



Modélisation, observation et commande de la machine asynchrone

Sofien Hajji

► To cite this version:

Sofien Hajji. Modélisation, observation et commande de la machine asynchrone. Automatique. Université de Caen; Université de Sfax - Tunisie, 2009. Français. NNT : . tel-01058792

HAL Id: tel-01058792

<https://theses.hal.science/tel-01058792>

Submitted on 28 Aug 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

U.F.R. : SCIENCES CAEN

ECOLE DOCTORALE : SIMEM

Co-tutelle de thèse

entre

l'Université de Caen Basse-Normandie (*France*)

et

l'Université de Sfax (*Tunisie*)

(Arrêté du 06 janvier 2005)

THÈSE

présentée par

Sofien HAJJI

et soutenue

le 09 mai 2009

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

Spécialité : Automatique, robotique

(Arrêté du 07 août 2006)

**TITRE : Modélisation, observation et commande
de la machine asynchrone**

MEMBRES du JURY

M. R. BEN ABDENNOUR	Pr. à l'ENIG de Gabès
M. M. FARZA	Pr. à l'Université de Caen (Examineur)
M. M. KAMOUN	Pr. à l'ENIS de Sfax (Directeur de thèse)
M. D. MEHDI	Pr. à l'Université de Poitiers (Rapporteur)
M. M. M'SAAD	Pr. à l'ENSICAEN (Directeur de thèse)
M. F. M'SAHLI	Pr. à l'ENIM de Monastir (Rapporteur)

Liste des publications de Soufien HAJJI

Revue internationale

1. S. Hajji, M. Farza, M. M'saad, A. Chaari and M. Kamoun (2007), *State feedback control design for a class of nonlinear systems*, International Journal on Sciences & Techniques of automatic control and computer engineering (IJSTA journal) (Accepté)

Conférences invitées

1. S. Hajji, A. Chaari, M. Farza et M. M'saad (2006)
Commande avec retour de sortie pour une classe de systèmes non linéaires, Actes de la Conférence Internationale Francophone d'Automatique(CIFA' 06), 30 mai - 1 juin, Bordeaux, France.

Congrès internationaux avec actes

1. S. Hajji, M. Farza, M. M'saad and M. Kamoun (2008)
Observer-based output feedback controller for a class of nonlinear systems, 17th IFAC World Congress (IFAC' 08), Seoul, Korea, July 6 -11, 2008.
2. S. Hajji, A. Chaari, M. Farza, M. M'saad et M. Kamoun (2007)
Commande avec retour d'état pour une classe de systèmes non linéaires, 8ème conférence internationale des Sciences et des Techniques de l'Automatique (STA' 07), 5-7 novembre 2007, Monastir, Tunisie.
3. S. Hajji, A. Chaari, M. M'saad and M. Farza (2007)
Output feedback controller for a class of nonlinear systems, European Control Conference (ECC' 07), Kos, Greece, July 2-5, 2007.
4. M. Farza et M. M'saad, S. Hajji, J.F. Massieu and P. Dorléans (2007)
Output feedback controller for a class of nonlinear systems, Fourth IEEE Interna-

tional Conference on Systems, Signals and Devices (SSD' 07), Hammamet, Tunisia, March 19-22, 2007.

5. J.F. Massieu, P. Dorléans, S. Hajji, M. Farza and M. M'saad (2007)

High-gain-based output feedback controllers for the induction motor, Fourth IEEE International Conference on Systems, Signals and Devices (SSD' 07), Hammamet, Tunisia, March 19 -22, 2007.

Congrès nationaux avec actes

1. S. Hajji, A. Chaari, M. Farza, M. M'saad et M. Kamoun (2005)

Commande à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires, 6ème séminaire Tunisien d'Automatique (STA' 05), 19-21 décembre 2005, Sousse, Tunisie.

Remerciements

Table des matières

Liste des figures	10
1 Introduction Générale	13
2 Modélisation et observation de la machine asynchrone	17
2.1 Introduction	17
2.2 Modélisation de la machine asynchrone	18
2.2.1 Principe de fonctionnement	18
2.2.2 Hypothèses simplificatrices	18
2.2.3 Modèle dynamique de la machine asynchrone	19
2.2.4 Mise en équations	19
2.2.5 Transformation du système triphasé, transformation de PARK	21
2.2.5.1 Transformation de Concordia	21
2.2.5.2 Opérateur de rotation	21
2.2.5.3 Modèle de Park	22
2.3 Observation de la machine asynchrone	24
2.3.1 Introduction	24
2.3.2 observateur à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires	25
2.3.2.1 systèmes considérés	25
2.3.2.2 observateur proposé	26
2.3.3 Observateur avec mesure de vitesse	27
2.3.4 Observateur sans capteur de vitesse	29
2.4 Conclusion	30
3 Commande avec retour de sortie pour une classe de systèmes non linéaires	33
3.1 Introduction	33
3.2 Formulation du problème	34
3.3 Commande avec retour d'état	37
3.4 Commande avec retour de sortie	41
3.5 Quelques fonctions de synthèse particulières	47

3.6	Incorporation d'une action intégrale filtrée	48
3.7	Exemple d'illustration	50
3.7.1	Commande avec retour d'état	50
3.7.2	Commande avec retour de sortie	54
3.8	Conclusion	56
4	Commande avec retour de sortie pour une classe particulière de systèmes non linéaires	61
4.1	Introduction	61
4.2	Formulation du problème	62
4.3	Commande avec retour d'état	65
4.4	Commande avec retour de sortie	69
4.5	Incorporation d'une action intégrale filtrée	74
4.6	Conclusion	75
5	Application au moteur asynchrone	77
5.1	Introduction	77
5.2	Modèle de la machine asynchrone	78
5.3	Formulation de la commande	78
5.4	Commande à grand gain du moteur asynchrone	82
5.4.1	Commande à grand gain avec capteur de vitesse	82
5.4.2	Commande à grand gain sans capteur de vitesse	84
5.5	Résultats de simulation	84
5.5.1	Résultats de simulation avec capteur de vitesse	85
5.5.2	Résultats de simulation sans capteur de vitesse	87
5.6	Validation sur une plate-forme expérimentale d'essais de moteurs asyn- chrones	90
5.6.1	Introduction	91
5.6.2	Présentation du banc d'essai	91
5.6.3	Carte Dspace 1104	93
5.7	Résultats expérimentaux	93
5.7.1	Commande avec capteur de vitesse	94
5.7.2	Commande sans capteur de vitesse	99
5.8	Conclusion	102
6	Conclusion générale	103
	Bibliographie	105

Table des figures

2.1	Répartition spatiale des enroulements statoriques et rotoriques	19
2.2	Repère fixe (α, β) et repère tournant (d, q)	22
3.1	Entée du filtre du second ordre	51
3.2	Evolution de l'entrée et de la sortie et l'erreur de poursuite pour $d_1 = d_2 = 1$	52
3.3	Evolution de l'entrée et de la sortie et l'erreur de poursuite pour $d_1 = d_2 = 2$	53
3.4	Evolution de l'entrée, de la sortie et de l'erreur de poursuite pour $d_1 =$ $d_2 = 1$ avec la commande backstepping	57
3.5	Evolution de l'entrée, de la sortie et de l'erreur de poursuite pour $d_1 =$ $d_2 = 2$ avec la commande backstepping	58
3.6	Evolution de l'entrée, de la sortie et de l'erreur d'estimation pour $d_1 = d_2 = 1$	59
3.7	Evolution de l'entrée, de la sortie et de l'erreur d'estimation pour $d_1 = d_2 = 2$	60
5.1	Vitesse de référence désirée	85
5.2	I. Evolution de ω , erreur de poursuite de ω et évolution de la norme du flux rotorique	86
5.3	I. Evolution des tensions statoriques	87
5.4	I. L'erreur d'estimation de $\ \psi_r\ ^2$ et l'estimation de τ_L	87
5.5	II. Evolution de ω , de l'erreur de poursuite de ω et évolution de la norme de flux rotoriques	88
5.6	II. L'évolution des tensions statoriques	89
5.7	II. Erreur d'estimation de $\ \psi_r\ ^2$, ω et l'estimation de τ_L	90
5.8	Synoptique générale de la plate forme expérimentale	92
5.9	Vue générale du site expérimental	92
5.10	I. L'évolution des références de la vitesse rotorique et de la norme de flux .	94
5.11	I. L'évolution de la vitesse rotorique et de la norme de flux	96
5.12	I. L'évaluation de l'erreur d'estimation de la vitesse rotorique	97
5.13	I. L'évolution des flux rotoriques $\psi_{s\alpha}$ et $\psi_{s\beta}$	97
5.14	I. L'évolution des flux rotoriques $\psi_{s\alpha}$ et $\psi_{s\beta}$ zoomés	98
5.15	I. L'évolution de la vitesse rotorique et de la norme de flux pour $\tau_f = 0, 1$ et $f_{PWM} = 5KHz$	99

5.16	I. L'évaluation de la vitesse rotorique zoomée pour $\tau_f = 0,1$ et $f_{PWM} = 5KHz$	99
5.17	II. L'évolution de la vitesse rotorique et de la norme de flux	100
5.18	II. L'évaluation de l'erreur d'estimation de la vitesse rotorique	101
5.19	II. L'évolution des flux rotoriques $\psi_{s\alpha}$ et $\psi_{s\beta}$	101
5.20	II. L'évolution des flux rotoriques $\psi_{s\alpha}$ et $\psi_{s\beta}$ zoomés	102

Notations

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathcal{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{R}^+$	ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}^n$	espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
I_n	matrice identité de dimension $n \times n$ (appropriée)
$0_{n \times m}$	matrice nulle de dimension $n \times m$ (appropriée)
$[a, b]$	intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b
$]a, b[$	intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b
t	variable temporelle
$[a, b[$	intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	dérivée temporelle de l'état x
C^ω	ensemble des fonctions continûment différentiables ω fois dans $\mathbb{R}^n$
$X > 0$ (≥ 0)	X définie positive (semi définie positive)
$X < 0$ (≤ 0)	X définie négative (semi définie négative)
$\dim(X)$	dimension de la matrice X
$(\cdot)^T$	transposée du bloc symétrique
$\triangleq$	égal par définition
$\lambda_{min}(P)$	la plus petite valeur propre de la matrice carrée P
$\lambda_{max}(P)$	la plus grande valeur propre de la matrice carrée P
$\ \cdot \ $	norme Euclidienne
$ a $	valeur absolue du nombre réel a

Acronymes

SNL	Système non linéaire (Non Linear System)
SISO	Mono-entrée Mono-sortie (Single Input Single Output)
MIMO	Entrées multiples sorties multiples (Multiple Input Multiple Output)

Notations utilisées pour la mise en équation du moteur

(abc)

référenciel statorique triphasé

 (ABC)

référenciel rotorique triphasé

 $(\alpha\beta)$

référenciel statorique diphasé

 (dq)

référenciel rotorique diphasé

$$V_{sabc} = \begin{bmatrix} V_{sa} & V_{sb} & V_{sc} \end{bmatrix}$$

tensions statoriques

$$I_{sabc} = \begin{bmatrix} I_{sa} & I_{sb} & I_{sc} \end{bmatrix}$$

courants statoriques

$$I_{rabc} = \begin{bmatrix} I_{ra} & I_{rb} & I_{rc} \end{bmatrix}$$

courants rotoriques

$$\Phi_{sabc} = \begin{bmatrix} \Phi_{sa} & \Phi_{sb} & \Phi_{sc} \end{bmatrix}$$

flux statoriques

$$\Phi_{rABC} = \begin{bmatrix} \Phi_{rA} & \Phi_{rB} & \Phi_{rC} \end{bmatrix}$$

flux rotoriques

$$\Phi_r = \begin{bmatrix} \Phi_{r\alpha} & \Phi_{r\beta} \end{bmatrix}$$

flux rotoriques dans le repère (α, β)

$$i_s = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} & i_{s\beta} \end{bmatrix}$$

courants statoriques dans le repère (α, β)

$$u_s = \begin{bmatrix} u_{s\alpha} & u_{s\beta} \end{bmatrix}$$

tensions statoriques dans le repère (α, β)

Chapitre 1

Introduction Générale

Il est bien connu que la machine à courant continu occupe encore la place d'honneur dans les applications concernant les systèmes à haute performance dynamique. Ceci est dû essentiellement à la simplicité de la commande de cette machine. Cette simplicité s'explique par le découplage naturel des champs magnétiques d'excitation et d'armature, ce qui rend possible le contrôle du couple de la machine simplement par le courant d'armature indépendamment du courant d'excitation. Néanmoins, l'inconvénient majeur dans l'utilisation de cette machine réside dans la complexité de sa fabrication et de son coût élevé. De plus, cette machine est fragile et exige beaucoup d'entretien. Pour ces raisons, une alternative a été considérée et elle consiste en l'utilisation des machines à courant alternatif. Ces machines, en particulier celles avec rotor à cage, dont la construction est très simple sont très robustes et coûtent beaucoup moins cher. Toutefois, une difficulté essentielle dans l'utilisation de la machine à courant alternatif réside dans sa commande. En effet cette machine présente une structure de commande non-linéaire et multivariable, avec une partie des variables d'état -flux et courants rotoriques- non mesurables. De plus, les paramètres électriques (résistances et inductances) sont très sensibles aux conditions thermiques et magnétiques de fonctionnement [Per97].

L'intérêt de plus en plus accru des machines asynchrones dans le monde industriel, nous a motivés pour étudier un certain nombre de problèmes de commande liés principalement à leurs caractéristiques. En effet, la machine asynchrone constitue un système dynamique non linéaire, multivariable et fortement couplé, dont les paramètres résistifs et inductifs varient aussi bien que la charge [Sal02]. L'élaboration du point de vue de l'automatique, de lois de commande pour un tel système physique nécessite au préalable, une phase de modélisation pour décrire *au mieux* les comportements dynamique et statique de la machine [Mut99]. De plus, la mise en oeuvre de la plupart des systèmes de commande exige la connaissance des différentes grandeurs, aussi bien électriques que mécanique à savoir : les flux rotoriques et la vitesse angulaire [Leo01]. Puisque certaines variables ne sont pas

facilement accessibles à la mesure, notamment les flux, leurs estimations pour la commande s'imposent [VS88, MR00, BYHG01, LDDR00, BRAT99, DCGS99]. Dans ce sens, plusieurs travaux ont été développés pour concevoir divers types d'observateurs pour le moteur asynchrone. Dans les travaux de [RFM03, FMR04, FMS05] les auteurs ont proposé la synthèse d'observateurs à grand gain pour une classe particulière de systèmes non linéaires incluant ceux de la machine asynchrone avec et sans capteurs de vitesse. Outre leur convergence exponentielle, une autre caractéristique principale des observateurs proposés réside dans la simplicité de leur structure, la facilité de leur implémentation et de leur réglage. En effet, le gain de ces observateurs ne nécessite la résolution d'aucun système dynamique. Il est issu de la résolution d'une équation algébrique de Lyapunov et il est explicitement donné. Son réglage se fait à travers d'un seul paramètre scalaire.

Les problèmes d'observation et de commande des systèmes non linéaires ont été étudiés par plusieurs chercheurs tout au long de ces dernières décennies [ASR04, GK01, Isi95, NvdS91, KKK95, SJK97]. Plusieurs méthodes ont été développées pour la synthèse d'observateurs et de systèmes de commande par différentes techniques [FMS05, ASR04, BDB03, GK01, FLMR99, SJK97, FLMR95, Isi95, KKK95].

Dans cette contribution, nous nous intéressons à la commande de la machine asynchrone avec et sans capteur de vitesse. Dans ce cadre, nous présentons une nouvelle loi de commande de type grand gain dont la synthèse exploite fortement le concept de dualité observabilité/commande. En effet, les systèmes considérés sont MIMO et sont mis sous la forme communément appelés "strict feedback form". Ce sont des systèmes uniformément observables et commandables et cette forme est généralement considérée lors la synthèse de lois de commande de type backstepping. Pour la clarté de l'exposé et pour mettre en avant les différentes étapes de la synthèse, nous présentons tout d'abord la synthèse de la nouvelle loi de commande en considérant un problème de poursuite de la sortie physique du système. De plus, cette sortie est supposée avoir un degré relatif maximum, c'est-à-dire égal à l'ordre du système et le système n'a donc pas de zéros. Nous nous intéressons dans un premier temps à la synthèse de la loi de commande avec retour d'état puis cette loi est couplé avec un observateur de type grand gain qui permet de délivrer une estimation des variables d'état non mesurées. La convergence de la boucle globale observateur/commande est établie.

Ensuite, nous nous situons dans un cadre plus général en considérant un problème de poursuite d'une variable (vectorielle) non nécessairement mesurée de degré relatif strictement inférieur à l'ordre du système. Nous montrerons, que modulo l'hypothèse classique qui assume que le système est à "minimum de phase", nous retrouvons toutes les propriétés établies dans le cas précédent. Les principales propriétés de la loi de commande

proposée peuvent se résumer comme suit. Son gain est issu de la résolution explicite d'une équation algébrique de Lypunov et renferme une fonction de synthèse conduisant à une unification des lois de commande de type grand gain à savoir : la technique des modes glissants ainsi que les versions qui y sont déduites. Dans le but de réaliser une compensation robuste des perturbations d'état et de sortie de type échelon, une action intégrale filtrée est incorporée dans la commande.

La loi de commande avec retour de sortie est enfin appliquée au moteur asynchrone pour réguler le carré de la norme des flux et asservir la vitesse dans deux situations différentes selon que la vitesse du moteur est mesurée ou non. Divers simulations sur le modèle de moteur ainsi qu'une validation expérimentale ont été effectuées.

Le rapport de thèse est organisé en cinq chapitres dont le première consiste en cette introduction.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la modélisation et à l'observation de la machine asynchrone. La transformation de Park sous des hypothèses simplificatrices a permis d'aboutir à un modèle mathématique diphasé exprimé dans un repère adéquat dont le choix sera fait selon les objectifs de commande et d'observation. L'estimation de quelques grandeurs électriques et mécaniques est assurée par des observateurs de type grand gain. On présentera en particulier deux observateurs, le premier permet l'estimation des flux et du couple de charge à partir des mesures des courants statoriques et de la vitesse. Le deuxième est permet l'estimation des flux, de la vitesse du moteur et du couple de charge à partir des seules mesures des courants statoriques.

Dans le troisième chapitre, on propose une méthode de commande avec retour de sortie pour une classe de systèmes non linéaires uniformément observables et commandables permettant une poursuite admissible. On distingue deux aspects fondamentaux de la loi proposée. Le premier concerne la nature grand gain de la loi de commande avec retour d'état considérée dans un contexte unificateur qui permet de retrouver naturellement toutes les techniques disponibles qui relèvent directement ou indirectement du grand gain, en l'occurrence la commande avec modes glissants et les variantes qui ont été développées pour s'affranchir du phénomène de réticence intrinsèque à la fonction signe. Le second résulte du rejet robuste des perturbations du type échelon via une action intégrale filtrée que l'on peut incorporer dans la synthèse du système de commande avec retour d'état comme dans le cas des systèmes linéaires. Les performances du système de commande non linéaire proposé sont illustrées via un problème de poursuite d'un système non linéaire soumis à des perturbations d'état de type échelon. Pour la clarté de l'exposé, les systèmes

considérés dans ce chapitre sont sans zéro et la sortie de la loi de commande correspond à la sortie physique du système. La synthèse de loi de commande est tout d'abord détaillée dans le cas où tous les états du système sont mesurés puis nous montrons que cette loi peut être couplée à un observateur qui permet de délivrer une estimation des variables d'état non mesurées. La convergence de la boucle globale observateur/commande est établie. Un exemple académique avec des résultats de simulation est présenté dans ce chapitre en guise d'illustration.

Dans le quatrième chapitre, nous étendons la synthèse de la loi de commande à une classe de systèmes où la sortie de commande n'est plus nécessairement la sortie physique du système (sortie de l'observateur) mais correspond plutôt à une fonction de variables d'état, non nécessairement mesurées. De plus, le degré relatif de cette sortie n'est pas égal à l'ordre du système. le système considéré admet donc des zéros et sous l'hypothèse classique de minimum de phase, hypothèse qui sera explicitée, on retrouve tous les résultats établis au chapitre précédent. Outre son intérêt théorique, la façon dont le problème de commande est abordé dans ce chapitre correspond exactement à la problématique de commande du moteur asynchrone. En effet, nous pouvons étudier l'observabilité du moteur directement à partir du modèle de Park qui est aussi utilisé pour la synthèse d'observateurs. En ce qui concerne la commande, deux sorties de commande sont généralement considérées. La première, que l'on cherche à réguler, est (le carré de) la norme euclidienne des flux statoriques. La seconde est soit le couple moteur, soit la vitesse du moteur à qui on veut faire suivre un profil désiré. Ces sorties de commande sont généralement non mesurées et la somme de leur degré relatif est inférieur à l'ordre du système, ce qui correspond au problème posé dans ce chapitre.

Le cinquième chapitre est consacré à l'application de la loi proposée au moteur asynchrone. Pour ce faire, nous introduisons tout d'abord une transformation qui ramène le modèle de Park du moteur sous la forme "strict feed back" avec des zéros ayant une dynamique stable. Nous testons ensuite la loi de commande en simulation avant de procéder à la validation expérimentale. L'étude en expérimentation est faite sur un banc d'essai montée autour d'une carte d'acquisition et de commande DSpace 1104. Les résultats de simulation et d'expérimentation sont présentés et discutés.

Enfin, une conclusion avec des perspectives sont rapportées au dernier chapitre.

Chapitre 2

Modélisation et observation de la machine asynchrone

2.1 Introduction

L'étude des comportements dynamiques et statiques de la machine asynchrone exige une bonne modélisation mathématique, décrivant *au mieux* son comportement et ceci dans le but d'élaborer des lois de commande adéquates pour un tel système physique [Mut99]. Dans un souci de commande, nous présentons le modèle mathématique utilisé pour la machine asynchrone en vue de la synthèse d'observateurs et de lois de commande développées tout au long de cette thèse. Pour plus de détails sur la modélisation de la machine asynchrone, nous suggérons au lecteur de consulter les références suivantes : [CH95, dW92, DLO01].

La machine asynchrone est souvent exploitée en régime triphasé. Cependant sous certaines hypothèses simplificatrices et en appliquant la transformation de Park, nous pouvons adopter, pour représenter son comportement, un modèle mathématique diphasé qui peut être exprimé dans des repères particuliers. Le choix d'un repère se fait selon les objectifs de commande, d'observation ou d'identification. Ce modèle mathématique est ensuite utilisé pour l'estimation simultanée de diverses grandeurs selon que la vitesse est mesurable ou non.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans le deuxième volet, nous nous intéressons à la modélisation du moteur asynchrone. Le troisième volet est consacré à la synthèse d'un observateur de type grand gain avec et sans capteur de vitesse pour l'estimation de quelques grandeurs électriques et mécaniques.

2.2 Modélisation de la machine asynchrone

Dans ce volet, et après une description sommaire du principe de fonctionnement de la machine asynchrone, nous allons présenter sa mise en équations sous certaines hypothèses simplificatrices. L'application de la transformation de Park aux équations obtenues permet d'aboutir à un modèle biphasé. Ce modèle non linéaire sera donné sous forme de représentation d'état dans un repère immobile lié au stator.

2.2.1 Principe de fonctionnement

La machine asynchrone triphasée comporte un stator fixe et un rotor mobile autour de l'axe de symétrie de la machine. Le stator est constitué schématiquement de trois bobines décalées de $\frac{2\pi}{3}$ et alimentées par un système de tensions équilibrées de fréquence f . Ces trois bobines créent un champ magnétique tournant à la pulsation de synchronisme $\frac{2\pi f}{p}$ qui se répartit sinusoidalement dans l'entrefer de la machine. La vitesse de rotation synchrone du champ magnétique tournant en tr/s est f/p . p étant le nombre de paires de pôles.

Le rotor peut être de deux types, soit bobiné, soit de type à cage d'écureuil [SJ77]. Le rotor ne possède aucune liaison avec le stator. Le rotor tourne à la vitesse de rotation qui est inférieure à la vitesse de synchronisme. On dit que le rotor glisse par rapport au champ magnétique tournant ; on parle alors de glissement qui dépend du couple de charge.

La machine asynchrone à cage est particulièrement séduisante, sur le plan industriel, par sa grande robustesse électromécanique, son faible coût et sa très bonne standardisation. Cependant sa simplicité structurelle cache une grande complexité fonctionnelle due à l'absence d'inducteur indépendant, aux non-linéarités, à la difficulté d'identification et aux variations des paramètres [Per97]. Pour palier à ces difficultés, certaines hypothèses simplificatrices sont envisagées.

2.2.2 Hypothèses simplificatrices

La modélisation de la machine asynchrone est établie en admettant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- $\mathcal{H}1.1$. L'entrefer est supposé constant et la machine est symétrique.
- $\mathcal{H}1.2$. La densité du courant est uniforme dans les sections des conducteurs.
- $\mathcal{H}1.3$. Le circuit magnétique est non saturé et parfaitement feuilleté au stator et au rotor.

$\mathcal{H}1.4$. Les résistances des enroulements ne varient pas avec la température et l'effet de peau et d'encoche est négligé.

$\mathcal{H}1.5$. La distribution spatiale des forces magnétomotrices est supposée sinusoïdale le long de l'entrefer.

$\mathcal{H}1.6$. Le rotor à cage est décrit par un enroulement triphasé équilibré.

2.2.3 Modèle dynamique de la machine asynchrone

Le moteur asynchrone à cage d'écureuil étudié dans notre cas est une machine triphasée dont la représentation des différents enroulements statoriques est donnée figure(2.1).

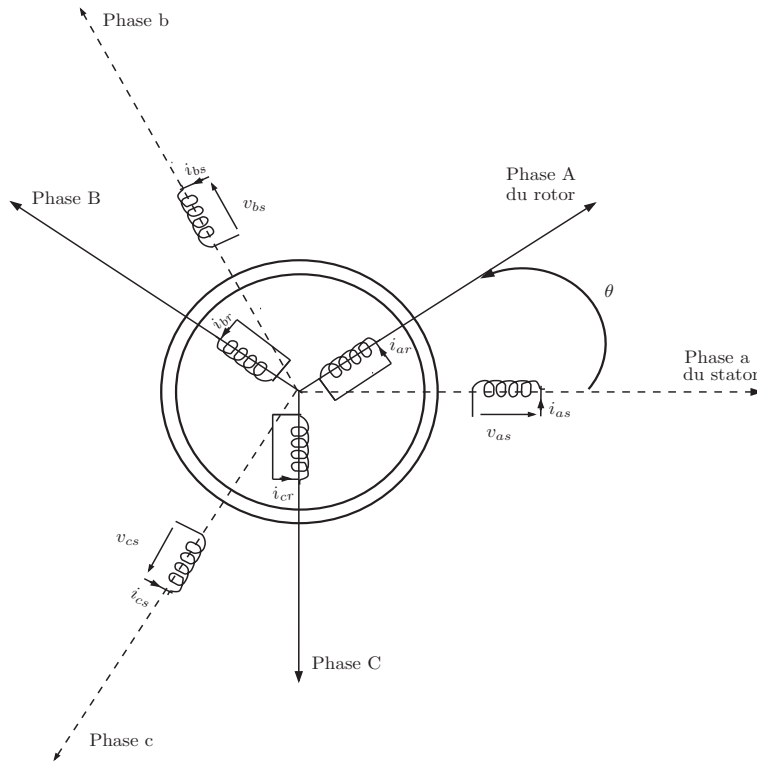


FIG. 2.1 – Répartition spatiale des enroulements statoriques et rotoriques

Le référentiel lié au stator est noté (abc) , celui lié au rotor est noté (ABC) . Le repère rotorique fait un angle électrique $p\theta$ par rapport au repère statorique.

Dans ce cas, p représente le nombre de paires de pôles et θ la position du rotor.

