HAL
open science

Synthèse d'observateurs adaptatifs pour les systèmes non linéaires

Tarek Maatoug

To cite this version:

Tarek Maatoug. Synthèse d'observateurs adaptatifs pour les systèmes non linéaires. Automatique. Université de Caen; Université de Sfax - Tunisie, 2009. Français. NNT : . tel-01058802

HAL Id: tel-01058802

https://theses.hal.science/tel-01058802v1

Submitted on 28 Aug 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE–NORMANDIE

U.F.R. : SCIENCES CAEN

ECOLE DOCTORALE : SIMEM

Co-tutelle de thèse

entre

l'Université de Caen Basse-Normandie (*France*)

et

l'Université de Sfax (*Tunisie*)

(Arrêté du 06 janvier 2005)

THÈSE

présentée par

Tarak MAATOUG

et soutenue

le 09 mai 2009

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE–NORMANDIE

Spécialité : Automatique, robotique

(Arrêté du 07 août 2006)

TITRE : SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS ADAPTATIFS POUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

MEMBRES du JURY

M.	**R. BEN ABDENNOUR**	Pr. à l'ENIG de Gabès (Rapporteur)
M.	**M. FARZA**	Pr. à l'Université de Caen (Directeur de thèse)
M.	**M. KAMOUN**	Pr. à l'ENIS de Sfax (Directeur de thèse)
M.	**D. MEHDI**	Pr. à l'Université de Poitiers (Rapporteur)
M.	**M. M'SAAD**	Pr. à l'ENSICAEN (Examinateur)
M.	**A. TOUMI**	Pr. à l'ENIS de Sfax (Examinateur)

À mon père et ma mère,

À mon épouse, pour son indéfectible soutien,

À mes anges, Mohammed et Malek,

À tous ceux qui me sont chers.

Avant-Propos

Liste des publications de Tarak MAATOUG

Revues Internationales

1. T. Maâtoug, M. Farza, M. M'Saad, Y. Kouba and M. Kamoun (2008), "Adaptive observer design for a class of nonlinear systems with coupled structures", International Journal on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering (IJSTA journal), Vol.2(1), Août 2008.
2. M. Farza, M. M'Saad, T. Maâtoug and M. Kamoun (2009), "Adaptive Observers for Nonlinearly Parameterized Class of Nonlinear Systems", Automatica, accepeted.

Conférences Internationales

1. T. Maâtoug, M. Farza, M. M'saad, and T. Ahmed-Ali (2008)," Adaptive output feedback high gain controller for a class of nonlinear systems" , Proceedings 6th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices, SSD'09., Djerba, MArch 23-26, 2009.
2. T. Maâtoug, M. Farza, M. M'saad, Y. Kouba et and M. Kamoun (2008)," Adaptive output feedback controller for a class of uncertain nonlinear systems" , Proceedings 17th IFAC World Congress (IFAC 2008), Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
3. T. Maâtoug, Y. Kouba, M. M'saad et M. Farza (2007), "Adaptive observer design for a class of MIMO nonlinear systems", Proceedings of the Forth IEEE

International Conference on Systems, Signals and Devices (SSD'07), Hammamet, Tunisie, Mars 2007.

4. M. Farza, M. M'saad, T. Maâtoug and Y. Kouba (2005), "A set adaptive observers for a class of MIMO nonlinear systems ", Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12-15, 2005.

5. T. Maâtoug, Y. Kouba, M. Farza et M. M'saad (2005), "An adaptive observer design for a class of MIMO nonlinear systems and its application to induction motor", Proceedings of the Third IEEE International Conference on Systems, Signals and Devices (SSD'05), Sousse, Tunisie, Mars 2005.

Notations, symboles et abréviations

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{R}^+$	ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}^n$	espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^{n\times m}$	ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
I_n	matrice identité de dimension $n \times n$ (appropriées)
$0_{n\times m}$	matrice nulle de dimension $n \times m$ (appropriées)
$[a, b]$	intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b
$]a, b[$	intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b
t	variable temporelle
$[a, b[$	intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b
$\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}$	dérivée temporelle de l'état x
C^ω	ensemble des fonctions continûment différentiables ω fois dans $\mathbb{R}^n$
$X > 0$ (≥ 0)	X définie positive (semi définie positive)
$X < 0$ (≤ 0)	X définie négative (semi définie négative)
$\dim(X)$	dimension de la matrice X
$(\cdot)^T$	transposée du bloc symétrique
$\triangleq$	égal par définition
$\lambda_{min}(P)$	la plus petite valeur propre de la matrice carrée P
$\lambda_{max}(P)$	la plus grande valeur propre de la matrice carrée P
$\|\cdot\|$	norme Euclidienne
$\mid a \mid$	valeur absolue du nombre réel a
ρ	vecteur des paramètres inconnus
θ	paramètre de réglage du gain de l'observateur
λ	paramètre de réglage du gain de la loi de commande

Acronymes

SNL	Système non linéaire (Non Linear System)
SISO	Mono-entrée Mono-sortie (Single Input Single Output)
MISO	Multi-entrée Mono-sortie (Multiple Input Single Output)
MIMO	Entrées multiples sorties multiples (Multiple Input Multiple Output)
LVT	Linéaire variant dans le temps
EDO	Equation différentielle ordinaire
TVM	Théorème de la valeur moyenne

Table des matières

Table des matières **11**

1 Introduction Générale **15**

2 Observateurs à grand gain pour des classes SNL MIMO uniformément observables **19**

2.1 Introduction 19

2.2 Forme canonique d'observabilité 20

2.2.1 Quelques notations, rappels et résultats préliminaires 22

2.2.1.1 TVM pour les fonctions vectorielles 22

2.2.1.2 Equation Algébrique de Lyapunov 23

2.2.1.3 Quelques identités et inégalités 24

2.2.2 Equation de l'observateur 26

2.2.3 Analyse de convergence 26

2.3 Classe particulière de SNL MIMO uniformément observable 28

2.4 Observateurs adaptatifs pour des systèmes MIMO 34

2.5 Conclusion 36

3 Synthèse d'observateurs adaptatifs pour des classes SNL MIMO uniformément observables **37**

3.1 Introduction 37

3.2 Synthèse d'observateur à partir d'une forme canonique d'observabilité uniforme 38

3.2.1 Formulation du problème 38

3.2.2 Équations de l'observateur 40

3.2.3 Analyse de la convergence 43

3.2.4 Quelques observateurs particuliers 48
3.2.4.1 Observateur adaptatif à grand gain 48
3.2.4.2 Observateur adaptatif de type mode glissant 48
3.3 Exemple d'illustration 49
3.3.1 Résultats de simulation 50
3.4 Observateur adaptatif pour une classe particulière de systèmes non linéaires 54
3.4.1 Synthèse de l'observateur 55
3.4.2 Exemples d'illustration 58
3.4.2.1 Exemple académique 58
3.4.2.2 Application de l'observateur à la machine asynchrone 59
3.5 Conclusion 61

4 Synthèse d'observateurs adaptatifs pour des classes de SNL MIMO dont les paramètres inconnus apparaissent dans la sortie 65
4.1 Introduction 65
4.2 Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une première forme de classes de SNL 66
4.2.1 Classe de systèmes considérée 66
4.2.2 Synthèse de l'observateur 67
4.2.3 Analyse de la convergence 68
4.3 Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une deuxième classes de SNL 70
4.3.1 Classe de systèmes considérée 71
4.3.2 Synthèse de l'observateur 71
4.3.3 Analyse de la convergence 72
4.4 Exemple d'illustration 74
4.4.1 Résultats de simulation 75
4.5 Conclusion 77

5 Observateurs adaptatifs pour une classe SNL avec une paramétrisation non linéaire 79
5.1 Introduction 79
5.2 Classe de systèmes considérée 80
5.3 Synthèse de l'observateur 82

5.3.1 Analyse de la convergence 83
5.4 Exemples 85
5.4.1 Exemple 1 : Estimation d'état et des paramètres cinétiques d'un bioreacteur 85
5.4.2 Exemple 2 : Identification d'un moteur à fuel 89
5.5 Conclusion 92

6 Commande adaptive avec retour de sortie pour une classe MIMO de systèmes non linéaires 93
6.1 Introduction 93
6.2 Formulation du problème 95
6.3 Commande avec retour d'état 98
6.4 Commande adaptative avec retour de sortie 103
6.5 Incorporation d'une action de filtrage 110
6.6 Exemple d'illustration 112
6.7 Conclusion 114

7 Conclusion Générale 117

Bibliographie 120

Table des figures

3.1 Courbes d'évolution des sorties mesurées (x_1 et x_2) entachées de bruit de mesure. 51

3.2 Courbes d'évolution des états x_3 et x_4. 51

3.3 Courbes d'évolution des paramètres estimés et de leurs valeurs réelles respectives avec des valeurs de $\Omega_\theta = diag(1, \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta})$ (courbes à gauche) et $\Omega_\theta = I_3$ (courbes à droite) pour $K(C\tilde{x}) = K_{HG}(C\tilde{x})$). 52

3.4 Courbes d'évolution des paramètres estimés et de leurs valeurs réelles respectives avec $K(C\tilde{x}) = K_{HG}(C\tilde{x})$ (courbes à gauche) et $K(C\tilde{x}) = k_1 tanh(k_0 C\tilde{x})$ (courbes à droite) pour une valeur de $\Omega_\theta = I_3$. 53

3.5 Comparaison des valeurs estimées des paramètres avec leur vraie valeur 59

3.6 Erreurs d'estimation sur les états x_1 et x_2 59

3.7 Courbes d'évolution de $\tilde{\Phi}_{r\alpha}$ et $\tilde{\Phi}_{r\beta}$ 61

3.8 Courbes d'évolutions des paramètres estimés et de leurs valeurs réelles respectives 62

4.1 Courbes d'évolution des erreurs d'estimation $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ et $\tilde{x}_4$ 76

4.2 Courbes d'évolution des paramètres estimés et de leurs valeurs réelles respectives 76

5.1 Temps d'évolution du taux de dilution 87

5.2 Estimation de l'état non mesuré et des paramètres inconnus avec $\theta = 2$ 88

5.3 Temps d'évolution du générateur d'entrée , $v(t)$, avec la sortie correspondante, $z_1(t)$ 90

5.4 Estimation des paramètres inconnus ρ_1, ρ_4 91

5.5 Estimation du retards (ρ_5) et de l'état non mesuré z_2 91

6.1 Entrée du filtre du second ordre 113

6.2 Performances du contrôleur adaptatif 115
6.3 Comparaison des évaluations de paramètres avec leurs vraies valeurs respectives 116

Chapitre 1

Introduction Générale

Durant les deux dernières décennies, l'estimation conjointe de l'état et de paramètres inconnus dans les systèmes non linéaires a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs qui ont proposé des observateurs dits adaptatifs pour effectuer cette estimation. En se basant sur un modèle dynamique du procédé, l'observateur adaptatif peut être décrit comme étant l'association d'un capteur physique à un algorithme (appelé observateur) permettant de délivrer, à partir des mesures fournies par le capteur physique et des entrées appliquées au système, des estimations en ligne des différentes variables d'état et des paramètres inconnus. Les études sur les observateurs adaptatifs ont d'abord été motivées par la commande adaptative, et plus récemment par la supervision des procédés industriels.

Dans la littérature, la conception d'observateurs adaptatifs a vu le jour depuis les années 70 pour des systèmes linéaires invariants dans le temps (cf. par exemple, [Lüders et Narendra, 1973, Kreisselmeier, 1977]). La construction de ce genre d'observateurs nécessite la transformation des systèmes étudiés en une certaine forme canonique. Dans la plupart des cas, les systèmes non linéaires considérés sont supposés être linéarisables par un changement de coordonnées approprié modulo une injection de sortie (cf. par exemple, [Bastin et Gevers, 1988, Marino et Tomei, 1992]) ou ces derniers sont supposés admettre a priori des fonctions de Lyapunov satisfaisant certaines conditions (cf. par exemple, [Besançon, 2000, Cho et Rajamani, 1997]). Plus récemment, une approche a été proposée pour la synthèse d'observateurs adaptatifs pour des systèmes linéaires à temps variant (cf. par exemple, [Zhang, 2002, Zhang

et Clavel, 2001]). Dans un premier temps, un observateur avec un gain d'adaptation constant a été proposé [Zhang, 2002], puis en deuxième temps, pour avoir une estimation consistante des paramètres, un autre observateur avec un gain d'adaptation à temps variant a été suggéré [Zhang et Clavel, 2001]. Toutefois, une difficulté particulière dans la synthèse de ces observateurs réside dans le choix du gain d'observation. Dans [Xu et Zhang, 2002], les auteurs ont étendu la synthèse du premier observateur à une classe de systèmes non linéaires uniformément observables. Cependant, la dimension de l'observateur résultant est beaucoup plus grande que celle du système. Dans ([Koubaa *et al.*, 2004]), les auteurs ont proposé un observateur adaptatif pour une classe de systèmes uniformément observables. Le gain d'observation de cet observateur est issu des techniques de type grand gain tandis que le gain d'adaptation paramétrique est déterminé à partir des techniques des moindres carrées avec un facteur d'oubli. Dans cette contribution de thèse, nous proposons des méthodes constructives de conception d'observateurs adaptatifs à convergence exponentielle pour certaines classes de systèmes non-linéaires multi-entrées multi-sorties (MIMO) uniformément observables dont le calibrage s'effectue à travers le choix d'un seul paramètre du gain. La convergence exponentielle des observateurs proposés est garantie sous une certaine condition d'excitation persistante qui sera présentée.

En premier lieu, nous présentons deux types d'observateurs à grand gain, le premier est synthétisé pour une forme canonique de classe de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables, tandis que le deuxième est proposé pour une classe particulière de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée, qui sera présentée, sous la première forme canonique. En deuxième lieu, nous proposons la synthèse d'observateurs adaptatifs pour les deux classes citées précédemment. En troisième lieu, nous proposons la synthèse d'observateurs adaptatifs pour deux classes de systèmes non linéaires uniformément observables dont les paramètres inconnus apparaissent dans la sortie. En quatrième lieu, nous proposons la synthèse d'un ensemble d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables avec une paramétrisation non linéaire. En dernier lieu, nous proposons une nouvelle méthode de commande adaptative avec retour de sortie pour les systèmes

non linéaires commandables et uniformément observables dont la dynamique des zéros est stable.

Le rapport de thèse est organisé comme suit :

Dans le deuxième chapitre, nous présentons deux observateurs à grand gain pour une forme canonique de classe de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables ainsi que pour une classe particulière de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. La synthèse d'un observateur adaptatif pour les systèmes linéaires temps variant MIMO , de laquelle nous sommes inspirés pour faire la synthèse des observateurs proposés dans cette thèse, est aussi brièvement présentée dans ce chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous proposons deux nouvelles approches permettant la synthèse d'observateurs adaptatifs pour les classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables présentés dans le deuxième chapitre. Les principales caractéristiques des observateurs proposés résident dans leur simplicité et leur capacité de donner lieu à différents types d'observateurs. Les performances des observateurs envisagés sont illustrées en simulation à travers des exemples académiques et d'une application sur le modèle de Park de la machine asynchrone décrit dans le repère (α-β) lié au stator.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons une nouvelle approche permettant la synthèse d'observateurs adaptatifs pour deux classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables dont les paramètres inconnus apparaissent dans la sortie. Un exemple académique est donné en simulation pour illustrer les performances des observateurs envisagés.

Dans le cinquième chapitre, nous proposons un ensemble d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables avec une paramétrisation non linéaire. Les principales caractéristiques des observateurs proposés résident dans leur simplicité, leur convergence exponentielle qui est garantie sous une certaine condition d'excitation persistante et leur capacité de donner lieu

à différents types d'observateurs tels que les observateurs adaptatifs à grand gain et les observateurs à modes glissants. Deux exemples d'applications réalistes sont envisagés en simulation pour démontrer les bonnes capacités de l'observateur de fournir de bonnes estimations des états non mesurables et des paramètres inconnus.

Dans le sixième chapitre, nous proposons une nouvelle loi de commande adaptative avec retour d'état pour une classe de systèmes non linéaires commandables et uniformément observables où la dynamique des zéros est stable. Un modèle d'un double intégrateur non linéaire est étudié en simulation dans l'environnement Matlab-Simulink en vue d'illustrer les performances de la loi de commande proposée.

Enfin, une conclusion avec des perspectives sur les principaux travaux développés dans cette thèse sont données.

Chapitre 2

Observateurs à grand gain pour des classes SNL MIMO uniformément observables

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une forme canonique observable caractérisant des classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. Ensuite, nous présenterons une classe particulière de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée, qui sera aussi présentée, sous la forme canonique citée ci-dessus.

La forme canonique présentée a été proposée par [Hammouri et Farza, 2003]. Le système considéré se compose de plusieurs blocs dont chacun est associé à une composante vectorielle de l'état. La caractéristique principale de ce système réside dans le fait que le premier bloc est associé à toutes les sorties et que les non linéarités du système ont une structure triangulaire, c'est-à-dire la non linéarité d'un bloc ne dépend que des variables propres du bloc ou de celles des blocs supérieurs. Cette forme peut être interprétée comme une généralisation de la forme canonique caractérisant les systèmes mono-sortie uniformément observables [Gauthier et Bornard, 1981, Gauthier *et al.*, 1992, Gauthier et Kupka, 1994].

Après la présentation de la forme canonique, nous détaillerons la synthèse d'un observateur à grand gain à partir de cette forme et qui a été proposée dans [Hammouri et Farza, 2003]. L'analyse de convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'observation sera détaillée puisque différentes étapes de cette démonstration ainsi que plusieurs détails techniques afférents seront utilisés tout au long de la thèse pour la démonstration de certains résultats.

Le but à travers la présentation de la forme canonique est le suivant : nous voulons montrer que modulo une condition d'excitation persistante qui sera donnée, cette forme canonique caractérise une classe de systèmes uniformément observable faisant intervenir des termes constants inconnus dans les non linéarités. Autrement dit, si les non linéarités qui, rappelons-le, sont triangulaires, renferment des coefficients inconnus, alors on pourra concevoir un observateur à grand gain adaptatif, c'est-à-dire permettant une estimation conjointe de l'état et des paramètres inconnus ; l'erreur d'estimation relative à cet observateur convergera exponentiellement vers zéro dès lors qu'une certaine condition d'excitation persistante est satisfaite.

2.2 Forme canonique d'observabilité

On considère les systèmes qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \tilde{\varphi}(u,x) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \tag{2.1}$$

où l'état $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, q$, $n = qp$, la sortie $y \in \mathbb{R}^p$, l'entrée $u \in \mathbb{R}^s$ et $\tilde{\varphi}(u,x)$ a une structure triangulaire par rapport à x, c'est-à-dire

$$\tilde{\varphi}(u,x) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^1(u,x^1) \\ \tilde{\varphi}^2(u,x^1,x^2) \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}^q(u,x) \end{pmatrix};$$

La matrice A de dimension $n \times n$ est la matrice anti-décalage par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & & 0_p \\ \vdots & & I_p & & 0_p \\ 0_p & & & \ddots & I_p \\ 0_p & \dots & & 0_p & 0_p \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

La matrice d'observation C a la structure particulière suivante :

$$C = [I_p \; 0_p \; \dots \; 0_p] \tag{2.3}$$

Pour la synthèse de l'observateur, nous adoptons les hypothèses suivantes :

(H1) L'état $x(t)$ et l'entrée $u(t)$ sont bornés. Plus précisément, nous avons $x(t) \in X$, $u(t) \in U$ pour tout $t \geq 0$ où X et U sont deux compacts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^s$.

(H2) La fonction $\tilde{\varphi}(u, x)$ est Lipschitzienne par rapport à x, uniformément en u, c'est-à-dire

$$\exists L > 0; \forall u \in U; \forall \hat{x}, x \in X : \; \|\tilde{\varphi}(u, \hat{x}) - \tilde{\varphi}(u, x)\| \leq L\|\hat{x} - x\| \tag{2.4}$$

Comme l'état reste toujours dans le compact X, nous pouvons prolonger la fonction non linéaire $\tilde{\varphi}(u, x)$ par une fonction $\varphi(u, x)$ de sorte que $\varphi(u, x)$ coïncide avec $\tilde{\varphi}(u, x)$ sur X et que $\varphi(u, x)$ soit globalement lipschitzienne, c'est-à-dire vérifie la propriété (2.4) pour tout $\hat{x}, x \in \mathbb{R}^n$. Pour ce faire, considérons une fonction de saturation assez lisse $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$, $x \mapsto \sigma(x)$ qui coïncide avec x sur X, c'est-à-dire, $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in X$. On pourra se référer [Shim, 2000] où de telles fonctions sont données. Le prolongement $\varphi(u, x)$ de $\tilde{\varphi}(u, x)$ est alors défini comme suit :

$$\varphi(u, x) = \tilde{\varphi}(u, \sigma(x)) \tag{2.5}$$

Maintenant, considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Il est clair que le système (2.6) coïncide avec le système (2.1) pour $(x, u) \in X \times U$. Par conséquent, nous pouvons considérer le système (2.6) à la place de (2.1) pour

la synthèse de l'observateur. L'observateur ainsi obtenu servira alors à estimer les trajectoires du système original (2.1) puisqu'elles coïncident avec celles de (2.6) pour tout $(x, u) \in X \times U$. C'est ce que nous allons faire dans toute la suite. Nous tenons à rappeler que pour toute entrée bornée $u \in U$, $\varphi(u, x)$ est par construction globalement lipschitzienne par rapport à x et cette fonction est aussi bornée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Avant de passer à la synthèse de l'observateur, nous proposons d'introduire certaines notations et de rappeler certains résultats que nous utiliserons tout au long de la synthèse.

2.2.1 Quelques notations, rappels et résultats préliminaires

Nous commençons par rappeler le Théorème de la Valeur Moyenne (TVM) pour les fonctions vectorielles.

2.2.1.1 TVM pour les fonctions vectorielles

Le théorème de la valeur moyenne peut s'énoncer comme suit dans le cas d'une fonction à plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Theorème : *Soit $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $\hat{x}$ et x deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe $\theta_i \in [0,\ 1]$ tel que :*

$$\begin{aligned} f_i(\hat{x}) &= f_i(x) + f_i'(x + \theta_i(\hat{x} - x))(\hat{x} - x) \\ &= f_i(x) + \left(\nabla f_i(x + \theta_i(\hat{x} - x))\right)^T (\hat{x} - x) \\ &\triangleq f_i(x) + \left(\nabla f_i(\xi_i)\right)^T (\hat{x} - x) \end{aligned} \tag{2.7}$$

où ∇f_i est le gradient de f_i et $\xi_i = x + \theta_i(\hat{x} - x)$.

Ce théorème s'étend dans le cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. En effet, soit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, il existe $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= f(x) + f'(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\hat{x} - x) \\ &= f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\hat{x} - x) \end{aligned} \tag{2.8}$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est la jacobienne de f.

Plus précisément, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1(\xi_1))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_n(\xi_n))^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla f_1(x + \theta_1(\hat{x} - x)))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_n(x + \theta_n(\hat{x} - x)))^T \end{pmatrix}$$

où $\xi_i = x + \theta_i(\hat{x} - x)$ avec $\theta_i \in [0, 1]$; $i = 1, \ldots, n$.

Pour alléger les écritures, nous utiliserons dans la suite de ce mémoire la notation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1(\xi_1))^T \\ \vdots \\ \left(\nabla f_n^T(\xi_n)\right)^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\nabla f_1(x + \theta_1(\hat{x} - x)))^T \\ \vdots \\ (\nabla f_n(x + \theta_n(\hat{x} - x)))^T \end{pmatrix} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} \nabla f_1^T \\ \vdots \\ \nabla f_n^T \end{pmatrix} (x + \Theta(\hat{x} - x)) \\ &= \begin{pmatrix} \nabla f_1^T \\ \vdots \\ \nabla f_n^T \end{pmatrix} (\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi) \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec $\xi = x + \Theta(\hat{x} - x)$ et $\Theta = diag(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.

2.2.1.2 Equation Algébrique de Lyapunov

Considérons l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A = C^T C \tag{2.10}$$

où A et C sont données respectivement par (2.2) et (2.3), l'inconnue est la matrice S_θ et enfin θ est un réel strictement positif. Il a été montré dans [Gauthier *et al.*, 1992] que l'équation (2.10) admet une solution unique qui est Symétrique Définie Positive (SDP) et qui peut s'exprimer comme suit :

$$S_\theta = \frac{1}{\theta}\Delta_\theta S \Delta_\theta$$

où S est la solution de (2.10) pour $\theta = 1$ et Δ_θ est une matrice diagonale donnée par

$$\Delta_\theta = diag\left(I_p, \frac{1}{\theta}I_p, \frac{1}{\theta^2}I_p, \ldots, \frac{1}{\theta^{q-1}}I_p\right) \tag{2.11}$$

De même, on peut vérifier à partir de (2.10) pour $\theta = 1$, que chaque entrée $S(i,j)$ de la matrice S s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} S(i,j) &= (-1)^{(i+j)} C_{i+j-2}^{j-1} I_p \text{ pour } 1 \leq i,j \leq n \\ &\text{où } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \end{aligned}$$

De même, on a :

$$S^{-1}C^T = [C_q^1 I_p, \ldots, C_q^q]^T \tag{2.12}$$

Soit maintenant un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. A partir de l'équation (2.10), pour $\theta = 1$, on a :

$$2x^T A S x = -x^T S x + x^T C^T C x \tag{2.13}$$

L'égalité (2.13) sera utilisée dans les démonstrations de différents résultats en considérant des fonctions de Lyapunov appropriées.

2.2.1.3 Quelques identités et inégalités

Considérons les matrices Δ_θ, A et C données respectivement par (2.11), (2.2) et (2.3). Un calcul direct permet d'établir les identités suivantes :

$$\begin{cases} \Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} &= \theta A \\ C\Delta_\theta &= C \end{cases} \tag{2.14}$$

Maintenant, soit $F(s(t))$ une matrice carrée triangulaire $n \times n$ où $s(t)$ est une fonction bornée à valeurs réelles. On suppose que chaque entrée $f_{ij}(s(t))$ de la matrice F,

$i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, n$ est uniformément bornée. Il existe donc une constante $L > 0$ telle que :

$$\|F(s(t))\| \leq \|F(s(t))\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(f_{ij}(s(t)))^2} \leq L \tag{2.15}$$

où $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_F$ désignent respectivement la norme euclidienne et la norme de Frobenius de $(\cdot)$.

Posons

$$Q(s(t)) = \Delta_\theta F(s(t))\Delta_\theta^{-1} \tag{2.16}$$

Soit $q_{ij}(s(t))$ l'entrée de la matrice Q située à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne. Compte tenu de la structure triangulaire de F et du fait que Δ_θ est diagonale, il est clair que la matrice Q est aussi triangulaire inférieure, c'est-à-dire $q_{ij} = 0$ pour $j > i$. Par ailleurs, à partir de (2.16), nous avons :

$$q_{ij}(s(t)) = \theta^{j-i} f_{ij}(s(t)) \text{ pour } j \leq i \tag{2.17}$$

A partir (2.15) et (2.17), on peut conclure

$$\forall \theta \geq 1 : \ \|Q(s(t))\| \leq L \tag{2.18}$$

Remarque 2.2.1 *Soit* $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in I\!R^n$, $\hat{x}^k, x^k \in I\!R^p$, $k = 1, \ldots, q$, $n = qp$, *soit* $\varphi : U \times I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$, $(u, x) \mapsto f(u, x)$, *où* U *est un compact de* $I\!R^m$, *une fonction ayant une structure triangulaire par rapport à* x *et est globalement lipschitzienne par rapport à* x *uniformément en* u. *En posant* $e = \hat{x} - x$ *et* $\bar{e} = \Delta_\theta e$, *alors l'application du théorème de la valeur moyenne permet d'avoir les égalités et inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \|\Delta_\theta(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)\| &= \|\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi)e\| \\ &= \|\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi)\Delta_\theta^{-1}\bar{e}\| \\ &\leq \|\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi)\Delta_\theta^{-1}\|\|\bar{e}\| \\ &\leq L\|\bar{e}\| \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$ et L est une constante positive qui ne dépend pas de θ pour $\theta \geq 1$.

Nous pouvons maintenant donner l'équation d'un observateur à grand gain pour le système (2.6) et détailler la convergence vers zéro de l'erreur d'observation.

2.2.2 Equation de l'observateur

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \tag{2.20}$$

où $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, q$, $n = qp$; u, y et x sont respectivement l'entrée, la sortie et la trajectoire inconnue du système (2.6), Δ_θ et C sont respectivement données par (2.11) et (2.3) et finalement $\theta > 0$ est un paramètre de synthèse.

Nous énonçons le résultat suivant :

Theorème : *Sous les hypothèses (H1) et (H2), le système (2.20) est un observateur pour le système (2.6) et il est tel que l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro pour des valeurs assez élevées du paramètre de synthèse θ.*

La preuve de ce théorème est détaillée dans ce qui suit.

2.2.3 Analyse de convergence

Soit $\tilde{x} = \hat{x} - x$ l'erreur d'observation. Nous avons :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TC\tilde{x}$$

Nous introduisons maintenant le changement de variable suivant : $\bar{x} = \Delta_\theta\tilde{x}$. On obtient :

$$\dot{\bar{x}} = \Delta_\theta A\Delta_\theta^{-1}\bar{x} + \Delta_\theta\left(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)\right) - \theta S^{-1}C^TC\tilde{x} \tag{2.21}$$

En utilisant les identités (2.28) et en appliquant le théorème de la valeur moyenne (2.9) à φ, l'équation (2.21), devient :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\tilde{x} - \theta S^{-1}C^TC\Delta_\theta\tilde{x} \\ &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} - \theta S^{-1}C^TC\bar{x}\end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant la fonction de Lyapunov candidate : $V(\bar{x}) = \bar{x}^TS\bar{x}$ où S est la solution de l'équation algébrique de Lyapunov (2.10) pour $\theta = 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2\bar{x}^TS\dot{\bar{x}} \\ &= 2\theta\bar{x}^TSA\bar{x} + 2\bar{x}^TS\Delta_\theta\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} - 2\theta\bar{x}^TC^TC\bar{x}\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \theta\left(-\bar{x}^TS\bar{x} + \bar{x}^TC^TC\bar{x}\right) + 2\bar{x}^TS\Delta_\theta\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} - 2\theta\bar{x}^TC^TC\bar{x} \\ &= -\theta V - \theta\bar{x}^TC^TC\bar{x} + 2\bar{x}^TS\Delta_\theta\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} \\ &\leq -\theta V + 2\bar{x}^TS\Delta_\theta\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} \\ &\leq -\theta V + 2\|\bar{x}^TS\|\|\Delta_\theta\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\|\bar{x} \\ &\leq -\theta V + 2\|S\|\|\bar{x}\|\|\Delta_\theta\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\|\|\bar{x}\| \\ &= -\theta V + 2\lambda_{max}(S)\|\bar{x}\|^2\|\Delta_\theta\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\| \\ &\leq -\theta V + 2\frac{\lambda_{max}(S)}{\lambda_{min}(S)}\|\|\Delta_\theta\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\|V \qquad (2.22)\end{aligned}$$

où $\lambda_{max}(\cdot)$ (resp. $\lambda_{min}(\cdot)$) désigne la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de $(\cdot)$.

