HAL
open science

Arrangements d'hyperplans

Pauline Bailet

▶ **To cite this version:**

Pauline Bailet. Arrangements d'hyperplans. Mathématiques générales [math.GM]. Université Nice Sophia Antipolis, 2014. Français. NNT : 2014NICE4028 . tel-01059809

HAL Id: tel-01059809

https://theses.hal.science/tel-01059809v1

Submitted on 2 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Nice - Sophia Antipolis - UFR Sciences
Ecole Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Nice - Sophia Antipolis
Spécialité : Mathématiques

présentée et soutenue par

Pauline BAILET

Arrangements d'hyperplans

Thèse dirigée par **Alexandru DIMCA**
soutenue le 11 Juin 2014

Membres du jury et rapporteurs

M.	A. Dimca	Professeur, Nice	Directeur de thèse
M.	M. Granger	Professeur, Angers	Examinateur
M.	S. Papadima	Directeur de Recherche, Bucarest	Examinateur
M.	A. Parusinski	Professeur, Nice	Président du jury
M.	J. Vallès	Professeur, Pau	Examinateur et rapporteur
M.	A. Suciu	Professeur, Boston	Rapporteur

Remerciements

Avant tout, je voudrais exprimer toute ma gratitude à mon Directeur de thèse, Alexandru Dimca, pour avoir dirigé mes recherches et m'être toujours venu en aide quand j'en avais besoin. Je le remercie aussi bien pour ses qualités humaines, sa grande gentillesse et sa disponibilité, que pour m'avoir fait confiance en me donnant la chance de commencer la recherche à ses côtés. Il m'a appris énormément de choses, m'a fait découvrir le monde de la recherche, m'a donné l'occasion d'aller à de nombreuses conférences, et surtout m'a conforté dans mon envie de poursuivre dans cette voie. Je garderai toujours un très bon souvenir de mon doctorat, et c'est essentiellement grâce à lui.

Je tiens ensuite à remercier chaleureusement mes rapporteurs : Alexandru Suciu, de Northeastern University, qui s'est intéressé à mon travail et a toujours été disponible pour m'aider quant à mes projets professionnels ; Jean Vallès, qui est aussi un membre du jury, et qui a consacré beaucoup de temps à la lecture de ma thèse et m'a aidé à l'améliorer en la corrigeant méticuleusement.

J'aimerais également remercier les autres membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail et d'assister à ma soutenance : Michel Granger, Adam Parusinski, et Stefan Papadima, de l'Institut de Mathématique de l'Académie Roumaine, qui a accepté de se déplacer jusqu'à Nice malgré la distance.

Je souhaiterais remercier Masahiko Yoshinaga, de l'Université d'Hokkaido, pour avoir porté un grand intérêt à mes recherches et accepté que j'inclue nos résultats dans cette thèse. C'est avec grand plaisir que j'ai travaillé avec lui.

Mes remerciements vont aussi vers Daniela Anca Măcinic, de l'Institut de Mathématique de l'Académie Roumaine, et Graham Denham, de Western University, pour leurs suggestions quant à mes recherches. Merci à Gabriel Sticlaru pour son aide en informatique.

Un grand merci aussi aux Professeurs de mon groupe de travail qui se sont impliqués dans mes recherches, notamment en assistant à toutes mes présentations : Alexandru Dimca, Adam Parusinski, et Michel Merle, à qui j'aimerais particulièrement exprimer toute ma reconnaissance, pour m'avoir toujours rassurée subtilement et permis d'évoluer grâce à de longues conversations durant toutes ces années. Je pense aussi à Philippe Maisonobe et André Hirschowitz, qui se sont montrés disponibles pour moi.
Je ne vais pas énumérer ici tous les Professeurs du Laboratoire J.A. Dieudonné qui

se sont montrés présents, mais je les remercie tous également.

Je remercie également tout le personnel du Laboratoire J.A. Dieudonné qui rend quotidiennement ce lieu de travail très convivial, et bien sûr l'Ecole Doctorale, qui m'a offert l'opportunité d'entreprendre un doctorat.

J'aimerais exprimer à mes proches combien leur soutien m'a été précieux. Cyril, tu sais ce que je pense de nous ; Lenna, ta joie de vivre me remonte toujours le moral ; Saloua, ta douceur m'a toujours réconfortée.

J'ai une pensée pour mes amis du Laboratoire, tout particulièrement pour Bienvenu, Giovanni, Jean-Baptiste, François et Jean-Marc, que je remercie pour leur bonne humeur et leur gentillesse. Merci JB$^+$ pour m'avoir expliqué beaucoup de choses sur la fibration de Milnor !

Nancy, je ne suis pas très démonstrative mais tu vois, je te réserve un paragraphe : même si tu ne t'en rends pas toujours compte, ta simple présence au laboratoire a rendu ces trois années de thèse encore plus motivantes, car non seulement nous partageons toujours de très bons (et drôles) moments quand nous sommes ensemble, mais aussi car tu as la main sur le coeur et tu as toujours été là pour moi.

Yoann, je suis tellement heureuse de t'avoir rencontré... Merci pour ta patience, je sais que je suis parfois insupportable ! Ton amour me comble de bonheur et ces dernières années ne seraient pas si belles sans toi.

Je souhaite remercier du fond du coeur mes parents, sans qui je ne serais rien. L'amour et le soutien que vous m'avez offerts ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Vous m'avez aidé dans tout ce que j'ai voulu entreprendre, et avez toujours su me rendre heureuse.

Résumé

Cette thèse est dédiée à l'étude des arrangements d'hyperplans complexes. Elle introduit les objets de base et les résultats classiques de la théorie des arrangements d'hyperplans. Puis elle se consacre à l'étude de la fibre de Milnor F d'un arrangement d'hyperplans complexe et central, munie de la monodromie $h : F \to F$, qui induit un opérateur de monodromie $h^* : H^*(F, \mathbb{C}) \to H^*(F, \mathbb{C})$ sur les groupes de cohomologie. On s'intéresse à la problématique suivante : *peut-on déterminer h^*, ou au moins les nombres de Betti $b_q(F) = dim H^q(F, \mathbb{C})$, à partir de l'information contenue dans le treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$ de l'arrangement, qui codifie sa combinatoire ?*
Il y a de nombreux moyens d'aborder cette question : en utilisant la cohomologie du complémentaire projectif de l'arrangement à coefficients dans certains systèmes locaux, en considérant l'algèbre d'Orlik-Solomon et les variétés de raisonance, ou encore en utilisant la théorie de Hodge. Nous parcourerons ces différents points de vue tout au long de cette thèse. En fait, les résultats obtenus donneront à chaque fois des situations où l'opérateur de monodromie h^* est l'identité. Ils répondent donc à notre problématique dans certaines situations, car dans ce cas le groupe de cohomologie correspondant $H^*(F, \mathbb{C})$ est complètement déterminé par le treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$.

Le premier résultat principal donne une large classe d'arrangements pour lesquels $h^1 : H^1(F, \mathbb{C}) \to H^1(F, \mathbb{C})$ est l'identité. On construit un nouveau graphe d'arrangement, dont la connexité va impliquer l'annulation du premier groupe de cohomologie d'un certain complexe d'Aomoto, ce qui va nous permettre de conclure.
Le deuxième résultat, obtenu avec M. Yoshinaga, est un théorème du même type, mais qui s'applique à des arrangements de droites dans l'espace projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ pour lesquels il existe une droite ayant un seul point de multiplicité supérieure ou égale à trois. On construit deux nouveaux homomorphismes d'algèbre d'Orlik-Solomon, et on donne l'annulation de certains sous-espaces propres de h^1, avec des conditions sur les valeurs propres de la monodromie et les multiplicités des points d'intersection de l'arrangement.
Enfin, le troisième résultat principal considère un arrangement central et essentiel dans $\mathbb{C}^4$, et la structure de Hodge mixte des groupes de cohomologie de sa fibre de Milnor. Il donne l'équivalence entre la trivialité de h^* sur tous les groupes de cohomologie $H^*(F, \mathbb{C})$, la nullité des coefficients non entiers du spectre de l'arrangement, et la nullité des nombres de Hodge mixte $h^{a,b}(H^q(F, \mathbb{C}))$, $a \neq b$.

mots-clés : arrangement d'hyperplans, treillis d'intersection, fibre de Milnor, monodromie.

Abstract

This Ph.D. thesis studies complex hyperplane arrangements. It introduces the basic tools and results of the hyperplane arrangements theory. Then, it focuses on the Milnor fiber F and the monodromy $h : F \to F$, which induces a monodromy operator $h^* : H^*(F, \mathbb{C}) \to H^*(F, \mathbb{C})$ at cohomology levels. Our aim is to study the following open question : *is it possible to determinate h^*, or at least the Betti numbers $b_q(F) = dimH^q(F, \mathbb{C})$, just using the information contained in the intersection lattice $L(\mathcal{A})$ of the arrangement, which codifies its combinatorics ?*
This question is related to many topics : cohomology of the projective complement of the arrangement with coefficients in certain local systems, Orlik-Solomon algebra and resonance varieties, mixed Hodge theory. We will use all of these points of view, and give three main theorems. In fact, our results describes situations where the action of the monodromy on the Milnor fiber is trivial. Hence they answer our question in special cases, because for such a situation the corresponding cohomology group of the Milnor fiber is completely determined by the intersection lattice.

Our first result gives a large class of arrangements such that h^1 is the identity. We construct a new graph, whose connectivity implies the nullity of the cohomology of a certain Aomoto complex.
The second result, obtained through a joint work with M. Yoshinaga, applies to projective line arrangements in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, such that there exists a line containing exactly one point with multiplicity greater or equal to three. We construct two new degeneration homomorphisms of Orlik-Solomon algebras, and give conditions on the intersection point multiplicities in the arrangement and the eigenvalues of the monodromy, such that the corresponding eigenspaces are zero.
Finally, the third result considers the mixed Hodge stucture of the cohomology of the Milnor fiber of a central and essential arrangement in $\mathbb{C}^4$. It establishes an equivalence between triviality of the monodromy, Tate properties, and the nullity of the non integer spectrum's coefficients.

Keywords : hyperplane arrangement, intersection lattice, Milnor fiber, monodromy.

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

Table des matières

1 Introduction **9**

2 Arrangements d'hyperplans affines et projectifs **12**
2.1 Notions de base 12
2.2 Treillis d'intersection et ses propriétés 14
2.3 Polynôme caractéristique 17
2.4 Algèbre d'Orlik-Solomon d'un arrangement d'hyperplans 22
2.4.3 Algèbre d'Orlik-Solomon d'un arrangement affine 23
2.4.15 Structure de l'algèbre d'Orlik-Solomon 29
2.4.18 Cohomologie du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans 31
2.4.22 Variétés de résonance 31
2.5 Classes de Chern-Schwartz-MacPherson d'un arrangement d'hyperplans 35

3 Fibre de Milnor des arrangements d'hyperplans **41**
3.1 Systèmes locaux et arrangement d'hyperplans 41
3.2 Fibre de Milnor d'un arrangement d'hyperplans 48
3.3 Fonction Zeta de la monodromie 57

4 Calculs explicites et deux théorèmes d'annulation **60**
4.1 Fibre de Milnor de l'arrangement des tresses 60
4.2 Le premier groupe d'homologie $H_1(F_{\mathcal{A}})$ pour les arrangements graphiques 64
4.3 Un premier théorème d'annulation 67
4.4 Un deuxième théorème d'annulation pour un arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 79

5 Structure de Hodge de la fibre de Milnor des arrangements d'hyperplans **94**
5.1 Structure de Hodge de la fibre de Milnor 94

5.2 Le spectre d'un arrangement 97

6 Conclusion **120**

Chapitre 1

Introduction

Les arrangements d'hyperplans sont devenus un objet central en Mathématiques depuis les travaux de V.I. Arnold, E. Brieskorn, P. Deligne, P. Orlik et L. Solomon, voir par exemple l'exposé Bourbaki [8] fait par P. Cartier en 1980. Le but principal de cette théorie est d'exprimer certains invariants topologiques ou géométriques (par exemple l'algèbre de cohomologie du complémentaire $M(\mathcal{A})$ d'un arrangement d'hyperplans complexe $\mathcal{A}$) en fonction du treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$ de l'arrangement $\mathcal{A}$, qui codifie la combinatoire de l'arrangement.

Le Chapitre 2 introduit les notions et les résultats de base concernant le treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$, le polynôme caractéristique $\chi(\mathcal{A}, t)$, le polynôme de Poincaré $\pi(\mathcal{A}, t)$, l'algèbre d'Orlik-Solomon $A^*(\mathcal{A})$ et les variétés de résonance $\mathcal{R}_k^q(\mathcal{A})$.

La Proposition 2.4.12 donne la description de l'algèbre d'Orlik-Solomon $A^*(\mathcal{A})$ pour un arrangement projectif $\mathcal{A}$. Ce résultat est bien connu, mais la preuve donnée ici est originale, car elle n'utilise pas la relation des algèbres d'Orlik-Solomon avec la cohomologie du complémentaire.

A la fin de ce chapitre on discute des classes de Chern-Schwartz-MacPerson d'un arrangement complexe $\mathcal{A}$, suivant un article de P. Aluffi. Le résultat principal est le Théorème 2.5.3 qui met en évidence encore une fois le rôle clef du polynôme caractéristique $\chi(\mathcal{A}, t)$ dans toute question qui implique des invariants additifs. La Remarque 2.5.5 montre que ces classes caractéristiques sont bien différentes des classes de Chern usuelles, donc elles doivent être utilisées avec précaution.

Le Chapitre 3 commence l'étude de la fibre de Milnor $F = F_{\mathcal{A}}$ et de l'operateur de monodromie $h : F \to F$ associés à un arrangement complexe et central $\mathcal{A}$. On discute d'abord des systèmes locaux et des connexions intégrables sur le complémentaire $M(\mathcal{A})$, on introduit les variétés caractéristiques et on explique la relation avec les variétés de résonance dans le Théorème 3.1.14. La relation bien connue entre les espaces propres de l'operateur de monodromie $h^* : H^*(F, \mathbb{C}) \to H^*(F, \mathbb{C})$ et la cohomologie tordue $H^*(M(\mathcal{A}), \mathcal{L})$ est donnée dans le Théorème 3.2.5.

Ensuite on rappelle le Théorème de Kohno 3.2.8 qui donne des conditions de non-résonance pour certains systèmes locaux sur $M(\mathcal{A})$. Ce résultat s'applique en général seulement si l'arrangement $\mathcal{A}$ est essentiel. A l'aide d'une construction géométrique classique (projection linéaire à partir d'un sous-espace linéaire), nous expliquons comment ce résultat peut être utilisé pour les arrangements qui ne sont pas essentiels, voir le Théorème 3.2.11.

Ce chapitre s'achève par un rappel de résultats d'annulation de la cohomologie tordue dus à Cohen-Dimca-Orlik, voir le Théorème 3.2.15 et la Remarque 3.2.16, qui seront utilisés plus tard.

Le Chapitre 4 a pour but de montrer la difficulté de la question ouverte principale suivante :
peut-on déterminer l'operateur de monodromie $h^* : H^*(F, \mathbb{C}) \to H^*(F, \mathbb{C})$, *ou au moins les nombres de Betti* $b_q(F)$ *de la fibre de Milnor* F, *à partir de l'information contenue dans le treillis d'intersection* $L(\mathcal{A})$ *?*
En dépit d'importants progrès récents, voir [45] et [46], nous sommes encore loin d'avoir la réponse complète à cette question.

La première section de ce chapitre présente les résultats de S. Settepanella sur la fibre de Milnor de l'arrangement des tresses, voir la Remarque 4.1.4 pour les cas en petite dimension et le Théorème 4.1.5 pour un résultat général de stabilité et d'annulation. La deuxième section présente les résultats de A. Măcinic et S. Papadima sur le premier nombre de Betti des arrangements graphiques.

Un premier *résultat original principal de cette thèse* est présenté dans la troisième section : il s'agit d'un résultat d'annulation assez technique mais qui couvre un large nombre de cas, voir le Théorème 4.3.1. L'idée centrale de la preuve est d'abord la construction d'un graphe à partir de l'information contenue dans le treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$ qui nous permet d'aller au-delà de la classe des arrangements graphiques. Ensuite, nous utilisons un résultat clef dû à S. Papadima et A. Suciu sur les variétés de résonance à coefficients dans un corps fini, voir 4.2.8, ainsi que certains résultats d'annulation dus à Cohen-Dimca-Orlik. Dans le Corollaire 4.3.7 nous appliquons ce théorème aux arrangements des tresses et nous retrouvons les résultats de S. Settepanella et de A. Măcinic et S. Papadima sur le premier nombre de Betti $b_1(F)$ dans ce cas particulier.

Le deuxième *résultat original principal de cette thèse* est le Théorème 4.4.5, obtenu lors d'un travail en commun avec M. Yoshinaga, voir [3]. C'est un résultat d'annulation du même type que celui du Théorème 4.3.1, mais qui s'applique aux arrangements de droites projectives $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ pour lesquels il existe une droite $L \in \mathcal{A}'$ ayant un seul point d'intersection de multiplicité ≥ 3. Le cas où il existe une droite L n'ayant aucun point d'intersection de multiplicité ≥ 3 a été traité par A. Libgober en 2002, voir [25]. La preuve du Théorème 4.4.5 utilise le résultat de S. Papadima et A. Suciu mentionné ci-dessus et notre Théorème 4.4.9 qui donne

un résultat d'annulation pour la cohomologie de certains complexes d'Aomoto.

Le Chapitre 5 considère la théorie de Hodge de la fibre de Milnor F. En effet, F étant une variété algébrique lisse, sa cohomologie rationnelle $H^*(F, \mathbb{Q})$ admet une structure de Hodge mixte canonique d'après P. Deligne. On peut donc se poser la question de calculer, par exemple, les nombres de Hodge mixtes $h^{a,b}(H^q(F, \mathbb{C}))$. La monodromie h étant donnée par un morphisme algébrique, on en déduit que h^* est compatible avec cette structure de Hodge mixte. Il y a déjà bon nombre de résultats ici, dus à A. Dimca, G. Lehrer et S. Papadima, voir par exemple le Théorème 5.1.10 et la Proposition 5.2.5. Les résultats les plus précis sont reliés à la notion du spectre d'une singularité et sont dus à N. Budur et M. Saito, voir le Théorème 5.2.6 qui dit que le spectre d'un arrangement $\mathcal{A}$ est déterminé par le treillis $L(\mathcal{A})$ et le Théorème 5.2.7 qui donne une formule pour calculer ce spectre pour les arrangements de droites dans le plan projectif.

En utilisant cette formule, nous avons déterminé les spectres pour un arrangement de droites de degré 6 (correspondant à l'arrangement de tresses $\mathcal{A}_3$) et un arrangement de droites de degré 9 (l'arrangement de Ceva), voir les Corollaires 5.2.9 et 5.2.13. En ajoutant des informations sur l'action de la monodromie h^* sur $H^*(F, \mathbb{C})$, nous avons déterminé tous les nombres de Hodge équivariants $h^{a,b}(H^q(F)_\lambda)$ dans ces deux cas, voir les Corollaires 5.2.11 et 5.2.14.

Cela nous a permis de découvrir et de corriger une erreur dans l'article [17] concernant les nombres de Hodge équivariants de l'arrangement de Ceva.

La dernière partie de ce chapitre considère un arrangement $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^4$ central et essentiel, et discute de l'équivalence entre la trivialité de la monodromie h^* sur sa fibre de Milnor F, la nullité des coefficients non entiers de son spectre, et la nullité des nombres de Hodge mixtes $h^{a,b}(H^q(F, \mathbb{C}))$, $\forall a \neq b$. Cette question a déjà été considérée par A. Dimca dans le cas d'un arrangement central et essentiel de $\mathbb{C}^3$, voir [16, Théorème 1.1], en utilisant les formules 5.2.7 données par N. Budur et M. Saito. Plus récemment, Y. Yoon a obtenu des formules pour calculer les coefficients du spectre d'un arrangement central dans $\mathbb{C}^4$, voir [44].

Le troisième *résultat principal de cette thèse* est le Théorème 5.2.16, qui établit cette équivalence pour un arrangement central et essentiel de $\mathbb{C}^4$, en utilisant les nouvelles formules de Y. Yoon. Ce résultat est intéressant, car il a été prouvé dans [16] que cette équivalence ne peut avoir lieu que pour des arrangements $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ en petite dimension, $n \leq 6$.

Chapitre 2

Arrangements d'hyperplans affines et projectifs

2.1 Notions de base

Définition 2.1.1 *Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension $n+1$.*

1. *On dit que $H \subset V$ est un <u>hyperplan</u> si H est un sous-espace vectoriel de V de dimension n.*
2. *Un ensemble fini $\mathcal{A} = \{H_i\}_{i \in I}$ d'hyperplans est un <u>arrangement d'hyperplans</u>.*
3. *On dit que $H \subset V$ est un <u>hyperplan affine</u> si il existe $v \in V$ et $H_0 \subset V$ un sous-espace vectoriel de dimension n tels que $H = v + H_0$.*
4. *On dit que $\mathcal{A} = \{H_i\}_{i \in I}$ est un <u>arrangement affine</u> si les H_i sont des hyperplans affines.*
5. *On dit que l'arrangement affine $\mathcal{A}$ est <u>central</u> si $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$. Par translation on supposera alors que $0 \in \bigcap_{i \in I} H_i$.*
6. *On dit que l'arrangement central $\mathcal{A}$ est <u>essentiel</u> si $\bigcap_{i \in I} H_i = \{0\}$.*
7. *On dit qu'un arrangement central $\mathcal{A}$ est <u>générique</u> si pour toute famille $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_p}\} \subset \mathcal{A}$ on a :*
$$codim\, H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_p} = min\{p, n+1\}.$$
En particulier, si $p \geq n+1$ on a $H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_p} = \{0\}$.

Exemple 2.1.2 1. *<u>L'arrangement de Boole dans $\mathbb{K}^{n+1}$</u> est l'arrangement constitué des hyperplans coordonnées : $x_i = 0,\ 1 \leq i \leq n+1$. C'est un arrangement central de $n+1$ hyperplans qui est essentiel.*

2. *L'arrangement des tresses dans $\mathbb{K}^{n+1}$ est l'arrangement constitué des hyperplans $H_{ij} : x_i - x_j = 0,\ 1 \leq i < j \leq n+1$. C'est un arrangement central de $\binom{n+1}{2}$ hyperplans qui n'est pas essentiel car $\cap H_{ij} = D$, où D est la droite définie par $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$.*
3. *L'arrangement de $\mathbb{K}^3$ défini par l'équation $xyz(x+y+z) = 0$ est un exemple d'arrangement générique.*

Définition 2.1.3 *(Espace projectif)*
Soit V un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. L'espace projectif $\mathbb{P}(V) = V\backslash\{0\}/\mathbb{K}^*$ est l'ensemble des droites de V passant par l'origine, donc l'ensemble quotient pour la relation d'équivalence sur $V\backslash\{0\}$:

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{K}^* \mid u = a \cdot v.$$

On notera $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.
Soit $H \subset V$ un hyperplan. Alors $H' = H\backslash\{0\}/\mathbb{K}^* \subset \mathbb{P}(V)$ est un hyperplan projectif dans $\mathbb{P}(V)$. La correspondance $H \to H'$ établit une bijection entre les arrangements centraux dans V et les arrangements projectifs dans $\mathbb{P}(V)$.

Exemple 2.1.4 *On a par exemple :*

- $\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\backslash\{0\}/\mathbb{C}^* = \{point\}$.
- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2\backslash\{0\}/\mathbb{C}^* \simeq S^2 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.5 *L'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ est une compactification de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{K}^n = \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$.*

Il y a une relation étroite entre un arrangement central $\mathcal{A}$ et l'arrangement projectif associé $\mathcal{A}'$. Par exemple on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.6 *Soient $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans central non vide, et $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ l'arrangement projectif associé. On pose*

$$M(\mathcal{A}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \ \text{ et } \ M(\mathcal{A}') = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \bigcup_{H' \in \mathcal{A}'} H'.$$

Alors il existe un isomorphisme naturel de variétés algébriques

$$f : M(\mathcal{A}) \to M(\mathcal{A}') \times \mathbb{K}^*.$$

Démonstration de la Proposition 2.1.6 :

Soient $H \in \mathcal{A}$ et $l_H(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1}$ une équation linéaire telle que $H := \{x \in \mathbb{K}^{n+1} \mid l_H(x) = 0\}$. On définit f et g par :

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ M(\mathcal{A}) & \longrightarrow & M(\mathcal{A}') \times \mathbb{K}^* \ , \ f(x) = ([x], l_H(x)), \text{ et} \\ g \ : \ M(\mathcal{A}') \times \mathbb{K}^* & \longrightarrow & M(\mathcal{A}) \ , \ g([x], a) = \frac{a}{l_H(x)}\, x, \end{array}$$

où $[x]$ est la classe de x dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.
On a que g est bien définie, car $g(x)$ ne dépend pas du représentant de la classe de x. En effet, si $[x]'$ est un autre représentant de la classe de x, alors il existe un u dans $\mathbb{K}^*$, tel que $[x]' = u \cdot [x]$ et on a bien $g([x]', a) = g(u \cdot [x], a) = g([u \cdot x], a)$ $= \frac{a}{l_H(u \cdot x)}\, u \cdot x = \frac{a}{l_H(x)}\, x$.
Enfin, on a $g \circ f = Id$ et $f \circ g = Id$ donc $g = f^{-1}$ et on a bien une bijection entre les deux variétés.

$\square$

Notations : Soit $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans dans V. On pose

$$L(\mathcal{A}) = \{\, X \ = \ H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_p} \ \mid \ H_{i_1}, ..., H_{i_p} \ \in \ \mathcal{A} \ , \ X \neq \emptyset \,\}.$$

Si $X \in L(\mathcal{A})$, alors on définit

$$\mathcal{A}_X = \{\, H \in \mathcal{A} \ \mid \ X \subset H \,\}.$$

Si $\mathcal{A}$ est central, on notera $V_{\mathcal{A}} = \bigcap\limits_{H \in \mathcal{A}} H$.

2.2 Treillis d'intersection et ses propriétés

On munit $L \ = \ L(\mathcal{A})$ d'une relation d'ordre $\leq$ telle que pour tous $X, Y \in L(\mathcal{A})$:

$$X \leq Y \ \Leftrightarrow \ X \supseteq Y.$$

On pose aussi :

$$X < Y \ \Leftrightarrow \ (\, X \leq Y \text{ et } X \neq Y \,).$$

Définition 2.2.1 *Un* <u>*treillis*</u> *L est un ensemble ordonné possédant un plus petit élément $\bar{0}$, un plus grand élément $\bar{1}$, et tel que les bornes inférieure $x \wedge y$ et supérieure $x \vee y$ existent pour tous x et y dans L.*
On appelle <u>*atome*</u> *un élément minimal de L distinct de $\bar{0}$.*

Exemple 2.2.2 *Soit $\mathcal{A} \subset V$ un arrangement central. Alors $L(\mathcal{A})$ muni de la relation d'ordre $\leq$ est un treillis tel que $\bar{0} = V$, $\bar{1} = V_{\mathcal{A}}$, les atomes sont les hyperplans de $\mathcal{A}$, $X \vee Y = X \cap Y$, et $X \wedge Y = \bigcap_{\substack{H \supset X \cup Y \\ H \in \mathcal{A}}} H$, $\forall X, Y \in L(\mathcal{A})$.*

Définition 2.2.3 *(Treillis d'intersection)*
Si $\mathcal{A} \subset V$ est un arrangement central, alors $L(\mathcal{A})$ muni de la relation d'ordre $\leq$ est un treillis. On l'appelle <u>*treillis d'intersection*</u> *de l'arrangement $\mathcal{A}$.*

Définition 2.2.4 *(Treillis géométrique)*
On dit qu'un treillis L est <u>*géométrique*</u> *si*

1. *$\forall x \in L$, $\exists\, a_1, a_2, ..., a_r$ des atomes tels que $x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_r$ $= (\cdots((a_1 \vee a_2) \vee a_3) \cdots \vee a_r)$. Le r minimal est appelé* <u>*rang*</u> *de x, noté $r(x)$, et on définit $r(L) = r(\bar{1})$.*
2. *$x < y \;\Rightarrow\; r(x) < r(y)$.*
3. *$r(x \vee y) + r(x \wedge y) \leq r(x) + r(y)$, $\forall\, x, y \in L$.*

Proposition 2.2.5 *Soit $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans central dans $V = \mathbb{K}^{n+1}$. Alors $L(\mathcal{A})$ est un treillis géométrique tel que :*

$$r(X) = codim(X) = dim(V) - dim(X).$$

En particulier,

$$r(L(\mathcal{A})) = r(V_{\mathcal{A}}) = codim(V_{\mathcal{A}}).$$

<u>**Démonstration de la Proposition 2.2.5 :**</u>

1. Les atomes sont les hyperplans de $\mathcal{A}$. Si $X = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_p} \in L(\mathcal{A})$, alors $X = H_{i_1} \vee \cdots \vee H_{i_p}$ et 1. de la Définition 2.2.4 est vérifié.
   De plus, p est minimal si et seulement si
   $H_{i_1} \supsetneq H_{i_1} \cap H_{i_2} \supsetneq \cdots \supsetneq H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_p}$. Or $codim(H_{i_1}) = 1$ donc
   $codim(H_{i_1} \cap H_{i_2}) = 2$, ... , $codim(H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_p}) = p$.
   On a donc bien $r(X) = codim(X)$.
2. $X < Y \Leftrightarrow Y \subsetneq X$ donc $dim(X) > dim(Y) \;\Rightarrow\; r(X) < r(Y)$.
3. On démontre ce point à partir de l'inégalité :
   $dim(X) + dim(Y) = dim(X \cap Y) + dim(X + Y) \leq dim(X \vee Y) + dim(X \wedge Y)$.

$\square$

Définition 2.2.6 *(Semi-treillis)*
Un <u>*semi-treillis*</u> *L est un ensemble partiellement ordonné tel que la borne inférieure $x \wedge y$ existe pour tous x, y dans L.*

Exemple 2.2.7 *Si $\mathcal{A} \subset V$ est un arrangement affine, alors $L(\mathcal{A})$ est un semi-treillis ayant pour plus petit élément $\bar{0} = V$.*

Lemme 2.2.8 *Un semi-treillis fini qui admet un unique élément maximal est un treillis.*

<u>Démonstration du Lemme 2.2.8 :</u>

Soient x et y dans L. Il suffit de prendre $x \vee y = \bigwedge_{\substack{x \leq z \\ y \leq z}} z$ qui existe bien car l'ensemble $\{ x \leq z,\ y \leq z \}$ est fini et non vide.

$\square$

Proposition 2.2.9 *Soit $\mathcal{A}$ un arrangement. Alors $L(\mathcal{A})$ est un semi-treillis. En particulier pour tous X, Y dans $L(\mathcal{A})$, $[X, Y] = \{ Z \in L(\mathcal{A}) \mid X \leq Z \leq Y \}$ est un treillis. En outre, $L(\mathcal{A})$ est un treillis si et seulement si $\mathcal{A}$ est central.*

<u>Démonstration de la Proposition 2.2.9 :</u>

On a que $L(\mathcal{A})$ est un ensemble partiellement ordonné, et si X et Y sont dans $L(\mathcal{A})$, alors $X \wedge Y = \bigcap_{\substack{H \supset X \cup Y \\ H \in \mathcal{A}}} H \neq \emptyset$ car $X \wedge Y \supset X \neq \emptyset$. Ainsi, $L(\mathcal{A})$ est un semi-treillis. De plus, $[X, Y]$ est un semi-treillis fini admettant pour unique élément maximal Y et c'est donc un treillis d'après le Lemme 2.2.8.
Montrons enfin : $L(\mathcal{A})$ est un treillis $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ est central.
$\Leftarrow$: si $\mathcal{A}$ est central, alors $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$ est non vide, et c'est le plus grand élément de $L(\mathcal{A})$. Ainsi, $L(\mathcal{A}) = [\bar{0}, \bar{1}]$ est un treillis (avec $\bar{0} = V$ et $\bar{1} = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$).
$\Rightarrow$: $L(\mathcal{A})$ est un treillis $\Rightarrow \exists X \in L(\mathcal{A})$ un élément maximal
$\Rightarrow H \supset X,\ \forall H \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \supset X \Rightarrow \mathcal{A}$ est central.

$\square$

2.3 Polynôme caractéristique

Définition 2.3.1 *Soit L un ensemble fini ordonné par une relation $\leq$.*
On pose $x < y \;\Leftrightarrow\; x \leq y$ et $x \neq y$.
Soient $x, y \in L$, $x \leq y$, et $p \geq 0$. On appelle <u>*chaîne de longueur p de x à y*</u> *toute suite $x_0, x_1, \ldots, x_p$ d'éléments de L telle que*

$$x = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = y.$$

On note $C_p(x, y)$ le nombre de chaînes de longueur p de x à y.

Remarque 2.3.2 $C_0(x, x) = 1$, $C_0(x, y) = 0$, *si* $x < y$ *et* $C_p(x, x) = 0$, *si* $p \geq 1$.

Définition 2.3.3 *Soient $x, y \in L$, $x \leq y$. On définit la fonction de* <u>*Möbius-Rota*</u> *de L par la formule :*

$$\mu_L(x, y) = \sum_p (-1)^p C_p(x, y), \text{ et } \mu_L(x, y) = 0, \text{ si } x \not\leq y.$$

Le lemme suivant caractérise totalement la fonction de Möbius-Rota :

Lemme 2.3.4 *Il existe une unique fonction $\mu_L : L \times L \to \mathbb{Z}$ telle que*

$$\mu_L(x, x) = 1, \tag{2.1}$$

et

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_L(x, z) = 0 = \sum_{x \leq z \leq y} \mu_L(z, y), \quad \text{si } x < y. \tag{2.2}$$

Notation : Si $\bar{0}$ existe, on note $\mu_L(x) = \mu_L(\bar{0}, x)$.

Remarque 2.3.5 *La même définition s'applique aussi si L est un semi-treillis.*

Exemple 2.3.6 *(Le treillis des parties d'un ensemble)*
Soient S un ensemble fini et $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble des parties de S. Soit $\leq$ la relation d'ordre telle que

$$A \leq B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B.$$

On montre facilement par récurrence que $\mu(A, B) = (-1)^{|B| - |A|}$.

Proposition 2.3.7 *(Formule d'inversion de Möbius-Rota)*
Soient G un groupe abélien, $f : L \to G$, et g la fonction sommatoire associée :

$$\begin{aligned} g : L &\to G \\ x &\mapsto \sum_{y \leq x} f(y). \end{aligned}$$

Alors on a la formule d'inversion suivante :

$$f(x) = \sum_{y \leq x} \mu_L(y, x) \cdot g(y), \ \forall x \in L.$$

De même, si $g(x) = \sum_{y \geq x} f(y)$, *alors on a la formule :*

$$f(x) = \sum_{y \geq x} \mu_L(x, y) \cdot g(y), \ \forall x \in L.$$

Définition 2.3.8 *(Polynôme caractéristique et polynôme de Poincaré)*
Soit L un treillis géométrique. On définit le <u>*polynôme caractéristique combinatoire*</u> *de L par la formule :*

$$p(L, t) = \sum_{x \in L} \mu_L(x) \cdot t^{r(L) - r(x)}.$$

Si $L = L(\mathcal{A})$, on utilise la notation $p(\mathcal{A}, t)$.
On appelle <u>*polynôme caractéristique*</u> *de $\mathcal{A}$ le polynôme :*

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu_{L(\mathcal{A})}(x) \cdot t^{dim(x)}.$$

Enfin, on définit le <u>*polynôme de Poincaré*</u> *de l'arrangement $\mathcal{A}$ par :*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu_{L(\mathcal{A})}(x) \cdot (-t)^{r(x)}.$$

Remarque 2.3.9

1. *Si $e = dim(V_{\mathcal{A}})$, alors on a que $\chi(\mathcal{A}, t) = t^e p(\mathcal{A}, t)$, et $p(\mathcal{A}, 0) = \mu_L(\bar{1}) = \mu_L(V_{\mathcal{A}})$.*
   En particulier, si $\mathcal{A}$ est essentiel on a $\chi(\mathcal{A}, t) = p(\mathcal{A}, t)$.
2. *Les polynômes $\chi(\mathcal{A}, t)$ et $\pi(\mathcal{A}, t)$ peuvent être définis pour un arrangement affine quelconque en utilisant les mêmes formules et le semi-treillis $L(\mathcal{A})$.*
3. *Les polynômes $\chi(\mathcal{A}, t)$ et $\pi(\mathcal{A}, t)$ sont reliés par les formules suivantes :*
   $$\pi(\mathcal{A}, t) = (-t)^{n+1} \chi(\mathcal{A}, -t^{-1}), \ \text{ et } \ \chi(\mathcal{A}, t) = t^{n+1} \pi(\mathcal{A}, -t^{-1}).$$
4. *Soit R un anneau principal. On a que l'homologie $H_*(M(\mathcal{A}), R)$ du complémentaire $M(\mathcal{A})$ à coefficients dans R est un $R-$module de type fini.*
   On définit le q^e nombre de Betti de $M(\mathcal{A})$ par :

$$b_q(M(\mathcal{A})) = rang_R H_q(M(\mathcal{A}), R).$$

Comme cas particulier, si $R = \mathbb{K}$ est un corps alors le q^e nombre de Betti de $M(\mathcal{A})$ est :

$$b_q(M(\mathcal{A})) = dim_{\mathbb{K}} H_q(M(\mathcal{A}), \mathbb{K}).$$

En général, dans toute cette thèse, on ne précisera pas l'anneau ou le corps correspondant pour les rangs et les dimensions lorsque aucune confusion n'est possible.
Soit $P(M(\mathcal{A}), t)$ le polynôme de Betti-Poincaré de $M(\mathcal{A})$:

$$P(M(\mathcal{A}), t) = \sum_{q \geq 0} b_q(M(\mathcal{A})) \cdot t^q.$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.3.10 ([33]) *Les polynômes $P(M(\mathcal{A}), t)$ et $\pi(\mathcal{A}, t)$ coïncident.*

5. *Voyons maintenant $M(\mathcal{A})$ comme une variété $\mathbb{R}-$orientable de $\mathbb{R}^{2n+2}$.*
Soit $b_q^c(M(\mathcal{A})) = dim_{\mathbb{C}} H_c^q(M(\mathcal{A}), \mathbb{C})$, où $H_c^q(M(\mathcal{A}), \mathbb{C})$ est la limite inductive de $H^q(M(\mathcal{A})\,,\, M(\mathcal{A}) - K)$ sur les K compacts.
Considérons le polynôme de Betti-Poincaré à supports compacts :

$$P_c(M(\mathcal{A}), t) = \sum_{q \geq 0} b_q^c(M(\mathcal{A})) t^q.$$

Alors le Théorème de dualité de Poincaré qui affirme que

$$H_c^q(M(\mathcal{A}), \mathbb{C}) \simeq H_{2n+2-q}(M(\mathcal{A}), \mathbb{C}),\ \forall q \geq 0,$$

montre que

$$b_q^c(M(\mathcal{A})) = b_{2n+2-q}(M(\mathcal{A})),\ \forall q \geq 0.$$

Finalement on trouve :

$$\begin{aligned} P_c(M(\mathcal{A}), t) &= \sum_{q \geq 0} b_{2n+2-q}(M(\mathcal{A})) t^q \\ &= \sum_{q \geq 0} b_q(M(\mathcal{A})) t^{2n+2-q} \\ &= t^{2n+2} \sum_{q \geq 0} b_q(M(\mathcal{A})) t^{-q} \\ &= t^{2n+2} \pi(\mathcal{A}, \tfrac{1}{t}). \end{aligned}$$

Exemple 2.3.11 1. *Si $\mathcal{A}$ est l'arrangement de Boole dans $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{C}^{n+1}$, alors*

$$\chi(\mathcal{A}, t) \ = \ p(\mathcal{A}, t) \ = \ (t-1)^{n+1}.$$

2. *Si $\mathcal{A}$ est l'arrangement des tresses dans $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{C}^{n+1}$, alors*

$$p(\mathcal{A},t) \;=\; (t-1)(t-2)\cdots(t-n) \;\; \textit{et} \;\; \chi(A,t) \;=\; t(t-1)(t-2)\cdots(t-n).$$

3. *Si $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\}$ est un arrangement générique dans $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{C}^{n+1}$, alors*

$$\chi(\mathcal{A},t) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{d}{k} (-1)^k t^{n+1-k} + \sum_{k=n+2}^{d} \binom{d}{k} (-1)^k. \tag{2.3}$$

Démonstration de 3. Exemple 2.3.11 :

Distinguons deux cas :

- si $1 \leq d \leq n+1$, alors on a un isomorphisme de treillis :
  $\phi : (L(\mathcal{A}), \leq) \longrightarrow (\mathcal{P}(S), \subseteq)$, où $S = \{1, \dots, d\}$,
  tel que $\phi(\cap_{i\in I} H_i) = I$, $\phi(\mathbb{R}^{n+1}) = \emptyset$, et $\phi(H_1 \cap \cdots \cap H_d) = S$.
  En effet, $\cap_{i\in I} H_i = \cap_{i\in J} H_i \Leftrightarrow I = J$ et $\cap_{i\in I} H_i \leq \cap_{i\in J} H_i \Leftrightarrow I \subseteq J$.
  Ainsi si $X = \cap_{i\in I} H_i$, alors $\mu_{L(\mathcal{A})}(X) = \mu_{\mathcal{P}(S)}(\phi(X)) = (-1)^{|I|} = (-1)^{codim(X)}$ d'après l'Exemple 2.3.6 et on a :

$$\chi(\mathcal{A},t) \;=\; \sum_{X\in L(\mathcal{A})} \mu_{L(\mathcal{A})}(X) t^{dimX} = \sum_{k=0}^{d} \sum_{\substack{X\in L(\mathcal{A}) \\ dim(X)=n+1-k}} (-1)^k t^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \tbinom{d}{k} (-1)^k t^{n+1-k} = t^{n+1-d}(t-1)^d.$$

- Si $d > n+1$, cette fois-ci nous ne pouvons pas trouver un isomorphisme de treillis entre $L(\mathcal{A})$ et $\mathcal{P}(S)$ car l'écriture de $\{0\}$ n'est plus unique.
  Cependant $L(\mathcal{A}) = \{0\} \sqcup L(\mathcal{A})_1$, avec $L(\mathcal{A})_1 = \{H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k} \,|\, k \leq n\}$.
  Soit $E = \{B \subseteq S \;\mid\; |B| \leq n\}$.
  On a une bijection entre les ensembles $L(\mathcal{A})_1$ et E. En effet, à un élément $H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k}$ de $L(\mathcal{A})_1$ correspond un unique $B = \{i_1, \dots, i_k\}$ de E. Ainsi,

$$\chi(\mathcal{A},t) \;=\; \sum_{X\in L(\mathcal{A})} \mu_{L(\mathcal{A})}(X) t^{dimX} = \mu_{L(\mathcal{A})}(\{0\}) + \sum_{X\in L(\mathcal{A})_1} \mu_{L(\mathcal{A})}(X) t^{dimX}$$

$$= \mu_{L(\mathcal{A})}(\{0\}) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X\in L(\mathcal{A})_1 \\ dim(X)=n+1-k}} (-1)^k t^{n+1-k}$$

$$= \mu_{L(\mathcal{A})}(\{0\}) + \sum_{k=0}^{n} \tbinom{d}{k} (-1)^k t^{n+1-k}.$$

  Reste à calculer $\mu_{L(\mathcal{A})}(\{0\})$.
  On a que $\mu_{L(\mathcal{A})}(\{0\}) = \mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0}, \{0\}) = \mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0}, \bar{1})$. Or $\sum_{\bar{0}\leq z\leq \bar{1}} \mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0}, z) \;=\; 0$

d'après le Lemme 2.3.4. Ainsi $\mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0},\bar{0}) + \binom{d}{1}\mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0},H_i)$
$+\binom{d}{2}\mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0},H_i\cap H_j)+\cdots+\binom{d}{n}\mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0},H_{i_1}\cap\cdots\cap H_{i_n}) + \mu_{L(\mathcal{A})}(\{0\}) = 0.$
On trouve finalement $\mu_{L(\mathcal{A})}(\{0\}) = -[\mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0},\bar{0}) + \binom{d}{1}\mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0},H_i)$
$+\binom{d}{2}\mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0},H_i\cap H_j) +\cdots+ \binom{d}{n}\mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0},H_{i_1}\cap\cdots\cap H_{i_n})] = -\sum_{k=0}^{n}\binom{d}{k}(-1)^k$
$= \sum_{k=n+1}^{d}\binom{d}{k}(-1)^k.$

□

Remarque 2.3.12 *Le Théorème 2.3.10 montre que les nombres de Betti du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}\subset\mathbb{C}^{n+1}$ peuvent être trouvés en calculant le polynôme de Poincaré $\pi(\mathcal{A},t)$ et sont donc entièrement déterminés par la combinatoire de $\mathcal{A}$. Par exemple, pour un arrangement $\mathcal{A}\subset\mathbb{C}^2$ contenant d hyperplans on trouve :*

$$b_0(M(\mathcal{A})) = 1,\ b_1(M(\mathcal{A})) = d,\ b_2(M(\mathcal{A})) = \sum_{k\geq 2} n_k(k-1),$$

où n_k est le nombre d'intersections $X\in L(\mathcal{A})$ vérifiant $|\mathcal{A}_X| = k$.
Plus généralement, si $\mathcal{A}\subset\mathbb{C}^{n+1}$ alors on a toujours :

$$b_0(M(\mathcal{A})) = 1,\ b_1(M(\mathcal{A})) = d,\ b_2(M(\mathcal{A})) = \sum_{k\geq 2} n_k(k-1),$$

où n_k est le nombre d'intersections $X\in L(\mathcal{A})$ de codimension 2 vérifiant $|\mathcal{A}_X| = k$.