2.2.4 Mise en équations

Nous procédons, dans ce paragraphe, à la mise en équations de la machine asynchrone en tenant compte des hypothèses simplificatrices citées précédemment. Les deux équations matricielles suivantes expriment les tensions appliquées aux bornes des différents enroulements :

$$V_{sabc} = R_s I_{sabc} + \frac{d}{dt} \psi_{sabc} \quad (2.1)$$

$$0 = R_r I_{rABC} + \frac{d}{dt} \psi_{rABC} \quad (2.2)$$

où $V_{sabc} = \begin{bmatrix} v_{sa} & v_{sb} & v_{sc} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur des tensions statoriques ;

$I_{sabc} = \begin{bmatrix} i_{sa} & i_{sb} & i_{sc} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur des courants statoriques ;

$I_{rABC} = \begin{bmatrix} i_{rA} & i_{rB} & i_{rC} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur des courants rotoriques ;

$\psi_{sabc} = \begin{bmatrix} \psi_{sa} & \psi_{sb} & \psi_{sc} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur des flux statoriques ;

$\psi_{rABC} = \begin{bmatrix} \psi_{rA} & \psi_{rB} & \psi_{rC} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur des flux rotoriques ;

R_s est la résistance d'un enroulement au stator et R_r est la résistance d'un enroulement au rotor.

La relation entre les flux totalisés sur les enroulements et les courants peut être décrite par l'équation matricielle suivante :

$$\begin{cases} \psi_{sabc} = L_{os} I_{sabc} + M_{osr} I_{rABC} \\ \psi_{rABC} = M_{osr}^T I_{sabc} + L_{or} I_{rABC} \end{cases} \quad (2.3)$$

où L_{os} et L_{or} sont respectivement les matrices des inductances statoriques et rotoriques :

$$L_{os} = \begin{bmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_s & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{bmatrix} ; \quad L_{or} = \begin{bmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

où l_s et l_r désignent respectivement l'inductance statorique par phase et l'inductance rotorique par phase et m_s et m_r représentent respectivement, la mutuelle inductance entre deux phases du stator et la mutuelle inductance entre deux phases du rotor.

M_{osr} est la matrice des inductances mutuelles :

$$M_{osr} = m_{sr} \begin{bmatrix} \cos(p\theta) & \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\theta) & \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Remarquons que la matrice M_{osr} dépend de m_{sr} , valeur maximale des inductances mutuelles entre phases statoriques et rotoriques, et de θ : position du rotor.

2.2.5 Transformation du système triphasé, transformation de PARK

La mise en équations des moteurs triphasés conduit à des équations différentielles à coefficients variables. L'étude analytique du comportement du système muni d'un grand nombre de variables, est alors relativement laborieuse. Nous utilisons, par conséquent des transformations mathématiques qui permettent de décrire le comportement de la machine à l'aide d'équations différentielles à coefficients constants. Le modèle de Park apporte une solution satisfaisante, il permet d'obtenir une représentation biphasée équivalente de la machine. Cette transformation fait appel à deux changements de coordonnées : la transformation de Concordia et le changement de repère par rotation.

2.2.5.1 Transformation de Concordia

La transformation de Concordia permet de réduire le nombre d'équations électriques de six à quatre. Le système de coordonnées (abc) est ainsi transformé en un système de coordonnées orthogonales (α, β) . Cette transformation est réalisée grâce à la matrice de transformation T_{32} :

$$T_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

et les relations suivantes sont vérifiées :

$$X_{abc} = T_{32}X_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad X_{\alpha\beta} = T_{32}^T X_{abc} \quad (2.7)$$

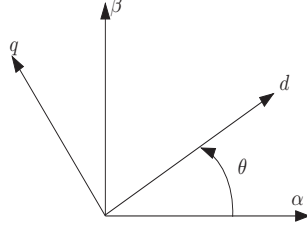
2.2.5.2 Opérateur de rotation

Afin d'établir un modèle indépendant de la position du rotor, nous exprimons toutes les grandeurs dans un seul repère. Les grandeurs statoriques et rotoriques sont projetées dans un repère généralisé (d, q) , qui est décalé d'un angle θ par rapport au repère fixe (α, β) comme l'indique la figure (2.2) [Sal02]. Cette transformation se fait à l'aide de la matrice de rotation $R(\theta)$, définie par :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

et la relation suivante est vérifiée :

$$X_{\alpha\beta} = R(\theta)X_{dq} \quad (2.9)$$

FIG. 2.2 – Repère fixe (α, β) et repère tournant (d, q)

2.2.5.3 Modèle de Park

A présent, nous devons effectuer ces deux transformations aux équations (2.1), (2.2) et (2.3) obtenues dans la représentation triphasée. La rotation est appliquée avec un angle égal à l'angle électrique $p\theta$. La machine est alors modélisée par le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} u_s = R_s i_s + \frac{d}{dt} \psi_s \\ 0 = R_r i_r + \frac{d}{dt} \psi_r \\ \psi_s = L_s i_s + M i_r \\ \psi_r = M i_s + L_r i_r \end{cases} \quad (2.10)$$

où toutes les grandeurs sont exprimées dans le référentiel fixe par rapport au stator, définies par $i_s = (i_{s\alpha}, i_{s\beta})^T$, $i_r = (i_{r\alpha}, i_{r\beta})^T$, $\psi_s = (\psi_{s\alpha}, \psi_{s\beta})^T$, $\psi_r = (\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta})^T$, et $u_s = (u_{s\alpha}, u_{s\beta})^T$. Les inductances cycliques L_s , L_r et M sont définies par :

$$L_s = l_s - m_s, \quad L_r = l_r - m_r \text{ et } M = \frac{3}{2} m_{sr}.$$

Notons que les grandeurs statoriques sont obtenues par simple transformation de Concordia, alors que les grandeurs rotoriques sont fictives et nécessitent l'utilisation d'une rotation des grandeurs réelles. Le choix des variables est dépendant de l'utilisateur et des applications qu'il désire mettre en place [Dhi02]. Puisque nous utiliserons quasi exclusivement le même modèle, nous présentons ici le modèle où l'état correspond aux courants statoriques i_s et aux flux rotoriques ψ_r exprimés dans le repère fixe par rapport au stator (α, β) .

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{\psi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma I_2 & K(\frac{1}{T_r} - p\omega J_2) \\ \frac{M}{T_r} & -(\frac{1}{T_r} - p\omega J_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ \psi_r \end{bmatrix} + \frac{1}{\sigma L_s} \begin{bmatrix} u_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du rotor et les paramètres T_r, σ, K et γ sont définis comme suit : $T_r = \frac{L_r}{R_r}$, $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}$, $K = \frac{M}{\sigma L_s L_r}$, $\gamma = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2}$. Par ailleurs, la puissance mécanique convertie par le moteur conduit à la réaction d'un couple électromécanique T_M

, dépendant des variables électriques comme suit :

$$T_M = \frac{pM}{L_r}(\psi_{r\alpha}i_{s\beta} - \psi_{r\beta}i_{s\alpha}) \quad (2.12)$$

et l'équation mécanique du moteur asynchrone s'écrit simplement :

$$J \frac{d\omega}{dt} = T_M - T_L \quad (2.13)$$

où T_L est le couple résistant ; J est le moment d'inertie du moteur et p est le nombre de paires de pôles. A partir des équations (2.11), (2.12) et (2.13), un modèle non linéaire d'ordre 5 peut être obtenu :

$$\begin{cases} \dot{i}_{s\alpha} = -\gamma i_{s\alpha} + \frac{K}{T_r} \psi_{r\alpha} + Kp\omega \psi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\alpha} \\ \dot{i}_{s\beta} = -\gamma i_{s\beta} - Kp\omega \psi_{r\alpha} + \frac{K}{T_r} \psi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\beta} \\ \dot{\psi}_{r\alpha} = \frac{M}{T_r} i_{s\alpha} - \frac{1}{T_r} \psi_{r\alpha} - p\omega \psi_{r\beta} \\ \dot{\psi}_{r\beta} = \frac{M}{T_r} i_{s\beta} + p\omega \psi_{r\alpha} - \frac{1}{T_r} \psi_{r\beta} \\ \dot{\omega} = \frac{pM}{L_r} (\psi_{r\alpha} i_{s\beta} - \psi_{r\beta} i_{s\alpha}) - \frac{1}{J} T_L \end{cases} \quad (2.14)$$

Il convient de noter que nous ne disposons que très difficilement de la mesure de l'ensemble des sorties à réguler. Il est donc nécessaire de bien distinguer, d'une part, les sorties mesurées que nous noterons y et, d'autre part, les sorties à commander que nous noterons y_c . Nous considérons dans notre travail différents choix pour y comme pour y_c . Dans un premier temps, nous supposons que nous disposons de la mesure des courants statoriques et de la vitesse, soit $y = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} & i_{s\beta} & \omega \end{bmatrix}^T$. Dans un second temps, nous tenterons de développer des algorithmes d'observation et de commande ne nécessitant pas l'utilisation de capteur de vitesse, soit $y = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} & i_{s\beta} \end{bmatrix}^T$. Nous pouvons commander deux sorties indépendamment, soit la norme du flux rotorique et le couple moteur, soit la norme du flux et la vitesse du rotor, soit

$$y_c = \begin{bmatrix} T_M \\ \sqrt{\psi_{r\alpha}^2 + \psi_{r\beta}^2} \end{bmatrix} \text{ ou } y_c = \begin{bmatrix} \omega \\ \sqrt{\psi_{r\alpha}^2 + \psi_{r\beta}^2} \end{bmatrix}.$$

Pour l'étude de l'observation et de la commande de la machine asynchrone, nous adoptons la forme condensée du modèle (2.14), qui est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{i}_s = KF(\omega)\psi_r - \gamma i_s + \frac{1}{\sigma L_s} u_s \\ \dot{\psi}_r = -F(\omega)\psi_r + \frac{M}{T_r} i_s \\ \dot{\omega} = \frac{pM}{JL_r} i_s^T J_2 \psi_r - \frac{1}{J} \tau_L \end{cases} \quad (2.15)$$

avec $F(\omega) = \frac{1}{T_r} I_2 - p\omega J_2$,

où I_2 est la matrice identité 2×2 et $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3 Observation de la machine asynchrone

Avant de procéder à la synthèse d'un observateur à grand gain appliqué à une machine asynchrone nous donnons un aperçu sur les observateurs étudiés en littérature.

2.3.1 Introduction

Il est bien connu que la plupart des systèmes de commande pour les moteurs asynchrones exige la connaissance des flux rotoriques aussi bien que de la vitesse angulaire [Leo01]. Puisque ces mesures, en particulier celles des flux rotoriques ne sont pas facilement accessibles, plusieurs efforts de recherche ont été concentrés ces dernières années sur leurs estimations. En effet plusieurs alternatives ont été étudiées dans le but de concevoir des observateurs pour le moteur asynchrone tels que : l'observateur de Luenberger [VS88, MR00], ou des observateurs non-linéaires [BYHG01, LDDR00], ou des observateurs à modes glissants [BRAT99], ou encore des observateurs à base de LMI [DCGS99], etc. Néanmoins, dans la plupart de ces travaux, la mesure de vitesse du rotor a été supposée disponible et l'objectif de ces travaux était de fournir les estimés en ligne seulement des flux rotoriques et du couple résistant. Notons que, dans le travail de [OLNSR98] les auteurs proposaient la commande basée sur la passivité des moteurs asynchrones. Ce type de commande suppose la connaissance de la mesure de vitesse sans faire recours aux flux rotoriques. Plusieurs autres travaux traitent de la commande des moteurs à courant alternatif. La plupart de ces travaux sont basés sur des modèles d'estimation en boucle ouverte pour lesquels la performance est réduite dans le cas de fonctionnement en basse vitesse. En effet cette performance est influencée par les variations des paramètres de la machine commandée [Hol96, TH93]. Dans le but d'améliorer la robustesse vis à vis de la variation des paramètres et du bruit de mesure, certains auteurs ont proposé des observateurs adaptatifs où les flux sont estimés en utilisant des observateurs en boucles fermées dans lesquelles la vitesse angulaire et le couple de charge sont traités comme des paramètres variables dans le temps qui sont adaptés à travers des modèles en boucle ouverte basés sur les équations de la machine.

Nous allons, dans ce volet, brièvement présenter la synthèse des observateurs à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires tels que les travaux de [FMR04, FMS05]. Dans ce type d'observateurs le gain ne fait pas intervenir la résolution de systèmes dynamiques et il est explicitement donné.

2.3.2 observateur à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires

Dans la prochaine section, nous nous intéressons à la construction d'observateurs non linéaires pour une classe de systèmes non linéaires.

2.3.2.1 systèmes considérés

Nous considérons la classe de systèmes non linéaires, multi-sorties, suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(s, x)x + G(u, s, x) + \varepsilon(t) \\ y = \bar{C}x \end{cases} \quad (2.16)$$

où l'état

$$x = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^q \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x^k \in \mathbb{R}^{n_k}, k = 1, \dots, q \text{ et } p = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q, \\ \sum_{k=1}^q n_k = n; \text{ l'entrée } u \in U \text{ un compact de } \mathbb{R}^m, \text{ la sortie } y \in \mathbb{R}^p, s(t) \text{ est un signal connu,}$$

$$G(u, s, x) = \begin{pmatrix} G^{(1)}(u, s, x^{(1)}) \\ G^{(2)}(u, s, x^{(1)}, x^{(2)}) \\ \vdots \\ G^{(q-1)}(u, s, x^{(1)}, \dots, x^{(q-1)}) \\ G^{(q)}(u, s, x) \end{pmatrix}$$

avec $G^{(k)}(u, s, x) \in \mathbb{R}^{n_k}, k = 1, \dots, q;$

$$F(s, x) = \begin{bmatrix} 0 & F_1(s, x^{(1)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_2(s, x^{(1)}, x^{(2)}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & F_{q-1}(s, x) \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice en blocs où chaque bloc $F_k, k = 1, \dots, q-1$, désigne une matrice rectangulaire de taille $n_k \times n_{k+1};$

$$\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon^{k_0} \\ \vdots \\ \varepsilon^q \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon^k = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^k \\ \varepsilon_2^k \\ \vdots \\ \varepsilon_{n_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$$

$k = k_0, \dots, q$ et chaque $\varepsilon_i^{(k)}, i = 1, \dots, n_k$ est une fonction bornée qui peut dépendre de x, s, u , de paramètres incertains, etc.; $\bar{C} = [I_{n_1}, 0_{n_1 \times n_2}, \dots, 0_{n_1 \times n_q}]$ où I_{n_1} désigne la

matrice identité $n_1 \times n_1$.

2.3.2.2 observateur proposé

L'observateur du système (2.16) est :

$$\dot{\hat{x}} = F(s(t), \hat{x})\hat{x} + G(u, s(t), \hat{x}) - \theta \Lambda^+(s, \hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T \bar{C} (\hat{x} - x) \quad (2.17)$$

où

- $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 & \hat{x}^2 & \dots & \hat{x}^q \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \dots, q$,
- $\theta > 0$ est le paramètre de réglage de l'observateur.
- Δ_θ la matrice diagonale par bloc suivante :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[I_{n_1}, \frac{1}{\theta} I_{n_2}, \frac{1}{\theta^2} I_{n_3}, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_{n_q} \right], \quad (2.18)$$

- la matrice diagonale $\Lambda(s(t), \hat{x})$ suivante :

$$\Lambda(s(t), \hat{x}) = \text{diag} \left[I_{n_1}, F_1(s(t), \hat{x}), F_1(s(t), \hat{x}) F_2(s(t), \hat{x}), \dots, \prod_{i=1}^{q-1} F_i(s(t), \hat{x}) \right] \quad (2.19)$$

Dans cette matrice, chaque matrice F_k est inversible à gauche, il résulte alors de même pour $\Lambda(s(t), \hat{x})$. Nous utiliserons dans la suite la notation $(.)^+$ pour désigner l'inverse à gauche de $(.)$.

- S l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S + A^T S + S A = C^T C \quad (2.20)$$

où les matrices A et C sont définies par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_1} & 0 & 0 \\ \vdots & & I_{n_1} & \\ 0 & & & \ddots & I_{n_1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$C = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1} & \dots & 0_{n_1} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La solution S de l'équation ainsi que le vecteur $S^{-1} C^T$ peuvent s'exprimer comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{j-1} I_{n_1} \quad (2.23)$$

$$S^{-1}C^T = \begin{bmatrix} C_q^1 I_{n_1} \\ C_q^2 I_{n_1} \\ \vdots \\ C_q^q I_{n_1} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

où $C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}$

Pour la synthèse de l'observateur de type grand gain les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

$\mathcal{H}1.7.$ Il existe deux constantes positives α et β telles que pour tout $k \in \{1, \dots, q-1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$,

$$0 < \alpha^2 I_{n_{k+1}} \leq F_k(s(t), x)^T F_k(s(t), x) \leq \beta^2 I_{n_{k+1}}$$

où $I_{n_{k+1}}$ est la matrice identité $(n_{k+1}) \times (n_{k+1})$.

$\mathcal{H}1.8.$ Les fonctions $\varepsilon^{q-1}(t)$ et $\varepsilon^q(t)$ sont bornées avec $\delta_{q-1} = \sup_{t \geq 0} \|\varepsilon^{q-1}(t)\|$ et $\delta_q = \sup_{t \geq 0} \|\varepsilon^q(t)\|$

$\mathcal{H}1.9.$ Le signal $s(t)$ et sa dérivée par rapport au temps $\dot{s}(t)$ sont bornés.

Nous allons maintenant étudier les possibilités d'estimation correspondantes aux deux situations décrites précédemment selon que la vitesse du moteur est mesurée ou non. Dans chaque cas, un observateur non linéaire doit être synthétisé afin d'atteindre notre objectif d'estimation. En effet, l'observateur proposé est constitué dans chaque cas de deux observateurs en cascade. Quand la vitesse du rotor est mesurée, le premier observateur fournit les estimations des flux rotoriques. Si la mesure de vitesse n'est pas disponible, le premier observateur fournit simultanément les estimations des flux rotoriques et de la vitesse rotorique. Le deuxième observateur en cascade, utilisant la vitesse mesurée (ou estimée), fournit en ligne les estimées du couple de charge et de sa dérivée par rapport au temps. Autrement dit, la structure de l'observateur donnant les estimations du couple de charge et de sa dérivée par rapport au temps restent identiques dans les deux cas avec la différence que la vitesse du rotor est disponible directement à partir de la mesure dans le premier cas alors qu'elle est estimée à l'aide d'un observateur non linéaire dans le second cas.

2.3.3 Observateur avec mesure de vitesse

Nous disposons du modèle du moteur (2.15), qui peut se mettre sans aucune transformation sous la forme du modèle (2.16) selon la procédure qui suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{\psi}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & KF(\omega) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s \\ \psi_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma i_s + \frac{1}{\sigma L_s} u_s \\ -F(\omega) \psi_r + \frac{M}{T_r} i_s \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Dans ce cas $y = \begin{bmatrix} i_s \\ \omega \end{bmatrix}$ désigne le vecteur de mesures. En supposant que la dynamique du couple résistant est bornée, un observateur de type (2.17) peut être synthétisé et utilisé pour l'estimation des flux rotoriques [RFM03]. Les équations de cet observateur sont simples à obtenir :

$$\begin{cases} \dot{\hat{i}}_s = KF(\omega) \hat{\psi}_r - \gamma \hat{i}_s + \frac{1}{\sigma L_s} u_s - 2\theta_1 (\hat{i}_s - i_s) \\ \dot{\hat{\psi}}_r = -F(\omega) \hat{\psi}_r + \frac{M}{T_r} \hat{i}_s - \frac{\theta_1^2}{K} F^{-1}(\omega) (\hat{i}_s - i_s) \end{cases} \quad (2.26)$$

où $\hat{i}_s$, $\hat{\psi}_r$ et $\hat{\omega}$ sont respectivement les estimés de i_s , ψ_r et ω et où θ_1 est un réel positif. Les flux estimés sont ensuite utilisés avec la vitesse mesurée pour l'estimation du couple de charge τ_L et de sa dérivée $\tau_{Lp} = \dot{\tau}_L$ en utilisant le modèle dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{pM}{JL_r} \hat{i}_s^T J_2 \psi_r - \frac{1}{J} \tau_L \\ \dot{\tau}_L = \tau_{Lp} \\ \dot{\tau}_{Lp} = \varepsilon_{\tau_{Lp}}(t) \end{cases} \quad (2.27)$$

où $\varepsilon_{\tau_{Lp}}(t)$ est une fonction bornée à valeurs réelles.

Le modèle (2.27) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\tau}_L \\ \dot{\tau}_{Lp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \tau_L \\ \tau_{Lp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{pM}{JL_r} \hat{i}_s^T J_2 \psi_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{\tau_{Lp}}(t) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Il est clair de noter que le modèle (2.28) est de la forme (2.16). Par conséquent, un observateur de type (2.17) peut être synthétisé et utilisé pour l'estimation du couple de charge et de sa dérivée par rapport au temps. Les équations de cet observateur sont donc :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\omega}} = \frac{pM}{JL_r} \hat{i}_s^T J_2 \hat{\psi}_r - \frac{1}{J} \hat{\tau}_L - 3\theta_2 (\hat{\omega} - \omega) \\ \dot{\hat{\tau}}_L = \hat{\tau}_{Lp} + 3J\theta_2^2 (\hat{\omega} - \omega) \\ \dot{\hat{\tau}}_{Lp} = J\theta_2^3 (\hat{\omega} - \omega) \end{cases} \quad (2.29)$$

où $\hat{\tau}_L$ et $\hat{\tau}_{Lp}$ représentent respectivement les estimés de τ_L et τ_{Lp} et où θ_2 est un réel positif.

Nous notons que l'erreur d'estimation converge exponentiellement vers zéro pour l'observateur (2.26). La caractéristique principale de l'observateur (2.29) réside dans le fait que l'erreur de l'estimation converge exponentiellement vers zéro quand la dérivée du couple

de charge est constante. Dans le cas où la dérivée n'est pas constante mais reste bornée, l'erreur d'estimation peut être aussi petite que nous désirons en choisissant θ_2 aussi grand que possible.

2.3.4 Observateur sans capteur de vitesse

Dans cette section, le vecteur de mesure est $y = i_s$. Deux observateurs doivent être synthétisés : le premier permet l'estimation simultanée des flux et de la vitesse rotatoires. Le deuxième observateur est identique à l'observateur (2.29) avec la différence que la vitesse mesurée sera remplacée par son estimée provenant du premier observateur. Sa synthèse est faite en introduisant le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} i_s = i_s \\ r = \left(\frac{1}{T_r} I_2 - pJ_2\omega \right) \psi_r \\ \omega = \omega \end{cases} \quad (2.30)$$

En utilisant cette transformation, du modèle (2.15) dérive un sous modèle du moteur qui ne prend pas en compte la dynamique du couple de charge :

$$\begin{cases} \dot{i}_s &= Kr - \gamma i_s + \frac{1}{\sigma L_s} u_s \\ \dot{r} &= -pJ_2 \left(\frac{M}{T_r} i_s - r \right) \omega + \frac{1}{T_r} \left(\frac{M}{T_r} i_s - r \right) + \varepsilon_r(t) \\ \dot{\omega} &= \frac{pM}{JL_r} i_s^T J_2 \left(\frac{I_2}{T_r} - pJ_2\omega \right)^{-1} r + \varepsilon_\omega(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

avec $\varepsilon_r(t) = -p\dot{\omega}J_2\psi$ et $\varepsilon_\omega(t) = -\frac{1}{J}\tau_L$. Il est à noter que les variables ε_r et ε_ω seront supposées complètement inconnues mais avec des dynamiques bornées. D'après cette hypothèse qui paraît raisonnable pour des considérations physiques, un observateur non linéaire permet alors l'estimation de r et ω . Il peut être synthétisé en se basant sur le système (2.31) qui peut se mettre sous la forme du modèle (2.16) :

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_s \\ \dot{r} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & -pJ_2 \left(\frac{M}{T_r} i_s - r \right) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s \\ r \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G^1(i_s, u_s) \\ G^2(i_s, r) \\ G^3(i_s, r, \omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_r(t) \\ \varepsilon_\omega(t) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

où $G^1(i_s, u_s) = -\gamma i_s + \frac{1}{\sigma L_s} u_s$; $G^2(i_s, r) = \frac{1}{T_r} \left(\frac{M}{T_r} i_s - r \right)$ et $G^3(i_s, r, \omega) = \frac{pM}{JL_r} i_s^T J_2 \left(\frac{I_2}{T_r} - pJ_2\omega \right)^{-1} r$.

L'équation de cet observateur peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{i}}_s = K\hat{r} - \gamma\hat{i}_s + \frac{1}{\sigma L_s}u_s - 3\theta_1(\hat{i}_s - i_s) \\ \dot{\hat{r}} = -pJ_2\left(\frac{M}{T_r}\hat{i}_s - \hat{r}\right)\hat{\omega} + \frac{1}{T_r}\left(\frac{M}{T_r}\hat{i}_s - \hat{r}\right) - 3\frac{\theta_1^2}{K}(\hat{i}_s - i_s) \\ \dot{\hat{\omega}} = \frac{pM}{JL_r}\hat{i}_s^T J_2 \left(\frac{I_2}{T_r} - pJ_2\hat{\omega}\right)^{-1} \hat{r} + \frac{\theta_1^3}{pK} \left(J_2\left(\frac{M}{T_r}\hat{i}_s - \hat{r}\right)\right)^+ (\hat{i}_s - i_s) \end{cases} \quad (2.33)$$

où

$$\left(J_2\left(\frac{M}{T_r}\hat{i}_s - \hat{r}\right)\right)^+ = \frac{1}{\dot{\psi}_{r\alpha}^2 + \dot{\psi}_{r\beta}^2} \begin{pmatrix} -\dot{\psi}_{r\beta} & \dot{\psi}_{r\alpha} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

avec

$$\dot{\psi}_r \triangleq -\hat{r} + \frac{M}{T_r}\hat{i}_s \quad (2.35)$$

La condition d'utilisation de l'observateur (2.33) requiert que $\dot{\psi}_{r\alpha}^2 + \dot{\psi}_{r\beta}^2$ ne s'annule jamais au cours de l'expérience. Une telle condition est satisfaite dans des applications où l'objectif visé consiste à commander la vitesse et la norme du flux rotorique. En effet, la nullité de cette quantité apparaît quand le moteur est utilisé en générateur ce qui n'est en général pas l'objectif dans les applications considérées.

Les propriétés de cet observateur (2.33) résident dans le fait que lorsque la vitesse du moteur est constante (i.e. $\dot{\omega} = 0$), les incertitudes ε_r et ε_ω sont nulles et l'erreur d'estimation converge exponentiellement vers zéro. Dans le cas où la vitesse du moteur varie dans le temps mais sa dérivée par rapport au temps reste bornée, l'erreur d'estimation est bornée et sa borne supérieure est aussi petite que celle de la dérivée par rapport au temps de la vitesse de rotation.

Comme il a été montré auparavant, les estimées des flux et de la vitesse, fournies par (2.33) seront utilisées pour l'estimation du couple de charge et de sa dérivée par rapport au temps en utilisant l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\omega}} = \frac{pM}{JL_r}\hat{i}_s^T J_2 \hat{\psi}_r - \frac{1}{J}\hat{\tau}_L - 3\theta_2(\hat{\omega} - \omega) \\ \dot{\hat{\tau}}_L = \hat{\tau}_{Lp} - 3J\theta_2^2(\hat{\omega} - \omega) \\ \dot{\hat{\tau}}_{Lp} = J\theta_2^3(\hat{\omega} - \omega) \end{cases} \quad (2.36)$$

avec $\hat{\omega}$ est l'estimée de ω .

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons élaboré un modèle non linéaire de la machine asynchrone sous forme de représentation d'état dans un repère fixe lié au stator. Nous avons ensuite présenté la synthèse de l'observateur à grand gain pour une classe de systèmes non

linéaires. La détermination du gain de ce type d'observateurs n'exige pas la résolution de systèmes dynamiques supplémentaires et il est, de ce fait explicitement donné. L'observateur à grand gain est appliqué au moteur asynchrone : dans une première phase pour l'estimation des flux rotoriques, du couple de charge et de sa dérivée par rapport au temps en utilisant les mesures des courants statoriques et de la vitesse rotorique, et dans une deuxième phase pour l'estimation des flux rotoriques, du couple de charge et de sa dérivée par rapport au temps et de la vitesse rotorique en n'utilisant que les mesures des courants statoriques. Nous comptons utiliser, dans la suite de ces travaux, ce type d'observateurs pour la commande d'une machine asynchrone avec et sans capteur de vitesse.