Finalement, comme la matrice φ est globalement lipschitzienne et à une structure triangulaire,nous avons pour tout $\theta \geq 1$ (cf. remarque (2.19)) :

$$\|\Delta_\theta\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,\xi)\Delta_\theta^{-1}\| \leq c \qquad (2.23)$$

où c est une constante positive qui ne dépend pas de θ.

Combinant (2.22) et (2.23), nous obtenons :

$$\dot{V} \leq -(\theta - c)V \tag{2.24}$$

Il suffit de prendre $\theta = max(1, c)$. Ceci termine la preuve.

2.3 Classe particulière de SNL MIMO uniformément observable

Nous allons présenter maintenant une classe particulière de systèmes non linéaires uniformément observables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée sous la forme canonique présentée ci-dessus.

Soit la classe de systèmes non linéaires MIMO suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = f^0(u, x^1) \end{cases} \tag{2.25}$$

Avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \; ; \; f(u, x) = \begin{pmatrix} f^1(u, x^1, x^2) \\ f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u, x) \\ f^q(u, x) \end{pmatrix} ;$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \ldots, q$ et $p = n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_q$, $\sum_{k=1}^{q} n_k = n$; l'entrée $u(t) \in \mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions absolument continues à dérivées bornées de $\mathbb{R}^+$ dans U un compact de $\mathbb{R}^s$; $f(u, x) \in \mathbb{R}^n$ où $f^k(u, x) \in \mathbb{R}^{n_k}$ et $f^0(u, x^1) \in \mathbb{R}^{n_0}$. L'hypothèse suivante est adoptée :

(H1) Pour $0 \leq k \leq q - 1$; la fonction $x^{k+1} \mapsto f^k(u, x^1, \ldots, x^k, x^{k+1})$ de $\mathbb{R}^{n_{k+1}}$ dans $\mathbb{R}^{n_k}$ est injective. De plus, on suppose que $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $k \in \{0, \ldots, q-1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall u \in U$,

$$0 < \alpha^2 I_{n_{k+1}} \leq \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right)^T \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \leq \beta^2 I_{n_{k+1}}$$

où $I_{n_{k+1}}$ est la matrice identité $(n_{k+1}) \times (n_{k+1})$.

Cette classe de systèmes a été considérée par [Hammouri et Farza, 2003] pour la caractérisation d'une classe des systèmes uniformément observables. Les auteurs ont proposé un observateur à grand gain dont la synthèse a été effectuée en deux étapes. Dans la première étape, les auteurs ont introduit un changement de coordonnées qui a ramené le système (2.25) sous la forme canonique (2.1). La synthèse de l'observateur dans les nouvelles coordonnées est immédiate (c'est l'observateur (2.20)). Puis, les équations de l'observateur dans les coordonnées originales sont données en considérant la pseudo-inverse de la matrice jacobienne. Ce système a ensuite été reconsidéré par [Farza *et al.*, 2005b] où les auteurs ont proposé une version légèrement modifié de l'observateur présenté dans [Hammouri et Farza, 2003]. En effet, la nouvelle version ne nécessite pas l'inversion de toute la matrice jacobienne mais que des termes diagonaux de cette matrice. Nous proposons dans ce qui suit de donner la transformation qui permet de transformer le système (2.25) sous la forme canonique (2.1) ainsi que les équations de l'observateur modifié dans les nouvelles coordonnées et les coordonnées originales.

Considérons le changement de coordonnées suivant :

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n_0 q}$$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \longrightarrow z = \Phi(u,x) = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^q \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} z^1 &= f^0(u,x^1) \\ z^2 &= \dfrac{\partial f^0}{\partial x^1}(u,x^1) f^1(u,x^1,x^2) \\ z^3 &= \dfrac{\partial f^0}{\partial x^1}(u,x^1)\dfrac{\partial f^1}{\partial x^2}(u,x^1,x^2) f^2(u,x^1,x^2,x^3) \\ & \vdots \\ z^q &= \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{q-2} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u,x)\right) f^{q-1}(u,x) \end{cases} \tag{2.26}$$

où $z^k \in \mathbb{R}^{n_0}$, $k = 1, \ldots, q$.

D'après l'hypothèse (H1), l'application Φ est injective ; soit Φ^c sa fonction réciproque.

Avant d'écrire la dynamique de z, nous introduisons les notations suivantes :

• Soit $\Lambda(u,x)$ la matrice diagonale en blocs suivante :

$$\Lambda(u,x) = diag\left(\frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u,x), \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u,x)\frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u,x), \ldots, \prod_{k=0}^{q-1}\frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u,x)\right) \quad (2.27)$$

D'après l'hypothèse (H1), $\Lambda(u,x)$ est inversible à gauche. On désignera dans la suite par $\Lambda^+(u,x)$ son inverse à gauche. On peut facilement vérifier que :

$$\begin{aligned} \Lambda(u,x)f(u,x) &= Az + G(u,x) \text{ ou encore} \\ f(u,x) &= \Lambda^+(u,x)Az + \Lambda^+(u,x)G(u,x) \end{aligned} \quad (2.28)$$

où A est une matrice carrée $n_0q \times n_0q$ et $G(u,x) \in \mathbb{R}^{n_0q}$ et ils sont donnés par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_0} & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & I_{n_0} & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & I_{n_0} \\ 0 & \ldots & & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } G(u,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \\ \left(\prod_{k=0}^{q-1}\frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u,x)\right) f^q(u,x) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant générer l'expression de la dérivée par rapport au temps de z :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x)\dot{x}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,x)\dot{u}(t) \\ &= \Lambda(u,x)f(u,x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x) - \Lambda(u,x)\right) f(u,x) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,x)\dot{u}(t) \\ &= Az + G(u,x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x) - \Lambda(u,x)\right)\left(\Lambda^+(u,x)Az + \Lambda^+(u,x)G(u,x)\right) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,x)\dot{u}(t) \end{aligned}$$

d'après (2.28).

Notant que la matrice $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x) - \Lambda(u,x)\right)$ est triangulaire inférieure avec des zéros sur toute sa diagonale. Puisque $\Lambda^+(u,x)$ est diagonale et que les $((q-1)n_0)$ premières composantes de $G(u,x)$ sont nulles, on a :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x) - \Lambda(u,x)\right)\Lambda^+(u,x)G(u,x) = 0 \quad (2.29)$$

Par conséquent, la dynamique de z peut être réécrite comme suit :

$$\dot{z}(t) = Az + G(u,x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x) - \Lambda(u,x)\right)\Lambda^{+}(u,x)Az + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,x)\dot{u}(t)$$

Pour alléger les écritures, on adoptera les notations suivantes dans la suite :

$$\begin{aligned}
\Theta(u,z) &\triangleq \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x) - \Lambda(u,x)\right)\Lambda^{+}(u,x) \\
&= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,\Phi^c(z)) - \Lambda(u,\Phi^c(z))\right)\Lambda^{+}(u,\Phi^c(z)) \\
\varphi(u,z) &\triangleq \Theta(u,z)Az + G(u,x) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,x)\dot{u}(t) \\
&= \Theta(u,z)Az + G(u,\Phi^c(z)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\Phi^c(z))\dot{u}(t) \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\Theta(u,z)$ est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale principale, on peut vérifier que la fonction $\varphi(u,z)$ possède une structure triangulaire.

En utilisant les notations adoptées, le système (2.25) peut être écrit dans les nouvelles coordonnées en z comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(u,z) \\ y = Cz \end{cases} \qquad (2.31)$$

où

$$C = [I_{n_0}\ 0_{n_0}\ \ldots\ 0_{n_0}]$$

est une matrice $n_0 \times n_0 q$ avec 0_{n_0} la matrice nulle de dimension $n_0 \times n_0$.

IL est clair que le système (2.31) est sous la forme canonique (2.1). De ce fait, l'observateur (2.20) peut être synthétisé pour ce système (sous l'hypothèse portant sur le caractère Lipschitz de la fonction φ). Toutefois, comme nous l'avons signalé précédemment, l'équation d'un tel observateur dans les coordonnées originales en x, nécessite l'inversion de toute la matrice jacobienne. Pour contourner cette inversion, un nouvel observateur a été proposé. Les équations de cet observateur s'écrivent dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z} + \varphi(u,\hat{z}) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TC(\hat{z} - z) \\
&- \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,\Phi^c(\hat{z}))\left(\Lambda^{+}(u,\Phi^c(\hat{z})) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,\Phi^c(\hat{z}))\right)^{+}\right)\theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TC(\hat{z} - z)
\end{aligned} \qquad (2.32)$$

où $\hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{z}^1 \\ \hat{z}^2 \\ \vdots \\ \hat{z}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_0 q}$ avec $\hat{z}^k \in \mathbb{R}^{n_0}$, $k = 1, \ldots, q$.

Maintenant, il est clair que l'observateur (2.32) s'écrit dans les coordonnées originales x comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = f(u, \hat{x}) - \theta \Lambda^+(u, \hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (f^0(u, \hat{x}^1) - f^0(u, x^1)) \tag{2.33}$$

où $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \ldots, q$ et x est le vecteur des trajectoires du système (2.25).

On remarque que l'observateur dans les coordonnées originales ne nécessite pas l'inversion de toute la matrice jacobienne mais que de ses termes diagonaux rassemblés au sein de la matrice Λ.

Pour démontrer la convergence vers zéro de l'erreur d'observation relative à l'observateur (2.32), il suffit de remarquer :

1) L'observateur (2.32) peut être obtenu à partir de l'observateur (2.20) en ajoutant à ce dernier le terme

$$T = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z})) \left(\Lambda^+(u, \Phi^c(\hat{z})) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z})) \right)^+ \right) \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C(\hat{z} - z)$$

2) La matrice $\Xi_1 = \left(\Lambda^+(u, \Phi^c(\hat{z})) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z})) \right)^+ \right)$ est triangulaire inférieure et sa diagonale est nulle. Comme la matrice $\Xi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z}))$ est triangulaire inférieure, la matrice produit $\Xi = \Xi_1 \Xi 2$ à la même structure que Ξ_1, c'est-à-dire triangulaire inférieure avec une diagonale nulle.

3) En utilisant les notations introduites précédemment, le terme ajouté T s'écrit comme suit :

$$T = \theta \Xi \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \tilde{z}$$

Pour démonter la convergence vers zéro de l'erreur d'observation relative à l'observateur (2.32), on procède comme pour l'observateur (2.20). A partir de (2.22), il suffit de montrer après avoir posé $\bar{z} = \Delta_\theta \tilde{z}$ et $V = \bar{z}^T S \bar{z}$, que l'on a :

$$\begin{aligned} 2\bar{z} S \Delta_\theta T &= 2\bar{z} S \theta \Delta_\theta \Xi \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \tilde{z} \\ &\leq c_2 V \end{aligned} \tag{2.34}$$

où c_2 est une constante positive ne dépendant pas de θ.
Pour démontrer l'inégalité (2.34), on procède comme suit :

$$\begin{aligned} 2\bar{z} S \theta \Delta_\theta \Xi \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \tilde{z} &\leq 2\|\bar{z}\|^2 \frac{\lambda_{max}(S)}{\lambda_{min}(S)} \|\theta \Delta_\theta \Xi \Delta_\theta^{-1}\| \\ &\leq 2 \frac{\lambda_{max}(S)}{\lambda_{min}^2(S)} \|\theta \Delta_\theta \Xi \Delta_\theta^{-1}\| V \end{aligned}$$

Pour finir, posons $Q = \|\theta \Delta_\theta \Xi \Delta_\theta^{-1}\|$ et désignons par $Q(i,j)$ (resp. $\Xi(i,j)$) le terme de la matrice Q se situant à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne. Compte tenu de la structure de Ξ, nous avons : $\Xi_{ij} = Q_{ij} = 0$ pour $j \geq i$. Pour $j < i$, nous avons : $Q_{ij} = \theta^{j-i+1} \Xi_{ij}$ et par conséquent $|Q_{ij}| \leq |\Xi_{ij}|$ pour $\theta \geq 1$ puisque $j \leq i+1$. Ainsi, la norme de la matrice Q est bornée dès que celle de la matrice Ξ l'est. Or cette dernière est bornée en supposant que les fonctions $f^k(u,x)$ sont lipschitzienne par rapport à x uniformément en u.

Nous allons maintenant présenter un observateur adaptatif pour les systèmes linéaires temps variant multi-entrées/multi-sorties. Cet observateur a été initialement proposé par [Zhang, 2002] avec une adaptation des paramètres de type gradient. Puis, une autre version a été proposée par [Zhang et Clavel, 2001] où la mise à jour des paramètres s'inspire de l'algorithme des moindres carrées avec un facteur d'oubli. Une tentative pour la généralisation de l'observateur proposé à une classe de systèmes non linéaires a été présentée par [Xu et Zhang, 2002] mais l'observateur résultant est assez complexe puisqu'il fait intervenir plusieurs copies du système original avec des pseudo-sorties qui correspondent aux sorties retardées du système

original.

La synthèse des différents observateurs que nous proposerons dans cette thèse s'inspire de celle de cet observateur en ce qui concerne l'adaptation des paramètres. Toutefois, plusieurs modifications ont été introduites pour coupler cette adaptation à l'observation conjointe de l'état via des techniques de type grand gain.

2.4 Observateurs adaptatifs pour des systèmes MIMO

Considérons le système linéaire temps variant multi-entrées multi-sorties suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Psi(t)\rho \\ y = C(t)x(t) \end{cases} \tag{2.35}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont, respectivement, l'état, l'entrée et la sortie du système. $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ sont des matrices connues variant dans le temps et de dimensions appropriées, $\rho \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur colonne de paramètres inconnus et supposé constant, $\Psi(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est une matrice de signaux mesurés. Toutes les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $\Psi(t)$ sont connues par morceaux et uniformément bornées en temps.

(H1) Supposons que la paire matricielle $(A(t), C(t))$ dans le système (2.35) est détectable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice bornée (variant dans le temps) $K(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tel que le système :

$$\dot{x}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]x(t) \tag{2.36}$$

est globalement exponentiellement stable.

(H2) Notons par $\Upsilon(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ la matrice de signaux générée par un filtre stable :

$$\dot{\Upsilon}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Upsilon(t) + \Psi(t) \tag{2.37}$$

Supposons que $\Psi(t)$ est à excitation persistante, i.e. il existe deux constantes positives α et T et une matrice définie positive $\Sigma(t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ telle que, pour tout t,

l'inégalité suivante :

$$\int_{t}^{t+T} \Upsilon^T(\tau)C^T(\tau)\Sigma(\tau)C(\tau)\Upsilon(\tau)d(\tau) \geq \alpha I \tag{2.38}$$

est satisfaite, où $I \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ est la matrice identité.

L'hypothèse (H1) montre que, pour chaque paramètre ρ donné, un observateur d'état à convergence exponentielle peut être construit pour le système (2.35) avec la matrice de gain $K(t)$ qui règle la dynamique de l'observateur. L'hypothèse (H2) est une condition d'excitation persistante, nécessaire pour l'identification des paramètres inconnus.

Sous les hypothèses (H1) et (H2), le système d'équations différentielles ordinaires suivant [Zhang, 2002] :

$$\begin{cases} \dot{\Upsilon}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Upsilon(t) + \Psi(t) \\ \dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \Psi\hat{\rho}(t) + \left[K(t) + \Upsilon(t)\Gamma\gamma^T(t)C^T\Sigma(t)\right](y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \\ \dot{\hat{\rho}} = \Gamma\Upsilon^T(t)C^T\Sigma(t)\left(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right) \end{cases} \tag{2.39}$$

où $\Gamma \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ est une matrice symétrique définie positive quelconque, est un observateur adaptatif global exponentiel pour le système (2.35).

La mise à jour des paramètres inconnus dans l'observateur (2.39) est de type gradient. Dans [Zhang et Clavel, 2001], les auteurs proposent un observateur adaptatif similaire à (2.39) mais où l'adaptation paramétrique est de type moindres carrées : la matrice Γ n'est plus constante mais elle est régie par une l'Equation Différentielle Ordinaire (EDO) suivante :

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t)\Upsilon^T(t)C^T\Sigma(t)C(t)\Upsilon(t)\Gamma(t) + \lambda\Gamma(t) \tag{2.40}$$

où $\Gamma(0)$ est choisie symétrique définie positive. Sous l'hypothèse (H2), c'est-à-dire lorsque la matrice $\Gamma(t)\Upsilon^T(t)C^T\Sigma(t)C(t)\Upsilon(t)\Gamma(t)$ est à excitation persistante, les auteurs montrent que la matrice $\Gamma(t)$ régie par l'ODE (2.40) est symétrique définie positive et est bornée.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une forme canonique de systèmes non linéaires uniformément observable ainsi qu'une classe de systèmes non linéaires pouvant se mettre sous cette forme canonique à l'aide d'une transformation appropriée qui a aussi été présenté. Un observateur de type grand gain conçu à partir de la forme canonique a aussi été présenté. Ensuite nous avons présenté un observateur adaptatif pour une classe de systèmes linéaires temps variant.

La caractéristique principale de la forme canonique présentée réside dans le fait qu'elle est une généralisation directe de la forme canonique triangulaire caractérisant tous les systèmes observables pour toute entrée dans le cas mono-sortie. En effet, la forme canonique présentée est composée de plusieurs blocs et le premier bloc est associé à toutes les sorties. De plus, les non linéarités du système ont une structure triangulaire, c'est-à-dire la non linéarité d'un bloc ne dépend que des variables propres du bloc ou de celles des blocs supérieurs. Au chapitre suivant, nous allons considérer à nouveau cette forme canonique mais nous allons supposer que les non linéarités triangulaires de certains blocs renferment des paramètres inconnus. On montrera alors que modulo une condition d'excitation persistante similaire à (2.38), on pourra estimer conjointement les états du systèmes et les paramètres inconnus via un observateur adaptatif dont la synthèse sera détaillée.

Chapitre 3

Synthèse d'observateurs adaptatifs pour des classes SNL MIMO uniformément observables

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons tout d'abord de présenter la synthèse d'observateurs adaptatifs pour la forme canonique (2.1) présentée au chapitre précédent et caractérisant certaines classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables. Ensuite, nous considérerons la classe de systèmes (2.25) pour laquelle nous donnons l'équation des observateurs proposés dans les coordonnées originales.

Les principales caractéristiques des observateurs proposés résident dans leur simplicité et leur capacité de donner lieu à différents types d'observateurs. En effet, les gains d'observation et d'adaptation paramétrique font apparaître une fonction de synthèse satisfaisant une certaine condition qui sera explicitée. Différentes expressions de cette fonction sont proposées, et il est démontré que les observateurs adaptatifs à grand gain [Bornard et Hammouri, 1991, Gauthier *et al.*, 1992, Farza *et al.*, 2004] et les observateurs adaptatifs à modes glissants [Drakunov, 1992, Utkin, 1992, Drakunov et Utkin, 1995, A. Filipescu et Dion, 2003] peuvent être générés en considérant des expressions particulières de la fonction de synthèse. Le réglage du gain de cet observateur est réalisé par le choix d'un seul paramètre.

3.2 Synthèse d'observateur à partir d'une forme canonique d'observabilité uniforme

Dans cette partie, nous allons considérer la synthèse d'un observateur adaptatif pour une forme canonique de classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables dont l'équation d'état est affine par rapport aux paramètres inconnus supposés constants.

3.2.1 Formulation du problème

On considère la classe de systèmes suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \tilde{g}(u,x) + \tilde{\Psi}(u,x)\rho \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \tag{3.1}$$

où $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix}$; $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix}$; $\tilde{g}(u,x) = \begin{pmatrix} \tilde{g}^1(u,x^1) \\ \tilde{g}^2(u,x^1,x^2) \\ \vdots \\ \tilde{g}^{q-1}(u,x^1,\ldots,x^{q-1}) \\ \tilde{g}^q(u,x) \end{pmatrix}$;

$$\tilde{\Psi}^T(u,x) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1^T(u,x) \\ \tilde{\Psi}_2^T(u,x) \\ \vdots \\ \\ \tilde{\Psi}_m^T(u,x) \end{pmatrix}, \ \tilde{\Psi}_j(u,x) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_j^1(u,x^1) \\ \tilde{\Psi}_j^2(u,x^1,x^2) \\ \vdots \\ \\ \tilde{\Psi}_j^{q-1}(u,x^1,\ldots,x^{q-1}) \\ \tilde{\Psi}_j^q(u,x) \end{pmatrix};$$

la matrice A de dimension $n \times n$ est la matrice anti-décalage par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & I_p & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & I_p \\ 0 & \ldots & & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{3.2}$$

la matrice d'observation C a la structure suivante :

$$C = [I_p \ 0_p \ \ldots \ 0_p]; \tag{3.3}$$

la sortie $y \in \mathbb{R}^p$; l'état $x \in \mathbb{R}^n$, $x^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \cdots, q$, $n = p \times q$; l'entrée $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^s$, U étant l'ensemble des valeurs admissibles de l'entrée ; $\rho \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des paramètres constants inconnus, $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$; $\tilde{g}(u, x) \in \mathbb{R}^n$ avec $\tilde{g}^k(u, x) \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, q$; $\tilde{\Psi}(u, x)$ est une matrice $n \times m$ et chaque $\tilde{\Psi}_j(u, x) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, m$, désigne sa $j^{ième}$ colonne avec $\tilde{\Psi}_j^k(u, x) \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, q$. Notre objectif consiste à faire la synthèse d'observateurs adaptatifs pour le système (3.1), permettant l'estimation conjointe de l'état x et du vecteur des paramètres inconnus ρ.

La synthèse de tels observateurs nécessite l'adoption de certaines hypothèses qui seront énoncées au fur et à mesure de cette synthèse. Pour l'instant nous adoptons les hypothèses suivantes :

(H1) Pour toute entrée bornée u, i.e. $\forall u \in U$ un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^s$, l'état $x(t)$ et les paramètres inconnus ρ sont bornés, i.e. $x(t) \in X$, pour tout $t \geq 0$ et $\rho \in \Omega$ où $X \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega \in \mathbb{R}^m$ sont des ensembles compacts.

(H2) La matrice $\tilde{\Psi}(u, x)$ est continue dans $U \times X$.

(H3) Les fonctions $\tilde{g}(u, x)$ et $\tilde{\Psi}(u, x)$ sont Lipschitziennes par rapport à x uniformément en u où $(u, x) \in U \times X$.

Puisque l'état reste toujours dans le compact X, on peut prolonger les non linéarités $\tilde{g}(u, x)$ et $\tilde{\Psi}(u, x)$ en $g(u, x)$ et $\Psi(u, x)$ de telle manière que $g(u, x)$ et $\Psi(u, x)$ coincident respectivement avec $\tilde{g}(u, x)$ et $\tilde{\Psi}(u, x)$ dans X et que $g(u, x)$ et $\Psi(u, x)$ deviennent globalement Lipschitziennes, c'est-à-dire Lipschitziennes sur l'espace $\mathbb{R}^n$ entier. En effet, soit $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow X, x \longmapsto \sigma(x)$ assez lisse qui coïncide avec x dans X, c'est-à-dire $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in X$ (cf. par exemple, [Colon, 1992, Shim, 2000, Shim *et al.*, 2001]). On définit les prolongements Lipschitziens respectifs, $g(u, x)$ et $\Psi(u, x)$, de $\tilde{g}(u, x)$ et $\tilde{\Psi}(u, x)$ comme suit :

$$\begin{cases} g(u, x) = \tilde{g}(u, x) \\ \Psi(u, x) = \tilde{\Psi}(u, x) \end{cases} \tag{3.4}$$

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g(u,x) + \Psi(u,x)\rho \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \tag{3.5}$$

Il est clair que le système (3.5) coïncide avec le système (3.1) pour tout $(x, u, \rho) \in X \times U \times \Omega$. Par conséquent, nous pouvons considérer le système (3.5) au lieu de (3.1) pour la synthèse d'observateur. En effet, le système (3.5) sera considéré dans la prochaine section. Remarquons que pour toute entrée bornée $u \in U$, $g(u,x)$ et $\Psi(u,x)$ sont, par construction globalements Lipschitziennes par rapport à x uniformément en u, bornées pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Comme nous l'avons noté au chapitre précédent, d'un point de vue pratique, les techniques de prolongations sont rarement employées en pratique comme le montrent les nombreuses applications expérimentales où des observateurs de type grand gain, synthétisés sous des hypothèses semblables à (H1) et (H3), ont été validés sans considérer une quelconque prolongation (cf. par exemple, [Farza *et al.*, 1999, F. Deza et Rakotopara, 1997, Viel *et al.*, 1995, Busawon *et al.*, 2001]). Pour ces raisons, les extensions de Lipschitz ne seront plus considérées dans les chapitres suivants et on assumera implicitement qu'elles ont été effectuées.

3.2.2 Équations de l'observateur

Avant de donner les équations de l'observateur proposé, nous introduisons les notations suivantes :

1) Soit Δ_θ et S les matrices définies au chapitre précédent et données par les équations (2.11) et (2.10) (pour $\theta = 1$). Pour la clarté, nous rappelons les définitions de ces matrices :

• La matrice Δ_θ est définie comme suit :

$$\Delta_\theta = diag\left[I_p, \frac{1}{\theta}I_p, \ldots, \frac{1}{\theta^{q-1}}I_p\right] \tag{3.6}$$

où θ est un nombre réel positif ($\theta > 0$).

• La matrice S est symétrique définie positive et satisfait l'équation algébrique de Lyapunov suivante

$$S + A^T S + SA - C^T C = 0 \tag{3.7}$$

2) Soit Ω_θ la matrice diagonale par blocs $m \times m$ définie comme suit :

$$\Omega_\theta = diag\left[1, \frac{1}{\theta^{\nu_1}}, \ldots, \frac{1}{\theta^{\nu_{m-1}}}\right] \tag{3.8}$$

où ν_k pour , $k = 1, \ldots, m-1$ sont des entiers positifs qui sont choisis de sorte que chaque terme de la matrice $\Delta_\theta \Psi(u,x)\Omega_\theta^{-1}$ soit polynomial en $\frac{1}{\theta}$ (voir e.g. [Xu et Zhang, 2002]). Notons que le choix de Ω_θ tel que : $\Omega_\theta = I_m$ (i.e. $\nu_i = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$) peut faire l'affaire, mais en général, il existe d'autres choix qui sont possibles. En d'autres termes, les entiers ν_i peuvent être interprétés comme des paramètres de synthèse. Pour illustrer le choix de Ω_θ, nous allons considérer une structure particulière de Ψ à travers laquelle nous considérons deux choix possibles de Ω_θ. Pour ce faire, nous allons noter par $\times$ toute entrée susceptible d'être non nulle de Ψ.

Exemple : $\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}$; $\Psi(u,x) = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix}$.

Plusieurs choix sont possibles pour Ω_θ. Considérons les deux choix suivants :

• $\Omega_\theta = I_3$

$$\Delta_\theta \Psi(u,x)\Omega_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} I_3 = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & \frac{\times}{\theta} & 0 \\ 0 & \frac{\times}{\theta} & \frac{\times}{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\bullet\ \Omega_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta_\theta \Psi(u,x)\Omega_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & \frac{\times}{\theta} & 0 \\ 0 & \frac{\times}{\theta} & \times \end{bmatrix}.$$

3)Soit $K_c : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p$ une fonction bornée satisfaisant la propriété suivante

$$\forall \xi \in X : \xi^T K(\xi) \ \geq \ \frac{1}{2}\xi^T \xi \tag{3.9}$$

L'observateur candidat que nous proposons pour le système (3.1) est le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x} + g(u,\hat{x}) + \Psi(u,\hat{x})\hat{\rho}(t) \\ &- \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)C^T K(C\tilde{x}) \\ \dot{\hat{\rho}}(t) &= -\theta\Omega_\theta^{-1}P(t)\Upsilon^T(t)C^T K(C\tilde{x}) \\ \dot{\Upsilon}(t) &= \theta\left(A - S^{-1}C^T C\right)\Upsilon(t) + \Delta_\theta\Psi(u(t),\hat{x}(t))\Omega_\theta^{-1}\ ; \Upsilon(0) = 0 \\ \dot{P}(t) &= -\theta P(t)\Upsilon^T(t)C^T C\Upsilon(t)P(t) + \theta P(t);\ P(0) = P^T(0) > 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

où $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1,\ldots,q$; $\tilde{x} = \hat{x} - x$ où x est la trajectoire inconnue du système (3.5) ; $\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$; S, C, Δ_θ et Ω_θ sont données respectivement par (3.7), (3.3), (3.6) et (3.8) ; $K(C\tilde{x})$ est une matrice rectangulaire satisfaisant la condition (3.9) ; u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système (3.5) ; $\theta > 0$ est un nombre réel et enfin la notation $P(0) = P^T(0) > 0$ signifie que la condition initiale pour l'EDO régissant la matrice $P(t)$ dans le système (3.10) est prise symétrique définie positive.

Avant d'énoncer le résultat principal de cette contribution, nous avons besoin de l'hypothèse additionnelle suivante :

(H4) Pour toute trajectoire $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^n$ du système (3.5), la matrice $C\Upsilon(t)$ est à excitation persistante, c'est-à-dire

$$\exists \delta_1, \delta_2 > 0; \exists T > 0; \forall t \geq 0 :$$
$$\delta_1 I_m \leq \int_t^{t+T} \Upsilon^T(\tau) C^T C \Upsilon(\tau) d\tau \leq \delta_2 I_m$$

Nous énonçons maintenant le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Supposons que le système (3.5) satisfait les hypothèses de (H1) à (H4). Alors le système (3.10) est un observateur adaptatif exponentiel global pour le système (3.5).*

La preuve de ce théorème est détaillée dans la suite.

3.2.3 Analyse de la convergence

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin au préalable d'établir les deux résultats suivants :

(a) Pour $t \geq t_0$, la matrice $P(t)$ régie par l'EDO donnée par le système (3.10) est symétrique définie positive dès que $P(0)$ l'est. De plus, $P(t)$ est bornée et ses bornes (inférieure et supérieure) ne dépendent pas de θ.

(b) La matrice Υ régie par l'EDO donnée par le système (3.10) est bornée et sa borne supérieure ne dépendent pas de θ pour $\theta \geq 1$.

Commençons par démontrer le (a). En effet, considérons l'EDO suivante :

$$\dot{M}(t) \;=\; \theta \Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t) - \theta M(t); \; M(0) = M^T(0) > 0 \tag{3.11}$$

où $M(t)$ est une matrice $m \times m$. Il est clair que la matrice $M(t)$ est la version filtrée (par un filtre stable d'ordre 1 et de pôle $(-\theta)$ de la matrice $\theta \Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t)$. Or la matrice $\Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t)$ est à excitation persistante d'après l'hypothèse (H4) ce qui implique que la matrice $M(t)$ est symétrique définie positive dès que $M(0)$ l'est. Montrons maintenant que les bornes supérieure et inférieure de $M(t)$ ne dépendent pas de θ. Pour ce faire, réalisons une mise à l'échelle temporelle via le changement

$s = t/\theta$ et considérons la matrice $\bar{M}(t) = M(s) \triangleq M(t/\theta)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\dot{\bar{M}}(t) &= \frac{1}{\theta}\dot{M}(t/\theta) \\ &= \Upsilon^T(t)C^TC\Upsilon(t) - M(t/\theta) \\ &= \Upsilon^T(t)C^TC\Upsilon(t) - \bar{M}(t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Il est clair que l'EDO régissant $\bar{M}(t)$ ne dépend pas de θ et par conséquent il en est de même pour les bornes de $\bar{M}(t)$ et de manière équivalente pour celles de $M(t)$.

