



HAL
open science

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE D'UN MODÈLE MULTIFLUIDE MULTIVITESSE POUR L'INTERPÉNÉTRATION DE FLUIDES MISCIBLES

Cédric Eaux

► **To cite this version:**

Cédric Eaux. ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE D'UN MODÈLE MULTIFLUIDE MULTIVITESSE POUR L'INTERPÉNÉTRATION DE FLUIDES MISCIBLES. Analyse numérique [math.NA]. Ecole Centrale Paris, 2007. Français. NNT: . tel-01060943

HAL Id: tel-01060943

<https://theses.hal.science/tel-01060943>

Submitted on 4 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE CENTRALE PARIS**

présentée par

Cédric ENAUX

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

dans la spécialité

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Thèse intitulée

**ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE
D'UN MODÈLE MULTIFLUIDE MULTIVITESSE
POUR L'INTERPÉNÉTRATION DE FLUIDES MISCIBLES**

soutenue le 28 novembre 2007, devant un jury composé de

- | | |
|----------------------------|---------------------|
| - M. François BOUCHUT | Rapporteur |
| - M. Bruno DESPRÉS | Examineur |
| - M. Jean-Michel GHIDAGLIA | Président |
| - M. Pascal LAURENT | Invité |
| - M. Alain-Yves LE ROUX | Rapporteur (absent) |
| - M. Bruno SCHEURER | Examineur |
| - M. Florian DE VUYST | Directeur de thèse |

Laboratoire de rattachement

**Laboratoire Mathématiques Appliquées aux Systèmes
de l'École Centrale Paris**

Organisme d'accueil

**Centre de Bruyères-le-Châtel
du Commissariat à l'Énergie Atomique**

**ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE
D'UN MODÈLE MULTIFLUIDE MULTIVITESSE
POUR L'INTERPÉNÉTRATION DE FLUIDES MISCIBLES**

C. Eaux

MATHEMATICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF A MULTIVELOCITY MULTIFLUID MODEL FOR INTERPENETRATION OF MISCIBLE FLUIDS

Abstract

This work is devoted to the study of a multiveLOCITY multifluid model recently proposed by Scannapieco and Cheng (SC) to describe the interpenetration of miscible fluids (see [SC02]). In this document, we begin with presenting the SC model in the context of miscible fluids flows modelling. After that, the mathematical analysis of the model is carried out (study of hyperbolicity, existence of a strictly convex mathematical entropy, asymptotic analysis and diffusion limit). As a conclusion, the system is well-posed. Then, we focus on the problem of numerical resolution of systems of conservation laws with a relaxation source term, because SC model is part of this class. The main difficulty of this task is to capture on a coarse grid the asymptotic behaviour of the system when the source term is stiff. The main contribution of this work lies in the proposition of a new technique, allowing to construct a Lagrangian numerical flux taking in account the presence of the source term. This technique is applied first on the model-problem of a 1D Euler system with friction, and then on the multifluid SC model. In both cases, we prove that the new scheme is asymptotic-preserving and entropic under a CFL-like condition. The 2D extension of the scheme is done using a standard alternate directions method. Some numerical results highlight the contribution of the new flux, compared with a standard Lagrange plus remap scheme where the source term is processed using an operator splitting.

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE D'UN MODÈLE MULTIFLUIDE MULTIVITESSE POUR L'INTERPÉNÉTRATION DE FLUIDES MISCIBLES

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude d'un modèle multifluide multivitesse récemment proposé par Scannapieco et Cheng (SC) pour décrire l'interpénétration de fluides miscibles (voir [SC02]). Dans ce document, on commence par resituer ce modèle dans le contexte de la modélisation des écoulements de mélanges de fluides miscibles, puis on procède à son analyse mathématique (étude de l'hyperbolicité, existence d'une entropie mathématique strictement convexe, analyse asymptotique et limite de diffusion). On montre qu'il s'agit d'un système bien posé. Ensuite, on se concentre sur la problématique de la résolution numérique des systèmes de lois de conservation avec un terme source de relaxation, classe dont fait partie le modèle SC. Une difficulté lors de la résolution numérique de tels systèmes est de capturer sur maillage grossier leur régime asymptotique quand le terme source est raide. Le principal apport de ce travail réside dans le fait que l'on propose un nouveau mode de construction de schéma Lagrange-projection qui prend en compte la présence d'un terme source au niveau du flux numérique. Cette technique est d'abord appliquée en 1D au problème modèle des équations d'Euler avec friction, puis au modèle multifluide SC. Dans les deux cas, on prouve que le nouveau schéma est asymptotic-preserving et entropique sous une condition de type CFL. L'extension 2D du schéma est effectuée par directions alternées. Des résultats numériques mettent en évidence l'apport du nouveau flux en comparaison avec un schéma Lagrange-projection classique où le terme source est traité par un splitting d'opérateur.

Remerciements

Quelques jours après avoir soutenu ma thèse, c'est avec plaisir et légèreté que j'entame la rédaction de cette dernière section.

Je voudrais commencer par adresser mes remerciements les plus respectueux à François Bouchut et Alain-Yves Le Roux, rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'à Jean-Michel Ghidaglia, président du jury. A la lecture de leurs rapports, je suis honoré par l'intérêt qu'ils ont porté à l'étude et à l'évaluation de mes travaux.

Toutefois, je n'ai pas été seul dans cette entreprise...

L'ensemble de mes travaux a été supervisé par Bruno Scheurer avec rigueur et intérêt. Fort d'une grande expérience de la recherche, il a fait preuve d'exigence, notamment lors de la lecture des premières versions de mon manuscrit. Avec le recul, je mesure à quel point ses remarques ont permis de gagner en qualité. Pour cela, j'adresse à Bruno mes plus vifs remerciements.

Mes remerciements vont aussi à Stéphane Jaouen, qui a assuré un encadrement régulier et de proximité. Son soutien m'a été très utile, en particulier pour mener avec rigueur les calculs formels les plus complexes. Pour sa disponibilité et son humeur cordiale, j'exprime à Stéphane toute ma sympathie.

Je tiens également à remercier Bruno Després pour ses conférences improvisées - mais toujours de qualité - à l'*Espace Nord*. Il me semble ici important de préciser que certaines d'entre elles ont joué un rôle déterminant dans l'orientation de mes travaux. Outre ses compétences scientifiques dont déjà beaucoup ont fait l'éloge, Bruno dispose de qualités humaines que je trouve remarquables.

J'ai beaucoup apprécié les visites régulières d'Hervé Jourden. Toujours amicales, nos discussions s'intéressaient à l'avancement de ma thèse, mais aussi à d'autres sujets comme l'histoire des méthodes numériques ou celle des applications militaires. A chaque étape de mes travaux, Hervé a fait preuve d'un enthousiasme dont lui seul a le secret, et qui agit sur moi comme un catalyseur. Pour ces moments agréables et enrichissants, et pour la confiance qu'il me porte pour l'après-thèse, je le remercie chaleureusement.

Je remercie par ailleurs Florian De Vuyst et Pascal Laurent pour leur aide et leurs encouragements. Sortant de chaque réunion de travail avec de nouvelles idées ou de nouvelles pistes, je ne peux que regretter de n'avoir passé plus de temps avec eux. Je leur exprime également toute ma sympathie.

Je voudrais ensuite préciser qu'au cours de cette thèse, j'ai eu la chance de pouvoir mettre en place et mener une collaboration scientifique avec l'équipe d'Eleuterio Toro, professeur à l'université de Trento (Italie). Je le remercie de m'avoir réservé le meilleur accueil en son laboratoire durant cette période. J'ai rencontré là-bas Michaël Dumbser, dont les qualités humaines égalent la renommée scientifique. Je le remercie vivement d'avoir travaillé avec moi et accepté de donner une conférence sur nos résultats à l'Ecole Centrale Paris. J'espère que notre collaboration se poursuivra dans les meilleures conditions.

Faut-il enfin rappeler combien le cadre de travail est important pour mener des travaux de recherche? C'est donc au sein de l'*Espace Nord*, espace sous la responsabilité de Patrick Allal et à qui j'adresse mes respectueuses salutations, que j'ai passé le plus clair de mon temps ces dernières années. Là-bas, la compagnie des autres doctorants et stagiaires a constitué une richesse scientifique et humaine inestimable. Pour cela, j'adresse mes remerciements amicaux à Gaël, Gilles, Manuel, Simon... Je pourrais ainsi reconstituer l'entière liste de mes camarades, mais je vois d'ici ma douce Jeanne me rappeler qu'il se fait tard, et qu'il n'y a pas que le travail dans la vie : je m'incline devant tant de sagesse et lui fais part de mon affection.

Finalement, j'adresse une pensée chargée d'émotion à mes parents et mes frères .

Table des matières

Introduction	1
1 Eléments de modélisation multivitesse des écoulements de mélanges composés de fluides miscibles	9
Modèle multifluide multivitesse de Scannapieco-Cheng	9
Forme originale	10
Forme conservative	11
Forme de type modèle de mélange	12
Terme source du modèle SC	13
Table des notations	15
1.1 Introduction de l'état de l'art des modèles miscibles	16
1.1.1 Généralités sur la modélisation miscible	16
1.1.2 Gaz et plasmas : quelques définitions	17
1.1.3 Echelles de modélisation d'un gaz	17
1.1.4 Plan	18
1.2 Théorie cinétique des gaz	18
1.2.1 Equation de Boltzmann	19
1.2.2 Modélisation des collisions	19
1.2.3 Théorème H et Maxwellienne	22
1.2.4 Relaxation d'un gaz totalement ionisé	24
1.3 Construction des modèles miscibles	26
1.3.1 Limite hydrodynamique de la théorie cinétique	26
1.3.2 Limite multifluide de la théorie cinétique	30
1.3.3 Fermeture par les principes de la thermodynamique étendue	34
1.4 Modèles bifluides miscibles	42
1.4.1 Modèle miscible à 6 équations	42
1.4.2 Modèles miscibles à 5 équations	46
1.5 Conclusion	50
2 Analyse mathématique du modèle de Scannapieco-Cheng en 1D	53
2.1 Hyperbolicité du modèle SC homogène	55
2.1.1 Définitions et résultats généraux (rappels)	55
2.1.2 Modèle SC barotrope homogène	57
2.1.3 Modèle SC complet homogène	59
2.2 Entropie mathématique du modèle SC avec terme source	61
2.2.1 Entropie mathématique d'un système de lois de bilan (rappels)	61
2.2.2 Modèle SC barotrope	62
2.2.3 Modèle SC complet	63
2.3 Analyse asymptotique du modèle SC quand le terme source est raide	64

2.3.1	Limite monovitesse du modèle SC barotrope	65
2.3.2	Limite monovitesse du modèle SC complet	71
2.4	Conclusion	75
3	Résolution numérique des équations d'Euler avec friction	77
3.1	Schéma Lagrange-projection pour les équations d'Euler 1D homogènes (résumé) .	79
3.1.1	Flux lagrangien acoustique	80
3.1.2	Flux de projection d'ordre 3	81
3.2	Nouveau schéma Lagrange-projection asymptotic-preserving	83
3.2.1	Discrétisation du flux	84
3.2.2	Discrétisation du terme source	89
3.2.3	Résultats numériques	94
3.3	Extension multidimensionnelle par directions alternées	104
3.3.1	Description dans le cas 2D	104
3.3.2	Résultats numériques	107
3.4	Conclusion	109
4	Résolution numérique du modèle de Scannapieco-Cheng	111
4.1	Schéma bi-Lagrange-projection pour le modèle de Scannapieco-Cheng 1D barotrope	113
4.1.1	Discrétisation du flux	114
4.1.2	Discrétisation du terme source	119
4.1.3	Résultats numériques	122
4.2	Schéma bi-Lagrange-projection pour le modèle de Scannapieco-Cheng 1D complet	124
4.2.1	Discrétisation du flux	125
4.2.2	Discrétisation du terme source	128
4.2.3	Résultats numériques	130
4.3	Extension multidimensionnelle par directions alternées	134
4.3.1	Description dans le cas 2D pour le modèle multifluide complet	135
4.3.2	Résultats numériques	137
4.4	Conclusion	146
5	Un nouveau schéma numérique d'ordre arbitrairement élevé pour les systèmes de lois de conservation avec un terme source raide	151
5.1	Introduction	152
5.2	An explicit arbitrary high order accurate finite volume scheme for nonlinear hyperbolic systems with stiff source terms	156
5.2.1	Nonlinear reconstruction technique	157
5.2.2	The local space-time discontinuous Galerkin scheme	159
5.3	Numerical convergence studies	167
5.4	Applications	169
5.4.1	Model system with linear flux and nonlinear source term	169
5.4.2	Model system with nonlinear flux and linear source term	172
5.4.3	Euler equations with stiff friction	173
5.4.4	The relaxation system of Jin and Xin	175
5.4.5	The scalar model problem of LeVeque and Yee	179
5.5	Summary and conclusions	180
	Conclusion et perspectives	185

Appendices	189
A Eléments de modélisation multivitesse des écoulements de mélanges composés de fluides non miscibles	189
A.1 Introduction	189
A.1.1 Généralités sur la modélisation non miscible	189
A.1.2 Milieux multiphasiques : quelques définitions	190
A.1.3 Plan	191
A.2 Technique des équations moyennées	191
A.2.1 Modélisation locale du milieu	192
A.2.2 Modélisation biphasique du milieu	192
A.2.3 Modélisation bifluide du milieu	193
A.2.4 Evaluation des termes sources	195
A.2.5 Fermetures	197
A.3 Principes de la thermodynamique étendue et formalisme de Godunov et Romensky	201
A.3.1 Présentation du formalisme	202
A.3.2 Construction du modèle bifluide de Godunov-Romensky	204
A.4 Modèles bifluides non miscibles	208
A.4.1 Modèle standard à 6 équations	208
A.4.2 Modèle à 7 équations de type Baer-Nunziato	211
A.4.3 Modèles conservatifs de type Godunov-Romensky	212
A.4.4 Modèle isobare-isotherme de Després	216
A.5 Conclusion sur la partie non miscible	216
B Sur les matrices symétriques définies positives	219
C Expression des équations d'Euler 1D en coordonnées eulériennes, lagrangiennes et de masse	221
D Schéma Lagrange-projection pour les équations d'Euler 1D homogènes	225
D.1 Formulation intégrale exacte	226
D.1.1 Préliminaires	227
D.1.2 Phase lagrangienne	229
D.1.3 Phase de projection	230
D.1.4 Schéma complet	231
D.2 Solveurs acoustiques pour le flux lagrangien	232
D.3 Nouveau flux d'ordre 3 pour le flux de projection	236
D.3.1 Projection géométrique d'ordre 1	236
D.3.2 Projection d'ordre 3 avec nouveau flux de type PPM et limiteurs	236
D.4 Résultats numériques	242
D.4.1 Limite d'advection linéaire	243
D.4.2 Tube à choc	247
D.5 Conclusion	250
E Preuve de l'inégalité d'entropie discrète du chapitre 3	251
F Preuve de la propriété AP du chapitre 4	255
G Preuve de l'inégalité d'entropie discrète du chapitre 4	259
Table des figures	266

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'analyse mathématique et numérique d'un modèle multifluide multivitesse pour l'interpénétration de fluides miscibles.

Plus précisément, un *modèle multifluide* est un système d'équations décrivant l'évolution au cours du temps de l'état d'un milieu continu (le mélange) composé de plusieurs fluides (ses constituants). Selon le nombre de constituants et la complexité du modèle, l'état du milieu peut être représenté par une ou plusieurs densités. Lorsque la vitesse de chaque constituant est une inconnue du système d'équations, le modèle est qualifié de *multivitesse*. On dit de plus qu'un mélange se produit par *interpénétration* quand les vitesses des constituants sont significativement différentes. Sur le plan mathématique, un modèle multifluide multivitesse est un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaire inaccessible à une résolution analytique. On utilise alors une méthode de résolution numérique. Le choix de la méthode s'appuie sur l'*analyse mathématique* du modèle, qui a notamment pour objectif de déterminer si le système d'EDP possède une solution unique et stable. L'*analyse numérique* consiste ensuite à s'assurer que la méthode retenue est stable sous une condition raisonnable et fournit des solutions numériques qui convergent vers la solution exacte du problème.

Contexte L'étude rapportée dans ce document se concentre sur des questions académiques, mais s'inscrit néanmoins dans une problématique concrète : celle de la simulation numérique de la Fusion par Confinement Inertiel (FCI). On ouvre maintenant une parenthèse. L'objectif de la FCI est de faire rentrer en fusion un mélange composé de deutérium (D) et de tritium (T), deux isotopes de l'hydrogène. Son principe consiste à chauffer et à comprimer le mélange (DT) emprisonné dans une petite capsule, ou microballon, dont la surface est un polymère (CH), afin que sa température et sa densité atteignent des niveaux suffisants pour permettre à D et T de franchir la barrière coulombienne et ainsi fusionner. Pour cela, on chauffe violemment la paroi externe de la capsule à l'aide d'un laser de puissance. La dilatation de cette paroi, aussi bien dans le sens divergent que convergent en raison de la conservation de l'impulsion, provoque l'implosion du microballon. Pour assurer la symétrie sphérique de cette implosion, il est indispensable de répartir l'énergie du laser sur toute la surface de la cible avec une bonne uniformité. On distingue alors deux modes de dépôt de l'énergie du laser :

- l'attaque directe, où le microballon est directement soumis au rayonnement de plusieurs faisceaux laser,
- l'attaque indirecte, où les faisceaux laser chauffent une coquille cylindrique entourant le microballon, qui communique son énergie au microballon sous la forme d'un rayonnement X uniformément réparti.

Lors d'une attaque indirecte, le niveau de température est tel que le cylindre, en or, et l'ablateur CH passent localement à l'état plasma (gaz partiellement ou totalement ionisé) et se détendent violemment. Il y a alors interpénétration entre les fluides miscibles que sont l'or et le gaz de remplissage de la cavité d'une part et entre ce gaz et l'ablateur d'autre part. Par ailleurs, que

l'attaque soit directe ou indirecte, on assiste au niveau de l'interface entre DT et CH à la poussée d'un fluide lourd sur un fluide léger, écoulement instable du point de vue hydrodynamique. Lorsque la poussée est continue, l'instabilité engendrée est de type Rayleigh-Taylor. Si la poussée est impulsionnelle, comme c'est le cas lors du passage d'une onde de choc, l'instabilité engendrée est de type Richtmyer-Meshkov. Ces deux instabilités brisent la symétrie sphérique de l'implosion du microballon et réduisent ainsi la force globale de compression exercée par le CH sur le DT . Le rendement de la réaction de fusion du DT peut alors être notablement dégradé. Pour rendre compte par la simulation numérique de ces effets de dégradation, il est nécessaire d'incorporer dans les modèles multifluides la possibilité pour les constituants de s'interpénétrer. Autrement dit, il est nécessaire d'utiliser un modèle multifluide *multivitesse*. Cela étant dit, la parenthèse peut être fermée.

Le modèle multifluide On décrit maintenant le modèle faisant l'objet de la présente étude. Un modèle multifluide multivitesse a récemment été proposé par Scannapieco et Cheng dans [SC02] pour décrire l'interpénétration de plasmas. Lorsque toutes les interactions électromagnétiques sont négligées, ce modèle se réduit à un système permettant de décrire l'interpénétration de fluides miscibles électriquement neutres. D'après [WSC⁺03] et [WCC⁺04], ce dernier système constitue un modèle multifluide susceptible de restituer l'implosion d'un microballon conformément à des résultats expérimentaux obtenus lors des premières tentatives de FCI. C'est sur ce modèle purement hydrodynamique que cette thèse se focalise. Dans sa forme originale (voir [SC02]), il contient $2 + d$ équations pour décrire l'état du mélange (d étant la dimension de l'espace) :

$$(0.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0, \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j) + \partial_{x_j} \sigma_{ij} = 0, \\ \partial_t (\rho \xi) + \partial_{x_j} (\rho \xi v_j) + \sigma_{ij} \partial_{x_j} v_i + \sum_s \partial_{x_j} (u_j^s (\rho^s \xi^s + p^s)) = 0. \end{array} \right.$$

Les indices i, j de 1 à d désignent les directions de l'espace, et la convention de sommation d'Einstein est utilisée. ρ est la masse volumique du mélange, v sa vitesse, σ son tenseur des contraintes et ξ son énergie interne massique. Les quantités ρ^s , u^s , p^s et ξ^s sont attribuées aux constituants s : ρ^s et p^s sont respectivement la densité partielle et la pression partielle du fluide s , ξ^s est son énergie interne massique et u^s est la vitesse relative du fluide s par rapport au mouvement du mélange. Les autres équations du modèle décrivent l'état des constituants. Pour chaque fluide s , on a les $2 + d$ équations supplémentaires :

$$(0.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^s + \partial_{x_j} (\rho^s v_j) + \partial_{x_j} (\rho^s u_j^s) = 0, \\ \partial_t (\rho^s u_i^s) + \partial_{x_j} (\rho^s u_i^s v_j) + \partial_{x_j} \sigma_{ij}^s - \frac{\rho^s}{\rho} \partial_{x_j} \sigma_{ij} + \rho^s u_j^s \partial_{x_j} v_i = F_i^s, \\ \partial_t (\rho^s \xi^s) + \partial_{x_j} (\rho^s \xi^s v_j) + \partial_{x_j} (\rho^s \xi^s u_j^s) + \partial_{x_j} (p^s u_j^s) + \sigma_{ij}^s \partial_{x_j} v_i - \frac{\rho^s u_i^s}{\rho} \partial_{x_j} \sigma_{ij} = W^s - F_j^s v_j, \end{array} \right.$$

où σ_{ij}^s est le tenseur des contraintes du fluide s . Les termes F^s et W^s sont des terme sources sur lesquels on reviendra plus loin. On remarque que la sommation sur tous les constituants des EDP (0.2) permet de retrouver les EDP (0.1). Les équations du mélange sont ainsi redondantes, de sorte que le modèle est finalement composé de $n \times (2 + d)$ équations, n étant le nombre de constituants. En introduisant la vitesse absolue v^s et l'énergie totale massique e^s de chaque

constituant, on verra dans le premier chapitre de ce document que les équations (0.2) peuvent s'écrire sous la forme conservative :

$$(0.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^s + \partial_{x_j} (\rho^s v_j^s) = 0, \\ \partial_t (\rho^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\rho^s v_i^s v_j^s + p^s \delta_{ij}) = F_i^s, \\ \partial_t (\rho^s e^s) + \partial_{x_j} (\rho^s e^s v_j^s + p^s v_j^s) = W^s, \end{array} \right.$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. On reconnait ici les équations de la dynamique des gaz (ou équations d'Euler) avec un terme source dans les équations pour l'impulsion et l'énergie totale. D'après [SC02], les équations d'états des constituants ont la forme usuelle $p^s = p^s(\rho^s, \epsilon^s)$, où $\epsilon^s = e^s - \frac{1}{2} v_j^s v_j^s$. Le couplage des fluides est donc modélisé par les termes sources F^s et W^s .

On s'intéresse maintenant au terme source du modèle de Scannapieco-Cheng (SC), tel que proposé dans [SC02]. En tenant compte des remarques faites précédemment, le modèle SC peut s'écrire, pour un mélange de deux fluides miscibles électriquement neutres α et β , sous la forme simple :

$$(0.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^\alpha + \partial_{x_j} (\rho^\alpha v_j^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v_i^\alpha) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha v_i^\alpha v_j^\alpha + p^\alpha \delta_{ij}) = F_i, \\ \partial_t (\rho^\alpha e^\alpha) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha e^\alpha v_j^\alpha + p^\alpha v_j^\alpha) = W, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_{x_j} (\rho^\beta v_j^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v_i^\beta) + \partial_{x_j} (\rho^\beta v_i^\beta v_j^\beta + p^\beta \delta_{ij}) = -F_i, \\ \partial_t (\rho^\beta e^\beta) + \partial_{x_j} (\rho^\beta e^\beta v_j^\beta + p^\beta v_j^\beta) = -W, \end{array} \right.$$

fermée par des relations constitutives de type $p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha, \epsilon^\alpha)$ et $p^\beta = p^\beta(\rho^\beta, \epsilon^\beta)$. Le fait d'avoir posé $F^\alpha = -F^\beta \equiv F$ et $W^\alpha = -W^\beta \equiv W$ garantit que l'impulsion et l'énergie totale du mélange sont conservées. Dans [SC02], les auteurs considèrent que les interactions entre constituants peuvent être modélisées par l'intermédiaire d'une force de relaxation des vitesses F et de son travail W , en posant :

$$(0.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_i = -\nu \rho c (1-c) \delta v_i, \\ W = -\nu \rho c (1-c) v_j \delta v_j, \end{array} \right.$$

où $\rho = \rho^\alpha + \rho^\beta$ est la masse volumique du mélange, $c = \frac{\rho^\alpha}{\rho}$ la fraction massique du fluide α , $\delta v = v^\alpha - v^\beta$ la vitesse relative entre les constituants et $v = c v^\alpha + (1-c) v^\beta$ la vitesse barycentrique du mélange. Le coefficient de frottement $\nu \geq 0$ constitue l'unique paramètre du modèle. Il est déterminé suivant des considérations microscopiques et macroscopiques, par :

$$(0.6) \quad \nu = \nu(t) = \frac{C(t)}{\lambda + L(t)},$$

où C est la vitesse thermique caractéristique des particules formant les constituants miscibles, λ est le libre parcours moyen de ces particules et L est la longueur caractéristique des filets d'interpénétration. Dans cette thèse, on choisit d'effectuer l'analyse mathématique et numérique du système (0.4) muni d'un terme source de la forme plus générale :

$$(0.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_i = -\nu \rho f(c) \delta v_i, \\ W = -\nu \rho f(c) v_j \delta v_j, \end{array} \right.$$

où $\nu \in [0; +\infty[$ est un paramètre et $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction quelconque. Le choix $f(c) = c(1-c)$ correspond alors à (0.5).

La résolution numérique de systèmes avec un terme source raide Lors de l'analyse mathématique du modèle SC (0.4) menée au chapitre 2, on verra que ce modèle s'inscrit dans la classe des systèmes hyperboliques de lois de conservation avec un terme source non différentiel de la forme :

$$(0.8) \quad \partial_t \mathcal{U} + \partial_{x_j} \mathcal{F}_j(\mathcal{U}) = \mathcal{S}(\mathcal{U}).$$

De tels systèmes sont parfois appelés systèmes hyperboliques de lois de bilan. De nombreux modèles physiques peuvent être écrits sous la forme (0.8). Parmi ceux issus de la mécanique des milieux continus, on peut citer l'exemple classique des équations de la dynamique d'un gaz en présence d'un champ de gravitation uniforme :

$$(0.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0, \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = \rho g_i, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + p v_j) = \rho g_j v_j, \end{array} \right.$$

ainsi que celui des équations de la dynamique d'un gaz dans un milieu dissipatif :

$$(0.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0, \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = -\nu \rho v_i, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + p v_j) = -\nu \rho v_j v_j. \end{array} \right.$$

Les notations sont usuelles : ρ est la masse volumique du gaz, v sa vitesse, e son énergie totale spécifique et p sa pression. On a noté g l'accélération de la pesanteur et $\nu \geq 0$ le coefficient de frottement qu'exerce le milieu dissipatif sur le gaz.

En raison de la forme conservative des équations (0.8) et de l'éventuelle non linéarité du flux, il est judicieux d'utiliser une méthode de type volumes finis pour leur résolution numérique. Pour simplifier, on ne considère que le cas 1D dans la suite de la discussion. L'intégration en espace et en temps du système :

$$(0.11) \quad \partial_t \mathcal{U} + \partial_x \mathcal{F}(\mathcal{U}) = \mathcal{S}(\mathcal{U}),$$

sur le volume de contrôle $]t^n; t^{n+1}[\times]x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}[$ conduit à la formulation intégrale :

$$(0.12) \quad U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta t \cdot S_i^{n+\frac{1}{2}},$$

où l'on a noté $\Delta t \equiv t^{n+1} - t^n$ et $\Delta x \equiv x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, ainsi que la moyenne de l'état :

$$(0.13) \quad U_i^n \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{U}(x, t^n) dx,$$

la moyenne du flux :

$$(0.14) \quad F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathcal{F}\left(\mathcal{U}\left(x_{i+\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt,$$

et la moyenne du terme source :

$$(0.15) \quad S_i^{n+\frac{1}{2}} \equiv \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{S}(\mathcal{U}(x, t)) dx dt.$$

En pratique, il faut remplacer les intégrales (0.14) et (0.15) par des approximations appelées respectivement flux numérique et terme source numérique. On note $\mathcal{U}_h(x, t)$ la solution du système homogène de lois de conservation $\partial_t \mathcal{U}_h + \partial_x \mathcal{F}(\mathcal{U}_h) = 0$. Une approche simple, dite de *splitting d'opérateur*, consiste à utiliser une quadrature classique pour le terme source numérique, et à remplacer l'intégrale du flux (0.14) par l'intégrale $\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathcal{F}\left(\mathcal{U}_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt$ que l'on sait approcher par des flux numériques classiques (flux de Godunov ou de Roe par exemple). Le principal inconvénient de cette approche est qu'elle ne permet pas de capturer avec précision les effets liés aux interactions entre divergence du flux et terme source, comme les états stationnaires ou les régimes de diffusion. Pour préciser cela, on prend l'exemple des systèmes (0.9) et (0.10).

Dans le système avec champ de gravitation (0.9), la présence du terme source a pour conséquence l'apparition d'états stationnaires pour lesquels il y a équilibre local entre le gradient de pression et le poids du gaz. Au niveau discret, un splitting d'opérateur ne permet pas de maintenir ces états d'équilibre et conduit généralement à de mauvaises solutions numériques. Il s'agit d'une difficulté bien connue (voir [BV94], [GL96]), que l'on rencontre dans d'autres systèmes similaires comme celui des eaux peu profondes¹ en présence d'un fond non uniforme (voir [Seg02], [Jin01]). Pour résoudre ce problème, plusieurs auteurs ont proposé des schémas dits *équilibre* de différentes sortes, comme les schémas well-balanced (voir [GL96], [Gos00]), les schémas USI² (voir [Bou04], [BPV01]), des extensions de solveurs de Riemann (voir [GMP84], [LR88]) ou des extensions de schémas aux caractéristiques (voir [CW84]).

En outre, la préservation des états d'équilibre ne constitue pas la seule difficulté lors de la résolution numérique des systèmes (0.8). Dans le système avec dissipation (0.10), le terme source est de type relaxation pour la variable v , caractérisé par le coefficient de frottement $\nu \geq 0$. Lorsque $\nu \gg 1$, le temps caractéristique du processus de relaxation est beaucoup plus petit que le temps caractéristique des effets hydrodynamiques : on dit que le terme source est *raide*. Dans ce cas, l'échelle d'observation en temps est calibrée sur la vitesse des ondes acoustiques uniquement : elle ne prend pas en compte la présence du terme source et le temps caractéristique associé. Au niveau continu, on peut connaître le comportement limite d'un système comportant un terme source de relaxation raide en effectuant une analyse asymptotique à l'aide d'un développement de type Chapman-Enskog, comme on le fait pour

¹Shallow water system.

²Upwinding Source at Interfaces

le modèle bifluide de Scannapieco-Cheng dans le chapitre 2. Au niveau discret, la difficulté consiste à trouver un schéma numérique dont le développement asymptotique dans le cas raide constitue une discrétisation consistante du développement asymptotique du système continu.

Plus généralement, soit un système de la forme (0.11), où \mathcal{S} est un terme source de relaxation de coefficient caractéristique $\nu \geq 0$, et soit (0.12) la formulation volumes finis de ce système. Au niveau discret, le régime où le terme source est raide correspond au cas où $\nu \gg \Delta t^{-1}$, qui ne peut être atteint que si $\Delta t > \nu^{-1}$ à ν fixé. Pour de telles valeurs du pas de temps, on dit que le terme source est *sous-résolu*³. On étend cette notion à l'espace en introduisant la notion de *maillage grossier*⁴.

Définition 0.1. *On appelle maillage grossier une grille de l'espace et du temps pour laquelle $\Delta t \gg \nu^{-1}$ et $\Delta x \gg a \cdot \nu^{-1}$, où a est la plus grande valeur propre du système considéré.*

Les composantes du vecteur \mathcal{U} sont notées \mathcal{U}_i , avec i de 1 à p . On peut maintenant définir ce qu'est un schéma asymptotic-preserving au sens de [Jin99].

Définition 0.2. *Le schéma numérique (0.12) est asymptotic-preserving pour la variable \mathcal{U}_i lorsque son développement asymptotique d'ordre 1 se réduit sur maillage grossier à une discrétisation consistante au sens des différences finies avec le développement asymptotique d'ordre 1 de l'équation de (0.11) pour la variable \mathcal{U}_i quand le terme source est raide. On dit qu'un schéma est asymptotic-preserving (AP) lorsqu'il est asymptotic-preserving pour toutes les composantes du vecteur \mathcal{U} .*

Bien entendu, en pratique, un schéma AP n'est intéressant que s'il est *robuste*, c'est-à-dire s'il est stable lorsque le terme source est sous-résolu. L'utilisation d'un schéma numérique robuste et AP permet de pouvoir traiter avec la même grille espace-temps tous les régimes de relaxation, uniformément en ν . De tels schémas ont été proposés pour des systèmes particuliers dans [BD06], [GT04] et [MC07] par exemple. On trouve notamment dans [BOP07] un schéma AP pour la version isentropique du système (0.10). Dans [Jin95], un schéma AP de type Runge-Kutta est proposé pour la résolution numérique des systèmes de relaxation (voir [JX95]).

Comme pour les équations d'Euler avec friction (0.10), le modèle multifluide de Scannapieco-Cheng contient un terme source de type relaxation. Ce terme source constitue l'unique couplage entre les équations de chaque fluide, il est donc fondamental que la méthode numérique utilisée pour résoudre ce système capture avec précision les interactions entre flux et terme source. En particulier, la relaxation des vitesses pouvant être un phénomène beaucoup plus rapide que les effets hydrodynamiques (le terme source peut être raide), il est impératif que le schéma soit robuste et asymptotic-preserving. Pour des raisons de compatibilité avec des codes déjà existants, on choisit d'utiliser une méthode numérique de type Lagrange-projection, qui constitue une technologie bien maîtrisée pour les systèmes qui ont la forme des équations de la dynamique des gaz. On peut alors formuler le principal objectif de cette thèse : construire un schéma Lagrange-projection robuste et asymptotic-preserving pour la résolution du modèle multifluide de Scannapieco-Cheng.

Plan de la thèse Le premier chapitre est dédié à la modélisation multivitesse des écoulements multifluides. On commence par présenter en détail les différentes formes du modèle SC qui sont utilisées par la suite. Pour situer ce modèle par rapport à des modèles concurrents et délimiter son domaine de pertinence physique, un état de l'art des différents modèles bifluides

³Traduction littérale de *underresolved*.

⁴Là encore, traduction littérale de *coarse grid*.

bivitesse pour l'interpénétration de fluides miscibles est ensuite proposé, sous la forme d'une section indépendante. On se concentre en particulier sur les hypothèses de modélisation et les techniques de construction des modèles. Une étude similaire sur la modélisation de mélanges de fluides non miscibles est reportée en annexe. Le contenu du chapitre 1 et de l'annexe A a déjà fait l'objet d'une publication sous la forme d'un rapport CEA (voir [Ena06]).

Le second chapitre est consacré à l'analyse mathématique du modèle multifluide multivitesse de Scannapieco-Cheng dans sa version 1D pour deux fluides électriquement neutres. Plus précisément, on se concentre sur deux modèles : l'un ne comportant aucune équation pour l'énergie, appelé modèle SC barotrope, et l'autre comportant les équations pour l'énergie, appelé modèle SC complet. Pour chaque modèle, on étudie l'hyperbolicité du système de lois de conservation homogène et l'existence d'une entropie mathématique strictement convexe pour le système avec terme source. Ensuite, on mène l'analyse asymptotique du modèle quand le terme source est raide, c'est-à-dire quand la relaxation des vitesses est très rapide. Pour le modèle SC barotrope, on étudie la limite de diffusion et l'on propose un cas-test avec solution de référence (au sens asymptotique) qui permettra d'évaluer la précision des schémas numériques proposés dans le chapitre 4.

Dans les chapitres suivants, on étudie la résolution numérique des systèmes de lois de conservation avec un terme source de relaxation, classe dont fait partie le modèle SC. Une difficulté lors de la résolution numérique de tels systèmes est de capturer sur maillage grossier leur régime asymptotique quand le terme source est raide. Le principal apport de ce travail réside dans le fait que l'on propose un nouveau mode de construction de schéma Lagrange-projection qui prend en compte la présence d'un terme source au niveau du flux numérique. Cette technique est d'abord détaillée et appliquée en 1D au problème-modèle des équations d'Euler avec friction dans le chapitre 3. On procède alors à l'analyse formelle du nouveau schéma, en étudiant notamment sa consistance, sa précision dans le cas raide sur maillage grossier, et l'existence d'une inégalité d'entropie discrète.

On applique ensuite la même technique de construction au modèle multifluide SC dans le chapitre 4. Là aussi, l'analyse formelle du schéma obtenu est conduite. Des résultats numériques sont systématiquement présentés pour mettre en évidence l'apport du nouveau schéma. On termine le chapitre en proposant une extension 2D du nouveau schéma, et en présentant des résultats de simulation d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz et Richtmyer-Meshkov pour différents régimes d'écoulement (interpénétration ou interdiffusion).

Le dernier chapitre de cette thèse s'écarte des problèmes purement multifluides. Il constitue une partie indépendante consacrée à la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation avec un terme source raide. Présenté sous la forme d'un article⁵, ce chapitre contient notamment une discussion passant en revue les méthodes numériques proposées dans la littérature pour la résolution de tels systèmes. On aborde ensuite la question de la montée en ordre des schémas pour les systèmes avec un terme source, et on propose un nouveau schéma volumes finis d'ordre arbitrairement élevé pour la résolution de tels systèmes en 1D.

Annexes Pour ne pas surcharger l'exposé, certains éléments ont été placés en annexe. L'annexe A est dédiée à la modélisation multivitesse des écoulements de mélanges composés de fluides non miscibles. Dans l'annexe B, un résultat pratique concernant les matrices symétriques définies positives et utilisé au chapitre 2 est rappelé. L'expression des équations d'Euler 1D en

⁵Article co-signé M. Dumbser, C. Enaux & E.F. Toro, à paraître dans *Journal of Computational Physics*.

coordonnées eulériennes, lagrangiennes et de masse fait l'objet d'un rappel dans l'annexe C. L'annexe D est consacrée à la description détaillée du schéma Lagrange-projection pour la résolution des équations d'Euler. Enfin, les preuves des inégalités d'entropie discrètes et de la propriété AP du schéma, présentées dans les chapitres 3 et 4, sont consignées dans les annexes E, F et G.

Chapitre 1

Eléments de modélisation multivitesse des écoulements de mélanges composés de fluides miscibles

Cette thèse se focalise sur l'analyse mathématique et numérique d'un modèle multifluide permettant de décrire l'interpénétration de fluides miscibles : le modèle de Scannapieco-Cheng (SC). Seuls les modèles multifluides *multivitesse*, *i.e.* où chaque constituant possède sa propre vitesse, peuvent restituer le phénomène d'interpénétration. Compte tenu de cette remarque, on se propose de présenter le modèle SC dans le contexte de la modélisation multivitesse des écoulements multifluides et de délimiter son cadre de pertinence physique. Pour ce faire, on dresse dans ce chapitre un état de l'art des modèles multivitesse pour les mélanges de fluides miscibles (une étude similaire sur les mélanges de fluides non miscibles est reportée dans l'annexe A). Mais avant, par soucis de clarté, on présente dans la section qui suit le modèle SC sous les trois formes qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

Modèle multifluide multivitesse de Scannapieco-Cheng

Dans cette section, indépendante de l'état de l'art dressé dans la suite du chapitre, on se focalise sur le modèle de Scannapieco-Cheng (SC), proposé dans [SC02] pour décrire l'interpénétration de plasmas. Au sens large, les plasmas sont des gaz ionisés, et donc des fluides miscibles. Par conséquent, lorsque toutes les interactions électromagnétiques sont négligées, le modèle multifluide se réduit à un système permettant de décrire l'interpénétration de fluides miscibles électriquement neutres. C'est sur ce modèle purement hydrodynamique que l'on se concentre, dans le cas biffuide.

A l'échelle macroscopique, un écoulement multifluide peut être décrit par plusieurs jeux de variables dépendantes. Le choix du jeu de variables n'influence ni le nombre d'équations indépendantes, ni la nature mathématique du modèle. Le passage d'un mode de représentation à l'autre peut pourtant se révéler utile lors de l'analyse du modèle, en permettant par exemple de mettre en évidence une forme conservative, d'identifier les variables relaxées, ou tout simplement de faciliter la comparaison avec d'autres modèles. Dans ce qui suit, on présente les principales formes du modèle SC, à savoir la forme originale proposée par Scannapieco et Cheng, une forme conservative en variables multifluides, et une forme en variables du mélange.

Ces formes sont équivalentes pour les solutions régulières. Le choix est fait d'effectuer le passage d'une forme à l'autre sans tenir compte de l'expression des termes sources F et W , afin de faciliter la comparaison avec d'autres modèles.

Le modèle SC décrivant des mélanges de fluides *miscibles*, on rappelle que la densité ρ et la pression p du mélange sont reliées aux densités partielles ρ^s et pressions partielles p^s des constituants $s = \alpha, \beta$ par les relations usuelles :

$$(1.1) \quad \rho = \sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s \quad \text{et} \quad p = \sum_{s=\alpha,\beta} p^s.$$

La vitesse du mélange v est définie comme la vitesse barycentrique :

$$(1.2) \quad v = \frac{\sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s v^s}{\sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s},$$

où v^s est la vitesse absolue du fluide s . Par ailleurs, comme la densité d'énergie totale du mélange ρe est la somme des densités d'énergie totale des constituants $\rho^s e^s$, l'énergie totale massique du mélange e est donnée par :

$$(1.3) \quad e = \frac{\sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s e^s}{\sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s}.$$

Ces notations, ainsi que celles qui apparaissent par la suite, sont consignées dans une table en fin de section.

