



**HAL**  
open science

# Accumulation spectrale pour les Hamiltoniens quantiques magnétiques

Diomba Sambou

► **To cite this version:**

Diomba Sambou. Accumulation spectrale pour les Hamiltoniens quantiques magnétiques. Ordinateur et société [cs.CY]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT : 2013BOR14906 . tel-01059664

**HAL Id: tel-01059664**

**<https://theses.hal.science/tel-01059664>**

Submitted on 1 Sep 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Accumulation spectrale pour les Hamiltoniens quantiques magnétiques

Spectral accumulation for magnetic quantum Hamiltonians

THÈSE

soutenue publiquement le 21 Novembre 2013

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Bordeaux**  
(spécialité Mathématiques appliquées et Calcul scientifique)

par

**Diomba SAMBOU**

Rapporteurs :

M. PUSHNITSKI Alexander  
M. WANG Xue Ping

Prof. King's College London  
Prof. Univ. Nantes

Composition du jury :

M. BACHELOT Alain  
M. BRUNEAU Vincent  
M. JECKO Thierry  
M. JOYE Alain  
M. KUPIN Stanislas  
M. WANG Xue Ping

Prof. Univ. Bordeaux 1 (Président)  
MdC Univ. Bordeaux 1 (Directeur)  
MdC Univ. Cergy-Pontoise  
Prof. Univ. Grenoble 1  
Prof. Univ. Bordeaux 1 (Co-directeur)  
Prof. Univ. Nantes

Numéro d'ordre : 4906



# **Accumulation spectrale pour les Hamiltoniens quantiques magnétiques**

Spectral accumulation for magnetic quantum Hamiltonians

**Diomba Sambou**

Thèse de Mathématiques appliquées et Calcul scientifique  
Novembre 2013



## RÉSUMÉ

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude de phénomènes d'accumulation spectrale de certains opérateurs issus de la physique quantique à savoir les opérateurs de Schrödinger, de Pauli, et de Dirac. Typiquement, ces opérateurs apparaissent dans la modélisation de certains problèmes de physique sous forme d'équations d'évolution. Selon les contraintes du problème physique, ils peuvent être associés ou non à un champ magnétique pouvant être constant ou non constant. Le cadre où le champ magnétique est dit admissible est celui que nous allons considérer (en dimension 3). Ce dernier cadre inclut en particulier le cas des champs magnétiques constants. Deux grands thèmes sont essentiellement abordés dans cette thèse: l'étude des résonances près de seuils des Hamiltoniens quantiques cités ci-dessus lorsqu'ils sont perturbés par des potentiels électriques auto-adjoints, et l'étude de leur spectre discret lorsqu'ils sont perturbés par des potentiels électriques non auto-adjoints. Le second thème sera exploré au moyen d'inégalités Lieb-Thirring généralisées.

**Mots-clés :** Opérateurs de Schrödinger, de Pauli, et de Dirac magnétiques, résonances, inégalités Lieb-Thirring généralisées.

## ABSTRACT

In this thesis we are interested to the study of spectral accumulation phenomena of some operators coming from quantum physics, namely Schrödinger, Pauli, and Dirac operators. Typically, these operators appear in the modeling of some physical problems in the form of evolution equations. According to the constraints of the physical problem, they can be associated or not to a constant or non constant magnetic field. The context where the magnetic field is admissible is that we shall consider (in dimension 3). This framework includes in particular the case of constant magnetic fields. Essentially, two main themes are discussed in this thesis: the study of resonances near thresholds of the quantum Hamiltonians mentioned above perturbed by self-adjoint potentials, and the study of their discrete spectrum when they are perturbed by non self-adjoint potentials. The second theme will be investigated with the help of generalized Lieb-Thirring inequalities.

**Keywords :** Magnetic Schrödinger, Pauli, and Dirac operators, resonances, generalized Lieb-Thirring inequalities.

Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251  
351, cours de la Libération - F 33405 TALENCE cedex



*À la mémoire de ma grand-mère*





*"On ne peut devenir maître d'une chose qu'on n'a pas étudiée."*  
Proverbe Wolof

## REMERCIEMENTS

Ma gratitude va tout d'abord à Vincent Bruneau et à Stanislas Kupin. Mon initiation à la recherche n'aurait pas pu se faire sans leur direction. Leur disponibilité sans faille et leur culture mathématique ont été indispensables au bon déroulement de ma thèse. J'ai mis toute ma confiance en eux et malgré mes questions parfois saugrenues, ils y ont répondu patiemment et d'une manière très pointilleuse. Pour ça, je tiens aussi à les remercier.

Mes remerciements vont ensuite à Alexander Pushnitski et Xue Ping Wang qui m'ont fait le plaisir d'accepter d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Alain Bachelot, Thierry Jecko, Alain Joye et Xue Ping Wang qui m'ont fait l'honneur d'être membre de mon jury.

Je voudrais remercier particulièrement le Professeur Ahmed Sebbar pour ses nombreuses recommandations auprès de ses collègues de l'institut de mathématiques de Bordeaux (IMB) durant mes années de Master. Les mots ne peuvent que me manquer pour exprimer ma gratitude envers lui. L'occasion pour moi de remercier les membres de mon équipe qui m'a si bien accueilli, en particulier Jean-François Bony, les enseignants-chercheurs de l'IMB particulièrement Sylvain Golénia, Qing Liu, Jean Gillibert, et ceux que j'ai rencontrés à l'occasion des séminaires et colloques. Nos nombreuses discussions ont été d'une aide considérable dans mes activités de recherche. J'aimerais remercier les ANR NONAa et NOSEVOL grâce à qui j'ai pu assister à de nombreuses rencontres scientifiques.

Merci aux doctorants de l'institut que j'ai côtoyés pendant ces années de thèse. Merci à Oumar, Louis, Clément, Chrétien, Soline, Olga, Giovanni, Fanilo, Youssef, Marouane, Jocelyn, Andrea, Guillaume, Fred, Cédric, Claire, Vincent, à la bande des parieurs de foot Aurélien, Pierre, Nicolas, Bruno, Nicola, Jean-Mathieu, Arthur et à tous ceux que j'aurai oubliés.

Je remercie cordialement et chaleureusement mes amis proches en dehors du laboratoire qui m'ont soutenu et ou encouragé pendant ces années de thèse. Merci aux dahiras des mourides et des tidjanes de Bordeaux, et à mes amis de club de foot de Louchats. J'ai également une pensée particulière pour Mami, Adja, Alsény, Vivi, Péla et Karine (la plus belle).

Je remercie ma famille et mes parents pour leur amour et leur soutien indéfectibles et inconditionnels. Merci à mes oncles Hatab et Kouss-Sagna, à mes tantes Khady et Coutou qui m'ont très bien accueilli en France. Votre soutien continu pendant toutes ces années a grandement contribué au bon déroulement de mes études universitaires.



# CONTENTS

0	INTRODUCTION	1
0.1	Opérateurs de référence	2
0.1.1	Champs magnétiques admissibles	2
0.1.2	Opérateurs d'annihilation et de création	3
0.1.3	Opérateur de Schrödinger magnétique	4
0.1.4	Matrices standards de Dirac et de Pauli	4
0.1.5	Opérateur de Pauli magnétique	5
0.1.6	Opérateur de Dirac magnétique	5
0.2	Résonances pour des perturbations auto-adjointes	6
0.2.1	Définitions des résonances	6
0.2.2	Des résultats connus sur la distribution des résonances	7
0.3	Résonances près de 0 et $\pm m$ des opérateurs de Pauli et de Dirac magnétiques	8
0.3.1	Perturbations auto-adjointes de signe non constant ou constant	8
0.3.2	Un cas particulier de perturbations auto-adjointes de signe non constant	10
0.4	Spectre discret pour des perturbations non auto-adjointes	12
0.4.1	Les inégalités Lieb-Thirring (classiques)	12
0.4.2	Les inégalités Lieb-Thirring généralisées	13
0.4.3	Résultats pour des perturbations des opérateurs de Schrödinger et de Pauli magnétiques en dimension $d \geq 2$	14
1	RÉSONANCES PRÈS DE 0 ET $\pm m$ DES OPÉRATEURS DE PAULI ET DE DIRAC MAGNÉTIQUES	19
1.1	Introduction	19
1.2	Énoncés des résultats principaux	20
1.3	Résonances près de 0 de l'opérateur de Pauli	24
1.3.1	Résonances	24
1.3.2	Preuve du Théorème 1.1	28
1.3.3	Preuve du Théorème 1.2	33
1.4	Résonances près de $\pm m$ de l'opérateur de Dirac	34
1.4.1	Résonances	34
1.4.2	Preuve du Théorème 1.3	39
1.4.3	Preuve du Théorème 1.4	42
2	COUNTING FUNCTION OF MAGNETIC RESONANCES FOR SOME NON-DEFINITE SIGN PERTURBATIONS	45
2.1	Introduction	45
2.2	Statement of main results	46
2.3	Resonances	49
2.3.1	A preliminary property	49
2.3.2	Reduction to semi-effective problem	49
2.3.3	Study of the semi-effective problem	50

2.4	Proof of main results	52
2.4.1	Proof of Theorem 2.1	52
2.4.2	Proof of Theorem 2.2	55
3	GENERALIZED LIEB-THIRRING INEQUALITIES FOR MAGNETIC QUANTUM HAMILTONIANS	57
3.1	Introduction	58
3.2	Main Results	61
3.2.1	On the $2d$ -dimensional case, $d \geq 1$	61
3.2.2	An abstract result including the $2d$ -dimensional case	63
3.2.3	On the $(2d + 1)$ -dimensional case, $d \geq 1$	64
3.3	On the dimension $2d$ , $d \geq 1$	66
3.3.1	Estimate of the weighted resolvent of the Schrödinger operator $S_{0,\perp}$	66
3.3.2	Proofs of Theorem 3.1 and Theorem 3.2	68
3.3.3	Proofs of analogous results for the $2d$ -dimensional Pauli operators	72
3.4	On the dimension $2d + 1$ , $d \geq 1$	73
3.4.1	Estimate of the sandwiched resolvents of the Schrödinger operators $S_0$ and $S$	73
3.5	Preliminaries	78
3.5.1	About the holomorphic function $f(\lambda)$	78
3.5.2	About the conformal map $\varphi(z)$	80
3.5.3	A theorem by Borichev, Golinskii and Kupin	81
3.6	Bounds on the discrete eigenvalues of $S$	81
3.6.1	Local bound	81
3.6.2	Proof of Theorem 3.4	85
3.6.3	Proofs of analogous result for the $(2d + 1)$ -dimensional Pauli operators	86
4	APPENDIX	89
4.1	Auxiliary results	89
4.1.1	Results by Raikov	89
4.1.2	Results by Bony, Bruneau and Raikov	90
4.2	Notion of index of a finite meromorphic operator-valued function	92



# INTRODUCTION

## Sommaire

---

0.1	Opérateurs de référence	2
0.1.1	Champs magnétiques admissibles	2
0.1.2	Opérateurs d'annihilation et de création	3
0.1.3	Opérateur de Schrödinger magnétique	4
0.1.4	Matrices standards de Dirac et de Pauli	4
0.1.5	Opérateur de Pauli magnétique	5
0.1.6	Opérateur de Dirac magnétique	5
0.2	Résonances pour des perturbations auto-adjointes	6
0.2.1	Définitions des résonances	6
0.2.2	Des résultats connus sur la distribution des résonances	7
0.3	Résonances près de 0 et $\pm m$ des opérateurs de Pauli et de Dirac magnétiques	8
0.3.1	Perturbations auto-adjointes de signe non constant ou constant	8
0.3.2	Un cas particulier de perturbations auto-adjointes de signe non constant	10
0.4	Spectre discret pour des perturbations non auto-adjointes	12
0.4.1	Les inégalités Lieb-Thirring (classiques)	12
0.4.2	Les inégalités Lieb-Thirring généralisées	13
0.4.3	Résultats pour des perturbations des opérateurs de Schrödinger et de Pauli magnétiques en dimension $d \geq 2$	14

---

Cette thèse s'intéresse à l'étude de phénomènes d'accumulation spectrale de certains opérateurs issus de la physique quantique à savoir les opérateurs de Schrödinger, de Pauli, et de Dirac. Concrètement, ces opérateurs interviennent dans la modélisation de certains problèmes de physique sous forme d'équations d'évolution. Ainsi, selon les contraintes du problème physique, ils peuvent être associés ou non à un champ magnétique pouvant être constant ou variable. Le cadre où ils sont associés à des champs magnétiques variables dits admissibles est celui dans lequel nous allons nous placer (en dimension 3). Ce dernier cadre inclut en particulier le cas des champs magnétiques constants comme nous allons le voir. Essentiellement deux grands thèmes sont abordés dans cette thèse: l'étude des résonances près de seuils des Hamiltoniens quantiques cités ci-dessus lorsqu'ils sont perturbés par des potentiels électriques auto-adjoints, et l'étude de leur spectre discret lorsqu'ils sont perturbés par des potentiels électriques non auto-adjoints.

## 0.1 OPÉRATEURS DE RÉFÉRENCE

En tenant compte du cadre tridimensionnel dans lequel l'étude de l'opérateur de Dirac est abordée, nous allons nous placer en dimension 3 pour fixer les idées. Bien que cette approche soit parfaitement suffisante étant donnés nos objectifs dans la section 0.2, il peut néanmoins être utile de signaler que lorsque nous aborderons le second thème majeur de cette thèse (section 0.4), les opérateurs de Schrödinger et de Pauli seront dans un formalisme plus général définis en dimension supérieure. Des études spectrales sont menées sur ces opérateurs et portent sur différents types de champs magnétiques. On pourra à cet effet citer les champs constants [37], [76], [91], [93], [121], [124], les champs bornés strictement positifs [59], ou à moyenne positive [94]. En dimension 3, nos Hamiltoniens sont associés à des équations décrivant le mouvement d'une particule non-relativiste soumis à un champ magnétique  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Tout au long de cette thèse, nous allons le supposer unidirectionnel de la forme

$$\mathbf{B} \equiv (0, 0, b) \tag{0.1}$$

et admissible. La notion de champ magnétique admissible fait l'objet de la sous-section suivante.

### 0.1.1 Champs magnétiques admissibles

Soit  $\mathbf{x} := (x_\perp, x_3) \in \mathbb{R}^3$  où  $x_\perp := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  sont les coordonnées perpendiculaires à la direction du champ magnétique défini par (0.1). En vertu des équations de Maxwell,  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  de sorte que  $b$  soit une fonction indépendante de la variable  $x_3$ .

**Définition 0.1.** *On dira par abus de langage que  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est un champ magnétique admissible s'il existe une constante  $b_0 > 0$  telle que*

$$b = b_0 + \tilde{b}, \tag{0.2}$$

où  $\tilde{b}$  est une fonction telle que l'équation de Poisson

$$\Delta \tilde{\varphi} = \tilde{b} \tag{0.3}$$

admette une solution  $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R}^2)$  vérifiant  $\sup_{x_\perp \in \mathbb{R}^2} |D^\alpha \tilde{\varphi}(x_\perp)| < \infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^2$ ,  $|\alpha| \leq 2$ .

En voici un exemple. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable telle que  $f(\lambda) = \overline{f(-\lambda)}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^2$ , et  $\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\lambda|^{-2}) f(\lambda) d\lambda < \infty$ . Alors la fonction

$$\tilde{b}(x_\perp) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda \cdot x_\perp} f(\lambda) d\lambda \tag{0.4}$$

définit pour tout  $b_0 > 0$  fixé, un champ magnétique admissible  $b$ . La fonction  $\tilde{\varphi}$  associée à la fonction  $\tilde{b}$  dans l'équation de Poisson (0.3) est donnée par

$$\tilde{\varphi}(x_\perp) = - \int_{\mathbb{R}^2} |\lambda|^{-2} e^{i\lambda \cdot x_\perp} f(\lambda) d\lambda. \tag{0.5}$$

On pourra par exemple se référer à [95, section 2] pour d'autres exemples de champs magnétiques admissibles.

Notons que le cas  $\tilde{b} \equiv 0$  coïncide avec le cas où le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est constant, *i.e.*  $b = b_0$  dans (0.2). Définissons à présent la fonction  $\varphi_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\varphi_0(x_\perp) := \frac{1}{4}b_0|x_\perp|^2$  et posons

$$\varphi := \varphi_0 + \tilde{\varphi}, \quad (0.6)$$

où  $\tilde{\varphi}$  est solution de l'équation (0.3). Nous obtenons ainsi un potentiel magnétique  $A = (A_1, A_2, A_3) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  générant le champ magnétique  $\mathbf{B} = \text{rot } A = (0, 0, b)$  en considérant

$$A_1 := -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad A_2 := \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad A_3 = 0. \quad (0.7)$$

En particulier lorsque le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est constant, alors  $\tilde{\varphi} \equiv 0$  et

$$A = \left( -\frac{b_0}{2}x_2, \frac{b_0}{2}x_1, 0 \right). \quad (0.8)$$

### 0.1.2 Opérateurs d'annihilation et de création

Afin de définir proprement les opérateurs de Schrödinger, de Pauli, et de Dirac magnétiques, introduisons les opérateurs d'annihilation et de création définis par

$$a = a(b) := -2ie^{-\varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} e^\varphi \quad \text{et} \quad a^* = a(b)^* := -2ie^\varphi \frac{\partial}{\partial z} e^{-\varphi}, \quad (0.9)$$

où  $\varphi$  est la fonction définie par (0.6), et  $z := x_1 + ix_2$ ,  $\bar{z} := x_1 - ix_2$ . Les opérateurs  $a$  et  $a^*$  sont mutuellement adjoints et définis initialement sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ , et donc fermés dans  $L^2(\mathbb{R}^2) := L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ .

**Remarque 0.1.** Observons que si l'on pose

$$\Pi_1 := -i \frac{\partial}{\partial x_1} - A_1 \quad \text{et} \quad \Pi_2 := -i \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2, \quad (0.10)$$

où les  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  sont les composantes définies par (0.7) du potentiel magnétique  $A$ , alors les opérateurs  $a$  et  $a^*$  vérifient

$$a = a(b) = \Pi_1 + i\Pi_2 \quad \text{et} \quad a^* = a(b)^* = \Pi_1 - i\Pi_2. \quad (0.11)$$

Définissons les opérateurs

$$H_\perp^- = H_\perp^-(b) := a^* a \quad \text{et} \quad H_\perp^+ = H_\perp^+(b) := a a^*. \quad (0.12)$$

Puisque  $b$  est un champ magnétique admissible, alors [94, Proposition 1.1] les spectres  $\sigma(H_\perp^\mp)$  des opérateurs  $H_\perp^\mp$  satisfont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \sigma(H_\perp^-) &\subseteq \{0\} \cup [\zeta, +\infty) \text{ avec } 0 \text{ une valeur propre de multiplicité infinie,} \\ \sigma(H_\perp^+) &\subseteq [\zeta, +\infty), \end{aligned} \quad (0.13)$$

où

$$\zeta := 2b_0 e^{-2\text{osc } \tilde{\varphi}} > 0 \quad (0.14)$$

avec  $\text{osc } \tilde{\varphi} := \sup_{x_\perp \in \mathbb{R}^2} \tilde{\varphi}(x_\perp) - \inf_{x_\perp \in \mathbb{R}^2} \tilde{\varphi}(x_\perp)$ . Nous observerons plus tard que les spectres des opérateurs de Pauli et de Dirac que nous allons considérer se déduisent directement de (0.13).



### 0.1.3 Opérateur de Schrödinger magnétique

Dans cette thèse, tous les opérateurs de Schrödinger seront considérés avec un champ magnétique constant. Ainsi en dimension 3, on considère l'opérateur auto-adjoint de Schrödinger avec champ magnétique d'intensité  $b_0 > 0$ , défini par

$$S_0 := \left( D_{x_1} + \frac{b_0}{2} x_2 \right)^2 + \left( D_{x_2} - \frac{b_0}{2} x_1 \right)^2 - b_0 + D_{x_3}^2, \quad D_v := -i \frac{\partial}{\partial v}. \quad (0.15)$$

L'opérateur  $S_0$  est initialement défini sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ , et donc fermé dans  $L^2(\mathbb{R}^3) := L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ . Il est à noter que  $A$  défini par (0.8) est le potentiel magnétique associé à l'opérateur  $S_0$ . Cet opérateur peut s'écrire dans la décomposition  $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^2) \otimes L^2(\mathbb{R})$  comme

$$S_0 = H_\perp^-(b_0) \otimes I_3 + I_\perp \otimes D_{x_3}^2, \quad (0.16)$$

où  $I_\perp$  et  $I_3$  sont respectivement les opérateurs identité dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $L^2(\mathbb{R})$ , et

$$H_\perp^-(b_0) = \left( D_{x_1} + \frac{b_0}{2} x_2 \right)^2 + \left( D_{x_2} - \frac{b_0}{2} x_1 \right)^2 - b_0 \quad (0.17)$$

est l'opérateur défini par (0.12) avec  $b = b_0$ . Il est bien connu [8], [29] que le spectre  $\sigma(H_\perp^-(b_0))$  de l'opérateur  $H_\perp^-(b_0)$  est formé par les niveaux de Landau  $2b_0j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , et de plus la multiplicité de chaque niveau de Landau est infinie. Puisque

$$D_{x_3}^2 = -\frac{d^2}{dx_3^2} \quad (0.18)$$

est le Laplacien en dimension 1 dans  $L^2(\mathbb{R})$  avec un spectre coïncidant avec  $[0, +\infty)$  et absolument continue, alors (0.16) entraîne que le spectre  $\sigma(S_0)$  de l'opérateur de Schrödinger  $S_0$  est absolument continu et satisfait

$$\sigma(S_0) = [0, +\infty). \quad (0.19)$$

Les niveaux de Landau  $2b_0j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  jouent le rôle de seuils de ce spectre.

### 0.1.4 Matrices standards de Dirac et de Pauli

Les matrices standards de Dirac sont un groupe de quatre matrices de taille 4 que nous noterons par  $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  et  $\beta$ . Pour  $1 \leq j \leq 3$ , les  $\alpha_j$  s'expriment en fonction du triplet de matrices de Pauli  $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  qui sont de taille 2. Plus précisément, pour tout  $1 \leq j \leq 3$ , on a

$$\alpha_j := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_j \\ \sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (0.20)$$

où  $\mathbf{0}$  et  $\mathbf{1}$  sont respectivement les matrices nulle et unité de taille 2, et

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (0.21)$$

Plus généralement, le choix des matrices  $\alpha$  et  $\beta$  n'est pas unique. En effet, les matrices  $\alpha_j$  et  $\beta$  sont déterminées par les relations d'anti-commutation

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} \mathbf{1}, \quad \alpha_j \beta + \beta \alpha_j = \mathbf{0}, \quad \beta^2 = \mathbf{1} \quad (0.22)$$

pour tout  $1 \leq j, k \leq 3$ , où  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker défini par  $\delta_{jk} = 1$  si  $j = k$  et  $\delta_{jk} = 0$  si  $j \neq k$ . On pourra par exemple se référer à [127, Appendice du Chapitre 1] pour d'autres représentations.

### 0.1.5 Opérateur de Pauli magnétique

Soit  $A$  le potentiel magnétique dont les composantes sont définies par (0.7). L'opérateur auto-adjoint  $P_0$  de Pauli magnétique est défini initialement sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  par

$$P_0 := (\sigma \cdot (-i\nabla - A))^2, \quad (0.23)$$

où  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  est le triplet de matrices de Pauli définies par (0.21). Si l'on décompose  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  en produit tensoriel  $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2) \otimes L^2(\mathbb{R})$ , l'opérateur  $P_0$  admet pour représentation matricielle

$$P_0 = \begin{pmatrix} H_\perp^- \otimes I_3 + I_\perp \otimes D_{x_3}^2 & 0 \\ 0 & H_\perp^+ \otimes I_3 + I_\perp \otimes D_{x_3}^2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}. \quad (0.24)$$

Ici, les  $H_\perp^\mp$  sont les opérateurs définis par (0.12),  $I_\perp$  et  $I_3$  sont respectivement les opérateurs identité dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $L^2(\mathbb{R})$ , et  $D_{x_3}^2$  est le Laplacien en dimension 1 défini par (0.18). Puisque le spectre du Laplacien coïncide avec  $[0, +\infty)$  et est absolument continu, alors (0.24) et (0.13) entraînent que le spectre  $\sigma(P_0)$  de l'opérateur de Pauli  $P_0$  vérifie

$$\sigma(P_0) = [0, +\infty) \quad (0.25)$$

et est absolument continu. C'est un résultat de [95, Corollaire 2.2]. D'autres résultats sur le spectre d'opérateurs de Pauli peuvent être trouvés dans [73] et [94].

### 0.1.6 Opérateur de Dirac magnétique

On considère toujours le potentiel magnétique  $A$  dont les composantes sont définies par (0.7). L'opérateur auto-adjoint  $D_0$  de Dirac magnétique est défini initialement sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$  par

$$\begin{aligned} D_0 &:= \alpha \cdot (-i\nabla - A) + m\beta \\ &= \alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2 + \alpha_3 D_{x_3} + m\beta, \end{aligned} \quad (0.26)$$

où les  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , et  $\beta$  sont les matrices de Dirac définies par (0.20), les  $\Pi_j$  sont définies par (0.10), et  $m > 0$  est la masse de la particule. Le spectre  $\sigma(D_0)$  de l'opérateur  $D_0$  de Dirac vérifie

$$\sigma(D_0) = (-\infty, -m] \cup [m, +\infty). \quad (0.27)$$

De la même manière que le spectre de l'opérateur de Pauli magnétique est donné par (0.25), le résultat (0.27) peut se déduire à partir des propriétés spectrales (0.13) et l'identité (0.29) ci-dessous satisfaite par  $D_0^2$ . En effet, si l'on décompose  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$

en produit tensoriel  $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4) \otimes L^2(\mathbb{R})$ , une expression explicite matricielle de  $D_0$  est donnée par

$$D_0 = \begin{pmatrix} m & 0 & I_{\perp} \otimes D_{x_3} & a^* \otimes I_3 \\ 0 & m & a \otimes I_3 & -I_{\perp} \otimes D_{x_3} \\ I_{\perp} \otimes D_{x_3} & a^* \otimes I_3 & -m & 0 \\ a \otimes I_3 & -I_{\perp} \otimes D_{x_3} & 0 & -m \end{pmatrix}, \quad (0.28)$$

et de plus nous avons l'identité

$$D_0^2 = \begin{pmatrix} H_{\perp}^{-} \otimes I_3 + I_{\perp} \otimes (D_{x_3}^2 + m^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{\perp}^{+} \otimes I_3 + I_{\perp} \otimes (D_{x_3}^2 + m^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{\perp}^{-} \otimes I_3 + I_{\perp} \otimes (D_{x_3}^2 + m^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{\perp}^{+} \otimes I_3 + I_{\perp} \otimes (D_{x_3}^2 + m^2) \end{pmatrix}. \quad (0.29)$$

Ici, les  $H_{\perp}^{\mp}$  sont les opérateurs définis par (0.12),  $I_{\perp}$  et  $I_3$  sont respectivement les opérateurs identité dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $L^2(\mathbb{R})$ , et  $D_{x_3}^2$  le Laplacien en dimension 1 défini par (0.18). Dans [42], [50], [98], [127], on peut trouver d'autres résultats sur le spectre d'opérateurs de Dirac, et dans [1], [2], [3], [101], [102], [103] des résultats sur les zéro-modes associées à  $\pm m$ .

## 0.2 RÉSONANCES POUR DES PERTURBATIONS AUTO-ADJOINTES

Une résonance est un nombre complexe  $\nu - i\Gamma$  décrivant un état quantique instable qui oscille avec une fréquence  $\nu$  et une durée de vie proportionnelle à  $1/\Gamma$ . Du point de vue physique, les résonances ayant une durée de vie plus longue sont plus intéressantes, c'est-à-dire celles qui sont proches de l'axe réel. La connaissance des résonances près de l'axe réel permet de déduire des informations importantes sur la décroissance de l'énergie locale des solutions de l'équation d'évolution.

### 0.2.1 Définitions des résonances

Il existe diverses façons de définir les résonances. On pourra par exemple se référer à [110] pour un survey. Dans un cadre non réduit à la dimension 1, les premières définitions mathématiques des résonances furent probablement données par Lax et Phillips [72], Vainberg [129] et Aguilar et Combes [4]. De nos jours, les définitions les plus fréquentes dans la littérature s'appuient essentiellement sur deux techniques: celle des dilatations ou distorsions analytiques, et celle des prolongements méromorphes de la résolvante ou la matrice de scattering. Helffer et Martinez [49] prouvent, pour des perturbations de l'opérateur de Schrödinger en régime semi-classique, que les définitions coïncident lorsque les deux techniques s'appliquent simultanément. Typiquement, pour des champs magnétiques unidirectionnels constants, la dilatation est effectuée dans la direction du champ magnétique. On pourra citer à cet effet pour l'opérateur de Schrödinger l'article de Avron, Herbst et Simon [8], celui de Wang [131], et celui de Astaburuaga, Briet, Bruneau, Fernandez et Raikov [7]. Pour l'opérateur de Dirac, Baslev et Helffer [11] ont défini les résonances en prolongeant la résolvante ou la matrice de scattering. Froese considère dans [40] l'opérateur de Schrödinger en dimension 1 avec une classe

de potentiels réguliers à décroissance exponentielle. Les résonances sont alors définies comme étant les pôles du prolongement méromorphe de la résolvante pondérée à partir du demi-plan supérieur complexe, et sont identifiées à des zéros d'un déterminant relatif. En considérant également des potentiels réguliers à décroissance exponentielle en la variable  $x_3$  et polynomiale en les variables  $x_1$  et  $x_2$ , la même approche est utilisée par Bony, Bruneau et Raikov [13] pour l'opérateur de Schrödinger magnétique  $S_0$  défini par (0.15).

### 0.2.2 Des résultats connus sur la distribution des résonances

Les premiers résultats connus sur les résonances ont été obtenus dans le cadre de perturbations à support compact du Laplacien. Dans la plupart des cas, la problématique a consisté à établir une majoration du nombre de résonances dans un disque de rayon  $r$  ou d'en établir des asymptotiques lorsque  $r \gg 1$ . Ces questions remontent à Melrose [78], où il établit pour le Laplacien à l'extérieur d'un obstacle borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  impaire, que le nombre de résonances dans un disque de rayon  $r$  est un  $\mathcal{O}(r^n)$ . Pour le Laplacien en dimension 1, Zworski prouve dans [135] que le nombre de résonances dans un disque de rayon  $r$  satisfait l'asymptotique

$$\frac{2a}{\pi}r(1 + o(1)), \quad r \gg 1,$$

où  $a$  est le diamètre du support de la perturbation. Dans [136], il obtient une majoration en  $\mathcal{O}(r^n)$  du nombre de résonances dans le cas du scattering pour des perturbations bornées à support compact. Dans [137], il prouve en dimension  $n$  impair pour des potentiels radiaux suffisamment réguliers, que le nombre de résonances satisfait l'asymptotique

$$K_n a^n r^n (1 + o(1)), \quad r \gg 1,$$

où  $K_n$  est une constante dépendant de  $n$ . Stefanov [123] établira plus tard des résultats du même type pour des potentiels à support compact en dimension impaire. Vodev [130] étendra le résultat de Zworski [136] à des perturbations métriques à support compact. Dans [118], Sjöstrand and Zworski par dilatation analytique établissent des résultats similaires pour des perturbations relativement compactes abstraites. Dans le régime semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger, des estimations du nombre de résonances en  $\mathcal{O}(h^{-n})$  où  $h \searrow 0$  est le paramètre semi-classique ont été obtenues. On pourra citer à cet effet les travaux de Sjöstrand [117], [115], [116], ceux de Petkov et Zworski [85], et ceux de Dimassi et Zerzeri [33]. Des estimations du même type sont obtenues par Khochman [62], [63] dans le cas de l'opérateur de Dirac semi-classique. Pour l'opérateur de Schrödinger magnétique  $S_0$  défini par (0.15), la problématique diffère de celle du Laplacien et consiste à estimer le nombre de résonances dans des disques centrés en les niveaux de Landau  $2b_0j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . En effet, en considérant des perturbations régulières à décroissance rapide, Bony, Bruneau et Raikov [13] donnent une majoration du nombre de résonances près des niveaux de Landau par une fonction de comptage des valeurs propre d'un opérateur de Toeplitz. Dans [14] ils précisent les résultats obtenus dans [13] en établissant des développements asymptotiques du nombre de résonances près des niveaux de Landau lorsque les perturbations sont de signe fixé. Ils montrent en particulier qu'il en existe un nombre infini près de chaque niveau de Landau et qu'elles sont localisées dans un secteur joignant  $2b_0j$  et dépendant du signe de la perturbation.

### 0.3 RÉSONANCES PRÈS DE 0 ET $\pm m$ DES OPÉRATEURS DE PAULI ET DE DIRAC MAGNÉTIQUES

#### 0.3.1 Perturbations auto-adjointes de signe non constant ou constant

Soient  $P_0$  et  $D_0$  les opérateurs de Pauli et de Dirac magnétiques définis respectivement par (0.23) et (0.26). Au Chapitre 1, le but est d'étudier respectivement près de 0 et près de  $\pm m$  les résonances des opérateurs perturbés

$$P := P_0 + V \quad \text{et} \quad D := D_0 + V. \quad (0.30)$$

La perturbation  $V \equiv \{V_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n}$  ( $n = 2$  ou  $4$ ) est supposée matricielle hermitienne et identifiée à l'opérateur de multiplication par  $V$  dont les coefficients  $V_{jk} \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  satisfont l'hypothèse de décroissance super-exponentielle suivante pour tout  $\mathbf{x} = (x_\perp, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ :

$$V(\mathbf{x}) \in \mathfrak{B}_h(\mathbb{C}^n), \quad |V_{jk}(\mathbf{x})| = \mathcal{O}\left(\langle x_\perp \rangle^{-m_\perp} e^{-2\delta \langle x_3 \rangle}\right), \quad (0.31)$$

où  $m_\perp > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\langle x_\perp \rangle := (1 + |x_\perp|^2)^{1/2}$  et  $\mathfrak{B}_h(\mathbb{C}^n)$  est l'ensemble des matrices  $n \times n$  hermitiennes. Introduisons les opérateurs de Toeplitz  $\rho W_\pm \rho$  où  $\rho := \rho(b)$  est la projection orthogonale sur  $\ker H_\perp^-$  défini par (0.12), et  $W_\pm$  sont les opérateurs de multiplication par les fonctions  $W_\pm : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$W_+(x_\perp) := \int_{\mathbb{R}} |V|_{11}(x_\perp, x_3) dx_3 \quad \text{et} \quad W_-(x_\perp) := \int_{\mathbb{R}} |V|_{33}(x_\perp, x_3) dx_3, \quad (0.32)$$

$$W_+ =: W \quad \text{pour} \quad n = 2,$$

où les  $|V|_{jk}$  sont par définition les coefficients de la matrice  $|V|$ . Sous l'hypothèse (0.31), les opérateurs auto-adjoints positifs  $\rho W_\pm \rho$  sont compacts dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Dans des espaces de Banach appropriés, nous montrons que les résolvantes de  $P$  et  $D$  définies sur le demi-plan supérieur admettent des prolongements méromorphes. Les résonances de  $P$  et  $D$  sont alors définies comme étant les pôles de ces extensions méromorphes. Pour ces opérateurs, Raikov [95] et Tiedra de Aldecoa [126] étudient la fonction de décalage spectral respectivement près de 0 et  $\pm m$  et montrent qu'elle possède des singularités pour  $V$  de signe fixé décroissant polynomialement à l'infini. Il est naturel de penser que ces explosions de la fonction de décalage spectral sont liées à une accumulation de résonances près de 0 et  $\pm m$ . Cela a d'ailleurs été montré pour l'opérateur de Schrödinger magnétique  $S_0$  défini par (0.15) par Bony, Bruneau et Raikov [13], [14], suite à un travail de Fernandez et Raikov [36] sur la fonction de décalage spectral près des niveaux de Landau.

En suivant la démarche de [13], nous montrons d'abord que l'étude des résonances près des seuils 0 et  $\pm m$  peut se ramener à l'étude des zéros d'un certain déterminant. Ensuite on en déduit grâce au lemme de Jensen une majoration du nombre de résonances près de 0 et près de  $\pm m$  dans des couronnes de la forme  $\{k \in \mathbb{C} : r < |k| < 2r\}$ ,  $r \ll 1$ . Plus précisément, si l'on désigne respectivement par  $\text{Res}(P)$  et  $\text{Res}(D)$  l'ensemble des résonances de  $P$  près de 0 et  $D$  près de  $\pm m$ , alors les bornes supérieures suivantes sont obtenues

$$\#\{z = z(k) := k^2 \in \text{Res}(P) : r < |k| < 2r\} = \mathcal{O}(n_+(r, \rho W \rho) |\ln r|) + \mathcal{O}(1), \quad (0.33)$$

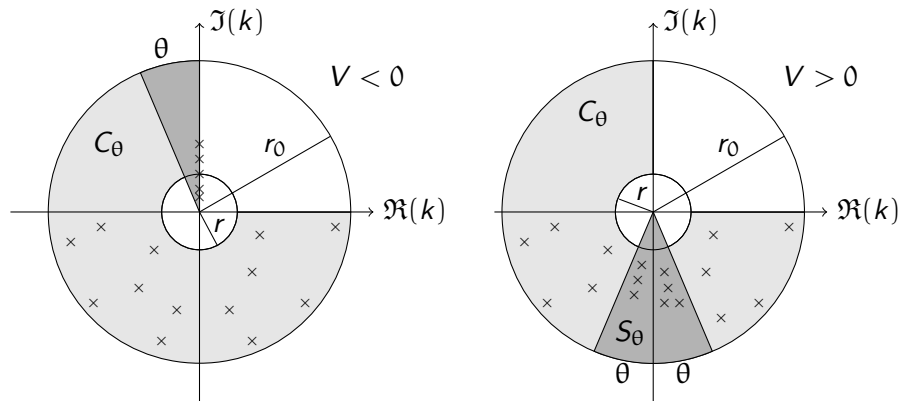


Figure 1: Localisation des résonances en variable  $k$  pour  $V$  de signe défini.

$$\begin{aligned} \# \left\{ z = z_{\pm m}(k) := \frac{\pm m(1+k^2)}{1-k^2} \in \text{Res}(D) : r < |k| < 2r \right\} \\ = \mathcal{O}(n_+(r, \rho W_{\pm} \rho) |\ln r|) + \mathcal{O}(1), \end{aligned} \quad (0.34)$$

où la quantité  $n_+(r, \rho W_{\pm} \rho)$ ,  $r > 0$ , est le nombre de valeurs propres comptées avec leur multiplicité des opérateurs auto-adjoints positifs compacts  $\rho W_{\pm} \rho$  définis à partir de (0.32). La distribution asymptotique des valeurs propres des opérateurs de Toeplitz  $\rho W_{\pm} \rho$  dépend de la décroissance des fonctions  $W_{\pm}$ . En particulier sous notre hypothèse (0.31) sur le potentiel  $V$ , si  $W_{\pm} = U$  satisfait les hypothèses de régularité du Lemme 4.2, alors

$$n_+(r, \rho W_{\pm} \rho) \sim r^{-2/m_{\pm}}, \quad r \searrow 0, \quad (0.35)$$

et si  $W_{\pm}$  est à support compact, alors on a

$$n_+(r, \rho W_{\pm} \rho) \sim (\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r|, \quad r \searrow 0. \quad (0.36)$$

Dans le cas où le potentiel  $V$  est de signe constant, nous établissons respectivement des développements asymptotiques du nombre de résonances près de 0 et près de  $\pm m$ , et montrons qu'elles sont localisées dans des zones dépendant du signe du potentiel  $V$  (voir Figure 1). Plus précisément, si  $W = U$  satisfait les hypothèses du Lemme 4.2 ou 4.3 ou 4.4, les asymptotiques suivantes sont obtenues

$$\begin{aligned} \#\{z = z(k) \in \text{Res}(P) : r < |k| \leq r_0\} &= n_+ \left( r, \frac{1}{2} \rho W \rho \right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0, \\ \#\{z = z_{\pm m}(k) \in \text{Res}(D) : r < |k| \leq r_0\} &= n_+ \left( r, \frac{1}{2} \rho W_{\pm} \rho \right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0. \end{aligned} \quad (0.37)$$

Nous en déduisons en particulier une accumulation des résonances près des seuils 0 et  $\pm m$ . Dans la Figure 1 ci-dessus, pour  $r_0 \ll 1$ , les résonances  $z(k) = k^2$  de  $P$  près de 0 et  $z_m(k) = \frac{m(1+k^2)}{1-k^2}$  de  $D$  près de  $m$  sont concentrées dans les secteurs  $S_{\theta}$ . Pour  $V < 0$ , les seules résonances sont les valeurs propres  $z(k) = k^2$  et  $z = z_m(k)$  et sont concentrées sur la demi-droite  $k = i]0, +\infty)$ . Pour  $V > 0$ , elles sont concentrées près de la demi-droite  $k = -i]0, +\infty)$ . Dans  $C_{\theta}$ , le nombre de résonances est majoré par  $\mathcal{O}(|\ln r|)$  pour  $V$  de signe non fixé.