Démonstration de la Remarque 2.3.12 :

Soit $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\}\subset\mathbb{C}^2$. L'élément de rang nul dans $L(\mathcal{A})$ est $\bar{0} = \mathbb{C}^2$, et $\mu_{L(\mathcal{A})}(\bar{0}) = 1$. Les éléments de rang 1 sont les hyperplans de $\mathcal{A}$, vérifiant $\mu_{L(\mathcal{A})}(H_i) = -1$. Les intersections de rang 2 sont les intersections non vides d'au moins deux hyperplans de $\mathcal{A}$. Soit X une telle intersection. Comme $C_1(\bar{0},X) = 1$ et $C_2(\bar{0},X) = |\mathcal{A}_X|$, on a que $\mu_{L(\mathcal{A})}(X) = |\mathcal{A}_X| - 1$. Soit $k\geq 2$. Notons n_k le nombre d'intersections $X\in L(\mathcal{A})$ telles que $|\mathcal{A}_X| = k$. Avec cette notation, on trouve le polynôme de Poincaré suivant :

$$\pi(\mathcal{A},t) = 1 + d\cdot t + \left(\sum_{k\geq 2} n_k(k-1)\right)t^2.$$

On conclut ensuite avec le Théorème 2.3.10.

□

2.4 Algèbre d'Orlik-Solomon d'un arrangement d'hyperplans

Soient V un $\mathbb{K}-$espace vectoriel ($\mathbb{K}$ corps), et $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans dans V. Indexons les hyperplans de $\mathcal{A}$ par la famille $\{H_i\}_{i\in\{1,\dots,|\mathcal{A}|\}}$. On définit une famille de symboles $\{e_{H_i}\}$, qui à chaque hyperplan $H_i \in \mathcal{A}$ associe un symbole e_{H_i}.

Soit R un anneau commutatif unitaire.
On construit E^1 comme le $R-$module libre engendré par la famille $\{e_{H_i}\}_{H_i\in\mathcal{A}}$:

$$E^1 = \bigoplus_{H_i\in\mathcal{A}} R\cdot e_{H_i} = \{\sum_{i=1}^{|\mathcal{A}|} k_i e_{H_i} \,|\, k_i \in R\}.$$

On définit maintenant E^* comme étant l'algèbre extérieure de E^1.

$$E^* = E^*(\mathcal{A}) = \bigwedge(E^1) = \bigoplus_{q=0}^{|\mathcal{A}|} \bigwedge^q (E^1).$$

C'est une algèbre graduée, et si on note $|\mathcal{A}| = d,\ E^q = \bigwedge^q(E^1)$, on a :

$$E^* = \bigoplus_{q=0}^{d} E^q.$$

Pour $q \neq 0$, E^q désigne le R-module libre engendré par les $e_{H_{i_1}} \wedge \cdots \wedge e_{H_{i_q}}$. On convient que $E^0 = R$. Pour simplifier les notations, on notera $e_{H_i}e_{H_j}$ le bivecteur $e_{H_i} \wedge e_{H_j}$. Le produit extérieur étant antisymétrique, on a :

$$e_{H_i}e_{H_j} = -e_{H_j}e_{H_i} \quad \text{et } (e_{H_i})^2 = 0,\ \ \forall i, j.$$

Définition 2.4.1 *On définit l'application $R-$linéaire $\partial : E^* \to E^*$ par $\partial(1) = 0$, $\partial(e_{H_i}) = 1,\ \forall\, i,$ et pour $q \geq 2$:*

$$\partial(e_{H_{i_1}} \cdots e_{H_{i_q}}) = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} e_{H_{i_1}} \cdots \widehat{e_{H_{i_k}}} \cdots e_{H_{i_q}},$$

où $e_{H_{i_1}} \cdots \widehat{e_{H_{i_k}}} \cdots e_{H_{i_q}}$ désigne $e_{H_{i_1}} \cdots e_{H_{i_{k-1}}} e_{H_{i_{k+1}}} \cdots e_{H_{i_q}}$.

Définition 2.4.2 *On pose $\boldsymbol{S} = \cup_{q\geq 0} \boldsymbol{S}_q$, où $\boldsymbol{S}_q$ désigne l'ensemble des q-uplets d'hyperplans.*

Soit $S = (H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_q})$ un $q-$uplet d'hyperplans.
On pose $\partial e_S = \partial(e_S)$, $|S| = q$, $e_S = e_{H_{i_1}} \cdots e_{H_{i_q}}$ et $\cap S = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_q}$.
Par convention, si $q = 0$, on note $S = (\ )$ le $p-$uplet vide de cardinal nul, $e_S = 1_R$ et $\cap S = V$.

2.4.3 Algèbre d'Orlik-Solomon d'un arrangement affine

Définition 2.4.4 *(Dépendance et indépendance de q-uplets d'hyperplans)*
Soit $S \in \mathbf{S}$. On dit que S est dépendant si $\cap S \neq \emptyset$ et $r(\cap S) < |S|$. Dans le cas contraire on dit qu'il est indépendant.

Définition 2.4.5 *(Algèbre d'Orlik-Solomon d'un arrangement affine)*
Soit $I = I(\mathcal{A})$ l'idéal engendré par l'ensemble

$$\{\partial e_S \mid S \text{ est dépendant}\} \cup \{e_S \mid \cap S = \emptyset\}.$$

On appelle <u>algèbre d'Orlik-Solomon</u> de $\mathcal{A}$ à coefficients dans R l'algèbre quotient :

$$A = A_R(\mathcal{A}) = E^*/I.$$

Proposition 2.4.6 *L'idéal I est homogène : $I = \bigoplus_{q \geq 0} I_q$, où $I_q = I \cap E^q$, et l'algèbre d'Orlik-Solomon est graduée. On notera donc à partir de maintenant A^*, I_*.*
En notant $\phi : E^* \to A^*$ la projection canonique, $A^q = \phi(E^q) = E^q/I_q$,
$a_H = \phi(e_H)$, et $a_S = \phi(e_S)$, $\forall H \in \mathcal{A}$, $\forall S \in \mathbf{S}$, on a :

$$A^* = \bigoplus_{q=0}^{|\mathcal{A}|} A^q.$$

Remarque 2.4.7 *Si l'arrangement $\mathcal{A}$ est central, alors $\partial(I_*(\mathcal{A})) \subset I_*(\mathcal{A})$ et l'application ∂ induit donc une application sur le quotient $\partial : A_R^*(\mathcal{A}) \to A_R^{*-1}(\mathcal{A})$.*

Proposition 2.4.8
1. *Si $|\mathcal{A}| = d$, alors $A^q = 0$ pour tout $q > d$.*
2. *Si $\mathcal{A}$ est un arrangement dans $\mathbb{K}^{n+1}$, alors $A^q = 0$ pour tout $q > n+1$.*

Exemple 2.4.9 *Soit $\mathcal{A}_2 \subset \mathbb{K}^3$ l'arrangement des tresses : $\mathcal{A}_2 = \{H_{12}, H_{13}, H_{23}\}$.*
Notons $e_{ij} = e_{H_{ij}}$ et $a_{ij} = a_{H_{ij}}$. La seule famille dépendante est $S = \{H_{12}, H_{13}, H_{23}\}$, et $\partial e_S = e_{13}e_{23} - e_{12}e_{23} + e_{12}e_{13} \in I_2$.
Finalement on a $I_0 = I_1 = 0$, et $I_2 = \mathbb{K} < e_{13}e_{23} - e_{12}e_{23} + e_{12}e_{13} >$.
De plus $E^3 = R < e_{12}e_{13}e_{23} >$ et $e_{12}e_{13}e_{23} \in I$, car $e_{12}e_{13}e_{23} = e_{12}\,\partial e_S$.
Ainsi $E^3 = I_3$ et on a :

$$A_R^0(\mathcal{A}_2) = R,$$

$$A_R^1(\mathcal{A}_2) = R < a_{12}, a_{13}, a_{23} >,$$

$$A_R^2(\mathcal{A}_2) = \frac{R< \ a_{ij}a_{kl}, \ \ 1\leq i<j\leq 3, \ 1\leq k<l\leq 3 \ >}{R< \ a_{13}a_{23} - a_{12}a_{23} + a_{12}a_{13} \ >} = R < a_{12}a_{13}, a_{13}a_{23} >,$$

$$A_R^q(\mathcal{A}_2) = 0, \ \forall q \geq 3.$$

Traitons maintenant le cas plus général de d droites de $\mathbb{K}^2$ passant par l'origine.

Exemple 2.4.10 *Soit $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{K}^2$ un arrangement constitué de d droites passant par l'origine, $d \geq 2$. Notons $e_i = e_{H_i}$ et $a_i = a_{H_i}$.*
On sait déjà d'après 2.4.8 que $A^q(\mathcal{A}) = 0, \ \forall q > 2$.
Les familles $\{H_i, H_j, H_k\}$ sont toutes dépendantes pour $1 \leq i < j < k \leq d$.
Ainsi I_2 est engendré par les $\partial(e_ie_je_k), \ 1 \leq i < j < k \leq d$. On a même que I_2 est engendré par les $\partial(e_ie_je_d), \ \ 1 \leq i < j \leq d-1$ car :

$$\partial(\partial(e_ie_je_ke_d)) = \partial(e_je_ke_d) - \partial(e_ie_ke_d) + \partial(e_ie_je_d) - \partial(e_ie_je_k) = 0.$$

Ainsi on a $I_0 = I_1 = 0$, $I_2 = R < e_je_d - e_ie_d + e_ie_j, \ \ 1 \leq i \leq j \leq d-1 >$.
Finalement on trouve :

$$A_R^0(\mathcal{A}) = R,$$

$$A_R^1(\mathcal{A}) = R < a_1, \dots, a_d >,$$

$$A_R^2(\mathcal{A}) = \frac{R< \ a_ia_j, \ 1\leq i<j\leq d \ >}{R< \ a_ja_d - a_ia_d + a_ia_j, \ 1\leq i<j\leq d-1 \ >} = R \ < a_ia_d, \ 1 \leq i \leq d-1 >,$$

$$A_R^q(\mathcal{A}) = 0, \ \forall \, q \geq 3.$$

Définition 2.4.11 *Soit $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\}$ un arrangement central de $\mathbb{K}^{n+1}$.*
On appelle <u>algèbre d'Orlik-Solomon projective</u> de l'arrangement $\mathcal{A}$ le noyau :

$$K_R^*(\mathcal{A}) := ker\{\partial : A_R^*(\mathcal{A}) \to A_R^*(\mathcal{A})\}.$$

C'est une sous-algèbre graduée de $A_R^*(\mathcal{A})$.

Soit $x_1, \dots, x_{n+1}$ un système de coordonnées de $\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $H_1 := \{ x_1 = 0 \}$. Prenons H_1' l'hyperplan à l'infini dans $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. On a un isomorphisme de variétés algébriques :

$$\begin{array}{c} \mathbb{K}^n \to \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \backslash H_1' \\ (x_2, \dots, x_{n+1}) \ \mapsto \ (1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}). \end{array}$$

L'arrangement projectif $\mathcal{A}' = \{H'_2, \dots, H'_d\}$ peut donc être vu comme l'arrangement affine de $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$H'_i := \{\, (x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^n \mid l_i\big((1, x_2, \dots, x_{n+1})\big) = 0 \,\}, \ \ \forall i \neq 1,$$

où $H_i := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid l_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}$. Avec cette identification on peut donc considérer son algèbre d'Orlik-Solomon $A^*_R(\mathcal{A}')$, et on notera e'_i l'élément de $E^1(\mathcal{A}')$ associé à H'_i, $\forall\, 2 \leq i \leq d$.

Proposition 2.4.12 *Soient $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ un arrangement central, et $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ l'arrangement projectif associé. On a que $K^*_R(\mathcal{A})$ et $A^*_R(\mathcal{A}')$ coïncident.*

<u>Démonstration de la Proposition 2.4.12 :</u>

1. On a $K^*_R(\mathcal{A}) = Im\,\{\, \partial : A^*_R(\mathcal{A}) \to A^*_R(\mathcal{A}) \,\}$, autrement dit $(A^*_R(\mathcal{A}), \partial)$ est un complexe de chaîne acyclique.

   Il est clair que $Im\,\{\, \partial : A^*_R(\mathcal{A}) \to A^*_R(\mathcal{A}) \,\} \subset K^*_R(\mathcal{A})$ car $\partial \circ \partial = 0$.
   Réciproquement, si $x \in A^*_R(\mathcal{A})$ est tel que $\partial x = 0$, alors pour $b = a_j \wedge x$ on a que $\partial b = x - a_j \wedge \partial x = x$. Ainsi $x \in Im\,\{\, \partial : A^*_R(\mathcal{A}) \to A^*_R(\mathcal{A}) \,\}$.

2. On a que $K^*_R(\mathcal{A})$ est engendré par le sous-ensemble de $A^1_R(\mathcal{A})$:

   $$\{\, \sum_{i=2}^{d} \alpha_i (a_i - a_1), \ \alpha_i \in R \,\}.$$

   En effet, si $x \in K^*_R(\mathcal{A})$, alors il existe un $y \in A^*_R(\mathcal{A})$ tel que $x = \partial y$ d'après 1. Soit $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. On utilise ensuite

   $$\partial(a_{i_1} \cdots a_{i_k}) = (-1)^{k-1}(a_{i_1} - a_{i_2}) \wedge (a_{i_2} - a_{i_3}) \wedge \cdots \wedge (a_{i_{k-1}} - a_{i_k}),$$

   et on écrit chaque $(a_{i_j} - a_{i_{j+1}})$ tel que $i_j \neq 1$ sous la forme

   $$((a_{i_j} - a_1) - (a_{i_{j+1}} - a_1)).$$

3. Avec les étapes précédentes on en déduit qu'on a un morphisme surjectif d'algèbres graduées :

   $$\begin{aligned} f : E^*(\mathcal{A}') &\to K^*_R(\mathcal{A}) \\ e'_i &\mapsto a_i - a_1 \end{aligned}$$

4. Montrons que $I_*(\mathcal{A}') \subset ker\, f$.
   Rappelons que $I_*(\mathcal{A}')$ est l'idéal engendré par

   $$\{\, \partial(e'_S) \mid S \text{ est une famille dépendante de } \mathcal{A}' \,\} \cup \{\, e'_S \mid \cap S = \emptyset \,\}.$$

(a) Soient $S = \{H'_{i_1}, \dots, H'_{i_k}\}$ une famille dépendante de $\mathcal{A}'$, $1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, et $\partial(e'_S)$ l'élément de $I_*(\mathcal{A}')$ correspondant. On a alors que $\partial(e'_S) = \partial(e'_{i_1} \cdots e'_{i_k}) = (-1)^{k-1}(e'_{i_1} - e'_{i_2}) \cdots (e'_{i_{k-1}} - e'_{i_k})$. Ainsi $f(\partial(e'_S)) = (-1)^{k-1}(a_{i_1} - a_{i_2}) \cdots (a_{i_{k-1}} - a_{i_k}) = \partial(a_{i_1} \cdots a_{i_k})$. Or si $\{H'_{i_1}, \dots, H'_{i_k}\}$ est une famille dépendante de $\mathcal{A}'$, alors $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_k}\}$ est une famille dépendante de $\mathcal{A}$ et $\partial(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) \in I_*(\mathcal{A})$. On a donc bien que $\partial(a_{i_1} \cdots a_{i_k}) = 0$ dans $K_R^*(\mathcal{A}) \subset A_R^*(\mathcal{A})$.

(b) Soient $S = \{H'_{i_1}, \dots, H'_{i_k}\}$, tel que $H'_{i_1} \cap \cdots \cap H'_{i_k} = \emptyset$, et $e'_S = e'_{i_1} \cdots e'_{i_k}$ l'élément de $I_*(\mathcal{A}')$ correspondant. On a que $Z = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k} \subset H_1$. Notons $r = codim\, Z \leq k$. On a alors $codim\, H_1 \cap Z = codim\, Z = r < k+1$, et $\{H_1, H_{i_1}, \dots, H_{i_k}\}$ est une famille dépendante de $\mathcal{A}$. On a donc que $\partial(e_1 e_{i_1} \cdots e_{i_k}) \in I_*(\mathcal{A})$. Ainsi $\partial(a_1 a_{i_1} \cdots a_{i_k}) = (a_{i_1} - a_1) \cdots (a_{i_k} - a_1) = f(e'_S) = 0$ dans $K_R^*(\mathcal{A})$.

(c) Soit $x \in I_*(\mathcal{A}')$. Ecrivons :

$$x = \sum_{S\, dépendante} \alpha_S\, \partial(e'_S) \; + \sum_{S\, |\, \cap S = \emptyset} \beta_S\, e'_S.$$

En utilisant la linéarité de f et les considérations précédentes on en déduit que $f(x) = 0$ dans $K_R^*(\mathcal{A})$.

5. D'après la propriété universelle des algèbres on en déduit l'existence d'un morphisme d'algèbres surjectif

$$\tilde{f} : A_R^*(\mathcal{A}') = E^*(\mathcal{A}')/I_*(\mathcal{A}') \to K_R^*(\mathcal{A}).$$

Considérons maintenant $P(A_R^*(\mathcal{A}'), t) = \sum_{q \geq 0} dim\, A_R^q(\mathcal{A}') \cdot t^q$, et $P(K_R^*(\mathcal{A}), t) = \sum_{q \geq 0} dim\, K_R^q(\mathcal{A}) \cdot t^q$, les polynômes de Betti-Poincaré de $A_R^*(\mathcal{A}')$ et $K_R^*(\mathcal{A})$.

6. Montrons que $(1+t)P(K_R^*(\mathcal{A}), t) = \pi(\mathcal{A}, t)$. Comme $(A_R^*(\mathcal{A}), \partial)$ est un complexe de chaîne acyclique d'après 1., on a la suite exacte courte d'espaces vectoriels gradués suivante :

$$0 \to K_R^q(\mathcal{A}) \to A_R^q(\mathcal{A}) \to K_R^{q-1}(\mathcal{A}) \to 0.$$

Cette suite exacte implique que $dim\, A_R^q(\mathcal{A}) = dim\, K_R^q(\mathcal{A}) + dim\, K_R^{q-1}(\mathcal{A}),\ \forall q$, et on en déduit directement en utilisant 2.3.9 et le Théorème 2.4.19 que

$$\pi(\mathcal{A}, t) = P(A_R^*(\mathcal{A}), t) = (1+t)P(K_R^*(\mathcal{A}), t).$$

7. Montrons que $(1+t)\pi(\mathcal{A}', t) = \pi(\mathcal{A}, t)$.
Pour démontrer cette égalité, nous allons utiliser le Théorème de Whitney.

Théorème 2.4.13 (Whitney) *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans affine. Alors on a :*

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ central}}} (-1)^{|\mathcal{B}|} t^{n+1-r(\mathcal{B})},$$

où $r(\mathcal{B}) = codim \cap_{H \in \mathcal{B}} H$ est le rang de $\mathcal{B}$.

Avec 2.3.9 3. et le Théorème de Whitney on a

$$\pi(\mathcal{A}, t) = (-t)^{n+1}\chi(\mathcal{A}, -t^{-1}) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ central}}} (-1)^{|\mathcal{B}|}(-t)^{n+1}(-\frac{1}{t})^{n+1-r(\mathcal{B})},$$

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ central}}} (-1)^{|\mathcal{B}|+r(\mathcal{B})} t^{r(\mathcal{B})}. \tag{2.4}$$

Rappelons que nous regardons $\mathcal{A}'$ comme l'arrangement affine de $\mathbb{K}^n$ obtenu en prenant H_1' l'hyperplan à l'infini.
Pour $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ central, notons $c(\mathcal{B}) = \cap_{H \in \mathcal{B}} H$ le centre de $\mathcal{B}$. On a :

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ central} \\ c(\mathcal{B}) \subset H_1}} (-1)^{|\mathcal{B}|+r(\mathcal{B})} t^{r(\mathcal{B})} + \sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ central} \\ c(\mathcal{B}) \not\subset H_1}} (-1)^{|\mathcal{B}|+r(\mathcal{B})} t^{r(\mathcal{B})}.$$

Commençons par calculer $\displaystyle\sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ central} \\ c(\mathcal{B}) \not\subset H_1}} (-1)^{|\mathcal{B}|+r(\mathcal{B})} t^{r(\mathcal{B})}$.

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ central. Alors on a $c(\mathcal{B}) \not\subset H_1 \Leftrightarrow c(\mathcal{B}') \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{B}'$ central, car $c(\mathcal{B}') = c(\mathcal{B}) \cap (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \backslash H_1')$. De plus, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est central et vérifie $c(\mathcal{B}) \not\subset H_1$, alors on a $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$, $r(\mathcal{B}) = n + 1 - dim\, c(\mathcal{B}) = r(\mathcal{B}')$. On en déduit que

$$\sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ central} \\ c(\mathcal{B}) \not\subset H_1}} (-1)^{|\mathcal{B}|+r(\mathcal{B})} t^{r(\mathcal{B})} = \sum_{\substack{\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}' \\ \mathcal{B}' \text{ central}}} (-1)^{|\mathcal{B}'|+r(\mathcal{B}')} t^{r(\mathcal{B}')} = \pi(\mathcal{A}', t).$$

Calculons à présent

$$\sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ central} \\ c(\mathcal{B}) \subset H_1}} (-1)^{|\mathcal{B}|+r(\mathcal{B})} t^{r(\mathcal{B})}. \tag{2.5}$$

Soit donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ central, tel que $c(\mathcal{B}) \subset H_1$. Nous allons distinguer deux cas :

– Si $H_1 \notin \mathcal{B}$, considérons $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{H_1\}$. Alors on a :

$$c(\bar{\mathcal{B}}) = c(\mathcal{B}),\ r(\bar{\mathcal{B}}) = r(\mathcal{B}), \text{ et } |\bar{\mathcal{B}}| = |\mathcal{B}| + 1.$$

Les termes correspondants à $\mathcal{B}$ et à $\bar{\mathcal{B}}$ s'annulent donc entre eux dans la somme (2.5). Il est donc suffisant de considérer dans la somme (2.5) les sous-arrangements centraux $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $c(\mathcal{B}) \subset H_1$, tels que $H_1 \in \mathcal{B}$, et $\mathcal{B}$ n'est pas du type $\bar{\mathcal{B}}_0$, où $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \backslash \{H_1\}$ est un sous-arrangement central de $\mathcal{A}$ ne contenant pas H_1 et de centre $c(\mathcal{B}_0)$ contenu dans H_1. Notons donc

$$B_{res} = \{\mathcal{B} \subset \mathcal{A},\, \mathcal{B}\,\text{central},\, c(\mathcal{B}) \subset H_1,\, H_1 \in \mathcal{B},\, \text{et}\, c(\mathcal{B} \backslash \{H_1\}) \not\subset H_1\}.$$

- Soit $\mathcal{B} \in B_{res}$. Alors $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \backslash \{H_1\} \not\subset H_1$ et $\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{A}'$ est central.
  Réciproquement, soit $\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{A}'$ central. Alors $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{A}$ est central et vérifie $c(\mathcal{B}_0) \not\subset H_1$, et on a $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \{H_1\} \in B_{res}$.
  On a donc une bijection entre B_{res} et l'ensemble des sous-arrangements centraux de $\mathcal{A}'$, en associant à chaque $\mathcal{B} \in B_{res}$, le sous-arrangement central $\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{A}'$ correspondant. De plus, $r(\mathcal{B}) = r(\mathcal{B}_0) + 1 = r(\mathcal{B}'_0) + 1$, et $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'_0| + 1$.

Nous pouvons donc maintenant calculer notre somme (2.5) :

$$\sum_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{B}\ central \\ c(\mathcal{B}) \subset H_1}} (-1)^{|\mathcal{B}|+r(\mathcal{B})} t^{r(\mathcal{B})} = \sum_{\mathcal{B} \in B_{res}} (-1)^{|\mathcal{B}|+r(\mathcal{B})} t^{r(\mathcal{B})}$$

$$= \sum_{\substack{\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{A}' \\ \mathcal{B}'_0\ central}} (-1)^{|\mathcal{B}'_0|+1+r(\mathcal{B}'_0)+1} t^{r(\mathcal{B}'_0)+1} = t \cdot \sum_{\substack{\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{A}' \\ \mathcal{B}'_0\ central}} (-1)^{|\mathcal{B}'_0|+r(\mathcal{B}'_0)} t^{r(\mathcal{B}'_0)}$$

$= t\pi(\mathcal{A}', t)$ d'après (2.4).
Finalement on a bien $\pi(\mathcal{A}, t) = (1+t)\pi(\mathcal{A}', t)$.

Ainsi $(1+t)\pi(\mathcal{A}', t) = (1+t)P(K_R^*(\mathcal{A}), t)$, d'où :

$$\pi(\mathcal{A}', t) = P(K_R^*(\mathcal{A}), t).$$

8. D'après précédemment $dim\, A_R^q(\mathcal{A}') = dim\, K_R^q(\mathcal{A})$, $\forall q$, et l'application $\tilde{f}$ est donc bijective, ce qui achève la démonstration :

$$A_R^*(\mathcal{A}') \simeq K_R^*(\mathcal{A}).$$

□

Exemple 2.4.14 *Calculons l'algèbre d'Orlik-Solomon projective de l'arrangement $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{K}^2$ de l'Exemple 2.4.10. Avec les notations précédentes on a que $\mathcal{A}' = \{H'_2, \dots, H'_d\} \subset \mathbb{K}$ est constitué de $d-1$ points distincts. On trouve alors :*

$$A_R^0(\mathcal{A}') = R,\ A_R^1(\mathcal{A}') = R < a_2, \dots, a_d >,\ A_R^q(\mathcal{A}') = 0,\ \forall\, q > 1.$$

Appliquons maintenant la Définition 2.4.11. On a que $K^0_R(\mathcal{A}) = R$, *et que*
$K^1_R(\mathcal{A}) = ker\,\{\,\partial :\ R < a_1, \ldots, a_d > \ \to\ R\ \}$
$= \{\,-(\alpha_2 + \cdots + \alpha_d)a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_d a_d\,\} \simeq A^1_R(\mathcal{A}')$.

Calculons $K^2_R(\mathcal{A}) = ker\,\{\,\partial :\ A^2_R(\mathcal{A})\ \ \to\ A^1_R(\mathcal{A})\ \}$.
Avec l'Exemple 2.4.11 on a $A^2_R(\mathcal{A}) = R < a_i a_d \mid 1 \leq i \leq d-1\ >$.
Soit alors $x = \alpha_1 a_1 a_d + \cdots + \alpha_{d-1} a_{d-1} a_d \in A^2_R(\mathcal{A})$. *On a que* $\partial x = -\alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_{d-1} a_{d-1} + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{d-1}) a_d$, *et* $\partial x = 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha_i = 0,\ \forall\, 1 \leq i \leq d-1$.

Ainsi on a bien $K^2_R(\mathcal{A}) = 0$ *et* $A^*_R(\mathcal{A}') \simeq K^*_R(\mathcal{A})$.

2.4.15 Structure de l'algèbre d'Orlik-Solomon

Soit $\mathcal{A} \subset V$ un arrangement affine. A tout $X \in L(\mathcal{A})$ on associe le sous-arrangement $\mathcal{A}_X \subset \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \,|\, X \subseteq H\}$. Nous allons maintenant calculer l'algèbre d'Orlik-Solomon de l'arrangement $\mathcal{A}$ à partir de son treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$.

Théorème 2.4.16 ([33], Décomposition de Brieskorn) *Pour tout* $q \geq 0$, *on a la décomposition en somme directe suivante :*

$$A^q = \bigoplus_{X \in L_q(\mathcal{A})} A^q_X,$$

où $L_q(\mathcal{A})$ *est le sous-ensemble de* $L(\mathcal{A})$ *constitué des éléments de rang* q, *et* A^*_X *est l'algèbre d'Orlik-Solomon de* $\mathcal{A}_X$.

Exemple 2.4.17 *Soit* $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^2$ *l'arrangement affine constitué des six droites représentées sur le dessin ci-dessous :*

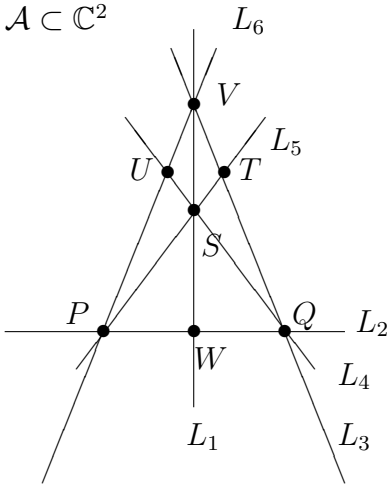


FIGURE 2.1 –

Calculons l'algèbre d'Orlik-Solomon $A^* = A^*_R(\mathcal{A})$ *de l'arrangement* $\mathcal{A}$. *On notera* $e_i = e_{L_i}$, $a_i = a_{L_i}$.
On a que $A^0_R(\mathcal{A}) = R$. *Les éléments de codimension* 1 *dans* $L(\mathcal{A})$ *sont les hyperplans* L_i, *de sous-arrangement correspondant* $\{L_i\}$. *On a*

$$A^1_{L_i} = R < a_i >, \ \forall \ 1 \leq i \leq 6,$$

et ainsi on vérifie bien que

$$A^1 = \bigoplus_{1 \leq i \leq 6} A^1_{L_i} = R < a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 >$$

est un $R-$*module libre de rang 6.*
Les éléments de codimension 2 *dans* $L(\mathcal{A})$ *sont de deux types :*

- *Les points* $W, U,$ *et* T *de multiplicité 2.*
  On a $\mathcal{A}_W = \{L_1, L_2\}$, $\mathcal{A}_U = \{L_4, L_6\}$, $\mathcal{A}_T = \{L_3, L_5\}$, *et :*
  $$A^2_W = R < a_1a_2 >, \ A^2_U = R < a_4a_6 >, \ A^2_T = R < a_3a_5 > .$$
- *Les points* P, Q, S *et* V *de multiplicité 3. Calculons par exemple* A^2_P.
  On a que $\mathcal{A}_P = \{L_2, L_5, L_6\}$ *est dépendante car codim* $L_2 \cap L_5 \cap L_6 = 2 < 3$.
  Ainsi $I_2(\mathcal{A}_P)$ *est engendré par* $\partial(e_2e_5e_6) = e_5e_6 - e_2e_6 + e_2e_5$.
  On a que $E^2(\mathcal{A}_P) = R < e_2e_5, e_2e_6, e_5e_6 >$. *Finalement on trouve :*
  $$A^2_P = R < a_2a_5, a_5a_6 > .$$
  On trouve de la même manière :
  $$A^2_Q = R < a_2a_3, a_3a_4 >, \ A^2_S = R < a_1a_4, a_4a_5 >, \ A^2_V = R < a_1a_3, a_3a_6 > .$$

En utilisant la formule de Brieskorn 2.4.16 on obtient :

$$A^2 = A^2_W \oplus A^2_U \oplus A^2_T \oplus A^2_P \oplus A^2_Q \oplus A^2_S \oplus A^2_V$$
$$= R < a_1a_2, a_4a_6, a_3a_5, a_2a_5, a_5a_6, a_2a_3, a_3a_4, a_1a_4, a_4a_5, a_1a_3, a_3a_6 >$$

est un $R-$module libre de rang $3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$.
Enfin $A^q = 0$, $\forall q \geq 3$, d'après la Proposition 2.4.8.

2.4.18 Cohomologie du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans

Le théorème suivant, dû à Orlik et Solomon, est un des résultas fondamentaux en théorie des arrangements d'hyperplans.

Théorème 2.4.19 ([32]) *Soient $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans et R un anneau commutatif unitaire. Soient $H_j := \{l_j = 0\}$, $\forall j$, et a_j le générateur de $A^1_R(\mathcal{A})$ correspondant à l'hyperplan H_j. L'application*

$$\begin{aligned} \phi : A^*_R(\mathcal{A}) &\to H^*(M(\mathcal{A}), R) \\ a_j &\mapsto \tfrac{1}{2i\pi}\tfrac{dl_j}{l_j} \end{aligned}$$

induit un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$A^*_R(\mathcal{A}) \simeq H^*(M(\mathcal{A}), R).$$

Ainsi, l'algèbre de cohomologie $H^*(M(\mathcal{A}), R)$ du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans est entièrement déterminée par le treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$.

En utilisant la Remarque 2.3.9 et le Théorème 2.4.16 on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.20 *On a* $rang_R\, A^q(\mathcal{A}) = \sum_{X \in L_q(\mathcal{A})} (-1)^q \mu_{L(\mathcal{A})}(X)$.

Exemple 2.4.21 *Revenons à notre Exemple 2.4.9.*
On a que $\pi(\mathcal{A}_2, t) = 1 + 3t + 2t^2$, et on retrouve bien $rang_R\, A^0(\mathcal{A}_2) = 1$, $rang_R\, A^1(\mathcal{A}_2) = 3$, et $rang_R\, A^2(\mathcal{A}_2) = 2$.

2.4.22 Variétés de résonance

Soient $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\}$ un arrangement d'hyperplans, et $A^* = A^*_R(\mathcal{A})$ son algèbre d'Orlik-Solomon avec coefficients dans un anneau commutatif unitaire R. Soit $\omega = \sum_{i=1}^d \omega_i a_i \in A^1$. Notons $\omega\wedge$ l'application :

$$\begin{aligned} \omega\wedge : A^* &\to A^{*+1} \\ x &\mapsto \omega \wedge x. \end{aligned}$$

Considérons le complexe de cochaînes suivant, appelé complexe d'Aomoto de l'arrangement $\mathcal{A}$:

$$(A^*, \omega\wedge) = \{\ A^* \xrightarrow{\omega\wedge} A^{*+1}\ \}_{*\geq 0}.$$

On définit la variété de résonance de degré q de l'arrangement $\mathcal{A}$ comme suit :

Définition 2.4.23 *(Variété de résonance)*
Pour $q \geq 0$, on appelle variété de résonance de degré q de l'arrangement $\mathcal{A}$ l'ensemble de A^1 :

$$\mathcal{R}^q(\mathcal{A}) = \{\omega \in A^1 \mid H^q(A^*, \omega\wedge) \neq 0\}.$$

Pour tout $k \geq 1$, notons $\mathcal{R}^q_k(\mathcal{A}) = \{\omega \in A^1 \mid dim H^q(A^*, \omega\wedge) \geq k\}$.

Remarque 2.4.24
- *On a que $\mathcal{R}^q(\mathcal{A}) = \mathcal{R}^q_1(\mathcal{A}),\ \forall q \geq 0$.*
- *Si $A^q = 0$, alors $\mathcal{R}^q_k(\mathcal{A}) = \emptyset,\ \forall k \geq 1$.*
- *On a que $\mathcal{R}^0_1(\mathcal{A}) = \{0\}$ et $\mathcal{R}^0_k(\mathcal{A}) = \emptyset,\ \forall k > 1$.*
- *Si on s'intéresse à la variété de résonance de degré 1 :*

$$A^0 \xrightarrow{f} A^1 \xrightarrow{g} A^2$$

En utilisant le Théorème du rang on a que :

$$\mathcal{R}^1_k = \{\omega \in A^1 \mid rang(M_g) \leq dim(A^1) - k - 1\},$$

où M_g est la matrice de l'application g.

Dans cette section nous décrirons tout particulièrement la variété de résonance $\mathcal{R}^1(\mathcal{A})$ de degré 1. Cette description provient d'un cours sur les arrangements d'hyperplans [9].

Proposition 2.4.25 *Soit $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans central.*
Si $\omega \in A^1$ et $\partial\omega \neq 0_R$, alors $H^*(A^*, \omega\wedge) = 0$.

Démonstration de la Proposition 2.4.25 :

Soient $\omega \in A^1$, et $\partial\omega = c \in R\backslash\{0_R\}$. Pour $q > 0$, la situation est la suivante :

$$A^{q-1} \xrightarrow{\omega\wedge = f} A^q \xrightarrow{\omega\wedge = g} A^{q+1}\ .$$

On sait déjà que $Im\, f \subset ker\, g$. Montrons l'inclusion inverse.
Soit $y \in ker\, g \subset A^q$, alors $\omega \wedge y = 0$ et $\partial(\omega \wedge y) = cy - \omega \wedge \partial y = 0$.
Ainsi $y = c^{-1} \cdot \omega \wedge \partial y \in Im\, f$ et on a bien $H^q(A^*, \omega\wedge) = 0,\ \forall q \geq 0$.

□

Remarque 2.4.26 *On a que $\omega \in \mathcal{R}^1(\mathcal{A})$ si et seulement si il existe $b \in A^1$ non proportionnel à ω tel que $\omega \wedge b = 0$ (et dans ce cas $b \in \mathcal{R}^1(\mathcal{A})$ également).*

Le théorème suivant décrit $\mathcal{R}^1(\mathcal{A})$ pour un arrangement $\mathcal{A}$ de rang 2, cas traité dans l'Exemple 2.4.10.

Théorème 2.4.27 *Supposons $\mathcal{A}$ central et de rang 2. Alors :*

$$\mathcal{R}^1(\mathcal{A}) = A^1_R(\mathcal{A}') = \{\omega = \sum_{i=1}^{d} \omega_i a_i \in A^1 \mid \sum_{i=1}^{d} \omega_i = 0_R\}, \text{ si } |\mathcal{A}| \geq 3,$$
$$\mathcal{R}^1(\mathcal{A}) = \{0\} \text{ sinon.}$$

<u>Démonstration du Théorème 2.4.27 :</u>

Soit $\tilde{\omega} \in \mathcal{R}^1(\mathcal{A})$. Alors $H^1(A^*, \tilde{\omega}\wedge) \neq 0$ et $\partial\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{d} \tilde{\omega}_i = 0_R$ d'après 2.4.25. Ainsi, $\mathcal{R}^1(\mathcal{A}) \subset A^1_R(\mathcal{A}')$. Prenons donc ω dans $A^1_R(\mathcal{A}')$. Comme $\mathcal{A}$ est de rang 2, on a que $A^2_R(\mathcal{A}') = 0$, et $\omega \wedge b = 0$, $\forall\, b \in A^1_R(\mathcal{A}')$. On sait que si $\omega \wedge b = 0_R$, alors $b \in A^1_R(\mathcal{A}')$ d'après la Remarque 2.4.26. De plus, $dim\, A^1_R(\mathcal{A}') = |\mathcal{A}| - 1$. Ainsi, si $|\mathcal{A}| \geq 3$, alors $|A^1_R(\mathcal{A}')| \geq 2$ et il existe un b non proportionnel à ω tel que $\omega \wedge b = 0$ et $\omega \in \mathcal{R}^1(\mathcal{A})$. Par contre si $|\mathcal{A}| \leq 2$, alors $|A^1_R(\mathcal{A}')| \leq 1$ et il ne peut pas exister de b non proportionnel à ω tel que $\omega \wedge b = 0$, si $\omega \neq 0$.

$\square$

Soient $X \in L(\mathcal{A})$ et $\omega \in A^1$. On notera $\omega_X := \sum_{i\,|\,X \subseteq H_i} \omega_i a_i$.
En appliquant le théorème précédent ainsi que la décomposition de Brieskorn 2.4.16 on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.28 *Soient $\mathcal{A}$ un arrangement central, et $\omega, b \in A^1$.*
Alors $\omega \wedge b = 0$ si et seulement si pour tout $X \in L_2(\mathcal{A})$ on a :

$$\omega_X \text{ et } b_X \text{ sont proportionnels,} \tag{2.6}$$

ou

$$|\mathcal{A}_X| \geq 3 \text{ et } \partial\omega_X = \partial b_X = 0_R. \tag{2.7}$$

<u>Démonstration du Corollaire 2.4.28 :</u>

Comme ω et b sont des éléments de A^1, on a que $\omega \wedge b$ est dans A^2.
La décomposition de Brieskorn 2.4.16 donne ensuite :

$$\omega \wedge b = 0 \text{ si et seulement si } (\omega \wedge b)_X = \omega_X \wedge b_X = 0, \text{ pour tout } X \in L_2(\mathcal{A}).$$

Or pour un tel $X \in L_2(\mathcal{A})$ on a que $\omega_X \wedge b_X = 0$ si et seulement si

$$\omega_X \text{ et } b_X \text{ sont proportionnels,}$$
$$\text{ou}$$
$$\omega_X \text{ et } b_X \text{ ne sont pas proportionnels et sont des éléments de } \mathcal{R}^1(\mathcal{A}).$$

Enfin, avec le Théorème 2.4.27 on a que $\omega_X \wedge b_X = 0$ si et seulement si

$$\omega_X \text{ et } b_X \text{ sont proportionnels,}$$
$$\text{ou}$$
$$|\mathcal{A}_X| \geq 3 \text{ et } \partial\omega_X = \partial b_X = 0_R.$$

□

Nous appliquerons résultats à l'arrangement des tresses $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ au Chapitre 4. On prendra alors $R = \mathbb{F}_p$ un corps de caractéristique p, on prendra $\omega_1 = \sum_{H \in \mathcal{A}_n} a_H$, et on utilisera le corollaire suivant dû à A.D. Macinic et S. Papadima :

Corollaire 2.4.29 ([28]) *Soient $\mathcal{A}$ un arrangement central, p un nombre premier, et $b = \sum_{H \in \mathcal{A}} b_H a_H$. Alors $\omega_1 \wedge b = 0$ si et seulement si pour tout $X \in L_2(\mathcal{A})$ on a :*

$$\partial b_X = 0_{\mathbb{F}_p}, \text{ si } p \text{ divise } |\mathcal{A}_X|, \tag{2.8}$$

ou

$$b_H = b_K, \ \forall H \neq K \in \mathcal{A}_X, \text{ si } p \text{ ne divise pas } |\mathcal{A}_X|. \tag{2.9}$$

Démontrons que les Corollaires 2.4.29 et 2.4.28 sont équivalents pour $R = \mathbb{F}_p$:

D'après le Corollaire 2.4.28, $\omega_1 \wedge b = 0$ si et seulement pour tout $X \in L_2(\mathcal{A})$ on a (2.6) ou (2.7). Soit donc $X \in L_2(\mathcal{A})$. Traitons une à une les deux conditions :

- (2.6) : On a que ω_{1X} et b_X sont proportionnels si et seulement si
$$b_H = b_K, \ \forall H \neq K \in \mathcal{A}_X.$$
Si de plus p divise $|\mathcal{A}_X|$, alors on a $\partial b_X = |\mathcal{A}_X| b_K = 0_{\mathbb{F}_p}$.
- (2.7) : On a que p divise $|\mathcal{A}_X|$ si et seulement si $\partial\omega_{1X} = 0_{\mathbb{F}_p}$. La deuxième condition est donc équivalente à :
$$|\mathcal{A}_X| \geq 3, \ p \text{ divise } |\mathcal{A}_X|, \text{ et } \partial b_X = 0_{\mathbb{F}_p}.$$

1. Si $\mathcal{A}_X = \{H\}$, alors p ne divise pas $|\mathcal{A}_X|$, $\omega_{1X} \wedge b_X = 0_{\mathbb{F}_p}$ et (2.9) est vérifié.