Forme originale

On commence par présenter la forme originale du modèle, c'est-à-dire celle utilisée par les auteurs dans [SC02]. Le modèle SC bifluide est composé des $4 + 2d$ équations indépendantes (d étant la dimension de l'espace) :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0, \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j) + \partial_{x_j} \sigma_{ij} = 0, \\ \partial_t (\rho \xi) + \partial_{x_j} (\rho \xi v_j) + \sigma_{ij} \partial_{x_j} v_i + \sum_{s=\alpha,\beta} \partial_{x_j} (u_j^s (\rho^s \xi^s + p^s)) = 0, \\ \partial_t \rho^\alpha + \partial_{x_j} (\rho^\alpha v_j) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha u_j^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha u_i^\alpha) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha u_i^\alpha v_j) + \partial_{x_j} \sigma_{ij}^\alpha - \frac{\rho^\alpha}{\rho} \partial_{x_j} \sigma_{ij} + \rho^\alpha u_j^\alpha \partial_{x_j} v_i = F_i, \\ \partial_t (\rho^\alpha \xi^\alpha) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha \xi^\alpha v_j) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha \xi^\alpha u_j^\alpha) + \partial_{x_j} (p^\alpha u_j^\alpha) + \sigma_{ij}^\alpha \partial_{x_j} v_i - \frac{\rho^\alpha u_i^\alpha}{\rho} \partial_{x_j} \sigma_{ij} = W - F_j v_j. \end{array} \right.$$

Les $2+d$ premières équations décrivent l'état du mélange. Les $2+d$ équations suivantes décrivent l'état de fluctuation d'un des constituants : on a ici arbitrairement choisi le fluide α . Pour chaque constituant s , on a noté u^s sa vitesse de fluctuation, c'est-à-dire relative par rapport au mouvement du mélange :

$$(1.5) \quad u^s = v^s - v.$$

Le tenseur des contraintes σ^s du fluide s prend en compte les contraintes de Reynolds, avec :

$$(1.6) \quad \sigma_{ij}^s = p^s \delta_{ij} + \rho^s u_i^s u_j^s,$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Le tenseur des contraintes σ du mélange est naturellement donné par :

$$(1.7) \quad \sigma_{ij} = \sum_{s=\alpha,\beta} \sigma_{ij}^s = p \delta_{ij} + \sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s u_i^s u_j^s.$$

La quantité ξ^s est l'énergie interne massique du fluide s prenant en compte le travail des contraintes de Reynolds, avec :

$$(1.8) \quad \xi^s = \epsilon^s + \frac{1}{2} u_j^s u_j^s,$$

où ϵ^s est l'énergie interne massique qu'aurait le fluide s en l'absence des autres constituants, c'est-à-dire :

$$(1.9) \quad \epsilon^s = e^s - \frac{1}{2} v_j^s v_j^s.$$

Il est aisé de voir que l'énergie interne massique du mélange ξ , définie par :

$$(1.10) \quad \xi = e - \frac{1}{2} v_j v_j,$$

vérifie la relation :

$$(1.11) \quad \xi = \frac{\sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s \xi^s}{\sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s}.$$

En laissant momentanément les termes sources F et W de côté, et compte tenu de toutes les relations ci-dessus, on remarque que la fermeture du système (1.4) ne nécessite que la connaissance de relations constitutives de la forme classique et très générale :

$$(1.12) \quad p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha, \epsilon^\alpha) \quad \text{et} \quad p^\beta = p^\beta(\rho^\beta, \epsilon^\beta).$$

Forme conservative

En s'aidant des relations (1.5), (1.8) et (1.9), on peut se convaincre en passant par un calcul simple mais laborieux que le système (1.4) peut s'écrire de manière équivalente (au moins pour

les solutions régulières) sous la forme conservative :

$$(1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^\alpha + \partial_{x_j} (\rho^\alpha v_j^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v_i^\alpha) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha v_i^\alpha v_j^\alpha + p^\alpha \delta_{ij}) = F_i, \\ \partial_t (\rho^\alpha e^\alpha) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha e^\alpha v_j^\alpha + p^\alpha v_j^\alpha) = W, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_{x_j} (\rho^\beta v_j^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v_i^\beta) + \partial_{x_j} (\rho^\beta v_i^\beta v_j^\beta + p^\beta \delta_{ij}) = -F_i, \\ \partial_t (\rho^\beta e^\beta) + \partial_{x_j} (\rho^\beta e^\beta v_j^\beta + p^\beta v_j^\beta) = -W. \end{array} \right.$$

On qualifie cette forme de *bifluide*, car l'état du mélange n'y apparait pas explicitement. Il peut cependant être déterminé à tout instant en utilisant les relations (1.1), (1.2) et (1.3).

Les relations constitutives étant de la forme (1.12), on voit que le système (1.13) est formé de deux sous-systèmes de type équations d'Euler pour chaque constituant, uniquement couplés par la présence des termes sources F et W . Les deux fluides ne s'influencent donc que par l'intermédiaire de ces termes, sur lesquels on revient en fin de section.

Forme de type modèle de mélange

On introduit la fraction massique du fluide α , définie par :

$$(1.14) \quad c = \frac{\rho^\alpha}{\rho}.$$

Les relations (1.2), (1.3) et (1.10) s'écrivent alors respectivement :

$$(1.15) \quad v = cv^\alpha + (1-c)v^\beta, \quad e = ce^\alpha + (1-c)e^\beta, \quad \xi = c\xi^\alpha + (1-c)\xi^\beta.$$

On note δv la vitesse relative entre les deux constituants :

$$(1.16) \quad \delta v = v^\alpha - v^\beta,$$

également appelée vecteur interpénétration. Les vitesses absolues des fluides peuvent alors s'écrire :

$$(1.17) \quad v^\alpha = v + (1-c)\delta v, \quad \text{et} \quad v^\beta = v - c\delta v,$$

et le tenseur des contraintes du mélange prend la forme simple :

$$(1.18) \quad \sigma_{ij} = p\delta_{ij} + \rho c(1-c)\delta v_i \delta v_j.$$

De la même manière, si l'on introduit l'énergie interne massique relative $\delta \epsilon$, définie par :

$$(1.19) \quad \delta \epsilon = \epsilon^\alpha - \epsilon^\beta,$$

on trouve que :

$$(1.20) \quad \epsilon^\alpha = \epsilon + (1 - c)\delta\epsilon, \quad \text{et} \quad \epsilon^\beta = \epsilon - c\delta\epsilon,$$

où :

$$(1.21) \quad \epsilon = \frac{\sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s \epsilon^s}{\sum_{s=\alpha,\beta} \rho^s} = c\epsilon^\alpha + (1 - c)\epsilon^\beta.$$

On dispose donc maintenant d'un nouveau jeu de variables décrivant l'état du mélange, à savoir l'ensemble formé des quantités ρ , ρv , ρe , c , δv et $\delta\epsilon$. En ces variables, on peut se convaincre par un calcul simple mais laborieux que le système (1.4) devient :

$$(1.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0, \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) = 0, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + \sigma_{ij} v_i + q_j) = 0, \\ \partial_t c + v_j \partial_{x_j} c + \frac{1}{\rho} \partial_{x_j} (\rho c (1 - c) \delta v_j) = 0, \\ \partial_t \delta v_i + v_j \partial_{x_j} \delta v_i + \delta v_j [\partial_{x_j} v_i + (1 - 2c) \partial_{x_j} \delta v_i - \delta v_i \partial_{x_j} c] \\ \quad + \frac{1}{\rho c} \partial_{x_i} p^\alpha - \frac{1}{\rho(1 - c)} \partial_{x_i} p^\beta = \frac{F_i}{\rho c(1 - c)}, \\ \partial_t \delta\epsilon + v_j \partial_{x_j} \delta\epsilon + \delta v_j [\partial_{x_j} \epsilon + (1 - 2c) \partial_{x_j} \delta\epsilon - \delta\epsilon \partial_{x_j} c] \\ \quad + \frac{\left((1 - c) p^\alpha - c p^\beta \right) (\partial_{x_j} v_j - \delta v_j \partial_{x_j} c) + \left((1 - c)^2 p^\alpha + c^2 p^\beta \right) \partial_{x_j} \delta v_j}{\rho c(1 - c)} \\ \quad = \frac{W - F_j v_j - (1 - 2c) F_j \delta v_j}{\rho c(1 - c)}. \end{array} \right.$$

On a introduit le flux d'énergie du mélange q , donné par :

$$(1.23) \quad q_i = \rho c(1 - c) \delta v_i \left(h^\alpha - h^\beta + \frac{1}{2} (1 - 2c) \delta v_j \delta v_j \right),$$

où les quantités h^α et h^β sont les enthalpies massiques des constituants, définies par :

$$(1.24) \quad h^s = \epsilon^s + \frac{p^s}{\rho^s}.$$

La forme (1.22) du modèle SC montre que le mélange est décrit par un système de type équations d'Euler avec contraintes de Reynolds et flux de chaleur, mais sans terme source. Autrement dit, la masse, l'impulsion et l'énergie totale du mélange sont conservées. L'équation pour le vecteur interpénétration δv va également beaucoup servir dans le chapitre suivant, en raison de la forme du terme source F .

Terme source du modèle SC

Jusqu'ici, les formes équivalentes du modèle SC (1.4), (1.13) et (1.22) ont été présentées sans prendre en compte l'expression des termes sources F et W . Ce point fait l'objet du

présent paragraphe. Dans [SC02], les auteurs considèrent que les interactions entre constituants électriquement neutres peuvent être modélisées par l'intermédiaire d'une force de relaxation des vitesses F et de son travail W , en posant :

$$(1.25) \quad \left| \begin{array}{l} F_i = -\nu\rho c(1-c)\delta v_i, \\ W = -\nu\rho c(1-c)v_j\delta v_j. \end{array} \right.$$

La valeur du coefficient de frottement $\nu \geq 0$ est alors déterminée par des considérations microscopiques et macroscopiques, avec :

$$(1.26) \quad \nu = \nu(t) = \frac{C(t)}{\lambda + L(t)},$$

où C est la vitesse thermique caractéristique des particules formant les constituants miscibles, λ est le libre parcours moyen de ces particules et L est la longueur caractéristique des filets d'interpénétration. Les auteurs s'intéressent en particulier à l'expression de L , et suggèrent d'y incorporer un effet-mémoire de la forme :

$$(1.27) \quad L(t) = \alpha \int_0^t \|\delta v(t')\| dt',$$

où $\delta v(t)$ est la valeur caractéristique du vecteur interpénétration dans l'écoulement à l'instant t . Le coefficient de proportionnalité strictement positif α constitue l'unique paramètre libre du modèle, permettant aux physiciens de calibrer le modèle en fonction de l'écoulement considéré (voir [WSC⁺03] et [WCC⁺04] pour plus de détails).

Dans cette thèse, pour que l'étude reste suffisamment générale, on choisit de remplacer la forme particulière du terme source (1.25)-(1.26)-(1.27) par la forme générique :

$$(1.28) \quad \left| \begin{array}{l} F_i = -\nu\rho f(c)\delta v_i, \\ W = -\nu\rho f(c)v_j\delta v_j, \end{array} \right.$$

où $\nu \in [0; +\infty[$ est alors l'unique paramètre du système et $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction régulière quelconque supposée connue. Le choix $f(c) = c(1-c)$ correspond à (1.25).

Table des notations

Notation	Nom	Définition ou relation utile
d	Dimension de l'espace	$d = 1, 2$ ou 3
i	Indice de composante spatiale	$i = 1, \dots, d$
j	Indice de composante spatiale	$j = 1, \dots, d$
δ	Symbole de Kronecker	$\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon
s	Indice d'identification de fluide	$s = \alpha, \beta$
ν	Coefficient de relaxation des vitesses	$\nu \geq 0$
ρ^s	Densité partielle du fluide s	.
v^s	Vitesse absolue du fluide s	.
u^s	Vitesse relative du fluide s par rapport au mélange	$u^s = v^s - v$
p^s	Pression partielle du fluide s	.
e^s	Energie totale spécifique du fluide s	.
ϵ^s	Energie interne spécifique du fluide s	$\epsilon^s = e^s - \frac{1}{2}v_j^s v_j^s$
h^s	Enthalpie spécifique du fluide s	$h^s = \epsilon^s + \frac{p^s}{\rho^s}$
ξ^s	Energie interne spécifique étendue du fluide s	$\xi^s = \epsilon^s + \frac{1}{2}u_j^s u_j^s$
ρ	Masse volumique réelle du mélange	$\rho = \rho^\alpha + \rho^\beta$
c	Fraction massique du fluide α	$c = \frac{\rho^\alpha}{\rho}$
v	Vitesse (barycentrique) absolue du mélange	$v = cv^\alpha + (1-c)v^\beta$
δv	Vitesse relative ou vecteur interpénétration β	$\delta v = v^\alpha - v^\beta$
p	Pression réelle du mélange	$p = p^\alpha + p^\beta$
σ	Tenseur des contraintes du mélange	$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + \rho c(1-c)\delta v_i \delta v_j$
e	Energie totale spécifique du mélange	$e = ce^\alpha + (1-c)e^\beta$
q	Flux d'énergie du mélange	$q_i = \rho c(1-c)\delta v_i \left(h^\alpha - h^\beta + \frac{1}{2}(1-2c)\delta v_j \delta v_j \right)$
ϵ	Energie interne spécifique du mélange	$\epsilon = ce^\alpha + (1-c)e^\beta$
ξ	Energie interne spécifique étendue du mélange	$\xi = e - \frac{1}{2}v_j v_j$
$\delta\epsilon$	Energie interne spécifique relative	$\delta\epsilon = \epsilon^\alpha - \epsilon^\beta$

Une revue de modèles multifluides à *une seule vitesse* est proposée dans [Lag00]. Dans ce qui suit, on dresse un état de l'art des modèles *multivitesse* pour les mélanges de fluides miscibles (une étude similaire sur les mélanges de fluides non miscibles est reportée dans l'annexe A). La discussion qui suit a déjà fait l'objet d'une publication sous la forme d'un rapport CEA (voir [Ena06]).

1.1 Introduction de l'état de l'art des modèles miscibles

On présente d'abord le cadre général de la modélisation multifluide miscible. Pour clarifier l'exposé, on définit ensuite le vocabulaire lié à l'étude des gaz et des plasmas. On rappelle après la hiérarchie des différentes échelles de modélisation d'un gaz. Enfin, on présente le plan global de cette revue de modèles miscibles.

1.1.1 Généralités sur la modélisation miscible

D'après Truesdell [Tru69], un modèle multifluide miscible est un modèle où la fraction volumique de chaque espèce n'intervient pas dans les équations. On ne modélise donc pas la topologie de l'écoulement ; en l'occurrence, lorsque l'on résoud numériquement un tel modèle, on ne sait pas dire quel volume occupe chaque espèce au sein d'une maille. On se sert d'un modèle miscible lorsque les espèces sont mélangées à l'échelle particulaire, supposée beaucoup plus petite que l'échelle spatiale d'observation. Un gaz étant un ensemble de particules libres, les modèles miscibles sont naturellement utilisés pour modéliser des écoulements de mélanges gazeux et de plasmas¹. On verra par contre que ces modèles ne permettent pas de traiter des problèmes d'écoulements diphasiques (comme la présence de bulles d'air dans de l'eau) alors que les modèles non miscibles le peuvent.

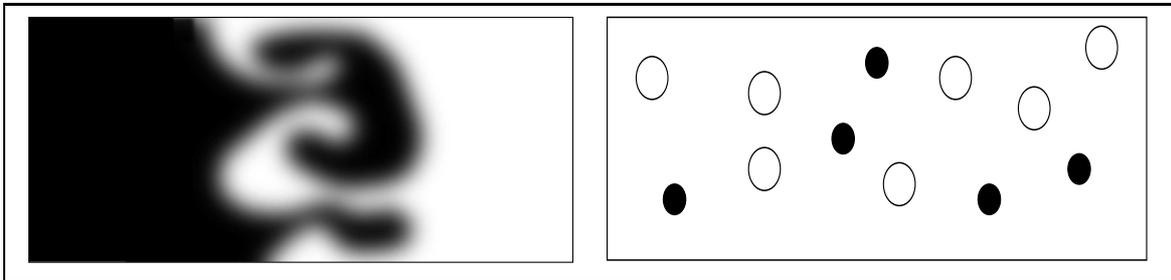


FIG. 1.1 – Mélange de deux fluides miscibles (l'un noir, l'autre blanc). A gauche : du point de vue macroscopique, il apparaît des zones de mélange (en gris). A droite : observation à l'échelle particulaire d'une zone de mélange.

On considère un volume V constitué de deux espèces miscibles (figure 1.1). Chaque espèce est un ensemble de particules libres. On note m^s la somme des masses des particules de l'espèce s ($s = 1, 2$) contenues dans le volume V . Par la suite, on appelle m^s la masse de l'espèce s . Les quantités macroscopiques que l'on peut alors définir pour le volume V sont :

- la masse $m \equiv m^1 + m^2$ qui est la somme des masses des deux espèces,
- la masse volumique $\rho \equiv \frac{m}{V}$,
- la fraction massique $c^s \equiv \frac{m^s}{m}$ de l'espèce s pour $s = 1, 2$. On a $c^1 + c^2 = 1$.

¹Au sens large (voir [Cho98]), un plasma est un gaz ionisé. On retient cette définition dans toute la suite.

Comme les espèces sont mélangées de façon intime, on ne parle pas d'interface entre les espèces, mais de zone de mélange (zone de gradient gris sur la figure). Du point de vue macroscopique de la mécanique des milieux continus, le volume V est rempli par les espèces 1 et 2, il n'y a pas de vide. Pourtant, à l'échelle particulaire, l'agrandissement d'une partie de la zone de mélange du volume V est essentiellement constitué de vide (figure 1.1). Pour cette raison, on ne définit pas le volume de chaque espèce lorsque les constituants sont miscibles.

Les volumes des espèces n'étant pas définis, on ne peut pas remonter aux fractions volumiques des espèces, ni même à leur masse volumique réelle. On introduit alors la masse volumique partielle de l'espèce s , qui est la masse volumique qu'aurait le volume V en l'absence de l'autre espèce :

$$(1.29) \quad \rho^s \equiv \frac{m^s}{V} \quad \text{pour } s = 1, 2$$

Contrairement à la masse volumique réelle qui est une variable thermodynamique intensive, la masse volumique partielle est une quantité extensive, puisque :

$$(1.30) \quad \rho = \rho^1 + \rho^2$$

1.1.2 Gaz et plasmas : quelques définitions

Un *gaz* est un ensemble de particules libres. La densité de particules n est le nombre moyen de particules contenues dans une unité de volume. Un gaz est dit *dilué* si le volume total des particules de rayon moyen r est négligeable devant le volume global du gaz, c'est-à-dire si $nr^3 \ll 1$. Il est dit *neutre* lorsque toutes ses particules libres sont électriquement neutres. Dans le cas contraire, on dit que le gaz est *ionisé*, certaines particules libres étant chargées. Lorsqu'un gaz est *totalelement ionisé*, toutes ses particules libres sont chargées. Un volume de gaz ionisé est *globalement neutre* lorsque la somme algébrique des charges des particules présentes dans ce volume est nulle. On généralise cette notion au gaz tout entier si tous les volumes que l'on considère sont globalement neutres, ce qui est généralement vrai tant que les éléments de volume contiennent un nombre suffisant de particules. On trouve dans la littérature deux niveaux de définition pour le terme *plasma*. Le mot plasma au sens large est synonyme de gaz ionisé (voir [Cho98]). De manière plus restrictive, le plasma est également défini comme un gaz totalement ionisé, globalement neutre et dont le comportement est régi uniquement par les effets collectifs des particules (voir [Che06]). Sauf mention du contraire, on choisit d'utiliser dans ce papier le terme plasma au sens large, tout en précisant les caractéristiques des gaz modélisés.

1.1.3 Echelles de modélisation d'un gaz

Pour modéliser le comportement d'un milieu gazeux, plusieurs niveaux de représentation sont disponibles (voir par exemple [CC39]) :

- A l'échelle microscopique, un milieu gazeux est composé de N particules classiques qui s'entrechoquent. L'état du système est alors donné par l'ensemble des positions $(x^1(t), \dots, x^N(t))$ et des vitesses $(v^1(t), \dots, v^N(t))$ des particules. L'évolution d'un tel système est régie par les lois du mouvement de la mécanique classique.
- Si le gaz est dilué et si N est grand, on introduit la fonction de distribution $f(x, v, t)$ qui donne à l'instant t le nombre de particules situées à la position x et possédant la vitesse v . L'état du système est alors donné par f . Ce niveau de théorie, intermédiaire, est appelé

théorie cinétique des gaz. Les équations modélisant l'évolution de f sont les équations cinétiques; on peut citer parmi elles l'équation de Boltzmann pour les gaz neutres et l'équation de Vlasov pour les plasmas.

- Si on se place à des échelles de longueur suffisamment grandes devant la distance moyenne séparant les particules, on peut voir le système de particules comme un milieu continu. L'état du système est alors défini par trois champs macroscopiques, généralement la masse volumique $\rho(x, t)$, le vecteur vitesse $v(x, t)$ et la température $T(x, t)$. Les équations d'évolution sont les équations de la dynamique des gaz, *i.e.* les équations d'Euler.

On peut ajouter un niveau de représentation encore plus fin que celui de la mécanique classique particulaire. Il s'agit de la mécanique quantique, où l'état du système est donné par la fonction d'onde à N particules et où l'évolution du système est régie par l'équation de Schrödinger. Malgré la progression régulière de la puissance des calculateurs, il n'est pas encore possible de simuler numériquement l'implosion d'un microballon avec des modèles plus fins que ceux de la dynamique des gaz². Pour cette raison, on ne présente dans la suite que des modèles fluides. Il est cependant nécessaire de s'intéresser à la théorie cinétique des gaz car elle permet de construire des modèles multifluides miscibles, comme le modèle de Scannapieco et Cheng.

1.1.4 Plan

Après cette introduction, on commence par poser les bases de la théorie cinétique des gaz. On présente l'équation de Boltzmann, la modélisation des collisions entre particules de gaz, le théorème H et la distribution maxwellienne. Une discussion sur la chronologie des processus de relaxation d'un gaz totalement ionisé est aussi proposée. Ensuite, on se concentre sur la construction des modèles miscibles. On détaille les limites hydrodynamique et multifluide de la théorie cinétique, puis on utilise les principes de la thermodynamique étendue pour fermer les modèles. Enfin, on fait la synthèse des propriétés des modèles multifluides miscibles ainsi obtenus.

1.2 Théorie cinétique des gaz

En se basant sur les ouvrages [Cer75], [TM80] et [VCK65], on présente la théorie cinétique des gaz dilués. Cette section pose les bases nécessaires à la construction, dans la section suivante, des modèles miscibles. On commence par donner l'équation de Boltzmann, puis on passe en revue les différents types de collisions susceptibles de se produire entre les particules d'un gaz. On énonce ensuite le théorème H garantissant l'existence d'une entropie et on introduit la notion fondamentale d'équilibre thermodynamique local, qui permet de définir des champs macroscopiques pour le gaz, comme la température par exemple. On discute enfin de la chronologie des processus intervenant au cours de la relaxation d'un gaz totalement ionisé. Ce dernier point a pour but de justifier certaines hypothèses³ généralement faites pour simplifier les modèles.

²Si on note D la dimension de l'espace et N le nombre moyen de mailles par dimension, une modélisation cinétique demande de calculer N^{2D} valeurs de f à chaque itération en temps, contre seulement $(2+D)N^D$ valeurs du champ (ρ, v, T) avec une modélisation macroscopique.

³On pense ici à la fermeture *isotherme*, au sens $T^1 = T^2 = T$. On va voir que la relaxation des températures ioniques est un phénomène beaucoup plus rapide que la relaxation des vitesses ioniques pour les plasmas considérés ici.

1.2.1 Equation de Boltzmann

En théorie cinétique, l'état d'un gaz monoatomique est complètement décrit par la fonction de distribution $f(x, v, t)$ donnant à l'instant t la densité des particules situées à la position $x \in \mathbb{R}^D$ et possédant la vitesse $v \in \mathbb{R}^D$, D étant la dimension de l'espace. Comme toutes les particules ont une vitesse finie, toutes les fonctions de distribution f physiquement admissibles doivent renvoyer des valeurs réelles positives et doivent rapidement s'annuler lorsque $v_i \rightarrow \infty$ pour $i = 1, \dots, D$. L'équation de transport de base dans la théorie cinétique des gaz a été dérivée du théorème de Liouville pour la première fois par Ludwig Boltzmann en 1872 (voir [LP81] et [GS03]). L'équation ainsi obtenue, appelée équation de Boltzmann, s'écrit :

$$(1.31) \quad \partial_t f + v_j \partial_{x_j} f = C(f)$$

j est un indice de composante, variant de 1 à D . Par convention, lorsqu'un indice se répète dans un produit ou à travers une dérivée partielle, il y a sommation implicite sur toutes les composantes⁴. $C(f)$ est l'opérateur de collision, également appelé intégrale de collision.

Lorsque l'on tient compte de l'effet de champs externes (gravitation, champ électrique externe...) ou internes (champ magnétique induit par le mouvement des particules chargées par exemple) sur l'accélération $a \in \mathbb{R}^D$ des particules, on considère la forme généralisée de l'équation de Boltzmann dans le cas monoespèce :

$$(1.32) \quad \partial_t f + v_j \partial_{x_j} f + a_j \partial_{v_j} f = C(f)$$

Dans un mélange gazeux ou dans un plasma, plusieurs espèces de particules sont présentes. Dans ce cas, on associe à chaque espèce s une fonction de distribution f^s vérifiant l'équation de Boltzmann suivante :

$$(1.33) \quad \partial_t f^s + v_j^s \partial_{x_j} f^s + a_j^s \partial_{v_j} f^s = \sum_r Q(f^s, f^r)$$

Comme les collisions peuvent se produire aussi bien entre des particules d'une même espèce qu'entre des particules d'espèces différentes, l'indice muet r varie sur toutes les espèces. Ainsi le second membre de (1.33) assure le couplage des équations pour chaque espèce.

1.2.2 Modélisation des collisions

Une *collision* est une interaction entre deux particules ; on parle aussi d'interaction *binnaire*, voir figure 1.2.

L'opérateur de collision $C(f)$ permet de rendre compte sur f de l'effet global de toutes les collisions. L'expression retenue par Boltzmann est :

$$(1.34) \quad C(f) \equiv \int w(f' f'_1 - f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma'_1$$

Les notations adoptées ici sont celles proposées par Lifshitz [LP81] : $f = f(v)$, $f_1 = f(v_1)$, $f' = f(v')$ et $f'_1 = f(v'_1)$. Les grandeurs non indicées sont associées à la particule de référence,

⁴Par exemple, en trois dimensions, $v_j \partial_{x_j} f = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} f$. Ainsi $\partial_{x_j} v_j$ est la divergence de v .

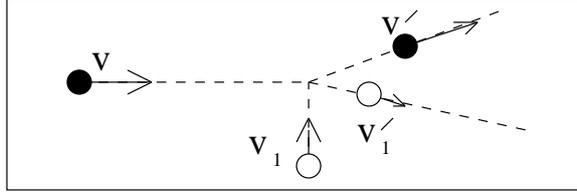


FIG. 1.2 – Collision entre deux particules neutres. La particule de référence (noire) n'est pas indiquée, la particule incidente (blanche) est indiquée 1.

les grandeurs indicées 1 sont associées à la particule incidente, et les grandeurs primées sont les valeurs après choc. On a noté Γ l'impulsion d'une particule de gaz monoatomique. Le facteur $w > 0$ est lié à la section efficace de collision $d\sigma$ par la relation :

$$(1.35) \quad d\sigma = \frac{w(\Gamma', \Gamma'_1, \Gamma, \Gamma_1)}{|v - v_1|} d\Gamma' d\Gamma'_1$$

Lifshitz [LP81] fait remarquer que même si le mouvement des particules est supposé classique, w doit généralement être déterminé par la mécanique quantique.

Quel que soit le type des collisions modélisées, un opérateur de collision doit par définition conserver localement les quantités 1, v_i et v^2 ainsi que toute combinaison linéaire ξ de ces quantités, mais seulement de ces quantités (voir par exemple [Gol98]). On énonce ainsi la propriété 1.1 :

Propriété 1.1 (de l'opérateur C). *Pour toute fonction de distribution admissible f , on doit avoir l'équivalence :*

$$(1.36) \quad \int_{\mathbb{R}^D} \xi C(f) d^D v = 0 \Leftrightarrow \xi \text{ est une combinaison linéaire de } 1, v_i, v^2$$

où $i = 1, \dots, D$.

On discute maintenant des différents types de collisions et de leur modélisation. Pour cela, on distingue les cas des gaz neutres et des gaz ionisés.

Collisions dans un gaz neutre

Il n'existe qu'un seul type d'interaction entre les particules dans un gaz neutre : la collision réelle (exemple figure 1.2). Une *collision réelle*, également appelée *collision à courte portée*, est une collision qui n'intervient que lorsque la distance séparant les centres des deux particules est de l'ordre de $2r$. La distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions réelles est le libre parcours moyen $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2n\pi r^2}}$. Pour un gaz dilué, on a $r \ll \lambda$: la taille des particules est négligeable devant le libre parcours moyen.

L'opérateur de collision modélisant l'effet des collisions réelles peut s'écrire sous la forme quadratique (voir [LP81]) :

$$(1.37) \quad C(f) = \int (f' f'_1 - f f_1) |v - v_1| d\sigma d\Gamma' = Q(f, f)$$

Les notations sont les mêmes que dans (1.34). Le changement de notation $C(f) = Q(f, f)$ indique que l'intégrale de collision est une forme quadratique de f dans le cas monoespèce. Dans le cas multiespèce, les collisions peuvent intervenir entre particules d'espèces différentes, dont les fonctions de distribution sont notées f et g . Dans ce cas, l'opérateur de collision $Q(f, g)$ est une forme bilinéaire de f et g :

$$(1.38) \quad Q(f, g) = \int (f'g'_1 - fg_1)|v - v_1| d\sigma d\Gamma'$$

Il est possible de calculer directement certaines intégrales de collision, lorsque les collisions sont des chocs élastiques entre particules sphériques par exemple (voir [Mai96]). D'autres procédures consistent à donner une approximation de l'intégrale de collision autour de l'équilibre thermodynamique local (développements d'Hilbert et de Chapman-Enskog). On reviendra sur ce point lors de la construction des modèles miscibles.

Collisions dans un gaz ionisé

Dans un gaz ionisé, il existe au moins deux espèces de particules qui doivent être distinguées : les ions et les électrons. On considère donc plusieurs équations cinétiques (1.33) couplées par les intégrales de collision. Il y a 3 types d'interactions entre les particules d'un gaz ionisé :

- les collisions réelles ou collisions à courte portée, intervenant lors de la rencontre de particules neutre-neutre ou neutre-chargée,
- les *interactions coulombiennes* ou *interactions à longue portée*, intervenant lors de l'approche de deux particules chargées,
- les *effets électromagnétiques collectifs*, qui résultent des actions de toutes les particules chargées.

Dans le cas limite du gaz très faiblement ionisé, on néglige souvent les collisions coulombiennes et les effets électromagnétiques collectifs devant les collisions réelles. A l'opposé, dans un gaz totalement ionisé, toutes les particules sont chargées, il n'y a donc pas de collisions réelles. Dans le cas d'un plasma, on néglige les collisions coulombiennes devant les effets collectifs des particules. L'équation cinétique est alors l'équation de Vlasov pour chaque espèce s (ions, électrons) :

$$(1.39) \quad \partial_t f^s + v_j^s \partial_{x_j} f^s + a_j^{s,E,B} \partial_{v_j} f^s = 0$$

L'équation de Vlasov (1.39) est un cas particulier de l'équation (1.33) où les effets des collisions sont négligés devant les effets collectifs et où l'accélération des particules $a^{E,B}$ est générée par les champs électromagnétiques induits par le mouvement des particules chargées (voir [Cho98]). Etant dépourvue d'opérateur de collision, l'équation de Vlasov ne permet pas de modéliser la relaxation d'une espèce vers un équilibre thermodynamique local. Dans le cas plus complexe d'un plasma au sens de [Cho98], les équations cinétiques de chaque espèce doivent pouvoir rendre compte des effets de toutes les interactions recensées plus haut. Si le gaz est totalement ionisé, l'opérateur de collision retenu est celui de Focker-Planck :

$$(1.40) \quad Q(f^s, f^r) = 2\pi(Z^s)^2(Z^r)^2 e^4 \log \Lambda^{sr} \frac{1}{m^s} \frac{\partial}{\partial v_j^s} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{V^2 \delta_{ij} - V_i V_j}{|V|^3} \left(\frac{f^r}{m^s} \frac{\partial f^s}{\partial v_i^s} - \frac{f^s}{m^r} \frac{\partial f^r}{\partial v_i^r} \right) d^D v^r$$

Z est le nombre de charges, e la charge électrique élémentaire, m la masse d'une particule et $V = v^s - v^r$ la vitesse relative des espèces. $\log \Lambda^{sr}$ est un logarithme coulombien, c'est-à-dire le logarithme du produit de la longueur de Debye avec la borne supérieure du nombre d'onde caractéristique k_{max}^{sr} (voir [DMP98] pour un calcul des logarithmes coulombiens). On renvoie à [LP81] et [DMP98] pour des détails sur l'opérateur de collision de Focker-Planck.

1.2.3 Théorème H et Maxwellienne

Un gaz isolé dont l'état macroscopique n'est pas à l'équilibre thermodynamique doit atteindre par lui-même un Equilibre Thermodynamique Local (ETL). Cette relaxation doit s'accompagner d'une augmentation de l'entropie du gaz due aux collisions microscopiques responsables de l'évolution du système. Le théorème H de Boltzmann 1.1 assure qu'il existe une entropie monotone :

Théorème 1.1 (H de Boltzmann). *Pour toute fonction de distribution admissible f , on a :*

$$(1.41) \quad \int_{\mathbb{R}^D} \log f C(f) d^D v \leq 0$$

De plus, on a l'équivalence :

$$(1.42) \quad \int_{\mathbb{R}^D} \log f C(f) d^D v = 0 \Leftrightarrow f \text{ est une distribution maxwellienne}$$

où une distribution maxwellienne est de la forme :

$$(1.43) \quad M_{\rho,u,\theta}(v) = \frac{\rho}{m(2\pi\theta)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+^$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in \mathbb{R}^D$. $m \in \mathbb{R}_+^*$ est la masse d'une particule.*

Preuve du théorème H Une preuve rigoureuse est proposée dans [TM80] ; on ne donne ici que les points importants. Par définition de l'opérateur de collision (1.34),

$$C(f) = \int w(f' f'_1 - f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1$$

où $w > 0$. Si on intègre le produit $\log f C(f)$ sur l'espace des vitesses, on obtient :

$$(1.44) \quad A = \int_{\mathbb{R}^D} \log f C(f) d^D v = \int_{\mathbb{R}^D} \int w(f' f'_1 - f f_1) \log f d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 d^D v$$

Le facteur intégrant w ne dépend pas du point de vue (particule de référence ou incidente, avant ou après collision) : on a la relation $w = w' = w_1 = w'_1$. En changeant successivement les jeux de variables, on peut alors écrire :

$$(1.45a) \quad A = \int_{\mathbb{R}^D} \int w(f' f'_1 - f f_1) \log f d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1 d^D v$$

$$(1.45b) \quad = \int_{\mathbb{R}^D} \int w(f' f'_1 - f f_1) \log f_1 d\Gamma d\Gamma' d\Gamma'_1 d^D v_1$$

$$(1.45c) \quad = - \int_{\mathbb{R}^D} \int w(f' f'_1 - f f_1) \log f' d\Gamma'_1 d\Gamma d\Gamma_1 d^D v'$$

$$(1.45d) \quad = - \int_{\mathbb{R}^D} \int w(f' f'_1 - f f_1) \log f'_1 d\Gamma d\Gamma' d\Gamma_1 d^D v'_1$$

On en déduit que :

$$(1.46) \quad A = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^D} \int w(f' f'_1 - f f_1) \log \frac{f f_1}{f' f'_1} d\Gamma_1 d\Gamma'_1 d^D v$$

A partir de (1.46), on voit que si $f' f'_1 \geq 0$, le logarithme dans l'intégrand n'est pas positif ; si $f' f'_1 \leq 0$, le logarithme n'est pas négatif. Donc l'intégrand n'est jamais positif, et l'intégrale A est négative ou nulle ; on a ainsi la preuve du premier point.

L'intégrand n'étant jamais positif, on en déduit que :

- si l'intégrand n'est pas nul partout, l'intégrale A est strictement négative.
- si l'intégrand est nul partout, l'intégrale A s'annule.

Lorsque A s'annule, la propriété 1.1 indique que $\log f$ est une combinaison linéaire des quantités 1 , v_i et v^2 . On a alors :

$$(1.47) \quad \log f = \alpha + \beta_i v_i + \gamma v^2$$

où α , γ et les β_i sont des paramètres réels. f peut donc s'écrire sous la forme :

$$(1.48) \quad f = a e^{-b|v-c|^2}$$

avec pour seules restrictions $a > 0$ et $b > 0$, de sorte que f soit une fonction positive intégrable. La forme (1.48) est une forme gaussienne dans l'espace des vitesses, elle est appelée distribution maxwellienne. Ceci achève la preuve du théorème H. ■

Remarque sur la convention de signe de l'entropie Le terme $\int_{\mathbb{R}^D} \log f C(f) d^D v$ étant négatif ou nul (théorème H), on l'assimile à la dérivée lagrangienne d'une densité d'entropie. Pourtant, dans la littérature, les points de vue diffèrent concernant la convention de signe dans la définition de l'entropie. Des auteurs comme [LP81] définissent la variation de densité d'entropie par $\frac{ds}{dt} = - \int_{\mathbb{R}^D} \log f C(f) d^D v$ de sorte que $\frac{ds}{dt} \geq 0$ (l'entropie augmente, c'est une entropie physique), alors que des auteurs comme [Lev96] et [Cer75] adoptent la convention $\frac{ds}{dt} = \int_{\mathbb{R}^D} \log f C(f) d^D v$ de sorte que $\frac{ds}{dt} \leq 0$ (l'entropie diminue, c'est une entropie mathématique). •

Remarque sur le rôle de C L'opérateur de collision C a un rôle fondamental dans la description physique d'un modèle cinétique. Lorsque la distribution initiale n'est pas une Maxwellienne, l'opérateur de collision assure la relaxation vers une distribution maxwellienne. Un système perturbé, lorsqu'il est modélisé par une équation cinétique dépourvue d'opérateur de collision, ne peut donc pas atteindre d'équilibre thermodynamique local (cas de l'équation de Vlasov par exemple). •

On vient de voir que la distribution maxwellienne (1.43) caractérise l'équilibre thermodynamique local. Lorsque $f = M_{\rho,u,\theta}$, le gaz est localement à l'équilibre, c'est-à-dire que les collisions, qui ont toujours lieu, ont un effet globalement nul sur le gaz. Si $f = M_{\rho,u,\theta}$, l'entropie

ne croît plus. Enfin, si $f = M_{\rho,u,\theta}$, on peut représenter l'état du système non plus par f , mais simplement par les champs ρ, u, θ sans perte de généralité. On se concentre maintenant sur l'étude de ces champs.

Les coefficients qui apparaissent dans $M_{\rho,u,\theta}$ dépendent des deux paramètres réels strictement positifs ρ et θ , ainsi que du vecteur u de \mathbb{R}^D , de sorte que :

$$(1.49a) \quad m \int_{\mathbb{R}^D} M_{\rho,u,\theta}(v) d^D v = \rho$$

$$(1.49b) \quad m \int_{\mathbb{R}^D} M_{\rho,u,\theta}(v)v d^D v = \rho u$$

$$(1.49c) \quad m \int_{\mathbb{R}^D} M_{\rho,u,\theta}(v) \frac{v^2}{2} d^D v = \frac{\rho}{2}(u^2 + D\theta)$$

Les résultats (1.49) font appel au calcul des intégrales de Gauss. On appelle les quantités ρ , ρu et $\frac{\rho}{2}(u^2 + D\theta)$ les trois⁵ premiers moments de l'équation de Boltzmann, définis par :

$$(1.50a) \quad \rho \equiv m \int_{\mathbb{R}^D} f d^D v$$

$$(1.50b) \quad \rho u \equiv m \int_{\mathbb{R}^D} v f d^D v$$

$$(1.50c) \quad \frac{\rho}{2}(u^2 + D\theta) \equiv m \int_{\mathbb{R}^D} \frac{v^2}{2} f d^D v$$

f étant un nombre de particules par unité de volume de l'espace des phases (x, v) , le nombre $n = \int_{\mathbb{R}^D} f d^D v$ est une densité de particules, en m^{-D} . $\rho = mn$ a la dimension d'une masse volumique, ρu a la dimension d'une densité d'impulsion, et $\frac{\rho}{2}(u^2 + D\theta)$ a la dimension d'une densité d'énergie. Les définitions (1.50), dont la compatibilité avec la forme (1.43) est prouvée par (1.49), sont valables quel que soit l'état thermodynamique du système.

1.2.4 Relaxation d'un gaz totalement ionisé

La relaxation d'un gaz est la phase pendant laquelle le gaz passe d'un état thermodynamique perturbé à un équilibre thermodynamique local ; elle se compose d'une suite de processus. En se basant sur les travaux de Decoster [DMP98], on expose maintenant une hiérarchie des ces processus pour le cas des gaz totalement ionisés. La physique des plasmas apporte des informations très utiles sur la façon de fermer un modèle miscible multifluide multivitesse.

Pour simplifier l'exposé, on suppose dans un premier temps que le gaz est composé d'électrons (indice e) et d'une seule espèce d'ions (indice i). Les collisions, uniquement coulombiennes, sont modélisées par l'opérateur de Focker-Planck (1.40). Dans ce cas, on calcule toutes les fréquences de collision caractéristiques, et en déduit une chronologie des processus intervenant dans la relaxation. Commençons par définir ces fréquences :

- ν^{sr} est la fréquence avec laquelle les collisions de l'espèce s sur l'espèce r entraînent un transfert d'*impulsion* de l'espèce s vers l'espèce r .

⁵Plus rigoureusement, les $(2 + D)$ premiers moments.

- ν_{ϵ}^{sr} est la fréquence avec laquelle les collisions de l'espèce s sur l'espèce r entraînent un transfert d'énergie de l'espèce s vers l'espèce r .

On calcule les expressions exactes de ces fréquences à l'ETL, *i.e.* lorsque les distributions ionique et électronique sont des Maxwelliennes. Si on s'écarte de l'ETL, il faut corriger les expressions des fréquences. Pour obtenir les termes correctifs, on se place en dehors de l'équilibre en perturbant les fonctions de distribution. La forte différence entre les masses électronique et ionique $m^e \ll m^i$ permet de simplifier les fréquences perturbées. On obtient :

$$(1.51) \quad \nu^{ee} \simeq \frac{4\sqrt{\pi}n^e e^4 \log \Lambda^{ee}}{3\sqrt{m^e}(T^e)^{\frac{3}{2}}} \quad \nu^{ii} \simeq (Z^i)^3 \sqrt{\frac{m^e}{m^i}} \nu^{ee} \quad \nu^{ei} \simeq Z^i \nu^{ee} \quad \nu_{\epsilon}^{ei} \simeq Z^i \frac{m^e}{m^i} \nu^{ee}$$

Par ailleurs, on rappelle que la fréquence plasma ω est :

$$(1.52) \quad \omega = \sqrt{\frac{4\pi n^e e^2}{m^e}}$$

On a noté n la densité particulière, m la masse d'une particule, e la charge électrique élémentaire, T la température, et Z le nombre de charges. Si Z^i est petit⁶, au sens $(Z^i)^3 \ll \sqrt{\frac{m^i}{m^e}}$, on obtient le classement :

$$(1.53) \quad \omega \gg \nu^{ei} \geq \nu^{ee} \gg \nu^{ii} \gg \nu_{\epsilon}^{ie}$$

Par conséquent, les processus intervenant dans la relaxation se déroulent sur quatre échelles de temps. Du phénomène le plus rapide au phénomène le plus lent, on a :

1. quasi-neutralité (les électrons et les ions se placent de sorte que la charge globale des volumes d'observation soit nulle, $n^e = Z^i n^i$),
2. courant quasi-nul (les électrons suivent le mouvement des ions, $v^e = v^i$) et ETL des électrons (on peut définir une température T^e),
3. ETL des ions (on peut définir une température T^i),
4. relaxation des températures (ions et électrons tendent à avoir la même température, $T^e = T^i$).

La modélisation du gaz dépend donc des échelles de temps que l'on considère :

- entre 1 et 2 : une description cinétique est nécessaire,
- entre 2 et 3 : une description fluide est suffisante pour les électrons, une description cinétique des ions est nécessaire,
- entre 3 et 4 : une description hydrodynamique à deux températures est suffisante,
- après 4 : une description hydrodynamique à une seule température est suffisante.

Le raisonnement ci-dessus concerne un gaz pur totalement ionisé, c'est-à-dire composé d'une seule espèce d'ions. Lorsque plusieurs espèces d'ions s'interpénètrent, la détermination des fréquences de collision est un problème bien plus complexe, également traité dans [DMP98]. On peut étendre la chronologie ci-dessus au cas multiespèce :

1. quasi-neutralité,

⁶Le cas Z^i grand est traité dans [DMP98].

2. courant quasi-nul et ETL des électrons,
3. ETL d'une espèce d'ions, puis ETL d'une autre espèce d'ions, etc.,
4. relaxation des températures ioniques ($T^{i,1} = T^{i,2} = \dots = T^i$),
5. relaxation des vitesses des espèces ioniques ($v^{i,1} = v^{i,2} = \dots = v^i$),
6. relaxation des températures électronique et ionique moyenne ($T^e = T^i$).

