]
[-0.5094]	[ 0.4968]	'Out'	[0.3806]
[-0.1001]	[ 0.5745]	'Out'	[0.8728]
[ 0.7044]	[ 0.4098]	'Out'	[0.1842]
[-0.6362]	[ 0.4454]	'Out'	[0.2485]
[-0.6688]	[ 0.4292]	'Out'	[0.2171]
[-0.5507]	[ 0.4819]	'Out'	[0.3361]

Joint en moins =

3

Initial columns included: aucune  
Step 1, added column 3, p=0.0187305  
Step 2, added column 4, p=0.047939  
Step 3, added column 6, p=0.0347107  
Final columns included: 3 4 6

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.0213]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[-0.0233]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[ 0.8639]	[ 0.0173]	'In'	[0.0127]
[ 0.4647]	[ 0.0079]	'In'	[0.0108]
[ 0.0580]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[ 0.3490]	[ 0.0190]	'In'	[0.0347]
[ 0.0091]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[ 0.0171]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]
[ 0.0399]	[ Inf]	'Out'	[ NaN]

Joint en moins =

4

Initial columns included: aucune  
Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.2283]	[ 0.5621]	'Out'	[0.7119]
[ 0.3740]	[ 0.5354]	'Out'	[0.5351]
[ 0.6218]	[ 0.4522]	'Out'	[0.2628]
[ 0.0525]	[ 0.5766]	'Out'	[0.9332]
[-0.5628]	[ 0.4772]	'Out'	[0.3233]
[ 0.1290]	[ 0.5725]	'Out'	[0.8362]
[-0.5541]	[ 0.4806]	'Out'	[0.3325]
[-0.3838]	[ 0.5331]	'Out'	[0.5236]
[-0.1377]	[ 0.5718]	'Out'	[0.8252]

Joint en moins =

5

Initial columns included: aucune  
Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.4127]	[ 0.5259]	'Out'	[0.4898]
[ 0.7407]	[ 0.3879]	'Out'	[0.1522]
[ 0.7300]	[ 0.3946]	'Out'	[0.1615]
[-0.0947]	[ 0.5748]	'Out'	[0.8796]
[-0.3924]	[ 0.5310]	'Out'	[0.5135]

[ 0.6210]	[ 0.4525]	'Out'	[0.2636]
[-0.6906]	[ 0.4176]	'Out'	[0.1968]
[-0.5670]	[ 0.4756]	'Out'	[0.3189]
[-0.3778]	[ 0.5346]	'Out'	[0.5307]

Joint en moins =

6

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.5514]	[ 0.4816]	'Out'	[0.3353]
[ 0.5780]	[ 0.4711]	'Out'	[0.3074]
[ 0.8036]	[ 0.3437]	'Out'	[0.1014]
[-0.4760]	[ 0.5077]	'Out'	[0.4176]
[ 0.1626]	[ 0.5697]	'Out'	[0.7939]
[ 0.6151]	[ 0.4552]	'Out'	[0.2695]
[-0.4198]	[ 0.5240]	'Out'	[0.4816]
[-0.5333]	[ 0.4884]	'Out'	[0.3547]
[-0.5159]	[ 0.4946]	'Out'	[0.3736]

Ks2

tous les joints

Initial columns included: aucune

Step 1, added column 3, p=0.0237538

Step 2, added column 6, p=0.0309158

Final columns included: 3 6

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.0279]	[ 0.3642]	'Out'	[0.9459]
[ 0.2936]	[ 0.3895]	'Out'	[0.5297]
[ 1.9942]	[ 0.3139]	'In'	[0.0079]
[ 0.2384]	[ 0.0635]	'Out'	[0.0642]
[-0.0381]	[ 0.1644]	'Out'	[0.8384]
[-1.2087]	[ 0.3139]	'In'	[0.0309]
[-0.1755]	[ 0.1139]	'Out'	[0.2632]
[-0.3661]	[ 0.1610]	'Out'	[0.1509]
[-0.2659]	[ 0.2607]	'Out'	[0.4150]

Joint en moins =

1

Initial columns included: aucune

Step 1, added column 8, p=0.0402996

Final columns included: 8

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.2678]	[ 0.7231]	'Out'	[0.7467]



[-0.3753]	[ 0.4891]	'Out'	[0.5231]
[ 0.3383]	[ 0.6877]	'Out'	[0.6714]
[-0.0515]	[ 0.3158]	'Out'	[0.8854]
[-0.0436]	[ 0.3403]	'Out'	[0.9098]
[-0.2729]	[ 0.5107]	'Out'	[0.6466]
[ 0.1429]	[ 0.4625]	'Out'	[0.7866]
[-0.8948]	[ 0.2578]	'In'	[0.0403]
[-0.2115]	[ 0.9667]	'Out'	[0.8471]

Joint en moins =

2

Initial columns included: aucune  
 Step 1, added column 3, p=0.00706822  
 Step 2, added column 6, p=0.0455915  
 Final columns included: 3 6

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.0501]	[ 0.1866]	'Out'	[0.8329]
[ 0.2235]	[ 0.0442]	'Out'	[0.1243]
[ 1.7334]	[ 0.1777]	'In'	[0.0103]
[ 0.0766]	[ 0.1542]	'Out'	[0.7064]
[-0.0473]	[ 0.0741]	'Out'	[0.6384]
[-0.8034]	[ 0.1777]	'In'	[0.0456]
[-0.0967]	[ 0.0080]	'Out'	[0.0524]
[-0.1709]	[ 0.1433]	'Out'	[0.4444]
[ 0.0193]	[ 0.2207]	'Out'	[0.9446]

Joint en moins =

3

Initial columns included: aucune  
 Step 1, added column 9, p=0.00973936  
 Final columns included: 9