Finalement, comme la matrice $M(t) = M^T(t) > 0$, il en est de même pour $M^{-1}(t)$ qui est régie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\dot{M^{-1}}(t) &= -M^{-1}(t)\dot{M}(t)M^{-1}(t) \\ &= -\theta M^{-1}\Upsilon^T(t)C^TC\Upsilon(t)M^{-1} + \theta M^{-1} \end{aligned} \tag{3.13}$$

La matrice $M^{-1}(t)$ est régie par la même EDO que celle de $P(t)$ et nous avons donc $P(t) = M^{-1}(t)$ (ou de manière équivalente $P^{-1}(t) = M(t)$) dès que $P(0) = M^{-1}(0)$. Pour conclure, sous l'hypothèse (H4), la matrice $P(t)$ est symétrique définie positive dès que $P(0)$ l'est.

Nous allons maintenant démontrer le (b), c'est-à-dire que $\Upsilon(t)$ est bornée et sa borne supérieure ne dépend pas de θ pour $\theta \geq 1$. Pour ce faire, procédons par un changement de l'échelle temporelle comme précédemment et posons $\bar{\Upsilon}(t) = \Upsilon(t/\theta)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\Upsilon}}(t) &= \frac{1}{\theta}\dot{\Upsilon}(t/\theta) \\ &= \left(A - S^{-1}C^TC\right)\Upsilon(t/\theta) + \frac{1}{\theta}\Delta_\theta\Psi(u(t),\hat{x}(t/\theta))\Omega_\theta^{-1} \\ &= \left(A - S^{-1}C^TC\right)\bar{\Upsilon}(t) + \frac{1}{\theta}\Delta_\theta\Psi(u(t),\hat{x}(t/\theta))\Omega_\theta^{-1} \end{aligned}$$

La matrice $\bar{\Upsilon}(t)$ est donc la version filtrée, par un filtre stable ayant tous ses pôles en (-1) (valeurs propres de $\left(A - S^{-1}C^TC\right)$), de la matrice $\frac{1}{\theta}\Delta_\theta\Psi(u(t),\hat{x}(t/\theta))\Omega_\theta^{-1}$. Il s'ensuit que $\bar{\Upsilon}(t)$ est bornée dès que $\frac{1}{\theta}\Delta_\theta\Psi(u(t),\hat{x}(t/\theta))\Omega_\theta^{-1}$ l'est. Or, la non linéarité $\Psi(u(t),\hat{x}(t/\theta))$ correspond à un prolongement lipschitzien borné et elle est donc bornée pour tout $(u,\hat{x}) \in U \times \mathbb{R}^n$. Par ailleurs, la matrice Ω_θ a été choisie

de sorte que $\Delta_\theta \Psi(u(t), \hat{x}(t/\theta))\Omega_\theta^{-1}$ soit polynomial en $1/\theta$. Il s'ensuit que la matrice $\frac{1}{\theta}\Delta_\theta \Psi(u(t), \hat{x}(t/\theta))\Omega_\theta^{-1}$ est aussi polynômiale en $1/\theta$ et sa norme peut donc être bornée par une constante qui ne dépend pas de θ pour $\theta \geq 1$.

Après avoir démontré les propriétés (a) et (b) énoncées ci-dessus, nous allons maintenant démontrer la convergence exponentielle vers zéro des erreurs d'observation et d'estimation paramétrique.

Soient $\tilde{x}(t) = \hat{x} - x$ et $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \rho$ respectivement les erreurs d'observation et d'estimation paramétrique. Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} - \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)C^T K(C\tilde{x}) \\ &+ g(u,\hat{x}) - g(u,x) + (\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho + \Psi(u,\hat{x})\tilde{\rho} \qquad (3.14) \\ \dot{\tilde{\rho}} &= -\theta\Omega_\theta^{-1}P(t)\Upsilon^T(t)C^T K(C\tilde{x}) \qquad (3.15) \end{aligned}$$

Considérons les changements de variables $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$ et $\bar{\rho} = \Omega_\theta \tilde{\rho}$. En utilisant les identités introduites au chapitre précédent (2.28), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \theta A\bar{x} - \theta\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)C^T K(C\tilde{x}) \\ &+ \Delta_\theta \Psi(u,\hat{x})\Omega_\theta^{-1}\bar{\rho}(t) + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\ &+ \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) \qquad (3.16) \\ \dot{\bar{\rho}}(t) &= -\theta P(t)\Upsilon^T(t)C^T K(C\tilde{x}) \qquad (3.17) \end{aligned}$$

En tenant compte de (3.17), l'équation (3.16) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \theta A\bar{x} - \theta S^{-1}C^T K(C\tilde{x}) + \Upsilon(t)\dot{\bar{\rho}}(t) \\ &+ \Delta_\theta \Psi(u,\hat{x})\Omega_\theta^{-1}\bar{\rho}(t) + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\ &+ \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) \qquad (3.18) \end{aligned}$$

Introduisons maintenant la variable : $\eta(t) = \bar{x}(t) - \Upsilon(t)\bar{\rho}(t)$ où $\Upsilon(t)$ est la matrice $n \times m$ régie par l'EDO donnée au système (3.10). La dérivée par rapport au temps

de η peut être générée à partir de (3.18) comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}(t) &= \theta A(\eta + \Upsilon\bar{\rho}) - \theta S^{-1}C^T K(C\tilde{x}) \\
&+ \Delta_\theta \Psi(u,\hat{x})\Omega_\theta^{-1}\bar{\rho} + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\
&+ \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) - \dot{\Upsilon}\bar{\rho} \\
&= \theta A\eta - \theta S^{-1}C^T K(C\tilde{x}) + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\
&+ \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) - \left(\dot{\Upsilon} - \theta A\Upsilon - \Delta_\theta\Psi(u,\hat{x})\Omega_\theta^{-1}\right)\bar{\rho} \\
&= \theta A\eta - \theta S^{-1}C^T K(C\tilde{x}) + \theta S^{-1}C^T C\tilde{x} + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\
&+ \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) - \left(\dot{\Upsilon} - \theta(A - S^{-1}C^T C)\Upsilon - \Delta_\theta\Psi(u,\hat{x})\Omega_\theta^{-1}\right)\bar{\rho} \\
&= \theta A\eta - \theta S^{-1}C^T K(C\tilde{x}) + \theta S^{-1}C^T C\tilde{x} + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\
&+ \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

La dernière égalité tient compte du fait que la matrice $\Upsilon(t)$ est régie par l'EDO donnée par le système (3.10).

Considérons maintenant les fonctions suivantes : $V_1(\eta(t)) = \eta^T(t)S\eta(t)$, $V_2(\bar{\rho}(t)) = \bar{\rho}^T(t)P^{-1}(t)\bar{\rho}(t)$ et soit
$V(\eta(t),\bar{\rho}(t)) = V_1(\eta(t)) + V_2(\bar{\rho}(t))$ la fonction de Lyapunov candidate. En utilisant (3.7), on a :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= 2\theta\eta^T SA\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\ \bar{\rho}(t) - 2\theta\eta^T C^T K(C\tilde{x}) \\
&+ 2\eta^T S\Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho + 2\eta^T S\Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) \\
&= -\theta\eta^T S\eta + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\ \bar{\rho}(t) \\
&- 2\theta\eta^T C^T K(C\tilde{x}) + 2\eta^T S\Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\
&+ 2\eta^T S\Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\|\bar{x}\| \leq \|\eta\| + \|\Upsilon(t)\|\|\bar{\rho}\|$$

Compte tenu de la condition de Lipschitz et de la structure triangulaire de $g(u,x)$ et de chaque colonne de $\Psi(u,x)$, nous avons via la remarque (2.19) les inégalités suivantes :

$$\|\Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho\| \leq k_1\|\rho\|\|\bar{x}\| \leq c_1\|\eta\| + c_2\|\bar{\rho}\| \tag{3.21}$$

$$\|\Delta_\theta(g(u,\hat{x}) - g(u,x))\| \leq k_2\|\bar{x}\| \leq c_3\|\eta\| + c_4\|\bar{\rho}\| \tag{3.22}$$

où k_1, k_2, c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes positives qui ne dépendent pas de θ. En utilisant (3.21) et (3.22), l'inégalité (3.20) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &\leq -\theta V_1 + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\ \bar{\rho}(t) - 2\theta\eta^T C^T K(C\tilde{x}) \\
&+ c_5\|\eta\|^2 + c_6\|\eta\|\|\bar{\rho}\| \\
&\leq -\theta V_1 + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\ \bar{\rho}(t) - 2\theta\eta^T C^T K(C\bar{x}) \\
&+ k_3 V_1 + k_4\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2
\end{aligned} \tag{3.23}$$

où c_5, c_6, k_3 et $k_4 > 0$ sont des constantes positives qui ne dépendent pas de θ.

Remarquons que dans la dernière inégalité, nous avons remplacé $K(C\tilde{x})$ par $K(C\bar{x})$ puisque $C\tilde{x} = C\bar{x}$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) &= 2\bar{\rho}^T P^{-1}(t)\dot{\bar{\rho}} - \bar{\rho}^T P^{-1}(t)\dot{P}(t)P^{-1}(t)\bar{\rho} \\
&= -2\theta\bar{\rho}^T\ \Upsilon^T C^T K(C\tilde{x}) - \theta\left(\bar{\rho}^T P^{-1}(t)\bar{\rho} - \bar{\rho}^T\Upsilon^T(t)C^T C\Upsilon(t)\bar{\rho}\right) \\
&= -\theta V_2 - 2\theta\bar{\rho}^T\ \Upsilon^T C^T K(C\tilde{x}) + \theta\bar{\rho}^T\Upsilon^T(t)C^T C\Upsilon(t)\bar{\rho}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Par conséquent, en utilisant (3.23) et (3.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) \\
&\leq \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\ \bar{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(C\bar{x}) \\
&- 2\theta\bar{\rho}^T\ \Upsilon^T C^T K(C\bar{x}) + \theta\bar{\rho}^T\Upsilon^T(t)C^T C\Upsilon\bar{\rho} \\
&- (\theta - k_3)V_1 - \theta V_2 + k_4\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \\
&= \theta\left(\eta + \Upsilon\ \bar{\rho}\right)^T C^T C\left(\eta + \Upsilon\ \bar{\rho}\right) - 2\theta\left(\eta + \Upsilon\ \bar{\rho}\right)^T C^T K(C\bar{x}) \\
&- (\theta - k_3)V_1 - \theta V_2 + k_4\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \\
&= -(\theta - k_3)V_1 - \theta V_2 + k_4\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 + \theta\left(\bar{x}^T C^T C\bar{x} - 2\bar{x}^T C^T K(C\bar{x})\right) \\
&\leq -(\theta - k_3)V_1 - \theta V_2 + k_4\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2
\end{aligned} \tag{3.25}$$

La dernière égalité est obtenue en tenant compte de l'inégalité (3.9) vérifiée par la fonction de synthèse K. Finalement, pour tout $\theta > k_3$, posons $V_1^\star = (\theta - k_3)V_1$ et $V_2^\star = \theta V_2$. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -(V_1^\star + V_2^\star) + \frac{k_2}{\sqrt{\theta(\theta - k_3)}}(V_1^\star + V_2^\star) \\ &= -(1 - \frac{k_4}{\sqrt{\theta(\theta - k_3)}})(V_1^\star + V_2^\star) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Maintenant, choisissons θ tel que $(1 - \frac{k_4}{\sqrt{\theta(\theta - k_3)}}) > 0$ et $\theta > k_3$, on obtient :

$$\dot{V}(t) \leq -(\theta - k_3 - \frac{k_4}{\sqrt{\theta}})V(t) \tag{3.27}$$

Ceci termine la démonstration.

3.2.4 Quelques observateurs particuliers

Dans ce paragraphe, nous allons considérer quelques fonctions qui satisfont la condition (3.9) et qui sont donc valables pour $K(C\tilde{x}) = K(\hat{y} - y)$. Nous montrerons que certaines de ces fonctions permettent de retrouver des observateurs bien connus tels que l'observateur adaptatif à grand gain ou des observateurs adaptatifs de type modes glissants.

3.2.4.1 Observateur adaptatif à grand gain

Considérons l'expression suivante de $K(C\tilde{x})$:

$$K_{HG}(C\tilde{x}) = kC\tilde{x} \tag{3.28}$$

où k est un nombre réel positif tel que $k \geq \frac{1}{2}$. On peut facilement vérifier que (3.28) satisfait la condition (3.9). Notons que si tous les paramètres sont connus, on reconnaît facilement la structure d'un observateur à grand gain. Plus précisément, l'observateur proposé avec $K(C\tilde{x})$ spécifié dans (3.28) est en effet une version adaptative de l'observateur d'état communément appelé à grand gain (cf. par exemple [Gauthier *et al.*, 1992, Farza *et al.*, 2004]).

3.2.4.2 Observateur adaptatif de type mode glissant

Considérons l'expression suivante du vecteur $K(C\tilde{x})$:

$$K(C\tilde{x}) = ksign(C\tilde{x}) \tag{3.29}$$

où $k > 0$ est un nombre réel et 'sign' est la fonction signe usuelle. En effet, pour les systèmes à entrées-bornées sorties-bornées, la condition (3.9) est satisfaite par (3.29). Cependant, il est bien connu que l'utilisation de la fonction signe donne lieu au phénomène de réticence (connu sous le nom de 'chattering') et de ce fait elle est souvent approchée par des fonctions appropriées. Ces fonctions permettent d'une part de surmonter les problèmes de la fonction signe , d'autre part elles sont d'une grande importance en pratique du fait qu'elles sont largement utilisées dans l'implantation d'observateurs de type mode glissant. En effet, considérons la fonction suivante :

$$K_{Tanh}(C\tilde{x}) \quad = \quad k_1 Tanh(k_0 C\tilde{x}) \tag{3.30}$$

où $Tanh$ désigne la fonction tangente hyperbolique et $k_1, k_0 > 0$ étant deux nombres réels positifs.

On peut facilement vérifier que (3.30) satisfait la condition (3.9) pour des grandes valeurs de k_1. De plus, on a $\lim_{t \to +\infty} Tanh(k_0 C\tilde{x}) = sign(C\tilde{x})$.

De la même façon, on peut montrer facilement que la fonction tangente hyperbolique peut être remplacée par l'inverse de la fonction tangente $K_{ArcTan}(C\tilde{x})$ qui représente aussi une expression valide pour $K(C\tilde{x})$. En plus, on peut considérer de nouvelles expressions valides pour $K(C\tilde{x})$, par exemple en ajoutant $K_{Tanh}(C\tilde{x})$ à $K_{HG}(C\tilde{x})$. Bien sûr, le choix de $K(C\tilde{x})$ reste très large et ne se limite pas aux fonctions que nous venons de présenter.

3.3 Exemple d'illustration

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer les performances des observateurs (3.10) proposés ci-dessus à travers un exemple appartenant à la classe de systèmes (3.5). Le vecteur d'état est $x = [x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4]^T \in \mathbb{R}^4$ et les fonctions Ψ et g sont données comme suit :

$$\Psi(u,x) = \begin{pmatrix} sin(w_1 t) & 0 & 0 \\ -atan(x_2) & sin(w_2 t) & 0 \\ 0 & cos(x_3) & 0 \\ 0 & \dfrac{x_3^2}{1+x_3^2} & -\dfrac{x_4^2}{1+x_4^2} \end{pmatrix} \text{ et } g(u,x) = \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ 0 \\ -sin(w_1 t) \\ -x_4 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur de sortie est donné par $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Les valeurs de w_1 et w_2 utilisées dans la simulation sont respectivement 20 et 40.

Notre objectif consiste à estimer conjointement les états non mesurés x_3 et x_4 et les trois paramètres inconnus ρ_i, $i = 1, \ldots, 3$. Ceci est réalisé par l'utilisation des observateurs de la forme (3.10).

3.3.1 Résultats de simulation

Les performances des observateurs adaptatifs (3.10) ont été testées en simulation dans l'environnement Matlab-Simulink. Pour se rapprocher du cas réel, un bruit additif centré de type gaussien d'écart-type 10^{-2} a été ajouté à chacune des variables de sorties x_1 et x_2 (voir figure 3.1).

De nombreux essais de simulation ont été effectués en utilisant différentes expressions de la fonction de synthèse de l'observateur, $K(C\tilde{x})(K(C\tilde{x}) = K_{HG}(C\tilde{x})$ et $K(C\tilde{x}) = k_1 Tanh(k_0 C\tilde{x}))$ et différentes valeurs de la matrice Ω_θ ($\Omega_\theta = I_3$ et $\Omega_\theta = diag(1, \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta})$). Un saut a été simulé pour chaque paramètre pendant un interval du temps égal à 5s afin de démontrer la robustesse de l'adaptation des observateurs. La valeur du paramètre de réglage θ utilisée dans toutes les simulations était de 10. La figure (3.1) représente les courbes d'évolution des sorties x_1 et x_2 ainsi que de leurs estimées $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$.

La figure (3.2) représente les courbes d'évolution des trajectoires estimées $\hat{x}_3$ et $\hat{x}_4$ simulées par l'algorithme (3.10), ainsi que de leurs vraies valeurs x_3 et x_4 issues de la simulation du modèle.

Les courbes d'évolution des paramètres estimés $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ et $\hat{\rho}_3$ simulées par l'algorithme (3.10) avec des valeurs respectives de $\Omega_\theta = diag(1, \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta})$ et $\Omega_\theta = I_3$ sont données par

la figure (3.3).

La figure (3.4) représente les courbes d'évolution des paramètres estimés par l'algorithme (3.10) pour différentes fonctions de synthèse $K(C\tilde{x})$ avec la matrice $\Omega_\theta = I_3$.

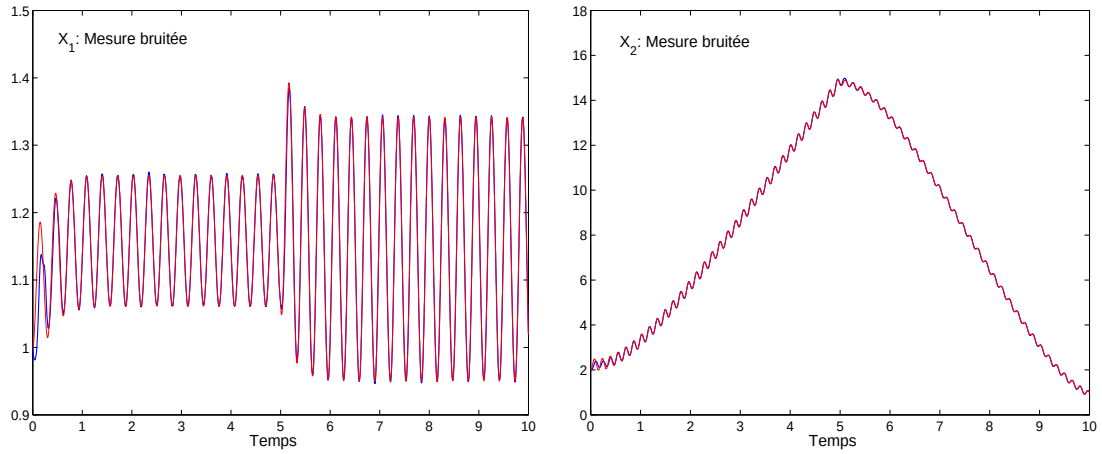

Figure 3.1: Courbes d'évolution des sorties mesurées (x_1 et x_2) entachées de bruit de mesure.

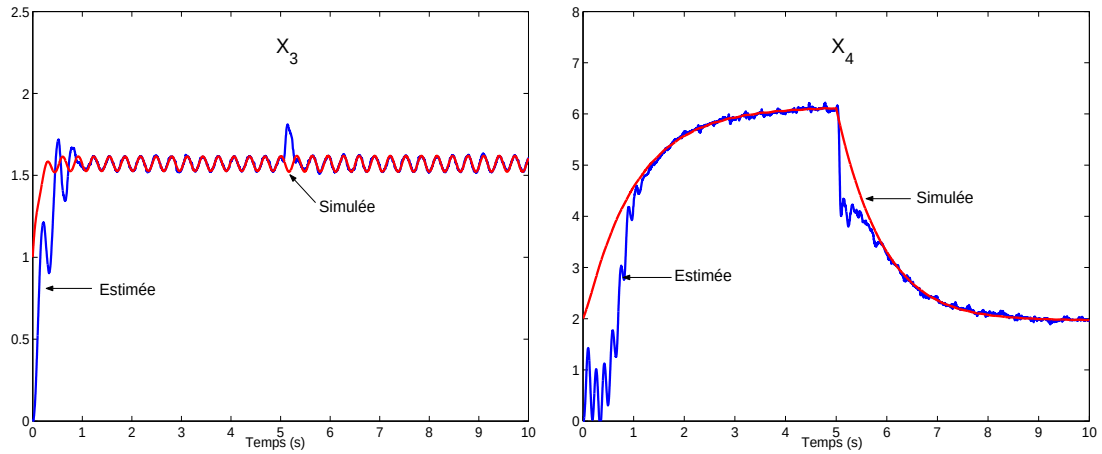

Figure 3.2: Courbes d'évolution des états x_3 et x_4.

Les résultats obtenus, par utilisation des observateurs du type (3.10), sont assez semblables et montrent clairement leurs bonnes performances. Ces derniers ont fourni une estimation satisfaisante des états ainsi que des paramètres inconnus.

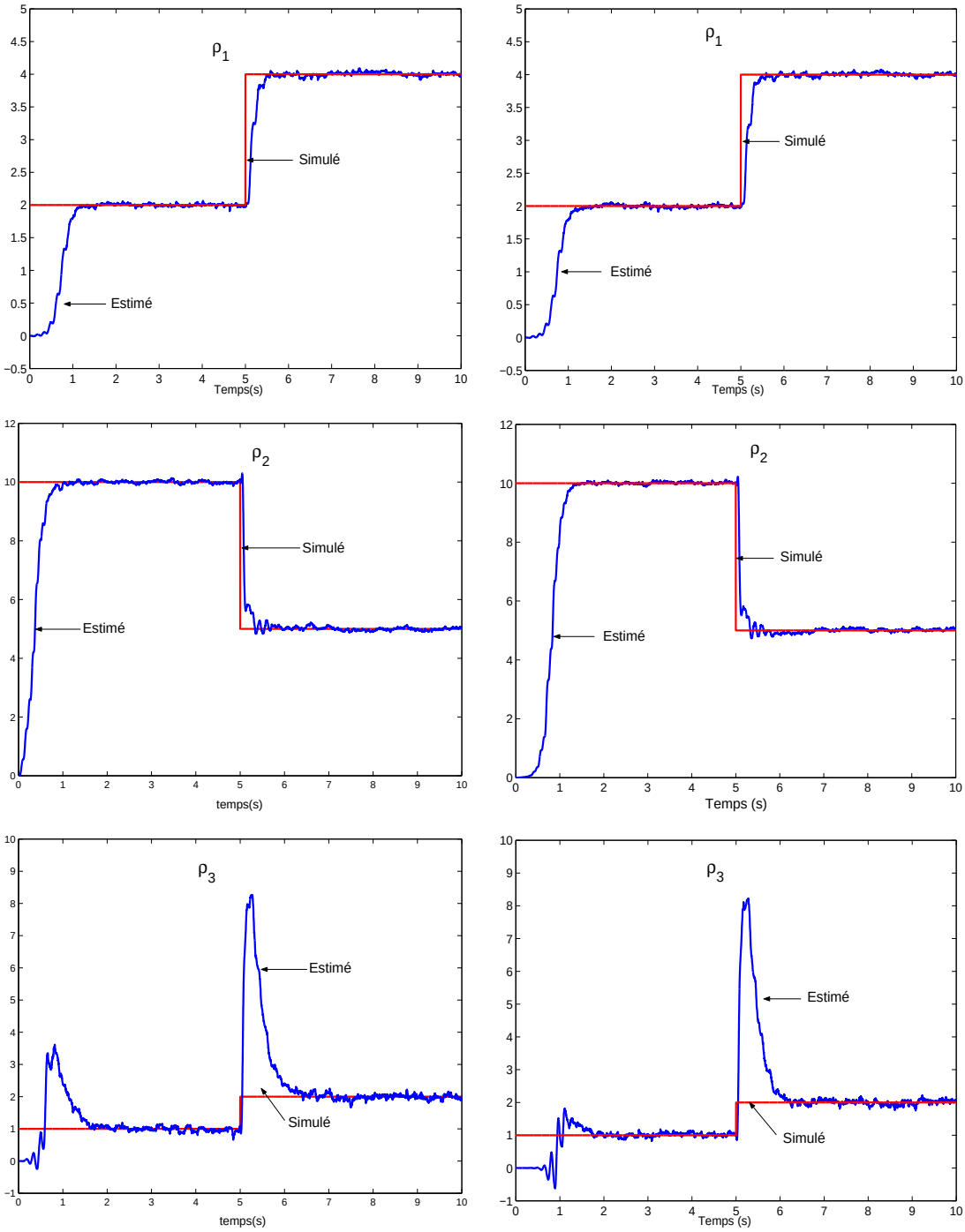

Figure 3.3: Courbes d'évolution des paramètres estimés et de leurs valeurs réelles respectives avec des valeurs de $\Omega_\theta = diag(1, \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta})$ (courbes à gauche) et $\Omega_\theta = I_3$ (courbes à droite) pour $K(C\tilde{x}) = K_{HG}(C\tilde{x})$).

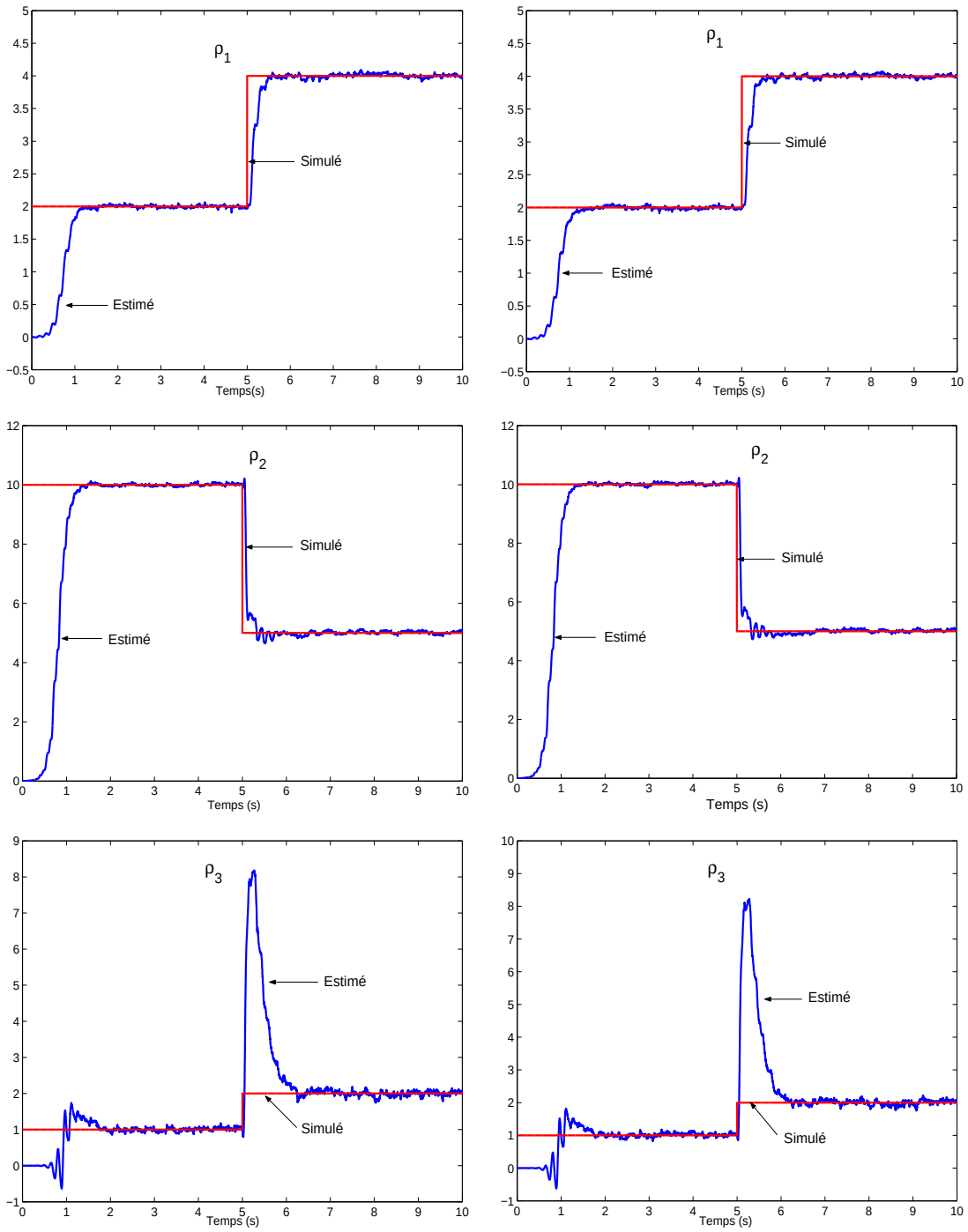

Figure 3.4: Courbes d'évolution des paramètres estimés et de leurs valeurs réelles respectives avec $K(C\tilde{x}) = K_{HG}(C\tilde{x})$ (courbes à gauche) et $K(C\tilde{x}) = k_1 tanh(k_0 C\tilde{x})$ (courbes à droite) pour une valeur de $\Omega_\theta = I_3$.