Par conséquent, si il y a deux espèces ioniques,

- entre 1 et 2 : une description cinétique est nécessaire,
- entre 2 et 3 : une description fluide est suffisante pour les électrons, une description cinétique des ions 1 et 2 est nécessaire,
- entre 3 et 4 : une description multifluide à deux vitesses ($v^{i,1}$ et $v^{i,2}$) et trois températures ($T^e, T^{i,1}$ et $T^{i,2}$) est suffisante,
- entre 4 et 5 : une description multifluide à deux vitesses ($v^{i,1}$ et $v^{i,2}$) et deux températures (T^e et T^i) est suffisante,
- entre 5 et 6 : une description hydrodynamique à deux températures (T^e et T^i) est suffisante,
- après 6 : une description hydrodynamique à une seule température est suffisante.

On déduit de cette analyse qu'un modèle à deux températures (T^e et T^i) et à autant de vitesses que d'espèces d'ions constitue une description suffisante de l'interpénétration de plasmas (entre 4 et 5), ce qui est un résultat important. A titre d'exemple, on considère un plasma composé d'une espèce d'électrons et deux espèces d'ions, soit trois espèces de particules. Une description multifluide complète serait alors composée de 9 équations : pour chaque espèce, une équation de conservation de la masse, une équation de conservation de l'impulsion et une équation de conservation de l'énergie. Pourtant, si on ne s'intéresse qu'à des phénomènes au moins aussi lents que la relaxation des températures ioniques, on peut se passer des équations de conservation de la masse et de l'impulsion des électrons et on peut remplacer les deux équations de conservation de l'énergie pour chaque espèce d'ions par une équation de conservation de l'énergie du mélange ionique. On réduit ainsi le modèle à 9 équations à un modèle à 6 équations, dont les 6 variables sont :

- la masse volumique de chaque espèce d'ions $\rho^{i,1}$ et $\rho^{i,2}$,
- la vitesse de chaque espèce d'ions $v^{i,1}$ et $v^{i,2}$,
- la température moyenne des ions T^i ,
- la température des électrons T^e .

1.3 Construction des modèles miscibles

A l'aide des notions introduites dans la section précédente, on construit dans cette section un modèle miscible hydrodynamique (*i.e.* monofluide) et un modèle miscible multifluide multi-vitesse d'interpénétration dans le cas de gaz neutres. On détaille notamment comment obtenir des équations macroscopiques par intégration d'équations cinétiques sur l'espace des vitesses. On présente ensuite les principes de la thermodynamique étendue, qui permettent de fermer les modèles de façon thermodynamiquement admissible.

1.3.1 Limite hydrodynamique de la théorie cinétique

En se basant sur les ouvrages [Cer75], [TM80] et [VCK65], on montre maintenant comment construire un modèle hydrodynamique à partir de la théorie cinétique des gaz. Pour un gaz

composé d'une seule espèce de particules, on rappelle (voir équation (1.32)) que l'équation de Boltzmann généralisée s'écrit :

$$(1.54) \quad \partial_t f + v_j \partial_{x_j} f + a_j \partial_{v_j} f = C(f)$$

Si on multiplie (1.54) par une quantité Φ et qu'on l'intègre sur l'espace des vitesses, on obtient :

$$(1.55) \quad \int_{\mathbb{R}^D} [\Phi \partial_t f + \Phi v_j \partial_{x_j} f + \Phi a_j \partial_{v_j} f] d^D v = \int_{\mathbb{R}^D} \Phi C(f) d^D v$$

Une intégration par parties mène à la relation :

$$(1.56) \quad \partial_t \int_{\mathbb{R}^D} \Phi f d^D v + \partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^D} \Phi v_j f d^D v \\ = \int_{\mathbb{R}^D} \Phi C(f) d^D v + \int_{\mathbb{R}^D} f (\partial_t \Phi + v_j \partial_{x_j} \Phi + a_j \partial_{v_j} \Phi) d^D v$$

On a supposé que les variables t , x , v , et a sont indépendantes. On s'est également servi du fait que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial v_l} (\Phi a_l f) dv_l = [\Phi a_l f]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ pour tout $l = 1, \dots, D$ puisque $f = 0$ pour des vitesses infinies (ici, il n'y a pas de sommation sur l'indice l). On rappelle que $n \equiv \int_{\mathbb{R}^D} f d^D v$, où n est le nombre de particules par unité de volume. Pour toute fonction ψ , on introduit l'opérateur de moyenne :

$$(1.57) \quad \langle \psi \rangle \equiv \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^D} \psi f d^D v$$

L'opérateur $\langle \rangle$ est linéaire ($\langle aA(v) + bB(v) \rangle = a \langle A(v) \rangle + b \langle B(v) \rangle$) et idempotent ($\langle \langle A(v) \rangle \rangle = \langle A(v) \rangle$). Avec ces notations, l'équation (1.56) devient :

$$(1.58) \quad \partial_t (n \langle \Phi \rangle) + \partial_{x_j} (n \langle \Phi v_j \rangle) - n [\langle \partial_t \Phi \rangle + \langle v_j \partial_{x_j} \Phi \rangle + \langle a_j \partial_{v_j} \Phi \rangle] = \int_{\mathbb{R}^D} \Phi C(f) d^D v$$

Si on suppose que $\Phi = \Phi(v)$ ne dépend que de v , l'équation (1.58) prend la forme simple :

$$(1.59) \quad \partial_t (n \langle \Phi \rangle) + \partial_{x_j} (n \langle \Phi v_j \rangle) = \sigma_a(\Phi) + \sigma_C(\Phi)$$

On a posé $\sigma_a(\Phi) = n \langle a_j \partial_{v_j} \Phi \rangle$ et $\sigma_C(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^D} \Phi C(f) d^D v$. L'équation (1.59) est une équation locale de conservation de la quantité $n \langle \Phi \rangle$, où les termes liés à l'accélération a et à l'opérateur de collision C sont des termes sources. On a vu que l'opérateur de collision C doit conserver localement les quantités 1, v_i et v^2 ainsi que toute combinaison linéaire de ces quantités (voir propriété 1.1). On choisit alors les multiplicateurs suivants :

$$(1.60a) \quad \Phi_m \equiv m$$

$$(1.60b) \quad \Phi_{v,i} \equiv m v_i$$

$$(1.60c) \quad \Phi_e \equiv \frac{1}{2} m v^2$$

En injectant successivement les multiplicateurs (1.60) dans l'équation (1.59), on forme le système d'équations :

$$(1.61a) \quad \partial_t (mn \langle 1 \rangle) + \partial_{x_j} (mn \langle v_j \rangle) = 0$$

$$(1.61b) \quad \partial_t (mn \langle v_i \rangle) + \partial_{x_j} (mn \langle v_i v_j \rangle) = mn \langle a_i \rangle$$

$$(1.61c) \quad \partial_t \left(\frac{1}{2} mn \langle v^2 \rangle \right) + \partial_{x_j} \left(\frac{1}{2} mn \langle v^2 v_j \rangle \right) = mn \langle a_j v_j \rangle$$

On rappelle les définitions des 3 premiers moments de l'équation de Boltzmann (voir équations (1.50)) :

$$(1.62a) \quad \rho \equiv m \int_{\mathbb{R}^D} f d^D v$$

$$(1.62b) \quad \rho u \equiv m \int_{\mathbb{R}^D} v f d^D v$$

$$(1.62c) \quad \frac{\rho}{2} (u^2 + D\theta) \equiv m \int_{\mathbb{R}^D} \frac{v^2}{2} f d^D v$$

D'après (1.57) et (1.62), on a $\langle v_i \rangle = u_i$ et $\langle v^2 \rangle = u^2 + D\theta$. Par contre, on n'a pas d'expression directe pour les valeurs moyennes $\langle v_i v_j \rangle$ et $\langle v^2 v_j \rangle$. Pour calculer ces quantités, on distingue le cas de l'ETL du cas général sans hypothèse d'ETL.

Limite hydrodynamique à l'ETL

On suppose le gaz à l'ETL, *i.e.* f est une Maxwellienne (voir (1.43)). En faisant appel au calcul des intégrales de Gauss, on peut alors calculer directement toutes les valeurs moyennes apparaissant dans le système (1.61). On obtient :

$$(1.63a) \quad \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho u_j) = 0$$

$$(1.63b) \quad \partial_t (\rho u_i) + \partial_{x_j} (\rho u_i u_j + \rho \theta \delta_{ij}) = \rho \langle a_i \rangle$$

$$(1.63c) \quad \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{D}{2} \rho \theta \right) + \partial_{x_j} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 u_j + \frac{D}{2} \rho \theta u_j + \rho \theta u_j \right) = \rho \langle a_j v_j \rangle$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker⁷. On peut interpréter $\rho = mn$ comme la masse volumique du gaz d'un point de vue macroscopique. La quantité $u = \langle v \rangle$ est la valeur moyenne des vitesses particulières microscopiques, elle correspond donc à la vitesse locale du gaz. De la même manière, $\langle a \rangle$ est l'accélération locale du fluide. On pose aussi $e \equiv \frac{1}{2} (u^2 + D\theta) = \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle$ qui représente l'énergie totale massique du gaz (ρe est la densité d'énergie totale). Comme $\frac{1}{2} u^2$ est l'énergie cinétique massique, la quantité $\epsilon \equiv \frac{D}{2} \theta$ correspond à l'énergie interne massique. On pose enfin $p \equiv \rho \theta$. Avec ces nouvelles notations et en l'absence de champ de force volumique ($a = 0$), on vient d'obtenir les équations d'Euler⁸ :

$$(1.64a) \quad \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho u_j) = 0$$

$$(1.64b) \quad \partial_t (\rho u_i) + \partial_{x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) = 0$$

$$(1.64c) \quad \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} ((\rho e + p) u_j) = 0$$

⁷Par définition du symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon.

⁸Les équations d'Euler modélisent l'écoulement adiabatique d'un gaz compressible non visqueux.

Aux équations (1.64), il faut ajouter la relation d'état :

$$(1.65) \quad p = \frac{2}{D} \rho \epsilon$$

Ici, la relation (1.65), de type gaz parfait, est imposée par la technique de construction, lorsque f est supposée être une distribution maxwellienne.

Limite hydrodynamique sans hypothèse d'ETL

Cette fois, on ne fait aucune hypothèse sur la forme de f . On peut néanmoins calculer les valeurs moyennes apparaissant dans (1.61) en introduisant une décomposition de la vitesse particulaire. On a, par définition de u , la relation $u = \langle v \rangle$. On écrit alors la vitesse particulaire v comme la somme de la vitesse moyenne de l'écoulement u avec une vitesse de fluctuation w mesurée dans un repère lié au fluide :

$$(1.66) \quad w \equiv v - u$$

On vérifie facilement que la vitesse de fluctuation vérifie la relation $\langle w \rangle = 0$. En injectant l'expression de v dans (1.61) et en utilisant la linéarité et l'idempotence de l'opérateur $\langle \rangle$, on obtient le système :

$$(1.67a) \quad \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho u_j) = 0$$

$$(1.67b) \quad \partial_t (\rho u_j) + \partial_{x_j} (\rho u_i u_j + P_{ij}) = \rho \langle a_i \rangle$$

$$(1.67c) \quad \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e u_j + P_{ij} u_i + q_j) = \rho \langle a_j \rangle u_j + \rho \langle a_j w_j \rangle$$

En plus des notations précédemment introduites, on a posé :

$$(1.68) \quad e \equiv \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle \quad ; \quad P_{ij} \equiv \rho \langle w_i w_j \rangle \quad ; \quad q_i \equiv \frac{1}{2} \rho \langle w^2 w_i \rangle$$

Le tenseur P représente le tenseur des contraintes totales. Il peut s'écrire sous la forme $P_{ij} = p \delta_{ij} + \Pi_{ij}$, où le scalaire p est la pression hydrostatique du fluide définie microscopiquement par $p \equiv \frac{1}{D} P_{ii} = \frac{\rho}{D} \langle w^2 \rangle$. Le tenseur Π apparaît alors comme un tenseur des contraintes visqueuses. Le vecteur q représente le flux de chaleur, ou flux d'énergie mesuré dans un repère lagrangien. Comme $e = \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle = \frac{u^2}{2} + \frac{\langle w^2 \rangle}{2} = \frac{u^2}{2} + \epsilon$, où ϵ est l'énergie interne massique du fluide, et comme $p = \frac{1}{D} \rho \langle w^2 \rangle$, on a là encore une relation d'état imposée par la technique de construction :

$$(1.69) \quad p = \frac{2}{D} \rho \epsilon$$

On vient d'obtenir des équations macroscopiques de type Navier-Stokes⁹ avec relation d'état de gaz parfait. Toutefois, à la différence des équations d'Euler (1.64) obtenues à l'ETL, le système (1.67) n'est pas fermé puisque l'on ne dispose pas des relations constitutives $\Pi = \Pi(\rho, u, e)$ et $q = q(\rho, u, e)$.

⁹Les équations de Navier-Stokes modélisent l'écoulement d'un fluide compressible visqueux avec flux de chaleur.

Autres techniques

Il existe d'autres techniques qui permettent d'obtenir des équations fluides à partir de la théorie cinétique. D'abord, il est possible de calculer directement certaines intégrales de collision lorsque les collisions sont des chocs élastiques entre particules sphériques par exemple (voir [Mai96]). Ensuite, d'autres procédures consistent à donner une approximation de l'intégrale de collision autour de l'ETL. Plus précisément, on introduit le nombre de Knudsen $\epsilon = \frac{\lambda}{L}$, rapport du libre parcours moyen sur la longueur caractéristique du gaz, et on adimensionne l'équation cinétique. En se supposant proche de l'ETL, on développe la fonction de distribution en posant $f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots$. Cette procédure, proposée par Hilbert en 1912, est appelée développement de Hilbert. En terme de terminologie, on se base sur l'ouvrage [Cer75] spécialisé sur l'équation de Boltzmann. On y trouve que le développement de Chapman-Enskog est un développement d'Hilbert pour lequel on rajoute les contraintes $\int_{\mathbb{R}^D} \Phi f_n d^D v = 0$ pour $n \geq 1$ et $\Phi = 1, v, |v|^2$. En injectant un développement d'Hilbert ou de Chapman-Enskog, tronqué à l'ordre N , dans l'équation cinétique adimensionnée, on génère $N + 1$ équations cinétiques. Un résultat immédiat de ces développements est que, dans les deux cas, f_0 est une Maxwellienne ; les développements de Hilbert et Chapman-Enskog à l'ordre 0 permettent donc d'obtenir les équations d'Euler. ϵ peut être interprété comme l'écart à l'ETL. Dans [Cer75], l'auteur montre qu'aux ordres supérieurs, le développement d'Hilbert apporte des termes correctifs aux variables des équations d'Euler. Par contre, un développement de Chapman-Enskog à l'ordre 1, en raison de la contrainte supplémentaire imposée à f_1 , ne corrige pas les variables macroscopiques obtenues à l'ordre 0, mais permet d'obtenir directement les équations de Navier-Stokes. Enfin, si on utilise un développement de Chapman-Enskog à des ordres supérieurs à 1, on obtient les équations de Burnett et super-Burnett dont on ne sait même pas si elles ont une signification physique (d'après [Cer75]).

1.3.2 Limite multifluide de la théorie cinétique

On considère un mélange gazeux composé de plusieurs espèces dont la plupart des particules sont électriquement neutres. C'est par exemple le cas de l'interpénétration de plasmas faiblement ionisés¹⁰. Dans un premier temps, on construit des équations de bilan pour chaque espèce de la même manière que dans la section précédente. Il s'agit d'une approche classique, que l'on trouve par exemple dans [DLD96] et [SC02]. Ensuite, on adopte une technique de décomposition des vitesses généralement utilisée en turbulence pour écrire des équations pour le fluide moyen, ou mélange. On discute enfin de la fermeture du modèle obtenu.

Equations pour les espèces

Comme on l'a vu avant, la fonction de distribution f^s de chaque espèce s vérifie l'équation généralisée de Boltzmann :

$$(1.70) \quad \partial_t f^s + v_j^s \partial_{x_j} f^s + a_j^s \partial_{v_j} f^s = \sum_r Q(f^s, f^r)$$

Dans la suite, pour alléger les équations, on note $C^s \equiv \sum_r Q(f^s, f^r)$. Par définition, le nombre de particules de l'espèce s par unité de volume est $n^s \equiv \int_{\mathbb{R}^D} f^s d^D v$. On rappelle que D est la dimension de l'espace. On introduit l'opérateur de moyenne spécifique $\langle \cdot \rangle_v^s$ défini par :

¹⁰Dans le cas de plasmas fortement ionisés, il est nécessaire de coupler les équations fluides aux équations de Maxwell pour rendre compte des effets électromagnétiques engendrés par le mouvement des particules chargées. Pour de tels modèles, on renvoie à l'ouvrage de référence [DMP98] ainsi qu'à la thèse [Mai96].

$$(1.71) \quad \langle \psi |^s \rangle \equiv \frac{1}{n^s} \int_{\mathbb{R}^D} \psi f^s d^D v$$

Après multiplication de (1.70) par une quantité Φ et intégration sur l'espace des vitesses, on obtient :

$$(1.72) \quad \frac{\partial (n^s \langle \Phi |^s \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial (n^s \langle \Phi v_j^s |^s \rangle)}{\partial x_j} - n^s \left[\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} |^s \right\rangle + \left\langle v_j^s \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} |^s \right\rangle + \left\langle a_j^s \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} |^s \right\rangle \right] = \int_{\mathbb{R}^D} \Phi C^s d^D v$$

Les calculs sont analogues à ceux présentés dans la section précédente. On suppose qu'il n'y a aucun champ de force, soit $a^s = 0$. Dans ce cas, si Φ ne dépend pas explicitement de x et t , on a :

$$(1.73) \quad \frac{\partial (n^s \langle \Phi |^s \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial (n^s \langle \Phi v_j^s |^s \rangle)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^D} \Phi C^s d^D v$$

On considère les multiplicateurs suivants :

$$(1.74a) \quad \Phi_m \equiv m^s$$

$$(1.74b) \quad \Phi_{v,i} \equiv m^s v_i^s$$

$$(1.74c) \quad \Phi_e \equiv \frac{1}{2} m^s (v^s)^2$$

On a noté m^s la masse d'une particule de l'espèce s . En injectant successivement les multiplicateurs (1.74) dans l'équation (1.73), on forme le système d'équations :

$$(1.75a) \quad \partial_t (m^s n^s \langle 1 |^s \rangle) + \partial_{x_j} (m^s n^s \langle v_j^s |^s \rangle) = m^s \int_{\mathbb{R}^D} C^s d^D v$$

$$(1.75b) \quad \partial_t (m^s n^s \langle v_i^s |^s \rangle) + \partial_{x_j} (m^s n^s \langle v_i^s v_j^s |^s \rangle) = m^s \int_{\mathbb{R}^D} v_i^s C^s d^D v$$

$$(1.75c) \quad \partial_t \left(\frac{1}{2} m^s n^s \langle (v^s)^2 |^s \rangle \right) + \partial_{x_j} \left(\frac{1}{2} m^s n^s \langle (v^s)^2 v_j^s |^s \rangle \right) = \frac{m^s}{2} \int_{\mathbb{R}^D} (v^s)^2 C^s d^D v$$

On introduit alors les grandeurs macroscopiques suivantes :

$$(1.76a) \quad \rho^s \equiv m^s n^s$$

$$(1.76b) \quad u_i^s \equiv \langle v_i^s |^s \rangle$$

$$(1.76c) \quad e^s \equiv \frac{\langle (v^s)^2 |^s \rangle}{2}$$

Les quantités (1.76) représentent respectivement la masse volumique partielle, la vitesse absolue et l'énergie totale massique de l'espèce s . On introduit la vitesse particulière relative w^s , définie par :

$$(1.77) \quad w_i^s \equiv v_i^s - u_i^s$$

Le système (1.75) s'écrit alors :

$$(1.78a) \quad \partial_t (\rho^s) + \partial_{x_j} (\rho^s u_j^s) = m^s \int_{\mathbb{R}^D} C^s d^D v$$

$$(1.78b) \quad \partial_t (\rho^s u_i^s) + \partial_{x_j} (\rho^s u_i^s u_j^s + P_{ij}^s) = m^s \int_{\mathbb{R}^D} v_i^s C^s d^D v$$

$$(1.78c) \quad \partial_t (\rho^s e^s) + \partial_{x_j} (\rho^s e^s u_j^s + P_{ij}^s u_i^s + q_j^s) = \frac{m^s}{2} \int_{\mathbb{R}^D} (v^s)^2 C^s d^D v$$

De la même manière que dans le cas monoespèce de la section précédente, on a posé :

$$(1.79a) \quad P_{ij}^s \equiv \rho^s \langle w_i^s w_j^s |^s \rangle$$

$$(1.79b) \quad q_i^s \equiv \langle (w^s)^2 w_i^s |^s \rangle$$

Si l'on décompose l'énergie totale en la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne $e^s = \frac{1}{2} (u^s)^2 + \epsilon^s$, on obtient une expression pour l'énergie interne :

$$(1.80) \quad \epsilon^s \equiv \frac{1}{2} \langle (w^s)^2 |^s \rangle$$

De sorte qu'une relation d'état de gaz parfait est imposée par la technique de construction :

$$(1.81) \quad p^s = \frac{2}{D} \rho^s \epsilon^s$$

On a posé $p^s \equiv \frac{P_{ii}^s}{D} = \frac{\rho^s \langle w_i^s w_i^s |^s \rangle}{D}$. On introduit enfin le tenseur des contraintes visqueuses de l'espèce s , défini par $\Pi_{ij}^s \equiv P_{ij}^s - p^s \delta_{ij}$, où δ est le symbole de Kronecker. Le système formé par les équations (1.78) et l'équation d'état (1.81) n'est pas fermé : il faut se donner des relations constitutives sur P^s et q^s , et déterminer les intégrales de collision du second membre de (1.78). Avant cela, on construit les équations modélisant l'écoulement du mélange.

Equations pour le mélange

On commence par introduire la masse volumique du mélange ρ^* . Les ρ^s étant des masses volumiques partielles (variables thermodynamiques *extensives*), la masse volumique du mélange est simplement définie par :

$$(1.82) \quad \rho^* \equiv \sum_s \rho^s$$

En se basant sur les travaux de Scannapieco et Cheng (voir[SC02]), on introduit alors la vitesse du mélange u^* :

$$(1.83) \quad \rho^* u_i^* \equiv \sum_s \rho^s u_i^s$$

La vitesse u^* est construite à partir d'une moyenne pondérée par des masses volumiques, il s'agit donc de la moyenne des impulsions des espèces, appelée moyenne de Favre. Ce type de moyenne est aussi utilisé pour la construction de modèles de turbulence. On décompose maintenant la vitesse absolue de chaque particule v^s pour faire apparaître une nouvelle vitesse relative particulaire c^s mesurée dans un repère lié au mélange :

$$(1.84) \quad c_i^s \equiv v_i^s - u_i^*$$

En combinant (1.83) et (1.84), on vérifie facilement que, pour tout $i = 1, \dots, D$:

$$(1.85) \quad \sum_s \rho^s \langle c_i^s | v^s \rangle = 0$$

ρ^s étant une densité partielle, on déduit de (1.81) que p^s est une pression partielle, *i.e.* une quantité extensive. On définit alors la pression du mélange p^* par :

$$(1.86) \quad p^* \equiv \sum_s p^s$$

On étend ce raisonnement aux autres quantités, on définit ainsi :

- $P_{ij}^* \equiv \sum_s P_{ij}^s$ le tenseur des contraintes du mélange,
- $\Pi_{ij}^* \equiv \sum_s \Pi_{ij}^s$ le tenseur des contraintes visqueuses du mélange,
- $\rho^* e^* \equiv \sum_s \rho^s e^s$ la densité d'énergie totale du mélange,
- $\rho^* \epsilon^* \equiv \sum_s \rho^s \epsilon^s$ la densité d'énergie interne inerte du mélange,
- $q_i^* \equiv \sum_s q_i^s$ le flux de chaleur du mélange.

En prenant la somme sur les espèces des équations (1.78), on obtient avec ces notations :

$$(1.87a) \quad \partial_t (\rho^*) + \partial_{x_j} (\rho^* u_j^*) = \sum_s \left(m^s \int_{\mathbb{R}^D} C^s d^D v \right)$$

$$(1.87b) \quad \partial_t (\rho^* u_i^*) + \partial_{x_j} \left(\rho^* u_i^* u_j^* + P_{ij}^* + \sum_s (\rho^s \langle c_i^s | v^s \rangle \langle c_j^s | v^s \rangle) \right) \\ = \sum_s \left(m^s \int_{\mathbb{R}^D} v_i^s C^s d^D v \right)$$

$$(1.87c) \quad \partial_t (\rho^* e^*) + \partial_{x_j} \left(\rho^* e^* u_j^* + P_{ij}^* u_i^* + q_j^* + \sum_s (\rho^s e^s \langle c_j^s | v^s \rangle + P_{ij}^s \langle c_i^s | v^s \rangle) \right) \\ = \sum_s \left(\frac{m^s}{2} \int_{\mathbb{R}^D} (v^s)^2 C^s d^D v \right)$$

Là encore, en raison de la définition de l'énergie interne du mélange, on a une relation d'état de gaz parfait imposée pour le mélange :

$$(1.88) \quad p^* = \frac{2}{D} \rho^* \epsilon^*$$

En pratique, on verra par la suite que l'on ne se limite pas forcément au modèle du gaz parfait.

Remarque sur un lien avec la turbulence En turbulence, une approche standard consiste à décomposer la vitesse du fluide en une vitesse moyenne et une vitesse de fluctuation. Si on note respectivement ρ et v la masse volumique et la vitesse absolue du fluide, on définit la vitesse moyenne du fluide v^* à l'aide d'une moyenne de Favre : $\rho v^* \equiv \langle \rho v \rangle$, où l'opérateur $\langle \rangle$ est un opérateur de moyenne quelconque. On peut interpréter la définition de v^* comme la limite continue de l'équation (1.83) lorsque le nombre d'espèces tend vers l'infini. On définit ensuite la vitesse de fluctuation $w \equiv v - v^*$. Cranfill [Cra92] va plus loin en décomposant la vitesse de fluctuation en une partie moyennée et une fluctuation désordonnée : $w = \langle w \rangle + (w - \langle w \rangle)$. On peut alors écrire la vitesse v comme la somme de trois composantes :

$$(1.89) \quad v = v^* + \langle w \rangle + (w - \langle w \rangle)$$

Chaque vitesse a un sens physique précis :

- v est la vitesse ponctuelle du fluide,
- v^* est la vitesse du mouvement moyen du fluide,
- $\langle w \rangle$ est la vitesse de fluctuation ordonnée, c'est-à-dire la vitesse de convection mesurée dans un repère lié au mouvement moyen,
- $(w - \langle w \rangle)$ est la vitesse de fluctuation désordonnée, c'est-à-dire la vitesse turbulente mesurée dans un repère lié au mouvement moyen.

•

Remarque sur l'énergie interne du mélange La définition de l'énergie totale du mélange entraîne quelques conséquences. On a en effet $\rho^* e^* \equiv \sum_s \rho^s e^s = \frac{1}{2} \rho^* (u^*)^2 + \sum_s \rho^s \epsilon^s + \sum_s \frac{1}{2} \rho^s (\langle c^s | v \rangle)^2$. Le terme $\frac{1}{2} \rho^* (u^*)^2$ représente la densité d'énergie cinétique du mélange. La densité d'énergie interne du mélange est donc composée d'un terme inerte $\rho^* \epsilon^* \equiv \sum_s \rho^s \epsilon^s$ et d'un terme cinétique du au mouvement de fluctuation des espèces par rapport au mélange $\sum_s \frac{1}{2} \rho^s (\langle c^s | v \rangle)^2$.

•

1.3.3 Fermeture par les principes de la thermodynamique étendue

Dans la section précédente, on a obtenu un modèle hydrodynamique et un modèle multi-fluide multivitesse d'interpénétration du type équations de Navier-Stokes pour chaque espèce à partir de la théorie cinétique. Un intérêt de ce type d'approche est de donner une définition microscopique à chaque variable macroscopique. On a aussi vu que cette technique de construction impose dans tous les cas une relation d'état de gaz parfait pour chaque espèce et pour le mélange. Pourtant le modèle hydrodynamique (1.67) et le modèle multifluide multivitesse (1.78) ne sont pas fermés. Dans les deux cas, il reste à définir des relations constitutives sur les contraintes visqueuses et le flux de chaleur ; dans le cas multiespèce, il faut en plus analyser les intégrales de collision. On va voir maintenant que les principes de la thermodynamique étendue permettent de construire une classe de relations constitutives thermodynamiquement admissibles qui permettent d'aller au-delà du modèle de gaz parfait et qui garantissent que le système d'équations est symétrique hyperbolique par construction.

Principes de la thermodynamique étendue

On renvoie à l'ouvrage [Tru69] dans lequel figure une série de lectures à l'origine de l'évolution de la thermodynamique classique vers la thermodynamique étendue. Lorsque les

lois classiques de Fourier sur le flux de chaleur et de Navier-Stokes sur la viscosité sont incorporées dans les équations de conservation (1.67), le système d'équations est fermé mais a l'inconvénient d'être parabolique. Un tel système prédit des vitesses de propagation infinies pour la chaleur et les contraintes de cisaillement, phénomène physiquement gênant. Ces problèmes sont connus sous les noms respectifs de *paradoxe de la conduction de chaleur* et *paradoxe de la diffusion du cisaillement*. En 1948, Cattaneo [Cat48] a été le premier à publier un article dans lequel il résolvait le paradoxe de la conduction de chaleur en modifiant la loi de Fourier. Plus précisément, en partant du principe que le flux de chaleur doit non seulement dépendre du gradient de la température, mais aussi de la variation de ce gradient au cours du temps, il transforma l'équation parabolique de diffusion pour la température en l'équation hyperbolique des télégraphes. Par la suite, ces travaux ont inspiré d'autres chercheurs comme Müller, qui autorisa les flux des équations de conservation à dépendre localement de toutes les variables d'état. Les relations constitutives ainsi obtenues permettent de former un système qui prédit des vitesses finies pour la diffusion de la température, mais aussi pour la diffusion du cisaillement, apportant ainsi une solution aux deux paradoxes. La théorie associée porte le nom de thermodynamique étendue car la liste des variables des flux a été étendue au champ tout entier. Par ailleurs, l'extension de la liste des variables des flux trouve une justification dans la théorie cinétique et les 13 moments de Grad (voir [MR93] et [Gra63]). On présente maintenant la thermodynamique étendue et ses principes dans un cadre général.

On se réfère à l'ouvrage [MR93] dont on utilise les mêmes notations. L'objectif de la thermodynamique étendue est la détermination d'un champ $u(x^A)$ formé de n vecteurs qui dépendent de l'espace-temps x^A . Le champ u est solution d'un système d'équations locales de bilan, c'est-à-dire un système d'équations locales de conservation avec termes sources, de la forme :

$$(1.90) \quad F_{,A}^A = \Pi$$

En 3 dimensions d'espace, A peut prendre les 4 valeurs 0, 1, 2, 3 représentant les 4 dimensions de l'espace-temps. On utilise la convention de sommation lorsqu'un même indice est répété, ainsi la notation $F_{,A}^A$ symbolise la divergence de F dans l'espace-temps. Plus explicitement, le système (1.90) s'écrit donc :

$$(1.91) \quad \frac{\partial F^0}{\partial t} + \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3} = \Pi$$

Les composantes de F^0 sont appelées les *densités*, les composantes des F^i ($i = 1, 2, 3$) sont appelées les *flux* et les composantes de Π sont les termes-sources ou *productions*. Une solution u du système (1.90) est appelé *processus thermodynamique*. Pour résoudre (1.90), il faut se donner des relations constitutives, *i.e.* des relations qui relient les flux et les termes-sources au champ u . Sous certaines hypothèses que l'on présente maintenant, la thermodynamique étendue permet de construire des relations constitutives de façon *thermodynamiquement compatible*, c'est-à-dire en accord avec les deux principes de la thermodynamique et le principe d'invariance galiléenne. On verra également que les systèmes fermés par la thermodynamique étendue sont tous symétriques hyperboliques par construction, ce qui garantit des propriétés mathématiques fortes.

Hypothèses 1.1. *On suppose qu'il existe une entropie h pour le système (1.90) vérifiant, pour tout processus thermodynamique, une inégalité d'entropie telle que :*

$$(1.92) \quad h_{,A}^A = \Sigma \geq 0$$

h^0 est la densité d'entropie, h^i ($i = 1, 2, 3$) sont les flux d'entropie et Σ est la production d'entropie.

On suppose que la densité d'entropie h^0 est une fonction concave¹¹ de u :

$$(1.93) \quad \frac{\partial^2 h^0}{\partial u \partial u} \text{ est une matrice définie négative}$$

On suppose que les relations constitutives sont locales en temps et en espace, c'est-à-dire que :

$$(1.94) \quad F^A \equiv F^A(u) \quad ; \quad \Pi \equiv \Pi(u) \quad ; \quad h^A \equiv h^A(u) \quad ; \quad \Sigma \equiv \Sigma(u)$$

Ainsi, en thermodynamique étendue, les flux peuvent dépendre de toutes les composantes du champ u .

On suppose que la nature du système (1.90) et ses variables internes doivent être invariantes par transformation galiléenne.

Sous les hypothèses 1.1, on peut interpréter le système (1.90)-(1.92) comme un système contraint et lui appliquer le principe des travaux virtuels (voir [Liu72]). L'inégalité sur l'entropie, étendue à tous les champs u non forcément solutions de (1.90), devient :

$$(1.95) \quad h_{,A}^A - \Lambda \cdot (F_{,A}^A - \Pi) \geq 0$$

Λ est le vecteur formé par les multiplicateurs de Lagrange. Si u est un processus thermodynamique, le système (1.90) est vérifié et l'inégalité (1.95) se réduit à l'inégalité classique pour l'entropie (1.92). Les relations constitutives (1.94) permettent d'écrire le principe des travaux virtuels sous la forme :

$$(1.96) \quad \left(\frac{\partial h^A}{\partial u} - \Lambda \cdot \frac{\partial F^A}{\partial u} \right) u_{,A} + \Lambda \cdot \Pi \geq 0$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Sous les hypothèses 1.1 et si l'inégalité (1.96) est vérifiée pour tout u , les relations constitutives (1.94) peuvent s'écrire sous la forme :*

$$(1.97) \quad F^A = F^A(\Lambda) \quad ; \quad \Pi = \Pi(\Lambda) \quad ; \quad h^A = h^A(\Lambda) \quad ; \quad \Sigma = \Sigma(\Lambda)$$

Preuve du lemme 1.1 L'inégalité (1.96) doit être valable pour tout u , donc pour tout $u_{,A}$, ce qui permet d'extraire deux informations indépendantes :

$$(1.98a) \quad \frac{\partial h^A}{\partial u} - \Lambda \cdot \frac{\partial F^A}{\partial u} = 0$$

$$(1.98b) \quad \Lambda \cdot \Pi \geq 0$$

¹¹L'entropie doit être convexe ou concave, suivant la convention de signe adoptée. Dans ce papier, on choisit de travailler avec une entropie dont la matrice hessienne par rapport à u est définie négative, soit une entropie concave par rapport à u .

La première équation de (1.98) peut encore s'écrire $dh^A = \Lambda \cdot dF^A$, donc Λ est indépendant du choix de u . On choisit alors $u = F^0$, de sorte que $\frac{\partial h^0}{\partial u} = \Lambda$, ou encore :

$$(1.99) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial u} = \frac{\partial^2 h^0}{\partial u \partial u} \text{ est une matrice symétrique définie négative}$$

Il existe donc une transformation unique permettant de passer de Λ à u et réciproquement, ce qui permet d'écrire (1.94) sous la forme (1.97) et achève la preuve de 1.1. ■

Lemme 1.2. *Si le lemme 1.1 est vérifié, on peut dériver les densités et les flux à partir d'un seul potentiel h' , appelé potentiel générateur et défini par :*

$$(1.100) \quad h'^A \equiv \Lambda \cdot F^A - h^A$$

Preuve du lemme 1.2 Comme $dh^A = \Lambda \cdot dF^A$, l'équation (1.100) donne directement $dh'^A = F^A \cdot d\Lambda$. On peut alors écrire :

$$(1.101) \quad F^A = \frac{\partial h'^A}{\partial \Lambda} \quad ; \quad h^A = -h'^A + \Lambda \cdot \frac{\partial h'^A}{\partial \Lambda}$$

On peut ainsi dériver les densités et les flux à partir du seul potentiel h'^A . ■

Propriété 1.2 (du système (1.90)). *Sous les hypothèses 1.1 et en vertu des lemmes 1.1 et 1.2, le système (1.90) est symétrique hyperbolique.*

Preuve de la propriété 1.2 Compte tenu du fait que F^A ne dépend que des multiplicateurs de Lagrange (lemme 1.1), le système (1.90) peut s'écrire sous la forme :

$$(1.102) \quad \frac{\partial F^A}{\partial \Lambda} \cdot \Lambda_{,A} = \Pi$$

En utilisant la définition du potentiel générateur (1.100), le système (1.102) prend la forme :

$$(1.103) \quad \frac{\partial^2 h'^A}{\partial \Lambda \partial \Lambda} \cdot \Lambda_{,A} = \Pi$$

Le système (1.103) est dit *symétrique*, en référence à la définition de Friedrichs [Fri74], car les matrices hessiennes $\frac{\partial^2 h'^A}{\partial \Lambda \partial \Lambda}$ sont des matrices symétriques. L'hyperbolicité du système (1.103) requiert que la matrice $\frac{\partial^2 h^0}{\partial \Lambda \partial \Lambda}$ soit définie ; on montre maintenant qu'elle est même définie négative. Si on choisit $u = F^0$, l'équation (1.100) donne pour $A = 0$:

$$(1.104) \quad h'^0 = \Lambda \cdot u - h^0$$

Autrement dit, h'^0 est la transformée de Legendre de h^0 , donc h'^0 est une fonction concave de Λ si h^0 est une fonction concave de u , ce qui est le cas (voir (1.99)). On a alors le résultat :

$$(1.105) \quad \frac{\partial^2 h'^0}{\partial \Lambda \partial \Lambda} \text{ est une matrice définie négative}$$

(1.105) achève la preuve de la propriété 1.2. ■

L'hyperbolicité de (1.90) garantit que les vitesses de propagation sont finies. On apporte ainsi une solution au paradoxe de la diffusion de la chaleur par exemple. Les systèmes hyperboliques symétriques correspondent à des problèmes de Cauchy bien posés, c'est-à-dire que l'on a localement la preuve de l'existence d'une solution, ainsi que de son unicité (voir [FM72]).

Fermeture du modèle bifluide bivitesse

On considère le modèle miscible bifluide bivitesse construit dans la section précédente à partir de la théorie cinétique (voir équations (1.78)). Pour un indice d'espèce $s = 1, 2$, le modèle s'écrit :

$$(1.106a) \quad \partial_t (\rho^s) + \partial_{x_j} (\rho^s v_j^s) = A^s$$

$$(1.106b) \quad \partial_t (\rho^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\rho^s v_i^s v_j^s + P_{ij}^s) = B_i^s$$

$$(1.106c) \quad \partial_t (\rho^s e^s) + \partial_{x_j} (\rho^s e^s v_j^s + P_{ij}^s v_i^s + q_j^s) = C^s$$

On a posé :

$$(1.107a) \quad P_{ij}^s \equiv p^s \delta_{ij} + \Pi_{ij}^s$$

$$(1.107b) \quad e^s \equiv \epsilon^s + \frac{1}{2} v_j^s v_j^s$$

Les notations sont usuelles ; pour l'espèce s ,

- ρ^s est la masse volumique partielle,
- v^s est la vitesse absolue,
- P^s est le tenseur partiel des contraintes,
- p^s est la pression partielle,
- Π^s est le tenseur partiel des contraintes visqueuses,
- e^s est l'énergie totale massique,
- ϵ^s est l'énergie interne massique,
- q^s est le flux de chaleur.

On a vu qu'une relation d'état de type gaz parfait est imposée par la technique de construction (voir équation (1.81)) :

$$(1.108) \quad p^s = \frac{2}{D} \rho^s \epsilon^s$$

Le modèle du gaz parfait (1.108) est une approximation généralement trop grossière. Pour cette raison, on se place maintenant dans un cadre général, où l'on suppose que les relations d'état ne sont pas encore connues.

A^s , B^s et C^s sont des termes de transfert entre les espèces, issus des intégrales de collisions de la théorie cinétique. Si on suppose que la masse totale, l'impulsion totale et l'énergie totale du mélange sont conservées, on a nécessairement les relations :

$$(1.109) \quad \sum_s A^s = 0 \quad ; \quad \sum_s B_i^s = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, D \quad ; \quad \sum_s C^s = 0$$

Comme le fait Müller dans [MR93], on se place maintenant dans le cas isotherme, c'est-à-dire $T^1 = T^2 = T$. On a vu à la fin de la section précédente que cette hypothèse est pertinente pour modéliser un plasma totalement ionisé composé de deux espèces d'ions en interpénétration. Une seule équation sur l'énergie est alors suffisante. On introduit alors les quantités suivantes :

- la masse volumique du mélange $\rho \equiv \sum_s \rho^s$,

- la vitesse moyenne absolue du mélange v définie par $\rho v_i \equiv \sum_s \rho^s v_i^s$,
- l'énergie totale massique du mélange e définie par $\rho e \equiv \sum_s \rho^s e^s$,
- la vitesse relative de l'espèce par rapport au mélange $u_i^s \equiv v_i^s - v^s$,
- le tenseur total des contraintes du mélange $\sigma_{ij} \equiv \sum_s \left(P_{ij}^s + \rho^s u_i^s u_j^s \right)$,
- l'énergie interne massique du mélange ξ définie par $\rho \xi \equiv \sum_s \left(\rho^s \epsilon^s + \frac{1}{2} \rho^s u_j^s u_j^s \right)$,
- le flux d'énergie interne du mélange $Q_i = \sum_s \left(q_i^s + \rho^s \epsilon^s u_i^s + \frac{1}{2} \rho^s u_j^s u_j^s u_i^s + P_{ij}^s u_j^s \right)$.

Le choix d'incorporer les quantités spécifiques de fluctuation dans les grandeurs du mélange (comme la densité d'énergie cinétique de fluctuation $\sum_s \frac{1}{2} \rho^s u_j^s u_j^s$ dans la densité d'énergie interne du mélange $\rho \xi$) est inspiré des travaux de Truesdell [Tru69]. Il a l'avantage de donner aux équations de bilan du mélange leur forme habituelle dans le cas monofluide simple. Ainsi, en sommant sur les espèces les équations (1.106), on obtient :

$$(1.110a) \quad \partial_t (\rho) + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0$$

$$(1.110b) \quad \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) = 0$$

$$(1.110c) \quad \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + \sigma_{ij} v_i + Q_j) = 0$$

En combinant le bilan d'énergie totale (1.110c) avec le bilan d'impulsion (1.110b), on obtient le bilan d'énergie interne :

$$(1.111) \quad \partial_t (\rho \xi) + \partial_{x_j} (\rho \xi v_j + Q_j) + \sigma_{ij} \partial_{x_j} v_i = 0$$

Dans la suite, on suppose qu'il n'y a entre les espèces ni transfert de masse, ni de transfert d'énergie pure. Par contre, on autorise les transferts d'impulsion par l'intermédiaire d'une force de traînée, notée d^s . On pose ainsi :

$$(1.112) \quad A^s = 0 \quad ; \quad B_i^s = d_i^s \text{ pour } i = 1, \dots, D \quad ; \quad C^s = d_j^s v_j$$

L'objectif de la thermodynamique étendue pour les mélanges bifluides isothermes est la détermination des champs ρ^1, ρ^2, v^1, v^2 et T à partir du système à 5 équations (plus rigoureusement $3 + 2D$) :

$$(1.113a) \quad \partial_t \rho^s + \partial_{x_j} (\rho^s v_j^s) = 0$$

$$(1.113b) \quad \partial_t (\rho^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\rho^s v_i^s v_j^s + P_{ij}^s) = d_i^s$$

$$(1.113c) \quad \partial_t (\rho \xi) + \partial_{x_j} (\rho \xi v_j + Q_j) = -\sigma_{ij} \partial_{x_j} v_i$$

La densité de force de traînée d^s doit vérifier $\sum_s d_i^s = 0$ pour $i = 1, \dots, D$. Le système (1.113) n'est cependant pas fermé. Pour ce faire, il faut se donner des relations constitutives ; la thermodynamique étendue permet de trouver des relations constitutives thermodynamiquement compatibles et garantissant l'hyperbolicité symétrique du système fermé final. On décompose l'énergie interne sous la forme $\rho \xi = \rho e + \sum_s \frac{1}{2} \rho^s u_j^s u_j^s$, et le flux d'énergie sous la forme $Q_i = q_i + \sum_s \frac{1}{2} \rho^s u_j^s u_j^s u_i^s$. En thermodynamique étendue, les quantités constitutives (ici P^s, d^s, ϵ et q) ne dépendent que localement en espace et en temps des champs (ici ρ^s, v^s et T). Les relations constitutives sont alors de la forme :

$$(1.114a) \quad P^s = P^s(\rho^r, v^r, T) \quad ; \quad d^s = d^s(\rho^r, v^r, T)$$

$$(1.114b) \quad \epsilon = \epsilon(\rho^r, v^r, T) \quad ; \quad q = q(\rho^r, v^r, T)$$

La distinction des indices s et r signifie qu'une quantité de l'espèce s peut *a priori* dépendre à la fois des champs de l'espèce 1 comme de ceux de l'espèce 2. Par exemple, $P^1 = P^1(\rho^1, \rho^2, v^1, v^2, T)$. Les relations constitutives de la forme (1.114) ne permettent pas de modéliser la viscosité et la conduction de chaleur. En effet, il faudrait pour cela incorporer dans (1.114) une dépendance aux gradients des champs, ce qui s'oppose à l'hypothèse de dépendance locale en espace et en temps. On en déduit que $P_{ij}^s = p^s(\rho^r, v^r, T) \delta_{ij}$.