### 0.3.2 Un cas particulier de perturbations auto-adjointes de signe non constant

Au Chapitre 2, le but est d'étudier les résonances près de 0 de l'opérateur de Pauli perturbé  $P$  défini par (0.30) pour des potentiels  $V$  de la forme

$$V(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 0 & \overline{U}(\mathbf{x}) \\ U(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := (x_\perp, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad U(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}, \quad (0.38)$$

où la fonction  $U$  satisfait l'hypothèse de décroissance super-exponentielle

$$|U(\mathbf{x})| \leq \mathcal{O} \left( \langle x_\perp \rangle^{-m_\perp} e^{-2\delta \langle x_3 \rangle} \right), \quad m_\perp > 0, \quad \delta > 0. \quad (0.39)$$

**Remarque 0.2.** Il est à noter qu'un potentiel  $V$  de la forme (0.38) est de signe non constant puisque ses valeurs propres sont données par  $\pm |U(\mathbf{x})|$ .

Dans la sous-section précédente, nous avons vu dans le cas des potentiels  $V$  de signe non fixé satisfaisant (0.31) pour  $n = 2$ , que la localisation des résonances de l'opérateur  $P$  (Figure 1) et l'obtention d'un développement asymptotique de leur nombre près de 0 n'est possible que lorsque le signe du potentiel  $V$  est fixé. Cependant pour des potentiels  $V$  de signe non fixé de la forme (0.38), nous prouvons que les résonances sont localisées sur la demi-droite  $(-\infty, 0)$  (voir Figure 2), puis établissons un développement asymptotique, une majoration et une minoration de leur nombre près de 0. Pour ce faire, on exploite le fait que (0.38) permet de réduire l'étude des résonances de  $P$  près de 0 à celle de l'Hamiltonien semi-effectif  $P_- - \overline{U}(P_+ - z)^{-1}U$  pour  $z$  assez petit dans l'ensemble résolvant de  $P_+$ , où  $P_\pm$  sont les opérateurs de Schrödinger définis par (0.24). Afin d'énoncer ces résultats, introduisons les notations suivantes. Pour un opérateur borné  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^3))$ , on définit sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  l'opérateur  $W(\mathcal{B})$  par

$$(W(\mathcal{B})f)(x_\perp) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \overline{U}(x_\perp, x_3) \mathcal{B}(Uf)(x_\perp, x_3) dx_3. \quad (0.40)$$

**Remarque 0.3.** Notons que si  $\mathcal{B} = I$ , l'opérateur identité sur  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , alors  $W(I)$  est l'opérateur de multiplication par la fonction  $W(x_\perp) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |U|^2(x_\perp, x_3) dx_3$ . Cette fonction est à comparer avec la fonction  $W$  définie par (0.32).

Sous l'hypothèse (0.39) sur la fonction  $U$ , les opérateurs de Toeplitz auto-adjoints positifs  $\rho W(I)\rho$  et  $\rho W(P_+^{-1})\rho$  sont compacts dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Ainsi avec les notations ci-dessus, nous prouvons que si  $n_+(r, \rho W(P_+^{-1})\rho) \rightarrow +\infty$ ,  $r \rightarrow 0$ , alors le nombre de résonances de l'opérateur de Pauli  $P$  près 0 satisfait l'asymptotique

$$\begin{aligned} & \#\left\{ z = z(k) = k^2 \in \text{Res}(P) : r_\ell < |k| \leq r_0 \right\} \\ &= n_+(r_\ell, \rho W(P_+^{-1})\rho) (1 + o(1)), \quad \ell \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (0.41)$$

où  $(r_\ell)_\ell$  est une suite tendant vers 0 quand  $\ell \rightarrow \infty$ . Ne connaissant pas d'asymptotique générale de  $n_+(r, \rho W(P_+^{-1})\rho)$ , nous en déduisons des résultats quantitatifs seulement dans certaines situations. En particulier, si la fonction  $W(I)$  satisfait les hypothèses

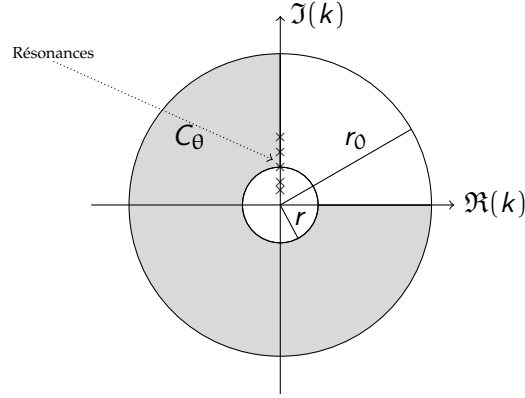


Figure 2: Localisation des résonances près de 0 en variable  $k$  pour  $V$  de signe non défini.

de régularité du Lemme 4.2, nous obtenons que le nombre de résonances de  $P$  près 0 satisfait

$$\begin{aligned} & \#\left\{z = z(k) = k^2 \in \text{Res}(P) : r < |k| \leq r_0\right\} \\ & \leq n_+\left(r, \frac{1}{\zeta} pW(I)p\right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0, \end{aligned} \quad (0.42)$$

où  $\zeta$  est la constante définie par (0.14) et  $pW(I)p$  vérifie

$$n_+\left(r, \frac{1}{\zeta} pW(I)p\right) \sim r^{-1/m_\perp}, \quad r \searrow 0. \quad (0.43)$$

**Remarque 0.4.** Observons que l'ordre  $r^{-1/m_\perp}$  (0.43) est meilleur que l'ordre  $r^{-2/m_\perp}$  (0.35) obtenu pour les potentiels de signe non constant généraux satisfaisant (0.31) pour  $n = 2$ .

Par ailleurs lorsque le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est constant, i.e.  $b = b_0$  dans (0.2), nous précisons  $n_+\left(r, pW(P_+^{-1})p\right)$ ,  $r \searrow 0$ , lorsque la fonction  $U$  est de la forme  $U(x_\perp, x_3) = U_\perp(x_\perp) \mathcal{U}(x_3)$ . Cette précision permet d'établir une minoration du nombre de résonances de  $P$  près 0 pour  $\mathcal{U} \in L^2(\mathbb{R})$ . En effet soient  $p_0 := p(b_0)$  la projection orthogonale sur  $\ker H_\perp^-$  défini par (0.12), et  $K_1$  la constante définie par

$$K_1 := \frac{\left\langle (D_{x_3}^2 + 2b_0)^{-1} \mathcal{U}, \mathcal{U} \right\rangle}{2}, \quad (0.44)$$

où  $D_{x_3}^2$  est le Laplacien en dimension 1 défini par (0.18). Si l'opérateur non auto-adjoint compact  $p_0 U_\perp p_0$  vérifie

$$\begin{aligned} n_* \left( \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}, p_0 U_\perp p_0 \right) & := n_* \left( \frac{r}{K_1}, (p_0 U_\perp p_0)^* p_0 U_\perp p_0 \right) \\ & = \phi(r) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0, \end{aligned}$$

où la fonction  $\phi(r)$  est comme dans le Lemme 4.9, alors nous établissons que

$$\begin{aligned} & \#\left\{z = z(k) = k^2 \in \text{Res}(P) : r < |k| \leq r_0\right\} \\ & \geq n_* \left( \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}, p_0 U_\perp p_0 \right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0. \end{aligned} \quad (0.45)$$



En particulier si la fonction  $U_{\perp}$  est positive alors l'opérateur  $p_0 U_{\perp} p_0$  est positif de sorte que si elle satisfait les hypothèses de régularité du Lemme 4.2, nous avons

$$\begin{aligned} & \#\left\{z = z(k) = k^2 \in \text{Res}(P) : r < |k| \leq r_0\right\} \\ & \geq n_+ \left( \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}, p_0 U_{\perp} p_0 \right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0. \end{aligned} \quad (0.46)$$

Noter que dans ce cas nous avons

$$n_+ \left( \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}, p_0 U_{\perp} p_0 \right) = C_{m_{\perp}} K_1^{1/m_{\perp}} r^{-1/m_{\perp}} (1 + o(1)), \quad r \searrow 0.$$

Nous en déduisons en particulier l'accumulation de résonances ou de valeurs propres de  $P$  près de 0 à gauche.

#### 0.4 SPECTRE DISCRET POUR DES PERTURBATIONS NON AUTO-ADJOINTES

Nous abordons dans cette partie le second thème majeur de cette thèse à savoir, l'analyse du spectre discret des opérateurs de Schrödinger et de Pauli magnétiques lorsqu'ils sont perturbés par des potentiels non auto-adjoints. Comme mentionné en début de la section 0.1, ils seront définis dans un formalisme plus général en dimension  $d \geq 2$ , et de plus seront considérés avec un champ magnétique constant. Globalement, cette analyse est basée sur des inégalités de type Lieb-Thirring généralisées, inégalités à partir desquelles on peut *a priori* déduire des informations sur la distribution des valeurs propres et leur vitesse de convergence au voisinage du spectre essentiel de ces opérateurs. Avant d'exposer nos résultats, faisons un bref historique sur les inégalités classiques Lieb-Thirring. On pourra à cet effet se référer à [53] pour un exposé large sur le sujet.

##### 0.4.1 Les inégalités Lieb-Thirring (classiques)

Considérons l'opérateur auto-adjoint de Schrödinger

$$H = -\Delta + V \quad (0.47)$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , où  $V$  est un potentiel à valeurs réelles. Si le potentiel  $V$  décroît assez rapidement et est régulier, alors typiquement le spectre de  $H$  est absolument continu sur  $[0, +\infty)$ . Si la partie négative  $V_- := \max(-V, 0)$  de  $V$  est non nulle, alors l'opérateur  $H$  peut avoir un nombre fini ou infini de valeurs propres  $\lambda_k$  négatives. Dans le cas où ce nombre est infini, le seul point d'accumulation possible est 0. Les estimations sur les valeurs propres  $\lambda_k$  de la forme

$$\sum_k |\lambda_k|^p \leq L_{p,d} \int_{\mathbb{R}^d} |V_-(\mathbf{x})|^{p+\frac{d}{2}} d\mathbf{x} \quad (0.48)$$

sont classiquement appelées les inégalités Lieb-Thirring dans la littérature. Comme le laisse penser leur nom, les premières inégalités de ce type furent établies par Lieb et

Thirring [69], [70], qui ont utilisé le cas  $p = 1$ ,  $d = 3$  dans leur célèbre preuve de la stabilité de la matière. Ils démontrent (0.48) pour  $p > 0$ ,  $d \geq 2$ , et  $p > \frac{1}{2}$ ,  $d = 1$ . Un peu plus tard, Cwikel [23], Lieb [68] et Rozenblum [100] prouvent (0.48) dans le cas critique  $p = 0$ ,  $d \geq 3$ . Pour cette raison, ce dernier cas est appelé l'inégalité de Cwikel-Lieb-Rozenblum. De nouvelles preuves en sont plus tard proposées par Li-Yau [75] et Conlon [22]. Néanmoins, il existe des exemples qui montrent que (0.48) n'est pas vérifiée dans le cas  $p = 0$ ,  $d = 1$  ou 2. On pourra par exemple se référer à l'ouvrage de Landau-Lifshitz [65, pages 156-157] et à l'article de Simon [109, Remarque 3, page 315]. Pendant plusieurs années le cas  $p = \frac{1}{2}$ ,  $d = 1$  est resté ouvert, peut être en partie parce que Lieb et Thirring [70] avaient affirmé à tort l'avoir prouvé. C'est seulement en 1996 que Weidl [132] établira ce résultat pour  $p = \frac{1}{2}$ ,  $d = 1$ . Des inégalités Lieb-Thirring sont également obtenues par Hundertmark et Simon [53] pour les matrices de Jacobi. Pour des optimisations de la constante  $L_{p,d}$  dans (0.48), voir par exemple [70], [51] et [52]. Dans [70], Lieb et Thirring en font une conjecture de la valeur optimale pour  $p \geq \frac{3}{2}$ . Tous les résultats ci-dessus traitent avec un potentiel  $V$  auto-adjoint. Établir des inégalités Lieb-Thirring généralisées du type (0.48) pour des potentiels  $V$  non auto-adjoints est resté un défi pendant quelques années.

#### 0.4.2 Les inégalités Lieb-Thirring généralisées

L'un des premiers travaux à aller dans ce sens sont ceux de Frank, Laptev, Lieb et Seiringer [39] où ils considèrent l'opérateur de Schrödinger  $H$  défini par (0.47) avec un potentiel à valeurs complexes  $V \in L^{\frac{d}{2}+p}(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 1$ ,  $p \geq 1$ . Ils établissent que pour tout  $\chi > 0$ ,

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_d(H) \\ |\Im(\lambda)| \geq \chi |\Re(\lambda)|}} |\lambda|^p \leq C(d, p) \left(1 + \frac{2}{\chi}\right)^{\frac{d}{2}+p} \int_{\mathbb{R}^d} |V(\mathbf{x})|^{\frac{d}{2}+p} d\mathbf{x}, \quad (0.49)$$

où  $\sigma_d(H)$  est le spectre discret de  $H$ . Des généralisations récentes de (0.49) sont obtenues par Laptev et Safronov [67]. Puisque la somme (0.49) exclut le secteur  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\Im(\lambda)| < \chi |\Re(\lambda)|\}$  contenant la demi-droite réelle positive, elle ne permet donc pas d'avoir des informations sur les suites de valeurs propres discrètes qui convergent vers un point du spectre essentiel de  $H$ ,  $\sigma_{\text{ess}}(H) = [0, +\infty)$  (voir la Remarque 0.5 ci-dessous). Récemment, Borichev, Golinskii et Kupin (BGK) [15] ont développé de nouvelles techniques d'analyse complexe d'estimation des sommes de zéros de fonctions holomorphes sur le disque unité permettant de résoudre ce type de problèmes. C'est ainsi qu'avec ces méthodes, ils établissent l'inégalité (0.50) ci-dessous sur les matrices de Jacobi de spectre essentiel  $[-2, 2]$ , avec un potentiel complexe  $V$  appartenant à la classe de Schatten-von Neuman  $S_p$ ,  $p \geq 1$ . Pour tout  $p \geq 2$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{\text{dist}(\lambda, [-2, 2])^{p+1+\varepsilon}}{|\lambda^2 - 4|} \leq C(\varepsilon, \|V\|_p, p) \|V\|_p, \quad (0.50)$$

où  $\|\cdot\|_p$  désigne la norme  $S_p$ . L'inégalité (0.50) est un cas particulier de [15, Théorème 2.3] où un résultat du même type est énoncé dans le cas  $p = 1$ . En utilisant les méthodes développées par BGK [15], Demuth, Hansmann et Katriel [26], [27] établissent des résultats similaires à (0.50) pour l'opérateur de Schrödinger  $H$  défini par (0.47). Ils considèrent une perturbation complexe  $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$  avec  $p \geq \max(\frac{d}{2}, 2)$ , satisfaisant pour

un certain  $\omega_0 > 0$  fixé,  $\langle \mathfrak{A}(V)f, f \rangle \geq -\omega_0 \langle f, f \rangle = -\omega_0 \|f\|_{L^2}^2$  pour tout  $f \in \text{Dom}(-\Delta)$ . Ils prouvent ainsi que pour tout  $\tau \in (0, 1)$ , si  $p - \frac{d}{2} \geq 1 - \tau$ , alors

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{\text{dist}(\lambda, [0, +\infty))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{d}{4}+\frac{1}{2}} (|\lambda|+1)^{\frac{d}{4}-\frac{1}{2}+2\tau}} \leq C(d, p, \tau, \omega_0) \int_{\mathbb{R}^d} |V(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}, \quad (0.51)$$

L'inégalité (0.51) est un cas particulier de [26, Théorème 2] où un résultat du même type est établi dans le cas  $p - \frac{d}{2} < 1 - \tau$ .

**Remarque 0.5.** À ce stade, il est utile de signaler que le défaut d'information figurant dans (0.49) sur les valeurs propres discrètes de  $H$  près de l'axe réel  $[0, +\infty)$  est dans une certaine mesure apparent. Cette remarque a été mise en évidence par Demuth, Hansmann et Katriel [26] qui établissent en effet comme corollaire direct de (0.49), que pour tout potentiel  $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 1$  avec  $p - \frac{d}{2} \geq 1$ , et pour tout  $\tau \in (0, 1)$ ,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{\text{dist}(\lambda, [0, +\infty))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{d}{2}+\tau}} \leq C(d, p, \tau) \int_{\mathbb{R}^d} |V(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}. \quad (0.52)$$

Noter cependant que (0.49) implique (0.52) que pour des potentiels  $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$  tels que  $p - \frac{d}{2} \geq 1$ , contrairement à [26, Théorème 2] qui traite une classe de potentiels plus large avec l'aide des techniques développées par BGK [15].

Le cas de l'opérateur de Dirac sans champ magnétique et l'opérateur de Klein-Gordon a été récemment traité par C. Dubuisson dans [34].

### 0.4.3 Résultats pour des perturbations des opérateurs de Schrödinger et de Pauli magnétiques en dimension $d \geq 2$

Au Chapitre 3, le but est d'étudier le spectre discret de deux familles d'opérateurs auto-adjoints non bornés agissant sur un espace de Hilbert séparable  $X$ , lorsqu'ils sont perturbés par des potentiels non auto-adjoints. Pour ce faire, nous établirons des inégalités Lieb-Thirring généralisées du type (0.51) en s'appuyant d'une part sur un résultat récent de Hansmann [47, Théorème 1], et d'autre part en s'aidant des techniques développées par BGK [15]. On note par  $S_p(X)$ ,  $p \in (0, +\infty)$  les classes de Schatten-von Neuman des opérateurs linéaires compacts  $L$  dans  $X$  pour lesquels la norme  $\|L\|_p := (\text{Tr}|L|^p)^{1/p}$  est finie. Pour un opérateur  $\mathcal{H}$  agissant sur  $X$ , son image numérique est définie par

$$N(\mathcal{H}) := \{ \langle \mathcal{H}f, f \rangle : f \in \text{Dom}(\mathcal{H}), \|f\|_X = 1 \}. \quad (0.53)$$

#### 0.4.3.1 Le cas des dimension paires

Soient  $x_\perp := (x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) \in \mathbb{R}^{2d}$ ,  $d \geq 1$ , et  $b_0 > 0$  une constante fixée. La première famille d'opérateurs auto-adjoints non bornés considérée est celle des opérateurs de Schrödinger magnétiques

$$\mathbb{S}_{0,\perp} := \sum_{j=1}^d \left\{ \left( D_{x_j} + \frac{1}{2} b_0 y_j \right)^2 + \left( D_{y_j} - \frac{1}{2} b_0 x_j \right)^2 \right\}, \quad (0.54)$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C})$  définis initialement dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C})$ , et les opérateurs  $\mathcal{P}_0$  de Pauli magnétiques dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C}^2)$  définis par (0.63). Il est bien connu [8], [29] que leur

spectre respectif coïncide avec les niveaux de Landau  $b_0(d + 2j)$  et  $2b_0dj$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , et la multiplicité de chaque valeur propre est infini.

Dans le domaine de l'opérateur  $S_{0,\perp}$ , nous introduisons l'opérateur perturbé

$$S_{\perp} := S_{0,\perp} + V, \quad (0.55)$$

où  $V$  identifiée avec l'opérateur de multiplication par la fonction  $V$ , est une perturbation non auto-adjointe relativement compact par rapport  $S_{0,\perp}$ . Cela signifie que  $\text{Dom}(V) \supset \text{Dom}(S_{0,\perp})$ , et pour  $\lambda \in \rho(S_{0,\perp})$  l'ensemble résolvant de  $S_{0,\perp}$ , l'opérateur de Birman-Schwinger  $V(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1}$  est compact. Sous cette hypothèse sur le potentiel  $V$ , il est bien connu [61, Chapitre VI] qu'il existe une constante  $\mu_1 < 0$  telle que  $\sigma(S_{0,\perp}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq \mu_1\}$ . En pratique, nous considérons des classes de potentiels  $V$  non auto-adjoints qui satisfont la condition

$$\langle \Re(V)f, f \rangle \geq \mu_1 \|f\|^2 \quad (0.56)$$

et qui vérifient l'estimation

$$|V(x_{\perp})| \leq CF(x_{\perp}), \quad F \in L^p(\mathbb{R}^{2d}), \quad p \geq 2, \quad (0.57)$$

où  $C > 0$  est une constante et  $F$  une fonction strictement positive. Il est à noter que la condition (0.56) entraîne que

$$\sigma(S_{\perp}) \subset \overline{N(S_{\perp})} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq \mu_1\}. \quad (0.58)$$

Concrètement, l'hypothèse (0.57) est satisfaite en particulier par la classe de potentiels relativement compacts  $V : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{C}$  qui sont tels que

$$|V(x_{\perp})| \leq C \langle x_{\perp} \rangle^{-m_{\perp}}, \quad m_{\perp} > 0, \quad pm_{\perp} > 2d, \quad p \geq 2, \quad (0.59)$$

où  $\langle x_{\perp} \rangle := (1 + |x_{\perp}|^2)^{1/2}$ . Sous les hypothèses (0.56) et (0.57), nous établissons que pour tout  $p \geq 2[\frac{d}{2}] + 2$ , où  $[r]$  désigne la partie entière de  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(S_{\perp})} \frac{\text{dist}(\lambda, E)^p}{(1 + |\lambda|)^{2p}} \leq C(p, \mu_1, b, d) \int_{\mathbb{R}^{2d}} |F(x_{\perp})|^p dx_{\perp}, \quad (0.60)$$

où  $E = \{\Lambda_j := b_0(d + 2j), j \in \mathbb{N}\}$  est l'ensemble des niveaux de Landau de  $S_{0,\perp}$ .

L'inégalité Lieb-Thirring généralisée (0.60) fournit *a priori* beaucoup d'informations sur les suites de valeurs propres  $(\lambda_k)$  isolées qui convergent vers un point  $\lambda^* \in \sigma_{\text{ess}}(S_{\perp}) = E$ , ou celles qui divergent. Dans le cas de la convergence, elle implique en particulier que

$$\sum_k \text{dist}(\lambda_k, E)^p < \infty. \quad (0.61)$$

Ce qui signifie *a priori* que l'accumulation des valeurs propres discrètes de  $S_{\perp}$  près des  $\Lambda_j$  est une fonction monotone de  $p$ . Elles sont donc distribuées d'une manière moins dense dans un voisinage des  $\Lambda_j$  avec des valeurs croissantes de  $p$ .

Lorsque la perturbation  $V$  est bornée, alors la condition (0.56) impliquant l'hypothèse (0.58) est automatiquement vérifiée avec  $\mu_1 = -\|V\|_{\infty}$ . Dans ce cas, l'estimation (0.60) devient

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(S_{\perp})} \frac{\text{dist}(\lambda, E)^p}{(1 + |\lambda|)^{2p}} \leq C(p, b, d) (1 + \|V\|_{\infty})^{2p} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |F(x_{\perp})|^p dx_{\perp}. \quad (0.62)$$

**Remarque 0.6. (i)** Les résultats (0.60) et (0.62) restent valides lorsque l'on remplace l'opérateur de Schrödinger  $S_{0,\perp}$  défini par (0.54) par l'opérateur de Pauli magnétique

$$\mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} S_{0,\perp} - b_0 d & 0 \\ 0 & S_{0,\perp} + b_0 d \end{pmatrix}, \quad (0.63)$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C}^2)$ ,  $d \geq 1$ , perturbé par des potentiels  $V(x_\perp) := \{V_{\ell k}(x_\perp)\}_{1 \leq \ell, k \leq 2}$  non auto-adjoints matriciels, dont les coefficients  $V_{\ell k}$  satisfont (0.56) et (0.57). Les niveaux de Landau de l'opérateur de Pauli  $\mathcal{P}_0$  sont les  $2b_0 dj$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

(ii) Dans un cadre plus général, nous obtenons un résultat du type (0.60) pour des opérateurs non bornés auto-adjoints  $H_0$  tels que  $\sigma_{\text{ess}}(H_0) = \sigma(H_0) = E$  est un ensemble infini discret de la forme

$$E := \{\Lambda_j, j \in \mathbb{N}\}, \quad \Lambda_0 \geq 0, \quad \Lambda_{j+1} > \Lambda_j, \quad |\Lambda_{j+1} - \Lambda_j| \leq \delta = \text{constante} \quad \forall j. \quad (0.64)$$

#### 0.4.3.2 Le cas des dimensions impaires

Avec les notations ci-dessus, introduisons à présent les coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x} := (x_\perp, x) \in \mathbb{R}^{2d+1}$ ,  $d \geq 1$ . La deuxième famille d'opérateurs auto-adjoints non bornés considérée est celle des opérateurs de Schrödinger magnétiques

$$S_0 := S_{0,\perp} + D_x^2, \quad D_v := -i \frac{\partial}{\partial v}, \quad (0.65)$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d+1}) := L^2(\mathbb{R}^{2d+1}, \mathbb{C})$  définis initialement dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d+1}, \mathbb{C})$ , et les opérateurs  $\mathbb{P}_0$  de Pauli magnétiques dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d+1}, \mathbb{C}^2)$  définis par (0.75). Puisque l'opérateur  $S_0$  peut s'écrire dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d+1}) = L^2(\mathbb{R}^{2d}) \otimes L^2(\mathbb{R})$  comme

$$S_0 = S_{0,\perp} \otimes I_3 + I_\perp \otimes D_x^2, \quad (0.66)$$

où  $I_\perp$  et  $I_3$  sont respectivement les opérateurs identité dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$  et  $L^2(\mathbb{R})$ , alors le spectre de  $S_0$  est absolument continu, égale à  $[b_0 d, +\infty)$ , et contient un ensemble infini de seuils  $E = \{b_0(d + 2j), j \in \mathbb{N}\}$ , les niveaux de Landau.

Dans le domaine de l'opérateur  $S_0$ , nous introduisons l'opérateur perturbé

$$S = S_0 + V, \quad (0.67)$$

où le potentiel  $V$  est identifié avec l'opérateur de multiplication par la fonction  $V$ . Dans ce contexte des dimensions impaires, nous supposons que  $V$  est borné non auto-adjoint et satisfait pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2d+1}$  l'hypothèse

$$|V(\mathbf{x})| \leq CF(\mathbf{x})G(x), \quad F \in L^p(\mathbb{R}^{2d+1}), \quad p \geq 2, \quad G \in (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}), \quad (0.68)$$

où  $C > 0$  est une constante,  $F$  et  $G$  deux fonctions strictement positives. Typiquement, l'hypothèse (0.68) est satisfaite en particulier par les perturbations relativement compactes  $V : \mathbb{R}^{2d+1} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

$$|V(\mathbf{x})| \leq C \langle x_\perp \rangle^{-m_\perp} \langle x \rangle^{-m}, \quad m_\perp > 0, \quad m > 1/2, \quad (0.69)$$

où  $\langle y \rangle := (1 + |y|^2)^{1/2}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . En effet, posons  $F(\mathbf{x}) = \langle x_\perp \rangle^{-m_\perp} \langle x \rangle^{-\nu}$  et  $G(x) = \langle x \rangle^{-\tilde{m}}$ , où  $\nu + \tilde{m} = m$  avec  $\nu > 0$  et  $\tilde{m} > 1/2$ . Pour tout  $p \geq 2$  telle que  $pm_\perp > 2d$

et  $p\nu > 1$ , nous avons  $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et  $G \in (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ . Notons que puisque le potentiel  $V$  est borné, alors l'image numérique défini par (0.53) de l'opérateur  $S$  vérifie

$$\sigma(S) \subset \overline{N(S)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq -\|V\|_\infty \text{ et } |\Im(\lambda)| \leq \|V\|_\infty\}. \quad (0.70)$$

Sous l'hypothèse (0.68) sur le potentiel  $V$ , nous établissons le résultat suivant. Pour tout  $p \geq 2\left[\frac{d}{2}\right] + 2$  et tout  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(S)} \frac{\text{dist}(\lambda, [b_0 d, +\infty))^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} \text{dist}(\lambda, E)^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+}}{(1+|\lambda|)^\gamma} \leq C(p, b, d, \varepsilon)K, \quad (0.71)$$

où  $r_+ := \max(r, 0)$  pour  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > d + \frac{3}{2}$ , et  $K$  est la constante définie par

$$K := \|F\|_{L^p}^p (\|G\|_{L^2} + \|G\|_{L^\infty})^p (1 + \|V\|_\infty)^{d + \frac{p}{2} + \frac{3}{2} + \varepsilon}. \quad (0.72)$$

Le résultat (0.71) implique *a priori* plusieurs informations sur les suites de valeurs propres  $(\lambda_k) \in \sigma_d(S)$  qui convergent vers un point  $\lambda^* \in \sigma_{\text{ess}}(S) = [b_0 d, +\infty)$ , et celles qui divergent. Dans le cas de la convergence, on peut considérer sans perdre de généralité une sous suite et supposer que soit l'une ou l'autre des possibilités suivantes à lieu:

- (i)  $\lambda^* \in [b_0 d, +\infty) \setminus E$ .
- (ii)  $\lambda^* \in E$ .

Dans le cas (i), puisque la suite  $(\text{dist}(\lambda_k, E))_k$  est positive et ne converge pas vers 0, alors (0.71) entraîne que

$$\sum_k |\Im(\lambda_k)|^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} < \infty. \quad (0.73)$$

Dans le cas (ii), considérons par exemple les  $\lambda_k$  tendant vers un niveau de Landau non-tangentiellement (*i.e.*  $|\Re(\lambda_k) - \lambda^*| \leq C |\Im(\lambda_k)|$  avec  $C > 0$  une constante), et tels que  $\text{dist}(\lambda_k, E)$  soit suffisamment petite. On peut donc affirmer que (0.71) entraîne que

$$\sum_k \text{dist}(\lambda_k, E)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon+(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} < \infty. \quad (0.74)$$

Ainsi les estimations (0.73) and (0.74) nous permettent d'affirmer *a priori* que les valeurs propres discrètes sont distribuées d'une manière moins dense près des niveaux de Landau que partout ailleurs sur le spectre essentiel de l'opérateur  $S$ .

**Remarque 0.7.** Le résultat (0.71) reste valide lorsque l'on remplace l'opérateur de Schrödinger  $S_0$  défini par (0.65) par l'opérateur de Pauli magnétique

$$\mathbb{P}_0 := \begin{pmatrix} S_0 - b_0 d & 0 \\ 0 & S_0 + b_0 d \end{pmatrix}, \quad (0.75)$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d+1}, \mathbb{C}^2)$ ,  $d \geq 1$ , perturbé par des potentiels bornés  $V(x_\perp) := \{V_{\ell k}(x_\perp)\}_{1 \leq \ell, k \leq 2}$  non auto-adjoints matriciels, dont les coefficients  $V_{\ell k}$  satisfont (0.68). Le spectre de l'opérateur de Pauli  $\mathbb{P}_0$  coïncide avec  $[0, +\infty)$  et les niveaux de Landau  $2b_0 dj$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , jouent le rôle de seuils de ce spectre.



# 1 | RÉSONANCES PRÈS DE 0 ET $\pm m$ DES OPÉRATEURS DE PAULI ET DE DIRAC MAGNÉTIQUES

## Sommaire

---

1.1	Introduction	19
1.2	Énoncés des résultats principaux	20
1.3	Résonances près de 0 de l'opérateur de Pauli	24
1.3.1	Résonances	24
1.3.2	Preuve du Théorème 1.1	28
1.3.3	Preuve du Théorème 1.2	33
1.4	Résonances près de $\pm m$ de l'opérateur de Dirac	34
1.4.1	Résonances	34
1.4.2	Preuve du Théorème 1.3	39
1.4.3	Preuve du Théorème 1.4	42

---

Soient  $P_0$  et  $D_0$  les opérateurs de Pauli et Dirac magnétiques définis respectivement par (0.23) et (0.26). Nous considérons les opérateurs perturbés  $P := P_0 + V$  et  $D := D_0 + V$ , où  $V$  est un potentiel électrique qui décroît super-exponentiellement dans la direction du champ magnétique. Nous montrons que dans des espaces de Banach appropriés, les résolvantes de  $P$  et  $D$  définies sur le demi-plan supérieur admettent des prolongements méromorphes. Nous définissons les résonances de  $P$  et  $D$  comme étant les pôles de ces extensions méromorphes. D'une part, nous étudions la répartition des résonances de  $P$  près de l'origine 0 et d'autre part, celle des résonances de  $D$  près de  $\pm m$  où  $m$  est la masse d'une particule. Dans les deux cas, nous obtenons d'abord des majorations du nombre de résonances dans de petits domaines au voisinage de 0 et  $\pm m$ . Sous des hypothèses supplémentaires, nous obtenons des développements asymptotiques du nombre de résonances qui entraînent leur accumulation près des seuils 0 et  $\pm m$ . En particulier, pour une perturbation  $V$  de signe défini, nous obtenons des informations sur la répartition des valeurs propres de  $P$  et  $D$  près de 0 et  $\pm m$  respectivement.

*Classification mathématique:* 35B34 - 35P25.

*Mots clés:* Opérateurs de Pauli et de Dirac magnétiques, résonances.

## 1.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, le but est d'étudier les résonances (ou valeurs propres) près de 0 de l'opérateur  $P$  de Pauli perturbé défini par (1.3), et près de  $\pm m$  de l'opérateur  $D$  Dirac perturbé défini par (1.4). La perturbation  $V \equiv \{V_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n}$  ( $n = 2$  ou  $4$ ) est un potentiel matriciel hermitien identifié à l'opérateur de multiplication par  $V$ , et dont



les coefficients  $V_{jk} \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  décroissent super-exponentiellement par rapport à la variable  $x_3$ . Pour ces opérateurs, Raikov [95] et R. Tiedra de Aldecoa [126] étudient la fonction de décalage spectral respectivement près de 0 et  $\pm m$  et montrent qu'elle possède des singularités pour  $V$  de signe fixé décroissant polynomialement à l'infini. Il est naturel de penser que ces explosions de la fonction de décalage spectral sont liées à une accumulation de résonances près de 0 et  $\pm m$ . Cela a d'ailleurs été montré pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant par Bony, Bruneau et Raikov [13], [14], suite à un travail de Fernandez et Raikov [36] sur la fonction de décalage spectral près des niveaux de Landau.

En suivant la démarche de [13], nous montrons d'abord que l'étude des résonances près des seuils 0 et  $\pm m$  peut se ramener à l'étude des zéros d'un certain déterminant (Proposition 1.4 et Proposition 1.9). Dans le Théorème 1.1 et le Théorème 1.3, nous donnons une majoration du nombre de résonances près de 0 et près de  $\pm m$  respectivement. Cette majoration est décrite en termes du nombre de valeurs propres d'un certain opérateur compact de type Toeplitz. Dans le Théorème 1.2 et le Théorème 1.4 pour  $V$  de signe défini vérifiant l'hypothèse de décroissance (1.2), nous donnons respectivement un développement asymptotique du nombre de résonances près de 0 et près de  $\pm m$ . Nous en déduisons en particulier une accumulation des résonances près des seuils 0 et  $\pm m$ .

Nous supposons que le champ magnétique  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est unidirectionnel de la forme  $\mathbf{B} \equiv (0, 0, b)$  où la composante  $b$  est dans la classe des champs magnétiques admissibles définie dans la Définition 0.1. Dans la suite, pour un espace de Hilbert  $X$  séparable et  $q \in [1, \infty]$ ,  $S_q(X)$  désigne la classe de Schatten-von Neumann des opérateurs compacts  $L$  sur  $X$  pour lesquels la norme  $\|L\|_q := (\text{Tr}|L|^q)^{1/q}$  est finie ( $S_\infty(X)$  est l'ensemble des opérateurs compacts sur  $X$ ). Pour  $q = 1$ ,  $S_1(X)$  est l'espace de Banach des opérateurs à trace; pour  $q = 2$ ,  $S_2(X)$  est l'espace de Banach des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Nous adoptons également le choix standard de la racine carrée complexe

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}^+ := \{\zeta \in \mathbb{C} : \Im(\zeta) > 0\} \quad (1.1)$$

dans tout ce chapitre.

Le plan adopté est le suivant. Nos résultats principaux sont présentés dans la section 1.2. Dans la section 1.3, nous définissons les résonances de l'opérateur  $P$  près de 0 et prouvons le Théorème 1.1 et le Théorème 1.2. Dans la section 1.4, sont définies les résonances de  $D$  près de  $\pm m$ . Par ailleurs, nous y prouvons le Théorème 1.3 et le Théorème 1.4.

## 1.2 ÉNONCÉS DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Pour tout  $\mathbf{x} = (x_\perp, x_3) \in \mathbb{R}^3$  avec  $x_\perp = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , nous supposons que le potentiel électrique  $V \equiv \{V_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq n}$  satisfait l'hypothèse

$$V(\mathbf{x}) \in \mathfrak{B}_h(\mathbb{C}^n), \quad |V_{jk}(\mathbf{x})| = \mathcal{O}\left(\langle x_\perp \rangle^{-m_\perp} e^{-2\delta \langle x_3 \rangle}\right), \quad m_\perp > 0, \quad \delta > 0, \quad (1.2)$$

où  $\langle x_\perp \rangle := (1 + |x_\perp|^2)^{1/2}$  et  $\mathfrak{B}_h(\mathbb{C}^n)$  est l'ensemble des matrices  $n \times n$  hermitiennes.

Pour  $n = 2$ , nous définissons dans le domaine de l'opérateur non perturbé  $P_0$  de Pauli défini par (0.23) l'opérateur

$$P := P_0 + V. \quad (1.3)$$

Pour  $n = 4$ , nous définissons dans le domaine de l'opérateur non perturbé  $D_0$  de Dirac défini par (0.26) l'opérateur

$$D := D_0 + V. \quad (1.4)$$

Introduisons les opérateurs de Toeplitz  $pW_{\pm}p$ , où  $p := p(b)$  est la projection orthogonale sur  $\ker H_{\perp}^{-}$  défini par (0.12), et  $W_{\pm}$  sont les opérateurs de multiplication par les fonctions  $W_{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$W_+(x_{\perp}) := \int_{\mathbb{R}} |V|_{11}(x_{\perp}, x_3) dx_3 \quad \text{et} \quad W_-(x_{\perp}) := \int_{\mathbb{R}} |V|_{33}(x_{\perp}, x_3) dx_3, \quad (1.5)$$

$$W_+ =: W \quad \text{pour} \quad n = 2.$$

Ici les  $|V|_{jk}$  sont par définition les coefficients de la matrice  $|V|$ . Sous l'hypothèse (1.2), pour tout  $x_{\perp} \in \mathbb{R}^2$ ,  $|W_{\pm}(x_{\perp})| = \mathcal{O}(\langle x_{\perp} \rangle^{-m_{\perp}})$ . Le Lemme 4.1 entraîne ainsi que les opérateurs auto-adjoints positifs  $pW_{\pm}p$  sont compacts dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Si  $A$  est un opérateur auto-adjoint positif compact, on pose pour tout  $s > 0$

$$n_+(s, A) := \text{rang } \mathbf{1}_{(s, +\infty)}(A). \quad (1.6)$$

Soit le disque pointé

$$D(0, \epsilon)^* := \{k \in \mathbb{C} : 0 < |k| < \epsilon\}, \quad \epsilon < \min(\delta, \sqrt{\zeta}), \quad (1.7)$$

où  $\delta$  et  $\zeta$  sont les constantes respectivement définies par (1.2) et (0.14).

Désignons par  $\text{Res}(P)$  l'ensemble des résonances de  $P$  près de 0. Notre premier résultat est une majoration du nombre de résonances  $z(k) = k^2$  de  $P$  près de 0 pour  $k \in D(0, \epsilon)^*$ .

**Théorème 1.1.** (Borne supérieure) *Supposons que (1.2) soit vérifiée pour  $n = 2$  et soit  $W$  la fonction définie par (1.5). Alors il existe  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < r < r_0$ ,*

$$\#\{z = z(k) := k^2 \in \text{Res}(P) : r < |k| < 2r\} = \mathcal{O}(n_+(r, pWp)|\ln r|) + \mathcal{O}(1), \quad (1.8)$$

où si la fonction  $W$  satisfait les hypothèses des Lemmes 4.2, 4.3 et 4.4, nous avons respectivement

$$(i) \quad n_+(r, pWp) = \mathcal{O}(r^{-2/m_{\perp}}),$$

$$(ii) \quad n_+(r, pWp) = \mathcal{O}(\varphi_{\beta}(r))$$

avec

$$\varphi_{\beta}(r) := \begin{cases} \frac{1}{2} b_0 \mu^{-1/\beta} |\ln r|^{1/\beta} & \text{si } 0 < \beta < 1, \\ \frac{1}{\ln(1 + 2\mu/b_0)} |\ln r| & \text{si } \beta = 1, \\ \frac{\beta}{\beta - 1} (\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r| & \text{si } \beta > 1. \end{cases}, \quad \mu > 0,$$

$$(iii) \quad n_+(r, pWp) = \mathcal{O}((\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r|).$$

Notre second résultat concerne un développement asymptotique près de 0 du nombre de résonances de l'Hamiltonien perturbé  $P_e := P_0 + eV$  ( $V > 0$ ), où  $e \in \mathbb{R}^* \setminus E$  avec  $E$  un ensemble discret de  $\mathbb{R}^*$ .