Chapitre 3

Commande avec retour de sortie pour une classe de systèmes non linéaires

3.1 Introduction

Les problèmes d'observation et de commande des systèmes non linéaires ont attiré une attention particulière de plusieurs chercheurs tout au long des dernières décennies [ASR04, GK01, Isi95, NvdS91, KKK95, SJK97]. Un effort considérable a été consacré à l'analyse des propriétés structurelles pour mieux appréhender les concepts de commandabilité et d'observabilité des systèmes non linéaires ([HF03], [GK01, Raj98, Isi95, GK94, FK83, Nij81, GB81, FK83]). Plusieurs méthodes ont été développées pour la synthèse de systèmes de commande et d'observateurs à partir des techniques de linéarisation, de platitude, de grand gain, de structure variable, de modes glissants et de backstepping ([FMS05, ASR04, BDB03, GK01, FLMR99, SJK97, FLMR95, Isi95, KKK95]). Les contributions se distinguent particulièrement par la classe des systèmes non linéaires considérée, et donc les hypothèses de modélisation faites, et de la nature des résultats de stabilité et de performances réalisées aussi bien en régulation qu'en poursuite. Une attention particulière a été rattachée aux lois de commande avec retour d'état incorporant un observateur dont la synthèse est conforme au théorème de séparation comme dans le cas des systèmes linéaires [MK96]. Cette recherche a permis d'étendre des concepts bien établis pour les systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires, notamment la compensation robuste des perturbations de type échelon modulo une incorporation d'une action intégrale dans la synthèse du système de commande [SK96].

Dans ce chapitre, on propose une méthode de commande avec retour de sortie pour les systèmes non linéaires uniformément observables et commandables. On traitera plus

particulièrement un problème de régulation pour des systèmes sans zéros pour pouvoir présenter la méthode proposée d'une manière compréhensive. En effet, on peut obtenir les mêmes résultats dans le cas d'un problème de poursuite pour des systèmes où la dynamique des zéros est exponentiellement stable. La commande avec retour de sortie considérée est une commande avec retour d'état de type grand gain incorporant un observateur de type grand gain. La loi de commande avec retour d'état a été obtenue par dualité avec l'observateur du type grand gain considéré dans [GK01, FMS05]. Le gain de la loi de commande fait apparaître une fonction de synthèse satisfaisant une condition bien définie. Cette fonction de synthèse conduit à une unification des lois de commande de type grand gain. On retrouve naturellement toutes les lois de commande basées sur la technique des modes glissants ainsi que les versions qui y ont été déduites pour s'affranchir du phénomène de réticence intrinsèque à la fonction signe. On montrera par ailleurs, que l'on peut incorporer aisément une action intégrale filtrée dans la loi de commande avec retour d'état pour réaliser une compensation robuste des perturbations d'état et de sortie de type échelon.

Ce chapitre est organisé comme suit. Le premier paragraphe est consacré à la formulation du problème de poursuite étudié en précisant la classe des systèmes non linéaires considérée. La loi de commande avec retour d'état proposée est présentée dans le second paragraphe avec une analyse de la convergence exponentielle de l'erreur de poursuite vers l'origine. Le problème de commande avec retour de sortie est traité dans le troisième paragraphe où le résultat fondamental de cette contribution est donné. Le quatrième paragraphe est dédié au caractère unificateur de cette contribution via certaines expressions de la fonction de synthèse : on montre que l'on peut retrouver la plupart des méthodes de synthèse du type grand gain disponibles. Le cinquième paragraphe est consacré à l'incorporation d'une action intégrale filtrée dans la synthèse de la loi de commande non linéaire. Un problème de poursuite d'un double intégrateur non linéaire soumis à des perturbations d'état du type échelon est traité dans le sixième paragraphe en guise d'illustration des performances du système de commande non linéaire proposé. Une étude comparative avec un contrôleur backstepping à retour d'état, est effectuée. Nous donnons, enfin, une conclusion précisant le contexte de notre contribution et ses perspectives.

3.2 Formulation du problème

On cherche à résoudre un problème de poursuite pour les systèmes multivariables décrits par les équations d'état et de sortie

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(x^1) \\ \varphi^2(x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^{q-1}(x^1, \dots, x^{q-1}) \\ \varphi^q(x) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} I_p & 0_p & \dots & 0_p \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

où l'état du système $x \in \mathcal{V}$ un compact de $\mathbb{R}^n$ avec $x^k \in \mathbb{R}^p$, l'entrée $u \in U$ un compact de $\mathbb{R}^m$ avec $m \geq p$. On supposera que la fonction φ vérifie l'hypothèse suivante :

$\mathcal{H}2.1$. La fonction φ est lipschitzienne sur $\mathcal{V}$ par rapport à x , c'est à dire

pour tout $\xi \in \mathcal{V}$, $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi) \right\|$ est borné .

Le problème de commande considéré consiste en une poursuite asymptotique parfaite d'une trajectoire de sortie que l'on notera $\{y_r(t)\} \in \mathbb{R}^p$, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0 \quad (3.4)$$

On supposera que les dérivées de la séquence de référence jusqu'à l'ordre n sont disponibles. A la séquence $\{y_r(t)\} \in \mathbb{R}^p$, correspond une séquence d'entrée et une trajectoire d'état du système qui seront respectivement notées $\{u_r(t) \in \mathbb{R}^m\}$ et $\{x_r(t) \in \mathbb{R}^n\}$. Et compte tenu de la classe considérée des systèmes, on peut définir un modèle de référence comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_r = Ax_r + Bu_r + \varphi(x_r) \\ y_r = Cx_r \end{cases} \quad (3.5)$$

Les variables d'état $x_r = \begin{pmatrix} x_r^1 \\ x_r^2 \\ \vdots \\ x_r^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et l'entrée $u_r \in \mathbb{R}^m$ sont alors données par

$$\begin{cases} x_r^1 = y_r \\ x_r^k = \dot{x}_r^{k-1} - \varphi^{k-1}(x_r^1, \dots, x_r^{k-1}) \text{ pour } k \in [2, q] \\ u_r = \dot{x}_r^q - \varphi^q(x_r) \end{cases} \quad (3.6)$$

et peuvent être déterminées d'une manière recursive à partir de la séquence de référence et ses dérivées successives comme suit :

$$x_r^k = g^k(y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(k-1)}) \text{ pour } k \in [1, q]$$

avec $y_r^{(i)} = \frac{d^i y_r}{dt^i}$ pour $i \in [1, q-1]$

où les fonctions g^i sont données par

$$\begin{cases} g^1(y_r) = y_r \\ g^k(y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(k-1)}) = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial g^{k-1}}{\partial y_r^{(j)}}(y_r, \dots, y_r^{(k-2)}) y_r^{(j+1)} \\ - \varphi^{k-1}(g^1(y_r), \dots, g^{k-1}(y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(k-2)})) \text{ pour } k \in [2, q] \end{cases} \quad (3.7)$$

En effet, d'après la relation (3.6) on a

$$\begin{aligned} x_r^k &= \dot{x}_r^{k-1} - \varphi^{k-1}(x_r^1, \dots, x_r^{k-1}) \text{ pour } k \in [2, q] \\ &= \frac{d}{dt} g^k(y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(k-2)}) - \varphi^{k-1}(y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(k-2)}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial g^{k-1}}{\partial y_r^{(j)}}(y_r, \dots, y_r^{(k-2)}) y_r^{(j+1)} \\ &\quad - \varphi^{k-1}(g^1(y_r), \dots, g^{k-1}(y_r, y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(k-2)})) \text{ pour } k \in [2, q] \end{aligned}$$

Le problème de poursuite parfaite en sortie (3.4) peut être alors étendu au problème de poursuite de trajectoire d'état défini par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e(t)) = 0 \quad (3.8)$$

où $e(t) = x(t) - x_r(t)$

Et ce dernier peut être interprété comme un problème de régulation pour le système d'erreur obtenu à partir des équations du système (3.1) et du modèle de référence (3.5).

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + B(u(x) - u_r) + \varphi(x) - \varphi(x_r) \\ e_m = y - y_r \end{cases} \quad (3.9)$$

où e_m est l'erreur de poursuite mesurée.

3.3 Commande avec retour d'état

La loi de commande avec retour d'état qui nous intéresse est obtenue en exploitant la dualité avec un observateur du type grand gain afin de pouvoir réaliser une convergence exponentielle de l'état du système vers l'origine et réaliser ainsi une régulation parfaite en un temps raisonnable. Compte tenu des observateurs du type grand gain proposés dans [FMS05] pour les systèmes uniformément observables, on peut suggérer une structure de loi de commande avec retour d'état du type grand gain pour les systèmes considérés, soit

$$\begin{cases} \nu(e) = -K_c (\lambda^q B^T \bar{S} \Delta_\lambda e) \\ u(x) = u_r + \nu(e) \\ u(x) = \dot{x}_r^q - \varphi^q(x_r) + \nu(e) \end{cases} \quad (3.10)$$

où

Δ_λ est une matrice diagonale donnée par

$$\Delta_\lambda = \text{diag} \left(I_p, \frac{1}{\lambda} I_p, \dots, \frac{1}{\lambda^{q-1}} I_p \right) \quad (3.11)$$

avec λ un scalaire strictement positif, $\bar{S}$ est la solution de l'équation algébrique suivante :

$$\bar{S} + A^T \bar{S} + \bar{S} A = \bar{S} B B^T \bar{S} \quad (3.12)$$

et $K_c : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p$ est une fonction bornée (i.e. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \|K_c(\xi)\| \leq k_c$ où $k_c \geq 0$ est une constante) satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall \xi \in \Omega \text{ on a } \xi^T K_c(\xi) \geq \frac{1}{2} \xi^T \xi \quad (3.13)$$

où Ω est un compact quelconque de $\mathbb{R}^p$.

Remarque 3.3.1. *Considérons la matrice T définie par*

$$T = T^{-1} = \begin{pmatrix} 0_p & \dots & 0_p & I_p \\ \vdots & 0_p & I_p & 0_p \\ 0_p & I_p & 0_p & \vdots \\ I_p & 0_p & \dots & 0_p \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Compte tenu de la structure des matrices d'entrée B et de sortie C (équation 3.3), un calcul simple permet d'établir l'identité suivante :

$$TC^TCT = BB^T$$

L'équation algébrique de Lyapunov définie par :

$$S + A^T S + SA = C^T C \quad (3.15)$$

et qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$TST + TA^T TTST + TSTTAT = TC^TCT \quad (3.16)$$

en posant $\tilde{S} = TST$, cette dernière équation s'écrit alors :

$$\tilde{S} + A\tilde{S} + \tilde{S}A^T = BB^T \quad (3.17)$$

Posons

$$\bar{S} = \tilde{S}^{-1} = TS^{-1}T \quad (3.18)$$

S est une solution unique symétrique et définie positive [GHO92] de l'équation (3.15), il en sera de même pour l'équation algébrique (3.12).

Et compte tenu de la relation (3.18) ainsi que de l'expression $S^{-1}C^T$ donnée dans [FMR04], on obtient :

$$B^T \bar{S} = CS^{-1}T = [C_q^q \ C_q^{q-1} \ \dots \ C_q^1] \quad (3.19)$$

Cette loi de commande avec retour d'état réalise bien l'objectif de poursuite considéré (3.8) comme l'indique le résultat fondamental suivant

Théorème 3.1. *Les trajectoires d'état et de sortie du système (3.1)-(3.3) soumis à l'hypothèse $\mathcal{H}2.1$ où l'entrée u est donnée par (3.10)-(3.13) convergent globalement exponentiellement vers celles du modèle de référence (3.5) pour des valeurs de λ relativement grandes.*

Démonstration. En tenant compte des équations (3.6) et (3.10), on peut réécrire l'équation d'état du système de commande avec retour d'état comme suit

$$\begin{aligned}\dot{e} &= Ae + B\nu(e) + \varphi(x) - \varphi(x_r) \\ &= Ae - BK_c(\lambda^q B^T \bar{S} \Delta_\lambda e) + \varphi(x) - \varphi(x_r)\end{aligned}$$

Posons $\bar{e} = \lambda^q \Delta_\lambda e$, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{\bar{e}} &= \lambda^q \Delta_\lambda \dot{e} \\ &= \Delta_\lambda A \Delta_\lambda^{-1} \bar{e} - \lambda^q \Delta_\lambda B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) + \lambda^q \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(x_r))\end{aligned}\tag{3.20}$$

Maintenant, compte tenu des expressions de A , C et Δ_λ (équations (3.3), et (3.11)), un calcul simple permet d'établir les identités suivantes :

$$\Delta_\lambda A \Delta_\lambda^{-1} = \lambda A \text{ et } \Delta_\lambda B = \frac{1}{\lambda^{q-1}} B$$

Il en résulte que :

$$\dot{\bar{e}} = \lambda A \bar{e} - \lambda B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) + \lambda^q \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(x_r))$$

Considérons la fonction quadratique suivante $V(\bar{e}) = \bar{e}^T \bar{S} \bar{e}$, alors :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2\bar{e}^T \bar{S} \dot{\bar{e}} \\ &= 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} A \bar{e} - 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) + 2\lambda^q \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(x_r))\end{aligned}$$

L'équation (3.12) peut s'écrire comme suit

$$A^T \bar{S} + \bar{S} A = -\bar{S} + \bar{S} B B^T \bar{S}$$

En multipliant cette équation à gauche et à droite respectivement par $\bar{e}^T$ et $\bar{e}$, on obtient :

$$2\bar{e}^T \bar{S} A \bar{e} = -\bar{e}^T \bar{S} \bar{e} + \bar{e}^T \bar{S} B B^T \bar{S} \bar{e}$$

Par ailleurs, la dérivée de la fonction V , peut être donnée par

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\lambda V + \lambda \bar{e}^T \bar{S} B B^T \bar{S} \bar{e} - 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) + 2\lambda^q \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(x_r)) \\ &= -\lambda V - 2\lambda \left(\xi^T K_c(\xi) - \frac{1}{2} \xi^T \xi \right) + 2\lambda^q \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(x_r))\end{aligned}$$

où $\xi = B^T \bar{S} \bar{e}$. Et si l'on utilise l'inégalité (3.13), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\lambda V + 2\lambda^q \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(x_r)) \\ &\leq -\lambda V + 2\lambda^q \|\bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(x_r))\|\end{aligned}\tag{3.21}$$

Par ailleurs, le théorème de la valeur moyenne donne :

$$\varphi(x) - \varphi(x_r) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\zeta)(x - x_r) \quad (3.22)$$

où $\zeta \in \vartheta$. On aura alors

$$\begin{aligned} \|\Delta_\lambda(\varphi(x) - \varphi(x_r))\| &= \|\Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\zeta)e\| \\ &= \left\| \frac{1}{\lambda^q} \Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\zeta) \Delta_\lambda^{-1} \bar{e} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{\lambda^q} \Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\zeta) \Delta_\lambda^{-1} \right\| \|\bar{e}\| \end{aligned}$$

$\varphi(x)$ est une fonction triangulaire de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x . Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1}(\xi) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1}(\xi) & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2}(\xi) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ \frac{\partial \varphi^q}{\partial x^1}(\xi) & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^q}{\partial x^q}(\xi) \end{pmatrix} \\ \Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi) \Delta_\lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} \times & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\times}{\lambda} & \times & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\times}{\lambda^2} & \frac{\times}{\lambda} & \times & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\times}{\lambda^{q-1}} & \frac{\times}{\lambda^{q-2}} & \dots & \frac{\times}{\lambda} & \times \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque la fonction φ est lipschitzienne sur ϑ , la matrice $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\zeta)$ est bornée sur ϑ . Et compte tenu de la structure de $\varphi(x)$, cette matrice est triangulaire inférieure. La matrice $\Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\zeta) \Delta_\lambda^{-1}$ ne dépend donc que des termes en $1/\lambda$ et sa norme est bornée par une constante indépendante de λ pour tout $\lambda \geq 1$. Il en résulte que

$$2 \lambda^q \|\bar{S}\bar{e}\| \|\Delta_\lambda(\varphi(x) - \varphi(x_r))\| \leq \gamma V \quad (3.23)$$

où $\gamma > 0$ est une constante indépendante de λ . Et en combinant (3.21) et (3.23), on obtient

$$\dot{V} \leq -(\lambda - \gamma)V$$

Par conséquent

$$V(\bar{e}) \leq e^{-(\lambda-\gamma)t} V(\bar{e}(0))$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque 3.3.2. *considérons le cas où la structure de la matrice d'état A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & A_{r-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{R}^{p \times p}$ for $i \in [1, q-1]$ est une matrice carrée inversible. On peut montrer aisément que la loi de commande $\nu(e)$ correspondante est donnée par :

$$\nu(e) = - \left(\prod_{i=1}^{q-1} A_i \right)^{-1} K_c (\lambda^q B^T \bar{S} \Delta_\lambda \Lambda e) \quad (3.24)$$

$$\text{avec } \Lambda = \text{diag}(I_p, A_1, A_1 A_2, \dots, \prod_{i=1}^{q-1} A_i) \quad (3.25)$$

En effet, si l'on effectue le changement de variable $z = \Lambda x$, le système peut se réécrire comme suit

$$\begin{cases} \dot{z} = \Lambda A \Lambda^{-1} z + \Lambda B u + \Lambda \varphi(x) \\ y = C \Lambda^{-1} x = z^1 \end{cases} \quad (3.26)$$

Et compte tenu de la structure de la réalisation d'état du système et de la matrice de transformation, on a :

$$\Lambda A \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \Lambda B = B \left(\prod_{i=1}^{q-1} A_i \right) \text{ et } C \Lambda^{-1} = C \quad (3.27)$$

On retrouve ainsi la structure de la classe considérée des systèmes, soit les équations (3.1) à (3.3), et en déduire naturellement l'expression de la loi de commande (3.24).

3.4 Commande avec retour de sortie

La commande avec retour de sortie considérée est obtenue par une application naturelle du principe d'équivalence certaine. On remplace l'état du système, qui n'est pas toujours

accessible à la mesure, par une estimée provenant d'un observateur du type grand gain [FMS05].

La loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur considérée est donnée par

$$\begin{aligned} u(\hat{x}) &= u_r + \nu(\hat{e}) \\ &= \dot{x}_r^q - \varphi^q(x_r) + \nu(\hat{e}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec

$$\begin{aligned} \nu(\hat{e}) &= -K_c(\lambda^q B^T \bar{S} \Delta_\lambda \hat{e}) \\ &= -K_c(\lambda^q B^T \bar{S} \Delta_\lambda (\hat{x} - x_r)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

où

- Δ_λ est une matrice diagonale donnée par :

$$\Delta_\lambda = \text{diag} \left(I_p, \frac{1}{\lambda} I_p, \dots, \frac{1}{\lambda^{r-1}} I_p \right) \quad (3.30)$$

- $\bar{S}$ est la solution de l'équation algébrique suivante :

$$\bar{S} + A^T \bar{S} + \bar{S} A = \bar{S} B B^T \bar{S} \quad (3.31)$$

- λ est un nombre réel positif ;
- K_c est une fonction bornée $\mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p$ satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall \omega \in \Omega \text{ on a } \omega^T K_c(\omega) \geq \frac{1}{2} \omega^T \omega \quad (3.32)$$

où Ω est un compact quelconque de $\mathbb{R}^p$.

- $\{x_r(t) \in \mathbb{R}^n\}$ est la trajectoire d'état du système correspondante à la séquence de référence $\{y_r(t)\} \in \mathbb{R}^p$ et qui peut être déterminée d'une manière récursive à partir de la séquence de référence et de ses dérivées successives comme dans la section (3.2)

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est une estimation de x . Pour l'obtention d'une telle estimation, considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(\hat{x}) + \varphi(\hat{x}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{x} - x) \quad (3.33)$$

$\hat{e} = (\hat{x} - x_r) \in \mathbb{R}^n$ désigne une estimée de l'erreur de poursuite e , Δ_θ est une matrice diagonale définie par

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left(I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right) \quad (3.34)$$

avec θ est un réel positif et la matrice S est donnée par

$$S + A^T S + SA = C^T C \quad (3.35)$$

où la solution S de l'équation ainsi que le vecteur $S^{-1}C^T$ peuvent s'exprimer comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{j-1} I_{n_1} \quad (3.36)$$

$$S^{-1}C^T = \begin{bmatrix} C_q^1 I_{n_1} \\ C_q^2 I_{n_1} \\ \vdots \\ C_q^q I_{n_1} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

avec $C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}$

et compte tenu des équations du système d'erreur (3.9) et de la loi de commande avec retour de sortie (3.29)- (3.33), le système de commande avec retour de sortie peut être décrit par les équations d'état de l'observateur de l'erreur de poursuite et les équations d'état de l'erreur d'observation $\varepsilon = \hat{x} - x$ respectivement données par

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x}_r \\ &= A\hat{e} + B(u - u_r) + \varphi(\hat{x}) - \varphi(x_r) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \varepsilon \\ &= A\hat{e} + B\nu(\hat{e}) + \varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \varepsilon \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= A\varepsilon + \varphi(\hat{x}) - \varphi(x) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \varepsilon \end{aligned} \quad (3.39)$$

puisque l'état x est gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu(\hat{x}) + \varphi(x) \quad (3.40)$$

Le système de commande est globalement stable pour la classe des systèmes considérée comme l'indique le résultat fondamental suivant

Théorème 3.2. *Le système de commande avec retour d'état incorporant un observateur décrit par les équations (3.28)-(3.33) réalise asymptotiquement une poursuite parfaite, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, pourvu que les hypothèses $\mathcal{H}2.1$ et $\mathcal{H}2.2$ soient vraies.*

Démonstration. On montre d'abord que l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, puis on prouve la convergence exponentielle vers zéro de l'estimée de l'erreur de poursuite, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{e}(t) = 0$.

La première partie est établie à partir d'une fonction de Lyapunov utilisant l'erreur $\bar{\varepsilon} = \theta^q \Delta_\theta \varepsilon$ dont l'équation est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}} &= \theta^q \Delta_\theta \dot{\varepsilon} \\ \dot{\hat{e}} &= \theta^q \Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} \bar{\varepsilon} - \theta S^{-1} C^T C \varepsilon + \theta^q \Delta_\theta (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(e + x_r)) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Compte tenu des expressions de A , C et Δ_θ (équations (3.3) et (3.34)), un calcul simple permet d'établir les identités suivantes :

$$\Delta_\theta^{-1} A \Delta_\theta = \theta A \text{ et } C \Delta_\theta = C$$

Il en résulte que

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \theta A \bar{\varepsilon} - \theta S^{-1} C^T C \bar{\varepsilon} + \theta^q \Delta_\theta (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(e + x_r))$$

Considérons la fonction quadratique suivante $V_o : \bar{\varepsilon} \mapsto V_o(\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon}^T S \bar{\varepsilon}$, alors

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= 2 \bar{\varepsilon}^T S \dot{\bar{\varepsilon}} \\ &= 2 \theta \bar{\varepsilon}^T S A \bar{\varepsilon} - \theta \bar{\varepsilon}^T C^T C \bar{\varepsilon} + 2 \theta^q \bar{\varepsilon}^T S \Delta_\theta (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(e + x_r)) \end{aligned}$$

L'équation (3.35) peut se réécrire sous la forme suivante

$$2 \bar{\varepsilon}^T S A \bar{\varepsilon} = -\bar{\varepsilon}^T S \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^T C^T C \bar{\varepsilon}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= -\theta V_o - \theta \bar{\varepsilon}^T C^T C \bar{\varepsilon} + 2 \theta^q \bar{\varepsilon}^T S \Delta_\theta (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(e + x_r)) \\ &\leq -\theta V_o + 2 \theta^q \| \bar{\varepsilon}^T S \Delta_\theta (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(e + x_r)) \| \end{aligned} \quad (3.42)$$

Par ailleurs, les hypothèses $\mathcal{H}2.1$ et $\mathcal{H}2.2$ ainsi que la structure triangulaire de $\varphi(x)$ et la bornitude de la fonction K_c permettent de conclure aisément que pour $\theta \geq 1$,

$$\|\theta^q \Delta_\theta (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(e + x_r))\| \leq \alpha \bar{\varepsilon} \quad (3.43)$$

où α est une constante positive indépendante de θ . Et si l'on combine cette inégalité avec l'équation différentielle (3.42), on obtient

$$\dot{V}_o \leq -\theta V_o + 2\alpha \|\bar{\varepsilon}^T S\| \|\bar{\varepsilon}\| \quad (3.44)$$

De plus, compte tenu de la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon} \lambda_{\min}(S) \leq \bar{\varepsilon}^T S \bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon} \lambda_{\max}(S) \quad (3.45)$$

on peut réécrire la relation (3.44) comme suit :

$$\dot{V}_o \leq -(\theta - \gamma_o) V_o \quad (3.46)$$

avec $\gamma_o = 2 \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)} \alpha$ où $\lambda_{\max}(S)$ et $\lambda_{\min}(S)$ désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de S . Ceci conduit naturellement à la convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'observation pour des valeurs de θ relativement grandes.

$$V_o(\bar{\varepsilon}) \leq e^{-(\theta - \gamma_o)t} V_o(\bar{\varepsilon}(0)) \quad (3.47)$$

La seconde partie est établie à partir d'une fonction de Lyapunov utilisant l'estimé de l'état $\bar{e} = \lambda^q \Delta_\lambda \hat{e}$, dont l'équation peut se déduire de (3.38) et est donnée par

$$\dot{\bar{e}} = \lambda^q \Delta_\lambda \dot{\hat{e}} \quad (3.48)$$

$$= \Delta_\lambda A \Delta_\lambda^{-1} \bar{e} - \lambda^q \Delta_\lambda B \nu(\hat{e}) + \lambda^q \Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r)) - \lambda^q \theta^{1-q} \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{\varepsilon}$$

Maintenant, compte tenu des identités suivantes :

$$\Delta_\lambda^{-1} A \Delta_\lambda = \lambda A \text{ et } \Delta_\lambda B = \frac{1}{\lambda^{q-1}} B$$

la dynamique de $\bar{e}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}} &= \lambda A \bar{e} - \lambda B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) + \lambda^q \Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r)) - \lambda^q \theta \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{\varepsilon} \\ &= \lambda A \bar{e} - \lambda B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) + \lambda^q \Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r)) - \lambda^q \theta^{1-q} \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

La dernière équation tient compte du fait que $C \Delta_\theta = C$.

Nous allons maintenant montrer que $V_c : \bar{e} \mapsto V_c(\bar{e}) = \lambda^{-2q} \bar{e}^T \bar{S} \bar{e}$ est une fonction de Lyapunov pour le système de commande. En effet, la dérivée de la fonction V_c

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= 2\lambda^{-2q} \bar{e}^T \bar{S} \dot{\bar{e}} \\ &= 2\lambda^{-2q+1} \bar{e}^T \bar{S} A \bar{e} - 2\lambda^{-2q+1} \bar{e}^T \bar{S} B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) \\ &\quad + 2\lambda^{-q} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r)) \\ &\quad - 2\lambda^{-q} \theta^{1-q} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e} \end{aligned}$$

L'équation (3.31) peut s'écrire comme suit

$$A^T \bar{S} + \bar{S} A = -\bar{S} + \bar{S} B B^T \bar{S}$$

En multipliant cette équation à gauche et à droite respectivement par $\bar{e}^T$ et $\bar{e}$, on obtient

$$2\bar{e}^T \bar{S} A \bar{e} = -\bar{e}^T \bar{S} \bar{e} + \bar{e}^T \bar{S} B B^T \bar{S} \bar{e}$$

Par ailleurs, la dérivée de la fonction V_c , peut être donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= -\lambda V_c + \lambda^{-2q+1} \bar{e}^T \bar{S} B B^T \bar{S} \bar{e} - 2\lambda^{-2q+1} \bar{e}^T \bar{S} B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) \\ &\quad + 2\lambda^{-q} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r)) \\ &\quad - 2\lambda^{-q} \theta^{1-q} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e} \\ &= -\lambda V_c - 2\lambda^{-2q+1} \left(w^T K_c(w) - \frac{1}{2} w^T w \right) \\ &\quad + 2\lambda^{-q} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r)) \\ &\quad - 2\lambda^{-q} \theta^{1-q} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e} \end{aligned}$$

où $w = B^T \bar{S} \bar{e}$. Et si l'on utilise l'inégalité (3.32), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &\leq -\lambda V_c + 2\lambda^{-q} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r)) \\ &\quad - 2\lambda^{-q} \theta^{1-q} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e} \\ &\leq -\lambda V_c + 2\lambda^{-q} \|\bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r))\| \\ &\quad + 2\lambda^{-q} \theta^{1-q} \|\bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e}\| \end{aligned} \tag{3.49}$$

Par ailleurs, le théorème de la valeur moyenne donne :

$$\|\Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r))\| \leq \left\| \Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\zeta_1) \Delta_\lambda^{-1} \right\| \|\bar{e}\|$$

pour $\zeta_1 \in \vartheta$, et puisque la fonction φ est Lipschitzienne par rapport à x sur ϑ , la matrice $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\zeta_1)$ est bornée sur ϑ . Et compte tenu de la structure de $\varphi(x)$, cette matrice est triangulaire inférieure. La matrice $\Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\zeta_1) \Delta_\lambda^{-1}$ ne dépend que des termes en $1/\lambda$ et sa norme est bornée par une constante indépendante de λ pour $\lambda \geq 1$. Il en résulte que :

$$2\lambda^{-q} \|\bar{e}^T \bar{S}\| \|\Delta_\lambda (\varphi(\hat{e} + x_r) - \varphi(x_r))\| \leq \gamma_c V \tag{3.50}$$

où γ_c est une constante positive. Et compte tenu de $\bar{S}$ (3.12), on peut conclure, en prenant $\theta \geq 1$ et $\lambda \geq 1$, que :

$$\begin{aligned} \|\bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e}\| &\leq \lambda_{\min}^2(S) \theta^{q-1} \|\bar{e}\| \|\bar{e}\| \\ &\leq \theta^{q-1} \lambda_{\min}(S) \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(S)}{\lambda_{\max}(S)}} \sqrt{V_o} \sqrt{V_c} \end{aligned} \quad (3.51)$$

En combinant les inequations (3.49), (3.50) et (3.51), on obtient

$$\dot{V}_c \leq -(\lambda - \gamma_c) V_c + c \sqrt{V_o} \sqrt{V_c} \quad (3.52)$$

où

$c = 2\lambda_{\min}(S) \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(S)}{\lambda_{\max}(S)}}$. Compte tenu de la relation (3.47), on peut réécrire (3.52) de la façon suivante

$$\frac{\dot{V}_c}{2\sqrt{V_c}} \leq -\frac{(\lambda - \gamma_c)}{2} \sqrt{V_c} + \frac{c}{2} \sqrt{V_0(\bar{\varepsilon}(0))} e^{-(\frac{\theta - \gamma_o(t)}{2})t} \quad (3.53)$$

Ceci conduit naturellement à la convergence exponentielle de l'estimée de l'erreur de poursuite en l'état puisque :

$$\sqrt{V_c(\bar{e}(t))} \leq e^{-(\frac{\lambda - \gamma_c}{2})t} \sqrt{V_c(\bar{e}(0))} + \frac{c \sqrt{V_0(\bar{\varepsilon}(0))}}{\theta - \lambda - \gamma_o + \gamma_c} \left(e^{-(\frac{\theta - \gamma_o(\lambda)}{2})t} - e^{-(\frac{\lambda - \gamma_c}{2})t} \right)$$

Ainsi se termine la démonstration du théorème.