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.8545]	[ 0.2471]	'Out'	[0.0744]
[-0.3124]	[ 0.2298]	'Out'	[0.3069]
[-0.5904]	[ 0.5823]	'Out'	[0.4173]
[ 0.2702]	[ 0.1083]	'Out'	[0.1301]
[-0.1607]	[ 0.2257]	'Out'	[0.5503]
[-0.3648]	[ 0.2331]	'Out'	[0.2580]
[-0.0121]	[ 0.2531]	'Out'	[0.9661]
[ 0.0253]	[ 0.6900]	'Out'	[0.9741]
[-0.9595]	[ 0.1627]	'In'	[0.0097]

Joint en moins =

4

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.6564]	[ 0.4356]	'Out'	[0.2289]
[ 0.2546]	[ 0.5583]	'Out'	[0.6794]
[ 0.8748]	[ 0.2797]	'Out'	[0.0522]
[ 0.1224]	[ 0.5730]	'Out'	[0.8445]
[ 0.0902]	[ 0.5750]	'Out'	[0.8853]
[ 0.2700]	[ 0.5559]	'Out'	[0.6604]
[-0.5145]	[ 0.4951]	'Out'	[0.3751]
[-0.7825]	[ 0.3595]	'Out'	[0.1177]
[-0.7561]	[ 0.3778]	'Out'	[0.1392]

Joint en moins =

5

Initial columns included: aucune

Step 1, added column 8, p=0.0358033

Final columns included: 8

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[ 0.7292]	[ 0.4554]	'Out'	[0.2505]
[ 0.0186]	[ 0.6153]	'Out'	[0.9787]
[ 0.1649]	[ 0.5728]	'Out'	[0.8006]
[ 0.2304]	[ 0.2580]	'Out'	[0.4661]
[-0.3395]	[ 0.2183]	'Out'	[0.2602]
[-0.0534]	[ 0.4993]	'Out'	[0.9245]
[-0.3140]	[ 0.5194]	'Out'	[0.6069]
[-0.9029]	[ 0.2482]	'In'	[0.0358]
[ 0.5309]	[ 0.8462]	'Out'	[0.5945]

Joint en moins =

6

Initial columns included: aucune

Final columns included: aucune

'Coeff'	'Std.Err.'	'Status'	'P'
[-0.7833]	[ 0.3589]	'Out'	[0.1171]
[ 0.5469]	[ 0.4833]	'Out'	[0.3401]
[ 0.8588]	[ 0.2958]	'Out'	[0.0623]
[-0.2959]	[ 0.5515]	'Out'	[0.6288]
[ 0.5554]	[ 0.4801]	'Out'	[0.3311]
[ 0.6047]	[ 0.4598]	'Out'	[0.2800]
[-0.8380]	[ 0.3150]	'Out'	[0.0763]

```
[-0.8590] [ 0.2956] 'out' [0.0622]
[-0.8472] [ 0.3068] 'out' [0.0701]
```

Erreur moyenne quadratique du coefficient des variables (NaN s'affiche si la variable ne sort pas, 0 s'affiche lorsqu'elle ne sort pas pour tous les joints, lorsqu'elle sort avec tous les joints, c'est la valeur de l'EQM qui ressort.) :

EQM =

NaN	0	NaN	NaN
NaN	0	NaN	NaN
NaN	NaN	0	0.0680
NaN	NaN	0	NaN
NaN	NaN	NaN	NaN
NaN	0	0	0.1643
NaN	NaN	NaN	NaN
NaN	0.0000	NaN	0
NaN	0	NaN	0

# Annexe N

## Résultats des régressions PLS

Cette méthode nous permet de déterminer une matrice de coefficient PLS. Les régressions PLS sont réalisées avec pour données d'entrée les variables de morphologie (prédicteurs) de la matrice X : moy, Rmax, Rd, Ra, Rsk, Rku, Rl,  $\theta$ ,  $\cos \phi$ , Dcc, Pal, Por, L et C. Dans le cas des essais sur mortier, les variables de la matrice des Y (variables réponses) sont Ks1, Ks2, Kna, Knb et dans le cas du marbre, ce sont les mêmes plus Coh et  $\varphi$ .

Les résultats sont présentés de la façon suivante :

Xloading : représente la matrice loadings (ou charges) provenant de la décomposition de X

Yloading : représente la matrice loadings (ou charges) provenant de la décomposition de Y

Xscores : représente la matrice des composantes (ou facteurs) provenant de la décomposition de X

Yscores : représente la matrice des composantes (ou facteurs) provenant de la décomposition de Y

beta : représente la matrice des coefficients de régression PLS

PctVar : représente la matrice du pourcentage de variance expliquée, la première ligne correspond à la variance expliquée des variables de X et la deuxième à celle des variables de Y.

Hormis beta, ces matrices sont composées de quatre colonnes, qui représentent les quatre composantes principales.

Nous présentons les résultats de la régression PLS sur les variables provenant des essais sur marbre, puis celle sur des variables provenant des essais sur mortier.