3.4 Observateur adaptatif pour une classe particulière de systèmes non linéaires

Nous allons reprendre dans cette section la classe de systèmes non linéaires (2.25) à laquelle nous allons ajouter un terme non linéaire ayant une structure triangulaire linéaire en certains paramètres constants et inconnus. Notre objectif consistera alors à proposer un observateur qui estime conjointement l'état et les paramètres inconnus. Plus précisément, considérons la classe des systèmes décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u,x) + \Psi(u,x)\rho \\ y = f^0(u,x^1) \end{cases} \tag{3.31}$$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} ; \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix} ; f(u,x) = \begin{pmatrix} f^1(u,x^1,x^2) \\ f^2(u,x^1,x^2,x^3) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u,x) \\ f^q(u,x) \end{pmatrix} ;$$

$$\Psi^T(u,x) = \begin{pmatrix} \Psi_1^T(u,x) \\ \Psi_2^T(u,x) \\ \vdots \\ \\ \Psi_m^T(u,x) \end{pmatrix} ; \Psi_j(u,x) = \begin{pmatrix} \Psi_j^1(u,x^1) \\ \Psi_j^2(u,x^1,x^2) \\ \vdots \\ \\ \Psi_j^{q-1}(u,x^1,\ldots,x^{q-1}) \\ \Psi_j^q(u,x) \end{pmatrix} ;$$

La sortie $y = f^0(u,x^1) \in \mathbb{R}^p$; l'état $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1,\ldots,q$ et $p = n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_q$, $\sum_{k=1}^{q} n_k = n$; l'entrée $u(t) \in \mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions absolument continues à dérivées bornées de $\mathbb{R}^+$ dans U qui est un compact de $\mathbb{R}^s$; $f(u,x) \in \mathbb{R}^n$ avec $f^k(u,x) \in \mathbb{R}^{n_k}$; $\rho \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des paramètres inconnus supposés constants, $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,m$; $\Psi(u,x)$ est une matrice $n \times m$ et chaque $\Psi_j(u,x) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1,\ldots,m$, désigne sa $j^{ième}$ colonne avec $\Psi_j^k(u,x) \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1,\ldots,q$. Afin d'atteindre l'objectif visé, nous allons considérer une transformation mettant le système (3.31) sous la forme canonique (3.5). La synthèse d'un tel observateur nécessite l'adoption de certaines hypothèses qui seront énoncées au

fur et à mesure de cette synthèse. Pour l'instant nous adoptons les hypothèses suivantes :

(H1) Pour $0 \leq k \leq q-1$; l'application $x^{k+1} \mapsto f^k(u, x^1, \ldots, x^k, x^{k+1})$ est injective $\mathbb{R}^{n_{k+1}}$ dans $\mathbb{R}^{n_k}$. De plus, $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $k \in \{0, \ldots, q-1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall u \in U$, on a :

$$0 < \alpha^2 I_{n_{k+1}} \leq \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u,x)\right)^T \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u,x) \leq \beta^2 I_{n_{k+1}}$$

(H2) La matrice $\Psi(u(t), x(t))$ est uniformément bornée.

Dans le cas où le vecteur ρ est connu, le système (3.31) peut se ramener, par le changement de coordonnées (2.26), à la forme du système non linéaire (2.25), pour laquelle nous avons proposé un ensemble d'observateurs grâce à un choix spécifique d'une fonction de synthèse.

3.4.1 Synthèse de l'observateur

Tout d'abord, nous introduisons le changement de coordonnées (2.26) qui mettra le système (3.31) sous la forme particulière (3.5) nécessaire à l'élaboration de l'observateur. Ensuite, les équations de l'observateur seront données dans les nouvelles coordonnées avant d'être générées dans les coordonnées originales. D'après (2.28), nous pouvons générer l'expression de la dérivée par rapport au temps de z :

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x)\dot{x}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,x)\dot{u}(t) \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x)\left(f(u,x) + \Psi(u,x)\rho\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,x)\dot{u}(t) \\
&= Az + G(u,x) + \Lambda(u,x)\Psi(u,x)\rho + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x) - \Lambda(u,x)\right) \\
&\quad \left(\Lambda^+(u,x)Az + \Lambda^+(u,x)G(u,x) + \Psi(u,x)\rho\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,x)\dot{u}(t) \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (2.29), la dynamique de z peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= Az + G(u,x) + \Lambda(u,x)\Psi(u,x)\rho + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x) - \Lambda(u,x)\right) \\
&\quad \Lambda^+(u,x)(Az + \Lambda(u,x)\Psi(u,x)\rho) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,x)\dot{u}(t) \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Pour alléger les écritures, nous introduisons les notations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\Theta(u,z) &\triangleq \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,x) - \Lambda(u,x)\right)\Lambda^{+}(u,x) \\
&= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u,\Phi^{c}(z)) - \Lambda(u,\Phi^{c}(z))\right)\Lambda^{+}(u,\Phi^{c}(z)) \\
Q(u,z) &\triangleq \Lambda(u,x)\Psi(u,x) \\
&= \Lambda(u,\Phi^{c}(z))\Psi(u,\Phi^{c}(z)) \\
\varphi(u,z) &\triangleq \Theta(u,z)Az + G(u,x) \\
&= \Theta(u,z)Az + G(u,\Phi^{c}(z)) \\
\Pi(u,z) &\triangleq \Theta(u,z)Q(u,z) \\
\psi(u,\dot{u},\rho,z) &\triangleq \varphi(u,z) + \Pi(u,z)\rho + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,\Phi^{c}(z))\dot{u}(t)
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Compte tenu du fait que la fonction $\varphi(u,z)$ ainsi que chaque colonne de la matrice $\Pi(u,z)$ possèdent une structure triangulaire par rapport à z, on peut vérifier que la fonction $\psi(u,\dot{u},\rho,z)$ possède aussi une structure triangulaire, c'est-à-dire :

$$
\psi(u,\dot{u},\rho,z) = \begin{pmatrix} \psi^{1}(u,\dot{u},\rho,z^{1}) \\ \psi^{2}(u,\dot{u},\rho,z^{1},z^{2}) \\ \vdots \\ \psi^{k}(u,\dot{u},\rho,z^{1},\cdots,z^{k}) \\ \vdots \\ \psi^{q}(u,\dot{u},\rho,z) \end{pmatrix}
$$

où $\psi^{k}(u,\dot{u},\rho,z^{1},\cdots,z^{k}) \in \mathbb{R}^{n_0}$, $k = 1,\cdots,q$.

En utilisant les notations adoptées, le système (3.31) peut se mettre dans les coordonnées en z sous la forme suivante :

$$
\begin{cases} \dot{z} = Az + Q(u,z)\rho + \psi(u,\dot{u},\rho,z) \\ y = Cz = z^{1} \end{cases} \tag{3.35}
$$

où

$$
C = [I_{n_0}\ 0_{n_0}\ \ldots\ 0_{n_0}] \tag{3.36}
$$

est une matrice $n_0 \times n_0 q$.

Il est clair que le système (3.35) est sous la forme canonique (3.5). De ce fait, l'observateur (3.10) peut être synthétisé pour ce système (sous certaines hypothèses

additionnelles) et qu'un observateur dans les coordonnées originales en x existe.

(H3) Les fonctions $\Phi(u, \Phi^c(z))$, $Q(u, z)$, $\varphi(u, z)$, $\Pi(u, z)$ et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u, \Phi^c(z))$ sont globalement Lipschitziennes par rapport à z uniformément en u .

Compte tenu des hypothèses (H1) et (H3), la matrice $Q(u, \xi)$ est bornée.
L'observateur candidat que nous proposons pour le système (3.35) est le système dynamique suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{z}}(t) & = & A\hat{z} + Q(u, \hat{z})\hat{\rho}(t) + \psi(u, \dot{u}, \hat{\rho}, \hat{z}) - \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)K(\tilde{z}^1) \\ & - & \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z}))\left(\Lambda^+(u, \Phi^c(\hat{z})) - \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z}))\right)^+\right) \\ & & \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)K(\tilde{z}^1) \\ \dot{\hat{\rho}}(t) & = & -\theta\Omega_\theta^{-1}P(t)\Upsilon^T(t)K(\tilde{z}^1) \\ \dot{\Upsilon}(t) & = & \theta\left((A - S^{-1}C^TC)\right)\Upsilon(t) + \Delta_\theta Q(u(t), \hat{z}(t))\Omega_\theta^{-1}\ ; \Upsilon(0) = 0 \\ \dot{P}(t) & = & -\theta P(t)\Upsilon^T(t)C^TC\Upsilon(t)P(t) + \theta P(t);\ P(0) = P^T(0) > 0 \end{array}\right. \tag{3.37}$$

où $\hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{z}^1 \\ \hat{z}^2 \\ \vdots \\ \hat{z}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_0 q}$ avec $\hat{z}^k \in \mathbb{R}^{n_0}$, $k = 1, \ldots, q$; $\tilde{z} = \hat{z} - z$ où z est la trajectoire inconnue du système (3.35) ; $\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

Pour garantir la convergence de l'observateur, nous adoptons l'hypothèse additionnelle suivante :

(H4) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n_0 q}$, la matrice $C\Upsilon(t)$ est à excitation persistante.

En effet, nous énonçons le résultat suivant :

Théorème 3.4.1 *Supposons que le système (3.35) satisfasse les hypothèses de (H1) à (H4). Alors, le système (3.37) est un observateur adaptatif exponentiel pour le système (3.35).*

La démonstration de ce théorème est menée d'une manière identique à celle du théorème (3.2.1).

Maintenant, il est clair que l'observateur (3.37) s'écrit dans les coordonnées originales en x comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= f(u,\hat{x}) + \Psi(u,\hat{x})\hat{\rho}(t) - \theta\Lambda^{+}(u,\hat{x})\Delta_{\theta}^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^{T}(t)\right)K(\tilde{y}) \\ \dot{\hat{\rho}}(t) &= -\theta\Omega_{\theta}^{-1}P(t)\Upsilon^{T}(t)K(\tilde{y}) \\ \dot{\Upsilon}(t) &= \theta(A - S^{-1}C^{T}C)\Upsilon(t) + \Delta_{\theta}\Lambda(u,\hat{x})\Psi(u,\hat{x})\Omega_{\theta}^{-1}\ ;\Upsilon(0) = 0 \\ \dot{P}(t) &= -\theta\left(P(t)\Upsilon^{T}(t)C^{T}C\Upsilon(t)P(t) - P(t)\right);\ P(0) = P^{T}(0) > 0 \end{cases} \tag{3.38}$$

où $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1,\ldots,q$; $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ avec $\hat{\rho}_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,m$; $\tilde{y} = f^0(u,\hat{x}^1) - f^0(u,x)$ où x est la trajectoire inconnue du système (3.31).

3.4.2 Exemples d'illustration

3.4.2.1 Exemple académique

Nous proposons dans ce paragraphe de montrer les performances de cet observateur à travers un exemple académique d'illustration avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et les fonctions f et Ψ sont choisies comme suit :

$f(u,x) = \begin{pmatrix} x_2(1+x_2^2) - x_1^3 \\ -0.02x_2^3 \end{pmatrix}$ et $\Psi(u,x) = \begin{pmatrix} 3sin(19t) & 0 \\ 0 & 5\dfrac{sin(15t)}{1+3x_2^2} \end{pmatrix}$.

La sortie y est telle que $y = \begin{pmatrix} y_1 = (0.5 - sin(5t))(x_1 + x_1^3) \\ y_2 = sin(5t)(x_1 + x_1^3) \end{pmatrix}$.

Notre objectif consiste à estimer conjointement les paramètres inconnus ρ_i, $i = 1,2$ et les états x_1 et x_2.

Beaucoup d'observateurs sous la forme (3.38) ont été synthétisés en considérant différentes expressions de la fonction de synthèse $K(\tilde{y})$ comme $K_{Tanh}(\tilde{y})$, $K_{ArcTan}(\tilde{y})$, $K_{TSinh}(\tilde{y})$, etc. Compte tenu du fait que les résultats obtenus étaient presque semblables, nous allons nous limiter à présenter un seul observateur obtenu avec la

fonction de synthèse $K_{HG}(\tilde{y})$. Un saut a été simulé pour chaque paramètre à un temps égal à 20. La simulation a été réalisée sous les conditions initiales suivantes : $x_1 = 30$; $x_2 = 20$; $\hat{x}_1 = 25$; $\hat{x}_2 = 25$. Les valeurs initiales des paramètres estimés ont été arbitrairement fixées à zéro. La valeur du paramètre du réglage θ a été fixée à 15. Les résultats obtenus sont donnés dans les figures 3.5 et 3.6. Ils montrent clairement la vigilance à l'adaptation ainsi que la convergence exponentielle de l'observateur adaptatif proposé.

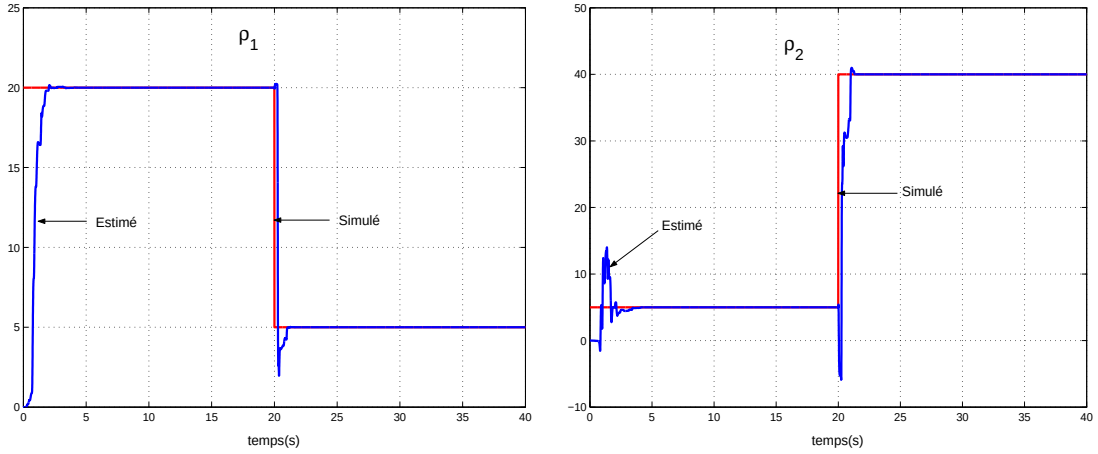

Figure 3.5: Comparaison des valeurs estimées des paramètres avec leur vraie valeur

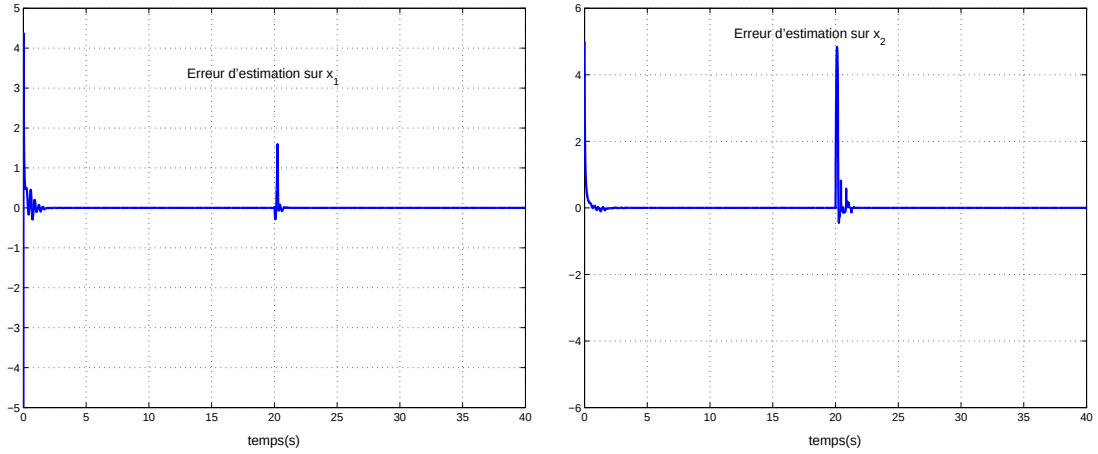

Figure 3.6: Erreurs d'estimation sur les états x_1 et x_2

3.4.2.2 Application de l'observateur à la machine asynchrone

Nous proposons dans ce paragraphe de montrer comment l'on peut utiliser l'observateur proposé pour estimer conjointement les flux rotoriques et certaines constantes

électriques du moteur asynchrone à partir de la mesure des courants statoriques et de la vitesse mécanique. En effet, le modèle de Park de la machine asynchrone décrit dans le repère (α-β) lié au stator s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{I}_{s\alpha} = K\left(\frac{1}{T_r}\Phi_{r\alpha} + p\Omega\Phi_{r\beta}\right) - \gamma I_{s\alpha} + \frac{1}{\sigma L_s}u_{s\alpha} \\ \dot{I}_{s\beta} = K\left(-p\Omega\Phi_{r\alpha} + \frac{1}{T_r}\Phi_{r\beta}\right) - \gamma I_{s\beta} + \frac{1}{\sigma L_s}u_{s\beta} \\ \dot{\Phi}_{r\alpha} = -\left(\frac{1}{T_r}\Phi_{r\alpha} + p\Omega\Phi_{r\beta}\right) + \frac{M}{T_r}I_{s\alpha} \\ \dot{\Phi}_{r\beta} = -\left(-p\Omega\Phi_{r\alpha} + \frac{1}{T_r}\Phi_{r\beta}\right) + \frac{M}{T_r}I_{s\beta} \\ \dot{\Omega} = -\frac{C_r}{J} + \frac{pM}{JL_s}\left(\Phi_{r\alpha}I_{s\beta} - \Phi_{r\beta}I_{s\alpha}\right) \\ y = \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.39}$$

avec $T_r = \dfrac{L_r}{R_r}$, $\sigma = 1 - \dfrac{M^2}{L_s L_r}$, $K = \dfrac{M}{\sigma L_s L_r}$, $\gamma = \dfrac{R_s}{\sigma L_s} + \dfrac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2}$.

où $I_{s\alpha}$, $I_{s\beta}$ sont les courants statoriques ; $u_{s\alpha}$, $u_{s\beta}$ sont les tensions statoriques ;$\Phi_{r\alpha}$, $\Phi_{r\beta}$ sont les flux rotoriques ; Ω est la vitesse angulaire ; R_s, R_r sont respectivement les résistances statoriques et rotoriques et L_s, L_r sont respectivement les inductances statoriques et rotoriques.

Les caractéristiques de la machine asynchrone considérée sont : $P_u = 1\ KW$; $U_n = 230/400V$; $I_n = 4.6/2.7A$; $N_n = 1410\ tr/min$; $p = 2$; $L_s = 0.055H$; $M = 0.049H$; $J = 0.0035Kg.m^2$; $L_r = 0.055H$; $R_s = 10\Omega$; $R_r = 1.69\Omega$.

En supposant que $I_{s\alpha}$, $I_{s\beta}$ et Ω sont mesurables, le modèle du moteur (3.39) peut se mettre sous la forme du système (3.31) comme suit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{I}_{s\alpha} \\ \dot{I}_{s\beta} \\ \dot{\Phi}_{r\alpha} \\ \dot{\Phi}_{r\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K\left(\frac{1}{T_r}\Phi_{r\alpha} + p\Omega\Phi_{r\beta}\right) \\ K\left(-p\Omega\Phi_{r\alpha} + \frac{1}{T_r}\Phi_{r\beta}\right) \\ -\left(\frac{1}{T_r}\Phi_{r\alpha} + p\Omega\Phi_{r\beta}\right) \\ -\left(-p\Omega\Phi_{r\alpha} + \frac{1}{T_r}\Phi_{r\beta}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{s\alpha} & -I_{s\alpha} & 0 \\ u_{s\beta} & -I_{s\beta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{s\alpha} \\ 0 & 0 & I_{s\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

où $\rho_1 = \gamma$, $\rho_2 = \dfrac{1}{\sigma L_s}$, $\rho_3 = \dfrac{M}{T_r}$ sont les trois paramètres qu'on désire estimer conjointement avec les flux rotoriques $\Phi_{r\alpha}$ et $\Phi_{r\beta}$. L'estimation de ces variables est effectuée à l'aide d'un observateur adaptatif à grand gain de la forme (3.38) où la fonction de synthèse a été prise de type grand gain. Les valeurs initiales du modèle et de

l'observateur ainsi que les expressions des tensions d'entrée sont les suivantes :
$x(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ et $\hat{\rho}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

$$u_{s\alpha} = 40(cos(2\pi t) + cos(12\pi t)) \ ; \quad u_{s\beta} = 40(sin(2\pi t) + sin(12\pi t))$$

Les valeurs des paramètres de réglage de l'observateur à grand gain proposé ont été fixées respectivement à : $k = 1$ et $\theta = 85$.

Les résultats d'estimation sont reportés sur les figures (3.7) et (3.8) qui correspondent respectivement à l'évolution de $\tilde{\Phi}_{r\alpha} = \hat{\Phi}_{r\alpha} - \Phi_{r\alpha}$, $\tilde{\Phi}_{r\beta} = \hat{\Phi}_{r\beta} - \Phi_{r\beta}$ et à la comparaison des estimés des paramètres $\hat{\rho}_1(t)$, $\hat{\rho}_2(t)$ et $\hat{\rho}_3(t)$ avec leurs valeurs réelles. Ces résultats démontrent clairement les bonnes performances de l'observateur proposé.

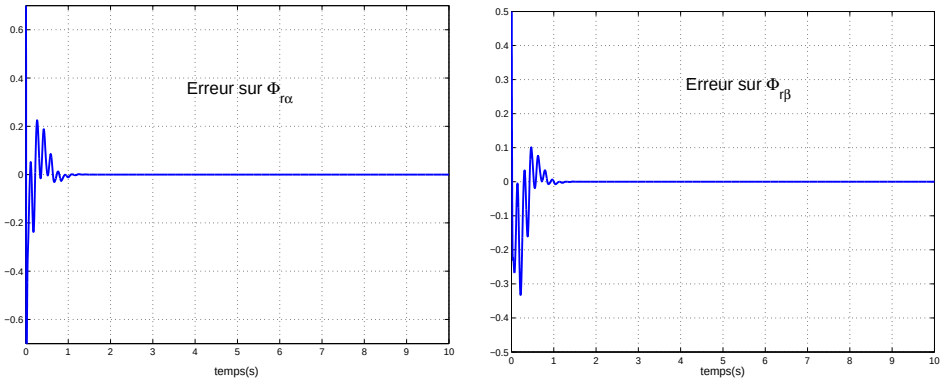

Figure 3.7: Courbes d'évolution de $\tilde{\Phi}_{r\alpha}$ et $\tilde{\Phi}_{r\beta}$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré l'estimation conjointe de l'état et de paramètres inconnus pour une forme canonique de classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables ainsi que pour une classe particulière de systèmes non linéaires uniformément observables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée sous la première forme canonique. Les observateurs proposés offrent une simplicité dans leur implementation et garantissent une convergence exponentielle sous une certaine condition d'excitation persistante. Il a été démontré que certains choix de la fonction de synthèse des observateurs proposés ont permis de retrouver les observateurs adaptatifs à grand gain et à modes glissants. Cette fonction a satisfait une certaine condition qui a été énoncée. Des résultats numériques

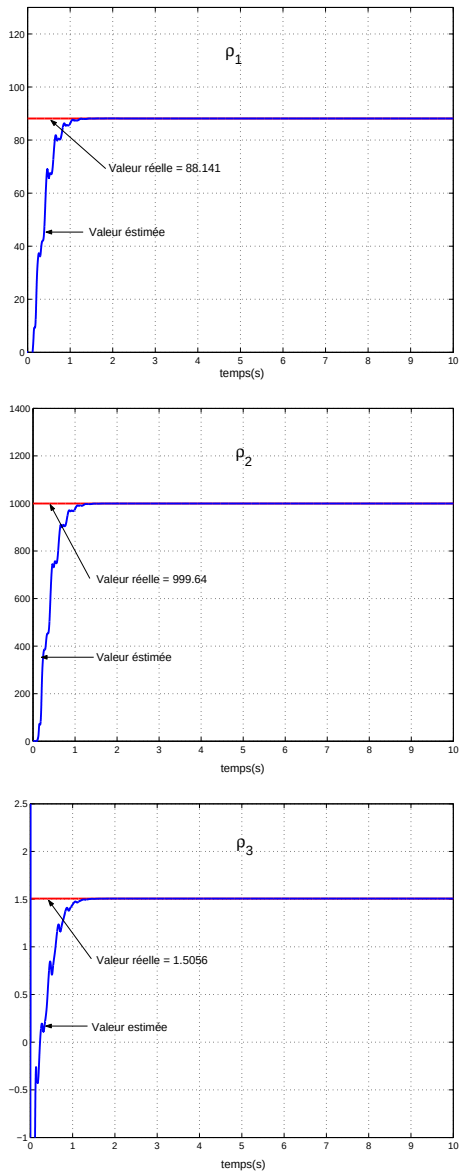

Figure 3.8: Courbes d'évolutions des paramètres estimés et de leurs valeurs réelles respectives

de simulation ont été présentés pour illustrer ces performances. Les deux classes de systèmes non linéaires considérées étant affines par rapport aux paramètres inconnus qui affectent seulement des variables d'états. Au chapitre suivant, nous allons considérer des classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables affines par rapport aux paramètres inconnus affectant les sorties du système.

Chapitre 4

Synthèse d'observateurs adaptatifs pour des classes de SNL MIMO dont les paramètres inconnus apparaissent dans la sortie

4.1 Introduction

Pour assurer la surveillance des systèmes dynamiques (procédé de production, machine, installation, etc.), fréquemment, nous faisons appel à des algorithmes détectant les défauts qui peuvent survenir. Pour ce faire, certains chercheurs ont travaillé sur le développement d'observateurs adaptatifs utilisés dans la détection et l'isolation des défauts en estimant simultanément les états non mesurables et les paramètres inconnus du système [Xu et Zhang, 2004b,a, Zhang, 2005, Zhang et Besançon, 2005]. Dans ce cas, la classe de systèmes envisagée peut être exprimée en fonction des paramètres inconnus caractérisant ces défauts. En particulier, dans certains cas de défauts capteurs, les variables de sorties du système en question seront exprimées en fonction des paramètres supposés inconnus [Zhang, 2005, Zhang et Besançon, 2005]. Dans ce chapitre, nous proposons la synthèse d'observateurs adaptatifs pour deux classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables. Dans la première classe, les paramètres inconnus apparaissent seulement dans les sorties mesurées du système. La deuxième classe étant plus générale, les paramètres inconnus affectent

les variables d'état et les sorties mesurées. Ces observateurs, inspirés des observateurs proposés dans [Besançon *et al.*, 2006, Zhang et Besançon, 2005], sont caractérisés par une convergence exponentielle sous une condition d'excitation persistante donnée

4.2 Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une première forme de classes de SNL

Dans cette partie, nous allons considérer la synthèse d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables. Cette classe est semblable à celle du système (3.5) où les paramètres inconnus affectent seulement la sortie. Chaque paramètre peut caractériser un défaut de capteur.

4.2.1 Classe de systèmes considérée

Considérons la classe de systèmes, suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g(u,x) \\ y = Cx + \varphi(u,s)\rho \end{cases} \tag{4.1}$$

où la sortie $y \in \mathbb{R}^p$; l'état $x \in \mathbb{R}^n$, $x^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \cdots, q$, $n = p \times q$; l'entrée $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^\nu$, U étant l'ensemble des valeurs admissibles de l'entrée ; s est un signal connu ; $\rho \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des paramètres constants inconnus, $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$; $g(u,x) \in \mathbb{R}^n$ est une fonction triangulaire par rapport à x, avec $g^k(u,x) \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, q$; $\varphi(u,s)$ est une matrice $p \times m$; les matrices A et C sont respectivement définies par (3.2) et (3.3).

Le système (4.1) peut être mis sous la forme du système (3.5), c'est-à-dire les paramètres n'apparaîtront plus dans la sortie mais dans la dynamique des variables d'état d'un certain système. En effet, considérons l'état augmenté $z = \begin{bmatrix} \sigma \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ x^1 \\ \vdots \\ x^q \end{bmatrix}$ où $\sigma \in \mathbb{R}^p$ est telle que $\dot{\sigma} = y = x^1 + \varphi(u,s)\rho$.

Il est clair que le système dynamique associé à z et ayant pour sortie σ (l'intégrale de la vraie sortie du système associé à x) est sous la forme du système (3.5), et un observateur adaptatif du type (3.10) peut être synthétisé pour l'estimation simultanée de l'état et du vecteur des paramètres ρ. Dans ce qui suit, nous allons proposer un autre observateur qui ne nécessité pas d'augmenter l'état du système original et qui sera donc directement synthétisé à partir de ce système.

La synthèse d'un tel observateur nécessite l'adoption de certaines hypothèses qui seront énoncées au fur et à mesure de cette synthèse. Pour l'instant nous adoptons les hypothèses suivantes :

(H1) La matrice $\varphi(u,s)$ est uniformément bornée pour tout $u \in U$.

(H2) La fonction $g(u,x)$ est globalement Lipschitziennes par rapport à x uniformément en u.

4.2.2 Synthèse de l'observateur

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x} + g(u,\hat{x}) - \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1}C^T + \Upsilon P\Phi^T(t)\right)K(\tilde{y}) \\ \dot{\hat{\rho}}(t) &= -\theta P\Phi^T(t)K(\tilde{y}) \\ \dot{\Upsilon}(t) &= \theta\left(A - S^{-1}C^TC\right)\Upsilon(t) - \theta S^{-1}C^T\varphi(u,s)\ ;\Upsilon(0)=0 \\ \dot{P}(t) &= -\theta P(t)\Phi^T(t)\Phi(t)P(t) + \theta P(t);\ P(0) = P^T(0) > 0 \\ \Phi(t) &= C\Upsilon(t) + \varphi(u,s) \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1,\ldots,q$; $\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$; S, C et Δ_θ sont données respectivement par (3.7), (3.3) et (3.6) ; $K(\tilde{y})$ est une matrice rectangulaire satisfaisant la condition (3.9) ; u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système (4.1) et θ est un nombre réel positif ($\theta > 0$).

Avant d'énoncer le résultat principal de cette contribution, nous avons besoin de l'hypothèse additionnelle suivante :

(H3) La matrice $\Phi(t) \in \mathbb{R}^p$ est à excitation persistante, c'est-à-dire

$$\exists \delta_3, \delta_4 > 0; \exists T > 0; \forall t \geq 0 :$$
$$\delta_3 I_m \leq \int_t^{t+T} \Phi^T(\tau)\Phi(\tau)d\tau \leq \delta_4 I_m$$

Nous énonçons maintenant le théorème suivant :

Théorème 4.2.1 *Supposons que le système (4.1) satisfasse les hypothèses* **(H1)**, **(H2)** *et* **(H3)**. *Alors le système (4.2) est un observateur adaptatif exponentiel global pour le système (4.1).*

La preuve de ce théorème est détaillée dans la suite.

4.2.3 Analyse de la convergence

Soient $\tilde{x}(t) = \hat{x} - x$ et $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \rho$, alors

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + g(u,\hat{x}) - g(u,x) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TK(\tilde{y}) - \theta\Delta_\theta^{-1}\Upsilon P\Phi^TK(\tilde{y}) \quad (4.3)$$

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\theta P\Phi^TK(\tilde{y}) \quad (4.4)$$

Considérons le changement de variable $\bar{x} = \Delta_\theta\tilde{x}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) - \theta S^{-1}C^TK(\tilde{y}) - \theta\Upsilon P\Phi^TK(\tilde{y}) \\ &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) - \theta S^{-1}C^TK(\tilde{y}) + \Upsilon\dot{\tilde{\rho}} \quad (4.5)\end{aligned}$$

Introduisons la variable : $\eta(t) = \bar{x}(t) - \Upsilon(t)\tilde{\rho}(t)$ où $\Upsilon(t)$ est une matrice $n \times m$, régie par l'équation différentielle (4.2). On peut montrer que l'on a :

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) &= \theta A\eta + \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) - \theta S^{-1}C^TK(\tilde{y}) \\ &+ \left(\theta(A - S^{-1}C^TC)\Upsilon(t) - \theta S^{-1}C^T\varphi(u,s) - \dot{\Upsilon}\right)\tilde{\rho} \\ &+ \theta S^{-1}C^T\left(C\Upsilon(t) + \varphi(u,s)\right)\tilde{\rho} \\ &= \theta A\eta + \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) - \theta S^{-1}C^TK(\tilde{y}) \\ &+ \theta S^{-1}C^T\Phi\tilde{\rho} \quad (4.6)\end{aligned}$$

LA dernière égalité tient compte du fait la matrice $\Upsilon(t)$ est régie par l'équation différentielle (4.2).