Remarques 3.4.1.

- R1. Le concept grand gain considéré permet de recouvrir le théorème de séparation pour la classe des systèmes non linéaires, considérée.
- R2. Il est facile de vérifier que la démonstration du théorème (4.1) reste valable si on remplace dans l'expression de la loi de commande avec retour de sortie (3.28)-(3.33) l'estimée de l'erreur de poursuite en sortie par sa mesure $y - y_r$.

3.5 Quelques fonctions de synthèse particulières

Le gain de commande avec retour d'état dépend d'une fonction de synthèse K_c bornée complètement caractérisée par la propriété (3.13). Dans ce qui suit, on donnera quelques fonctions de synthèse satisfaisant cette propriété. On distingue

- Les fonctions de synthèse de type grand gain données par :

$$K_c(\xi) = k_c \xi \quad (3.54)$$

où k_c est une constante positive avec $k_c \geq \frac{1}{2}$. On notera que cette fonction vérifie la condition requise sur tout compact de R^n .

- Les fonctions de synthèse de type modes glissants données par :

$$K_c(\xi) = k_c \text{sign}(\xi) \quad (3.55)$$

où k_c est un scalaire positif et '*sign*' est la fonction signe usuelle. On notera que la condition (3.13) est toujours vérifiée par (3.55) dans le cas des systèmes à entrées bornées-états bornés. Cependant, ces fonctions ne peuvent pas être utilisées comme telles dans la pratique car la fonction signe induit un phénomène de réticence.

- Les fonctions de synthèse communément utilisées dans la pratique des méthodes à modes glissants pour s'affranchir du phénomène de réticence, notamment :

$$K_c(\xi) = k_c \tanh(k_0 \xi) \quad (3.56)$$

où *tanh* signifie la fonction tangente hyperbolique et k_c et k_0 sont deux scalaires positifs. Il est aisé de voir que la fonction (3.56) vérifie bien la condition (3.13) pour des valeurs relativement grandes de k . On notera en particulier que l'on a : $\lim_{k_0 \rightarrow +\infty} \tanh(k_0 \tilde{z}) = \text{sign}(\tilde{z})$.

Il est important de remarquer que le choix de la fonction de synthèse K_c ne se limite pas aux fonctions présentées précédemment. D'autres expressions valables pour K_c peuvent être obtenues en considérant par exemple l'inverse de la fonction tangente ou en additionnant des fonctions de type grand gain avec les fonctions de type modes glissants.

3.6 Incorporation d'une action intégrale filtrée

On peut introduire d'une façon relativement aisée une action de filtrage suivie d'une action intégrale de l'erreur de poursuite dans la loi de commande, avec retour d'état, proposée ci-dessus modulo l'introduction de variables d'état supplémentaires comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}^f = e^f \\ \dot{e}^f = -\Gamma e^f + \Gamma e^1 \end{cases} \quad (3.57)$$

où $\Gamma = \text{Diag}\{\gamma_i\}$ est un paramètre de synthèse associé à l'action de filtrage. Le gain du système de commande avec retour d'état est alors déterminé à partir du modèle de synthèse suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_a = A_a e_a + \psi(e_a + x_{ra}) - \psi(x_{ra}) + B_a (u(e_a + x_{ra}) - u_{ra}) \\ y_a = \sigma^f \end{cases} \quad (3.58)$$

avec

$$\dot{y}_r^f = -\Gamma y_r^f + y_r, \quad \dot{\sigma}_r^f = y_r^f$$

$$e_a = \begin{pmatrix} \sigma^f \\ e^f \\ e \end{pmatrix}, \quad x_{ra} = \begin{pmatrix} \sigma_r^f \\ y_r^f \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad B_a = \begin{pmatrix} 0_p \\ 0_p \\ B \end{pmatrix}, \quad \psi(e_a) = \begin{pmatrix} 0_p \\ -\Gamma e_f \\ \varphi(e) \end{pmatrix}$$

En effet, il apparaît clairement que la structure du modèle de synthèse (3.58) est similaire à celle du système d'erreur (3.9). La synthèse sous-jacente du système de commande avec retour d'état est la même. La loi de commande avec retour de sortie incorporant une action intégrale filtrée est alors donnée par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(\hat{e}_a) + \varphi(\hat{x}) - \varphi(x_r) - \theta\Delta_\theta S^{-1}C^T C(\hat{x} - x) \\ u(\hat{e}_a) = \dot{x}_r^q - \varphi^q(x_r) + \nu(\hat{e}_a) \\ \nu(\hat{e}_a) = -\lambda\Gamma^{-1}B_a^T\Delta_{a\lambda}^{-1}K_c(\bar{S}_a\Delta_{a\lambda}\Lambda\hat{e}_a) \end{cases} \quad (3.59)$$

avec

$$\hat{e}_a = \begin{pmatrix} \sigma^f \\ e^f \\ \hat{e} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{a\lambda} = \text{diag}\left(I_p, \frac{1}{\lambda} I_p, \dots, \frac{1}{\lambda^q} I_p, \frac{1}{\lambda^{q+1}} I_p\right) \quad (3.60)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \Gamma & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

où $\bar{S}_a$ est l'unique solution définie positive de l'équation algébrique :

$$\bar{S}_a + \bar{S}_a \bar{A}_a + \bar{A}_a^T \bar{S}_a = \bar{S}_a \bar{B}_a \bar{B}_a^T \bar{S}_a \quad (3.62)$$

On montre aisément que le système de commande avec retour d'état résultant est globalement stable et réalise un rejet asymptotique des perturbations d'état et/ou de sortie de type échelon.

3.7 Exemple d'illustration

On se propose de traiter un problème de poursuite pour un double intégrateur non linéaire pour les deux situations selon que l'état est disponible ou non. Le modèle du double intégrateur est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + d_1 \sin(x_1) + v(t) \\ \dot{x}_2 = -d_2 x_2^3 + (2 + \tanh(x_2))u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.63)$$

où l'état $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, l'entrée $u \in \mathbb{R}$, la sortie $y \in \mathbb{R}$, d_1 et d_2 sont des scalaires et $v(t)$ est une perturbation d'état de type échelon d'amplitude unitaire qui affecte le fonctionnement du système sur l'intervalle de temps $[27, 60]$. La trajectoire de sortie de référence correspond à la sortie d'un filtre du second ordre, de gain statique unitaire avec un pôle double en $p = -0.8$, attaqué par l'entrée donnée sur la figure 3.1 .

3.7.1 Commande avec retour d'état

Afin d'appliquer la loi de commande proposée, on définit une entrée auxiliaire $\vartheta = (2 + \tanh(x_2))u$. Alors que, l'entrée réelle appliquée au système est obtenue par :

$$u = \frac{1}{(2 + \tanh(x_2))} \vartheta \quad (3.64)$$

Pour réaliser la poursuite, nous avons utilisé la loi de commande avec retour d'état proposée avec une action intégrale filtrée que l'on peut réécrire dans le cas considéré comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}^f = e^f \\ \dot{e}^f = -\gamma e^f + \gamma e^1 \\ u(e) = \frac{1}{2 + \tanh(x_2)} \left(\dot{x}_r^2 + (x_r^2)^3 + \nu(e) \right) \\ \nu(e) = -\frac{k_c}{\gamma} \tanh(k_o (\lambda^4 \sigma^f + 4\lambda^3 e^f + 6\gamma\lambda^2 e^1 + 4\gamma\lambda e^2)) \\ \varepsilon_1 = x_1 - y \\ e^1 = y - y_r \\ e^2 = x_2 - x_r^2 \\ x_r^2 = \dot{y}_r - \sin(y_r) \\ \dot{x}_r^2 = y_r^{(2)} - \dot{y}_r \cos(y_r) \end{array} \right.$$

où k_0 et k_c sont des constantes positives.

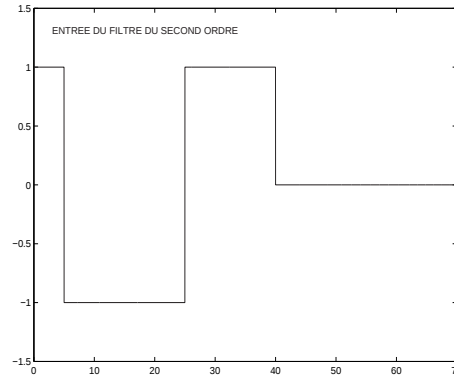


FIG. 3.1 – Entée du filtre du second ordre

Pour se situer dans des conditions proches des conditions réelles, la sortie du système a été perturbée par un bruit additif de moyenne nulle et de variance égale à 10^{-3} . Toutes les fonctions de synthèse décrites précédemment ont été utilisées et ont conduit aux résultats obtenus avec la fonction de synthèse K_c définie par l'expression (3.56). Deux ensembles de résultats sont présentés et il ont été obtenus en utilisant les mêmes valeurs pour les paramètres de synthèse qui sont les suivantes

$$k_c = 0.5; \quad k_o = 5; \quad \lambda = 10; \quad \gamma = 0.01;$$

Le premier ensemble de résultats est donné par la figure 3.2 et il a été obtenu avec les valeurs nominales des paramètres $d_1 = 1$ et $d_2 = 1$. Le deuxième ensemble est donné par la figure 3.3 et il a été obtenu avec des erreurs de 100% qui ont été intentionnellement

introduites sur les valeurs de chacun des paramètres d_1 et d_2 , i.e les valeurs de $d_1 = d_2 = 2$ sont utilisées dans le modèle sans changer l'expression de la commande. Sur chacune des figures 3.2 et 3.3, nous avons présenté l'évolution du comportement d'entrée-sortie du système ainsi que l'erreur de poursuite. Par ailleurs, la perturbation a été bien rejetée dans les deux cas et les comportements en sortie sont relativement bien filtrés avec la fonction de synthèse et l'action intégrale filtrée considérées. On notera aussi le bon comportement du système de commande vis-à-vis de fortes variations sur les paramètres du modèle.

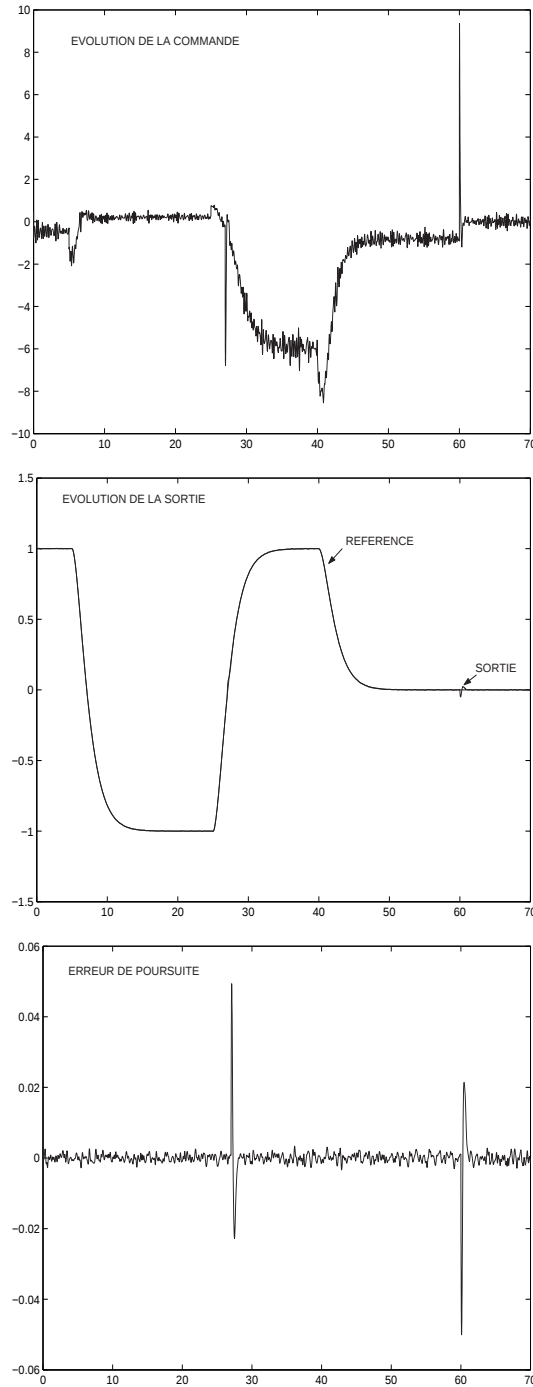


FIG. 3.2 – Evolution de l'entrée et de la sortie et l'erreur de poursuite pour $d_1 = d_2 = 1$

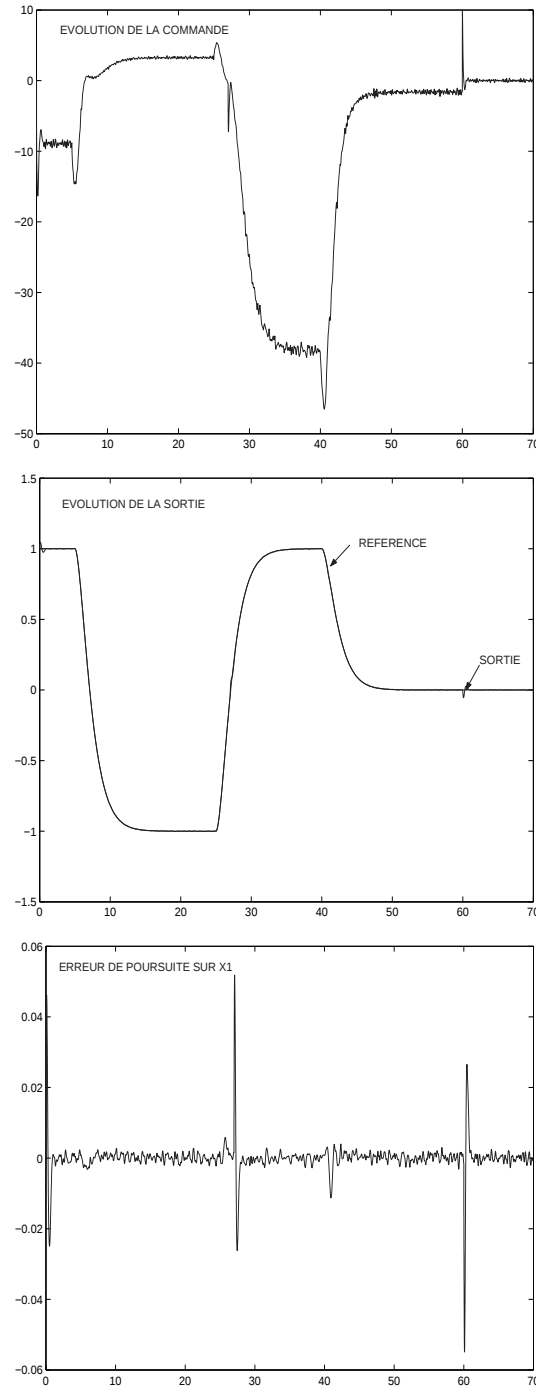


FIG. 3.3 – Evolution de l'entrée et de la sortie et l'erreur de poursuite pour $d_1 = d_2 = 2$

Les performances du contrôleur proposé ont été comparées avec celles d'un contrôleur backstepping [Kha02, IKh01]. La commande avec retour d'état de l'exemple (3.63) utilisant cette technique est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{2 + \tanh(e_2 + \dot{x}_r)} (\ddot{x}_r + \dot{\alpha}_1 + (e_2 + \dot{x}_r)^3 - c_2 e_2 + c_2 \alpha_1(z_0, z_1)) \\ z_0 = \sigma \\ z_1 = e_1 + c_0 z_0 \\ z_2 = e_2 - \alpha_1(z_0, z_1) \\ \alpha_1(z_0, z_1) = -c_1 z_1 - c_0 e_1 - \sin(e_1 + x_r) \\ \dot{\sigma} = e_1 \\ \dot{e}_1 = e_2 + \sin(e_1 + x_r) \\ \dot{e}_2 = -(e_2 + \dot{x}_r)^3 + (2 + \tanh(e_2 + \dot{x}_r))u - \ddot{x}_r \\ e_1 = x_1 - x_r \\ e_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_r \end{array} \right.$$

où c_0 , c_1 et c_2 sont des constantes positives.

Les figures 3.4 et 3.5 représentent l'évolution de l'erreur de poursuite, de la sortie et de la commande suite à une commande à backstepping pour différentes valeurs des paramètres d_1 et d_2 ($d_1 = d_2 = 1$ et $d_1 = d_2 = 2$) et en utilisant les paramètres de commande suivants :

$$c_0 = 15, c_1 = 15 \text{ et } c_2 = 15$$

Dans cette application, la commande basée sur l'approche grand gain a permis d'obtenir un comportement sensiblement meilleur que celui obtenu avec la commande backstepping, en présence d'une perturbation et de variations paramétriques ($d_1 = d_2 = 2$). ($d_1 = d_2 = 1$).

3.7.2 Commande avec retour de sortie

Afin d'appliquer la loi de commande proposée, on définit une entrée auxiliaire $\vartheta = (2 + \tanh(x_2))u$. Alors que, l'entrée réelle appliquée au système est obtenue par :

$$u = \frac{1}{(2 + \tanh(\hat{x}_2))} \vartheta \quad (3.65)$$

Nous nous situons dans des conditions de simulation similaires à celles du paragraphe (3.7) : même perturbation d'état de type échelon $v(t)$, même trajectoire de référence et même bruit additif. La loi de commande avec retour de sortie proposée avec une action

intégrale filtrée est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}^f = e^f \\ \dot{e}^f = -\gamma e^f + \gamma e^1 \\ \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 + d_1 \sin(\hat{x}_1) - 2\theta \varepsilon_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 = -d_2 \hat{x}_2^3 + (2 + \tanh(\hat{x}_2))u(\hat{x}) - \theta^2 \varepsilon_1 \\ u(\hat{x}) = \frac{1}{2 + \tanh(\hat{x}_2)} \left(\dot{x}_r^2 + (x_r^2)^3 + \nu(\hat{e}) \right) \\ \nu(\hat{e}) = -\frac{k_c \lambda^4}{\gamma} \tanh(k_o \left(\sigma^f + \frac{4}{\lambda} e^f + \frac{6\gamma}{\lambda^2} e^1 + \frac{4\gamma}{\lambda^3} \hat{e}^2 \right)) \\ \varepsilon_1 = \hat{x}_1 - y \\ e^1 = y - y_r \\ \hat{e}^2 = \hat{x}_2 - x_r^2 \\ x_r^2 = \dot{y}_r - \sin(y_r) \\ \dot{x}_r^2 = y_r^{(2)} - \dot{y}_r \cos(y_r) \end{array} \right.$$

où $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ sont les estimées respectives de x_1 et x_2 .

Les résultats de simulation sont obtenus avec la fonction K_{ac} définie par l'expression (3.56) et les paramètres suivantes :

$$k_c = 0.5; \quad k_o = 5; \quad \lambda = 10; \quad \gamma = 0.01; \quad \theta = 50$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter deux ensembles de résultats obtenus par la simulation : Le premier ensemble de résultats est donné par la figure 3.6 et il a été obtenu avec les valeurs nominales des paramètres $d_1 = 1$ et $d_2 = 1$. Le deuxième ensemble est donné par la figure 3.7 et il a été obtenu avec des erreurs de 100% qui ont été intentionnellement introduites sur les valeurs de chacun des paramètres d_1 et d_2 , i.e les valeurs de $d_1 = d_2 = 2$ ont été utilisées dans l'observateur et dans le modèle sans changer l'expression de la commande. Sur chacune des figures 3.6 et 3.7, nous avons présenté l'évolution du comportement d'entrée-sortie du système ainsi que les erreurs d'estimation. On notera plus particulièrement que l'observateur se comporte bien comme un capteur logiciel qui permet de construire les variables d'état du système en temps réel à partir de son comportement entrée-sortie indépendamment d'une quelconque erreur d'initialisation. Par ailleurs, la perturbation a été bien rejetée dans les deux cas et les comportements en sortie sont relativement bien filtrés avec la fonction de synthèse et l'action intégrale filtrée considérées. On notera aussi le bon comportement du système de commande vis-à-vis de

fortes variations sur les paramètres du modèle.

3.8 Conclusion

La motivation de ce chapitre consiste à proposer une méthode de commande avec retour de sortie du type grand gain pour les systèmes non linéaires uniformément observables et commandables sans zéros. Le caractère grand gain permet de satisfaire les propriétés requises par le théorème de séparation et garantir une régulation globale dans le cas de perturbations d'état et/ou de sortie du type impulsionnel. Par ailleurs, il a été montré que l'on peut incorporer relativement facilement une action intégrale dans la synthèse du système de commande pour réaliser un rejet asymptotique de perturbations d'état et/ou de sortie du type échelon. La méthode proposée a été utilisée pour résoudre un problème de poursuite d'un double intégrateur non linéaire soumis à des perturbations d'état du type échelon. Le comportement du système de commande est tout à fait conforme aux résultats fondamentaux obtenus. Des résultats fondamentaux analogues peuvent être obtenus dans le cas d'un problème de poursuite pour des systèmes non linéaires uniformément observables et commandables dont la dynamique des zéros est exponentiellement stable.

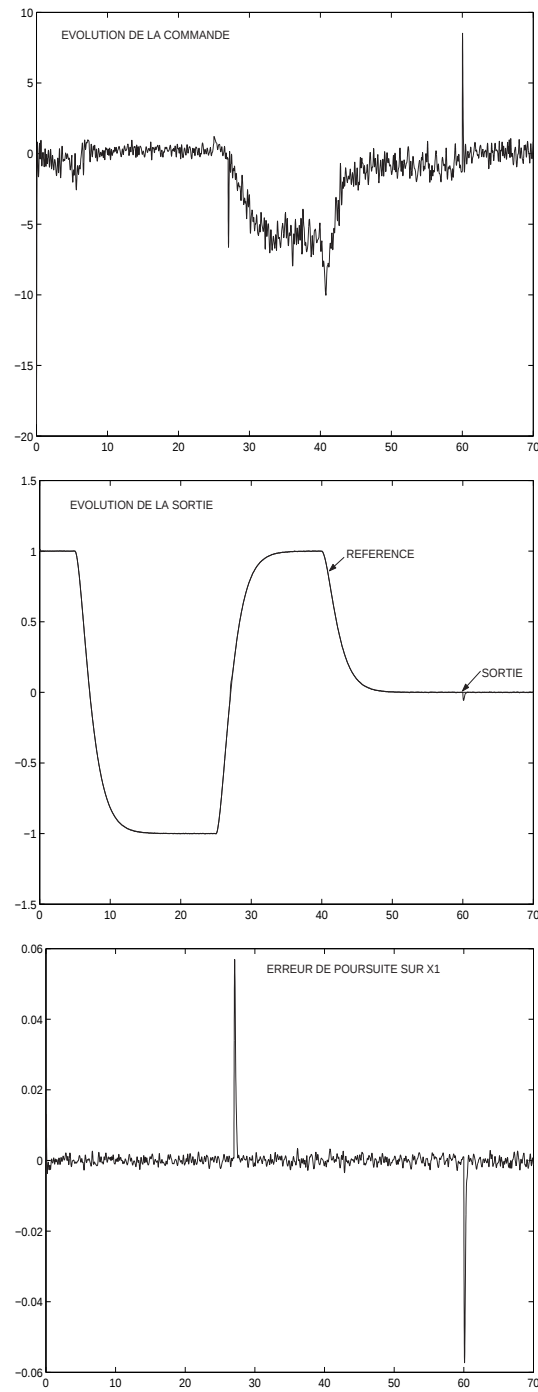


FIG. 3.4 – Evolution de l'entrée, de la sortie et de l'erreur de poursuite pour $d_1 = d_2 = 1$ avec la commande backstepping

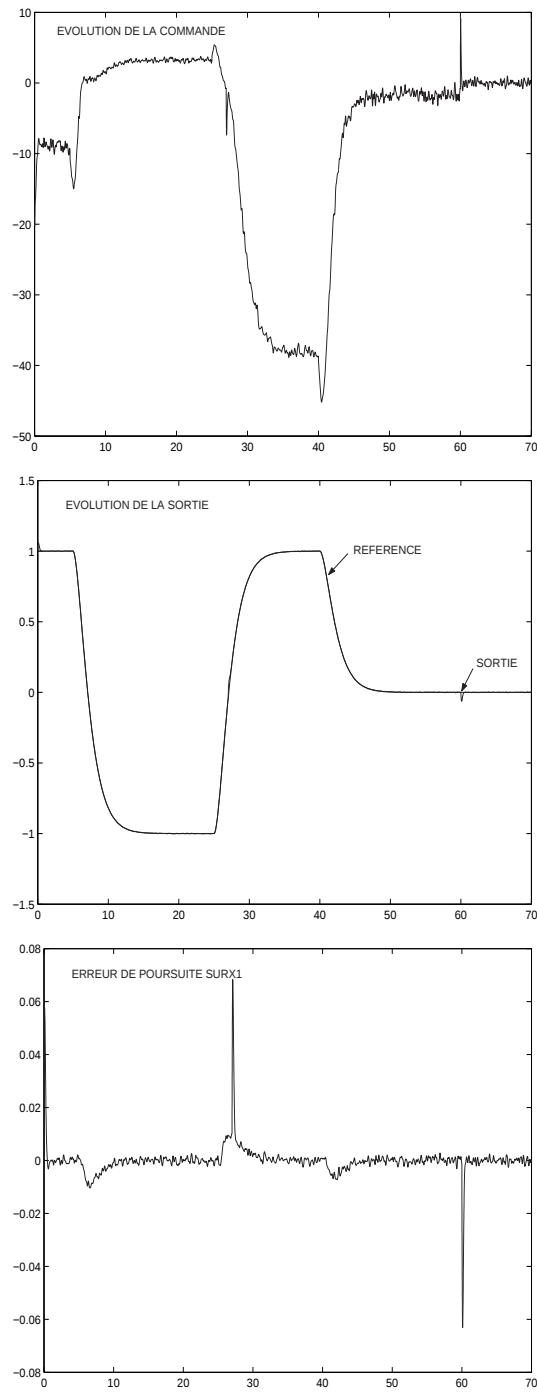


FIG. 3.5 – Evolution de l'entrée, de la sortie et de l'erreur de poursuite pour $d_1 = d_2 = 2$ avec la commande backstepping