**Théorème 1.2.** (Développement asymptotique) *Supposons que (1.2) soit vérifiée pour  $n = 2$ ,  $V > 0$ , et soit  $W$  la fonction définie par (1.5). Il existe un ensemble discret  $E$  de  $\mathbb{R}^*$  tel que pour tout  $e \in \mathbb{R}^* \setminus E$ ,  $P_e := P_0 + eV$  possède les propriétés suivantes.*

(i) *Près de 0, les résonances  $z(k) := k^2$  de  $P_e$  pour  $|k| < \epsilon$  assez petit vérifient*

$$e\Im(k) \leq 0, \quad \Re(k) = o(|k|).$$

(ii) *Il existe une suite  $(r_\ell)_\ell \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tendant vers 0 telle que*

$$\#\{z = z(k) \in \text{Res}(P_e) : r_\ell < |k| \leq r_0\} = n_+ \left( r_\ell, \frac{1}{2} pWp \right) (1 + o(1)).$$

(iii) *Si  $W = U$  satisfait les hypothèses du Lemme 4.2 ou 4.3 ou 4.4,*

$$\#\{z = z(k) \in \text{Res}(P_e) : r < |k| \leq r_0\} = n_+ \left( r, \frac{1}{2} pWp \right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0.$$

**Remarque 1.1.** *Plus généralement dans le Théorème 1.2, l'hypothèse  $V > 0$  peut être remplacée par l'hypothèse*

$$(\text{sign } V) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Par exemple si le potentiel  $V = \text{Diag}(V_{11}, V_{22})$  est diagonal et  $V_{11} > 0$ , alors cette dernière hypothèse est satisfaite.*

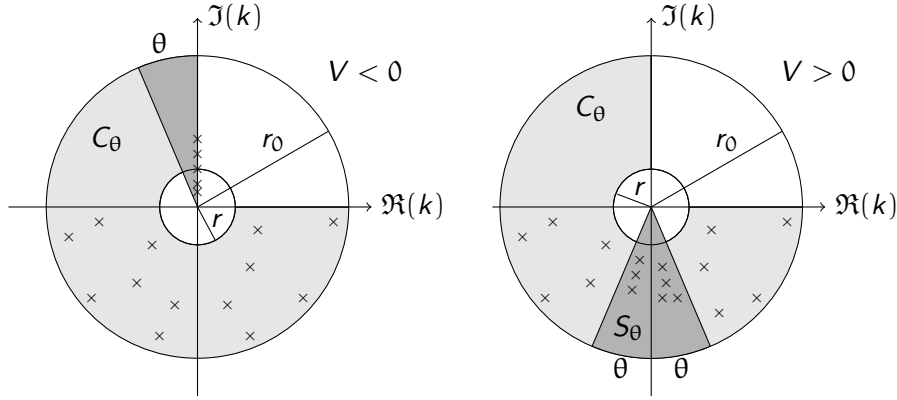
Près de 0, les valeurs propres de l'opérateur  $P$  sont les résonances  $z(k)$  avec  $k \in e^{i\frac{\pi}{2}}]0, \epsilon[$ . Le Théorème 1.1 fournit donc une majoration du nombre de valeurs propres de  $P$  dans des intervalles du type  $[-4r^2, -r^2]$  pour tout  $0 < r < r_0 < \epsilon$ .

Le Théorème 1.2 montre en particulier qu'il y a une accumulation de résonances de  $P := P_0 + V$  près de l'origine 0. Pour  $V < 0$  ( $V_{11} < 0$  suffit si  $V$  est diagonale par la remarque 1.1), les seules résonances sont les valeurs propres  $z(k)$  avec  $k \in e^{i\frac{\pi}{2}}]0, \epsilon[$  et  $|k|$  assez petit. Pour  $V > 0$  ( $V_{11} > 0$  suffit si  $V$  est diagonale),  $P_e$  n'a pas de spectre discret négatif. Nous pouvons comparer nos résultats à ceux de [95] sur la distribution asymptotique près de 0 du spectre discret (négatif) de  $P_0 - V$  avec  $V \geq 0$ . En effet par un développement asymptotique près de 0 de la fonction de décalage spectrale associée à la paire d'opérateurs  $(P_0 - V, P_0)$ , dans [95, Corollaire 3.6], Raikov montre en particulier la même accumulation de valeurs propres de l'opérateur  $P_0 - V$  près de 0 si les coefficients  $V_{jk}(x)$ ,  $1 \leq j, k \leq 2$ , de la perturbation  $V$  sont de l'ordre de  $\mathcal{O}(\langle x \rangle^{-m})$  avec  $m > 3$ .

Nous obtenons des résultats similaires sur les résonances de  $D$  près de  $\pm m$ . Soient  $\text{Res}(D)$  l'ensemble des résonances  $z_{\pm m}(k) := \frac{\pm m(1+k^2)}{1-k^2}$  de  $D$  près de  $\pm m$  pour  $k$  dans

$$D(0, \eta)^* := \{k \in \mathbb{C} : 0 < |k| < \eta\}, \quad \eta < \min \left( \frac{\delta}{4m}, \sqrt{1 - 2m/\mu} \right), \quad (1.9)$$

où le rayon  $\eta$  est assez petit,  $\delta$  est la constante définie par (1.2),  $\mu$  est tel que  $2m < \mu < r_m := \sqrt{m^2 + \zeta} + m$ , et  $\zeta$  est la constante définie par (0.14).



**Figure 3:** Localisation des résonances en variable  $k$  pour  $V$  de signe défini: Pour  $r_0$  assez petit, les résonances  $z(k) = k^2$  de  $P_0 + V$  et  $z_m(k) = \frac{m(1+k^2)}{1-k^2}$  de  $D_0 + V$  sont concentrées dans les secteurs  $S_\theta$  (Théorème 1.2 et Théorème 1.4). Pour  $V < 0$ , les seules résonances sont les valeurs propres  $z(k) = k^2$  et  $z = z_m(k)$  et sont concentrées sur la demi-droite  $k = i]0, +\infty)$ . Pour  $V > 0$ , elles sont concentrées près de la demi-droite  $k = -i]0, +\infty)$ . Dans  $C_\theta$ , le nombre de résonances est de l'ordre  $\mathcal{O}(|\ln r|)$  pour  $V$  de signe non fixé (Théorème 1.1 et Théorème 1.3).

**Théorème 1.3.** (Borne supérieure) Supposons que (1.2) soit vérifiée pour  $n = 4$  et soient  $W_\pm$  les fonctions définies par (1.5). Alors il existe  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < r < r_0$ ,

$$\begin{aligned} \# \left\{ z = z_{\pm m}(k) := \frac{\pm m(1+k^2)}{1-k^2} \in \text{Res}(D) : r < |k| < 2r \right\} \\ = \mathcal{O}\left(n_+(r, \rho W_{\pm \rho}) |\ln r|\right) + \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

où si les fonctions  $W_\pm$  satisfont les hypothèses des Lemmes 4.2, 4.3 et 4.4, nous avons respectivement

$$(i) \quad n_+(r, \rho W_{\pm \rho}) = \mathcal{O}(r^{-2/m_\pm}),$$

$$(ii) \quad n_+(r, \rho W_{\pm \rho}) = \mathcal{O}(\varphi_\beta(r))$$

avec

$$\varphi_\beta(r) := \begin{cases} \frac{1}{2} b_0 \mu^{-1/\beta} |\ln r|^{1/\beta} & \text{si } 0 < \beta < 1, \\ \frac{1}{\ln(1+2\mu/b_0)} |\ln r| & \text{si } \beta = 1, \\ \frac{\beta}{\beta-1} (\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r| & \text{si } \beta > 1. \end{cases}, \quad \mu > 0,$$

$$(iii) \quad n_+(r, \rho W_{\pm \rho}) = \mathcal{O}((\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r|)$$

**Théorème 1.4.** (Développement asymptotique) Supposons que (1.2) soit vérifiée pour  $n = 4$ ,  $V > 0$ , et soient  $W_\pm$  les fonctions définies par (1.5). Il existe un ensemble discret  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{R}^*$  tel que pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathcal{E}$ ,  $D_\varepsilon := D_0 + \varepsilon V$  possède les propriétés suivantes.

(i) Près de 0, les résonances  $z_{\pm m}(k) := \frac{\pm m(1+k^2)}{1-k^2}$  de  $D_\varepsilon$  pour  $|k| < \eta$  assez petit vérifient

$$\pm \varepsilon \Im(k) \leq 0, \quad \Re(k) = o(|k|).$$

(ii) Il existe une suite  $(r_\ell)_\ell \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tendant vers 0 telle que

$$\#\{z = z_{\pm m}(k) \in \text{Res}(D_\varepsilon) : r_\ell < |k| \leq r_0\} = n_+ \left( r_\ell, \frac{1}{2} p W_{\pm p} \right) (1 + o(1)).$$

(iii) Si  $W_{\pm} = U$  satisfait les hypothèses du Lemme 4.2 ou 4.3 ou 4.4,

$$\#\{z = z_{\pm m}(k) \in \text{Res}(D_\varepsilon) : r < |k| \leq r_0\} = n_+ \left( r, \frac{1}{2} p W_{\pm p} \right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0.$$

**Remarque 1.2.** De manière plus générale dans le Théorème 1.4, l'hypothèse  $V > 0$  peut être remplacée par l'hypothèse

$$(\text{sign } V) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

près de  $m$ . Près de  $-m$ , elle peut être remplacée par

$$(\text{sign } V) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple si  $V = \text{Diag}(V_{11}, V_{22}, V_{33}, V_{44})$  est diagonale et  $V_{11}$  respectivement  $V_{33} > 0$ , ces deux hypothèses sont vérifiées.

Le Théorème 1.4 montre en particulier qu'il y a une accumulation des résonances de l'opérateur  $D := D_0 + V$  près des seuils  $\pm m$ . Pour  $\pm V < 0$ , les seules résonances sont les valeurs propres  $z_{\pm m}(k)$  avec  $k \in e^{i\frac{\pi}{2}}]0, \eta[$  et  $|k|$  suffisamment petit. Pour  $\pm V > 0$ , il n'y a pas d'accumulation de valeurs propres près de  $\pm m$ . Nous pouvons comparer nos résultats à ceux de [126] sur la distribution asymptotique près de  $\pm m$  du spectre discret dans  $(-m, m)$  de  $D_{\pm} := D_0 \pm V$ . La perturbation  $V$  étant telle que  $V \geq 0$  et ses coefficients  $V_{jk}(x)$ ,  $1 \leq j, k \leq 4$ , de l'ordre de  $\mathcal{O}(\langle x \rangle^{-m})$  avec  $m > 3$ . En effet dans [126, Théorème 6.5], par des majorations et des minorations de la fonction de décalage spectrale associée à la paire d'opérateurs  $(D_{\pm}, D_0)$ , Tiedra de Aldecoa montre d'une part qu'il n'y a pas d'accumulation des valeurs propres dans  $(-m, m)$  de  $D_{\pm}$  près de  $\pm m$ . D'autre part, qu'il y a une accumulation des valeurs propres dans  $(-m, m)$  de  $D_{\mp}$  près de  $\pm m$ .

### 1.3 RÉSONANCES PRÈS DE 0 DE L'OPÉRATEUR DE PAULI

Nous supposons que la perturbation  $V$  vérifie pour  $n = 2$  l'hypothèse (1.2) dans toute cette section.

#### 1.3.1 Résonances

Soit  $P_0$  l'opérateur de Pauli magnétique défini par (0.23). Dans cette sous-section, nous allons définir les résonances près de 0 de l'opérateur perturbé  $P := P_0 + V$  défini par (1.3).

Commençons par introduire dans  $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^2) \otimes L^2(\mathbb{R})$  les projections orthogonales  $\mathbf{p} := p \otimes l_3$  et  $\mathbf{q} := I - \mathbf{p}$ , où  $p := p(b)$  est la projection orthogonale sur  $\ker H_{\perp}^-$  défini par (0.12) et  $l_3$  l'opérateur identité dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Ainsi on définit dans  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  les projections orthogonales

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} \mathbf{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} := I - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(P_0)$ . L'identité (0.24) entraîne que

$$(P_0 - z)^{-1} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p \otimes \mathcal{R}(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

où la résolvante

$$\mathcal{R}(z) := \left( -\frac{d^2}{dx_3^2} - z \right)^{-1} \quad (1.12)$$

bornée dans  $L^2(\mathbb{R})$  admet pour noyau intégral

$$\mathcal{N}_z(x_3 - x'_3) = \frac{ie^{i\sqrt{z}|x_3 - x'_3|}}{2\sqrt{z}}. \quad (1.13)$$

Par conséquent, nous avons la décomposition

$$(P_0 - z)^{-1} = [p \otimes \mathcal{R}(z)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (P_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}. \quad (1.14)$$

Soit  $z \in \mathbb{C}^+$ , le demi-plan supérieur défini par (1.1). Introduisons le changement de variables

$$z := z(k) = k^2 \text{ pour } k \in \mathbb{C}_{1/2}^+ := \{k \in \mathbb{C}^+ : k^2 \in \mathbb{C}^+\}. \quad (1.15)$$

La première étape consiste à prolonger holomorphiquement en la variable  $k \in \mathbb{C}_{1/2}^+$  l'opérateur  $(P_0 - z(k))^{-1} \mathbf{P}$  au voisinage de  $k = 0$ .

**Lemme 1.1.** Soient  $\delta$  et  $D(0, \epsilon)^*$  définis respectivement par (1.2) et (1.7).

(i) L'application à valeurs opérateur

$$k \mapsto \left( (P_0 - z(k))^{-1} \mathbf{P} : e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admet un prolongement holomorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$  avec  $\epsilon < \delta$ .

(ii) Soit  $v_{\perp}(x_{\perp}) := \langle x_{\perp} \rangle^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . L'application à valeurs opérateur

$$T_{v_{\perp}} : k \mapsto v_{\perp}(x_{\perp}) e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (P_0 - z(k))^{-1} \mathbf{P} e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$$

se prolonge aussi holomorphiquement sur  $D(0, \epsilon)^*$  à valeurs dans  $S_{\infty}(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

*Preuve.* (i) Vu comme opérateur de  $e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)$  dans  $e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)$ , soit

$$L(k) = [p \otimes \mathcal{R}(k^2)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le noyau intégral de l'opérateur  $N(k) := e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \mathcal{R}(k^2) e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  est donné par

$$e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \frac{ie^{ik|x_3-x'_3|}}{2k} e^{-\delta\langle x'_3 \rangle}. \quad (1.16)$$

Il est dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  pour  $\Im(k) > -\delta$ . Donc si  $\epsilon < \delta$ , on peut prolonger holomorphiquement l'application  $k \mapsto L(k) \in \mathcal{L}(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3))$  de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$ . Donc l'application

$$k \mapsto (P_0 - z(k))^{-1} \mathbf{P} \in \mathcal{L}(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3))$$

admet un prolongement holomorphe à  $D(0, \epsilon)^*$ .

(ii) Par l'identité (1.11), nous avons

$$T_{v_\perp}(k) = [v_\perp \rho \otimes N(k)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

De la preuve de (i), il découle que  $N(k) \in S_2$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  pour  $\Im(k) > -\delta$ . Le lemme 4.1 entraîne que l'opérateur  $\rho v_\perp^2 \rho$  est dans une certaine classe  $S_q$  pour  $q$  tel que  $\alpha q > 1$ ; d'où sa compacité. Ce qui est équivalent à la compacité de l'opérateur  $v_\perp \rho$ . Donc  $T_{v_\perp}(k)$  est compact pour  $\Im(k) > -\delta$  et l'application

$$k \mapsto T_{v_\perp}(k) \in S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$$

se prolonge comme ci-dessus holomorphiquement de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$ .  $\blacksquare$

La deuxième étape consiste à prolonger holomorphiquement l'opérateur  $(P_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}$  en la variable  $z$ .

**Lemme 1.2.** Soient  $\delta$  et  $\zeta$  les constantes définies respectivement par (1.2) et (0.14).

(i) l'application à valeurs opérateur

$$z \mapsto \left( (P_0 - z)^{-1} \mathbf{Q} : e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admet un prolongement holomorphe de  $\mathbb{C}^+$  à  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, +\infty)$ .

(ii) Soit  $v_\perp(x_\perp) := \langle x_\perp \rangle^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . L'application à valeurs opérateur

$$L_{v_\perp} : z \mapsto v_\perp(x_\perp) e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (P_0 - z)^{-1} \mathbf{Q} e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$$

se prolonge aussi holomorphiquement à  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, +\infty)$  à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

**Preuve.** (i) Soit  $z \in \mathbb{C}^+$ . Par l'identité (0.24), l'opérateur  $(P_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}$  est donné par

$$\begin{pmatrix} (P_- - z)^{-1} \mathbf{q} & 0 \\ 0 & (P_+ - z)^{-1} \end{pmatrix} = (P_- - z)^{-1} \mathbf{q} \oplus (P_+ - z)^{-1}. \quad (1.18)$$

Ainsi, l'application  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, +\infty) \ni z \mapsto (P_- - z)^{-1} \mathbf{q} \oplus (P_+ - z)^{-1}$  est bien définie et analytique car, (0.13) combiné à (0.24) montrent que  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, +\infty)$  est contenu dans

l'ensemble résolvant de l'opérateur  $P_-$  restreint à  $\mathfrak{q}Dom(P_-)$  et de l'opérateur  $P_+$  restreint à  $Dom(P_+)$ . L'opérateur  $e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (P_0 - z)^{-1} \mathbf{Q} e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  se prolonge donc holomorphiquement à  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, +\infty)$ .

(ii) L'identité (1.18) entraîne que

$$L_{v_\perp}(z) = v_\perp e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (P_- - z)^{-1} \mathbf{q} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \oplus v_\perp e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (P_+ - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle}.$$

En raisonnant comme dans la preuve de [95, Proposition 4.4], on montre que l'opérateur  $L_{v_\perp}(z)$  est dans une certaine classe  $S_q$  pour  $q$  paire tel que  $q > 3$  et  $\alpha q > 2$ , avec l'estimation

$$\|L_{v_\perp}(z)\|_q \leq \text{Cste.} \sup_{y \in [\zeta, +\infty)} \frac{y+1}{|y+z|}.$$

Ainsi en particulier, l'opérateur  $L_{v_\perp}(z)$  est dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$  et se prolonge holomorphiquement du demi-plan supérieur  $\mathbb{C}^+$  à l'ensemble des points  $z \in \mathbb{C} \setminus [\zeta, +\infty)$ . ■

**Remarque 1.3.** Notons que le Lemme 1.2 entraîne que l'application  $k \mapsto (P_0 - z(k))^{-1} \mathbf{Q}$  est holomorphe sur  $D(0, \epsilon)^*$  le disque pointé défini par (1.7), puisque pour  $k \in D(0, \epsilon)^*$  nous avons  $|z(k)| = |k^2| < \zeta$ .

Pour une utilisation ultérieure, énonçons le lemme suivant qui complète le Lemme 1.1 et le Lemme 1.2.

**Lemme 1.3.** Soit  $D(0, \epsilon)^*$  défini par (1.7). Supposons que  $V$  vérifie (1.2) pour  $n = 2$ . L'application à valeurs opérateur

$$\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^* \ni k \mapsto \mathcal{T}_V(z(k)) := J|V|^{1/2} (P_0 - z(k))^{-1} |V|^{1/2},$$

où  $J := \text{sign } V$ , se prolonge analytiquement à  $D(0, \epsilon)^*$  à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Ce prolongement est encore noté  $\mathcal{T}_V(z(k))$ .

*Preuve.* Ce résultat découle directement de la combinaison de (3.6), du Lemme 1.1 et du Lemme 1.2 puisque l'hypothèse (1.2) sur le potentiel  $V$  (pour  $n = 2$ ) entraîne que

$$|V|^{1/2} = \mathcal{V} \left( v_\perp \otimes e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \right), \quad (1.19)$$

où  $\mathcal{V}$  est un opérateur à valeurs matricielle borné. ■

À présent en s'aidant de l'identité

$$(P - z)^{-1} \left( 1 + V(P_0 - z)^{-1} \right) = (P_0 - z)^{-1},$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (H - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} &= e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (P_0 - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \\ &\quad \times \left( 1 + e^{\delta\langle x_3 \rangle} V (P_0 - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

L'hypothèse (1.2) sur  $V$  combinée avec le Lemme 1.1 et le Lemme 1.2 montrent que la fonction  $k \mapsto e^{\delta\langle x_3 \rangle} V (P_0 - z(k))^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  est holomorphe à valeur opérateur compact



dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  inversible en au moins un point. D'où par le Théorème analytique de Fredholm, l'application à valeurs opérateur

$$k \mapsto \left(1 + e^{\delta\langle x_3 \rangle} V(P_0 - z(k))^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle}\right)^{-1}$$

admet un prolongement méromorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$ . Ce qui nous permet de définir les résonances de  $P$  près de 0.

**Proposition 1.1.** Soient  $\mathbb{C}_{1/2}^+$  défini par (3.7) et  $D(0, \epsilon)^*$  par (1.7). L'application

$$k \mapsto \left((P - z(k))^{-1} : e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)\right)$$

à valeurs opérateur admet un prolongement méromorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  à  $D(0, \epsilon)^*$ . Ce prolongement est encore noté  $R(z(k))$ .

La notion d'indice (le long d'un contour fermé orienté positivement) d'une fonction méromorphe finie à valeur opérateur qui est définie dans l'Appendice permet de définir la multiplicité d'une résonance.

**Définition 1.1.** Nous définissons les résonances de  $P$  (près de 0) comme étant les pôles de  $R(z)$  le prolongement méromorphe de la résolvante  $(P - z)^{-1}$  dans  $\mathcal{L}\left(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)\right)$ . La multiplicité d'une résonance  $z_1 := z(k_1) = k_1^2$  est définie par

$$\text{mult}(z_1) := \text{Ind}_\gamma \left( I + \mathcal{T}_V(z(\cdot)) \right), \quad (1.20)$$

où  $\gamma$  est un cercle assez petit orienté positivement contenant  $k_1$  comme unique point vérifiant que  $z(k_1)$  est résonance de  $P$ , et  $\mathcal{T}_V(z(\cdot))$  est défini dans le Lemme 1.3.

**Remarque 1.4.** Si l'on remplace l'opérateur de Pauli magnétique  $P_0$  par l'opérateur de Schrödinger magnétique  $S_0$  défini par (0.16), alors l'opérateur  $\mathcal{T}_V(z)$  est dans  $S_2$  et  $\partial_z \mathcal{T}_V(z)$  est dans  $S_1$ . Dans ce cas la Définition 1.1 coïncide avec [13, Définition 3] (voir aussi [114, Définition 4.3]).

La proposition suivante met en évidence le lien entre les résonances de  $P$  près de 0 et les valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{T}_V(z(k))$ .

**Proposition 1.2.** Pour  $k$  proche de 0, les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $z(k) = k^2$  est un pôle de  $R(z(k))$ ,
- (ii)  $-1$  est une valeur propre de  $\mathcal{T}_V(z(k)) := J|V|^{1/2}R_0(z(k))|V|^{1/2}$ .

*Preuve.* Ce résultat découle directement de l'identité

$$(I + J|V|^{1/2}R_0(z)|V|^{1/2})(I - J|V|^{1/2}R(z)|V|^{1/2}) = I. \quad (1.21)$$

### 1.3.2 Preuve du Théorème 1.1 ■

Elle utilise essentiellement deux résultats préliminaires à savoir la Proposition 1.3 et la Proposition 1.4 ci-dessous.

### 1.3.2.1 Preuve et énoncé de la Proposition 1.3

Rappelons que  $p := p(b)$  est la projection orthogonale sur  $\ker H_{\perp}^{-}$  défini par (0.12). Il est bien connu [46, Théorème 2.3] que  $p$  admet un noyau intégral continu  $\mathcal{P}(x_{\perp}, y_{\perp})$  avec  $x_{\perp}, y_{\perp} \in \mathbb{R}^2$ . Décomposons grâce à (3.6) l'opérateur  $\mathcal{T}_V(z(k))$  défini dans le Lemme 1.3 de la manière suivante:  $\mathcal{T}_V(z(k)) = \mathcal{T}_1^V(k) + \mathcal{T}_2^V(k)$  où

$$\mathcal{T}_1^V(k) := J|V|^{1/2}[p \otimes \mathcal{R}(k^2)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}, \quad (1.22)$$

$$\mathcal{T}_2^V(k) := J|V|^{1/2}(P_0 - z(k))^{-1} \mathbf{Q}|V|^{1/2}. \quad (1.23)$$

Le Lemme 1.2 combiné avec (1.19) montrent que l'opérateur  $\mathcal{T}_2^V(k)$  est holomorphe dans un voisinage de 0 à valeurs dans  $S_{\infty}(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Considérons à présent l'opérateur  $\mathcal{T}_1^V(k)$  pour  $k \in D(0, \epsilon)^*$  défini par (1.7). Puisque le noyau intégral de l'opérateur  $N(k) := e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \mathcal{R}(k^2) e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$  est donné par (1.16), nous pouvons donc écrire

$$N(k) = \frac{1}{k} t_1 + r_1(k), \quad (1.24)$$

où  $t_1 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est l'opérateur de rang 1 défini par

$$t_1(u) := \frac{i}{2} \langle u, e^{-\delta \langle \cdot \rangle} \rangle e^{-\delta \langle x_3 \rangle}, \quad (1.25)$$

et  $r_1(k)$  est l'opérateur de Hilbert-Schmidt (sur  $D(0, \epsilon)^*$ ) ayant pour noyau intégral

$$e^{-\delta \langle x_3 \rangle} i \frac{e^{ik|x_3 - x'_3|} - 1}{2k} e^{-\delta \langle x'_3 \rangle}. \quad (1.26)$$

Nous en déduisons ainsi que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^V(k) &= \frac{iJ}{k} \times \frac{1}{2} |V|^{1/2} (p \otimes \tau_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} \\ &\quad + J|V|^{1/2} [p \otimes s_1(k)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

où  $\tau_1$  et  $s_1(k)$  sont les opérateurs agissant de  $e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R})$  dans  $e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R})$  ayant respectivement pour noyau intégral 1 et

$$\frac{1 - e^{ik|x_3 - x'_3|}}{2ik}. \quad (1.28)$$

Notons que  $|V|^{1/2} (p \otimes \tau_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} = |V|^{1/2} \begin{pmatrix} p \otimes \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}$  est un opérateur auto-adjoint positif compact. En effet si nous considérons les opérateurs de multiplication par  $e_{\pm} := e^{\pm \delta \langle x_3 \rangle}$ , alors il peut être facilement vérifier que

$$\begin{aligned} |V|^{1/2} \begin{pmatrix} p \otimes \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} &= |V|^{1/2} e_{+} \begin{pmatrix} p \otimes c^* c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_{+} |V|^{1/2} \\ &= \left[ \begin{pmatrix} p \otimes c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_{+} |V|^{1/2} \right]^* \left[ \begin{pmatrix} p \otimes c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_{+} |V|^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (1.29)$$

où  $c : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  est l'opérateur défini par  $c(f) := \langle f, e_- \rangle$ , tandis que l'opérateur adjoint  $c^* : \mathbb{C} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  est donné par  $c^*(\lambda) = \lambda e_-$ . Ainsi, (1.29) permet d'introduire naturellement l'opérateur borné  $K : L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$  défini par

$$K := \begin{pmatrix} p \otimes c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_+ |V|^{1/2}. \quad (1.30)$$

Plus explicitement, pour toute fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$ , nous avons

$$(K\psi)(x_\perp) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{P}(x_\perp, x'_\perp) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}(x'_\perp, x'_3) \psi(x'_\perp, x'_3) dx'_\perp dx'_3, \quad (1.31)$$

où  $\mathcal{P}(\cdot, \cdot)$  est le noyau intégral de la projection  $p$ . De même il peut être facilement vérifié que l'opérateur adjoint  $K^* : L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  donné par

$$K^* := |V|^{1/2} e_+ \begin{pmatrix} p \otimes c^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

satisfait pour toute fonction  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ ,

$$(K^* \varphi)(x_\perp, x_3) = |V|^{1/2}(x_\perp, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (p\varphi)(x_\perp). \quad (1.33)$$

Par (1.29), (1.30) et (1.32), nous avons

$$|V|^{1/2} (p \otimes \tau_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} = K^* K,$$

de sorte que (1.27) devienne finalement

$$\mathcal{T}_1^V(k) = \frac{iJ}{k} \times \frac{1}{2} K^* K + J |V|^{1/2} [p \otimes s_1(k)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}.$$

D'où la proposition suivante.

**Proposition 1.3.** *Pour  $k \in D(0, \epsilon)^*$  défini par (1.7), nous avons*

$$\mathcal{T}_V(z(k)) = \frac{iJ}{k} B + A(k), \quad (1.34)$$

où  $J := \text{sign } V$  et  $B$  est l'opérateur auto-adjoint positif défini par

$$B := \frac{1}{2} K^* K. \quad (1.35)$$

Ici  $K$  est l'opérateur donné par (1.31) et  $A(k) \in S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$  est l'opérateur holomorphe sur  $D(0, \epsilon)^*$  défini par

$$A(k) := J |V|^{1/2} [p \otimes s_1(k)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} + \mathcal{T}_2^V(k), \quad (1.36)$$

où  $\mathcal{T}_2^V(k)$  est l'opérateur défini par (1.23).

### 1.3.2.2 Énoncé et preuve de la Proposition 1.4

Soit  $W$  la fonction définie par (1.5). Par (1.30) et (1.32), nous avons

$$KK^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} pWp.$$

Donc pour tout  $s > 0$ ,

$$\begin{aligned} n_+ \left( s, \frac{1}{2} K^* K \right) &= n_+ (2s, K^* K) = n_+ (2s, KK^*) \\ &= n_+ \left( 2s, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} pWp \right) \\ &= n_+ (2s, pWp). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$n_+ (s, B) = n_+ (2s, pWp), \quad (1.37)$$

où l'opérateur  $B$  est défini par (1.35).

**Proposition 1.4.** Soit  $s_0 < \epsilon$  assez petit. Pour  $0 < s < |k| < s_0$ ,

(i)  $z(k)$  est une résonance de  $P$  près de 0 si et seulement si  $k$  est un zéro du déterminant

$$D(k, s) := \det (I + K(k, s)), \quad (1.38)$$

où  $K(k, s)$  est un opérateur de rang fini analytique en  $k$ , vérifiant

$$\text{rang } K(k, s) = \mathcal{O}(n_+(s, pWp) + 1), \quad \|K(k, s)\| = \mathcal{O}(s^{-1}),$$

uniformément pour  $s < |k| < s_0$ .

(ii) Si  $z_1 := z(k_1) = k_1^2$  est une résonance de  $P$ , alors

$$\text{mult}(z_1) = \text{Ind}_\gamma (I + K(k, s)) = m(k_1), \quad (1.39)$$

$\gamma$  étant choisi comme dans la Définition 1.1 et  $m(k_1)$  désigne la multiplicité de  $k_1$  en tant que zéro de  $D(k, s)$ .

(iii) Si  $\Im(k^2) > \sigma > 0$ , l'opérateur  $I + K(k, s)$  est inversible avec

$$\left\| (I + K(k, s))^{-1} \right\| = \mathcal{O}(\sigma^{-1}),$$

uniformément pour  $s < |k| < s_0$ .

**Preuve.** (i),(ii) Par la Proposition 1.3, pour  $s < |k| \leq s_0 < \epsilon$ , nous avons

$$\mathcal{T}_V(z) = \frac{iJ}{k} B + A(k).$$

L'application  $k \mapsto A(k)$  est analytique près de 0 à valeurs dans  $S_\infty$ . Donc pour  $s_0$  assez petit, il existe un opérateur  $A_0$  de rang fini indépendant de  $k$ , et  $\tilde{A}(k)$  analytique près de 0 dans  $S_\infty$  vérifiant  $\|\tilde{A}(k)\| < \frac{1}{4}$ ,  $|k| \leq s_0$  tels que

$$A(k) = A_0 + \tilde{A}(k).$$

Considérons la décomposition

$$B = B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + B\mathbf{1}_{\frac{1}{2}s, \infty[}(B). \quad (1.40)$$

Puisque  $\left\| (iJ/k)B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right\| < \frac{3}{4}$  pour  $0 < s < |k| < s_0$ , alors

$$(I + \mathcal{T}_V(z)) = (I + K(k, s)) \left( I + \frac{iJ}{k} B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right), \quad (1.41)$$

où l'opérateur  $K(k, s)$  est donné par

$$K(k, s) = \left( \frac{iJ}{k} B\mathbf{1}_{\frac{1}{2}s, \infty[}(B) + A_0 \right) \left( I + \frac{iJ}{k} B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right)^{-1}.$$

C'est un opérateur dont le rang est majoré d'une part par

$$\mathcal{O} \left( n_+ \left( \frac{1}{2}s, B \right) + 1 \right) = \mathcal{O}(n_+(s, pWp) + 1)$$

via (1.37), et d'autre part dont la norme est majorée par  $\mathcal{O}(|k|^{-1})$ .

Par ailleurs, puisque  $\left\| (iJ/k)B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right\| < 1$  pour  $0 < s < |k| < s_0$ , alors par [44, Théorème 4.4.3]

$$\text{Ind}_\gamma \left( I + (iJ/k)B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right) = 0.$$

En appliquant à (1.41) les propriétés sur l'indice d'un opérateur sur un contour énoncées dans l'Appendice, nous obtenons immédiatement les égalités données par (1.39). Par conséquent, par la Définition 1.1 et la Proposition 1.2 combinées à (1.41), nous voyons que  $z := z(k)$  est une résonance de  $P$  si et seulement si  $k$  est un zéro du déterminant  $D(k, s)$  défini par (1.38).

(iii) Pour  $0 < s < |k| < s_0$ ,

$$I + K(k, s) = \left( I + \mathcal{T}_V(z(k)) \right) \left( I + \frac{iJ}{k} B\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}s]}(B) + \tilde{A}(k) \right)^{-1}$$

par définition des opérateurs  $\mathcal{T}_V(z(k))$  et  $K(k, s)$ . Par l'identité (1.21), nous déduisons pour  $\Im(z) > 0$  l'inversibilité de  $I + \mathcal{T}_V(z)$  avec pour inverse

$$(I + \mathcal{T}_V(z))^{-1} = I - J|V|^{1/2}(P - z)^{-1}|V|^{1/2}.$$

Or  $\Im(z) = \Im(k^2)$ . D'où l'inversibilité de l'opérateur  $I + K(k, s)$  pour  $\Im(k^2) > \sigma > 0$ ,  $0 < s < |k| < s_0$  avec

$$\begin{aligned} \left\| (I + K(k, s))^{-1} \right\| &= \mathcal{O} \left( 1 + \left\| |V|^{1/2}(P - z(k))^{-1}|V|^{1/2} \right\| \right) \\ &= \mathcal{O} \left( 1 + |\Im(k^2)|^{-1} \right) \\ &= \mathcal{O}(\sigma^{-1}). \end{aligned}$$

D'où la preuve. ■

### 1.3.2.3 Retour à la preuve du Théorème 1.1

La proposition 1.4 ci-dessus montre pour  $0 < s < |k| < s_0$  que

$$\begin{aligned} D(k, s) &= \mathcal{O}\left(n_+(s, pWp) + 1\right) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j(k, s)) \\ &= \mathcal{O}(1) \exp\left(\mathcal{O}\left(n_+(s, pWp) + 1\right) |\ln s|\right), \end{aligned} \quad (1.42)$$

où les  $\lambda_j(k, s)$  sont les valeurs propres de  $K := K(k, s)$  et satisfont  $|\lambda_j(k, s)| = \mathcal{O}(s^{-1})$ . De plus, puisque pour  $\Im(k^2) > \sigma > 0$  et  $0 < s < |k| < s_0$

$$D(k, s)^{-1} = \det(I + K)^{-1} = \det(I - K(I + K)^{-1}),$$

alors comme ci-dessus, pour  $\text{Im } k^2 > \sigma > 0$

$$|D(k, s)| \geq C \exp\left(-C(n_+(s, pWp) + 1)(|\ln \sigma| + |\ln s|)\right). \quad (1.43)$$

Appliquons à présent le Lemme 4.5 à la fonction  $g(k) := D(rk, r)$  sur le domaine  $\Delta := \{k \in \mathbb{C} : 1 < |k| < 2 \text{ et } \frac{\pi}{3} < \text{Arg } k < 2\pi + \frac{\pi}{6}\}$  avec  $\Im(k_0^2) > \sigma > 0$ . Regarder les zéros de la fonction  $g(k)$  sur un sous-domaine  $\Delta' \Subset \Delta$ , avec  $0 < r < r|k| < r_0 < \epsilon$ , est équivalent par la Proposition 1.4 à regarder les résonances  $z(k)$  de l'opérateur  $P$ . Ainsi (1.29) s'obtient en combinant (1.42) et (1.43), d'où la preuve du Théorème 1.1.

## 1.3.3 Preuve du Théorème 1.2

### 1.3.3.1 Un résultat préliminaire

Les notations sont celles de la sous-section 4.1.2 de l'Appendice. Avec la terminologie de valeur caractéristique (Définition 4.1), la Proposition 1.2 peut être reformulée de la manière suivante.

**Proposition 1.5.** *Pour  $k$  proche de 0, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $z_1 := z(k_1) = k_1^2$  est une résonance de  $P$  près de 0,
- (ii)  $k_1$  est une valeur caractéristique de  $I + \mathcal{T}_V(z(k))$ .

De plus, la multiplicité de la résonance  $z_1$  est égale à  $\text{Ind}_\gamma(I + \mathcal{T}_V(\cdot))$  la multiplicité de la valeur caractéristique  $k_1$ ,  $\gamma$  étant un cercle assez petit orienté positivement et contenant  $k_1$  comme unique valeur caractéristique.

Ainsi, l'étude des résonances  $z(k) = k^2$  de  $P_e := P_0 + eV$  près de 0 peut se ramener à celle des valeurs caractéristiques de

$$I + \mathcal{T}_{eV}(z(k)) = I - e \frac{T(ik)}{ik},$$

où  $T(ik) := (\text{sign } V)B - ikA(k)$ . Les opérateurs compacts  $B$  et  $A(k)$  sont définis dans la Proposition 1.3. En particulier pour  $V > 0$ , nous avons  $T(0) = B$ . Comme signalé dans la Remarque 1.1,  $(\text{sign } V) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  suffit pour que  $T(0) = B$ . Puisque l'opérateur  $T'(0)\Pi_0$  est compact, alors il existe une suite  $(e_n)_n$  qui tend vers l'infini telle que  $I - eT'(0)\Pi_0$  soit inversible dès que  $e \in \mathbb{R} \setminus \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Plus précisément, nous pouvons choisir pour  $e_n$  les inverses des valeurs propres de l'opérateur  $T'(0)\Pi_0$ .

### 1.3.3.2 Retour à la preuve du Théorème 1.2

Le point (i) s'obtient par une application directe du Lemme 4.6 avec  $z = ik/e$ .

Par ailleurs, (i) montre que pour  $|k|$  suffisamment petit, les résonances  $z(k)$  de  $P_e$  sont concentrées dans un secteur  $\{k \in D(0, \epsilon)^* : ik/e \in \mathcal{C}_\alpha(r, r_0)\}$  pour  $\alpha > 0$ , où  $\mathcal{C}_\alpha(r, r_0)$  est défini par (4.4). D'où en particulier lorsque  $r \searrow 0$ ,

$$\begin{aligned} & \#\{z = z(k) \in \text{Res}(P_e) : r < |k| \leq r_0\} \\ &= \#\{z = z(k) \in \text{Res}(P_e) : ik/e \in \mathcal{C}_\alpha(r, r_0)\} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\#\{z = z(k) \in \text{Res}(P_e) : ik/e \in \mathcal{C}_\alpha(r, r_0)\} = \mathcal{N}(\mathcal{C}_\alpha(r, r_0)).$$

De plus via (1.37), nous avons  $n([r, r_0]) = n_+(r, \frac{1}{2}\rho W\rho) + \mathcal{O}(1)$ . Ainsi, le point (ii) découle directement du Lemme 4.8, et le point (iii) du Lemme 4.9 combiné avec les Lemmes 4.2, 4.3 et 4.4. D'où la preuve du Théorème 1.2.

## 1.4 RÉSONANCES PRÈS DE $\pm m$ DE L'OPÉRATEUR DE DIRAC

Dans toute cette section, nous supposons que le potentiel  $V$  vérifie l'hypothèse (1.2) pour  $n = 4$ . La démarche reste similaire à celle de la section précédente. Nous traitons en détail l'étude des résonances près de  $m$ . L'étude près de  $-m$  se traite de la même manière (voir les Remarques 1.5, 1.7, 1.8 et 1.9).

### 1.4.1 Résonances

Soit  $D_0$  l'opérateur de Dirac magnétique défini par (0.26). Dans cette sous-section, nous allons définir les résonances près de  $m$  de l'opérateur perturbé  $D := D_0 + V$  défini par (1.4).