Soient les fonctions $V_1(\eta(t)) = \eta^T(t)S\eta(t)$, $V_2(\tilde{\rho}(t)) = \tilde{\rho}^T(t)P^{-1}(t)\tilde{\rho}(t)$ où $P(t)$ est donnée par (4.2) et soit $V(\eta(t), \bar{\rho}(t)) = V_1(\eta(t)) + V_2(\bar{\rho}(t))$ la fonction de Lyapunov candidate. En utilisant (3.7), on a :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= 2\theta\eta^T SA\eta + 2\eta^T S\Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) - 2\theta\eta^T C^T K(\tilde{y}) \\
&+ 2\theta\eta^T C^T \Phi\tilde{\rho} \\
&= -\theta V_1 + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T \Phi(t)\tilde{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(\tilde{y}) \\
&+ 2\eta^T S\Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) \\
&\leq -\theta V_1 + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T \Phi(t)\tilde{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(\tilde{y}) \\
&+ 2\|\eta\|\|S\|\|\Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right)\| \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\|\bar{x}\| \leq \|\eta\| + \|\Upsilon(t)\|\|\tilde{\rho}\|$$

Compte tenu de la condition de Lipschitz sur $g(u,x)$ et comme chaque terme de cette matrice a une structure triangulaire, on peut montrer que l'on a :

$$\|\Delta_\theta(g(u,\hat{x}) - g(u,x))\| \leq k_1\|\bar{x}\| \leq c_1\|\eta\| + c_2\|\tilde{\rho}\| \qquad (4.8)$$

où k_1, c_1 et c_2 sont des constantes positives qui ne dépendent pas de θ.

Les développements précédents permettent de réécrire l'inégalité (4.7) comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &\leq -\theta V_1 + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T \Phi(t)\tilde{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(\tilde{y}) \\
&+ c_3\|\eta\|^2 + c_4\|\eta\|\|\bar{\rho}\| \\
&\leq -\theta V_1 + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T \Phi(t)\tilde{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(\tilde{y}) \\
&+ k_2 V_1 + k_3\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

où c_3, c_4, k_2 et $k_3 > 0$ sont des constantes positives qui ne dépendent pas de θ.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) &= 2\tilde{\rho}^T P^{-1}\ \dot{\tilde{\rho}} - \tilde{\rho}^T P^{-1}\ \dot{P}(t)P^{-1}\ \tilde{\rho} \\
&= -\theta V_2 + \theta\tilde{\rho}^T \Phi^T\ \Phi\ \tilde{\rho} - 2\theta\tilde{\rho}^T \Phi^T\ K(\tilde{y}) \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) \\
&\leq \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T \Phi(t)\tilde{\rho} + \theta\tilde{\rho}^T \Phi^T \ \Phi \ \tilde{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(\tilde{y}) \\
&- 2\theta\tilde{\rho}^T \Phi^T \ K(\tilde{y}) - (\theta - k_2)V_1 - \theta V_2 + k_3\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \\
&= \theta\left[C\eta + \Phi \ \tilde{\rho}\right]^T \left[C\eta + \Phi \ \tilde{\rho}\right] - 2\theta\left[C\eta + \Phi \ \tilde{\rho}\right]^T K(\tilde{y}) \\
&- (\theta - k_2)V_1 - \theta V_2 + k_3\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \\
&= \theta\left[C\bar{x} + \varphi(u,s) \ \tilde{\rho}\right]^T \left[C\bar{x} + \varphi(u,s) \ \tilde{\rho}\right] - 2\theta\left[C\bar{x} + \varphi(u,s) \ \tilde{\rho}\right]^T K(\tilde{y}) \\
&- (\theta - k_2)V_1 - \theta V_2 + k_3\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \\
&= \theta\Big(\left[C\tilde{x} + \varphi(u,s) \ \tilde{\rho}\right]^T \left[C\tilde{x} + \varphi(u,s) \ \tilde{\rho}\right] - 2\left[C\tilde{x} + \varphi(u,s) \ \tilde{\rho}\right]^T K(\tilde{y})\Big) \\
&- (\theta - k_2)V_1 - \theta V_2 + k_3\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \\
&\leq -(\theta - k_2)V_1 - \theta V_2 + k_3\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en tenant compte de l'inégalité (3.9) vérifiée par la fonction de synthèse K. Finalement, pour tout $\theta > k_2$, posons $V_1^\star = (\theta - k_2)V_1$ et $V_2^\star = \theta V_2$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -(V_1^\star + V_2^\star) + \frac{k_3}{\sqrt{\theta(\theta - k_2)}}(V_1^\star + V_2^\star) \\
&= -(1 - \frac{k_3}{\sqrt{\theta(\theta - k_2)}})(V_1^\star + V_2^\star) \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Maintenant, choisissons θ telles que $(1 - \frac{k_3}{\sqrt{\theta(\theta - k_2)}}) > 0$ et $\theta > k_3$, on obtient :

$$\dot{V}(t) \leq -(\theta - k_3 - \frac{k_2}{\sqrt{\theta}})V(t) \qquad (4.13)$$

Ceci termine la démonstration.

4.3 Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une deuxième classes de SNL

Dans cette partie, nous allons considérer la synthèse d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables. Cette classe est plus générale que la première du fait que les paramètres inconnus affectent non seulement la sortie mais aussi l'état.

4.3.1 Classe de systèmes considérée

Considérons la classe de systèmes, suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g(u,x) + \Psi(u,x)\rho \\ y = Cx + \varphi(u,s)\rho \end{cases} \tag{4.14}$$

où la sortie $y \in \mathbb{R}^p$; l'état $x \in \mathbb{R}^n$, $x^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \cdots, q$, $n = p \times q$; l'entrée $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^\nu$, U étant l'ensemble des valeurs admissibles de l'entrée ; s est un signal connu ; $\rho \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des paramètres constants inconnus, $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$; $g(u,x) \in \mathbb{R}^n$, est triangulaire par rapport à x, avec $g^k(u,x) \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, q$; $\varphi(u,s)$ est une matrice $n_p \times m$; la matrice $\Psi(u,x)$ est une matrice $n \times m$ et chaque $\Psi_j(u,x) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, m$, désigne sa $j^{ième}$ colonne et est triangulaire par rapport à x, avec $\Psi_j^k(u,x) \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, q$; les matrices A et C sont respectivement définies par (3.2) et (3.3). Notre objectif consiste à faire la synthèse d'un observateur adaptatif pour le système (4.14), permettant l'estimation conjointe de l'état x et du vecteur des paramètres inconnus ρ.

La synthèse d'un tel observateur nécessite l'adoption de certaines hypothèses qui seront énoncées au fur et à mesure de cette synthèse. Pour l'instant nous adoptons les hypothèses suivantes :

(H1′) Les matrices $\varphi(u,s)$ et $\Psi(u,x)$ sont uniformément bornées pour tout $u \in U$ et $x \in X$.

(H2′) Les fonctions $g(u,x)$ et $\Psi(u,x)$ sont globalement Lipschitziennes par rapport à x uniformément en u où $(u,x) \in U \times X$.

4.3.2 Synthèse de l'observateur

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x} + g(u,\hat{x}) + \Psi(u,\hat{x})\hat{\rho} - \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1}C^T + \Upsilon P\Phi^T\right)K(\tilde{y}) \\ \dot{\hat{\rho}}(t) &= -\theta P\Phi^T K(\tilde{y}) \\ \dot{\Upsilon}(t) &= \theta\left(A - S^{-1}C^TC\right)\Upsilon(t) + \Delta_\theta\Psi(u(t),\hat{x}) - \theta S^{-1}C^T\varphi(u,s)\ ;\Upsilon(0) = 0 \\ \dot{P}(t) &= -\theta P(t)\Phi^T(t)\Phi(t)P(t) + \theta P(t);\ P(0) = P^T(0) > 0 \\ \Phi(t) &= C\Upsilon(t) + \varphi(u,s) \end{cases} \tag{4.15}$$

où $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, q$; $\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$; S, C et Δ_θ sont données respectivement par (3.7), (3.3) et (3.6) ;$K(\tilde{y})$ est une matrice rectangulaire satisfaisant la condition (3.9) ; u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système (4.14) et θ est un nombre réel positif ($\theta > 0$).

Nous énonçons maintenant le théorème suivant :

Théorème 4.3.1 *Supposons que le système (4.14) satisfasse les hypothèses* **(H1′)**, **(H2′)** *et* **(H3)**. *Alors le système (4.15) est un observateur adaptatif exponentiel global pour le système (4.14).*

La preuve de ce théorème est détaillée dans la suite.

4.3.3 Analyse de la convergence

Soient $\tilde{x}(t) = \hat{x} - x$ et $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \rho$, alors :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + g(u,\hat{x}) - g(u,x) + \Psi(u,\hat{x})\tilde{\rho} + (\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\ &- \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TK(\tilde{y}) - \theta\Delta_\theta^{-1}\Upsilon P\Phi^TK(\tilde{y}) \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\theta P\ \Phi^TK(\tilde{y}) \tag{4.17}$$

Considérons le changement de variable $\bar{x} = \Delta_\theta\tilde{x}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho + \Delta_\theta\Psi(u,\hat{x})\tilde{\rho} \\ &- \theta S^{-1}C^TK(\tilde{y}) - \theta\Upsilon P\Phi^TK(\tilde{y}) \\ &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho + \Delta_\theta\Psi(u,\hat{x})\tilde{\rho} \\ &- \theta S^{-1}C^TK(\tilde{y}) + \Upsilon\dot{\tilde{\rho}} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Introduisons la variable : $\eta(t) = \bar{x}(t) - \Upsilon(t)\tilde{\rho}(t)$. On peut montrer que l'on a :

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}(t) &= \theta A\eta + \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\
&+ \left(\theta(A - S^{-1}C^TC)\Upsilon(t) - \theta S^{-1}C^T\varphi(u,s) + \Delta_\theta\Psi(u,\hat{x}) - \dot{\Upsilon}\right)\tilde{\rho} \\
&+ \theta S^{-1}C^T\left(C\Upsilon(t) + \varphi(u,s)\right)\tilde{\rho} - \theta S^{-1}C^TK(\tilde{y}) \\
&= \theta A\eta + \Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) + \Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho \\
&+ \theta S^{-1}C^T\Phi(t)\tilde{\rho} - \theta S^{-1}C^TK(\tilde{y}) \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Soient les fonctions $V_1(\eta(t)) = \eta^T(t)S\eta(t)$, $V_2(\tilde{\rho}(t)) = \tilde{\rho}^T(t)P^{-1}(t)\tilde{\rho}(t)$ et soit $V(\eta(t),\bar{\rho}(t)) = V_1(\eta(t)) + V_2(\bar{\rho}(t))$ la fonction de Lyapunov candidate. En utilisant (3.7), on a :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= 2\theta\eta^TSA\eta + 2\eta^TS\Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) + 2\eta^TS\Delta_\theta\left(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x)\right)\rho \\
&+ 2\eta^TC^T\Phi(t)\tilde{\rho} - 2\theta\eta^TC^TK(\tilde{y}) \\
&= -\theta V_1 - 2\theta\eta^TC^TK(\tilde{y}) + 2\theta\eta^TC^T\Phi\ \tilde{\rho} + \theta\eta^TC^TC\eta \\
&+ 2\eta^TS\Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right) + 2\eta^TS\Delta_\theta\left(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x)\right)\rho \\
&\leq -\theta V_1 - 2\theta\eta^TC^TK(\tilde{y}) + 2\theta\eta^TC^T\Phi\ \tilde{\rho} + \theta\eta^TC^TC\eta \\
&+ 2\|\eta\|\|S\|\left\{\|\Delta_\theta\left(g(u,\hat{x}) - g(u,x)\right)\| + \|\Delta_\theta\left(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x)\right)\rho\|\right\} \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\|\bar{x}\| \leq \|\eta\| + \|\Upsilon(t)\|\|\tilde{\rho}\|$$

Compte tenu de la condition de Lipschitz sur $g(u,x)$, $\Psi(u,x)$ et comme chaque terme de cette matrice a une structure triangulaire, on peut montrer que l'on a :

$$\|\Delta_\theta(\Psi(u,\hat{x}) - \Psi(u,x))\rho\| \leq k_1^{'}\|\rho\|\|\bar{x}\| \leq c_1\|\eta\| + c_2\|\bar{\rho}\| \qquad (4.21)$$

$$\|\Delta_\theta(g(u,\hat{x}) - g(u,x))\| \leq k_2^{'}\|\bar{x}\| \leq c_3\|\eta\| + c_4\|\bar{\rho}\| \qquad (4.22)$$

où k_1, k_2, c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes positives qui ne dépendent pas de θ. Les développements précédents permettent de réécrire l'inégalité (4.20) comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &\leq -\theta V_1 - 2\theta\eta^TC^TK(\tilde{y}) + 2\theta\eta^TC^T\Phi\ \tilde{\rho} + \theta\eta^TC^TC\eta \\
&+ c_5\|\eta\|^2 + c_6\|\eta\|\|\bar{\rho}\| \\
&\leq -\theta V_1 - 2\theta\eta^TC^TK(\tilde{y}) + 2\theta\eta^TC^T\Phi\ \tilde{\rho} + \theta\eta^TC^TC\eta \\
&+ k_3^{'}V_1 + k_4^{'}\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

où c_5, c_6, k_3 et $k_4 > 0$ sont des constantes positives qui ne dépendent pas de θ.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= 2\tilde{\rho}^T P^{-1}\ \dot{\tilde{\rho}} - \tilde{\rho}^T P^{-1}\ \dot{P}\ P^{-1}\ \tilde{\rho} \\ &= -\theta V_2 + \theta\tilde{\rho}^T\Phi^T\ \Phi\ \tilde{\rho} - 2\theta\tilde{\rho}^T\Phi^T\ K(\tilde{y}) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Il s'ensuit,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) \\ &\leq \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T\Phi(t)\tilde{\rho} + \theta\tilde{\rho}^T\Phi^T\ \Phi\ \tilde{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(\tilde{y}) \\ &- 2\theta\tilde{\rho}^T\Phi^T\ K(\tilde{y}) - (\theta - k_3^{'})V_1 - \theta V_2 + k_4^{'}\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \\ &\leq -(\theta - k_3^{'})V_1 - \theta V_2 + k_4^{'}\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Finalement, pour tout $\theta > k_3^{'}$, posons $V_1^\star = (\theta - k_3^{'})V_1$ et $V_2^\star = \theta V_2$. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -(V_1^\star + V_2^\star) + \frac{k_4^{'}}{\sqrt{\theta(\theta - k_3^{'})}}(V_1^\star + V_2^\star) \\ &= -(1 - \frac{k_4^{'}}{\sqrt{\theta(\theta - k_3^{'})}})(V_1^\star + V_2^\star) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Maintenant, choisissons θ telles que $(1 - \frac{k_4^{'}}{\sqrt{\theta(\theta - k_3^{'})}}) > 0$ et $\theta > k_3$, on obtient :

$$\dot{V}(t) \leq -(\theta - k_4^{'} - \frac{k_3^{'}}{\sqrt{\theta}})V(t) \tag{4.27}$$

Ceci termine la démonstration.

4.4 Exemple d'illustration

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer les performances de l'observateur adaptatif (4.15) proposé à travers un exemple appartenant à la classe de systèmes (4.14). Le vecteur d'état est $x = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4$, $\rho = [\rho_1\ \rho_2\ \rho_3]^T$et les fonctions Ψ, g et φ sont données comme suit :

$$\Psi(u,x) = \begin{pmatrix} sin(w_1 t) & 0 & 0 \\ -atan(x_2) & sin(w_2 t) & 0 \\ 0 & cos(x_3) & 0 \\ 0 & \dfrac{x_3^2}{1+x_3^2} & -\dfrac{x_4^2}{1+x_4^2} \end{pmatrix}, \; g(u,x) = \begin{pmatrix} -x_1^3 \\ 0 \\ -sin(w_1 t) \\ -x_4 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\varphi(u,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5sin(w_3 t) \end{pmatrix}$$

Le vecteur de sortie est donné par $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 5sin(w_3 t)\rho_3 \end{pmatrix}$.

Les valeurs de w_1, w_2 et w_3 utilisées dans la simulation sont respectivement 20, 40 et 15.

Notre objectif consiste à estimer conjointement les états non mesurés x_3 et x_4 et les trois paramètres inconnus ρ_i, $i = 1, \ldots, 3$. Ceci est réalisé par l'utilisation de l'observateur (4.15).

4.4.1 Résultats de simulation

Les performances de l'observateur adaptatif (4.15) ont été testées en simulation dans l'environnement Matlab-Simulink.

De nombreux essais de simulation ont été effectués en utilisant différentes expressions de la fonction de synthèse de l'observateur, $K(\tilde{y})$. Étant donné que les résultats obtenus sont assez semblables, nous nous référons seulement à ceux obtenus avec la fonction $K(\tilde{y}) = K_{HG}(\tilde{y})$; la valeur de θ utilisée dans la simulation était de 11. Les résultats d'estimation sont donnés dans les figures (4.1) et (4.2). Un saut a été simulé pour chaque paramètre pendant un intervalle de temps égal à 5s afin de démontrer la robustesse de l'adaptation des observateurs.
Les résultats obtenus montrent clairement les bonnes performances de l'observateur (4.15). Ces derniers ont fourni une estimation satisfaisante des états ainsi que des paramètres inconnus avec une convergence exponentielle.

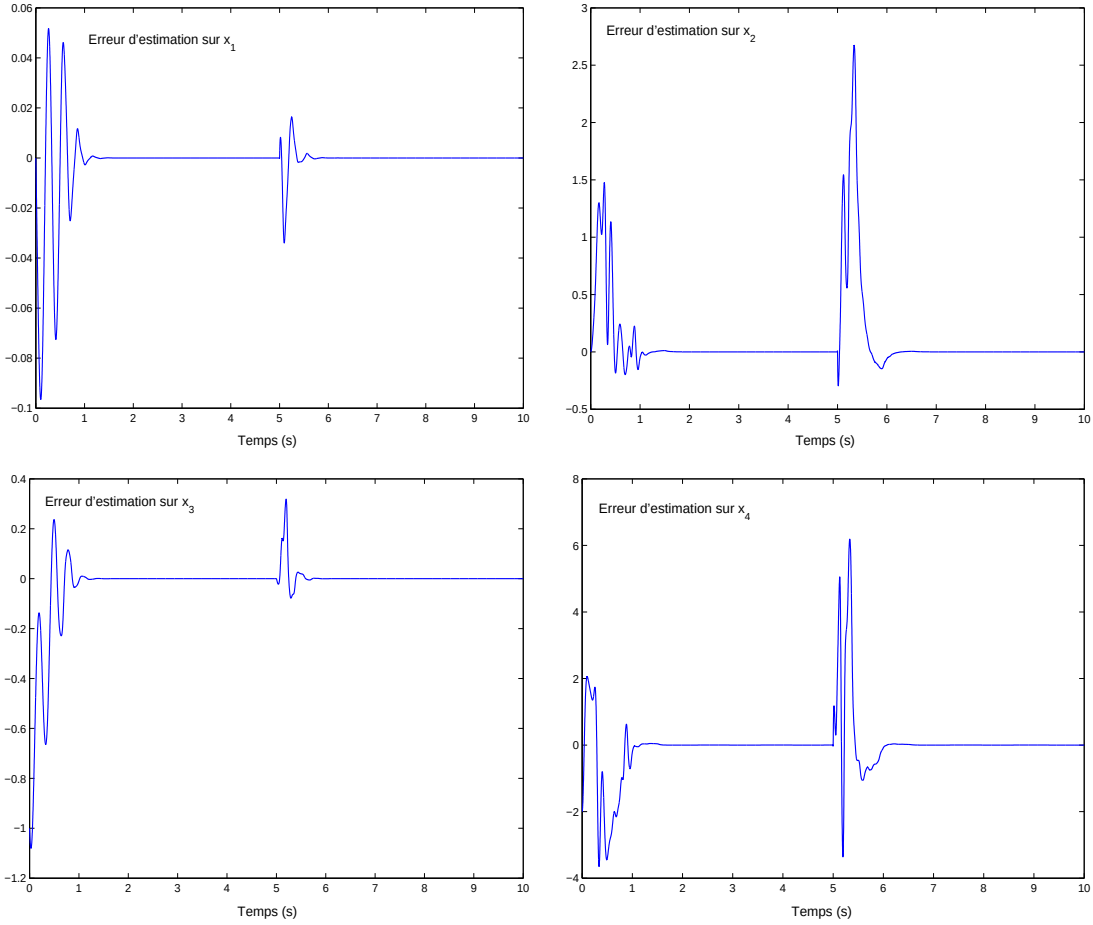

Figure 4.1: Courbes d'évolution des erreurs d'estimation $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ et $\tilde{x}_4$

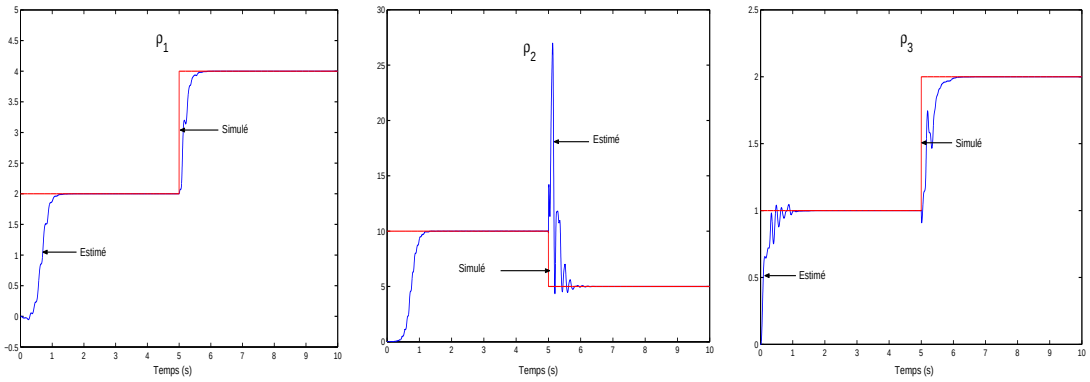

Figure 4.2: Courbes d'évolution des paramètres estimés et de leurs valeurs réelles respectives

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré l'estimation conjointe de l'état et de paramètres inconnus pour deux classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables qui peuvent caractériser certains défauts capteurs. Les observateurs proposés offrent une simplicité dans leur implementation et garantissent une convergence exponentielle sous une condition d'excitation persistante. Des résultats numériques de simulation ont été présentés pour illustrer les performances de l'observateur proposé pour la deuxième classe qui était plus générale que la première. Nous remarquons que toutes les classes de systèmes non linéaires considérées à ce niveau sont affines par rapport aux paramètres inconnus supposés constants. Ce pendant, il existe d'autres classes de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables avec une paramétrisation non linéaire et qui font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

Observateurs adaptatifs pour une classe SNL avec une paramétrisation non linéaire

5.1 Introduction

Tous les systèmes considérés aux chapitres précédents en vue de synthèse d'observateurs adaptatifs sont linéaires en les paramètres inconnus (paramétrisation linéaire). Dans la littérature, on dispose de très peu de résultats concernant l'estimation conjointe de l'état et des paramètres avec une paramétrisation non linéaire [Loh *et al.*, 1999, Kojic *et al.*, 1999, Skantze *et al.*, 2000, Kojic et Annaswamy, 2002]. Pourtant, la paramétrisation non linéaire est inévitable dans beaucoup de modèles dynamiques représentant des procédés physiques même dans le cas où ces modèles ne renferment que très peu de variables d'état. Nous donnerons plus loin dans ce chapitre, lors de la simulation, deux exemples très simples représentants deux procédés physiques avec une paramétrisation non linéaire. Les tentatives pour se ramener à une paramétrisation linéaire aboutissent en général à une sur-paramétrisation avec ses problèmes sous-jacents (condition forte d'excitation persistante, non injectivité de la transformation de linéarisation etc.) [Kojic et Annaswamy, 2002]. De plus, dans la littérature, lorsqu'une paramétrisation non linéaire est considérée, les non linéarités associées à cette sur-paramétrisation ne dépendent en général que de variables connues (mesurées). Cette remarque est d'ailleurs valable même dans la plupart des

cas des paramétrisations linéaires. Signalons enfin que les travaux faisant apparaître des paramétrisation non linéaires traitent généralement de la commande adaptative et le problème de convergence des paramètres est rarement soulevé. Signalons toutefois les travaux décrits dans [Kojic et Annaswamy, 2002], où les auteurs ont considéré une classe de systèmes avec une paramétrisation concave/convex et ils ont montré que la convergence paramétrique est garanties sous certaines conditions d'excitation persistante.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étendre l'approche présentée aux chapitres précédents à la synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables avec une paramétrisation non linéaire. Les observateurs qui seront présentés héritent les mêmes propriétés que celles des obseravateurs présentés précédemment dans le cas d'une paramétrisation linéaire, à savoir : une relative simplicité de synthèse, une convergence exponentielle garantie sous une certaine condition d'excitation persistante qui sera explicitée, leur capacité de donner lieu, à travers le choix d'une fonction de synthèse dont dépend le gain de ces observateurs, à différents types d'observateurs tels que les observateurs adaptatifs à grand gain et les observateurs adaptatifs à modes glissants et enfin un réglage qui se fait à travers le choix d'un seul paramètre scalaire.

5.2 Classe de systèmes considérée

Considérons la classe de systèmes non-linéaires MIMO uniformément observables et pouvant se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x, \rho) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \tag{5.1}$$

avec $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix}$, $x^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, q$; $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix}$, $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$;

$\varphi(u, x, \rho) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x^1, \rho) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2, \rho) \\ \vdots \\ \varphi^{q-1}(u, x^1, \ldots, x^{q-1}, \rho) \\ \varphi^q(u, x, \rho) \end{pmatrix}$; les matrices A et C sont respectivement définies par (3.2) et (3.3)

Il est facile de voir que la classe de systèmes (5.1) inclut celle du système (3.1) avec la fonction φ spécifiée comme suit :

$$\varphi(u, x, \rho) = \Psi(u, x)\rho + g(u, x) \tag{5.2}$$

Pour de tels observateurs, il est nécessaire d'adopter de certaines hypothèses qui seront données au fur et à mesure. Comme pour les systèmes affines par rapport aux paramètres, on suppose encore la bornitude des entrées, de l'état aussi bien que des paramètres inconnus. Pour l'instant nous considérons les hypothèses suivantes :

(H1) Pour toute entrée bornée u, i.e. $\forall u \in U$ un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^s$, l'état $x(t)$ et les paramètres inconnus ρ sont bornés, i.e. $x(t) \in X$, pour tout $t \geq 0$ et $\rho \in \Omega$ où $X \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega \in \mathbb{R}^m$ sont des ensembles compacts.

(H2) La fonction $\varphi(u, x, \rho)$ est lipschitzienne par rapport à x et ρ, uniformément en u pour tout (u, x, ρ) dans $U \times X \times \Omega$.

(H3) La fonction $\varphi(u, x, \cdot)$ est injective, c'est-à-dire la paramétrisation en ρ est injective.

5.3 Synthèse de l'observateur

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \varphi(u,\hat{x},\hat{\rho}) - \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)C^TK(C\tilde{x}) \\ \dot{\hat{\rho}}(t) &= -\theta P(t)\Upsilon^T(t)C^TK(C\tilde{x}) \\ \dot{\Upsilon}(t) &= \theta\left(A - S^{-1}C^TC\right)\Upsilon(t) + \Delta_\theta\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho}) \\ \dot{P}(t) &= -\theta P(t)\Upsilon^T(t)C^TC\Upsilon(t)P(t) + \theta P(t) \end{cases} \tag{5.3}$$

où $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix}$; $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_m \end{pmatrix}$; $P(t_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ est choisie symétrique définie positive, Δ_θ et S sont définies respectivement comme dans (3.6), (3.7) et $K(C\tilde{x})$ vérifie la condition (3.9).

Comme pour les systèmes à paramètres linéaires, nous avons besoin de l'hypothèse additionnelle suivante :

(H4) Pour toute trajectoire $\hat{x} \in X$ du système (5.3) ayant comme condition initiale $(\hat{x}(0), \hat{\rho}(0)) \in X \times \Omega$, la matrice $C\Upsilon(t)$ est à excitation persistante, c'est-à-dire

$$\exists\delta_1, \delta_2 > 0; \exists T > 0; \forall t \geq 0 : \quad \delta_1 I_m \leq \int_t^{t+T} \Upsilon^T(\tau)C^TC\Upsilon(\tau)d\tau \leq \delta_2 I_m$$

Nous énonçons maintenant le théorème suivant :

Théorème 5.3.1 *Supposons que le système (5.1) satisfait les hypothèses de (H1) à (H4). Alors le système (5.3) est un observateur adaptatif pour le système (5.1) et les erreurs d'observation et d'estimation paramétrique convergent exponentiellement vers zéro pour des valeurs relativement élevées de θ.*

5.3.1 Analyse de la convergence

La preuve est semblable à celle du théorème 3.2.1. En effet, soient $\tilde{x}(t) = \hat{x} - x$ et $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \rho$. Alors,

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + \varphi(u,\hat{x},\hat{\rho}) - \varphi(u,x,\rho) - \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)C^TK(C\tilde{x}) \\
&= A\tilde{x} + \varphi(u,\hat{x},\rho) + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi)\tilde{\rho} - \varphi(u,x,\rho) \\
&\quad -\theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)C^TK(C\tilde{x}) \\
&= A\tilde{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\tilde{\rho} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} + \varphi(u,\hat{x},\rho) - \varphi(u,x,\rho) \\
&\quad -\theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)C^TK(C\tilde{x}) \\
&= A\tilde{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\tilde{\rho} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)\tilde{x} \\
&\quad -\theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)C^TK(C\tilde{x})
\end{aligned}$$

où $\rho_\xi \in \mathbb{R}^m$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ selon le théorème de la valeur moyenne.