2. Si $\mathcal{A}_X = \{H, K\}$, alors $\omega_{1X} \wedge b_X = 0_{\mathbb{F}_p}$ si et seulement si $b_H = b_K$.
   Si $p \geq 3$, alors un tel b_X est une solution de (2.9).
   Si $p = 2$, alors $\partial b_X = 2b_H = 0_{\mathbb{F}_p}$ et b_X vérifie (2.8).
3. Si $|A_X| \geq 3$, on remarque déjà que les solutions de

$$\omega_{1X} \text{ et } b_X \text{ sont proportionnels et } p \text{ divise } |\mathcal{A}_X|$$

   sont incluses dans les solutions de

$$|\mathcal{A}_X| \geq 3,\ p \text{ divise } |\mathcal{A}_X| \text{ et } \partial b_X = 0_{\mathbb{F}_p}.$$

   Ainsi $\omega_{1X} \wedge b_X = 0$ si et seulement si (2.8) ou (2.9) est vérifié.
   Ces considérations prouvent que les Corollaires 2.4.28 et 2.4.29 sont équivalents pour $R = \mathbb{F}_p$.

□

2.5 Classes de Chern-Schwartz-MacPherson d'un arrangement d'hyperplans

Dans toute cette section, nous travaillerons sur $\mathbb{C}$. On considèrera un arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}' = \{H'_1, \dots, H'_d\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, ainsi que l'arrangement central $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ correspondant. On regardera $\bigcup_{i=1}^{d} H'_i$ comme une hypersurface réduite et singulière de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, et on s'intéressera aux complémentaires $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{d} H_i$ et $M(\mathcal{A}') = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \backslash \bigcup_{i=1}^{d} H'_i$.
Rappelons que $M(\mathcal{A})$ est une $\mathbb{C}^*$-fibration triviale sur $M(\mathcal{A}')$, étant donné que

$$M(\mathcal{A}) \simeq M(\mathcal{A}') \times \mathbb{C}^*,$$

d'après la Proposition 2.1.6.

Remarque 2.5.1 *Comme $M(\mathcal{A}) \simeq M(\mathcal{A}') \times \mathbb{C}^*$, si on utilise les formules de Künneth on obtient :*

$$H_q(M(\mathcal{A}), \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{k+l=q} H_k(M(\mathcal{A}'), \mathbb{C}) \otimes H_l(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}),\ \ \forall q \geq 0,$$

$$P(M(\mathcal{A}), t) = P(M(\mathcal{A}'), t) \cdot P(\mathbb{C}^*, t).$$

Comme $P(\mathbb{C}^*, t) = 1 + t$, on trouve avec le Théorème 2.3.10 :

$$\pi(\mathcal{A}', t) = \pi(\mathcal{A}, t)/\,(1+t)\,.$$

Avec Remarque 2.3.9, 3. on en déduit que :

$$\chi(\mathcal{A}', t) = \chi(\mathcal{A}, t)/(t-1).$$

Rappelons qu'en théorie des classes de Chern développée par Macpherson [29], il existe un homomorphisme c_* du groupe des fonctions constructibles $\mathcal{F}(X)$ sur une variété X vers le groupe d'homologie $H_*(X)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (ou encore vers le groupe de Chow $A_*(X)$) :

$$\begin{aligned} c_* \,:\, \mathcal{F}(X) &\to H_*(X) \\ 1_X &\mapsto c_*(X). \end{aligned}$$

Ceci nous donne une classe de Chern-Schwartz-MacPherson en homologie pour toute variété algébrique complexe X.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre entre deux variétés X et Y, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "c_*"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr] & H_*(X) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "c_*"'] & H_*(Y) \end{tikzcd}$$

Rappelons aussi qu'on peut passer, en utilisant la dualité de Poincaré, de l'homologie à la cohomologie en intersectant avec la classe fondamentale $[X]$ dès que X est lisse et compacte :

$$\cap[X] \,:\, H^*(X) \to H_*(X).$$

De plus, si X est lisse, alors la classe totale de Chern du fibré tangent TX, notée $c(TX) = c^*(X)$, est dans la cohomologie $H^*(X)$ et on a :

$$c^*(X) \cap [X] = c_*(X) \in H_*(X). \tag{2.10}$$

Nous allons appliquer cette théorie à $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.
Soit Y une sous-variété de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Notons i l'inclusion $i : Y \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Avec les considérations précédentes on a :

$$c_*(Y) \in H_*(Y).$$
$$i_* c_*(1_Y) = c_*(i_* 1_Y) = c_*(1_Y) \in H_*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}).$$

Ceci motive la définition suivante.

Définition 2.5.2 *Soit Y une sous-variété de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.*
On appelle <u>*classe de Chern-Schwartz-MacPherson*</u> *de Y, et on note $c_{SM}(Y)$, la classe définie comme suit :*

$$c_{SM}(Y) := c_*(1_Y) \in H_*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}).$$

D'après l'article de P. Aluffi [1] on a le théorème suivant, dont nous donnerons une démonstration détaillée :

Théorème 2.5.3 ([1], Théorème 3.1) *Soit $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ un arrangement d'hyperplans. Avec les notations précédentes on a :*

$$c_{SM}(M(\mathcal{A}')) = \chi(\mathcal{A}', t+1),$$

où le terme de droite est vu comme une classe dans $H_*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ obtenue en remplaçant t^k par la classe fondamentale $[\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}] \in H_{2k}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$, $k = 0, \dots, n$.

<u>**Démonstration du Théorème 2.5.3**</u> :

Soient $x \in L(\mathcal{A})$, et $\dot{x} = x \backslash \bigcup_{y>x} y$. On a alors que $y = \sum_{x \geq y} \dot{x}$, et en utilisant la formule d'inversion de Möbius on obtient que $\dot{y} = \sum_{x \subseteq y} \mu_{L(\mathcal{A})}(y,x)x$.
Ainsi si on considère l'application du treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$ vers le groupe des fonctions constructibles sur $\mathbb{C}^{n+1}$, qui à un $x \in L(\mathcal{A})$ associe la fonction 1_x, on obtient :

$$1_y = \sum_{x \geq y} 1_{\dot{x}},$$

$$1_{\dot{y}} = \sum_{x \subseteq y} \mu_{L(\mathcal{A})}(y,x) 1_x,$$

$$1_{M(\mathcal{A})} = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu_{L(\mathcal{A})}(x) 1_x.$$

Enfin,

$$1_{M(\mathcal{A}')} = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu_{L(\mathcal{A})}(x) 1_{x'},$$

où $x' \in L(\mathcal{A}')$ est le projectivisé de x.

Ainsi, en utilisant l'additivité de c_* on trouve :

$$c_{SM}(M(\mathcal{A}')) = \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu_{L(\mathcal{A})}(x) c_{SM}(x').$$

Nous devons maintenant calculer les $c_{SM}(x')$ pour $x' \in L(\mathcal{A}')$.
Pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, on peut écrire $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$ comme l'intersection de $n-k$ hyperplans de $\mathcal{A}'$ en position générale : $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_{n-k}}$.
Ainsi, pour chaque $x \in L(\mathcal{A})$ de dimension $k+1$ on prendra $x' = \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$.
Posons donc $x' = \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$, et notons i l'inclusion $i : \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Nous devons calculer

$$c_{SM}(x') := c_*(1_{x'}) \in H_*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}).$$

Soit $\alpha \in H^2(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}})$ un générateur. Selon la théorie classique des classes de Chern [4, p. 280], on a que $c^*(x') = (1+\alpha)^{k+1} \in H^*(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}})$.
Passons maintenant à l'homologie en faisant le cap produit avec $[\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}]$ et en utilisant la dualité de Poincaré :

$$\begin{array}{rcl} \cap[\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}] \ : \ H^{2k-2l}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}) & \to & H_{2l}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}) \\ \alpha^{k-l} & \mapsto & [\mathbb{P}^l_{\mathbb{C}}]. \end{array}$$

On trouve alors :

$$c_{SM}(x') = (1+\alpha)^{k+1} \cap [\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}] = [\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}] + \tbinom{k+1}{1}[\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}] + \cdots + \tbinom{k+1}{k}[\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}}] \ \in H_*(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}),$$

et comme $c_{SM}(x') = c_*(i_* 1_{x'}) = i_* c_*(1_{x'}) \in H_*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ on a :

$$c_{SM}(x') = [\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}] + \tbinom{k+1}{1}[\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}] + \cdots + \tbinom{k+1}{k}[\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}}] \ \in H_*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}).$$

Or on peut montrer que

$$[\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}] + \tbinom{k+1}{1}[\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{C}}] + \cdots + \tbinom{k+1}{k}[\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}}] = ((1+\alpha)^{k+1}\alpha^{n-k}) \cap [\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}],$$

avec $(1+\alpha)^{k+1}\alpha^{n-k} \in H^*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$.

D'autre part, si on écrit le polynôme caractéristique sous la forme

$$\chi(\mathcal{A}', t+1) = \sum a_k t^k,$$

alors on trouve :

$$\begin{array}{c} \chi(\mathcal{A}', [\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}] + 1) = \sum a_k [\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}] \ \text{ dans } H_*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}), \\ \alpha^n \, \chi(\mathcal{A}', \tfrac{1}{\alpha} + 1) = \sum a_k \, \alpha^{n-k} \ \text{ dans } H^*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}). \end{array}$$

Enfin, en faisant le cap produit avec $[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}]$ on trouve :

$$\begin{array}{c}(\,\alpha^n\,\chi(\mathcal{A}',\tfrac{1}{\alpha}+1)\,)\,\cap\,[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}]=\sum a_k\,[\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}],\ \text{puis}\\ (\,\alpha^{n+1}\,\chi(\mathcal{A},\tfrac{1}{\alpha}+1)\,)\,\cap\,[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}]=\sum a_k\,[\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}],\end{array}$$

car $(t-1)\chi(\mathcal{A}',t)=\chi(\mathcal{A},t)$. D'où

$$(\,\alpha^{n+1}\,\chi(\mathcal{A},\frac{1}{\alpha}+1)\,)\,\cap\,[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}]=\chi(\mathcal{A}',t+1), \tag{2.11}$$

où le terme de droite est vu comme un polynôme où les t^k sont remplacés par $[\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}]$. Ainsi,

$$\begin{array}{c}c_{SM}(M(\mathcal{A}'))=\displaystyle\sum_{x\in L(\mathcal{A})}\mu_{L(\mathcal{A})}(x)c_{SM}(x'),\\ c_{SM}(M(\mathcal{A}'))=\displaystyle\sum_{x\in L(\mathcal{A})}\mu_{L(\mathcal{A})}(x)(1+\alpha)^{dim\,x}\,\alpha^{n+1-dim\,x}\cap[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}],\\ c_{SM}(M(\mathcal{A}'))=(\alpha^{n+1}\displaystyle\sum_{x\in L(\mathcal{A})}\mu_{L(\mathcal{A})}(x)(\frac{1}{\alpha}+1)^{dim\,x})\cap[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}],\\ c_{SM}(M(\mathcal{A}'))=(\,\alpha^{n+1}\chi(\mathcal{A},\tfrac{1}{\alpha}+1)\,)\cap[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}],\end{array}$$

et ceci achève la démonstration d'après (2.11).

□

Remarque 2.5.4 *En utilisant les formules qui relient le polynôme caractéristique :*

$$\pi(\mathcal{A},t)=(-t)^{n+1}\chi(\mathcal{A},-\tfrac{1}{t}),$$

le Théorème 2.5.3 peut se formuler de la façon suivante :

$$\begin{array}{c}c_{SM}(M(\mathcal{A}'))=(\,\alpha^{n+1}\chi(\mathcal{A},\tfrac{1}{\alpha}+1)\,)\cap[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}],\\ c_{SM}(M(\mathcal{A}'))=(\,(\alpha+1)^{n+1}\pi(\mathcal{A},\tfrac{-\alpha}{\alpha+1})\,)\cap[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}],\\ c_{SM}(M(\mathcal{A}'))=\,(\pi(\mathcal{A},\tfrac{-\alpha}{\alpha+1})\cup c(T\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}))\cap[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}],\\ c_{SM}(M(\mathcal{A}'))=\,\pi(\mathcal{A},\tfrac{-\alpha}{\alpha+1})\cap c_*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}),\end{array}$$

car $c(T\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})\cap[\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}]=c_*(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ *avec (2.10).*

Remarque 2.5.5 *1. Si $\mathcal{A}'$ n'est pas vide, on peut prendre $H'\in\mathcal{A}'$ de telle sorte que $\mathbb{C}^n=\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}\setminus H'$. On a les inclusions successives*

$$M(\mathcal{A}')\subset\ \ \mathbb{C}^n=\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}\setminus H'\ \ \subset\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}.$$

On a que $T\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}|_{M(\mathcal{A}')} = TM(\mathcal{A}') \to M(\mathcal{A}')$ est la restriction à $M(\mathcal{A}')$ du fibré $T\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{C}^n$ qui est trivial, $\mathbb{C}^n$ étant contractile. Par conséquent, le fibré tangent $TM(\mathcal{A}') \to M(\mathcal{A}')$ est trivial et donc sa classe de Chern usuelle vaut 1. Les formules obtenues ci-dessus montrent bien que les classes $c_{SM}(M(\mathcal{A}'))$ sont différentes des classes Chern usuelles du fibré tangent. Ces nouvelles classes de Chern-Schwartz-Macpherson apportent donc davantage d'informations que les classes de Chern classiques.

2. *Lorsque l'arrangement $\mathcal{A}$ est libre au sens de P. Orlik et H. Terao, voir [33, Chapitre 4], alors le faisceau $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(logA)$ des 1-formes différentielles à pôles logarithmiques le long de l'union A des hyperplans de $\mathcal{A}'$ est locallement libre, et la classe de Chern totale du fibré dual coïncide avec la classe de Chern -Schwartz-MacPherson du complémentaire $M(\mathcal{A}')$. En effet, en combinant le Théorème 2.5.3 et un résultat dû à M. Mustaţà et H. Schenck [30, Théorème 5.1] on obtient [1, Théorème 4.1] :*

$$c_{SM}(M(\mathcal{A}')) = c^*(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(logA)^\vee) \cap [\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}].$$

Exemple 2.5.6 *En utilisant 2.5.3 et 2.3.11 on peut donner les exemples suivants.*

1. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ l'arrangement de Boole, alors*

$$\chi(\mathcal{B}, \tfrac{1}{\alpha}+1) = (\tfrac{1}{\alpha})^{n+1} \text{ et}$$
$$c_{SM}(M(\mathcal{B}')) = (\,\alpha^{n+1}\chi(\mathcal{B}, \tfrac{1}{\alpha}+1)\,) \cap [\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}] = 1 \cap [\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}] = [\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}].$$

2. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement générique constitué de d hyperplans, $d \leq n+1$, alors :*

$$\chi(\mathcal{A}, \tfrac{1}{\alpha}+1) = (\tfrac{1}{\alpha}+1)^{n+1-d}(\tfrac{1}{\alpha})^d \text{ et}$$
$$c_{SM}(M(\mathcal{A}')) = (\,\alpha^{n+1}\chi(\mathcal{A}, \tfrac{1}{\alpha}+1)\,) \cap [\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}] = (1+\alpha)^{n+1-d} \cap [\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}].$$

Chapitre 3

Fibre de Milnor des arrangements d'hyperplans

3.1 Systèmes locaux et arrangement d'hyperplans

Dans cette partie on supposera connue la notion de faisceau, voir par exemple [36]. Nous allons aborder les systèmes locaux de trois manières différentes. Rappelons tout d'abord que si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé (par exemple une variété analytique complexe munie de son faisceau structural), alors on définit les faisceaux de modules comme suit :

Définition 3.1.1 *On appelle $\underline{\mathcal{O}_X-module}$ un faisceau $\mathcal{F}$ tel que pour tout ouvert U de X, $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)-module$, les flèches de restriction étant linéaires.*

La première façon de définir un système local est la suivante.

Définition 3.1.2 *Soit A un anneau commutatif (en général $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$).*
Soit X un espace topologique. Le faisceau constant sur X associé à A est noté A_X, et la catégorie abélienne des faisceaux de A_X-modules est notée $mod(A_X)$.
On appelle $\underline{A-\text{système local}}$ sur X un faisceau $\mathcal{F} \in mod(A_X)$ localement constant, c'est à dire tel qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X et des $A-$modules M_i tels que $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{M}_i$, où $\mathcal{M}_i$ est le faisceau constant sur U_i associé à M_i.
De plus, quand tous les M_i sont libres de rang r on dit que le système local est de rang r.

Exemple 3.1.3 *Le système local constant A_X est appelé système local trivial.*

Remarque 3.1.4 *Lorsque l'espace topologique X est connexe, on peut remplacer les M_i par un unique $A-$module M.*

Remarque 3.1.5 *Supposons que A est un corps, X est un CW-complexe fini, et $\mathcal{L}$ est un $A-$système local sur X de rang r. Alors on a (voir [14, p. 49]) :*

$$r \cdot E(X) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q dim_A H^q(X, \mathcal{L}),$$

où $E(X) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q b_q(X)$ désigne la caractéristique d'Euler de X, avec $b_q(X) = dim\, H^q(X, \mathbb{Q})$.

Rappelons également quelques opérations sur les faisceaux de modules :

Définition 3.1.6 – *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Alors le foncteur image directe $f_* : mod(A_X) \to mod(A_Y)$ est défini par :*

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)), \ \forall \mathcal{F} \in mod(A_X), \ \ \forall V \subset Y \text{ ouvert.}$$

Ce foncteur est covariant, additif et exact à gauche.

– *On appelle i^e foncteur dérivé de f_* le foncteur $\mathcal{R}^i f_*$ défini comme suit :*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{F} \in mod(A_X), \ \mathcal{R}^i f_*(\mathcal{F}) \text{ est le faisceau associé au préfaisceau } V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}).$$

Définition 3.1.7 *(Image réciproque)*

Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme de variétés sur un corps A.
Soit $\mathcal{G}$ un A_Y-module et U un ouvert de X. On définit une relation d'équivalence sur les couples (V, s), où V est un ouvert de Y contenant $\phi(U)$ et $s \in \mathcal{G}(V)$, en posant :

$$(V, s) \sim (V', s') \text{ si et seulement si } s \text{ et } s' \text{ coïncident sur un ouvert } V'' \text{ contenant } \phi(U) \text{ et contenu dans } V \cap V'.$$

L'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation est noté $\phi_0^{-1}\mathcal{G}(U)$. Ceci définit un préfaisceau sur X et on note $\phi^{-1}(\mathcal{G})$ le faisceau associé.

Lorsque l'espace X vérifie certaines hypothèses (connexe par arc, séparé, localement contractile) on sait, comme il est démontré dans le livre [14], que la catégorie des $A-$systèmes locaux sur X est équivalente à celle des représentations

$$\rho : \pi_1(X, x_0) \to Aut(M),$$

où $\pi_1(X, x_0)$ est le groupe fondamental de X basé en un point x_0, et M est un $A-$module.

A partir de maintenant on travaillera dans le cas complexe $A = \mathbb{C}$,
X sera une variété analytique complexe qui vérifie toutes ces hypothèses, et on prendra $M = \mathbb{C}^d$. Ceci nous amène à la deuxième manière d'aborder un système local sur X : un $\mathbb{C}-$système local de rang d peut être décrit par une représentation

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(X, x_0) &\to Gl_d(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto \rho([\gamma]). \end{aligned}$$

Exemple 3.1.8 – *Comme $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$, un système local sur $\mathbb{C}^*$ est complètement déterminé par $\rho(1)$, où $1 = [\gamma]$ est la classe du lacet élémentaire $t \mapsto exp(2i\pi t)$, $t \in [0, 1]$.*

– *Prenons $X = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \bigcup_{j=1}^{d} H_j$ le complémentaire d'un arrangement d'hyperplans, les H_j étant définis par une équation linéaire $H_j := \{l_j = 0\}$.*
Un système local de rang 1 sur X est décrit par une représentation

$$\rho : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{C}^*.$$

En factorisant par l'abélianisé de $\pi_1(X, x_0)$ et en utilisant le Théorème d'Hurewicz qui assure que si X est un espace topologique connexe par arcs, alors $Ab(\pi_1(X, x_0)) \simeq H_1(X, \mathbb{Z})$, on obtient :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{C}^* \\ & H_1(X, \mathbb{Z}) \arrow[ur, "\tilde{p}"'] & \end{tikzcd}$$

Nous savons de plus que le groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_d]$ est le $\mathbb{Z}-$module libre engendré par les lacets élémentaires γ_j tournant dans le sens positif autour des hyperplans H_j, appelés méridiens, voir [33].
Ainsi, un système local de rang 1 sur X est entièrement déterminé par les images $\tilde{p}(\gamma_j) = \lambda_j \in \mathbb{C}^*$.

On sait, comme il est expliqué dans [38], que la catégorie des fibrés vectoriels $\pi : E \longrightarrow X$ holomorphes de rang d sur X est équivalente à celle des faisceaux $\mathcal{E}$ de $\mathcal{O}_X-$modules localement libres de rang d. La troisième manière d'aborder les systèmes locaux utilise les connexions sur les fibrés vectoriels.

Définition 3.1.9 *Une <u>connexion holomorphe</u> ∇ sur un fibré vectoriel holomorphe $\pi : E \to X$ est un homomorphisme $\mathbb{C}-$linéaire de faisceaux :*

$$\nabla : \mathcal{E} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$$

vérifiant la règle de Leibniz :

pour tout ouvert U de X, pour toute section $s \in \Gamma(U, \mathcal{E})$, et pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}_X(U)$, on a :

$$\nabla(f \cdot s) = f\nabla(s) + df \otimes s \in \Gamma(U, \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}).$$

Ici Ω^1_X désigne le faisceau des $1-$formes différentielles holomorphes, et $\mathcal{E}$ le $\mathcal{O}_X-$faisceau localement libre associé au fibré E.

Proposition 3.1.10 *Deux connexions holomorphes ∇ et ∇' sur un fibré $\mathcal{E}$ diffèrent par un homomorphisme $\mathcal{O}_X-$linéaire $\Omega : \mathcal{E} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$.*
Réciproquement, l'adjonction d'un tel homomorphisme Ω à une connexion ∇ donne une nouvelle connexion ∇'.

Définition 3.1.11 *On peut étendre l'action d'une connexion ∇ sur les sections de $\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ par la formule :*

$$\nabla(\omega \otimes s) = dw \otimes s - \omega \wedge \nabla(s).$$

On dit alors qu'une connexion est <u>intégrable</u> si $\nabla \circ \nabla = \nabla^2 = 0$.

Exemple 3.1.12 *Le fibré trivial de rang 1 est muni de la connexion différentielle $d : \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X$. Cette connexion est intégrable car $d^2 = 0$ équivaut à*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_i}, \quad \forall f \in \mathcal{O}_X, \ \forall i, j,$$

où les z_i sont les coordonnées dans une carte de X. Or le Théorème de Schwarz assure que cette hypothèse est vérifiée. D'après la Proposition 3.1.10 toute autre connexion ∇ sur le fibré trivial de rang 1 s'écrit sous la forme $\nabla = d + \Omega$, où Ω est une section globale de Ω^1_X, et on peut montrer que ∇ est intégrable si et seulement si $d\Omega = 0$. Ainsi, Ω définit une classe de cohomologie $[\Omega]$ dans $H^1(X, \mathbb{C})$.
On sait que si $\nabla' = d + \Omega'$, alors les fibrés à connexion $(\mathcal{O}_X, \nabla)$ et $(\mathcal{O}_X, \nabla')$ sont isomorphes si et seulement si $[\Omega] = [\Omega']$ dans $H^1(X, \mathbb{C})$.

Voici maintenant le théorème central de cette partie :

Théorème 3.1.13 *(Cauchy-Kowalevski)*
Soit $\nabla : \mathcal{E} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ une connexion holomorphe intégrable sur un fibré vectoriel E de rang d.

1. *Le faisceau $E^\nabla = ker\nabla$ est un faisceau localement constant de $\mathbb{C}-$espace vectoriel de rang d, i.e localement isomorphe au faisceau constant $\mathbb{C}^d_X$.*

2. *Le faisceau $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} E^\nabla$ est un faisceau localement libre de $\mathcal{O}_X-$modules, la connexion ∇ sur ce faisceau définie par $\nabla(f \otimes s) = s \otimes df$ est intégrable, et $(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} E^\nabla)^\nabla = E^\nabla$.*
3. *L'homomorphisme naturel $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} E^\nabla \to \mathcal{E}$ est un isomorphisme de fibrés à connexions intégrables.*

Ce théorème prouve que la catégorie des fibrés vectoriels de rang d sur X à connexions intégrables est équivalente à celle des systèmes locaux de rang d sur X. Sous cette équivalence, le fibré vectoriel associé à un système local $\mathcal{L}$ est $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{L}$, et la connexion associée est l'unique connexion intégrable telle que $ker\nabla = \mathcal{L}$.

Retournons à notre Exemple 3.1.8 :

$$X = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \bigcup_{j=1}^{d} H_j, \;\; H_j := \{l_j = 0\}.$$

Les systèmes locaux sur X de rang 1 sont paramétrés par

$$Hom(\pi_1(X), \mathbb{C}^*) = (\mathbb{C}^*)^d = H^1(X, \mathbb{C}^*).$$

Soient donc $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{C}^*)^d$, et $\mathcal{L}_\lambda$ le système local de rang 1 sur X correspondant. On sait, d'après 3.1.12, que les connexions sur $\mathcal{O}_X$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} \nabla_\omega : \mathcal{O}_X &\to \Omega^1_X \\ u &\mapsto du + u \otimes \omega \end{aligned}$$

et qu'une telle connexion est intégrable si et seulement si $d\omega = 0$.
Ainsi ω définit une classe de cohomologie dans le groupe $H^1(X, \mathbb{C})$. Ce groupe est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension d ayant comme base la famille des 1-formes fermées $\{\frac{dl_j}{l_j}\}_{j \in \{1,\dots,d\}}$. On peut donc écrire $\omega = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \frac{dl_j}{l_j}$, avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{C}^d$.
Si de plus on choisit $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ tel que $\lambda_j = exp(-2i\pi\alpha_j)$, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, on peut montrer que $\mathcal{L}_\lambda = ker\nabla_\omega$.

Nous venons ainsi de construire une application exponentielle

$$\begin{aligned} exp : \; H^1(X, \mathbb{C}) &\to H^1(X, \mathbb{C}^*) \\ \omega &\mapsto ker\, \nabla_\omega. \end{aligned}$$

Le résultat suivant explique notre intérêt pour les variétés de résonance.

Théorème 3.1.14 *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $0 \in H^1(X, \mathbb{C})$ tel que*

$$exp : \mathcal{U} \to exp(\mathcal{U})$$

est un isomorphisme analytique qui envoie la variété de résonance

$$\mathcal{R}_k^q(\mathcal{A}) \subset A_{\mathbb{C}}^1(\mathcal{A}) = H^1(X, \mathbb{C})$$

dans la variété caractéristique

$$\mathcal{V}_k^q(X) = \{\mathcal{L} \in H^1(X, \mathbb{C}^*) \mid dim\, H^q(X, \mathcal{L}) \geq k\}.$$

De plus, si $\omega \in \mathcal{R}_k^q(\mathcal{A})$, *alors pour le système local associé* $\mathcal{L}_\lambda = ker\, \nabla_\omega$ *on a :*

$$dim\, H^q(X, \mathcal{L}_\lambda) \geq k.$$

Pour la preuve de ce théorème voir [20, Corollaire 6.7], pour une généralisation voir [19].

Nous allons maintenant rappeler une égalité bien connue entre la cohomologie de la fibre de Milnor d'un arrangement d'hyperplans central, et la cohomologie de son complémentaire à coefficients dans un certain système local que nous décrirons.

Soient $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement central et $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ l'arrangement projectif associé.
Notons $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{d} H_i$ et $M(\mathcal{A}') = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \backslash \bigcup_{i=1}^{d} H_i'$.
Comme nous l'avons vu dans la Proposition 2.1.6, on a un isomorphisme naturel de variétés algébriques :

$$f : M(\mathcal{A}) \to M(\mathcal{A}') \times \mathbb{C}^*.$$

Rappelons qu'en restreignant la fibration de Hopf $p : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ au complémentaire on obtient la fibration triviale $p : M(\mathcal{A}) \to M(\mathcal{A}')$.
Pour $a \in M(\mathcal{A})$, notons $a' = p(a)$. La fibration p induit l'application :

$$p_\# : \pi_1(M(\mathcal{A}), a) \to \pi_1(M(\mathcal{A}'), a').$$

On note $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ les lacets élémentaires autour des hyperplans de $\mathcal{A}$. Ce sont des générateurs de $\pi_1(M(\mathcal{A}), a)$, et $\gamma_1' = p_\# \gamma_1, \dots, \gamma_d' = p_\# \gamma_d$ sont des générateurs de $\pi_1(M(\mathcal{A}'), a')$.
Soit $\mathcal{L}$ un système local de rang 1 sur $M(\mathcal{A})$ associé à la représentation :

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(M(\mathcal{A}), a) &\to \mathbb{C}^* \\ \gamma_i &\mapsto a_i. \end{aligned}$$

Dans cette situation on définit l'opérateur de monodromie totale $T(\mathcal{L}) \in \mathbb{C}^*$ par le produit des monodromies $a_i,\ i \in \{1, \dots, d\}$. On aimerait définir la représentation :

$$\begin{aligned} \rho' : \pi_1(M(\mathcal{A}'), a') &\to \mathbb{C}^* \\ \gamma'_i &\mapsto a_i. \end{aligned}$$

On a que $H_1(M(\mathcal{A}'), \mathbb{Z}) = H_1(M(\mathcal{A}), \mathbb{Z}) / < \gamma'_1 + \cdots + \gamma'_d >$. La relation vérifiée par les lacets γ'_i dans $H_1(M(\mathcal{A}'), \mathbb{Z})$:

$$\gamma'_1 + \cdots + \gamma'_d = 0,$$

se traduit par $\rho'(\gamma'_1 + \cdots + \gamma'_d) = \rho'(\gamma_1) \cdots \rho'(\gamma_d) = a_1 \cdots a_d = 1$.
On en déduit que $T(\mathcal{L}) = 1$ si et seulement si on peut définir la représentation ρ', et donc un système local $\mathcal{L}' = p_*(\mathcal{L})$ de rang 1 sur $M(\mathcal{A}')$.

Définition 3.1.15 *(Produit tensoriel extérieur)*
Soient X et Y deux espaces topologiques, A un corps.
Soient $\mathcal{L}_X \in mod(A_X),\ \mathcal{L}_Y \in mod(A_Y)$.
Soient la projection $p_1 :\ X \times Y\ \to X$ et la projection $p_2 :\ X \times Y\ \to Y$.
Alors le <u>produit tensoriel extérieur</u> $\boxtimes$ est défini par :

$$\mathcal{L}_X \boxtimes \mathcal{L}_Y = p_1^{-1}\mathcal{L}_X \otimes p_2^{-1}\mathcal{L}_Y.$$

Proposition 3.1.16 *Supposons que $T(\mathcal{L}) = 1$. Alors via l'isomorphisme naturel $f\ :\ M(\mathcal{A})\ \to\ M(\mathcal{A}') \times \mathbb{C}^*$, le système local $\mathcal{L}$ correspond au produit tensoriel extérieur $\mathcal{L}' \boxtimes \mathbb{C}_{\mathbb{C}^*}$. En particulier on a :*

$$H^*(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}) \simeq H^*(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') \otimes H^*(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}).$$

La démonstration de cette proposition repose sur un théorème de Künneth, voir [14, Théorème 4.3.14] qui assure que :

$$H^*(M(\mathcal{A}') \times \mathbb{C}^*, \mathcal{L}' \boxtimes \mathbb{C}_{\mathbb{C}^*}) \simeq H^*(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') \otimes H^*(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}).$$

Corollaire 3.1.17 *Soit $\mathcal{L}$ un système local de rang 1 sur $M(\mathcal{A})$. Alors on a :*

1. *Soit $T(\mathcal{L}) \neq 1$, et dans ce cas $H^*(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}) = 0$,*
2. *Soit $T(\mathcal{L}) = 1$, et dans ce cas*

   $$dim\, H^q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}) = dim\, H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') + dim\, H^{q-1}(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'),\ \forall q \geq 0.$$

   En particulier, si $\mathcal{L}'$ est non résonant (i.e. $H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') = 0,\ \forall\, q \neq n$), alors

   $$H^q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}) = 0,\ \ \forall\, q \notin \{n, n+1\}.$$

Démonstration du Corollaire 3.1.17 :

1. Si $T(\mathcal{L}) \neq 1$, alors $T(\mathcal{L})$ n'admet pas 1 comme valeur propre.
   Avec [14, Corollaire 6.4.4] on a :
   $$dim\, H^q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}) \leq b_q(M(\mathcal{A}))\, d(\mathcal{L}, 1),$$
   où $d(\mathcal{L}, 1)$ est le nombre de blocs de Jordan ayant 1 comme valeur propre de l'opérateur de monodromie totale $T(\mathcal{L})$, et $b_q(M(\mathcal{A}))$ est le q^{e} nombre de Betti de $M(\mathcal{A})$.
2. Si $T(\mathcal{L}) = 1$, alors en utilisant la Proposition 3.1.16 on obtient :
   $$H^q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}) = \bigoplus_{k+l=q} H^k(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') \otimes H^l(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}),$$
   $$H^q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}) = H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') \otimes H^0(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}) \oplus H^{q-1}(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') \otimes H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}).$$
   On en déduit que :
   $$dim\, H^q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}) = dim\, H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') + dim\, H^{q-1}(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}').$$

$\square$

Remarque 3.1.18 *Le cas $T(\mathcal{L}) \neq 1$ du Corollaire 3.1.17 correspond au cas $\partial\omega \neq 0$ de la Proposition 2.4.25 via l'application exponentielle.*

3.2 Fibre de Milnor d'un arrangement d'hyperplans

Soit $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans central constitué de d hyperplans $H_i := \{l_i = 0\}$. Soit $M(\mathcal{A})$ son complémentaire dans $\mathbb{C}^{n+1}$ qui est une variété affine lisse, un complexe cellulaire de dimension $n+1$.
Notons $\mathcal{A}'$ l'arrangement projectif associé et $M(\mathcal{A}')$ son complémentaire dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.
Ce complémentaire est aussi une variété affine lisse dès que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
Soit la fibration triviale $p : M(\mathcal{A}) \to M(\mathcal{A}')$. Comme dans la section précédente on prendra $a \in M(\mathcal{A})$ et on notera $a' = p(a) \in M(\mathcal{A}')$.
Soit $p_\# : \pi_1(M(\mathcal{A}), a) \to \pi_1(M(\mathcal{A}'), a')$ l'application induite par p.
Notons $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ les lacets élémentaires autour des hyperplans de $\mathcal{A}$ générateurs de $\pi_1(M(A), a)$, et $\gamma'_1 = p_\#\gamma_1, \dots, \gamma'_d = p_\#\gamma_d$ ceux de $\pi_1(M(\mathcal{A}'), a')$.

Remarque 3.2.1 *En utilisant les formules de Künneth pour la fibration p on obtient l'isomorphisme d'algèbres graduées suivant :*

$$H^*(M(\mathcal{A}), \mathbb{C}) \simeq H^*(M(\mathcal{A}'), \mathbb{C}) \otimes H^*(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}).$$

Soit $f_{\mathcal{A}} : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ le polynôme homogène de degré d qui définit $\mathcal{A}$:

$$f_{\mathcal{A}}(x) = l_1(x) \cdots l_d(x).$$

Définition 3.2.2 *On appelle* <u>*fibre de Milnor de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$*</u> *l'hypersurface affine lisse*

$$F_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid f_{\mathcal{A}}(x) = 1\}.$$

On appelle <u>*fibration de Milnor*</u> *associée à $\mathcal{A}$ la fibration*

$$f_{\mathcal{A}} : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}^*.$$

C'est une fibration globale d'espace total $M(\mathcal{A})$ et de fibre $F_{\mathcal{A}}$.

Exemple 3.2.3 *Si $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est l'arrangement de Boole, alors on a :*

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{B}} &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_0 \cdots x_n = 1\} \\ &= \{((x_1 \cdots x_n)^{-1}, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\} \simeq (\mathbb{C}^*)^n. \end{aligned}$$

Un des résultats fondamentaux en théorie des arrangements d'hyperplans est que la cohomologie du complémentaire $M(\mathcal{A})$ est entièrement déterminée par le treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$ de par l'isomorphisme 2.4.19, qui codifie la combinatoire de l'arrangement. On peut alors se demander s'il en est de même pour la cohomologie de la fibre de Milnor $F_{\mathcal{A}}$. Il se trouve que la question est toujours ouverte, même pour $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$, même si de nombreux progrès on été faits (voir par exemple les résultats de A. Macinic et S. Papadima [28] décrits dans le chapitre suivant pour le premier nombre de Betti des arrangements graphiques, ceux de S. Settepanella [41, 40] pour l'arrangement des tresses rappelés également dans le chapitre suivant, ou encore les résultats de M. Yoshinaga pour les arrangements réels [45, 46]). Nous allons tenter d'exhiber des cas pour lesquels la réponse est affirmative.

Soit $\lambda = exp(2i\pi/d)$. Si on pose $\lambda_t = exp(2i\pi t/d)$ pour $t \in [0, 1]$, alors on a

$$f_{\mathcal{A}}(\lambda_t x) = {\lambda_t}^d f_{\mathcal{A}}(x), \ \ \forall x \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Ainsi l'homomorphisme

$$\begin{aligned} h : F_{\mathcal{A}} &\to F_{\mathcal{A}} \\ x &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

est une <u>monodromie</u> de la fibration de Milnor.
Cet homomorphisme induit des morphismes sur les groupes de cohomologie

$$h^q : H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) \to H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}), \ \ \forall q \in \mathbb{Z},$$

et comme $(h^q)^d = Id_{H^q(F_{\mathcal{A}},\mathbb{C})}$, $\forall q \in \mathbb{Z}$, ces morphismes sont tous diagonalisables avec valeurs propres dans $\mu_d = \{\lambda^k,\ 0 \leq k \leq d-1\}$.

Remarque 3.2.4 *Le groupe cyclique $< h >$ d'ordre d agissant librement sur la fibre $F_{\mathcal{A}}$, on a que*

$$F_{\mathcal{A}}/ < h > \simeq M(\mathcal{A}').$$

En particulier, $E(F_{\mathcal{A}}) = d \cdot E(M(\mathcal{A}'))$.

Notons maintenant $H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = ker(h^q - \lambda^k Id)$ le sous-espace propre de $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ associé à la valeur propre λ^k. On a la décomposition en somme directe suivante :

$$H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{d-1} H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k}.$$

Considérons la projection $p : F_{\mathcal{A}} \to F_{\mathcal{A}}/ < h > \simeq M(\mathcal{A}')$, et le faisceau $\mathcal{L}' = p_* \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}$. En utilisant la suite spectrale de Leray pour la fibration
$p : F_{\mathcal{A}} \to M(\mathcal{A}')$ on obtient :

$$E_2^{q,i} :\ H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{R}^i p_* \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}) \Rightarrow H^{q+i}(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}).$$

En utilisant le fait que $E_2^{q,i} = 0$ pour $i \neq 0$, on obtient :

$$H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}) = H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{R}^0 p_* \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}).$$

Or $\mathcal{R}^0 p_* \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$V \mapsto H^0(p^{-1}(V), \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}),\ \ \forall V \in M(\mathcal{A}').$$

Ce faisceau est un système local de rang d sur $M(\mathcal{A}')$, et de fibre en $a' \in M(\mathcal{A}')$:

$$(\mathcal{R}^0 p_* \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}})_{a'} = H^0(p^{-1}(a'), \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}),$$

où $p^{-1}(a') = (a, \lambda a, \ldots, \lambda^{d-1} a)$.
Les fibres de p étant finies, on a que $\mathcal{R}^0 p_* \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}} = p_* \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}} = \mathcal{L}'$, car $\mathcal{R}^i p_* = 0,\ \forall i > 0$.
On va donc pouvoir calculer la cohomologie de la fibre $F_{\mathcal{A}}$ en utilisant la cohomologie de $M(\mathcal{A}')$ à coefficients dans $\mathcal{L}'$.

Soit T la permutation cyclique d'ordre d de $GL(\mathbb{C}^d)$ définie par

$$T(e_1) = e_2, \ldots, T(e_d) = e_1,$$

où $(e_1, \ldots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^d$. Montrons que le système local $\mathcal{L}'$ a pour représentation :

$$\begin{aligned}\rho' : \pi_1(M(\mathcal{A}'), a') &\to GL(\mathbb{C}^d)\\ \gamma_i' &\mapsto T.\end{aligned}$$

Tout d'abord, on sait que l'action de $\pi_1(M(\mathcal{A}'), a')$ sur la fibre $p^{-1}(a')$ est

$$\gamma_i' \cdot (a, \lambda a, \ldots, \lambda^{d-1}a) = (\lambda a, \ldots, \lambda^{d-1}a, a).$$

En effet, la projection $p : F_{\mathcal{A}} \to F_{\mathcal{A}} / < h > \simeq M(\mathcal{A}')$ est un revêtement et on a que le groupe fondamental $\pi_1(M(\mathcal{A}'), a')$ est isomorphe à $< h >$.
Rappelons que $H^0(p^{-1}(a'), \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}) = H^0(p^{-1}(a'), \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des applications définies sur $p^{-1}(a')$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Notons $[x]$ la fonction $\phi :\ p^{-1}(a') \to \mathbb{C}$ telle que

$$\phi(x) = 1 \text{ et } \phi(y) = 0,\ \forall y \in p^{-1}(a'),\ y \neq x.$$

L'application :

$$[a] \mapsto e_1, [\lambda a] \mapsto e_2, \ldots, [\lambda^{d-1}a] \mapsto e_d$$

permet alors d'identifier $H^0(p^{-1}(a'), \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}})$ à $\mathbb{C}^d$. On a donc bien que l'action de chaque générateur $\gamma_i' \in \pi_1(M(\mathcal{A}'), a')$ sur la fibre en cohomologie est donnée par la permutation T, c'est à dire que $\rho'(\gamma_i') = T$. Comme T est diagonalisable avec valeurs propres $1, \lambda, \ldots, \lambda^{d-1}$, la représentation ρ' se décompose en la somme directe

$$\rho' = \bigoplus_{k=0}^{d-1} \rho'_{\lambda^k},$$

où les ρ'_{λ^k} sont les représentations définies par :

$$\begin{aligned}\rho'_{\lambda^k} : \pi_1(M(\mathcal{A}'), a') &\to \mathbb{C}^*\\ \gamma_i' &\mapsto \lambda^k.\end{aligned}$$

Enfin, si on note $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ le système local de rang 1 sur $M(\mathcal{A}')$ associé à ρ'_{λ^k} on a :

$$\mathcal{L}' = \bigoplus_{k=0}^{d-1} \mathcal{L}'_{\lambda^k}, \text{ et}$$

$$H^*(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^*(M(\mathcal{A}'), \bigoplus_{k=0}^{d-1} \mathcal{L}'_{\lambda^k}) = \bigoplus_{k=0}^{d-1} H^*(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_{\lambda^k}).$$

Nous venons de voir que $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}')$. On peut donc considérer la monodromie (qui agit sur le système local $\mathcal{L}'$)

$$h^* : H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') \to H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}').$$

Or la monodromie h restreinte à la fibre $p^{-1}(a')$ permute cycliquement les points :

$$h((a, \lambda a, \ldots, \lambda^{d-1}a)) = (\lambda a, \ldots, \lambda^{d-1}a, a).$$

Si maintenant on passe à la cohomologie via l'identification $H^0(p^{-1}(a'), \mathbb{C}_{F_{\mathcal{A}}}) \simeq \mathbb{C}^d$ comme vu plus haut, on voit que h^* correspond à la permutation T.