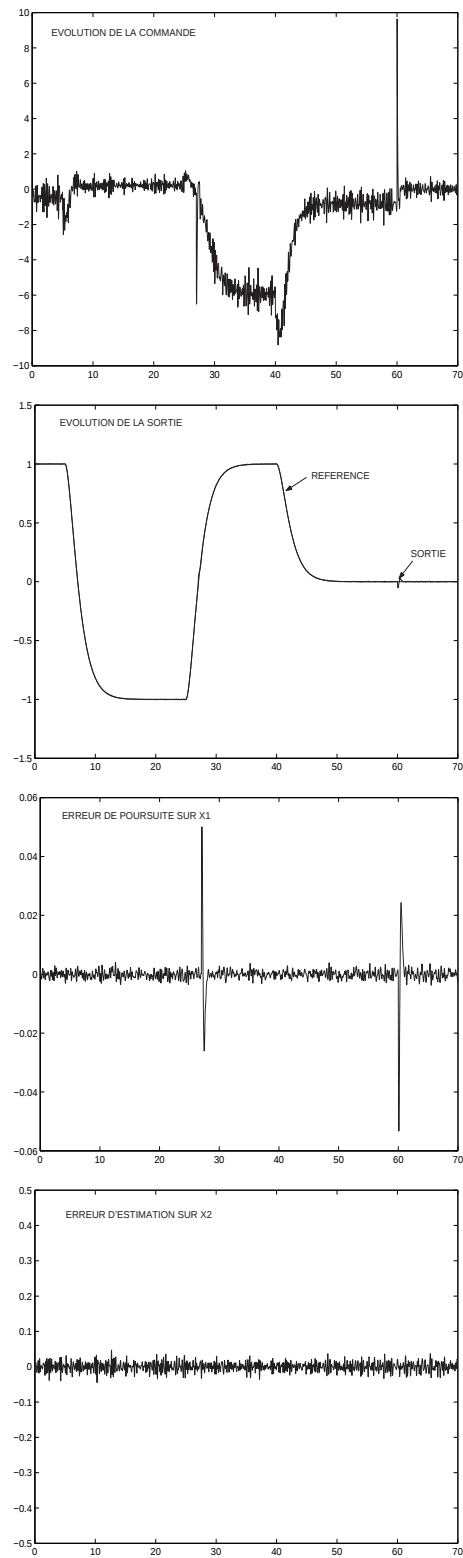
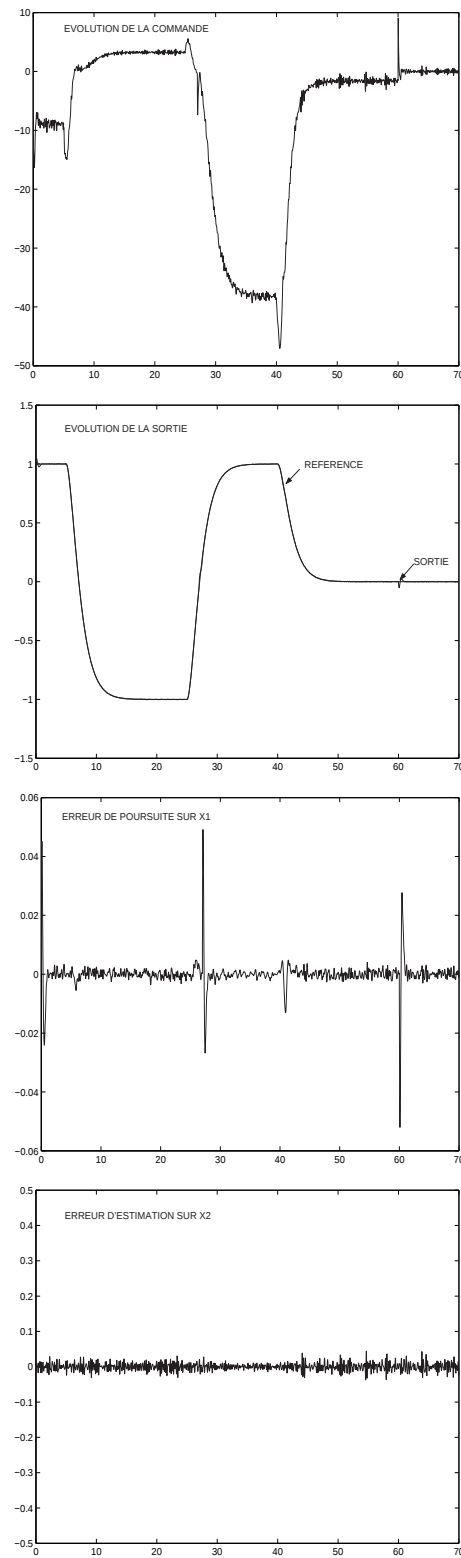


FIG. 3.6 – Evolution de l'entrée, de la sortie et de l'erreur d'estimation pour $d_1 = d_2 = 1$

FIG. 3.7 – Evolution de l'entrée, de la sortie et de l'erreur d'estimation pour $d_1 = d_2 = 2$

Chapitre 4

Commande avec retour de sortie pour une classe particulière de systèmes non linéaires

4.1 Introduction

Les systèmes considérés au chapitre précédent sont sans zéro et la sortie de la loi de commande correspond à la sortie physique du système. Dans ce chapitre, nous étendons la synthèse de la loi de commande à une classe de systèmes où la sortie de commande n'est plus nécessairement la sortie physique du système (sortie de l'observateur) mais correspond plutôt à une fonction de variables d'état, non nécessairement mesurées. De plus, le degré relatif de cette sortie n'est pas égal à l'ordre du système. Le système considéré admet donc des zéros et sous l'hypothèse classique de minimum de phase, hypothèse qui sera explicitée, on retrouve tous les résultats établis au chapitre précédent. Outre son intérêt théorique, la façon dont le problème de commande est abordé dans ce chapitre correspond exactement à la problématique de commande du moteur asynchrone.

Nous allons maintenant présenter une loi de commande d'une classe particulière de systèmes non linéaires uniformément observables et commandables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée sous la forme canonique présentée dans le chapitre précédent. Nous nous appuyons sur cette forme particulière pour développer dans le cinquième chapitre une loi de commande de la machine asynchrone à base d'observateur à grand gain .

Ce chapitre est organisé comme suit. Le deuxième paragraphe est consacré à la formulation du problème de poursuite étudié en précisant la classe des systèmes non linéaires considérée. La loi de commande avec retour d'état proposée est présentée dans le troisième paragraphe avec une analyse de la convergence exponentielle de l'erreur de poursuite vers l'origine. Le problème de commande avec retour de sortie est traité dans le quatrième

paragraphe où le résultat fondamental de cette contribution est donné. Le cinquième paragraphe est consacré à l'incorporation d'une action intégrale filtrée dans la synthèse de la loi de commande non linéaire. Une conclusion est faite pour préciser le contexte de cette contribution et ses perspectives.

4.2 Formulation du problème

On considère les systèmes multivariables décrits par les équations d'état et de sortie :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(u, x) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\text{avec } x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix}, \quad f(u, x) = \begin{pmatrix} f^1(u, x^1) \\ f^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ f^q(u, x) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{(q-1)n_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1} & \dots & 0_{n_1} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où l'état du système $x \in \vartheta$ un compact de $\mathbb{R}^n$ avec $x^k \in \mathbb{R}^{n_1}$, l'entrée $u \in U$ un compact de $\mathbb{R}^m$.

Le système (4.1) est formé par un ensemble de blocs, chacun de ces blocs décrivant la dynamique de la composante vectorielle $x^k, k = 1, \dots, q$ et toutes les sorties sont rassemblées au sein du premier bloc x^1 . Les non linéarités du système ont une structure triangulaire, c'est-à-dire la non linéarité d'un bloc ne dépend que des variables propres du bloc ou celles de celles des blocs supérieurs [Liu07].

Soit $z^1(t) = h(x) \in \mathbb{R}^p$ où $h(x)$ une fonction suffisamment dérivable et qui dépend de variables d'état qui ne sont pas forcément accessibles à la mesure. Le problème de commande considéré consiste en une poursuite asymptotique parfaite d'une trajectoire de sortie $z^1(t)$ que l'on notera $\{z_d^1(t)\} \in \mathbb{R}^p$, soit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z^1(t) - z_d^1(t)) = 0 \quad (4.4)$$

La synthèse de la commande non linéaire proposée nécessite les hypothèses suivantes :

$\mathcal{H}2.3.$ Il existe un difféomorphisme lipschitzien $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_z \\ \Phi_\xi \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \Phi(x) = \begin{pmatrix} z = \Phi_z(x) \\ \xi = \Phi_\xi(x) \end{pmatrix}$ qui met le système (4.1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_r z + B_r (u + g(\xi, z)) + \psi(z) \\ \dot{\xi} = \eta(\xi, z, u) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\text{avec } z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^r \end{pmatrix}, \quad \psi(z) = \begin{pmatrix} \psi^1(z^1) \\ \psi^2(z^1, z^2) \\ \vdots \\ \psi^{r-1}(z^1, \dots, z^{r-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & I_{(r-1)p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B_r = \begin{pmatrix} 0_p \\ \vdots \\ 0_p \\ I_p \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

sont des matrices de dimensions respectives $(rp) \times (rp)$ et $(rp) \times p$; $z^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, r$; $\xi \in \mathbb{R}^{n-rp}$ et $g(\xi, z) \in \mathbb{R}^p$.

$\mathcal{H}2.4.$ La fonction ψ est globalement lipschitzienne en z et la fonction g est globalement lipschitzienne en z uniformément en ξ .

$\mathcal{H}2.5.$ Le système suivant

$$\dot{\xi} = \eta(\xi, v_1, (v_2 - g(\xi, v_3))) \quad (4.8)$$

dont l'état est ξ et l'entrée est (v_1, v_2, v_3) est tel son état reste borné pour toute entrée bornée.

L'hypothèse $\mathcal{H}2.5.$ est connue sous le nom d'hypothèse de "minimum de phase" [Pra03, KKC03].

Compte tenu de la structure de système (4.5), il est possible de dériver la trajectoire d'état du sous système $\{z_d(t)\} \in \mathbb{R}^{rp}$ et la séquence d'entrée associée $\{u_d(t)\}$ qui correspond à la trajectoire désirée $\{z_d^1(t)\} \in \mathbb{R}^p$. Cela permet de définir le modèle de référence admissible

comme suit

$$\dot{z}_d = A_r z_d + B_r(u_d + g(\xi, z_d)) + \psi(z_d) \quad (4.9)$$

où $z_d = \begin{pmatrix} z_d^1 \\ z_d^2 \\ \vdots \\ z_d^r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ est l'état de référence du modèle. Notons que les composants

$z_d^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 2, \dots, r$ aussi comme l'entrée associée $u_d \in \mathbb{R}^m$ peut être calculée à partir du système (4.9) comme suit

$$\begin{cases} z_d^k = \dot{z}_d^{k-1} - \psi^{k-1}(z_d^1, \dots, z_d^{k-1}) \text{ for } k \in [2, r] \\ u_d = \dot{z}_d^r - g(\xi, z_d) \end{cases} \quad (4.10)$$

et en supposant que la trajectoire de la référence est assez lisse, il est possible de déterminer par récurrence l'état de référence du modèle et l'entrée de la trajectoire de référence et ses premières dérivées par rapport au temps, soit $z_d^{1(i)} = \frac{d^i z_d^1}{dt^i}$ pour $i \in [1, r-1]$, comme suit

$$z_d^k = \beta^k(z_d^1, z_d^{1(1)}, \dots, z_d^{1(k-1)}) \text{ for } k \in [1, r]$$

où les fonctions β^k sont données par :

- $\beta^1(z_d^1) = z_d^1$
- pour $k \in \{2, \dots, r\}$:

$$\begin{aligned} \beta^k(z_d^1, z_d^{1(1)}, \dots, z_d^{1(k-1)}) &= \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial \beta^{k-1}}{\partial z_d^{1(j)}}(z_d^1, \dots, z_d^{1(k-2)}) z_d^{1(j+1)} \\ &\quad - \psi^{k-1}(\beta^1(z_d^1), \dots, \beta^{k-1}(z_d^1, z_d^{1(1)}, \dots, z_d^{1(k-2)})) \end{aligned}$$

En effet, d'après l'équation (4.10) on a :

$$\begin{aligned} z_d^k &= \dot{z}_d^{k-1} - \psi^{k-1}(z_d^1, \dots, z_d^{k-1}) \text{ pour } k \in [2, r] \\ &= \frac{d}{dt} \left(\beta^k(z_d^1, z_d^{1(1)}, \dots, z_d^{1(k-1)}) \right) - \psi^{k-1}(z_d^1, z_d^{1(1)}, \dots, z_d^{1(k-1)}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial \beta^{k-1}}{\partial z_d^{1(j)}}(z_d^1, \dots, z_d^{1(k-2)}) z_d^{1(j+1)} \\ &\quad - \psi^{k-1}(\beta^1(z_d^1), \dots, \beta^{k-1}(z_d^1, z_d^{1(1)}, \dots, z_d^{1(k-2)})) \end{aligned}$$

Le problème de poursuite parfaite en sortie (4.4) peut être alors étendu au problème de poursuite de trajectoire d'état défini par

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \text{où} \quad e(t) = (z(t) - z_d(t)) \quad (4.11)$$

Et ce dernier peut être interprété comme un problème de régulation pour le système d'erreur obtenu à partir des équations du système (4.5) et du modèle de référence (4.9) :

$$\begin{cases} \dot{e} = A_r e + B_r (u - u_d) + B_r (g(\xi, z) - g(\xi, z_d)) + \psi(z) - \psi(z_d) \\ \dot{\xi} = \eta(\xi, z, u) \end{cases} \quad (4.12)$$

En remplaçant z par $e + z_d$, le système (4.12) s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{e} = A_r e + B_r (u - u_d) + B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d)) + \psi(e + z_d) - \psi(z_d) \\ \dot{\xi} = \eta(\xi, e + z_d, u) \end{cases} \quad (4.13)$$

4.3 Commande avec retour d'état

Compte tenu des observateurs du type grand gain proposés dans [FMS05], on peut suggérer une structure de loi de commande avec retour d'état du type grand gain pour les systèmes considérés, soit

$$\begin{cases} \nu(e) = -K_c (\lambda^r B_r^T \bar{S} \Delta_\lambda e) \\ u = u_d + \nu(e) \\ \quad = \dot{z}_d^r - g(\xi, z_d) + \nu(e) \end{cases} \quad (4.14)$$

où Δ_λ est une matrice diagonale donnée par

$$\Delta_\lambda = \text{diag} \left(I_p, \frac{1}{\lambda} I_p, \dots, \frac{1}{\lambda^{r-1}} I_p \right) \quad (4.15)$$

où λ est un scalaire strictement positif, $\bar{S}$ est la solution de l'équation algébrique suivante

$$\bar{S} + A_r^T \bar{S} + \bar{S} A_r = \bar{S} B_r B_r^T \bar{S} \quad (4.16)$$

et $K_c : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p$ est une fonction bornée satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall \omega \in \Omega \text{ on a } \omega^T K_c(\omega) \geq \frac{1}{2} \omega^T \omega \quad (4.17)$$

où Ω est un compact quelconque de $\mathbb{R}^p$.

Remarque 4.3.1. Du fait que l'équation algébrique de Lyapunov :

$$S + A_r^T S + S A_r = C_r^T C_r \quad (4.18)$$

où $C_r = B_r^T$, admet une solution unique et définie positive S [GHO92], il en sera de même pour l'équation algébrique (4.16). Cette solution est unique et peut être exprimée à partir de la relation (3.18).

En utilisant les manipulations algébriques données dans [FMR04] on obtient

$$B_r^T \bar{S} = C_r S^{-1} T = [C_q^q I_p \ C_q^{q-1} I_p \ \dots \ C_r^1 I_p]$$

Cette loi de commande avec retour d'état réalise bien l'objectif de poursuite considérée (4.11) comme l'indique le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.1. Sous les hypothèses $\mathcal{H}2.3$ à $\mathcal{H}2.5$, l'erreur de poursuite $e(t)$ du système (4.13) généré par la séquence d'entrée donnée par (4.14)-(4.17) converge globalement exponentiellement vers zéro pour des valeurs de λ relativement grandes.

Démonstration. En tenant compte des équations (4.10) et (4.14), l'équation d'état du système avec retour d'état s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_r e + B_r \nu(e) + B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d)) + \psi(e + z_d) - \psi(z_d) \\ &= A_r e - B_r K_c (\lambda^r B_r^T \bar{S} \Delta_\lambda e) + B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d)) + \psi(e + z_d) - \psi(z_d) \end{aligned}$$

Le résultat sera établi à partir d'une fonction de Lyapunov en utilisant le vecteur d'état $\bar{e} = \lambda^r \Delta_\lambda e$ dont l'équation est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}} &= \lambda^r \Delta_\lambda \dot{e} \\ &= \lambda A_r \bar{e} - \lambda B_r K_c (B_r^T \bar{S} \bar{e}) + \lambda B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d)) \\ &\quad + \lambda^r \Delta_\lambda (\psi(e + z_d) - \psi(z_d)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

puisque $\Delta_\lambda A_r \Delta_\lambda^{-1} = \lambda A_r$ et $\Delta_\lambda B_r = \frac{1}{\lambda^{r-1}} B_r$.

Considérons la fonction quadratique suivante : $V(\bar{e}) = \bar{e}^T \bar{S} \bar{e}$, alors

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\bar{e}^T \bar{S} \dot{\bar{e}} \\ &= 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} A_r \bar{e} - 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} B_r K_c (B_r^T \bar{S} \bar{e}) + 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d)) \\ &\quad + 2\lambda^r \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\psi(e + z_d) - \psi(z_d)) \end{aligned}$$

L'équation (4.16) peut s'écrire comme suit :

$$A_r^T \bar{S} + \bar{S} A_r = -\bar{S} + \bar{S} B_r B_r^T \bar{S}$$

En multipliant cette équation à gauche et à droite respectivement par $\bar{e}^T$ et $\bar{e}$, on obtient :

$$2\bar{e}^T \bar{S} A_r \bar{e} = -\bar{e}^T \bar{S} \bar{e} + \bar{e}^T \bar{S} B_r B_r^T \bar{S} \bar{e}$$

Par ailleurs, la dérivée de la fonction V , peut être donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\lambda V + \lambda \bar{e}^T \bar{S} B_r B_r^T \bar{S} \bar{e} - 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} B_r K_c (B_r^T \bar{S} \bar{e}) \\ &+ 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d)) \\ &+ 2\lambda^r \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\psi(e + z_d) - \psi(z_d)) \\ &= -\lambda V - 2\lambda \left(w^T K_c(w) - \frac{1}{2} w^T w \right) \\ &+ 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d)) \\ &+ 2\lambda^r \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\psi(e + z_d) - \psi(z_d)) \end{aligned}$$

où $w = B_r^T \bar{S} \bar{e}$. Et si l'on utilise l'inégalité (4.17), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda V + 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d)) \\ &+ 2\lambda^r \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\psi(e + z_d) - \psi(z_d)) \\ &\leq -\lambda V + 2\lambda \|\bar{S} \bar{e}\| \|B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d))\| \\ &+ 2\lambda^r \|\bar{S} \bar{e}\| \|\Delta_\lambda (\psi(e + z_d) - \psi(z_d))\| \end{aligned} \quad (4.20)$$

Par ailleurs, le théorème de la valeur moyenne donne :

$$\|\lambda^r \Delta_\lambda (\psi(e + z_d) - \psi(z_d))\| \leq \left\| \Delta_\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}(\zeta_1) \Delta_\lambda^{-1} \right\| \|\bar{e}\|$$

pour $\zeta_1 \in \vartheta$, et puisque la fonction ψ est Lipschitzienne par rapport à z sur ϑ , la matrice $\frac{\partial \psi}{\partial z}(\zeta_1)$ est bornée sur ϑ . Et compte tenu de la structure de $\psi(x)$, cette matrice est triangulaire inférieure. La matrice $\Delta_\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}(\zeta_1) \Delta_\lambda^{-1}$ ne dépend que des termes en $1/\lambda$ et sa norme est bornée par une constante indépendante de λ pour $\lambda \geq 1$. De la même façon on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda B_r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d))\| &= \left\| \lambda B_r \left(\frac{\partial g}{\partial z}(\xi, \zeta_2) \right) e \right\| \\ &= \left\| B_r \frac{\partial g}{\partial z}(\xi, \zeta_2) \Delta_\lambda^{-1} \bar{e} \right\| \\ &\leq \left\| B_r \frac{\partial g}{\partial z}(\xi, \zeta_2) \right\| \|\bar{e}\| \end{aligned}$$

pour $\zeta_2 \in \vartheta$. Et puisque g est Lipschitzienne en z uniformément en ξ sur ϑ , la norme de

la matrice $\frac{\partial g}{\partial z}(\xi, \zeta_2)$ est bornée sur ϑ par une constante (indépendant de λ).

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} 2\|\bar{S}\bar{e}\|\|\lambda^r \Delta_\lambda (\psi(\xi, e + z_d) - \psi(\xi, z_d))\| &\leq \gamma_1 V \\ 2\lambda\|\bar{S}\bar{e}\|\|B^r (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d))\| &\leq \gamma_2 V \end{aligned} \quad (4.21)$$

où $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ sont des constantes indépendantes de λ . Et en combinant (4.20) et (4.21), on obtient :

$$\dot{V} \leq -(\lambda - \gamma_1 - \gamma_2)V$$

Par conséquent :

$$V(\bar{e}) \leq e^{-(\lambda - \gamma)t} V(\bar{e}(0))$$

avec $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Ainsi se termine la démonstration du théorème.

Remarque 4.3.2. *considérons le cas où la structure de la matrice d'état A_r est donnée par*

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & A_{r-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{R}^{p \times p}$ pour $i \in [1, q-1]$, est une matrice carrée inversible. On peut montrer aisément que la loi de commande $\nu(e)$ correspondante est donnée par :

$$\nu(e) = - \left(\prod_{i=1}^{q-1} A_i \right)^{-1} K_c (\lambda^q B_r^T \bar{S} \Delta_\lambda \Lambda e) \quad (4.22)$$

$$\text{avec} \quad \Lambda = \text{diag}(I_p, A_1, A_1 A_2, \dots, \prod_{i=1}^{q-1} A_i) \quad (4.23)$$

En effet, si l'on effectue le changement de variable $z = \Lambda x$, le système peut se réécrire comme suit :

$$\dot{z} = \Lambda A_r \Lambda^{-1} z + \Lambda B_r (u + g(\xi, z)) + \Lambda \varphi(x) \quad (4.24)$$

Et compte tenu de la structure de la réalisation d'état du système et de la matrice de

transformation, on a :

$$\Lambda A \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \Lambda B_r = B_r \left(\prod_{i=1}^{q-1} A_i \right) \quad (4.25)$$

On retrouve ainsi la structure de la classe considérée des systèmes, soient les équations (4.5) à (4.7), et on en déduit naturellement l'expression de la loi de commande (4.22).

4.4 Commande avec retour de sortie

Maintenant, on cherche à résoudre le problème de commande à grand gain incorporant un observateur pour les systèmes multivariables, décrit par les équations (4.1)-(4.3).

La commande avec retour de sortie est obtenue en appliquant le principe d'équivalence certaine en utilisant l'observateur à grand gain proposé par [FMS05], qui prend ici la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(u(\hat{x}), \hat{x}) - \theta \Delta_\theta S^{-1} C^T C \varepsilon \quad (4.26)$$

- Δ_θ est une matrice diagonale définie par

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left(I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right) \quad (4.27)$$

- θ est un réel positif
- S est donnée par

$$S + A^T S + S A = C^T C \quad (4.28)$$

où la solution S de l'équation ainsi que le vecteur $S^{-1} C^T$ peuvent s'exprimer comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{j-1} I_{n_1} \quad (4.29)$$

$$S^{-1} C^T = \begin{bmatrix} C_q^1 I_{n_1} \\ C_q^2 I_{n_1} \\ \vdots \\ C_q^q I_{n_1} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

avec $C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}$

- $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ l'erreur d'observation

Rappelons que l'état x est gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = Ax + f(u(\hat{x}), x) \quad (4.31)$$

A partir de (4.1) et (4.31), on obtient :

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon + f(u(\hat{x}), \hat{x}) - f(u(\hat{x}), x) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \varepsilon \quad (4.32)$$

Les équations de l'observateur fournit l'erreur de poursuite estimée $\hat{e}$, qui s'écrit dans les coordonnées (z, ξ) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}} = A_r \hat{e} + B_r (\hat{u} - u_d) + B_r \left(g(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - g(\hat{\xi}, z_d) \right) \\ \quad + \psi(\hat{e} + z_d) - \psi(z_d) - \theta \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\Phi^c(\hat{z}, \hat{\xi})) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \varepsilon \\ \dot{\hat{\xi}} = \eta(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d, \hat{u}) - \theta \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x}(\Phi^c(\hat{z}, \hat{\xi})) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \varepsilon \end{cases} \quad (4.33)$$

où

- $\hat{e} = \hat{z} - z_d$
- $\hat{z}$ et $\hat{\xi}$ sont les estimés respectives de z et ξ données par

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A_r \hat{z} + B_r \left(\hat{u} + g(\hat{\xi}, \hat{z}) \right) + \psi(\hat{z}) \\ \quad - \theta \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\Phi^c(\hat{z}, \hat{\xi})) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \varepsilon \\ \dot{\hat{\xi}} = \eta(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d, \hat{u}) - \theta \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x}(\Phi^c(\hat{z}, \hat{\xi})) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \varepsilon \end{cases} \quad (4.34)$$

- z_d est l'état de référence qu'on peut déterminer par récurrence comme on a fait dans la section 4.1.

- Φ^c est la fonction réciproque de Φ , i.e. $x = \Phi^c(z, \xi)$.

- $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\Phi^c(\hat{z}, \hat{\xi})) \\ \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x}(\Phi^c(\hat{z}, \hat{\xi})) \end{pmatrix}$ est le jacobien de la transformation Φ en $\hat{x}$.

- $\hat{u}$ est la commande avec retour de sortie qui est obtenue en utilisant le principe d'équivalence certaine, soit.

$$\begin{cases} \hat{u} \triangleq u(\hat{\xi}, \hat{z}) \\ \quad = \hat{z}_d^r - g(\hat{\xi}, z_d) + \nu(\hat{e}) \\ \nu(\hat{e}) = -K_c (\lambda^r B_r^T \bar{S} \Delta_\lambda \hat{e}) \end{cases} \quad (4.35)$$

Comme dans la plupart des travaux relatifs à la synthèse de l'observateur à grand gain,

nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

(H2.4) La fonction f est globalement lipschitzienne par rapport à x localement uniformément en u .