Soit $\bar{x} = \Delta_\theta\tilde{x}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\tilde{\rho} + \Delta_\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} \\
&\quad +\Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} - \theta\left(S^{-1} + \Upsilon(t)P(t)\Upsilon^T(t)\right)C^TK(C\tilde{x}) \\
&= \theta A\bar{x} - \theta S^{-1}C^TK(C\tilde{x}) + \Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\tilde{\rho} + \Upsilon(t)\dot{\tilde{\rho}}(t) \\
&\quad +\Delta_\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} + \Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)\Delta_\theta^{-1}\bar{x}
\end{aligned}$$

Introduisons maintenant la variable : $\eta = \bar{x} - \Upsilon\tilde{\rho}$. On a :

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \theta A\left(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}\right) - \theta S^{-1}C^TK(C\tilde{x}) + \Upsilon\dot{\tilde{\rho}} + \Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\tilde{\rho} - \Upsilon\dot{\tilde{\rho}} - \dot{\Upsilon}\tilde{\rho} \\
&\quad +\Delta_\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} + \Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)\Delta_\theta^{-1}\left(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}\right) \\
&= \theta A\eta + \theta S^{-1}C^TC\Upsilon\tilde{\rho} - \theta S^{-1}C^TK(C\tilde{x}) \\
&\quad +\Delta_\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} + \Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)\Delta_\theta^{-1}\left(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}\right)
\end{aligned}$$

Soient les fonctions de Lyapunov candidates suivantes $V_1(\eta(t)) = \eta^T(t)S\eta(t)$, $V_2(\bar{\rho}(t)) = \tilde{\rho}^T(t)P^{-1}(t)\tilde{\rho}(t)$ et posons $V(\eta(t), \tilde{\rho}(t)) = V_1(\eta(t)) + V_2(\tilde{\rho}(t))$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= 2\theta\eta^T SA\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\tilde{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(C\tilde{x}) \\
&\quad +2\eta^T S\Delta_\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} + 2\eta^T S\Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)\Delta_\theta^{-1}(\eta+\Upsilon\tilde{\rho}) \\
&= -\theta\eta^T S\eta + \theta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\ \tilde{\rho}(t) - 2\theta\eta^T C^T K(C\tilde{x}) \\
&\quad +2\eta^T S\Delta_\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} + 2\eta^T S\Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)\Delta_\theta^{-1}(\eta+\Upsilon\tilde{\rho}) \\
&= -\theta V_1 + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\ \tilde{\rho}(t) - 2\theta\eta^T C^T K(C\tilde{x}) \\
&\quad +2\eta^T S\Delta_\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} + 2\eta^T S\Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)\Delta_\theta^{-1}(\eta+\Upsilon\tilde{\rho})
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Selon l'hypothèse (H3), $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\cdot,\cdot)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\cdot,\cdot)$ sont bornées et puisque φ est triangulaire inférieure en x, la matrice $\Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)$ est également bornée et la borne supérieure correspondante ne dépend pas de θ pour $\theta \geq 1$. Ainsi, on a :

$$2\eta^T S\Delta_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,\xi,\rho)\Delta_\theta^{-1}(\eta+\Upsilon\tilde{\rho}) \leq k_3V_1 + k_4'\sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \tag{5.5}$$

$$2\eta^T S\Delta_\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\rho_\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(u,\hat{x},\hat{\rho})\right)\tilde{\rho} \leq k_4''\sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \tag{5.6}$$

où $k_3, k_4', k_4'' > 0$ sont des nombres réels qui ne dépendent pas de θ pour $\theta \geq 1$.

En combinant (5.4), (5.5) et (5.6), on obtient :

$$\dot{V}_1(t) \leq -\theta V_1 + \theta\eta^T C^T C\eta + 2\theta\eta^T C^T C\Upsilon\ \tilde{\rho} - 2\theta\eta^T C^T K(C\tilde{x}) + k_3V_1 + k_4\sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \tag{5.7}$$

où $k_4 = k_4' + k_4''$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) &= 2\tilde{\rho}^T P^{-1}(t)\dot{\tilde{\rho}} - \tilde{\rho}^T P^{-1}(t)\dot{P}(t)P^{-1}(t)\tilde{\rho} \\
&= -2\theta\tilde{\rho}^T\ \Upsilon^T C^T K(C\tilde{x}) - \theta\tilde{\rho}^T P^{-1}(t)\tilde{\rho} + \theta\tilde{\rho}^T\Upsilon^T(t)C^T C\Upsilon(t)\tilde{\rho} \\
&= -\theta V_2 - 2\theta\tilde{\rho}^T\ \Upsilon^T C^T K(C\tilde{x}) + \theta\tilde{\rho}^T\Upsilon^T(t)C^T C\Upsilon(t)\tilde{\rho}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Par conséquent, en utilisant (5.7) et (5.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) \\
&\leq -(\theta - k_3)V_1 - \theta V_2 + k_4\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 + \theta\tilde{\rho}^T\Upsilon^T(t)C^TC\Upsilon(t)\tilde{\rho} \\
&\quad +\theta\eta^TC^TC\eta + 2\theta\eta^TC^TC\Upsilon\ \tilde{\rho} - 2\theta\eta^TC^TCK(\tilde{x}) - 2\theta\tilde{\rho}^T\ \Upsilon^TC^TCK(\tilde{x}) \\
&= -(\theta - k_3)V_1 - \theta V_2 + k_4\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \\
&\quad +\theta\left(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}\right)^T C^TC\left(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}\right) - 2\theta\left(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}\right)^T C^TCK(\tilde{x}) \\
&= -(\theta - k_3)V_1 - \theta V_2 + k_4\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 + \theta\left(\bar{x}^TC^TC\bar{x} - 2\bar{x}^TC^TCK(\tilde{x})\right) \\
&\leq -(\theta - k_3)V_1 - \theta V_2 + k_4\sqrt{V}_1\sqrt{V}_2 \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est obtenue selon l'inégalité (3.9). Finalement, pour tout $\theta > k_3$, posons $V_1^\star = (\theta - k_3)V_1$, $V_2^\star = \theta V_2$, $V^\star = V_1^\star + V_2^\star$ et $\eta = min(\theta - k_3, \theta)$. L'inégalité (5.9) cède à :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -V^\star + \frac{k_4}{2\sqrt{\theta(\theta - k_3)}}V^\star \\
&\leq -\eta\left(1 - \frac{k_4}{2\sqrt{\theta(\theta - k_3)}}\right)V \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Maintenant, il suffit de choisir θ et λ tels que $\left(1 - \frac{k_4}{2\sqrt{\theta(\theta - k_3)}}\right) > 0$.
Ceci termine la démonstration.

5.4 Exemples

Les performances des observateurs proposés sont illustrées à travers deux exemples traitant respectivement de l'identification des paramètres cinétiques du taux spécifique de croissance d'une biomasse dans un bioréacteur et de l'identification d'un modèle exhibant un retard pour un moteur à fuel.

5.4.1 Exemple 1 : Estimation d'état et des paramètres cinétiques d'un bioreacteur

Nous considérons une simple culture microbienne dans laquelle une biomasse x_2 se développe en consommant un substrat x_1 au sein d'un réacteur infiniment mélangé. Le réacteur fonctionne en mode continu avec un taux de dilution $D(t)$ et une

concentration d'alimentation en substrat $s_{in}(t)$. Le taux spécifique de croissance est supposé suivre la loi de Contois [Bailey et Ollis, 1986]. Ce procédé peut être modélisé en considérant les deux équations de bilan de matière associées au substrat et à la biomasse et qui s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -k\dfrac{\mu^\star x_1 x_2}{k_C x_2 + x_1} + D(t)(s_{in}(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= \dfrac{\mu^\star x_1 x_2}{k_C x_2 + x_1} - D(t)x_2(t) \end{cases} \tag{5.11}$$

où x_1 et x_2 désignent respectivement la concentration en substrat et en biomasse, $\mu^\star$ et k_C sont les paramètres de la loi de Contois et k est le coefficient du rendement. L'objectif consiste à estimer la concentration de la biomasse $x_2(t)$ et les paramètres de la loi de Contois à partir de la mesure de la concentration en substrat.

Le système (5.11) a été considéré dans [Gauthier *et al.*, 1992] où les auteurs ont présenté un ensemble compact $X \in \mathbb{R}^2$ qui est positivement invariant sous la dynamique de (5.11). De plus, il a été montré que la fonction suivante $\Phi : X \longrightarrow \Phi(X)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 &= & x_1 \\ z_2 &= & \dfrac{\mu^\star x_1 x_2}{k_C x_2 + x_1} \end{pmatrix}$ est un difféomorphisme de X sur son image.

Le système (5.11) peut être écrit dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 + D(s_{in} - z_1) \\ \dot{z}_2 &= \rho_1(1 + \rho_2\dfrac{z_2}{z_1})^2 z_2 - \rho_2\dfrac{z_2}{z_1}^2(z_2 + Ds_{in}) - Dz_2 \\ y &= z_1 \end{cases} \tag{5.12}$$

où $\rho_1 = \mu^\star$ et $\rho_2 = \dfrac{k_C}{k\mu^\star}$. Il est à noter que le système (5.12) est sous la forme (5.1) avec :

$$A \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(u, z, \rho) \triangleq \begin{pmatrix} D(s_{in} - z_1) \\ \rho_1(1 + \rho_2\dfrac{z_2}{z_1})^2 z_2 - \rho_2\dfrac{z_2}{z_1}^2(z_2 + Ds_{in}) - Dz_2 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

L'estimation de z, ρ_1 et ρ_2 peut être donc réalisée en utilisant un observateur de la forme (5.3). Notons que les paramètres originaux de la loi de Contois peuvent être récupérés à partir de ρ_1 et ρ_2 comme suit : $\mu^\star = \rho_1$ et $k_C = k\rho_1\rho_2$.

Dans ce qui suit, on donnera les résultats de simulation obtenus lorsque la fonction de synthèse de l'observateur est définie comme dans l'équation (3.28). En fait, beaucoup d'autres simulations ont été effectuées avec d'autres expressions telles que celles données dans (3.29) et (3.30) et les résultats obtenus étaient tout à fait semblables à ceux présentés ci-dessous.

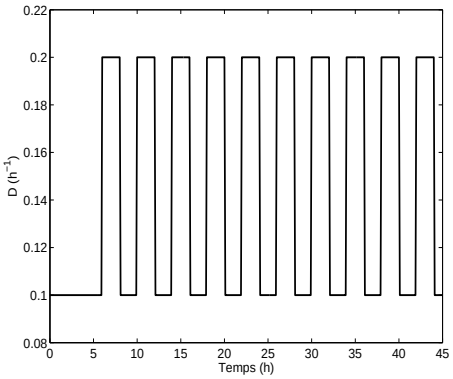

Figure 5.1: Temps d'évolution du taux de dilution

Les simulations du modèle et de l'observateur ont été effectuées en supposant une concentration d'alimentation en substrat constante et en considérant un taux de dilution qui varie selon un train d'ondes carrées comme présentées dans la figure 5.1. Les valeurs des paramètres utilisées dans la simulation sont :

$$\mu^\star = 0.33\ h^{-1};\ k_C = 5\ g.l^{-1}; k = 20\ g.l^{-1}; s_{in} = 5\ g.l^{-1}$$

Les valeurs résultantes des paramètres ρ_1 et ρ_2, sont $\rho_1 = 0.33\ h^{-1}$ et $\rho_2 = 7.5758\ h$. Dans le but de se placer dans des conditions proches des conditions réelles, les mesures de z_1 issues du modèle de simulation sont corrompues par un bruit Gaussien de moyenne nulle et de variance égale à $\sigma^2 = 10^{-3}$.

Le réglage du paramètre du gain θ est réalisé selon la stratégie d'essai-erreur de façon à satisfaire la propriété bien connue pour les observateurs de type grand gain : le choix de θ est un compromis entre une convergence rapide de l'observateur, obtenue pour des valeurs relativement élevées de θ, et un bon comportement vis-à-vis des bruits de mesure qui est obtenu quand les valeurs de θ sont choisies relativement

petites.

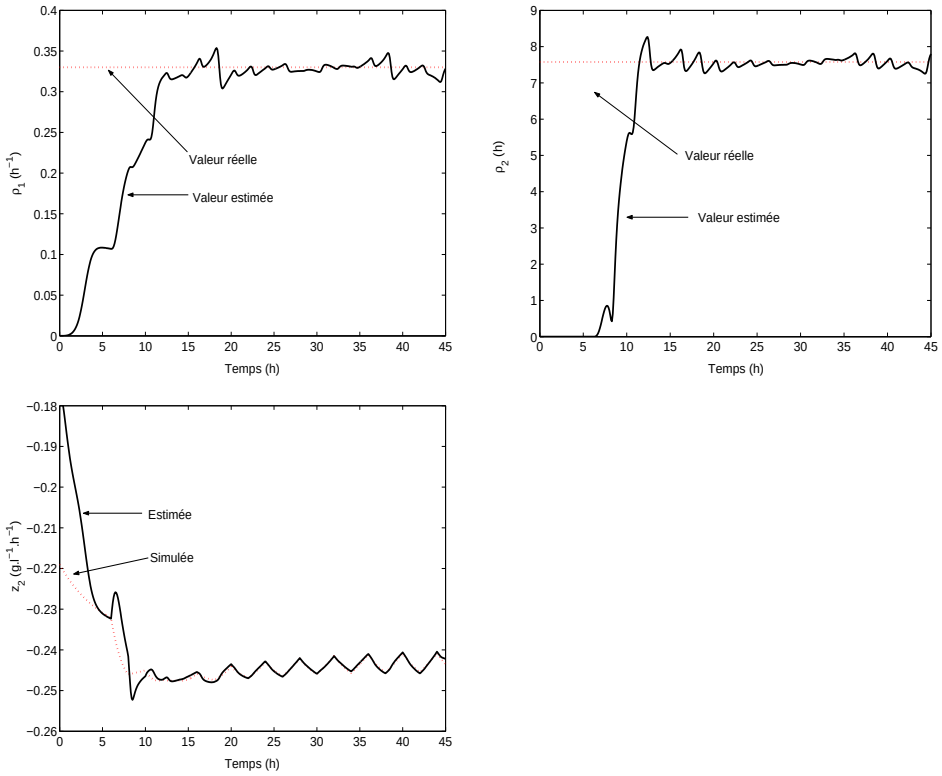

Figure 5.2: Estimation de l'état non mesuré et des paramètres inconnus avec $\theta = 2$

Les résultats que nous présentons sont obtenus en fixant la valeur de θ à 2. Nous avons présenté dans la figure 5.2 une comparaison entre les estimés de ρ_1, ρ_2 et z_2 obtenus à travers l'observateur avec leur vrai valeur fourni en simulant le modèle du procédé. Ces résultats montrent le bon comportement de l'observateur tant au niveau de la vitesse de convergence qu'au niveau de son comportement vis-à-vis des bruits de mesures.

5.4.2 Exemple 2 : Identification d'un moteur à fuel

Cet exemple traite l'identification d'un moteur à fuel qui peut être décrit par le système linéaire du second ordre SISO avec retard suivant [Gomez *et al.*, 2007] :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \rho_1 \dot{u}(t-\rho_5) + \rho_2 u(t-\rho_5) - \rho_3 z_2(t) - \rho_4 z_1(t) \\ y(t) &= z_1(t) \end{cases} \tag{5.14}$$

où la sortie $z_1(t)$ est le rapport carburant/air à l'intérieur du moteur et l'entrée $u(t)$ est le rapport carburant injecté/air. On suppose que ce système est asymptotiquement stable tandis que les paramètres inconnus ρ_i sont constants et positifs. Ce système a été récemment considéré dans [Gomez *et al.*, 2007] où les auteurs ont proposé un procédé d'identification en ligne pour estimer les paramètres du modèle. L'inconvénient majeur de la méthode proposée réside dans le fait que le retard, c'est-à-dire ρ_5, peut être estimé à condition que sa vrai valeur doit appartenir à un ensemble de nombres finis de valeurs connues. Une telle condition est inutile avec l'approche proposée dans ce chapitre puisque le système (5.14) est sous la forme (5.1) avec

$$A \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(u,z,\rho) \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1 \dot{u}(t-\rho_5) + \rho_2 u(t-\rho_5) - \rho_3 z_2(t) - \rho_4 z_1(t) \end{pmatrix}$$

et on peut alors utiliser un observateur de la forme (5.3) pour l'estimation de ρ_i, $i = 1, \ldots, 5$ aussi bien que pour l'estimation de l'état non mesurable z_2.

Notons que la conception d'observateur exige le calcul de la matrice $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, \hat{z}, \hat{\rho})$ qui peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(u, \hat{z}, \hat{\rho}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{u}(t-\rho_5) & u(t-\rho_5) & -\hat{z}_2 & -\hat{z} & -(\rho_1 \ddot{u}(t-\rho_5) + \rho_2 \dot{u}(t-\rho_5)) \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Beaucoup d'essais en simulation ont été effectués en utilisant différentes expressions de la fonction de synthèse de l'observateur $K(C\tilde{x})$. Comme dans le premier exemple et puisque les résultats obtenus étaient assez semblables, on ne fournit ici uniquement que ceux obtenus avec l'observateur à grand gain standard, c'est-à-dire que,

la fonction K est définie par l'équation (3.28). L'entrée $u(t)$ a été générée comme étant la sortie d'un filtre de second ordre avec un double double en -5 attaqué par un une entrée de type bruit blanc centré suivant une loi normale. Ceci nous a permis d'obtenir simultanément les dérivées par rapport au temps, $\dot{u}$ et $\ddot{u}$, de l'entrée u du système. La simulation a été effectuée sous l'environnement de MATLAB et l'entrée du filtre du second ordre a été choisie en faisant appel à la fonction standard de MATLAB suivante :

$$v(t) = 0.012(4 + randn([0 : 0.1 : t_f], 1)); \tag{5.16}$$

où t_f désigne le temps final de simulation ($t_f = 50s$).
L'amplitude de l'entrée du filtre a permis d'obtenir une variation du signal de sortie dans la plage de fonctionnement normal du moteur, c'est-à-dire environ 0.08 (voir figure 5.3).

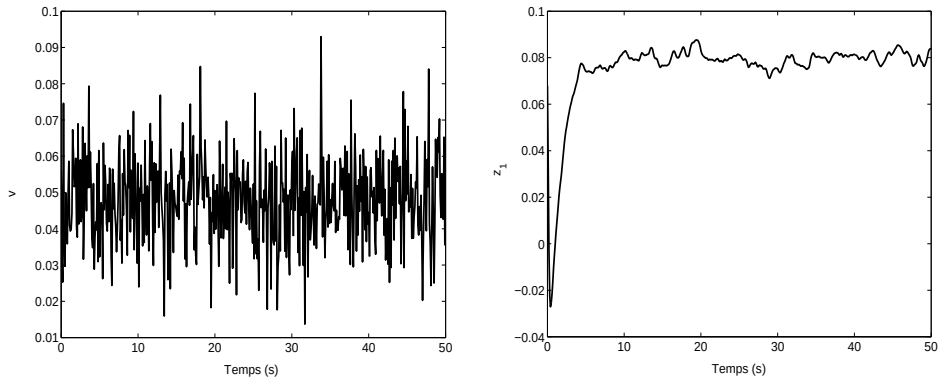

Figure 5.3: Temps d'évolution du générateur d'entrée , $v(t)$, avec la sortie correspondante, $z_1(t)$

Les vraies valeurs des paramètres ρ_i utilisés dans le modèle de simulation sont [Gomez *et al.*, 2007] :

$$\rho_1 = 4 \quad \rho_2 = 12.5 \quad \rho_3 = 12.5 \quad \rho_4 = 7.5 \quad \rho_5 = 0.3$$

Les variables d'état du modèle, z_1, z_2 et de l'observateur $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ sont initialisées à :

$$z_1(0) = \hat{z}_1(0) = 0.068 \quad z_2(0) = 0.1 \quad \hat{z}_2(0) = 0$$

Comme dans le premier exemple, les estimés des cinq paramètres ont été arbitrairement initialisés à zéro dans l'observateur.

Lors de la simulation, le choix des paramètres de réglage est réalisé toujours selon l'approche essai-erreur. Les résultats donnés sont obtenus avec $\theta = 3$.

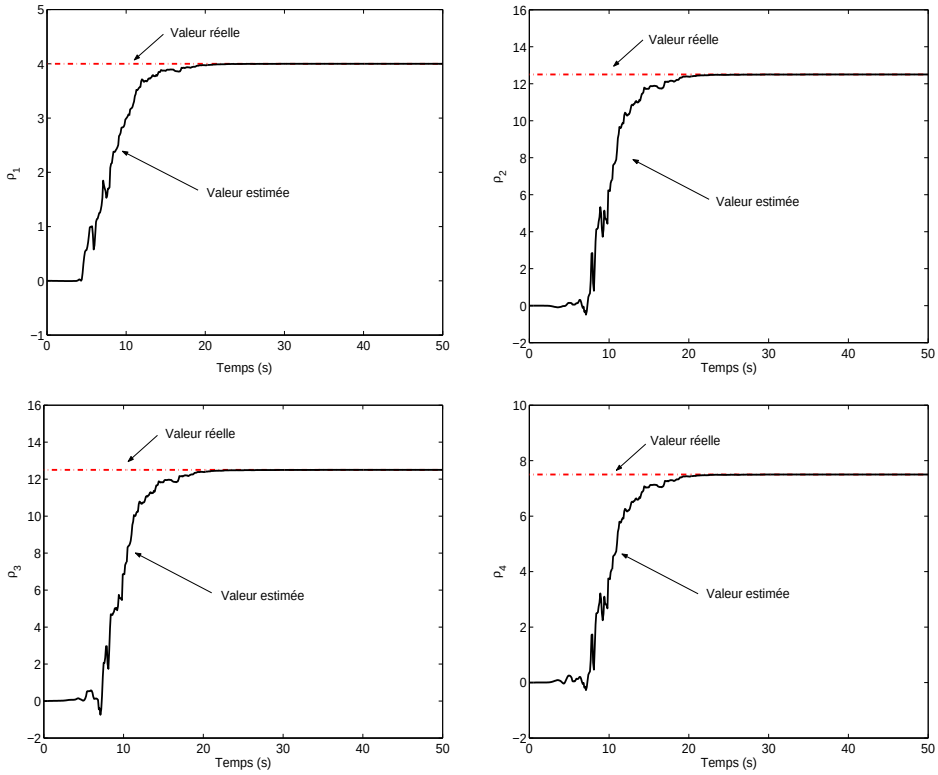

Figure 5.4: Estimation des paramètres inconnus ρ_1, ρ_4

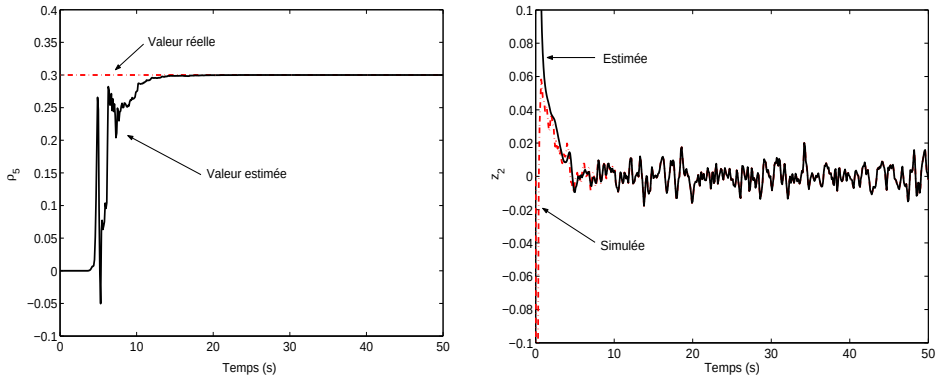

Figure 5.5: Estimation du retards (ρ_5) et de l'état non mesuré z_2

Les estimés ρ_i, $i = 1, \ldots, 5$ aussi bien que celui de z_2 fournis par l'observateur sont comparés à leur vraie valeur (générées par la simulation du modèle) dans les figures 5.4 et 5.5. Les résultats obtenus montrent clairement les bonnes performances de l'observateur qui fournit des estimations satisfaisantes des états aussi bien que des paramètres inconnus.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un ensemble d'observateurs adaptatifs a été proposé pour une classe de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables avec paramétrisation non linéaire. L'intérêt fondamental réside dans la convergence exponentielle des observateurs qui a été prouvée sous une condition d'excitation persistante qui a été donnée. Des résultats de simulation effectués dans des conditions réalistes ont été présentés et ont démontré les bonnes performances tant au niveau de l'observation d'état que de l'estimation des paramètres.

Chapitre 6

Commande adaptive avec retour de sortie pour une classe MIMO de systèmes non linéaires

6.1 Introduction

Le problème de commande adaptative avec retour de sortie pour les systèmes non linéaires incertains fait toujours l'objets de recherches intenses. Plusieurs méthodes ont été développées pour la synthèse de systèmes de commande adaptative avec plusieurs résultats sur la stabilisation, la régulation et la poursuite en particulier pour des systèmes incertains ayant des structures triangulaires (voir par exemple, [Krstic *et al.*, 1995, Marino et Tomei, 1995, Khalil, 1996, Johansen et Ioannou, 1996, Aloliwi et Khalil, 1997, Jiang, 1999]). Il existe trois hypothèses importantes dans ces lois de commande adaptatives qui valent d'être signalées. La première hypothèse porte sur le global Lipschitz des non linéarités qui proviennent des techniques des analyses impliquées. La seconde concerne la stabilité asymptotique de la dynamique de zéros du système, qui est désignée sous le nom d'hypothèse de minimum de phase. La troisième suppose que les non linéarités du système sont linéaires par rapport aux paramètres inconnus. Cependant, récemment, des lois de commande avec retour de sortie ont été proposées pour les systèmes connus sous le nom de non-minimum de phase (voir par exemple, [Isidori, 2000, D. Karagiannis et Astolfi, 2005]) ; néanmoins ils sont abordés dans un but de stabilisation.

La conception des lois de commandes est généralement effectuée en utilisant la technique du backstepping standard qui a été présentée dans [Krstic *et al.*, 1995] et raffinée, en utilisant le théorème des petits gains, dans [Jiang, 1999], pour relâcher l'hypothèse de minimum de phase. Dans [Khalil, 1996], un contrôleur adaptatif avec retour de sortie est proposé en se basant sur une fonction de Lyapunov pour une classe de système non linéaire SISO avec des paramètres inconnus supposés constants. Des résultats sur la régulation et la stabilité globale ont été développés dans [Marino et Tomei, 1995] pour des systèmes avec des parametrization non-linéaires particulièrement obtenus en utilisant des grands gains pour la loi d'adaptation des paramètres.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier le problème de poursuite asymptotique parfaite d'une trajectoire de référence de sortie suffisamment lisse, en présence de perturbations pour des systèmes non linéaires multi-sorties incertains ayant une structure triangulaire inférieur. Plus précisément, nous limitons notre étude sur les systèmes non linéaires commandables et uniformément observables sans dynamique des zéros où les fonctions non linéaires incertaines du système dépendent linéairement des paramètres inconnus constants . Pour la résolution de ce problème, nous proposons une commande à grand gain avec retour d'état avec une action intégrale filtrée appropriée est combinée avec un observateur adaptatif à grand gain. L'observateur adaptatif intervenant dans le schéma de commande proposé permet d'estimer conjointement les états et les paramètres inconnus du système pourvu qu'une certaine condition d'excitation persistante, similaire à celle donnée dans les chapitres précédents, est satisfaite [Farza *et al.*, 2005a, Maatoug *et al.*, 2007]. La conception de la loi de commande à grand gain avec retour d'état a été particulièrement obtenue par dualité avec l'observateur de type grand gain [Farza *et al.*, 2005a]. La conception de cette commande, sans lois d'adaptation, est détaillée dans la thèse [HAJJI, 2009]. Le gain de la loi de commande fait apparaître une fonction de synthèse satisfaisant une condition bien définie. Cette fonction de synthèse conduit à une unification des lois de commandes de type grand gain. On retrouve naturellement toutes les lois de commandes basées sur la technique des modes glissants ainsi que les versions qui y ont été déduites pour s'affranchir du phénomène de réticence intrinsèque à la fonction signe. On montrera par ailleurs, que l'on peut incorporer aisément une

action intégrale filtrée dans la loi de commande avec retour d'état pour réaliser une compensation robuste des perturbations tout en réduisant la sensibilité de la loi de commande contre les bruits.

Il convient de noter que nous avons choisi de considérer l'hypothèse d'excitation persistante et un système sans zéros pour mettre en avant le schéma global de la stratégie de commande proposée. Néanmoins, les résultats peuvent être étendus aux systèmes avec une dynamique des zéros sous l'hypothèse de minimum de phase et la condition d'excitation persistante peut être enlevée en utilisant des techniques de projection où d'attraction vers des domaines fixés au préalable (voir i.e, [Ioannou et Sun, 1995, Narendra et Annaswamy, 1989, Pomet et Praly, 1992, Marino et Tomei, 1998]).

6.2 Formulation du problème

On cherche à résoudre un problème de poursuite adaptative pour les systèmes non linéaires MIMO, commandables et uniformément observables, décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + g(x) + \Psi(s,x)\rho \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \tag{6.1}$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} ; \ \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix} ; \ g(x) = \begin{pmatrix} g^1(x^1) \\ g^2(x^1, x^2) \\ \vdots \\ g^{q-1}(x^1, \ldots, x^{q-1}) \\ g^q(x) \end{pmatrix} ;$$

$$\Psi^T(s,x) = \begin{pmatrix} \Psi_1^T(s,x) \\ \Psi_2^T(s,x) \\ \vdots \\ \\ \Psi_m^T(s,x) \end{pmatrix} , \ \Psi_j(s,x) = \begin{pmatrix} \Psi_j^1(s,x^1) \\ \Psi_j^2(s,x^1,x^2) \\ \vdots \\ \\ \Psi_j^{q-1}(s,x^1,\ldots,x^{q-1}) \\ \Psi_j^q(s,x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & I_p & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & I_p \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

$$C = [I_p \; 0_p \; \dots \; 0_p] \tag{6.3}$$

$$B = [0_p \; 0_p \; \dots \; I_p]^T \tag{6.4}$$

où la sortie $y \in \mathbb{R}^p$; l'état $x \in X$ un compact ouvert $\mathbb{R}^n$ avec $x^k \in \mathbb{R}^{n_1}$, $k = 1, \dots, q$; l'entrée $u(t) \in U$, un compact de $\mathbb{R}^s$; s est un signal connu borné ; $\rho \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des paramètres inconnus supposés constants, $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$; $g(x) \in \mathbb{R}^n$ avec $g^k(x) \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, q$; $\Psi(s, x)$ est une matrice $n \times m$ et chaque $\Psi_j(s, x) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$, désigne sa $j^{ième}$ colonne avec $\Psi_j^k(s, x) \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, q$.

(H1) Pour toute entrée bornée u, i.e. $\forall u \in U$ un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^s$, l'état $x(t)$ et les paramètres inconnus ρ sont bornés, i.e. $x(t) \in X$, pour tout $t \geq 0$ et $\rho \in \Omega$ où $X \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega \in \mathbb{R}^m$ sont des ensembles compacts.

(H2) La matrice $\Psi(s, x)$ est continue dans X.

(H3) Les fonctions $g(x)$ et $\Psi(s, x)$ sont globalement Lipschitziennes par rapport à x.

Le problème de commande adaptative considéré consiste en une poursuite asymptotique parfaite d'une trajectoire de sortie que l'on notera $\{y_r(t)\} \in \mathbb{R}^p$ et qu'on suppose suffisamment dérivable , i.e.