Introduisons les notations suivantes. Soient  $\mathbf{P}_d$  ( $d$  pour Dirac) la projection orthogonale sur l'union des sous-espaces propres associés aux valeurs propres  $\pm m$  de  $D_0$  et  $\mathbf{Q}_d := I - \mathbf{P}_d$ . Ainsi par l'identité (0.28), nous avons

$$\mathbf{P}_d := \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_d := I - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont les projections orthogonales définis par (1.10).

Considérons  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D_0)$  et soit la décomposition

$$(D_0 - z)^{-1} = (D_0 - z)^{-1} \mathbf{P}_d + (D_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}_d. \quad (1.45)$$

Puisque  $(D_0 - z)^{-1} \mathbf{P}_d = (D_0 + z)(D_0^2 - z^2)^{-1} \mathbf{P}_d$ , alors les identités (0.28) et (0.29) entraînent que

$$\begin{aligned} (D_0 - z)^{-1} \mathbf{P}_d &= [\rho \otimes \mathcal{R}(z^2 - m^2)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ [\rho \otimes D_{x_3} \mathcal{R}(z^2 - m^2)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

où  $p := p(b)$  est la projection orthogonale sur  $\ker H_{\perp}^{-}$  défini par (0.12), et la résolvente  $\mathcal{R}(z)$  est définie par (1.12). Soit  $z \in \mathbb{C}^+$  le demi-plan supérieur. Pour  $k \in \mathbb{C}_{1/2}^+$  défini par (1.15), introduisons le changement de variables

$$\frac{z-m}{z+m} = k^2 \iff z = z_m(k) := \frac{m(1+k^2)}{1-k^2} \in \mathbb{C}^+. \quad (1.47)$$

**Remarque 1.5.** Pour regarder les résonances près de  $-m$ , on effectue le changement de variables  $\frac{z+m}{z-m} = k^2$  où  $k \in \mathbb{C}_{1/2}^- := \{k \in \mathbb{C}^+ : \Im(k^2) < 0\}$ , de sorte que  $z = z_{-m}(k) := \frac{-m(1+k^2)}{1-k^2}$  appartienne à  $\mathbb{C}^+$ .

La première étape consiste à prolonger holomorphiquement l'opérateur  $(D_0 - z_m(k))^{-1} \mathbf{P}_d$  au voisinage de  $k = 0$ .

**Lemme 1.4.** Soient  $\delta$  et  $D(0, \eta)^*$  définis respectivement par (1.2) et (1.9).

(i) L'application à valeurs opérateur

$$k \mapsto \left( (D_0 - z_m(k))^{-1} \mathbf{P}_d : e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admet un prolongement holomorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$  avec  $\eta < \frac{\delta}{4m}$ .

(ii) Soit  $v_{\perp}(x_{\perp}) := \langle x_{\perp} \rangle^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . L'application à valeurs opérateur

$$T_{v_{\perp}} : k \mapsto v_{\perp}(x_{\perp}) e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (D_0 - z_m(k))^{-1} \mathbf{P}_d e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$$

se prolonge aussi holomorphiquement sur  $D(0, \eta)^*$ , à valeurs dans  $S_{\infty}(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

*Preuve.* (i) Vus comme opérateurs agissant de  $e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)$  dans  $e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)$ , introduisons les deux opérateurs

$$L_1(k) := [p \otimes \mathcal{R}(k^2(z+m)^2)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2(k) := [p \otimes D_{x_3} \mathcal{R}(k^2(z+m)^2)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'une part, le noyau intégral de l'opérateur  $N_1(k) := e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \mathcal{R}(k^2(z+m)^2) e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$  est donné par

$$e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \frac{i e^{ik(z+m)|x_3-x'_3|}}{2k(z+m)} e^{-\delta \langle x'_3 \rangle}. \quad (1.48)$$

Il est dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  pour  $\Im(k(z+m)) = \Im\left(\frac{2mk}{1-k^2}\right) > -\delta$ . Donc si  $\eta < \frac{\delta}{4m}$ , nous pouvons prolonger holomorphiquement  $k \mapsto L_1(k) \in \mathcal{L}\left(e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)\right)$  de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$ .

D'autre part, le noyau intégral de l'opérateur  $N_2(k) := e^{-\delta \langle x_3 \rangle} D_{x_3} \mathcal{R}(k^2(z+m)^2) e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$  est donné par

$$e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \frac{i(x_3 - x'_3) e^{ik(z+m)|x_3-x'_3|}}{2|x_3 - x'_3|} e^{-\delta \langle x'_3 \rangle}. \quad (1.49)$$



Donc comme ci-dessus, se prolonge holomorphiquement l'application  $k \mapsto L_2(k) \in \mathcal{L}\left(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)\right)$  de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$  dès que  $\eta < \frac{\delta}{4m}$ . D'où le prolongement holomorphe via la décomposition (1.46) de l'application

$$k \mapsto (D_0 - z_m(k))^{-1} \mathbf{P}_d \in \mathcal{L}\left(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)\right)$$

de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$  pour  $\eta < \frac{\delta}{4m}$ .

(ii) L'identité (1.46) entraîne que

$$T_{v_\perp}(k) = [v_\perp p \otimes N_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + [v_\perp p \otimes N_2(k)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

On conclut en raisonnant comme dans la preuve du Lemme 1.1. ■

La deuxième étape consiste à prolonger holomorphiquement l'opérateur  $(D_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}_d$  en la variable  $z$ .

**Lemme 1.5.** Soient  $\delta$  et  $\zeta$  les constantes définies respectivement par (1.2) et (0.14).

(i) L'application à valeurs opérateur

$$z \mapsto \left( (D_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}_d : e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

se prolonge holomorphiquement de  $\mathbb{C}^+$  à  $\mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, -\sqrt{m^2 + \zeta}] \cup [\sqrt{m^2 + \zeta}, \infty) \right\}$ .

(ii) Soit  $v_\perp(x_\perp) := \langle x_\perp \rangle^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . L'application à valeurs opérateur

$$L_{v_\perp} : z \mapsto v_\perp(x_\perp) e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$$

se prolonge aussi holomorphiquement de  $\mathbb{C}^+$  à  $\mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, -\sqrt{m^2 + \zeta}] \cup [\sqrt{m^2 + \zeta}, \infty) \right\}$ , à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

*Preuve.* (i) Soit  $z \in \mathbb{C}^+$ . L'identité

$$(D_0 - z)^{-1} = D_0^{-1} + z(1 + zD_0^{-1})(D_0^2 - z^2)^{-1}$$

entraîne que

$$\begin{aligned} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle} &= e^{-\delta\langle x_3 \rangle} D_0^{-1} \mathbf{Q}_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \\ &\quad + ze^{-\delta\langle x_3 \rangle} (1 + zD_0^{-1})(D_0^2 - z^2)^{-1} \mathbf{Q}_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Des identités (0.29) et (1.44), nous déduisons que

$$(D_0^2 - z^2)^{-1} \mathbf{Q}_d = \begin{pmatrix} (P_0^- + m^2 - z^2)^{-1} \mathbf{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (P_0^+ + m^2 - z^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (P_0^- + m^2 - z^2)^{-1} \mathbf{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (P_0^+ + m^2 - z^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'application  $\mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, -\sqrt{m^2 + \zeta}] \cup [\sqrt{m^2 + \zeta}, \infty) \right\} \ni z \mapsto (D_0^2 - z^2)^{-1} \mathbf{Q}_d$  est bien définie et analytique car, (0.13) combiné à (0.24) montrent que  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, +\infty)$

est contenu dans l'ensemble résolvant de l'opérateur  $P_0^-$  restreint à  $\mathbf{q}Dom(P_0^-)$  et de l'opérateur  $P_0^+$  restreint à  $Dom(P_0^+)$ . L'opérateur  $e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  se prolonge donc holomorphiquement du demi-plan supérieur  $\mathbb{C}^+$  à l'ensemble des points  $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \left( -\infty, -\sqrt{m^2 + \zeta} \right] \cup \left[ \sqrt{m^2 + \zeta}, \infty \right) \right\}$ .

(ii) La décomposition (1.53) entraîne que

$$L_{v_\perp}(z) = v_\perp e^{-\delta\langle x_3 \rangle} D_0^{-1} \mathbf{Q}_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle} + z v_\perp e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (1 + z D_0^{-1}) (D_0^2 - z^2)^{-1} \mathbf{Q}_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}.$$

D'une part, pour  $q$  vérifiant  $\alpha q > 2$  et  $q > 3$ , l'inégalité diamagnétique [8, Théorème 2.3] et le critère standard [97, Théorème XI.20] montrent que  $v_\perp e^{-\delta\langle x_3 \rangle} D_0^{-1} \mathbf{Q}_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  est dans  $S_q(L^2(\mathbb{R}^3))$ . D'autre part, en raisonnant comme dans la preuve de [126, Proposition 5.3], on montre que l'opérateur  $L_{v_\perp}^1(z) := z v_\perp e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (1 + z D_0^{-1}) (D_0^2 - z^2)^{-1} \mathbf{Q}_d e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  est dans une certaine classe  $S_q$  pour  $q$  paire tel que  $q > 3$  et  $\alpha q > 2$ , avec l'estimation

$$\|L_{v_\perp}^1(z)\|_q \leq \text{Cste} (|z| + |z|^2) \sup_{y \in [\zeta, \infty)} \frac{y + 1}{|y + m^2 - z^2|}.$$

Ainsi en particulier, l'opérateur  $L_{v_\perp}(z) \in S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$  et se prolonge holomorphiquement de  $\mathbb{C}^+$  à l'ensemble des points  $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \left( -\infty, -\sqrt{m^2 + \zeta} \right] \cup \left[ \sqrt{m^2 + \zeta}, \infty \right) \right\}$ . ■

**Remarque 1.6.** Notons que le Lemme 1.5 entraîne que l'application  $k \mapsto (D_0 - z_m(k))^{-1} \mathbf{Q}_d$  est holomorphe sur le disque pointé  $D(0, \eta)^*$  défini par (1.9). En effet, si la partie réelle et la partie imaginaire de  $k$  sont non nulles, alors il en est de même pour  $z_m(k) := \frac{m(1+k^2)}{1-k^2}$ . Si  $k = \pm ia$  avec  $0 < a < \eta < 1$ , alors  $|z_m(k)| = \frac{m(1-a^2)}{1+a^2} < \sqrt{m^2 + \zeta}$ . Reste à regarder le cas où  $k = a$  est réel tel que  $0 < |a| < \eta < \sqrt{1 - \frac{2m}{\mu}}$ , où  $\mu < r_m := \sqrt{m^2 + \zeta} + m$ . Or pour  $|a| < 1$ , l'inéquation  $|z_m(k)| = \frac{m(1+a^2)}{1-a^2} < \sqrt{m^2 + \zeta}$  est vérifiée si et seulement si  $|a| < a_0^{1/2}$ , où  $a_0 := \frac{\sqrt{m^2 + \zeta} - m}{\sqrt{m^2 + \zeta} + m}$ . Puisque le choix de  $\mu$  entraîne que  $\sqrt{1 - \frac{2m}{\mu}} < a_0^{1/2}$ , alors nous avons bien  $|z_m(k)| = \frac{m(1+a^2)}{1-a^2} < \sqrt{m^2 + \zeta}$  car  $|a| < \eta < \sqrt{1 - \frac{2m}{\mu}}$ .

Pour une utilisation ultérieure, énonçons le lemme suivant qui complète le Lemme 1.4 et le Lemme 1.5, et dont la preuve est analogue à celle du Lemme 1.3.

**Lemme 1.6.** Soit  $D(0, \eta)^*$  défini par (1.9). Supposons que  $V$  vérifie (1.2) pour  $n = 4$ . L'application à valeurs opérateur

$$\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^* \ni k \mapsto \mathcal{M}_V(z_m(k)) := J|V|^{1/2} (D_0 - z_m(k))^{-1} |V|^{1/2},$$

où  $J := \text{sign } V$ , se prolonge analytiquement à  $D(0, \eta)^*$  à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Ce prolongement est encore noté  $\mathcal{M}_V(z_m(k))$ .

À présent en s'aidant de l'identité

$$(D - z)^{-1} (1 + V(D_0 - z)^{-1}) = (D_0 - z)^{-1},$$

nous déduisons que

$$e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} = e^{-\delta\langle x_3 \rangle} (D_0 - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \\ \times \left( 1 + e^{\delta\langle x_3 \rangle} V (D_0 - z)^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \right)^{-1}.$$

L'hypothèse (1.2) sur  $V$  combinée avec le Lemme 1.4 et le Lemme 1.5 montrent que la fonction  $k \mapsto e^{\delta\langle x_3 \rangle} V (D_0 - z(k))^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle}$  est holomorphe à valeur opérateur compact dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  inversible en au moins un point. D'où par le Théorème analytique de Fredholm, l'application à valeurs opérateur

$$k \mapsto \left( 1 + e^{\delta\langle x_3 \rangle} V (D_0 - z(k))^{-1} e^{-\delta\langle x_3 \rangle} \right)^{-1}$$

admet un prolongement méromorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$ . Ce qui nous permet de définir les résonances de  $D$  près de  $m$ .

**Proposition 1.6.** Soient  $\mathbb{C}_{1/2}^+$  défini par (3.7) et  $D(0, \eta)^*$  par (1.9). L'application

$$k \mapsto \left( (D - z_m(k))^{-1} : e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admet un prolongement méromorphe de  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \eta)^*$  à  $D(0, \eta)^*$ . Ce prolongement est encore noté  $R(z_m(k))$ .

De manière analogue à la Définition 1.1, nous avons la définition suivante.

**Définition 1.2.** Nous définissons les résonances de  $D$  (près de  $m$ ) comme étant les pôles de  $R(z)$  le prolongement méromorphe de la résolvante  $(D - z)^{-1}$  dans  $\mathcal{L}\left(e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3), e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3)\right)$ . La multiplicité d'une résonance  $z_0 := z_m(k_0)$  est définie par

$$\text{mult}(z_0) := \text{Ind}_\gamma \left( I + \mathcal{M}_V(z_m(\cdot)) \right), \quad (1.52)$$

où  $\gamma$  est un cercle assez petit orienté positivement contenant  $k_0$  comme unique point vérifiant que  $z_m(k_0)$  est résonance de  $D$ , et  $\mathcal{M}_V(z_m(\cdot))$  est défini dans le lemme 1.6.

La proposition suivante met en évidence le lien entre les résonances de  $D$  près de  $m$  et les valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{M}_V(z_m(\cdot))$ .

**Proposition 1.7.** Pour  $k$  proche de 0, les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $z_m(k)$  est un pôle de  $R(z_m(k))$ ,
- (ii)  $-1$  est une valeur propre de  $\mathcal{M}_V(z_m(k)) := |V|^{1/2} R_0(z_m(k)) |V|^{1/2}$ .

*Preuve.* Ce résultat découle directement de l'identité

$$(I + |V|^{1/2} R_0(z) |V|^{1/2}) (I - |V|^{1/2} R(z) |V|^{1/2}) = I. \quad (1.53)$$

■

### 1.4.2 Preuve du Théorème 1.3

Elle utilise essentiellement deux résultats préliminaires à savoir la Proposition 1.8 et la Proposition 1.9 ci-dessous.

#### 1.4.2.1 Preuve et énoncé de la Proposition 1.8

Soit  $z = z_m(k) := \frac{m(1+k^2)}{1-k^2}$  où  $k \in D(0, \eta)^*$  défini par (1.9), et considérons l'opérateur  $\mathcal{M}_V(z_m(k))$  défini dans le Lemme 1.6. Les identités (1.45) et (1.46) entraînent que  $\mathcal{M}_V(z_m(k))$  se décompose en  $\mathcal{M}_V(z_m(k)) = \mathcal{M}_1^V(k) + \mathcal{M}_2^V(k)$ , où

$$\mathcal{M}_1^V(k) := J|V|^{1/2} [p \otimes \mathcal{R}(k^2(z+m)^2)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}, \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^V(k) &:= J|V|^{1/2} [p \otimes D_{x_3} \mathcal{R}(k^2(z+m)^2)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} \\ &+ J|V|^{1/2} (D_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}_d |V|^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Le Lemme 1.4 combiné avec le Lemme 1.5 montrent que l'opérateur  $\mathcal{M}_2^V(k)$  est holomorphe près de 0 à valeurs dans  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Considérons à présent l'opérateur  $\mathcal{M}_1^V(k)$ . Le noyau intégral de l'opérateur  $N_1(k) := e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \mathcal{R}(k^2(z+m)^2) e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$  est donné par (1.48). D'où la décomposition

$$N_1(k) = \frac{1}{k(z+m)} t_1 + b_1(k), \quad (1.56)$$

où  $t_1$  est défini par (1.25) et  $b_1(k)$  l'opérateur de Hilbert-Schmidt (sur  $D(0, \eta)^*$ ) ayant pour noyau intégral

$$e^{-\delta \langle x_3 \rangle} i \frac{e^{ik(z+m)|x_3-x'_3|} - 1}{2k(z+m)} e^{-\delta \langle x'_3 \rangle}. \quad (1.57)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^V(k) &= \frac{iJ}{k(z+m)} \times \frac{1}{2} |V|^{1/2} (p \otimes \tau_1) \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} \\ &+ J|V|^{1/2} [p \otimes c_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

où  $\tau_1$  et  $c_1(k)$  sont les opérateurs agissant de  $e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R})$  dans  $e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R})$  ayant respectivement pour noyau intégral 1 et

$$\frac{1 - e^{ik(z+m)|x_3-x'_3|}}{2ik(z+m)}. \quad (1.59)$$

Introduisons les opérateurs bornés  $K_\pm : L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$  définis par

$$(K_+ \Psi)(x_\perp) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{P}(x_\perp, x'_\perp) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}(x'_\perp, x'_3) \Psi(x'_\perp, x'_3) dx'_\perp dx'_3, \quad (1.60)$$

$$(K_- \psi)(x_\perp) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{P}(x_\perp, x'_\perp) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}(x'_\perp, x'_3) \psi(x'_\perp, x'_3) dx'_\perp dx'_3, \quad (1.61)$$

où  $\mathcal{P}(\cdot, \cdot)$  est le noyau intégral de la projection  $p$ . Les opérateurs adjoints

$$K_\pm^* : L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$$

sont donnés par

$$(K_+^* \varphi)(x_\perp, x_3) = |V|^{1/2}(x_\perp, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (p\varphi)(x_\perp), \quad (1.62)$$

$$(K_-^* \varphi)(x_\perp, x_3) = |V|^{1/2}(x_\perp, x_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (p\varphi)(x_\perp), \quad (1.63)$$

Si  $e_\pm$  et  $c$  sont les opérateurs introduits dans l'identité (1.29), alors il peut être vérifié comme dans les identités de (1.30) à (1.33) que

$$K_+ = \begin{pmatrix} p \otimes c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e_+ |V|^{1/2}, \quad K_+^* = |V|^{1/2} e_+ \begin{pmatrix} p \otimes c^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.64)$$

$$K_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \otimes c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e_+ |V|^{1/2}, \quad K_-^* = |V|^{1/2} e_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \otimes c^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Ainsi nous en déduisons que

$$K_+^* K_+ = |V|^{1/2} (p \otimes \tau_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2},$$

$$K_-^* K_- = |V|^{1/2} (p \otimes \tau_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2},$$

de sorte que (1.58) devienne finalement

$$\mathcal{M}_1^V(k) = \frac{iJ}{2k} K_+^* K_+ + \frac{iJk}{2} K_-^* K_- + J|V|^{1/2} [p \otimes c_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2}.$$

D'où la proposition suivante.

**Proposition 1.8.** *Pour  $k \in D(0, \eta)^*$  défini par (1.9), nous avons*

$$\mathcal{M}_V(z_m(k)) = \frac{iJ}{k} B_d + A_d(k), \quad (d \text{ pour Dirac}) \quad (1.66)$$

où  $J := \text{sign } V$ ,  $B_d$  l'opérateur auto-adjoint positif défini par

$$B_d := \frac{1}{2} K_+^* K_+. \quad (1.67)$$

Ici  $K_+$  est l'opérateur défini par (1.60) et  $A_d(k) \in \mathcal{S}_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$  est l'opérateur holomorphe sur  $D(0, \eta)^*$  défini par

$$A_d(k) := \frac{iJk}{2} K_-^* K_- + J|V|^{1/2} [p \otimes c_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} + \mathcal{M}_2^V(k),$$

où  $K_-$  est défini par (1.61) et l'opérateur  $\mathcal{M}_2^V(k)$  par (1.55).

Signalons la remarque suivante qui vient compléter la Remarque 1.5 concernant l'étude des résonances de  $D$  près de  $-m$ .

**Remarque 1.7.** Par la Remarque 1.5 les résonances de  $D$  près de  $-m$  sont paramétrées par  $z = z_{-m}(k) := \frac{-m(1+k^2)}{1-k^2}$ , où  $k \in D(0, \eta)^*$ . Notons que dans ce cas (1.66) devient

$$\mathcal{M}_V(z_{-m}(k)) = -\frac{iJ}{k} \mathcal{B}_d + \mathcal{A}_d(k), \quad \mathcal{B}_d := \frac{1}{2} K_-^* K_-, \quad (1.68)$$

où l'opérateur  $\mathcal{A}_d(k)$  est défini par

$$\mathcal{A}_d(k) := -\frac{iJk}{2} K_+^* K_+ - J|V|^{1/2} [p \otimes c_1(k)] \begin{pmatrix} z+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} + \mathcal{M}_2^V(k).$$

Ici l'opérateur  $\mathcal{M}_2^V(k)$  est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^V(k) &:= J|V|^{1/2} [p \otimes D_{x_3} \mathcal{R}(k^2(z-m)^2)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |V|^{1/2} \\ &\quad + J|V|^{1/2} (D_0 - z)^{-1} \mathbf{Q}_d |V|^{1/2}. \end{aligned}$$

#### 1.4.2.2 Énoncé et preuve de la Proposition 1.9

Soient  $W_{\pm}$  les fonctions définies par (1.5). Par (1.64) et (1.65) nous avons

$$K_+ K_+^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} pW_+ p \quad \text{et} \quad K_- K_-^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} pW_- p.$$

Ainsi pour tout  $s > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} n_+ \left( s, \frac{1}{2} K_+^* K_+ \right) &= n_+(2s, K_+^* K_+) = n_+(2s, K_+ K_+^*) \\ &= n_+ \left( 2s, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} pW_+ p \right) \\ &= n_+(2s, pW_+ p). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$n_+(s, B_d) = n_+(2s, pW_+ p), \quad (1.69)$$

où l'opérateur  $B_d$  est défini par (1.67). De même pour tout  $s > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} n_+ \left( s, \frac{1}{2} K_-^* K_- \right) &= n_+(2s, K_-^* K_-) = n_+(2s, K_- K_-^*) \\ &= n_+ \left( 2s, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} pW_- p \right) \\ &= n_+(2s, pW_- p). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$n_+(s, \mathcal{B}_d) = n_+(2s, pW_- p), \quad (1.70)$$

où l'opérateur  $\mathcal{B}_d$  est défini par (1.68).

**Proposition 1.9.** Soit  $s_0 < \eta$  assez petit. Pour  $0 < s < |k| < s_0$ ,

(i)  $z_m(k)$  est une résonance de  $D$  (près de  $m$ ) si et seulement si  $k$  est un zéro de

$$D_d(k, s) := \det(I + K_d(k, s)), \quad (1.71)$$

où  $K_d(k, s)$  est un opérateur de rang fini analytique en  $k$ , vérifiant

$$\text{rang } K_d(k, s) = \mathcal{O}\left(n_+(s, pW_+p) + 1\right), \quad \|K_d(k, s)\| = \mathcal{O}(s^{-1}),$$

uniformément pour  $s < |k| < s_0$ .

(ii) Si  $z_0 := z_m(k_0)$  est une résonance de  $D$ , alors

$$\text{mult}(z_0) = \text{Ind}_\gamma(I + K_d(k, s)) = m(k_0), \quad (1.72)$$

$\gamma$  étant choisi comme dans la Définition 1.2 et  $m(k_0)$  désignant la multiplicité de  $k_0$  en tant que zéro du déterminant  $D_d(k, s)$ .

(iii) Si  $\mathfrak{I}(k^2) > \sigma > 0$ , l'opérateur  $I + K_d(k, s)$  est inversible avec

$$\|(I + K_d(k, s))^{-1}\| = \mathcal{O}(\sigma^{-1}),$$

uniformément pour  $s < |k| < s_0$ .

On démontre la Proposition 1.9 comme pour la Proposition 1.4 en remplaçant d'une part l'opérateur  $\mathcal{T}_V(z(k))$  par l'opérateur  $\mathcal{M}_V(z_m(k))$  donné par (1.66), et d'autre part en remplaçant la relation (1.37) par (1.69).

**Remarque 1.8.** Notons que près de  $-m$ , on obtient l'analogie de la Proposition 1.9 en remplaçant dans la preuve l'opérateur  $\mathcal{M}_V(z_m(k))$  par l'opérateur  $\mathcal{M}_V(z_{-m}(k))$  donné par (1.68), et la relation (1.69) par (1.70).

#### 1.4.2.3 Retour à la preuve du Théorème 1.3

On conclut la preuve du Théorème 1.3 comme pour le Théorème 1.1 en remplaçant le déterminant  $D(k, s)$  par  $D_d(k, s)$  défini par (1.71), et l'opérateur  $K(k, s)$  par  $K_d(k, s)$ .

#### 1.4.3 Preuve du Théorème 1.4

##### 1.4.3.1 Un résultat préliminaire

Les notations sont celles de la sous-section 4.1.2 de l'Appendice. Avec la terminologie de valeur caractéristique (Définition 4.1), la Proposition 1.7 peut être reformulée de la manière suivante.

**Proposition 1.10.** Pour  $k$  près de 0, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i)  $z_0 := z_m(k_0)$  est une résonance de  $D$  près de  $m$ ,

(ii)  $k_0$  est une valeur caractéristique de  $I + \mathcal{M}_V(z_m(k))$ .

De plus, la multiplicité de la résonance  $z_0$  est égale à  $\text{Ind}_\gamma(I + \mathcal{M}_V(\cdot))$  la multiplicité de la valeur caractéristique  $k_0$ ,  $\gamma$  étant un cercle assez petit orienté positivement et contenant  $k_0$  comme unique valeur caractéristique.

L'étude des résonances  $z_m(k)$  de  $D_\varepsilon := D_0 + \varepsilon V$  près de  $m$  se ramène ainsi à celle des valeurs caractéristiques de l'opérateur

$$I + \mathcal{M}_{\varepsilon V}(z_m(k)) = I - \varepsilon \frac{T_d(ik)}{ik}$$

où  $T_d(ik) := (\text{sign } V)B_d - ikA_d(k)$ . Les opérateurs compacts  $B_d$  et  $A_d(k)$  sont définis dans la Proposition 1.8. Puisque l'opérateur  $T'_d(0)\Pi_0$  est compact, alors il existe une suite  $(\varepsilon_n)_n$  qui tend vers l'infini telle que  $I - \varepsilon T'_d(0)\Pi_0$  soit inversible dès que  $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Plus précisément, nous pouvons choisir pour  $\varepsilon_n$  les inverses des valeurs propres de l'opérateur  $T'_d(0)\Pi_0$ .

**Remarque 1.9.** Notons que près de  $-m$ , l'étude des résonances  $z_{-m}(k)$  de  $D_\varepsilon := D_0 + \varepsilon V$  près de  $-m$  se ramène à celle des valeurs caractéristiques de l'opérateur

$$I + \mathcal{M}_{\varepsilon V}(z_{-m}(k)) = I - \varepsilon \frac{\mathcal{T}_d(ik)}{ik}$$

où  $\mathcal{T}_d(ik) := -(\text{sign } V)\mathcal{B}_d - ik\mathcal{A}_d(k)$ . Les opérateurs compacts  $\mathcal{B}_d$  et  $\mathcal{A}_d(k)$  sont définis dans la Remarque 1.7.

#### 1.4.3.2 Retour à la preuve du Théorème 1.4

On conclut la preuve du Théorème 1.4 comme pour le Théorème 1.2 dans la sous-section 1.3.3 en remplaçant les opérateurs de Pauli  $P_e$  par les opérateurs de Dirac  $D_\varepsilon$ , et la relation (1.37) par (1.69).





# 2 | COUNTING FUNCTION OF MAGNETIC RESONANCES FOR SOME NON-DEFINITE SIGN PERTURBATIONS

## Contents

---

2.1	Introduction	45
2.2	Statement of main results	46
2.3	Resonances	49
2.3.1	A preliminary property	49
2.3.2	Reduction to semi-effective problem	49
2.3.3	Study of the semi-effective problem	50
2.4	Proof of main results	52
2.4.1	Proof of Theorem 2.1	52
2.4.2	Proof of Theorem 2.2	55

---

We consider the perturbed Pauli operator  $P := P_0 + V$ , where  $P_0$  is the free 3D Hamiltonian of Pauli with non-constant magnetic field defined by (0.23), and  $V$  is a *particular non-definite sign electric potential* which decays super-exponentially with respect to the variable along the magnetic field. We prove that the resonances of  $P$  near the origin 0 are concentrated on the semi axis  $(-\infty, 0)$  and establish asymptotic expansions, upper and lower bounds of their number near 0.

*Mathematics Subject Classification:* 35B34 - 35P25.

*Key words and phrases:* Magnetic Pauli operators, magnetic resonances, non-definite sign perturbations.

## 2.1 INTRODUCTION

In this chapter we consider the three-dimensional magnetic Pauli operator  $P_0$  acting in  $L^2(\mathbb{R}^3) := L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  defined by (0.23). It describes a quantum non-relativistic spin- $\frac{1}{2}$  particle subject to a magnetic field  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  and an electric potential  $V$ . The magnetic field  $\mathbf{B} = (0, 0, b)$  given by (0.1) is assumed to be admissible (see Definition 0.1). Due to (0.24) and (0.13) it is well known [95, Corollary 2.2] that the spectrum  $\sigma(P_0)$  of the operator  $P_0$  coincides with  $[0, +\infty)$  and is purely absolutely continuous.

On the domain of the operator  $P_0$  we introduce the perturbed operator

$$P := P_0 + V, \tag{2.1}$$

where we identify  $V$  with the multiplication operator by the function  $V$ . In Chapter 1, we investigated the resonances near the origin of the operator  $P$  where  $V$  is a symmetric

matrix-valued electric potential  $V \equiv \{V_{jk}\}_{1 \leq j, k \leq 2}$  satisfying assumption (1.2). So for  $V$  of definite sign, we obtained (see Théorème 1.2) an asymptotic expansion of the number of resonances near 0 and showed that they are concentrated in some sector adjoining 0. For  $V$  of *non-definite sign*, we obtained (see Théorème 1.1) an upper bound of the number of resonances near 0 without localization of the resonances. In this chapter, we study the same problem by considering the special class of matrix-valued electric potentials  $V$  having the form

$$V(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 0 & \overline{U}(\mathbf{x}) \\ U(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := (x_\perp, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad U(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

where the function  $U$  satisfies the estimate

$$|U(\mathbf{x})| \leq \mathcal{O} \left( \langle x_\perp \rangle^{-m_\perp} e^{-2\delta \langle x_3 \rangle} \right), \quad m_\perp > 0, \quad \delta > 0, \quad \langle x_\perp \rangle := (1 + |x_\perp|^2)^{1/2}. \quad (2.3)$$

**Remark 2.1.** Note that a potential  $V$  satisfying (2.2) is of *non-definite sign* since its eigenvalues are equal to  $\pm |U(\mathbf{x})|$ .

Novelty in this chapter is that we prove the resonances are concentrated on the semi axis  $(-\infty, 0)$  and we give upper and lower bounds of their number near 0. This improvement with respect to Théorème 1.1 and Théorème 1.2 is due to the fact that the form (2.2) of the potential  $V$  allows us to reduce the study of the resonances near 0 of the operator  $P$  to that of the semi-effective Hamiltonian  $P_- - \overline{U}(P_+ - z)^{-1}U$  for  $z$  small enough in the resolvent set of  $P_+$ , as it will be seen in section 2.3. Here  $P_\mp$  are the Schrödinger operators defined by (0.24).

The chapter is organized as follows. Our main results (Theorem 2.1 and Theorem 3.5) are presented in section 2.2. In section 2.3 we reduce the study of the resonances of the operator  $P$  near 0 to a characteristic value problem. Section 2.4 is devoted to the proofs of Theorem 2.1 and Theorem 3.5.

## 2.2 STATEMENT OF MAIN RESULTS

In order to formulate our main results, let us first fix some notations. For a linear positive self-adjoint compact operator  $T$  in a Hilbert space, we denote by

$$n_+(s, T) := \text{rank } \mathbb{P}_{(s, \infty)}(T), \quad s > 0, \quad (2.4)$$

where  $\mathbb{P}_{(s, \infty)}(T)$  is the orthogonal projection of the operator  $T$  corresponding to the interval  $(s, \infty)$ . Let  $P$  be the perturbed operator defined by (2.1). We shall denote its set of resonances by  $\text{Res}(P)$ . Recall that  $p := p(b)$  is the orthogonal projection onto  $\ker H_\perp^-$  defined by (0.12). If  $b = b_0$  is constant, we shall denote  $p_0 := p(b_0)$ . Let  $x_\perp = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . For a bounded operator  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^3))$ , let us define on  $L^2(\mathbb{R}^2)$  the operator  $W(\mathcal{B})$  by

$$(W(\mathcal{B})f)(x_\perp) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \overline{U}(x_\perp, x_3) \mathcal{B}(Uf)(x_\perp, x_3) dx_3. \quad (2.5)$$

**Remarque 2.1.** Note that if  $\mathcal{B} = I$ , the identity operator on  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , then  $W(I)$  is the multiplication operator by the function  $W(x_\perp) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |U|^2(x_\perp, x_3) dx_3$ .

Let  $P_+$  be the operator defined by (0.24). Under assumption (2.3) on the function  $U$ , we have for any  $x_\perp \in \mathbb{R}^2$ ,  $W(x_\perp) = \mathcal{O}(\langle x_\perp \rangle^{-2m_\perp})$ . Then Lemma 4.1 implies that the positive self-adjoint operators  $\rho W(I)\rho$  and  $\rho W(P_+^{-1})\rho$  are compact on  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Let us introduce the following pointed disk

$$D(0, \epsilon)^* := \{k \in \mathbb{C} : 0 < |k| < \epsilon\}, \quad \epsilon < \min(\delta, \sqrt{\zeta}), \quad (2.6)$$

where the constants  $\delta$  and  $\zeta$  are respectively defined by (2.3) and (0.14). Our first main result concerns the resonances  $z(k) = k^2$ ,  $k \in D(0, \epsilon)^*$  of the operator  $P_\epsilon := P_0 + \epsilon V$  in the case of non-constant magnetic field, where  $\epsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathcal{E}$  with  $\mathcal{E}$  a discrete set of  $\mathbb{R}^*$ .

**Theorem 2.1.** (Asymptotic expansion, upper bound) *Let  $W(\mathcal{B})$  be the operator defined by (2.5). Assume that  $V$  satisfies (2.2) with the function  $U$  satisfying (2.3). There exists a discrete set  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^*$  such that for any  $\epsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \mathcal{E}$ , the operator  $P_\epsilon := P_0 + \epsilon V$  has the following properties.*

(i) For  $k \ll 1$ , the resonances  $z(k) = k^2$  of  $P_\epsilon$  satisfy

$$\Im(k) \geq 0, \quad |\Re(k)| = o(|k|). \quad (2.7)$$

(ii) Suppose that  $n_+(r, \rho W(P_+^{-1})\rho) \rightarrow +\infty$ ,  $r \rightarrow 0$ . Then there exists a sequence  $(r_\ell)_\ell$  tending to 0 such that

$$\begin{aligned} & \left\{ z(k) = k^2 \in \text{Res}(P_\epsilon) : r_\ell < |k| \leq r_0 \right\} \\ & = n_+(r_\ell, \rho W(P_+^{-1})\rho) (1 + o(1)), \quad \ell \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

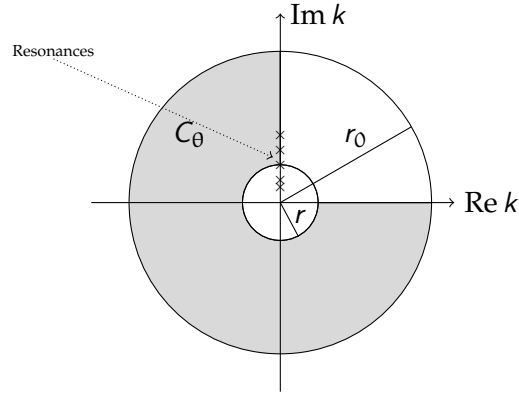
(iii) Let  $I$  be the identity operator on  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . If the function  $W(I) \leq U_\perp$  with  $U_\perp$  satisfying the assumptions of Lemma 4.2, then

$$\begin{aligned} & \#\left\{ z(k) = k^2 \in \text{Res}(P_\epsilon) : r < |k| \leq r_0 \right\} \\ & \leq n_+\left(r, \frac{1}{\zeta} \rho W(I)\rho\right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

**Remark 2.2.** Note that in virtue of Lemma 4.2, the right hand side of (2.9) implies that the number of resonances of  $P_\epsilon := P_0 + \epsilon V$  near 0 is of order  $\mathcal{O}(r^{-1/m_\perp})$  as  $r \searrow 0$ . This order is better than the order  $\mathcal{O}(r^{-2/m_\perp})$  obtained in Théorème 1.1 for general perturbations  $V$  satisfying (1.3). Otherwise, if the function  $U_\perp$  has a compact support, then (2.9) and Lemma 4.4 imply that the number of resonances of  $P_\epsilon$  near 0 is of order  $\mathcal{O}((\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r|)$  as  $r \searrow 0$ , which is the same in Théorème 1.1.

In the constant magnetic field case  $\mathbf{B} = (0, 0, b_0)$ , we obtain in addition a quantitative lower bound of the number of resonances. Note that if the magnetic field is constant then in (2.6) we have  $\zeta = 2b_0$ . Before to formulate our result, let us precise that if the function  $U$  satisfies  $U(x_\perp, x_3) = U_\perp(x_\perp) \mathcal{U}(x_3)$  where  $U_\perp$  and  $\mathcal{U}$  are not necessarily real functions, we define the following quantity

$$K_1 := \frac{\left\langle (D_{x_3}^2 + 2b_0)^{-1} \mathcal{U}, \mathcal{U} \right\rangle}{2}, \quad (2.10)$$



**Figure 4:** Localization of resonances near 0 in variable  $k$ : For  $r_0 \ll 1$ , the only resonances  $z(k) = k^2$  of  $P_0 + V$  in  $C_\theta$  are the eigenvalues of  $P_0 + V$  and are localized on the semi axis  $k = i]0, +\infty)$ .

where  $D_{x_3}^2$  is the one-dimensional Laplacien defined by (0.18), and we set

$$n_* \left( \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \rho_0 U_\perp \rho_0 \right) := n_+ \left( \frac{r}{K_1}, (\rho_0 U_\perp \rho_0)^* \rho_0 U_\perp \rho_0 \right). \quad (2.11)$$

With the above notations we have the following theorem.

**Theorem 2.2.** (Quantitative lower bound) *Let the magnetic field  $\mathbf{B}$  be constant. Assume that  $V$  satisfies (2.2) with the function  $U$  satisfying (2.3). There exists a discrete set  $E \subset \mathbb{R}^*$  such that for any  $e \in \mathbb{R}^* \setminus E$ , the operator  $P_e := P_0 + eV$  satisfies the following.*

Suppose that  $U(x_\perp, x_3) = U_\perp(x_\perp) \mathcal{U}(x_3)$  with  $\mathcal{U} \in L^2(\mathbb{R})$ . If we have  $n_* \left( \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \rho_0 U_\perp \rho_0 \right) = \phi(r)(1 + o(1))$ ,  $r \searrow 0$ , where the function  $\phi(r)$  is as in Lemma 4.9, then

$$\begin{aligned} & \#\{z(k) = k^2 \in \text{Res}(P_e) : r < |k| \leq r_0\} \\ & \geq n_* \left( \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \rho_0 U_\perp \rho_0 \right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

with  $K_1$  defined by (2.10). In particular if  $U_\perp \geq 0$  and satisfies assumptions of Lemma 4.2, then

$$\begin{aligned} & \#\{z = z(k) = k^2 \in \text{Res}(P_e) : r < |k| \leq r_0\} \\ & \geq n_+ \left( \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \rho_0 U_\perp \rho_0 \right) (1 + o(1)), \quad r \searrow 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

It is convenient to mention the following remark.