Xloadings =

0.0086	0.0009	-0.0028	-0.0008
0.0164	-0.0020	0.0016	-0.0003
0.0081	0.0011	-0.0044	-0.0006
0.0030	-0.0009	0.0007	0.0002
-0.1369	-0.3225	1.2959	-0.0051
-0.2397	2.4170	0.2053	-0.0070
-0.0831	0.0090	-0.0052	-0.0083
6.0559	-1.7317	0.0284	0.0006
0.1913	2.0103	0.2590	0.0054
-0.1432	0.1029	0.0588	0.0526
0.0001	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0065	0.0057	-0.0280	0.0152
0.0059	-0.0101	-0.0056	0.0024
0.0227	-0.0025	0.0070	-0.0010

Yloadings =

2.1413	3.8390	1.5876	0.5019
26.2889	24.3378	-7.3067	-8.6147
0.0593	-0.1083	0.0327	0.0193
0.1530	1.7109	-7.9768	-10.3618
3.8502	2.5170	-1.6760	0.3980
10.7712	2.6388	-1.0279	-7.8569

Xscores =

-0.5400	0.6198	0.3501	0.1713
-0.1192	-0.3440	-0.1973	0.5581
-0.0771	-0.3117	-0.3073	0.2022
0.5934	-0.1465	0.6759	0.0260
-0.3322	-0.3344	0.0142	-0.7608
0.4751	0.5167	-0.5357	-0.1969

Yscores =

-139.5748	280.0768	71.4107	41.5738
-522.4834	-337.4897	46.7979	137.4267
-204.0705	-153.2786	12.3424	47.4654
246.0187	-225.7954	88.5756	6.2382
-288.0553	-31.9583	-119.7079	-184.9961
908.1653	468.4453	-99.4188	-47.7080

beta =

-15.2509	300.5025	0.4205	372.4682	-14.2993	284.8668
-0.1207	2.0915	-0.0047	2.4896	-0.0885	1.8809
-0.0473	0.8807	-0.0019	1.0365	-0.0385	0.7951
-0.0978	1.6875	-0.0038	2.0013	-0.0681	1.5069
0.0318	-0.5324	0.0012	-0.6415	0.0238	-0.4829
0.4824	-2.0961	0.0179	1.0518	-1.8193	4.1567
-0.0369	26.5463	-0.0642	23.5493	-0.1428	19.0372
-1.3726	23.2059	-0.0524	28.0093	-1.0762	21.1819
0.4833	2.5502	0.0140	-2.1375	0.6860	0.2251
2.0169	-10.6266	0.0218	-20.3320	1.3922	-14.0563
8.4413	-143.4621	0.3224	-172.4643	6.4794	-130.4517
0.0015	-0.0256	0.0001	-0.0308	0.0012	-0.0234
2.3966	-41.1711	0.0922	-49.5431	1.9147	-37.5909
0.3727	-6.4975	0.0146	-7.7923	0.2995	-5.9169
-0.1519	2.7436	-0.0060	3.2736	-0.1292	2.5073

PctVar =

0.7133	0.2518	0.0348	0.0001
0.4412	0.3327	0.0659	0.1301

Xloadings =

-0.0068	-0.0027	-0.0054	0.0011
-0.0120	-0.0067	-0.0074	0.0019
-0.0072	-0.0024	-0.0058	0.0010
-0.0022	-0.0018	-0.0012	0.0008
0.3942	-0.3120	0.6151	-0.1623
1.4478	1.3572	0.6341	-0.0257
0.0354	0.0212	0.0211	0.0111
-5.7421	1.4030	0.4774	0.0068
0.9494	-0.7989	1.4663	0.0918
0.3485	0.2157	0.2052	0.1474
-0.0000	-0.0001	-0.0000	0.0000
-0.0006	-0.0114	0.0081	-0.0420
-0.0071	-0.0089	-0.0107	0.0017
-0.0113	-0.0068	-0.0180	-0.0012

Yloadings =

4.4569	3.6662	2.5379	0.1119
-0.1371	0.0635	-0.1368	-0.1261
15.6908	24.5733	-2.3042	9.2677
2.0099	2.5232	2.6459	0.9061

Xscores =

0.3347	-0.1427	0.2321	-0.7994
-0.6897	0.1715	0.3812	0.0473
0.0809	0.1649	-0.8039	0.0232
0.5560	0.4316	0.3506	0.4627
-0.3095	0.2076	-0.1772	-0.1000
0.0277	-0.8329	0.0171	0.3662

Yscores =

-60.8168	-236.7099	16.1269	-52.0376
23.2588	320.6912	-8.6673	86.3317
237.0442	341.6937	-29.2637	77.6521
377.4960	346.1573	-0.9979	34.3349
-277.0512	-301.5004	26.9448	-165.0130
-299.9310	-470.3319	-4.1429	18.7318

beta =

5.9754	1.5414	-63.0651	-4.1674
-0.0234	0.0161	-1.2403	-0.1216
-0.0410	0.0266	-2.0834	-0.2029
-0.0236	0.0163	-1.2518	-0.1230
-0.0078	0.0044	-0.3495	-0.0341
-0.0520	0.2658	-25.3738	-1.8099
2.7507	0.0703	7.4900	1.3730
0.1646	-0.1316	10.2134	0.9768
0.0392	0.0043	-0.2834	0.3117
0.4214	-0.1750	0.9578	1.3765
0.8952	-0.4211	34.0001	3.3695
-0.0001	0.0000	-0.0021	-0.0002
-0.0388	0.0406	-3.2686	-0.2938
-0.0458	0.0285	-2.2181	-0.2184
-0.0658	0.0483	-3.6855	-0.3621