Maintenant, nous énonçons ce qui suit :

Théorème 4.2. *Le système de commande avec retour de sortie décrit par les équations (4.34)-(4.32) réalise asymptotiquement une poursuite parfaite, soit $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, pourvu que les hypothèses $\mathcal{H}2.3$ - $\mathcal{H}2.5$ et $\mathcal{H}4.1$ soient vraies.*

Démonstration. On montre d'abord que l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, puis on prouve la convergence exponentielle vers zéro de l'estimé de l'erreur de poursuite, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{e}(t) = 0$. La première partie est établie à partir d'une fonction de Lyapunov utilisant l'erreur $\bar{\varepsilon} = \theta^q \Delta_\theta \varepsilon$ dont l'équation est donnée par

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \theta A \bar{\varepsilon} - \theta S^{-1} C^T C \bar{\varepsilon} + \theta^q \Delta_\theta (f(u(\hat{x}), \hat{x}) - f(u(\hat{x}), x))$$

Posons maintenant $V_o(\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon}^T S \bar{\varepsilon}$, la dérivée de la fonction V_o est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= 2\bar{\varepsilon}^T S \dot{\bar{\varepsilon}} \\ &= -\theta V_o - \theta \bar{\varepsilon}^T C^T C \bar{\varepsilon} + 2\theta^q \bar{\varepsilon}^T S \Delta_\theta (f(u(\hat{x}), \hat{x}) - f(u(\hat{x}), x)) \\ &\leq -\theta V_o + \|2\theta^q \bar{\varepsilon}^T S \Delta_\theta (f(u(\hat{x}), \hat{x}) - f(u(\hat{x}), x))\| \end{aligned} \quad (4.36)$$

Maintenant, comme la fonction $K_c(\hat{z})$ est bornée et en utilisant les hypothèses ($\mathcal{H}2.4$) et ($\mathcal{H}2.5$), on prouve que l'entrée $u(\xi, \hat{z})$ est bornée. Notons que, la borne supérieure correspondante ne dépend pas de λ (voir l'équation (4.35)). Etant donnée la structure triangulaire de f et l'hypothèse ($\mathcal{H}4.1$), on obtient :

$$\|\theta^q \Delta_\theta (f(u(\hat{x}), \hat{x}) - f(u(\hat{x}), x))\| \leq \alpha \bar{\varepsilon} \quad (4.37)$$

où α est une fonction positive qui ne dépend pas de θ et λ . Combinons (4.36) et (4.37), on obtient :

$$\dot{V}_o \leq -(\theta - \gamma_o) V_o \quad (4.38)$$

avec $\gamma_o = 2 \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)} \alpha$ où $\lambda_{\max}(S)$ et $\lambda_{\min}(S)$ désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de S . Ceci conduit naturellement à la convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'observation pour des valeurs de θ relativement grandes.

$$V_o(\bar{\varepsilon}) \leq e^{-(\theta - \gamma_o)t} V_o(\bar{\varepsilon}(0)) \quad (4.39)$$

la seconde partie est établie à partir d'une fonction de Lyapunov utilisant l'estimé de l'état $\bar{e} = \lambda^r \Delta_\lambda \hat{e}$ dont l'équation peut se déduire de (4.34) et est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{\bar{e}} &= \lambda A_r \bar{e} - \lambda^r \Delta_\lambda B_r K_c (B_r^T \bar{S} \bar{e}) + \lambda^r \Delta_\lambda B_r \left(g(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - g(\hat{\xi}, z_d) \right) \\ &+ \lambda^r \Delta_\lambda (\psi(\hat{e} + z_d) - \psi(z_d)) - \theta \lambda^r \Delta_\lambda \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e} \\ &= \lambda A_r \bar{e} - \lambda B_r K_c (B_r^T \bar{S} \bar{e}) + \lambda B_r \left(g(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - g(\hat{\xi}, z_d) \right) \\ &+ \lambda^r \Delta_\lambda (\psi(\hat{e} + z_d) - \psi(z_d)) - \theta^{1-q} \lambda^r \Delta_\lambda \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e}\end{aligned}$$

La dernière équation tient compte du fait que $C \Delta_\theta = C$.

Considérons la fonction quadratique suivante : $V_c(\bar{e}) = \lambda^{-2r} \bar{e}^T \bar{S} \bar{e}$, alors

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= 2\lambda^{-2r} \bar{e}^T \bar{S} \dot{\bar{e}} \\ &= 2\lambda^{-2r} \bar{e}^T \bar{S} (\lambda A_r \bar{e} - \lambda B_r K_c (B_r^T \bar{S} \bar{e}) + \lambda B_r (g(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - g(\hat{\xi}, z_d)) \\ &+ \lambda^r \Delta_\lambda (\psi(\hat{e} + z_d) - \psi(z_d)) - \theta^{1-q} \lambda^r \Delta_\lambda \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e})\end{aligned}$$

L'équation (4.16) peut s'écrire comme suit

$$2\bar{e}^T \bar{S} A_r \bar{e} = -\bar{e}^T \bar{S} \bar{e} + \bar{e}^T \bar{S} B_r B_r^T \bar{S} \bar{e}$$

En utilisant l'identité $\Delta_r B_r = \frac{1}{\lambda^{r-1}} B_r$, la dérivée de la fonction V_c est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= -\lambda V_c + \lambda^{-2r+1} \left(\frac{1}{2} w^T w - w^T K_c(w) \right) \\ &+ 2\lambda^{-r} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda B_r (g(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - g(\hat{\xi}, z_d)) \\ &+ 2\lambda^{-r} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\psi(\hat{e} + z_d) - \psi(z_d)) - 2\theta^{1-q} \lambda^{-r} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e}\end{aligned}$$

où $w = B_r^T \bar{S} \bar{e}$. En utilisant l'inégalité (4.17), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\lambda V + 2\lambda^{-r} \bar{e}^T \bar{S} B_r (g(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - g(\hat{\xi}, z_d)) + 2\lambda^{-r} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\psi(\hat{e} + z_d) - \psi(z_d)) \\ &+ \|2\lambda^{-r} \theta \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e}\| \\ &\leq -\lambda V + 2\lambda^{-r} \|\bar{S} \bar{e}\| \|B_r (g(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - g(\hat{\xi}, z_d))\| + 2\lambda^{-r} \|\bar{S} \bar{e}\| \|\Delta_\lambda (\psi(\hat{e} + z_d) - \psi(z_d))\| \\ &+ \|2\lambda^{-r} \theta^{1-q} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e}\|\end{aligned}\tag{4.40}$$

Par ailleurs, le théorème de la valeur moyenne donne :

$$\|\lambda^{-r} \Delta_\lambda (\psi(\hat{e} + z_d) - \psi(z_d))\| \leq \|\Delta_\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}(\zeta_1) \Delta_\lambda^{-1}\| \|\bar{e}\|$$

pour $\zeta_1 \in \vartheta$, et puisque la fonction ψ est Lipschitzienne par rapport à z sur ϑ , la matrice $\frac{\partial \psi}{\partial z}(\zeta_1)$ est bornée sur ϑ . Et compte tenu de la structure de $\psi(x)$, cette matrice est triangulaire inférieure. La matrice $\Delta_\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}(\zeta_1) \Delta_\lambda^{-1}$ ne dépend que des termes en $1/\lambda$ et sa norme est bornée par une constante indépendante de λ pour $\lambda \geq 1$. De la même façon on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda^{-r} \Delta_\lambda B_r \left(g(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - g(\hat{\xi}, z_d) \right)\| &= \|\lambda^{-r} \Delta_\lambda B_r \left(\frac{\partial g}{\partial z}(\xi, \zeta_2) \right) e\| \\ &= \|\Delta_\lambda B_r \frac{\partial g}{\partial z}(\xi, \zeta_2) \Delta_\lambda^{-1} \bar{e}\| \\ &\leq \left\| \frac{\partial g}{\partial z}(\xi, \zeta_2) \right\| \|\bar{e}\| \end{aligned}$$

pour $\zeta_2 \in \vartheta$. Et puisque g est Lipschitzienne en z uniformément en ξ sur ϑ , la norme de la matrice $\frac{\partial g}{\partial z}(\xi, \zeta_2)$ est bornée sur ϑ par une constante (ne dépend pas de λ). Il en résulte que :

$$\begin{aligned} 2\|\bar{S}\bar{e}\| \|\lambda^{-r} \Delta_\lambda \left(\psi(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - \psi(\hat{\xi}, z_d) \right)\| &\leq \gamma_1 V \\ 2\|\bar{S}\bar{e}\| \|\lambda^{-r} \Delta_\lambda \left(g(\hat{\xi}, \hat{e} + z_d) - g(\hat{\xi}, z_d) \right)\| &\leq \gamma_2 V \end{aligned} \quad (4.41)$$

où $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ sont des constantes indépendantes de λ . Et en combinant (4.40) et (4.41), on obtient :

$$\dot{V}_c \leq -(\lambda - \gamma_c) V_c + 2\|\theta^{1-q} \lambda^r \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e}\|$$

avec $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. En tenant compte de l'expression (4.16) et de la matrice $\bar{S}$ et puisque $\Phi(x)$ est globalement lipschitzienne, on a pour $\theta, \lambda \geq 1$:

$$\|\theta^{1-q} \lambda^{-r} \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(\hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \bar{e}\| \leq \rho \lambda_{\min}^2(S) \lambda^{-r} \|\bar{e}\| \|\bar{e}\| \quad (4.42)$$

où $\rho = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}(x) \right\| ; x \in \mathbb{R}^n \right\}$.

En Combinant les inégalités (4.40) et (4.42), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &\leq -(\lambda - \gamma) V_c + \rho \lambda_{\min}^2(S) \theta^q \lambda^r \|\bar{e}\| \|\bar{e}\| \\ &\leq -(\lambda - \gamma) V_c + c \sqrt{V_o} \sqrt{V_c} \end{aligned} \quad (4.43)$$

où $c = \rho \lambda_{\min}(S) \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(S)}{\lambda_{\max}(S)}}$. Il suffit donc de prendre $\lambda > \gamma$ and $\theta > \gamma_o(\lambda)$ pour obtenir la convergence exponentielle de l'estimé de l'erreur de poursuite. On en déduit que :

$$\sqrt{V_c(z(t))} \leq e^{-\left(\frac{\lambda-\gamma}{2}\right)t} \sqrt{V_c(z(0))} + \frac{c}{\theta - \lambda - \gamma_o(\lambda) + \gamma_c} \left(e^{-\left(\frac{\theta-\gamma_o(\lambda)}{2}\right)t} - e^{-\left(\frac{\lambda-\gamma}{2}\right)t} \right)$$

Ainsi se termine la démonstration du théorème.

4.5 Incorporation d'une action intégrale filtrée

On peut incorporer dans la synthèse du système de commande avec retour d'état comme dans le cas de la première classe considérée de systèmes non linéaires, une action intégrale filtrée. On obtient alors le modèle :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}^f = e^f \\ \dot{e}^f = -\Gamma e^f + \Gamma e^1 \end{cases} \quad (4.44)$$

où $e^1 = z^1 - z_1^d$ et $\Gamma = \text{Diag} \{ \gamma_i \}$ est un paramètre de synthèse associé à l'action de filtrage.

Le gain du système de commande avec retour d'état est alors déterminé à partir du modèle de synthèse :

$$\begin{cases} \dot{e}_a = A_a e_a + B_a (u_a - u_d) + B_a (g(\xi, e + z_d) - g(\xi, z_d)) \\ \quad + \psi_a(z_d, e_a) - \psi(z_d, 0) \\ \dot{\xi} = \eta(\xi, e + z_d, u_a) \end{cases} \quad (4.45)$$

avec e_a , A_a , B_a et $\psi_a(z_d, e_a)$ sont définies comme suit :

$$e_a = \begin{pmatrix} \sigma^f \\ e^f \\ e \end{pmatrix}, A_a = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}, B_a = \begin{pmatrix} 0_p \\ 0_p \\ B_r \end{pmatrix}$$

$$\psi_a(z_d, e_a) = \begin{pmatrix} 0_p \\ -\Gamma e^f \\ \psi(e + z_d) \end{pmatrix}$$

La loi de commande avec retour de sortie incorporant une action intégrale filtrée est alors donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(u(\hat{x}), \hat{x}) - \theta \Delta_\theta S^{-1} C^T C (\hat{x} - x) \\ u_a(\hat{e}_a) = u_d + \nu(\hat{e}_a) \\ \quad = \dot{z}_d^q - g(\hat{\xi}, z_d) + \nu_a(\hat{e}_a) \\ \nu_a(\hat{e}_a) = -\Gamma^{-1} K_c (\lambda^{r+2} B_r^T \bar{S}_a \Delta_{a\lambda} \Lambda e_a) \end{cases} \quad (4.46)$$

avec

$$\hat{e}_a = \begin{pmatrix} \sigma^f \\ e^f \\ \hat{e} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

$$\Delta_{a\lambda} = \text{diag} \left(I_p, \frac{1}{\lambda} I_p, \dots, \frac{1}{\lambda^r} I_p, \frac{1}{\lambda^{r+1}} I_p \right) \quad (4.48)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \Gamma & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

où $\bar{S}_a$ est l'unique solution définie positive de l'équation algébrique

$$\bar{S}_a + \bar{S}_a \bar{A}_a + \bar{A}_a^T \bar{S}_a = \bar{S}_a \bar{B}_a \bar{B}_a^T \bar{S}_a \quad (4.50)$$

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de commande à retour d'état combinée avec un observateur à grand gain produisant ainsi un contrôleur à retour de sortie selon le théorème de séparation. Une analyse de convergence basée sur la méthode de Lyapunov a été effectuée pour illustrer cette structure impressionnante. D'un point de vue pratique, une action intégrale filtrée a été incorporée dans la commande proposée pour réaliser un rejet asymptotique des perturbations du type échelon afin d'assurer une insensibilité adéquate au bruit de mesures. Nous nous intéressons dans le chapitre suivant à l'étude de cette structure de commande dans un premier temps en simulation sur le modèle d'un moteur asynchrone dans un repère lié au stator. Nous procédons, dans un deuxième temps, à l'implémentation de cette commande sur un banc d'essais de moteurs asynchrones doté d'un processeur numérique DSpace 1104.

Chapitre 5

Application au moteur asynchrone

5.1 Introduction

Actuellement, le moteur à induction détrône celui à courant continu dans le domaine des entraînements variables. En effet, grâce à sa bonne standardisation, sa simplicité de conception et de son entretien, sa fiabilité et surtout sa robustesse, il porte une solution adéquate pour la plupart des applications industrielles tels que les entraînements à vitesse variable. Avec l'amélioration de l'électronique de puissance et surtout suite au développement des onduleurs à modulation de largeur d'impulsions, de nouvelles techniques de commande sont apparues telles que la commande vectorielle [MBN95], la commande directe en couple [EL99] la commande basée sur la passivité, la commande par backstepping [TC99], la commande par modes glissants [BAK97] et la commande par linéarisation entrée sortie. Toutes ces techniques sont basées sur les principes de commande de la machine en boucle fermée, ce qui nécessite la connaissance en permanence de ses grandeurs caractéristiques à savoir la vitesse, les tensions et les courants statoriques.

La commande sans capteur de la machine asynchrone nécessite la conception de capteurs logiciels pour l'estimation des variables physiques non accessibles à la mesure ou dont la mesure requiert des capteurs relativement coûteux par rapport à l'objectif de l'application envisagée, notamment les flux rotoriques, les résistances et les inductances rotoriques et statoriques. La conception de tels capteurs est principalement basée sur la synthèse d'observateurs ou des méthodes adaptatives permettant l'identification paramétrique et la commande sans capteur de la machine asynchrone.

nous commençons par rappeler le modèle de la machine asynchrone présenté au deuxième chapitre. Ensuite, nous introduisons une transformation non linéaire qui met ce modèle sous une forme appropriée sur laquelle nous pouvons appliquer la technique de commande avec retour de sortie proposée. Nous présentons ensuite deux stratégies de commande avec

et sans capteur de vitesse. Des résultats de simulation sont présentés dans les deux cas. Enfin, nous présentons brièvement un banc expérimental de moteur asynchrone ainsi que des résultats obtenus à travers la validation expérimentale à travers ce banc.

5.2 Modèle de la machine asynchrone

Le modèle de la machine asynchrone dans un repère (α, β) lié au stator est donné par :

$$\begin{cases} \dot{i}_s = KF(\omega)\psi_r - \gamma i_s + \frac{1}{\sigma L_s} u_s \\ \dot{\psi}_r = -F(\omega)\psi_r + \frac{M}{T_r} i_s \\ \dot{\omega} = \frac{pM}{JL_r} i_s^T J_2 \psi_r - \frac{1}{J} \tau_L \end{cases} \quad (5.1)$$

L'objectif de la commande consiste à ajuster le carré de la norme du flux rotorique, c-à-d $\|\psi_r\|^2 = \psi_{r\alpha}^2 + \psi_{r\beta}^2$ à une valeur constante désirée tandis que la vitesse du moteur ω suit un profil donné. Soit $z^1 = \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix}$ où $z_1^1 = \omega$ et $z_2^1 = \|\psi_r\|^2$ le vecteur des variables à commander et soit $z_d^1 = \begin{pmatrix} z_{d1}^1 \\ z_{d2}^1 \end{pmatrix}$ la trajectoire désirée correspondante. Avec ces notations, l'objectif de la commande consiste à définir l'entrée de commande admissible de manière à réaliser :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z_1^1(t) - z_{d1}^1(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2^1(t) - z_{d2}^1(t)) = 0$$

5.3 Formulation de la commande

Nous allons, maintenant introduire un changement de coordonnées qui transformera le système (5.1) sous une forme particulière sur laquelle nous appliquerons la loi de commande proposée. En effet, soit

$$\Phi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5, x = \begin{pmatrix} i_s \\ \psi_r \\ \omega \end{pmatrix} \mapsto z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \xi \end{pmatrix} \text{ où } z^1 = \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix}, z^2 = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{cases} z_1^1 = w \\ z_2^1 = \|\psi_r\|^2 = \psi_{r\alpha}^2 + \psi_{r\beta}^2 \\ z_1^2 = \frac{pM}{L_r} i_s^T J_2 \psi_r \\ z_2^2 = i_s^T \psi_r \\ \xi = \arctan\left(\frac{\psi_{r\beta}}{\psi_{r\alpha}}\right) \end{cases} \quad (5.2)$$

Le système (5.1) peut être écrit dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1^1 = \frac{1}{J} z_1^2 - \frac{1}{J} \tau_L \\ \dot{z}_2^1 = 2 \frac{M}{T_r} z_2^2 - \frac{2}{T_r} z_2^1 \\ \dot{z}_1^2 = -\frac{Kp^2M}{L_r} z_1^1 z_2^1 - \left(\gamma + \frac{1}{T_r}\right) z_1^2 - \frac{p^2M}{L_r} z_1^1 z_2^2 - \frac{pM}{\sigma L_s L_r} \sqrt{z_2^1} (u_1 \sin(\xi) - u_2 \cos(\xi)) \\ \dot{z}_2^2 = \frac{K}{T_r} z_2^1 + \frac{L_r}{M} z_1^1 z_2^2 - \left(\gamma + \frac{1}{T_r}\right) z_2^2 + \frac{M}{T_r} \frac{1}{z_2^1} ((z_2^2)^2 + \left(\frac{L_r}{pM} z_1^2\right)^2) \\ \quad + \frac{1}{\sigma L_s} \sqrt{z_2^1} (u_1 \cos(\xi) + u_2 \sin(\xi)) \\ \dot{\xi} = pz_1^1 + \frac{L_r}{pT_r} \frac{z_1^2}{z_2^1} \end{cases} \quad (5.3)$$

Sous une forme condensée, il peut être également écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = A_1 z^2 + \Psi^1(\tau_L(t), z^1) \\ \dot{z}^2 = b(\xi, z)u + g(z) \\ \dot{\xi} = pz_1^1 + \frac{L_r}{pT_r} \frac{z_1^2}{z_2^1} \end{cases} \quad (5.4)$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{J} & 0 \\ 0 & 2\frac{M}{T_r} \end{pmatrix}, \quad \Psi^1(\tau_L(t), z^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{J} \tau_L \\ -\frac{2}{T_r} z_2^1 \end{pmatrix} \\ b(\xi, z) &= \frac{1}{\sigma L_s} \sqrt{z_2^1} \begin{pmatrix} -\frac{pM}{L_r} \sin(\xi) & \frac{pM}{L_r} \cos(\xi) \\ \cos(\xi) & \sin(\xi) \end{pmatrix} \\ g(z) &= \begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \end{pmatrix} \text{ avec} \\ g_1(z) &= -\frac{Kp^2M}{L_r} z_1^1 z_2^1 - \left(\gamma + \frac{1}{T_r}\right) z_1^2 - \frac{p^2M}{L_r} z_1^1 z_2^2 \\ g_2(z) &= \frac{2K}{T_r} z_2^1 + \frac{L_r}{M} z_1^1 z_2^2 - \left(\gamma + \frac{1}{T_r}\right) z_2^2 + \frac{M}{T_r} \frac{1}{z_2^1} ((z_2^2)^2 + \left(\frac{L_r}{pM} z_1^2\right)^2) \end{aligned}$$

Afin d'appliquer la loi de commande à grand gain proposée, on définit une entrée auxiliaire

$$\mu = b(\xi, z) u \quad (5.5)$$

Alors que, l'entrée réelle appliquée au système est donnée par :

$$u = b(\xi, z)^{-1} \mu \quad (5.6)$$

Soit $z_d = \begin{pmatrix} z_d^1 \\ z_d^2 \end{pmatrix}$ où $z_d^2 = \begin{pmatrix} z_{d1}^2 \\ z_{d2}^2 \end{pmatrix}$ est la trajectoire de z correspondant à la trajectoire de référence $z_{d1}^1(t)$ et soit u_d l'entrée associée c-à-d l'entrée qui ramène $z(t)$ à l'entrée désirée $z_d(t)$. Selon le système (5.4), z_d^2 et u_d peuvent être calculées comme suit :

$$\begin{aligned} z_d^2 &= A_1^{-1} (\dot{z}_d^1 - \Psi^1(\tau_L(t), z_d^1)) \\ b(\xi, z_d) u_d &= \dot{z}_d^2 - g(z_d) \end{aligned}$$

Notons que $\dot{z}_d^2$ peut être exprimée en fonction de z_d^1 , $\dot{z}_d^1$, $\ddot{z}_d^1$ et $\dot{\tau}_L$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \dot{z}_d^2 &= A_1^{-1} \left(\ddot{z}_d^1 - \frac{\partial \Psi^1}{\partial \tau_L}(\tau_L, z_d^1) \dot{\tau}_L - \frac{\partial \Psi^1}{\partial z^1}(\tau_L, z_d^1) \dot{z}_d^1 \right) \\ &= A_1^{-1} \left(\ddot{z}_d^1 + \begin{pmatrix} \frac{\dot{\tau}_L}{2 \frac{J}{T_r}} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} J \ddot{z}_{d1}^1 + \dot{\tau}_L \\ \frac{T_r}{2M} \ddot{z}_{d2}^1 + \frac{1}{M} \dot{z}_{d2}^1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le système (5.4) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} 0_p & A_1 \\ 0_p & 0_p \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0_p \\ I_p \end{pmatrix} (\mu + g(z)) + \begin{pmatrix} \Psi^1(\tau_L(t), z^1) \\ 0_p \end{pmatrix} \\ \dot{\xi} = p z_1^1 + \frac{L_r}{p T_r} \frac{z_1^2}{z_2^1} \end{cases} \quad (5.8)$$

Il est clair que le système (5.8) est sous la forme (4.5). En effet, nous avons ici :

$$p = 2, r = 2, A_r = \begin{pmatrix} 0_p & A_1 \\ 0_p & 0_p \end{pmatrix}, B_r = \begin{pmatrix} 0_p \\ I_p \end{pmatrix}, \psi(z) = \begin{pmatrix} \Psi^1(\tau_L(t), z^1) \\ 0_p \end{pmatrix}$$

Par conséquent, une commande de type (4.14) peut être utilisée pour la commande simultanée de la vitesse et du carré de norme des flux rotoriques.

La loi de commande avec retour d'état incorporant une action intégrale filtrée est donnée dans ce cas par :

$$\begin{cases} u = (b(\xi, z))^{-1} (b(\xi, z_d)u_d + \nu(e_a)) \\ \quad = (b(\xi, e + z_d))^{-1} (b(\xi, z_d)u_d + \nu(e_a)) \\ \quad = (b(\xi, e + z_d))^{-1} (\dot{z}_d^2 - g(z_d) + \nu(e_a)) \\ \nu(e_a) = -(\Gamma A_1)^{-1} B^T K_c (\lambda^4 \bar{S} \Delta_\lambda \Lambda e_a) \end{cases} \quad (5.9)$$

où

$$\begin{aligned} e_a &= \begin{pmatrix} \sigma^f \\ e^f \\ e \end{pmatrix}; \quad e = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix}; \\ e^1 &= z^1 - z_d^1; \quad e^2 = z^2 - z_d^2 \\ \Gamma &= \text{diag}\left(\frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}\right); \quad \Lambda = \text{diag}(I_2, I_2, \Gamma, \Gamma A_1) \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_2 \end{pmatrix}; \quad \Delta_\lambda = \text{diag}\left(I_2, \frac{1}{\lambda} I_2, \frac{1}{\lambda^2} I_2, \frac{1}{\lambda^3} I_2\right) \end{aligned}$$

Les états e^f et σ^f sont définis par :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}^f = e^f \\ \dot{e}^f = -\Gamma e^f + \Gamma e^1 \end{cases} \quad (5.10)$$

$\bar{S}_a$ est une matrice symétrique définie positive et elle est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$\bar{S}_a + \bar{S}_a \bar{A} + \bar{A}^T \bar{S}_a = \bar{S}_a \bar{B} \bar{B}^T \bar{S}_a \quad (5.11)$$

et $K_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, une fonction bornée qui satisfait la condition suivante :

$$e_a^T B B^T K_c(e_a) \geq \frac{1}{2} e_a^T B B^T e_a \quad \forall e_a \in \Omega \quad (5.12)$$

où Ω est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite, nous utiliserons $K_c(e_a) = \tanh(e_a)$ où $\tanh$ signifie la fonction tangente hyperbolique. Nous pouvons montrer que l'entrée $\nu(e_a)$ est donnée par

$$\nu(e_a) = -(\Gamma A_1)^{-1} \tanh(\lambda^4(\sigma^f + \frac{6}{\lambda}e^f + \frac{6}{\lambda^2}\Gamma e^1 + \frac{4}{\lambda^3}\Gamma A_1 e^2))$$

L'entrée $u_a(e_a)$ sera donnée dans le système de coordonnées originales. En effet, on peut montrer que :

$$b(\xi, z) = \frac{1}{\sigma L_s} \begin{pmatrix} -\frac{pM}{L_r}\psi_{r\beta} & \frac{pM}{L_r}\psi_{r\alpha} \\ \psi_{r\alpha} & \psi_{r\beta} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Remarque 5.3.1. *la matrice $b(\xi, z)$ est inversible si et seulement si la norme du flux rotorique ne s'annule pas. Cette singularité apparaît au démarrage. Il faut donc démarrer le moteur en boucle ouverte et commuter lorsque la norme du flux a atteint une valeur acceptable afin d'éviter la divergence de la loi de commande.*

Maintenant, il suffit de remplacer dans l'expression de l'entrée (équation (5.9)), $b(\xi, z)$ et z par leurs expressions respectives dans le système de coordonnées originales.

Cependant, puisque la loi de commande dépend des états non mesurés, de tels états doivent être estimés. En effet, nous nous focaliserons dans la prochaine section sur deux situations. Dans la première, les courants statoriques et la vitesse rotorique sont mesurées. Dans la seconde, seulement les courants statoriques sont disponibles. Dans chacune de ces situations nous employerons respectivement les observateurs (2.29) et (2.33) afin d'estimer les flux rotoriques, le couple de charge et sa dérivée par rapport au temps dans la première situation, auxquels est ajoutée l'estimée de la vitesse rotorique dans la deuxième situation.

5.4 Commande à grand gain du moteur asynchrone

Nous présentons dans cette section les stratégies de commande à grand gain à base des observateurs développés au chapitre 2.

5.4.1 Commande à grand gain avec capteur de vitesse

Notre objectif dans cette partie est de commander la vitesse du moteur $\omega = z_1^1$ et le carré de la norme du flux rotorique $z_2^1 = \|\psi_r\|^2 = \psi_{r\alpha}^2 + \psi_{r\beta}^2$.

La loi de commande avec retour de sortie est donnée dans ce cas par :

$$u_a(\hat{e}_a) = \left(b(\hat{\xi}, \hat{z})\right)^{-1} (\dot{z}_d^2 - g(z_d) + \nu_a(\hat{e}_a)) \quad (5.14)$$

avec

$$\nu_a(\hat{e}_a) = -(\Gamma A_1)^{-1} \tanh \left(\lambda^4 \left(\sigma^f + \frac{6}{\lambda} e^f + \frac{6}{\lambda^2} \Gamma \hat{e}^1 + \frac{4}{\lambda^3} \Gamma \hat{e}^2 \right) \right) \quad (5.15)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{e}_a &= \begin{pmatrix} \sigma^f \\ e^f \\ \hat{e} \end{pmatrix}; \quad \hat{e} = \begin{pmatrix} \hat{e}^1 \\ \hat{e}^2 \end{pmatrix}; \\ \hat{e}^1 &= \hat{z}^1 - z_d^1; \quad \hat{e}^2 = \hat{z}^2 - z_d^2 \end{aligned}$$

avec $\hat{z}^1 = \begin{pmatrix} z_1^1 \\ \hat{z}_2^1 \end{pmatrix}$ et $\hat{z}^2 = \begin{pmatrix} \hat{z}_1^2 \\ \hat{z}_2^2 \end{pmatrix}$

Les états non mesurés du modèle (5.3) sont remplacés par leurs estimés comme suit :

$$\begin{cases} z_1^1 = w \\ \hat{z}_2^1 = \|\hat{\psi}_r\|^2 = \hat{\psi}_{r\alpha}^2 + \hat{\psi}_{r\beta}^2 \\ \hat{z}_1^2 = \frac{pM}{L_r} i_s^T J_2 \hat{\psi}_r \\ \hat{z}_2^2 = i_s^T \hat{\psi}_r \\ \hat{\xi} = \arctan\left(\frac{\hat{\psi}_{r\beta}}{\hat{\psi}_{r\alpha}}\right) \end{cases} \quad (5.16)$$

où $\hat{\psi}_r = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{r\alpha} \\ \hat{\psi}_{r\beta} \end{pmatrix}$

Les estimés $\hat{\psi}_{r\alpha}$ et $\hat{\psi}_{r\beta}$ sont fournis par l'observateur (2.26).