Maintenant, l'espace propre en cohomologie associé à la valeur propre λ^k est

$$H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{F}'_{\lambda^k}),$$

où $\mathcal{F}'_{\lambda^k}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{L}'$ correspondant à l'espace propre $ker(h^* - \lambda^k Id)$.

Enfin, comme on vient de voir que h^* correspondait à la permutation T, on a que le système local $\mathcal{F}'_{\lambda^k}$ est isomorphe à $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$. Ces considérations nous mènent au théorème suivant, énoncé dans le livre de A. Dimca [14, p. 211], qui décrit les sous-espaces propres cohomologiques de la fibre $F_{\mathcal{A}}$ en fonction de la cohomologie tordue de $M(\mathcal{A}')$.

Théorème 3.2.5 *Avec les notations précédentes, on a que :*

$$H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} \simeq H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_{\lambda^k}), \quad \forall\, 0 \leq k \leq d-1.$$

Exemple 3.2.6 *La représentation ρ'_1 étant triviale on a :*

$$H^q(F_{\mathcal{A}})_1 = H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_1) = H^q(M(\mathcal{A}'), \mathbb{C}), \quad \forall q.$$

Remarque 3.2.7 *Supposons $n = 1$. Les singularités étant isolées dans $\mathbb{C}^2$ on a avec [14, Exemple 6.4.11] les sous-espaces propres suivants (déterminés par le treillis d'intersection de $\mathcal{A}$) :*

$$H^0(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^0(F_{\mathcal{A}})_1 \simeq \mathbb{C},$$

$$H^1(F_{\mathcal{A}})_1 \simeq \mathbb{C}^{d-1},\ H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} \simeq \mathbb{C}^{d-2},\ \forall\, \lambda^k \neq 1.$$

En particulier, $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{(d-1)^2}$.

Si $n \geq 3$, les singularités ne sont plus isolées et on ne peut pas conclure. Cependant nous allons voir dans la suite de cette section qu'il y a annulation de certains sous-espaces propres de la monodromie h^* selon certains critères.

Commençons par énoncer un autre théorème, dû à T. Kohno, et cité d'une façon incomplète dans un article de D. Cohen et A. Suciu [11, Théorème 2.1] : on peut appliquer le Théorème de Kohno à un arrangement $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ s'il est central et essentiel.

Théorème 3.2.8 ([23], Théorème 1) *Soient $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ un arrangement d'hyperplans, et $\rho' : \pi_1(M(\mathcal{A}'), a') \to \mathbb{C}^*$ une représentation de rang 1 vérifiant :*

1. *Pour tout lacet élémentaire $\gamma'_i \in \pi_1(M(\mathcal{A}'), a')$, on a $\rho'(\gamma'_i) \neq 1$.*
2. *Pour tout sous-arrangement $\{H'_{i_1}, \dots, H'_{i_r}\}$ tel que $codim(H'_{i_1} \cap \cdots \cap H'_{i_r}) < r$, et $H'_{i_1} \cap \cdots \cap H'_{i_r} \neq \emptyset$, on a $\prod_{j=1}^{r} \rho'(\gamma'_{i_j}) \neq 1$.*

Alors si $\mathcal{L}'$ est le système local correspondant à la représentation ρ', on a que

$$H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') = 0, \text{ si } q \neq n, \text{ et } dim\, H^n(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') = (-1)^n E(M(\mathcal{A}')).$$

Supposons que $\mathcal{A}$ est un arrangement central de $\mathbb{C}^{n+1}$. Si $\mathcal{A}$ est essentiel, on peut donc essayer d'appliquer le Théorème de Kohno à l'arrangement projectif associé $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ et aux représentations ρ'_{λ^k} de rang 1 du Théorème 3.2.5.
Si λ^k est une racine d^{e} primitive de l'unité, alors on a que $\rho'_{\lambda^k}(\gamma'_i) = \lambda^k \neq 1$, pour tout lacet élémentaire $\gamma'_i \in \pi_1(M(\mathcal{A}'))$. De plus, pour tout sous-arrangement de $\mathcal{A}'$ d'intersection non vide comportant N hyperplans on a $N < d$, donc $\lambda^{kN} \neq 1$. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.9 ([11], Corollaire 2.2) *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans central et essentiel tel que $|\mathcal{A}| = d$. Si λ^k est une racine d^e primitive de l'unité, alors on a :*

$$\begin{aligned} &H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} \simeq H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_{\lambda^k}) = 0, \text{ si } q \neq n, \text{ et} \\ &b_n(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = dim\, H^n(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = (-1)^n E(M(\mathcal{A}')). \end{aligned}$$

Comme cas particulier, si on choisit d premier, alors λ^k est une racine d^{e} primitive de l'unité pour tout $1 \leq k \leq d-1$. On déduit donc du Corollaire 3.2.9 que pour tout $1 \leq k \leq d-1$ on a :

$$H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = 0, \text{ si } q \neq n, \text{ et } b_n(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = (-1)^n E(M(\mathcal{A}')).$$

L'Exemple 3.2.6 donne :

$$H^q(F_{\mathcal{A}})_1 = H^q(M(\mathcal{A}'), \mathbb{C}), \ \forall q.$$

Ainsi, en utilisant la décomposition $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{d-1} H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k}$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.10 ([11], Corollaire 2.3) *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans central et essentiel avec $|\mathcal{A}| = d$. Si d est premier, alors pour $1 \leq k \leq d-1$ on a :*

$$b_q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = 0, \ si \ q \neq n, \ \ et \ \ b_n(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = (-1)^n E(M(\mathcal{A}')).$$

De plus les nombres de Betti de la fibre de Milnor $F_{\mathcal{A}}$ vérifient :

$$b_q(F_{\mathcal{A}}) = b_q(M(\mathcal{A}')), \ si \ q \neq n, \ et$$
$$b_n(F_{\mathcal{A}}) = b_n(M(\mathcal{A}')) + (d-1)(-1)^n E(M(\mathcal{A}')).$$

Notons $V_{\mathcal{A}}$ l'intersection des hyperplans de $\mathcal{A}$. Supposons que $V_{\mathcal{A}}$ est de codimension $r < n+1$. Alors $V_{\mathcal{A}} \neq 0$ et $\mathcal{A}$ n'est pas essentiel ; on ne peut donc pas appliquer le Théorème de Kohno directement. En effet, si $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\}$, on peut supposer que $H'_d := \{z_{n+1} = 0\}$ est l'hyperplan à l'infini.
Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^n$ l'arrangement affine obtenu de par l'isomorphisme $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \backslash H'_d \simeq \mathbb{C}^n$. Soient $\mathcal{L}'$ un système local de rang 1 sur $M(\mathcal{A}')$, et $\tilde{\mathcal{L}}$ le système local sur $M(\mathcal{B})$ correspondant. On a alors $H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') \simeq H^q(M(\mathcal{B}), \tilde{\mathcal{L}})$, et si on veut appliquer le Théorème de Kohno [23, Théorème 1] à l'arrangement affine $\mathcal{B}$, on a que la connexion intégrable Ω associée au système local $\tilde{\mathcal{L}}$ n'est pas générique par rapport aux hyperplans de $\mathcal{A}$ si ces derniers ne sont pas linéairement indépendants. Nous allons faire maintenant une construction qui va nous permettre d'appliquer le Théorème de Kohno, même si l'arrangement n'est pas essentiel.

- Si les hyperplans de $\mathcal{A}$ sont linéairement indépendants, alors $d = r$ et on peut choisir les coordonnées $x_1, ..., x_d$ telles que :
$$H_1 := \{x_1 = 0\}, \dots, H_d := \{x_d = 0\}.$$
De plus, *codim* $H'_{i_1} \cap \cdots \cap H'_{i_v} = v$, $\forall \ \{H'_{i_1}, \dots, H'_{i_v}\} \subset \mathcal{A}'$. Ainsi les hypothèses du Théorème 3.2.8 sont vérifiées si $\rho'(\gamma'_i) \neq 1, \ \forall i$.
- Supposons que les hyperplans de $\mathcal{A}$ ne sont pas linéairement indépendants. Comme $V_{\mathcal{A}}$ est de codimension r, on peut choisir $r < d$ hyperplans linéairement indépendants $H_{i_1}, \dots, H_{i_r}$ de $\mathcal{A}$ tels que $V_{\mathcal{A}} = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_r}$.
Notons l_{i_j} la forme linéaire définissant l'hyperplan H_{i_j} :
$$H_{i_j} := \{l_{i_j} = 0\}.$$
Notons $V'_{\mathcal{A}} = \mathbb{P}(V_{\mathcal{A}})$. Soient
$$\begin{aligned} q : \ \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \backslash V'_{\mathcal{A}} &\to \mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}} \\ x &\mapsto (l_{i_1}(x) : \cdots : l_{i_r}(x)) \end{aligned}$$
la projection linéaire associée, et $\tilde{\mathcal{A}}'$ l'arrangement d'hyperplans de $\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}$ obtenu en prenant les images des hyperplans de $\mathcal{A}'$, de complémentaire $M(\tilde{\mathcal{A}}') \subset \mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}$. Alors q induit une fibration localement triviale
$$q : \ M(\mathcal{A}') \to M(\tilde{\mathcal{A}}'),$$
de fibre $\mathbb{P}^{n-r+1}_{\mathbb{C}} \backslash V'_{\mathcal{A}}$ isomorphe à $\mathbb{C}^{n-r+1}$. Montrons que cette fibration est même triviale, donc qu'on a un isomorphisme naturel de variétés algébriques :
$$M(\mathcal{A}') \simeq M(\tilde{\mathcal{A}}') \times \mathbb{C}^{n-r+1}.$$
Soit $z_1, \dots, z_{n+1}$ un système de coordonnées de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que :
$$z_1 = l_{i_1}, \dots, z_r = l_{i_r}.$$

On a alors :

$$\mathbb{C}^{n+1} = V_{\mathcal{A}} \oplus E,$$

avec $V_{\mathcal{A}} = \{(0, \dots, 0, z_{r+1}, \dots z_{n+1})\}$, et $E = \{(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0)\}$.
De plus, $M(\mathcal{A}') \subset \{\, (z_1 : \cdots : z_r : z_{r+1} : \cdots : z_{n+1}) \mid z_1 \neq 0, \dots, z_r \neq 0 \,\}$
et $M(\tilde{\mathcal{A}}') \subset \{\, (z_1 : \cdots : z_r) \mid z_1 \neq 0, \dots, z_r \neq 0 \,\} \subset \mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}$.

Soient maintenant H un hyperplan quelconque de $\tilde{\mathcal{A}}'$, et $l_H = \sum_{i=1}^{r} a_i z_i$ l'équation linéaire définissant H. Soient alors α, β les applications :

$$\alpha : M(\mathcal{A}') \longrightarrow M(\tilde{\mathcal{A}}') \times \mathbb{C}^{n-r+1},$$
$$\alpha\big((z_1 : \cdots : z_{n+1})\big) = \big((z_1 : \cdots : z_r), \tfrac{1}{l_H((z_1:\cdots:z_r))}(z_{r+1}, \dots, z_{n+1}) \big).$$
$$\beta : M(\tilde{\mathcal{A}}') \times \mathbb{C}^{n-r+1} \longrightarrow M(\mathcal{A}')$$
$$\beta\big(\big((z_1 : \cdots : z_r), (x_1, \dots, x_{n-r+1}) \big) \big)$$
$$= (z_1 : \cdots : z_r : l_H((z_1 : \cdots : z_r))x_1 : \cdots : l_H((z_1 : \cdots : z_r))x_{n-r+1}).$$

On a que α et β sont bien définies et vérifient : $\alpha \circ \beta = Id$, $\beta \circ \alpha = Id$.
Notons $\tilde{\mathcal{L}}'$ le système local de rang 1 sur $M(\tilde{\mathcal{A}}')$ induit par $\mathcal{L}'$:

$$\tilde{\mathcal{L}}' = q_*(\mathcal{L}').$$

On peut montrer que

$$\alpha_* \mathcal{L}' = \tilde{\mathcal{L}}' \boxtimes \mathbb{C}_{\mathbb{C}^{n-r+1}},$$

et en utilisant une formule de Künneth [14, p. 117] on obtient :

$$H^*(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') = H^*(M(\tilde{\mathcal{A}}'), \tilde{\mathcal{L}}') \otimes H^*(\mathbb{C}^{n-r+1}, \mathbb{C}_{\mathbb{C}^{n-r+1}}),$$
$$H^*(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') = H^*(M(\tilde{\mathcal{A}}'), \tilde{\mathcal{L}}').$$

Enfin, avec le Corollaire 3.1.17 on a le théorème suivant :

Théorème 3.2.11 *Avec les notations précédentes on a :*

$$H^*(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') = H^*(M(\tilde{\mathcal{A}}'), \tilde{\mathcal{L}}').$$

En particulier, si $\tilde{\mathcal{L}}'$ est non résonant alors

$$H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}') = 0, \ \forall\, q \neq r-1, \ \textit{et}$$
$$H^q(M(\mathcal{A}), p^{-1}\mathcal{L}') = 0, \ \forall\, q \notin \{r-1, r\},$$

où p désigne la fibration triviale $p : M(\mathcal{A}) \to M(\mathcal{A}')$.

Remarque 3.2.12 *On peut appliquer le Théorème de Kohno à l'arrangement affine $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^r$ associé à l'arrangement projectif $\tilde{\mathcal{A}}' \subset \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ qui est essentiel.*

Nous allons maintenant donner une généralisation du Théorème de Kohno.
Soit $\mathcal{B}' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ un arrangement d'hyperplans projectif.
On appellera <u>arête</u> de $\mathcal{B}'$ toute intersection non vide d'hyperplans de $\mathcal{B}'$.
On dira qu'une arête X est <u>dense</u> si le sous-arrangement $\mathcal{B}'_X$ constitué des hyperplans qui contiennent X est irréductible, c'est à dire que si on note Q_X le polynôme

homogène définissant l'union des hyperplans de ${\mathcal{B}'}_X$, alors on ne peut pas choisir les coordonnées x sur $\mathbb{C}^{n+1}$ telles que

$$Q_X(x_1, \dots, x_{n+1}) = Q_{X1}(x_1, \dots, x_u)Q_{X2}(x_{u+1}, \dots, x_{n+1}),$$

pour un certain $1 \leq u \leq n$, et des polynômes homogènes non constants R_1 et R_2.

Exemple 3.2.13 *Soit $\mathcal{B}'$ un arrangement de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Soit O un point de multiplicité m de cet arrangement. Alors on a que O est dense si et seulement si $m \geq 3$.*

Notons $D(\mathcal{B}')$ l'ensemble des arêtes denses de $\mathcal{B}'$. Les résultats énoncés par la suite ont été obtenus en écrivant $M(\mathcal{B}')$ comme le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans une variété complexe projective. Cependant, l'union des hyperplans de $\mathcal{B}'$, qu'on notera N, est un diviseur de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ qui n'est pas toujours à croisements normaux.

Exemple 3.2.14 *Reprenons notre Exemple 3.2.13.*
Si $m \geq 3$, alors dans un voisinage de O on a que N n'est pas à croisements normaux. On doit donc éclater le point O, ainsi que tous les autres points de multiplicité supérieure ou égale à trois.

Dans le cas général, après des étapes successives qui consistent à éclater les arêtes denses de $\mathcal{B}'$ et qui sont décrites dans le livre de A. Dimca [14, p. 218-219], on obtient une résolution $r : Z \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. On a alors que $D = r^{-1}(N)$ est un diviseur à croisements normaux de Z, de composantes irréductibles lisses D_X correspondant aux arêtes denses $X \in D(\mathcal{B}')$, et tel que $Z \backslash D \simeq M(\mathcal{B}')$.

Soit maintenant $\mathcal{L}'$ un système local de rang r sur le complémentaire $M(\mathcal{B}')$, associé à une représentation :

$$\rho' : \pi_1(M(\mathcal{B}')), b') \to GL_r(\mathbb{C}).$$

A chaque composante irréductible D_X correspond une classe de conjugaison $T_X \in GL_r(\mathbb{C})$ obtenue comme la monodromie du système local $\mathcal{L}'$ le long d'un lacet γ'_X tournant dans le sens positif autour de l'hypersurface D_X.
Soient ${\gamma'}_i$ les lacets élémentaires tournant autour des hyperplans H'_i de l'arrangement $\mathcal{B}'$. On peut montrer que :

$$T_X = \rho'({\gamma'}_{i_1}) \cdots \rho'({\gamma'}_{i_v}), \;\; si \;\; X = H'_{i_1} \cap \cdots \cap H'_{i_v}. \tag{3.1}$$

Le théorème suivant généralise le Théorème de Kohno, voir [10, 25].

Théorème 3.2.15 ([14], Théorème 6.4.18) *Supposons qu'il existe un hyperplan $H' \in \mathcal{B}'$ tel que pour toute arête dense $X \in D(\mathcal{B}')$, avec $X \subset H'$, l'opérateur de monodromie T_X correspondant n'admet pas 1 comme valeur propre. Alors*

$$H^q(M(\mathcal{B}'), \mathcal{L}') = 0, \ \forall \ q \neq n.$$

En utilisant le Théorème de Zariski-Lefschetz affine, voir [15, p. 25], et en intersectant avec des sous-espaces linéaires génériques on obtient le résultat suivant.

Remarque 3.2.16 ([14], Remarque 6.4.20.) *Supposons qu'il existe un hyperplan $H' \in \mathcal{B}'$ tel que pour toute arête dense $X \in D(\mathcal{B}')$, avec $X \subset H'$ et $\operatorname{codim} X \leq c$, l'opérateur monodromie T_X correspondant n'admet pas 1 comme valeur propre. Alors*

$$H^q(M(\mathcal{B}'), \mathcal{L}') = 0, \ \forall \ 0 \leq q < c.$$

Nous utiliserons ces résultats au Chapitre 4 pour démontrer notre premier théorème d'annulation.

3.3 Fonction Zeta de la monodromie

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans central constitué de d hyperplans, de fibre de Milnor $F_{\mathcal{A}}$. Soit $\lambda = exp(2i\pi/d)$. Considérons la monodromie de la fibration de Milnor

$$\begin{aligned} h : F_{\mathcal{A}} &\to F_{\mathcal{A}} \\ x &\mapsto \lambda x, \end{aligned}$$

ainsi que les morphismes induits sur les groupes de cohomologie

$$h^q : H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) \to H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}),$$

qui sont diagonalisables avec des valeurs propres dans $\mu_d = \{\lambda^k, \, 0 \leq k \leq d-1\}$.

Définition 3.3.1 *(Fonction Zeta de la monodromie)*
On définit la fonction Zeta de la monodromie h comme le polynôme suivant :

$$Z(h)(t) = \prod_{q \geq 0} \Delta^q(t)^{(-1)^q},$$

où les $\Delta^q(t) = det(t \cdot Id_{H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})} - h^q)$ sont les polynômes d'Alexander de l'hypersurface $\cup_{H' \in \mathcal{A}'} H' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Si on note $\alpha(\lambda^k)_q = dim\, H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k}$ la multiplicité d'une valeur propre $\lambda^k \in \mu_d$ de h^q, on a alors :

$$\Delta^q(t) = \prod_{k=0}^{d-1}(t-\lambda^k)^{\alpha(\lambda^k)_q},$$

d'où

$$Z(h)(t) = \prod_{k=0}^{d-1}(t-\lambda^k)^{\sum_{q\geq 0}(-1)^q\alpha(\lambda^k)_q}.$$

Les systèmes locaux $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ étant de rang 1, la Remarque 3.1.5 donne : $E(M(\mathcal{A}')) = \sum_{q\geq 0}(-1)^q dim\, H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_{\lambda^k}) = \sum_{q\geq 0}(-1)^q\alpha(\lambda^k)_q$. Finalement on a :

$$Z(h)(t) = \prod_{k=0}^{d-1}(t-\lambda^k)^{E(M(\mathcal{A}'))} = (t^d-1)^{E(M(\mathcal{A}'))}, \tag{3.2}$$

où $E(M(\mathcal{A}')) = \sum_{X\in L_q(\mathcal{A}')} \mu_{L(\mathcal{A}')}(X)$ est entièrement déterminé par le treillis d'intersection $L(\mathcal{A}')$ avec le Théorème 2.3.10.

Exemple 3.3.2 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$ l'arrangement d'hyperplans défini par*

$$xyz(x-y)(x-z)(y-z) = 0.$$

En choisissant $\{z=0\}$ l'hyperplan à l'infini dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, on peut regarder $\mathcal{A}'$ comme l'arrangement affine $\mathcal{B} = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$ de $\mathbb{C}^2$, avec $H_1 := \{x=0\}$, $H_2 := \{y=0\}$, $H_3 := \{x-y=0\}$, $H_4 := \{x-1=0\}$, et $H_5 := \{y-1=0\}$. Avec 2.3.12 on trouve

$$E(M(\mathcal{A}')) = E(M(\mathcal{B})) = 2,$$

d'où, avec la formule (3.2) :

$$Z(h)(t) = (t^6-1)^2.$$

La fonction Zeta étant définie par

$$Z(h)(t) = \frac{\Delta^0(t)\cdot\Delta^2(t)}{\Delta^1(t)},$$

on peut exprimer $\Delta^2(t)$ en fonction de $\Delta^0(t)$ et de $\Delta^1(t)$. Comme $h^0 = Id_{H^0(F_{\mathcal{A}},\mathbb{C})}$ (car $H^0(F_{\mathcal{A}},\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ est connexe), on a $\Delta^0(t) = (t-1)$ et

$$\Delta^2(t) = \frac{\Delta^1(t)\cdot\prod_{k=0}^5(t-\lambda^k)^2}{(t-1)}.$$

On montrera au Chapitre 4 que $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1 \oplus H^1(F_{\mathcal{A}})_\lambda \oplus H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^2}$, *avec* $H^1(F_{\mathcal{A}})_1 \simeq \mathbb{C}^5$, *et* $H^1(F_{\mathcal{A}})_\lambda \simeq H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^2} \simeq \mathbb{C}$.
Ainsi $\Delta^1(t) = (t-1)^5(t-\lambda)(t-\lambda^2)$ *et on trouve :*

$$\Delta^2(t) = (t-1)^6(t-\lambda)^3(t-\lambda^2)^3(t-\lambda^3)^2(t-\lambda^4)^2(t-\lambda^5)^2.$$

On obtient donc les sous-espaces propres suivants : $H^2(F_{\mathcal{A}})_1 \simeq \mathbb{C}^6$, $H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^3} \simeq H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^4} \simeq H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^5} \simeq \mathbb{C}^2$, *et* $H^2(F_{\mathcal{A}})_\lambda \simeq H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^2} \simeq \mathbb{C}^3$.

De manière générale, si $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ il suffit de calculer les $n-1$ polynômes $\Delta^1(t), \ldots, \Delta^{n-1}(t)$ pour déterminer $\Delta^n(t)$ et on a la formule suivante :

$$\Delta^n(t)^{(-1)^n} = (t^d - 1)^{E(M(\mathcal{A}'))} \cdot \prod_{q=0}^{n-1} \Delta^q(t)^{(-1)^{q+1}}. \tag{3.3}$$

Chapitre 4

Calculs explicites et deux théorèmes d'annulation

4.1 Fibre de Milnor de l'arrangement des tresses

Dans cette section, nous proposons d'étudier la fibre de Milnor

$$F_n : \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j) = 1$$

de l'arrangement des tresses $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$.
Le polynôme homogène $f_{\mathcal{A}_n}$ associé à $\mathcal{A}_n$ est de degré $d = |\mathcal{A}_n| = \binom{n+1}{2}$.

Proposition 4.1.1 *L'arrangement des tresses $\mathcal{A}_n \in \mathbb{C}^{n+1}$ n'est pas essentiel. L'arrangement essentiel associé $\bar{\mathcal{A}}_n \subset \mathbb{C}^n$ est défini par le polynôme :*

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Démonstration de la Proposition 4.1.1 :

Notons $F_{\bar{\mathcal{A}}_n}$ la fibre de Milnor de l'arrangement $\bar{\mathcal{A}}_n \subset \mathbb{C}^n$.
Soient $D = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_1 = \cdots = x_{n+1}\}$,
et $E = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$. Comme $\mathbb{C}^4 = D \oplus E$, on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} u : \ & \mathbb{C}^{n+1} \to D \oplus E \\ & (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (z, (y_1, \dots, y_n)), \end{aligned}$$

tel que $x_1 = z + y_1, \dots, x_n = z + y_n$, et $x_{n+1} = z$.
Notons $\tilde{Q}(y_1, \dots, y_n) = y_1 \cdots y_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_i - y_j)$.
Comme $f_{\mathcal{A}_n}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \tilde{Q}(y_1, \dots, y_n)$, on a un isomorphisme de variétés algébriques

$$u : \ F_n \to \tilde{F},$$

où $\tilde{F} = \tilde{Q}^{-1}(1) \subset D \oplus E$ est la fibre de Milnor de l'arrangement obtenu en changeant les coordonnées. Soit maintenant p la projection

$$p : \ D \oplus E \to E.$$

On a alors que p induit une fibration triviale :

$$p : \ \tilde{F} = D \times \tilde{F}_0 \to \tilde{F}_0,$$

où $\tilde{F}_0 = \tilde{Q}^{-1}(1) \subset E$. De plus, cette fibration est une équivalence d'homotopie car $D \simeq \mathbb{C}$ est contractile, et $\tilde{F}_0 \simeq F_{\bar{\mathcal{A}}_n}$. Les fibres de Milnor F_n et $F_{\bar{\mathcal{A}}_n}$ sont donc homotopiquement équivalentes.

□

Corollaire 4.1.2 *La fibre de Milnor F_n a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension $n-1$. En particulier,*

$$H_q(F_n, \mathbb{Q}) = 0, \ \ \forall q \geq n.$$

<u>Démonstration du Corollaire 4.1.2 :</u>

La Proposition 4.1.1 implique que $F_n = F_{\bar{\mathcal{A}}_n} \times \mathbb{C}$, où $F_{\bar{\mathcal{A}}_n} : Q(x_1, \dots, x_n) = 1$. La fibre F_n a donc le type d'homotopie d'une variété affine de dimension $n-1$. En utilisant des résultats classiques, voir [15, p. 26], on en déduit que F_n a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension $n-1$.

□

Soit maintenant $\lambda = exp(2i\pi/d)$. Afin d'étudier les groupes d'homologie $H_q(F_n, \mathbb{Q})$, on va utiliser l'action de la monodromie sur la fibre

$$\begin{aligned} h : F_n &\to F_n \\ x &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

qui induit des morphismes sur les groupes d'homologie :

$$h_q : H_q(F_n, \mathbb{Q}) \to H_q(F_n, \mathbb{Q}), \quad \forall\, q \geq 0.$$

Pour tout $q \geq 0\,, H_q(F_n, \mathbb{Q})$ a une structure de $\mathbb{Q}[t]-$module, où l'action de t est donnée par :

$$t \cdot c = h_q(c), \;\; \forall c \in H_q(F_n, \mathbb{Q}).$$

Comme $h_q^d = Id$, on a $t^d - 1 = \prod_{m|d} \phi_m = 0$, où ϕ_m désigne le m^{e} polynôme cyclotomique.

Exemple 4.1.3 *On peut calculer par exemple :*

$$\phi_1 = t - 1,\; \phi_2 = t + 1,\; \phi_3 = t^2 + t + 1,\; \phi_4 = t^2 + 1.$$

En utilisant le théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal on obtient la décomposition en somme directe suivante :

$$H_q(F_n, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{m|d} \Big(\frac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_m}\Big)^{b_{qm}(\mathcal{A}_n)}. \tag{4.1}$$

Le nombre $b_{qm}(\mathcal{A}_n)$ est la multiplicité d'une valeur propre λ^k de h_q d'ordre m.

Remarque 4.1.4 *Comme $b_{q1}(\mathcal{A}_n)$ correspond à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1, l'Exemple 3.2.6 montre que les nombres $b_{q1}(\mathcal{A}_n)$ correspondent au nombres de Betti $b_q(M(\mathcal{A}'_n))$ de l'arrangement projectif $\mathcal{A}'_n$.*
En particulier, $b_{11}(\mathcal{A}_n) = \binom{n+1}{2} - 1$. Pour les autres sous-espaces propres, le calcul des $b_{qm}(\mathcal{A}_n)$ a fait l'objet de nombreuses recherches et reste une question très difficile.

On a $H_0(F_n, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}$, $\forall n \geq 0$, et $H_q(F_n, \mathbb{Q}) = 0$, $\forall q \geq n$, avec le Corollaire 4.1.2. Dans son article [41], S. Settepanella calcule les dimensions $b_{qm}(\mathcal{A}_n)$ dans les cas particuliers $1 \leq n \leq 7$. Nous énumérons ici ses résultats :

1. <u>$n = 1$:</u>

   $H_0(F_1, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}.$

2. <u>$n = 2$:</u>

   $H_0(F_2, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad H_1(F_2, \mathbb{Q}) = \big(\frac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\big)^2 \oplus \frac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3}.$

3. $\underline{n = 3:}$

$$H_0(F_3, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad H_1(F_3, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^5 \oplus \tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3},$$

$$H_2(F_3, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^6 \oplus \tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3} \oplus_{i\,|\,6\,,\,i\neq 1} \left(\frac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_i}\right)^2.$$

4. $\underline{n = 4:}$

$$H_0(F_4\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad H_1(F_4, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^9,$$

$$H_2(F_4, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{26} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_2}\right)^2,$$

$$H_3(F_4, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{24} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_2}\right)^8 \oplus_{i\,|\,10\,,\,i\neq 1,2} \left(\frac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_i}\right)^6.$$

5. $\underline{n = 5:}$

$$H_0(F_5, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad H_1(F_5, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{14},$$

$$H_2(F_5, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{71} \oplus \tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3},$$

$$H_3(F_5, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{154} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3}\right)^{14} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_5}\right)^6,$$

$$H_4(F_5, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{120} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3}\right)^{37} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_5}\right)^{30} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_{15}}\right)^{24}.$$

6. $\underline{n = 6:}$

$$H_0(F_6, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad H_1(F_6, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{20},$$

$$H_2(F_6, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{155} \oplus \tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3},$$

$$H_3(F_6, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{580} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3}\right)^{20},$$

$$H_4(F_6, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{1044} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3}\right)^{121},$$

$$H_5(F_6, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{720} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_3}\right)^{222} \oplus_{i\,|\,21\,,\,i\neq 1,3} \left(\frac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_i}\right)^{120}.$$

7. $\underline{n = 7:}$

$$H_0(F_7,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \quad H_1(F_7,\mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{27},$$

$$H_2(F_7,\mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{295},$$

$$H_3(F_7,\mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{1665},$$

$$H_4(F_7,\mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{5104} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_2}\right)^{2},$$

$$H_5(F_7,\mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{8028} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_2}\right)^{140} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_7}\right)^{120},$$

$$H_6(F_7,\mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_1}\right)^{5040} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_2}\right)^{858} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_7}\right)^{840} \oplus_{i\,|\,28\,,\,i\neq 1,2,7} \left(\frac{\mathbb{Q}[t]}{\phi_i}\right)^{720}.$$

Dans l'article [40] elle donne également un théorème de stabilité des groupes de cohomologie de la fibre F_n :

Théorème 4.1.5 ([40], Théorème 1.1) *On a que*

$$H^q(F_n,\mathbb{Q}) = H^q(F_n)_1, \quad si\ n \geq 3q+1.$$

4.2 Le premier groupe d'homologie $H_1(F_{\mathcal{A}})$ pour les arrangements graphiques

Dans un article de A.D. Macinic et S. Papadima [28], un théorème permet de calculer le premier groupe d'homologie de la fibre de Milnor d'un arrangement d'hyperplans graphique $\mathcal{A}_\Gamma$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Commençons par définir un tel arrangement.

Soit Γ un graphe vérifiant :
- Deux arêtes au maximum peuvent relier deux sommets distincts.
- Chaque sommet peut être doté d'une boucle au maximum.
- Chaque arête est dotée du signe $+$ ou $-$.

Notons $\overline{[n+1]}$ l'ensemble des points $\{1, \dots, n+1\}$. On dira que Γ est un graphe dans $\overline{[n+1]}$ si l'ensemble des ses arêtes $E(\Gamma)$ se décompose :

$$E(\Gamma) = E_1(\Gamma) \sqcup E_2(\Gamma),$$

où $E_1(\Gamma) \subset \overline{[n+1]}$ désigne l'ensemble des boucles, et $E_2(\Gamma)$ l'ensemble des arêtes dotées d'un signe, constitué des éléments de la forme ij^ϵ, avec $\epsilon \in \{1, -1\}$, et $\{i \neq j\} \subset \overline{[n+1]}$.

On peut maintenant définir l'arrangement associé à un graphe Γ :

Définition 4.2.1 *(Arrangement graphique)*
Soit Γ un graphe dans $\overline{[n+1]}$. L'arrangement associé à Γ, noté $\mathcal{A}_\Gamma$, est l'arrangement de $\mathbb{C}^{n+1}$ dont les hyperplans sont donnés par les équations :

$$x_i + \epsilon x_j = 0,\ \forall\, ij^\epsilon \in E_2(\Gamma),$$
$$x_i = 0,\ \forall\, i \in E_1(\Gamma).$$

Exemple 4.2.2 *L'arrangement des tresses $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est un arrangement graphique. C'est l'arrangement associé au graphe Γ_n constitué des $\binom{n+1}{2}$ arêtes ij^-, $\{i<j\} \subset \overline{[n+1]}$.*

Définition 4.2.3 *On appelle D_{n+1} l'arrangement graphique associé au graphe constitué des doubles arêtes ij^+, ij^-, $\{i<j\} \subset \overline{[n+1]}$.*
L'arrangement $D_{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est donc constitué des $2\binom{n+1}{2}$ hyperplans :

$$x_i \pm x_j = 0,\ \ \forall\ 1 \leq i < j \leq n+1.$$

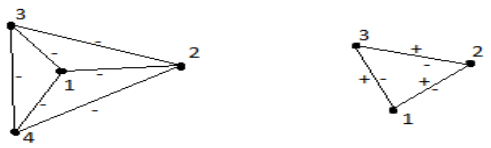


FIGURE 4.1 – Les graphes des arrangements $\mathcal{A}_3$ et D_3

Remarque 4.2.4 *Notons $F_{D_3} \subset \mathbb{C}^3$ la fibre de Milnor de l'arrangement D_3.*
Soient $D = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$,
et $E = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_4 = x_1 + x_2 + x_3\}$. Comme $\mathbb{C}^4 = D \oplus E$, on a un isomorphisme :

$$u:\ \ \mathbb{C}^4 \to D \oplus E$$
$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (z,(y_1,y_2,y_3)),$$

tel que $x_1 = z + y_1$, $x_2 = z + y_2$, $x_3 = z + y_3$, et $x_4 = z + y_1 + y_2 + y_3$.
Notons $\tilde{Q}(y_1,y_2,y_3) = (y_1 \pm y_2)(y_1 \pm y_3)(y_2 \pm y_3)$.
Comme $f_{\mathcal{A}_3}(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\tilde{Q}(y_1,y_2,y_3)$, on a un isomorphisme de variétés algébriques

$$u:\ \ F_3 \to \tilde{F},$$

où $\tilde{F} = \tilde{Q}^{-1}(1) \subset D \oplus E$ est la fibre de Milnor de l'arrangement obtenu en changeant les coordonnées. Soit maintenant p la projection

$$p: \quad D \oplus E \to E.$$

On a alors que p induit une fibration triviale :

$$p: \quad \tilde{F} = D \times \tilde{F}_0 \to \tilde{F}_0,$$

où $\tilde{F}_0 = \tilde{Q}^{-1}(1) \subset E$. De plus, cette fibration est une équivalence d'homotopie car $\mathbb{C}$ est contractile, et $\tilde{F}_0 \simeq F_{D_3}$. Les fibres de Milnor F_{D_3} et F_3 sont donc homotopiquement équivalentes.

Théorème 4.2.5 ([28], Théorème B) *Soit $\mathcal{A}_\Gamma$ un arrangement graphique de rang supérieur ou égal à 3. Notons F_Γ sa fibre de Milnor, et $d = |\mathcal{A}_\Gamma|$.*

1. *S'il y a un isomorphisme de treillis entre $\mathcal{A}_\Gamma$ et un arrangement de type D_3 ou D_4, alors*
$$H_1(F_\Gamma, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{t-1}\right)^{d-1} \oplus \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{t^2+t+1}\right).$$
2. *Sinon,*
$$H_1(F_\Gamma, \mathbb{Q}) = \left(\tfrac{\mathbb{Q}[t]}{t-1}\right)^{d-1}.$$

Nous allons maintenant énoncer un théorème très important de S. Papadima et A. Suciu [35] que nous utiliserons fréquemment dans cette thèse. Commençons par définir les caractères rationnels équimonodromiques.

Définition 4.2.6 *Soient $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans quelconque, et $\boldsymbol{k} = (k_H)_{H \in \mathcal{A}}$ une collection d'entiers premiers entre eux. Soit $u \in \mathbb{C}^*$ une racine primitive de l'unité d'ordre m. Le caractère $\rho \in Hom(H_1(M(\mathcal{A})), \mathbb{C}^*)$ défini par $\rho(\gamma_H) = u^{k_H}$ est dit <u>rationnel</u>.*
Si $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}$, où $\boldsymbol{1} = (1, \dots, 1)$, on dit qu'il est <u>rationnel et équimonodromique de dénominateur m.</u>

Pour un tel caractère, posons $b_q(\mathcal{A}, \frac{\boldsymbol{1}}{m}) := dim_{\mathbb{C}} H_q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L})$, où $\mathcal{L}$ est le système local sur $M(\mathcal{A})$ associé à la représentation ρ.

Remarque 4.2.7 *Pour $\boldsymbol{k} = 1$ et $u = \lambda^k$, avec $\lambda = exp(2i\pi/d)$, $d = |\mathcal{A}|$, on a que $b_q(\mathcal{A}, \frac{\boldsymbol{1}}{m}) = dim\, H^q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_{\lambda^k})$, où $\mathcal{L}_{\lambda^k}$ est le système local de rang 1 sur $M(\mathcal{A})$ tel que la monodromie autour de chaque hyperplan de $\mathcal{A}$ est λ^k.*
Comme $M(\mathcal{A}) \simeq M(\mathcal{A}') \times \mathbb{C}^*$, on a

$$dim\, H^q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_{\lambda^k}) = dim\, H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_{\lambda^k}) + dim\, H^{q-1}(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_{\lambda^k}),$$

où $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ est défini comme au chapitre 3. On a également, pour $m \mid d$:

$$b_q(\mathcal{A}, \tfrac{1}{m}) = b_{q\,m}(\mathcal{A}) + b_{q-1\ m}(\mathcal{A}),$$

où les nombres $b_{q\,m}(\mathcal{A})$, $b_{q-1\,m}(\mathcal{A})$ *sont définis comme dans (4.1).*

Posons $\beta_{q\,p}(\mathcal{A}) = dim_{\mathbb{F}_p} H^q(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}), \omega_1 \wedge)$, où $(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}), \omega_1 \wedge)$ est le complexe d'Aomoto associé à l'algèbre d'Orlik-Solomon $A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A})$ à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et $\omega_1 = \sum_{H \in \mathcal{A}} a_H$. Avec les notations précédentes on a le théorème suivant :

Théorème 4.2.8 ([35], Théorème C) *Soient* $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *un arrangement d'hyperplans, et* ρ *un système local rationnel équimonodromique sur* $M(\mathcal{A})$ *de dénominateur* $m = p^s$, p *premier, et* $s \geq 1$. *Alors*

$$b_q(\mathcal{A}, \tfrac{1}{m}) \leq \beta_{q\,p}(\mathcal{A}), \ \forall q.$$

Remarque 4.2.9 *Ce théorème peut s'énoncer également en projectif.*
En effet, si $\mathcal{A}' = \{H'_1, \ldots, H'_d\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, *alors en choisissant par exemple* H'_1 *l'hyperplan à l'infini on peut définir* $A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}')$ *comme étant l'algèbre d'Orlik-Solomon de l'arrangement affine* $\mathcal{A}' = \{H'_2, \ldots, H'_d\} \subset \mathbb{C}^n$. *Si on note* $\omega'_1 = \sum_{i=2}^{d} a'_{H_i}$, *on a alors l'inégalité suivante :*

$$dim\, H^q(M(\mathcal{A}'), \mathcal{L}'_{\lambda^k}) \leq dim_{\mathbb{F}_p} H^q(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}'), \omega'_1 \wedge).$$

4.3 Un premier théorème d'annulation

Retournons à notre arrangement central $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ constitué de d hyperplans. Dans cette section, nous exhiberons des cas pour lesquels l'action de la monodromie sur la fibre de Milnor $F_{\mathcal{A}}$ est l'identité, c'est à dire tels que $H^1(F_{\mathcal{A}})_{\neq 1} = 0$. Pour une version en anglais de cette section, voir [2]. Commençons par définir un graphe $G(\mathcal{A})$ comme suit :

- Les sommets de $G(\mathcal{A})$ sont donnés par les hyperplans $H \in \mathcal{A}$.
- Deux sommets distincts H et H' sont reliés par une arête (et on notera $H - H'$) si et seulement si $|\mathcal{A}_X| = 2$, où $X = H \cap H'$.

Un tel graphe est dit <u>connexe</u> si pour tous sommets $H, H' \in \mathcal{A}$, il existe une suite d'arêtes reliant H et H'.

Enonçons notre premier théorème d'annulation :

Théorème 4.3.1 *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*
(i) Pour tout $X \in L(\mathcal{A})$ *de codimension* 2, *on a* $|\mathcal{A}_X| \leq 9$.
(ii) Soit d *n'est pas un multiple de* 6,
soit il existe un hyperplan $H \in \mathcal{A}$ *tel que :*

si $X \in L(\mathcal{A})$ vérifie $\operatorname{codim} X = 2$ et $X \subset H$, alors $|\mathcal{A}_X| \neq 6$.

(iii) Le graphe $G(\mathcal{A})$ est connexe.
Alors $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1$.