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0 \tag{6.5}$$

où

$$e(t) = (y(t) - y_r(t)) \tag{6.6}$$

Compte tenu de la classe de système considérée, il est possible de déterminer la trajectoire d'état du système $\{x_r(t)\} \in \mathbb{R}^n$ et la séquence d'entrée $\{u_r(t)\}$ correspondante à la séquence de sortie $\{y_r(t)\} \in \mathbb{R}^p$. Cela nous permet de définir un modèle de référence comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x_r} = Ax_r + Bu_r + g(x_r) + \Psi(s, x_r)\rho \\ y_r = Cx_r \end{cases} \tag{6.7}$$

Les variables d'état $x_r \in \mathbb{R}^n$ et l'entrée $u_r \in \mathbb{R}^m$ sont alors données par :

$$\begin{cases} x_r^1 = y_r \\ x_r^k = \dot{x_r}^{k-1} - g^{k-1}(x_r^1, \ldots, x_r^{k-1}) - \Psi^{k-1}(s, x_r^1, \ldots, x_r^{k-1})\rho \; pour \; k \in [2, q] \\ u_r = (\dot{x_r}^q - g^q(x_r) - \Psi^q(s, x_r)\rho) \end{cases} \tag{6.8}$$

En fait, chaque composante x_r^k, $k = 1, \ldots, q$, peut se déterminer à partir du signal de référence y_r et de ses dérivées successives par rapport au temps. En effet, x_r^k peut s'écrire comme suit :

$$x_r^k = \varphi^k(y_r, y_r^{(1)}, \ldots, y_r^{(k-1)}) \tag{6.9}$$

où $y_r^{(i)} = \dfrac{d^i y_r}{dt^i}$ *pour* $i \in [1, q-1]$ et les fonctions φ_k peuvent être déterminées de manière récursive comme suit :

$$\begin{cases} \varphi^1(y_r) = y_r \\ \varphi^k\left(y_r, y_r^{(1)}, \ldots, y_r^{(k-1)}\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial \varphi^{k-1}}{\partial y_r^{(j)}}\left(y_r, \ldots, y_r^{(k-2)}\right) y_r^{(j+1)} \\ \qquad - g^{k-1}\left(\varphi^1(y_r), \ldots, \varphi^{k-1}\left(y_r, y_r^{(1)}, \ldots, y_r^{(k-2)}\right)\right) \\ \qquad - \Psi^{k-1}\left(\varphi^1(y_r), \ldots, \varphi^{k-1}\left(y_r, y_r^{(1)}, \ldots, y_r^{(k-2)}\right)\right)\rho, \quad pour \; k \in [2, q] \end{cases}$$

Le problème de poursuite adaptative parfaite en sortie (6.5) peut être alors étendu au problème de poursuite de trajectoire d'état définie par :

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0 \tag{6.10}$$

où

$$e(t) = (x(t) - x_r(t)) \tag{6.11}$$

Et ce dernier peut être interprété comme un problème de régulation pour le système d'erreur obtenu à partir des équations du système (6.1) et du modèle de référence (6.7).

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + B\left(u\left(x\right) - u_r\right) + \ g\left(x\right) - g\left(x_r\right) + \left(\Psi(s,x) - \Psi(s,x_r)\right)\rho \\ e_m = y - y_r \end{cases} \tag{6.12}$$

6.3 Commande avec retour d'état

La loi de commande avec retour d'état qui nous intéresse est obtenue en exploitant la dualité avec un observateur à grand gain afin de pouvoir réaliser une convergence exponentielle de l'état du système vers l'origine et réaliser ainsi une régulation parfaite en un temps raisonnable. Compte tenu des observateurs du type grand gain proposés dans [Farza *et al.*, 2005b] pour les systèmes uniformément observables, on peut suggérer une structure de la loi de commande avec retour d'état du type grand gain pour les systèmes considérés, soit :

$$\begin{cases} u\left(x\right) = u_r + \nu\left(e\right) \\ \\ u_r = \dot{x}_r^q - g^q\left(x_r\right) - \Psi^q\left(s, x_r\right)\rho \\ \\ \nu\left(e\right) \triangleq -K_c\left(\lambda^q B^T \bar{S} \Delta_\lambda e\right) = -K_c\left(B^T \bar{S} \bar{e}\right) \end{cases} \tag{6.13}$$

où e désigne l'erreur de poursuite définie par (6.11), Δ_λ est une matrice diagonale donnée par :

$$\Delta_\lambda = diag\left(I_p, \frac{1}{\lambda}\ I_p, \ldots, \frac{1}{\lambda^{q-1}}\ I_p\right) \tag{6.14}$$

où $\lambda > 0$ est un scalaire strictement positif, $\bar{S}$ est la solution de l'équation algébrique suivante :

$$\bar{S} + A^T\bar{S} + \bar{S}A = \bar{S}BB^T\bar{S} \tag{6.15}$$

et $K_c : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^p$ est une fonction bornée satisfaisant la propriété (3.9).

Remarque 6.3.1 *Considérons l'équation algébrique suivante :*

$$\tilde{S} + A\tilde{S} + \tilde{S}A^T = BB^T \tag{6.16}$$

où $\tilde{S} = TST$

obtenue à partir de l'équation algébrique de Lyapunov (3.7) et de l'identité suivante :

$$TC^TCT = BB^T \quad avec \quad T = T^{-1} = \begin{pmatrix} 0_p & \dots & 0_p & I_p \\ \vdots & 0_p & I_p & 0_p \\ 0_p & I_p & 0_p & \vdots \\ I_p & 0_p & \dots & 0_p \end{pmatrix}$$

L'équation (6.15) est obtenue par multiplication de part et d'autre de l'équation (6.16) par la matrice $\bar{S} = \tilde{S}^{-1} = TS^{-1}T$.

Étant donné que l'équation algébrique de Lyapunov (3.7) admet une solution unique symétrique et définie positive S [Gauthier et al., 1992], Il en sera de même pour l'équation algébrique (6.15).

Compte tenu de cette relation ainsi que de l'expression $S^{-1}C$ *donnée dans [Farza et al., 2004], on obtient :*

$$B^T\bar{S} = CS^{-1}T = [C_q^q I_p \; C_q^{q-1} I_p \; \dots \; C_q^1 I_p]$$

Cette loi de commande avec retour d'état réalise bien l'objectif de poursuite considéré (6.10) comme l'indique le résultat fondamental suivant :

Théorème 6.3.1 *Les trajectoires d'état et de sortie du système (6.1)-(6.4) soumis aux hypothèses* **(H1)** *à* **(H3)** *générées à partir de la séquence d'entrée u donnée par (6.13)-(3.9) converge exponentiellement vers celles du modèle de référence (6.7) pour des valeurs de* λ *relativement grandes.*

Preuve du théorème

L'équation d'état du système de commande avec retour d'état peut être écrit comme

suit :

$$\begin{aligned}\dot{e} &= Ae + Bv(e) + g(x) - g(x_r) + (\Psi(s,x) - \Psi(s,x_r))\,\rho \\ &= Ae - BK_c\left(B^T\bar{S}\bar{e}\right) + g(x) - g(x_r) + (\Psi(s,x) - \Psi(s,x_r))\,\rho\end{aligned}$$

Le résultat sera établi à partir d'une fonction de Lyapunov utilisant l'état $\bar{e} = \lambda^q \Delta_\lambda e$ dont l'équation est donnée par :

$$\dot{\bar{e}} = \lambda A\bar{e} - \lambda BK_c(B^T\bar{S}\bar{e}) + \lambda^q\Delta_\lambda\left(g(x) - g(x_r)\right) + \lambda^q\Delta_\lambda\left(\Psi(s,x) - \Psi(s,x_r)\right)\rho$$

puisque $\Delta_\lambda A \Delta_\lambda^{-1} = \lambda A$ et $\Delta_\lambda B = \frac{1}{\lambda^{q-1}}B$. En effet, on peut montrer que $V : \bar{e} \mapsto V(\bar{e}) = \bar{e}^T\bar{S}\bar{e}$ est une fonction de Lyapunov pour le système de commande avec retour d'état. L'équation (6.15) permet d'exprimer sa dérivée comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2\bar{e}^T\bar{S}\dot{\bar{e}} \\ &= -\lambda V + \lambda\bar{e}^T\bar{S}BB^T\bar{S}\bar{e} - 2\lambda\bar{e}^T\bar{S}BK_c(B^T\bar{S}\bar{e}) \\ &+ 2\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\left(g(x) - g(x_r)\right) + 2\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\left(\Psi(s,x) - \Psi(s,x_r)\right)\rho \\ &= -\lambda V - 2\lambda\left(\xi^T K_c(\xi) - \frac{1}{2}\xi^T\xi\right) \\ &+ 2\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\left(g(x) - g(x_r)\right) + 2\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\left(\Psi(s,x) - \Psi(s,x_r)\right)\rho\end{aligned} \tag{6.17}$$

où $\xi = B^T\bar{S}\bar{e}$. En utilisant l'inégalité (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\lambda V + 2\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\left(g(x) - g(x_r)\right) + 2\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\left(\Psi(s,x) - \Psi(s,x_r)\right)\rho \\ &\leq -\lambda V + 2\lambda^q\|\bar{S}\bar{e}\|\|\Delta_\lambda\left(g(x) - g(x_r)\right)\| \\ &+ 2\lambda^q\|\bar{S}\bar{e}\|\|\Delta_\lambda\left(\Psi(s,x) - \Psi(s,x_r)\right)\rho\|\end{aligned} \tag{6.18}$$

Par ailleurs, le théorème de la valeur moyenne donne

$$\begin{aligned}\|\Delta_\lambda\left(g(x) - g(x_r)\right)\| &= \|\Delta_\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(\zeta)e\| \\ &= \|\frac{1}{\lambda^q}\Delta_\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(\zeta)\Delta_\lambda^{-1}\bar{e}\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^q}\|\Delta_\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(\zeta)\Delta_\lambda^{-1}\|\|\bar{e}\|\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\lambda\left(\Psi(s,x)-\Psi(s,x_r)\right)\ \rho\| &= \|\Delta_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x}(s,\zeta)e\ \rho\| \\
&= \|\frac{1}{\lambda^q}\Delta_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x}(s,\zeta)\Delta_\lambda^{-1}\bar{e}\ \rho\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda^q}\|\Delta_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x}(s,\zeta)\Delta_\lambda^{-1}\|\|\bar{e}\|\|\rho\|
\end{aligned}$$

où $\zeta \in X$.

Puisque les fonctions $g(x)$ et$\Psi(s,x)$ sont Lipschitzienne sur X, les matrices $\dfrac{\partial g}{\partial x}(\zeta)$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(s,\zeta)$ suivantes :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\xi) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial g^1}{\partial x^1}(\xi) & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{\partial g^2}{\partial x^1}(\xi) & \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(\xi) & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & 0 \\
\frac{\partial g^q}{\partial x^1}(\xi) & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial g^q}{\partial x^q}(\xi)
\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(s,\zeta) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial \Psi^1}{\partial x^1}(s,\zeta) & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{\partial \Psi^2}{\partial x^1}(s,\zeta) & \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^2}(s,\zeta) & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & 0 \\
\frac{\partial \Psi^q}{\partial x^1}(s,\zeta) & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \Psi^q}{\partial x^q}(s,\zeta)
\end{pmatrix}$$

sont bornées sur X .

En tenant compte de la structure triangulaire inférieure des matrices $g(x)$ et $\Psi(s,x)$, les matrices $\Delta_\lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(\zeta)\Delta_\lambda^{-1}$ et $\Delta_\lambda \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(s,\zeta)\Delta_\lambda^{-1}$ ayant la structure suivante :

$$\Delta_\lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\xi)\Delta_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix}
\times & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{\times}{\lambda} & \times & 0 & \dots & 0 \\
\frac{\times}{\lambda^2} & \frac{\times}{\lambda} & \times & \dots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
\frac{\times}{\lambda^{q-1}} & \frac{\times}{\lambda^{q-2}} & \dots & \frac{\times}{\lambda} & \times
\end{pmatrix}$$

ne dépendent que des termes en $1/\lambda$ et leurs normes sont bornées par des constantes indépendantes de λ pour tout $\lambda \geq 1$. Il en résulte que

$$2\lambda^q \|\bar{S}\bar{e}\| \|\Delta_\lambda \left(g(x) - g(x_r)\right)\| \leq \gamma_1 V \tag{6.19}$$

où $\gamma_1 > 0$ est une constante indépendante de λ.

Puisque le vecteur des paramètres ρ est borné et la matrice Ψ est globalement Lipschitziennes et elle a une structure triangulaire inférieure, on a aussi :

$$2\lambda^q \|\bar{S}\bar{e}\| \|\Delta_\lambda \left(\Psi(s,x) - \Psi(s,x_r)\right)\rho\| \leq \gamma_2 V \tag{6.20}$$

où $\gamma_2 > 0$ est une constante indépendante de λ. En combinant (6.18) , (6.19)et (6.20), on obtient :

$$V(\bar{e}) \leq e^{-(\lambda-\gamma)t} V(\bar{e}(0))$$

où $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Remarque 6.3.2 *Considérons le cas où la structure de la matrice d'état du système est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & A_{q-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{R}^{p\times p}$ pour $i \in [1, q-1]$ est une matrice carrée inversible. On peut montrer aisément que la loi de commande $\nu(e)$ correspondante est donnée par :

$$\nu(e) = -\left(\prod_{i=1}^{q-1} A_i\right)^{-1} K_c\left(\lambda^q B^T \bar{S}\Delta_\lambda \Lambda e\right) \tag{6.21}$$

avec

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & A_1A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \prod_{i=1}^{q-1} A_i \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

En effet, si l'on effectue le changement de variable $z = \Lambda x$, le système peut se réécrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} = \Lambda A \Lambda^{-1} z + \Lambda B u + \Lambda \varphi(x) \\ y = C\Lambda^{-1} z = z^1 \end{cases} \tag{6.23}$$

En tenant compte de la structure de la réalisation d'état du système et de la matrice de transformation, on a :

$$\begin{aligned} \Lambda A \Lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Lambda B = B \left(\prod_{i=1}^{q-1} A_i \right) &\ \ et\ C\Lambda^{-1} = C \end{aligned} \tag{6.24}$$

On retrouve ainsi la structure de la classe considérée des systèmes, soient les équations (6.1) à (6.4), et en déduire naturellement de la loi de commande (6.21).

6.4 Commande adaptative avec retour de sortie

La commande adaptative avec retour de sortie considérée est obtenue par une application naturelle du principe d'équivalence certitude. On remplace l'état du système, qui n'est pas toujours accessible à la mesure et les paramètres inconnus, supposés constants par leurs estimés provenant d'un observateur adaptatif à grand gain proposé dans [Maatoug *et al.*, 2007]. La loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur adaptatif considéré est donnée par :

$$u(\hat{x}, \hat{\rho}) = \left(\dot{\hat{x}}_r^q - g^q(\hat{x}_r) - \Psi^q(s, \hat{x}_r)\hat{\rho} + \nu(\hat{e}) \right) \tag{6.25}$$

où $\hat{x}_r$ est l'estimation de la trajectoire, x_r, et est calculé comme dans (6.10) en remplaçant ρ par $\hat{\rho}$ et

$$\begin{aligned} \nu(\hat{e}) &= -K_c\left(\lambda^q B^T \bar{S} \Delta_\lambda \hat{e}\right) \\ &= -K_c\left(\lambda^q B^T \bar{S} \Delta_\lambda (\hat{x} - \hat{x}_r)\right) \end{aligned} \tag{6.26}$$

et

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B\nu(\hat{e}) + g(\hat{x}) - g(\hat{x}_r) + (\Psi(s,\hat{x}) - \Psi(s,\hat{x}_r))\,\hat{\rho} \\ & \quad -\theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon\ P\ \Upsilon^T\right) C^T C\,(\hat{x} - x) \\ \dot{\hat{\rho}}(t) &= -\theta\ P\ \Upsilon^T\ C^T C\,(\hat{x} - x) \\ \dot{\Upsilon}(t) &= \theta\left((A - S^{-1}C^T C)\right)\Upsilon(t) + \Delta_\theta \Psi(s,\hat{x}(t))\ ;\Upsilon(0) = 0 \\ \dot{P}(t) &= -\theta P(t)\Upsilon^T(t) C^T C \Upsilon(t) P(t) + \theta P(t);\ P(0) = P^T(0) > 0 \end{cases} \tag{6.27}$$

où $\hat{e} \in \mathbb{R}^n$ désigne une estimée de l'erreur de poursuite d'état e, Δ_θ est une matrice diagonale définie comme la matrice Δ_λ (6.14) pour le réel $\theta > 0$ et la matrice S est donnée par (3.7).

En considérant les équations du système d'erreur (6.12) et de la loi de commande adaptative avec retour de sortie (6.25)-(6.27), le système de commande adaptative avec retour de sortie peut être décrit par les équations d'état de l'observateur de l'erreur de poursuite $\hat{e}$ ainsi que par celles d'erreurs de l'observateur adaptatif $\varepsilon = \hat{x} - x$ et $\tilde{\rho} = \hat{\rho} - \rho$ respectivement données par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}} &= A\hat{e} + B\nu(\hat{e}) + g(\hat{e} + \hat{x}_r) - g(\hat{x}_r) + (\Psi(s,\hat{e} + \hat{x}_r) - \Psi(s,\hat{x}_r))\,\hat{\rho} \\ & \quad -\theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon\ P\ \Upsilon^T\right) C^T C\varepsilon \end{aligned} \tag{6.28}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= A\varepsilon + g(\hat{x}) - g(x) + \Psi(s,\hat{x})\hat{\rho} - \Psi(s,x)\rho \\ & \quad -\theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon\ P\ \Upsilon^T\right) C^T C\varepsilon \\ \dot{\tilde{\rho}} &= -\theta\ P\ \Upsilon^T\ C^T C\varepsilon \end{aligned} \tag{6.29}$$

Avant d'énoncer le résultat principal de cette contribution, nous avons besoin de l'hypothèse additionnelle suivante :

(H4) Le signal de référence est tel que pour tout $\hat{x}(0) \in X$, $\hat{\rho}(0) \in \Omega$, la matrice $C\Upsilon$ est à excitation persistante i.e.

$$\exists \delta_1, \delta_2 > 0; \exists T > 0; \forall t \geq 0 : \quad \delta_1 I_m \leq \int_t^{t+T} \Upsilon^T(\tau) C^T C \Upsilon(\tau) d\tau \leq \delta_2 I_m$$

Notons que l'hypothèse **(H4)** donne une certaine condition d'excitation qui est énoncée d'une manière classique [Narendra et Annaswamy, 1989]. Toutefois, cette hypothèse ne précise pas la manière de générer l'entrée u qui assure la réalisation de cette condition. En fait, à notre connaissance, à l'exception de certains cas particuliers (tels que les systèmes linéaires), le problème de la caractérisation de l'ensemble des entrées assurant la condition d'excitation persistante est toujours ouvert.

Nous énonçons maintenant le théorème suivant.

Théorème 6.4.1 *Le système de commande adaptative avec retour de sortie décrit par les équations (6.28)-(6.29) réalise asymtotiquement une poursuite parfaite , i.e.* $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$, *pourvu que les hypothèses* **(H1)** *à* **(H4)** *soient vraies.*

Preuve du théorème

Nous tenons tout d'abord à montrer que l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro, i.e. $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} \tilde{\rho}(t) = 0$, puis on montrera la convergence exponentielle vers zéro de l'estimée de l'erreur de poursuite, i.e. $\lim_{t\to\infty} \hat{e}(t) = 0$. La première partie est établie à partir d'une fonction de Lyapunov utilisant les erreurs $\bar{\varepsilon} = \Delta_\theta \varepsilon$ et $\tilde{\rho}$ dont les équations sont données par :

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\varepsilon}} &= \theta A \bar{\varepsilon} - \theta \left(S^{-1} + \Upsilon P \Upsilon^T\right) C^T C \bar{\varepsilon} + \Delta_\theta \left(g(\hat{x}) - g(x)\right) \\
&+ \Delta_\theta \left(\Psi(s, \hat{x}) - \Psi(s, x)\right) \rho + \theta \Delta_\theta \Psi(s, \hat{x}) \tilde{\rho}(t) \\
&= \theta A \bar{\varepsilon} - \theta S^{-1} C^T C \bar{\varepsilon} + \Upsilon \dot{\tilde{\rho}} + \Delta_\theta \left(g(\hat{x}) - g(x)\right) \\
&+ \Delta_\theta \left(\Psi(s, \hat{x}) - \Psi(s, x)\right) \rho + \theta \Delta_\theta \Psi(s, \hat{x}) \tilde{\rho}
\end{aligned}$$

Maintenant, définissons : $\eta = \bar{\varepsilon} - \Upsilon\tilde{\rho}$. On peut montrer que :

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \theta A(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}) - \theta S^{-1}C^TC\bar{\varepsilon} + \dot{\Upsilon}\tilde{\rho} + \Delta_\theta\Psi(s,\hat{x})\tilde{\rho} + \Delta_\theta\left(g(\hat{x}) - g(x)\right) \\
&\quad + \Delta_\theta\left(\Psi(s,\hat{x}) - \Psi(s,x)\right)\rho \\
&= \theta A\eta + \theta S^{-1}C^TC\Upsilon\tilde{\rho} - \theta S^{-1}C^TC\bar{\varepsilon} + \Delta_\theta\left(g(\hat{x}) - g(x)\right) \\
&\quad + \Delta_\theta\left(\Psi(s,\hat{x}) - \Psi(s,x)\right)\rho
\end{aligned}$$

En effet, on peut montrer que $V_o : (\eta, \bar{\rho}) \mapsto V_o(\eta, \bar{\rho}) = \lambda^{2q}(V_1 + V_2)$ est une fonction de Lyapunov pour l'observateur où $V_1(\eta) = \lambda^{2q}\eta^TS\eta$, $V_2(\bar{\rho}) = \lambda^{2q}\bar{\rho}^TP^{-1}\bar{\rho}$. Compte tenu de l'équation algébrique de Lyapunov (3.7) est donnée par :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -\theta V_1 + \lambda^{2q}\theta\eta^TC^TC\eta + 2\lambda^{2q}\theta\eta^TC^TC\Upsilon\tilde{\rho} - 2\lambda^{2q}\theta\eta^TC^TC\bar{\varepsilon} \\
&\quad + 2\lambda^{2q}\eta^TS\Delta_\theta\left(g(\hat{x}) - g(x)\right) + 2\lambda^{2q}\eta^TS\Delta_\theta\left(\Psi(s,\hat{x}) - \Psi(s,x)\right)\rho \\
&= -\theta V_1 - \lambda^{2q}\theta\eta^TC^TC\eta \\
&\quad + 2\lambda^{2q}\eta^TS\Delta_\theta\left(g(\hat{x}) - g(x)\right) + 2\lambda^{2q}\eta^TS\Delta_\theta\left(\Psi(s,\hat{x}) - \Psi(s,x)\right)\rho \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\|\bar{\varepsilon}\| \leq \|\eta\| + \|\Upsilon(t)\|\|\tilde{\rho}\|$$

Par utilisation du Théorème de la Valeur Moyen, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta_\theta\left(g(\hat{x}) - g(x)\right) &= \Delta_\theta\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x}(\xi)(\hat{x} - x) \\
&= \Delta_\theta\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x}(\xi)\Delta_\theta^{-1}\bar{\varepsilon} \qquad (6.31)
\end{aligned}$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$. Puisque g est globalement Lipschitziennes, la matrice $\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x}(\xi)$ est bornée. De plus, en tenant compte de la structure triangulaire inférieure des matrices $g(x)$, cette matrice est triangulaire inférieure et chaque terme de la matrice suivante :

$$\Delta_\theta\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x}(\xi)\Delta_\theta^{-1} \qquad (6.32)$$

est polynomial en $\frac{1}{\theta}$. Il en résulte que, pour $\theta \geq 1$ et à partir de (6.31), on obtient :

$$\|\Delta_\theta\left(g(\hat{x}) - g(x)\right)\| \leq \|\Delta_\theta\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x}(\xi)\Delta_\theta^{-1}\|\|\bar{\varepsilon}\| \leq c_1\|\bar{\varepsilon}\| \qquad (6.33)$$

où c_1 est une constante indépendante de θ pour $\theta \geq 1$.

En utilisant l'inégalité (6.34), on obtient :

$$\|\Delta_\theta \left(g(\hat{x}) - g(x)\right)\| \leq c_1\|\bar{\eta}\| + c_2\|\tilde{\rho}\| \tag{6.34}$$

où $c_2 = c_1 sup\{\|\Upsilon(t)\|; \quad t \geq 0\}$.

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} 2\lambda^{2q}\eta^T S\Delta_\theta \left(g(\hat{x}) - g(x)\right) &\leq 2\lambda^{2q}\|S\|\|\Delta_\theta \left(g(\hat{x}) - g(x)\right)\|\|\eta\| \\ &\leq c_3\lambda^{2q}\|\eta\|^2 + c_4\lambda^{2q}\|\eta\|\|\tilde{\rho}\| \\ &\leq c_5 V_1 + c_6\sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \end{aligned} \tag{6.35}$$

où $c_3 = 2c_1\|S\|$, $c_4 = 2c_2\|S\|$, $c_5 = \frac{c_3}{\lambda_{min}(S)}$ et $c_6 = \frac{c_4}{\sqrt{\lambda_{min}(S)\lambda_{min}(P)}}$ sont des constantes positives qui ne dépendent pas de θ pour $\theta \geq 1$, $\lambda_{min}(.)$ dénote la plus petite valeur propre de (.).

Puisque chaque colonne de la matrice Ψ assume une structure triangulaire et puisque ρ est borné, les discussions développées au-dessus sont toujours valides pour borner $2\lambda^{2q}\eta^T S\Delta_\theta \left(\Psi(s,\hat{x}) - \Psi(s,x)\right)\rho$ et en effet par une démarche semblable à celle décrite ci-dessus, on obtient :

$$2\lambda^{2q}\eta^T S\Delta_\theta \left(\Psi(s,\hat{x}) - \Psi(s,x)\right)\rho \leq c_7 V_1 + c_8\sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \tag{6.36}$$

où c_7 et c_8 sont des constantes positives (qui dépendent des bornes de ρ) qui ne dépendent pas de θ pour $\theta \geq 1$.

Combinons (6.30), (6.35) et (6.36), on obtient :

$$\dot{V}_1 \leq -(\theta - k_1)V_1 + k_2\sqrt{V_1}\sqrt{V_2} - \lambda^{2q}\theta\eta^T C^T C\eta \tag{6.37}$$

où $k_1 = c_5 + c_7$ et $k_2 = c_6 + c_8$.

Autrement, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= 2\lambda^{2q}\tilde{\rho}^T P^{-1}\dot{\tilde{\rho}} - \lambda^{2q}\tilde{\rho}^T P^{-1}\dot{P}(t)P^{-1}\tilde{\rho} \\ &= -\lambda^{2q}2\theta\tilde{\rho}^T\ \Upsilon^T C^T C\bar{\varepsilon} - \lambda^{2q}\theta\left(\tilde{\rho}^T P^{-1}\tilde{\rho} - \tilde{\rho}^T\Upsilon_{\hat{x}}^T C^T C\Upsilon\tilde{\rho}\right) \\ &= -\theta V_2 - 2\lambda^{2q}\theta(\Upsilon\tilde{\rho})^T C^T C(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}) + \lambda^{2q}\theta(\Upsilon\tilde{\rho})^T C^T C\Upsilon\tilde{\rho} \\ &= -\theta V_2 - 2\lambda^{2q}\theta(\Upsilon\tilde{\rho})^T C^T C\Upsilon\tilde{\rho} - 2\lambda^{2q}\theta\eta^T C^T C\Upsilon\tilde{\rho} \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}\dot{V}_o = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 &\leq -(\theta - k_1)V_1 - \theta V_2 + k_2\sqrt{V_1}\sqrt{V_2} - \lambda^{2q}\theta(\eta + \Upsilon\tilde{\rho})^T C^T C(\eta + \Upsilon\tilde{\rho}) \\ &\leq -(\theta - k_1)V_1 - \theta V_2 + k_2\sqrt{V_1}\sqrt{V_2}\end{aligned}$$

Finalement, soient $V_1^\star = (\theta - k_1)V_1$ et $V_2^\star = \theta V_2$, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V}_o &\leq -(V_1^\star + V_2^\star) + \frac{k_2}{\sqrt{\theta(\theta - k_1)}}(V_1^\star + V_2^\star) \\ &= -(1 - \frac{k_2}{\sqrt{\theta(\theta - k_1)}})(V_1^\star + V_2^\star) \\ &\leq -(\theta - k_1)(1 - \frac{k_2}{\sqrt{\theta(\theta - k_1)}})(V_1 + V_2) \\ &\leq -(\theta - k_1)(1 - \frac{k_2}{\sqrt{\theta(\theta - k_1)}})V_o \qquad (6.38)\end{aligned}$$

Maintenant, choisissons θ tel que $(1 - \frac{k_2}{\sqrt{\theta(\theta - k_1)}}) > 0$. Par exemple, choisissons θ tels que :

$$(1 - \frac{k_2}{\sqrt{\theta(\theta - k_1)}}) > \frac{1}{2} \qquad (6.39)$$

L'inégalité (6.38) mène à :

$$V_o(\eta, \tilde{\rho}) \leq e^{-\frac{(\theta - k_1)}{2}} V_o(0) \qquad (6.40)$$

Remarque 6.4.1 *Puisque ρ est bornée et $\lim_{t\to\infty} \tilde{\rho}(t) = 0$, alors $\hat{\rho}$ et ceci entraîne aussi la bornitude de $\hat{x}_r$ puisque, rappelons le, $\hat{x}_r$ est calculé à partir de (6.10) en remplaçant ρ par $\hat{\rho}$.*

La seconde partie est établie à partir d'une fonction de Lyapunov utilisant l'estimée de l'état $\bar{e} = \lambda^q \Delta_\lambda \hat{e} = \lambda^q \Delta_\lambda(\hat{x} - \hat{x}_r)$ dont l'équation peut se déduire de (6.28) comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{e}} &= \lambda A\bar{e} - \lambda^q \Delta_\lambda B K_c \left(B^T \bar{S}\bar{e}\right) + \lambda^q \Delta_\lambda \left(g(\hat{e} + \hat{x}_r) - g(\hat{x}_r)\right) \\ &+ \lambda^q \Delta_\lambda \left(\Psi(s, \hat{e} + \hat{x}_r) - \Psi(s, \hat{x}_r)\right)\hat{\rho} - \theta\lambda^q \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon P \Upsilon^T\right) C^T C\varepsilon \\ &= \lambda A\bar{e} - \lambda B K_c \left(B^T \bar{S}\bar{e}\right) + \lambda^q \Delta_\lambda \left(g(\hat{e} + \hat{x}_r) - g(\hat{x}_r)\right) \\ &+ \lambda^q \Delta_\lambda \left(\Psi(s, \hat{e} + \hat{x}_r) - \Psi(s, \hat{x}_r)\right)\hat{\rho} - \theta\lambda^q \Delta_\lambda \Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon P \Upsilon^T\right) C^T C\bar{\varepsilon}\end{aligned}$$

La dernière égalité tient compte du fait que $C\Delta_\theta = C$ et $\Delta_\lambda B = \frac{1}{\lambda^q} B$.
Nous allons montrer maintenant que $V_c : \bar{e} \mapsto V_c(\bar{e}) = \theta^{2q}\bar{e}^T\bar{S}\bar{e}$ est une fonction de Lyapunov pour le système de commande. En effet, en procédant comme il a été fait dans les démonstrations données ci-dessus, on obtient aisément la propriété suivante sur la dérivée de la fonction V_c :