**Remarque 2.2.** *Note that estimates (2.13) and (2.9) imply that in the constant magnetic field case, the number of resonances of the operator  $P_e$  near 0 satisfy*

$$\begin{aligned} & C_{m_\perp} K_1^{1/m_\perp} r^{-1/m_\perp} (1 + o(1)) \leq \\ & \#\{z(k) = k^2 \in \text{Res}(P_e) : r < |k| \leq r_0\} \\ & \leq C_{m_\perp} K_2^{1/m_\perp} r^{-1/m_\perp} (1 + o(1)), \quad r \searrow 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

where  $C_{m_\perp}$  is the constant defined in Lemma 4.2 and  $K_2 := \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{U}(x_3)|^2 dx_3 / 4b_0$ . It can be easily checked that  $K_1 < K_2$ . On the other hand, (2.7) and the lower bound in (2.14) imply that the eigenvalues of the operator  $P_e$  accumulate to 0 from the left.

## 2.3 RESONANCES

### 2.3.1 A preliminary property

In this subsection, we establish the main property that allows us to reduce the study of the resonances near 0 of the perturbed Pauli operator  $P$  defined by (2.1) to that of the semi-effective Hamiltonian  $P_- - \bar{U}(P_+ - z)^{-1}U$  for  $z$  small enough in the resolvent set of  $P_+$ . Here  $P_{\mp}$  are the Schrödinger operators defined by (0.24). We assume that the potential  $V$  has the form defined by (2.2).

Consider a complex number  $z \in \rho(P)$ , the resolvent set of the operator  $P$ . So (0.24) and (2.1) imply that

$$P - z = \begin{pmatrix} P_- - z & \bar{U} \\ U & P_+ - z \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

Now put

$$\mathcal{B} := (P - z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (P_+ - z)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_- - z & \bar{U}(P_+ - z)^{-1} \\ U & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Let  $\mathcal{C}$  be the operator given by

$$\mathcal{C} := \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -U & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_- - z - \bar{U}(P_+ - z)^{-1}U & \bar{U}(P_+ - z)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Hence for  $z \in \rho(P_+)$  the resolvent set of the operator  $P_+$ , we have the following property

$$P - z \text{ is invertible} \Leftrightarrow P_- - z - \bar{U}(P_+ - z)^{-1}U \text{ is invertible}, \quad (2.18)$$

and moreover we have

$$(P - z)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(P_+ - z)^{-1}U & (P_+ - z)^{-1} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} (P_- - z - \bar{U}(P_+ - z)^{-1}U)^{-1} & -(P_- - z - \bar{U}(P_+ - z)^{-1}U)^{-1}\bar{U}(P_+ - z)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

So property (2.18) above allows us to reduce the non-invertibility of the operator  $P - z$  to that of the operator  $P_- - z - \bar{U}(P_+ - z)^{-1}U$ , provided that the operator  $P_+ - z$  is invertible.

### 2.3.2 Reduction to semi-effective problem

We assume that the perturbation  $V$  satisfies (2.2). Let  $z \in \mathbb{C}^+$  the upper half plane and perform the following change of variables

$$z := z(k) = k^2 \text{ for } k \in \mathbb{C}_{1/2}^+ := \{k \in \mathbb{C}^+ : k^2 \in \mathbb{C}^+\}. \quad (2.20)$$

Let  $D(0, \epsilon)^*$  be the disk introduced in (2.6). Recall that by Proposition 1.1, the operator valued-function

$$k \mapsto \left( (P - z(k))^{-1} : e^{-\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow e^{\delta \langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

admits a meromorphic extension from  $\mathbb{C}_{1/2}^+ \cap D(0, \epsilon)^*$  to  $D(0, \epsilon)^*$ . This extension is denoted by  $R(z(k))$ . Moreover the resonances of the operator  $P$  near 0 are defined as the poles of the meromorphic extension  $R(z)$ . Now Consider  $z \in \rho(P_+)$  and set  $\mathfrak{R}(z) := (P_- - z - \bar{U}(P_+ - z)^{-1}U)^{-1}$ . Since (2.19) implies that

$$\begin{aligned} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} R(z) e^{-\delta \langle x_3 \rangle} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (P_+ - z)^{-1} U e^{\delta \langle x_3 \rangle} & e^{-\delta \langle x_3 \rangle} (P_+ - z)^{-1} e^{\delta \langle x_3 \rangle} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \mathfrak{R}(z) e^{-\delta \langle x_3 \rangle} & -e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \mathfrak{R}(z) \bar{U} (P_+ - z)^{-1} e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \\ 0 & e^{-2\delta \langle x_3 \rangle} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

then this together with assumption (2.3) on the function  $U$  show that the poles of the resolvents  $R(z)$  and  $\mathfrak{R}(z)$  coincide. So near 0, the study of the resonances of the operator  $P$  is reduced to that of the semi-effective Hamiltonian  $P_- - \bar{U}(P_+ - z)^{-1}U$  for  $z$  small enough in  $\rho(P_+)$ .

### 2.3.3 Study of the semi-effective problem

For  $z \in \rho(P_+)$  small enough, let us decompose the sandwiched resolvent  $\bar{U}(P_+ - z)^{-1}U$  for appropriate use in the sequel. Using the decomposition

$$(P_+ - z)^{-1} = P_+^{-1} (1 - zP_+^{-1})^{-1} = P_+^{-1} \sum_{k \geq 0} z^k P_+^{-k}, \quad (2.22)$$

we get

$$(P_+ - z)^{-1} = P_+^{-1/2} (P_+^{-1/2} + M(z)) \quad (2.23)$$

where the operator  $M(z)$  is given by

$$M(z) := \sum_{k \geq 1} z^k P_+^{-k-1/2}. \quad (2.24)$$

So (2.23) implies that

$$\bar{U}(P_+ - z)^{-1}U = \bar{U}P_+^{-1/2} (P_+^{-1/2}U + M(z)U). \quad (2.25)$$

Now define the operator  $\mathbf{w}$  by setting

$$\mathbf{w} := P_+^{-1/2}U. \quad (2.26)$$

Thus (2.25) and (2.26) imply that

$$\bar{U}(P_+ - z)^{-1}U = \mathbf{w}^* (\mathbf{w} + M(z)U). \quad (2.27)$$

Then we have proved the following lemma.

**Lemma 2.1.** Let  $P_+$  be the operator defined by (0.24) and  $U$  be the function defined by (2.2). Then the operator  $\overline{U}(P_+ - z)^{-1}U$  admits the representation

$$\overline{U}(P_+ - z)^{-1}U = \mathbf{w}^*(\mathbf{w} + M(z)U), \quad (2.28)$$

where  $\mathbf{w}$  is defined by (2.26) and  $M(z)$  by (2.24). Moreover for  $z$  small enough, the operator-valued function  $\mathbb{C} \setminus [\zeta, +\infty) \ni z \mapsto M(z)$  is analytic where  $\zeta$  is defined by (0.14).

Denote by  $R_1(z) := (P_- - z)^{-1}$  the resolvent of the operator  $P_-$ . Then under notations of Lemma 2.1, we have the following lemma.

**Lemma 2.2.** Let  $D(0, \epsilon)^*$  be the pointed disk defined by (2.6). Assume that the function  $U$  satisfies (2.3). Then the operator valued-function

$$D(0, \epsilon)^* \ni k \mapsto \mathcal{T}_V(z(k)) := (\mathbf{w} + M(z(k))U)R_1(z(k))\mathbf{w}^*$$

is analytic with values in  $S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

**Proof.** The analyticity of the operator  $\mathcal{T}_V(z(k))$  holds since  $M(z(k))$  and  $UR_1(z(k))\overline{U}$  are well defined and analytic for  $k \in D(0, \epsilon)^*$ . As in the proof of Lemme 1.3, the analyticity of the operator  $UR_1(z(k))\overline{U}$  for  $k \in D(0, \epsilon)^*$  is induced by (i) of Lemme 1.1 together with that of Lemme 1.2.

The compactness of  $\mathcal{T}_V(z(k))$  follows by that of  $UR_1(z(k))\overline{U}$ , which is induced by (ii) of Lemme 1.1 together with that of Lemme 1.2. ■

We have the following proposition

**Proposition 2.1.** For  $k$  near 0, the following assertions are equivalent.

- (i)  $z(k) = k^2$  is a resonance of the operator  $P$ ,
- (ii) 1 is an eigenvalue of  $\mathcal{T}_V(z(k)) := (\mathbf{w} + M(z(k))U)R_1(z(k))\mathbf{w}^*$  defined in Lemma 2.2.

**Proof.** The equivalence follows directly from the identity

$$\left(I - (\mathbf{w} + M(z)U)R_1(z)\mathbf{w}^*\right)\left(I + (\mathbf{w} + M(z)U)\mathfrak{R}(z)\mathbf{w}^*\right) = I \quad (2.29)$$

and the fact that the poles of  $R(z)$  coincide with that of  $\mathfrak{R}(z)$ . ■

So, the multiplicity of a resonance  $z_1 := z(k_1)$  is defined by

$$\text{mult}(z_1) := \text{Ind}_\gamma \left( I - \mathcal{T}_V(z(\cdot)) \right), \quad (2.30)$$

where  $\gamma$  is a small positively oriented circle containing  $k_1$  as the unique point satisfying  $z(k_1)$  is a resonance of  $P$ . The notion of index (with respect to a positively oriented contour) of a finite meromorphic operator-valued function is recalled in the Appendix.

Proposition 2.1 can be formulated as follows using the terminology of characteristic value recalled in the Appendix, Definition 4.1.

**Proposition 2.1.** For  $k$  near 0, the following assertions are equivalent.

- (i)  $z_1 = z(k_1) = k_1^2$  is a resonance of  $P$ ,
- (ii)  $k_1$  is a characteristic value of  $I - \mathcal{T}_V(z(k))$ .

Moreover according to (2.30), the multiplicity of the resonance  $z(k_1)$  coincides with the multiplicity of the characteristic value  $k_1$ .



## 2.4 PROOF OF MAIN RESULTS

Let us first recall some notations introduced in Chapter 1. Let  $\mathbf{p} := p \otimes I_3$  and  $\mathbf{q} := I - \mathbf{p}$  be the orthogonal projections defined by (1.10), where  $p := p(b)$  is the orthogonal projection onto  $\ker H_{\perp}^-$  defined by (0.12) and  $I_3$  is the identity operator on  $L^2(\mathbb{R})$ . For  $z \in \rho(P_-)$ , using the definition of  $P_-$  given by (0.24) we obtain

$$\begin{aligned} (P_- - z)^{-1} &= (P_- - z)^{-1} \mathbf{p} + (P_- - z)^{-1} \mathbf{q} \\ &= p \otimes \mathcal{R}(z) + (P_- - z)^{-1} \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

where the resolvent  $\mathcal{R}(z) := \left(-\frac{d^2}{dt^2} - z\right)^{-1}$  admits the integral kernel

$$\mathcal{N}_z(x_3 - x'_3) = \frac{ie^{i\sqrt{z}|x_3 - x'_3|}}{2\sqrt{z}}, \quad \Im(\sqrt{z}) > 0. \quad (2.32)$$

### 2.4.1 Proof of Theorem 2.1

#### 2.4.1.1 Preliminary results

As above,  $z(k) := k^2$  with  $k \in D(0, \epsilon)^*$  the pointed disk defined by (2.6). In order to prove Theorem 2.1, let us first decompose the operator  $\mathcal{J}_V(z(k))$  defined in Lemma 2.2, with the help of (2.31). We get

$$\mathcal{J}_V(z(k)) = \mathbf{w}p \otimes \mathcal{R}(k^2) \mathbf{w}^* + M(z(k)) UR_1(z(k)) (\mathbf{q} + I) \mathbf{w}^*. \quad (2.33)$$

The operator  $M(z(k)) UR_1(z(k)) (\mathbf{q} + I) \mathbf{w}^*$  is holomorphic in a vicinity of 0 with values in  $S_{\infty}(L^2(\mathbb{R}^3))$ . Now let us consider the operator  $\mathbf{w}p \otimes \mathcal{R}(k^2) \mathbf{w}^*$ . Since (2.32) implies that the integral kernel of the operator  $N(k) := e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \mathcal{R}(k^2) e^{-\delta \langle x_3 \rangle}$  is given by

$$e^{-\delta \langle x_3 \rangle} \frac{ie^{ik|x_3 - x'_3|}}{2k} e^{-\delta \langle x'_3 \rangle}, \quad (2.34)$$

then  $N(k)$  can be decomposed as follows

$$N(k) = \frac{1}{k} a + b(k), \quad (2.35)$$

where  $a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  is the rank-one operator defined by

$$a(u) := \frac{i}{2} \langle u, e^{-\delta \langle \cdot \rangle} \rangle e^{-\delta \langle x_3 \rangle}, \quad (2.36)$$

and  $b(k)$  is the Hilbert-Schmidt operator (for  $k \in D(0, \epsilon)^*$ ) with integral kernel given by

$$e^{-\delta \langle x_3 \rangle} i \frac{e^{ik|x_3 - x'_3|} - 1}{2k} e^{-\delta \langle x'_3 \rangle}. \quad (2.37)$$

Then

$$\mathbf{w}p \otimes \mathcal{R}(k^2) \mathbf{w}^* = \frac{i}{k} \times \frac{1}{2} \mathbf{w}(p \otimes \tau) \mathbf{w}^* + \mathbf{w}(p \otimes s(k)) \mathbf{w}^*, \quad (2.38)$$

where  $\tau$  et  $s(k)$  are operators acting from  $e^{-\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R})$  to  $e^{\delta\langle x_3 \rangle} L^2(\mathbb{R})$  with integral kernels respectively given by 1 and

$$\frac{1 - e^{ik|x_3 - x'_3|}}{2ik}. \quad (2.39)$$

So we get the following proposition with the above notations.

**Proposition 2.2.** *Let  $k \in D(0, \epsilon)^*$  defined by (2.6). Then we have*

$$\mathcal{T}_V(z(k)) = i \frac{\mathbf{w}(p \otimes \tau) \mathbf{w}^*}{2k} + B(k), \quad (2.40)$$

where  $\mathbf{w}$  is defined by (2.26), and the operator  $B(k) \in S_\infty(L^2(\mathbb{R}^3))$  holomorphic in  $D(0, \epsilon)^*$  is defined by

$$B(k) := \mathbf{w}(p \otimes s(k)) \mathbf{w}^* + M(z(k)) UR_1(z(k)) (q + I) \mathbf{w}^*. \quad (2.41)$$

Note that  $\mathbf{w}(p \otimes \tau) \mathbf{w}^*$  is a positive self-adjoint compact operator. Indeed if we define the multiplication operators by  $e_\pm := e^{\pm\delta\langle x_3 \rangle}$ , then it can be easily checked that

$$\mathbf{w}(p \otimes \tau) \mathbf{w}^* = \mathbf{w} e_+ (p \otimes c^* c) e_+ \mathbf{w}^* = ((p \otimes c) e_+ \mathbf{w}^*)^* ((p \otimes c) e_+ \mathbf{w}^*), \quad (2.42)$$

where  $c : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  is the operator defined by  $c(f) := \langle f, e_- \rangle$ , so that  $c^* : \mathbb{C} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  is given by  $c^*(\lambda) = \lambda e_-$ . Now with the help of (2.42), we deduce that

$$n_+ \left( r, \frac{\mathbf{w}(p \otimes \tau) \mathbf{w}^*}{2} \right) = n_+ \left( r, \frac{(p \otimes c) e_+ \mathbf{w}^* \mathbf{w} e_+ (p \otimes c^*)}{2} \right), \quad r > 0, \quad (2.43)$$

where the quantity  $n_+(r, \cdot)$  is defined by (2.4). Since by the definition of  $\mathbf{w}$  given by (2.26) we have  $\mathbf{w}^* \mathbf{w} = \overline{U} P_+^{-1} U$ , and moreover  $\sigma(P_+) \subseteq [\zeta, +\infty)$ , then the following operator equality and inequality happen,

$$\frac{(p \otimes c) e_+ \mathbf{w}^* \mathbf{w} e_+ (p \otimes c^*)}{2} = p W(P_+^{-1}) p \leq \frac{p W(I) p}{\zeta}, \quad (2.44)$$

where for a bounded operator  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^3))$ ,  $W(\mathcal{B})$  is the operator defined by (2.5). So (2.43) and (2.44) imply that

$$\begin{aligned} n_+ \left( r, \frac{\mathbf{w}(p \otimes \tau) \mathbf{w}^*}{2} \right) &= n_+ \left( r, p W(P_+^{-1}) p \right) \\ &\leq n_+ \left( r, \frac{p W(I) p}{\zeta} \right), \quad r > 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Otherwise, Proposition 2.1 allows us to reduce the study of resonances  $z(k) = k^2$  of  $P_\epsilon := P_0 + \epsilon V$  near 0 to that of the characteristic values of the operator

$$I - \mathcal{T}_{\epsilon V}(z(k)) = I + \epsilon^2 \frac{T(ik)}{ik}.$$

Here according to Proposition 2.2, we put  $T(ik) := \frac{\mathbf{w}(p \otimes \tau) \mathbf{w}^*}{2} - ikB(k)$  so that  $T(0) = \frac{\mathbf{w}(p \otimes \tau) \mathbf{w}^*}{2}$ . With respect to the notations of subsection 4.1.2, recall that  $\Pi_0$  is the orthogonal projection onto  $\ker T(0)$ . Since the operator  $T'(0)\Pi_0$  is compact, there exists a sequence  $(\epsilon_n)_n$  such that the operator  $I - \epsilon T'(0)\Pi_0$  is invertible for any  $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\epsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Note that we can take  $\epsilon_n = \lambda_n^{-1}$  where  $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$  is the set of eigenvalues of the operator  $T'(0)\Pi_0$ .

### 2.4.1.2 Back to the proof of Theorem 2.1

The notations are that of subsection 4.1.2 in the Appendix.

We obtain immediately (i) by Lemma 4.6 with  $z = -ik/\varepsilon^2$ .

Otherwise, (i) shows that for  $|k|$  small enough the resonances  $z(k) = k^2$  are concentrated in the sector  $\{k \in D(0, \varepsilon)^* : -ik/\varepsilon^2 \in \mathcal{C}_\alpha(r, r_0)\}$  for any  $\alpha > 0$  with  $\mathcal{C}_\alpha(r, r_0)$  defined by (4.4). So for  $r \searrow 0$ ,

$$\begin{aligned} & \#\{z(k) = k^2 \in \text{Res}(P_\varepsilon) : r < |k| \leq r_0\} \\ &= \#\{z(k) = k^2 \in \text{Res}(P_\varepsilon) : -ik/\varepsilon^2 \in \mathcal{C}_\alpha(r, r_0)\} + \mathcal{O}(1) \\ &= \mathcal{N}(\mathcal{C}_\alpha(r, r_0)) + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Since we have

$$n([r, r_0]) = \text{Tr} \mathbf{1}_{[r, r_0]}(T(0)) = n_+ \left( r, \frac{\mathbf{w}(p \otimes \tau) \mathbf{w}^*}{2} \right) + \mathcal{O}(1), \quad (2.47)$$

then this together with the inequality in (2.45) give

$$n([r, r_0]) \leq n_+ \left( r, \frac{pW(I)p}{\zeta} \right) + \mathcal{O}(1).$$

Thus (ii) of Theorem 2.1 follows from (2.46) together with Lemma 4.8, (2.47) and the equality in (2.45).

Now if the function  $W(I)$  satisfies the assumptions of Lemma 4.2, then we have

$$n_+ \left( r, \frac{pW(I)p}{\zeta} \right) = C_{m_\perp} (\zeta r)^{-1/m_\perp} (1 + o(1)), \quad r \searrow 0, \quad (2.48)$$

where  $m_\perp$  is the constant defined by (2.3). As in the inequality in (2.45), we can show for  $r > 0$  that

$$n([r, r_0]) \leq \text{Tr} \mathbf{1}_{[r, r_0]} \left( \frac{pW(I)p}{\zeta} \right) =: \tilde{n}([r, r_0]). \quad (2.49)$$

Note that due to (2.48), we have

$$\tilde{n}([r, r_0]) = C_{m_\perp} (\zeta r)^{-1/m_\perp} (1 + o(1)), \quad r \searrow 0. \quad (2.50)$$

Now if  $\phi(r) = r^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ , then  $\phi(r(1 \pm \nu)) = r^{-\gamma} (1 \pm \nu)^{-\gamma} = \phi(r) (1 + \mathcal{O}(\nu))$ . If  $\tilde{n}([r, 1]) = \phi(r) (1 + o(1))$  with  $\phi(r(1 \pm \delta)) = \phi(r) (1 + o(1) + \mathcal{O}(\delta))$ , then

$$\tilde{n}([r(1 - \nu), r(1 + \nu)]) = \tilde{n}([r, 1]) (o(1) + \mathcal{O}(\nu)). \quad (2.51)$$

So (iii) follows from (2.46) together with Lemma 4.7, (2.49), (2.50) and (2.51).

### 2.4.2 Proof of Theorem 2.2

To obtain (2.12), it suffices to prove that if function  $U$  satisfies  $U(x_\perp, x_3) = U_\perp(x_\perp)\mathcal{U}(x_3)$ , then the following operator inequality holds

$$K_1(p_0 U_\perp p_0)^*(p_0 U_\perp p_0) \leq p_0 W(P_+^{-1})p_0, \quad (2.52)$$

where the constant  $K_1$  is defined by (2.10). Indeed if (2.52) holds, then with respect to the constant magnetic field, the quantity given by (2.47)  $n([r, r_0]) = \text{Tr} \mathbf{1}_{[r, r_0]} \left( \frac{\mathbf{w}(p_0 \otimes \tau) \mathbf{w}^*}{2} \right) = \text{Tr} \mathbf{1}_{[r, r_0]} (p_0 W(P_+^{-1})p_0)$  where the operator  $P_+$  is defined by (0.24) satisfies

$$n_*([r, r_0]) := \text{Tr} \mathbf{1}_{[r, r_0]} [K_1(p_0 U_\perp p_0)^*(p_0 U_\perp p_0)] \leq n([r, r_0]). \quad (2.53)$$

Moreover if we have

$$\begin{aligned} n_* \left( \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}}, p_0 U_\perp p_0 \right) &:= n_+ \left( \frac{r}{K_1}, (p_0 U_\perp p_0)^* p_0 U_\perp p_0 \right) \\ &= \phi(r)(1 + o(1)), \quad r \searrow 0, \end{aligned}$$

where the function  $\phi(r)$  is as in Lemma 4.9, then

$$n_*([r, r_0]) = \phi(r)(1 + o(1)), \quad r \searrow 0. \quad (2.54)$$

Therefore (2.12) follows reasoning as in the proof of (iii) of Theorem 2.1 above.

Now let us proof that (2.52) happens. If the magnetic field is constant, then the operator  $P_+$  satisfies the following operator inequality

$$P_+^{-1} \geq P_+^{-1} p_0 = p_0 \otimes \left( -\frac{d^2}{dx_3^2} + 2b_0 \right)^{-1}.$$

So this together with the definition (2.5) of  $W(P_+^{-1})$  imply that if  $U(x_\perp, x_3) = U_\perp(x_\perp)\mathcal{U}(x_3)$ , then for any  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  we have

$$\langle W(P_+^{-1})f, f \rangle \geq K_1 \langle \overline{U_\perp} p_0 U_\perp f, f \rangle. \quad (2.55)$$

This means that we have the operator inequality

$$W(P_+^{-1}) \geq K_1 \overline{U_\perp} p_0 U_\perp.$$

Thus

$$p_0 W(P_+^{-1})p_0 \geq K_1 (p_0 U_\perp p_0)^*(p_0 U_\perp p_0)$$

which is exactly (2.52). This concludes the proof of Theorem 2.2.



# 3 | GENERALIZED LIEB-THIRRING INEQUALITIES FOR MAGNETIC QUANTUM HAMILTONIANS

## Contents

---

3.1	Introduction	58
3.2	Main Results	61
3.2.1	On the $2d$ -dimensional case, $d \geq 1$	61
3.2.2	An abstract result including the $2d$ -dimensional case	63
3.2.3	On the $(2d + 1)$ -dimensional case, $d \geq 1$	64
3.3	On the dimension $2d$ , $d \geq 1$	66
3.3.1	Estimate of the weighted resolvent of the Schrödinger operator $S_{0,\perp}$	66
3.3.2	Proofs of Theorem 3.1 and Theorem 3.2	68
3.3.3	Proofs of analogous results for the $2d$ -dimensional Pauli operators	72
3.4	On the dimension $2d + 1$ , $d \geq 1$	73
3.4.1	Estimate of the sandwiched resolvents of the Schrödinger operators $S_0$ and $S$	73
3.5	Preliminaries	78
3.5.1	About the holomorphic function $f(\lambda)$	78
3.5.2	About the conformal map $\varphi(z)$	80
3.5.3	A theorem by Borichev, Golinskii and Kupin	81
3.6	Bounds on the discrete eigenvalues of $S$	81
3.6.1	Local bound	81
3.6.2	Proof of Theorem 3.4	85
3.6.3	Proofs of analogous result for the $(2d + 1)$ -dimensional Pauli operators	86

---

Let  $S_{\perp} := S_{0,\perp} + V$  and  $S := S_0 + V$  be respectively perturbations of the unperturbed Schrödinger operators  $S_{0,\perp}$  on  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$  and  $S_0$  on  $L^2(\mathbb{R}^{2d+1})$ ,  $d \geq 1$ , with constant magnetic field of strength  $b_0 > 0$ , and  $V$  is a complex relatively compact perturbation. We prove Lieb-Thirring type inequalities for the discrete spectrum of  $S_{\perp}$  and  $S$ . In particular, these estimates give *a priori* information on the distribution of eigenvalues around the Landau levels of the operator, and describe how fast sequences of eigenvalues converge. In more general context, our results remain valid for the Pauli operators with constant magnetic field on  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$  and  $L^2(\mathbb{R}^{2d+1})$ .

*Mathematics Subject Classification::* 35P20 - 47A75 - 47A55.

*Key words and phrases:* Magnetic Schrödinger operators, magnetic Pauli operators, self-adjoint operators with pure point spectrum, Lieb-Thirring type inequalities, non self-adjoint relatively compact perturbations.

### 3.1 INTRODUCTION

In this chapter, we consider two important cases of unbounded self-adjoint operators acting on a separable Hilbert space  $X$ . For the transparency of the presentation in the sequel, let us fix some notations. We denote by  $S_p(X)$ ,  $p \in (0, +\infty)$  the Schatten-von Neuman classes of compact linear operators  $L$  on  $X$  for which the norm  $\|L\|_p := (\text{Tr}|L|^p)^{1/p}$  is finite. For an operator  $\mathcal{H}$  acting on  $X$ , its numerical range is defined by

$$N(\mathcal{H}) := \{ \langle \mathcal{H}f, f \rangle : f \in \text{Dom}(\mathcal{H}), \|f\|_X = 1 \}. \quad (3.1)$$

Introduce some conventional definitions we will use. Let the operator  $\mathcal{H}$  be closed and denote by  $\mathcal{R}(z)$  its resolvent. If  $\lambda$  is an isolated point of the spectrum  $\sigma(\mathcal{H})$  of  $\mathcal{H}$ , recall that the Riesz projection of  $\mathcal{H}$  with respect to  $\lambda$  is defined by

$$P_\lambda := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathcal{R}(z) dz,$$

where  $\gamma$  is a small positively oriented circle centered at  $\lambda$ , and containing  $\lambda$  as the only point of  $\sigma(\mathcal{H})$ . We shall say that  $\lambda$  is a *discrete eigenvalue* of  $Z$  if its algebraic multiplicity

$$m(\lambda) := \text{rank}(P_\lambda)$$

is finite. Note that the algebraic multiplicity of  $\lambda$  can be bigger than its geometric multiplicity defined as the dimension of the eigenspace  $\ker(\mathcal{H} - \lambda)$ . In the sequel, the set of discrete eigenvalues of  $\mathcal{H}$  is called the *discrete spectrum* and is denoted by  $\sigma_d(\mathcal{H})$ . Otherwise we define the *essential spectrum*  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H})$  of  $\mathcal{H}$  as the set of complex numbers  $\lambda$  such that  $\mathcal{H} - \lambda$  is not a Fredholm operator. Note that the essential spectrum of  $\mathcal{H}$  is a closed subset of  $\sigma(\mathcal{H})$ .

Let  $\mathbf{x} := (x_\perp, x) \in \mathbb{R}^{2d+1}$ ,  $x_\perp := (x_1, y_1, \dots, x_d, y_d) \in \mathbb{R}^{2d}$ ,  $d \geq 1$ , be the Cartesian coordinates. Fix a constant  $b_0 > 0$  which is the strength of the magnetic field, and consider

$$S_{0,\perp} := \sum_{j=1}^d \left\{ \left( D_{x_j} + \frac{1}{2} b_0 y_j \right)^2 + \left( D_{y_j} - \frac{1}{2} b_0 x_j \right)^2 \right\}, \quad (3.2)$$

$$S_0 := S_{0,\perp} + D_x^2, \quad D_v := -i \frac{\partial}{\partial v}, \quad (3.3)$$

the Schrödinger operators with constant magnetic field. The self-adjoint operators  $S_{0,\perp}$  and  $S_0$  are originally defined on  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  for  $n = 2d$  and  $n = 2d + 1$  respectively, and then closed in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . It is well known [29] that the spectrum of the operator  $S_{0,\perp}$  consists of the increasing sequence of Landau levels

$$\Lambda_j = b_0(d + 2j), \quad j \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (3.4)$$

and the multiplicity of each eigenvalue  $\Lambda_j$  is infinite. In the sequel we put  $E := \{\Lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Since the operator  $S_0$  can be written in  $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^{2d}) \otimes L^2(\mathbb{R})$  as

$$S_0 = S_{0,\perp} \otimes I_3 + I_\perp \otimes D_x^2,$$

where  $I_\perp$  and  $I_3$  are respectively the identity operators in  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$  et  $L^2(\mathbb{R})$ , then the spectrum of  $S_0$  is absolutely continuous, equals  $[\Lambda_0, +\infty)$ , and has an infinite set of thresholds  $\Lambda_j, j \in \mathbb{N}$ .

On the domains of the operators  $S_0$  and  $S_{0,\perp}$ , we introduce the perturbed operators

$$S := S_0 + V \quad \text{and} \quad S_\perp := S_{0,\perp} + V, \quad (3.5)$$

where  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  is a non self-adjoint perturbation for  $n = 2d + 1$  and  $n = 2d$  respectively. Everywhere in this chapter, we identify  $V$  with the multiplication operator by the function  $V$ . Now to simplify in what follows below, let us denote by  $\mathcal{H}_0$  the unperturbed operators  $S_0$  and  $S_{0,\perp}$ , and by  $\mathcal{H}$  the perturbed operators  $S$  and  $S_\perp$  defined by (3.5). Assume that  $V$  is a relatively non self-adjoint compact perturbation with respect to  $\mathcal{H}_0$ . This means  $\text{Dom}(V) \supset \text{Dom}(\mathcal{H}_0)$  and for  $\lambda \in \rho(\mathcal{H}_0)$  the resolvent set of the operator  $\mathcal{H}_0$ , the Birman-Schwinger operator  $V(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$  is compact. Under this assumption on  $V$ , it is well known [61, Chapter VI] that the spectrum of  $S$  is included in a half-plane, *i.e.* there exists  $\mu_1 < 0$  such that  $\sigma(\mathcal{H}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq \mu_1\}$ . In more general context, we shall deal with non self-adjoint perturbations  $V$  satisfying the following assumptions.

In the first part of this chapter concerning the  $2d$ -dimensional case, we consider the general class of non self-adjoint electric potentials  $V$  such that

$$\langle \Re(V)f, f \rangle \geq \mu_1 \|f\|^2 \quad (3.6)$$

and satisfying the estimate

$$|V(x_\perp)| \leq CF(x_\perp), \quad F \in L^p(\mathbb{R}^{2d}), \quad p \geq 2, \quad (3.7)$$

where  $C > 0$  is a constant and  $F$  a positive function. Note that (3.6) implies that the numerical range  $N(S_\perp)$  of the operator  $S_\perp$  satisfies

$$\sigma(S_\perp) \subset \overline{N(S_\perp)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq \mu_1\}. \quad (3.8)$$

If the potential  $V$  is bounded, then (3.8) is naturally satisfied with  $\mu_1 = -\|V\|_\infty$ . More precisely we have

$$\sigma(S_\perp) \subset \overline{N(S_\perp)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq -\|V\|_\infty \text{ and } |\Im(\lambda)| \leq \|V\|_\infty\}. \quad (3.9)$$

For further use, we fix the constant

$$\mu_0 := \mu_1 - 1. \quad (3.10)$$

Concretely, assumption (3.7) is satisfied for example by the class of relatively compact perturbations  $V : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{C}$  such that

$$|V(x_\perp)| \leq C \langle x_\perp \rangle^{-m_\perp}, \quad m_\perp > 0, \quad pm_\perp > 2d, \quad p \geq 2. \quad (3.11)$$

Under the condition  $m_\perp > 0, pm_\perp > 2d$  and  $p \geq 2$ , we can also consider power-like decaying electric potentials  $V : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfying the asymptotic property

$$V(x_\perp) = v(x_\perp/|x_\perp|)|x_\perp|^{-m_\perp}(1 + o(1)) \quad \text{as} \quad |x_\perp| \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$



where  $v$  is a continuous function on  $S^{2d-1}$  which is non negative and does not vanish identically (see also [94] where  $V$  is self-adjoint).

In the second part of this chapter concerning the  $(2d+1)$ -dimensional case, we consider bounded non self-adjoint electric potentials  $V$  satisfying

$$|V(\mathbf{x})| \leq CF(\mathbf{x})G(x), \quad F \in L^p(\mathbb{R}^{2d+1}), \quad p \geq 2, \quad G \in (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}), \quad (3.13)$$

where  $C > 0$  is a constant,  $F$  and  $G$  are two positive functions. Since  $V$  is bounded, then as (3.9) the spectrum of the perturbed operator  $S$  and its numerical range satisfy

$$\sigma(S) \subset \overline{N(S)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq -\|V\|_\infty \text{ and } |\Im(\lambda)| \leq \|V\|_\infty\}. \quad (3.14)$$

Typical example of potentials satisfying (3.13) is the special case of the relatively compact perturbations  $V : \mathbb{R}^{2d+1} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfying the estimate

$$|V(\mathbf{x})| \leq C \langle x_\perp \rangle^{-m_\perp} \langle x \rangle^{-m}, \quad m_\perp > 0, \quad m > 1/2, \quad \langle x_\perp \rangle := (1 + |x_\perp|^2)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Indeed, put  $F(\mathbf{x}) = \langle x_\perp \rangle^{-m_\perp} \langle x \rangle^{-\nu}$  and  $G(x) = \langle x \rangle^{-\tilde{m}}$ , where  $\nu + \tilde{m} = m$  with  $\nu > 0$  and  $\tilde{m} > 1/2$ . Clearly for any  $p \geq 2$  such that  $pm_\perp > 2d$  and  $p\nu > 1$ ,  $F \in L^p(\mathbb{R}^{2d+1})$  and  $G \in (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ . We can also consider perturbations  $V : \mathbb{R}^{2d+1} \rightarrow \mathbb{C}$  verifying

$$|V(\mathbf{x})| \leq C \langle \mathbf{x} \rangle^{-\alpha}, \quad \alpha > 1/2. \quad (3.16)$$

Indeed, (3.16) implies that

$$|V(\mathbf{x})| \leq C \langle \mathbf{x} \rangle^{-(\alpha-\nu)} \langle x \rangle^{-\nu}, \quad \nu \in (1/2, \alpha).$$

Thus  $V$  satisfies (3.13) for any  $p \geq 2$  with  $p(\alpha - \nu) - 1 > 2d$ . Note that (3.16) implies (3.15) with any  $m \in (1/2, \alpha)$  and  $m_\perp = \alpha - m$ .

Since  $V$  is relatively compact with respect to  $\mathcal{H}_0$  and  $\sigma(\mathcal{H}_0) \subseteq \mathbb{R}$ , then it follows from [27, Corollary 2.3.3] that  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}_0)$ . Thus we have  $\sigma_{\text{ess}}(S_\perp) = \{\Lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  and  $\sigma_{\text{ess}}(S) = [\Lambda_0, +\infty)$ . Under assumptions (3.7) and (3.13) on the perturbation  $V$ , we prove respectively some bounds on the  $p$ -Schatten norm of the sandwiched resolvents  $F(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1}$  and  $F(S_0 - \lambda)^{-1}G$  (see Lemma 3.1 and Lemma 3.7, respectively). Furthermore, we use these bounds to obtain generalized Lieb-Thirring inequalities on  $\sigma_d(\mathcal{H})$ . In the self-adjoint case, the inequalities obtained may have important applications in the mathematical theory of the stability of the matter in presence of magnetic field, as in classical Lieb-Thirring inequalities. In the non self-adjoint case, we are not aware of models of mathematical physics requiring the application of our results.

Most of known results on  $\sigma_d(\mathcal{H})$  deal with self-adjoint perturbations  $V$  and investigate the asymptotic behavior of  $\sigma_d(\mathcal{H})$  near the boundary points of its essential spectrum. This behavior has been extensively studied in case where  $V$  admits power-like or slower decay at infinity [56, chap. 11-12], [87], [94], [96], [121], [124]. In [95] this behavior is studied for potentials  $V$  decaying at infinity exponentially fast or having a compact support. For Landau Hamiltonians in exterior domains see [60], [83] and [88].

We prove our main results in the  $2d$ -dimensional case (*i.e.* Theorem 3.1 and Theorem 3.2) reasoning similarly to [45]; in particular, we use a recent result by Hansmann [47] and a technical distortion lemma (see Lemma 3.2). To prove our main result in the  $(2d+1)$ -dimensional case (*i.e.* Theorem 3.4), we first construct a holomorphic function

whose zeros coincide with the discrete eigenvalues of the operator  $S$ . Moreover, we use a result by Borichev, Golinskii and Kupin [15] and complex analysis methods to get information on these zeros. Similar techniques are used in [26] and [27] for non-magnetic Schrödinger operators with essential spectrum coinciding with  $[0, +\infty)$ , and Jacobi matrices  $J$  with  $\sigma_{\text{ess}}(J) = [-2, 2]$ . In both situations, the essential spectrum has a finite number of thresholds (0 for the first and  $-2, 2$  for the second). Since in our case  $\sigma_{\text{ess}}(S) = [b_0 d, +\infty)$  with an infinite set of thresholds  $\Lambda_j$ , we are led to introduce appropriate modifications to the above techniques to prove our results. More precisely, we will obtain two types of estimates. First, we bound the sums depending on parts of  $\sigma_d(S)$  concentrated around a Landau level (see Proposition 3.1) using the Schwarz-Christoffel formula. Second, we get global estimates summing up the previous bounds with appropriate weights. This is to compare to results of [26] and [27], where global estimates were obtained directly by mapping conformally  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [0, +\infty)$  and  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$  onto the unit disk respectively (see also [15]).

We shall progress as follows. In section 3.2 we formulate our main results and we discuss some of their immediate consequences on the discrete spectrum of the perturbed operators  $S_{\perp}$  and  $S$  defined by (3.5). Section 3.3 is devoted to the  $2d$ -dimensional Schrödinger and Pauli operators, and we prove corresponding results respectively. In particular we prove that the results obtained belong to a general class of non self-adjoint operators  $H := H_0 + V$ , where  $H_0$  is a self-adjoint operator on a Hilbert space such that its spectrum has the form (3.26). Sections 3.4, 3.5 and 3.6 are devoted to the  $(2d + 1)$ -dimensional Schrödinger and Pauli operators. In section 3.4, we establish estimates on appropriate sandwiched resolvents. Section 3.5 contains auxiliary material as the construction of a holomorphic function whose zeros coincide with the discrete eigenvalues of the operator  $S$  in  $\mathbb{C} \setminus [b_0 d, +\infty)$ , and the presentation of appropriate tools of complex analysis. In section 3.6, we prove a local bound on the discrete eigenvalues of the operator  $S$  (see Proposition 3.1) and derive the proof of Theorem 3.4 from it.

## 3.2 MAIN RESULTS

In this section and elsewhere in this chapter, for any  $r \in \mathbb{R}$  we denote by  $r_+ := \max(r, 0)$  and by  $[r]$  its integer part. Otherwise, each  $\lambda \in \sigma_d(\mathcal{H})$  is considered accordingly to its algebraic multiplicity, where  $\mathcal{H}$  is the operator  $S$  or  $S_{\perp}$  defined by (3.5).

### 3.2.1 On the $2d$ -dimensional case, $d \geq 1$

Theorems below are proved in section 3.3 and concern the perturbed  $2d$ -dimensional Schrödinger operator  $S_{\perp}$  defined by (3.5). We obtain generalized Lieb-Thirring inequalities on the discrete spectrum of this operator.

**Theorem 3.1.** *Let  $S_{\perp} = S_{0,\perp} + V$  be the Schrödinger operator defined by (3.5) with  $V$  satisfying assumptions (3.6) and (3.7). Assume that  $F \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$ ,  $d \geq 1$  with  $p \geq 2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$ . Then the following holds*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(S_{\perp})} \frac{\text{dist}(\lambda, E)^p}{(1 + |\lambda|)^{2p}} \leq C_0 \|F\|_{L^p}^p, \quad (3.17)$$

where  $E$  is the set of Landau levels defined by (3.4), and  $C_0 = C(p, \mu_0, b, d)$  is a constant depending on  $p, \mu_0 := \mu_1 - 1, b$  and  $d$ .