Remarque 4.3.2 *1. Avec l'Exemple 3.2.6 on a que si les hypothèses du Théorème 4.3.1 sont vérifiées, alors $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^1(M(\mathcal{A}'), \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{d-1}$ est entièrement déterminé par le treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$.*

2. En prenant un sous-espace générique $E \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de dimension 3 et en remplaçant $\mathcal{A}'$ par l'arrangement correspondant dans $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, on peut considérer depuis le début que $n = 2$. C'est une conséquence du Théorème de Zariski de type Lefschetz dû à Hamm, Hamm-Lê et Goresky-MacPherson, voir par exemple pour la version la plus simple [15, p. 25].
De plus, dans le cas d'un arrangement de droites $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, l'action de h^1 détermine l'action de h^2 selon la formule de la fonction Zeta de la monodromie de la fibre de Milnor d'un polynôme homogène comme il est expliqué dans le Chapitre 3. Avec la formule (3.3) on voit clairement que si $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1$, alors $\Delta^2(t) = (t-1)^{d-2} \cdot \prod_{k=1}^{d-1} (t - \lambda^k)^{E(M(\mathcal{A}'))}$ et avec la Remarque 2.3.12 les sous-espaces propres sont déterminés par le treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$:

$$\dim H^2(F_{\mathcal{A}})_1 = d - 2 + E(M(\mathcal{A}')),\ \dim H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = E(M(\mathcal{A}')),\ \forall\, \lambda^k \neq 1.$$

3. Si un arrangement $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ constitué de $d > n+1$ hyperplans est tel que tous les hyperplans distincts H, H' de $\mathcal{A}$ sont reliés par une arête, alors il est générique et on a directement $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1$ avec [11, Théorème 3.2].

Pour démontrer le Théorème 4.3.1 nous aurons besoin des deux lemmes suivants, du Théorème 4.2.8 de A. Suciu et S. Papadima, et du résultat d'annulation 3.2.16 de D.Cohen, A.Dimca et P.Orlik.

Le Lemme 4.3.3 utilise le complexe d'Aomoto $(A^*_R(\mathcal{A}), \omega_1 \wedge)$ associé à l'algèbre d'Orlik-Solomon $A^*_R(\mathcal{A})$ dans un anneau commutatif unitaire R,
avec $\omega_1 = \sum_{H \in \mathcal{A}} a_H \in A^1_R(\mathcal{A})$. Ce lemme montre toute l'importance du graphe $G(\mathcal{A})$ dans notre résultat.

Lemme 4.3.3 *Supposons que le graphe $G(\mathcal{A})$ est connexe.*
Alors $H^1(A^*_R(\mathcal{A}), \omega_1 \wedge) = 0$, pour tout anneau commutatif unitaire R.

Démonstration du Lemme 4.3.3 :

Soit $b = \sum_{H \in \mathcal{A}} b_H a_H \in A^1_R(\mathcal{A})$.

Rappelons que pour tout $X \in L(\mathcal{A})$, on note $\omega_{1X} = \sum_{H \,|\, X \subseteq H} a_H, \;\; b_X = \sum_{H \,|\, X \subseteq H} b_H a_H$.

Comme $\omega_1 \wedge b \in A^2_R(\mathcal{A})$, on a avec la décomposition de Brieskorn 2.4.16 :

$$\omega_1 \wedge b = 0 \text{ si et seulement si } \omega_{1X} \wedge b_X = 0, \; \forall\, X \in L_2(\mathcal{A}).$$

Supposons $\omega_1 \wedge b = 0$. Montrons alors que $b_H = b_{H'}, \; \forall \; H \neq H' \in \mathcal{A}$.

Soient H, H' deux hyperplans distincts de $\mathcal{A}$. On a que $X = H \cap H' \in L_2(\mathcal{A})$, et deux cas se présentent alors :

- Si H et H' sont reliés par une arête, c'est à dire si $|\mathcal{A}_X| = 2$, alors $\mathcal{A}_X = \{H, H'\}$ et on a donc :
$$\omega_{1X} \wedge b_X = 0,$$
$$(a_H + a_{H'}) \wedge (b_H a_H + b_{H'} a_{H'}) = 0,$$
$$(b_{H'} - b_H)\, a_H \wedge a'_H = 0,$$
$$b_{H'} = b_H.$$
- Si H et H' ne sont pas reliés par une arête, c'est à dire si $|\mathcal{A}_X| > 2$, alors si on note $\mathcal{A}_X = \{H, H', H_{j_1}, \dots, H_{j_k}\}$ on a :
$$\omega_{1X} \wedge b_X = 0$$
$$\Rightarrow \; (a_H + a_{H'} + a_{H_{j_1}} + \cdots + a_{H_{j_k}}) \wedge (b_H a_H + b_{H'} a_{H'} + b_{H_{j_1}} a_{H_{j_1}} + \cdots + b_{H_{j_k}} a_{H_{j_k}}) = 0$$
$$\not\Rightarrow \; b_{H'} = b_H.$$
On ne peut donc pas conclure directement. Cependant comme $G(\mathcal{A})$ est connexe, il existe des hyperplans $H_{i_1}, \dots, H_{i_m}$ tels que :
$$H \text{ et } H_{i_1}, \; H_{i_1} \text{ et } H_{i_2}, \dots, H_{i_m} \text{ et } H' \text{ sont reliés.}$$
On applique alors la même méthode que dans le premier cas et on en déduit que :
$$b_H = b_{H_{i_1}}, \; b_{H_{i_1}} = b_{H_{i_2}}, \dots, b_{H_{i_m}} = b_{H'}, \text{ et donc que}$$
$$b_H = b_{H'}.$$

On vient de montrer que si $\omega_1 \wedge b = 0$, alors pour tous $H \neq H' \in \mathcal{A}$, on a $b_H = b_{H'}$, i.e. b et ω_1 sont proportionnels. On en déduit que $H^1(A^*_R(\mathcal{A}), \omega_1 \wedge) = 0$, ce qui achève la démonstration.

$\square$

Une démonstration plus rapide peut s'obtenir avec le Corollaire 2.4.28, ou encore [27, Lemme 3.3] (pour un corps R infini de caractéristique différente de 2), selon

lesquels si $\omega_1 \wedge b = 0$, alors pour toute intersection $X = H \cap H' \in L_2(\mathcal{A})$ telle que $H - H'$, on a $b_H - b_{H'} = 0$. On conclut ensuite avec la connexité du graphe. Pour $R = \mathbb{F}_p$, p premier, on peut aussi utiliser [28, Lemme 4.9] et on a que si $\omega_1 \wedge b = 0$, alors pour tout $X = H \cap H' \in L_2(\mathcal{A})$ tel que $H - H'$, on a :
(1) $b_H + b_{H'} = 0$, si $p = 2$,
(2) $b_H = b_{H'}$, si $p \neq 2$.
Ainsi on a toujours $b_H = b_{H'}$, et on conclut avec la connexité du graphe.

Remarque 4.3.4 *En fait, on a une version plus générale du Lemme 4.3.3 :*
Soit $\omega = \sum_{H \in \mathcal{A}} \omega_H a_H$ satisfaisant $\omega_H \in R^\times$, $\forall H \in \mathcal{A}$. On a que si $G(\mathcal{A})$ est connexe, alors $H^1(A_R^*(\mathcal{A}), \omega\wedge) = 0$ pour tout anneau commutatif unitaire R.
En effet, supposons $\omega \wedge b = 0_R$ et $G(\mathcal{A})$ connexe.

- *Si H et H' sont reliés par une arête, alors*
  $(\omega_H a_H + \omega_{H'} a_{H'}) \wedge (b_H a_H + b_{H'} a_{H'}) = 0_R \Rightarrow \omega_H b_{H'} - \omega_{H'} b_H = 0_R$
  $\Rightarrow \exists t \in R \mid \begin{cases} b_H = t\omega_H \\ b_{H'} = t\omega_{H'} \end{cases}$.
- *Si il existe $H_{i_1}, \dots, H_{i_m} \in \mathcal{A}$ tels que H et H_{i_1}, H_{i_1} et $H_{i_2}, \dots, H_{i_m}$ et H' sont reliés par une arête, alors de la même manière on en déduit qu'il existe $t, t_1, \dots, t_m \in R$ tels que :*

$$\begin{cases} b_H = t\omega_H \\ b_{H_{i_1}} = t\omega_{H_{i_1}} \end{cases}, \begin{cases} b_{H_{i_1}} = t_1\omega_{H_{i_1}} \\ b_{H_{i_2}} = t_1\omega_{H_{i_2}} \end{cases}, \dots, \begin{cases} b_{H_{i_m}} = t_m\omega_{H_{i_m}} \\ b_{H'} = t_m\omega_{H'} \end{cases}.$$

Par identification on voit clairement que $t = t_1 = \cdots = t_m$.
Ainsi b et ω sont bien proportionnels et $H^1(A_R^*(\mathcal{A}), \omega\wedge) = 0$.

Le second lemme dont nous aurons besoin est le suivant (on l'utilisera avec $R = \mathbb{F}_p$, p premier, $p|d$) :

Lemme 4.3.5 *Soit $\omega_1 \in A_R^*(\mathcal{A})$ comme ci-dessus. Supposons $\partial\omega_1 = d = 0 \in R$. Alors $H^1(A_R^*(\mathcal{A}), \omega_1\wedge) = H^1(A_R^*(\mathcal{A}'), \omega_1\wedge)$.*

<u>Démonstration du Lemme 4.3.5 :</u>

Comme $A_R^*(\mathcal{A}') = ker\{ A_R^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} A_R^*(\mathcal{A}) \} \subset A_R^*(\mathcal{A})$, il est clair que $H^1(A_R^*(\mathcal{A}'), \omega_1\wedge) \subset H^1(A_R^*(\mathcal{A}), \omega_1\wedge)$. Soit maintenant $b \in ker\{ A_R^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\omega_1\wedge} A_R^2(\mathcal{A}) \}$.
On a : $\partial(\omega_1 \wedge b) = d \cdot b - \omega_1 \cdot \partial b = -\omega_1 \cdot \partial b = 0 \Rightarrow \partial b = 0$ dans R.
Ainsi $b \in ker\{ A_R^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} A_R^0(\mathcal{A}) \} = A_R^1(\mathcal{A}')$, et on a
$ker\{ A_R^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\omega_1\wedge} A_R^2(\mathcal{A}) \} \subset ker\{ A_R^1(\mathcal{A}') \xrightarrow{\omega_1\wedge} A_R^2(\mathcal{A}') \}$, d'où
$H^1(A_R^*(\mathcal{A}), \omega_1\wedge) \subset H^1(A_R^*(\mathcal{A}'), \omega_1\wedge)$.

□

Remarque 4.3.6 *Si on prend H'_1 l'hyperplan à l'infini, on peut définir $A^*_R(\mathcal{A}')$ comme l'algèbre d'Orlik-Solomon de l'arrangement affine $\mathcal{A}' = \{H'_2, \dots, H'_d\} \subset \mathbb{C}^n$. Soit $\omega'_1 = \sum_{i=2}^d a'_i \in A^1_R(\mathcal{A}')$, où $a'_i \in A^1_R(\mathcal{A}')$ est l'élément de $A^1_R(\mathcal{A}')$ correspondant à l'hyperplan H'_i. On a en fait que $a'_i = a_i - a_1$, $\forall\, 2 \leq i \leq d$ (voir la démonstration de la Proposition 2.4.12). Ainsi, si R est un corps fini de caractéristique p, p premier, $p \mid d$, alors on a $\omega'_1 = \sum_{i=2}^d (a_i - a_1) = \sum_{i=2}^d a_i - (d-1)a_1$ $= \sum_{i=1}^d a_i = \omega_1$. Ainsi $H^1(A^*_R(\mathcal{A}'), \omega'_1 \wedge) = H^1(A^*_R(\mathcal{A}'), \omega_1 \wedge)$.*

Nous pouvons maintenant démontrer notre théorème principal.

<u>Démonstration du Théorème 4.3.1 :</u>

1. Si d est un multiple de 6, alors il existe $H \in L(\mathcal{A})$ tel que :
$$\text{si } X \in L_2(\mathcal{A}),\ X \subset H, \text{ alors } |\mathcal{A}_X| \neq 6.$$
L'hyperplan projectif associé $H' \in \mathcal{A}'$ vérifie donc :
$$\text{si } X \in L_2(\mathcal{A}'),\ X \subset H', \text{ alors } |\mathcal{A}'_X| \neq 6.$$
Soit $\lambda^k \neq 1$ une racine d^{e} de l'unité. On a que H' est la seule arête dense de $\mathcal{A}'$ de codimension 1 contenue dans H', et l'opérateur monodromie de $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ correspondant est $T_{H'} = \lambda^k \neq 1$ d'après (3.1).
Soit maintenant $X \in D(\mathcal{A}')$ une arête dense de $\mathcal{A}'$ contenue dans H' de codimension 2. On a alors toujours d'après (3.1) que l'opérateur monodromie de $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ correspondant est $T_X = \lambda^{k|\mathcal{A}'_X|}$, avec $|\mathcal{A}'_X| \in \{3,4,5,7,8,9\}$.
Avec la Remarque 3.2.16 appliquée à $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ on a :
$$ord(\lambda^k) \notin \{2,3,4,5,7,8,9\} \Rightarrow H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = 0.$$
D'autre part, le Théorème 4.2.8 et sa Remarque 4.2.9 avec nos Lemmes 4.3.3 et 4.3.5 ainsi que la Remarque 4.3.6 pour un corps fini $R = \mathbb{F}_p$ montrent que si $ord(\lambda^k) = p^s$, avec p premier et $s \geq 1$, alors on a encore une fois $H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = 0$. On en déduit que $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1$.
2. Supposons que d n'est pas est un multiple de 6, et soit $X \in D(\mathcal{A}')$ une arête dense de $\mathcal{A}'$ de codimension 2. Avec les mêmes considérations que dans le cas précédent et avec la Remarque 3.2.16 on trouve :
$$ord(\lambda^k) \notin \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = 0.$$
Or 6 ne divise pas d par hypothèse. L'ordre d'une valeur propre λ^k divisant d, on a $ord(\lambda^k) \in \{2,3,4,5,7,8,9\}$ et on peut conclure comme dans le cas précédent.

$\square$

Nous allons maintenant appliquer notre Théorème 4.3.1 à l'arrangement des tresses et retrouver les résultats de S. Settepanella, A. Macinic et S. Papadima dans ce cas particulier.

Corollaire 4.3.7 *Soit $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ l'arrangement des tresses. Alors $G(\mathcal{A}_n)$ est connexe pour $n \geq 4$, et on a que $H^1(F_n, \mathbb{C}) = H^1(M(\mathcal{A}'_n), \mathbb{C})$, $\forall n \geq 4$.*

<u>Démonstration du Corollaire 4.3.7 :</u>

Les $X \in L(\mathcal{A}_n)$ de codimension 2 sont de deux types :

1. Type 1 :
   Les $X = \{\, x_i = x_j,\, x_k = x_l, \quad 1 \leq i < j < k < l \leq n+1 \,\}$,
   de sous-arrangements correspondant $\mathcal{A}_X = \{H_{ij}, H_{kl}\}$.
2. Type 2 :
   Les $X = \{\, x_i = x_j = x_k, \quad 1 \leq i < j < k \leq n+1 \,\}$,
   de sous-arrangements correspondant $\mathcal{A}_X = \{H_{ij}, H_{ik}, H_{jk}\}$.

Soient alors deux hyperplans distincts H_{ij} , H_{kl} , $i < j$, $k < l$.
Notons $X = H_{ij} \cap H_{kl} \in L_2(\mathcal{A})$. Supposons $i \leq k$.

- Si $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$, alors X est de type 1 et le sous-arrangement correspondant $\mathcal{A}_X$ est $\{H_{ij}\,,\, H_{kl}\}$. On a donc que H_{ij} et H_{kl} sont reliés par une arête.

- Si $\{i, j\} \cap \{k, l\} \neq \emptyset$ alors trois cas se présentent :

  (a) Si $j = k$, alors l'ensemble $I = \{i, j, k, l\}$ possède trois éléments. Or l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ est constitué d'au moins cinq éléments car $n \geq 4$, donc il contient deux éléments $p < q$ tels que $I \cap \{p, q\} = \emptyset$. On a alors que $H_{ij} \cap H_{pq}$ et $H_{jl} \cap H_{pq}$ sont deux intersections de type 1 et on en déduit comme précédemment que H_{ij} est relié à H_{pq}, et que H_{pq} est relié à H_{jl}.

  (b) Si $i = k$, on trouve de manière analogue qu'il existe $p < q$ tel que H_{ij} est relié à H_{pq} et H_{pq} est relié à H_{il}.

  (c) Si $j = l$, on trouve de manière analogue qu'il existe $p < q$ tel que H_{ij} est relié à H_{pq} et H_{pq} est relié à H_{kj}.

On a donc bien que $G(\mathcal{A}_n)$ est connexe pour $n \geq 4$.
Enfin, il est clair que $\mathcal{A}_n$ vérifie les hypothèses du Théorème 4.3.1 et on en déduit que :

$$H^1(F_n, \mathbb{C}) = H^1(M(\mathcal{A}'_n), \mathbb{C}), \ \ \forall n \geq 4.$$

$\square$

Remarque 4.3.8 *Pour $n = 3$, le graphe $G(\mathcal{A}_3)$, qui a 3 composantes connexes, n'est pas connexe. On a d'ailleurs que $H^1(F_3, \mathbb{C})_{\neq 1} = H^1(F_3)_{\lambda^2} \oplus H^1(F_3)_{\lambda^4}$ est de dimension 2, comme on l'a vu au début du Chapitre. Le graphe $G(\mathcal{A}_2)$ a trois composantes connexes et $H^1(F_2, \mathbb{C})_{\neq 1} = H^1(F_2)_{\lambda} \oplus H^1(F_2)_{\lambda^2}$ est de dimension 2. En ce qui concerne l'arrangement de Ceva, le graphe $G(\mathcal{A})$ a 9 composantes connexes (il n'y a pas d'arête). On a d'ailleurs que $H^1(F, \mathbb{C})_{\neq 1} = H^1(F)_{\lambda^3} \oplus H^1(F)_{\lambda^6}$ est de dimension 4 , voir [5].*
De plus, notons que si $\mathcal{A}'$ est un arrangement de droites de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ provenant d'un pinceau ayant $k \geq 3$ fibres complètement réductibles, voir [22], alors le graphe correspondant $G(\mathcal{A})$ a au moins k composantes connexes.

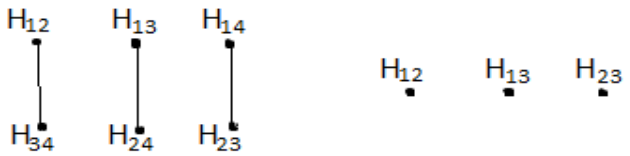


FIGURE 4.2 – Les graphes $G(\mathcal{A}_3)$ et $G(\mathcal{A}_2)$

Corollaire 4.3.9 *Supposons que $\mathcal{A}'$ est un arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ayant seulement des points doubles et triples. Supposons de plus qu'on a :*
(i) ou bien le graphe $G(\mathcal{A})$ est connexe,
(ii) ou bien il existe une droite de $\mathcal{A}'$ contenant exactement un point triple, et d est pair.
Alors $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1$.

<u>Démonstration du Corollaire 4.3.9 :</u> :

Le cas (i) se déduit directement du Théorème 4.3.1.
(ii) Soit $H \in \mathcal{A}$ un hyperplan contenant exactement un point triple p.
Soient H_1, $H_2 \in \mathcal{A}$ tels que $\mathcal{A}_p = \{H, H_1, H_2\}$. Chaque hyperplan $H_i \notin \mathcal{A}_p$ est relié par une arête à H et on a que $G(\mathcal{A})$ n'est pas connexe si et seulement si H_1 ou H_2 contient seulement des points triples. Par exemple, si H_1 contenait seulement des points triples, on pourrait compter les hyperplans de $\mathcal{A}$ de la manière suivante : $H_1, (H_{i_1}, H_{j_1})$, (H_{i_2}, H_{j_2}), ..., $(H_{i_{(d-1)/2}}, H_{j_{(d-1)/2}})$, où les paires (H_i, H_j)

correspondent aux points d'intersection de multiplicité 3 sur H_1. Finalement on aurait $d = 2 \cdot (d-1)/2 + 1$ impair, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse. Ainsi $G(\mathcal{A})$ est connexe et on conclut avec le Théorème 4.3.1.

□

Le Corollaire 4.3.9 est une conséquence directe du Théorème 4.3.1. Le résultat suivant est plus général, c'est une conséquence de [26, Théorème 1.2] :
si $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) \neq H^1(F_{\mathcal{A}})_1$, alors $\mathcal{A}'$ provient d'un pinceau de courbes donc $G(\mathcal{A})$ n'est pas connexe et on a que (ii) de la Proposition 4.3.10 n'est pas vérifié, excepté pour $d = 3$. On donne ici une nouvelle preuve similaire à celle du Théorème 4.3.1.

Proposition 4.3.10 *Supposons que $\mathcal{A}'$ est un arrangement de droites de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ayant seulement des points doubles et des points triples. Supposons qu'on a :*
(i) ou bien le graphe $G(\mathcal{A})$ est connexe,
(ii) ou bien il existe une droite contenant exactement un point triple.
Alors $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1$.

Démonstration de la Proposition 4.3.10 :

Le cas (i) se déduit directement du Théorème 4.3.1.
(ii) Soit $H' \in \mathcal{A}'$ l'hyperplan contenant exactement un point triple p.
Soient H'_1, $H'_2 \in \mathcal{A}'$ tels que $\mathcal{A}'_p = \{H', H'_1, H'_2\}$. Soit $\lambda^k \neq 1$ une racine d^{e} de l'unité. La seule arête dense de $\mathcal{A}'$ de codimension 1 contenue dans H' est H', et l'opérateur monodromie de $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ correspondant est $T_{H'} = \lambda^k \neq 1$. La seule arête dense de codimension 2 contenue dans H' est le point p, et l'opérateur monodromie correspondant de $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ est $T_p = \lambda^{3k}$. Avec la Remarque 3.2.16 appliquée à $\mathcal{L}'_{\lambda^k}$ on a : $ord(\lambda^k) \neq 3 \Rightarrow H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = 0$.
Montrons maintenant que $H^1(A^*_{\mathbb{F}_3}(\mathcal{A}), \omega_1 \wedge) = 0$.
Soit $b = \sum_{H \in \mathcal{A}} b_H a_H \in ker\{\ A^1_{\mathbb{F}_3} \xrightarrow{\omega_1 \wedge} A^2_{\mathbb{F}_3}\ \}$. Si $H_k \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_p$, alors $X = H \cap H_k$ est tel que $\mathcal{A}_X = \{H, H_k\}$ et avec les mêmes considérations que dans la preuve du Lemme 4.3.3 on a : $\omega_{1X} \wedge b_X = 0 \Leftrightarrow b_{H_k} = b_H$.
Maintenant nous allons montrer que $b_{H_1} = b_{H_2} = b_H$. Soient $H_k \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_p$, et $X_1 = H_1 \cap H_k$, $X_2 = H_2 \cap H_k$, les intersections avec H_1 et H_2 correspondantes. On va considérer plusieurs cas.

- Si $|\mathcal{A}_{X_1}| = 2$ et $|\mathcal{A}_{X_2}| = 2$, alors $\omega_{1X_1} \wedge b_{X_1} = 0$ et $\omega_{1X_2} \wedge b_{X_2} = 0$ $\Leftrightarrow b_{H_1} = b_{H_k}$ et $b_{H_2} = b_{H_k}$. Comme $b_{H_k} = b_H$ on obtient $b_{H_1} = b_{H_2} = b_H$.
- Si $|\mathcal{A}_{X_1}| = 3$ et $|\mathcal{A}_{X_2}| = 2$, alors $\mathcal{A}_{X_1} = \{H_1, H_k, H_j\}$, avec $H_j \neq H, H_2$ (si $H_j = H$ ou H_2 , alors $X_1 = p$ et $H_k \in \mathcal{A}_p$), et $\mathcal{A}_{X_2} = \{H_2, H_k\}$.
  En choisissant $\{a_{H_1} a_{H_k}, a_{H_1} a_{H_j}\}$ comme éléments d'une base de $A^2_{\mathbb{F}_3}(\mathcal{A})$ on a : $\omega_{1X_1} \wedge b_{X_1} = 0 \Leftrightarrow a_{H_1} a_{H_k}(2b_{H_k} - b_{H_1} - b_{H_j}) + a_{H_1} a_{H_j}(2b_{H_j} - b_{H_1} - b_{H_k}) = 0$

$\Leftrightarrow b_{H_1} + b_{H_k} + b_{H_j} = 0$ $(*)$ (dans $\mathbb{F}_3$). Avec $b_{H_k} = b_H$ et $b_{H_j} = b_H$, on obtient $(*) \Leftrightarrow b_{H_1} = b_H$. Enfin, $\omega_{1X_2} \wedge b_{X_2} = 0 \Leftrightarrow b_{H_2} = b_{H_k}$. Finalement on trouve bien $b_{H_1} = b_{H_2} = b_H$.

– Si $|\mathcal{A}_{X_1}| = 3$ et $|\mathcal{A}_{X_2}| = 3$, alors $\mathcal{A}_{X_1} = \{H_1, H_k, H_j\}$, avec $H_j \neq H, H_2$, et $\mathcal{A}_{X_2} = \{H_2, H_k, H_l\}$, avec $H_l \neq H, H_1$. Avec les mêmes considérations que dans le cas précédent on a : $\omega_{1X_1} \wedge b_{X_1} = 0 \Leftrightarrow b_{H_1} + b_{H_k} + b_{H_j} = 0$ $(*)$ et $\omega_{1X_2} \wedge b_{X_2} = 0 \Leftrightarrow b_{H_2} + b_{H_k} + b_{H_l} = 0$ $(**)$. Avec $b_{H_k} = b_{H_j} = b_{H_l} = b_H$, on obtient $(*) \Leftrightarrow b_{H_1} = b_H$ et $(**) \Leftrightarrow b_{H_2} = b_H$. Finalement $b_{H_1} = b_{H_2} = b_H$.

Ainsi b et ω_1 sont proportionnels et $H^1(A^*_{\mathbb{F}_3}(\mathcal{A}), \omega_1 \wedge) = 0$.
Enfin, le Théorème 4.2.8 avec nos Lemmes 4.3.3 et 4.3.5 ainsi que la Remarque 4.3.6 pour $R = \mathbb{F}_3$ donnent : $ord(\lambda^k) = 3 \Rightarrow H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = 0$.

□

Les exemples suivants montrent la difficulté du problème dans le cas général. On commence avec un exemple où $G(\mathcal{A})$ n'est pas connexe, montrant que les conditions (i) et (ii) de notre Théorème 4.3.1 ne sont pas suffisantes.

Exemple 4.3.11 *Soit $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'arrangement défini par le polynôme homogène $Q(x:y:z) = xyz(x^4 - y^4)(y^4 - z^4)(x^4 - z^4)$. Les hyperplans de $\mathcal{A}'$ sont :*
$\{x = 0\}, \{y = 0\}, \{z = 0\}$, $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}$, *où d_1, d_2, d_3, d_4 sont de la forme $x = \alpha y$, d_5, d_6, d_7, d_8 sont de la forme $y = \alpha z$, et $d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}$ sont de la forme $x = \alpha z$, avec $\alpha^4 = 1$. Les points d'intersection de d_1, d_2, d_3, d_4 avec $\{z = 0\}$ sont des points d'intersection de multiplicité 2, et il en est de même pour d_5, d_6, d_7, d_8 avec $\{x = 0\}$, et pour $d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}$ avec $\{y = 0\}$. Les autres points d'intersections de $\mathcal{A}'$ sont des points de multiplicité 3 ou 6. En effet, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $j \in \{5, 6, 7, 8\}$, on a $d_i \cap d_j := \{x = \alpha_i y\} \cap \{y = \alpha_j z\}$ avec $(\alpha_i \alpha_j)^4 = 1$. Donc $d_i \cap d_j = d_i \cap d_j \cap d_k$ où $d_k := \{x = \alpha_i \alpha_j z\}$, $k \in \{9, 10, 11, 12\}$. De la même manière, on obtient un point de multiplicité 3 si on prend $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $j \in \{9, 10, 11, 12\}$, ou si on prend $i \in \{5, 6, 7, 8\}$ et $j \in \{9, 10, 11, 12\}$. On a aussi trois points de multiplicité 6 :*
$d_1 \cap d_2 \cap d_3 \cap d_4 \cap \{x = 0\} \cap \{y = 0\}$, $d_5 \cap d_6 \cap d_7 \cap d_8 \cap \{y = 0\} \cap \{z = 0\}$,
et $d_9 \cap d_{10} \cap d_{11} \cap d_{12} \cap \{x = 0\} \cap \{z = 0\}$. Ainsi $G(\mathcal{A})$, qui a 3 composantes connexes, n'est pas connexe. Il est clair que $\mathcal{A}$ vérifie (i) et (ii) de notre Théorème 4.3.1, et on a que $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) \neq H^1(F_{\mathcal{A}})_1$ avec [18, Remarque 3.4 (iii)].

En général, lorsque les hypothèses de notre Théorème 4.3.1 ne sont pas vérifiées, les situations peuvent être très complexes et on doit utiliser d'autres résultats pour conclure.

Exemple 4.3.12 *Soit $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'arrangement défini par le polynôme homogène $Q(x:y:z) = xyz(x^2-y^2)(y^2-z^2)(x^2-z^2)$. Avec le même type d'arguments que dans l'Exemple 4.3.11 on peut montrer que $G(\mathcal{A})$ n'est pas connexe et que $\mathcal{A}$ vérifie (i) et (ii) du Théorème 4.3.1. Ici cependant nous avons $H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1$ avec [18, Remarque 3.4 (ii)]. L'arrangement $\mathcal{A}'$ et le graphe $G(\mathcal{A})$ sont représentés dans la figure ci-dessous, où $H_1 := \{x=0\}, H_2 := \{y=0\}, H_3 := \{z=0\}$, $H_4 := \{x-y=0\}, H_5 := \{x+y=0\}, H_6 := \{y-z=0\}, H_7 := \{y+z=0\}$, $H_8 := \{x-z=0\}, H_9 := \{x+z=0\}$.*

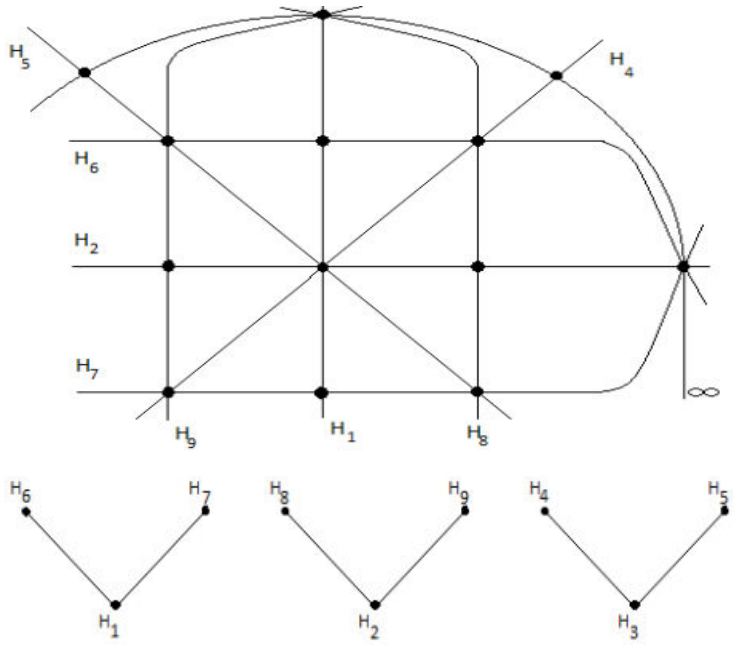


FIGURE 4.3 – $\mathcal{A}' : xyz(x^2-y^2)(y^2-z^2)(x^2-z^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et le graphe $G(\mathcal{A})$.

Exemple 4.3.13 *Soit $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'arrangement défini par le polynôme homogène $Q(x:y:z) = xy(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y)(2x+y+z)(2x+y+2z)$ $\times(2x+y+3z)(2x+y-z)(2x+y-2z)(2x+y-3z)$. Ici $d=12$ et on a deux points d'intersection dans $L_2(\mathcal{A})$ de multiplicité 6 : $\{x=y=0\}$, et $\{y=-2x\} \cap \{z=0\}$. On peut vérifier rapidement que chaque hyperplan contient une de ces deux intersections et que $G(\mathcal{A})$ est connexe. En effet, chaque hyperplan de $\{\{x=0\}$, $\{y=0\}, \{x+y=0\}, \{x-y=0\}, \{x+2y=0\}, \{x-2y=0\}\}$ est relié par une arête aux hyperplans de $\{\{2x+y+z=0\}, \{2x+y+2z=0\}, \{2x+y+3z=0\}, \{2x+y-z=0\}, \{2x+y-2z=0\}, \{2x+y-3z=0\}\}$. Ainsi les points (i) et (iii) de notre Théorème 4.3.1 sont vérifiés, mais pas (ii).*
Il faut au minimum deux hyperplans de $\mathcal{A}'$ pour contenir tous les points de multiplicités supérieures ou égales à 3 : un tel arrangement est dit de classe $\mathcal{C}_2$.

Soit $\lambda^k \neq 1$. Avec [31, Théorème 1.1] on en déduit l'existence d'un $\omega = \sum_{H\in\mathcal{A}'} \omega_H \frac{dl_H}{l_H}$ de $H^1(M(\mathcal{A}'),\mathbb{C})$ (où l_H est la forme linéaire définissant l'hyperplan H), tel que $dim\, H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = dim\, H^1(M(\mathcal{A}'),\mathcal{L}'_{\lambda^k}) = dim\, H^1(H^*(M(\mathcal{A}'),\mathbb{C}),\omega\wedge)$. De plus on sait que $exp(-2i\pi\omega_H) = \lambda^k$ pour tout H (comme on l'a vu au chapitre 3), donc que $\omega_H \neq 0$, pour tout H. Supposons $dim H^1(H^*(M(\mathcal{A}'),\mathbb{C}),\omega\wedge) \neq 0$.
Alors $\omega \in \mathcal{R}^1(\mathcal{A}') = \{\alpha \in H^1(M(\mathcal{A}'),\mathbb{C}) \,|\, dim\, H^1(H^*(M(\mathcal{A}'),\mathbb{C}),\alpha\wedge) \geq 1\}$. Avec la description des composantes irreductibles de la première variété de résonance d'un arrangement de classe $\mathcal{C}_2$, voir [21, Théorème 4.3], on a une contradiction avec le fait que $\omega_H \neq 0$, pour tout H. Ainsi $H^1(H^*(M(\mathcal{A}'),\mathbb{C}),\omega\wedge) = 0$ et on en déduit finalement que $H^1(F_{\mathcal{A}},\mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1$.

Exemple 4.3.14 *Soit $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ l'arrangement défini par le polynôme homogène $Q(x:y:z:t) = xy(x-y)(x+y)(x-2y)(x+2y)zt(z-t)(z+t)(z-2t)(z+2t)$. Ici $d = 12$ et on a deux points d'intersection dans $L_2(\mathcal{A})$ de multiplicité 6 : $\{x = y = 0\}$, et $\{z = t = 0\}$. On peut vérifier rapidement que chaque hyperplan contient une de ces deux intersections et que $G(\mathcal{A})$ est connexe. En effet, chaque hyperplan de $\{\{x = 0\},\{y = 0\},\{x-y = 0\},\{x+y = 0\},\{x-2y = 0\},\{x+2y = 0\}\}$ est relié par une arête aux hyperplans de $\{\{z = 0\},\{t = 0\},\{z-t = 0\},\{z+t = 0\},\{z-2t = 0\},\{z+2t = 0\}\}$. Ainsi les points (i) et (iii) de notre Théorème 4.3.1 sont vérifiés, mais pas (ii). On peut décomposer $\mathcal{A}$ en deux arrangements de variables distinctes : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, où $\mathcal{A}_1$ est défini par $Q_1(x,y,z,t) = xy(x-y)(x+y)(x-2y)(x+2y)$, et $\mathcal{A}_2$ par $Q_2(x,y,z,t) = zt(z-t)(z+t)(z-2t)(z+2t)$. Soit $\lambda^k \neq 1$. Notons F_1 et F_2 les fibres de Milnor des sous-arrangements $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$. Alors avec [16, Théorème 1.4 (i)] on a $H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda^k} = \oplus_{a+b+c=1} H^a(\mathbb{T},\mathbb{C}) \oplus H^b(F_1)_{\lambda^k} \oplus H^c(F_2)_{\lambda^k} = 0$,*
d'où $H^1(F_{\mathcal{A}},\mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}})_1$.

En fait, on a une version plus générale du Corollaire 4.3.7.
Soient Γ un graphe simple (i.e. ne contenant ni boucle, ni arête double), et $\mathcal{A}_\Gamma$ l'arrangement graphique correspondant constitué des arêtes $ij^- \in E(\Gamma) = E_2(\Gamma)$. En d'autres termes, $\mathcal{A}_\Gamma$ est un sous-arrangement de l'arrangement des tresses $\mathcal{A}_n$. On note $|\Gamma|$ le nombre de sommets de Γ. On dit que Γ est connexe si on peut relier deux sommets distincts par une suite d'arêtes.
Soit $\omega_1 = \sum_{ij^-\in E(\Gamma)} a_{ij} \in A^1_R(\mathcal{A}_\Gamma)$. On a le résultat suivant :

Lemme 4.3.15 *Supposons que Γ est connexe et que $|\Gamma| \geq 5$.*
Alors $H^1(A^*_R(\mathcal{A}_\Gamma),\omega_1\wedge) = 0$, pour tout anneau commutatif unitaire R.

<u>Démonstration du Lemme 4.3.15 :</u>

Soit $b = \sum_{ij^-\in E(\Gamma)} b_{ij}a_{ij} \in A^1_R(\mathcal{A}_\Gamma)$ tel que $\omega_1 \wedge b = 0$. Montrons que b et ω_1 sont proportionnels. Le Corollaire 2.4.28 donne :

(i) Pour toute intersection de type 1 $H_{ij} \cap H_{kl}$, $i < j < k < l$, on a $b_{ij} = b_{kl}$.
(ii) Pour toute intersection de type 2 $H_{ij} \cap H_{ik} \cap H_{jk}$, $i < j < k$, on a :
$b_{ij} = b_{ik} = b_{jk}$ si $3 \neq 0_R$, ou $b_{ij} + b_{ik} + b_{jk} = 0$ si $3 = 0_R$.
On supposera donc que $3 = 0_R$, et on prendra $H_{ij} \cap H_{ik} \cap H_{jk}$, $i < j < k$, une intersection de type 2. On va montrer que $b_{ij} = b_{ik} = b_{jk}$.
Comme $|\mathcal{A}_\Gamma| \geq 5$, il existe deux sommets s et m, donc deux arêtes supplémentaires, et comme Γ est connexe, ces deux arêtes peuvent êtres reliées à Γ directement avec : (1.) ou bien avec un seul sommet du triangle ijk, (2.) ou bien deux sommets différents du triangle ijk, (3.) ou bien une de ces arêtes est reliée à un sommet du triangle ijk et l'autre est reliée au nouveau sommet de la première arête. Par symétrie, on peut supposer qu'on est dans un des cas suivant (ici on a choisi $i < j < k < s < m$ mais bien sûr l'ordre n'est pas important) :

1. Si is^-, $im^- \in \Gamma$:
   (a) Si js^-, $km^- \notin \Gamma$, alors $H_{ij} - H_{is} - H_{jk} - H_{im} - H_{ik}$, et $b_{ij} = b_{ik} = b_{jk}$.
   (b) Si js^-, $km^- \in \Gamma$, alors $H_{ij} - H_{km} - H_{js} - H_{ik} - H_{js} - H_{im} - H_{jk}$, et $b_{ij} = b_{ik} = b_{jk}$.
   (c) Si $js^- \in \Gamma$, $km^- \notin \Gamma$, alors $H_{ik} - H_{im} - H_{jk}$, donc $b_{ik} = b_{jk}$, et avec $b_{ij} + b_{ik} + b_{jk} = 0$
   on obtient que $b_{ij} = -2b_{ik} = b_{ik} \in R$.
   (d) Si $js^- \notin \Gamma$, $km^- \in \Gamma$, par symétrie on conclut avec le cas précédent.
2. Si is^-, $jm^- \in \Gamma$, alors $H_{ik} - H_{jm} - H_{is} - H_{jk}$, donc $b_{ik} = b_{jk}$,
   et $b_{ij} + b_{ik} + b_{jk} = 0$ implique que $b_{ij} = b_{ik}$.
3. Si is^-, $sm^- \in \Gamma$, alors H_{ij}, H_{ik} et H_{jk} sont reliés par une arête à H_{sm} dans $G(\mathcal{A}_\Gamma)$ et on peut conclure directement.

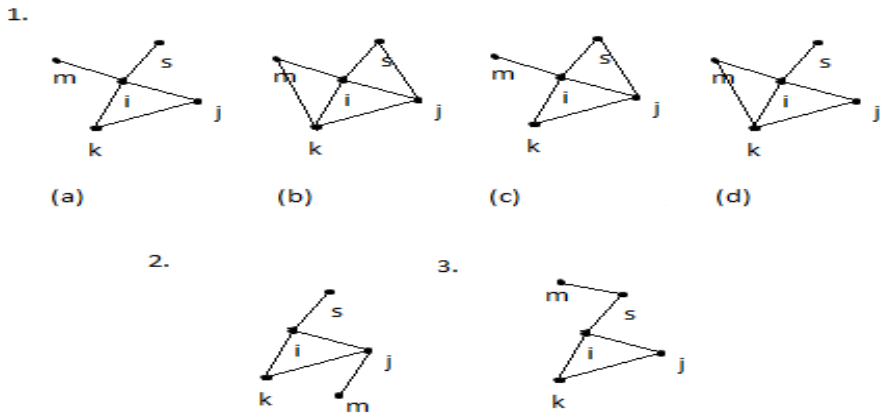


FIGURE 4.4 –

$\square$

Remarque 4.3.16 *(i) Le fait que Γ soit connexe et que $|\Gamma| \geq 5$ n'implique pas que $G(\mathcal{A}_\Gamma)$ est connexe.*
Par exemple, l'arrangement graphique $\mathcal{A}_\Gamma = \{H_{12}, H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{23}, H_{34}, H_{35}\}$ est tel que Γ est connexe et $|\Gamma| \geq 5$, cependant $G(\mathcal{A}_\Gamma)$ n'est pas connexe.
En effet, H_{13} n'est relié à aucun des hyperplans de $\mathcal{A}_\Gamma$ et on ne peut donc pas appliquer notre Lemme 4.3.3.
(ii) Si Γ est connexe et $|\Gamma| \geq 5$, alors on retrouve le résultat de D.A. Măcini et S. Papadima énoncé dans le Chapitre 3 pour les arrangements graphiques. En effet, avec le même raisonnement que dans la démonstration du Théorème 4.3.1 et en utilisant le Lemme 4.3.15 à la place du Lemme 4.3.3 on a :

$$H^1(F_{\mathcal{A}_\Gamma}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\mathcal{A}_\Gamma})_1.$$

Si le graphe Γ n'est pas connexe, mais est tel que chacune de ses composantes connexes Γ_i satisfait $|\Gamma_i| \geq 5$, alors $\mathcal{A}_\Gamma$ est un produit d'arrangements $\mathcal{A}_{\Gamma_i}$ et on peut conclure en utilisant [16, Théorème 1.4 (i)].