PctVar =

0.8219	0.1041	0.0726	0.0013
0.1880	0.4340	0.0131	0.0604



# Bibliographie

- [1] Philippe Blanc, Philippe Bromblet, and Lise Leroux. White marbles provenance study of caesar s head and other major sculptures found in the rhône river at arles (france). In Institut Català d'Arqueologia Clàssica, editor, *Proceedings of the IX Association for the Study of Marbles and Other Stones in Antiquity : ASMOSIA*, volume 23, pages p. 401–406, Tarragona, June 8-13 2012. (document), 2.4.2, 3.2.1
- [2] E Ganniari-Papageorgiou. Joining fragmented epistyles using threaded titanium bars : A numerical analysis. *Strain*, 45 :445 –455, 2009. (document), 2.4.2, 2.4.2
- [3] Venice Charter. International charter for the conservation and restoration of monuments and sites. In *Second international congress of architects and technicians of historic monuments*, 1964. (document), 3.6, 4.4
- [4] Krakow Charter. *Principles for the conservation and restoration of built heritage*. Marsilio, Venice, 2000. (document)
- [5] F. Schmitt, F. Polycarpe, and J.C. André. Traitement tridimensionnel d'objets de musées. In *Proceedings of IXèmes journées des restaurateurs en archéologie*, pages 123–143, Soisson, june 14, 15 1993. (in French). 1.1
- [6] Antonio Adán, Santiago Salamanca, and Pilar Merchán. A hybrid human-computer approach for recovering incomplete cultural heritage pieces. *Computers & Graphics*, 36(1) :1 – 15, 2012. 1.1, 1.6, 4.4
- [7] A. Borri and A. Grazini. Diagnostic analysis of the lesions and stability of michelangelo's david. *Journal of Cultural Heritage*, 7(4) :273 – 285, 2006. 1.1, 1.3.1, 2.1
- [8] Raffaella Fontana, Marinella Greco, Marzia Materazzi, Enrico Pampaloni, Luca Pezzati, Claudio Rocchini, and Roberto Scopigno. Three-dimensional modelling of statues : the minerva of arezzo. *Journal of Cultural Heritage*, 3(4) :325 – 331, 2002. 1.2.1, 1.2.2



- [9] Basilio Ramos Barbero and Elena Santos Ureta. Comparative study of different digitization techniques and their accuracy. *Computer-Aided Design*, 43(2) :188 – 206, 2011. (document), 1.1, 1.1, 1.2.2
- [10] Lucia Arbace, Elisabetta Sonnino, Marco Callieri, Matteo Dellepiane, Matteo Fabbri, Antonio Iaccarino Idelson, and Roberto Scopigno. Innovative uses of 3d digital technologies to assist the restoration of a fragmented terracotta statue. *Journal of Cultural Heritage*, 0(0) :-, 2012. 1.2.2, 1.4.5
- [11] Konica Minolta. *Vivid 910, non-contact 3-D digitizer, technical documentation*. 1.2.2
- [12] Dassault. Catia, manuel de l'utilisateur - digitized shape editor. <http://www.3ds.com/>, August 2009. 1.2.4, 1.4, 1.4.3, 1.4.4
- [13] P.J. Besl and Neil D. McKay. A method for registration of 3-d shapes. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 14(2) :239–256, 1992. 1.2.4, 1.3.2
- [14] Shaoyi Du, Nanning Zheng, Lei Xiong, Shihui Ying, and Jianru Xue. Scaling iterative closest point algorithm for registration of m-d point sets. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 21(5–6) :442 – 452, 2010. Special issue on Multi-camera Imaging, Coding and Innovative Display. 1.2.4
- [15] Szymon Rusinkiewicz and Marc Levoy. Efficient variants of the ICP algorithm. In *Third International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling (3DIM)*, June 2001. (document), 1.5, 1.2.4
- [16] Michael Freytag, Vadim Shapiro, and Igor Tsukanov. Finite element analysis in situ. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(9) :957 – 972, 2011. 1.3.1
- [17] Jean-Philippe Pernot, George Moraru, and Philippe Véron. Filling holes in meshes using a mechanical model to simulate the curvature variation minimization. *Computers & Graphics*, 30(6) :892 – 902, 2006. 1.4.1
- [18] Rémi Allègre. *Contributions à l'introduction flexibilité dans la reconstruction et l'édition de modèles 3D*. PhD thesis, Thèse de l'Université Claude Bernard - Lyon 1, 5 décembre 2006. 1.4.1
- [19] Francisco Javier Martin Martinez. *Modelization molecular de nanotubos de carbono*. PhD thesis, Facultad de Ciencias de Granada, 2010. (document), 1.9
- [20] M. Sala. *Domain Decomposition Preconditioners : Theoretical Properties, Application to the Compressible Euler Equations, Parallel Aspects*. PhD thesis, EPFL, 2003. (document), 1.4.4, 1.4.4, 1.12

- [21] A. Casagrande. *Parallel Mesh Adaptive Techniques for Complex Flow Simulation*. PhD thesis, EPFL, 2008. 1.4.4
- [22] Sandrine Coignard and Benoit Coignard. Neptune, étude préalable par simulation informatique et restauration. Technical report, Musée départemental Arles antique, 2009. ( in french). 1.4.5, 2.1, 2.4.2, 3.3, B
- [23] GID. Gid : the personal pre and post processor, manual. <http://www.gidhome.com/home>, 2004. 1.5.1
- [24] Jeremy Bleyer and Patrick de Buhan. Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3d composite frame structures. *Computers & Structures*, 129(0) :86 – 98, 2013. 1.5.2
- [25] P Cofie, A.J Koolen, and U.D Perdok. Measurement of stress–strain relationship of beech roots and calculation of the reinforcement effect of tree roots in soil–wheel systems. *Soil and Tillage Research*, 57(1–2) :1 – 12, 2000. 1.5.2
- [26] Luisa Berto, Paola Simioni, and Anna Saetta. Numerical modelling of bond behaviour in {RC} structures affected by reinforcement corrosion. *Engineering Structures*, 30(5) :1375 – 1385, 2008. (document), 1.5.2, 1.15
- [27] B.H. Xu, A. Bouchaïr, and P. Racher. Analytical study and finite element modelling of timber connections with glued-in rods in bending. *Construction and Building Materials*, 34(0) :337 – 345, 2012. (document), 1.5.2, 1.15
- [28] Daniel Dias. *Renforcement du front de taille des tunnels par boulonnage : étude numérique et application à un cas réel en site urbain*. PhD thesis, INSA Lyon, 1999. (document), 1.5.2, 1.5.2, 1.15
- [29] Itasca. *FLAC3D, Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions, Users Guide, Structural Elements - section1*. Itasca Consulting Group Inc., 2006. 1.5.2, 2.2, 2.2.2, A.0.1
- [30] P Billiaux, D Cundall. Simulation des géomatériaux par la méthode des éléments lagrangiens. *Revue Française de Géotechnique*, 63 :9–21, 1993. (document), 2.1
- [31] Hai min WU, Yi ming SHU, and Jun gao ZHU. Implementation and verification of interface constitutive model in flac3d. *Water Science and Engineering*, 4 :305–316, 2011. 2.2.1
- [32] W Mc Guire and R. H. Gallagher. Matrix structural analysis. *John Wiley & Son Inc*, 1979. 2.2.2