Since for any  $\tau > 0$  with  $|\lambda| \geq \tau$  we have

$$\frac{1}{1+|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1+|\lambda|^{-1}} \geq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1+\tau^{-1}}, \quad (3.18)$$

then we get the following corollary.

**Corollary 3.1.** *Under the assumptions and the notations of Theorem 3.1, we have the following bound for any  $\tau > 0$*

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}_\perp) \\ |\lambda| \geq \tau}} \frac{\text{dist}(\lambda, E)^p}{|\lambda|^{2p}} \leq C_0 \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^{2p} \|F\|_{L^p}^p. \quad (3.19)$$

If the electric potential  $V$  is bounded, then assumption (3.6) is naturally satisfied with  $\mu_1 = -\|V\|_\infty$ . So in the spirit of Theorem 3.1, we have the following result.

**Theorem 3.2.** *Let  $\mathbb{S}_\perp = \mathbb{S}_{0,\perp} + V$  be the Schrödinger operator defined by (3.5) with  $V$  bounded and satisfying (3.7). Assume that  $F \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$  with  $p \geq 2\left[\frac{d}{2}\right] + 2$ . Then the following holds*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}_\perp)} \frac{\text{dist}(\lambda, E)^p}{(1+|\lambda|)^{2p}} \leq C_1 \|F\|_{L^p}^p (1 + \|V\|_\infty)^{2p}, \quad (3.20)$$

where  $E$  is the set of Landau levels defined by (3.4), and  $C_1 = C(p, b, d)$  is a constant depending on  $p, b$  and  $d$ .

Since for any  $\tau > 0$  with  $|\lambda| \geq \tau$  the lower bound (3.18) holds, then we have the following corollary.

**Corollary 3.2.** *Under the assumptions and the notations of Theorem 3.2, the following bound holds for any  $\tau > 0$*

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}_\perp) \\ |\lambda| \geq \tau}} \frac{\text{dist}(\lambda, E)^p}{|\lambda|^{2p}} \leq C_1 \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^{2p} \|F\|_{L^p}^p (1 + \|V\|_\infty)^{2p}. \quad (3.21)$$

Theorem 3.1 and Theorem 3.2 have *a priori* immediate corollaries on sequences  $(\lambda_k) \in \sigma_d(\mathbb{S}_\perp)$  that converge to some  $\lambda^* \in \sigma_{\text{ess}}(\mathbb{S}_\perp) = E$ . Indeed, estimates (3.17) and (3.20) imply that

$$\sum_k \text{dist}(\lambda_k, E)^p < \infty. \quad (3.22)$$

This means *a priori* that the accumulation of isolated eigenvalues of the operator  $\mathbb{S}_\perp$  near the Landau levels  $\Lambda_j$  is monotone with  $p$ . So the eigenvalues are less and less densely distributed in a vicinity of the Landau levels  $\Lambda_j$  with growing  $p$ .

**Remark 3.1.** *Theorem 3.1 and Theorem 3.2 remain valid if we replace the Schrödinger operator  $\mathbb{S}_{0,\perp}$  defined by (3.2) by the magnetic Pauli operator on  $L^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C}^2)$*

$$\mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} \mathbb{S}_{0,\perp} - b_0 d & 0 \\ 0 & \mathbb{S}_{0,\perp} + b_0 d \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_2 \end{pmatrix}, \quad d \geq 1, \quad (3.23)$$

perturbed by non self-adjoint matrix-valued electric potentials

$$V(x_\perp) := \{V_{\ell k}(x_\perp)\}_{1 \leq \ell, k \leq 2}$$

satisfying assumption (3.6) and such that the coefficients  $V_{\ell k}$  satisfy assumption (3.7). The Landau levels of the Pauli operator  $\mathcal{P}_0$  consists to the  $2b_0dj$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . A proof of this remark is given in section 3.3.

Note that if the perturbation  $V$  satisfies (3.12), the finiteness of the sum in (3.22) holds for  $p > \max(2d/m_\perp, 2)$ ,  $m_\perp > 0$ . However, it is convenient to mention that in the two-dimensional case *i.e.*  $d = 1$ , if  $V \geq 0$  is self-adjoint and satisfies (3.12) with  $m_\perp > 1$ , the condition  $p > \max(2/m_\perp, 1)$  is optimal for the finiteness of the sum in (3.22). This is a direct consequence of [89, Theorem 2.6], assuming some supplementary regularity assumptions on  $V$ . Namely, as that of Lemma 4.2 in the Appendix. Indeed in this situation, if  $\lambda' \in (\Lambda_j, \Lambda_{j+1})$ ,  $j \geq 0$  and  $(\lambda_k)$  an infinite sequence of discrete eigenvalues of  $S_\perp$  accumulating to the Landau level  $\Lambda_j$  from the right, then

$$\sum_k \text{dist}(\lambda_k, \Lambda_j)^p = \int_0^{\lambda' - \Lambda_j} p\lambda^{p-1} N(\Lambda_j + \lambda, \lambda') d\lambda < \infty \quad (3.24)$$

if and only if  $pm_\perp > 2$ . The quantity  $N(\Lambda_j + \lambda, \lambda')$  is the number of eigenvalues of  $S_\perp$  in  $(\Lambda_j + \lambda, \lambda')$  repeated according to their multiplicity. Analogous result holds if we consider the eigenvalues of  $S_\perp = S_{0,\perp} - V$  accumulating to  $\Lambda_j$  from the left. Namely, (3.24) remains valid if we replace  $N(\Lambda_j + \lambda, \lambda')$  by  $N(\lambda'', \Lambda_j - \lambda)$  with some  $\lambda'' \in (\Lambda_{j-1}, \Lambda_j)$  if  $j > 0$ , or by  $N(\Lambda_j - \lambda)$  if  $j = 0$ . Here  $N(\Lambda_j - \lambda)$  is the number of eigenvalues of  $S_\perp$  less than  $\Lambda_0 - \lambda$  repeated according to their multiplicity.

Also in the two-dimensional case and self-adjoint perturbations  $V \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  satisfying (3.11) with  $m_\perp > 1$ , we have the asymptotic property

$$\sum_k \text{dist}(\lambda_k, \Lambda_j)^p = o(j^{-(p-1)/2}), \quad j \rightarrow \infty, \quad (3.25)$$

for any  $p \geq 1$  such that  $p(m_\perp - 1) > 1$ . This is a direct consequence of [87, Lemma 1.5 and Theorem 1.6].

### 3.2.2 An abstract result including the $2d$ -dimensional case

In more general context, Theorem 3.1 and Theorem 3.2 belong to a general class of non self-adjoint operators  $H := H_0 + V$ , where  $H_0$  is a self-adjoint operator on a Hilbert space such that  $\sigma_{\text{ess}}(H_0) = \sigma(H_0) = E$  is an infinite set of the form

$$E := \{\Lambda_j, j \in \mathbb{N}\}, \quad \Lambda_0 \geq 0, \quad \Lambda_{j+1} > \Lambda_j, \quad |\Lambda_{j+1} - \Lambda_j| \leq \delta = \text{constante} \quad \forall j. \quad (3.26)$$

Indeed, we have the following theorem.

**Theorem 3.3.** *Let  $H_0$  be a self-adjoint operator on a Hilbert space such that  $\sigma(H_0) = E$  with  $E$  as in (3.26),  $H := H_0 + V$  where  $V$  is a non self-adjoint perturbation. Assume that the numerical range  $N(H)$  of the operator  $H$  satisfies*

$$\overline{N(H)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq \mu_1\}, \quad \mu_1 \leq 0, \quad (3.27)$$

and moreover that for some  $p > 0$ , we have the bound

$$\|V(H_0 - \mu_0)^{-1}\|_p^p \leq K_0, \quad K_0 \geq 0, \quad (3.28)$$

where  $\mu_0 := \mu_1 - 1$ . Then the following holds

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{\text{dist}(\lambda, E)^p}{(1 + |\lambda|)^{2p}} \leq C_2 K_0, \quad (3.29)$$

where  $E := \{\Lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $C_2 = C(p, \mu_0, \Lambda_0)$  is a constant depending on  $p$ ,  $\mu_0$  and  $\Lambda_0$ .

The proof of Theorem 3.3 is similar to that of Theorem 3.1 with respect to the operators  $H_0$  and the operator  $H$ .

### 3.2.3 On the $(2d + 1)$ -dimensional case, $d \geq 1$

We obtain generalized Lieb-Thirring inequality on the discrete spectrum of the perturbed  $(2d + 1)$ -dimensional Schrödinger operator  $S$  defined by (3.5). The following theorem is proved in section 3.6.

**Theorem 3.4.** *Let  $S = S_0 + V$  be the perturbed Schrödinger operator defined by (3.5) with  $V$  satisfying assumption (3.13). Assume that  $F \in L^p(\mathbb{R}^{2d+1})$  with  $p \geq 2[\frac{d}{2}] + 2$  and  $G \in (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ . Define the constant*

$$K := \|F\|_{L^p}^p (\|G\|_{L^2} + \|G\|_{L^\infty})^p (1 + \|V\|_\infty)^{d + \frac{p}{2} + \frac{3}{2} + \varepsilon}, \quad (3.30)$$

for  $0 < \varepsilon < 1$ . Then we have

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(S)} \frac{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2} + 1 + \varepsilon} \text{dist}(\lambda, E)^{(\frac{p}{4} - 1 + \varepsilon)_+}}{(1 + |\lambda|)^\gamma} \leq C_3 K, \quad (3.31)$$

where  $E$  is the set of Landau levels defined by (3.4),  $\gamma > d + \frac{3}{2}$ , and  $C_3 = C(p, b, d, \varepsilon)$  is a constant depending on  $p$ ,  $b$ ,  $d$  and  $\varepsilon$ .

Since for any  $\tau > 0$  with  $|\lambda| \geq \tau$  estimate (3.27) holds, then we get the following corollary.

**Corollary 3.3.** *Under the assumptions and the notations of Theorem 3.4, the following bound holds for any  $\tau > 0$*

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_d(S) \\ |\lambda| \geq \tau}} \frac{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2} + 1 + \varepsilon} \text{dist}(\lambda, E)^{(\frac{p}{4} - 1 + \varepsilon)_+}}{|\lambda|^\gamma} \leq C_3 \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^\gamma K. \quad (3.32)$$

Theorem 3.4 has *a priori* immediate corollaries on sequences  $(\lambda_k) \in \sigma_d(S)$  that converge to some  $\lambda^* \in \sigma_{\text{ess}}(S) = [\Lambda_0, +\infty)$ . Without loss of generality, we can consider a subsequence and assume that either (i) or (ii) below holds,

- (i)  $\lambda^* \in [\Lambda_0, +\infty) \setminus E$ .
- (ii)  $\lambda^* \in E$ .

In situation (i), the sequence  $(\text{dist}(\lambda_k, E))_k$  is positive and does not converge to 0. Then estimate (3.31) implies that

$$\sum_k |\Im(\lambda_k)|^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} < \infty. \quad (3.33)$$

In situation (ii), let us consider for example the  $\lambda_k$  tending to a Landau level non-tangentially (i.e.  $|\Re(\lambda_k) - \lambda^*| \leq C |\Im(\lambda_k)|$  with some  $C > 0$ ) and such that  $\text{dist}(\lambda_k, E)$  is small enough. Then we can claim that (3.31) implies the estimate

$$\sum_k \text{dist}(\lambda_k, E)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon+(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} < \infty. \quad (3.34)$$

So estimates (3.33) and (3.34) allows us to claim that *a priori* the eigenvalues are getting less densely distributed near Landau levels than elsewhere in the essential spectrum of the operator  $\mathbb{S}$ .

**Remark 3.2.** *Theorem 3.4 remains valid if we replace the Schrödinger operator  $\mathbb{S}_0$  defined by (3.3) by the magnetic Pauli operator on  $L^2(\mathbb{R}^{2d+1}, \mathbb{C}^2)$*

$$\mathbb{P}_0 := \begin{pmatrix} \mathbb{S}_0 - b_0 d & 0 \\ 0 & \mathbb{S}_0 + b_0 d \end{pmatrix}, \quad d \geq 1, =: \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

*perturbed by non self-adjoint matrix-valued electric potentials*

$$V(\mathbf{x}) := \{V_{\ell k}(\mathbf{x})\}_{1 \leq \ell, k \leq 2}$$

*such that the coefficients  $V_{\ell k}$  satisfy assumption (3.13). The spectrum of the the Pauli operator  $\mathbb{P}_0$  coincide with  $[0, +\infty)$  and has an infinite set of thresholds  $2b_0 dj$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , the Landau levels. A proof of this remark is given in section 3.6.*

Let us give some remarks about the three-dimensional case on self-adjoint perturbations  $V$  satisfying the condition

$$V \leq 0, \quad C^{-1} \langle \mathbf{x} \rangle^{-\alpha} \leq |V(\mathbf{x})| \leq C \langle \mathbf{x} \rangle^{-\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (3.36)$$

with some constant  $C > 1$ . Let  $(\lambda_k)$  be a sequence of eigenvalues of  $\mathbb{S}$  accumulating to  $\Lambda_0$  from the left. Suppose that it describes all eigenvalues  $\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap (\Lambda_0 - r, \Lambda_0)$  with some  $r > 0$ . If  $V$  satisfies supplementary regularity assumptions as that of Lemma 4.2 in the Appendix, then we have as direct consequence of [124, Theorem 1]

$$\sum_k \text{dist}(\lambda_k, \Lambda_0)^p = \int_0^r p \lambda^{p-1} N(\Lambda_0 - \lambda) d\lambda < \infty \quad (3.37)$$

for  $p > 3/\alpha - 1/2$  if  $\alpha < 2$ , and  $p(\alpha - 1) > 1$  if  $\alpha > 2$ . Here  $N(\Lambda_0 - \lambda)$  is the number of eigenvalues of  $\mathbb{S}$  less than  $\Lambda_0 - \lambda$  repeated according to their multiplicity. Hence in (3.34), conditions on  $p$  are not optimal at least for self-adjoint perturbations  $V$  of definite sign as above. Namely, it can be checked that if the potential  $V$  satisfies (3.36) with  $\alpha > 1/2$  (this is to compare with (3.16)), then  $p/2 + 1 + \varepsilon > 3/\alpha - 1/2$  if  $\alpha < 2$ , and  $p/2 + 1 + \varepsilon > 1/(\alpha - 1)$  if  $\alpha > 2$ .

### 3.3 ON THE DIMENSION $2d$ , $d \geq 1$

Consider the Schrödinger operator  $S_{0,\perp}$  defined by (3.2). In this section, we investigate the discrete spectrum  $\sigma_d(S_\perp)$  of the perturbed operator  $S_\perp$  defined by (3.5), and we assume that the electric potential  $V$  satisfies assumptions (3.6) and (3.7). The case of the  $2d$ -Pauli operator defined by (3.23) is also treated.

#### 3.3.1 Estimate of the weighted resolvent of the Schrödinger operator $S_{0,\perp}$

Recall that the spectrum  $\sigma(S_{0,\perp})$  of the operator  $S_{0,\perp}$  consists of the increasing sequence of Landau levels  $\Lambda_j$  defined by (3.4),  $j \in \mathbb{N}$ . So for any  $\lambda \in \rho(S_{0,\perp})$ , the resolvent set of  $S_{0,\perp}$ , we have

$$(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} (\Lambda_j - \lambda)^{-1} p_j, \quad (3.38)$$

where  $p_j$  is the orthogonal projection onto  $\ker(S_{0,\perp} - \Lambda_j)$ . We have the following lemma.

**Lemma 3.1.** *Let  $E$  be the set of Landau levels defined by (3.4) and consider  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$ . Assume that  $F \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$ ,  $d \geq 1$  and  $p \geq 2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$ . Then the following bound holds*

$$\left\| F(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} \right\|_p^p \leq \frac{C(1 + |\lambda|)^d \|F\|_{L^p}^p}{\text{dist}(\lambda, E)^p}, \quad (3.39)$$

where  $C = C(p, b, d)$  is a constant depending on  $p$ ,  $b$  and  $d$ .

*Proof.* First, we prove that (3.68) holds if  $p$  is even. We prove general case using interpolation method. Constants are generic, i.e. changing from a relation to another. Let  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$ .

(i) Assume that  $p$  is even. From the identity

$$(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} - (S_{0,\perp} + 1 + |\lambda|)^{-1} = (S_{0,\perp} + 1 + |\lambda|)^{-1} (1 + |\lambda| + \lambda) (S_{0,\perp} - \lambda)^{-1},$$

we deduce that

$$(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} = (S_{0,\perp} + 1 + |\lambda|)^{-1} \left( (1 + |\lambda| + \lambda) (S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} + I \right).$$

Then we have

$$\begin{aligned} \left\| F(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} \right\|_p^p &\leq \left\| F(S_{0,\perp} + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p \\ &\quad \times \left\| \left( (1 + |\lambda| + \lambda) (S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} + I \right) \right\|_p^p. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Since  $p$  is even, we can apply the diamagnetic inequality for the  $S_p$  class operators [8, Theorem 2.3] and [112, Theorem 2.13] to obtain

$$\left\| F(S_{0,\perp} + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p \leq \left\| F(-\Delta + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p.$$

By [112, Theorem 4.1], we have

$$\left\| F(-\Delta + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p \leq C(p) \|F\|_{L^p}^p \left\| (|\cdot|^2 + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_{L^p}^p.$$

Since

$$\left\| \left( |\cdot|^2 + 1 + |\lambda| \right)^{-1} \right\|_{L^p}^p = C \int_0^\infty \frac{r^{2d-1} dr}{(r^2 + 1 + |\lambda|)^p} = C(p) \frac{(1 + |\lambda|)^d}{(1 + |\lambda|)^p},$$

then we obtain

$$\left\| F(S_{0,\perp} + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p \leq C(p) \frac{(1 + |\lambda|)^d}{(1 + |\lambda|)^p} \|F\|_{L^p}^p. \quad (3.41)$$

Otherwise, we have

$$\left\| \left( (1 + |\lambda| + \lambda)(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} + I \right) \right\|^p \leq \left( C(1 + |\lambda|) \left\| (S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} \right\| + 1 \right)^p. \quad (3.42)$$

Since (3.38) implies that

$$\left\| (S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, E)}, \quad (3.43)$$

then this together with (3.42) give

$$\begin{aligned} \left\| \left( (1 + |\lambda| + \lambda)(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} + I \right) \right\|^p &\leq \left( \frac{C(1 + |\lambda|)}{\text{dist}(\lambda, E)} + 1 \right)^p \\ &\leq \frac{C(p, b, d)(1 + |\lambda|)^p}{\text{dist}(\lambda, E)^p}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

So (3.68) follows from (3.40), (3.41) and (3.44).

(ii) Now we prove that (3.68) holds for any  $p \geq 2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$  using interpolation method. Clearly if  $p$  is as above, there exists even integers  $p_0 < p_1$  such that  $p \in (p_0, p_1)$  with  $p_0 > d$ . Now choose  $s \in (0, 1)$  such that  $\frac{1}{p} = \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1}$ . For  $i = 0, 1$ , define the operator

$$L^{p_i}(\mathbb{R}^{2d}) \ni F \xrightarrow{T} F(S_{0,\perp} - \lambda)^{-1} \in S_{p_i}.$$

By (i) proved above for even integers, estimate (3.68) holds for any  $F \in L^{p_i}(\mathbb{R}^{2d})$ . So let  $C_i = C(p_i, b, d)$  be the constant in (3.68) and define

$$C(\lambda, p_i, d) := \frac{C_i^{\frac{1}{p_i}} \left( (1 + |\lambda|)^d \right)^{\frac{1}{p_i}}}{\text{dist}(\lambda, E)}.$$

Thus by (3.68) for (i) proved above, we have  $\|T\| \leq C(\lambda, p_i, d)$  for any  $i = 0, 1$ . Using the Riesz-Thorin Theorem (see e.g. [38, subsection 5 of Chapter 6], [99], [128], [74, Chapter 2]), we can interpolate between  $p_0$  and  $p_1$  to get the extension  $T : L^p(\mathbb{R}^{2d}) \rightarrow S_p$  with

$$\begin{aligned} \|T\| &\leq C(\lambda, p_0, d)^{1-s} C(\lambda, p_1, d)^s \\ &\leq \frac{C(p, b, d) \left( (1 + |\lambda|)^d \right)^{\frac{1}{p}}}{\text{dist}(\lambda, E)}. \end{aligned}$$

In particular for any  $F \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$ , we have

$$\|T(F)\|_p \leq \frac{C(p, b, d) \left( (1 + |\lambda|)^d \right)^{\frac{1}{p}}}{\text{dist}(\lambda, E)} \|F\|_{L^p}, \quad (3.45)$$

which implies estimate (3.68). This concludes the proof of the lemma.  $\blacksquare$



### 3.3.2 Proofs of Theorem 3.1 and Theorem 3.2

#### 3.3.2.1 Proof of Theorem 3.1

Constants are generic (changing from a relation to another). The first crucial point of the proof is the following result by Hansmann [47, Theorem 1]. Let  $A_0 = A_0^*$  be a bounded self-adjoint operator on a Hilbert space,  $A$  a bounded operator such that  $A - A_0 \in \mathcal{S}_p$ ,  $p > 1$ . Then

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(A)} \text{dist}(\lambda, \sigma(A_0))^p \leq C \|A - A_0\|_p^p, \quad (3.46)$$

where  $C$  is an explicit constant which depends only on  $p$ . Note that we cannot apply (3.46) to the unbounded operators  $S_{0,\perp}$  and  $S_\perp$ . To fix this, let us consider the bounded resolvents

$$A_0(\mu_0) := (S_{0,\perp} - \mu_0)^{-1} \quad \text{and} \quad A(\mu_0) := (S_\perp - \mu_0)^{-1}. \quad (3.47)$$

where  $\mu_0$  is the constant defined by (3.10). Since assumption (3.7) on  $V$  implies that there exists a bounded operator  $\mathcal{V}$  such that for any  $x_\perp \in \mathbb{R}^{2d}$ ,  $V(x_\perp) = \mathcal{V}F(x_\perp)$ , then using the resolvent equation

$$(S_\perp - \mu_0)^{-1} - (S_{0,\perp} - \mu_0)^{-1} = -(S_\perp - \mu_0)^{-1} \mathcal{V} (S_{0,\perp} - \mu_0)^{-1},$$

we obtain

$$\|A(\mu_0) - A_0(\mu_0)\|_p^p \leq C \left\| (S_\perp - \mu_0)^{-1} \right\|_p^p \left\| F(S_{0,\perp} - \mu_0)^{-1} \right\|_p^p, \quad (3.48)$$

where  $C > 0$  is a constant. The choice of  $\mu_0$  and (3.8) imply that  $\text{dist}(\mu_0, \overline{N(S_\perp)}) \geq 1$ . So by [25, Lemma 9.3.14], we have

$$\left\| (S_\perp - \mu_0)^{-1} \right\|_p \leq \frac{1}{\text{dist}(\mu_0, \overline{N(h_\perp)})} \leq 1. \quad (3.49)$$

Lemma 3.1 and the choice of  $\mu_0$  imply that

$$\left\| F(S_{0,\perp} - \mu_0)^{-1} \right\|_p^p \leq C \|F\|_{L^p}^p. \quad (3.50)$$

Combining (3.48), (3.49) and (3.50), we obtain finally

$$\|A(\mu_0) - A_0(\mu_0)\|_p^p \leq C \|F\|_{L^p}^p. \quad (3.51)$$

Thus by applying (3.46) to the resolvents  $A(\mu_0)$  and  $A_0(\mu_0)$ , we see that

$$\sum_{z \in \sigma_d(A(\mu_0))} \text{dist}(z, \sigma(A_0(\mu_0)))^p \leq C \|F\|_{L^p}^p, \quad (3.52)$$

where  $C = C(p, b, d)$ . Putting  $z = \varphi_{\mu_0}(\lambda) = (\lambda - \mu_0)^{-1}$ , then the Spectral Mapping Theorem implies that

$$z \in \sigma_d(A(\mu_0)) \quad (z \in \sigma(A_0(\mu_0))) \quad \iff \quad \lambda \in \sigma_d(S_\perp) \quad (\lambda \in \sigma(S_{0,\perp})). \quad (3.53)$$

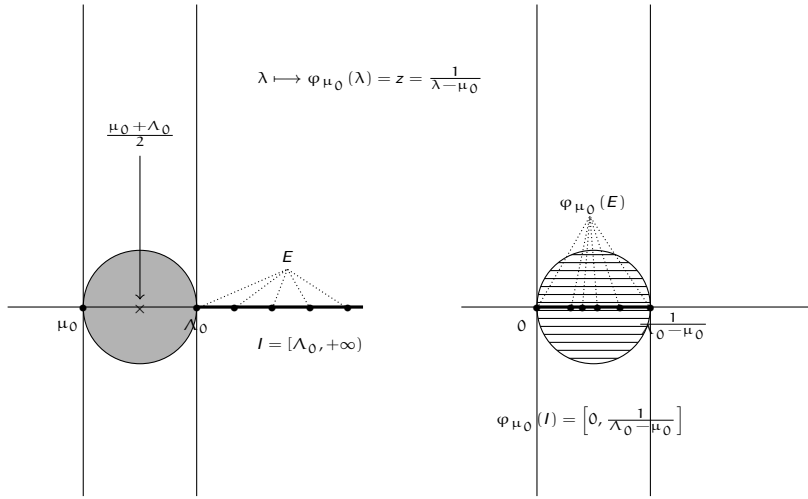
Hence we come to a distortion lemma for the conformal map  $z = \varphi_{\mu_0}(\lambda) = (\lambda - \mu_0)^{-1}$ , which is the second important point of the proof of the theorem.

**Lemma 3.2.** *Let  $\mu_0$  be the constant defined by (3.10) and  $E$  be the set of Landau levels defined by (3.4). Then the following bound holds*

$$\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(E)) \geq \frac{C \text{dist}(\lambda, E)}{(1 + |\lambda|)^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.54)$$

where  $C = C(\mu_0, b, d)$  is a constant depending on  $\mu_0$ ,  $b$  and  $d$ .

The proof of Lemma 3.2 follows directly from Lemma 3.3 and Lemma 3.4 below. For more transparency in the sequel, let us give the figure which represents the transformation of the complex plane by the conformal map  $\varphi_{\mu_0}$ .



**Figure 5:** Transformation of the complex plane by the conformal map  $z = \varphi_{\mu_0}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \mu_0}$ .

It can be easily checked that

$$\varphi_{\mu_0}(\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) < \mu_0\}) = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}, \quad (3.55)$$

$$\varphi_{\mu_0}(\text{the gray disk}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq \frac{1}{\Lambda_0 - \mu_0} \right\}, \quad (3.56)$$

$$\varphi_{\mu_0}(\{\lambda \in \mathbb{C} : \mu_0 \leq \Re(\lambda) \leq \Lambda_0\}) = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\} \cap \text{outside the disk hatched}, \quad (3.57)$$

$$\varphi_{\mu_0}(\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq \Lambda_0\}) = \text{the disk hatched}. \quad (3.58)$$

**Lemma 3.3.** *Let  $I = [\Lambda_0, +\infty)$ . The following bound holds for any  $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I)) \geq \frac{C \text{dist}(\lambda, I)}{(1 + |\lambda|)^2}, \quad (3.59)$$

where  $C = C(\mu_0, b, d)$  is a constant depending on  $\mu_0$ ,  $b$  and  $d$ .

**Proof.** It suffices to prove that (3.59) holds for  $\lambda$  in each of the four sectors defined by (3.55)-(3.58). In what follows below, the relation  $u \simeq v$  means that there exist constants  $c_1, c_2$  such that

$$0 < c_1 \leq \frac{u}{v} \leq c_2 < \infty. \quad (3.60)$$

• For  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) < \mu_0\}$ , we have  $\text{dist}(\lambda, I) = |\lambda - \Lambda_0|$  and by (3.55) we have  $\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I)) = |\varphi_{\mu_0}(\lambda)| = \frac{1}{|\lambda - \mu_0|}$ . Consequently,

$$\frac{\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I))}{\text{dist}(\lambda, I)} = \frac{1}{|\lambda - \mu_0||\lambda - \Lambda_0|}.$$

Thus (3.59) holds since  $|\lambda - \Lambda_0| \leq C(b, d)(1 + |\lambda|)$  and  $|\lambda - \mu_0| \leq C(\mu_0)(1 + |\lambda|)$ .

• For  $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{\mu_0 + \Lambda_0}{2} \right| \leq \frac{\Lambda_0 - \mu_0}{2} \right\}$ , we have  $\text{dist}(\lambda, I) = |\lambda - \Lambda_0|$  and by (3.56)

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I)) &= \left| \varphi_{\mu_0}(\lambda) - \frac{1}{\Lambda_0 - \mu_0} \right| \\ &= \frac{\text{dist}(\lambda, I)}{|\lambda - \mu_0||\Lambda_0 - \mu_0|}. \end{aligned}$$

Thus (3.59) holds since as above  $|\lambda - \mu_0| \leq C(\mu_0)(1 + |\lambda|)$  and  $|\Lambda_0 - \mu_0| = C(\mu_0, b, d)$ .

• For  $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \mu_0 \leq \Re(\lambda) \leq \Lambda_0 \right\} \setminus \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{\mu_0 + \Lambda_0}{2} \right| \leq \frac{\Lambda_0 - \mu_0}{2} \right\}$ , we have  $\text{dist}(\lambda, I) = |\lambda - \Lambda_0|$  and by (3.56)-(3.57)

$$\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I)) = |\mathfrak{J}(\varphi_{\mu_0}(\lambda))| = \frac{|\mathfrak{J}(\lambda)|}{|\lambda - \mu_0|^2}.$$

\* For  $\lambda$  close to  $\mu_0$  in this domain,  $\text{dist}(\lambda, I) \simeq \text{constant}$  and  $|\mathfrak{J}(\lambda)| \simeq |\lambda - \mu_0|$  so that  $\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I)) \simeq \frac{1}{|\lambda - \mu_0|}$ . Thus (3.59) holds as above.

\* For  $\lambda$  close to  $\Lambda_0$ , we have  $\text{dist}(\lambda, I) = |\lambda - \Lambda_0|$ ,  $|\mathfrak{J}(\lambda)| \simeq |\lambda - \Lambda_0|$  and  $|\lambda - \mu_0|^2 \simeq \text{constant}$  so that  $\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I)) \simeq |\lambda - \Lambda_0|$ . Thus (3.59) holds.

\* When  $|\lambda| \rightarrow +\infty$ ,  $|\mathfrak{J}(\lambda)| \simeq |\lambda - \Lambda_0|$  so that  $\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I)) \simeq \frac{|\lambda - \Lambda_0|}{|\lambda - \mu_0|^2}$ . Thus (3.59) holds as above.

• For  $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq \Lambda_0\}$ , we have  $\text{dist}(\lambda, I) = |\mathfrak{J}(\lambda)|$  and by (3.58)

$$\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I)) = |\mathfrak{J}(\varphi_{\mu_0}(\lambda))| = \frac{|\mathfrak{J}(\lambda)|}{|\lambda - \mu_0|^2} = \frac{\text{dist}(\lambda, I)}{|\lambda - \mu_0|^2}.$$

Thus (3.59) holds as above. This concludes the proof of lemma 3.3. ■

Now for further use, let us introduce some notations. For  $\Lambda_j \in E \subset I$ , define the radius  $r_j := \text{dist}(\Lambda_j, E \setminus \{\Lambda_j\})$ ,  $A = \bigcup_j B(\Lambda_j, 2r_j)$  and  $D = \mathbb{C} \setminus A$  (see the figure below). Corresponding notations on the plane of  $z = \varphi_{\mu_0}(\lambda)$  are  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{D}$ . Namely, for  $\omega \in \varphi_{\mu_0}(E) = \left\{ \frac{1}{\Lambda_j - \mu_0} \right\}_j$ , we define the radius  $r_\omega := \text{dist}(\omega, \varphi_{\mu_0}(E) \setminus \{\omega\})$ ,  $\mathcal{A} = \bigcup_\omega B(\omega, 2r_\omega)$  and  $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \mathcal{A}$ .

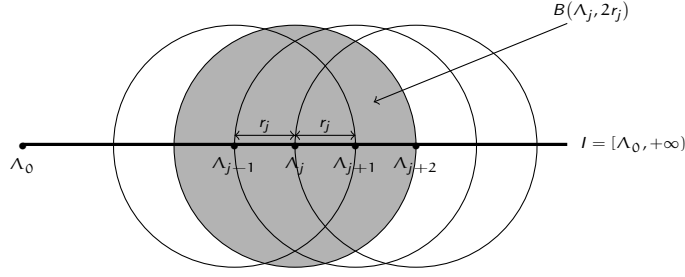


Figure 6: Sets  $I = [\Lambda_0, +\infty)$  and  $A = \bigcup_j B(\Lambda_j, 2r_j)$ .

Note that by (3.4), we have  $r_j = 2b$ ,  $A = \bigcup_j B(\Lambda_j, 4b)$  and up to constant factor  $\varphi_{\mu_0}(A) = A$ . We have the following lemma.

**Lemma 3.4.** *With the notations above, the following estimates hold.*

(i) For any  $\lambda \in D$  and any  $\varphi_{\mu_0}(\lambda) \in \mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}(\lambda, E)}{2} &\leq \text{dist}(\lambda, I) \leq \text{dist}(\lambda, E). \\ \frac{\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(E))}{2} &\leq \text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu}(I)) \leq \text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu}(E)). \end{aligned} \quad (3.61)$$

(ii) For any  $\lambda \in A$ ,

$$\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(E)) \geq \frac{C \text{dist}(\lambda, E)}{(1 + |\lambda|)^2}, \quad (3.62)$$

where  $C = C(\mu_0)$  is a constant depending on  $\mu_0$ .

*Proof.* (i) We prove only the first estimate in (3.61). The second can be treated similarly. Obviously  $\text{dist}(\lambda, I) \leq \text{dist}(\lambda, E)$ . For  $\lambda \in D$ , let  $\Lambda_j \in E$  such that

$$\text{dist}(\lambda, E) = |\lambda - \Lambda_j| \geq 2r_j \quad \left( \Leftrightarrow \frac{\text{dist}(\lambda, E)}{2} \geq r_j \right). \quad (3.63)$$

Since  $\text{dist}(\lambda, E) \leq \text{dist}(\lambda, I) + r_j$ , i.e.  $\text{dist}(\lambda, E) - r_j \leq \text{dist}(\lambda, I)$ , then (3.63) implies that  $\text{dist}(\lambda, E) - \frac{\text{dist}(\lambda, E)}{2} \leq \text{dist}(\lambda, I)$ . That means

$$\frac{\text{dist}(\lambda, E)}{2} \leq \text{dist}(\lambda, I).$$

(ii) Obviously all points  $\lambda \in A$  are of the form  $|\Im(\lambda)| \leq 4b$  and  $\Lambda_j \leq \Re(\lambda) \leq \Lambda_{j+1}$  for some  $\Lambda_j \in E$  such that  $\text{dist}(\lambda, E) = |\lambda - \Lambda_j|$  (or  $\text{dist}(\lambda, E) = |\lambda - \Lambda_{j+1}|$ ). For  $\text{dist}(\lambda, E) = |\lambda - \Lambda_j|$ , we have

$$\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu}(E)) = \left| \frac{1}{\lambda - \mu_0} - \frac{1}{\Lambda_j - \mu_0} \right| = \frac{\text{dist}(\lambda, E)}{|\lambda - \mu_0| |\Lambda_j - \mu_0|}.$$

Then (3.62) holds since  $|\lambda - \mu_0| \leq C(\mu_0)(1 + |\lambda|)$  and  $|\Lambda_j - \mu_0| \leq 2|\lambda - \mu_0|$  for  $\Re(\lambda) > \Lambda_0$ . This completes the proof.  $\blacksquare$

Now we turn back to the proof of Theorem 3.1. Lemma 3.2 together with (3.52) and (3.53) show that

$$\sum_{z \in \sigma_d(\mathbb{S}_\perp)} \frac{\text{dist}(\lambda, E)^p}{(1 + |\lambda|)^{2p}} \leq C_0 \|F\|_{L^p}^p,$$

where  $C_0 = C(p, \mu_0, b, d)$  is a constant depending on  $p, \mu_0, b$  and  $d$ . This completes the proof of Theorem 3.1.

### 3.3.2.2 Proof of Theorem 3.2

If the perturbation  $V$  is bounded, then assumption (3.6) of Theorem 3.1 is naturally satisfied with  $\mu_1 = -\|V\|_\infty$ , so that we have  $\mu_0 = -\|V\|_\infty - 1$ . Hence in the spirit of the distortion Lemma 3.2, we obtain the following lemma.

**Lemma 3.5.** *Let  $\mu_0 = -\|V\|_\infty - 1$  and  $E$  be the set of Landau levels defined by (3.4). Then the following bound holds*

$$\text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(E)) \geq \frac{C \text{dist}(\lambda, E)}{(1 + \|V\|_\infty)^2 (1 + |\lambda|)^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.64)$$

where  $C = C(b, d)$  is a constant depending on  $b$  and  $d$ .

As in the distortion Lemma 3.2, Lemma 3.5 follows directly from Lemma 3.3 and Lemma 3.4 with the two following appropriate modifications

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(I)) &\geq \frac{C \text{dist}(\lambda, I)}{(1 + \|V\|_\infty)^2 (1 + |\lambda|)^2}, \\ \text{dist}(\varphi_{\mu_0}(\lambda), \varphi_{\mu_0}(E)) &\geq \frac{C \text{dist}(\lambda, E)}{(1 + \|V\|_\infty)^2 (1 + |\lambda|)^2} \end{aligned}$$

respectively in (3.59) and (3.62), when  $\mu_0 = -\|V\|_\infty - 1$ . In both situations  $C = C(b, d)$  is a constant depending on  $b$  and  $d$ .

So Lemma 3.5 together with (3.52) and (3.53) show that

$$\sum_{z \in \sigma_d(\mathbb{S}_\perp)} \frac{\text{dist}(\lambda, E)^p}{(1 + |\lambda|)^{2p}} \leq C_1 \|F\|_{L^p}^p (1 + \|V\|_\infty)^{2p},$$

where  $C_1 = C(p, b, d)$  is a constant depending on  $p, b$  and  $d$ . This completes the proof of Theorem 3.2.

### 3.3.3 Proofs of analogous results for the $2d$ -dimensional Pauli operators

Let  $\mathcal{P}_0$  be the  $2d$ -dimensional Pauli operator on  $L^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C}^2)$  defined by (3.23),  $d \geq 1$ . In this section, we prove that Theorem 3.1 and Theorem 3.2 remain valid for the operator  $\mathcal{P}_0$  perturbed by non self-adjoint matrix-valued electric potentials

$$V(\mathbf{x}_\perp) := \{V_{\ell k}(\mathbf{x}_\perp)\}_{1 \leq \ell, k \leq 2}$$

satisfying assumption (3.6) and such that the coefficients  $V_{\ell k}$  satisfy assumption (3.7).

Recall that the spectrum of the Pauli operator  $\mathcal{P}_0$  is discrete and consists of Landau levels

$$\Lambda_j := 2b_0 dj, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.65)$$

In what follows below, we set  $E := \{\Lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Let  $\mathcal{P}_\ell$ ,  $\ell = 1, 2$ , be the Schrödinger operators defined in (3.23). Obviously for any  $\lambda$  in the resolvent set of the operator  $\mathcal{P}_0$ , we have

$$(\mathcal{P}_0 - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_1 - \lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathcal{P}_2 - \lambda)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Thus if  $p_j$  is the orthogonal projection onto  $\ker(\mathcal{P}_\ell - \Lambda_j)$  for  $\ell = 1, 2$ , we have

$$(\mathcal{P}_1 - \lambda)^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} (\Lambda_j - \lambda)^{-1} p_j \quad \text{and} \quad (\mathcal{P}_2 - \lambda)^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} (\Lambda_j - \lambda)^{-1} p_{j-1} \quad (3.67)$$

As in the proof of Lemma 3.1, it can be proved that for any  $p \geq 2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$ , the  $p$ -Schatten norm of the weighted resolvent  $F(\mathcal{P}_\ell - \lambda)^{-1}$ ,  $\ell = 1, 2$ , satisfies the estimate

$$\left\| F(\mathcal{P}_\ell - \lambda)^{-1} \right\|_p^p \leq \frac{C(1 + |\lambda|)^d \|F\|_{L^p}^p}{\text{dist}(\lambda, E)^p}.$$

So, in the spirit of Lemma 3.1, we obtain the following lemma.

**Lemma 3.6.** *Let  $E$  be the set of Landau levels defined by (3.65) and consider  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$ . Assume that  $F \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$ ,  $d \geq 1$  and  $p \geq 2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$ . Then the following bound holds*

$$\left\| F(\mathcal{P}_0 - \lambda)^{-1} \right\|_p^p \leq \frac{C(1 + |\lambda|)^d \|F\|_{L^p}^p}{\text{dist}(\lambda, E)^p}, \quad (3.68)$$

where  $C = C(p, b, d)$  is a constant depending on  $p$ ,  $b$  and  $d$ .