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &\leq -(\lambda - k_3)\, V_c + 2\|\theta\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TC\bar{\varepsilon}\| \\ &\quad +2\|\theta\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\Delta_\theta^{-1}\Upsilon P\Upsilon^TC^TC\bar{\varepsilon}\|\end{aligned} \tag{6.41}$$

où k_3 est une constante positive indépendante de λ pour $\lambda \geq 1$. En tenant compte de l'expression (6.15) de $\bar{S}$, on peut conclure, en prenant $\theta \geq 1$ and $\lambda \geq 1$, que

$$\|\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TC\bar{\varepsilon}\| \leq \lambda_{min}^2(S)\theta^q\lambda^q\|\varepsilon\|\|\bar{e}\| \leq c_9\sqrt{V}_o\sqrt{V_c} \tag{6.42}$$

où c_9 est une constante positive indépendante de λ pour $\lambda \geq 1$.
Similairement et puisque P est bornée, on a :

$$\|\theta\lambda^q\bar{e}^T\bar{S}\Delta_\lambda\Delta_\theta^{-1}\Upsilon P\Upsilon^TC^TC\bar{\varepsilon}\| \leq c_{10}\sqrt{V}_o\sqrt{V_c} \tag{6.43}$$

où c_{10} est une constante positive indépendante de λ pour $\lambda \geq 1$.
En outre, en combinant les inequations (6.41), (6.42) et (6.43), on obtient

$$\dot{V}_c \leq -(\lambda - k_3)\, V_c + k_4\sqrt{V_o}\sqrt{V_c} \tag{6.44}$$

avec $k_4 = c_9 + c_{10}$.
Ceci permet de conclure à la convergence exponentielle de l'estimée de l'erreur de poursuite en état à condition que $\lambda > k_3$ et $\theta > k_1$ comme est précisé par la propriété suivante :

$$\sqrt{V_c(\bar{e})} \leq e^{-\left(\frac{\lambda-k_3}{2}\right)t}\sqrt{V_c(\bar{e}(0))} + \frac{2k_4}{\theta - k_1 - 2(\lambda + k_3)}\left(e^{-\left(\frac{\lambda-k_3}{2}\right)t} - e^{-\left(\frac{\theta-k_1}{4}\right)t}\right)$$

Remarque 6.4.2 *Le concept de grand gain considéré permet de recouvrir le théorème de séparation pour la classe des systèmes non linéaires considérée. En outre, il est facile de vérifier que le résultat (6.4.1) reste valable si l'on remplace dans l'expression de la loi de commande adaptative avec retour de sortie (6.25)-(6.27) l'estimée de l'erreur de poursuite en sortie par sa mesure $y - y_r$. Cela légitime l'usage d'un observateur d'ordre réduit.*

6.5 Incorporation d'une action de filtrage

On peut facilement introduire une action de filtrage suivie d'une action intégrale de l'erreur de poursuite dans la loi de commande avec retour d'état proposée ci-dessus modulo l'introduction de variables d'états supplémentaires comme suit

$$\begin{cases} \dot{\sigma}^f = e^f \\ \dot{e}^f = -\Gamma e^f + \Gamma e^1 \end{cases} \tag{6.45}$$

où $\Gamma = Diag\{\gamma_i\}$ est une matrice de synthèse associée à l'action de filtrage. Le gain du système de commande avec retour d'état est alors déterminé à partir du modèle de synthèse :

$$\begin{cases} \dot{e}_a = A_a e_a + g(x_r, e_a) - g(x_r, 0) + B_a\left(u_a(e_a) - u_r\right) \\ \qquad + \left(\Psi(s, x_r, e_a) - \Psi(s, x_r, 0)\right)\rho \\ y_a = \sigma^f \end{cases} \tag{6.46}$$

avec

$$e_a = \begin{pmatrix} \sigma^f \\ e^f \\ e \end{pmatrix} ; \; A_a = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} ; \; B_a = \begin{pmatrix} 0_p \\ 0_p \\ B \end{pmatrix} ;$$

$$g(x_r, e_a) = \begin{pmatrix} 0_p \\ -\Gamma e_f \\ g(e + x_r) \end{pmatrix} ; \; \Psi(s, x_r, e_a) = \begin{pmatrix} 0_p \\ 0_p \\ \Psi(s, e + x_r) \end{pmatrix}$$

En effet, il apparaît clairement que la structure du modèle de synthèse (6.46) est

similaire à celle du système d'erreur (6.12). La synthèse du système de commande avec retour d'état sous-jacente est la même. La loi de commande avec retour de sortie incorporant une action intégrale est alors donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu\left(\hat{x}\right) + g(\hat{x}) + \Psi(s,\hat{x})\hat{\rho} - \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon P \Upsilon^T\right) C^T C\left(\hat{x} - x\right) \\ \dot{\hat{\rho}} = -\theta\ P\ \Upsilon^T\ C^T C\left(\hat{x} - x\right) \\ u(\hat{e}_a, \hat{\rho}) = (\dot{x}_r^q - g^q(x_r) - \Psi^q(s, x_r)\hat{\rho} + \nu(\hat{e}_a)) \\ \nu(\hat{e}_a) = -\Gamma^{-1} K_c(\lambda^{q+2} B_a^T \bar{S}_a \Delta_{a\lambda} \Lambda \hat{e}_a) \end{cases} \tag{6.47}$$

avec

$$\hat{e}_a = \begin{pmatrix} \sigma^f \\ e^f \\ \hat{e} \end{pmatrix} \tag{6.48}$$

$$\Delta_{a\lambda} = diag\left(I_p, \frac{1}{\lambda}\ I_p, \ldots, \frac{1}{\lambda^q}\ I_p, \frac{1}{\lambda^{q+1}}\ I_p\right) \tag{6.49}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & I_p & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \Gamma & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \tag{6.50}$$

où $\bar{S}_a$ est l'unique solution définie positive de l'équation algébrique de Lyapunov :

$$\bar{S}_a + \bar{S}_a \bar{A}_a + \bar{A}_a^T \bar{S}_a = \bar{S}_a \bar{B}_a \bar{B}_a^T \bar{S}_a \tag{6.51}$$

On montre aisément que le système de commande avec retour de sortie résultant est globalement stable et réalise un rejet asymptotique des perturbations d'état et/ou de sortie de type échelon .

6.6 Exemple d'illustration

Considérons un exemple académique traitant le problème de poursuite pour un double intégrateur non linéaire qui appartient à la classe de (6.1) décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + (-x_1^3 + sin\omega_1 t)\ \ \rho_1 \\ \dot{x}_2 = (2 + tanh(x_2))u - atan(x_2)\ \rho_1 + \dfrac{cos\omega_1 t}{1 + x_2^2}\ \rho_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

où le vecteur d'état est donné par $x = [x_1\ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ et les fonctions Ψ et g seront spécifiés comme suit :

$$\Psi(s, x) = \begin{pmatrix} -x_1^3 + sin\omega_1 t & 0 \\ -atan(x_2) & \dfrac{cos\omega_1 t}{1 + x_2^2} \end{pmatrix}\ et\ g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ρ_1 et ρ_2 sont des paramètres inconnus constants. la valeur de w_1 utilisée dans la simulation est égale à 20. La trajectoire de sortie de référence correspond à la sortie d'un filtre du second ordre, de gain statique unitaire avec un pôle double en $p_1 = p_2 = -5$, attaqué par l'entrée donnée sur la figure 6.1.
Afin d'atteindre l'objectif de commande en utilisant le contrôleur-observateur proposé, nous avons défini l'entrée auxiliaire $\nu = ((2+tanh(x_2))u$. Alors, la vraie entrée, appliquée au système est obtenus comme $u = \frac{1}{(2+tanh(\hat{x}_2)}\nu$.

Pour réaliser la poursuite, nous avons utilisé la loi de commande adaptative avec retour de sortie proposée avec une action intégrale filtrée que l'on peut réécrire dans

le cas considéré comme suit

$$\begin{cases} \dot{\sigma}^f = e^f \\ \dot{e}^f = -\frac{e^f}{\tau} + \frac{e^1}{\tau} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(\hat{x},\hat{\rho}) + g(\hat{x}) + (\Psi(\hat{x}))\,\hat{\rho} - \theta\Delta_\theta^{-1}\left(S^{-1} + \Upsilon\ P\ \Upsilon^T\right)\varepsilon_1 \\ \dot{\hat{\rho}} = -\theta\ P\ \Upsilon^T\ \varepsilon_1 \\ u(\hat{x},\hat{\rho}) = \dfrac{1}{1+tanh(\hat{x}_2)}\ (\ \dot{x}_r^2 + atan(x_r^2)\hat{\rho}_1 + \dfrac{cos\omega_1 t}{1+(x_r^2)^2}\hat{\rho}_2 + \nu(\hat{e})) \\ \nu(\hat{e}) = -\tau k_c\ tanh\left(\lambda^4 k_o\left(\sigma^f + \dfrac{4e^f}{\lambda} + \dfrac{6e^1}{\tau\lambda^2} + \dfrac{4\hat{e}^2}{\tau\lambda^3}\right)\right) \\ \varepsilon_1 = \hat{x}_1 - y \\ e^1 = y - y_r \\ \hat{e}^2 = \hat{x}_2 - x_r^2 \\ x_r^2 = \dot{y} - (-y_r^3 + sin\omega_1 t)\,\hat{\rho}_1 \\ \dot{x}_r^2 = y_r^{(2)} - (-3y_r^2\dot{y}_r + \omega_1 cos\omega_1 t)\,\hat{\rho}_1 \end{cases}$$

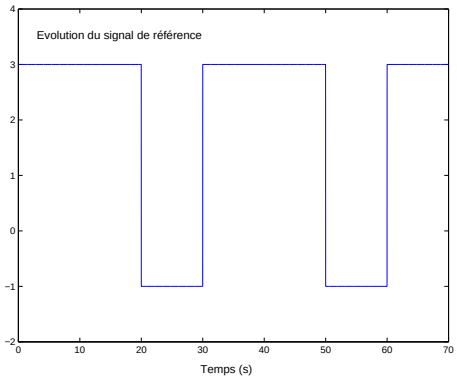

Figure 6.1: Entrée du filtre du second ordre

Une étude intensive de simulation a été effectuée en utilisant toutes les fonctions de synthèse qui ont été décrites dans le troisième chapitre et ont conduit aux résultats escomptés. On présente plus particulièrement les résultats obtenus avec la fonction de synthèse définie par l'expression $K_c(\zeta) = k_c tanh(k_0\zeta)$. Les paramètres de synthèse ont été spécifiés comme suit

$$k_c = 1,\ k_o = 7,\ \lambda = 5,\ \tau = 50\ et\ \theta = 25;$$

La figure 6.2 montre le comportement dynamique du système de commande ainsi que les erreurs d'estimation de l'observateur sur les deux états, c'est-à-dire il n'y a pas d'erreurs de modélisation. Deux remarques valent être mentionnées. Premièrement, le contrôleur proposé accomplit les performances de la poursuite exigée. Deuxièmement, les résultats obtenus montrent clairement les bonnes performances de l'observateur adaptatif en fournissant des estimations satisfaisantes des états aussi bien que des paramètres inconnus.

6.7 Conclusion

La motivation de ce chapitre a été double. Premièrement, une méthode de commande adaptative avec retour d'état du type grand gain a été proposée pour une classe de systèmes non linéaires commandables et uniformément observables sans zéro. La loi de commande adaptative avec retour d'état a été obtenue par dualité avec l'observateur à grand gain. Le gain de cette loi de commande fait apparaître une fonction de synthèse satisfaisant une condition bien définie. Cette fonction de synthèse conduit à une unification des lois de commandes de type grand gain. On retrouve naturellement toutes les lois de commandes basées sur la technique des modes glissants ainsi que les versions qui y ont été déduites pour s'affranchir du phénomène de réticence intrinsèque à la fonction signe. Une fonction de Lyapunov a été adoptée pour montrer que les performances de la poursuite exigées sont effectivement manipulées. Deuxièmement, la loi de commande avec retour d'état proposé est combinée avec l'observateur adaptatif à grand gain pour fournir une loi de commande adaptative avec retour de sortie et cela d'après le théorème de la séparation bien connu. L'analyse de sa convergence a été effectuée par une fonction lyapunov pour souligner les caractéristiques.

On a montré qu'une action intégrale filtrée peut être facilement incorporée dans la loi de commande adaptative avec retour de sortie pour réaliser une compensation robuste des perturbations d'état et de sortie de type échelon. Les performances

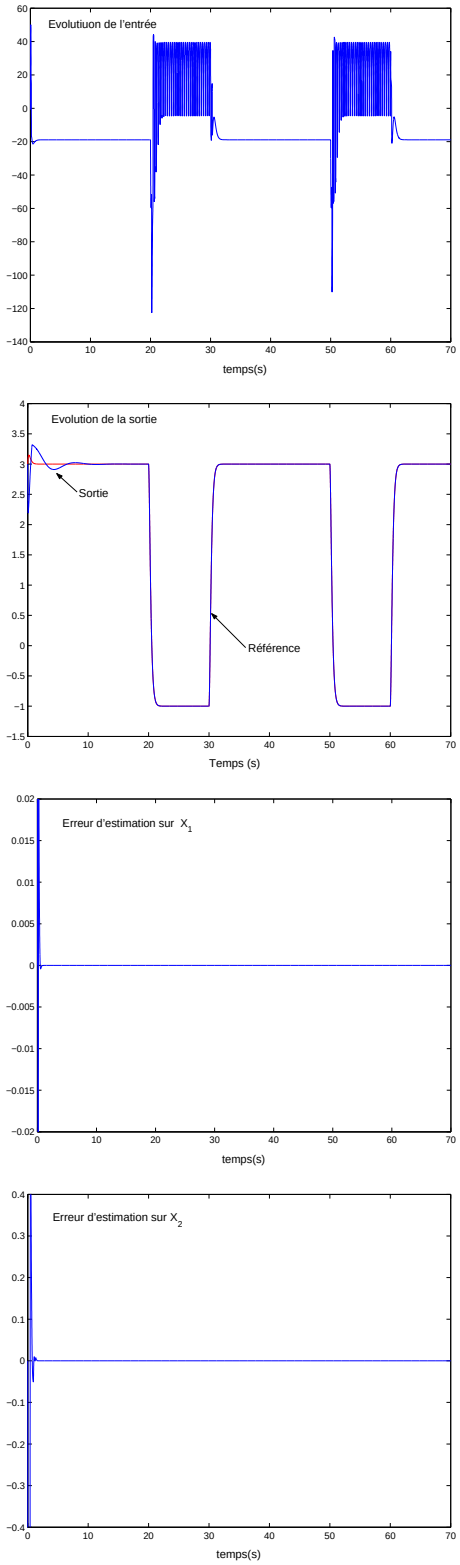

Figure 6.2: Performances du contrôleur adaptatif

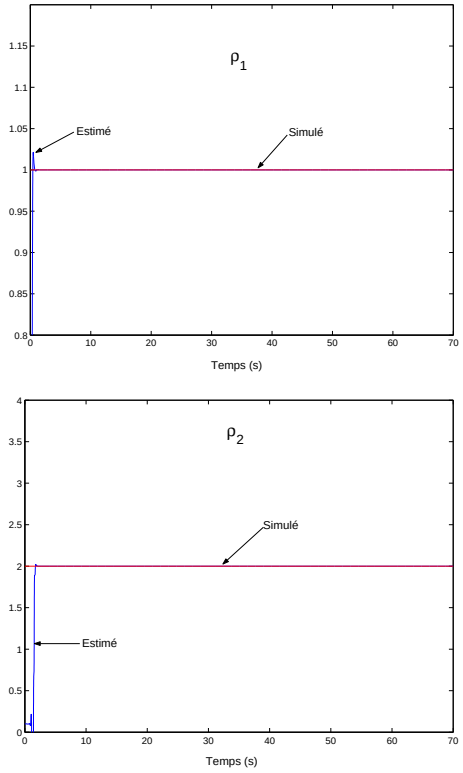

Figure 6.3: Comparaison des évaluations de paramètres avec leurs vraies valeurs respectives

du système de commande non linéaire proposé sont illustrées via un problème de poursuite impliquant un double intégrateur non linéaire.

Chapitre 7

Conclusion Générale

Les travaux développés dans cette contribution de thèse, ont porté sur la synthèse d'observateurs adaptatifs pour certaines classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. Ces observateurs présentent une convergence globale exponentielle, qui a été prouvée théoriquement, sous une certaine condition d'excitation persistante. Les gains d'observation et d'adaptation paramétrique font apparaître une fonction de synthèse satisfaisant une certaine condition qui a été explicitée. Différentes expressions de cette fonction ont été proposées, et il a été démontré que les observateurs adaptatifs à grand gain et les observateurs adaptatifs à mode glissant peuvent être synthétisés en considérant des expressions particulières de cette fonction de synthèse. Le réglage du gain des observateurs a été réalisé par le choix d'un seul paramètre.

Plusieurs classes de systèmes uniformément observables ont été considérées pour la synthèse des observateurs proposés. Nous avons tout d'abord considéré une forme canonique triangulaire constituée de plusieurs blocs en cascade, le premier bloc décrivant la dynamique de toutes les sorties et les non linéarités intervenant dans chaque bloc ne dépendent que des variables des blocs supérieurs ou de manière triangulaire de celles du bloc lui-même. Les paramètres inconnus interviennent dans l'état et plus précisément dans les non linéarités (triangulaires). Nous avons montré que, pourvu qu'une certaine condition d'excitation persistante qui a été présentée, est satisfaite, les observateurs proposés convergent exponentiellement.

Ensuite, la synthèse précédente a été étendue à une classe plus large de systèmes puisque les paramètres inconnus peuvent apparaître non seulement à travers la dynamique des variables d'état mais aussi dans l'expression des sorties du système.

Dans les classes de systèmes précédentes, les paramètres inconnus interviennent dans le système avec une paramétrisation linéaire. Signalons toutefois, que les matrices qui multiplient le vecteur des paramètres peuvent dépendre de certains états qui ne sont pas mesurés. Le dernier chapitre de ce travail traitant de la synthèse d'observateurs adaptatifs a consisté à étendre la synthèse d'observateurs à des classes de systèmes qui sont similaires à celles présentées précédemment mais plus générales puisque les paramètres peuvent apparaître de manière non linéaire.

Les performances des différents observateurs proposés ont été illustrés en simulation à travers des exemples académiques ainsi que sur le modèle du moteur asynchrone.

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé un schéma de commande adaptative avec retour de sortie. La loi de commande sous-jacente est de type grand gain et sa synthèse a été effectuée en exploitant le concept de dualité entre observation et commande. En effet, nous avons montré qu'une commande avec retour d'état de type grand gain avec un gain issu de la résolution explicite d'une équation algébrique de Lyapunov peut être synthétisé pour un système ayant une structure triangulaire communément appelé "strict feedback form", qui est uniformément observable et commandable. De plus, nous avons exploité la structure triangulaire du système considéré pour montrer que l'on peut doter la loi de commande proposée par une action intégrale filtrée. Ensuite, nous avons montré que les états non mesurés du système ainsi que certains coefficients inconnus apparaissant avec une paramétrisation linéaire peuvent être estimés à travers un observateur adaptatif du même type que ceux présentés dans les chapitres précédents. Enfin, nous avons montré la convergence globale du schéma de commande proposé. Les performances de l'approche proposée a été illustrée à travers un exemple académique traitant d'un double intégrateur non linéaire.

Plusieurs perspectives des travaux présentés sont envisagés. Tout d'abord, il s'agit d'étendre la synthèse des observateurs adaptatifs à des classes plus larges de systèmes non linéaires uniformément observables. Des résultats dans ce sens ont déjà été établis [Triki *et al.*, 2008, Farza *et al.*, 2009]. Nous pouvons également citer les travaux décrits dans [Sboui *et al.*, 2009] où les auteurs étendent la synthèse des observateurs proposés dans cette thèse à des classes de systèmes uniformément observables exhibant des retards dans les non linéarités triangulaires qui peuvent aussi renfermer des coefficients constants inconnus apparaissant avec une paramétrisation non linéaire. Les observateurs proposés permettent d'estimer conjointement les états du systèmes ainsi que les paramètres inconnus qui peuvent comprendre certains retards inconnus mais constants.

Nous travaillons actuellement sur une validation expérimentale des observateurs adaptatifs à travers l'estimation de certaines constantes électriques du moteur asynchrone. En effet, en supposant que la vitesse du moteur et les courants statoriques sont mesurés, le modèle de Park du moteur peut se mettre sous une forme où toutes les constantes électriques sont supposées inconnus et on aura alors affaire à une paramétrisation non linéaire. La difficulté essentielle dans la validation expérimentale consiste à générer des tensions permettant de satisfaire la condition d'excitation persistante. Toutefois, on peut dans des premières approches, supposer que certains paramètres sont connus et essayer d'estimer les autres en appliquant des tensions standards.

Après, la validation des observateurs adaptatifs, nous envisageons de valider sur le même banc expérimental la commande adaptative proposée dans cette thèse.

Bibliographie

A. Filipescu, L. D. et **Dion**, J. (2003). Adaptive gain sliding controller for uncertain parameters nonlinear systems. application to flexible joint robots. *Dans In Proc. 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii USA.

Aloliwi, B. et **Khalil**, H. (1997). A robust adaptive output feedback control of nonlinear systems wthout persistent of excitation. *Automatica*, 33:2025–2032.

Bailey, J. et **Ollis**, D. (1986). *Biochemical Engineering Fundamentals*. McGraw-Hill, New York.

Bastin, G. et **Gevers**, M. (1988). Stable adaptive observers for nonlinear time varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33:650–658.

Besançon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observers design. *Syst. Control Lett.*, 41(4):271–280.

Besançon, G., **Leon-Morales**, J. D. et **Huerta-Guevara**, O. (2006). On adaptive observers for state affine systems. *Int. Journal of Control*, 79, no6:581–591.

Bornard, G. et **Hammouri**, H. (1991). A high gain observer for a class of uniformly observable systems. *Dans In Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Bringhton, England.

Busawon, K., **Yahoui**, A. et **G.Grellet** (2001). A nonlinear observer for induction motors. *The European Physical Journal- Applied Physics*, 15:181–188.

Cho, Y. M. et **Rajamani**, R. (1997). A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42: 534–537.

Colon, L. (1992). *Differentiable Manifolds.* Birkhauser.

D. Karagiannis, Z.P. Giang, R. O. et **Astolfi**, A. (2005). Output-feedback stabilization of a class of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems. *Automatica*, 41:1609–1615.

Drakunov, S. (1992). Sliding mode observers based on equivalent control method. *Dans In Proc. 31th IEEE Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona.

Drakunov, S. et **Utkin**, V. (1995). Sliding mode observers. *Dans In Proc. 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA.

F. Deza, D. Bossane, E. B. J. G. et **Rakotopara**, D. (1997). Exponential Observers for Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38: 482–484.

Farza, M., **Hammouri**, H., **Jallut**, C. et **Liéto**, J. (1999). State observation of a nonlinear system :Application to (bio)chemical processes. *AIChE J.*, 45:93–106.

Farza, M., **M'Saad**, M. et **Maatoug**, T. (2005a). A set of adaptive observers for a class of MIMO nonlinear systems. *Dans In Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain.

Farza, M., **M'Saad**, M. et **Rossignol**, L. (2004). Observer Design for a class of MIMO nonlinear systems. *Automatica*, 40:135–143.

Farza, M., **M'Saad**, M. et **Sekher**, M. (2005b). A set of observers for a class of nonlinear systems. *Dans Proc. of the IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic.

Farza, M., **M'Saad**, M. et **Triki**, M. (2009). Adaptive observer for a class of MIMO non triangular uniformly observable nonlinear systems. *Dans In Proc. 6th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, Djerba, Tunisia.

Gauthier, J. et **Bornard**, G. (1981). Observability for any u(t) of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 26:922–926.

Gauthier, J., **Hammouri**, H. et **Othman**, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems - Application to bioreactors. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-37:875–880.

Gauthier, J. et **Kupka**, I. (1994). Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. Control. Optim.*, 32:975–994.

Gomez, O., **Orlov**, Y. et **Kolmanovsky**, I. V. (2007). On-line identification of SISO linear time-invariant delay systems from output measurements. *Automatica*, 43:2060–2069.

HAJJI, S. (2009). *Modélisation, observation et commande de la machine asynchrone.* Phd thesis, Co-tutelle de thèse entre l'UNIVERSITE de SFAX, Tunisie et l'UNIVERSITE de CAEN/BASSE NORMANDIE, France.

Hammouri, H. et **Farza**, M. (2003). Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. *ESAIM : COCV*, 9:353–370.

Ioannou, P. et **Sun**, J. (1995). *Robust Adaptive Control.* Prentice-Hal.

Isidori, A. (2000). A tool for semiglobal stabilisation of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45:1817–1827.

Jiang, Z. (June 1999). A combined backstepping and small gain approach to adaptive output feedback control. *Automatica*, 35:1131–1139 (9).

Johansen, T. A. et **Ioannou**, P. A. (1996). Robust adaptive control of minimum phase nonlinear systems. *Int. J. Adapt. Contr. Signal process*, 10:61–78.

Khalil, H. K. (1996). Adaptive Output Feedback control of Nonlinear Systems Represented by Input-Output Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:177–188.

Kojic, A. et **Annaswamy**, A. M. (2002). Adaptive control of nonlinearly parameterized systems with a triangular structure. *Automatica*, 38:115–123.

Kojic, A., **Annaswamy**, A. M., **Loh**, A. P. et **Lozano**, R. (1999). Adaptive control of a class of nonlinear systems with convex/concave parameterization. *Systems and Control Letters*, 37:267–274.

Koubaa, Y., **Farza**, M. et **M'Saad**, M. (2004). Synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non-linéaires. *Dans actes du CIFA*, Douz, Tunisie.

Kreisselmeier, G. (1977). Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(1):2–8.

Krstic, M., **Kanellakopouslos**, I. et **Kokotovic**, P. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design.* Wiley.

Loh, A. P., **Annaswamy**, A. M. et **Skantze**, F. P. (1999). Adaptation in the presence of a general nonlinear parameterization : an error model approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9:1634–1652.

Lüders, G. et **Narendra**, K. (1973). An adaptive observer and identifier for a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18:496–499.

Maatoug, T., **Farza**, M., **M'Saad**, M. et **Koubaa**, Y. (2007). Adaptive Observer Design for a Class of MIMO Nonlinear Systems. *Dans In Proc. Third International Conference on Signals Systems Decision and Information Technology (SSD'07)*, Hammamet, Tunisie.

Marino, R. et **Tomei**, P. (1992). Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:1239–1245.

Marino, R. et **Tomei**, P. (1995). Nonlinear Control Design : Geometric, Adaptive and Robust. *Dans Information and system sciences*, London, New York, Prentice Hall,.

Marino, R. et **Tomei**, P. (1998). Robust Adaptive State-Feedback Tracking for Nonlinear Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, 43(1):84–89.

Narendra, K. et **Annaswamy**, A. (1989). *Stable Adaptive Systems.* Prentice-Hall.

Pomet, J. et **Praly**, L. (1992). Adaptive nonlinear regulation : Estimation from the Lyapunov equation. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, 37:729–740.

Sboui, A., **Farza**, M., **Cherrier**, E. et **M'Saad**, M. (2009). Adaptive observer for a class of nonlinear time delay systems. *Dans to appear in Proc. of the 15th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2009)*, Saint-Malo, France.

Shim, H. (2000). *A passivity-based nonlinear observer and a semi-global separation principale.* Phd thesis, School of Electrical Engineering, Seoul National University.

Shim, H., **Y.I.Son** et **Seo**, J. (2001). Semi-global observer for multi-output nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 42:233–244.

Skantze, F. P., **Kojić**, A., **Loh**, A. P. et **Annaswamy**, A. M. (2000). Adaptive estimation of discrete-time systems with nonlinear parameterization. *Automatica*, 36:1879–1887.

Triki, M., **Farza**, M., **M'Saad**, M. et **Koubaa**, Y. (2008). High gain adaptive observer for a class of nonlinear systems without triangular structure. *Dans In Proc. 9th international conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering*, Sousse, Tunisia.

Utkin, V. (1992). *Sliding mode in optimization and control.* Springer-Verlag.

Viel, F., **Busvelle**, E. et **Gauthier**, J. (1995). Stability of polymerization reactors using i/o linearization and a high-gain observe. *Automatica*, 31:971–984.

Xu, A. et **Zhang**, Q. (2002). State and parameter estimation for nonlinear systems. *Dans In Proc. of the 15th IFAC World Congress*, Barcelona,Spain.

Xu, A. et **Zhang**, Q. (2004a). Nonlinear systems fault diagnosis based on adaptive estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49:767–.

Xu, A. et **Zhang**, Q. (2004b). Residual generation for fault diagnosis in linear time-varying systems. *Automatica*, 40:1181–1193.

Zhang, Q. (2002). Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47:525–529.

Zhang, Q. (2005). An adaptive observer for sensor fault estimation in linear time varying. *Dans Proc. of the IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic.

Zhang, Q. et **Besançon**, G. (2005). Nonlinear system sensor fault estimation. *Dans Proc. of the IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic.

Zhang, Q. et **Clavel**, A. (2001). Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time-varying systems. *Dans In Proc. 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida.

TITRE : Synthèse d'observateurs adaptatifs pour les systèmes non linéaires

Résumé. Dans cette thèse, nous proposons la synthèse d'observateurs adaptatifs pour certaines classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. Dans un premier temps, les systèmes avec une paramétrisation linéaire sont considérés. Ensuite, les résultats obtenus ont été étendus au cas de paramétrisation non linéaire. La caractéristique principale des observateurs proposés réside dans le fait que leur gain fait intervenir une fonction de synthèse dont le choix permet d'obtenir différents types d'observateurs tels que des observateurs de type grand gain classiques ou à modes glissants. De plus, le réglage de ce gain se fait à travers le choix d'un seul paramètre scalaire. La convergence exponentielle des observateurs proposés a été établie sous une certaine condition d'excitation persistante qui a été donnée. Dans la dernière partie de la thèse, nous proposons un schéma de commande adaptative avec retour de sortie pour une classe de systèmes non linéaires commandables et uniformément observables. Les performances des observateurs proposés sont illustrées en simulation à travers des exemples académiques et des exemples réels d'application relatifs à un moteur asynchrone, un bioréacteur et un moteur à fuel.

Mots clés : Systèmes non linéaires, observateur adaptatif, observateur à grand gain, modes glissants, excitation persistante, commande adaptative, système multi-entrées/multi-sorties.

TITLE : Synthesis of adaptive observers for nonlinear systems.

Astract. In this thesis, the synthesis of adaptive observers for some classes of nonlinear uniformly observable systems is proposed. Firstly, systems with linear parametrization are considered. Then the obtained results are extended to the nonlinear parametrization case. The main characteristic of the proposed observers lies in the fact that their gain involves a synthesis function whose specification gives rise to different kinds of observers such classic high gain observers and sliding mode observers. Moreover, the tuning of this gain is achieved through the choice of a single scalar parameter. The exponential convergence of the proposed observers is guaranteed under a certain persistent excitation condition which is given. In the last part of the thesis, one proposes an adaptive output feedback controller for a class of nonlinear controllable and uniformly observable systems. The performances of the proposed observers are illustrated in simulation through academic examples and real ones dealing with an induction motor, a bioreactor and a fuel engine.

keywords : nonlinear systems, adaptive observer, high gain observer, sliding mode, persistent excitation, adaptive control, multi input/multi output.

Thèse réalisée au sein du GREYC
Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique
et Instrumentation de l'Université de Caen