En thermodynamique étendue, on utilise aussi le principe de l'indifférence du repère, c'est-à-dire que les relations constitutives doivent être invariantes par transformation galiléenne. Les vitesses absolues v^s ne doivent donc pas apparaître dans les relations (1.114). Néanmoins la vitesse relative $V = v^1 - v^2$ entre les deux espèces est indépendante du repère. On en déduit que les relations constitutives sont de la forme :

$$(1.115a) \quad P_{ij}^s = p^s(\rho^r, V, T) \delta_{ij} \quad ; \quad d^s = d^s(\rho^r, V, T)$$

$$(1.115b) \quad \epsilon = \epsilon(\rho^r, V, T) \quad ; \quad q = q(\rho^r, V, T)$$

On suppose enfin, en se basant sur [MR93], que la dépendance en V des quantités constitutives est au plus linéaire. Le principe d'entropie de la thermodynamique étendue est le suivant : on suppose qu'il existe une densité d'entropie ρs qui vérifie l'inégalité :

$$(1.116) \quad \partial_t(\rho s) + \partial_{x_j}(\rho s v_j + \phi_j) \geq 0$$

L'inégalité (1.116) doit être vérifiée pour tous les processus thermodynamiques, c'est-à-dire pour tous les champs vérifiant le système (1.113). Les quantités s et ϕ sont supposées être des quantités constitutives, on a donc :

$$(1.117) \quad s = s(\rho^r, T) \quad ; \quad \phi_i = \phi_V(\rho^r, T) V_i$$

On a noté ϕ_V le coefficient de proportionnalité, indépendant de V , entre ϕ_i et V_i . On considère maintenant le principe d'Hamilton associé à l'inégalité d'entropie (1.116). On forme la nouvelle inégalité :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho s) + \partial_{x_j}(\rho s v_j + \phi_i) - & \Lambda^{\rho^1} (\partial_t \rho^1 + \partial_{x_j}(\rho^1 v_j^1)) \\ & - \Lambda^{\rho^2} (\partial_t \rho^2 + \partial_{x_j}(\rho^2 v_j^2)) \\ & - \Lambda^{v_i^1} (\partial_t(\rho^1 v_i^1) + \partial_{x_j}(\rho^1 v_i^1 v_j^1 + p^1 \delta_{ij}) - d_i^1) \\ & - \Lambda^{v_i^2} (\partial_t(\rho^2 v_i^2) + \partial_{x_j}(\rho^2 v_i^2 v_j^2 + p^2 \delta_{ij}) - d_i^2) \\ & - \Lambda^\xi (\partial_t(\rho \xi) + \partial_{x_j}(\rho \xi v_j + Q_j) + \sigma_{ij} \partial_{x_j} v_i) \geq 0 \end{aligned}$$

Les $(3+2D)$ scalaires Λ^{ρ^s} , Λ^{v^s} , Λ^ξ sont les multiplicateurs de Lagrange, quantités supposées constitutives, c'est-à-dire fonctions de ρ^r , V et T . L'inégalité ci-dessus doit être vérifiée pour tous les champs ρ^s , v^s , T , non forcément solutions de (1.113). En tenant compte des formes

des relations constitutives (1.115) et (1.117), et en appliquant la même procédure que lorsque l'on est passé de (1.95) à (1.98), on décompose cette inégalité en un système d'équations et une inégalité résiduelle. Le système d'équations est formé par les $(3 + 5D + 2D^2)$ équations qui annulent les multiplicateurs des dérivées partielles $\frac{\partial \rho^s}{\partial t}$, $\frac{\partial v_i^s}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho^s}{\partial x_j}$, $\frac{\partial v_i^s}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial T}{\partial x_j}$. Par exemple, en gardant à l'esprit que $\rho \equiv \sum_s \rho^s$, on trouve pour le multiplicateur de $\frac{\partial \rho^s}{\partial t}$ que :

$$(1.118) \quad s + \rho \frac{\partial s}{\partial \rho^s} - \Lambda^{\rho^s} - \Lambda^{v_j^s} v_j^s - \Lambda^\xi \xi - \Lambda^\xi \rho \frac{\partial \xi}{\partial \rho^s} = 0$$

Le système complet, dont l'équation ci-dessus constitue la première ligne, est donné dans [MR93]. Il est linéaire en ses inconnues, les multiplicateurs de Lagrange. Toutefois, le système en question comporte plus d'équations que d'inconnues. L'exploitation des équations restantes fournit des nouvelles contraintes sur la forme des relations constitutives. Par exemple, la pression p^s de l'espèce s doit être de la forme $p^s = p^s(\rho^s, T)$: la pression d'une espèce ne dépend que de sa propre densité. On expose maintenant les résultats.

Les multiplicateurs de Lagrange sont :

$$(1.119) \quad \Lambda_I^{\rho^s} = -\frac{\mu^s}{T} \quad ; \quad \Lambda^{v_i^s} = -\frac{u_i^s}{T} \quad ; \quad \Lambda^\xi = \frac{1}{T}$$

μ^s est le potentiel chimique de l'espèce s . $\Lambda_I^{\rho^s} = \Lambda^{\rho^s} + \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} u_j^s u_j^s - v_j^s u_j^s \right)$ est la partie indépendante en vitesse du multiplicateur Λ^{ρ^s} . Les relations constitutives sont :

$$(1.120a) \quad \rho^r (\epsilon^r - T s^r) + p^r = \rho^r \mu^r$$

$$(1.120b) \quad ds^r = \frac{1}{T} \left(d\epsilon^r - \frac{p^r}{(\rho^r)^2} d\rho^r \right)$$

$$(1.120c) \quad \rho s = \rho^1 s^1 + \rho^2 s^2$$

$$(1.120d) \quad T \phi_i = \rho^1 \left(T s^1 + \frac{1}{2} u_j^1 u_j^1 \right) u_i^1 + \rho^2 \left(T s^2 + \frac{1}{2} u_j^2 u_j^2 \right) u_i^2$$

$$(1.120e) \quad q_i = \left(\epsilon^1 + \frac{p^1}{\rho^1} \right) \rho^1 u_i^1 + \left(\epsilon^2 + \frac{p^2}{\rho^2} \right) \rho^2 u_i^2$$

Concernant la traînée d^s , les hypothèses formulées jusqu'ici renseignent simplement sur le fait qu'elle prend la forme $d_i^1 = -kV_i$ et $d_i^2 = +kV_i$, où le coefficient k peut dépendre de ρ^1 , ρ^2 et T . On choisit généralement la forme $d_i^s = \frac{\rho^s \rho^r}{\rho} \nu (v_i^r - v_i^s)$, où ν est l'inverse d'un temps caractéristique de relaxation des vitesses v^s . On résume maintenant le modèle bifluide miscible thermodynamiquement compatible obtenu par les principes de la thermodynamique, qui est fermé par les relations (1.120) :

$$(1.121a) \quad \partial_t \rho^s + \partial_{x_j} (\rho^s v_j^s) = 0 \quad (s = 1, 2)$$

$$(1.121b) \quad \partial_t (\rho^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\rho^s v_i^s v_j^s + p^s \delta_{ij}) = \frac{\rho^s \rho^r}{\rho} \nu (v_i^r - v_i^s) \quad (s = 1, 2 \text{ et } r \neq s)$$

$$(1.121c) \quad \partial_t (\rho \xi) + \partial_{x_j} (\rho \xi v_j + Q_j) + \sigma_{ij} \partial_{x_j} v_i = 0$$

$$(1.121d) \quad \partial_t (\rho s) + \partial_{x_j} (\rho s v_j + \phi_j) \geq 0$$

Ainsi, l'association de la théorie cinétique à la thermodynamique étendue a permis de construire rigoureusement et sous des hypothèses physiques raisonnables un modèle miscible à deux vitesses qui est symétrique hyperbolique et qui est complété par une inégalité d'entropie. Ce modèle n'est pas conservatif en la variable d'énergie interne du mélange ξ , mais il est conservatif en la variable d'énergie totale du mélange $e = \xi + \frac{1}{2}v_j v_j$.

1.4 Modèles biffuides miscibles

Dans cette section, on présente de manière synthétique les différentes formes du modèle miscible biffuide bivitesse construit et fermé dans les sections précédentes. Lors de la construction du modèle, on rappelle que l'on a supposé que les gaz en présence sont dilués et que les particules constituant ces gaz sont électriquement neutres. Le modèle [SC02] rentre dans ce cadre et propose une expression originale pour la force de traînée. Afin de pouvoir comparer directement ce modèle avec d'autres modèles, on change maintenant les notations de certaines variables.

1.4.1 Modèle miscible à 6 équations

Le modèle miscible à 6 équations est construit à partir de la théorie cinétique des gaz. Il prend la forme simple de deux systèmes de lois de conservation (masse, impulsion et énergie totale pour chaque espèce) couplés uniquement par les termes de production comme la force de traînée. Ainsi, en l'absence de transferts de masse, d'impulsion et d'énergie entre les espèces, tout se passe comme si les espèces ne se voyaient pas.

Forme conservative pour les espèces en coordonnées eulériennes

Le modèle à 6 équations ($s = 1, 2$) s'écrit en coordonnées eulériennes sous la forme conservative :

$$(1.122) \quad \begin{cases} \partial_t \rho^s + \partial_{x_j} (\rho^s v_j^s) = 0 \\ \partial_t (\rho^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\rho^s v_i^s v_j^s + P_{ij}^s) = d_i^s \\ \partial_t (\rho^s e^s) + \partial_{x_j} (\rho^s e^s v_j^s + P_{ij}^s v_i^s + q_j^s) = w^s \end{cases}$$

On a supposé qu'il n'y a ni transfert de masse, ni transfert d'énergie entre les espèces. Les espèces peuvent échanger de l'impulsion par l'intermédiaire de la densité de force de traînée d^s (*drag force*); elles peuvent donc échanger de l'énergie par l'intermédiaire de w^s (*work*), mais uniquement sous la forme du travail de d^s . On verra plus loin l'expression de w^s . On suppose dans toute la suite que la traînée n'est pas un terme différentiel. Très souvent, elle est prise comme un terme de relaxation de la vitesse relative entre les espèces. On pose alors $d_i^1 = k(v_i^2 - v_i^1)$, où l'on se donne la valeur du coefficient k qui est proportionnel à la vitesse caractéristique de relaxation des vitesses.

Les notations du modèle miscible (1.122) sont les suivantes :

Notation	Signification	Définition formelle
s	indice d'espèce	
i, j	indices de direction d'espace	
ρ^s	masse volumique partielle de l'espèce s	
v^s	vitesse absolue de l'espèce s	
P^s	tenseur des contraintes partielles de l'espèce s	$P_{ij}^s = p^s \delta_{ij} + \Pi_{ij}^s$
p^s	pression partielle de l'espèce s	$p^s = \frac{1}{D} P_{jj}^s$
D	dimension de l'espace	$D = 1, 2, 3$
Π^s	tenseur des contraintes visqueuses de l'espèce s	$\Pi_{ij}^s = P_{ij}^s - p^s \delta_{ij}$
d^s	densité de force de traînée de l'espèce s	
e^s	énergie totale massique de l'espèce s	$\rho^s e^s = \rho^s \epsilon^s + \frac{1}{2} \rho^s v_j^s v_j^s$
ϵ^s	énergie interne massique de l'espèce s	
q^s	flux de chaleur partiel de l'espèce s	
w^s	densité du travail de la force de traînée de l'espèce s	

Remarque sur la force de traînée proposée par Scannapieco et Cheng La densité de force de traînée prend la forme usuelle :

$$(1.123) \quad d_i^1 = \frac{\rho^1 \rho^2}{\rho} \nu (v_i^2 - v_i^1) = -d_i^2$$

L'originalité du modèle de Scannapieco et Cheng (voir [SC02]) réside dans la forme de la fréquence caractéristique de friction ν , qui contient un *effet mémoire* caractérisé par une intégrale en temps. En cherchant à prendre en compte aussi bien des phénomènes microscopiques comme les collisions entre les particules que des phénomènes macroscopiques comme la turbulence et l'interpénétration des espèces, les auteurs proposent l'expression :

$$(1.124) \quad \nu = \nu(t) = \frac{C(t)}{\lambda + L(t)}$$

L'effet mémoire apparaît à travers la longueur caractéristique des remous d'interpénétration L . Les notations sont les suivantes :

Notation	Signification	Définition formelle
ν	fréquence caractéristique de friction	$\nu \equiv \frac{C}{\lambda + L}$
C	vitesse thermique du mélange	$C \equiv \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}$
μ	masse réduite particulaire	$\mu \equiv \frac{m^1 m^2}{m^1 + m^2}$
λ	libre parcours moyen interespèce	(donnée)
L	longueur d'interpénétration interespèce	$L(t) \equiv \alpha \int_0^t \left(\frac{\rho(\tau)}{\rho(t)} \right)^\beta v^1 - v^2 d\tau$
β	constante géométrique	(donnée, $\beta = 0.33$ en sphérique)
α	paramètre de contrôle	(voir ci-dessous)

Le scalaire α est un paramètre de contrôle. Sa valeur peut être choisie librement ou correspondre à la solution d'un problème d'optimisation dont le but est de minimiser l'écart entre un résultat expérimental et un résultat numérique. Dans les papiers [WSC⁺03] et [WCC⁺04] qui traitent de l'application du modèle de Scannapieco et Cheng à des problèmes de fusion par confinement inertiel, les valeurs de α sont comprises entre 0.03 et 0.1. •

Forme conservative pour le mélange en coordonnées eulériennes

En sommant sur les espèces les équations (1.122), on obtient les équations pour le mélange :

$$(1.125) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0 \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) = 0 \\ \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + \sigma_{ij} v_i + Q_j) = 0 \end{cases}$$

On a supposé que la masse, l'impulsion et l'énergie du mélange sont localement conservées ; on a donc imposé les conditions :

$$(1.126) \quad \sum_s d_i^s = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, D \quad \text{et} \quad \sum_s w^s = 0$$

On en déduit que les travaux des forces de traînée ne doivent dépendre que de la vitesse du mélange, c'est-à-dire que :

$$(1.127) \quad w^s = d_j^s v_j$$

Les définitions des grandeurs du mélange ont été choisies pour que les équations du mélange prennent la forme des équations classiques de la mécanique monofluide. Les notations de (1.125) sont ainsi :

Notation	Signification	Définition formelle
ρ	masse volumique réelle du mélange	$\rho = \sum_s \rho^s$
v	vitesse absolue du mélange	$\rho v_i = \sum_s \rho^s v_i^s$
u^s	vitesse relative de l'espèce s par rapport au mélange	$u_i^s = v_i^s - v_i$
σ	tenseur des contraintes totales du mélange	$\sigma_{ij} = P_{ij} + R_{ij}$
P	tenseur des contraintes du mélange	$P_{ij} = \sum_s P_{ij}^s = p \delta_{ij} + \Pi_{ij}$
p	pression réelle du mélange	$p = \sum_s p^s$
Π	tenseur des contraintes visqueuses du mélange	$\Pi_{ij} = \sum_s \Pi_{ij}^s$
R	tenseur des contraintes de Reynolds	$R_{ij} = \sum_s R_{ij}^s = \sum_s \rho^s u_i^s u_j^s$
e	énergie totale massique du mélange	$\rho e = \sum_s \rho^s e^s$
ϵ	énergie interne inerte massique du mélange	$\rho \epsilon = \sum_s \rho^s \epsilon^s$
ξ	énergie interne massique du mélange	$\rho \xi = \rho \epsilon + \sum_s \frac{1}{2} \rho^s u_j^s u_j^s$
Q	flux d'énergie du mélange	$Q_i = q_i + \sum_s \left(\rho^s \epsilon^s + \frac{1}{2} \rho^s u_j^s u_j^s \right) u_i^s + P_{ij}^s u_j^s$
q	flux de chaleur réel du mélange	$q_i = \sum_s q_i^s$

La densité d'énergie totale du mélange est $\rho e = \sum_s \rho^s \epsilon^s + \sum_s \frac{1}{2} \rho^s v_j^s v_j^s = \rho \xi + \frac{1}{2} \rho v_j v_j$. $\rho \xi = \rho \epsilon + \sum_s \frac{1}{2} \rho^s u_j^s u_j^s$ est la densité d'énergie interne du mélange, où $\rho \epsilon = \sum_s \rho^s \epsilon^s$ est la densité d'énergie interne inerte du mélange. Dans le cas bifluide, l'énergie totale massique du mélange peut s'écrire $e = \epsilon + \frac{1}{2} v_j v_j + \frac{1}{2} \frac{\rho^1 \rho^2}{\rho \rho} V_j V_j$, où on a fait apparaître la vitesse relative des espèces $V_i = v_i^1 - v_i^2 = u_i^1 - u_i^2$. On remarque que même en l'absence de flux de chaleur au niveau des espèces ($q_i^s = 0$), il existe un flux d'énergie au niveau du mélange ($Q_i \neq 0$) en raison de la présence des fluctuations de vitesse des espèces.

On est souvent amené à travailler en énergie interne plutôt qu'en énergie totale. La différence entre l'équation pour l'énergie totale et le travail de l'équation pour l'impulsion du système (1.122) permet d'obtenir une équation pour l'énergie interne de l'espèce s :

$$(1.128) \quad \partial_t (\rho^s \epsilon^s) + \partial_{x_j} (\rho^s \epsilon^s v_j^s + q_j^s) + P_{ij}^s \partial_{x_j} v_i^s = -d_j^s u_j^s$$

Après sommation sur les espèces et un peu de calcul, on obtient l'équation pour l'énergie interne du mélange (non conservative) :

$$(1.129) \quad \partial_t (\rho \xi) + \partial_{x_j} (\rho \xi v_j + Q_j) + \sigma_{ij} \partial_{x_j} v_i = 0$$

Pour fermer le modèle bifluide miscible à 6 équations (1.122), il faut se donner des relations constitutives pour P^s et q^s (on suppose la traînée d^s connue). Lors de la construction du modèle avec la théorie cinétique des gaz, on voit apparaître naturellement le modèle de gaz parfait, avec $\rho^s \epsilon^s = \frac{1}{2} P_{jj}^s$. On note k la constante de Boltzmann. Pour l'espèce s , on note aussi m^s la masse d'une particule, K^s le coefficient de conduction thermique, (λ^s, η^s) les coefficients des contraintes visqueuses de Navier-Stokes, et T^s la température. Scannapieco et Cheng [SC02] proposent de fermer leur modèle par l'intermédiaire de la température, en prenant :

$$(1.130) \quad \begin{cases} \epsilon^s = \frac{D}{2} \frac{k}{m^s} T^s \\ p^s = \frac{k}{m^s} \rho^s T^s \\ q_i^s = -K^s \partial_{x_i} T^s \\ \Pi_{ij}^s = -\lambda^s \frac{\partial v_k^s}{\partial x_k} \delta_{ij} - \eta^s \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k^s}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \end{cases}$$

La fermeture (1.130) est une fermeture classique de type *gaz parfait + loi de Fourier + contraintes visqueuses de Navier-Stokes*. Une propriété mathématique des équations de type Navier-Stokes est que le système d'équations aux dérivées partielles est parabolique, et développe des vitesses de propagation infinies (c'est le cas pour la diffusion de la chaleur par exemple). Pour contourner cette difficulté, on suppose souvent que l'écoulement de chaque espèce est non visqueux et adiabatique. Dans ce cas, le modèle miscible à 6 équations est fermé par :

$$(1.131) \quad \begin{cases} p^s = \frac{2}{D} \rho^s \epsilon^s \\ q_i^s = 0 \\ \Pi_{ij}^s = 0 \end{cases}$$

Avec la fermeture (1.131), le modèle miscible à 6 équations se réduit à deux systèmes d'équations d'Euler, uniquement couplés par la force de traînée. Ce modèle est donc hyperbolique.

Remarque sur l'existence d'une inégalité d'entropie Comme on le ferait pour un gaz eulérien simple, on peut introduire une entropie massique pour chaque espèce. Dans un repère lié à l'espèce s , la dérivée lagrangienne s'écrit $D_s^t \equiv \partial_t + v_j^s \partial_{x_j}$. En combinant la version 1D des équations du système (1.122) fermé par (1.131), on obtient facilement la relation :

$$(1.132) \quad D_s^t \epsilon^s + p^s D_s^t \frac{1}{\rho^s} = -\frac{d^s u^s}{\rho^s}$$

Cela suggère d'introduire l'entropie massique de l'espèce s , notée s^s , en posant :

$$(1.133) \quad T^s ds^s \equiv d\epsilon^s + p^s d\tau^s$$

On a noté $\tau^s \equiv \frac{1}{\rho^s}$ le volume spécifique de l'espèce s . Pour des solutions régulières, on a donc $T^s D_s^t s^s = -\tau^s d^s u^s$. Lorsque la force de traînée est de la forme (1.123), on remarque que :

$$(1.134) \quad -\tau^s d^s u^s = \left(\frac{\rho^r}{\rho}\right)^2 \nu (v^r - v^s)^2 \geq 0 \quad \text{pour } r, s = 1, 2 \text{ et } r \neq s.$$

En coordonnées eulériennes, on obtient ainsi une inégalité d'entropie pour chaque espèce :

$$(1.135) \quad \partial_t (\rho^s s^s) + \partial_x (\rho^s s^s v^s) = -\frac{d^s u^s}{T^s} \geq 0$$

Finalement, en introduisant l'entropie massique du mélange $s \equiv \sum_s \frac{\rho^s s^s}{\rho}$, on obtient une inégalité d'entropie pour le mélange :

$$(1.136) \quad \partial_t (\rho s) + \partial_x \left(\rho s v + \sum_s \rho^s s^s u^s \right) \geq 0$$

Le modèle miscible à 6 équations vérifie donc le second principe de la thermodynamique. •

1.4.2 Modèles miscibles à 5 équations

On a vu que dans certains problèmes bifluïdes miscibles, la relaxation des températures des espèces peuvent être considérées comme instantannées en comparaison à la durée de relaxation des vitesses des espèces. On ne retient alors qu'une seule équation pour l'énergie. Dans ce cas, le modèle ne comporte plus que 5 équations, mais demande une relation de fermeture supplémentaire.

Forme conservative en coordonnées eulériennes

Le modèle miscible à 5 équations obtenu s'écrit en les variables conservatives ρ^1 , ρ^2 , $\rho^1 v^1$, $\rho^2 v^2$ et ρe sous la forme :

$$(1.137) \quad \begin{cases} \partial_t \rho^s + \partial_{x_j} (\rho^s v_j^s) = 0 \\ \partial_t (\rho^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\rho^s v_i^s v_j^s + P_{ij}^s) = d_i^s \\ \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + \sigma_{ij} v_i + Q_j) = 0 \end{cases}$$

On rappelle que l'équation (1.137) sur l'énergie totale du mélange peut être remplacée sans perte de généralité par l'équation sur l'énergie interne (1.129). En se basant sur les principes de la thermodynamique étendue, Müller [MR93] propose une fermeture thermodynamiquement admissible du modèle à 5 équations (1.137) dans le cas isotherme au sens $T^1 = T^2 = T$:

$$(1.138) \quad \begin{cases} T^1 = T^2 = T \\ \epsilon^s = \epsilon^s(\rho^s, T) \\ p^s = p^s(\rho^s, T) \\ q_i^s = 0 \\ \Pi_{ij}^s = 0 \end{cases}$$

Le modèle (1.137) fermé avec (1.138) est symétrique hyperbolique si les relations $\epsilon^s = \epsilon^s(\rho^s, T)$ et $p^s = p^s(\rho^s, T)$ ne sont pas différentielles (voir [MR93]). Le choix des équations d'état est donc libre, du moment que l'énergie interne massique et la pression d'une espèce ne dépendent que de sa propre densité et de la température. Le modèle du gaz parfait $p^s = \frac{2}{D}\rho^s\epsilon^s$ (suffisant mais pas nécessaire) peut donc fermer le système, mais pour un tel niveau d'approximation, la thermodynamique étendue indique que flux de chaleur et contraintes visqueuses spécifiques ne doivent pas apparaître dans le modèle.

Forme non conservative en coordonnées lagrangiennes

On introduit maintenant opérateurs de dérivation et variables usuels pour réécrire le système (1.137) en coordonnées lagrangiennes :

Notation	Signification	Définition formelle
τ	volume spécifique du mélange	$\tau = \frac{1}{\rho}$
c	fraction massique de l'espèce 1	$c = c^1 = \frac{\rho^1}{\rho}$
V	vitesse relative entre les deux espèces	$V_i = v_i^1 - v_i^2$
D^t	dérivée totale en temps	$D^t = \partial_t + v_j \partial_{x_j}$
D^m	dérivée massique	$D_i^m = \tau \partial_{x_i}$

On a choisi arbitrairement de travailler avec la fraction massique de l'espèce 1. La relation $c^1 + c^2 = 1$ permet d'obtenir la fraction massique de l'espèce 2 directement : $c^2 = 1 - c$. Avec ces notations, le modèle miscible (1.137) peut s'écrire sous la forme lagrangienne non conservative :

$$(1.139) \quad \begin{cases} D^t(\tau) + D_j^m(-v_j) = 0 \\ D^t(c) + D_j^m\left(\frac{c(1-c)}{\tau}V_j\right) = 0 \\ D^t(v_i) + D_j^m(\sigma_{ij}) = 0 \\ D^t(e) + D_j^m(\sigma_{ij}v_i + Q_j) = 0 \\ D^t(\tau V_i) + A_i + B_i + \tau\left(\frac{1}{c}D_j^m(P_{ij}^1) - \frac{1}{1-c}D_j^m(P_{ij}^2)\right) = -\nu\tau V_i \end{cases}$$

On a pris pour la force de traînée l'expression $d_i^1 = -\frac{\rho^1\rho^2}{\rho}\nu V_i = -d_i^2$, où ν a la dimension d'une fréquence (s^{-1}). On a posé $A_i = V_j D_j^m(v_i) - V_i D_j^m(v_j)$ et $B_i = u_j^1 D_j^m(u_i^1) - u_j^2 D_j^m(u_i^2)$. On remarque qu'en une seule dimension d'espace, on a $A = 0$ et $B = D^m\left(\frac{1-2c}{2}V^2\right)$.

Par définition de la vitesse moyenne du mélange v , on note que l'on a la relation $\sum_s \rho^s u_i^s = 0$. Dans le cas bifluide, on en déduit une série de relations permettant de passer des variables $(\rho^1, \rho^2, v^1, v^2)$ aux variables (τ, c, v, V) . Les vitesses de fluctuation sont :

$$(1.140) \quad u_i^1 = (1-c)V_i \quad ; \quad u_i^2 = -cV_i$$

La fluctuation d'impulsion de chaque espèce peut s'écrire :

$$(1.141) \quad \rho^1 u_i^1 = -\rho^2 u_i^2 = \frac{\rho^1 \rho^2}{\rho} (u_i^1 - u_i^2) = \frac{c(1-c)}{\tau} V_i$$

Le terme d'énergie de fluctuation pour le mélange prend la forme :

$$(1.142) \quad \sum_{s=1,2} \frac{1}{2} \rho^s u_j^s u_j^s = \frac{c(1-c)}{2\tau} V_j V_j$$

En les variables (τ, c, v, V) , le tenseur des contraintes totales du mélange σ est :

$$(1.143) \quad \sigma_{ij} = P_{ij} + \frac{c(1-c)}{\tau} V_i V_j$$

Le flux total d'énergie du mélange Q est :

$$(1.144) \quad Q_i = q_i + \frac{c(1-c)}{\tau} \left[V_i \left(\epsilon^1 - \epsilon^2 + \frac{1-2c}{2} V_j V_j \right) + V_j \left(\frac{\tau}{c} P_{ij}^1 - \frac{\tau}{1-c} P_{ij}^2 \right) \right]$$

On rappelle que $A_i = V_j D_j^m (v_i) - V_i D_j^m (v_j)$. En les variables c et V , on a $B_i = V_j \left((1-2c) D_j^m (V_i) - V_i D_j^m (c) \right)$. Le système (1.139) s'écrit alors :

$$(1.145) \quad \begin{cases} D^t(\tau) + D_j^m(-v_j) = 0 \\ D^t(c) + D_j^m\left(\frac{c(1-c)}{\tau} V_j\right) = 0 \\ D^t(v_i) + D_j^m\left(P_{ij} + \frac{c(1-c)}{\tau} V_i V_j\right) = 0 \\ D^t(e) + D_j^m\left(P_{ij} v_i + \frac{c(1-c)}{\tau} V_i V_j v_i + q_j + \frac{c(1-c)}{\tau} \left[V_j \left(\epsilon^1 - \epsilon^2 + \frac{1-2c}{2} V_i V_i \right) + V_i \left(\frac{\tau}{c} P_{ij}^1 - \frac{\tau}{1-c} P_{ij}^2 \right) \right] \right) = 0 \\ D^t(\tau V_i) + A_i + B_i + \tau \left(\frac{1}{c} D_j^m(P_{ij}^1) - \frac{1}{1-c} D_j^m(P_{ij}^2) \right) = -\nu \tau V_i \end{cases}$$

Forme conservative en coordonnées lagrangiennes

On considère les équations (1.145) dans le cas $1D$, non visqueux $P_{ij}^s = p^s \delta_{ij}$ et adiabatique $q_i^s = 0$ pour chaque espèce $s = 1, 2$:

$$(1.146) \quad \begin{cases} D^t(\tau) + D^m(-v) = 0 \\ D^t(c) + D^m\left(\frac{c(1-c)}{\tau} V\right) = 0 \\ D^t(v) + D^m\left(p + \frac{c(1-c)}{\tau} V^2\right) = 0 \\ D^t(e) + D^m\left(\left(p + \frac{c(1-c)}{\tau} V^2\right) v + \frac{c(1-c)}{\tau} V \left(\epsilon^1 - \epsilon^2 + \frac{1-2c}{2} V^2 + \frac{\tau}{c} p^1 - \frac{\tau}{1-c} p^2 \right) \right) = 0 \\ D^t(\tau V) + D^m\left(\frac{1-2c}{2} V^2\right) + \frac{\tau}{c} D^m(p^1) - \frac{\tau}{1-c} D^m(p^2) = -\nu \tau V \end{cases}$$

Dans [Sen], Sentis propose de remplacer les termes non conservatifs des équations (1.146) par une approximation conservative qui préserve l'hyperbolicité du système ; c'est ce que l'on résume maintenant. On suppose que chaque espèce obéit à la loi d'état de gaz parfait $p^s = (\gamma^s - 1) \rho^s \epsilon^s$ où γ^s est le coefficient polytropique de l'espèce s . On pose alors :

$$(1.147) \quad \gamma \equiv \frac{\gamma^1 + \gamma^2}{2} \quad \text{et} \quad \chi \equiv \frac{\gamma^1 - \gamma^2}{2}$$

Etape 1 Pour la cinquième équation de (1.146), on fait l'approximation :

$$(1.148) \quad \frac{1}{c}D^m(p^1) - \frac{1}{1-c}D^m(p^2) \simeq \frac{\partial}{\partial x}(\psi(c)\epsilon)$$

La fonction $\psi = \psi(c)$ doit être déterminée. Pour cela, on considère les cas limites où $\psi(c=1) = \gamma^1$ et $\psi(c=0) = -\gamma^2$. Le choix le plus simple pour ψ serait alors $\psi(c) = \gamma(2c-1) + \chi$, mais Sentis choisit une autre fonction qui permet de vérifier certaines propriétés mathématiques :

$$(1.149) \quad \psi(c) = \gamma(2c-1)\frac{1+(2c-1)^2}{2} + \chi$$

Etape 2 Pour la quatrième équation de (1.146), on doit trouver une fermeture pour le terme :

$$(1.150) \quad C \equiv \frac{p^1}{c} - \frac{p^2}{1-c} + \rho(\epsilon^1 - \epsilon^2) = \rho(\gamma^1\epsilon^1 - \gamma^2\epsilon^2)$$

Pour cela, on considère les cas limites où $C(c=1) = \rho\psi(c=1)\epsilon^1$ et $C(c=0) = \rho\psi(c=0)\epsilon^2$. On fait alors l'approximation :

$$(1.151) \quad \frac{p^1}{c} - \frac{p^2}{1-c} + \rho(\epsilon^1 - \epsilon^2) \simeq \rho\psi(c)\epsilon$$

Etape 3 On rappelle que la pression du mélange est $p = p^1 + p^2$. Si $\gamma^1 = \gamma^2$, on a la loi d'état pour le mélange $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$. On étend cette loi au cas général où $\gamma^1 \neq \gamma^2$ en posant :

$$(1.152) \quad p = (\Gamma - 1)\rho\epsilon \quad \text{avec} \quad \Gamma(c) \equiv \gamma + \chi(2c - 1)$$

Système résultant Le système résultant des trois étapes de fermeture s'écrit :

$$(1.153) \quad \begin{cases} D^t(\tau) + D^m(-v) = 0 \\ D^t(c) + D^m\left(\frac{c(1-c)}{\tau}V\right) = 0 \\ D^t(v) + D^m\left(p + \frac{c(1-c)}{\tau}V^2\right) = 0 \\ D^t(\epsilon) + D^m\left(\left(p + \frac{c(1-c)}{\tau}V^2\right)v + \frac{c(1-c)}{\tau}V\left(\psi\epsilon + \frac{1-2c}{2}V^2\right)\right) = 0 \\ D^t(\tau V) + D^m\left(\frac{1-2c}{2}V^2 + \psi(c)\epsilon\right) = -\nu\tau V \end{cases}$$

Le modèle à 5 équations (1.153) est maintenant fermé. Il a la particularité d'être conservatif en les variables du mélange. C'est un modèle à deux vitesses, mais à une seule température et une seule pression. Malgré cela, on n'a pas fait d'hypothèse de fermeture isobare, ni isotherme. Sentis montre que le modèle (1.153) est hyperbolique pour $|V|\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ assez petit (on renvoie à [Sen] pour la démonstration).

Remarque sur l'interpénétration intrinsèque aux modèles miscibles Dans les modèles miscibles, l'équation de bilan d'impulsion de chaque espèce peut s'écrire sous la forme :

$$(1.154) \quad \partial_t v_i^s + v_j^s \partial_{x_j} v_i^s + \frac{1}{\rho^s} \partial_{x_i} p^s = \frac{d_i^s}{\rho^s}$$

Pour le mélange, la conservation de l'impulsion s'écrit :

$$(1.155) \quad \partial_t v_i + v_j \partial_{x_j} v_i + \frac{1}{\rho} \partial_{x_i} p + \frac{1}{\rho} \partial_{x_j} \sum_s \rho^s u_i^s u_j^s = 0$$

On rappelle que les pressions des espèces p^s sont des pressions partielles et que la pression du mélange est $p \equiv \sum_s p^s$.

On considère un fluide composé de deux espèces miscibles non visqueuses en $1D$. A l'instant initial $t = 0$, le mélange est supposé être au repos, c'est-à-dire que :

$$(1.156) \quad v^1 = v^2 = v \quad \text{et} \quad \partial_x v = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x p = 0$$

Si on injecte la condition initiale (1.156) dans l'équation (1.155), on obtient l'équation suivante, valable uniquement à $t = 0$:

$$(1.157) \quad \partial_t v = 0$$

Le mélange va donc conserver la vitesse de son mouvement uniforme juste après $t = 0$. Si on injecte la condition initiale (1.156) et l'équation (1.157) dans l'équation (1.154) écrite pour $s = 1, 2$, on obtient les équations suivantes, valables uniquement à $t = 0$:

$$(1.158) \quad \partial_t u^1 = -\frac{1}{\rho^1} \partial_x p^1 \quad \text{et} \quad \partial_t u^2 = +\frac{1}{\rho - \rho^1} \partial_x p^1$$

On déduit de (1.158) que les gradients des pressions partielles vont mettre en mouvement les espèces. Ce phénomène provient du modèle de la théorie cinétique des gaz : les particules de chaque espèce cherchent à remplir tout l'espace jusqu'à atteindre l'uniformité des pressions partielles. Il s'agit donc d'un phénomène d'interpénétration naturelle qui est intrinsèque à la modélisation miscible. •

1.5 Conclusion

Pour un problème de mélange de gaz non visqueux, en l'absence de flux de chaleur et lorsque les particules constituant les espèces sont électriquement neutres, la forme générale des modèles miscibles biffuides bivitesse se réduit aux équations d'Euler écrites pour chaque espèce en masse volumique et pression partielles (voir [SC02], [DMP98], [Mai96], [Sen] et [MR93]). Le modèle est fermé par une équation d'état de type gaz parfait pour chaque espèce imposée par la technique de construction ; il est néanmoins possible d'aller au-delà du modèle du gaz parfait en s'aidant des principes de la thermodynamique étendue. Le couplage des équations n'apparaît qu'au second membre des équations, à travers les termes de transfert de masse, d'impulsion et d'énergie entre les espèces. Si ces termes de transfert ne sont pas différentiels,

ils n'influencent pas les propriétés mathématiques du modèle. En les variables ρ^1 , ρ^2 , $\rho^1 v_i^1$, $\rho^2 v_i^2$, $\rho^1 e^1$ et $\rho^2 e^2$, le modèle miscible à 6 équations est conservatif. Le système des équations d'Euler étant hyperbolique, le modèle à 6 équations est hyperbolique. Ce modèle est adapté aux problèmes de mélanges gazeux et aux problèmes d'interpénétration de plasmas faiblement ionisés. Pour les problèmes de plasmas fortement ionisés, il est nécessaire de prendre en compte les interactions électromagnétiques entre les espèces par le biais des équations de Maxwell (voir [DMP98] et [Mai96]).

Le modèle miscible à 5 équations est un sous-système du modèle miscible à 6 équations où l'on remplace l'équation de conservation de l'énergie de chaque espèce par l'équation de conservation de l'énergie du mélange. Pour fermer ce modèle, il faut se donner une relation supplémentaire. Sous l'hypothèse isotherme $T^1 = T^2 = T$, le modèle à 5 équations est hyperbolique (voir [MR93]). En modélisation miscible, l'hypothèse d'égalité des pressions réelles des espèces n'existe pas car on ne peut pas avoir accès aux fractions volumiques, le volume occupé par une espèce n'étant pas défini. Le modèle miscible à 5 équations est conservatif en les variables ρ^1 , ρ^2 , $\rho^1 v_i^1$, $\rho^2 v_i^2$ et ρe ; il n'est pas conservatif en les variables du mélange ρ , c , ρv , V et ρe . On a vu qu'il existe cependant, dans le cas non isotherme, une approximation conservative de ce modèle en les variables du mélange, également hyperbolique (voir [Sen]).

Chapitre 2

Analyse mathématique du modèle de Scannapieco-Cheng en 1D

Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés mathématiques du modèle multifluide multivitesse de Scannapieco-Cheng (SC) dans sa version 1D pour deux fluides électriquement neutres désignés par α et β . On a vu au chapitre précédent dédié à la modélisation que ce modèle peut être écrit sous la forme d'un système de 6 lois de conservation avec terme source de relaxation :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^\alpha + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha v^\alpha + p^\alpha) = -\nu \rho f(c) \delta v, \\ \partial_t (\rho^\alpha e^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha e^\alpha v^\alpha + p^\alpha v^\alpha) = -\nu \rho f(c) v \delta v, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_x (\rho^\beta v^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v^\beta) + \partial_x (\rho^\beta v^\beta v^\beta + p^\beta) = \nu \rho f(c) \delta v, \\ \partial_t (\rho^\beta e^\beta) + \partial_x (\rho^\beta e^\beta v^\beta + p^\beta v^\beta) = \nu \rho f(c) v \delta v. \end{array} \right.$$

Le membre de droite peut être exprimé en fonction des variables dépendantes, avec :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho^\alpha + \rho^\beta, \\ c = \frac{\rho^\alpha}{\rho^\alpha + \rho^\beta}, \\ \delta v = v^\alpha - v^\beta, \\ v = \frac{\rho^\alpha v^\alpha + \rho^\beta v^\beta}{\rho^\alpha + \rho^\beta}. \end{array} \right.$$

Dans le modèle original, la valeur du coefficient $\nu \geq 0$ est déterminée par une fonction de toutes les variables dépendantes. Sans restriction de généralité, on considère que ν est un paramètre constant pour mener l'analyse du modèle. Le système (2.1), (2.2) est fermé par deux relations supplémentaires donnant p^α et p^β en fonction des variables dépendantes ; ces relations sont appelées équations d'état. On considère alors deux cas.

– lorsque les équations d'état sont de la forme :

$$(2.3) \quad \begin{cases} p^\alpha(\rho^\alpha), \\ p^\beta(\rho^\beta), \end{cases}$$

on remarque que le sous-système de (2.1) :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \partial_t \rho^\alpha + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha v^\alpha + p^\alpha) = -\nu \rho f(c) \delta v, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_x (\rho^\beta v^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v^\beta) + \partial_x (\rho^\beta v^\beta v^\beta + p^\beta) = \nu \rho f(c) \delta v, \end{cases}$$

constitue un système fermé de 4 équations pour les variables ρ^α , $(\rho^\alpha v^\alpha)$, ρ^β et $(\rho^\beta v^\beta)$. Ce dernier système est appelé *modèle de Scannapieco-Cheng barotrope*.

– lorsque les équations d'état sont de la forme :

$$(2.5) \quad \begin{cases} p^\alpha(\rho^\alpha, \epsilon^\alpha) \text{ avec } \epsilon^\alpha = e^\alpha - \frac{1}{2} (v^\alpha)^2, \\ p^\beta(\rho^\beta, \epsilon^\beta) \text{ avec } \epsilon^\beta = e^\beta - \frac{1}{2} (v^\beta)^2, \end{cases}$$

les 6 équations (2.1) constituent un système fermé que l'on appelle modèle de Scannapieco-Cheng complet, ou simplement *modèle de Scannapieco-Cheng*.

Ce chapitre est consacré à l'analyse mathématique des deux systèmes de lois de conservation avec terme source de relaxation ci-dessus, c'est-à-dire à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité de leur(s) solution(s). Apporter une réponse globale et définitive à ces questions pour un système de lois de conservation non linéaire (comme c'est le cas ici) est aujourd'hui un problème non résolu. Néanmoins, on peut proposer des éléments de réponse en étudiant les différents points suivants :

Hyperbolicité du système homogène L'étude de l'hyperbolicité du système homogène permet de conclure sur les questions de l'existence et de la stabilité linéaire des solutions de la forme quasi-linéaire associée, lorsque l'on suppose que la présence du terme source ne modifie pas ces conclusions. Ce point est traité dans la première section de ce chapitre.