4.4 Un deuxième théorème d'annulation pour un arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Dans cette section, nous nous placerons dans le cas $n = 2$, et nous considèrerons donc un arrangement projectif $\bar{\mathcal{A}}' = \{\bar{H}'_1, \ldots, \bar{H}'_d\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ constitué de d hyperplans, de complémentaire $M(\bar{\mathcal{A}}') = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i=1}^d \bar{H}'_i$. Soit $l_i(x, y, z)$ la forme linéaire définissant l'hyperplan $\bar{H}_i \subset \mathbb{C}^3$, et $f_{\bar{\mathcal{A}}}(x, y, z) = \prod_{i=1}^d l_i(x, y, z)$ le polynôme homogène de degré d définissant l'arrangement $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^3$. Comme dans la section précédente, nous allons nous intéresser à la fibre de Milnor $F_{\bar{\mathcal{A}}}$ et à la décomposition en sous-espaces propres du Théorème 3.2.5 :

$$H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{d-1} H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\lambda^k},$$

où $H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\lambda^k} = ker\{\{h^1 : H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}}, \mathbb{C}) \to H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}}, \mathbb{C})\} - \lambda^k \cdot Id_{H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}}, \mathbb{C})}\}$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ^k, et $\lambda = exp(2i\pi/d)$.

Lorsque l'arrangement $\bar{\mathcal{A}}'$ est générique, c'est à dire qu'il ne possède que des points doubles, alors on a directement l'annulation de $H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\neq 1}$ avec le théorème suivant de Orlik, Randell et Hattori.

Théorème 4.4.1 ([33]) *Supposons que $\bar{\mathcal{A}}' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est générique. Alors $H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_1$.*

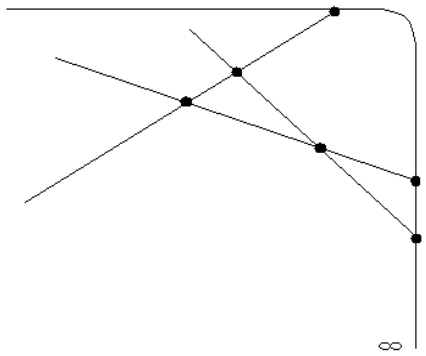


FIGURE 4.5 – Un arrangement générique

On a même mieux avec le théorème suivant dû à A. Libgober.

Théorème 4.4.2 ([25]) *Supposons qu'il existe un hyperplan $\bar{H}'_i \in \bar{\mathcal{A}}'$ ne contenant que des points doubles. Alors $H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}}, \mathbb{C}) = H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_1$.*

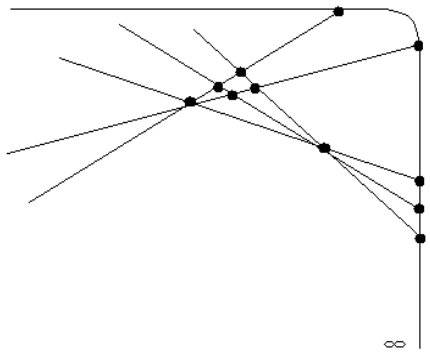


FIGURE 4.6 – L'hyperplan à l'infini ne contient que des points doubles

En fait, on est même capable de dire si $H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\neq 1} = 0$ pour un arrangement $\bar{\mathcal{A}}' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ n'ayant que des points doubles ou triples, et les conditions sont entièrement déterminées par la combinatoire de l'arrangement. Il s'agit d'un théorème dû à A. Libgober [26, Théorème 1.2], qui assure que $H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\neq 1} \neq 0$ si et seulement si $\bar{\mathcal{A}}'$ provient d'un pinceau de courbes.
Des résultats encore plus précis ont été récemment trouvés par S. Papadima et

A. Suciu pour des arrangements $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, voir [34]. Si $L_2(\mathcal{A})$ ne possède que des intersections doubles et triples, [34, Théorème 1.2] donne l'expression du polynôme d'Alexander $\Delta^1(t)$ de la monodromie et montre que la multiplicité d'une valeur propre d'ordre 3 dépend de $L(\mathcal{A})$ et vaut $0, 1$, ou 2. Aussi, [34, Théorème 1.3] donne les cas où cette multiplicité est nulle en fonction de la combinatoire de l'arrangement. Enfin, [34, Théorème 1.5] discute des valeurs propres d'ordre 2 et 4.

En général, dès que des points de multiplicité supérieure à trois apparaissent, on ne peut pas conclure directement et la question est beaucoup plus difficile. L'ordre d'une valeur propre $\lambda^k \neq 1$ étant lié aux multiplicités des points d'intersections sur une droite $\bar{H}'_i$, posons la définition suivante.

Définition 4.4.3 *Soit $m > 1$ un entier strictement supérieur à 1. Notons*

$$\mu(\bar{H}'_i, m) := |\{P \in \bar{H}'_i \mid m \text{ divise } |\bar{\mathcal{A}}'_P|\}|,$$

où $|\bar{\mathcal{A}}'_P| = |\{\bar{H}'_i \in \bar{\mathcal{A}}' \mid P \in \bar{H}'_i\}|$ est la multiplicité du point P dans l'arrangement $\bar{\mathcal{A}}'$. En d'autres termes, $\mu(\bar{H}'_i, m)$ est le nombre de points sur $\bar{H}'_i$ dont la multiplicité est divisible par m.

Dans [25] A. Libgober donne le théorème suivant :

Théorème 4.4.4 ([25]) *Soit $\lambda^k \neq 1$ une racine de l'unité d'ordre $m > 2$.*

$$\text{Si } \mu(\bar{H}'_i, m) = 0 \text{ pour un certain } \bar{H}'_i \in \bar{\mathcal{A}}', \text{ alors } H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\lambda^k} = 0.$$

Nous donnons ici un théorème d'annulation, résultat d'un travail en collaboration avec le Professeur M. Yoshinaga, qui est une généralisation du théorème précédent au cas $\mu(\bar{H}'_i, m) = 1$. Pour cela on va utiliser le Théorème 4.2.8 de S. Papadima et A. Suciu, et l'annulation du premier groupe de cohomologie d'un certain complexe d'Aomoto sur des corps finis, obtenue grâce à un procédé original utilisant des homomorphismes de dégénérescence. Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant :

Théorème 4.4.5 *Soient $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier et $m = p^s$, $s \geq 1$, tels que $m|d$. Soit $\lambda^k \neq 1$ une racine de l'unité d'ordre m. Supposons que $\bar{\mathcal{A}}'$ est essentiel, c'est à dire que $\bar{\mathcal{A}}'$ a au moins deux points d'intersection dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Alors on a :*

$$\text{si } \mu(\bar{H}'_i, p) \leq 1 \text{ pour un certain } \bar{H}'_i \in \bar{\mathcal{A}}', \text{ alors } H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\lambda^k} = 0.$$

Remarque 4.4.6 *1. L'arrangement essentiel $\bar{\mathcal{A}}_3 \in \mathbb{C}^3$ de la Proposition 4.1.1 vérifie $\mu(\bar{H}'_i, 3) = 2$, $\forall\, \bar{H}'_i \in \bar{\mathcal{A}}'_3$, et on a $H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}_3})_{e^{2\pi i/3}} \simeq \mathbb{C}$. Ainsi, en général, des sous-espaces propres non triviaux peuvent apparaître dès lors que $\mu(\bar{H}'_i, p) \geq 2$ pour tout hyperplan $\bar{H}'_i \in \bar{\mathcal{A}}'$. L'hypothèse " $\mu(\bar{H}'_i, p) \leq 1$ " de notre Théorème 4.4.5 est donc optimale.*

2. *Ce théorème montre que si il existe un hyperplan contenant exactement un point de multiplicité supérieure à trois, et si cette multiplicité est une puissance d'un nombre premier, alors l'action de la monodromie sur la fibre est l'identité. On conjecture que ce résultat est vrai pour une multiplicité quelconque.*

Remarque 4.4.7 *Dans le cas où $\bar{\mathcal{A}}'$ est défini sur $\mathbb{R}$, une version plus forte du Théorème 4.4.5 a déjà été prouvée par M. Yoshinaga dans [45, Corollaire 3.15] : soit $\lambda^k \neq 1$ une racine de l'unité d'ordre $m > 1$.*
Si $\mu(\bar{H}'_i, m) \leq 1$ pour un certain $\bar{H}'_i \in \bar{\mathcal{A}}'$, alors $H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\lambda^k} = 0$.
Ce résultat utilise un algorithme pour calculer les dimensions des sous-espaces propres $H^1(F)_{\lambda^k}$ à partir de représentations réelles des arrangements, procédé qui ne peut pas être appliqué dans le cas complexe.

Remarque 4.4.8 *Le cas où $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^3$ n'est pas essentiel se déduit de la Remarque 3.2.7. En effet, dans ce cas les droites projectives de $\bar{\mathcal{A}}'$ se coupent toutes en un point de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Avec un bon choix de coordonnées on peut alors supposer que ce point est $(0 : 0 : 1)$ et que le polynôme $f_{\bar{\mathcal{A}}}(x, y, z)$ de l'arrangement $\bar{\mathcal{A}}$ s'écrit $Q(x, y, z) = \Pi_{i=1}^d (c_i x + d_i y)$, où $\bar{H}_i := \{c_i x + d_i y = 0\}$. Soit $\bar{\mathcal{A}}_0 \subset \mathbb{C}^2$ l'arrangement constitué des d hyperplans $\{c_i x + d_i y = 0\}$. On a alors que $F \simeq F_0 \times \mathbb{C}$,*
où $F_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \Pi_{i=1}^d (c_i x + d_i y) = 1\}$ est la fibre de Milnor de $\bar{\mathcal{A}}_0$. On conclut ensuite en utilisant la Remarque 3.2.7 appliquée à l'arrangement $\bar{\mathcal{A}}_0$.

Commençons par rappeler les outils essentiels que nous utiliserons pour démontrer notre théorème principal. Tout d'abord, si l'on choisit $\bar{H}'_1$ l'hyperplan à l'infini dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, on a un isomorphisme de variétés algébriques $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \backslash \bar{H}'_1$. Par cet isomorphisme, on obtient un arrangement affine que l'on notera $\mathcal{A} = \{H_2, \ldots, H_d\} \subset \mathbb{C}^2$, où $H_i = \bar{H}'_i \cap \mathbb{C}^2$. Si on note $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2 \backslash \bigcup_{i=2}^d H_i$ son complémentaire, alors on a que $M(\mathcal{A}) \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i=1}^d \bar{H}'_i = M(\bar{\mathcal{A}}')$. On peut donc appliquer les notions de la section 3.2 à notre arrangement $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^3$ et on obtient avec le Théorème 3.2.5 :

$$H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\lambda^k} \simeq H^1(M(\bar{\mathcal{A}}'), \bar{\mathcal{L}}'_{\lambda^k}) \simeq H^1(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_{\lambda^k}),$$

où $\bar{\mathcal{L}}'_{\lambda^k}$ (respectivement $\mathcal{L}_{\lambda^k}$) est le système local de rang 1 sur $M(\bar{\mathcal{A}}')$ (respectivement sur $M(\mathcal{A})$) tel que la monodromie autour de chaque hyperplan de $\bar{\mathcal{A}}'$ (respectivement de $\mathcal{A}$) est λ^k.

A partir de maintenant nous allons donc travailler avec l'arrangement $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^2$. Soit R un anneau commutatif unitaire. Notons comme habituellement $A^*_R(\mathcal{A})$ son algèbre d'Orlik-Solomon. Avec les notations de la section 2.4 on a :
- $A^0_R(\mathcal{A}) = R$
- $A^1_R(\mathcal{A}) = R < a_2, \ldots, a_d >$

- $A_R^2(\mathcal{A}) = \frac{<a_i a_j,\, 2\leq i<j\leq d>}{I_2}$, où I_2 est l'idéal engendré par :
  1. $\{e_i e_j \mid H_i//H_j,\, 2 \leq i < j \leq d\}$
  2. $\{e_i e_j - e_i e_k + e_j e_k \mid H_i \cap H_j \cap H_k \neq \emptyset,\, 2 \leq i < j < k \leq d\}$
- $A_R^q(\mathcal{A}) = 0,\ \forall q \geq 3.$

Soient $\omega_1 = \sum_{i=2}^d a_i \in A_R^1(\mathcal{A})$, et $(A_R^*(\mathcal{A}), \omega_1\wedge)$ le complexe d'Aomoto de l'arrangement $\mathcal{A}$. Pour démontrer le Théorème 4.4.5, on a besoin du Théorème 4.2.8 de S. Papadima et A. Suciu et du théorème suivant :

Théorème 4.4.9 *Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier. Supposons que $\bar{\mathcal{A}}'$ est essentiel, c'est à dire que $\bar{\mathcal{A}}'$ a au moins deux points d'intersection dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. On a que :*

$$si\ \mu(\bar{H}_1', p) \leq 1,\ alors\ H^1(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}), \omega_1\wedge) = 0.$$

Le Théorème 4.4.5 se déduit facilement du Théorème 4.4.9 et du Théorème 4.2.8. En effet, supposons que les hypothèses du Théorème 4.4.5 sont vérifiées. Alors on peut supposer que le $\bar{H}_i'$ tel que $\mu(\bar{H}_i', p) \leq 1$ est $\bar{H}_1'$, et avec le Théorème 4.4.9 on a que $H^1(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}), \omega_1\wedge) = 0$. Ainsi avec les notations du Théorème 4.2.8 on a que $\beta_{1\,p}(\mathcal{A}) = 0$ et on en déduit que $b_1(\mathcal{A}, \frac{1}{m}) = dim\, H^1(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_{\lambda^k}) = dim\, H^1(F_{\bar{\mathcal{A}}})_{\lambda^k}$ $= 0$.

Le point délicat de cette section reste la démonstration du Théorème 4.4.9 ($\mathcal{A}$ n'étant pas central), qui ramène notre problème algébrique à un problème topologique (la topologie du complémentaire $M(\mathcal{A})$). Toute la difficulté réside dans le fait que l'algèbre d'Orlik-Solomon peut devenir très vite compliquée dès qu'on a un nombre élevé d'hyperplans. C'est là qu'entrent en jeu les homomorphismes de dégénérescence que l'on va décrire un peu plus tard, et qui vont permettre, par projection, de se ramener à des cas beaucoup plus simples : le cas d'un arrangement central et le cas d'un arrangement de droites presque toutes parallèles, pour lesquels on va pouvoir faire des calculs sur leurs algèbres d'Orlik-Solomon plus facilement et prouver notre Théorème 4.4.9.

Retournons à notre arrangement affine $\mathcal{A} = \{H_2, \ldots, H_d\} \subset \mathbb{C}^2$.
Soient $\xi = r_2 a_2 + \cdots + r_d a_d \in A_R^1(\mathcal{A})$, et le complexe d'Aomoto $(A_R^*(\mathcal{A}), \xi\wedge)$. Définissons un sous-module $A_R^1(\mathcal{A})_0$ de $A_R^1(\mathcal{A})$ de la manière suivante :

$$A_R^1(\mathcal{A})_0 := \{\eta = c_2 a_2 + \cdots + c_d a_d \in A_R^1(\mathcal{A}) \mid c_2 + \cdots + c_d = 0\}. \tag{4.2}$$

Remarque 4.4.10 *Ici, on ne confondra pas avec l'algèbre d'Orlik-Solomon projective $ker\{\partial : A_R^1(\mathcal{A}) \to R\}$ car l'arrangement $\mathcal{A}$ n'est pas central.*

On a le lemme suivant :

Lemme 4.4.11 *Si* $\sum_{i=2}^{d} r_i \in R^{\times}$, *alors*

$$H^1(A_R^*(\mathcal{A}), \xi\wedge) \simeq \ker\{A_R^1(\mathcal{A})_0 \xrightarrow{\xi\wedge} A_R^2(\mathcal{A})\}. \tag{4.3}$$

<u>Démonstration du Lemme 4.4.11 :</u>

Soient $i : \ker\{A_R^1(\mathcal{A})_0 \overset{\xi\wedge}{\to} A_R^2(\mathcal{A})\} \longrightarrow \ker\{A_R^1(\mathcal{A}) \overset{\xi\wedge}{\to} A_R^2(\mathcal{A})\}$ l'inclusion naturelle, et $q : \ker\{A_R^1(\mathcal{A}) \overset{\xi\wedge}{\to} A_R^2(\mathcal{A})\} \longrightarrow H^1(A_R^*(\mathcal{A}), \xi\wedge) = \frac{\ker\{A_R^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\xi\wedge} A_R^2(\mathcal{A})\}}{<\xi>}$ l'homomorphisme natutrel quotient. Posons $f = q \circ i$.

- Montrons que f est surjective :
  Soit $y = \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_d a_d \in H^1(A_R^*(\mathcal{A}), \xi\wedge)$.
  Comme $\sum_{i=2}^{d} r_i \in R^{\times}$, a que $y = q(x)$,
  où $x = \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_d a_d - \frac{(\alpha_2+\cdots+\alpha_d)}{\sum_{i=2}^{d} r_i}\,\xi$
  $= (\alpha_2 - \frac{(\alpha_2+\cdots+\alpha_d)}{\sum_{i=2}^{d} r_i}\, r_2)a_2 + \cdots + (\alpha_d - \frac{(\alpha_2+\cdots+\alpha_d)}{\sum_{i=2}^{d} r_i}\, r_d)a_d \in A_R^1(\mathcal{A})_0$,
  car $(\alpha_2 - \frac{(\alpha_2+\cdots+\alpha_d)}{\sum_{i=2}^{d} r_i}\, r_2) + \cdots + (\alpha_d - \frac{(\alpha_2+\cdots+\alpha_d)}{\sum_{i=2}^{d} r_i}\, r_d) = 0$.
  Ainsi $y = f(x)$ et f est surjective.
- Montrons que f est injective :
  Soit $x \in ker(f)$. Comme $x \in A_R^1(\mathcal{A})_0$, on a directement $x = f(x) = 0$.

$\square$

Nous allons maintenant nous intéresser au complexe d'Aomoto dans deux cas particuliers : le cas d'un arrangement $\mathcal{C}_l$ central, puis le cas d'un arrangement $\mathcal{P}_v$ constitué de droites toutes parallèles entre elles, et d'une autre droite qui leur est transversale. Dans ces deux cas on va montrer, sous certaines hypothèses, que $H^1(A_R^*(\mathcal{C}_l), \xi\wedge) = 0 = H^1(A_R^*(\mathcal{P}_v), \xi\wedge)$.

1. Soit $\mathcal{C}_l = \{H_1, \ldots, H_l\} \subset \mathbb{C}^2$ un arrangement central constitué de l droites comme dans la Figure 4.7.

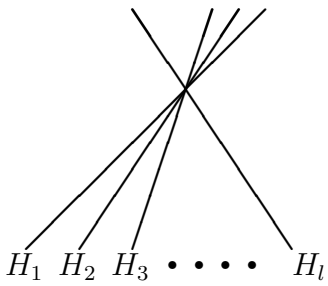


FIGURE 4.7 – Arrangement central $\mathcal{C}_l$

Soit $\xi = r_1 a_1 + \cdots + r_l a_l \in A^1_R(\mathcal{C}_l)$. On a le résultat suivant :

Proposition 4.4.12 *Supposons que* $\sum_{i=1}^{l} r_i \in R^\times$,
alors $H^1(A^*_R(\mathcal{C}_l), \xi\wedge) = 0$.

Démonstration de la Proposition 4.4.12 :

Si $\sum_{i=1}^{l} r_i \in R^\times$, alors avec le Lemme 4.4.11 on a que $H^1(A^*_R(\mathcal{C}_l), \xi\wedge)$
$\simeq \ker\{A^1_R(\mathcal{C}_l)_0 \xrightarrow{\xi\wedge} A^2_R(\mathcal{C}_l)\}$.
Or $A^1_R(\mathcal{C}_l)_0 = \{\eta = c_1 a_1 + \cdots + c_l a_l \in A^1_R(\mathcal{C}_l) \mid c_1 + c_2 + \cdots + c_l = 0\}$
$= \{\eta = c_1 a_1 + \cdots + c_{l-1} a_{l-1} - (a_1 + \cdots + a_{l-1}) a_l\}$ est un module libre de rang $l-1$. De plus, tout élément $\eta = c_1 a_1 + \cdots + c_l a_l \in A^1_R(\mathcal{C}_l)_0$ peut s'écrire sous la forme : $\eta = c_1(a_1 - a_2) + (c_1 + c_2)(a_2 - a_3) + (c_1 + c_2 + c_3)(a_3 - a_4) + \cdots$
$+(c_1 + \cdots + c_{l-1})(a_{l-1} - a_l)$, et la famille génératrice $\{a_i - a_{i+1},\ 1 \leq i \leq l-1\}$ est une base de $A^1_R(\mathcal{C}_l)_0$.
Avec l'Exemple 2.4.10 on a que $A^2_R(\mathcal{C}_l)$ est un module libre de rang $l-1$.
Soit $a_i a_j \in A^2_R(\mathcal{C}_l)$. Si $j > i+1$, alors il existe un entier $m > 1$
tel que $j = i + m$. En utilisant le fait que $\partial(a_i a_{i+1} a_{i+m}) = 0$,
on a $a_i a_{i+m} = a_i a_{i+1} + a_{i+1} a_{i+m}$. En appliquant successivement le même calcul sur les termes $a_{i+1} a_{i+m}$, puis sur $a_{i+2} a_{i+m}$, ..., $a_{i+m-2} a_{i+m}$, on trouve finalement :

$$a_i a_{i+m} = a_i a_{i+1} + a_{i+1} a_{i+2} + \cdots + a_{i+m-1} a_{i+m}.$$

Ainsi la famille génératrice $\{a_i a_{i+1},\ 1 \leq i \leq l-1\}$ est une base de $A^2_R(\mathcal{C}_l)$.

On a l'égalité suivante :

$$\xi \wedge (a_i - a_{i+1}) = -(r_1 + \cdots + r_l) a_i a_{i+1}. \tag{4.4}$$

En effet, on peut vérifier en développant que $\xi \wedge (a_i - a_{i+1})$
$= r_1(a_1 a_i - a_1 a_{i+1}) + \cdots + r_{i-1}(a_{i-1} a_i - a_{i-1} a_{i+1}) - r_i a_i a_{i+1} - r_{i+1} a_i a_{i+1}$
$-r_{i+2}(a_i a_{i+2} - a_{i+1} a_{i+2}) - \cdots - r_l(a_i a_l - a_{i+1} a_l) = -(r_1 + \cdots + r_l) a_i a_{i+1}$.

Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^{l-1} \gamma_i (a_i - a_{i+1}) \in \ker\{A^1_R(\mathcal{C}_l)_0 \xrightarrow{\xi\wedge} A^2_R(\mathcal{C}_l)\}$.
On a : $\xi \wedge x = \sum_{i=1}^{l-1} \gamma_i \cdot \xi \wedge (a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=1}^{l-1} -\gamma_i (r_1 + \cdots + r_l) a_i a_{i+1}$ d'après (4.4). Comme $\{a_i a_{i+1},\ 1 \leq i \leq l-1\}$ est une base de $A^2_R(\mathcal{C}_l)$ et $\sum_{i=1}^{l} r_i \in R^\times$, on a : $\xi \wedge x = 0 \ \Rightarrow\ \gamma_i = 0,\ \forall\, i$.

$\square$

2. Soit $\mathcal{P}_v = \{H_1, \ldots, H_v, H_{v+1}\} \subset \mathbb{C}^2$ un arrangement constitué de v droites parallèles et d'une autre droite H_{v+1} qui leur est transversale comme dans la Figure 4.8 ci-dessous.

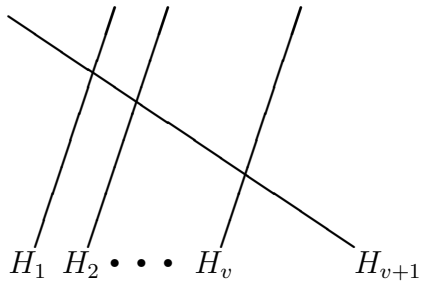


FIGURE 4.8 – $\mathcal{P}_v$

Soit $\xi = r_1a_1 + \cdots + r_va_v + r_{v+1}a_{v+1} \in A^1_R(\mathcal{P}_v)$. On a le résultat suivant :

Proposition 4.4.13 *Supposons que* $r_{v+1} \in R^\times$, *alors* $H^1(A^*_R(\mathcal{P}_v), \xi\wedge) = 0$.

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.4.14 *Supposons que* $r_{v+1} \in R^\times$,
alors $H^1(A^*_R(\mathcal{P}_v), \xi\wedge) \simeq \ker\{R \cdot a_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot a_v \xrightarrow{\xi\wedge} A^2_R(\mathcal{P}_v)\}$.

<u>Démonstration du Lemme 4.4.14 :</u>

Soient $i : \ker\{R \cdot a_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot a_v \overset{\xi\wedge}{\to} A^2_R(\mathcal{P}_v)\} \longrightarrow \ker\{A^1_R(\mathcal{P}_v) \overset{\xi\wedge}{\to} A^2_R(\mathcal{P}_v)\}$ l'inclusion naturelle, et $q : \ker\{A^1_R(\mathcal{P}_v) \overset{\xi\wedge}{\to} A^2_R(\mathcal{P}_v)\} \longrightarrow H^1(A^*_R(\mathcal{P}_v), \xi\wedge)$ l'homomorphisme natutrel quotient. Posons $f = q \circ i$.

- Montrons que f est sujective :
  Soit $y = \alpha_1a_1 + \cdots + \alpha_{v+1}a_{v+1} \in H^1(A^*_R(\mathcal{P}_v), \xi\wedge)$.
  Comme $r_{v+1} \in R^\times$, on a que $y = q(x)$,
  où $x = \alpha_1a_1 + \cdots + \alpha_{v+1}a_{v+1} - \frac{\alpha_{v+1}}{r_{v+1}}\xi$
  $= (\alpha_1 - \frac{\alpha_{v+1}}{r_{v+1}}r_1)a_1 + \cdots + (\alpha_v - \frac{\alpha_{v+1}}{r_{v+1}}r_v)a_v \in R \cdot a_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot a_v$.
  Ainsi $y = f(x)$ et f est surjective.
- Montrons que f est injective :
  Soit $x \in ker(f)$. Comme $x \in R \cdot a_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot a_v$, on a que $x = f(x) = 0$.

$\square$

<u>Démonstration de la Proposition 4.4.13</u> :

Supposons $r_{v+1} \in R^\times$. Alors avec le Lemme 4.4.14 il suffit de montrer que $\ker\{R \cdot a_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot a_v \xrightarrow{\xi\wedge} A^2_R(\mathcal{P}_v)\} = 0$.
On a que $I_2(\mathcal{P}_v) =< e_ie_j,\ 1 \leq i < j \leq v >$, et donc
que $A^2_R(\mathcal{P}_v) =< a_ia_{v+1},\ 1 \leq i \leq v >$.
Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^v \gamma_ia_i \in R \cdot a_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot a_v$. Un calcul rapide montre que $\xi \wedge x = -r_{v+1}\sum_{i=1}^v \gamma_ia_ia_{v+1}$, les termes $a_ia_j,\ 1 \leq i < j \leq v$ étant tous

nuls. Enfin, comme $r_{v+1} \in R^\times$ on a :
$x \in \ker\{R \cdot a_1 \oplus \cdots \oplus R \cdot a_v \xrightarrow{\xi\wedge} A^2_R(\mathcal{P}_v)\} \Rightarrow \gamma_i = 0, \ \forall\, i.$

$\square$

Revenons maintenant à notre arrangement $\mathcal{A} = \{H_2, \ldots, H_d\} \subset \mathbb{C}^2$. Nous allons former une partition $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{A}_l$ en l familles de droites parallèles, telle que deux droites $H_i, H_j \in \mathcal{A}$ sont parallèles si et seulement si elles appartiennent à une même classe $\mathcal{A}_\beta, \ 1 \leq \beta \leq l$.
Nous allons montrer l'existence de deux homomorphismes surjectifs. Le premier est la dégénérescence totale :

$$\Delta_{tot} : A^*_R(\mathcal{A}) \to A^*_R(\mathcal{C}_l).$$

Fixons maintenant une classe $\mathcal{A}_\beta$. Notons v le nombres de droites qu'elle contient. Alors le deuxième homomorphisme, appelé dégénérescence directionnelle par rapport à $\mathcal{A}_\beta$, est le suivant :

$$\Delta_{dir} : A^*_R(\mathcal{A}) \to A^*_R(\mathcal{P}_v).$$

Détaillons ces deux homomorphismes.

1. <u>Dégénérescence totale</u>

   Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \sqcup \ \cdots \sqcup \mathcal{A}_l$ la décomposition de $\mathcal{A}$ en l familles de droites parallèles. Si on translate les droites de $\mathcal{A}$ de telle sorte qu'elles passent par l'origine, on obtient un arrangement central $\mathcal{C}_l$ constitué de l droites. Notons $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_l$ les éléments de $A^1_R(\mathcal{C}_l)$ correspondant aux droites de $\mathcal{C}_l$. On a alors le résultat suivant :

   Théorème 4.4.15 *Il existe un homomorphisme de $R-$algèbres*

   $$\Delta_{tot} : A^*_R(\mathcal{A}) \to A^*_R(\mathcal{C}_l)$$

   tel que

   $$a_i \mapsto \widetilde{a}_\beta$$

   si $H_i \in \mathcal{A}_\beta, \ 1 \leq \beta \leq l$ (voir la Figure 4.9 par exemple).

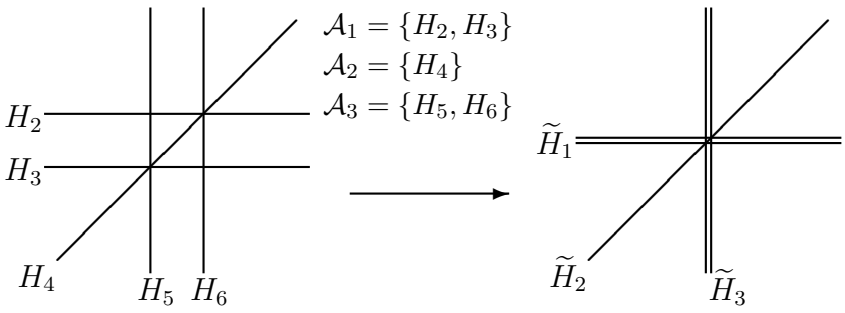


FIGURE 4.9 – Dégénéscence totale de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}_3$

<u>Démonstration du Théorème 4.4.15 :</u>

Soit π la surjection :

$$\pi : E^1(\mathcal{A}) \to E^1(\mathcal{C}_l)$$

telle que

$$e_i \mapsto \widetilde{e}_\beta$$

si $H_i \in \mathcal{A}_\beta,\ 1 \leq \beta \leq l$.

On a que $E^*(\mathcal{A}) = \wedge E^1(\mathcal{A})$ et $E^*(\mathcal{C}_l) = \wedge E^1(\mathcal{C}_l)$, donc π induit un homomorphisme surjectif $\widetilde{\pi}$ de $R-$algèbres :

$$\widetilde{\pi} : E^*(\mathcal{A}) \to E^*(\mathcal{C}_l).$$

Soit maintenant la projection naturelle $p_1 : E^*(\mathcal{C}_l) \to \frac{E^*(\mathcal{C}_l)}{I_*(\mathcal{C}_l)} = A^*_R(\mathcal{C}_l)$,
où $I_*(\mathcal{C}_l)$ est l'idéal engendré par les éléments de
$\{\partial(\widetilde{e}_{i_1} \cdots \widetilde{e}_{i_m}),\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq l,\ m \geq 3\}$.
Si on note $\phi = p_1 \circ \widetilde{\pi}$, on a un homomorphisme surjectif de $R-$algèbres :

$$\phi : E^*(\mathcal{A}) \to A^*_R(\mathcal{C}_l).$$

Montrons maintenant que $I_*(\mathcal{A}) \subset ker(\phi)$.
On a que $I_*(\mathcal{A})$ est l'idéal engendré par les familles :
$f_1 = \{\partial(e_{i_1} \cdots e_{i_m}) \mid H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_m} \neq \emptyset,\ 2 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq d,\ m \geq 3\}$,
et $f_2 = \{e_{i_1} \cdots e_{i_m} \mid H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_m} = \emptyset,\ 2 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq d\}$.

(a) Soit $x = \partial(e_{i_1} \cdots e_{i_m}) \in f_1$. On a que $H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_m} \neq \emptyset$, donc il existe $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tous distincts tels que $H_{i_1} \in \mathcal{A}_{\beta_1}, \ldots, H_{i_m} \in \mathcal{A}_{\beta_m}$,
et $\widetilde{\pi}(x) = \widetilde{\pi}(\partial(e_{i_1} \cdots e_{i_m})) = \partial(\widetilde{\pi}(e_{i_1} \cdots e_{i_m})) = \partial(\widetilde{e}_{\beta_1} \cdots \widetilde{e}_{\beta_m}) \in I(\mathcal{C}_l)$.
On en déduit que $\phi(x) = p_1 \circ \widetilde{\pi}(x) = 0$.

(b) Soit $x = e_{i_1} \cdots e_{i_m} \in f_2$.

- Si il existe une classe $\mathcal{A}_\beta$ contenant au moins deux hyperplans parmi $H_{i_1}, \dots, H_{i_m}$, alors comme $\widetilde{e}_\beta \widetilde{e}_\beta = 0$, on a que $\widetilde{\pi}(x) = 0$ et $\phi(x) = p_1 \circ \widetilde{\pi}(x) = 0$.
- Sinon, il existe $\beta_1, \dots, \beta_m$ tous distincts tels que $H_{i_1} \in \mathcal{A}_{\beta_1}, \dots, H_{i_m} \in \mathcal{A}_{\beta_m}$. De plus on a que $\partial(\widetilde{e}_{\beta_1} \cdots \widetilde{e}_{\beta_m}) \in I_*(\mathcal{C}_l)$. Finalement, $\widetilde{\pi}(x) = \widetilde{e}_{\beta_1} \cdots \widetilde{e}_{\beta_m} = \widetilde{e}_{\beta_1} \partial(\widetilde{e}_{\beta_1} \cdots \widetilde{e}_{\beta_m}) \in I_*(\mathcal{C}_l) = ker(p_1)$. On en déduit que $\phi(x) = p_1 \circ \widetilde{\pi}(x) = 0$.

Comme $\tilde{\pi}$ est linéaire, on a donc $\tilde{\pi}(I_*(\mathcal{A})) \subset I_*(\mathcal{C}_l)$, d'où $I_*(\mathcal{A}) \subset ker(\phi)$. Avec la propriété universelle des algèbres on en déduit l'existence de l'homomorphisme de $R-$algèbres surjectif Δ_{tot} du Théorème 4.4.15.

□

Donnons maintenant un lemme que nous utiliserons plus tard.

Lemme 4.4.16 *Soient* $\xi = \sum_{i=2}^d r_i a_i \in A_R^1(\mathcal{A})$ *et* $\eta \in A_R^1(\mathcal{A})_0$. *Supposons* $\sum_{i=2}^d r_i \in R^\times$, *et* $\xi \wedge \eta = 0$. *Alors on a que* $\eta \in ker(\Delta_{tot})$.

<u>Démonstration du Lemme 4.4.16 :</u>

Par définition de Δ_{tot}, les hypothèses impliquent que $\Delta_{tot}(\eta) \in A_R^1(\mathcal{C}_l)_0$, et $\Delta_{tot}(\xi) = \sum_{\beta=1}^l (\sum_{H_i \in \mathcal{A}_\beta} r_i) \tilde{a}_\beta$ vérifie : $\sum_{\beta=1}^l (\sum_{H_i \in \mathcal{A}_\beta} r_i) = \sum_{i=2}^d r_i \in R^\times$. De plus, comme Δ_{tot} est un homomorphisme d'algèbres extérieures, on a : $\Delta_{tot}(\xi) \wedge \Delta_{tot}(\eta) = \Delta_{tot}(\xi \wedge \eta) = 0$, et $\Delta_{tot}(\eta) \in \ker\{A_R^1(\mathcal{C}_l)_0 \xrightarrow{\Delta_{tot}(\xi)\wedge} A_R^2(\mathcal{C}_l)\}$. Avec le Lemme 4.4.11 on en déduit que $\Delta_{tot}(\eta) \in H^1(A_R^*(\mathcal{C}_l), \Delta_{tot}(\xi)\wedge)$, puis finalement que $\Delta_{tot}(\eta) = 0$ avec la Proposition 4.4.12.

□

2. <u>Dégénérescence directionelle</u>

Reprenons notre décomposition $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{A}_l$ en l familles de droites parallèles. Fixons une classe $\mathcal{A}_\beta$. Notons $v = |\mathcal{A}_\beta|$, et $\mathcal{A}_\beta = \{H_{i_1}, \dots, H_{i_v}\}$. Avec ce choix, on va associer à l'arrangement $\mathcal{A}$ un arrangement $\mathcal{P}_v$ constitué de v droites parallèles $\widetilde{H}_1, \dots, \widetilde{H}_v$ (correspondant aux droites de $\mathcal{A}_\beta$), et d'une autre droite $\widetilde{H}_{v+1}$ qui leur est transversale. Notons $\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_v, \widetilde{a}_{v+1}$ les éléments de $A_R^1(\mathcal{P}_v)$ correspondants. On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.4.17 *Il existe un homomorphisme de* $R-$*algèbres :*

$$\Delta_{dir} : A_R^*(\mathcal{A}) \to A_R^*(\mathcal{P}_v),$$

tel que

$$\Delta_{dir}(a_i) = \begin{cases} \widetilde{a}_u\,, & si\ H_i \in \mathcal{A}_\beta\ et\ i = i_u\ (1 \leq u \leq v), \\ \widetilde{a}_{v+1}\,, & si\ H_i \notin \mathcal{A}_\beta. \end{cases}$$

(voir par exemple la Figure 4.10).

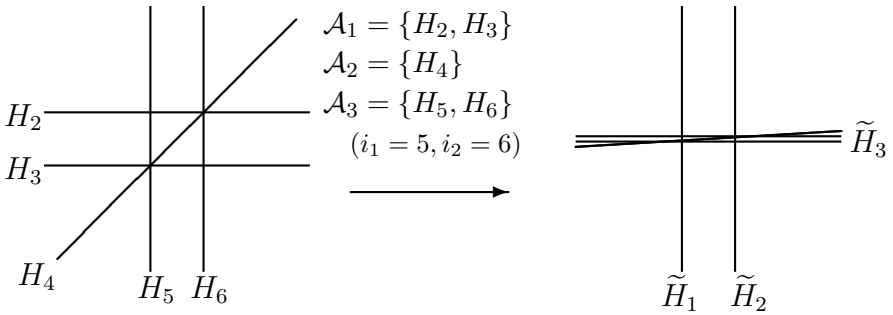


FIGURE 4.10 – Dégénérescence directionnelle de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{P}_2$ par rapport à $\mathcal{A}_3$

<u>Démonstration du Théorème 4.4.17 :</u>

La preuve de ce théorème est basée sur le même principe que celle du Théorème 4.4.15.
Soient $\pi : E^1(\mathcal{A}) \to E^1(\mathcal{P}_v)$ la surjection telle que

$$e_i \mapsto \begin{cases} \widetilde{e}_u\,, & \text{si } H_i \in \mathcal{A}_\beta \text{ et } i = i_u\ (1 \leq u \leq v), \\ \widetilde{e}_{v+1}\,, & \text{si } H_i \notin \mathcal{A}_\beta, \end{cases}$$

$\widetilde{\pi} : E^*(\mathcal{A}) \to E^*(\mathcal{P}_v)$ l'homomorphisme surjectif induit, et p_1 la projection naturelle $p_1 : E^*(\mathcal{P}_v) \to \frac{E^*(\mathcal{P}_v)}{I_*(\mathcal{P}_v)} = A_R^*(\mathcal{P}_v)$, où $I_*(\mathcal{P}_v)$ est l'idéal engendré par les éléments $\{\widetilde{e}_{j_1} \cdots \widetilde{e}_{j_m} \mid \widetilde{H}_{j_1} \cap \cdots \cap \widetilde{H}_{j_m} = \emptyset,\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq v+1\}$.
Notons encore une fois $\phi = p_1 \circ \widetilde{\pi} : E^*(\mathcal{A}) \to A_R^*(\mathcal{P}_v)$ l'homomorphisme surjectif de $R-$algèbres et montrons que $I_*(\mathcal{A}) \subset ker(\phi)$.

Soient f_1 et f_2 les familles génératrices de $I_*(\mathcal{A})$ comme dans la démonstration du Théorème 4.4.15.

(a) Soit $x = \partial(e_{i_1} \cdots e_{i_m}) \in f_1$. Il existe $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tous distincts tels que $H_{i_1} \in \mathcal{A}_{\beta_1}, \ldots, H_{i_m} \in \mathcal{A}_{\beta_m}$, et comme $m \geq 3$, il y a forcément deux classes parmi $\mathcal{A}_{\beta_1}, \ldots, \mathcal{A}_{\beta_m}$ distinctes de $\mathcal{A}_\beta$. On en déduit que $\widetilde{\pi}(e_{i_1} \cdots e_{i_m}) = 0$, et donc que $\widetilde{\pi}(x) = 0$, puis enfin que $\phi(x) = p_1 \circ \widetilde{\pi}(x) = 0$.

(b) Soit $x = e_{i_1} \cdots e_{i_m} \in f_2$.
- Si $m \geq 3$.
  Ou bien les hyperplans de $\{H_{i_1}, \ldots, H_{i_m}\}$ appartiennent à des classes toutes différentes, et comme $m \geq 3$, au moins deux de ces classes sont distinctes de $\mathcal{A}_\beta$ et $\widetilde{\pi}(x) = 0$. Ou bien il existe une classe $\mathcal{A}_{\beta'}$ contenant au moins deux hyperplans de $\{H_{i_1}, \ldots, H_{i_m}\}$. Si $\beta' \neq \beta$, alors encore une fois on a que $\widetilde{\pi}(x) = 0$. Si $\beta' = \beta$, alors les hyperplans de $\mathcal{P}_v$ image des hyperplans $\{H_{i_1}, \ldots, H_{i_m}\}$ de $\mathcal{A}$ ont une intersection vide et donc $\widetilde{\pi}(x) \in I_*(\mathcal{P}_v)$.
- Si $m = 2$.
  Ou bien les deux hyperplans H_{i_1}, H_{i_2} sont dans $\mathcal{A}_\beta$ et dans ce cas leur image dans $\mathcal{P}_v$ sont deux hyperplans parallèles et $\widetilde{\pi}(x) \in I_*(\mathcal{P}_v)$.
  Ou bien H_{i_1}, H_{i_2} sont dans une autre classe et dans ce cas $\widetilde{\pi}(x) = 0$.

Comme $\tilde{\pi}$ est linéaire, on a $\tilde{\pi}(I_*(\mathcal{A})) \subset I_*(\mathcal{C}_l)$, et donc $I_*(\mathcal{A}) \subset ker(\phi)$. Avec la propriété universelle des algèbres on en déduit l'existence de l'homomorphisme de $R-$algèbres surjectif Δ_{dir} du Théorème 4.4.17.

$\square$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du Théorème 4.4.9.