- [33] E Papamichos, S-A Papanicolopoulos, and I Larsen. Mechanical properties and damage diagnosis of natural building stones. In *Fracture and failure of natural building stones - Applications in the restoration of ancient monuments*, pages 71–92, 2006. 2.4.2, 2.4.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4
- [34] IN Prassianakis and NI Prassianakis. Ultrasonic testing of non-metallic materials : concrete and marble. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 42(2) :191–198, 11 2004. 2.4.2, 3.2.1
- [35] S K Kourkoulis, I Prassianakis, Z Agioutantis, and G E Exadaktylos. Reliability assessment of the ndt results for the internal damage of marble specimens. *International Journal of Materials and Product Technology*, 26 :35–56, 2006. 2.4.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4, B
- [36] M Stavropoulou. Modeling of small-diameter rotary drilling tests on marbles. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 43(7) :1034–1051, 10 2006. 2.4.2, 2.4.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4
- [37] Perrier. Panorama de la grèce marbrière. *Le Mausolée*, n° 642 :67–85, 1990. 2.4.2
- [38] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1990. 2.4.2
- [39] C. Hazard, F. Lelong, and B. Quinzain. *Mémotech : structures métalliques*. Collection A. Capliez. Educavivre-Casteilla, 1997. 2.4.2
- [40] S Laroze and J J Barreau. *Mécanique des structures*. Eyrolles, Paris, 1988. 2.4.2, 2.4.2, B
- [41] Yexue Li, Zheming Zhu, Bixiong Li, Jianhui Deng, and Heping Xie. Study on the transmission and reflection of stress waves across joints. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 48(3) :364 – 371, 2011. 2.4.2
- [42] I Vardoulakis and S K Kourkoulis. Mechanical properties of dionysos marble : Final report of the environment project ev5v-ct93-0300 : Monuments under seismic action. Technical report, National Technical University of Athens, 1997. 2.4.2
- [43] Stavros K Kourkoulis and Evangelia Ganniari-Papageorgiou. Restoring fragmented marble epistyles : Some critical points. *Journal of Cultural Heritage*, 11(4) :420–429, 10 2010. 2.4.2, 3.2.1
- [44] Huntsman. Araldite®aw106/hv953u, two component epoxy paste adhesive. Technical report, Huntsman Advanced Materials, August 2000. Publication No. A 230 e GB. 2.4.3
- [45] J.W. Hutchinson, M.E. Mear, and J.R. Rice. Crack paralleling an interface between dissimilar material. *Journal of Applied Mechanics-T ASME*, 54 :828–832, 1987. 2.4.3, E

- [46] Y. Zhang, N.A. Noda, K.T. Takaishi, and X. Lan. Stress intensity factors of a central interface crack in a bonded finite plate and periodic interface cracks under arbitrary material combinations. *Eng Fract Mech*, 78 :1218–1232, 2011. 2.4.3
- [47] Z. Zhou, X. Xu, A.Y.T. Leung, and Y. Huang. Stress intensity factors and t-stress for an edge interface crack by symplectic expansion. *Eng Fract Mech*, 102 :334–347, 2013. 2.4.3
- [48] T. Belytschko and R. Gracie. On xfem applications to dislocations and interfaces. *Int J Plasticity*, 23 :1721–1738, 2007. 2.4.3
- [49] U Lindborg, RC Dunakin, and DJ Rowcliffe. Thermal stress and weathering of carrara, pentelic and ekeberg marble. In ed. Fassina, editor, *Proceedings of the 9th International Congress on Deterioration and Conservation of Stone*, volume 1, pages p. 109–117. Amsterdam : Elsevier, 2000. 2.4.3, E, E
- [50] P. Boulanger, P. Donati, E. Christ, and U. Kaulbars. L’environnement vibratoire au poste de conduite des camions. *Cahier de notes documentaires*, INRS :146, 1992. (document), 2.5.2, 2.20, 2.5.5
- [51] SeismoSoft. Earthquake engineering software solutions, december 2012. <http://www.seismosoft.com/>. 2.5.2
- [52] J. Bayer and K. Bommer. Selection and scaling of real accelerograms for bi-directional loading : A review of current practice and code provisions. *J Earthquake Eng*, 11 :13–45, 2007. 2.5.2
- [53] N. Lam, J. Wilson, and G. Hutchinson. Generation of synthetic earthquake accelerograms using seismological modeling : a review. *J Earthquake Eng*, 4 :321–354, 2000. 2.5.2
- [54] M. Alber and U. Hauptfleisch. Generation and visualization of microfractures in carrara marble for estimating fracture toughness, fracture shear and fracture normal stiffness. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 36 :1065–1071, 1999. 2.5.3
- [55] Maria Migliazza, Anna Maria Ferrero, and Andrea Spagnoli. Experimental investigation on crack propagation in carrara marble subjected to cyclic loads. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 48 :1038–1044, 2011. 2.5.3, 2.5.5
- [56] Q.H. Qian. Zonal disintegration of surrounding rock mass around the diversion tunnels in jinping ii hydropower station, southwestern china. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 51 :129–138, 2009. 2.5.3
- [57] T. Backers, O. Stephansson, and E. Rybacki. Rock fracture toughness testing in mode ii—punch-through shear test. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 39 :755–769, 2002. 2.5.3, 2.5.5