Entropie mathématique du système avec terme source La mise en évidence d'une entropie mathématique strictement convexe permet de donner des éléments de réponse aux questions de l'unicité et de la stabilité des solutions pour le système non linéaire complet. En effet, la condition d'entropie (ou condition de Lax) permet de sélectionner une solution parmi toutes les solutions faibles d'une part. D'autre part, le critère de décroissance d'une entropie mathématique strictement convexe peut être vu comme une extension pour les systèmes non linéaires du critère de stabilité \mathcal{L}^2 classique pour les systèmes linéaires. Dans la seconde section de ce chapitre, on montre que les deux modèles étudiés ici possèdent une entropie mathématique strictement convexe, et que la présence du terme source de relaxation fait décroître cette fonction au cours du temps.

Analyse asymptotique quand le terme source est raide Quand le temps caractéristique de relaxation est petit devant le temps caractéristique d'advection (le terme source est raide), on peut déterminer quel est le comportement limite du système complet par le biais

d'un développement asymptotique de type Chapman-Enskog. Cette étude fait l'objet de la troisième et dernière section de ce chapitre. On y étudie d'une part l'hyperbolicité du système réduit obtenu à l'ordre 0, d'autre part la limite de diffusion du système réduit obtenue à l'ordre 1.

2.1 Hyperbolicité du modèle SC homogène

Cette section est dédiée à l'étude de l'hyperbolicité des modèles SC (2.4) et (2.1) dans le cas homogène, c'est-à-dire lorsque $\nu = 0$. On commence par rappeler les définitions usuelles et principaux résultats liés à l'analyse mathématique des systèmes de lois de conservation en l'absence de terme source. Ensuite, on montre que les deux systèmes considérés sont hyperboliques sous des conditions directement héritées de la condition d'hyperbolicité des équations d'Euler.

2.1.1 Définitions et résultats généraux (rappels)

On rappelle dans ce qui suit les définitions et principaux résultats nécessaires à l'analyse mathématique des systèmes de lois de conservation. On renvoie à [Ser96a], [Ser96b] pour les preuves et une discussion détaillée sur le sujet.

Définition 2.1 (Système de lois de conservation). *On appelle système de lois de conservation un système de la forme :*

$$(2.6) \quad \partial_t U + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} F_j(U) = 0,$$

où :

- $t \in \mathbb{R}$ est le temps,
- $x \in \mathbb{R}^d$ est la position, $d = 1, 2, 3$ étant la dimension de l'espace,
- $U : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$, $(x, t) \mapsto U(x, t)$ est appelé l'état, \mathcal{U} étant un ouvert de \mathbb{R}^n ,
- $F_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \mapsto F_j(U)$ est la j -ième composante du flux.

L'analyse mathématique d'un tel système consiste à étudier l'existence, l'unicité et la stabilité de(s) solution(s). Dans le cas général non linéaire non scalaire, il s'agit d'un problème non résolu. On peut néanmoins apporter des éléments de réponse en étudiant la forme quasi-linéaire associée.

Définition 2.2 (Forme quasi-linéaire). *On appelle forme quasi-linéaire d'un système de lois de conservation (2.6), le système :*

$$(2.7) \quad \partial_t U + \sum_{j=1}^d A_j(U) \cdot \partial_{x_j} U = 0,$$

où les applications $A_j : \mathbb{R}^n \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$, $U \mapsto d_U F_j(U)$ sont définies et régulières sur \mathcal{U} . d_U désigne la différentiation par rapport à U .

Dans le cas général où le flux est une fonction non linéaire de l'état, un système conservatif (2.6) peut développer en temps fini des solutions discontinues. Il n'y a donc pas rigoureusement équivalence entre la forme conservative (2.6) et la forme quasi-linéaire (2.7), dans la mesure où cette dernière n'a de sens que pour les solutions régulières. On considère cependant que le premier pas dans l'analyse mathématique d'un système non linéaire de lois de conservation consiste en une étude de stabilité des solutions du système linéarisé. On revient donc maintenant sur quelques définitions et résultats concernant l'hyperbolicité.

Définition 2.3 (Hyperbolicité d'un système linéaire). Soit $\phi \in \mathbb{R}^d$, on note $A(\phi) = \sum_{j=1}^d \phi_j A_j$. Le système linéaire à coefficients constants :

$$(2.8) \quad \partial_t U + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} U = 0,$$

est hyperbolique s'il existe $C > 0$ tel que $\sup_{\phi \in \mathbb{R}^d} \|e^{-iA(\phi)}\| \leq C$.

L'hyperbolicité d'un système linéaire est une notion fondamentale qui garantit à la fois l'existence et la stabilité d'une solution. Plus précisément :

Théorème 2.1. Pour un système linéaire du premier ordre à coefficients constants (2.8), le problème de Cauchy est bien posé dans \mathcal{L}^2 si et seulement si ce système est hyperbolique. Pour un système hyperbolique, étant donné $U_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution de (2.8) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d))$.

L'hyperbolicité est liée à la diagonalisabilité de la matrice $A(\phi)$, comme l'indique le résultat suivant :

Lemme 2.1. Si le système (2.8) est hyperbolique, alors la matrice $A(\phi)$ est diagonalisable à valeurs propres réelles, pour tout $\phi \in \mathbb{R}^d$. En une seule dimension d'espace ($d = 1$), si la matrice $A(\phi)$ est diagonalisable à valeurs propres réelles pour tout $\phi \in \mathbb{R}$, alors le système (2.8) est hyperbolique.

Une notion plus forte d'hyperbolicité est l'hyperbolicité stricte :

Définition 2.4 (Hyperbolicité stricte). Le système linéaire (2.8) est dit strictement hyperbolique si les matrices $A(\phi) = \sum_{j=1}^d \phi_j A_j$ sont diagonalisables à valeurs propres réelles, de multiplicités constantes lorsque ϕ parcourt $\mathbb{R}^d - \{0\}$.

Théorème 2.2. Si le système (2.8) est strictement hyperbolique, alors il est hyperbolique.

On étend naturellement la notion d'hyperbolicité à la forme quasi-linéaire d'un système de lois de conservation en définissant :

Définition 2.5 (Hyperbolicité d'un système quasi-linéaire). Le système quasi-linéaire (2.7) est dit hyperbolique, respectivement strictement hyperbolique, si pour tout $\bar{U} \in \mathcal{U}$, le système linéaire à coefficients constants :

$$(2.9) \quad \partial_t U + \sum_{j=1}^d A_j(\bar{U}) \cdot \partial_{x_j} U = 0,$$

est hyperbolique, respectivement strictement hyperbolique.

On termine ces rappels avec l'entropie mathématique :

Définition 2.6 (Entropie mathématique). Une fonction réelle $U \mapsto \eta(U)$ est une entropie mathématique du système (2.6) s'il existe une application $U \mapsto \zeta(U)$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , appelée flux d'entropie, telle que toute solution classique de (2.6) satisfasse la loi de conservation scalaire :

$$(2.10) \quad \partial_t \eta(U) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \zeta_j(U) = 0.$$

On peut montrer que si la fonction $\eta(U)$ est strictement convexe, elle satisfait :

$$(2.11) \quad \partial_t \eta(U) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \zeta_j(U) \leq 0,$$

pour les solutions visqueuses. Dans ce cas, une intégration en temps et en espace donne :

$$(2.12) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \eta(U(x_1, \dots, x_d, t)) \, dx^d \leq \int_{\mathbb{R}^d} \eta(U(x_1, \dots, x_d, 0)) \, dx^d,$$

qui constitue un résultat de stabilité des solutions au sens des distributions. On renvoie à [Tad03] pour plus de détails.

2.1.2 Modèle SC barotrope homogène

Dans ce paragraphe, on étudie l'hyperbolicité du système :

$$(2.13) \quad \begin{cases} \partial_t \rho^\alpha + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha v^\alpha + p^\alpha) = 0, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_x (\rho^\beta v^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v^\beta) + \partial_x (\rho^\beta v^\beta v^\beta + p^\beta) = 0, \end{cases}$$

fermé par des relations de la forme $p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha)$ et $p^\beta = p^\beta(\rho^\beta)$. Avant d'aller plus loin, on rappelle le résultat suivant :

Proposition 2.1 (rappel). *Le système des équations d'Euler 1D avec fermeture barotrope $p = p(\rho)$:*

$$(2.14) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0, \end{cases}$$

est strictement hyperbolique si et seulement si $\frac{dp}{d\rho} > 0$; il n'est pas hyperbolique sinon.

Preuve Une forme quasi-linéaire du système (2.14) est :

$$(2.15) \quad \partial_t U_b + A_b(U_b) \cdot \partial_x U_b = 0,$$

avec :

$$(2.16) \quad U_b \equiv \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A_b(U_b) \equiv \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} & v \end{pmatrix}.$$

On distingue trois cas :

- si $\frac{dp}{d\rho} > 0$, on pose $a_b \equiv \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \in \mathbb{R}$. Les valeurs propres de A_b sont $\lambda_{b,\pm} = v \pm a_b$; elles sont réelles distinctes, donc A_b est diagonalisable. Un jeu de vecteurs propres associés est $\Lambda_{b,\pm} = (\rho, \pm a_b)^t$. D'après la définition 2.4, le système est strictement hyperbolique.

- si $\frac{dp}{d\rho} < 0$, on pose $a_b \equiv i\sqrt{-\frac{dp}{d\rho}} \in \mathbb{C}$. Les valeurs propres de A_b sont $\lambda_{b,\pm} = v \pm a_b$; elles sont complexes, donc le système n'est pas hyperbolique.
- si $\frac{dp}{d\rho} = 0$, la seule valeur propre de A_b est $\lambda_{b,0} = v$, de multiplicité double. On peut vérifier qu'on ne peut pas trouver un jeu de vecteurs propres associés générateur de \mathbb{R}^2 , donc A_b n'est pas diagonalisable et le système n'est pas hyperbolique. ■

On peut maintenant énoncer le résultat évident :

Proposition 2.2. *Le système (2.13) est hyperbolique (non strictement) si et seulement si $\frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} > 0$ et $\frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} > 0$.*

Preuve Une forme quasi-linéaire du système (2.13) est :

$$(2.17) \quad \partial_t V_b + B_b(V_b) \cdot \partial_x V_b = 0,$$

avec :

$$(2.18) \quad V_b \equiv \begin{pmatrix} U_b^\alpha \\ U_b^\beta \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B_b(V_b) \equiv \begin{pmatrix} A_b(U_b^\alpha) & 0 \\ 0 & A_b(U_b^\beta) \end{pmatrix},$$

avec $U_b^s \equiv (\rho^s, v^s)^t$ pour $s = \alpha, \beta$ et A_b donnée par (2.16). La matrice B_b est diagonale par blocs, ce qui simplifie grandement l'étude de l'hyperbolicité. En effet, chaque bloc correspond à un système de type équations d'Euler pour un fluide barotrope, dont l'étude de l'hyperbolicité a été effectuée plus haut (voir proposition 2.1). On rappelle que le spectre d'une matrice diagonale par blocs est formé par les valeurs propres de chaque bloc. On sait donc que :

- si $\frac{dp^s}{d\rho^s} < 0$ pour au moins l'un des deux fluides s , au moins deux des valeurs propres de B_b sont complexes, donc le système n'est pas hyperbolique.
- si $\frac{dp^s}{d\rho^s} = 0$ pour au moins l'un des deux fluides s , les valeurs propres de B_b peuvent être toutes réelles, mais on ne peut pas trouver un jeu de vecteurs propres associés générateur de \mathbb{R}^4 . Donc B_b n'est pas diagonalisable et le système n'est pas hyperbolique.
- si $\frac{dp^s}{d\rho^s} > 0$ pour chaque fluide s , le spectre de B_b est $\{v^\alpha \pm a_b^\alpha, v^\beta \pm a_b^\beta\}$, avec $a_b^s = \sqrt{\frac{dp^s}{d\rho^s}}$. Toutes les valeurs propres sont réelles mais pas forcément distinctes. Néanmoins, le jeu

de vecteurs propres associés $\left\{ \begin{pmatrix} \rho^\alpha \\ \pm a_b^\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho^\beta \\ \pm a_b^\beta \end{pmatrix} \right\}$ est générateur de \mathbb{R}^4 , donc B_b est

diagonalisable. On en déduit que le système est hyperbolique non strictement, au sens de la définition 2.5. ■

2.1.3 Modèle SC complet homogène

Dans ce paragraphe, on étudie l'hyperbolicité du système :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^\alpha + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha v^\alpha + p^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha e^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha e^\alpha v^\alpha + p^\alpha v^\alpha) = 0, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_x (\rho^\beta v^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v^\beta) + \partial_x (\rho^\beta v^\beta v^\beta + p^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta e^\beta) + \partial_x (\rho^\beta e^\beta v^\beta + p^\beta v^\beta) = 0, \end{array} \right.$$

fermé par des relations de la forme $p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha, \epsilon^\alpha)$ et $p^\beta = p^\beta(\rho^\beta, \epsilon^\beta)$, avec $\epsilon^\alpha = e^\alpha - \frac{1}{2}(v^\alpha)^2$ et $\epsilon^\beta = e^\beta - \frac{1}{2}(v^\beta)^2$. Avant d'aller plus loin, on rappelle le résultat suivant :

Proposition 2.3 (rappel). *Le système des équations d'Euler 1D :*

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_x (\rho e v + p v) = 0, \end{array} \right.$$

avec fermeture de la forme $p = p(\rho, \epsilon)$ où $\epsilon = e - \frac{1}{2}v^2$, est strictement hyperbolique si et seulement si $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_\epsilon + \frac{p}{\rho^2} \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_\rho > 0$; il n'est pas hyperbolique sinon.

Preuve Une forme quasi-linéaire du système (2.20) est :

$$(2.21) \quad \partial_t U + A(U) \cdot \partial_x U = 0,$$

avec :

$$(2.22) \quad U \equiv \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ \epsilon \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A(U) \equiv \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_\epsilon & v & \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_\rho \\ 0 & \frac{p}{\rho} & v \end{pmatrix}.$$

On distingue trois cas :

- si $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_\epsilon + \frac{p}{\rho^2} \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_\rho > 0$, on pose $a \equiv \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_\epsilon + \frac{p}{\rho^2} \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_\rho} > 0 \in \mathbb{R}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_\pm = v \pm a$ et $\lambda_0 = v$; elles sont réelles distinctes, donc A est diagonalisable. Un jeu de vecteurs propres associés est $\Lambda_\pm = \left(\rho, \pm a, \frac{p}{\rho} \right)^t$ et $\Lambda_0 = \left(\left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_\rho, 0, - \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_\epsilon \right)^t$. D'après la définition 2.4, le système est strictement hyperbolique.

- si $\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_{\epsilon} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \epsilon}\Big|_{\rho} < 0$, on pose $a \equiv i\sqrt{-\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_{\epsilon} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \epsilon}\Big|_{\rho}} \in \mathbb{C}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_{\pm} = v \pm a$ et $\lambda_0 = v$; deux d'entre elles sont complexes, donc le système n'est pas hyperbolique.
- si $\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_{\epsilon} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \epsilon}\Big|_{\rho} = 0$, la seule valeur propre de A est $\lambda_0 = v$, de multiplicité triple. On peut vérifier qu'on ne peut pas trouver un jeu de vecteurs propres associés générateur de \mathbb{R}^3 , donc A n'est pas diagonalisable et le système n'est pas hyperbolique. ■

On peut maintenant énoncer le résultat évident :

Proposition 2.4. *Le système (2.19) est hyperbolique (non strictement) si et seulement si $\frac{\partial p^{\alpha}}{\partial \rho^{\alpha}}\Big|_{\epsilon^{\alpha}} + \frac{p^{\alpha}}{(\rho^{\alpha})^2} \frac{\partial p^{\alpha}}{\partial \epsilon^{\alpha}}\Big|_{\rho^{\alpha}} > 0$ et $\frac{\partial p^{\beta}}{\partial \rho^{\beta}}\Big|_{\epsilon^{\beta}} + \frac{p^{\beta}}{(\rho^{\beta})^2} \frac{\partial p^{\beta}}{\partial \epsilon^{\beta}}\Big|_{\rho^{\beta}} > 0$.*

Preuve Une forme quasi-linéaire du système (2.19) est :

$$(2.23) \quad \partial_t V + B(V) \cdot \partial_x V = 0,$$

avec :

$$(2.24) \quad V \equiv \begin{pmatrix} U^{\alpha} \\ U^{\beta} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B(V) \equiv \begin{pmatrix} A(U^{\alpha}) & 0 \\ 0 & A(U^{\beta}) \end{pmatrix},$$

avec $U^s \equiv (\rho^s, v^s, \epsilon^s)^t$ pour $s = \alpha, \beta$ et A donnée par (2.22). Comme dans le cas barotrope, la matrice B est diagonale par blocs, ce qui simplifie grandement l'étude de l'hyperbolicité. Chaque bloc correspond à un système de type équations d'Euler, dont l'étude de l'hyperbolicité a été effectuée plus haut (voir proposition 2.3). Comme le spectre d'une matrice diagonale par blocs est formé par les valeurs propres de chaque bloc, on sait que :

- si $\frac{\partial p^s}{\partial \rho^s}\Big|_{\epsilon^s} + \frac{p^s}{(\rho^s)^2} \frac{\partial p^s}{\partial \epsilon^s}\Big|_{\rho^s} < 0$ pour au moins l'un des deux fluides s , au moins deux des valeurs propres de B sont complexes, donc le système n'est pas hyperbolique.
- si $\frac{\partial p^s}{\partial \rho^s}\Big|_{\epsilon^s} + \frac{p^s}{(\rho^s)^2} \frac{\partial p^s}{\partial \epsilon^s}\Big|_{\rho^s} = 0$ pour au moins l'un des deux fluides s , les valeurs propres de B peuvent être toutes réelles, mais on ne peut pas trouver un jeu de vecteurs propres associés générateur de \mathbb{R}^6 . Donc B n'est pas diagonalisable et le système n'est pas hyperbolique.
- si $\frac{\partial p^s}{\partial \rho^s}\Big|_{\epsilon^s} + \frac{p^s}{(\rho^s)^2} \frac{\partial p^s}{\partial \epsilon^s}\Big|_{\rho^s} > 0$ pour chaque fluide s , le spectre de B est $\{v^{\alpha} \pm a^{\alpha}, v^{\alpha}, v^{\beta} \pm a^{\beta}, v^{\beta}\}$, avec $a^s = \sqrt{\frac{\partial p^s}{\partial \rho^s}\Big|_{\epsilon^s} + \frac{p^s}{(\rho^s)^2} \frac{\partial p^s}{\partial \epsilon^s}\Big|_{\rho^s}}$. Toutes les valeurs propres sont réelles mais pas forcément distinctes. Néanmoins, le jeu de vecteurs propres associés

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \rho^\alpha \\ \pm a^\alpha \\ \frac{p^\alpha}{\rho^\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial p^\alpha}{\partial \epsilon^\alpha} \Big|_{\rho^\alpha} \\ 0 \\ -\frac{\partial p^\alpha}{\partial \rho^\alpha} \Big|_{\epsilon^\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho^\beta \\ \pm a^\beta \\ \frac{p^\beta}{\rho^\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial p^\beta}{\partial \epsilon^\beta} \Big|_{\rho^\beta} \\ 0 \\ -\frac{\partial p^\beta}{\partial \rho^\beta} \Big|_{\epsilon^\beta} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ est g\u00e9n\u00e9rateur de } \mathbb{R}^6, \text{ donc } B$$

est diagonalisable. On en d\u00e9duit que le syst\u00e8me est hyperbolique non strictement, au sens de la d\u00e9finition 2.5. ■

2.2 Entropie math\u00e9matique du mod\u00e8le SC avec terme source

Cette section est consacr\u00e9e \u00e0 l'\u00e9tude de l'existence d'une entropie math\u00e9matique strictement convexe pour les syst\u00e8mes (2.4) et (2.1) dans le cas g\u00e9n\u00e9ral o\u00f9 le terme source est quelconque ($\nu \geq 0$). On commence par rappeler comment s'\u00e9tend la notion d'entropie math\u00e9matique pour un syst\u00e8me de lois de conservation avec un terme source. Ensuite, on montre que les mod\u00e8les SC barotrope et complet poss\u00e8dent une entropie math\u00e9matique strictement convexe. Dans les deux cas, cette entropie v\u00e9rifie une loi de bilan dont le terme source est n\u00e9gatif ou nul.

2.2.1 Entropie math\u00e9matique d'un syst\u00e8me de lois de bilan (rappels)

On rappelle bri\u00e8vement dans ce qui suit comment est \u00e9tendue la notion d'entropie math\u00e9matique aux syst\u00e8mes de lois de bilan.

D\u00e9finition 2.7 (Syst\u00e8me de lois de bilan). *On appelle syst\u00e8me de lois de bilan un syst\u00e8me de la forme :*

$$(2.25) \quad \partial_t U + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} F_j(U) = Q(U),$$

o\u00f9 :

- $t \in \mathbb{R}$ est le temps,
- $x \in \mathbb{R}^d$ est la position, $d = 1, 2, 3$ \u00e9tant la dimension de l'espace,
- $U : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$, $(x, t) \mapsto U(x, t)$ est appel\u00e9 l'\u00e9tat, \mathcal{U} \u00e9tant un ouvert de \mathbb{R}^n ,
- $F_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \mapsto F_j(U)$ est la j -i\u00e8me composante du flux,
- $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \mapsto Q(U)$ est le terme source.

D\u00e9finition 2.8 (Entropie math\u00e9matique d'un syst\u00e8me de lois de bilan). *Une fonction r\u00e9elle $U \mapsto \eta(U)$ est une entropie math\u00e9matique du syst\u00e8me (2.25) s'il existe deux applications $U \mapsto \zeta(U)$ et $U \mapsto \omega(U)$ \u00e0 valeurs dans \mathbb{R}^d , appel\u00e9es respectivement flux d'entropie et source d'entropie, telle que toute solution classique de (2.25) satisfasse la loi de bilan scalaire :*

$$(2.26) \quad \partial_t \eta(U) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \zeta_j(U) = \omega(U).$$

En multipliant le système (2.25) par $d_U \eta$, et en comparant le résultat avec la loi de bilan (2.26), on voit que η est une entropie lorsque les relations de compatibilité :

$$(2.27) \quad d_U \eta \cdot d_U F_j = d_U \zeta_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, d,$$

et :

$$(2.28) \quad d_U \eta \cdot Q = \omega,$$

sont vérifiées pour toute solution classique U . La relation (2.27) est une contrainte que l'on retrouve dans le cas d'un système homogène, tandis que la relation (2.28) est une contrainte liée à la présence d'un terme source. On peut montrer que si la fonction $\eta(U)$ est strictement convexe, elle satisfait :

$$(2.29) \quad \partial_t \eta(U) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \zeta_j(U) \leq \omega(U),$$

pour les solutions visqueuses. Dans ce cas, une intégration en temps et en espace donne :

$$(2.30) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \eta(U(x_1, \dots, x_d, t)) \, dx^d \leq \int_{\mathbb{R}^d} \eta(U(x_1, \dots, x_d, 0)) \, dx^d + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \omega(U(x_1, \dots, x_d, t')) \, dx^d \, dt'.$$

On en déduit que si ω satisfait la relation dite de dissipation :

$$(2.31) \quad \omega(U) \leq 0,$$

alors on a le résultat de stabilité :

$$(2.32) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \eta(U(x_1, \dots, x_d, t)) \, dx^d \leq \int_{\mathbb{R}^d} \eta(U(x_1, \dots, x_d, 0)) \, dx^d.$$

On renvoie à [Tza05] et [CLL94] pour plus de détails.

2.2.2 Modèle SC barotrope

Dans ce paragraphe, on étudie le système (2.4). Avant d'aller plus loin, on rappelle le résultat suivant :

Proposition 2.5 (rappel). *Une entropie mathématique pour le système des équations d'Euler 1D avec fermeture barotrope (2.14) est ρe , avec $e \equiv \epsilon + \frac{1}{2}v^2$, où $\epsilon(\rho)$ est une fonction telle que $\frac{d\epsilon}{d\rho} = \frac{p}{\rho^2}$. Cette entropie est strictement convexe en les variables $(\rho, \rho v)$.*

Preuve En définissant $e \equiv \epsilon + \frac{1}{2}v^2$ où $\epsilon = \epsilon(\rho)$, on forme à partir du système (2.14) l'équation :

$$(2.33) \quad \partial_t (\rho e) + \partial_x (\rho e v + p v) + \left(\rho^2 \frac{d\epsilon}{d\rho} - p \right) \partial_x v = 0.$$

Si ϵ est tel que $\frac{d\epsilon}{d\rho} = \frac{p}{\rho^2}$, on obtient alors la loi de conservation :

$$(2.34) \quad \partial_t (\rho e) + \partial_x (\rho e v + p v) = 0,$$

donc les fonctions $k \cdot (\rho e)$, $k \in \mathbb{R}^*$, sont toutes des entropies mathématiques pour (2.14). En s'aidant de l'annexe B, on vérifie facilement que les fonctions $k \cdot (\rho e)$, $k > 0$, ont toutes une matrice hessienne symétrique définie positive en les variables $(\rho, \rho v)$. Donc la fonction ρe est une entropie mathématique strictement convexe pour le système (2.14). ■

On peut maintenant énoncer le résultat :

Proposition 2.6. *Une entropie mathématique pour le système (2.4) est $\eta_b = \rho^\alpha e^\alpha + \rho^\beta e^\beta$, avec $e^s \equiv \epsilon^s + \frac{1}{2}(v^s)^2$ pour $s = \alpha, \beta$, où $\epsilon^s(\rho^s)$ est une fonction telle que $\frac{d\epsilon^s}{d\rho^s} = \frac{p^s}{(\rho^s)^2}$. Cette entropie est strictement convexe en les variables $(\rho^\alpha, \rho^\alpha v^\alpha, \rho^\beta, \rho^\beta v^\beta)$ et vérifie l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} \eta_b(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta_b(x, 0) dx$.*

Preuve En définissant $e^s \equiv \epsilon^s + \frac{1}{2}(v^s)^2$ pour $s = \alpha, \beta$, où $\epsilon^s = \epsilon^s(\rho^s)$, on forme à partir du système (2.4) l'équation :

$$(2.35) \quad \begin{aligned} & \partial_t (\rho^\alpha e^\alpha + \rho^\beta e^\beta) + \partial_x (\rho^\alpha e^\alpha v^\alpha + \rho^\beta e^\beta v^\beta + p^\alpha v^\alpha + p^\beta v^\beta) \\ & + \left((\rho^\alpha)^2 \frac{d\epsilon^\alpha}{d\rho^\alpha} - p^\alpha \right) \partial_x v^\alpha + \left((\rho^\beta)^2 \frac{d\epsilon^\beta}{d\rho^\beta} - p^\beta \right) \partial_x v^\beta = -\nu \rho f(c) \delta v^2. \end{aligned}$$

Si ϵ^s pour $s = \alpha, \beta$ sont tels que $\frac{d\epsilon^s}{d\rho^s} = \frac{p^s}{(\rho^s)^2}$, on obtient alors la loi de bilan :

$$(2.36) \quad \partial_t (\rho^\alpha e^\alpha + \rho^\beta e^\beta) + \partial_x (\rho^\alpha e^\alpha v^\alpha + \rho^\beta e^\beta v^\beta + p^\alpha v^\alpha + p^\beta v^\beta) = -\nu \rho f(c) \delta v^2,$$

donc les fonctions $k \cdot (\rho^\alpha e^\alpha + \rho^\beta e^\beta)$, $k \in \mathbb{R}^*$, sont toutes des entropies mathématiques pour (2.4). On s'intéresse en particulier au cas $k = 1$ en définissant $\eta_b = \rho^\alpha e^\alpha + \rho^\beta e^\beta$. La matrice hessienne de $\eta_b(\rho^\alpha, \rho^\alpha v^\alpha, \rho^\beta, \rho^\beta v^\beta)$ est diagonale par blocs, où les blocs sont les matrices hessiennes de $\rho^\alpha e^\alpha(\rho^\alpha, \rho^\alpha v^\alpha)$ et $\rho^\beta e^\beta(\rho^\beta, \rho^\beta v^\beta)$. Or on a vu dans la proposition 2.5 que ces fonctions sont strictement convexes. Donc ces blocs sont symétriques définis positifs, et par conséquent, la matrice hessienne de $\eta_b(\rho^\alpha, \rho^\alpha v^\alpha, \rho^\beta, \rho^\beta v^\beta)$ est symétrique définie positive. La fonction η_b est donc strictement convexe. Pour prouver l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} \eta_b(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta_b(x, 0) dx$, il suffit d'intégrer en espace et en temps la loi de bilan (2.36) de manière à annuler la contribution du flux d'entropie. Le terme source étant négatif ou nul, on trouve le résultat. ■

2.2.3 Modèle SC complet

On passe maintenant à l'étude du système complet (2.1). Avant d'aller plus loin, on rappelle le résultat suivant :

Proposition 2.7 (rappel). *Une entropie mathématique pour le système des équations d'Euler 1D avec fermeture $p = p(\tau, \epsilon)$ (2.20) est $-\rho S$, où S est l'entropie thermodynamique telle que $TdS = d\epsilon + p d\tau$. Cette entropie mathématique est strictement convexe en les variables $(\rho, \rho v, \rho e)$.*

Preuve Le principe fondamental de la thermodynamique $TdS = d\epsilon + p d\tau$ s'écrit encore $TdS = d\epsilon - v dv - \frac{p}{\rho^2} d\rho$. On forme alors facilement la loi de conservation supplémentaire :

$$(2.37) \quad \partial_t (\rho S) + \partial_x (\rho S v) = 0,$$

donc toute fonction $g(\rho S)$ est une entropie mathématique pour (2.20). On s'intéresse en particulier au cas simple $g(\rho S) = -\rho S$. En s'aidant de l'annexe B, on vérifie que cette fonction a une matrice hessienne symétrique définie positive en les variables $(\rho, \rho v, \rho e)$. Donc $-\rho S$ est une entropie mathématique strictement convexe pour le système (2.20). ■

On peut maintenant énoncer un résultat pour le modèle SC complet.

Proposition 2.8. *Une entropie mathématique pour le système (2.1) est $\eta = -\rho^\alpha S^\alpha - \rho^\beta S^\beta$, où S^s est l'entropie thermodynamique associée au fluide $s = \alpha, \beta$ telle que $T^s dS^s = d\epsilon^s + p^s d\tau^s$. Cette entropie mathématique est strictement convexe en les variables $(\rho^\alpha, \rho^\alpha v^\alpha, \rho^\alpha e^\alpha, \rho^\beta, \rho^\beta v^\beta, \rho^\beta e^\beta)$ et vérifie l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} \eta(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta(x, 0) dx$.*

Preuve Pour $s = \alpha, \beta$, chaque relation $T^s dS^s = d\epsilon^s + p^s d\tau^s$ peut encore s'écrire $T^s dS^s = d\epsilon^s - v^s dv^s - \frac{p^s}{(\rho^s)^2} d\rho^s$. On forme alors facilement les lois de bilan supplémentaires :

$$(2.38) \quad \begin{cases} \partial_t (\rho^\alpha S^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha S^\alpha v^\alpha) = \nu \rho f(c) \delta v^2 \frac{1-c}{T^\alpha}, \\ \partial_t (\rho^\beta S^\beta) + \partial_x (\rho^\beta S^\beta v^\beta) = \nu \rho f(c) \delta v^2 \frac{c}{T^\beta}. \end{cases}$$

En sommant ces relations, on trouve :

$$(2.39) \quad \partial_t (\rho^\alpha S^\alpha + \rho^\beta S^\beta) + \partial_x (\rho^\alpha S^\alpha v^\alpha + \rho^\beta S^\beta v^\beta) = \nu \rho f(c) \delta v^2 \frac{cT^\alpha + (1-c)T^\beta}{T^\alpha T^\beta},$$

donc les fonctions $k \cdot (\rho^\alpha S^\alpha + \rho^\beta S^\beta)$, $k \in \mathbb{R}^*$, sont toutes des entropies mathématiques pour (2.1). On s'intéresse en particulier au cas $k = -1$ en définissant $\eta = -\rho^\alpha S^\alpha - \rho^\beta S^\beta$. La matrice hessienne de $\eta(\rho^\alpha, \rho^\alpha v^\alpha, \rho^\alpha e^\alpha, \rho^\beta, \rho^\beta v^\beta, \rho^\beta e^\beta)$ est diagonale par blocs, où les blocs sont les matrices hessiennes de $-\rho^\alpha S^\alpha(\rho^\alpha, \rho^\alpha v^\alpha, \rho^\alpha e^\alpha)$ et $-\rho^\beta S^\beta(\rho^\beta, \rho^\beta v^\beta, \rho^\beta e^\beta)$. Or on a vu dans la proposition 2.7 que ces fonctions sont strictement convexes. Donc ces blocs sont symétriques définis positifs, et par conséquent, la matrice hessienne de $\eta(\rho^\alpha, \rho^\alpha v^\alpha, \rho^\alpha e^\alpha, \rho^\beta, \rho^\beta v^\beta, \rho^\beta e^\beta)$ est symétrique définie positive. La fonction η est donc strictement convexe. Pour prouver l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} \eta(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta(x, 0) dx$, il suffit d'intégrer en espace et en temps la loi de bilan (2.39) de manière à annuler la contribution du flux d'entropie. Comme $\eta = -(\rho^\alpha S^\alpha + \rho^\beta S^\beta)$, la source d'entropie mathématique est bien négative ou nulle, ce qui prouve le résultat. ■

2.3 Analyse asymptotique du modèle SC quand le terme source est raide

L'analyse asymptotique d'un système dans un voisinage donné consiste à déterminer quel est le comportement équivalent du système dans ce voisinage. Pour cela, on procède au développement asymptotique des inconnues du système dans le voisinage considéré. En quelques mots, le développement asymptotique d'une fonction à l'ordre n et dans un voisinage donné est une somme finie de $n+1$ fonctions de référence qui donne une bonne approximation du comportement de la fonction dans ce voisinage. La somme étant finie, la question de la convergence ne se pose pas (voir [Erd56] pour plus de détails). Le plus célèbre exemple d'analyse asymptotique est probablement le passage formel de la théorie cinétique des gaz aux équations de Navier-Stokes quand la fonction de distribution est au voisinage d'une Maxwellienne (voir [Gra63], [Lev96], [BGL91], [Gol98] et bien d'autres). Un autre exemple d'analyse asymptotique dont on se servira au chapitre 3 est le passage des équations d'Euler à la loi de Darcy et l'équation des milieux poreux lorsque la vitesse du gaz est relaxée très rapidement (voir [HL92], [HMP05]).

Cette section est consacrée à l'analyse asymptotique des modèles SC barotrope et complet quand le terme source de relaxation des vitesses est raide. Une telle analyse a déjà été menée

pour d'autres modèles multifluides dans [Bér96], [GJ01] et [KMB⁺01] par exemple. Dans ce qui suit, on effectue les développements asymptotiques d'ordre 0 et 1 de la variable vitesse relative pour les systèmes barotrope et complet. On étudie alors l'hyperbolicité du système réduit obtenu à l'ordre 0 (relaxation instantannée des vitesses), puis on donne la limite de diffusion obtenue à l'ordre 1 (relaxation rapide des vitesses). Lors de l'étude du modèle SC barotrope, on propose également un problème avec solution de référence (au sens asymptotique) qui caractérise la diffusion de la fraction massique à vitesse finie. Cette solution quasi-analytique sera utilisée au chapitre 4 pour évaluer la précision des schémas numériques proposés dans le cas raide $\nu \gg 1$.

2.3.1 Limite monovitesse du modèle SC barotrope

Le modèle SC barotrope (2.4) peut s'écrire de manière équivalente pour les solutions régulières :

$$(2.40) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p + \rho c(1-c)\delta v^2) = 0, \\ \partial_t c + v \partial_x c + \frac{1}{\rho} \partial_x (\rho c(1-c)\delta v) = 0, \\ \partial_t \delta v + v \partial_x \delta v + \delta v [\partial_x v + (1-2c)\partial_x \delta v - \delta v \partial_x c] \\ \quad + \frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1-c)} \partial_x p^\beta = -\nu \frac{f(c)}{c(1-c)} \delta v, \end{cases}$$

avec $p = p^\alpha + p^\beta = p(\rho, c)$. Le choix est fait ici d'utiliser les variables du mélange ρ, v, c et δv données par (2.2) car le terme source de relaxation n'apparaît alors que dans une seule équation.

On se place maintenant dans le cas raide où $\nu \gg 1$, et on suppose que la variable relaxée δv admet un développement asymptotique de la forme :

$$(2.41) \quad \delta v = \delta v_0 + \frac{1}{\nu} \delta v_1 + \mathcal{O}(\nu^{-2}).$$

En injectant ce développement dans l'équation pour δv de (2.40), on obtient :

$$(2.42) \quad \begin{aligned} & \partial_t \delta v_0 + v \partial_x \delta v_0 + \delta v_0 [\partial_x v + (1-2c)\partial_x \delta v_0 - \delta v_0 \partial_x c] \\ & + \frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1-c)} \partial_x p^\beta = -\frac{f(c)}{c(1-c)} (\nu \delta v_0 + \delta v_1) + \mathcal{O}(\nu^{-1}). \end{aligned}$$

Ce développement étant valable pour toute valeur de $\nu \gg 1$, on déduit de (2.42) les relations suivantes, obtenues en considérant les puissances successives de ν :

$$(2.43) \quad \begin{cases} \delta v_0 = 0, \\ \delta v_1 = -\frac{c(1-c)}{f(c)} \left(\frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1-c)} \partial_x p^\beta \right). \end{cases}$$

On trouve donc que dans le cas raide, l'équation aux dérivées partielles pour δv de (2.40) est remplacée par l'équation :

$$(2.44) \quad \delta v = -\frac{1}{\nu} \frac{c(1-c)}{f(c)} \left(\frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1-c)} \partial_x p^\beta \right) + \mathcal{O}(\nu^{-2}).$$

Dans ce qui suit, on commence par étudier l'hyperbolicité du système (2.40) réduit dans le cas limite où $\nu = \infty$ (relaxation instantannée des vitesses). Le développement (2.44) indique alors que $\delta v = 0$. Ensuite, on s'intéresse au comportement plus fin de ce système dans le cas raide où $\nu \gg 1$ (relaxation rapide des vitesses). Dans ce cas, le développement (2.44) suggère de poser $\delta v = -\frac{1}{\nu} \frac{c(1-c)}{f(c)} \left(\frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1-c)} \partial_x p^\beta \right)$.

Système réduit d'ordre 0 : hyperbolicité

En injectant $\delta v = 0$ dans le système (2.40), on obtient le système réduit :

$$(2.45) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t c + v \partial_x c = 0, \end{cases}$$

fermé par $p = p^\alpha + p^\beta = p(\rho, c)$.

Proposition 2.9. *Le système (2.45) est strictement hyperbolique si et seulement si $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_c > 0$; il n'est pas hyperbolique sinon.*

Preuve En la variable $U = (\rho, v, c)^t$, la forme quasi-linéaire du système (2.45) est :

$$(2.46) \quad \partial_t U + A(U) \cdot \partial_x U = 0,$$

avec :

$$(2.47) \quad A(U) = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_c & v & \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial c} \right|_\rho \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

On distingue trois cas :

- si $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_c > 0$, on pose $a \equiv \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_c} \in \mathbb{R}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_\pm = v \pm a$ et $\lambda_0 = v$; elles sont réelles distinctes, donc A est diagonalisable et le système est strictement hyperbolique.
- si $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_c < 0$, on pose $a \equiv i \sqrt{-\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_c} \in \mathbb{C}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_\pm = v \pm a$ et $\lambda_0 = v$; deux d'entre elles sont complexes, donc le système n'est pas hyperbolique.
- si $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_c = 0$, la seule valeur propre de A est $\lambda_0 = v$ de multiplicité triple. On peut vérifier qu'on ne peut pas trouver un jeu de vecteurs propres associés générateur de \mathbb{R}^3 , donc A n'est pas diagonalisable et le système n'est pas hyperbolique. ■

Lemme 2.2. *Si le modèle SC barotrope homogène (2.13) est hyperbolique, alors le système réduit associé (2.45) est hyperbolique.*

Preuve D'après la proposition 2.2, le système (2.13) est hyperbolique si et seulement si $\frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} > 0$ et $\frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} > 0$. On rappelle que $p = p^\alpha + p^\beta$, $\rho^\alpha = \rho c$ et $\rho^\beta = \rho(1 - c)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 dp &= dp^\alpha + dp^\beta, \\
 &= \frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} d\rho^\alpha + \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} d\rho^\beta, \\
 (2.48) \quad &= \left[\frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial \rho} \Big|_c + \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} \frac{\partial \rho^\beta}{\partial \rho} \Big|_c \right] d\rho + \left[\frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial c} \Big|_\rho + \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} \frac{\partial \rho^\beta}{\partial c} \Big|_\rho \right] dc, \\
 &= \left[c \frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} + (1 - c) \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} \right] d\rho + \left[\frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} - \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} \right] \rho dc.
 \end{aligned}$$

Or $dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_c d\rho + \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_\rho dc$, d'où $\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_c = c \frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} + (1 - c) \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta}$. Comme $c \in]0; 1[$, on a bien

$$\text{l'implication } \begin{cases} \frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} > 0, \\ \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} > 0, \end{cases} \implies \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_c > 0, \text{ qui est la condition d'hyperbolicité du système réduit,}$$

d'après la proposition 2.9. ■

Remarque La relation $\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_c = c \frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} + (1 - c) \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta}$ que l'on a obtenue au cours du calcul indique que la vitesse du son dans le mélange est donnée par $a = \sqrt{c(a^\alpha)^2 + (1 - c)(a^\beta)^2}$ lorsque $\delta v = 0$, c'est-à-dire quand les fluides ont la même vitesse. ●

Système réduit d'ordre 1 : limite de diffusion

En injectant $\delta v = -\frac{1}{\nu} \frac{c(1-c)}{f(c)} \left(\frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1-c)} \partial_x p^\beta \right)$ dans le système (2.40) et en négligeant les termes d'ordres $\mathcal{O}(\nu^{-2})$ et suivants, on obtient le système réduit :

$$(2.49) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho c) + \partial_x (\rho c v) = \frac{1}{\nu} \partial_x \left[\frac{c(1-c)}{f(c)} \left((1-c) \partial_x p^\alpha - c \partial_x p^\beta \right) \right]. \end{cases}$$

Le système est fermé par $p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha)$, $p^\beta = p^\beta(\rho^\beta)$ et $p = p^\alpha + p^\beta$, où $\rho^\alpha = \rho c$ et $\rho^\beta = \rho(1 - c)$. On peut donc récrire l'équation pour la variable c sous la forme :

$$\begin{aligned}
 (2.50) \quad \partial_t (\rho c) + \partial_x (\rho c v) &= \frac{1}{\nu} \partial_x \left[\frac{(c(1-c))^2}{f(c)} \left(\frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} - \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} \right) \partial_x \rho \right] \\
 &+ \frac{1}{\nu} \partial_x \left[\frac{c(1-c)}{f(c)} \left((1-c) \frac{dp^\alpha}{d\rho^\alpha} + c \frac{dp^\beta}{d\rho^\beta} \right) \rho \partial_x c \right].
 \end{aligned}$$

Il apparait donc que l'équation pour la fraction massique c contient un opérateur de diffusion. On propose maintenant un cas-test avec solution de référence pour le système (2.49). Ce cas-test va permettre d'évaluer la précision des schémas numériques proposés dans le chapitre 4.