Les états e^f et σ^f sont définis par :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}^f = e^f \\ \dot{e}^f = -\Gamma e^f + \Gamma \hat{e}^1 \end{cases} \quad (5.17)$$

L'entrée $u_a(e_a)$ sera donnée dans le système de coordonnées originales. En effet, on peut montrer que :

$$b(\hat{\xi}, \hat{z}) = \frac{1}{\sigma L_s} \begin{pmatrix} -\frac{pM}{L_r} \hat{\psi}_{r\beta} & \frac{pM}{L_r} \hat{\psi}_{r\alpha} \\ \hat{\psi}_{r\alpha} & \hat{\psi}_{r\beta} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Etant donné que la loi de commande proposée nécessite la connaissance de τ_{Lp} et τ_{Lp} , l'observateur (2.27) est utilisé pour donner leurs estimées respectives $\hat{\tau}_{Lp}$ et $\hat{\tau}_{Lp}$. On obtient :

$$\dot{z}_d^2 = \begin{pmatrix} J\ddot{z}_{d1}^1 + \hat{\tau}_{Lp} \\ \frac{T_r}{2M}\ddot{z}_{d2}^1 + \frac{1}{M}\dot{z}_{d2}^1 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

$$z_d^2 = A_1^{-1} (\dot{z}_d^1 - \Psi^1(\hat{\tau}_L(t), z_d^1))$$

$$\Psi^1(\hat{\tau}_L(t), \hat{z}_d^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{J}\hat{\tau}_L \\ -\frac{2}{T_r}\hat{z}_d^1 \end{pmatrix}$$

5.4.2 Commande à grand gain sans capteur de vitesse

A présent, nous désirons nous dispenser de l'usage d'un capteur de vitesse. Dans ce cas, la vitesse ainsi que les états non mesurables, seront remplacés par leur estimés. Les équations des observateurs sans capteur de vitesse sont décrites au chapitre 2 par les équations (2.33) et (2.36).

La loi de commande est donnée par l'équation (5.14) en remplaçant z_1^1 par son estimé $\hat{z}_1^1$ fourni par l'observateur (2.33).

Les flux rotoriques estimés $\hat{\psi}_{r\alpha}$ et $\hat{\psi}_{r\beta}$ ainsi que les estimés du couple de charge et de sa dérivée par rapport au temps $\hat{\tau}_L$ et $\hat{\tau}_{Lp}$ sont donnés respectivement par les observateurs (2.33) et (2.36).

5.5 Résultats de simulation

Les performances du système de commande proposé sont illustrées via un problème de poursuite d'une machine asynchrone de puissance nominale 3 kW. La trajectoire de la vitesse de référence est donnée sur la figure (5.1) et la norme du flux de référence est constante et égale à 0.5Wb .

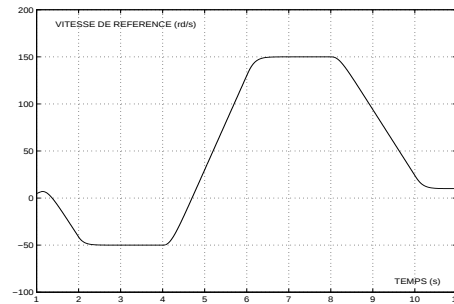


FIG. 5.1 – Vitesse de référence désirée

Les valeurs des paramètres utilisées pour la simulation sont données dans le tableau 5.1 :

Puissance nominale	P_N	3	KW
résistance statorique	R_s	3.9	Ω
résistance rotorique	R_r	3	Ω
Inductance mutuelle	M	0.083	H
Inductance statorique	L_s	0.13	H
Inductance rotorique	L_r	0.069	H
Inertie de l'ensemble tournant	J	0.22	Kgm^2
Nombre de paire de pôles	p	2	

TAB. 5.1 – Paramètres de la machine du laboratoire de GREYC Caen

5.5.1 Résultats de simulation avec capteur de vitesse

Afin de tester la simulation dans des conditions semblables aux conditions pratiques, la mesure de la vitesse rotorique a été perturbée par un bruit additif de moyenne nulle et de variance égale à 0.01. Nous avons reporté dans la figure 5.2 l'erreur de poursuite de ω et l'évolution de $\|\psi_r\|^2$. L'évolution de l'entrée est donné dans la figure 5.3. Notons que l'erreur de poursuite de la vitesse rotorique est moins de 1.5% de la vitesse nominale tandis que celle de la norme du flux est moins de 6.5% de la valeur nominale. De tels résultats sont tout à fait acceptables, en particulier en présence des variations brusques du couple de charge. Les performances de l'observateur sont illustrées dans la figure 5.4 où l'erreur d'estimation de $\|\psi_r\|^2$ et une comparaison entre le couple de charge inconnu τ_L et son estimé sont données. Les valeurs des paramètres de synthèse de l'observateur et de la commande utilisées dans la simulation sont données dans le tableau 5.2.

θ_1	θ_2	τ_1	τ_2	λ
50	50	5	5	5

TAB. 5.2 – Paramètres adoptées pour la conception de l'observateur et de la commande avec capteur

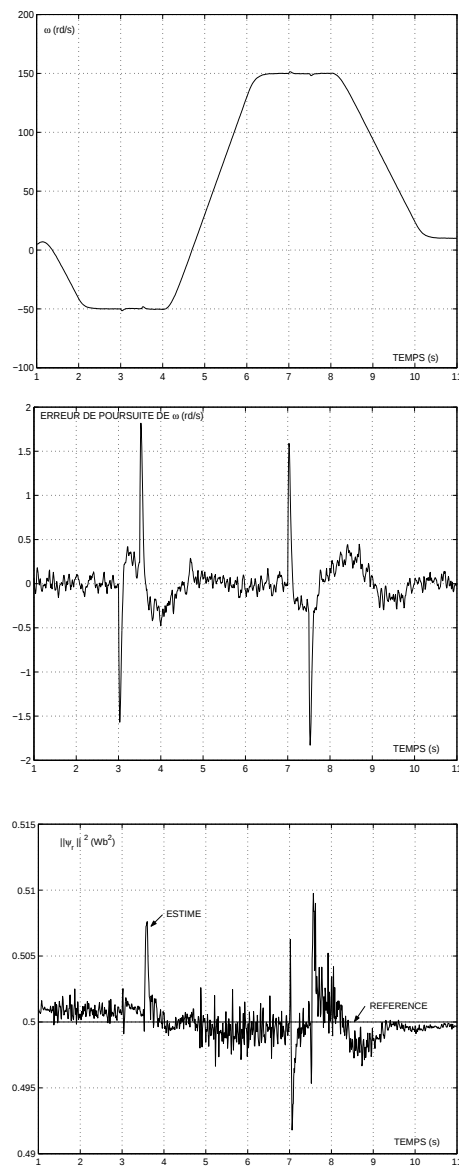


FIG. 5.2 – I. Evolution de ω , erreur de poursuite de ω et évolution de la norme du flux rotorique

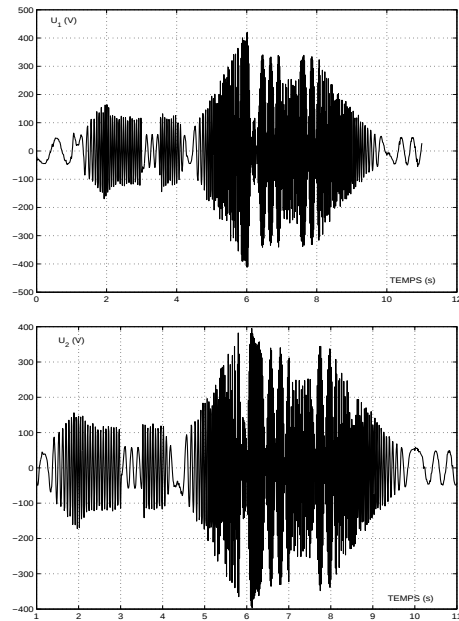
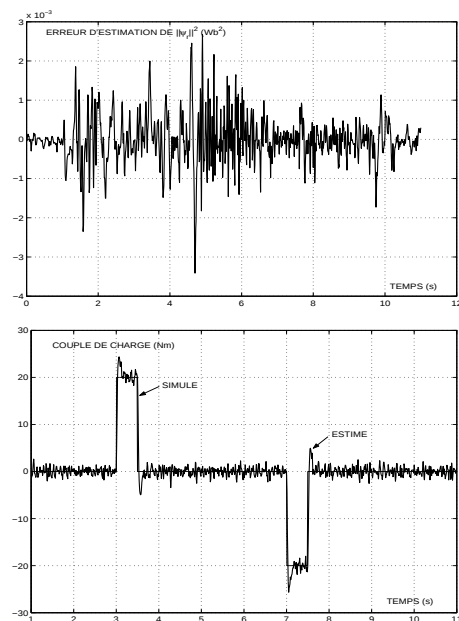


FIG. 5.3 – I.Evolution des tensions statoriques

FIG. 5.4 – I.L'erreur d'estimation de $\|\psi_r\|^2$ et l'estimation de τ_L .

5.5.2 Résultats de simulation sans capteur de vitesse

Les résultats de simulation sont représentés dans les figures 5.5 à 5.7. Les résultats obtenus sont tout à fait semblables à ceux obtenus avec les mesures de vitesse. En effet, la valeur maximale de l'erreur de poursuite, qui correspond à la vitesse rotorique est moins

de 1.5% de la valeur maximale de la vitesse tandis que celle du flux est maintenant un peu plus grande qu'avant puisqu'elle atteint 10% de la valeur nominale de la norme du flux. Notons que les tensions statoriques obtenues sont très semblables à celles obtenues avec la mesure de vitesse.

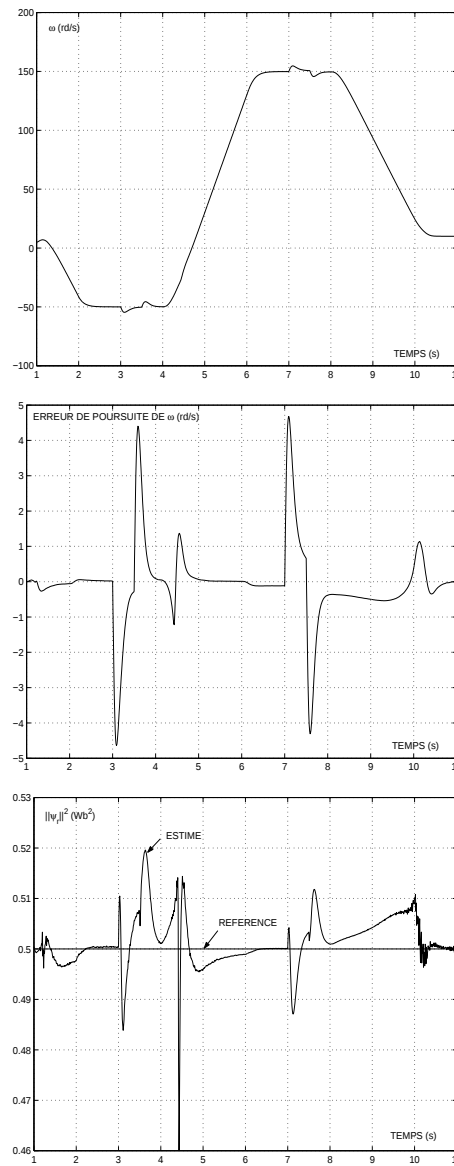


FIG. 5.5 – II. Evolution de ω , de l'erreur de poursuite de ω et évolution de la norme de flux rotoriques

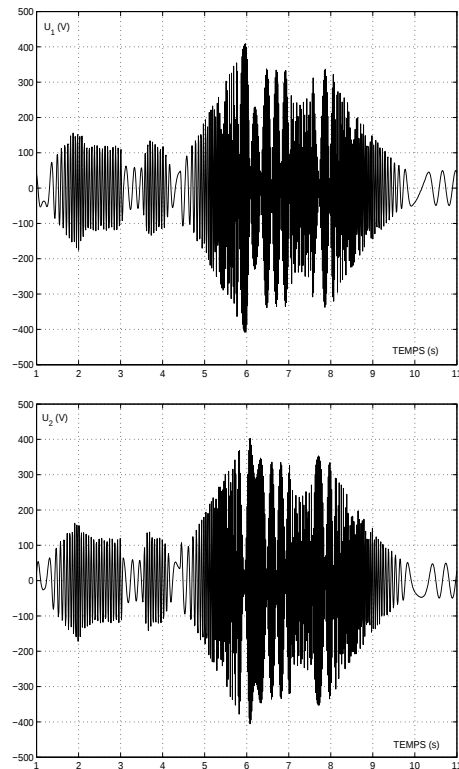


FIG. 5.6 – II. L'évolution des tensions statoriques

Les performances de l'observateur sont illustrées dans la figure 5.7 où les erreurs d'estimation sur $\|\psi\|^2$ et ω aussi bien qu'une comparaison entre le couple de charge inconnu τ_L et son estimé sont présentées. Les valeurs des paramètres de synthèse des observateurs et de la loi de commande utilisées dans la simulation sont données dans le tableau 5.3.

θ_1	θ_2	τ_1	τ_2	λ
500	100	5	5	5

TAB. 5.3 – Paramètres de l'observateur et de la commande sans capteur

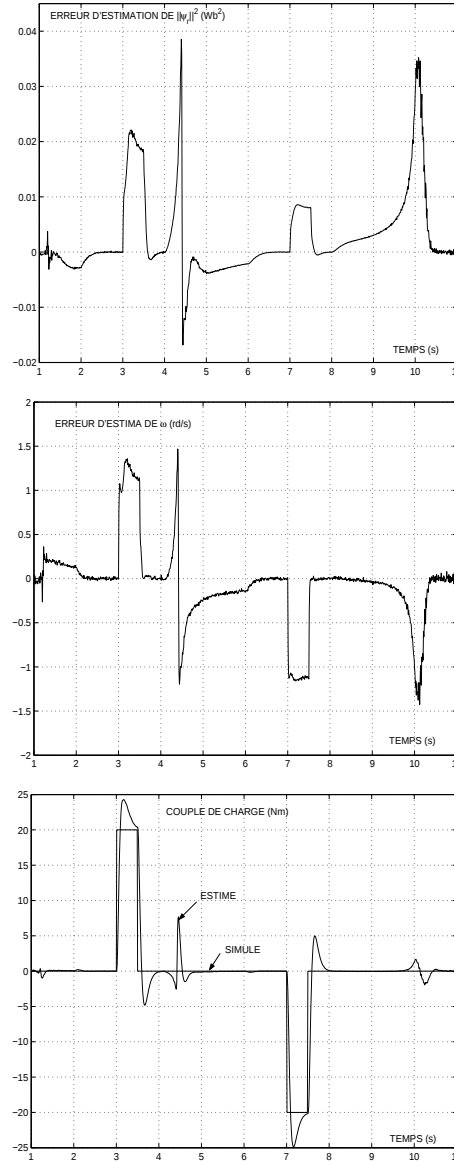


FIG. 5.7 – II. Erreur d'estimation de $\|\psi_r\|^2$, ω et l'estimation de τ_L .

5.6 Validation sur une plate-forme expérimentale d'essais de moteurs asynchrones

Dans cette section nous décrivons brièvement le banc d'essais expérimental tout en donnant les paramètres mesurés de la machine et présentant les fonctionnalités de la carte DSpace 1104. Nous donnons et discutons, ensuite, les résultats de l'expérimentation.

5.6.1 Introduction

Dans la littérature, la commande de la vitesse rotorique d'un moteur asynchrone avec et sans capteur de vitesse a été étudiée, en expérimentation en utilisant différents techniques. En effet, certains chercheurs ont adopté la technique de la commande vectorielle basée sur les modes glissants [Gha05], d'autres se sont orientés vers l'utilisation des techniques de backstepping et de la commande basée sur la passivité en supposant que les paramètres de la machine sont exactement connus et que le couple de charge est connu et borné [SMO⁺02].

Dans notre travail nous nous intéressons à l'étude en expérimentation, de la commande simultanée du carré de la norme du flux rotorique et de la vitesse rotoriques d'un moteur asynchrone avec et sans capteur de vitesse. Dans ce cas, nous nous basons sur la commande à retour de sortie en procédant à l'identification des paramètres de la machine par les essais classiques tels que l'essai à vide et l'essai à rotor bloqué. Notre méthode présente principalement le double avantage : commander sans orientation de flux et de n'avoir besoin d'aucune information sur le couple de charge.

L'expérimentation, solution adéquate pour la validation des algorithmes développés et testés en simulation, est réalisée sur une plate forme expérimentale dotée d'une carte de commande en temps réel type DSpace 1104 permettant le pilotage d'un moteur asynchrone.

5.6.2 Présentation du banc d'essai

Le banc expérimental, dont la structure générale est illustrée par la figure (5.8), est formé d'un moteur asynchrone triphasé à cage d'écureuil de type LEYBOLD de caractéristiques nominales : 1 KW, 230/400V, 4.6 /2.7A et 1410tr/mn. Ce moteur est alimenté par un auto-transformateur triphasé par l'intermédiaire d'un onduleur de type Semikron commandé par une carte DSpace1104. Un frein à poudre de type LEYBOLD73254 couplé à une dynamo tachymétrique dont la constante de proportionnalité est 0.001065V/tr/mn, représente une charge variable du moteur. La commande de ce frein à poudre peut être effectuée manuellement ou d'une façon automatique par l'intermédiaire de son unité de commande type LEYBOLD. L'acquisition des différentes grandeurs statoriques est effectuée avec des capteurs à effet Hall. La figure (5.9) représente une vue générale du site expérimental.

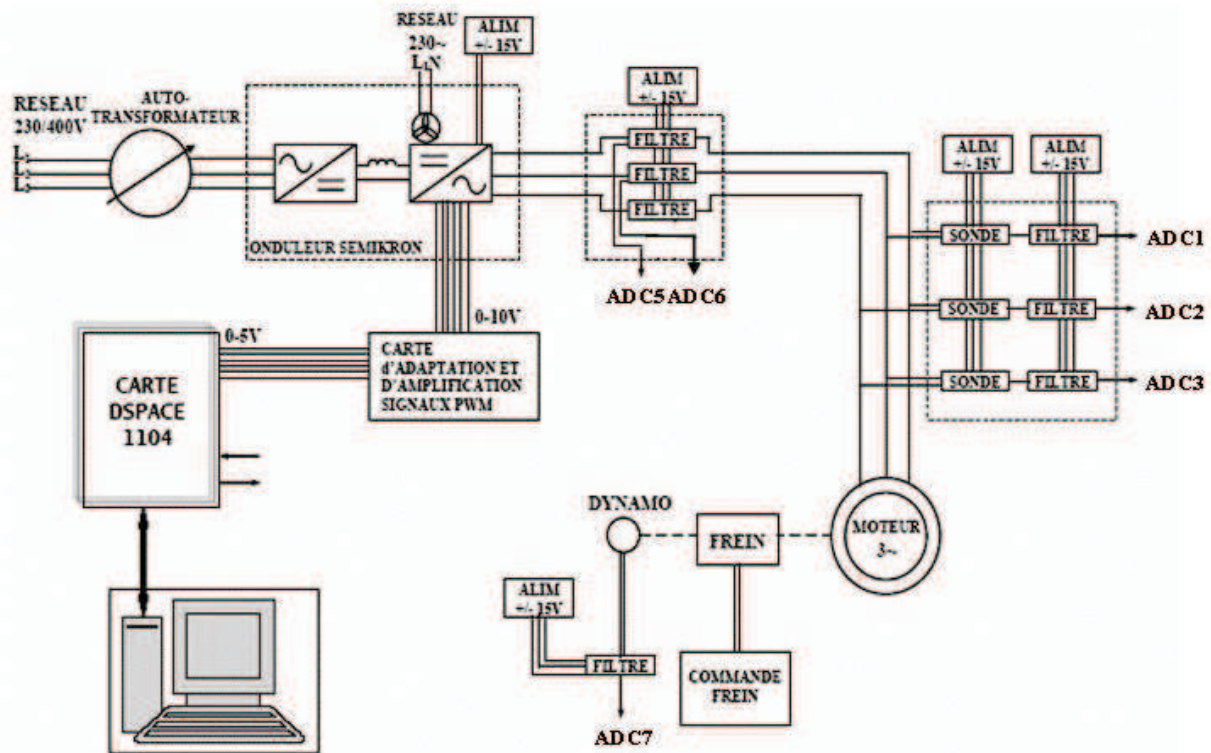


FIG. 5.8 – Synoptique générale de la plate forme expérimentale



FIG. 5.9 – Vue générale du site expérimental

Les valeurs des paramètres de la machine mesurées par les essais mentionnés précédemment et utilisées lors de la validation expérimentale sont reproduites dans le tableau 5.4 :

Puissance nominale	P_N	1	KW
résistance statorique	R_s	10.6	Ω
résistance rotorique	R_r	2.88	Ω
Inductance mutuelle	M	0.29	H
Inductance statorique	L_s	0.3	H
Inductance rotorique	L_r	0.3	H
Inertie de l'ensemble tournant	J	0.015	Kgm^2
Nombre de paire de pôles	p	2	

TAB. 5.4 – Paramètres de la machine du l'UCPI à l'ENI-Sfax

5.6.3 Carte Dspace 1104

Cette carte nous permet de contrôler en temps réel le moteur asynchrone. En effet, elle effectue, par l'intermédiaire de l'ordinateur, l'acquisition et la visualisation des différentes grandeurs de mesure tels que les tensions et les courants statoriques et génère les signaux PWM qui commandent l'onduleur. La carte a été développée afin de réunir les besoins types du contrôle moderne. Le contrôleur de la carte est doté de plus de puissance et de plus d'entrées-sorties que tout autre système. Pour éviter toute contrainte de développement, la carte DS1104 est munie d'un processeur dont la rapidité de calcul est de 250MHz. Elle comporte des entrées-sorties numériques-analogiques. L'interfaçage entre la carte DS1104 et les différents capteurs est effectué par l'intermédiaire du connecteur panel CP1104. Ainsi, tous les éléments utilisés dans la chaîne d'acquisition peuvent être connectés et déconnectés individuellement sans soudage. Cela simplifie la construction du système, les essais et éventuellement la maintenance.

5.7 Résultats expérimentaux

Nous présentons dans cette section les résultats expérimentaux de la commande à grand gain de la machine asynchrone. On s'intéresse à la commande à retour de sortie de la vitesse rotorique et du carré de la norme du flux d'une machine asynchrone fonctionnant à vide. Cette commande est implémentée sur le banc d'essais dans les deux cas avec et sans capteur de vitesse.

En fait, la commande de la machine est effectuée pour un fonctionnement à vide à cause d'une contrainte technologique au niveau du banc d'essais où l'arbre du moteur n'est accessible que d'un seul coté lequel a été réservé au montage du codeur incrémental 1024 points permettant la mesure de la vitesse rotorique.

Dans cette étude, des protocoles expérimentaux, à savoir les profils de la vitesse et des flux rotoriques, reportés dans dans la figure (5.10), ont été conçus afin de valider en temps réel les lois de commande développées selon des contraintes variées sur le banc (prise en compte des retards dus à l'onduleur, au temps de calcul, aux filtres anti-repliement, etc...) et qui soient susceptibles de représenter les conditions réelles de fonctionnement.

Les détails concernant les aspects à considérer lors de la mise en oeuvre des lois de com-

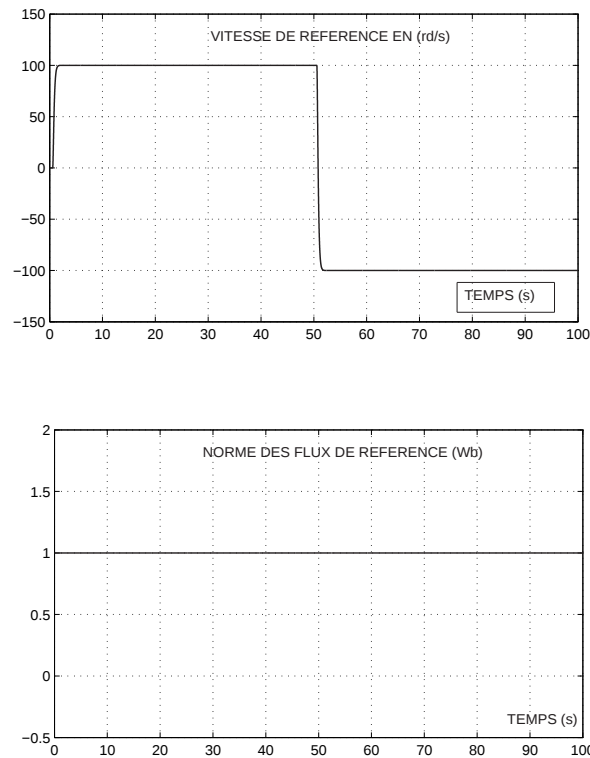


FIG. 5.10 – I. L'évolution des références de la vitesse rotorique et de la norme de flux

mande sur le banc d'essai, notamment, la prise en compte des retards et la discrétisation des algorithmes, ainsi que la fréquence MLI utilisée sont largement discutés dans [Sal02].

5.7.1 Commande avec capteur de vitesse

Dans cette section, nous abordons la mise en oeuvre de la loi de commande à retour de sortie avec capteur de vitesse sur un banc d'essais expérimental. La loi de commande considérée et synthétisée dans la section (5.4.1). Dans cette structure de commande, les flux, le couple de charge et sa dérivé par rapport au temps sont estimés respectivement

par les observateurs développés dans la section (2.3.3).

Dans la commande avec retour de sortie avec capteur de vitesse, nous avons injecté à la machine une consigne en échelon de vitesse avec un changement de sens de rotation de la machine à l'instant $t = 50s$. Les résultats obtenus lors de l'implémentation de l'algorithme de commande sur le processeur numérique de signal DSpace 1104 pour la poursuite en temps réel de la consigne de vitesse sont donnés dans la figure (5.11). En effet, dans cette figure, nous avons comparé d'une part la vitesse du moteur au profil de vitesse imposé et d'autre part le carrée de la norme des flux statoriques à sa consigne ($1Wb^2$).

En comparaison avec le profil de vitesse de référence injecté à la machine, le profil de la vitesse rotorique mesurée suit parfaitement la consigne et ce même à l'instant du changement du sens de rotation de la machine. Les courbes d'évolution montrent que la commande proposée est robuste. En effet la vitesse commandée arrive à suivre parfaitement les profils de commande imposés et ce même au moment de la variation de la vitesse de 200% (de $100rd/s$ à $-100rd/s$). Concernant l'évolution de la norme du flux rotorique estimée, elle suit aussi de manière satisfaisante le profil de la norme de flux de référence imposée à la machine. cependant , il est à noter qu'une brève variation de la norme estimée survient à l'instant du changement brusque de sens de rotation de la machine.

Dans la pratique, l'implémentation de l'algorithme de commande avec retour de sortie nécessite que la norme de flux soit non nulle. En fait et compte tenu de l'étude analytique développée au chapitre (5) (voir remarque (5.3)), une singularité apparaît nécessairement au démarrage car le flux rotorique de la machine est absolument nul à ce moment.

Pour palier à ce problème, nous avons démarré le moteur en boucle ouverte tout en imposant une consigne du carré de la norme du flux à laquelle on a superposé une valeur de flux constante de $0,6Wb$. Il est à signaler qu'un switcher à deux positions de toolbox de Matlab-Simulink a été incorporé dans la structure de commande et a été programmé pour commuter vers la position boucle fermée au bout d'un temps de $10s$ comme l'illustre la figure (5.11).

La figure (5.12) montre l'évaluation de l'erreur d'estimation de la vitesse rotorique qui s'avère satisfaisante.