Now if the coefficients  $V_{\ell k}$  of  $V$  satisfy assumption (3.7), then there exists a matrix-valued bounded operator  $\mathcal{V}$  such that for any  $x_\perp \in \mathbb{R}^{2d}$ ,  $V(x_\perp) = \mathcal{V}F(x_\perp)$ . So we conclude as in the proof of Theorem 3.1 and Theorem 3.2.

## 3.4 ON THE DIMENSION $2d + 1$ , $d \geq 1$

### 3.4.1 Estimate of the sandwiched resolvents of the Schrödinger operators $\mathcal{S}_0$ and $\mathcal{S}$

In order to estimate the resolvents of the operators  $\mathcal{S}_0$  and  $\mathcal{S}$ , let us fix some notations. Denote by

$$\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\} \quad \text{and} \quad \mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < 0\}. \quad (3.69)$$

For a Landau level  $\Lambda_j$  defined by (3.4) and  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty)$ , we have

$$(\mathcal{S}_0 - \lambda)^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j \otimes \left( D_x^2 + \Lambda_j - \lambda \right)^{-1}, \quad (3.70)$$

where  $p_j$  is the orthogonal projection onto  $\ker(\mathcal{S}_{0,\perp} - \Lambda_j)$ . Recall that for  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ , the operator  $\left( D_x^2 - z \right)^{-1}$  admits the integral kernel

$$\frac{ie^{i\sqrt{z}|x-x'|}}{2\sqrt{z}}, \quad (3.71)$$

if the branch of  $\sqrt{z}$  is chosen so that  $\Im(z) > 0$ . In the sequel, we assume that the perturbation  $V$  satisfies assumption (3.13). We have the following lemma.

**Lemma 3.7.** *Let  $n = 2d + 1$ ,  $d \geq 1$  and  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty)$ . Assume that  $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$  with  $p \geq 2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$  and  $G \in (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ . Then there exists a constant  $C = C(p, b, d)$  such that*

$$\left\| F(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} G \right\|_p^p \leq \frac{C(1 + |\lambda|)^{d + \frac{1}{2}} K_1}{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2}} \text{dist}(\lambda, E)^{\frac{p}{4}}}, \quad (3.72)$$

where  $E$  is the set of Landau levels defined by (3.4) and

$$K_1 := \|F\|_{L^p}^p (\|G\|_{L^2} + \|G\|_{L^\infty})^p. \quad (3.73)$$

*Proof.* It suffices to prove the case  $\lambda \in \mathbb{C}^+$ . Constants are generic (changing from a relation to another). As in the proof of Lemma 3.1, first we prove that (3.72) holds if  $p$  is even. We obtain the general case using interpolation method.

(i) Assume that  $p$  is even. Let us first prove that if  $\Re(\lambda) < \Lambda_0$ , then we have

$$\left\| F(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} G \right\|_p^p \leq \frac{C(1 + |\lambda|)^{d + \frac{1}{2}} K_1}{\text{dist}(\lambda, E)^{\frac{3p}{4}}}. \quad (3.74)$$

Using the identity

$$(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} - (\mathbb{S}_0 + 1 + |\lambda|)^{-1} = (\mathbb{S}_0 + 1 + |\lambda|)^{-1} (1 + |\lambda| + \lambda) (\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1},$$

we obtain

$$(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} = (\mathbb{S}_0 + 1 + |\lambda|)^{-1} \left( (1 + |\lambda| + \lambda) (\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} + I \right).$$

Thus

$$\begin{aligned} \left\| F(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} G \right\|_p^p &\leq \left\| F(\mathbb{S}_0 + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p \\ &\quad \times \left\| \left( (1 + |\lambda| + \lambda) (\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} + I \right) G \right\|_p^p \end{aligned} \quad (3.75)$$

Since  $p$  is even, we can apply the diamagnetic inequality for the  $S_p$  class operators [8, Theorem 2.3] and [112, Theorem 2.13]. We obtain

$$\left\| F(\mathbb{S}_0 + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p \leq \left\| F(-\Delta + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p.$$

By [112, Theorem 4.1], we have

$$\left\| F(-\Delta + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p \leq C(p) \|F\|_{L^p}^p \left\| (|\cdot|^2 + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_{L^p}^p.$$

Since

$$\left\| (|\cdot|^2 + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_{L^p}^p = C \int_0^\infty \frac{r^{2d} dr}{(r^2 + 1 + |\lambda|)^p} = C(p) \frac{(1 + |\lambda|)^{d + \frac{1}{2}}}{(1 + |\lambda|)^p},$$

then we obtain

$$\left\| F(\mathbb{S}_0 + 1 + |\lambda|)^{-1} \right\|_p^p \leq C(p) \frac{(1 + |\lambda|)^{d + \frac{1}{2}}}{(1 + |\lambda|)^p} \|F\|_{L^p}^p. \quad (3.76)$$

Otherwise, we have

$$\begin{aligned} & \left\| \left( (1 + |\lambda| + \lambda) (\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} + I \right) G \right\|^p \\ & \leq \left( C(1 + |\lambda|) \left\| (\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} G \right\| + \|G\|_{L^\infty} \right)^p. \end{aligned} \quad (3.77)$$

By (3.70) we have

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} G \right\| &= \underbrace{\left\| \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j \otimes (D_x^2 + \Lambda_j - \lambda)^{-1} G \right\|}_{\text{orthogonal sum}} \\ &\leq C \sup_j \left\| (D_x^2 + \Lambda_j - \lambda)^{-1} G \right\|, \end{aligned} \quad (3.78)$$

and moreover

$$\begin{aligned} \left\| (D_x^2 + \Lambda_j - \lambda)^{-1} G \right\| &\leq \left\| (D_x^2 + \Lambda_j - \lambda)^{-1} G \right\|_2 \\ &= \left\| G (D_x^2 + \Lambda_j - \bar{\lambda})^{-1} \right\|_2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

As above, by [112, Theorem 4.1], we have

$$\left\| G (D_x^2 + \Lambda_j - \bar{\lambda})^{-1} \right\|_2^2 \leq C \|G\|_{L^2}^2 \left\| (|\cdot|^2 + \Lambda_j - \bar{\lambda})^{-1} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Since  $\Re(\lambda) < \Lambda_0$ , then we have for any  $r \in \mathbb{R}$

$$|r^2 + \Lambda_j - \bar{\lambda}|^2 \geq r^4 + |\bar{\lambda} - \Lambda_j|^2.$$

This implies that

$$\left\| (|\cdot|^2 + \Lambda_j - \bar{\lambda})^{-1} \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| (|\cdot|^4 + |\bar{\lambda} - \Lambda_j|^2)^{-1} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{|\bar{\lambda} - \Lambda_j|^{\frac{3}{2}}}.$$

Hence finally we obtain

$$\left\| (\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} G \right\| \leq \frac{C \|G\|_{L^2}}{\text{dist}(\lambda, E)^{\frac{3}{4}}}. \quad (3.80)$$

Estimates (3.77) together with (3.80) imply that

$$\begin{aligned} \left\| \left( (1 + |\lambda| + \lambda) (\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} + I \right) G \right\|^p &\leq \left( \frac{C \|G\|_{L^2} (1 + |\lambda|)}{\text{dist}(\lambda, E)^{\frac{3}{4}}} + \|G\|_{L^\infty} \right)^p \\ &\leq \frac{C(p, b, d) \left( \|G\|_{L^2} + \|G\|_{L^\infty} \right)^p (1 + |\lambda|)^p}{\text{dist}(\lambda, E)^{\frac{3p}{4}}}, \end{aligned} \quad (3.81)$$



Thus (3.74) follows from (3.75), (3.76) and (3.81).

Now let us prove that if  $\operatorname{Re} \lambda \geq \Lambda_0$ , then we have

$$\left\| F(S_0 - \lambda)^{-1} G \right\|_p^p \leq \frac{C(1 + |\lambda|)^{d+\frac{1}{2}} K_1}{|\Im(\lambda)|^{\frac{p}{2}} \operatorname{dist}(\lambda, E)^{\frac{p}{4}}}. \quad (3.82)$$

From (3.79), we compute the Hilbert-Schmidt norm of the operator  $G(D_x^2 + \Lambda_j - \bar{\lambda})^{-1}$  with the help of its integral kernel (3.71). So for  $\Im(\sqrt{\bar{\lambda} - \Lambda_j}) > 0$ , we obtain

$$\left\| G(D_x^2 + \Lambda_j - \bar{\lambda})^{-1} \right\|_2^2 = \frac{C \|G\|_{L^2}^2}{\Im(\sqrt{\bar{\lambda} - \Lambda_j}) |\bar{\lambda} - \Lambda_j|}.$$

Now from

$$\Im(\bar{\lambda}) = \Im(\bar{\lambda} - \Lambda_j) = 2\Im(\sqrt{\bar{\lambda} - \Lambda_j}) \Re(\sqrt{\bar{\lambda} - \Lambda_j}),$$

we deduce that

$$\begin{aligned} \left\| G(D_x^2 + \Lambda_j - \bar{\lambda})^{-1} \right\|_2^2 &= \frac{C \|G\|_{L^2}^2 \Re(\sqrt{\bar{\lambda} - \Lambda_j})}{|\Im(\lambda)| |\bar{\lambda} - \Lambda_j|} \\ &\leq \frac{C \|G\|_{L^2}^2}{|\Im(\lambda)| \operatorname{dist}(\lambda, E)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Combining (3.78), (3.79) and (3.83), we obtain

$$\left\| (S_0 - \lambda)^{-1} G \right\| \leq \frac{C \|G\|_{L^2}}{|\Im(\lambda)|^{\frac{1}{2}} \operatorname{dist}(\lambda, E)^{\frac{1}{4}}}. \quad (3.84)$$

Finally by (3.77) and (3.84),

$$\left\| \left( (1 + |\lambda| + \lambda)(S_0 - \lambda)^{-1} + I \right) G \right\|^p \leq \frac{C(p) \left( \|G\|_{L^2} + \|G\|_{L^\infty} \right)^p (1 + |\lambda|)^p}{|\Im(\lambda)|^{\frac{p}{2}} \operatorname{dist}(\lambda, E)^{\frac{p}{4}}}. \quad (3.85)$$

Now (3.82) follows from (3.75), (3.76) and (3.85). So estimates (3.74) and (3.82) show that (3.72) holds if  $p$  is even.

(ii) We prove that (3.82) holds for any  $p \geq 2\left[\frac{d}{2}\right] + 2$  using interpolation method. Clearly if  $p$  is as above, there exists even integers  $p_0 < p_1$  such that  $p \in (p_0, p_1)$  with  $p_0 > d + 1/2$ . Now choose  $s \in (0, 1)$  such that  $\frac{1}{p} = \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1}$ . For  $i = 0, 1$ , consider the operator

$$L^{p_i}(\mathbb{R}^n) \ni F \xrightarrow{T} F(S_0 - \lambda)^{-1} G \in S_{p_i}.$$

By (i) proved above, estimate (3.72) holds for any  $F \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$ . Let  $C_i = C(p_i, b, d)$  be the constant in (3.72) and define

$$C(\lambda, p_i, d) := \frac{C_i^{\frac{1}{p_i}} \left( (1 + |\lambda|)^{d+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p_i}} \left( \|G\|_{L^2} + \|G\|_{L^\infty} \right)}{\operatorname{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{1}{2}} \operatorname{dist}(\lambda, E)^{\frac{1}{4}}}.$$

Then by (3.72) for (i) proved above, we have  $\|T\| \leq C(\lambda, \rho_i, d)$  for any  $i = 0, 1$ . Using the Riesz-Thorin Theorem (see e.g. [38, subsection 5 of Chapter 6], [99], [128], [74, Chapter 2]), we can interpolate between  $\rho_0$  and  $\rho_1$  to get the extension  $T : L^p(\mathbb{R}^{2d+1}) \rightarrow S_p$  with

$$\begin{aligned} \|T\| &\leq C(\lambda, \rho_0, d)^{1-s} C(\lambda, \rho_1, d)^s \\ &\leq \frac{C(p, b, d) \left( (1 + |\lambda|)^{d+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \|G\|_{L^2} + \|G\|_{L^\infty} \right)}{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{1}{2}} \text{dist}(\lambda, E)^{\frac{1}{4}}}. \end{aligned}$$

In particular for any  $F \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , we have

$$\|T(F)\|_p \leq \frac{C(p, b, d) \left( (1 + |\lambda|)^{d+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \|G\|_{L^2} + \|G\|_{L^\infty} \right)}{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{1}{2}} \text{dist}(\lambda, E)^{\frac{1}{4}}} \|F\|_{L^p}, \quad (3.86)$$

which implies estimate (3.72). This concludes the proof of the lemma.  $\blacksquare$

Now let  $\lambda_0$  be such that

$$\min \left( |\mathfrak{I}(\lambda_0)|, \text{dist}(\lambda_0, \overline{N(\mathbb{S})}) \right) \geq 1 + \|V\|_\infty. \quad (3.87)$$

We have the following lemma.

**Lemma 3.8.** *Assume that  $\lambda_0$  satisfies condition (3.87). Under the assumptions of Lemma 3.7, there exists a constant  $C = C(p)$  such that*

$$\left\| F(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} G \right\|_p^p \leq C(1 + |\lambda_0|)^{d+\frac{1}{2}} K_2, \quad (3.88)$$

where the constant  $K_2$  is defined by

$$K_2 := \|F\|_{L^p}^p \|G\|_{L^\infty}^p. \quad (3.89)$$

**Proof.** Constants are generic (changing from a relation to another). From the identity

$$(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} = (\mathbb{S}_0 - \lambda_0)^{-1} (\mathbb{S}_0 - \lambda_0) (\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1},$$

we deduce that

$$\begin{aligned} \left\| F(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} G \right\|_p^p &\leq \left\| F(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right\|_p^p \|G\|_{L^\infty}^p \\ &\leq \left\| F(\mathbb{S}_0 - \lambda_0)^{-1} \right\|_p^p \left\| (\mathbb{S}_0 - \lambda_0) (\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right\|_p^p \|G\|_{L^\infty}^p. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Using a method similar to that of the proof of Lemma 3.7, it can be proved that

$$\left\| F(\mathbb{S}_0 - \lambda_0)^{-1} \right\|_p^p \leq \frac{C(1 + |\lambda_0|)^{d+\frac{1}{2}} \|F\|_{L^p}^p}{|\mathfrak{I}(\lambda_0)|^p}. \quad (3.91)$$

So (3.91) together with condition (3.87) on  $\lambda_0$  give finally

$$\left\| F(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right\|_p^p \leq C(1 + |\lambda_0|)^{d+\frac{1}{2}} \|F\|_{L^p}^p. \quad (3.92)$$

Otherwise, we have

$$\left\| (\mathbb{S}_0 - \lambda_0)(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right\| = \left\| I - V(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right\| \leq 1 + \|V\|_\infty \left\| (\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right\|.$$

By [25, Lemma 9.3.14],

$$\left\| (\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda_0, \mathcal{N}(\mathbb{S}))}.$$

Thus assumption on  $\lambda_0$  implies that

$$\left\| (\mathbb{S}_0 - \lambda_0)(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right\| \leq 2. \quad (3.93)$$

Now (3.88) follows from (3.90), (3.92) and (3.93).  $\blacksquare$

## 3.5 PRELIMINARIES

### 3.5.1 About the holomorphic function $f(\lambda)$

In this subsection, we construct as in [26] a holomorphic function  $f : \mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  whose zeros are the discrete eigenvalues of the perturbed operator  $\mathbb{S}$ .

Let  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty)$ . We have the identity

$$(\mathbb{S} - \lambda)(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} = I + V(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1}. \quad (3.94)$$

LHS of (3.94) is not invertible if and only if  $\mathbb{S} - \lambda$  is not invertible. Since  $V$  is a relatively compact perturbation, this holds if and only if  $\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S})$ . So defining

$$T(\lambda) = V(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1}, \quad (3.95)$$

we obtain for  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty)$  that

$$\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \Leftrightarrow I + T(\lambda) \text{ is not invertible.} \quad (3.96)$$

Otherwise, assumption (3.13) on the potential  $V$  implies that there exists a bounded operator  $\mathcal{V}$  such that for any  $\mathbf{x} = (x_\perp, x) \in \mathbb{R}^{2d+1}$ ,  $V(\mathbf{x}) = \mathcal{V}F(\mathbf{x})G(x)$ . Thus, as in proof of Lemma 3.7, it can be proved that  $T(\lambda) \in S_p$  for any  $p \geq 2$ . Let  $\det_{[\rho]}(I + T(\lambda))$  be the regularized determinant defined by

$$\det_{[\rho]}(I + T(\lambda)) := \prod_{\mu \in \sigma(T(\lambda))} \left[ (1 + \mu) \exp \left( \sum_{k=1}^{[\rho]-1} \frac{(-\mu)^k}{k} \right) \right], \quad (3.97)$$

where  $[\rho] := \min \{n \in \mathbb{N} : n \geq \rho\}$ . Hence (3.96) can be formulated (see e.g. [112, Chapter 9]) as

$$\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \Leftrightarrow \det_{[\rho]}(I + T(\lambda)) = 0. \quad (3.98)$$

Let us define the function

$$f(\lambda) := \det_{[\rho]}(I + T(\lambda)). \quad (3.99)$$

The function  $f$  is holomorphic on  $\mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty)$  and

$$\sigma_d(\mathbb{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty) : f(\lambda) = 0\}. \quad (3.100)$$

Moreover, the algebraic multiplicity of  $\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S})$  is equal to the order of  $\lambda$  as zero of the function  $f$ .

Let us proof the following lemma on  $f(\lambda)$ .

**Lemma 3.9.** *Let  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty)$  and suppose that  $\lambda_0$  satisfies the condition (3.87). Under the assumptions of Lemma 3.7, there exists  $C = C(p, b, d)$  such that*

$$\log \left| \frac{f(\lambda)}{f(\lambda_0)} \right| \leq \frac{\Gamma_p C (1 + |\lambda|)^{d+\frac{1}{2}} K_1}{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2}} \text{dist}(\lambda, E)^{\frac{p}{4}}} + \Gamma_p C (1 + |\lambda_0|)^{d+\frac{1}{2}} K_1, \quad (3.101)$$

where  $\Gamma_p$  is some positive constant and  $K_1$  is defined by (3.73).

**Proof.** First, write  $\frac{f(\lambda)}{f(\lambda_0)} = f(\lambda) \cdot f(\lambda_0)^{-1}$ . Since

$$f(\lambda_0)^{-1} = \det_{[\rho]} \left( I + V(\mathbb{S}_0 - \lambda_0)^{-1} \right)^{-1},$$

then passing to the inverse in (3.94), we obtain

$$f(\lambda_0)^{-1} = \det_{[\rho]} \left( I - V(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right).$$

This implies that

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\lambda)}{f(\lambda_0)} \right| &= \left| \det_{[\rho]} \left( I + V(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} \right) \right| \cdot \left| \det_{[\rho]} \left( I - V(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} \right) \right| \\ &= \left| \det_{[\rho]} \left( I + \mathcal{V}F(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} G \right) \right| \cdot \left| \det_{[\rho]} \left( I - \mathcal{V}F(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} G \right) \right|. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Otherwise, for any  $A \in \mathcal{S}_{[\rho]}$ , we have [112] the bound

$$\left| \det_{[\rho]} (I + A) \right| \leq e^{\Gamma_p \|A\|_p^p}.$$

This together with (3.102) imply that

$$\left| \frac{f(\lambda)}{f(\lambda_0)} \right| \leq e^{C \Gamma_p (\|F(\mathbb{S}_0 - \lambda)^{-1} G\|_p^p + \|F(\mathbb{S} - \lambda_0)^{-1} G\|_p^p)}. \quad (3.103)$$

So Lemma 3.7 and Lemma 3.8 together with the inequality  $K_2 < K_1$  give (3.101).  $\blacksquare$

In what follows below, we use a theorem about zeros of holomorphic functions in the unit disk  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  to study the zeros of the function  $f$  in  $\mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty)$ . Let us recall that in our case the Landau levels  $\Lambda_j$  defined by (3.4) play the role of thresholds in  $[\Lambda_0, +\infty)$ . So to study the zeros of the function  $f$  in  $\mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty)$  or equivalently the discrete eigenvalues of the operator  $\mathbb{S}$  in  $\mathbb{C} \setminus [\Lambda_0, +\infty)$ , we use a local approach by transforming locally the problem to  $\mathbb{D}$  using a conformal map.

### 3.5.2 About the conformal map $\varphi(z)$

Let  $\Pi = \mathcal{R}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  be a rectangle (or a square) with vertices  $\lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ , and  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^+$  or  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}_-$  (see Figure 7). It is well known [71, Theorem 1, p. 176] that there exists a conformal map  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Pi$  given by Schwarz-Christoffel formula. Denote by

$$\mathbb{T} := \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

and let  $z_j \in \mathbb{T}$  be the points such that  $\varphi(z_j) = \lambda_j$ , for  $1 \leq j \leq 4$ . Since  $\Pi$  is a rectangle, then the map  $\varphi$  satisfies

$$\varphi'(z) = \frac{C}{(z - z_1)^{\frac{1}{2}}(z - z_2)^{\frac{1}{2}}(z - z_3)^{\frac{1}{2}}(z - z_4)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.104)$$

where  $C$  is a constant.

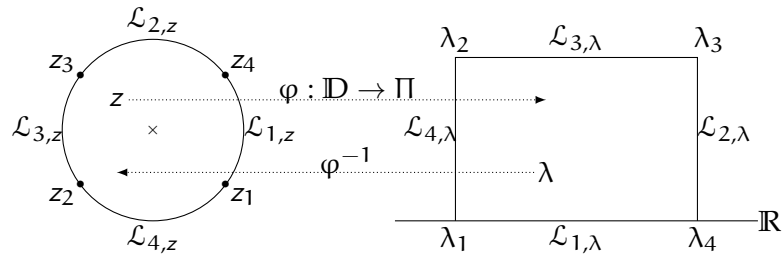


Figure 7: Transformation of the unit disk by the conformal map  $\varphi(z) = \lambda$ .

We write  $\lambda = \varphi(z) = \lambda(z)$  or  $z = \varphi^{-1}(\lambda) = z(\lambda)$ . We have  $\varphi(\mathcal{L}_{j,z}) = \mathcal{L}_{j,\lambda}$  and  $\partial\Pi = \bigcup_j \mathcal{L}_{j,\lambda}$ . We set also  $\mathcal{F}_z := \{z_j\}_j$  and  $\mathcal{F}_\lambda := \{\lambda_j\}_j$  so that  $\varphi(\mathcal{F}_z) = \mathcal{F}_\lambda$ . In lemmas below, the relation  $\simeq$  is defined as in (3.60).

**Lemma 3.10.** For  $z \in \mathbb{D}$  and  $\lambda \in \Pi$ , the following holds

$$\text{dist}(\lambda, \partial\Pi) \simeq \text{dist}(z, \mathbb{T}) \frac{1}{\text{dist}(z, \mathcal{F}_z)^{\frac{1}{2}}},$$

or equivalently

$$\text{dist}(z, \mathbb{T}) \simeq \text{dist}(\lambda, \partial\Pi) \text{dist}(\lambda, \mathcal{F}_\lambda).$$

*Proof.* The proof follows directly from [86, Corollary 1.4] and (3.60). ■

In the sequel, we are interested in the same quantities where  $\text{dist}(z, \mathbb{T})$  and  $\text{dist}(\lambda, \partial\Pi)$  are respectively replaced by  $\text{dist}(z, \mathcal{L}_{1,z})$  and  $\text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})$ . As in Lemma 3.10, we have

$$\begin{aligned} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda}) &\simeq \text{dist}(z, \mathcal{L}_{1,z}) \frac{1}{\text{dist}(z, \{z_1, z_4\})^{\frac{1}{2}}} \\ \text{dist}(z, \mathcal{L}_{1,z}) &\simeq \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda}) \text{dist}(\lambda, \{\lambda_1, \lambda_4\}). \end{aligned} \tag{3.105}$$

### 3.5.3 A theorem by Borichev, Golinskii and Kupin

The following result by A. Borichev, L. Golinskii and S. Kupin is proved in [15]. It gives an estimate on zeros of holomorphic functions in the unit disk  $\mathbb{D}$ .

**Theorem 3.5.** *Let  $h$  be a holomorphic function in the unit disk  $\mathbb{D}$  with  $h(0) = 1$ . Assume that  $h$  satisfies a bound of the form*

$$\log |h(z)| \leq K_0 \frac{1}{(1-|z|)^\alpha} \prod_{j=1}^N \frac{1}{|z - \xi_j|^{\beta_j}},$$

where  $\xi_j \in \mathbb{T}$  and  $\alpha, \beta_j \geq 0$ . Let  $\tau > 0$ . Then the zeros of  $h$  satisfy the inequality

$$\sum_{\{h(z)=0\}} (1-|z|)^{\alpha+1+\tau} \prod_{j=1}^N |z - \xi_j|^{(\beta_j-1+\tau)_+} \leq C(\alpha, \{\beta_j\}, \{\xi_j\}, \tau) K_0.$$

## 3.6 BOUNDS ON THE DISCRETE EIGENVALUES OF $\mathbb{S}$

### 3.6.1 Local bound

Let us recall that the  $\Lambda_j$  are the Landau levels given by (3.4). In this subsection, we prove a bound on  $\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S})$  in a rectangle  $\Pi_j$  containing one Landau level  $\Lambda_j$  (see Figure 8). We treat only the case  $\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \mathbb{C}^+$ . The same is true for  $\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \mathbb{C}_-$  by considering rectangles  $\Pi_j$  in the lower half plane  $\mathbb{C}_-$ . For simplicity in the sequel, by  $\lambda_0$  we mean  $\lambda_{0,j} \in \Pi_j$  and we assume that it satisfies condition (3.87).

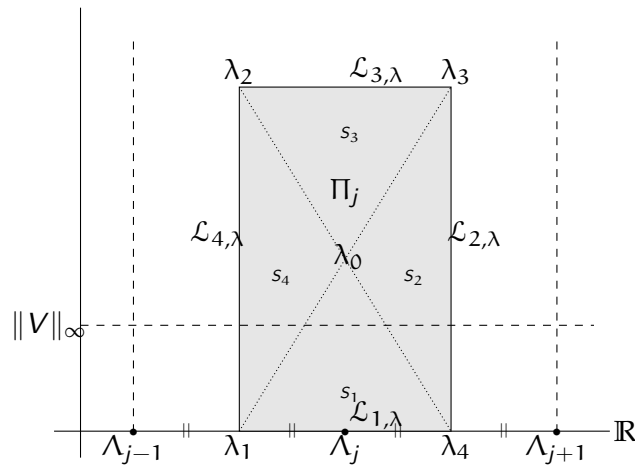


Figure 8: Rectangle  $\Pi_j$  in the upper half-plane  $\mathbb{C}^+$  and containing  $\Lambda_j$  as the only Landau levels.

We have  $\varphi_j(1) = \Lambda_j$  and  $\varphi_j(0) = \lambda_0$  where  $\varphi_j : \mathbb{D} \rightarrow \Pi_j$  is the conformal map defined in section 3.5 with respect to the rectangle  $\Pi_j$ . The four triangles  $S_k$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , form a partition of the rectangle  $\Pi_j$ . Let  $f$  be the function defined by (3.99) and define the function  $h_j : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  by

$$h_j(z) = f(\varphi_j(z)) \quad \text{and} \quad \tilde{h}_j(z) = \frac{h_j(z)}{h_j(0)}. \quad (3.106)$$

Then  $\tilde{h}_j$  is holomorphic in the unit disk and (3.100) implies that

$$\sigma_d(h) \cap \Pi_j = \{\varphi_j(z) \in \Pi_j : z \in \mathbb{D} : \tilde{h}_j(z) = 0\}. \quad (3.107)$$

We have the following lemma.

**Lemma 3.11.** *Under the assumptions of Lemma 3.9, for any  $z \in \mathbb{D}$  we have*

$$\log |\tilde{h}_j(z)| \leq \frac{C(p, b, d, j)K_3}{\text{dist}(z, \mathbb{T})^{\frac{p}{2}} |z-1|^{\frac{p}{4}}}, \quad (3.108)$$

where the constant  $C(p, b, d, j)$  satisfies the asymptotic property

$$C(p, b, d, j) \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} j^{d+\frac{1}{2}}, \quad (3.109)$$

and the constant  $K_3$  is defined by

$$K_3 := \|F\|_{L^p}^p (\|G\|_{L^2} + \|G\|_{L^\infty})^p (1 + \|V\|_\infty)^{d+\frac{1}{2}}. \quad (3.110)$$

*Proof.* Constants are generic (changing from a relation to another). Let  $K_1$  be the constant defined by (3.73). For  $\lambda, \lambda_0 = \lambda_{0,j} \in \Pi_j$  with  $\lambda_0$  satisfying condition (3.87), using (3.4) we obtain the inequality

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma_p C(p, b, d) K_1 (1 + |\lambda|)^{d+\frac{1}{2}}}{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2}} \text{dist}(\lambda, E)^{\frac{p}{4}}} + \Gamma_p C(p) K_1 (1 + |\lambda_0|)^{d+\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{\Gamma_p C(p, b, d) K_3 (1 + j)^{d+\frac{1}{2}}}{\text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}} |\lambda - \Lambda_j|^{\frac{p}{4}}} + \Gamma_p C(p) K_3 (1 + j)^{d+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Since  $\varphi_j(z) = \lambda$  and  $\varphi_j(1) = \Lambda_j$ , (3.105) (or Lemma 3.10) implies that

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma_p C(p, b, d) K_3 (1 + j)^{d+\frac{1}{2}}}{\text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}} |\lambda - \Lambda_j|^{\frac{p}{4}}} \simeq \frac{C(p, d, j) K_3 \text{dist}(z, \{z_1, z_4\})^{\frac{p}{4}}}{\text{dist}(z, \mathbb{T})^{\frac{p}{2}} |z-1|^{\frac{p}{4}}} \\ & \leq \frac{C(p, d, j) K_3}{\text{dist}(z, \mathbb{T})^{\frac{p}{2}} |z-1|^{\frac{p}{4}}}. \end{aligned}$$

This together with (3.111) show that for any  $\lambda \in \Pi_j$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma_p C(p, b, d) K_1 (1 + |\lambda|)^{d+\frac{1}{2}}}{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2}} \text{dist}(\lambda, E)^{\frac{p}{4}}} + \Gamma_p C(p) K_1 (1 + |\lambda_0|)^{d+\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{C(p, b, d, j) K_3}{\text{dist}(z, \mathbb{T})^{\frac{p}{2}} |z-1|^{\frac{p}{4}}} + C(p, d, j) K_3 \\ & \leq \frac{C(p, b, d, j) K_3}{\text{dist}(z, \mathbb{T})^{\frac{p}{2}} |z-1|^{\frac{p}{4}}}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

So (3.108) follows from Lemma 3.9, (3.106) and (3.112). ■

Now applying Theorem 3.5 to the function  $\tilde{h}_j$  satisfying (3.108) in Lemma 3.11, we obtain for any  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$\sum_{\{\tilde{h}_j(z)=0\}} \text{dist}(z, \mathbb{T})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |z-1|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \leq C(p, d, j, \varepsilon) K_3. \quad (3.113)$$

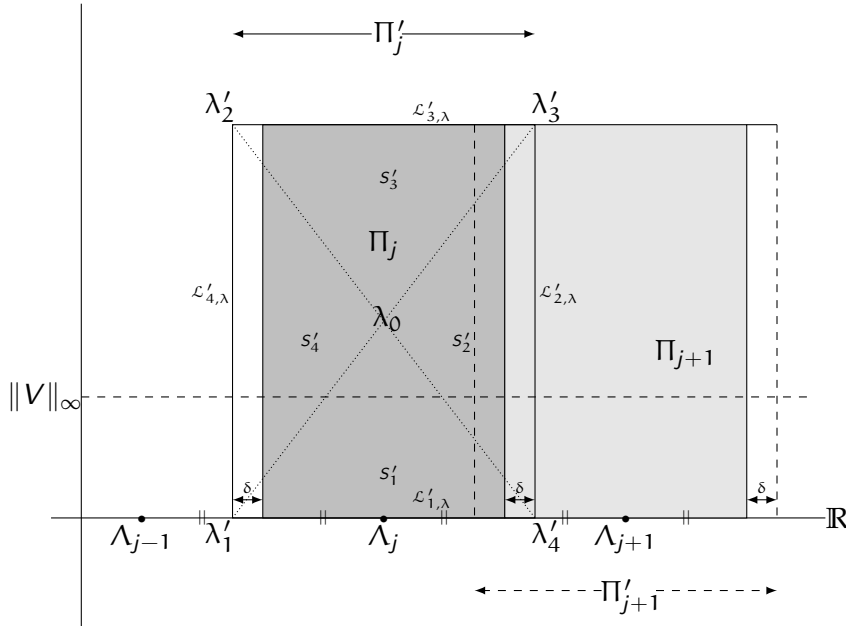
Equivalently, using Lemma 3.10, estimate (3.113) can be written in  $\Pi_j$  as

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j} \left( \text{dist}(\lambda, \partial \Pi_j) \text{dist}(\lambda, \mathcal{F}_\lambda) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \leq C(p, d, j, \varepsilon) K_3, \quad (3.114)$$

where the constant  $C(p, d, j, \varepsilon)$  satisfies again the asymptotic property (3.109) above. In what follows below, we want to derive from (3.114) a bound of the quantity

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j} \text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{(\frac{p}{2}+1+\varepsilon)} \text{dist}(\lambda, E)^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+}. \quad (3.115)$$

Note that in (3.114), we can have accumulation of  $\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S})$  on the edges  $\mathcal{L}_{2,\lambda}$  and  $\mathcal{L}_{4,\lambda}$  of the boundary  $\partial \Pi_j$  of  $\Pi_j$ . This is not due to the nature of the problem, but to the method we use. To treat this problem appearing in (3.114), the idea is to deal for any rectangle  $\Pi_j$  with its magnified version  $\Pi'_j$  in the horizontal direction as in Figure 9 below, where the constant  $\delta$  is such that  $0 < \delta < b$ .



**Figure 9:** Magnified versions  $\Pi'_j$  and  $\Pi'_{j+1}$  respectively of disjoint rectangles  $\Pi_j$  and  $\Pi_{j+1}$  in the upper half-plane  $\mathbb{C}^+$ .

In the figure above, we introduce a partition of the rectangle  $\Pi'_j$  by the four triangles  $S'_k$ ,  $1 \leq k \leq 4$ . Applying (3.114) to the rectangle  $\Pi'_j$ , we get

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi'_j} \left( \text{dist}(\lambda, \partial \Pi'_j) \text{dist}(\lambda, \mathcal{F}_{\lambda'}) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \leq C(p, b, d, j, \varepsilon) K_3.$$



Since  $\Pi_j \subset \Pi'_j$ , then the sum taken on  $\Pi_j$  gives

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j} \left( \text{dist}(\lambda, \partial \Pi'_j) \text{dist}(\lambda, \mathcal{F}_{\lambda'}) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \leq C(p, b, d, j, \varepsilon) K_3. \quad (3.116)$$

Otherwise, since (3.14) implies that there is no eigenvalues in the sector  $S'_3$ , then we have

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j} \left( \text{dist}(\lambda, \partial \Pi'_j) \text{dist}(\lambda, \mathcal{F}_{\lambda'}) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} = \\ & \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j \cap S'_1} \left( \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}'_{1,\lambda}) \text{dist}(\lambda, \{\lambda'_1, \lambda'_4\}) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \\ & + \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j \cap S'_2} \left( \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}'_{2,\lambda}) \text{dist}(\lambda, \{\lambda'_4, \lambda'_3\}) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \\ & + \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j \cap S'_4} \left( \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}'_{4,\lambda}) \text{dist}(\lambda, \{\lambda'_2, \lambda'_1\}) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

This together with (3.116) implies in particular that

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j \cap S'_2} \left( \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}'_{2,\lambda}) \text{dist}(\lambda, \{\lambda'_4, \lambda'_3\}) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \\ & \leq C(p, b, d, j, \varepsilon) K_3, \\ & \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j \cap S'_4} \left( \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}'_{4,\lambda}) \text{dist}(\lambda, \{\lambda'_2, \lambda'_1\}) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \\ & \leq C(p, b, d, j, \varepsilon) K_3. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Again take into account the fact that there is no eigenvalues in the sector  $S'_3$ , clearly quantity (3.115) above can be written as

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} = \\ & \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j \cap S'_1} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \\ & + \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j \cap S'_2} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \\ & + \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j \cap S'_4} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

By combining (3.116) and (3.117), and using the first term of RHS in (3.117) and the lower bound  $\text{dist}(\lambda, \{\lambda'_1, \lambda'_4\}) \geq \delta$ , we get the following bound

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathcal{S}) \cap \Pi_j \cap S'_1} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \leq \frac{C(p, b, d, j, \varepsilon) K_3}{\delta^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon}}. \quad (3.120)$$

For any  $\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \Pi_j \cap \mathcal{S}'_2$ , it can be easily checked that  $\text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda}) \leq \|V\|_\infty$  and  $\text{dist}(\lambda, \mathcal{L}'_{2,\lambda}) \text{dist}(\lambda, \{\lambda'_4, \lambda'_3\}) \geq \delta^2$ . Thus

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \Pi_j \cap \mathcal{S}'_2} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \\ & \leq \frac{\|V\|_\infty^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon}}{\delta^{2(\frac{p}{2}+1+\varepsilon)}} \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \Pi_j \cap \mathcal{S}'_2} \left( \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}'_{2,\lambda}) \text{dist}(\lambda, \{\lambda'_4, \lambda'_3\}) \right)^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+}. \end{aligned}$$

Now using (3.118) we obtain the bound

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \Pi_j \cap \mathcal{S}'_2} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \leq C(p, b, d, j, \varepsilon) K \quad (3.121)$$

where the constant  $K$  is defined by (3.30). By similar arguments, we show that

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \Pi_j \cap \mathcal{S}'_4} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \leq C(p, b, d, j, \varepsilon) K \quad (3.122)$$

For the rectangle  $\Pi_0$  containing the first Landau level  $\Lambda_0$ , choose the vertex  $\lambda_1$  of the edge  $\mathcal{L}_{4,\lambda}$  so that  $\lambda_1 \leq -\|V\|_\infty$ . Then estimates (3.119)-(3.122) imply that for any  $j \geq 0$ ,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \Pi_j} \text{dist}(\lambda, \mathcal{L}_{1,\lambda})^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} |\lambda - \Lambda_j|^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \leq C(p, b, d, j, \varepsilon) K. \quad (3.123)$$

Thus we have proved the following proposition.

**Proposition 3.1.** *For any  $j \geq 0$ , the following bound*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \Pi_j} \text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} \text{dist}(\lambda, E)^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \leq C(p, b, d, j, \varepsilon) K \quad (3.124)$$

holds, where  $K$  is defined by (3.30) and the constant  $C(p, b, d, j, \varepsilon)$  satisfies the asymptotic property (3.109).

Now we go back to the global bound.

### 3.6.2 Proof of Theorem 3.4

The main idea is to perform with the help of (3.124) a summation on the index  $j$ . The only way to obtain a finite sum with respect to  $j$  is first to multiply (3.124) by an appropriate weight function of  $j$ , taking into account the asymptotic property (3.109) of the constant  $C(p, b, d, j, \varepsilon)$ , namely

$$C(p, b, d, j, \varepsilon) \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} j^{d+\frac{1}{2}}.$$

Let  $\gamma$  be such that  $\gamma - (d + \frac{1}{2}) > 1$  or equivalently  $\gamma > d + \frac{3}{2}$ . Estimate (3.124) implies that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1+j)^\gamma} \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \Pi_j} \text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} \text{dist}(\lambda, E)^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \\ & \leq \frac{C(p, b, d, j, \varepsilon)}{(1+j)^\gamma} K. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Now taking in (3.125) the sum with respect to  $j$ , we obtain

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{1}{(1+j)^\gamma} \sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \Pi_j} \text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} \text{dist}(\lambda, E)^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+} \\ \leq \sum_j \frac{C(p, b, d, j, \varepsilon)}{(1+j)^\gamma} K. \end{aligned} \quad (3.126)$$

By the above choice of  $\gamma$ , RHS in (3.126) is convergent so that

$$\sum_j \frac{C(p, b, d, j, \varepsilon)}{(1+j)^\gamma} K = C(p, b, d, \varepsilon) K. \quad (3.127)$$

Thus using the fact that for any  $\lambda \in \Pi_j$  we have  $1+j \simeq 1+|\lambda|$ , we obtain

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \mathbb{C}^+} \frac{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} \text{dist}(\lambda, E)^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+}}{(1+|\lambda|)^\gamma} \leq C_0 K \quad (3.128)$$

where  $C_0 = C(p, b, d, \varepsilon)$ . Since (3.128) is true for  $\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S}) \cap \mathbb{C}_-$  by considering rectangles  $\Pi_j$  in the lower half plane  $\mathbb{C}_-$ , then finally we have

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(\mathbb{S})} \frac{\text{dist}(\lambda, [\Lambda_0, +\infty))^{\frac{p}{2}+1+\varepsilon} \text{dist}(\lambda, E)^{(\frac{p}{4}-1+\varepsilon)_+}}{(1+|\lambda|)^\gamma} \leq C_0 K. \quad (3.129)$$

This concludes the proof of Theorem 3.4.