Un cas-test de diffusion non linéaire On suppose que les fluides α et β sont des gaz parfaits isothermes de même constante phénoménologique, c'est-à-dire respectivement modélisés par les équations d'état $p^\alpha = K\rho^\alpha$ et $p^\beta = K\rho^\beta$, où $K > 0$. La pression du mélange se réduit alors à $p = K\rho$, et l'équation pour c (2.50) peut être simplifiée, de sorte que le système (2.49) devient :

$$(2.51) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + K\rho) = 0, \\ \partial_t (\rho c) + \partial_x (\rho c v) = \frac{K}{\nu} \partial_x \left(\frac{c(1-c)}{f(c)} \rho \partial_x c \right). \end{cases}$$

Il apparaît que les équations pour ρ et v ne dépendent pas de c . De plus, si l'on suppose que $\rho = cst$ et $v = cst$, l'équation pour c devient simplement $\partial_t c + v \partial_x c = \frac{K}{\nu} \partial_x \left(\frac{c(1-c)}{f(c)} \partial_x c \right)$. On se concentre maintenant sur cette équation.

Lorsque $f(c) = c(1-c)$, l'équation pour c est l'équation d'advection-diffusion linéaire $\partial_t c + v \partial_x c = \frac{K}{\nu} \partial_x^2 c$, dont la solution analytique est bien connue. Du point de vue de la modélisation, cette équation diffuse une interface entre deux fluides de telle sorte que le support de la zone de mélange s'élargit à une vitesse infinie, ce qui n'est pas très intéressant du point de vue de la physique.

Par contre, lorsque $f(c) = 1$, l'équation pour c est une équation d'advection-diffusion non linéaire dont on connaît une solution particulière, comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 2.10. *On considère l'équation pour $c(x, t)$:*

$$(2.52) \quad \partial_t c + v_0 \partial_x c = \frac{K}{\nu} \partial_x (c(1-c) \partial_x c),$$

où $v_0 \in \mathbb{R}$ et $K, \nu > 0$ sont des constantes. Pour la condition initiale :

$$(2.53) \quad c(x, 0) = c_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

une solution de (2.52) est :

$$(2.54) \quad c(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - v_0 t < -x^*(t), \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x - v_0 t}{x^*(t)} \right) & \text{si } x - v_0 t \in]-x^*(t); x^*(t)[, \\ 0 & \text{si } x - v_0 t > x^*(t), \end{cases}$$

où l'on a noté $x^*(t) = \sqrt{\frac{Kt}{\nu}}$.

Preuve En dérivant $c(x, t)$ donnée par (2.54), on trouve que (2.52) est vérifiée. ■

Lorsque $f(c) = 1$, on déduit de la proposition 2.10 qu'une interface entre deux fluides est diffusée de telle sorte que le support de la zone de mélange est $\left] -\sqrt{\frac{Kt}{\nu}}; \sqrt{\frac{Kt}{\nu}} \right]$. Autrement dit, la diffusion de l'interface se produit à vitesse finie, ce qui est intéressant du point de vue de la physique.

On propose donc le problème suivant pour le modèle SC barotrope 1D :

- le système résolu est (2.4).
- les équations d'état sont $p^\alpha = K\rho^\alpha$ et $p^\beta = K\rho^\beta$, où K est une constante positive.
- on fixe $f(c) = 1$.
- à $t = 0$, on pose :

$$(2.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^\alpha(x, 0) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{si } x < 0, \\ \epsilon & \text{si } x > 0, \end{cases} \\ v^\alpha(x, 0) = v_0 = cst, \\ \rho^\beta(x, 0) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } x < 0, \\ 1 - \epsilon & \text{si } x > 0, \end{cases} \\ v^\beta(x, 0) = v_0 = cst, \end{array} \right.$$

où $\epsilon \in]0; 1[$ est un paramètre.

- les conditions aux bords sont de type Neumann.

Proposition 2.11. *Si $\nu \gg 1$ et $\epsilon \ll 1$, la solution du problème ci-dessus tend au sens des développements formels vers la solution :*

$$(2.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^\alpha(x, t) = \rho c, \\ v^\alpha(x, t) = v + (1 - c)\delta v, \\ \rho^\beta(x, t) = \rho(1 - c), \\ v^\beta(x, t) = v - c\delta v, \end{array} \right.$$

où les profils de ρ , v , c et δv sont donnés par :

$$(2.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(x, t) = 1, \\ v(x, t) = v_0, \\ c(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - v_0 t < -x^*(t), \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x - v_0 t}{x^*(t)} \right) & \text{si } x - v_0 t \in]-x^*(t); x^*(t)[, \\ 0 & \text{si } x - v_0 t > x^*(t), \end{cases} \\ \delta v(x, t) = \begin{cases} \delta v^*(t) & \text{si } x - v_0 t \in]-x^*(t); x^*(t)[, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array} \right.$$

avec $x^*(t) = \sqrt{\frac{Kt}{\nu}}$ et $\delta v^*(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{\nu t}}$.

Idée de la preuve Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on a vu qu'un développement asymptotique à l'ordre 1 du système (2.4) est (2.49). Lorsque $p^\alpha = K\rho^\alpha$ et $p^\beta = K\rho^\beta$, ce sous-système se réduit à (2.51). En exprimant la condition initiale (2.55) en les variables du mélange :

$$(2.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(x, 0) = 1, \\ v(x, 0) = v_0, \\ c(x, 0) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{si } x < 0, \\ \epsilon & \text{si } x > 0, \end{cases} \\ \delta v(x, 0) = 0, \end{array} \right.$$

le système (2.51) se réduit à :

$$(2.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1, \\ v = v_0, \\ \partial_t c + v_0 \partial_x c = \frac{K}{\nu} \partial_x \left(\frac{c(1-c)}{f(c)} \partial_x c \right). \end{array} \right.$$

Avec $f(c) = 1$, $\epsilon \ll 1$ et la condition initiale (2.58), on peut utiliser la proposition 2.10, qui donne le résultat pour $c(x, t)$. En utilisant le développement asymptotique (2.44) à l'ordre 1, on trouve que $\delta v = -\frac{K}{\nu} \partial_x c$. Il suffit alors de remplacer c par l'expression obtenue avant pour trouver l'expression du profil $\delta v(x, t)$. ■

Les profils de fraction massique c et vitesse relative δv donnés par (2.57) sont représentés dans la figure 2.1.

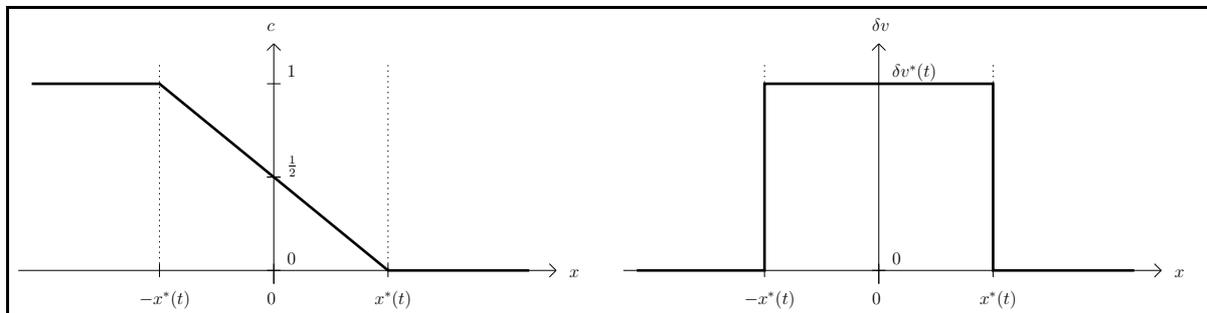


FIG. 2.1 – Solution asymptotique pour la condition initiale (2.55) ; profils de fraction massique $c(x, t)$ (à gauche) et de vitesse relative $\delta v(x, t)$ (à droite) à t fixé.

2.3.2 Limite monovitesse du modèle SC complet

On passe maintenant à l'étude du modèle SC complet (2.1). Ce système peut s'écrire de manière équivalente pour les solutions régulières :

$$(2.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + \sigma) = 0, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_x (\rho e v + \sigma v + q) = 0, \\ \partial_t c + v \partial_x c + \frac{1}{\rho} \partial_x (\rho c (1 - c) \delta v) = 0, \\ \partial_t \delta v + v \partial_x \delta v + \delta v [\partial_x v + (1 - 2c) \partial_x \delta v - \delta v \partial_x c] \\ \quad + \frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1 - c)} \partial_x p^\beta = -\nu \frac{f(c)}{c(1 - c)} \delta v, \\ \partial_t \delta \epsilon + v \partial_x \delta \epsilon + \delta v [\partial_x \epsilon + (1 - 2c) \partial_x \delta \epsilon - \delta \epsilon \partial_x c] \\ \quad + \frac{\left((1 - c) p^\alpha - c p^\beta \right) (\partial_x v - \delta v \partial_x c) + \left((1 - c)^2 p^\alpha + c^2 p^\beta \right) \partial_x \delta v}{\rho c (1 - c)} \\ \quad = \nu \frac{(1 - 2c) f(c)}{c(1 - c)} \delta v^2. \end{array} \right.$$

On rappelle que les variables du mélange sont liées aux variables bifluïdes par les relations :

$$(2.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho^\alpha + \rho^\beta, \\ c = \frac{\rho^\alpha}{\rho}, \\ v = c v^\alpha + (1 - c) v^\beta, \\ \delta v = v^\alpha - v^\beta, \\ e = c e^\alpha + (1 - c) e^\beta, \\ \delta \epsilon = \epsilon^\alpha - \epsilon^\beta, \end{array} \right.$$

où $\epsilon^s = e^s - \frac{1}{2} (v^s)^2$ pour $s = \alpha, \beta$. On a également noté :

$$(2.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = p^\alpha + p^\beta, \\ \sigma = p + \rho c (1 - c) \delta v^2, \\ q = \rho c (1 - c) \delta v \left(h^\alpha - h^\beta + \frac{1 - 2c}{2} \delta v^2 \right), \end{array} \right.$$

où $h^s = \epsilon^s + \frac{p^s}{\rho^s}$ pour $s = \alpha, \beta$. Le système est fermé par des relations de la forme $p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha, \epsilon^\alpha)$ et $p^\beta = p^\beta(\rho^\beta, \epsilon^\beta)$. Comme dans le cas barotrope, le choix est fait ici d'utiliser les variables du mélange car la présence du terme source n'apparaît alors que dans deux équations.

On remarque que l'équation pour la variable relaxée δv est la même dans le système avec énergie (2.60) que dans le système barotrope (2.40). Dans le cas raide où $\nu \gg 1$, le développement asymptotique de δv :

$$(2.63) \quad \delta v = -\frac{1}{\nu} \frac{c(1-c)}{f(c)} \left(\frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1-c)} \partial_x p^\beta \right) + \mathcal{O}(\nu^{-2}).$$

obtenu avant (voir (2.44)) est donc aussi valable ici dans la mesure où l'on n'a pas encore tenu compte de la forme des équations d'état. Dans ce qui suit, on étudie l'hyperbolicité du système (2.60) réduit dans le cas limite où $\nu = \infty$ (relaxation instantannée des vitesses). Ensuite, on s'intéresse au comportement plus fin de ce système dans le cas raide où $\nu \gg 1$ (relaxation rapide des vitesses).

Système réduit d'ordre 0 : hyperbolicité

Lorsque $\nu = \infty$, le développement (2.63) indique que $\delta v = 0$. En injectant dans le système (2.60), on obtient le système réduit :

$$(2.64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_x (\rho e v + p v) = 0, \\ \partial_t c + v \partial_x c = 0, \\ \partial_t \delta \epsilon + v \partial_x \delta \epsilon + \frac{(1-c)p^\alpha - c p^\beta}{\rho c(1-c)} \partial_x v = 0, \end{array} \right.$$

fermé par $p = p^\alpha + p^\beta$ et $p^s = p^s(\rho^s, \epsilon^s)$ pour $s = \alpha, \beta$. En notant $\epsilon = c\epsilon^\alpha + (1-c)\epsilon^\beta$, on peut vérifier que $\epsilon^\alpha = \epsilon + (1-c)\delta\epsilon$ et $\epsilon^\beta = \epsilon - c\delta\epsilon$. Les relations de fermeture peuvent donc s'écrire sous la forme $p^s = p^s(\rho, c, \epsilon, \delta\epsilon)$ pour $s = \alpha, \beta$.

Proposition 2.12. *On note :*

$$(2.65) \quad r \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{c, \epsilon, \delta \epsilon} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \Big|_{\rho, c, \delta \epsilon} + \frac{(1-c)p^\alpha - c p^\beta}{\rho^2 c(1-c)} \frac{\partial p}{\partial \delta \epsilon} \Big|_{\rho, c, \epsilon}.$$

Le système (2.64) est strictement hyperbolique si et seulement si $r > 0$; il n'est pas hyperbolique sinon.

Preuve En la variable $U = (\rho, v, \epsilon, c, \delta\epsilon)^t$, la forme quasi-linéaire du système (2.64) est :

$$(2.66) \quad \partial_t U + A(U) \cdot \partial_x U = 0,$$

avec :

(2.67)

$$A(U) = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{c,\epsilon,\delta\epsilon} & v & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \Big|_{\rho,c,\delta\epsilon} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho,\epsilon,\delta\epsilon} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \delta\epsilon} \Big|_{\rho,c,\epsilon} \\ 0 & \frac{p}{\rho} & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & \frac{(1-c)p^\alpha - cp^\beta}{\rho c(1-c)} & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

On distingue trois cas :

- si $r > 0$, on pose $a \equiv \sqrt{r} \in \mathbb{R}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_{\pm} = v \pm a$ (multiplicité simple) et $\lambda_0 = v$ (multiplicité triple); elles sont réelles et de multiplicité constante. Un jeu de vecteurs propres associés est par exemple

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{p} \\ \pm \frac{\rho r^2}{p} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{(1-c)p^\alpha - cp^\beta}{c(1-c)p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \Big|_{\rho,c,\delta\epsilon}}{\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{\epsilon,c,\delta\epsilon}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho,\epsilon,\delta\epsilon}}{\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{\epsilon,c,\delta\epsilon}} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\partial p}{\partial \delta\epsilon} \Big|_{\rho,\epsilon,c}}{\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{\epsilon,c,\delta\epsilon}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \text{ Il est}$$

générateur de \mathbb{R}^5 donc A est diagonalisable et le système est strictement hyperbolique.

- si $r < 0$, on pose $a \equiv i\sqrt{-r} \in \mathbb{C}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_{\pm} = v \pm a$ (multiplicité simple) et $\lambda_0 = v$ (multiplicité triple); deux d'entre elles sont complexes, donc le système n'est pas hyperbolique.
- si $r = 0$, la seule valeur propre de A est $\lambda_0 = v$ de multiplicité 5. On peut vérifier qu'on ne peut pas trouver un jeu de vecteurs propres associés générateur de \mathbb{R}^5 , donc A n'est pas diagonalisable et le système n'est pas hyperbolique. ■

Lemme 2.3. *Si le modèle SC complet homogène (2.19) est hyperbolique, alors le système réduit associé (2.64) est hyperbolique.*

Preuve D'après la proposition 2.4, le système (2.19) est hyperbolique (non strictement) si et seulement si $r^\alpha > 0$ et $r^\beta > 0$, où l'on a noté, pour $s = \alpha, \beta$:

$$(2.68) \quad r^s \equiv \frac{\partial p^s}{\partial \rho^s} \Big|_{\epsilon^s} + \frac{p^s}{(\rho^s)^2} \frac{\partial p^s}{\partial \epsilon^s} \Big|_{\rho^s}.$$

On rappelle que $p = p^\alpha + p^\beta$, $\rho^\alpha = \rho c$, $\rho^\beta = \rho(1-c)$, $\epsilon^\alpha = \epsilon + (1-c)\delta\epsilon$ et $\epsilon^\beta = \epsilon - c\delta\epsilon$. En

calculant la différentielle totale dp , on trouve alors que :

$$(2.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{c,\epsilon,\delta\epsilon} = c \frac{\partial p^\alpha}{\partial \rho^\alpha} \Big|_{\epsilon^\alpha} + (1-c) \frac{\partial p^\beta}{\partial \rho^\beta} \Big|_{\epsilon^\beta}, \\ \frac{\partial p}{\partial c} \Big|_{\rho,\epsilon,\delta\epsilon} = \rho \left(\frac{\partial p^\alpha}{\partial \rho^\alpha} \Big|_{\epsilon^\alpha} - \frac{\partial p^\beta}{\partial \rho^\beta} \Big|_{\epsilon^\beta} \right) - \delta\epsilon \left(\frac{\partial p^\alpha}{\partial \epsilon^\alpha} \Big|_{\rho^\alpha} + \frac{\partial p^\beta}{\partial \epsilon^\beta} \Big|_{\rho^\beta} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \Big|_{\rho,c,\delta\epsilon} = \frac{\partial p^\alpha}{\partial \epsilon^\alpha} \Big|_{\rho^\alpha} + \frac{\partial p^\beta}{\partial \epsilon^\beta} \Big|_{\rho^\beta}, \\ \frac{\partial p}{\partial \delta\epsilon} \Big|_{\rho,c,\epsilon} = (1-c) \frac{\partial p^\alpha}{\partial \epsilon^\alpha} \Big|_{\rho^\alpha} - c \frac{\partial p^\beta}{\partial \epsilon^\beta} \Big|_{\rho^\beta}. \end{array} \right.$$

En utilisant (2.65), on trouve alors que $r = cr^\alpha + (1-c)r^\beta$. Comme $c \in]0;1[$, on a bien l'implication $\begin{cases} r^\alpha > 0, \\ r^\beta > 0, \end{cases} \implies r > 0$, qui est la condition d'hyperbolicité du système réduit, d'après la proposition 2.12. ■

Remarque Comme dans le cas barotrope, la relation $r = cr^\alpha + (1-c)r^\beta$ que l'on a obtenue au cours du calcul indique que la vitesse du son dans le mélange est donnée par $a = \sqrt{c(a^\alpha)^2 + (1-c)(a^\beta)^2}$ lorsque $\delta v = 0$, c'est-à-dire quand les fluides ont la même vitesse. ●

Système réduit d'ordre 1 : limite de diffusion

On se place maintenant dans le cas raide $\nu \gg 1$. Le développement (2.63) suggère de prendre $\delta v = -\frac{1}{\nu} \frac{c(1-c)}{f(c)} \left(\frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1-c)} \partial_x p^\beta \right)$. En injectant dans le système (2.60) et en négligeant les termes d'ordres $\mathcal{O}(\nu^{-2})$ et suivants, on obtient le système réduit :

$$(2.70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_x (\rho e v + p v) = \frac{1}{\nu} \partial_x \left[\frac{c(1-c)}{f(c)} ((1-c) \partial_x p^\alpha - c \partial_x p^\beta) (h^\alpha - h^\beta) \right], \\ \partial_t (\rho c) + \partial_x (\rho c v) = \frac{1}{\nu} \partial_x \left[\frac{c(1-c)}{f(c)} ((1-c) \partial_x p^\alpha - c \partial_x p^\beta) \right], \\ \partial_t \delta\epsilon + v \partial_x \delta\epsilon + \frac{(1-c)p^\alpha - cp^\beta}{\rho c(1-c)} \partial_x v = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right). \end{array} \right.$$

Le terme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ dans la dernière équation n'est pas explicité car il est particulièrement long et sans intérêt pour la suite. Il peut néanmoins être facilement obtenu en injectant $\delta v = -\frac{1}{\nu} \frac{c(1-c)}{f(c)} \left(\frac{1}{\rho c} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho(1-c)} \partial_x p^\beta \right)$ dans l'équation de (2.60) pour $\delta\epsilon$. Le système (2.70) est fermé par $p = p^\alpha + p^\beta$ et $p^s = p^s(\rho^s, \epsilon^s)$ pour $s = \alpha, \beta$. On rappelle que les enthalpies

spécifiques sont données par $h^s = \epsilon^s + \frac{p^s}{\rho^s}$ pour $s = \alpha, \beta$. En général, la différence d'enthalpie $h^\alpha - h^\beta$ n'est pas nulle, de sorte que les équations pour e , c et $\delta\epsilon$ restent directement liées par leur second membre. Chaque fluide ayant sa propre température, le modèle SC complet ne se réduit pas, dans le cas raide, à un système de type Euler muni d'une équation de transport-diffusion pour la fraction massique, comme c'est le cas pour le modèle SC barotrope. Pour arriver à un tel résultat, il faudrait ajouter un second terme source, pour la relaxation des températures. Ce point n'est pas abordé dans cette thèse, mais fait partie des perspectives de l'étude.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a procédé à l'analyse mathématique des versions barotrope et complète du modèle de Scannapieco-Cheng en 1D. Dans le cas homogène ($\nu = 0$), on a vu que les deux systèmes sont hyperboliques non strictement sous une condition non restrictive, naturellement héritée de la condition d'hyperbolicité des équations d'Euler. Dans le cas général où $\nu \geq 0$, on a vu que chaque système possède une entropie mathématique strictement convexe. Cette entropie vérifie une loi de conservation avec un terme source négatif ou nul, de sorte que l'on peut écrire une inégalité d'entropie, qui constitue un résultat de stabilité pour les solutions vraiment non linéaires. Dans le cas infiniment raide $\nu = \infty$, on a vu que le système réduit de chaque modèle est hyperbolique sous une condition non restrictive. En particulier, on a prouvé que la condition d'hyperbolicité du système homogène implique la condition d'hyperbolicité du système réduit associé. Le système reste donc bien posé lorsque les effets du terme source sont dominants. Enfin, dans le cas raide $\nu \gg 1$, on a donné la limite de diffusion des deux modèles. Pour le modèle barotrope, un problème avec solution de référence (au sens asymptotique) pour une condition initiale particulière a été proposé. Cette solution quasi-analytique va permettre d'évaluer les schémas numériques proposés dans le chapitre 4.

Chapitre 3

Résolution numérique des équations d'Euler avec friction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique des équations d'Euler avec relaxation de la vitesse (ou friction) :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0, \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = -\nu \rho v_i, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + p v_j) = -\nu \rho v_j v_j. \end{cases}$$

Les notations sont usuelles : ρ est la masse volumique du gaz, v sa vitesse, e son énergie totale spécifique et p sa pression. Le paramètre $\nu \geq 0$ est un coefficient de frottement responsable de la relaxation de v vers 0 avec le temps caractéristique ν^{-1} . Le système est fermé par une équation d'état de la forme $p = p(\tau, \epsilon)$, où $\tau \equiv \rho^{-1}$ est le volume spécifique du gaz et $\epsilon \equiv e - \frac{1}{2} v_j v_j$ son énergie interne massique. On note $a \equiv \tau^{-1} \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial \tau}|_S}$ la vitesse du son dans le gaz. S est l'entropie thermodynamique donnée par $T dS = d\epsilon + p d\tau$, où T est la température du gaz.

Un premier régime limite du système (3.1) apparaît lorsque $\nu = 0$, où la relaxation est infiniment lente de sorte que l'on retrouve les équations d'Euler homogènes, dont la résolution numérique a été largement abordée ([God59], [Tor97]). Dans ce document, l'approche retenue pour la résolution des équations d'Euler homogènes est l'utilisation d'un schéma volumes finis de type Lagrange-projection, dont on trouve une description détaillée dans l'annexe D. On ne s'étend pas sur les raisons de ce choix ; on renvoie à [HK00] et [PA00] pour des discussions sur l'apport du Lagrange-projection 1D comparativement à une approche eulérienne directe. On se fixe ici comme objectif de développer une *extension* du schéma Lagrange-projection pour la résolution du système avec friction (3.1), au sens où, lorsque $\nu = 0$, on retrouve le schéma Lagrange-projection classique. Il est donc nécessaire de rappeler brièvement l'expression du schéma Lagrange-projection pour les équations d'Euler 1D homogènes, ce qui constitue l'objet de la première section de ce chapitre.

Un second régime limite intervient dans le cas raide, lorsque $\nu \gg 1$. Un développement de type Chapman-Enskog permet de trouver le comportement asymptotique du système. Sans proposer de résultat de convergence, on rappelle quel est ce comportement dans le cas 1D (on renvoie à [HMP05] et [HL92] pour des preuves de convergence concernant l'analyse asymptotique des versions isentropique et adiabatique de ce système). Exprimé en variable de masse (voir

annexe C), le système (3.1) 1D devient :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m v = 0, \\ \partial_t v + \partial_m p = -\nu v, \\ \partial_t e + \partial_m (pv) = -\nu v^2. \end{cases}$$

Pour les solutions régulières, on trouve que l'équation pour l'énergie interne :

$$(3.3) \quad \partial_t e + p \partial_t \tau = 0,$$

ne dépend pas explicitement de ν . Lorsque $\nu \rightarrow +\infty$, on peut effectuer, au moins formellement, un développement asymptotique d'ordre 1 de la variable relaxée :

$$(3.4) \quad v \simeq v_0 + \frac{1}{\nu} v_1,$$

où les inconnues v_0 et v_1 ne dépendent pas explicitement de ν . En injectant (3.4) dans (3.2), et en considérant les puissances successives de ν , on trouve $v_0 = 0$ et $v_1 = -\partial_m p$, de sorte que la vitesse v est donnée par la loi de Darcy :

$$(3.5) \quad v = -\frac{1}{\nu} \partial_m p,$$

et n'est donc plus une inconnue de (3.2). En injectant cette dernière relation dans les équations pour τ et e de (3.2), on obtient le comportement asymptotique :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \partial_t \tau = -\frac{1}{\nu} \partial_m^2 p, \\ \partial_t e = \frac{1}{\nu} \partial_m (p \partial_m p) - \frac{1}{\nu} (\partial_m p)^2. \end{cases}$$

Remarque Dans le cas isentropique $p = p(\tau)$, la première équation du système réduit (3.6) permet de former l'équation en coordonnées eulériennes :

$$(3.7) \quad \partial_t \rho = \frac{1}{\nu} \partial_{x^2}^2 p(\rho),$$

qui est une équation de diffusion non linéaire, connue sous le nom d'équation des milieux poreux.

•

Au niveau discret, on souhaite que l'extension du schéma Lagrange-projection pour la résolution de (3.1) puisse capturer numériquement le régime (3.5),(3.6) sur maillage grossier (voir définition 0.1) ; en d'autres termes, on veut que le nouveau schéma soit asymptotic-preserving (voir définition 0.2). Cet objectif est motivé par le fait que l'utilisation des flux du schéma Lagrange-projection classique ne permet pas de capturer le régime de diffusion de τ sur maillage grossier (ce résultat sera énoncé plus précisément par la proposition 3.1). La construction et l'étude du nouveau schéma pour la résolution de (3.1) en 1D fait l'objet de la seconde section de ce chapitre. La troisième et dernière section est dédiée à l'extension multidimensionnelle du nouveau schéma par directions alternées.

3.1 Schéma Lagrange-projection pour les équations d'Euler 1D homogènes (résumé)

Dans cette section, on rappelle brièvement l'expression du schéma Lagrange-projection pour la résolution des équations d'Euler 1D homogènes ; on renvoie à l'annexe D pour une description détaillée. Le système considéré est :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_x (\rho e v + p v) = 0, \end{cases}$$

où $p = p(\tau, \epsilon)$ avec $\tau = \rho^{-1}$ et $\epsilon = e - \frac{1}{2}v^2$. Au niveau discret, pas de temps et pas d'espace sont respectivement notés $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ et $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. Le schéma Lagrange-projection associé à ce système est composé de deux étapes. La première est la :

Phase lagrangienne

$$(3.9) \quad \begin{cases} \bar{\tau}_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \bar{v}_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \bar{e}_i^{n+1} = e_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left((pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (pv)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{cases}$$

où :

$$(3.10) \quad \Delta m_i = \rho_i^n \cdot \Delta x.$$

La condition de stabilité est discutée plus loin (voir (3.19)). Cette phase doit être complétée par le choix d'un flux numérique lagrangien (termes $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$). Elle est suivie de la :

Phase de projection

$$(3.11) \quad \begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \rho_{i+\frac{1}{2}}^P - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \rho_{i-\frac{1}{2}}^P \right), \\ (\rho v)_i^{n+1} = \rho_i^n \bar{v}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho v)_{i+\frac{1}{2}}^P - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho v)_{i-\frac{1}{2}}^P \right), \\ (\rho e)_i^{n+1} = \rho_i^n \bar{e}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho e)_{i+\frac{1}{2}}^P - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho e)_{i-\frac{1}{2}}^P \right), \end{cases}$$

qui doit être complétée par le choix d'un flux numérique de projection (termes $\rho_{i+\frac{1}{2}}^P$, $(\rho v)_{i+\frac{1}{2}}^P$ et $(\rho e)_{i+\frac{1}{2}}^P$).

Pendant la phase lagrangienne, le maillage virtuel sur lequel sont données les quantités $\bar{\tau}_i^{n+1}$, \bar{v}_i^{n+1} et \bar{e}_i^{n+1} se déplace par rapport à la grille eulérienne fixe, selon la relation :

$$(3.12) \quad x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}},$$

de sorte que la positivité des mailles virtuelles $\Delta x_i^{n+1} = x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$ est garantie par la condition suffisante :

$$(3.13) \quad \Delta t \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{\max \left(\left| v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| \right)_{\forall i}},$$

le facteur $\frac{1}{2}$ provenant des mailles en compression.

3.1.1 Flux lagrangien acoustique

Pour faciliter l'extension du schéma à des systèmes plus complexes (présence d'un terme source, modèle bifluide), on choisit d'utiliser un flux numérique lagrangien de type acoustique, dont on rappelle le mode de construction. Les équations caractéristiques du système (3.8) exprimées en variable de masse m sont données par :

$$(3.14) \quad dp \pm \rho a \cdot dv = 0 \quad \text{le long de la caractéristique telle que} \quad dm = \pm \rho a \cdot dt.$$

On rappelle que a est la vitesse du son. Comme le long d'une caractéristique les coordonnées m et t sont liées, toute fonction $\phi(m, t)$ peut être vue comme une fonction de m seulement, notée $\phi(m)$. L'intégration en masse des équations (3.14) respectivement sur les intervalles $]m_i; m_{i+\frac{1}{2}}[$ et $]m_{i+\frac{1}{2}}; m_{i+1}[$ donne :

$$(3.15) \quad \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_i^n + \int_{m_i}^{m_{i+\frac{1}{2}}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm = 0, \\ p_{i+1}^n - p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \int_{m_{i+\frac{1}{2}}}^{m_{i+1}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm = 0. \end{cases}$$

L'*approximation acoustique* consiste à geler la vitesse des ondes (ρa) pour approcher les intégrales ci-dessus par des quadratures de la forme :

$$(3.16) \quad \begin{cases} \int_{m_i}^{m_{i+\frac{1}{2}}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm \simeq (\rho a)_g \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_i^n \right), \\ \int_{m_{i+\frac{1}{2}}}^{m_{i+1}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm \simeq (\rho a)_d \left(v_{i+1}^n - v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{cases}$$

Lorsque l'on gèle (ρa) à l'interface, on a $(\rho a)_g = (\rho a)_d = (\rho a)_{i+\frac{1}{2}}$, et l'inversion de (3.15) conduit au :

Flux lagrangien \mathcal{L}_1

$$(3.17) \quad \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n + p_{i+1}^n}{2} + (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_i^n - v_{i+1}^n}{2}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v_i^n + v_{i+1}^n}{2} + \frac{1}{(\rho a)_{i+\frac{1}{2}}} \frac{p_i^n - p_{i+1}^n}{2}, \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

où $(\rho a)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n}{2}$ (par exemple).

Lorsque l'on décentre (ρa) suivant le sens du vent, on a $(\rho a)_g = (\rho a)_i^n$ et $(\rho a)_d = (\rho a)_{i+1}^n$, et l'inversion de (3.15) conduit au :

Flux lagrangien \mathcal{L}_2

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(\rho a)_{i+1}^n p_i^n + (\rho a)_i^n p_{i+1}^n + (\rho a)_i^n (\rho a)_{i+1}^n (v_i^n - v_{i+1}^n)}{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n - p_{i+1}^n + (\rho a)_i^n v_i^n + (\rho a)_{i+1}^n v_{i+1}^n}{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n}, \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

Pour les deux flux \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , on peut écrire une inégalité d'entropie discrète qui permet de montrer que le schéma (3.9) est stable sous la condition CFL¹ (voir [Des97] et [Des01]) :

$$(3.19) \quad \Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta m_i}{\widetilde{\rho a}_i^n} \right)_{\forall i}.$$

Cependant la valeur de $\widetilde{\rho a}_i^n$ n'est pas la même suivant que l'on utilise le flux \mathcal{L}_1 ou le flux \mathcal{L}_2 . En effet, pour le flux \mathcal{L}_1 , on a :

$$(3.20) \quad \widetilde{\rho a}_i^n = \frac{(\rho a)_{i-\frac{1}{2}} + (\rho a)_{i+\frac{1}{2}}}{2} \cdot \max \left(1, \frac{((\rho a)_i^n)^2}{(\rho a)_{i-\frac{1}{2}} (\rho a)_{i+\frac{1}{2}}} \right),$$

alors que pour le flux \mathcal{L}_2 , on a :

$$(3.21) \quad \widetilde{\rho a}_i^n = (\rho a)_i^n.$$

La restriction (3.20) est plus forte que la restriction (3.21), ce qui explique que l'on utilise généralement le flux \mathcal{L}_2 .

3.1.2 Flux de projection d'ordre 3

Concernant le flux de projection, on rappelle que le :

Flux de projection \mathcal{P}_1

$$(3.22) \quad (\rho \phi)_{i+\frac{1}{2}}^P = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\rho}_{i+1}^{n+1} \overline{\phi}_{i+1}^{n+1} \text{ si } v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} < 0, \\ \overline{\rho}_i^{n+1} \overline{\phi}_i^{n+1} \text{ si } v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} > 0, \\ \text{indifférent si } v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \end{array} \right.$$

pour $\phi = 1, v, e$,

d'ordre 1 en espace, est très dissipatif. On utilise alors le :

¹Courant, Friedrichs, Lewy.

Flux de projection \mathcal{P}_3

(3.23)

$$\begin{aligned}
 & (\rho\phi)_{i+\frac{1}{2}}^P = \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 p_{i+\frac{1}{2}}^\phi + \frac{1}{2} \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} \left(p_{i+\frac{3}{2}}^\phi - p_{i+\frac{1}{2}}^\phi + \left(1 - \frac{2}{3} \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} \right) p_{6,i+1}^\phi \right) \text{ si } v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} < 0, \\
 p_{i+\frac{1}{2}}^\phi - \frac{1}{2} \frac{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i^{n+1}} \left(p_{i+\frac{1}{2}}^\phi - p_{i-\frac{1}{2}}^\phi - \left(1 - \frac{2}{3} \frac{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i^{n+1}} \right) p_{6,i}^\phi \right) \text{ si } v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} > 0, \\
 \text{indifférent si } v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0,
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

pour $\phi = 1, v, e$. Ce flux est obtenu à l'aide d'une reconstruction similaire à celle de la méthode PPM² proposée dans [CW84]. Les différents termes sont donnés par :

$$(3.24) \quad p_{6,i}^\phi = 6 \left(\bar{\rho}_i^{n+1} \bar{\phi}_i^{n+1} - \frac{1}{2} \left(p_{i-\frac{1}{2}}^\phi + p_{i+\frac{1}{2}}^\phi \right) \right),$$

et :

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad p_{i+\frac{1}{2}}^\phi &= \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} \bar{\rho}_i^{n+1} \bar{\phi}_i^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} \bar{\rho}_{i+1}^{n+1} \bar{\phi}_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}} \\
 &+ c_0 \left(\bar{\rho}_{i+1}^{n+1} \bar{\phi}_{i+1}^{n+1} - \bar{\rho}_i^{n+1} \bar{\phi}_i^{n+1} \right) - c_- \delta p_{i+1}^\phi + c_+ \delta p_i^\phi,
 \end{aligned}$$

où l'on a introduit la courbure :

$$\begin{aligned}
 (3.26) \quad \delta p_i^\phi &= \frac{2\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}} \cdot \frac{\Delta x_i^{n+1} \left(\bar{\rho}_{i+1}^{n+1} \bar{\phi}_{i+1}^{n+1} - \bar{\rho}_i^{n+1} \bar{\phi}_i^{n+1} \right)}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}} \\
 &+ \frac{\Delta x_i^{n+1} + 2\Delta x_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1}} \cdot \frac{\Delta x_i^{n+1} \left(\bar{\rho}_i^{n+1} \bar{\phi}_i^{n+1} - \bar{\rho}_{i-1}^{n+1} \bar{\phi}_{i-1}^{n+1} \right)}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}},
 \end{aligned}$$

et les coefficients :

$$\begin{aligned}
 (3.27) \quad c_0 &\equiv \frac{2\Delta x_i^{n+1} \Delta x_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}) (\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1})} \\
 &\times \left(\frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1}}{2\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}} - \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + 2\Delta x_{i+1}^{n+1}} \right), \\
 c_- &\equiv \frac{\Delta x_i^{n+1}}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}} \cdot \frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1}}{2\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}}, \\
 c_+ &\equiv \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}} \cdot \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + 2\Delta x_{i+1}^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

²Piecewise Parabolic Method.

En présence de discontinuités, l'utilisation du flux de projection \mathcal{P}_3 conduit naturellement à des oscillations. Des limiteurs de flux doivent donc être utilisés pour stabiliser le schéma. On choisit d'utiliser deux limiteurs récents proposés dans [DT04] et [SH97] : un limiteur TVD³ et un limiteur MP⁴. L'efficacité de ces limiteurs pour stabiliser des schémas d'ordre très élevé est mise en évidence dans [PJ06] par exemple. On note \mathcal{P}_3^{TVD} la restriction du flux \mathcal{P}_3 par le limiteur TVD et \mathcal{P}_3^{MP} la restriction du flux \mathcal{P}_3 par le limiteur MP. Leurs expressions sont données dans l'annexe D.

3.2 Nouveau schéma Lagrange-projection asymptotic-preserving

On se concentre maintenant sur la construction et l'étude d'une nouvelle extension du schéma Lagrange-projection présenté dans la section précédente dans le but de résoudre numériquement les équations d'Euler avec friction (3.1) en 1D. Le passage des coordonnées lagrangiennes aux coordonnées eulériennes n'étant pas modifié par la présence d'un terme source non différentiel, la relation (3.12), ainsi que la restriction (3.13) qu'elle implique sur le pas de temps, sont toujours valables. Par conséquent, pour le nouveau schéma, on utilise la même phase de projection que dans le cas homogène, à savoir le schéma (3.11) avec un flux de projection à choisir parmi \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_3^{TVD} et \mathcal{P}_3^{MP} . Ainsi, seule l'extension de la phase lagrangienne doit être étudiée. Les équations résolues durant cette phase sont (3.2). Leur intégration sur le volume de contrôle $\left] m_{i-\frac{1}{2}}; m_{i+\frac{1}{2}} \right[\times] t^n; t^{n+1} [$ conduit au schéma volumes finis :

$$(3.28) \quad \begin{cases} \bar{\tau}_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \bar{v}_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \nu \Delta t \cdot v_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ \bar{e}_i^{n+1} = e_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left((pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (pv)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \nu \Delta t \cdot (v^2)_i^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

où $\Delta m_i = \rho_i^n \Delta x$. Pour compléter ce schéma numérique, il faut choisir une discrétisation pour le flux numérique lagrangien (termes $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$), mais aussi pour le terme source numérique (termes $v_i^{n+\frac{1}{2}}$ et $(v^2)_i^{n+\frac{1}{2}}$). Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la détermination de ces termes de sorte que la phase lagrangienne ci-dessus se réduit, d'une part à la phase lagrangienne homogène (3.9) avec le flux homogène \mathcal{L}_1 ou \mathcal{L}_2 lorsque $\nu = 0$, d'autre part à un schéma consistant avec le comportement asymptotique (3.5), (3.6) lorsque $\nu \gg 1$ sur maillage grossier. Concernant ce dernier point, on voit dans (3.28) que les valeurs discrètes de τ sont déterminées par les flux de vitesse $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ uniquement. Par conséquent, $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ constitue le seul levier disponible pour rendre le schéma asymptotic-preserving pour la variable τ . Par ailleurs, comme un gradient de pression apparait aussi bien dans l'équation discrète pour v que dans son développement asymptotique (3.5), on présume que c'est sur le terme source $v_i^{n+\frac{1}{2}}$ qu'il faut agir pour rendre le schéma asymptotic-preserving pour la variable v . Enfin, la discrétisation de $(v^2)_i^{n+\frac{1}{2}}$ doit être telle que le schéma soit asymptotic-preserving pour l'énergie totale massique e .

³Total Variation Diminishing.

⁴Monotonicity Preserving.

3.2.1 Discrétisation du flux

Ce paragraphe est consacré à la détermination de $p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$. L'utilisation des flux acoustiques classiques \mathcal{L}_1 ou \mathcal{L}_2 construits à partir des équations d'Euler homogènes, et donnés par (3.17) et (3.18), correspond à un splitting d'opérateur. La recherche d'un flux lagrangien plus élaboré est motivée par la proposition suivante :

Proposition 3.1. *On considère le système (3.2) et sa formulation volumes finis (3.28) pour une itération n fixée. Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on suppose que l'état discret $(\rho_i^n, v_i^n, e_i^n)^t$ est tel que :*

$$(3.29) \quad \forall i, \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^n = \mathcal{O}(1), \\ v_i^n = \mathcal{O}(\nu^{-1}), \\ e_i^n = \mathcal{O}(1). \end{array} \right.$$

Alors l'utilisation du flux lagrangien \mathcal{L}_1 (3.17) ou \mathcal{L}_2 (3.18) conduit à un schéma qui n'est pas asymptotic-preserving pour la variable τ .

Remarque L'hypothèse (3.29) revient à supposer que dans le cas raide, l'état discret admet un développement asymptotique dont le terme d'ordre 0 pour la vitesse est nul, conformément au comportement (3.4) du système continu. •

Preuve Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on déduit de l'hypothèse (3.29) que $\epsilon_i^n = \mathcal{O}(1)$, donc $p_i^n = \mathcal{O}(1)$ et $a_i^n = \mathcal{O}(1)$. Pour les flux \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , le développement asymptotique de $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ sur maillage grossier est alors :

$$(3.30) \quad v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{2(\rho a)_{i+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\nu^{-1}).$$

On remarque que $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{O}(1)$. En injectant (3.30) dans l'équation discrète pour τ de (3.28), on trouve :

$$(3.31) \quad \frac{\bar{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n}{\Delta t} = -\frac{\Delta m_i}{2(\rho a)} \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{\Delta m_i^2} + \mathcal{O}(\nu^{-1}),$$

où l'on a simplifié les calculs en supposant que (ρa) est uniforme. L'équation (3.31) est une discrétisation de :

$$(3.32) \quad \partial_t \tau = -\frac{\Delta x}{2a} \partial_{m^2}^2 p + \mathcal{O}(\nu^{-1}),$$

au sens des différences finies (lorsque (ρa) n'est pas uniforme, on peut vérifier que la conclusion est la même). En comparant cette dernière équation avec le comportement asymptotique (3.6) attendu pour τ , on constate que les coefficients de diffusion sont très différents sur maillage grossier puisque $\frac{\Delta x}{2a} \gg \frac{1}{\nu}$. Le schéma n'est donc pas asymptotic-preserving pour la variable τ . ■

Dans ce qui suit, on construit un nouveau flux acoustique prenant en compte la présence du terme source de relaxation. Comme pour le cas homogène, on commence par écrire les équations caractéristiques. On va voir que la présence du terme source modifie ces équations.

L'intégration des caractéristiques conduit à un système comportant des intégrales que l'on approche par des quadratures simples. On obtient finalement deux nouveaux flux, tous deux menant à un schéma AP pour la variable τ , et se réduisant respectivement aux flux \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 lorsque $\nu = 0$.