- [58] Todd Stewart, Wen Cheong, Victoria Barr, and Daniel Tang. Strong and light plaster casts? *Injury*, 40(8) :890 – 893, 2009. 2.5.5
- [59] S K Kourkoulis, G Exadaktylos, and I Vardoulakis. U-notched d-p marble beams in three point bending : The effect of nonlinearity, anisotropy and microstructure. *International Journal of Fracture*, 98 :369–392, 1999. 3.2.1
- [60] S.K. Kourkoulis, S.A. Papanicolopoulos, A. Marinelli, and I. Vayas. Restaurierung antiker tempel : Experimentelle untersuchungen zum ausziererhalten vor verankerungen im marmor. *Bautechnik*, 85 :109–119, 2008. 3.2.1
- [61] CE N Vintzileou, E N Adami. The bond mechanism in stone- or brick-to-grout interfaces. *Strain*, 45 :400–409, 2009. 3.2.1
- [62] Bo Li. *Coupled Shear-Flow and Deformation Properties of Fractured Rock Mass*. PhD thesis, Nagasaki University, 2009. 3.3
- [63] Javad Eslami. *Etude de l'endommagement à court et long terme d'une roche poreuse*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2010. 3.3.1
- [64] E Papamichos, S-A Papanicolopulos, I Larsen, L Alnæs, and S Rescic. Method for in situ, quasi non-destructive diagnosis of mechanical properties and damage of natural building stones. In *the 6th North American Rock Mechanics*. Proceedings of Gulf Rocks, 2004. 3.3.1, 3.4
- [65] Chin-Hang Sam, Katerina D Papoulia, and Stephen A Vavasis. Obtaining initially rigid cohesive finite element models that are temporally convergent. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(14) :2247–2267, 9 2005. 3.4
- [66] G Amontons. *De la résistance causée dans les machines*. Mémoire de mathématique et de physique de l'académie royale, Paris, 1699. 3.5.1
- [67] F.D. Patton. Multiple modes of shear failure in rock. In Int. Soc. Rock Mech, editor, *In first Int Cong Rock Mech*, pages 509–513, Lisbon, 1966. (document), 3.10, 3.5.1, 3.5.1, J
- [68] R Goodman. Methods of geological engineering in discontinuous rocks. In *West, St Paul, MN*, 1976. (document), 3.5.1, 3.13, 3.15, H
- [69] D Day, R ;Potts. The effect of interface properties on retaining wall behaviour. *International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22 :1021–1033, 1998. 3.5.1
- [70] Imen Said. *Comportement des interfaces et modélisation des pieux sous charge axiale*. PhD thesis, Ecole Nationale des ponts et Chaussées, 2006. (document), 3.11

- [71] R Goodman. *Introduction to rock mechanics*. Wiley, New York, Second edition, 1989. (document), 3.11, 3.13
- [72] Jérôme Duriez. *Stabilité des massifs rocheux : Une approche mécanique*. PhD thesis, Institut polytechnique de Grenoble, 2009. (document), 3.12
- [73] P Cundal. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29 :47–65, 1979. (document), 3.12
- [74] R. Goodman. The mechanical properties of joints. In Proceedings of the Third Congress of the International Society for Rock Mechanics, editor, *Advances in Rock Mechanics*, volume 1, pages 127–172, Pt. A, Washington, D. C., 1974. 3.5.1
- [75] S.C. Bandis, A.C. Lumsden, and N.R. Barton. Fundamentals of rock joint deformation. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 20(6) :249 – 268, 1983. 3.5.1, H
- [76] S. Gentier, J. Riss, G. Archambault, R. Flamand, and D. Hopkins. Influence of fracture geometry on shear behavior. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 37 :161 – 174, 2000. (document), 3.5.1, 3.14, 3.5.2
- [77] D. Tabor. Junction growth in metallic friction : The role of combined stresses and surface contamination. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 251(1266) :pp. 378–393, 1959. 3.5.1
- [78] N. Barton and S. Bandis. Effects of block size on the shear behaviour of jointed rock. In *Proceedings of the 23rd US symposium on rock mechanics*, page 739–760, Berkeley, California, 1982. Soc of Min Eng of AIME, New York, NY, USA. 3.5.1, H
- [79] Nick Barton. Shear strength criteria for rock, rock joints, rockfill and rock masses : Problems and some solutions. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 5(4) :249 – 261, 2013. (document), 3.16, 3.5.1
- [80] G. Grasselli and P. Egger. Shear strength equation for rock joints, based on 3-d surface characterization. In *International conference on geotechnical and geological engineering ; GeoEng 2000 ; 88*. Technomic, 2000. 3.5.1
- [81] P. Lopez, J. Riss, and G. Archambault. An experimental method to link morphological properties of rock fracture surfaces to their mechanical properties. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 40(6) :947 – 954, 2003. 3.5.1