<u>Démonstration du Théorème 4.4.9 :</u>

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{A}_l$ la décomposition de $\mathcal{A}$ en classes de droites parallèles. Chaque classe $\mathcal{A}_\beta$ correspond à un point $P_\beta \in \bar{H}'_1$ de multiplicité dans $\bar{\mathcal{A}}'$ égale à $|\bar{\mathcal{A}}'_{P_\beta}| = |\mathcal{A}_\beta| + 1$. Notons $m_\beta = |\mathcal{A}_\beta|$.
Supposons que $\mu(\bar{H}'_1, p) = 1$, c'est à dire qu'il y a un seul point de multiplicité divisible par p sur $\bar{H}'_1$. Quitte à changer l'ordre des classes de droites parallèles, on peut supposer que ce point est P_1, correspondant à la classe $\mathcal{A}_1$. On a donc :

$$p \mid m_1 + 1, \;\; et \;\; p \nmid m_\beta + 1, \; \forall \beta \geq 2. \tag{4.5}$$

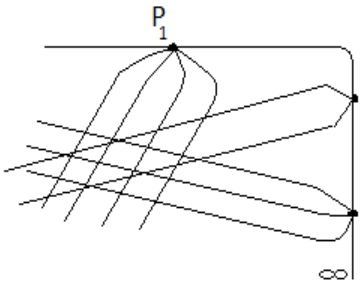


FIGURE 4.11 – Un exemple pour $p = 5$

L'ordre d'une valeur propre λ^k divisant d, on a que $p \mid d$, d'où $d-1 = -1 \in \mathbb{F}_p^\times$. On peut donc appliquer le Lemme 4.4.11 et on en déduit :

$$H^1(A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}), \omega_1\wedge) \simeq \ker\{A^1_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A})_0 \xrightarrow{\omega_1\wedge} A^2_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A})\}.$$

Montrons que $\ker\{A^1_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A})_0 \xrightarrow{\omega_1\wedge} A^2_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A})\} = 0$.
Soit $\eta = \sum_{i=2}^d c_i a_i \in A^1_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A})_0$, tel que $\omega_1 \wedge \eta = 0$. On va montrer que $\eta = 0$.
Considérons tout d'abord la dégénérescence totale $\Delta_{tot} : A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}) \to A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{C}_l)$, tel que $\Delta_{tot}(a_i) = \widetilde{a}_\beta$, si $H_i \in \mathcal{A}_\beta$, $1 \leq \beta \leq l$.
On a $\Delta_{tot}(\eta) = \sum_{\beta=1}^{l}(\sum_{H_i\in\mathcal{A}_\beta} c_i)\,\widetilde{a}_\beta$. Avec le Lemme 4.4.16 on a que $\eta \in ker(\Delta_{tot})$, et donc que :

$$\sum_{H_i\in\mathcal{A}_\beta} c_i = 0, \ \ \forall\, 1 \leq \beta \leq l. \tag{4.6}$$

Considérons ensuite la dégénérescence directionnelle par rapport à une classe $\mathcal{A}_\beta$. Notons $\mathcal{A}_\beta = \{H_{i_1}, \ldots, H_{i_{m_\beta}}\}$. On a :

$$\Delta_{dir} : A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}) \to A^*_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{P}_{m_\beta}),$$

tel que

$$\begin{cases} \Delta_{dir}(a_{i_j}) = \widetilde{a}_j, \ \forall\ 1 \leq j \leq m_\beta \\ \Delta_{dir}(a_k) = \widetilde{a}_{m_\beta+1}, \ H_k \notin \mathcal{A}_\beta \end{cases}.$$

On calcule donc $\Delta_{dir}(\omega_1) = \widetilde{a}_1 + \cdots + \widetilde{a}_{m_\beta} + (d-1-m_\beta)\widetilde{a}_{m_\beta+1}$,
et $\Delta_{dir}(\eta) = c_{i_1}\widetilde{a}_1 + \cdots + c_{i_{m_\beta}}\widetilde{a}_{m_\beta} + \sum_{\gamma\neq\beta}(\sum_{H_k\in\mathcal{A}_\gamma} c_k)\widetilde{a}_{m_\beta+1} = c_{i_1}\widetilde{a}_1 + \cdots + c_{i_{m_\beta}}\widetilde{a}_{m_\beta}$

d'après (4.6). Si $\beta \geq 2$, alors avec (4.5) on a $p \nmid d-1-m_\beta$.
Pour les dégénérescences directionnelles relatives aux classes $\mathcal{A}_\beta \neq \mathcal{A}_1$, on a donc que $\Delta_{dir}(\omega_1) = \widetilde{a}_1 + \cdots + \widetilde{a}_{m_\beta} + (d-1-m_\beta)\widetilde{a}_{m_\beta+1}$ est tel que $d-1-m_\beta \in \mathbb{F}_p^\times$, et $\Delta_{dir}(\eta) \in \mathbb{F}_p \cdot \widetilde{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_p \cdot \widetilde{a}_{m_\beta}$. On a aussi : $\Delta_{dir}(\omega_1) \wedge \Delta_{dir}(\eta) = \Delta_{dir}(\omega_1 \wedge \eta)$ $= 0$. Ainsi $\Delta_{dir}(\eta) \in \ker\{\mathbb{F}_p \cdot \widetilde{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_p \cdot \widetilde{a}_{m_\beta} \overset{\Delta_{dir}(\omega_1)\wedge}{\longrightarrow} A^2_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{P}_{m_\beta})\}$.
Avec le Lemme 4.4.14 et la Proposition 4.4.13 on a $\Delta_{dir}(\eta) = 0, \ \forall \beta \geq 2$, d'où $c_i = 0, \ \forall H_i \in \mathcal{A}_\beta, \ \beta \geq 2$.

Il reste maintenant à montrer la nullité des coefficients c_i correspondants à la classe $\mathcal{A}_1$. Par commodité, on posera $m_1 = l$, et on supposera : $\mathcal{A}_1 = \{H_2, \ldots, H_{l+1}\}$. Comme $\bar{\mathcal{A}}'$ possède au moins deux points d'intersection, on a que $l < d-1$. Ecrivons donc $\eta = c_2 a_2 + \cdots + c_{l+1} a_{l+1} \in A^1_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A})_0$, et $\omega_1 = a_2 + \cdots + a_{l+1} + a_{l+2} + \cdots + a_d$. Un calcul rapide donne :

$$\omega_1 \wedge \eta = -\sum_{j=l+2}^{d} \sum_{i=2}^{l+1} c_i a_i a_j. \tag{4.7}$$

Montrons que les éléments $\{a_i a_j, \ 2 \leq i \leq l+1, \ l+2 \leq j \leq d\}$ sont linéairement indépendants dans $A^2_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A})$.
Avec la décomposition de Brieskorn du Théorème 2.4.16 on a :

$$A^2_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{X \in L_2(\mathcal{A})} A^2_X,$$

où $L_2(\mathcal{A})$ est l'ensemble des points d'intersection de l'arrangement $\mathcal{A}$.
Or les $X_{ij} = H_i \cap H_j, \ 2 \leq i \leq l+1, \ l+2 \leq j \leq d$, sont de tels points d'intersection. Soit donc un tel X_{ij} :

- Si la multiplicité de X_{ij} est 2, alors $\mathcal{A}_{X_{ij}} = \{H_i, H_j\}$ et $A^2_{X_{ij}} =< a_i a_j >$.
- Si la multiplicité de X_{ij} est égale à $m \geq 3$, alors $X_{ij} = H_i \cap H_j \cap H_{j_1} \cap \cdots \cap H_{j_{m-2}}$, et $\mathcal{A}_{X_{ij}} = \{H_i, H_j, H_{j_1}, \ldots, H_{j_{m-2}}\}$ est central. D'après l'Exemple 2.4.10 on a : $A^2_{X_{ij}} =< a_i a_k, \ k \in \{j, j_1, \ldots, j_{m-2}\} >$.

Ainsi $a_i a_j$ est un élément d'une base de $A^2_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A})$. L'indépendance de ces éléments et la formule (4.7) donnent : $\omega_1 \wedge \eta = 0 \Rightarrow \eta = 0$, ce qui achève la démonstration.

□

Chapitre 5

Structure de Hodge de la fibre de Milnor des arrangements d'hyperplans

5.1 Structure de Hodge de la fibre de Milnor

Commençons par présenter quelques notions de base de la théorie de Hodge. Pour plus de précision, on pourra se référer aux ouvrages de P. Deligne [12] et C. Voisin [43].

Définition 5.1.1 *Une* <u>*structure de Hodge pure de poids q*</u> *est une paire* (H, F), *où* H *est un* $\mathbb{Q}-$*espace vectoriel de dimension finie,* F *est une filtration décroissante (dite filtration de Hodge) sur l'espace vectoriel complexe* $H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ *(muni de la conjugaison* $v \otimes_{\mathbb{Q}} \alpha \mapsto v \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\alpha}$ *), tel que :*

(i) F *est une filtration finie, c'est à dire qu'il existe* $s, t \in \mathbb{Z}$, $s < t$, *tels que* $F^s H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{C}}$ *et* $F^t H_{\mathbb{C}} = 0$,

(ii) $H_{\mathbb{C}} = F^a H_{\mathbb{C}} \oplus \overline{F^{q-a+1} H_{\mathbb{C}}}, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$.

Si on pose $H^{a,b} = F^a H_{\mathbb{C}} \cap \overline{(F^b H_{\mathbb{C}})}$ pour tout (a, b) tel que $a + b = q$, alors on a les relations suivantes :

(α) $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{a+b=q} H^{a,b}$,

(β) $\overline{H^{a,b}} = H^{b,a}$.

Réciproquement, si on a une décomposition en somme directe de $H_{\mathbb{C}}$ vérifiant (α) et (β), alors H admet une structure de Hodge pure de poids q, où la filtration de Hodge F est donnée par :

$$F^a H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{s \geq a} H^{s,q-s}.$$

Définition 5.1.2 *On appelle* <u>*nombres de Hodge*</u> *les dimensions*

$$h^{a,b}(H) = dim_{\mathbb{C}} H^{a,b}.$$

Définition 5.1.3 *Soit (H, F) une structure de Hodge pure de poids q.*
Alors on dit qu'une application linéaire $f : H \to H$ est un morphisme de structures de Hodge, si le morphisme induit $f : H_{\mathbb{C}} \to H_{\mathbb{C}}$ vérifie :

$$f(H^{a,b}) \subset H^{a,b}, \text{ pour tout couple } (a, b) \text{ tel que } a + b = q.$$

Remarque 5.1.4 *Supposons qu'un tel morphisme de structures de Hodge a une valeur propre λ, et notons $H^{a,b}_{\lambda} = ker(\, f - \lambda Id|_{H^{a,b}}\,)$. Alors on a que :*

$$\overline{H^{a,b}_{\lambda}} = H^{b,a}_{\bar{\lambda}} \quad et \quad h^{a,b}(H_{\lambda}) = h^{b,a}(H_{\bar{\lambda}}),$$

où $h^{a,b}(H_{\lambda}) = dim H^{a,b}_{\lambda}$.

Exemple 5.1.5 *Soit X une variété algébrique projective lisse. Alors les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathbb{Q})$ ont une structure de Hodge pure de poids q, pour tout $q \geq 0$.*

La structure de Hodge mixte a par la suite été introduite par P. Deligne afin de généraliser la structure de Hodge pure aux variétés algébriques complexes quasi-projectives.

Définition 5.1.6 *Une* <u>*structure de Hodge mixte*</u> *(MHS) est un triplet (H, W, F) tel que :*

(i) H est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel de dimension finie,

(ii) W est une filtration croissante finie de H dite "filtration par le poids",

(iii) F est une filtration décroissante finie de $H_{\mathbb{C}}$ appelée filtration de Hodge, telle que $(Gr^W_q H, F)$ est une structure de Hodge pure de poids q pour tout q,

où

$$Gr^W_q H = W_q H / W_{q-1} H,$$

et la filtration induite est donnée par :

$$F^a(Gr^W_q H)_{\mathbb{C}} = (F^a H_{\mathbb{C}} \cap W_q H_{\mathbb{C}} + W_{q-1} H_{\mathbb{C}}) / W_{q-1} H_{\mathbb{C}}.$$

Pour une structure de Hodge mixte (H, W, F) on note

$$H^{a,b} = Gr_F^a \, Gr_{a+b}^W \, H_{\mathbb{C}},$$

et on définit les <u>*nombres de Hodge mixtes*</u> *comme les dimensions*

$$h^{a,b}(H) = dim_{\mathbb{C}} H^{a,b}.$$

Définition 5.1.7 *Soit (H, W, F) une structure de Hodge mixte.*
Soient $f : H \to H$ une application linéaire, et $f : H_{\mathbb{C}} \to H_{\mathbb{C}}$ l'application linéaire induite. Alors on dit que $f : H \to H$ est un morphisme de structures de Hodge mixtes si :

$$f(W_q H) \subset W_q H, \ \text{ et } \ f(F^a H_{\mathbb{C}}) \subset F^a H_{\mathbb{C}}, \ \forall \ (q, a).$$

Si c'est le cas, alors il existe un morphisme induit $f : H^{a,b} \to H^{a,b}$ tel que :

$$f(H^{a,b}) \subset H^{a,b}, \ \forall \ (a, b).$$

Remarque 5.1.8 *Supposons qu'un tel morphisme de structures de Hodge mixtes a une valeur propre λ, et notons $H_\lambda^{a,b} = ker(\, f - \lambda Id|_{H^{a,b}}\,)$. Alors on a :*

$$\overline{H_\lambda^{a,b}} = H_{\bar{\lambda}}^{b,a} \ \text{ et } h^{a,b}(H_\lambda) = h^{b,a}(H_{\bar{\lambda}}),$$

où $h^{a,b}(H_\lambda) = dim H_\lambda^{a,b}$.

Exemple 5.1.9

1. *Soit X une variété algébrique quasi-projective sur $\mathbb{C}$ de dimension $n+1$. Alors les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathbb{Q})$ sont des structures de Hodge mixtes pour tout $q \geq 0$, tels que $h^{a,b}(H^q(X, \mathbb{Q})) = 0$, si $b > min(q, n+1)$.*
   Si X est lisse, alors $h^{a,b}(H^q(X, \mathbb{Q})) = 0$, si $a + b < q$.
   On utilisera ces propriétés dans la Remarque 5.2.3.
2. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans de fibre de Milnor $F_{\mathcal{A}}$.*
   Alors $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Q})$ est une structure de Hodge mixte pour tout $q \geq 0$, et la monodromie $h : F_{\mathcal{A}} \to F_{\mathcal{A}}$ étant une application régulière, induit des morphismes de structures de Hodge mixtes :

   $$h^q : H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Q}) \to H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Q}).$$

   Si on considère l'application induite

   $$h^q : H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) \to H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}),$$

   on peut définir $Gr_F^a H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ et il existe une application linéaire induite :

   $$h^q : Gr_F^a H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) \to Gr_F^a H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}).$$

   On note $Gr_F^a H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_\lambda$ le sous-espace propre associé la valeur propre λ de cette application linéaire.

A partir de maintenant on considère $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $d > n+1$, et $n \geq 1$, un arrangement d'hyperplans central défini par un polynôme $f_{\mathcal{A}}$ homogène de degré d. Comme habituellement, on notera $\mathcal{A}' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ l'arrangement projectif associé.
Tout d'abord, on sait que $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_1$ et $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{-1}$ sont des structures de Hodge mixtes dans $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Q})$, $\forall q \geq 0$. De plus, pour $\beta \in \mu_d$, $\beta \neq 1, -1$, il en est de même pour les sous-espaces suivants :

$$H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\beta,\bar{\beta}} := H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\beta} \oplus H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\bar{\beta}} = ker((h^q)^2 - 2Re(\beta)h^q + Id)$$

(qui sont en réalité définis sur $\mathbb{R}$).
Par convention, pour $\beta = -1$, on pose $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\beta,\bar{\beta}} = H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{-1}$.

Dans l'article de A. Dimca et G. Lehrer [17] on trouve le théorème suivant :

Théorème 5.1.10 ([17], Théorème 1.3) *Soit $F_{\mathcal{A}}$ la fibre de Milnor d'un arrangement d'hyperplans central $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Alors*

$$Gr^W_{2q} H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Q})_{\neq 1} = 0, \ \ \forall\ 0 < q \leq n.$$

On y trouve également la remarque suivante :

Remarque 5.1.11 ([17], Remarque 1.4) *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement d'hyperplans central. Alors $H^q(M(\mathcal{A}'), \mathbb{Q}) = H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Q})_1$ est une structure de Hodge pure de type (q,q), $\forall q \geq 0$ (voir [24]).*

Remarque 5.1.12 *Avec le Théorème 5.1.10 et la structure de Hodge mixte $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Q})$ on trouve :*

$$h^{a,b}(H^q(F_{\mathcal{A}})_{\neq 1}) = 0, \textit{ pour tout } (a,b) \textit{ tel que } a + b = 2q.$$

La Remarque 5.1.11 donne ensuite :

$$h^{q,q}(H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})) = h^{q,q}(H^q(F_{\mathcal{A}})_1) = dim\, H^q(F_{\mathcal{A}})_1 = b_q(M(\mathcal{A}')). \qquad (5.1)$$

5.2 Le spectre d'un arrangement

Nous allons à présent définir le spectre, qu'on notera $Sp(f_{\mathcal{A}})$, d'un arrangement central $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ défini par un polynôme homogène $f_{\mathcal{A}}$, et qui va nous être très utile par la suite.

Définition 5.2.1 *Le* <u>*spectre*</u> *d'un arrangement central* $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *est le polynôme*

$$Sp(f_{\mathcal{A}}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} n_{f_{\mathcal{A}},\alpha}\, t^{\alpha},$$

dont les coefficients sont donnés par :

$$n_{f_{\mathcal{A}},\alpha} = \sum_{q} (-1)^{q-n} dim\, Gr_F^p \tilde{H}^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda}, \ avec \ \ p = \lfloor n+1-\alpha \rfloor, \ \lambda = exp(-2i\pi\alpha),$$

où $\tilde{H}^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda} = H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda}, \ \forall q \neq 0, \ \tilde{H}^0(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda} = 0$ *est la cohomologie réduite du sous-espace propre* $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda}$, *et* $\lfloor \beta \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq \beta\}$.

Remarque 5.2.2 *Il est important de noter que dans la définition du spectre les sous-espaces propres* $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda}$ *sont calculés par rapport à l'opérateur de monodromie* $T = (h^*)^{-1} = \bar{h^*}$, *et donc* $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda}^T = H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\bar{\lambda}}^{h^*}$.

Remarque 5.2.3 *Pour calculer les dimensions* $dim\, Gr_F^a \tilde{H}^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda}, \ q \neq 0,$ *on utilise la structure de Hodge mixte* $H^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Q})$ *et le fait que*

$$dim\, F^a H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda} = \sum_{\substack{a \leq a' \leq min(q,n) \\ q-a' \leq s \leq min(q,n)}} h^{a',s}(H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda}).$$

On obtient finalement la formule suivante :

$$\begin{aligned} dim\, Gr_F^a \tilde{H}^q(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda} = {} & h^{a,q-a}(H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda}) + h^{a,q-a+1}(H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda}) + \cdots \\ & + h^{a,min(q,n)}(H^q(F_{\mathcal{A}})_{\lambda}), si \ a \leq min(q,n), \\ & 0 \ sinon. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Remarque 5.2.4 *D'après [6, Proposition 5.2] on a :*

$$n_{f_{\mathcal{A}},\alpha} = 0, \ si \ \alpha \notin]0, n+1[.$$

Nous allons voir maintenant que certains coefficients de $Sp(f_{\mathcal{A}})$ vérifient une symétrie particulière, comme il l'est expliqué dans [16].
Pour un point $x \in \cup_{H \in \mathcal{A}} H, \ x \neq 0$, soit $L_x = \cap_{\substack{H \in \mathcal{A}, \\ x \in H}} H$. Notons $\mathcal{A}_x$ l'arrangement central induit par $\mathcal{A}$ sur un sous-espace linéaire T_x passant par x, et transversal à L_x. Choisissons $dim T_x = codim L_x$ et identifions x avec l'origine de T_x. Notons F_x la fibre de Milnor de l'arrangement $\mathcal{A}_x$, et h_x^* l'opérateur de monodromie

$$h_x^* : \ H^*(F_x, \mathbb{C}) \ \to \ H^*(F_x, \mathbb{C}).$$

Proposition 5.2.5 ([16], Proposition 4.1) *Soit $\beta \in \mu_d$, $\beta \neq 1$, une racine d^e de l'unité qui n'est une valeur propre pour aucune monodromie h_x^*, avec $x \in \cup_{H\in\mathcal{A}} H$, $x \neq 0$. Alors l'espace propre correspondant $H^n(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\beta,\bar{\beta}}$ a une structure de Hodge pure de poids n. En particulier, si $\beta = exp(-2i\pi\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors les coefficients apparaissant dans $Sp(f_{\mathcal{A}})$ vérifient la symétrie suivante :*

$$n_{f_{\mathcal{A}},\alpha} = n_{f_{\mathcal{A}},n+1-\alpha}.$$

La définition du spectre d'un arrangement que nous venons de voir utilise la théorie de Hodge. Dans l'article [7] de N. Budur et M. Saito on trouve le théorème suivant.

Théorème 5.2.6 ([7], Théorème 1) *Le spectre $Sp(f_{\mathcal{A}})$ d'un arrangement central et essentiel $\mathcal{A}$ est déterminé par le treillis d'intersection $L(\mathcal{A})$.*

On y trouve également le théorème suivant, qui donne une formule pour calculer les coefficients $n_{f_{\mathcal{A}},\alpha}$ de manière combinatoire pour un arrangement central et essentiel $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$. Notons $\nu_m^{(2)}$ le nombre de points de $L(\mathcal{A}')$ de multiplicité m, $m \geq 3$.

Théorème 5.2.7 ([7], Théorème 3) *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$ un arrangement d'hyperplans central et essentiel. Alors on a que $n_{f_{\mathcal{A}},\alpha} = 0$, si $\alpha d \notin \mathbb{Z}$, et pour $\alpha = \frac{j}{d} \in]0,1]$, avec $j \in [1,d] \cap \mathbb{Z}$, on a :*

$$n_{f_{\mathcal{A}},\alpha} = \binom{j-1}{2} - \sum_m \nu_m^{(2)} \binom{\lceil jm/d \rceil - 1}{2},$$

$$n_{f_{\mathcal{A}},\alpha+1} = (j-1)(d-j-1) - \sum_m \nu_m^{(2)} (\lceil jm/d \rceil - 1)(m - \lceil jm/d \rceil),$$

$$n_{f_{\mathcal{A}},\alpha+2} = \binom{d-j-1}{2} - \sum_m \nu_m^{(2)} \binom{m - \lceil jm/d \rceil}{2} - \delta_{j,d},$$

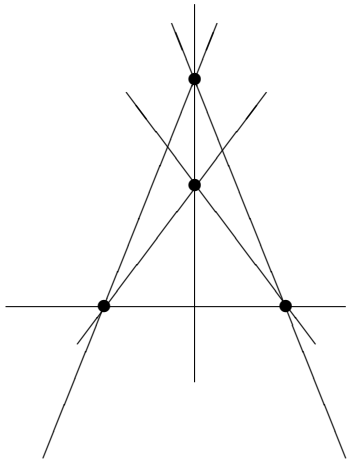
où $\lceil \beta \rceil := min\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \geq \beta\}$, et $\delta_{j,d} = 1$, si $j = d$, 0 sinon.

Donnons à présent quelques exemples de calculs de spectre.

Exemple 5.2.8 *Soit $\bar{\mathcal{A}}_3 \subset \mathbb{C}^3$ l'arrangement défini par*

$$xyz(x-y)(x-z)(y-z).$$

C'est l'arrangement essentiel associé à l'arrangement des tresses $\mathcal{A}_3 \subset \mathbb{C}^4$ de la Proposition 4.1.1. L'arrangement projectif $\bar{\mathcal{A}}_3'$ est représenté ci-dessous. Par abus de notations, on notera donc $\mathcal{A}_3$ cet arrangement, $f_{\mathcal{A}_3}$ le polynôme associé, et F_3 sa fibre de Milnor.



Ici $d = 6$, *et on a* 4 *points de multiplicité égale à* 3. *Le seul coefficient à prendre en compte est donc* $\nu_3^{(2)} = 4$. *Les singularités sont soit des points doubles, soit des points triples. Comme* $F_3 \subset \mathbb{C}^3$ *est une surface algébrique lisse, les* $H^q(F_3, \mathbb{Q})$, *avec* $q \in \{0, 1, 2\}$, *sont des structures de Hodge mixtes, de filtration de Hodge*

$$H^q(F_3, \mathbb{C}) = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^q \supset 0,$$

et de filtration par le poids

$$0 \subset W_q \subset \cdots \subset W_{2q} = H^q(F_3, \mathbb{Q}).$$

Calculons le spectre de l'arrangement $\mathcal{A}_3$ *avec le Théorème 5.2.7.*

1. *Pour la valeur propre* $\lambda = 1$, $\alpha = 1, 2$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}_3},1} = 6,\ n_{f_{\mathcal{A}_3},2} = -5.$$
2. *Pour la valeur propre d'ordre 2,* $\lambda = -1$, $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{1}{2}} = 1,\ \ n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{3}{2}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{5}{2}} = 1.$$
3. *Pour la valeur propre d'ordre 3,* $\lambda_3 = exp(-2i\pi/3)$, $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{1}{3}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{4}{3}} = 3,\ \ n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{7}{3}} = -1.$$
4. *Pour la valeur propre d'ordre 3,* $\bar{\lambda}_3 = exp(2i\pi/3)$, $\alpha = \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{2}{3}} = 3,\ \ n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{5}{3}} = -1,\ \ n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{8}{3}} = 0.$$
5. *Pour la valeur propre d'ordre 6,* $\lambda_6 = exp(-i\pi/3)$, $\alpha = \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{13}{6}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{1}{6}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{7}{6}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{13}{6}} = 2.$$

6. *Pour la valeur propre d'ordre 6,* $\bar{\lambda_6} = exp(i\pi/3)$, $\alpha = \frac{5}{6}, \frac{11}{6}, \frac{17}{6}$ *et on trouve :*

$$n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{5}{6}} = 2, \;\; n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{11}{6}} = 0, \;\; n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{17}{6}} = 0.$$

On obtient finalement le spectre suivant :

Corollaire 5.2.9

$$Sp(f_{\mathcal{A}_3}) = t^{5/2} - t^{7/3} + 2t^{13/6} - 5t^2 - t^{5/3} + 3t^{4/3} + 6t + 2t^{5/6} + 3t^{2/3} + t^{1/2}.$$

Utilisons maintenant dans chaque cas la Définition 5.2.1 ainsi que la formule (5.2) pour obtenir des informations sur les dimensions $h^{a,b}(H^q(F_{\mathcal{A}_3})_\lambda)$.

1. *Pour la valeur propre* $\lambda = 1$:
   D'après la Remarque 5.1.11 et l'égalité (5.1) on sait que $H^1(F_3)_1$ *et* $H^2(F_3)_1$ *sont de type* $(1,1)$ *et* $(2,2)$ *respectivement. Finalement on obtient :*
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},1} = 6 \Rightarrow h^{2,2}(H^2(F_3)_1) = 6.$
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},2} = -5 \Rightarrow h^{1,1}(H^1(F_3)_1) = 5.$
2. *Pour la valeur propre d'ordre 2,* $\lambda = -1$:
   On sait que $H^1(F_3)_{-1} = 0$ *en utilisant le Théorème de Kohno 3.2.8. En effet, si* p *est un point triple, alors* $T_p = (-1)^3 \neq 1$.
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{1}{2}} = 1$
     $\Rightarrow dim\, Gr_F^2 H^2(F_3)_{-1} - dim\, Gr_F^2 H^1(F_3)_{-1} = 1$
     $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_3)_{-1}) + h^{2,1}(H^2(F_3)_{-1}) + h^{2,2}(H^2(F_3)_{-1}) = 1$
     $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_3)_{-1}) + h^{2,1}(H^2(F_3)_{-1}) = 1$, *car* $h^{2,2}(H^2(F_3)_{-1}) = 0$ *d'après 5.1.12.*
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{3}{2}} = 0$
     $\Rightarrow dim\, Gr_F^1 H^2(F_3)_{-1} - dim\, Gr_F^1 H^1(F_3)_{-1} = 0$
     $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_3)_{-1}) + h^{1,2}(H^2(F_3)_{-1}) = 0$
     $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_3)_{-1}) = h^{1,2}(H^2(F_3)_{-1}) = 0$
     $\Rightarrow h^{2,1}(H^2(F_3)_{-1}) = 0$ *d'après la Remarque 5.1.8.*
     On en déduit que $h^{2,0}(H^2(F_3)_{-1}) = 1$.
   - $n_{f_3,\frac{5}{2}} = 1$
     $\Rightarrow dim\, Gr_F^0 H^2(F_3)_{-1} - dim\, Gr_F^0 H^1(F_3)_{-1} = 1$
     $\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_3)_{-1}) = 1.$
3. *Pour la valeur propre d'ordre 3,* $\lambda_3 = exp(-2i\pi/3)$:
   On sait, comme on l'a vu au chapitre 3, que $H^1(F_3)_{\lambda_3}$ *est de dimension 1.*
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{1}{3}} = 0$
     $\Rightarrow dim\, Gr_F^2 H^2(F_3)_{\lambda_3} = 0$
     $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) + h^{2,1}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) = 0$
     $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) = h^{2,1}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) = 0.$

- $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{4}{3}} = 3$
  $\Rightarrow dim\, Gr_F^1 H^2(F_3)_{\lambda_3} - dim\, Gr_F^1 H^1(F_3)_{\lambda_3} = 3$
  $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) + h^{1,2}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) - h^{1,0}(H^1(F_3)_{\lambda_3}) = 3.$

- $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{7}{3}} = -1$
  $\Rightarrow dim\, Gr_F^0 H^2(F_3)_{\lambda_3} - dim\, Gr_F^0 H^1(F_3)_{\lambda_3} = -1$
  $\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) - h^{0,1}(H^1(F_3)_{\lambda_3}) = -1.$
  Or on a que $h^{0,1}(H^1(F_3)_{\lambda_3}) \leq 1$, *on en déduit donc que*
  $$h^{0,1}(H^1(F_3)_{\lambda_3}) = 1, \text{ et } h^{0,2}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) = 0.$$
  Comme $dim\, H^1(F_3)_{\lambda_3} = 1$, *on a aussi que* $h^{1,0}(H^1(F_3)_{\lambda_3}) = 0.$

Finalement seules deux dimensions sont encore indéterminées, elles vérifient :
$$h^{1,1}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) + h^{1,2}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) = 3. \tag{5.3}$$
Pour conclure nous allons utiliser la valeur propre conjuguée $\bar{\lambda}_3$.

4. *Pour la valeur propre d'ordre 3,* $\bar{\lambda}_3 = exp(2i\pi/3)$, *de manière analogue on déduit des coefficients :*
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{2}{3}} = 3$
     $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) + h^{2,1}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) = 3.$
     Or $h^{2,0}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) = h^{0,2}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) = 0$, *et on en déduit que :*
     $$h^{2,1}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) = 3.$$
     En utilisant (5.3) on trouve finalement :
     $$h^{1,1}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) = 0.$$
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{5}{3}} = -1$
     $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) + h^{1,2}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) - h^{1,0}(H^1(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) = -1.$
     Or, par conjugaison on a que $h^{1,1}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) = 0$ *et* $h^{1,0}(H^1(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) = 1.$
     On en déduit que $h^{1,2}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) = 0.$
     A ce stade on a bien déterminé toutes les dimensions.
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{8}{3}} = 0.$

   Remarque 5.2.10 *Avec [13, Théorème 1] on obtient directement :*
   $$h^{0,1}(H^1(F_3)_{\lambda_3}) = h^{1,0}(H^1(F_3)_{\bar{\lambda}_3}) = 1.$$

5. *Pour la valeur propre d'ordre 6,* $\lambda_6 = exp(-i\pi/3)$:
   On sait que $H^1(F_3)_{\lambda_6} = 0$ *d'après le Corollaire* 3.2.9.
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{1}{6}} = 0$
     $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) + h^{2,1}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) = 0$
     $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) = h^{2,1}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) = 0.$
   - $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{7}{6}} = 0$
     $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) + h^{1,2}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) = 0$
     $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) = h^{1,2}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) = 0.$

- $n_{f_{\mathcal{A}_3},\frac{13}{6}} = 2$
  $\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) = 2.$
  On obtenait même directement la nullité de $h^{1,2}(H^2(F_3)_{\lambda_6})$, $h^{2,1}(H^2(F_3)_{\lambda_6})$, *et de* $h^{2,2}(H^2(F_3)_{\lambda_6})$ *avec la Proposition 5.2.5 qui assure que* $H^2(F_3,\mathbb{C})_{\lambda_6,\bar{\lambda_6}}$ *est pure de poids 2.*

6. *Pour la valeur propre d'ordre 6,* $\bar{\lambda_6} = exp(i\pi/3)$:
   On déduit directement du cas précédent.

Corollaire 5.2.11 *Regroupons les dimensions non nulles trouvées dans le tableau suivant (par rapport à la monodromie* $\bar{h}^*$*) :*

	$H^1(F_3,\mathbb{C})$	$H^2(F_3,\mathbb{C})$
$\lambda = 1$	$h^{1,1}(H^1(F_3)_1) = 5$	$h^{2,2}(H^2(F_3)_1) = 6$
$\lambda = -1$		$h^{2,0}(H^2(F_3)_{-1}) = h^{0,2}(H^2(F_3)_{-1}) = 1$
λ_3	$h^{0,1}(H^1(F_3)_{\lambda_3}) = 1$	$h^{1,2}(H^2(F_3)_{\lambda_3}) = 3$
$\bar{\lambda_3}$	$h^{1,0}(H^1(F_3)_{\bar{\lambda_3}}) = 1$	$h^{2,1}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda_3}}) = 3$
λ_6		$h^{0,2}(H^2(F_3)_{\lambda_6}) = 2$
$\bar{\lambda_6}$		$h^{2,0}(H^2(F_3)_{\bar{\lambda_6}}) = 2$

Traitons maintenant un second exemple.

Exemple 5.2.12 *Soit* $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$ *l'arrangement de Ceva défini par*

$$f_{\mathcal{A}} = (x^3 - y^3)(x^3 - z^3)(y^3 - z^3) = 0.$$

Ici $d = 9$, *et on a* 12 *points de multiplicité égale à* 3. *Le seul coefficient à prendre en compte est donc* $\nu_3^{(2)} = 12$. *Calculons comme dans l'exemple précédent le spectre de l'arrangement* $\mathcal{A}$ *en utilisant le Théorème 5.2.7 :*

1. *Pour la valeur propre* $\lambda = 1$, $\alpha = 1, 2$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}},1} = 16,\ n_{f_{\mathcal{A}},2} = -8.$$
2. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\lambda_1 = exp(-2i\pi/9)$, $\alpha = \frac{1}{9}, \frac{10}{9}, \frac{19}{9}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}},\frac{1}{9}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{10}{9}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{19}{9}} = 9.$$
3. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\bar{\lambda_1} = exp(2i\pi/9)$, $\alpha = \frac{8}{9}, \frac{17}{9}, \frac{26}{9}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}},\frac{8}{9}} = 9,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{17}{9}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{26}{9}} = 0.$$
4. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\lambda_2 = exp(-4i\pi/9)$, $\alpha = \frac{2}{9}, \frac{11}{9}, \frac{20}{9}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}},\frac{2}{9}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{11}{9}} = 6,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{20}{9}} = 3.$$
5. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\bar{\lambda_2} = exp(4i\pi/9)$, $\alpha = \frac{7}{9}, \frac{16}{9}, \frac{25}{9}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}},\frac{7}{9}} = 3,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{16}{9}} = 6,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{25}{9}} = 0.$$
6. *Pour la valeur propre d'ordre 3,* $\lambda_3 = exp(-6i\pi/9)$, $\alpha = \frac{3}{9}, \frac{12}{9}, \frac{21}{9}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}},\frac{3}{9}} = 1,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{12}{9}} = 10,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{21}{9}} = -2.$$
7. *Pour la valeur propre d'ordre 3,* $\bar{\lambda_3} = exp(6i\pi/9)$, $\alpha = \frac{6}{9}, \frac{15}{9}, \frac{24}{9}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}},\frac{6}{9}} = 10,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{15}{9}} = -2,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{24}{9}} = 1.$$
8. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\lambda_4 = exp(-8i\pi/9)$, $\alpha = \frac{4}{9}, \frac{13}{9}, \frac{22}{9}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}},\frac{4}{9}} = 3,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{13}{9}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{22}{9}} = 6.$$
9. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\bar{\lambda_4} = exp(8i\pi/9)$, $\alpha = \frac{5}{9}, \frac{14}{9}, \frac{23}{9}$ *et on trouve :*
$$n_{f_{\mathcal{A}},\frac{5}{9}} = 6,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{14}{9}} = 0,\ \ n_{f_{\mathcal{A}},\frac{23}{9}} = 3.$$

Corollaire 5.2.13 *Le spectre* $Sp(f_{\mathcal{A}})$ *est donné par :*

$$Sp(f_{\mathcal{A}}) = t^{1/3} + 3t^{4/9} + 6t^{5/9} + 10t^{2/3} + 3t^{7/9} + 9t^{8/9} + 16t + 6t^{11/9} + 10t^{4/3} - 2t^{5/3} + 6t^{16/9} - 8t^2 + 9t^{19/9} + 3t^{20/9} - 2t^{7/3} + 6t^{22/9} + 3t^{23/9} + t^{8/3} - t^3.$$

Utilisons dans chaque cas la Définition 5.2.1 ainsi que la formule (5.2) pour obtenir des informations sur les dimensions $h^{a,b}(H^q(F_{\mathcal{A}})_\lambda)$.

1. *Pour la valeur propre* $\lambda = 1$:
D'après la Remarque 5.1.11 et l'égalité (5.1) on sait que $H^1(F_{\mathcal{A}})_1$ *et* $H^2(F_{\mathcal{A}})_1$ *sont de type* $(1,1)$ *et* $(2,2)$ *respectivement. Finalement on obtient :*

- $n_{f_{\mathcal{A}},1} = 16 \Rightarrow h^{2,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_1) = 16.$
- $n_{f_{\mathcal{A}},2} = -8 \Rightarrow h^{1,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_1) = 8.$

2. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\lambda_1 = exp(-2i\pi/9)$ *: les singularités étant des points triples on a d'après la Proposition 5.2.5 que*

$$h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_1}) = h^{2,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_1}) = 0.$$

- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{1}{9}} = 0$
  $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_1}) = 0.$

- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{10}{9}} = 0$
  $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_1}) - h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_1}) = 0.$
- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{19}{9}} = 9$
  $\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_1}) - h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_1}) = 9.$

3. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\bar{\lambda_1} = exp(2i\pi/9)$ *:*
- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{8}{9}} = 9$
  $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_1}}) = 9.$

- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{17}{9}} = 0$
  $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_1}}) - h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_1}}) = 0.$
- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{19}{9}} = 0$
  $\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_1}}) - h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_1}}) = 0$
  $\Rightarrow h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_1}}) = 0.$

Par conjugaison, on obtient que les seules dimensions non nulles sont

$$h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_1}) = h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_1}}) = 9.$$

4. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\lambda_2 = exp(-4i\pi/9)$ *:*
- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{2}{9}} = 0$
  $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_2}) = 0.$

- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{11}{9}} = 6$
  $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_2}) - h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_2}) = 6.$
- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{20}{9}} = 3$
  $\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_2}) - h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_2}) = 3.$

5. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\bar{\lambda_2} = exp(4i\pi/9)$ *:*
- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{7}{9}} = 3$
  $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_2}}) = 3.$

- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{16}{9}} = 6$
  $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_2}}) - h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_2}}) = 6.$

– $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{25}{9}} = 0$
$\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_2}}) - h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_2}}) = 0.$

Par conjugaison, on obtient que les seules dimensions non nulles sont
$$h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_2}) = 6,\ h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_2}}) = 3.$$

6. *Pour la valeur propre d'ordre 3,* $\lambda_3 = exp(-6i\pi/9)$:
– $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{3}{9}} = 1$
$$\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) + h^{2,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = 1. \tag{5.4}$$

– $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{12}{9}} = 10$
$\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) + h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3} - h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = 10.$
– $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{21}{9}} = -2$
$\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) - h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = -2.$

7. *Pour la valeur propre d'ordre 3,* $\bar{\lambda_3} = exp(6i\pi/9)$:
– $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{6}{9}} = 10$
$\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) + h^{2,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = 10.$

– $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{15}{9}} = -2$
$\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) + h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}} - h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = -2.$
– $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{24}{9}} = 1$
$$\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) - h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = 1. \tag{5.5}$$
Avec (5.5) on a que $h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) \geq 1.$
On en déduit ensuite avec (5.4) que
$$h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = 1,$$
$$h^{2,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = 0,\ \textit{et}$$
$$h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = 0.$$
D'après [13, Théorème 1], l'arrangement de Ceva vérifie :
$$h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = 2.$$
On trouve finalement :
$$h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = 0,$$
$$h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = 0,\ \textit{et enfin}$$
$$h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = h^{2,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = 10.$$

8. *Pour la valeur propre d'ordre 9,* $\lambda_4 = exp(-8i\pi/9)$:
– $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{4}{9}} = 3$
$\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_4}) = 3.$

- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{13}{9}} = 0$
  $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_4}) - h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_4}) = 0.$
- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{22}{9}} = 6$
  $\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_4}) - h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_4}) = 6.$

9. Pour la valeur propre d'ordre 9, $\bar{\lambda}_4 = exp(8i\pi/9)$:

- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{5}{9}} = 6$
  $\Rightarrow h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_4}) = 6.$

- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{14}{9}} = 0$
  $\Rightarrow h^{1,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_4}) - h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_4}) = 0.$
- $n_{f_{\mathcal{A}},\frac{23}{9}} = 3$
  $\Rightarrow h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_4}) - h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_4}) = 3.$

Par conjugaison, on obtient que les seules dimensions non nulles sont

$$h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_4}) = 3,\ h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_4}) = 3\,,$$
$$h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_4}) = 6,\ h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_4}) = 6.$$

Corollaire 5.2.14 *Regroupons les dimensions non nulles trouvées dans le tableau suivant (par rapport à la monodromie* $\bar{h}^*$*) :*

	$H^1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$	$H^2(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$
$\lambda = 1$	$h^{1,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_1) = 8$	$h^{2,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_1) = 16$
λ_1		$h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_1}) = 9$
$\bar{\lambda}_1$		$h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_1}) = 9$
λ_2		$h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_2}) = 3$
$\bar{\lambda}_2$		$h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_2}) = 3$
λ_3	$h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = 2$	$h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = 1$, $h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = 10$
$\bar{\lambda}_3$	$h^{1,0}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_3}) = 2$	$h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_3}) = 1$, $h^{2,1}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_3}) = 10$
λ_4		$h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_4}) = 3$, $h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_4}) = 6$
$\bar{\lambda}_4$		$h^{0,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_4}) = 3$, $h^{2,0}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_4}) = 6$

Dans l'article de A. Dimca et G. Lehrer [17], une approche différente est utilisée afin de calculer les nombres de Hodge de l'arrangement de Ceva $\mathcal{A}$ du Corollaire 5.2.14. Les calculs de [17, Exemple 5.1] sont utilisés dans [17, Exemple 5.3].
Dans la suite de cette partie, nous proposerons tout d'abord une démonstration de [17, Exemple 5.1 (iii)] qui est donné sans aucune démonstration dans l'article, puis nous apporterons une correction à [17, Exemple 5.3], où la dimension $h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda}_3}) = 7$, $\bar{\lambda}_3 = exp(2i\pi/3)$ (par rapport à la monodromie habituelle h^*) est en contradiction avec la valeur obtenue ci-dessus, c'est à dire 10.