En combinant les équations du système (3.2), on trouve, pour des solutions régulières :

$$(3.33) \quad [\partial_t \pm \rho a \cdot \partial_m] p \pm \rho a \cdot [\partial_t \pm \rho a \cdot \partial_m] v = \mp \rho a \cdot \nu v,$$

où a est la vitesse du son. On a par conséquent :

$$(3.34) \quad dp \pm \rho a \cdot dv = -\nu v \cdot dm \quad \text{le long de la caractéristique telle que} \quad dm = \pm \rho a \cdot dt.$$

Le terme source apparaît dans les équations caractéristiques. L'intégration en masse de ces équations respectivement sur les intervalles $]m_i; m_{i+\frac{1}{2}}[$ et $]m_{i+\frac{1}{2}}; m_{i+1}[$ donne :

$$(3.35) \quad \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_i^n + \int_{m_i}^{m_{i+\frac{1}{2}}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm = -\nu \int_{m_i}^{m_{i+\frac{1}{2}}} v dm, \\ p_{i+1}^n - p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \int_{m_{i+\frac{1}{2}}}^{m_{i+1}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm = -\nu \int_{m_{i+\frac{1}{2}}}^{m_{i+1}} v dm. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant d'approcher les intégrales ci-dessus par des quadratures telles que le système résultant soit bien posé et mène à un flux asymptotic-preserving pour τ . Pour les intégrales du membre de gauche, on choisit de rester dans l'approximation acoustique, en posant :

$$(3.36) \quad \begin{cases} \int_{m_i}^{m_{i+\frac{1}{2}}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm \simeq A_g \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_i^n \right), \\ \int_{m_{i+\frac{1}{2}}}^{m_{i+1}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm \simeq A_d \left(v_{i+1}^n - v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{cases}$$

où A_g et A_d sont des discrétisations de (ρa) respectivement sur les intervalles $]m_i; m_{i+\frac{1}{2}}[$ et $]m_{i+\frac{1}{2}}; m_{i+1}[$. Pour les intégrales du membre de droite, on choisit la quadrature à un point :

$$(3.37) \quad \begin{cases} \nu \int_{m_i}^{m_{i+\frac{1}{2}}} v dm \simeq B_g v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \nu \int_{m_{i+\frac{1}{2}}}^{m_{i+1}} v dm \simeq B_d v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

où B_g et B_d sont des discrétisations de $\nu \frac{\Delta m}{2}$ respectivement sur les intervalles $]m_i; m_{i+\frac{1}{2}}[$. A ce niveau, les inconnues sont $p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, donc le choix (3.37) revient à expliciter les termes dans lesquels le coefficient ν apparaît. Cette implication est essentielle pour rendre le flux de vitesse asymptotic-preserving pour la variable τ (voir lemme 3.2). En particulier, on peut vérifier que remplacer les intégrales (3.37) par $B_g v_i^n$ et $B_d v_{i+1}^n$ conduit à un flux de vitesse qui n'est pas asymptotic-preserving pour τ car le dénominateur de $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ ne dépend alors pas de ν . Avant de proposer des discrétisations pour les coefficients A_g , A_d , B_g et B_d , on étudie le système résultant des approximations ci-dessus.

Proposition 3.2. Les approximations (3.36) et (3.37) pour le système (3.35) conduisent à un système linéaire en les inconnues $p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, qui est bien posé si (condition suffisante) :

$$(3.38) \quad A_g, A_d > 0 \quad \text{et} \quad B_g, B_d \geq 0.$$

Dans ce cas, la solution unique de ce système est :

$$(3.39) \quad \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(A_d + B_d)(p_i^n + A_g v_i^n) - (A_g + B_g)(-p_{i+1}^n + A_d v_{i+1}^n)}{A_g + A_d + B_g + B_d}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n - p_{i+1}^n + A_g v_i^n + A_d v_{i+1}^n}{A_g + A_d + B_g + B_d}. \end{cases}$$

Preuve En l'inconnue $x = \left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^t$, le système linéaire en question est :

$$(3.40) \quad M \cdot x = y,$$

où l'on a noté :

$$(3.41) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & A_g + B_g \\ -1 & A_d + B_d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} y_g \\ y_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i^n + A_g v_i^n \\ -p_{i+1}^n + A_d v_{i+1}^n \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M est :

$$(3.42) \quad \det_M = A_g + A_d + B_g + B_d.$$

Lorsque les inégalités (3.38) sont vérifiées, \det_M est strictement positif, donc le système linéaire est bien posé. Son unique solution est :

$$(3.43) \quad \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(A_d + B_d) y_g - (A_g + B_g) y_d}{A_g + A_d + B_g + B_d}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{y_g + y_d}{A_g + A_d + B_g + B_d}, \end{cases}$$

d'où le flux numérique (3.39). ■

En pratique, la condition (3.38) n'est pas du tout restrictive puisque A_g, A_d doivent être des discrétisations de $(\rho a) > 0$ et B_g, B_d des discrétisations de $\nu \frac{\Delta m}{2} \geq 0$. On peut donc proposer des discrétisations simples, en suivant la même approche que dans le cas homogène (voir la discussion autour de la discrétisation de (3.16)). Geler (ρa) et $\nu \frac{\Delta m}{2}$ sur l'interface revient à faire le choix :

$$(3.44) \quad \begin{cases} A_g = A_d = (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} \equiv \frac{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n}{2}, \\ B_g = B_d = \frac{\nu}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \equiv \frac{\nu}{2} \frac{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}}{2}, \end{cases}$$

alors que décentrer (ρa) et $\nu \frac{\Delta m}{2}$ suivant le sens du vent revient à faire le choix :

$$(3.45) \quad \begin{cases} A_g = (\rho a)_i^n \quad \text{et} \quad A_d = (\rho a)_{i+1}^n, \\ B_g = \frac{\nu}{2} \Delta m_i \quad \text{et} \quad B_d = \frac{\nu}{2} \Delta m_{i+1}. \end{cases}$$

En utilisant (3.39), ces deux choix mènent respectivement aux deux nouveaux flux :

Flux lagrangien \mathcal{L}_1^{AP}

$$(3.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n + p_{i+1}^n}{2} + (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_i^n - v_{i+1}^n}{2}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v_i^n + v_{i+1}^n}{2 + \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{(\rho a)_{i+\frac{1}{2}}}} + \frac{1}{(\rho a)_{i+\frac{1}{2}}} \frac{p_i^n - p_{i+1}^n}{2 + \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{(\rho a)_{i+\frac{1}{2}}}}, \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

où $(\rho a)_{i+\frac{1}{2}}$ et $\Delta m_{i+\frac{1}{2}}$ sont donnés par (3.44).

Flux lagrangien \mathcal{L}_2^{AP}

$$(3.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\left((\rho a)_{i+1}^n + \frac{\nu}{2} \Delta m_{i+1} \right) (p_i^n + (\rho a)_i^n v_i^n) - \left((\rho a)_i^n + \frac{\nu}{2} \Delta m_i \right) (-p_{i+1}^n + (\rho a)_{i+1}^n v_{i+1}^n)}{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n + \nu \frac{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}}{2}}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n - p_{i+1}^n + (\rho a)_i^n v_i^n + (\rho a)_{i+1}^n v_{i+1}^n}{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n + \nu \frac{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}}{2}}, \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

Comme pour les flux acoustiques classiques \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , on a choisi de poser $(pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, dans le but de pouvoir écrire une inégalité d'entropie discrète pour le schéma complet.

Proposition 3.3. *Le schéma (3.28) muni du flux \mathcal{L}_1^{AP} (3.46), respectivement \mathcal{L}_2^{AP} (3.47), vérifie l'inégalité d'entropie :*

$$(3.48) \quad \overline{T}_i^{n+1} \left(\overline{S}_i^{n+1} - S_i^n \right) \geq -\mathcal{A}_i - \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \mathcal{C}_i,$$

avec $\mathcal{A}_i \leq 0$ et $\mathcal{C}_i \geq 0$. Plus précisément, on a noté :

$$(3.49) \quad \mathcal{A}_i \equiv \frac{1}{2} \overline{T}_i^{n+1} \left[\left(\overline{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} \Big|_{v,e} (U) + \left(\overline{v}_i^{n+1} - v_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \Big|_{\tau,e} (U) + \left(\overline{e}_i^{n+1} - e_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial e^2} \Big|_{\tau,v} (U) \right],$$

où S est l'entropie donnée par $TdS = de - vdv + pd\tau$ et $U = (\tau, v, e)^t$ un état situé entre $(\tau_i^n, v_i^n, e_i^n)^t$ et $(\overline{\tau}_i^{n+1}, \overline{v}_i^{n+1}, \overline{e}_i^{n+1})^t$, et :

$$(3.50) \quad \mathcal{B}_i \equiv (v^2)_i^{n+\frac{1}{2}} - \overline{v}_i^{n+1} v_i^{n+\frac{1}{2}},$$

et :

$$(3.51) \quad \mathcal{C}_i \equiv \frac{\left[p_i^n - \bar{p}_i^{n+1} + (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} (v_i^n - \bar{v}_i^{n+1}) - \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2} \bar{v}_i^{n+1} \right]^2}{2 \left((\rho a)_{i+\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2} \right)} + \frac{\left[p_i^n - \bar{p}_i^{n+1} - (\rho a)_{i-\frac{1}{2}} (v_i^n - \bar{v}_i^{n+1}) + \nu \frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}{2} \bar{v}_i^{n+1} \right]^2}{2 \left((\rho a)_{i-\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right)},$$

respectivement :

$$(3.52) \quad \mathcal{C}_i \equiv \frac{(p_i^n - \bar{p}_i^{n+1})^2 + \left((\rho a)_i^n (v_i^n - \bar{v}_i^{n+1}) - \nu \frac{\Delta m_i}{2} \bar{v}_i^{n+1} \right)^2}{(\rho a)_i^n + \nu \frac{\Delta m_i}{2}}.$$

Preuve L'idée de la démonstration est inspirée de la méthode initialement proposée dans [Des97] pour un problème sans terme source. En la présence d'un terme source, le calcul est un peu plus long et laborieux ; pour cette raison, la preuve est donnée dans l'annexe E. ■

Comme l'inégalité (3.48) dépend de la discrétisation du terme source par l'intermédiaire de \mathcal{B}_i , son analyse est effectuée plus loin. On passe maintenant à l'analyse des nouveaux flux \mathcal{L}_1^{AP} et \mathcal{L}_2^{AP} .

Proposition 3.4. *Lorsque $\nu = 0$, les flux \mathcal{L}_1^{AP} (3.46) et \mathcal{L}_2^{AP} (3.47) se réduisent respectivement aux flux \mathcal{L}_1 (3.17) et \mathcal{L}_2 (3.18) construits pour la résolution des équations d'Euler homogènes.*

Preuve Preuve triviale. ■

Lemme 3.1. *Dans le cas raide $\nu \gg 1$, sous l'hypothèse que l'état discret $(\rho_i^n, v_i^n, e_i^n)^t$ est tel que (3.29), le développement asymptotique du flux \mathcal{L}_1^{AP} (3.46), respectivement \mathcal{L}_2^{AP} (3.47), sur maillage grossier est :*

$$(3.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n + p_{i+1}^n}{2} + \mathcal{O}(\nu^{-1}), \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{p_i^n + p_{i+1}^n}{2} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \end{array} \right.$$

respectivement :

$$(3.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta m_{i+1} p_i^n + \Delta m_i p_{i+1}^n}{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}} + \mathcal{O}(\nu^{-1}), \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\Delta m_{i+1} p_i^n + \Delta m_i p_{i+1}^n}{2 \Delta m_{i+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\nu^{-2}). \end{array} \right.$$

Preuve De l'hypothèse (3.29), on déduit que $\epsilon_i^n = \mathcal{O}(1)$, donc $p_i^n = \mathcal{O}(1)$ et $a_i^n = \mathcal{O}(1)$. Le résultat proposé est alors facilement obtenu. ■

Lemme 3.2. *On considère le système (3.2) et sa formulation volumes finis (3.28) pour une itération n fixée. Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on suppose que l'état discret $(\rho_i^n, v_i^n, e_i^n)^t$ est tel que (3.29). Alors l'utilisation du flux lagrangien \mathcal{L}_1^{AP} (3.46) ou \mathcal{L}_2^{AP} (3.47) conduit à un schéma asymptotic-preserving pour la variable τ .*

Preuve D'après le lemme 3.1, le comportement limite de $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ sur maillage grossier est :

$$(3.55) \quad v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\nu^{-2}),$$

aussi bien pour le flux \mathcal{L}_1^{AP} que pour le flux \mathcal{L}_2^{AP} . Une première façon de conclure est de remarquer que le flux ci-dessus est un flux consistant au sens des volumes finis pour l'équation (3.6) donnant le comportement asymptotique de τ . Cependant, on peut également se convaincre que le flux $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ est asymptotic-preserving pour τ en vérifiant la consistance au sens des différences finies avec la limite de diffusion (3.6). En injectant (3.55) dans l'équation discrète pour τ de (3.28), on trouve :

$$(3.56) \quad \frac{\bar{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\nu} \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{\Delta m_i^2} + \mathcal{O}(\nu^{-2}),$$

où l'on a simplifié les calculs en supposant que (ρa) et Δm sont uniformes. L'équation (3.56) est une discrétisation du comportement asymptotique de τ (3.6) au sens des différences finies (lorsque (ρa) et Δm ne sont pas uniformes, on peut vérifier que la conclusion est la même). Le schéma est donc asymptotic-preserving pour la variable τ . ■

3.2.2 Discrétisation du terme source

Dans le paragraphe précédent, on a construit deux versions d'un nouveau flux lagrangien dont la composante $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ garantit que le schéma est AP pour τ sous l'hypothèse (3.29). Le point essentiel de cette hypothèse est que $v_i^n = \mathcal{O}(\nu^{-1}) \forall i$, qui signifie que le schéma complet doit être tel que la vitesse discrète soit relaxée avec la bonne vitesse caractéristique. C'est notamment le cas si le schéma est AP pour v . On va voir que cette propriété est facilement obtenue si l'on prend pour le terme source $v_i^{n+\frac{1}{2}}$ la discrétisation centrée en espace et implicite en temps :

$$(3.57) \quad v_i^{n+\frac{1}{2}} = \bar{v}_i^{n+1}.$$

Concernant la discrétisation du terme source $(v^2)_i^{n+\frac{1}{2}}$ dans l'équation pour l'énergie, on va voir que le choix simple :

$$(3.58) \quad (v^2)_i^{n+\frac{1}{2}} = (\bar{v}_i^{n+1})^2,$$

conduit à un schéma AP pour e et permet d'énoncer un critère pour que le schéma complet soit entropique. Mais avant, on vérifie que le nouveau schéma proposé est consistant avec le système de lois de bilan (3.2), en un sens que l'on va préciser.

Le schéma volumes finis de la phase lagrangienne (3.28) s'écrit sous forme vectorielle classique :

$$(3.59) \quad \bar{U}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta t \cdot S_i^{n+\frac{1}{2}},$$

où $U = (\tau, v, e)^t$, $F = (-v, p, pv)^t$ et $S = (0, -\nu v, -\nu v^2)^t$. Il peut aussi être écrit sous la forme d'un schéma USI (voir [Bou04]), à savoir :

$$(3.60) \quad \bar{U}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(F_{i+\frac{1}{2}}^H - F_{i-\frac{1}{2}}^H \right) + \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(S_{i-\frac{1}{2}}^+ + S_{i+\frac{1}{2}}^- \right),$$

avec :

$$(3.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{i+\frac{1}{2}}^- \equiv \frac{\Delta m_i}{2} \cdot S_i^{n+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^S, \\ S_{i-\frac{1}{2}}^+ \equiv \frac{\Delta m_i}{2} \cdot S_i^{n+\frac{1}{2}} + F_{i-\frac{1}{2}}^S, \end{array} \right.$$

où $F_{i+\frac{1}{2}}^S$ est donné par la décomposition :

$$(3.62) \quad F_{i+\frac{1}{2}}^S \equiv F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^H.$$

$F_{i+\frac{1}{2}}^H$ correspond à un flux numérique pour la résolution du système homogène. Le schéma (3.60) est *consistant* avec le système (3.2) au sens de [PS03] lorsque les 3 points suivants sont vérifiés :

1. le flux $F_{i+\frac{1}{2}}^H$ est consistant avec le flux du système homogène au sens classique :

$$(3.63) \quad F^H(U, U) = \mathcal{F}(U) = (-v, p, pv)^t,$$

2. S^- et S^+ vérifient, lorsque $\Delta m_1 = \Delta m_2 = 0$:

$$(3.64) \quad S^-(U, V, \Delta m_1, \Delta m_2) = S^+(U, V, \Delta m_1, \Delta m_2) = 0,$$

3. S^- et S^+ sont tels que :

$$(3.65) \quad \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{S^-(U, U, \Delta m, \Delta m) + S^+(U, U, \Delta m, \Delta m)}{\Delta m} = \mathcal{S}(U) = (0, -\nu v, -\nu v^2)^t.$$

Cette notion de consistance a été utilisée dans [BOP07] par exemple.

Lemme 3.3. *Le schéma (3.28) complété par le terme source (3.57), (3.58) et muni du flux \mathcal{L}_1^{AP} (3.46) ou \mathcal{L}_2^{AP} (3.47) est consistant avec le système (3.2).*

Preuve On commence par déterminer les expressions de $S_{i+\frac{1}{2}}^-$ et $S_{i-\frac{1}{2}}^+$ par l'intermédiaire de $F_{i+\frac{1}{2}}^S$ dans le but d'écrire explicitement la formulation USI du nouveau schéma. On montre ensuite que les fonctions F^H , S^- et S^+ vérifient les 3 points ci-dessus. Pour le flux \mathcal{L}_1^{AP} , on choisit de remplacer F^H par le flux \mathcal{L}_1 (3.17). Le calcul de F^S (3.62) donne alors :

$$(3.66) \quad F_{i+\frac{1}{2}}^S = \begin{pmatrix} -v_{i+\frac{1}{2}}^S = \frac{\nu \Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2(\rho a)_{i+\frac{1}{2}} + \nu \Delta m_{i+\frac{1}{2}}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^H \\ p_{i+\frac{1}{2}}^S = 0 \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^S = -\frac{\nu \Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2(\rho a)_{i+\frac{1}{2}} + \nu \Delta m_{i+\frac{1}{2}}} \cdot p_{i+\frac{1}{2}}^H \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^H \end{pmatrix}.$$

De la même manière, pour le flux \mathcal{L}_2^{AP} , on choisit de remplacer F^H par le flux \mathcal{L}_2 (3.18). Le calcul de F^S (3.62) donne dans ce cas :

$$(3.67) \quad F_{i+\frac{1}{2}}^S = \left(\begin{array}{l} -v_{i+\frac{1}{2}}^S = \frac{\nu \frac{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}}{2}}{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n + \nu \frac{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^H \\ p_{i+\frac{1}{2}}^S = \frac{\nu \frac{\Delta m_{i+1}}{2} (\rho a)_i^n - \nu \frac{\Delta m_i}{2} (\rho a)_{i+1}^n}{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n + \nu \frac{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^H \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^S = -\frac{\nu \frac{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}}{2}}{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n + \nu \frac{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}}{2}} \cdot p_{i+\frac{1}{2}}^H \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^H \\ + \frac{((\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n) \left(\nu \frac{\Delta m_{i+1}}{2} (\rho a)_i^n - \nu \frac{\Delta m_i}{2} (\rho a)_{i+1}^n \right)}{\left((\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n + \nu \frac{\Delta m_i + \Delta m_{i+1}}{2} \right)^2} \cdot \left(v_{i+\frac{1}{2}}^H \right)^2 \end{array} \right).$$

Dans les deux cas, les expressions de S^- et S^+ sont explicitement fournies par (3.61). Il reste donc à vérifier les 3 points (3.63), (3.64) et (3.65). Le premier point est trivialement vérifié par le choix des flux acoustiques classiques \mathcal{L}_1 ou \mathcal{L}_2 . On voit facilement que le second point est vérifié en considérant (3.61) et les expressions respectives de F^S (3.66), (3.67). Enfin, concernant le dernier point, on a $S^-(U, U, \Delta m, \Delta m) + S^+(U, U, \Delta m, \Delta m) = \Delta m \cdot S^{n+\frac{1}{2}}(U)$, où $S^{n+\frac{1}{2}}(U)$ est donné par (3.57) et (3.58). Le point 3 est donc vérifié, ce qui achève la preuve. ■

On passe maintenant à l'étude de la stabilité du schéma, au sens où l'on examine un critère pour que le schéma soit entropique.

Proposition 3.5. *Avec le couple (3.57), (3.58), le schéma (3.28) muni du flux \mathcal{L}_1^{AP} (3.46), respectivement \mathcal{L}_2^{AP} (3.47), est entropique, au sens où :*

$$(3.68) \quad \bar{S}_i^{n+1} \geq S_i^n,$$

si et seulement si Δt vérifie :

$$(3.69) \quad \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \mathcal{C}_i \leq -\mathcal{A}_i,$$

où \mathcal{A}_i est donné par (3.49) et \mathcal{C}_i est donné par (3.51), respectivement (3.52).

Preuve Il suffit de remarquer que le couple (3.57), (3.58) annule le terme \mathcal{B}_i donné par (3.50). L'inégalité (3.48) donne alors le résultat. ■

L'idéal serait de pouvoir déduire de l'inégalité (3.69) une restriction explicite sur le pas de temps $\forall \nu \geq 0$ du type condition CFL, mais ce point n'a pas encore abouti. Par contre, on sait conclure dans les deux cas limites $\nu = 0$ et $\nu \gg 1$, ce que l'on voit maintenant.

Dans le cas $\nu = 0$, on commence par remarquer que l'on retrouve le schéma Lagrange-projection classique. Plus précisément :

Proposition 3.6. *On considère le système (3.2) et sa formulation volumes finis (3.28), complétée par le flux \mathcal{L}_1^{AP} (3.46), respectivement \mathcal{L}_2^{AP} (3.47), et la discrétisation du terme source (3.57), (3.58). Lorsque $\nu = 0$, ce schéma se réduit au schéma classique (3.9), (3.17), respectivement (3.18), pour la résolution des équations d'Euler homogènes.*

Preuve Preuve triviale (voir proposition 3.4). ■

On déduit de la proposition 3.6 que le nouveau schéma est entropique lorsque $\nu = 0$ sous la condition classique (3.19), (3.20) pour le flux \mathcal{L}_1^{AP} , et (3.19), (3.21) pour le flux \mathcal{L}_2^{AP} .

Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on commence par montrer que le nouveau schéma est asymptotic-preserving, puis on montre qu'il est entropique sur maillage grossier.

Théorème 3.1. *On considère le système (3.2) et sa formulation volumes finis (3.28), complétée par le flux \mathcal{L}_1^{AP} (3.46), respectivement \mathcal{L}_2^{AP} (3.47), et la discrétisation du terme source (3.57), (3.58). Dans le cas raide $\nu \gg 1$, si l'état discret $(\rho_i^n, v_i^n, e_i^n)^t$ est tel que (3.29), alors le schéma est asymptotic-preserving.*

Preuve Il s'agit ici de prouver que dans le cas raide $\nu \gg 1$, le schéma complet est asymptotic-preserving pour les variables τ , v et e sous la seule hypothèse (3.29). Avec (3.57) et (3.58), le système discret (3.28) devient :

$$(3.70) \quad \begin{cases} \bar{\tau}_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \bar{v}_i^{n+1} = \frac{v_i^n}{1 + \nu \Delta t} - \frac{\Delta t}{1 + \nu \Delta t} \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_i}, \\ \bar{e}_i^{n+1} = e_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left((pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (pv)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \nu \Delta t \cdot (\bar{v}_i^{n+1})^2. \end{cases}$$

Dans le cas raide, compte tenu de (3.29), on a sur maillage grossier :

$$(3.71) \quad \begin{cases} \bar{\tau}_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \bar{v}_i^{n+1} = -\frac{1}{\nu} \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_i} + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \\ \bar{e}_i^{n+1} = e_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left((pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (pv)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{\nu} \left(\frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_i} \right)^2 + \mathcal{O}(\nu^{-2}). \end{cases}$$

On utilise alors le lemme 3.1, en commençant par le flux \mathcal{L}_1^{AP} . En injectant (3.53) dans (3.71),

on trouve :

$$(3.72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta m_i} p_{i+1}^n - \frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}} + \Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta m_i} p_i^n + \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta m_i} p_{i-1}^n}{\Delta m_{i-\frac{1}{2}} \cdot \Delta m_{i+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \\ \bar{v}_i^{n+1} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta m_i} + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \\ \frac{\bar{e}_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\frac{p_i^n + p_{i+1}^n}{2} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{p_{i-1}^n + p_i^n}{2} \cdot \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}}{\Delta m_i} \\ - \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta m_i} \right)^2 + \mathcal{O}(\nu^{-2}). \end{array} \right.$$

On vérifie sans difficulté que ce schéma est bien consistant au sens des différences finies avec la limite de diffusion du système (3.2), que l'on rappelle :

$$(3.73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau = -\frac{1}{\nu} \partial_{m^2}^2 p, \\ v = -\frac{1}{\nu} \partial_m p, \\ \partial_t e = \frac{1}{\nu} \partial_m (p \partial_m p) - \frac{1}{\nu} (\partial_m p)^2. \end{array} \right.$$

Le schéma avec flux \mathcal{L}_1^{AP} est donc bien AP pour τ , v et e . A titre de remarque, sur un maillage uniforme $\Delta m_i = \Delta m$, le schéma (3.72) se réduit à la discrétisation simple :

$$(3.74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{\Delta m^2} + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \\ \bar{v}_i^{n+1} = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta m} + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \\ \frac{\bar{e}_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{(p_{i+1}^n)^2 - 2(p_i^n)^2 + (p_{i-1}^n)^2}{2\Delta m^2} - \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta m} \right)^2 + \mathcal{O}(\nu^{-2}). \end{array} \right.$$

Pour le flux \mathcal{L}_2^{AP} , le même type de calcul est plus difficile à présenter en raison de la présence des nombreux coefficients de pondération liés à (ρa) . On se contente alors de mentionner le résultat : la discrétisation obtenue tout calcul fait est d'une part consistante au sens des différences finies avec la limite de diffusion du système (3.2), d'autre part se réduit au même schéma (3.74) lorsque Δm et (ρa) sont uniformes. ■

On vient de voir que le nouveau schéma est AP. On termine cette section en montrant qu'il est aussi entropique dans le cas raide $\nu \gg 1$ sur maillage grossier.

Corollaire 3.1 (de la proposition 3.5). *On considère le schéma (3.28) muni du flux \mathcal{L}_1^{AP} (3.46), respectivement \mathcal{L}_2^{AP} (3.47), et du couple (3.57), (3.58). Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on suppose que l'état discret $(\rho_i^n, v_i^n, e_i^n)^t$ est tel que (3.29). Alors le schéma est entropique sur maillage grossier.*

Preuve Lorsque $\nu \gg 1$, sous l'hypothèse (3.29), $v_i^n = \mathcal{O}(\nu^{-1})$. Avec la discrétisation (3.57), l'équation discrète pour v donne alors $\bar{v}_i^{n+1} = \mathcal{O}(\nu^{-1})$ (voir équation pour v de (3.72)). En

utilisant (3.51), respectivement (3.52), on en déduit que $\mathcal{C}_i = \mathcal{O}(\nu^{-1})$. Or, d'après (3.49), $\mathcal{A}_i = \mathcal{O}(1)$. Comme \mathcal{C}_i et $-\mathcal{A}_i$ sont positifs, on peut en déduire que l'inégalité (3.69) devient $\frac{\Delta t}{\Delta m_i} \mathcal{O}(\nu^{-1}) \leq \mathcal{O}(1)$, ce qui est toujours vrai sur maillage grossier, par définition. Le schéma est donc entropique, d'après la proposition 3.5. ■

3.2.3 Résultats numériques

On procède maintenant à l'évaluation du nouveau schéma proposé, à savoir :

- pour la phase lagrangienne : (3.28) muni de (3.57) et (3.58). Le flux utilisé est précisé plus loin.
- pour la phase de projection : (3.11) avec le flux de projection \mathcal{P}_3 (3.23) et son limiteur TVD.

On se propose d'étudier un problème de type tube à choc, pour différentes valeurs du coefficient $\nu \geq 0$. La condition initiale considérée est celle de Sod :

$$(3.75) \quad x \in]0; 1[, \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0.5, \\ 0.125 & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \\ v(x, 0) = 0, \\ p(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0.5, \\ 0.1 & \text{si } x > 0.5. \end{cases} \end{array} \right.$$

L'équation d'état utilisée est celle du gaz parfait $p = (\gamma - 1) \rho \epsilon$, avec un coefficient polytropique $\gamma = 1.4$. On prend des conditions aux limites transitives (Neumann). Sauf mention contraire explicite, les résultats numériques présentés pour ce cas-test sont donnés à l'instant $t = 0.14$, avec 200 mailles et un nombre CFL de 0.75. Sur ce problème, on compare les flux \mathcal{L}_2 (3.18) et \mathcal{L}_2^{AP} (3.47). Pour des valeurs de $\nu = 0, 1, 10^1, 10^2, \dots$, on représente dans les figures 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, ... les résultats numériques obtenus avec le flux \mathcal{L}_2 dans la colonne de gauche, et avec le flux \mathcal{L}_2^{AP} dans la colonne de droite. Les solutions de référence sont obtenues numériquement sur maillage très fin (10^4 mailles). Pour les deux schémas, la restriction sur le pas de temps utilisée est la même, à savoir la condition CFL classique (3.21) pour les équations d'Euler *homogènes*. On a observé numériquement que cette condition simple implique que le critère (3.69) (garantissant que le nouveau schéma est entropique) est vrai pour les configurations étudiées.

On passe à l'analyse des résultats. Lorsque $\nu = 0$ (figure 3.1), on vérifie que les deux flux donnent les mêmes résultats, et l'on retrouve la structure *choc, discontinuité de contact, détente* caractéristique du tube à choc classique. Lorsque $\nu = 1$ (figure 3.2), l'influence du terme source est très faible, et les deux schémas donnent encore des résultats identiques. Lorsque $\nu = 10$ (figure 3.3), la dissipation due à la présence du terme source devient nettement visible, notamment sur les profils de vitesse. Pourtant, là encore, les deux schémas donnent des résultats similaires. Lorsque $\nu = 10^2$ (figure 3.4), on ne peut plus distinguer la structure des ondes en raison de l'amortissement fort. On commence à distinguer sur les profils d'énergie interne (en bas) des différences de comportement entre les deux schémas. L'ordre de grandeur $\nu = 10^3$ (figure 3.5) correspond au dernier ordre de grandeur accessible sur maillage non grossier. En effet, avec 200 mailles, $\Delta x = 0.5 \cdot 10^{-2}$, et avec la restriction utilisée (3.21) et un CFL de 0.75, on observe que $\Delta t > 10^{-3}$. On voit, notamment sur l'énergie interne, que le schéma classique

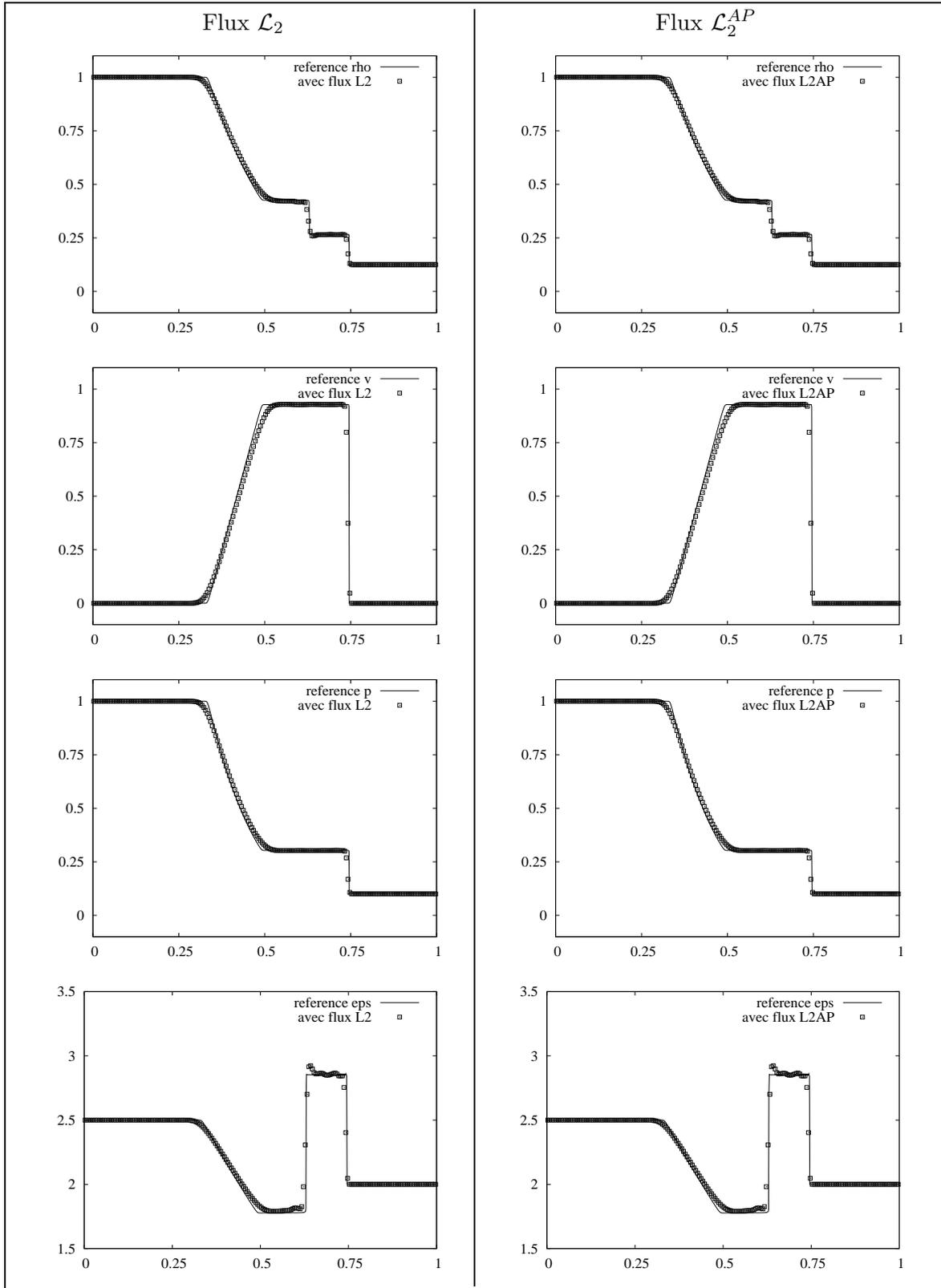


FIG. 3.1 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) ; profils ρ , v , p et ϵ pour $\nu = 0$.

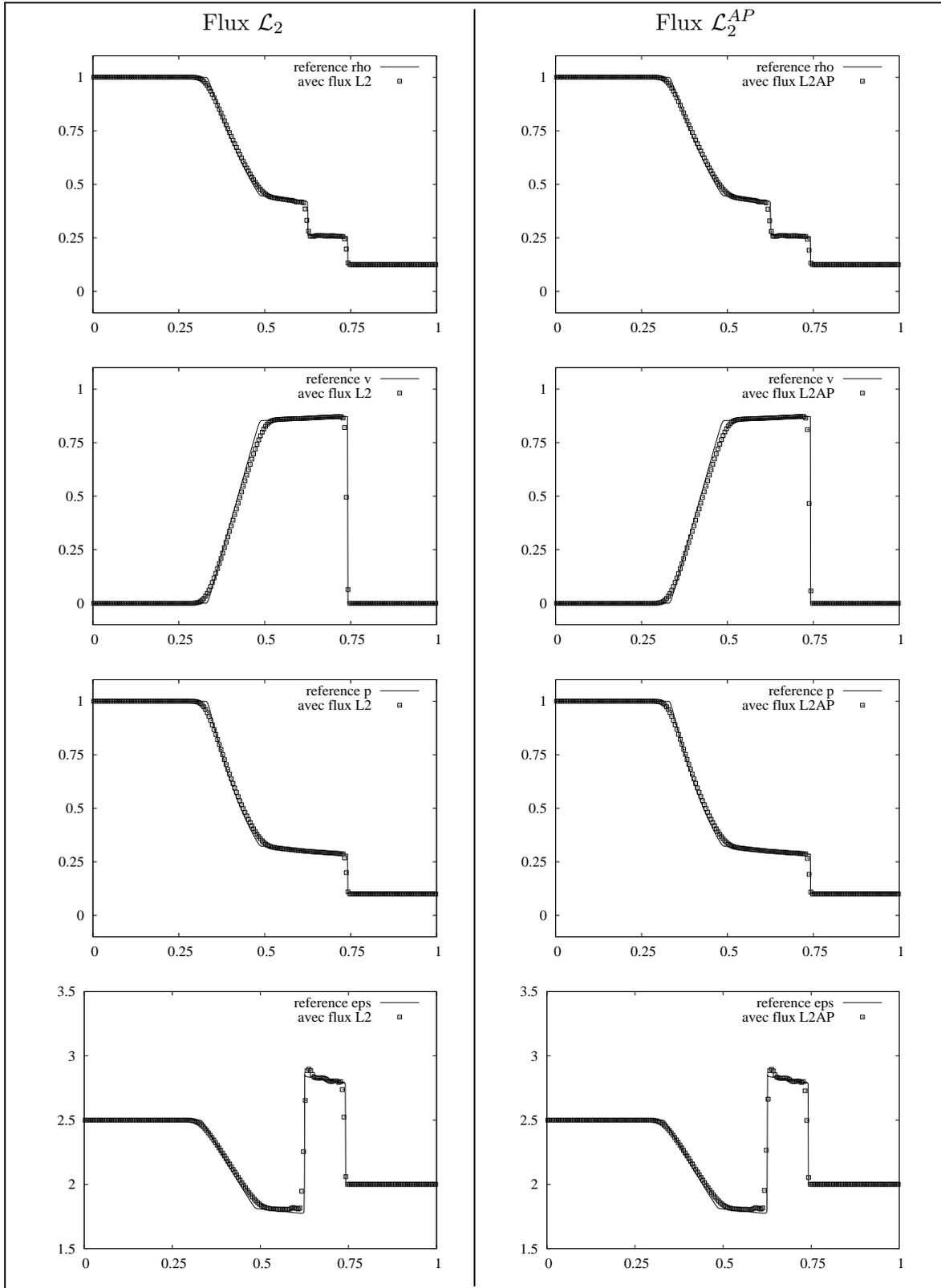


FIG. 3.2 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) ; profils ρ , v , p et ϵ pour $\nu = 1$.

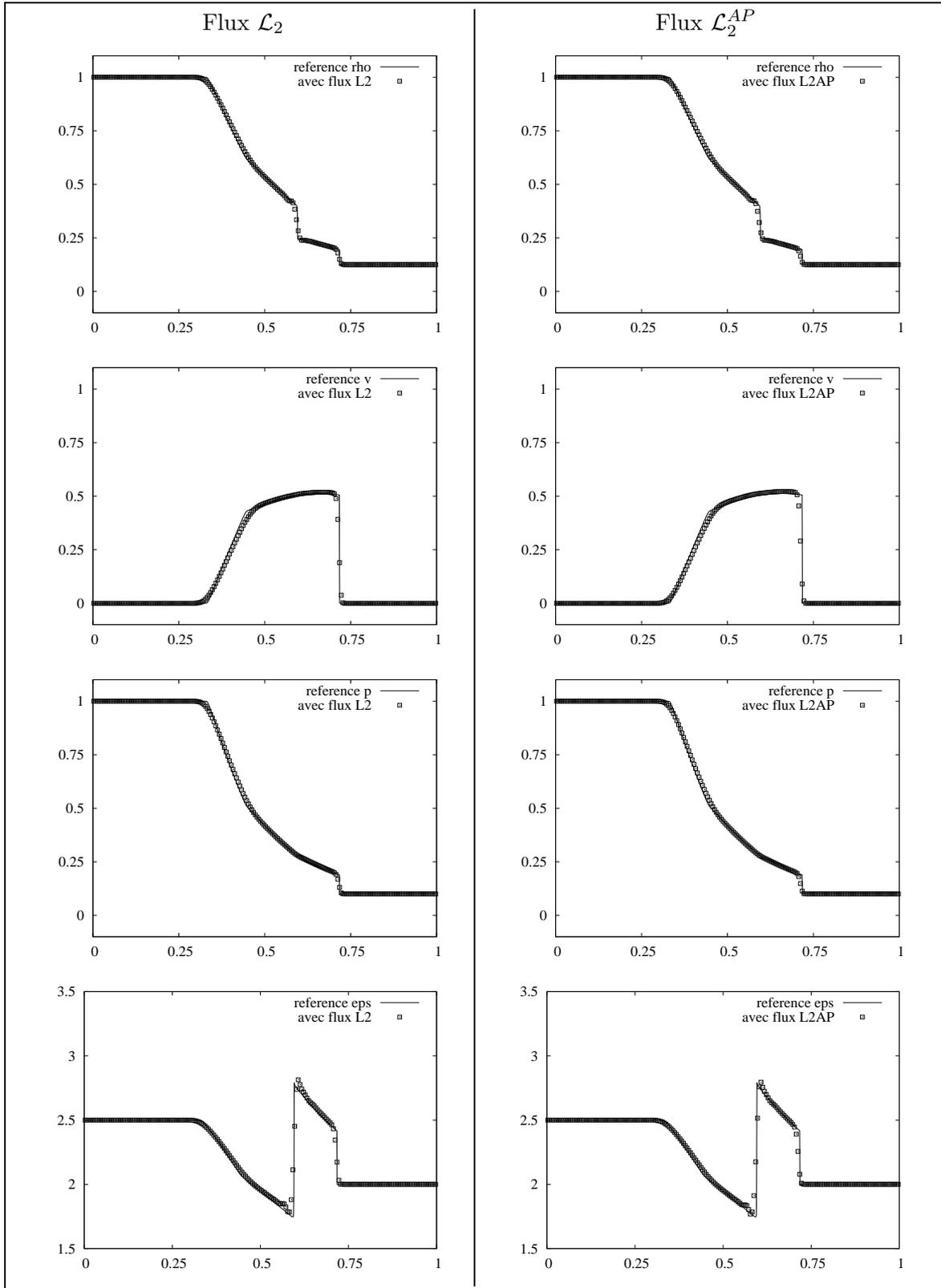


FIG. 3.3 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) ; profils ρ , v , p et ϵ pour $\nu = 10$.

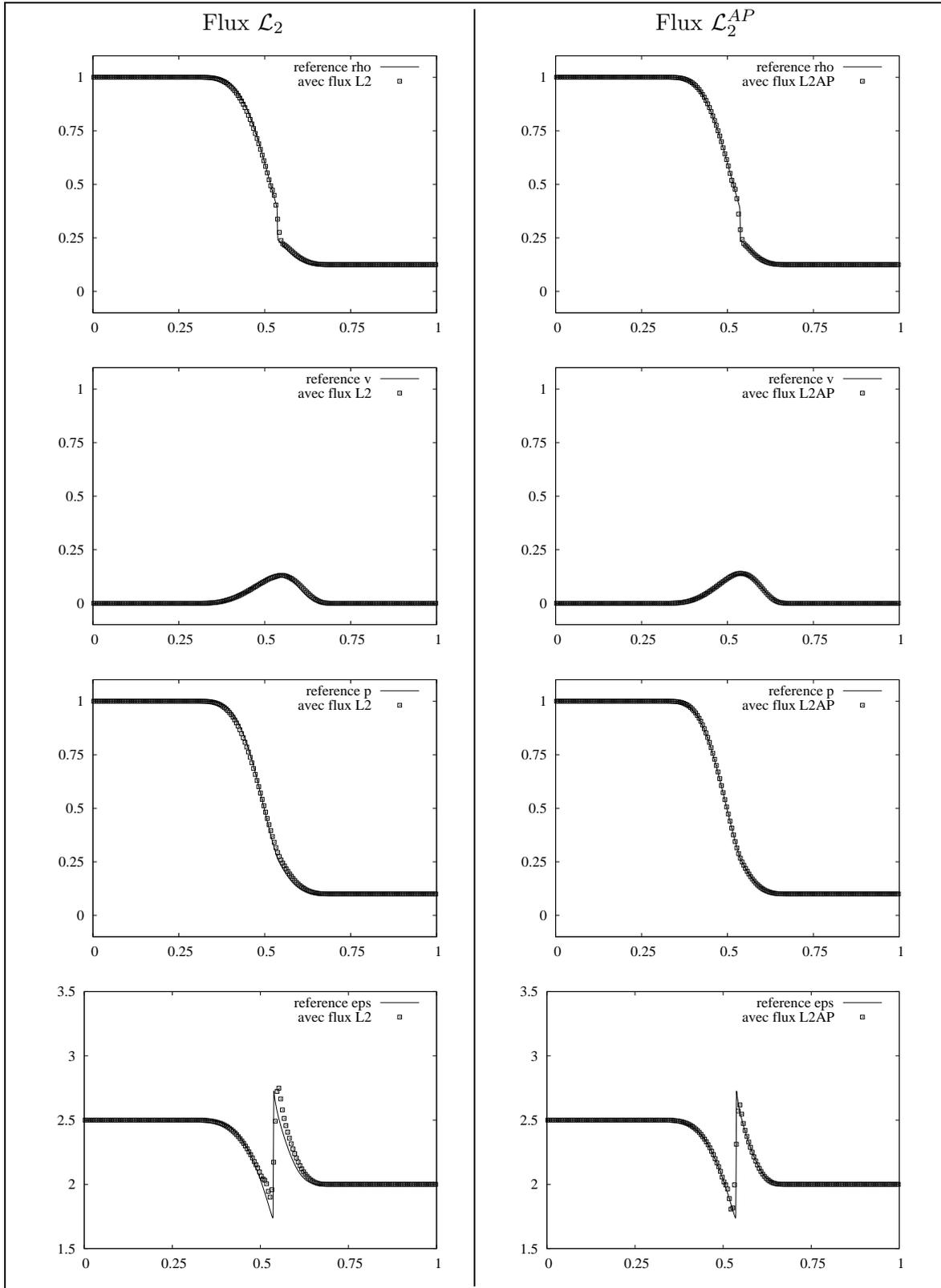


FIG. 3.4 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) ; profils ρ , v , p et ϵ pour $\nu = 10^2$.