- [82] F. Lefevre, T. Belem, F. Homand, and M. Souley. Analyse du comportement en cisaillement de joints rocheux de granite. Technical report, Laboratoire Environnement Géomécanique et Ouvrages, ENSG-INPL, 1997. 3.5.1
- [83] T Yoshinaka, R Yamabe. Joint stiffness and the deformation behaviour of discontinuous rock. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech*, 23 :19–28, 1986. 3.5.1, 3.5.1
- [84] Tikou Belem, Mountaka Souley, and Françoise Homand. Modeling surface roughness degradation of rock joint wall during monotonic and cyclic shearing. *Acta Geotechnica*, 2(4) :227–248, 2007. (document), 3.17, J.1
- [85] Robert Perales. *Modélisation du comportement mécanique par éléments discrets des ouvrages maçonnés tridimensionnels, contribution à la définition d'éléments de contacts surfaciques*. PhD thesis, Université de Montpellier 2, 2007. 3.5.2, A.0.2, G.2
- [86] N. Barton. Review of a new shear strength criterion for rock joints. *Eng Geol*, 7 :287–332, 1973. 3.5.2, G.2
- [87] P. Klapetek, D Nečas, and C. Anderson. *Gwyddion user guide*, 2009. 3.5.2
- [88] ISO 25178-2. Geometrical product specification (gps)-surface texture : Areal-part 2. terms, definitions and surface texture parameters, 2012. 3.5.2, K
- [89] T. Belem, F. Homand, and M. Souley. Quantitative parameters for rock joint surface roughness. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 33(4) :217–242, 2000. 3.5.2, K
- [90] E.S. Gadelmawla, M.M. Koura, T.M.A. Maksoud, I.M. Elewa, and H.H. Soliman. Roughness parameters. *Journal of Materials Processing Technology*, 123(1) :133–145, April 2002. 3.5.2, K
- [91] Michel Tenenhaus. *La régression PLS : Théorie et Pratique*. Paris, 1998. 4.1, 4.3.2
- [92] JE Jackson. *A User's Guide to Principal Components*. John Wiley and Sons, 1991. 4.2.4
- [93] W.F. Massy. Principal components regression in exploratory statistical research. *Journal of the American Statistical Association*, 60 :234–256, 1965. 4.3.2
- [94] H. Hotelling. Relations between two sets of variates. *Biometrika*, 28 :321–377, 1936. 4.3.2

- [95] L. Lebart, A. Morineau, and M. Piron. *Statistique exploratoire multi-dimensionnelle*. Dunod, 2000. 4.3.2
- [96] Stéphanie Bougeard. *Description et prédiction à partir de données structurées en plusieurs tableaux. Application en épidémiologie animale*. PhD thesis, Université de Rennes 2, Décembre 2007. 4.3.2
- [97] S. De Jong. Simpls : An alternative approach to partial least squares regression. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 18 :251–263, 1993. 4.3.2
- [98] K. Beck. Compatibilité pierre-mortier : Adhésion et propriétés mécaniques de l'interface pierre-mortier. In *AUGC*, 2009. A.0.1, A.0.2
- [99] Daniel Gay and Jacques Gambelin. *Dimensionnement des structures*. 1999. A.0.1
- [100] G Grasselli. 3d behaviour of bolted rock joints : experimental and numerical study. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 42 :13–24, 2005. A.0.2
- [101] Nathalie Domede. *Méthode de requalification des ponts en maçonnerie*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2006. A.0.2
- [102] Ltd. Vantico. Data araldite cw 229, araldite casting resin system. Technical report, Huntsman Advanced Materials, July 25 2000. E, E
- [103] J. C. Newman and I. S. Raju. An empirical stress intensity factor equation for the surface crack. *Engineering Fracture Mechanics*, 15(1-2) :185–192, 1981. E
- [104] R.G. Forman and V. Shivakumar. Growth behaviour of surface cracks in the circumferential plane of solid and hollow cylinders. In *Seventeenth Volume Fracture Mechanics*, volume STP 905, pages 59–74. ASTM, 1986. (document), E.3
- [105] E Hakami. *Joint aperture measurements, An experimental technique*. Fractured and Jointed Rock Masses, Myer LR, Cook NGW, Googman RE, Tsang CF, 1995. (document), G.1, G, G.1
- [106] N. Barton, B. Buen, and S. Roald. Strengthening the case for grouting. In *Tunnels and Tunneling International*, 2001. G
- [107] John Conrad Jaeger, Neville G. W. Cook, and Robert Zimmerman. *Fundamentals of Rock Mechanics*. Blackwell Publishing, 2007. G.1
- [108] N. Barton and V. Choubey. The shear strength of rock joints in theory and practice. *Rock Mechanics*, 1/2 :1–54, 1977. (document), G.2, G.3
- [109] D.M. Tse, R. Curden. Estimating joint roughness coefficients. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr*, 16 :303–307, 1979. G.2



- [110] ZHOU ChuangBing WANG XiaoJiang PENG Jun1 RONG Guan, HUANG Kai. A new constitutive law for the nonlinear normal deformation of rock joints under normal load. *Science China Press*, 55 :555–567, february 2011. H
- [111] B. Ladanyi and G. Archambault. Simulation of the shear behaviour of a jointed rock mass. In AIME, editor, *Proc. of 11th Symp. Rock Mech.*, pages 105–125, 1970. H, H
- [112] S. Saeb and B. Amadei. Modelling rock joints under shear and normal loading. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanical Abstract*, 29(3) :267–278, 1992. H
- [113] M. Souley, F. Homand, and B. Amadei. An extension to the saeb and amadei constitutive model for rock joints to include cyclic loading paths. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 32(2) :101 – 109, 1995. H
- [114] Arash Usefzadeh, Hamed Yousefzadeh, Hossein Salari-Rad, and Mostafa Sharifzadeh. Empirical and mathematical formulation of the shear behavior of rock joints. *Engineering Geology*, 164(0) :243 – 252, 2013. H
- [115] R. Simon, M. Aubertin, and H.S. Mitri. A non-linear constitutive model for rock joints to evaluate unstable slip. *Rock Mechanics for Industry*, 2 :1091–1098, 1999. H
- [116] R. Simon. *Analysis of fault-slip mechanisms in hard rock mining*. PhD thesis, McGill University, 1999. H
- [117] S. Saeb. *A variance on the Ladanyi and Archambault's shear strenght criterion*. Balkema, 1990. H
- [118] R. Flamand, G. Archambault, S. Gentier, J. Riss, and A. Rouleau. An experimental study of the shear behavior of irregular joints based on angularities and progressive degradation of the surfaces. In Nova Scotia, editor, *Proceed. 47th Canadian Geotechnical Conference of the C.G.S.*, pages 253–262. Halifax, 1994. J
- [119] S. Sabbadini. *Analyses géostatistique et fractale de l'évolution de la morphologie de discontinuités au cours du cisaillement*. PhD thesis, Ecole nationale supérieur de géologie de Nancy, october 1994. J, K
- [120] Comité Français de Mécanique des Roches, P. Duffaut, and F. Homand. *Manuel de mécanique des roches : Fondements*. Manuel de mécanique des roches. Les Presses de l'École des Mines, 2000. (document), J.4
- [121] A. Mannelquist, N. Almquist, and S. Fredriksson. Influence of tip geometry on fractal analysis of atomic force microscopy images. *Applied Physics A*, 66(1) :S891–S895, 1998. K, K