### 3.6.3 Proofs of analogous result for the $(2d+1)$ -dimensional Pauli operators

Let  $\mathbb{P}_0$  be the  $(2d+1)$ -dimensional Pauli operator on  $L^2(\mathbb{R}^{2d+1}, \mathbb{C}^2)$  defined by (3.35),  $d \geq 1$ . In this section, we prove that Theorem 3.4 remains valid for the operator  $\mathbb{P}_0$  perturbed by non self-adjoint bounded matrix-valued electric potentials

$$V(\mathbf{x}) := \{V_{\ell k}(\mathbf{x})\}_{1 \leq \ell, k \leq 2}$$

such that the coefficients  $V_{\ell k}$  satisfy assumption (3.13).

Recall that the spectrum of the Pauli operator  $\mathbb{P}_0$  is absolutely continuous and has a infinite set of thresholds

$$\Lambda_j := 2b_0 dj, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (3.130)$$

the Landau levels. In what follows below, we set  $E := \{\Lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Let  $\mathbb{P}_\ell$ ,  $\ell = 1, 2$ , be the Schrödinger operators defined in (3.35). For any  $\lambda$  in the resolvent set of the operator  $\mathbb{P}_0$ , we have

$$(\mathbb{P}_0 - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbb{P}_1 - \lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbb{P}_2 - \lambda)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.131)$$

Thus if  $p_j$  is be the orthogonal projection onto  $\ker(\mathbb{P}_\ell - \Lambda_j)$  for  $\ell = 1, 2$ , we have

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}_1 - \lambda)^{-1} &= \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j \otimes (D_x^2 + \Lambda_j - \lambda)^{-1}, \\ (\mathbb{P}_2 - \lambda)^{-1} &= \sum_{j \in \mathbb{N}^*} p_{j-1} \otimes (D_x^2 + \Lambda_j - \lambda)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

As in the proof Lemma 3.7, it can be proved that for any  $p \geq 2[\frac{d}{2}] + 2$ , the  $p$ -Schatten norm of the sandwiched resolvent  $F(\mathbb{P}_\ell - \lambda)^{-1}G$ ,  $\ell = 1, 2$ , satisfies the estimate

$$\left\| F(\mathbb{P}_\ell - \lambda)^{-1}G \right\|_p^p \leq \frac{C(1 + |\lambda|)^{d+\frac{1}{2}}K_1}{\text{dist}(\lambda, [0, +\infty))^{\frac{p}{2}} \text{dist}(\lambda, E)^{\frac{p}{4}}}.$$

where the constant  $K_1$  is defined as in (3.73). So, in the spirit of Lemma 3.7, we obtain the following lemma.

**Lemma 3.12.** *Let  $E$  be the set of Landau levels defined by (3.130) and consider  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$ . Assume that  $F \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$ ,  $d \geq 1$  and  $p \geq 2[\frac{d}{2}] + 2$ . Then the following bound holds*

$$\left\| F(\mathbb{P}_0 - \lambda)^{-1}G \right\|_p^p \leq \frac{C(1 + |\lambda|)^{d+\frac{1}{2}}K_1}{\text{dist}(\lambda, [0, +\infty))^{\frac{p}{2}} \text{dist}(\lambda, E)^{\frac{p}{4}}}, \quad (3.133)$$

where  $C = C(p, b, d)$  is a constant depending on  $p$ ,  $b$  and  $d$ , and the constant  $K_1$  is defined as in (3.73).

Now let  $\lambda_0$  be such that

$$\min \left( |\Im(\lambda_0)|, \text{dist}(\lambda_0, \overline{N(\mathbb{P})}) \right) \geq 1 + \|V\|_\infty, \quad (3.134)$$

where  $\mathbb{P} := \mathbb{P}_0 + V$ . So as in the spirit of Lemma 3.8, we obtain the following lemma.

**Lemma 3.13.** *Assume that  $\lambda_0$  satisfies condition (3.134). Under the assumptions of Lemma 3.12, there exists a constant  $C = C(p)$  such that*

$$\left\| F(\mathbb{P} - \lambda_0)^{-1}G \right\|_p^p \leq C(1 + |\lambda_0|)^{d+\frac{1}{2}}K_2, \quad (3.135)$$

where the constant  $K_2$  is defined as in (3.89).

Hence we conclude similarly as in Theorem 3.4, with the help of techniques used in sections 3.5 and 3.6 with respect to the operators  $\mathbb{P}_0$  and  $\mathbb{P}$ .



# 4

## APPENDIX

### Contents

---

4.1	Auxiliary results	89
4.1.1	Results by Raikov	89
4.1.2	Results by Bony, Bruneau and Raikov	90
4.2	Notion of index of a finite meromorphic operator-valued function	92

---

### 4.1 AUXILIARY RESULTS

#### 4.1.1 Results by Raikov

In this subsection, we recall some technical results we need due to G. Raikov [95], [89] on Berezin-Toeplitz operators.

**Lemma 4.1.** [95, Lemma 2.4] *Let  $U \in L^q(\mathbb{R}^2)$ ,  $q \in [1, +\infty)$ . Assume that  $b$  is an admissible magnetic field. Let  $p := p(b)$  be the orthogonal projection onto  $\ker H_{\perp}^{-}$  defined by (0.12). Then  $pUp \in S_q(L^2(\mathbb{R}^2))$  with*

$$\|pUp\|_q^q \leq \frac{b_0}{2\pi} e^{2\text{osc } \tilde{\varphi}} \|U\|_{L^q}^q, \quad (4.1)$$

where  $\text{osc } \tilde{\varphi}$  is defined by (0.14).

Let  $U \in L^\infty(\mathbb{R})$ . The asymptotic distribution of eigenvalues of the Berezin-Toeplitz operator  $pUp$  concerns the lemmas below. In the first lemma an integrated density of states (IDS) for the operator  $H_{\perp}^{-}$  in  $L^2(\mathbb{R}^2)$  is defined as follows. For  $x_{\perp} \in \mathbb{R}^2$ , let  $\chi_{T, x_{\perp}}$  be the characteristic function of the square  $x_{\perp} + (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})^2$  with  $T > 0$ . Denote by  $\mathbb{P}_I(H_{\perp}^{-})$  the spectral projection of the operator  $H_{\perp}^{-}$  corresponding to the interval  $I \subset \mathbb{R}$ . A non-increasing function  $\rho_b : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  is called IDS for the operator  $H_{\perp}^{-}$  if it satisfies for any  $x_{\perp} \in \mathbb{R}^2$

$$\rho_b(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-2} \text{Tr} [\chi_{T, x_{\perp}} \mathbb{P}_{(-\infty, t)}(H_{\perp}^{-}) \chi_{T, x_{\perp}}]$$

for each point  $t$  of continuity of  $\rho$  (see e.g. [95]). If the magnetic field is constant, *i.e.*  $b = b_0$ , then there exists naturally an IDS for the operator  $H_{\perp}^{-}$  given by

$$\rho_{b_0}(t) = \frac{b_0}{2\pi} \sum_{q \geq 0} \chi_{\mathbb{R}_+}(t - 2b_0 q), \quad t \in \mathbb{R},$$

where  $\chi_{\mathbb{R}_+}$  is the characteristic function of  $\mathbb{R}_+$ .

**Lemma 4.2.** [95, Lemma 3.3] Let  $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$  such that

$$0 \leq U(x_\perp) \leq C_1 \langle x_\perp \rangle^{-\alpha}, \quad |\nabla U(x_\perp)| \leq C_1 \langle x_\perp \rangle^{-\alpha-1}, \quad x_\perp \in \mathbb{R}^2,$$

with constants  $\alpha > 0$  and  $C_1 > 0$ . Assume, moreover, that

- $U(x_\perp) = u_0(x_\perp/|x_\perp|)|x_\perp|^{-\alpha}(1 + o(1))$  as  $|x_\perp| \rightarrow \infty$ , where  $u_0$  is a continuous function on  $S^1$  which does not vanish identically,
- $b$  is an admissible magnetic field,
- there exists an IDS  $\rho_b$  for the operator  $H_\perp^-$ .

Then we have

$$n_+(s, pUp) = C_\alpha s^{-2/\alpha}(1 + o(1)), \quad s \searrow 0, \quad C_\alpha := \frac{b}{4\pi} \int_{S^1} u_0(t)^{2/\alpha} dt. \quad (4.2)$$

**Lemma 4.3.** [95, Lemma 3.4] Let  $0 \leq U \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Assume that

$$\ln U(x_\perp) = -\mu |x_\perp|^{2\beta}(1 + o(1)), \quad |x_\perp| \rightarrow \infty,$$

with  $\beta > 0$  et  $\mu > 0$ . Then we have

$$n_+(s, pUp) = \varphi_\beta(s)(1 + o(1)), \quad s \searrow 0,$$

where for  $0 < s < e^{-1}$  we set

$$\varphi_\beta(s) := \begin{cases} \frac{1}{2} b_0 \mu^{-1/\beta} |\ln s|^{1/\beta} & \text{si } 0 < \beta < 1, \\ \frac{1}{\ln(1 + 2\mu/b_0)} |\ln s| & \text{si } \beta = 1, \\ \frac{\beta}{\beta - 1} (\ln |\ln s|)^{-1} |\ln s| & \text{si } \beta > 1. \end{cases}$$

**Lemma 4.4.** [95, Lemma 3.5] Let  $0 \leq U \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Assume that the support of  $U$  is compact, and that there exists a constant  $C > 0$  such that  $U \geq C$  on an open non-empty subset of  $\mathbb{R}^2$ . Then we have

$$n_+(s, pUp) = \varphi_\infty(s)(1 + o(1)), \quad s \searrow 0,$$

where

$$\varphi_\infty(s) := (\ln |\ln s|)^{-1} |\ln s|, \quad 0 < s < e^{-1}.$$

#### 4.1.2 Results by Bony, Bruneau and Raikov

In this subsection, we recall some results we need due to J. -F. Bony, V. Bruneau and G. Raikov [14] on characteristic values of holomorphic operators.

The following lemma contains a version of the well-known Jensen inequality.

**Lemma 4.5.** [13, Lemma 6] Let  $\Delta$  be a simply connected sub-domain of  $\mathbb{C}$  and let  $g$  be a holomorphic function in  $\Delta$  with continuous extension to  $\bar{\Delta}$ . Assume there exists  $\lambda_0 \in \Delta$  such that  $g(\lambda_0) \neq 0$  and  $g(\lambda) \neq 0$  for  $\lambda \in \partial\Delta$ , the boundary of  $\Delta$ . Let  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in \Delta$  be the zeros of  $g$  repeated according to their multiplicity. For any domain  $\Delta' \Subset \Delta$ , there exists  $C' > 0$  such that  $N(\Delta', g)$ , the number of zeros  $\lambda_j$  of  $g$  contained in  $\Delta'$ , satisfies

$$N(\Delta', g) \leq C' \left( \int_{\partial\Delta} \ln |g(\lambda)| d\lambda - \ln |g(\lambda_0)| \right). \quad (4.3)$$

let  $\mathcal{D}$  be a domain of  $\mathbb{C}$  containing 0 and let us consider an holomorphic operator-valued function  $T : \mathcal{D} \rightarrow S_\infty$ .

**Definition 4.1.** For a domain  $\Omega \subset \mathcal{D} \setminus \{0\}$ , a complex number  $z \in \Omega$  is an characteristic value of  $z \mapsto I - \frac{T(z)}{z}$  if the operator  $I - \frac{T(z)}{z}$  is not invertible.

Denote by

$$\mathcal{Z}(\Omega) := \left\{ z \in \Omega : I - \frac{T(z)}{z} \text{ is not invertible} \right\}.$$

If there exists  $z_0 \in \Omega$  such that  $I - \frac{T(z_0)}{z_0}$  is not invertible, then  $\mathcal{Z}(\Omega)$  is pure point (see e.g. [43, Proposition 4.1.4]). So we define

$$\mathcal{N}(\Omega) := \#\mathcal{Z}(\Omega).$$

Assume that  $T(0)$  is selfadjoint. Introduce  $\Omega \Subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  and

$$\mathcal{C}_\alpha(a, b) := \{x + iy \in \mathbb{C} : a \leq x \leq b, -\alpha x \leq y \leq \alpha x\} \quad (4.4)$$

with  $a > 0$  tending to 0 and  $b > 0$ . Let

$$n(\Lambda) := \text{Tr } \mathbf{1}_\Lambda(T(0))$$

be the number of eigenvalues of the operator  $T(0)$  lying in the interval  $\Lambda \subset \mathbb{R}^*$ , and counted with their multiplicity. Denoted by  $\Pi_0$  the orthogonal onto  $\ker T(0)$ .

**Lemma 4.6.** [14, Corollary 3.4] Let  $T$  be as above and  $I - T'(0)\Pi_0$  be invertible. Assume that  $\Omega \Subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  is a bounded domain with smooth boundary  $\partial\Omega$  which is transverse to the real axis at each point of  $\partial\Omega \cap \mathbb{R}$ .

(i) If  $\Omega \cap \mathbb{R} = \emptyset$ , then  $\mathcal{N}(s\Omega) = 0$  for  $s$  small enough. This implies that the characteristic values  $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{D})$  near 0 satisfy  $|\Im(z)| = o(|z|)$ .

(ii) Moreover, if the operator  $T(0)$  has a definite sign ( $\pm T(0) \geq 0$ ), then the characteristic values  $z$  near 0 satisfy  $\pm \Re(z) \geq 0$ , respectively.

(iii) If  $T(0)$  is of finite rank, then there are no characteristic values in a pointed neighborhood of 0. Moreover, if the operator  $T(0)\mathbf{1}_{[0, +\infty)}(\pm T(0))$  is of finite rank, then there are no characteristic values in a neighborhood of 0 intersected with  $\{\pm \Re(z) > 0\}$ , respectively.

**Lemma 4.7.** [14, Theorem 3.7] Let  $T$  be as above and  $I - T'(0)\Pi_0$  be invertible. For  $\alpha > 0$  fixed, let  $\mathcal{C}_\alpha(r, 1) \subset \mathcal{D}$  be defined by (4.4). Then, for all  $\nu > 0$  small enough, there exists  $s(\nu) > 0$  such that, for all  $0 < s < s(\nu)$ , we have

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{C}_\alpha(r, 1)) &= n([r, 1]) (1 + \mathcal{O}(\nu |\ln \nu|^2)) \\ &\quad + \mathcal{O}(|\ln \nu|^2) n([r(1 - \nu), r(1 + \nu)]) + \mathcal{O}_\nu(1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

where the  $\mathcal{O}$ 's are uniform with respect to  $s, \nu$  but the  $\mathcal{O}_\nu$  may depend on  $\nu$ .

**Lemma 4.8.** [14, Corollary 3.9] Let the assumptions of lemma 4.7 hold true. Suppose that there exists  $\gamma > 0$  such that

$$n([r, 1]) = \mathcal{O}(r^{-\gamma}), \quad r \searrow 0,$$

and that  $n([r, 1])$  grows unboundedly as  $r \searrow 0$ . Then there exists a positive sequence  $(r_k)_k$  tending to 0 such that

$$\mathcal{N}(\mathcal{C}_\alpha(r_k, 1)) = n([r_k, 1]) (1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$



**Lemma 4.9.** [14, Corollary 3.11] *Let the assumptions of lemma 4.7 hold true. Suppose that*

$$n([r, 1]) = \Phi(r)(1 + o(1)), \quad r \searrow 0,$$

*with  $\Phi(r) = r^{-\gamma}$ , or  $\Phi(r) = |\ln r|^\gamma$ , or  $\Phi(r) = (\ln |\ln r|)^{-1} |\ln r|$ , for some  $\gamma > 0$ . Then*

$$\mathcal{N}(\mathcal{C}_\alpha(r, 1)) = \Phi(r)(1 + o(1)), \quad r \searrow 0. \quad (4.7)$$

## 4.2 NOTION OF INDEX OF A FINITE MEROMORPHIC OPERATOR-VALUED FUNCTION

In this section, we recall the notions of index (with respect to a positively oriented contour) of a holomorphic function and a finite meromorphic operator-valued function (see e.g. [14, Definition 2.1]).

Let  $f$  be a holomorphic function in a neighborhood of a contour  $\gamma$ . The index of  $f$  with respect to the contour  $\gamma$  is defined by

$$\text{ind}_\gamma f := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Note that if  $f$  is holomorphic in a domain  $\Omega$  such that  $\partial\Omega = \gamma$ , then by residues theorem  $\text{ind}_\gamma f$  coincides with the number of zeros of the function  $f$  in  $\Omega$ , counted according to their multiplicity. Now let  $D \subseteq \mathbb{C}$  be a connected open set,  $Z \subset D$  a pure point and closed subset and  $A : \overline{D} \setminus Z \rightarrow \text{GL}(E)$  a finite meromorphic operator-valued function and Fredholm at each point of  $Z$ . The index of  $A$  with respect to the contour  $\partial\Omega$  is defined by

$$\text{Ind}_{\partial\Omega} A := \frac{1}{2i\pi} \text{tr} \int_{\partial\Omega} A'(z)A(z)^{-1} dz = \frac{1}{2i\pi} \text{tr} \int_{\partial\Omega} A(z)^{-1} A'(z) dz.$$

We have the following properties:

$$\text{Ind}_{\partial\Omega} A_1 A_2 = \text{Ind}_{\partial\Omega} A_1 + \text{Ind}_{\partial\Omega} A_2,$$

and if  $K(z)$  is in the trace class operators, then

$$\text{Ind}_{\partial\Omega} (I + K) = \text{ind}_{\partial\Omega} \det(I + K).$$

For more details, see [44, Chapter 4].

## BIBLIOGRAPHY

- [1] C. ADAM, B. MURATORI, C. NASH, *Zero modes of the Dirac operator in the three dimensions*, Phys. Rev. D **60** (1999), 125001-1 - 125001-8.
- [2] C. ADAM, B. MURATORI, C. NASH, *Degeneracy of zero modes of the Dirac operator in the three dimensions*, Phys. Lett. B **485** (2000), 314-318.
- [3] C. ADAM, B. MURATORI, C. NASH, *Multiple zero modes of the Dirac operator in the three dimensions*, Phys. Rev. D **62** (2000), 085026-1 - 085026-9.
- [4] J. AGUILAR, J. M. COMBES, *A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians*, Comm. Math. Phys. **22** (1971), 269-279.
- [5] M. AIZENMAN, E. H. LIEB, *On semi-classical bounds for eigenvalues of Schrödinger operators*, Phys. Lett. D **66A** (1978), 427-429.
- [6] L. AMOUR, R. BRUMMELHUIS, J. NOURRIGAT, *Resonances of the Dirac Hamiltonian in the non relativistic limit*, Ann. Henri Poincaré **2** (2001), 583-603.
- [7] M. A. ASTABURUAGA, P. BRIET, V. BRUNEAU, C. FERNANDEZ, G. RAIKOV, *Dynamical resonances and SSF singularities for a magnetic Schrödinger operator*, Serdica Math. J. **34** (2008), 179-218.
- [8] J. AVRON, I. HERBST, B. SIMON, *Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions*, Duke Math. J. **45** (1978), 847-883.
- [9] A. A. BALINSKY, W. D. EVANS, *On the zero modes of the Weyl-Dirac operators and their multiplicity*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 236-242.
- [10] E. BALSLEV, J. -M. COMBES, *Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilation-analytic interactions*, Comm. Math. Phys. **22** (1971), 280-294.
- [11] E. BALSLEV, B. HELFFER, *Limiting absorption principle and resonances for the Dirac operator*, Adv. in Appl. Math. **13** (1992), 186-215.
- [12] A. SA BARRETO, M. ZWORSKI, *Existence of resonances in three dimensions,,* Comm. Math. Phys. **173** (1995), 401-415.
- [13] J. -F. BONY, V. BRUNEAU, G. RAIKOV, *Resonances and Spectral Shift Function near the Landau levels*, Ann. Inst. Fourier, **57**(2) (2007), 629-671.
- [14] J. -F. BONY, V. BRUNEAU, G. RAIKOV, *Counting function of characteristic values and magnetic resonances*, to appear in Comm. Part. Diff. Equat. preprint on <http://arxiv.org/abs/1109.3985>
- [15] A. BORICHEV, L. GOLINSKII, S. KUPIN, *A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices*, Bull. London Math. Soc. **41** (2009), 117-123.
- [16] V. BRUNEAU, A. PUSHNITSKI, G. RAIKOV, *Spectral shift function in strong magnetic fields*, Algebra in Analiz, **16**(1) (2004), 207-238.

- [17] V. BRUNEAU, E. M. OUHABAZ, *Lieb-Thirring estimates for non-selfadjoint Schrödinger operators*, J. Math. Phys. **49** (2008).
- [18] A.M. BOUTET DE MONVEL, R. PURICE, *On the theory of wave operators and scattering operators*, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., **5** (1962), 475-478.
- [19] A.M. BOUTET DE MONVEL, R. PURICE, *A distinguished self-adjoint extension for the Dirac operator with strong local singularities and arbitrary behaviour at infinity*, Rep. Math. Phys. **34** (1994), 351-360.
- [20] C. CANCELIER, A. MARTINEZ, T. RAMOND, *Quantum resonances without analyticity*, Asymptot. Anal. **44** (2005), 47-74.
- [21] PAUL R. CHERNOFF, *Schrödinger and Dirac operators with singular potentials and hyperbolic equations*, Pacific J. Math. **72** (1977), 361-382.
- [22] J. G. CONLON, *A new proof of the Cwikel-Lieb-Rosenbljum bound*, Rocky Mountain J. Math. **15** (1985), 117-122.
- [23] M. CWIKEL, *Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **224** (1977), 83-100.
- [24] H. CYCON, *Resonances defined by modified dilations*, Helv. Phys. Acta **58** (1985), 969-981.
- [25] E. B. DAVIES, *Linear Operators and their Spectra*, Camb. Stu. Adv. Math. **106** (2007), Cambridge University Press.
- [26] M. DEMUTH, M. HANSMANN, G. KATRIEL, *On the discrete spectrum of non-selfadjoint operators*, J. Funct. Anal. **257**(9) (2009), 2742-2759.
- [27] M. DEMUTH, M. HANSMANN, G. KATRIEL, *Eigenvalues of non-selfadjoint operators: a comparison of two approaches*, preprint on <http://arxiv.org/abs/1209.0266>.
- [28] M. DIMASSI, J. SJÖSTRAND, *Spectral Asymptotics in the Semi-classical Limit*, London Math. Soc. Lec. Not Ser. **268**, Cam. Univ. Press 1999.
- [29] M. DIMASSI, G. D. RAIKOV, *Spectral asymptotics for quantum Hamiltonians in strong magnetic fields*, Cubo Math. Educ. **3**(2) (2001), 317-391.
- [30] M. DIMASSI, *Spectral shift function and resonances for slowly varying perturbations of periodic Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **225** (2005), 193-228.
- [31] M. DIMASSI, V. PETKOV, *Spectral shift function and resonances for non-semi-bounded and Stark Hamiltonians*, J. Math. Pures Appl. **82** (2003), 1303-1342.
- [32] M. DIMASSI, V. PETKOV, *Resonances for magnetic Stark Hamiltonians in two dimensional case*, Int. Math. Res. Not. **2004** (2004), 4147-4179.
- [33] M. DIMASSI, M. ZERZERI, *A local trace formula for resonances of perturbed periodic Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **198** (2003), 142-159.
- [34] C. DUBUISSON, *On quantitative bounds on eigenvalues of a complex perturbation of a Dirac operator*, submitted, preprint on <http://arxiv.org/abs/1305.5214>

- [35] S. FAVOROV, L. GOLINSKII, *A Blaschke-type conditions for analytic functions in the unit disk: inverse problems and local analogs*, preprint on <http://arxiv.org/abs/1007.3020>
- [36] C. FERNANDEZ, G. D. RAIKOV, *On the singularities of the magnetic spectral shift function at the Landau levels*, *Ann. Henri Poincaré*, **5** (2004), no. 2, 381-403.
- [37] N. FILONOV, A. PUSHNITSKI, *Spectral asymptotics of Pauli operators and orthogonal polynomials in complex domains*, *Comm. Math. Phys.* **264** (2006), no. 3, 759-772.
- [38] G. B. FOLLAND, *Real analysis Modern techniques and their applications*, Pure and Applied Mathematics, (1984), John Wiley and Sons.
- [39] R. L. FRANK, A. LAPTEV, E. H. LIEB, R. SEIRINGER, *Lieb-Thirring inequalities for Schrödinger operators with complex-valued potentials*, *Lett. in Math. Phys.* **77** (2006), 309-316.
- [40] R. FROESE, *Asymptotic distribution of resonances in one dimension*, *J. Diff. Equat.* **137** (1997), 251-272.
- [41] R. FROESE, R. WAXLER, *Ground state resonances of a hydrogen atom in an intense magnetic field*, *Rev. Math. Phys.* **7**, 3 (1995), 311-361.
- [42] V. GEORGESCU, M. MANTOIU, *On the spectral theory of singular Dirac type Hamiltonians*, *J. Operator Theory*, **46** (2001), 289-321.
- [43] I. GOHBERG, E. I. SIGAL, *An operator generalization of the logarithmic residue theorem and Rouché's theorem*, *Mat. Sb. (N.S.)* **84 (126)** (1971), 607-629.
- [44] I. GOHBERG, J. LEITERER, *Holomorphic Operator Functions of One variable and Applications*, **192** *Operator Theory Advances and Applications*, Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 2009.
- [45] L. GOLINSKII, S. KUPIN, *On discrete spectrum of complex perturbations of finite band Schrödinger operators*, to appear.
- [46] B. C. HALL, *Holomorphic methods in analysis and mathematical physics*, In: *First Summer School in Analysis and Mathematical Physics*, Cuernavaca Morelos, 1998, 1-59, *Contemp. Math.* **260**, AMS, Providence, RI, (2000).
- [47] M. HANSMANN, *Variation of discrete spectra for non-selfadjoint perturbations of selfadjoint operators*, submitted, preprint on <http://arxiv.org/abs/1202.1118>.
- [48] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, *Résonances en limite semi-classique*, *France (N.S.)* no. 24-25 (1986), iv+228 pp.
- [49] B. HELFFER, A. MARTINEZ, *Comparaison entre les diverses notions de résonances*, *Helv. Phys. Acta* **60** (1987), 992-1003.
- [50] B. HELFFER, J. NOURRIGAT, X. P. WANG, *Sur le spectre de l'équation de Dirac (dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) avec champ magnétique*, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **22** (1989), 515-533.
- [51] D. HUNDERMARK, E. H. LIEB, L. E. THOMAS, *A sharp bound for an eigenvalue moment of the one-dimensional Schrödinger operator*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), 719-731.

- [52] D. HUNDERMARK, A. LAPTEV, T. WEIDL, *New bounds on the Lieb-Thirring constants*, *Invent. Math.* **140** (2000), 693-704.
- [53] D. HUNDERMARK, B. SIMON, *Lieb-Thirring inequalities for Jacobi matrices*, *J. Approx. Theory* **118** (2002), 106-130.
- [54] W. HUNZIKER, *Distorsion analyticity and molecular resonance curves*, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **45** (1986), 339-358.
- [55] A. INTISSAR, *A polynomial bound on the number of scattering poles for a potential in even dimensional space  $\mathbb{R}^n$* , *Comm. Part. Diff. Equat.* **11** (1986), 367-396.
- [56] V. YA. IVRII, *Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics*, Springer, Berlin, 1998.
- [57] A. IWATSUKA, *The essential spectrum of the two-dimensional Schrödinger operators with perturbed constant magnetic fields*, *J. Math. Kyoto Univ.* **23** (1983), 475-480.
- [58] A. IWATSUKA, H. TAMURA, *Asymptotic Distribution of eigenvalues for Pauli operators with nonconstant magnetic fields*, *Duke Math. J.* **93** (1998), 535-574.
- [59] A. IWATSUKA, H. TAMURA, *Asymptotic Distribution of eigenvalues for two-dimensional Pauli operators with nonconstant magnetic fields*, *Ann. Inst. Fourier* **48** (1998), 479-515.
- [60] A. KACHMAR, M. PERSSON, *Remark on magnetic Schrödinger operators in exterior domains*, preprint on <http://arxiv.org/abs/0907.1961>.
- [61] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [62] A. KHOCHMAN, *Resonances and spectral shift function for the semi-classical Dirac operator*, *Rev. Math. Phys.* **19** (2007), 1071-1115.
- [63] A. KHOCHMAN, *Résonances et diffusion pour les opérateurs de Dirac et de Schrödinger magnétique*, Thèse de doctorat 3<sup>ème</sup> cycle, Université Bordeaux 1, 2008.
- [64] L. S. KOPLIENKO, *Trace formula for non trace-class perturbations*, *Sibirsk. Mat. Zh.* **25** (1984), 62-71, English transl.: *Siberian Math. J.* **25** (1984), 735-743.
- [65] L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, *Quantum Mechanics. Non-relativistic Theory. Course of Theoretical Physics*, Vol. 3, Pergamon Press, London, 1958.
- [66] A. LAPTEV, T. WEIDL, *Sharp Lieb-Thirring inequalities in high dimensions*, *Acta Math.* **184** (2000), 87-111.
- [67] A. LAPTEV, O. SAFRONOV, *Eigenvalue estimates for Schrödinger operators with complex potentials*, *Comm. Math. Phys.* **292** (2009), 29-54.
- [68] E. H. LIEB, *Bounds on the eigenvalues of the Laplace and Schrödingers operators*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), 751-753.
- [69] E. H. LIEB, W. THIRRING, *Bound for the kinetic energy of fermions which proves the stability of matter*, *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975), 687-689. Errata **35** (1975), 1116.

- [70] E. H. LIEB, W. THIRRING, *Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities*, in "Studies in Mathematical Physics. Essays in Honor of Valentine Bargmann", pp. 269-303, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
- [71] M. LAVRENTIEV, B. CHABAT, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Éditions Mir, Moscou, 1977.
- [72] P. D. LAX, R. S. PHILLIPS, *Scattering theory*, Academic Press, New York, 1967.
- [73] M. LOSS, H. T. YAU, *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. III. Zero energy bound states of the Pauli operators*, *Comm. Math. Phys.* **104** (1986), 283-290.
- [74] A. LUNARDI, *Interpolation Theory*, *Appunti Lecture Notes*, **9** (2009), Edizioni Della Normale.
- [75] P. LI, S. -T. YAU, *On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem*, *Comm. Math. Phys.* **88** (1983), 309-318.
- [76] M. MELGAARD, G. ROZENBLUM, *Eigenvalues asymptotics for even-dimensional perturbed Dirac and Schrödinger operators with constant magnetic fields of full rank*, *Comm. Part. Differ. Equa.* **28** (2003), 697-736.
- [77] R. B. MELROSE, *Scattering theory and the trace of the wave group*, *J. Funct. Anal.* **45** (1982), 29-40.
- [78] R. B. MELROSE, *Polynomial bounds on the number of the scattering poles*, *Journées d'équations aux dérivées partielles de Saint-Jean-de-Monts* (1984), École polytechnique.
- [79] R. B. MELROSE, *Weyl asymptotics for the phase in obstacle scattering*, *Comm. Part. Differ. Equa.* **13** (1988), 1431-1439.
- [80] B. PARISSÉ *Liens entre les résonances pour l'opérateur de Dirac et de Schrödinger*, *Journées équations aux dérivées partielles* (1990), Art. no. 12, 7 p.
- [81] B. PARISSÉ *Résonances pour l'opérateur de Dirac*, *Helv. Phys. Acta* **64** (1991), 557-591.
- [82] B. PARISSÉ *Résonances pour l'opérateur de Dirac II*, *Helv. Phys. Acta* **65** (1992), 1077-1118.
- [83] M. PERSSON *Eigenvalue asymptotics for the even-dimensional exterior Landau-Neumann Hamiltonian*, *Adv. Math. Phys. Volume 2009* (2009). Article ID 873704.
- [84] V. PETKOV, M. ZWORSKI *Breit-Wigner approximation and the distribution of resonances*, *Comm. Math. Phys.* **204** (1999), 329-351.
- [85] V. PETKOV, M. ZWORSKI *Semi-classical estimates on the scattering determinant*, *Ann. Henri Poincaré* **2** (2001), 675-711.
- [86] CH. POMMERENKE, *Boundary Behavior of Conformal Maps*, *Grund. Math. Wiss.* **299** (1992), Springer-Verlag.

- [87] A. PUSHNITSKI, G. D. RAIKOV, C. VILLEGAS-BLAS, *Asymptotic Density of Eigenvalue Clusters for the Perturbed Landau Hamiltonian*, preprint on <http://arxiv.org/abs/1110.3098>.
- [88] A. PUSHNITSKI, G. V. ROZENBLUM, *Eigenvalue Clusters of the Landau Hamiltonian in the Exterior of a Compact Domain*, *Documenta Math.* **12** (2007), 569-586.
- [89] G. D. RAIKOV, *Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with homogeneous magnetic potential and decreasing electric potential. I. Behaviour near the essential spectrum tips*, *Commun. P.D.E.* **15** (1990), 407-434.
- [90] G. D. RAIKOV, *Border-line eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with electromagnetic potential*, *Int. Equat. Op. Theory* **14** (1991), 875-888.
- [91] G. D. RAIKOV, *Eigenvalue asymptotics for Schrödinger operator in strong constant magnetic fields*, *Comm. Part. Diff. Equat.* **23** (1998), 1583-1619.
- [92] G. D. RAIKOV, *Eigenvalue asymptotics for Pauli operator in strong nonconstant magnetic fields*, *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), 1603-1636.
- [93] G. D. RAIKOV, *Eigenvalue asymptotics for Dirac operator in strong nonconstant magnetic fields*, *Math. Phys. Electron. J.* **5** (1999), paper no. 22p.
- [94] G. D. RAIKOV, *Spectral asymptotics for the perturbed 2D Pauli Operator with oscillating magnetic Fields. I. Non-zero mean value of the magnetic field*, *Markov Process. Related Fields* **9** (2003), 775-794.
- [95] G. D. RAIKOV, *Low Energy Asymptotics of the SSF for Pauli Operators with Nonconstant Fields*, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **46** (2010), 565-590.
- [96] G. D. RAIKOV, S. WARZEL, *Quasi-classical versus non-classical spectral asymptotics for magnetic Schrödinger operators with decreasing electric potentials*, *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 1051-1072.
- [97] M. REED, B. SIMON, *Scattering Theory III*, *Methods of Modern Mathematical Physics*, (1979), Academic Press, INC.
- [98] S. RICHARD, R. TIEDRA DE ALDECOA, *On the spectrum of magnetic Dirac operators with Coulomb-type perturbations*, *J. Functional Analysis* **250** (2007), 625-641.
- [99] M. RIESZ, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, *Acta Math.* **49** (1926), 465-497.
- [100] G. V. ROZENBLUM, *Distribution of the discrete spectrum of singular differential operators*, *Dokl. AN SSSR* **202** (1972), 1012-1015; *Izv. VUZov, Matematika* **1** (1976), 75-86.
- [101] Y. SAITO, T. UMEDA, *The asymptotic limits of zero modes of massless Dirac operators*, *Lett. Math. Phys.* **83** (2008), 97-106.
- [102] Y. SAITO, T. UMEDA, *The zero modes and zero resonances of massless Dirac operators*, *Hokkaido Math. J.* **37** (2008), 363-388.
- [103] Y. SAITO, T. UMEDA, *Eigenfunctions at the threshold energies of magnetic Dirac operators*, *Reviews in Mathematical Physics*, **23** (2011), 155-178.

- [104] D. SAMBOU, *Résonances près de seuils d'opérateurs magnétiques de Pauli et de Dirac*, *Canad. J. Math.* **65** (5), (2013), 1095–1124.
- [105] D. SAMBOU, *Lieb-Thirring type inequalities for non self-adjoint perturbations of magnetic Schrödinger operators*, submitted, preprint on <http://arxiv.org/abs/1301.5169>.
- [106] D. SAMBOU, *Counting function of magnetic resonances for some non-definite sign perturbations*, in preparation.
- [107] D. SAMBOU, *Quantitative bounds on the discrete spectrum of non self-adjoint quantum magnetic Hamiltonian*, in preparation.
- [108] P. SEBA, *The complex scaling method for Dirac resonances*, *Lett. Math. Phys.* **16** (1988), 51-59.
- [109] B. SIMON, *On the number of bound states of two-body Schrödinger operators*, A review in "Studies in Mathematical Physics. Essays in Honor of Valentine Bargmann", pp. 305-326, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
- [110] B. SIMON, *Resonances and complex scaling, a rigorous overview*, *Int. J. Quantum chemistry*, **14** (1978), 529-542.
- [111] B. SIMON, *The definition of molecular resonance curves by the method of exterior complex scaling*, *Phys. Lett.* **71** A (1979), 211-214.
- [112] B. SIMON, *Trace ideals and their applications*, *Lond. Math. Soc. Lect. Not. Series*, **35** (1979), Cambridge University Press.
- [113] J. SJÖSTRAND, *Lectures on resonances*, preprint on [www.math.polytechnique.fr/~sjostrand/](http://www.math.polytechnique.fr/~sjostrand/).
- [114] J. SJÖSTRAND, *Weyl law for semi-classical resonances with randomly perturbed potentials*, preprint on <http://arxiv.org/abs/1111.3549>.
- [115] J. SJÖSTRAND, *A trace formula and review of some estimates for resonances*, in *Microlocal analysis and spectral theory (Lucca, 1996)*, 377-437, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci, 490, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ. 1997.
- [116] J. SJÖSTRAND, *Resonances for bottles and trace formulae*, *Math. Nachr.* **221** (2001), 95-149.
- [117] J. SJÖSTRAND, *Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems*, *Duke Math. J.* **60** (1990), 1-57.
- [118] J. SJÖSTRAND, M. ZWORSKI, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, *J. Amer. Soc.* **4** (1991), 729-769.
- [119] J. SJÖSTRAND, M. ZWORSKI, *Distribution of scattering poles near the real axis*, *Comm. Part. Diff. Equat.* **17** (1992), 1021-1035.
- [120] J. SJÖSTRAND, M. ZWORSKI, *The complex scaling method for scattering by strictly convex obstacles*, *Ark. Mat.* **33** (1995), 135-172.



- [121] A. V. SOBOLEV, *Asymptotic behavior of the energy levels of a quantum particle in a homogeneous magnetic field, perturbed by a decreasing electric field, I*, J. Sov. Math. **35** (1986), 2201-2212.
- [122] A. SOURISSE, *Propriétés spectrales de l'opérateur de Dirac avec un champ magnétique intense*, Thèse au laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN) N.E.D.: 0366-259. <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/jeanleray/theses-hdrs/arnaud-sourisse>
- [123] P. STEFANOV, *Sharp upper bounds on the number of the scattering poles*, J. Funct. Anal. **231**(1) (2006), 111-142.
- [124] H. TAMURA, *Asymptotic distribution of eigenvalues for Schrödinger operators with homogeneous magnetic fields*, Osaka J. Math, **25** (1988), 633-647.
- [125] S. H. TANG, M. ZWORSKI, *Resonances expansions of scattered waves*, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), 1305-1334.
- [126] R. TIEDRA DE ALDECOA, *Asymptotics near  $\pm m$  of the spectral shift function for Dirac operators with non-constant magnetic fields*, Comm. Part. Diff. Equa. **36** (2011), 10-41.
- [127] B. THALLER, *The Dirac equation*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [128] G. O. THORIN, *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*, Kungl. Fys-iografiska Saellskapet i Lund Forhaendlingar **8** (1939), no. 14.
- [129] B. R. VAINBERG, *On the analytic properties of the resolvent for a certain class of operator pencils*, Math. Sb **77**(119) (1968) no. 2, Math. USSR. Sb. **6** (1968), no. 2.
- [130] G. VODEV, *Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992).
- [131] X. P. WANG, *Barrier for resonances in strong magnetic fields*, Comm. Part. Dif. Equ. **17** (1992), 1539-1566.
- [132] T. WEIDL, *On the Lieb-Thirring constants  $L_{\gamma,1}$  for  $\gamma \geq 1/2$* , Comm. Math. Phys. **178** (1996), 135-146.
- [133] D. R. YAFAEV, *Mathematical scattering theory. General theory*, Trans. Math. Mono. **105** (1992), AMS, Providence. RI.
- [134] M. ZERZERI, *Majoration du nombre de résonances près de l'axe réel pour une perturbation abstraite a support compact du laplacien*, Commun. in Partial Diff. Equat. **26**, Issue 11-12 (2001), 2121-2188.
- [135] M. ZWORSKY, *Distribution of poles for scattering on the real line*, J. Funct. Anal **73** (1987), 277-296.
- [136] M. ZWORSKY, *Sharp polynomial bounds on the number of the scattering poles*, Duke Math. J. **59** (1989), 311-323.
- [137] M. ZWORSKY, *Sharp polynomial bounds on the number of the scattering poles of radial potentials*, J. Funct. Anal. **82** (1989), 370-403.