Nous avons présenté dans la figure (5.13), les évolutions des flux rotoriques $\psi_{r\alpha}$ et $\psi_{r\beta}$ qui restent bien compris dans un intervalle $[-1; 1]$. Un zoom est appliqué à ces deux courbes sur un intervalle de temps $[20\ s ; 20.1\ s]$, comme le montre la figure (5.14). Les tracés montrent que ces deux flux $\psi_{r\alpha}$ et $\psi_{r\beta}$ sont en quadrature de phase et de forme parfaite-

ment sinusoïdale.

Nous avons reproduit dans la table (5.5) les valeurs des paramètres adoptées lors de l'implémentation.

θ_1	θ_2	τ_1	τ_2	λ	K_c	K_0
1000	200	100	100	5	5	5

TAB. 5.5 – Paramètres de l'observateur et de la commande avec capteur

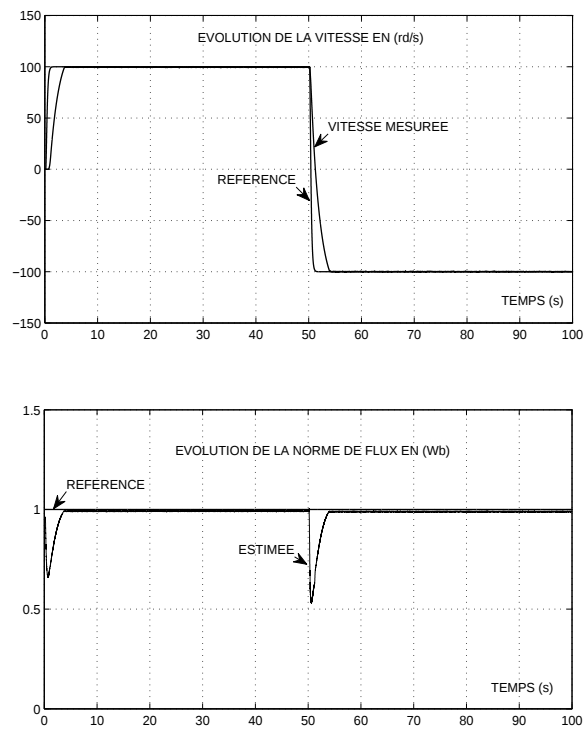


FIG. 5.11 – I. L'évolution de la vitesse rotorique et de la norme de flux

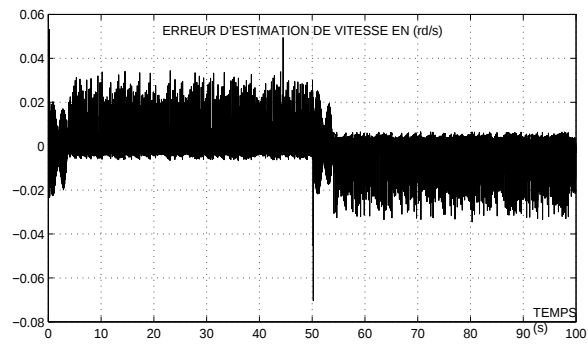
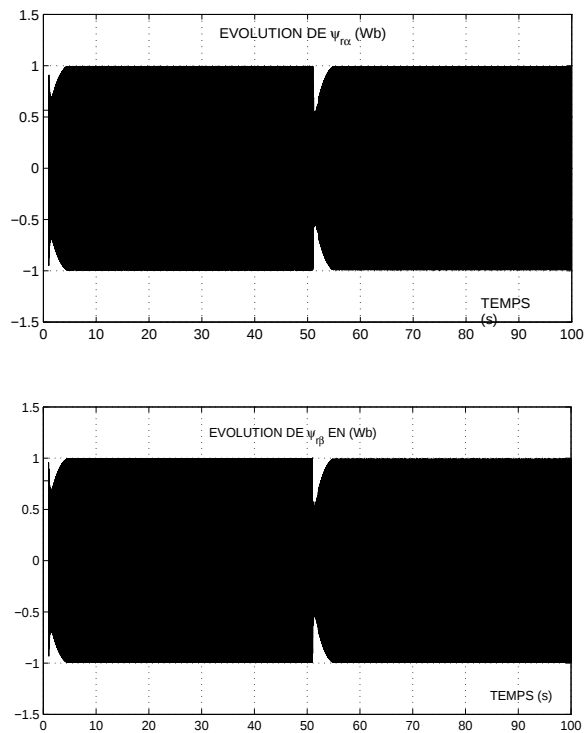


FIG. 5.12 – I. L'évaluation de l'erreur d'estimation de la vitesse rotorique

FIG. 5.13 – I. L'évolution des flux rotoriques $\psi_{s\alpha}$ et $\psi_{s\beta}$

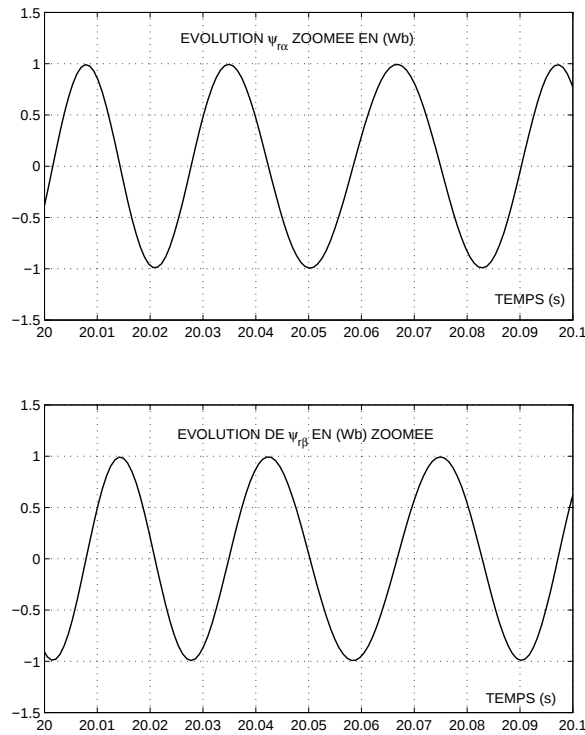


FIG. 5.14 – I. L'évolution des flux rotoriques $\psi_{s\alpha}$ et $\psi_{s\beta}$ zoomés

Dans le premier essai (cf. figure 5.14), la constante de temps τ_f du filtre numérique passe-bas du premier ordre a été fixée à 1s. Ce filtre est inséré dans la chaîne d'acquisition de la vitesse rotorique. La fréquence des signaux PWM issus de l'onduleur est choisie à $f_{PWM} = 2,5KHz$.

Dans un second essai, la constante de temps τ_f du filtre numérique passe-bas du premier ordre a été fixée à 0,1s et la fréquence des signaux PWM issus de l'onduleur est choisie à $f_{PWM} = 5KHz$. Les résultats reproduits dans les figures 5.15 et 5.16, montrent une nette amélioration de la commande en comparaison avec ceux de la figure (5.11).

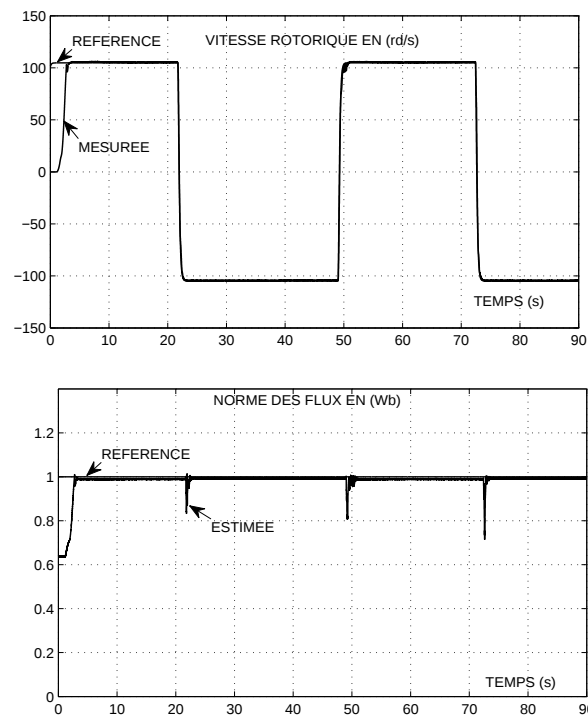


FIG. 5.15 – I. L'évolution de la vitesse rotorique et de la norme de flux pour $\tau_f = 0,1$ et $f_{PWM} = 5KHz$

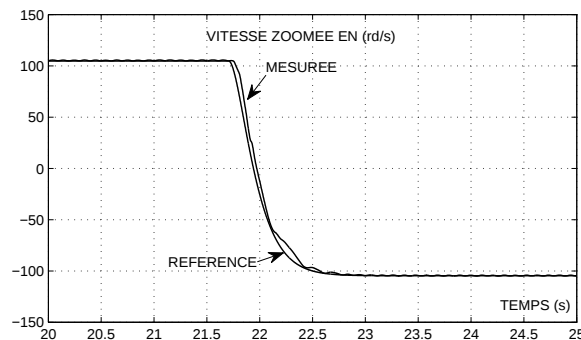


FIG. 5.16 – I. L'évaluation de la vitesse rotorique zoomée pour $\tau_f = 0,1$ et $f_{PWM} = 5KHz$

5.7.2 Commande sans capteur de vitesse

Dans ce cas les flux, la vitesse, le couple de charge et sa dérivé par rapport au temps sont estimés par des observateurs de type grand gain développés dans la section (2.3.4). Il est à préciser que dans la structure de commande proposée seuls les courants statoriques sont

mesurés.

Pour la validation de l'algorithme de commande avec retour de sortie sans capteur de vitesse, nous avons procédé dans la pratique de la même manière que précédemment. Nous avons reproduit dans les figures 5.17, 5.18, 5.19 et 5.20, les résultats obtenus qui s'avèrent satisfaisants. Cependant, nous notons l'existence d'un léger écart en régime permanent entre les profils de sorties que ce soit pour la vitesse rotorique ou la norme du flux comme l'illustre la figure (5.17). En fait cet écart pourrait être justifié par le fait que la fréquence utilisée des signaux PWM lors de cette essai est $f_{PWM} = 2,5KHz$.

Nous avons reporté dans la table 5.6 les valeurs des paramètres adoptées dans l'implémentation de la commande.

θ_2	θ_3	τ_1	τ_2	λ	K_c	K_0
2000	85	100	100	5	5	5

TAB. 5.6 – Paramètres de l'observateur et de la commande sans capteur

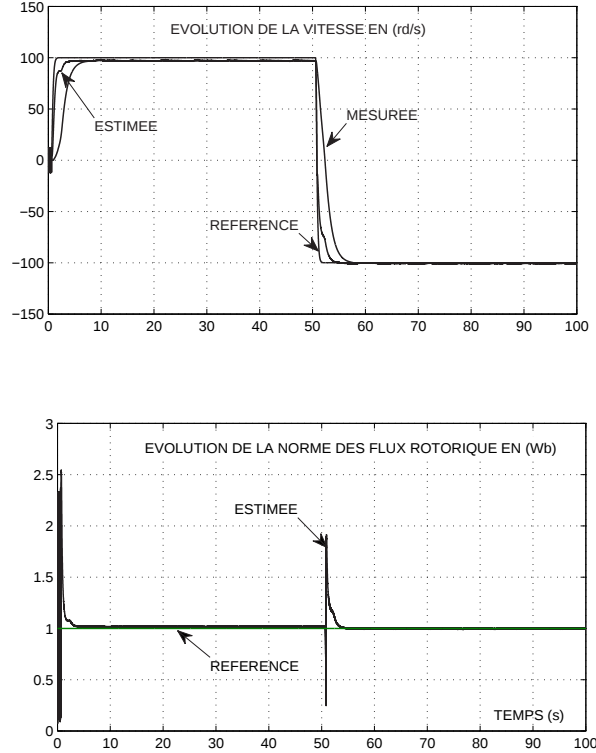


FIG. 5.17 – II.L'évolution de la vitesse rotorique et de la norme de flux

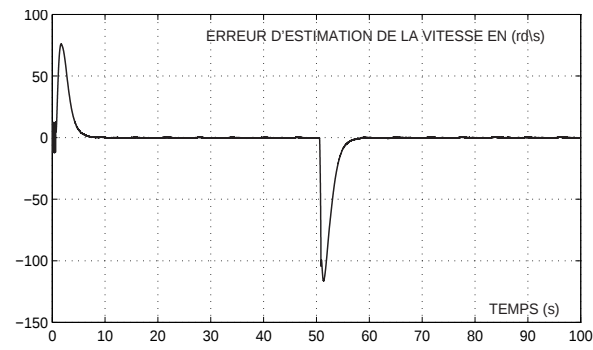
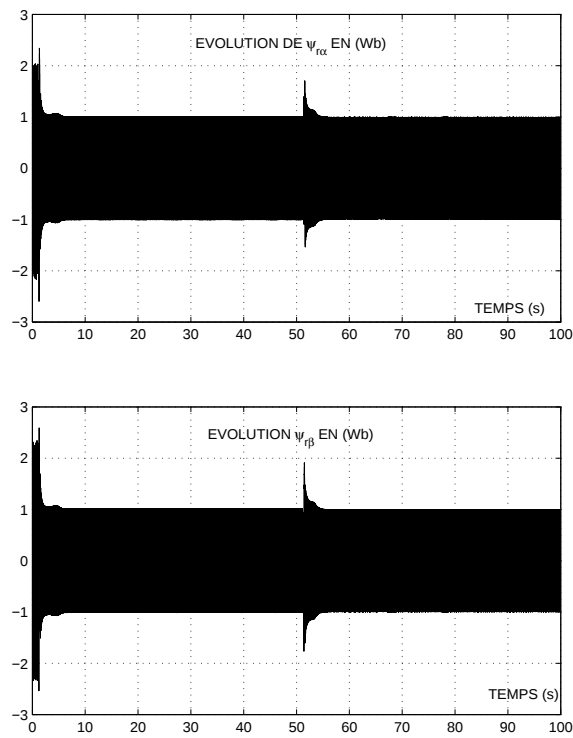


FIG. 5.18 – II. L'évaluation de l'erreur d'estimation de la vitesse rotorique

FIG. 5.19 – II. L'évolution des flux rotoriques $\psi_{s\alpha}$ et $\psi_{s\beta}$

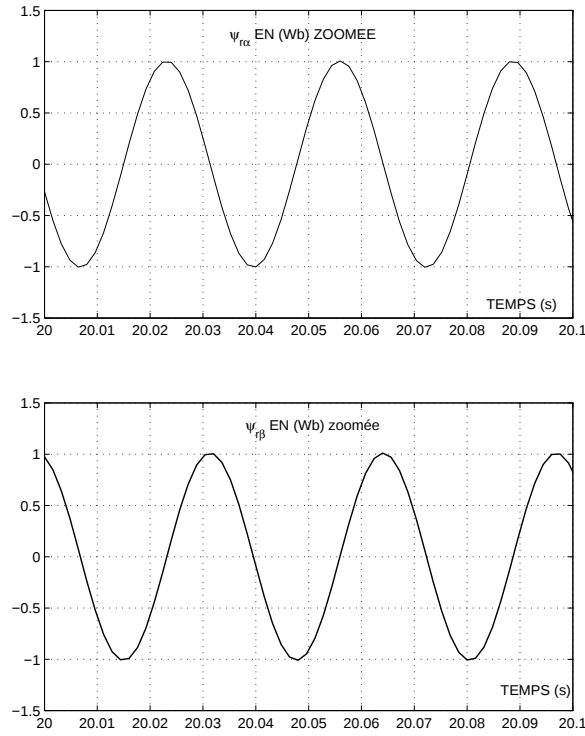


FIG. 5.20 – II. L'évolution des flux rotoriques $\psi_{s\alpha}$ et $\psi_{s\beta}$ zoomés

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude d'un contrôleur à grand gain avec retour de sortie dans le but de la poursuite de vitesse et la régulation des flux rotoriques d'une machine asynchrone. Deux situations ont été envisagées selon que la vitesse est disponible à la mesure ou non. Dans chacune de ces deux situations, deux observateurs à grand gain ont été utilisés dans le but d'estimer et fournir les états non mesurables qui sont nécessaires à la commande. Les performances de la structure de commande proposée ont été illustrées en simulation et les résultats obtenus se sont montrés satisfaisants, et ce même en présence d'un couple de charge variable.

Dans le but de consolider notre travail, nous avons étudié en expérimentation les performances de ces structures de commande sur un banc d'essais de machines asynchrones doté d'un processeur numérique de signal DSpace 1104. Les résultats obtenus ont été présentés et se sont avérés satisfaisants.

Chapitre 6

Conclusion générale

Dans cette contribution, nous nous sommes intéressés à la modélisation, l'observation et la commande avec et sans capteur de vitesse d'une machine asynchrone. Pour ce faire, nous avons tout d'abord présenté un modèle non linéaire de la machine asynchrone sous forme de représentation d'état dans un repère fixe lié au stator. Ce modèle a été utilisé pour la synthèse d'un observateur de type grand pour l'estimation des flux rotoriques, du couple de charge et de sa dérivée par rapport au temps à partir des courants statoriques et de la vitesse du moteur. Le cas où seules les mesures des courants statoriques sont disponibles a aussi été considéré et un observateur approprié a aussi été présenté. Il permet d'estimer les mêmes grandeurs que celles considérées par le premier observateur tout en délivrant une estimation de la vitesse du moteur.

Ensuite, nous sommes intéressé au problème de commande du moteur. Pour ce faire, nous avons tout d'abord présenté une loi de commande avec retour de sortie pour une classe de systèmes non linéaires uniformément observables et commandables sans dynamique de zéros où la sortie de commande correspond à la sortie physique du système (sortie de l'observateur). Le caractère grand gain a permis de satisfaire les propriétés requises par le théorème de séparation et garantir une régulation globale dans le cas de perturbations d'état et/ou de sortie du type impulsif. Par ailleurs, il a été montré que l'on peut incorporer relativement facilement une action intégrale dans la synthèse du système de commande pour réaliser un rejet asymptotique de perturbations d'état et/ou de sortie du type échelon.

La synthèse de la loi proposée a ensuite été étendue à une classe plus large de systèmes non linéaires uniformément observables et commandables exhibant des zéros. De plus, la sortie de commande n'est pas nécessairement la sortie physique du système mais une fonction de variables d'état non nécessairement mesurées. Nous avons montré que, modulo une hypothèse classique de minimum de phase satisfaite par le système, toutes les

propriétés établies de la loi de commande restent valides.

Enfin, outre des exemples académiques, la loi de commande proposée a été validée en simulation sur le modèle du moteur puis expérimentalement sur un banc d'essais de moteurs asynchrones monté autour d'un processeur numérique de signal DSpace 1104.

Nous travaillons actuellement pour étendre la synthèse de la loi proposée à des classes plus larges de systèmes non linéaires. Une possibilité d'extension consiste à considérer les cas où les sorties de commande admettent des degrés relatifs différents. Dans ce cas, plusieurs blocs pouvant être exhibés, chacun étant associé à un groupe de sorties ayant le même degré relatif. Le problème serait alors d'étudier les couplages non linéaires entre les différents blocs et d'en déterminer ceux pour lesquels la synthèse de lois de commande du type présenté dans cette thèse est possible.

Une autre extension possible consiste à étudier les systèmes non affines en la commande. L'idée serait de déterminer des commandes dynamiques : la loi de commande n'est plus explicitée mais elle serait régie par une équation différentielle appropriée.

Enfin, nous continuerons à travailler sur la validation expérimentale en envisageant une étude comparative de la loi que nous proposons avec d'autres lois (de type backstepping par exemple).

Bibliographie

- [ASR04] S. K. Agrawal and H. Sira-Ramirez. *Differentially Flat Systems*. Taylor and Francis Group, 2004.
- [BAK97] Elias G. Strangas Bader Aloliwi and Hassan K. Khalil. Robust speed control of induction motors. In *American Control Conference*, pages 1287–1291, Albuquerque, New Mexico, 1997.
- [BDB03] T. Boukhobza, M. Djemai, and J. P. Barbot. Implicit triangular observer form dedicated to a sliding mode observer for systems with unknown inputs. *Asian Journal of Control*, 33(4) :513–527, 2003.
- [BRAT99] A. Benchaib, A. Rachid, E. Audrezet, and M. Tadjine. Real-time sliding-mode observer and control of an induction motor. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 46(1) :128–138, 1999.
- [BYHG01] K. Busawon, H. Yahoui, H. Hammouri, and G. Grellet. A nonlinear observer for induction motors. *The European Physical Journal. Applied Physics*, 15 :181–188, 2001.
- [CH95] J. P. Caron and J. P. Hautier. *Modélisation et commande de la machine asynchrone*. Technip, 1995. Paris.
- [DCGS99] C. Darengosse, P. Chevrel, I. Souleiman Guelle, and S. Siala. A LMI-based observer for induction motor. In *Proc. of ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [Dhi02] Rachid Dhifaoui. La commande des machines électriques : vers une modélisation qui facilite la technologie. In *Troisième Séminaire Tunisien d'Automatique*, pages 61–90, Monastir, Tunisie, 2002.
- [DLO01] E. Delaleau, J. P. Louis., and R. Ortega. Modeling and control of inductions motors. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci*, 11(1) :105–129, 2001.
- [dW92] C. C. de Wit. *Modélisation et contrôle vectoriel et DTC*. Germes, 1992. Paris.
- [EL99] B. Oliwi E.G.Strangas, H.K.Khalil and L. Lauhinger. A robust torque controller for induction motors without rotor position sensor : Analysis and experimental results. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 14(4) :1448–1458, 1999.

- [FK83] M. Fliess and I. Kupka. A finiteness criterion for nonlinear input-output differential systems. *SIAM Journal on Control and Optimisation*, 21 :721–728, 1983.
- [FLMR95] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples. *Int. J. of Control*, 61 :1327–1361, 1995.
- [FLMR99] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, and P. Rouchon. A lie-backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-44 :922–937, 1999.
- [FMR04] M. Farza, M. M’Saad, and L. Rossignol. Observer design for a class of MIMO nonlinear systems. *Automatica*, 40 :135–143, 2004.
- [FMS05] M. Farza, M. M’Saad, and M. Sekher. A set of observers for a class of nonlinear systems. In *Proc. of the IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
- [GB81] J. P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-26 :922–926, 1981.
- [Gha05] M. Ghanes. *Observation et commande de la machine asynchrone sans capteur mécanique*. PhD thesis, Ecole centrale de Nantes, France, 2005.
- [GHO92] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems - application to bioreactors. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-37 :875–880, 1992.
- [GK94] J. P. Gauthier and I. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. on Control and Optimisation*, 32 :975–994, 1994.
- [GK01] J. P. Gauthier and I. Kupka. *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2001.
- [HF03] H. Hammouri and M. Farza. Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. *ESAIM J. on Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 :353–370, 2003.
- [Hol96] J. Holtz. *Sensorless Control of AC Motor Drives*, chapter Methods for speed sensorless control of AC drives. Piscataway, NJ, 1996.
- [IKh01] F. IKhouane. *Commande adaptative non-linéaire : Synthèse robuste et analyse transitoire*. Phd thesis, Université de Caen/Basse-Normandie, France, 2001.
- [Isi95] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, 3rd edition, 1995.
- [Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Germes, 2002. Paris.

- [KKC03] P. Krishnamurthy, F. Khorramy, and R. S. Chandra. High-gain-based observer and backstepping controller for generalized output-feedback canonical form. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48(12) :2277–2284, 2003.
- [KKK95] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons, 1995.
- [LDDR00] D. Lubineau, J.M. Dion, L. Dugard, and D. Roye. Design of an advanced nonlinear controller for induction motor and experimental validation on an industrial benchmark. *The European Physical Journal Applied Physics*, 9 :165–175, 2000.
- [Leo01] W. Leonard. *Control of electrical drives*. Springer-Verlag, 2001. 3rd edition.
- [Liu07] F. Liu. *Synthèse d’observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires*. Phd thesis, Université de Caen/Basse-Normandie, France, 2007.
- [MBN95] John Chiasson Marc Bodson and Robert T. Novotnak. Nonlinear speed observer for high-performance induction motor control. *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS*, 42(4) :337–343, 1995.
- [MK96] N. A. Mahmoud and H. Khalil. Asymptotic regulation of minimum phase nonlinear systems using output feedback. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-41(10) :1402–1412, 1996.
- [MR00] Ph. Martin and P. Rouchon. Two simple flux observers for induction motors. *International Journal of adaptive control and signal processing*, 14(2/3) :171–176, 2000.
- [Mut99] L. Mutrel. *Le moteur asynchrone régimes statique et dynamique*. Ellipses, 1999. Paris.
- [Nij81] H. Nijmeijer. Observability of a class of nonlinear systems : a geometric approach. *Ricerche di Automatica*, 12 :50–68, 1981.
- [NvdS91] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [OLNSR98] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems : Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Springer-Verlag, 1998. London.
- [Per97] Robert Perret. Etat de l’art de la commande à flux orienté. In *l’école d’automatique de grenoble*, pages 1–55, Grenoble, France, 1997.
- [Pra03] L. Praly. Asymptotic stabilisation via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48(6) :1103–1108, 2003.
- [Raj98] R. Rajamani. Observers for lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, 43(3) :397–401, 1998.

- [RFM03] L. Rossignol, M. Farza, and M. M'Saad. Nonlinear observation strategies for induction motors. In *IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, Madison, Wisconsin, USA, 2003.
- [Sal02] R. A. Salas. *Développement de lois de commandes avec observateurs pour machine asynchrone*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, January 2002.
- [SJ77] B. Saint-Jean. *Electrtechnique et machines électriques*. Eyrolles et Lidec, 1977.
- [SJK97] R. Sepulchre, M. Jankovič, and P. Kokotović. *Constructive Nonlinear Control*. Springer, 1997.
- [SK96] S. Seshagiri and H. Khalil. Robust output feedback regulation of minimum-phase nonlinear systems using conditional integrators. *Automatica*, 41 :43–54, 1996.
- [SMO⁺02] R. A. Salas, E. Mendes, R. Ortega, J. M. Dion, and L. Dugard. Comparaison expérimentale de lois de commande non linéaires sur un benchmark de machine asynchrone. In *Proc. of Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Rome, Italy, 2002.
- [TC99] Hualin Tan and Jie Chang. Adaptive backstepping control of induction motor with uncertainties. In *Proc. of American Control Conference*, San-Diego.California, 1999.
- [TH93] H. Tajima and Y. Hori. Speed-sensorless field-orientation control of the induction machine. *IEEE Trans. Ind. Applicat*, 29(1) :175–180, 1993.
- [VS88] G.C. Verghese and S.R. Sanders. Observers for flux estimation in induction machines. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35(1) :85–94, 1988.

TITRE :

Modélisation, observation et commande de la machine asynchrone

Résumé. Les travaux développés dans ce rapport traitent de la modélisation, de l'observation et de commande avec et sans capteur de vitesse de la machine asynchrone. Tout d'abord, un observateur non linéaire de type grand gain a été synthétisé en vue de l'estimation de quelques grandeurs électriques et mécaniques de la machine. Ensuite, nous proposons une nouvelle loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur du type grand gain pour deux classes de systèmes non linéaires uniformément observables et commandables incluant le modèle du moteur asynchrone. La synthèse de cette loi de commande, du type grand gain, exploite le concept de dualité observabilité/commande. Dans le but de réaliser une compensation robuste des perturbations d'état et de sortie de type échelon, une action intégrale filtrée y a été incorporée. Enfin, la loi de commande proposée a été validée en simulation sur le modèle du moteur puis expérimentalement sur un banc d'essais de moteurs asynchrones monté autour d'un processeur numérique de signal DSpace 1104.

Mots clés : : Systèmes non linéaires, observateur à grand gain, Commande avec retour d'état, Modes glissants, Poursuite, Action intégrale filtrée, moteur asynchrone.

TITLE :

Modelling, observation and control of the induction motor

Astract. The work developed in this report deals with the modelling, observation and control with and without speed sensor of the induction. At First, a nonlinear high gain observer is synthesized for the estimation of some electrical and mechanical variables of the machine. Then, one proposes a new control law with state feedback incorporating a high gain observer for two classes of nonlinear controllable and uniformly observable systems that include the model of the induction motor. The synthesis of this high gain control law exploits the concept of duality between control and observation. Furthermore, it was shown that a filtered integral action can be simply incorporated into the control design to carry out a robust compensation of step like disturbances while reducing appropriately the noise control system sensitivity. Finally, the proposed control law was validated in simulation on the model of the induction motor and experimentally on a test bench motors mounted on a digital signal processor DSpace 1104.

keywords : nonlinear systems, high gain observer, state feedback, Sliding modes, Tracking, filtered integral action, induction machine.