- [122] W. Zahn and A. Zösch. The dependence of fractal dimension on measuring conditions of scanning probe microscopy. *Fresenius' Journal of Analytical Chemistry*, 365(1-3) :168–172, 1999. K
- [123] C. Douketis, Z. H. Wang, T. L. Haslett, and M. Moskovits. Fractal character of cold-deposited silver films determined by low-temperature scanning-tunneling-microscopy. *Phys. Rev. B : Condens. Matter Mater. Phys.*, 51(16) :11022–11031, April 1995. K
- [124] W. Zahn and A. Zösch. Characterization of thin-film surfaces by fractal geometry. *Fresenius' Journal of Analytical Chemistry*, 358(1-2) :119–121, 1997. K
- [125] C. Amra. Introduction a l'étude de la diffusion de la lumière par les rugosités des surfaces optiques. In G. Roblin, editor, *École d'été Systèmes Optiques*, pages 485–498, 2002. K



Laura MICHEL

# Méthodologie d'analyse structurelle et de restauration d'œuvres sculptées

## Résumé :

Actuellement, la restauration des œuvres d'art, notamment des statues fracturées, repose sur des techniques éprouvées, mais empiriques. Les statues endommagées comportent souvent des parties brisées. Leur restauration consiste la plupart du temps à les rassembler. Ainsi apparait la nécessité de prendre en compte les propriétés mécaniques des interfaces entre les différentes parties brisées, ce qui permet de limiter l'ampleur des réparations et ainsi, de mieux conserver l'intégrité de l'œuvre. Par ailleurs, les techniques numériques d'acquisition 3D font leur entrée au service de la conservation du patrimoine. Cette thèse propose une méthodologie capable d'utiliser des données issues d'une acquisition 3D pour simuler les opérations de restauration et leurs effets sur la structure de l'œuvre. Les processus de restauration peuvent ainsi être testés et optimisés.

Un scanner laser est utilisé pour l'acquisition de la géométrie des œuvres, ce qui nous permet de reconstruire un modèle 3D pour la simulation numérique. Les calculs sont menés dans le cadre de la mécanique des milieux continus déformables avec FLAC3D. Pour vérifier tous les points clés garantissant la stabilité mécanique, le comportement des éléments de renforts et celui des interfaces entre les blocs ont été considérés. À partir des résultats de ces études, une critique des stratégies de restauration mises en œuvre ou envisageables est proposée.

De plus, plusieurs méthodes de caractérisation visant à retrouver la provenance du matériau et/ou estimer les propriétés mécaniques de l'œuvre sont proposées : caractérisations physico-chimiques et minéralogiques, essais non destructifs et destructifs. Une campagne expérimentale visant à caractériser le comportement des fractures en contact frottant avec acquisition de l'état de surface a été réalisée. Une analyse des corrélations entre les propriétés mécaniques et morphologique des interfaces est ensuite élaborée. Enfin nous proposons des modèles prédictifs construits par régressions linéaires multiples et multivariées. Cette étude permet de simuler le comportement d'une œuvre fracturée.

Mots clés : Modélisation géométrique, interfaces, analyse statique et dynamique, structure endommagée, état de surface, géostatistique, modélisation prédictive.

## Methodology of structural analysis and restoration sculpted artworks

## Abstract :

Currently, the artworks restoration, including broken statues, are based on proven but empirical techniques. Damaged statues often have broken parts. Restoration mainly consists in joining these parts. Thus appears the necessity of taking into account the interfaces mechanical properties between the different broken parts, reducing thereby the extent of repairs and thus better maintain the integrity of the work. Beside this, digital 3D acquisition techniques become more and more popular among the cultural heritage community. This thesis proposes a methodology able to use 3D acquisition datas to simulate the restoration operations and their effects on the structure. The restoration strategy can thus be tested and optimized.

A laser scanner is used to acquire the statue geometry, allowing to reconstruct a 3D model for numerical simulation. Computations are carried out within the framework of deformable continuum mechanics using the FLAC3D software. In order to check all the key points ensuring mechanical stability, the behavior of reinforcing elements and those of the interfaces between blocks were considered. From the results of the present studies, a critical analysis of implemented or possible restoration strategy is proposed.

In addition, several characterization methods to find the material origin and/or estimate the mechanical properties of the work are proposed : physico-chemical and mineralogical characterizations, non-destructive and destructive tests. An experimental campaign to characterize the behavior of fractures in contact with surface acquisition was performed. An analysis of correlations between mechanical and morphological interfaces properties is then developed. Finally, we propose a predictive modelling based on multiple linear and multivariate regressions. This study allow the simulation of fractured artworks behaviour.

Keywords : Geometric modelling, interfaces, static and dynamic analysis, damage structures, surface morphology, geostatistics, predictive modelling