Soit $Y \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ une surface lisse définie par

$$x^d + y^d + z^d + t^d = 0,\ d > 1,$$

et notons $U = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \backslash Y$ son complémentaire.
Soit $\lambda = exp(2i\pi/d)$. On considère l'action de la monodromie sur $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ donnée par :

$$\lambda \cdot (x : y : z : t) = (x : y : z : \lambda^{-1} t),$$

pour tout $(x : y : z : t) \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.
Soit l'inclusion $i : Y \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, et définissons la cohomologie primitive de Y par :

$$H^*_0(Y) := coker\{i^* : H^*(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) \to H^*(Y, \mathbb{Q})\}.$$

On a que $H^2_0(Y)$ est une structure de Hodge pure de poids 2 :

$$H^2_0(Y) = H^{2,0}(H^2_0(Y)) \oplus H^{1,1}(H^2_0(Y)) \oplus H^{0,2}(H^2_0(Y)).$$

Remarque 5.2.15 *Comme* $H^2_0(Y) = \frac{H^2(Y,\mathbb{Q})}{Im\{i^* : H^2(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}},\mathbb{Q}) \to H^2(Y,\mathbb{Q})\}}$,
avec $H^2(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = \mathbb{C}^{1,1}$, *on a :*

$$h^{a,b}(H^2_0(Y)) = h^{a,b}(H^2(Y, \mathbb{Q})),\ si\ (a, b) \neq (1, 1),\ et$$
$$h^{1,1}(H^2_0(Y)) = h^{1,1}(H^2(Y, \mathbb{Q})) - 1.$$

Nous allons maintenant utiliser l'isomorphisme de Résidu de Poincaré, de type Hodge $(-1, -1)$, afin de calculer les dimensions $h^{2,0}(H^2_0(Y)), h^{1,1}(H^2_0(Y))$, et $h^{0,2}(H^2_0(Y))$, à partir des dimensions $h^{3,1}(H^3(U)), h^{2,2}(H^3(U))$, et $h^{1,3}(H^3(U))$:

$$H^3(U) \xrightarrow[(-1,-1)]{R} H^2_0(Y).$$

Notons f le polynôme homogène de degré d : $f(x, y, z, t) = x^d + y^d + z^d + t^d$, et $M(f) = \frac{\mathbb{C}[x,y,z,t]}{(x^{d-1},y^{d-1},z^{d-1})}$ l'algèbre de Milnor.

Si on considère la filtration de Hodge F de $H^3(U)$:

$$H^3(U) = F^1H^3(U) \supset F^2H^3(U) \supset F^3H^3(U) \supset F^4H^3(U) = 0,$$

on a l'identification suivante, comme il est expliqué dans le livre de A. Dimca, voir [15, p. 193-194] :

$$M(f)_{t\,d-4} = F^sH^3(U)/F^{s+1}H^3(U),\ \text{ pour } t = 3 - s + 1.$$

De plus, à un monôme

$$x^{v_1}y^{v_2}z^{v_3}t^{v_4} \in M(f)_{t\,d-4}$$

correspond la classe de cohomologie

$$\frac{x^{v_1}y^{v_2}z^{v_3}t^{v_4}\Omega}{f^s} \in H^3(U),$$

avec $\Omega = \Delta(dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt) = xdy\wedge dz\wedge dt - ydx\wedge dz\wedge dt + zdx\wedge dy\wedge dt - tdx\wedge dy\wedge dz$.
Comme $H^3(U) = H^{3,1}(H^3(U)) \oplus H^{2,2}(H^3(U)) \oplus H^{1,3}(H^3(U))$, on déduit de précédemment les égalités de dimensions suivantes :

$$h^{3,1}(H^3(U)) = dim\, M(f)_{d-4} \ (t=1, s=3),$$
$$h^{2,2}(H^3(U)) = dim\, M(f)_{2d-4} \ (t=2, s=2).$$

Nous allons donc calculer successivement les dimensions de $M(f)_{d-4}$ et de $M(f)_{2d-4}$.

1. <u>Calcul de $M(f)_{d-4}$:</u>

   Comme $d-4 \leq d-2$, on a
   $$M(f)_{d-4} = G_0 \oplus G_1 \cdot t \oplus \cdots \oplus G_{d-4} \cdot t^{d-4},$$
   où G_v désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x,y,z,t]$ engendré par les monômes en x, y, z de degré $d-4-v$.

   Soit un monôme $g_v \in G_v$. On peut alors écrire g_v sous la forme $g_v = x^{v_1} y^{v_2} z^{v_3}$, avec $v_1 + v_2 + v_3 = d-4-v$, et $0 \leq v_1, v_2, v_3 \leq d-4-v$.
   Il y a donc $d-4-v+1$ valeurs possibles pour v_1. Si $v_1 = k$, $0 \leq k \leq d-4-v$, alors $v_2 + v_3 = d-4-v-k$, et v_2 peut donc prendre $d-4-v-k+1$ valeurs comprises entre 0 et $d-4-v-k$. Finalement on a $d-4-v-k+1$ couples $(v_2, v_3) = (v_2, d-4-v-k-v_2)$ possibles. Ainsi, les différents choix possibles pour le triplet (v_1, v_2, v_3) sont :

$v_1 = 0$	$v_1 = 1$	...	$v_1 = d-4-v$
$v_2 + v_3 = d-4-v$	$v_2 + v_3 = d-5-v$		$v_2 + v_3 = 0$
$v_2 = 0$	$v_2 = 0$		$v_2 = 0$
$\vdots$	$\vdots$		
	$v_2 = d-5-v$		
$v_2 = d-4-v$			

   La dimension de G_v est :
   $$\sum_{k=0}^{d-4-v} (d-4-v-k+1) = (d-4-v+1) + (d-4-v) + \cdots + 1 = \binom{d-2-v}{2}.$$
   Enfin, l'action de la monodromie h_λ^* sur $H^{3,1}(H^3(U))$ est décrite par l'action de la monodromie sur les formes différentielles $\frac{g_v \Omega}{f^3}$. Or on a que
   $$h_\lambda^*(\tfrac{g_v\Omega}{f^3}) = \lambda^{d-(v+1)} \tfrac{g_v\Omega}{f^3}, \ \ \forall g_v \in G_v,$$
   et on en déduit que
   $$H^{3,1}(H^3(U)) = \bigoplus_{v=0}^{d-4} \mathbb{C}_{\lambda^{d-(v+1)}}^{\binom{d-2-v}{2}},$$

ou encore, en posant $k = d - (v+1)$:

$$H^{3,1}(H^3(U)) = \bigoplus_{k=3}^{d-1} \mathbb{C}_{\lambda^k}^{\binom{k-1}{2}},$$

ce qui coïncide bien avec [17, Exemple 5.1 (i)].

2. <u>Calcul de $M(f)_{2d-4}$:</u>

Comme $2d-4 \geq d-2$ pour $d \geq 2$, on a que

$$M(f)_{2d-4} = G_0 \oplus G_1 \cdot t \oplus \cdots \oplus G_{d-2} \cdot t^{d-2},$$

où G_v désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x,y,z,t]$ engendré par les monômes de type $x^{v_1}y^{v_2}z^{v_3}$ de degré $2d-4-v$, avec $0 \leq v_1, v_2, v_3 \leq d-2$.
Soit $g_v = x^{v_1}y^{v_2}z^{v_3} \in G_v$ un tel monôme.
On doit alors avoir $v_1 + v_2 + v_3 = 2d-4-v$, et $0 \leq v_1, v_2, v_3 \leq d-2$.
Comme $2d-4-v \geq d-2$, v_1 peut prendre n'importe quelle valeure comprise entre 0 et $d-2$. Fixons $v_1 = k$. Alors on a $v_2 + v_3 = 2d-4-v-k$, avec $2d-4-v-k \geq d-2 \Leftrightarrow k \leq d-2-v$.

- Si $0 \leq k \leq d-2-v$, alors $v_2 + v_3 = 2d-4-v-k \geq d-2$. On doit donc toujours veiller à ce que $0 \leq v_2$, $v_3 \leq d-2$.
  Or $v_3 = 2d-4-v-k-v_2 \leq d-2 \Leftrightarrow v_2 \geq d-2-v-k$. On peut donc choisir $d-2-v-k \leq v_2 \leq d-2$, et on a finalement $v+k+1$ couples (v_2, v_3) possibles.
- Si $d-2-v < k \leq d-2$, alors $v_2 + v_3 = 2d-4-v-k < d-2$, et cette fois-ci on peut choisir $0 \leq v_2 \leq 2d-4-v-k$. Il y a donc $2d-4-v-k+1$ couples (v_2, v_3) possibles.

On trouve donc la dimension suivante :

$$dim\, G_v = \sum_{k=0}^{d-2-v} v+1+k + \sum_{k=d-2-v+1}^{d-2} 2d-4-v-k+1,$$

$$dim\, G_v = \frac{(d+v)(d-1-v)}{2} + \frac{(2d-3-v)v}{2}.$$

Enfin, l'action de la monodromie h_λ^* sur $H^{2,2}(H^3(U))$ est décrite par l'action de la monodromie sur les formes différentielles $\frac{g_v\Omega}{f^3}$. Or on a que

$$h_\lambda^*(\tfrac{g_v\Omega}{f^2}) = \lambda^{d-(v+1)}\tfrac{g_v\Omega}{f^2}, \ \ \forall g_v \in G_v,$$

et on en déduit que

$$H^{2,2}(H^3(U)) = \bigoplus_{v=0}^{d-2} \mathbb{C}_{\lambda^{d-(v+1)}}^{\mu_v} \ ,$$

avec $\mu_v = \frac{(d+v)(d-1-v)}{2} + \frac{(2d-3-v)v}{2}$.

En posant $k = d-(v+1)$ et en remarquant que $\mu_{d-1-k} = \mu_{k-1}$, on obtient :

$$H^{2,2}(H^3(U)) = \bigoplus_{k=1}^{d-1} \mathbb{C}_{\lambda^k}^{\mu_{k-1}}.$$

Soit maintenant $\lambda^k,\ 0 \leq k \leq d-1$. On a :

$$h^{3,1}(H^3(U)_{\lambda^k}) = \binom{k-1}{2},$$

$$h^{1,3}(H^3(U)_{\lambda^k}) = h^{3,1}(H^3(U)_{\lambda^{d-k}}) = \binom{d-k-1}{2},$$

$$h^{2.2}(H^3(U)_{\lambda^k}) = \mu_{k-1}.$$

Enfin, un calcul rapide achève la démonstration de [17, Exemple 5.1 (iii)] en vérifiant que :

$$\tbinom{k-1}{2} + \tbinom{d-k-1}{2} + \mu_{k-1} = d^2 - 3d + 3.$$

Après ces considérations, l'Exemple 5.3 propose de calculer les nombres de Hodge de l'arrangement de Ceva $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$, en particulier la dimension $h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}})$. D'après [17, Corollaire 1.2] on a :

$$h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = h^{0,1}(H_0^2(X)_{\bar{\lambda_3}}),$$

où X est la compactification (singulière) de la fibre de Milnor $F_{\mathcal{A}}$:

$$X:\ f_{\mathcal{A}}(x,y,z) - t^9 = 0 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}.$$

Avec [17, Corollaire 3.3] on a ensuite :

$$h^{0,1}(H_0^2(X)_{\bar{\lambda_3}}) = \sum_{s\in\Sigma} h^{1,2}(H^2(F_s)_{\bar{\lambda_3}}) - h^{2,1}(H_0^3(X)_{\lambda_3}),$$

où $\Sigma = \{s_1, \dots, s_{12}\}$ désigne l'ensemble des singularités de X, et F_s la fibre de Milnor de la singularité (X, s).
Comme il est expliqué au début de l'Exemple, les dimensions $h^{1,2}(H^2(F_s)_{\bar{\lambda_3}})$ sont connues :

$$h^{1,2}(H^2(F_s)_{\bar{\lambda_3}}) = 1,\ \forall s.$$

Enfin, en utilisant de nouveau [17, Corollaire 1.2] on obtient

$$h^{2,1}(H_0^3(X)_{\lambda_3}) = h^{0,1}(H^1(F_{\mathcal{A}})_{\lambda_3}) = 2,$$

et la dimension cherchée vaut

$$h^{1,2}(H^2(F_{\mathcal{A}})_{\bar{\lambda_3}}) = 12 - 2 = 10,$$

ce qui correspond bien avec nos résultats du Corollaire 5.2.14.

Dans la fin de ce chapitre, nous continuons à nous intéresser aux nombres de Hodge mixtes $h^{a,b}(H^q(F,\mathbb{C}))$ de la fibre de Milnor F d'un arrangement central $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Nous cherchons à savoir si la fibre de Milnor F vérifie la propriété suivante :

$$h^{a,b}(H^q(F,\mathbb{C})) = 0, \ \forall a \neq b, \ \forall q, \tag{5.6}$$

et quels sont les liens de cette propriété avec la monodromie h^* et les coefficients du spectre de l'arrangement.
La propriété (5.6) a fait l'objet de nombreuses recherches en théorie des arrangements d'hyperplans, et on sait depuis longtemps que le complémentaire d'un arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}$ quelconque la vérifie, voir [24] :

$$H^q(M(\mathcal{A}),\mathbb{C})) \text{ est une structure de Hodge pure de type } (q,q).$$

En conséquence, si h^* est triviale sur tous les groupes de cohomologie $H^*(F,\mathbb{C})$, alors $H^q(F,\mathbb{C}) = H^q(F)_1 = H^q(M(\mathcal{A}'),\mathbb{C}) = H^{q,q}(H^q(M(\mathcal{A}'),\mathbb{C}))$, et F vérifie (5.6). On peut se demander si la réciproque est vraie. Tout d'abord, on sait que c'est le cas pour un arrangement $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^2$ avec la Remarque 5.1.12. La réciproque est également vraie pour un arrangement central et essentiel $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^3$: il s'agit d'un résultat de A. Dimca, voir [16, Théorème 1.1]. Dans ce même article, A. Dimca donne un exemple d'arrangement dans $\mathbb{C}^8$ pour lequel la réciproque est fausse, mais la question reste encore ouverte pour $3 \leq n \leq 6$. Nous proposons ici d'étudier le cas $n = 3$.

Soit donc $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_d\} \subset \mathbb{C}^4$ un arrangement central constitué de d hyperplans, défini par un polynôme homogène $Q(x,y,z,t) \in \mathbb{C}[x,y,z,t]$ de degré d, et de fibre de Milnor $F = Q^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^4$.
Rappelons qu'une arête $X \in L(\mathcal{A})$ est *dense* si le sous-arrangement correspondant $\mathcal{A}_X$ est irréductible, c'est à dire qu'on ne peut pas choisir les coordonnées sur $\mathbb{C}^4$ telles que

$$Q_X(x,y,z,t) = Q_{X1}(x,y,z) \times t, \text{ ou } Q_X(x,y,z,t) = Q_{X1}(x,y) \times Q_{X2}(z,t),$$

où Q_X est le polynôme homogène qui définit $\mathcal{A}_X$, et Q_{X1}, Q_{X2} sont deux polynômes homogènes non constants.
Pour simplifier les notations on adoptera à partir de maintenant les notations suivantes :

- $\boldsymbol{S}$ désignera l'ensemble des arêtes denses excepté les hyperplans de $\mathcal{A}$, et $\boldsymbol{S}^{(c)}$ l'ensemble des arêtes denses de $\boldsymbol{S}$ de codimension c.
- On notera $n_\alpha = n_{Q,\alpha}$ le coefficient du spectre de la Définition 5.2.1 associé à notre arrangement $\mathcal{A}$.

Remarquons aussi que les arrangements centraux réductibles de $\mathbb{C}^4$ sont de deux types (après changement de coordonnées) :

– Type 1 : $Q(x,y,z,t) = Q_1(x,y,z) \times t$
– Type 2 : $Q(x,y,z,t) = Q_1(x,y) \times Q_2(z,t)$,
où les Q_i sont des polynômes homogènes non constants.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 5.2.16 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^4$ un arrangement central et essentiel, constitué de d hyperplans. Les hypothèses suivantes sont équivalentes :*

(i) La monodromie h^* est triviale sur tous les groupes de cohomologie $H^*(F,\mathbb{C})$.
(ii) Les nombres de Hodge mixtes vérifient $h^{a,b}(H^q(F,\mathbb{C})) = 0,\ \forall a \neq b,\ \forall q$.
(iii) Les coefficients du spectre n_α sont nuls pour tout $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

Pour démontrer notre théorème, nous aurons besoin du résultat suivant :

Théorème 5.2.17 ([39], Théorème 5) *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un arrangement central et essentiel. Alors :*

$$\mathcal{A} \text{ est réductible si et seulement si } E(M(\mathcal{A}')) = 0,$$

où $E(M(\mathcal{A}')) = \sum_q (-1)^q dim H^q(F)_\beta$, $\forall \beta \in \mu_d$, est la caractéristique d'Euler du complémentaire $M(\mathcal{A}')$.

Nous utiliserons également des formules données par Y.Yoon (du type Théorème 5.2.7 généralisé à la dimension supérieure) permettant de calculer les coefficients du spectre de manière combinatoire pour un arrangement central dans $\mathbb{C}^4$, voir [44, Théorème 1.1]. Enfin, nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 5.2.18 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^4$ un arrangement central de type 2.*
Notons $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ sa décomposition en produit de deux arrangements irréductibles, avec $\mathcal{A}_1 : Q_1(x,y) = 0$, et $\mathcal{A}_2 : Q_2(z,t) = 0$.
Notons $d_1 = |\mathcal{A}_1|$, $d_2 = |\mathcal{A}_2|$, $d = d_1 + d_2$. Supposons $d_1 \geq 3$ et $d_2 \geq 3$.
Alors les coefficients du spectre de l'arrangement $\mathcal{A}$ sont donnés par les formules suivantes :

$$n_1 = (d_1 - 1)(d_2 - 1),\ n_2 = 1 - d_1 d_2,\ n_3 = d_1 + d_2 - 1,$$

et pour $1 \leq j \leq d-1$ on a :

$$n_{j/d} = \begin{cases} 0 & \text{si } d \nmid j d_1 \\ -(\lceil j d_1/d \rceil - 1)(\lceil j d_1/d \rceil - j + 1) & \text{sinon} \end{cases},$$

$$n_{4-j/d} = \begin{cases} 0 & \text{si } d \nmid j d_1 \\ (\lfloor j d_1/d \rfloor - 1)(\lfloor j d_1/d \rfloor - j + 1) & \text{sinon} \end{cases},$$

$$n_{1+j/d} = \begin{cases} 0 & si\ d \nmid jd_1 \\ 3\lceil jd_1/d\rceil^2 + (-d_1+d_2-3j)\lceil jd_1/d\rceil + (-1+j)d_1 - d_2 + j + 1 & sinon \end{cases},$$

$$n_{3-j/d} = \begin{cases} 0 & si\ d \nmid jd_1 \\ -3\lfloor jd_1/d\rfloor^2 + (d_1-d_2+3j)\lfloor jd_1/d\rfloor + (1-j)d_1 + d_2 - j - 1 & sinon \end{cases}.$$

<u>Démonstration du Lemme 5.2.18 :</u>

Pour un tel arrangement, on remarque que $\boldsymbol{S}^{(3)} = \emptyset$ et $\boldsymbol{S}^{(2)} = \{V_1, V_2\}$, où $V_1 := \{x = y = 0\}$ est une arête dense de codimension 2 de multiplicité d_1, et $V_2 := \{z = t = 0\}$ est une arête dense de codimension 2 de multiplicité d_2. On utilise ensuite les formules de [44, Théorème 1.1] :

- $n_{j/d} = \binom{j-1}{3} - (j-3)\binom{\lceil jd_1/d\rceil-1}{2} + 2\binom{\lceil jd_1/d\rceil-1}{3} - (j-3)\binom{\lceil jd_2/d\rceil-1}{2} + 2\binom{\lceil jd_2/d\rceil-1}{3}$,

- $n_{1+j/d} = (d-j-1)\binom{j-1}{2} - (\lceil jd_1/d\rceil - 1)\lfloor (d-j)d_1/d\rfloor (j-2)$
  $-(d-j-1-2\lfloor (d-j)d_1/d\rfloor)\binom{\lceil jd_1/d\rceil-1}{2} - (\lceil jd_2/d\rceil - 1)\lfloor (d-j)d_2/d\rfloor (j-2)$
  $-(d-j-1-2\lfloor (d-j)d_2/d\rfloor)\binom{\lceil jd_2/d\rceil-1}{2}$,

pour $j \in \{1, \dots, d\}$, et

- $n_{4-j/d} = \binom{j-1}{3} - (j-3)\binom{\lfloor jd_1/d\rfloor}{2} + 2\binom{\lfloor jd_1/d\rfloor}{3} - (j-3)\binom{\lfloor jd_2/d\rfloor}{2} + 2\binom{\lfloor jd_2/d\rfloor}{3} + \delta_{0,j}$,

- $n_{3-j/d} = (d-j-1)\binom{j-1}{2} - \lfloor jd_1/d\rfloor(\lceil (d-j)d_1/d\rceil - 1)(j-2)$
  $-(d-j-1-2(\lceil (d-j)d_1/d\rceil - 1)\,)\binom{\lfloor jd_1/d\rfloor}{2}$

  $-\lfloor jd_2/d\rfloor(\lceil (d-j)d_2/d\rceil - 1)(j-2) - (d-j-1-2(\lceil (d-j)d_2/d\rceil - 1)\,)\binom{\lfloor jd_2/d\rfloor}{2}$.

pour $j \in \{0, \dots, d-1\}$.

Les coefficients n_1 et n_2 s'obtiennent en prenant $j = d$, et n_3, n_4 en prenant $j = 0$. Soit maintenant $j \in \{1, \dots, d-1\}$.
On trouve le coefficient $n_{j/d}$ en utilisant $\lceil jd_2/d\rceil = j - \lfloor jd_1/d\rfloor$ et en factorisant par $j + 1 - \lceil jd_1/d\rceil - \lceil jd_2/d\rceil$.

On trouve $n_{4-j/d}$ en utilisant $\lfloor jd_2/d\rfloor = j - \lceil jd_1/d\rceil$ et en factorisant par $j - 1 - \lfloor jd_1/d\rfloor - \lfloor jd_2/d\rfloor$.

Avec $\lceil (d-j)d_1/d \rceil = d_1 - \lfloor jd_1/d \rfloor$, $\lceil (d-j)d_2/d \rceil = d_2 - \lfloor jd_2/d \rfloor$, et en factorisant par $\lfloor jd_1/d \rfloor + \lfloor jd_2/d \rfloor - j + 1$, on trouve $n_{3-i/d}$.

Enfin, on trouve $n_{1+j/d}$ en utilisant $\lfloor (d-j)d_1/d \rfloor = d_1 - \lceil jd_1/d \rceil$, $\lfloor (d-j)d_2/d \rfloor = d_2 - \lceil jd_2/d \rceil$, et en factorisant par $\lceil jd_1/d \rceil + \lceil jd_2/d \rceil - j - 1$.

□

Remarque 5.2.19 *Les coefficients du spectre pour un arrangement central de type 2 avec $pgcd(d_1, d_2) = 1$ ont déjà été calculés, voir [44, Corollaire 1.6].*

Lemme 5.2.20 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^4$ un arrangement central de type 2.*
Notons $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ sa décomposition en produit de deux arrangements irréductibles, $d_1 = |\mathcal{A}_1|$, $d_2 = |\mathcal{A}_2|$, $d = d_1 + d_2$.
Supposons $d_1 \geq 3$, $d_2 \geq 3$, et $pgcd(d_1, d_2) = e > 1$.
Alors il existe $\alpha \in]0, 1[$, tel que n_α est non nul.

<u>Démonstration du Lemme 5.2.20 :</u>

D'après [16, Théorème 1.4], la monodromie h^* est d'ordre e.
Soit donc $\beta = exp(-2i\pi k/e)$, $1 \leq k \leq e$, une racine e^{e} de l'unité.
Notons $d'_1 \geq 1, d'_2 \geq 1$, et $d' \geq 2$ les entiers tels que $d_1 = d'_1 e$, $d_2 = d'_2 e$, et $d = d'e$.
Alors $\beta = exp(-2i\pi kd'/d)$, $d' \leq kd' \leq d$, et avec le Lemme 5.2.18 on peut calculer le coefficient n_α, $\alpha = kd'/d$, du spectre de $\mathcal{A}$.

- Si $e \geq 3$, alors en choisissant $1 < k < e$ et en appliquant le Lemme 5.2.18 avec $j = kd'$, $d' < j < d$, on obtient :

$$n_{kd'/d} = (kd'_1 - 1)(kd'_2 - 1),$$

  car $kd'd_1 = kd'_1 d$ est divisible par d. Comme $kd'_1, kd'_2 > 1$, le coefficient $n_{kd'/d}$ est strictement positif.
- Si $e = 2$, alors pour $k = 1$ et $j = d'$, on trouve cette fois-ci :

$$n_{d'/d} = (d'_1 - 1)(d'_2 - 1).$$

  Or $d'_1, d'_2 \geq 2$ (car $d_1, d_2 \geq 3$ par hypothèse), donc $n_{d'/d}$ est bien strictement positif.

□

Nous pouvons maintenant démontrer notre théorème principal.

<u>Démonstration du Théorème 5.2.16 :</u>

- <u>$(i) \Rightarrow (ii)$</u> est clair, comme on en a discuté précédemment.

- <u>$(ii) \Rightarrow (i)$:</u> Supposons que (ii) est vérifié. Alors pour tout $\beta \in \mu_d$, $\beta \neq 1$, on a :

$$H^1(F)_\beta = H^{1,1}(H^1(F)_\beta) = 0,$$

$H^2(F)_\beta = H^{1,1}(H^2(F)_\beta)$, et $H^2(F)_\beta = 0$ si β est une racine d^{e} primitive de l'unité, d'après le Corollaire 3.2.9 du Théorème de Kohno.

$H^3(F)_\beta = H^{2,2}(H^3(F)_\beta)$, et $h^{2,2}(H^3(F)_\beta) = -E(M(\mathcal{A}'))$ si β est une racine d^{e} primitive de l'unité.

Si $\beta \neq 1$, et si $\alpha \in]0,1[$ est tel que $\beta = exp(-2i\pi\alpha)$, alors on peut vérifier avec la Définition 5.2.1 que pour un arrangement central quelconque de $\mathbb{C}^4$ on a :

$$E(M(\mathcal{A}')) = -n_\alpha - n_{1+\alpha} - n_{3-\alpha} - n_{4-\alpha},$$

et que dans le cas particulier où F vérifie (ii) on a :

$$h^{1,1}(H^2(F)_\beta) = -n_{3-\alpha},\ h^{2,2}(H^3(F)_\beta) = n_{1+\alpha}.$$

Choisissons donc $\beta = \lambda = exp(2i\pi/d)$, $\alpha = (d-1)/d$. Comme λ est primitive, on a $dimH^2(F)_\lambda = -n_{3-\frac{d-1}{d}} = 0$.
Utilisons ensuite les formules de Y.Yoon [44, Théorème 1.1] :

1. $n_{3-\frac{d-1}{d}}$
$= -\sum_{W\in \boldsymbol{S}^{(3)}}(\lceil m_W/d\rceil - 1)\binom{\lfloor (d-1)m_W/d\rfloor}{2}$
$-\sum_{V\in \boldsymbol{S}^{(2)}}\Big(\lfloor (d-1)m_V/d\rfloor(\lceil m_V/d\rceil - 1)(d-3) + (2-2\lceil m_V/d\rceil)\binom{\lfloor (d-1)m_V/d\rfloor}{2}\Big)$
$+\sum_{V\in \boldsymbol{S}^{(2)}}\sum_{\substack{W\in \boldsymbol{S}^{(3)}\\ W\subset V}}\Big(\lfloor (d-1)m_V/d\rfloor(\lceil m_V/d\rceil - 1)(\lfloor (d-1)m_W/d\rfloor - \lfloor (d-1)m_V/d\rfloor) + (\lceil m_W/d\rceil - 1)\binom{\lfloor (d-1)m_V/d\rfloor}{2}\Big)$.
2. $n_{1+\frac{d-1}{d}}$
$= -\sum_{W\in \boldsymbol{S}^{(3)}}\lfloor m_W/d\rfloor\binom{\lceil (d-1)m_W/d\rceil - 1}{2}$
$-\sum_{V\in \boldsymbol{S}^{(2)}}\Big((\lceil (d-1)m_V/d\rceil - 1)\lfloor m_V/d\rfloor(d-3) - 2\lfloor m_V/d\rfloor\binom{\lceil (d-1)m_V/d\rceil - 1}{2}\Big)$

$+\sum_{V\in \boldsymbol{S}^{(2)}} \sum_{\substack{W\in \boldsymbol{S}^{(3)}\\ W\subset V}} \Big((\lceil (d-1)m_V/d\rceil -1)\lfloor m_V/d\rfloor (\lceil (d-1)m_W/d\rceil - \lceil (d-1)m_V/d\rceil) + \lfloor m_W/d\rfloor \binom{\lceil (d-1)m_V/d\rceil -1}{2} \Big)$.

En utilisant le fait que

$$\lceil m_V/d\rceil = \lfloor m_V/d\rfloor + 1,$$

et

$$\lceil (d-1)m_V/d\rceil = \lfloor (d-1)m_V/d\rfloor + 1,$$

on voit rapidement que $n_{3-\frac{d-1}{d}} = n_{1+\frac{d-1}{d}} = 0$.

Ainsi $E(M(\mathcal{A}')) = -h^{2,2}(H^3(F)_\lambda) = -n_{1+\frac{d-1}{d}} = 0$ et $\mathcal{A}$ est réductible d'après le Théorème 5.2.17.

Comme $\mathcal{A}$ est réductible, $\mathcal{A}$ est de type 1 ou 2.

1. Si $\mathcal{A}$ est de type 1, alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, où $\mathcal{A}_1 : Q_1(x,y,z) = 0$ est constitué de $d-1$ hyperplans, et $\mathcal{A}_2$ de l'hyperplan $\{t=0\}$.
   Comme $pgcd(|\mathcal{A}_1|, |\mathcal{A}_2|) = 1$ on en déduit avec [16, Théorème 1.2] que h^* est triviale.
2. Si $\mathcal{A}$ est de type 2, alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, avec $\mathcal{A}_1 : Q_1(x,y) = 0$, et $\mathcal{A}_2 : Q_2(z,t) = 0$. Notons $d_1 = |\mathcal{A}_1|$, $d_2 = |\mathcal{A}_2|$, et $e = pgcd(d_1, d_2)$.
   (a) Si $e = 1$, on conclut comme précédemment.
   (b) Si $e > 1$, alors d'après [16, Théorème 1.4] la monodromie h^* est d'ordre e, et pour toute valeur propre $\beta = exp(-2i\pi k/e)$ dans μ_e, $1 \le k \le e$, on a

   $$H^2(F)_\beta = H^0(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \otimes H^1(F_1)_\beta \otimes H^1(F_2)_\beta,$$

   où F_1 et F_2 sont les fibres de Milnor de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.
   Si on note $d_1' = d_1/e$, $d_2' = d_2/e \in \mathbb{N}^*$, alors $\beta = exp(-2i\pi k d_1'/d_1)$ $= exp(-2i\pi k d_2'/d_2)$, avec $d_1' \le k d_1' \le d_1$ et $d_2' \le k d_2' \le d_2$.
   Si $e > 2$, alors en choisissant $1 < k < e$, on a $1 < k d_1' < d_1$ et $1 < k d_2' < d_2$. Avec [44, Corollaire 1.3] on obtient les dimensions : $h^{1,0}(H^1(F_1)_\beta) = k d_1' - 1 > 0$, et $h^{1,0}(H^1(F_2)_\beta) = k d_2' - 1 > 0$.
   Il existe donc $\omega_1 \in H^1(F_1)_\beta$ et $\omega_2 \in H^1(F_2)_\beta$. Ainsi $H^{2,0}(H^2(F,\mathbb{C}))$ est non vide car il contient $\omega_1 \otimes \omega_2$, ce qui contredit notre hypothèse.
   Si $e = 2$, alors $d_1', d_2' > 1$. On peut donc en conclure comme précédemment que ce cas est exclu en prenant $k = 1$.

- $\underline{(i) \Rightarrow (iii)}$: trivial.
- $\underline{(iii) \Rightarrow (i)}$:

  Supposons (iii) et prenons $\alpha \in]0,1[$.
  Alors $E(M(\mathcal{A}')) = -n_\alpha - n_{1+\alpha} - n_{3-\alpha} - n_{4-\alpha} = 0$ et $\mathcal{A}$ est réductible.
  Si $\mathcal{A}$ est de type 1 ou de type 2 avec $pgcd(d_1, d_2) = 1$, alors h^* est triviale.
  Le cas où $\mathcal{A}$ est de type 2 avec $d_1 = 2$ ou $d_2 = 2$ est aussi un arrangement de type 1.
  Enfin, le cas où $\mathcal{A}$ est de type 2 avec $pgcd(d_1, d_2) > 1$, $d_1, d_2 \geq 3$, est exclu avec le Lemme 5.2.20.

$\square$

Chapitre 6

Conclusion

Les résultats donnés dans cette thèse sont des éléments de réponse à notre problématique, qui est de savoir si l'opérateur de monodromie h^* et les groupes de cohomologie $H^*(F, \mathbb{C})$ sont complètement déterminés par la combinatoire d'un arrangement d'hyperplans central. La question reste encore ouverte, mais l'on peut espérer progresser dans cette voie.

Par exemple, en ce qui conserne nos résultats, on pourrait essayer d'étentre la construction du graphe $G(\mathcal{A})$ du Théorème 4.3.1 à un complexe simplicial qui contiendrait l'information sur les groupes de cohomologie de la fibre de Milnor de degrés supérieurs.
On peut aussi espérer que les homomorphismes de dégénerescence des Théorèmes 4.4.15 et 4.4.17 nous permettrons de généraliser d'autres résultats consernant des arrangements d'hyperplans définis sur $\mathbb{R}$, à des arrangements complexes. On peut également tenter de généraliser ces homomorphismes en dimensions supérieures.

Cependant, le plus gros obstacle à nos deux Théorèmes 4.3.1 et 4.4.5, est que dans le cas d'une valeur propre de la monodromie dont l'ordre n'est pas de la forme p^s, $s \geq 1$, avec p premier, on ne peut pas conclure en utilisant le résultat clef 4.2.8 de S. Papadima et A. Suciu. Si l'on souhaite améliorer nos résultats, la prochaine étape est donc de se pencher sur la question ouverte suivante : *existe-t-il un arrangement de droites tel que la monodromie h^1 admet une valeur propre d'ordre pq, avec p et q premiers ?*

Our results partially answer the question to know if the monodromy operator and the cohomology groups of the Milnor fiber are completely determined by the intersection lattice of a central hyperplane arrangement. This question is still open, even if we can hope to progress in this way.

As far as the new tools introduced in this thesis are concerned, we could try to extend the construction of the graph $G(\mathcal{A})$ of Theorem 4.3.1 to a simplicial complex containing information on the higher cohomology groups of the Milnor fiber. This involves perhaps finding a way to relate the intersection lattice of a hyperplane arrangement and a class of good coverings for its complement.
Then, we can hope that the two degeneration homomorphisms of Orlik-Solomon algebras of 4.3.1 and 4.4.5 can be used to generalize some results concerning hyperplane arrangements defined over $\mathbb{R}$ to the complex case, or can be generalizable in higher dimensions.

But the the main problem is that we can't use the modular bound of the local system cohomology groups 4.2.8 given by S. Papadima and A. Suciu (which is needed to prove our Theorems 4.3.1 and 4.4.5), if an eigenvalue of the monodromy has an order different from p^s, $s \geq 1$, with p prime. So, the next step is to study the following open question : *does there exist a line arrangement such that the monodromy operator h^1 admits an eigenvalue of order pq, where p and q are distinct primes ?*

Bibliographie

[1] P. Aluffi : Grothendieck classes and Chern classes of hyperplane arrangements. Int. Math. Res. Notices (2013) 1873-1900.

[2] P. Bailet : On the monodromy of Milnor fibers of hyperplane arrangements, arXiv :1401.6042

[3] P. Bailet, M. Yoshinaga : Degeneration of Orlik-Solomon algebras and Milnor fibers of complex line arrangements, arXiv :1312.1771

[4] R. Bott, L. Tu : Differential forms in algebraic topology. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

[5] N. Budur, A. Dimca and M. Saito : First Milnor cohomology of hyperplane arrangements. 'Topology of Algebraic Varieties and Singularities', Contemporary Mathematics 538(2011), 279-292.

[6] N. Budur, M. Saito : Multiplier ideals, V-filtration, and spectrum. J. Algebraic Geom. 14 (2005), no. 2, 269–282.

[7] N. Budur, M. Saito : Jumping coefficients and spectrum of a hyperplane arrangement. Math. Ann. 347 (2010), no. 3, 545–579.

[8] P. Cartier : Les arrangements d'hyperplans : un chapitre de géométrie combinatoire. Séminaire Bourbaki vol. 1980/81 Exposés 561-578, Lecture Notes in Mathematics, 1981, Volume 901/1981, p. 1-22.

[9] D. Cohen, G. Denham, M. Falk, H. Schenck, A. Suciu, H. Terao, S. Yuzvinsky : Complex Arrangements : Algebra, Geometry, Topology. Draft of September 4, 2009.

[10] D. Cohen, P. Orlik, A. Dimca : Nonresonance conditions for arrangements. Ann. Institut Fourier (Grenoble), **53**, 1883–1896 (2003).

[11] D. Cohen, A. Suciu : On Milnor fibrations of arrangements. J. London Math. Soc. (2) 51 (1995), no. 1, 105–119.

[12] P. Deligne : Theorie de Hodge, II and III. Publ. Math. IHES 40 (1971), 5-58 and 44 (1974),5-77.

[13] A. Dimca : Monodromy of triple point line arrangements.

[14] A. Dimca : Sheaves in topology. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[15] A. Dimca : Singularities and topology of hypersurfaces. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

[16] A. Dimca : Tate properties, polynomial-count varieties, and monodromy of hyperplane arrangements. (English summary) Nagoya Math. J. 206 (2012), 75–97.

[17] A. Dimca, G. Lehrer : Hodge-Deligne equivariant polynomials and monodromy of hyperplane arrangements. Configuration Spaces CRM Series 2012, pp 231-253.

[18] A. Dimca, S. Papadima : Finite Galois covers, cohomology jump loci, formality properties, and multinets. (English summary) Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 10 (2011), no. 2, 253–268.

[19] A. Dimca, S. Papadima, A. Suciu : Topology and geometry of cohomology jump loci. Duke Math. Journal **148** (2009), no. 3, 405–457.

[20] A. Dimca, S. Yuzvinsky : Lectures on Orlik-Solomon Algebras. Progress in Mathematics Volume 283, 2010, pp 83-110.

[21] T. A. T. Dinh : Characteristic varieties for a class of line arrangements. (English) [J] Can. Math. Bull. 54, No. 1, 56-67 (2011).

[22] M. Falk, S. Yuzvinsky : Multinets, resonance varieties, and pencils of plane curves. Compositio Math. 143 (2007), no. 4, 1069–1088.

[23] T. Kohno : Homology of a local system on the complement of hyperplanes. Proc. Japan Acad. Ser. A 62 (1986), 144–147.

[24] G. I. Lehrer : The l-adic cohomology of hyperplane complements. Bull. London Math. Soc. 24(1992), 76-82.

[25] A. Libgober : Eigenvalues for the monodromy of the Milnor fibers of arrangements. In : Libgober, A., Tibăr, M. (eds) Trends in Mathematics : Trends in Singularities. Birkhäuser, Basel (2002).

[26] A. Libgober : On combinatorial invariance of the cohomology of Milnor fiber of arrangements and Catalan equation over function field. Arrangements of hyperplanes, Sapporo 2009, 175–187, Adv. Stud. Pure Math., 62, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012.

[27] A. Libgober, S. Yuzvinsky : Cohomology of the Orlik-Solomon algebras and local systems. Compos. Math. 21 (2000) 337-361.

[28] A. Măcinic, S. Papadima : On the monodromy action on Milnor fibers of graphic arrangements. Topology Appl. 156 (2009), no. 4, 761–774.

[29] R. D. MacPherson : Chern classes for singular algebraic varieties. Annals of Mathematics. Second Series 100 (1974) : 423–32.

[30] M. Mustaţà, H. Schenck : The module of logarithmic p-forms of a locally free arrangement. J. Algebra 241 (2001), no. 2, 699–719.

[31] S. Nazir, R. Zahid : Admissible local systems for a class of line arrangements. (English summary) Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), no. 4, 1307–1313.

[32] P. Orlik, L. Solomon : Combinatorics and topology of complements onf hyperplanes. Invent. Math.56(1980) 167-189.

[33] P. Orlik, H. Terao : Arrangements of Hyperplanes. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992.

[34] S. Papadima, A. Suciu : The Milnor fibration of a hyperplane arrangement : from modular resonance to algebraic monodromy, arXiv :1401.0868

[35] S. Papadima, A. Suciu : The spectral sequence of an equivariant chain complex and homology with local coefficients. Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 2685-2721.

[36] D. Perrin. Géométrie algébrique. Une introduction. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris ; CNRS Editions, Paris, 1995.

[37] S. Roberts : On figures formed by the intercepts of a system of straight lines in a plane, and on analogous relation in space of three dimensions. Proc. London Math. Soc. 19 (1889), 405-422.

[38] C. Sabbah : Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius. Savoirs actuels. Série mathématiques. Les Ulis : Paris : EDP Sciences ; CNRS, 2002.

[39] V. Schechtman, H. Terao, A. Varchenko : Local systems over complements of hyperplanes and the Kac-Kazhdan conditions for singular vectors. Journal of Pure and Applied Algebra 100 (1995) 93-102.

[40] S. Settepanella : A stability-like theorem for cohomology of pure braid groups of the series A, B and D. (English summary) Topology Appl. 139 (2004), no. 1-3, 37–47.

[41] S. Settepanella : Cohomology of pure braid groups of exceptional cases. (English summary) Topology Appl. 156 (2009), no. 5, 1008–1012.

[42] R. P. Stanley : An Introduction to Hyperplane Arrangements. Park City Mathematics Series, volume 14 : Geometric Combinatorics (2004).

[43] C. Voisin : *Théorie de Hodge et Géométrie algébrique complexe*. Société mathématique de France 2002.

[44] Y. Yoon : Spectrum of hyperplane arrangements in four variables, arXiv :1211.1689

[45] M. Yoshinaga : Milnor fibers of real line arrangements. J. Singul. 7 (2013), 220–237.

[46] M. Yoshinaga : Resonant bands and local system cohomology groups for real line arrangements, arXiv :1301.1888

Arrangements d'hyperplans

Résumé. Cette thèse étudie la fibre de Milnor d'un arrangement d'hyperplans complexe central, et l'opérateur de monodromie sur ses groupes de cohomologie. On s'intéresse à la problématique suivante : *peut-on déterminer l'opérateur de monodromie, ou au moins les nombres de Betti de la fibre de Milnor, à partir de l'information contenue dans le treillis d'intersection de l'arrangement ?*
On donne deux théorèmes d'annulation des sous-espaces propres non triviaux de l'opérateur de monodromie. Le premier résultat s'applique à une large classe d'arrangements, le deuxième à des arrangements de droites projectives tels qu'il existe une droite contenant exactement un point de multiplicité supérieure ou égale à trois. Dans le dernier chapitre, on considère la structure de Hodge mixte des groupes de cohomologie de la fibre de Milnor d'un arrangement central et essentiel dans l'espace complexe de dimension quatre. On donne ensuite l'équivalence entre la trivialité de la monodromie, la nullité des coefficients non entiers du spectre de l'arrangement, et la nullité des nombres de Hodge mixtes des groupes de cohomologie de la fibre de Milnor.

mots-clés : arrangement d'hyperplans, treillis d'intersection, fibre de Milnor, monodromie.

Hyperplane arrangements

Abstract. This Ph.D.thesis studies the Milnor fiber of a central complex hyperplane arrangement, and the monodromy operator on its cohomology groups. Our aim is to study the following open question : *is it possible to determinate the monodromy operator, or at least the Betti numbers of the Milnor fiber, just using the information contained in the intersection lattice of the arrangement ?*
We give two vanishing results on the non trivial eigenspaces of the monodromy. The first one applies to a large class of arrangements, and the second one to projective line arrangements with a line containing exactly one point of multiplicity greater or equal to three. Then we consider the mixed Hodge structure of the cohomology groups of the Milnor fiber, for a central and essential hyperplane arrangement in the complex space of dimension four. In this case, we give the equivalence between triviality of the monodromy, Tate properties, and nullity of the non integer spectrum's coefficients.

Keywords : hyperplane arrangement, intersection lattice, Milnor fiber, monodromy.