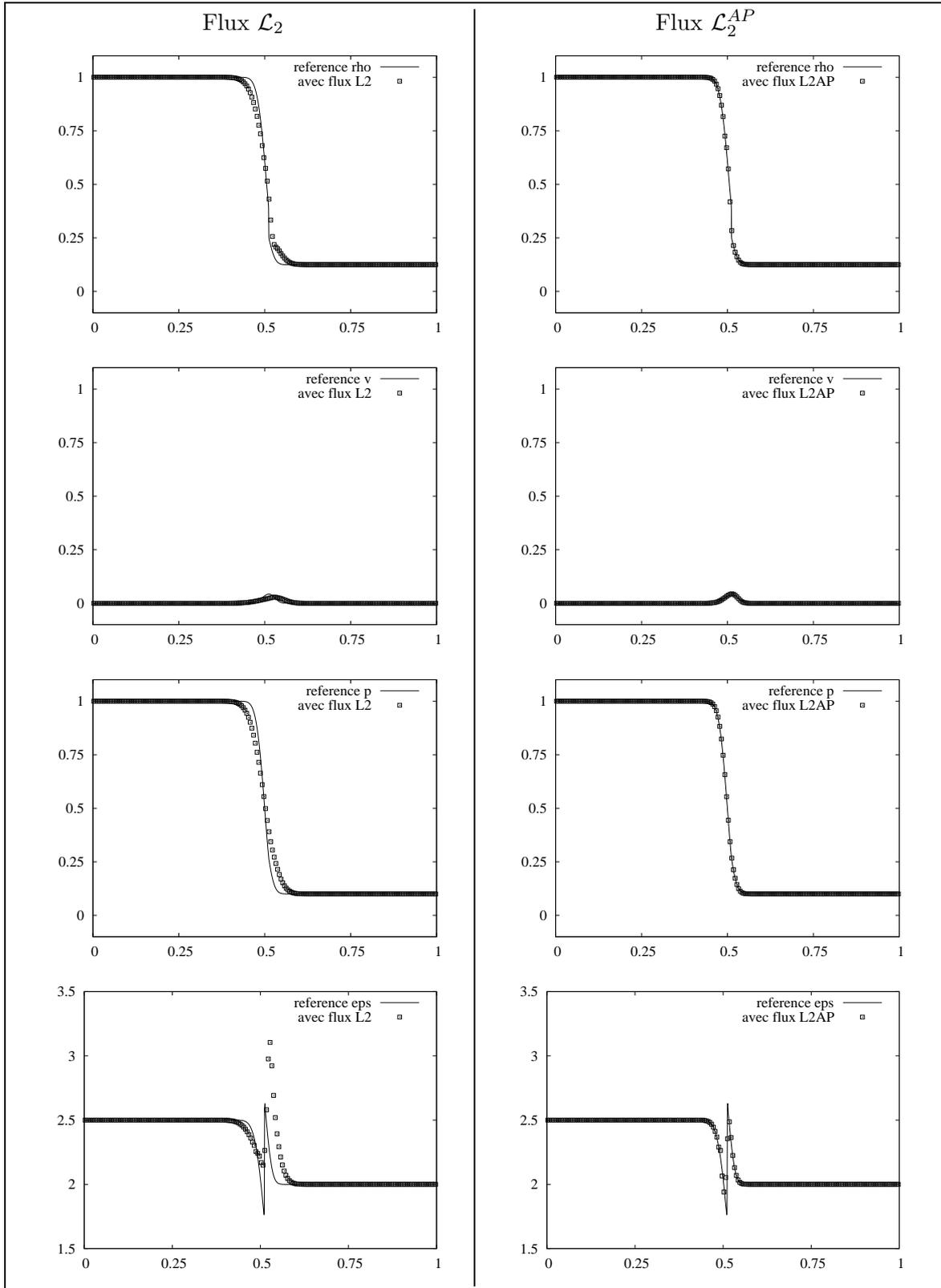


FIG. 3.5 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) ; profils ρ , v , p et ϵ pour $\nu = 10^3$.

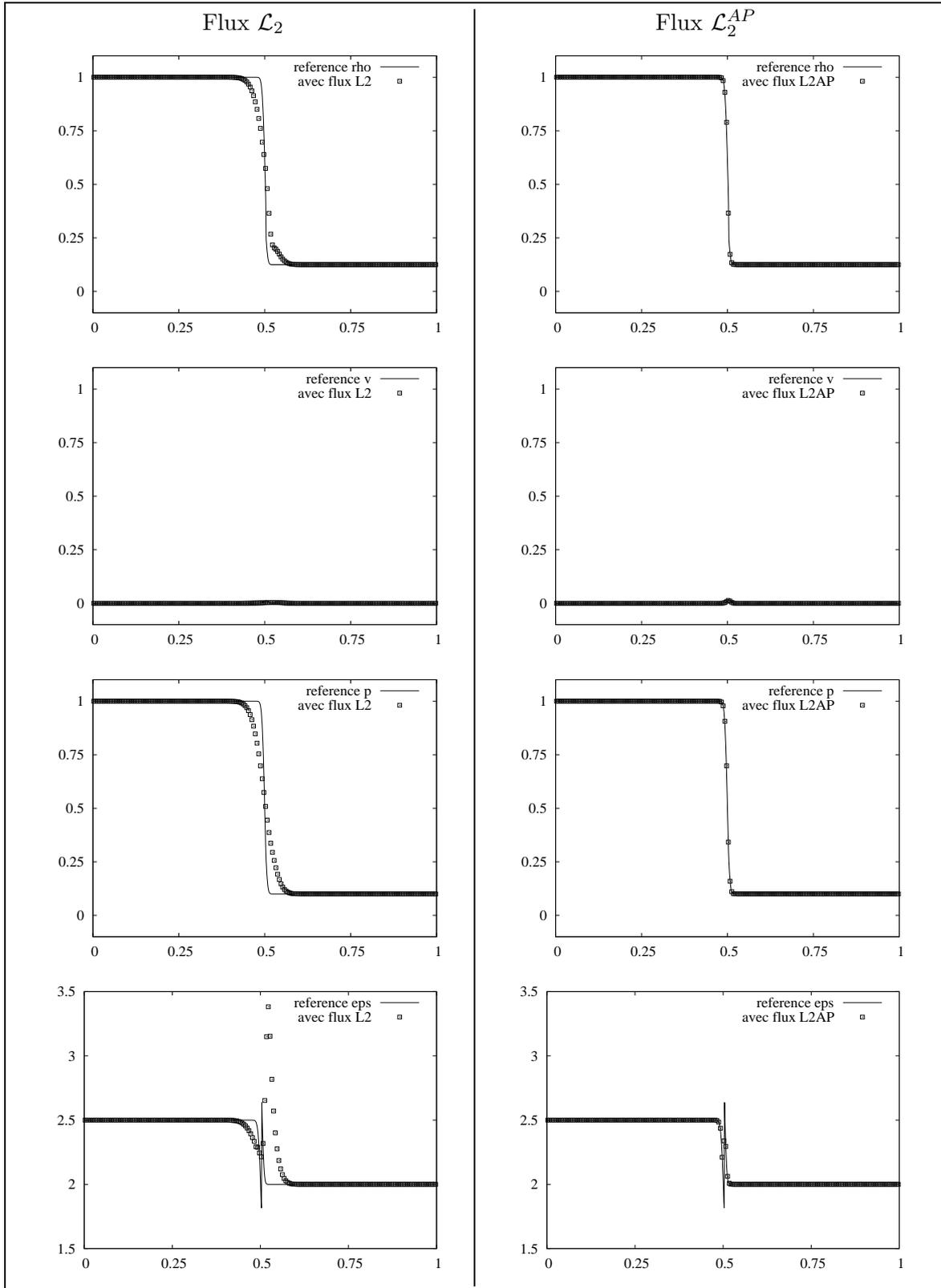


FIG. 3.6 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) ; profils ρ , v , p et ϵ pour $\nu = 10^4$.

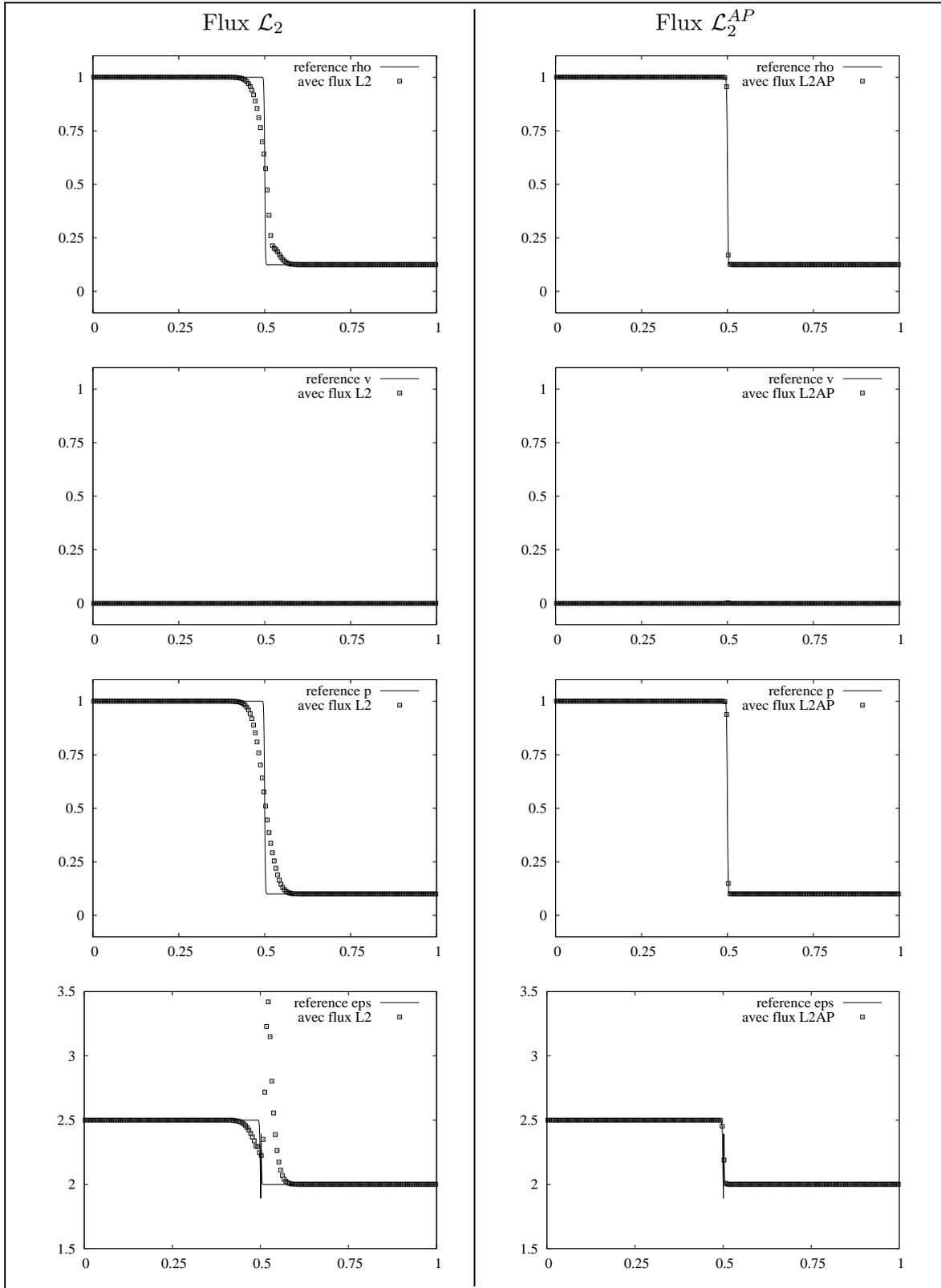


FIG. 3.7 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) ; profils ρ , v , p et ϵ pour $\nu = 10^5$.

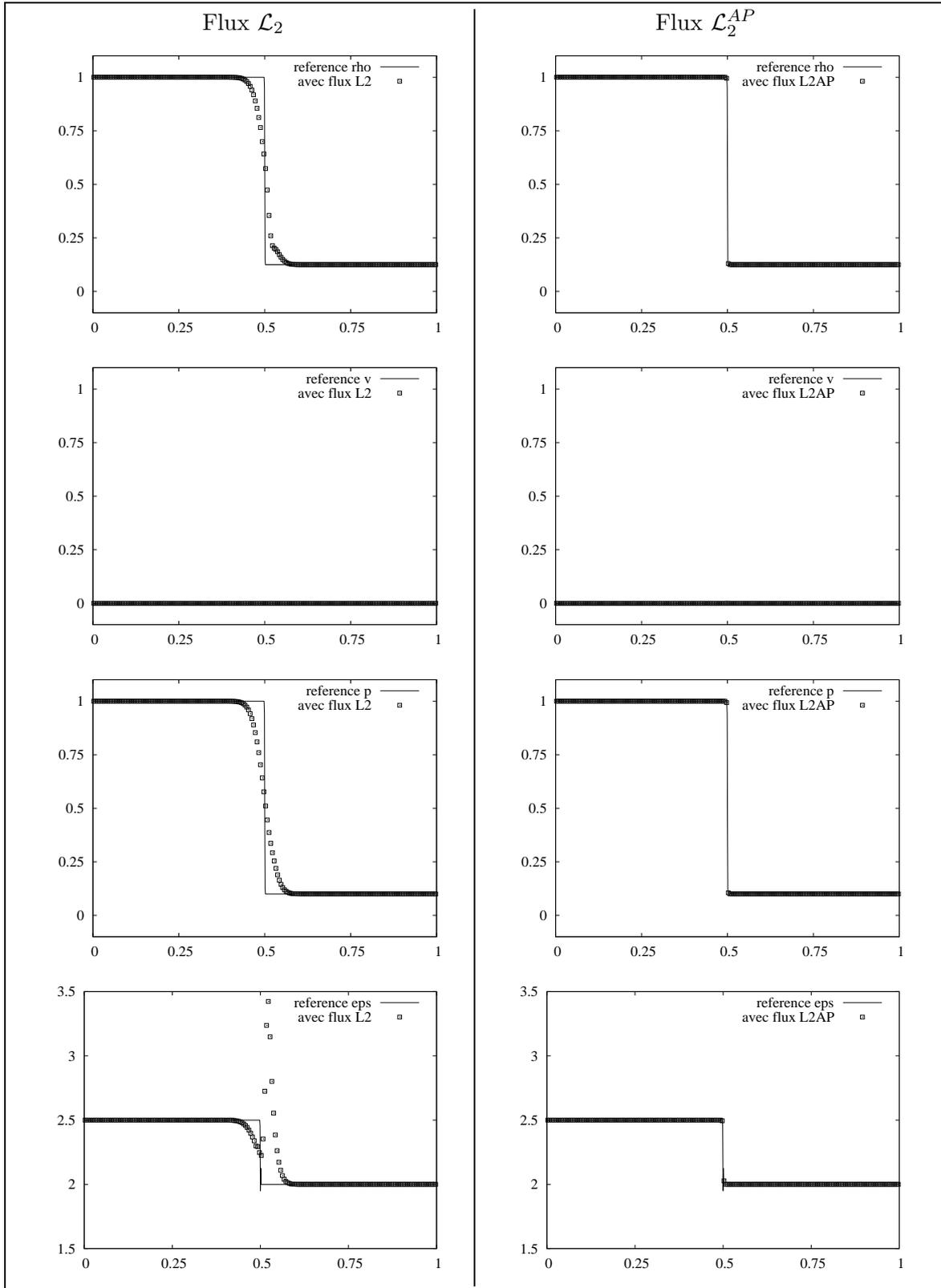


FIG. 3.8 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) ; profils ρ , v , p et ϵ pour $\nu = 10^6$.

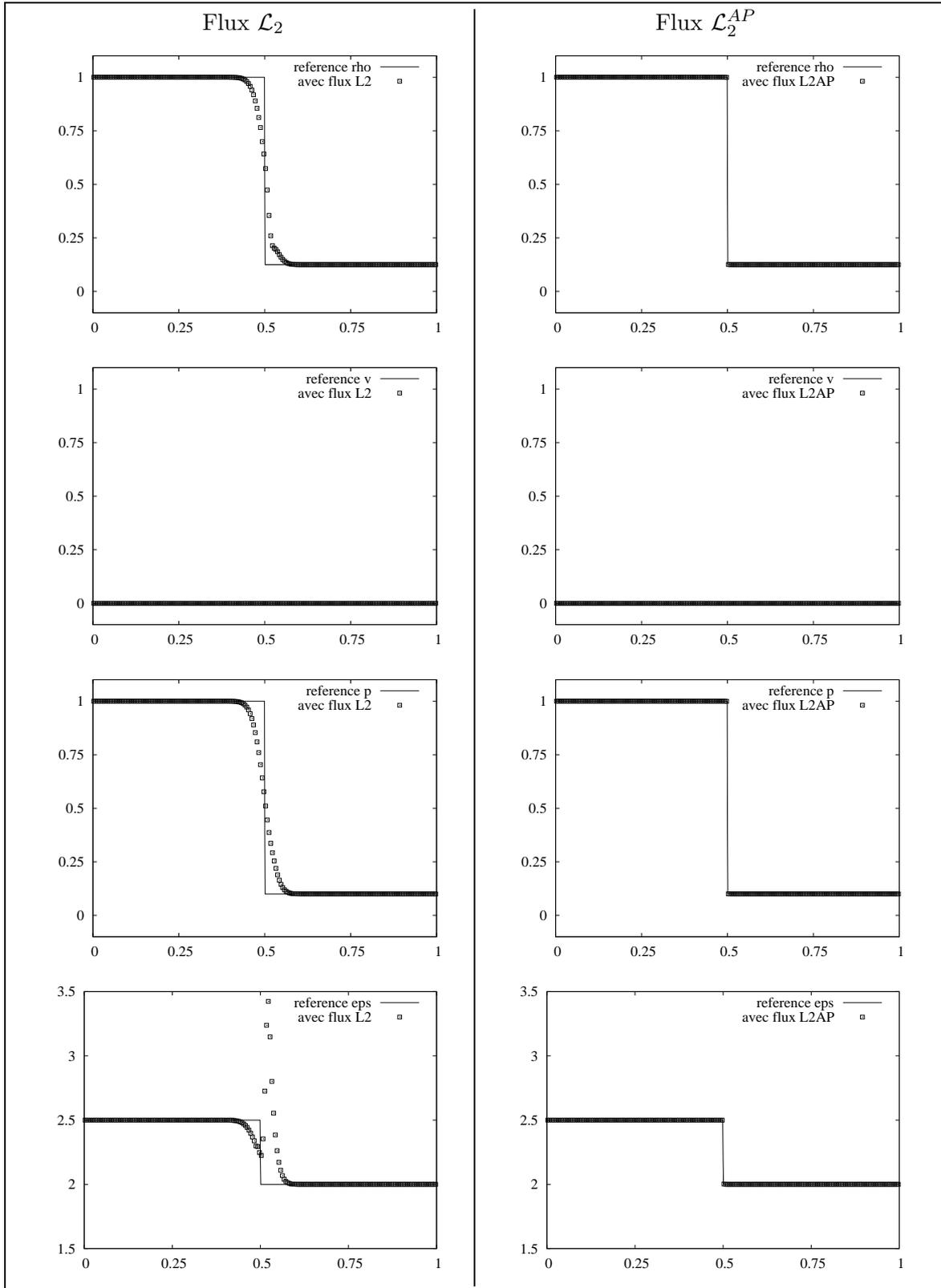


FIG. 3.9 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) ; profils ρ , v , p et ϵ pour $\nu = 10^7$.

\mathcal{L}_2 commence à perdre de la précision, comparativement avec le nouveau schéma \mathcal{L}_2^{AP} . Une remarque importante ici consiste à signaler que, malgré cette perte de précision, les solutions convergées (appelées *reference* sur les figures) sont les mêmes pour les deux schémas. Pour les valeurs $\nu \geq 10^4$ (figures 3.6, 3.7, 3.8, 3.9), on est dans le cas raide avec un maillage grossier. On vérifie que l'utilisation du flux classique \mathcal{L}_2 ne permet pas de capturer le comportement asymptotique souhaité, alors que le nouveau flux \mathcal{L}_2^{AP} fournit avec 200 mailles une solution numérique qu'on ne peut pas distinguer de la solution de référence à l'oeil nu. Pour finir avec ce cas-test, on signale que la stabilité du schéma sous la condition CFL classique (3.21) et un CFL de 0.75 a été numériquement vérifiée également pour des valeurs de ν comme $\nu = 10^{20}$ et $\nu = 10^{99}$.

Toujours sur le même problème (condition initiale (3.75)), on se propose d'examiner la vitesse de convergence des deux schémas \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_2^{AP} dans le cas raide et en temps long, c'est-à-dire dans la limite de diffusion de ρ . On fixe ν à 10^4 . La figure 3.10 représente les résultats numériques obtenus à l'instant $t = 5$ avec le flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et le flux \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite), avec différents nombres de mailles : 200, 400, 800, ..., 6400. Les courbes appelées *reference* ont été obtenues numériquement sur un maillage de 12800 mailles. On vérifie que les solutions convergées données par les deux schémas sont les mêmes. On voit que pour obtenir une solution numérique raisonnablement proche de la solution convergée, il faut environ 10000 mailles avec le flux \mathcal{L}_2 , alors que 200 suffisent avec le nouveau flux \mathcal{L}_2^{AP} . L'apport du nouveau schéma prend donc tout son sens en 2D ou en 3D, où 10000 mailles par direction n'est pas envisageable. Sur la figure 3.10, on ne distingue pas à l'oeil nu les différentes courbes données par le nouveau flux. Pour se convaincre que le nouveau schéma converge, on représente dans la figure 3.10 un agrandissement des profils de la variable la plus sensible au raffinement de maillage, à savoir l'énergie interne ϵ .

La même étude a été menée avec les flux \mathcal{L}_1 (3.17) et \mathcal{L}_1^{AP} (3.46) et a conduit à des conclusions similaires.

3.3 Extension multidimensionnelle par directions alternées

Pour l'extension au 2D et 3D, on choisit d'utiliser la méthode des directions alternées, avec un splitting de Strang (voir [Str68]) introduisant une erreur d'ordre 2 en temps. Pour faire court, on ne présente que le cas 2D et ce, brièvement. L'extension au 3D ne présente pas de difficulté supplémentaire.

3.3.1 Description dans le cas 2D

Les équations d'Euler 2D avec un terme source de relaxation du vecteur vitesse sont :

$$(3.76) \quad \partial_t \mathcal{U} + \partial_x \mathcal{F}(\mathcal{U}) + \partial_y \mathcal{G}(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}(\mathcal{U}),$$

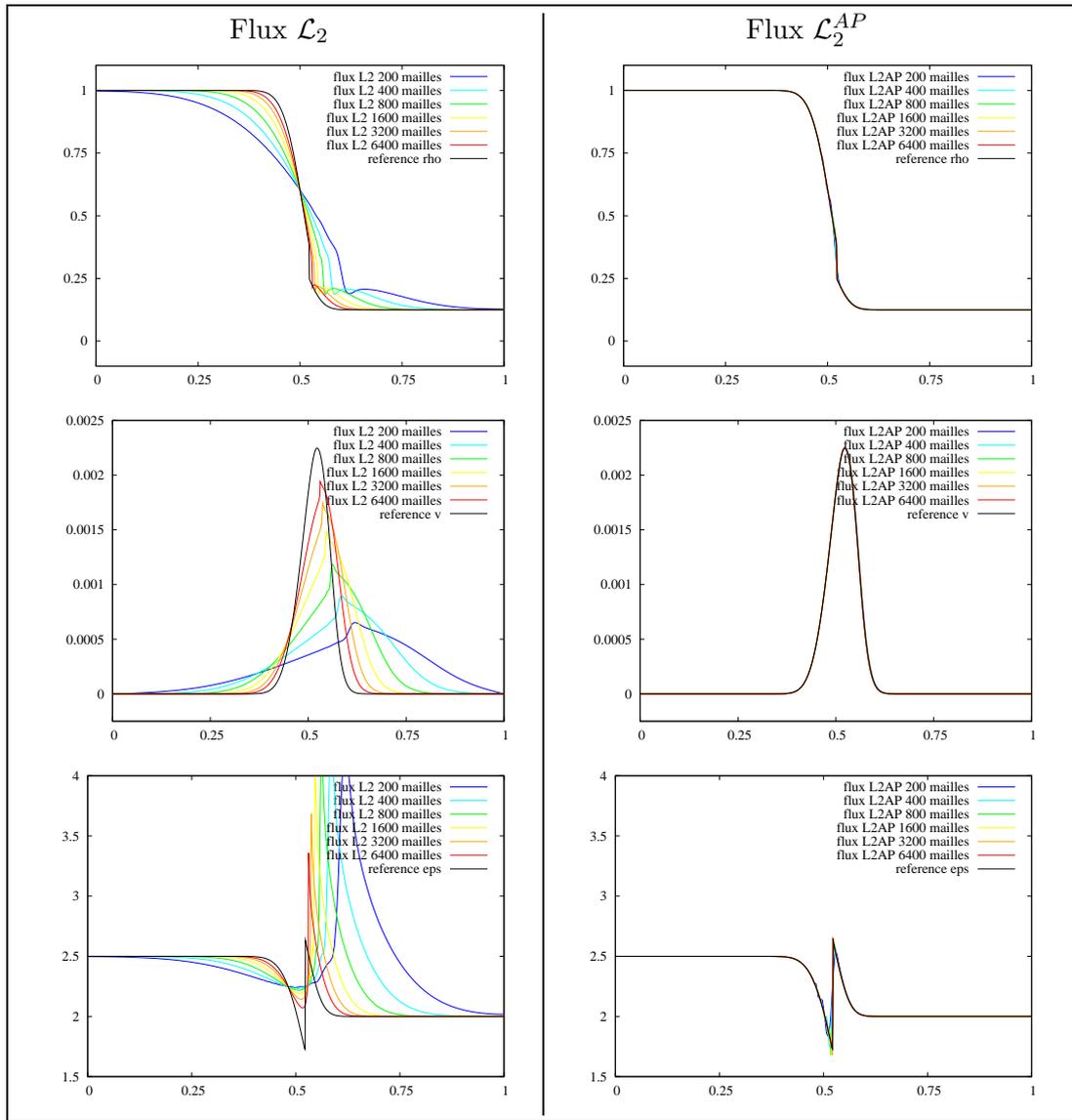


FIG. 3.10 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (colonne de gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (colonne de droite) en temps long $t = 5$ avec $\nu = 10^4$. Profils de ρ , v et ϵ .

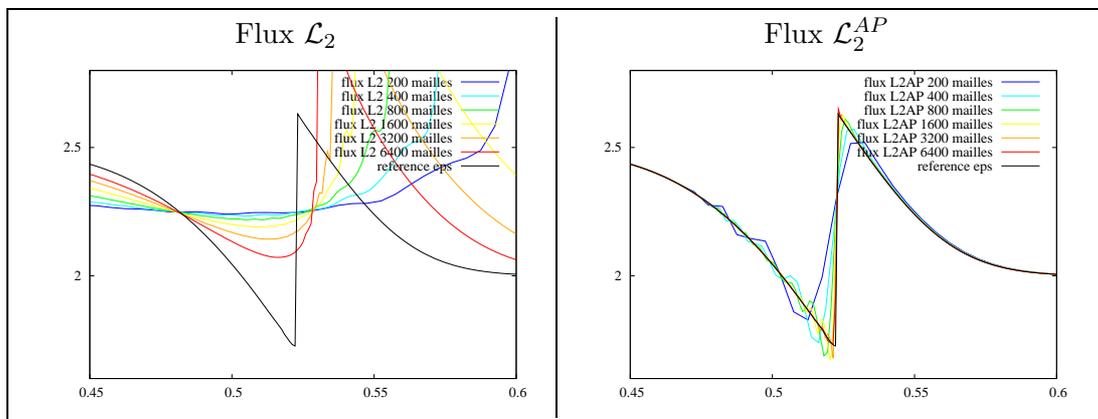


FIG. 3.11 – Idem figure 3.10 ; zoom sur ϵ .

avec l'état $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}$, les flux par direction $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho e u + p u \end{pmatrix}$ et $\mathcal{G}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho e v + p v \end{pmatrix}$ et le terme source $\mathcal{Q}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu \rho u \\ -\nu \rho v \\ -\nu \rho (u^2 + v^2) \end{pmatrix}$. Energies spécifiques interne et totale sont reliées par $\epsilon = e - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$. On introduit les opérateurs :

$$(3.77) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_x : \mathcal{U} \rightarrow \partial_x \mathcal{F}(\mathcal{U}) - \mathcal{Q}_x(\mathcal{U}), \\ \mathcal{D}_y : \mathcal{U} \rightarrow \partial_y \mathcal{G}(\mathcal{U}) - \mathcal{Q}_y(\mathcal{U}), \end{cases}$$

où l'on a noté $\mathcal{Q}_x(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu \rho u \\ 0 \\ -\nu \rho u^2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{Q}_y(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\nu \rho v \\ -\nu \rho v^2 \end{pmatrix}$. Le système (3.76) peut alors

s'écrire :

$$(3.78) \quad \partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0.$$

Pour une itération en temps $t^n \rightarrow t^{n+1}$ donnée, un schéma aux directions alternées pour résoudre (3.76) est :

Etape 1 Commencer par résoudre $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) = 0$ de t^n à t^{n+1} avec la condition initiale U_i^n . On note U_i^1 la solution obtenue.

Etape 2 Résoudre ensuite $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0$ de t^n à t^{n+1} avec la condition initiale U_i^1 . On note U_i^2 la solution obtenue. On ferme le schéma en faisant l'approximation $U_i^{n+1} \simeq U_i^2$.

À ce niveau, on remarque que les systèmes $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) = 0$ et $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0$ sont tous les deux de la forme des équations d'Euler avec friction 1D, avec une équation supplémentaire de type advection, qui est donc triviale en coordonnées lagrangiennes. Par conséquent, on peut appliquer le nouveau schéma Lagrange-projection présenté dans la section précédente pour résoudre chaque système.

Si à chaque itération en temps, l'approche ci-dessus est utilisée, les directions sont traitées dans l'ordre $x - y - x - y - x - \dots$ qui induit une erreur d'ordre 1 en temps. On peut facilement réduire l'erreur commise à l'ordre 2 en temps en utilisant l'enchaînement suivant :

Etape 1 Commencer par résoudre :

- si n est pair : $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) = 0$,
- si n est impair : $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0$,

de t^n à t^{n+1} avec la condition initiale U_i^n . On note U_i^1 la solution obtenue.

Etape 2 Résoudre ensuite :

– si n est pair : $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0$,

– si n est impair : $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) = 0$,

de t^n à t^{n+1} avec la condition initiale U_i^1 . On note U_i^2 la solution obtenue. On ferme le schéma en faisant l'approximation $U_i^{n+1} \simeq U_i^2$.

Si l'on utilise cette dernière approche, les directions sont traitées dans l'ordre $x - y - y - x - x - y - y - \dots$. Lorsque la valeur de Δt est constante au cours du temps, ce schéma correspond à un splitting de Strang (voir [Str68]).

3.3.2 Résultats numériques

On cherche ici à vérifier numériquement que l'utilisation de la méthode des directions alternées en 2D ne modifie pas les conclusions que l'on a tirées des résultats numériques obtenus en 1D. Pour cela, on considère la condition initiale de tube à choc 2D :

$$(3.79) \quad x, y \in]0; 1[, \quad \left. \begin{array}{l} \rho(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < 0.5, \\ 0.125 & \text{si } \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} > 0.5, \end{cases} \\ v(x, y, 0) = 0, \\ p(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < 0.5, \\ 0.1 & \text{si } \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} > 0.5. \end{cases} \end{array} \right\}$$

Comme dans le cas 1D, l'équation d'état utilisée est celle du gaz parfait $p = (\gamma - 1) \rho \epsilon$, avec un coefficient polytropique $\gamma = 1.4$. On prend des conditions aux limites transitives (Neumann). La grille est composée de 100 mailles par direction, et on fixe le nombre CFL à 0.75. Comme dans le cas 1D, la restriction imposée au pas de temps est une condition CFL classique (3.21) qui ne dépend pas de ν . Les figures 3.12, 3.13, 3.14 et 3.15 représentent les profils de densité obtenus à l'instant $t = 0.14$ avec les flux \mathcal{L}_2 (à gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (à droite) pour des valeurs respectives de $\nu = 0, 10, 10^2$ et 10^7 . On vérifie que les profils obtenus sont bien des extensions 2D isotropes des profils obtenus en 1D (voir figures 3.1, 3.3, 3.4 et 3.9). En particulier, en considérant la figure 3.15, on voit que le nouveau schéma avec flux \mathcal{L}_2^{AP} est bien asymptotic-preserving en 2D.

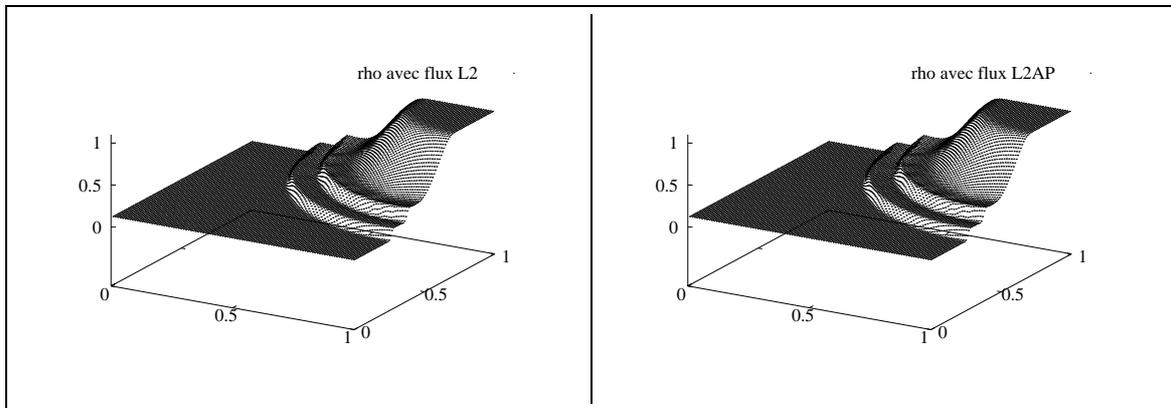


FIG. 3.12 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (à gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (à droite) ; profils de ρ pour $\nu = 0$.

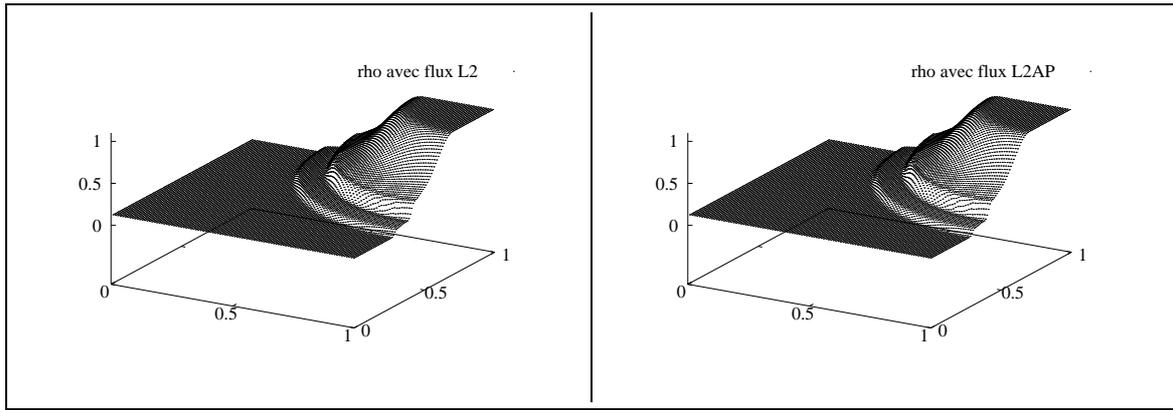


FIG. 3.13 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (à gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (à droite); profils de ρ pour $\nu = 10$.

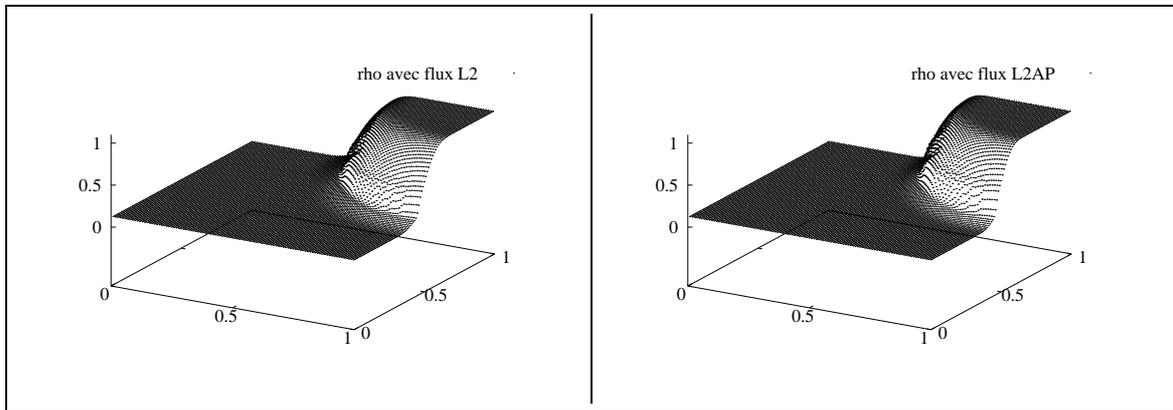


FIG. 3.14 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (à gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (à droite); profils de ρ pour $\nu = 10^2$.

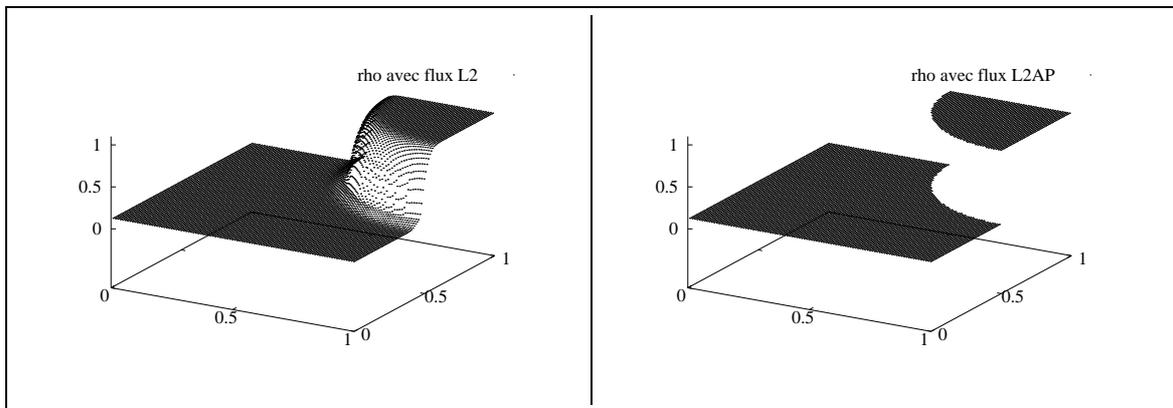


FIG. 3.15 – Comparaison des flux \mathcal{L}_2 (à gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (à droite); profils de ρ pour $\nu = 10^7$.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé un nouveau schéma de type Lagrange-projection pour la résolution numérique des équations d'Euler avec friction, c'est-à-dire avec un terme source de relaxation de la vitesse. Lorsque le coefficient de relaxation est nul, on a vérifié que le nouveau schéma se réduit au schéma Lagrange-projection classique décrit en annexe. Dans le cas raide, on a montré formellement que le nouveau schéma est asymptotic-preserving sur maillage grossier, contrairement à un schéma Lagrange-projection classique avec terme source centré. La propriété AP a été obtenue grâce à l'utilisation d'un nouveau flux acoustique, construit à partir des équations caractéristiques dans lesquelles apparait le terme source. La technique d'obtention de ce flux ne dépend pas de l'équation d'état. Par ailleurs, on a exprimé le nouveau schéma sous la forme d'un schéma USI, ce qui a permis de vérifier la consistence avec le système continu considéré. Concernant la stabilité du nouveau schéma, on a montré que le schéma vérifie une inégalité d'entropie discrète, puis on a proposé une restriction sur le pas de temps qui garantit que le schéma est entropique. Cependant, le critère en question est implicite, et ne peut donc qu'être vérifié numériquement au cours de la simulation. L'approfondissement de ce point fait partie de nos perspectives de travail. En pratique, on préfère utiliser une condition CFL classique qui ne dépend pas du terme source, car on a observé que pour toutes les conditions initiales considérées, le critère d'entropie était vrai sous cette condition simple, quelle que soit la valeur de $\nu \geq 0$. L'extension multidimensionnelle du schéma a été effectuée avec la méthode des directions alternées par splitting de Strang. On a obtenu un schéma global AP en 2D, car le schéma utilisé lors du traitement de chaque direction est AP. Finalement, les résultats numériques présentés ont permis de mettre en évidence l'apport du nouveau schéma sur maillage grossier, ainsi que sa robustesse pour de très grandes valeurs du coefficient de relaxation.

Chapitre 4

Résolution numérique du modèle de Scannapieco-Cheng

Ce chapitre est dédié à la construction et l'analyse d'un schéma volumes finis pour la résolution numérique des modèles multifluides de Scannapieco-Cheng barotrope et complet pour lesquels les aspects de modélisation ont été présentés au chapitre 1 et l'analyse mathématique a été menée au chapitre 2. Dans le chapitre 3, on a construit un nouveau schéma de type Lagrange-projection pour résoudre numériquement les équations d'Euler avec friction. Le choix de ce système a été motivé par le fait qu'il appartient, comme les modèles multifluides que l'on cherche à résoudre, à la classe des systèmes hyperboliques de lois de conservation avec un terme source de relaxation. On rappelle qu'une difficulté lors de la résolution numérique de tels systèmes est de capturer le régime asymptotique de diffusion lorsque le terme source est raide sur maillage grossier (voir définition 0.1). Un schéma numérique capturant de tels régimes est qualifié d'asymptotic-preserving (AP, voir définition 0.2). On a montré que le nouveau schéma étudié au chapitre 3 est AP pour le système des équations d'Euler avec friction. Cette propriété a été obtenue suite à la construction d'un nouveau flux prenant en compte la présence du terme source. Le mode de construction de ce flux, basé sur l'intégration des équations caractéristiques avec terme source, peut être facilement appliqué à d'autres systèmes plus compliqués, et va donc être utilisé dans ce qui suit pour construire un schéma AP pour la résolution des modèles multifluides considérés.

On rappelle que les modèles de Scannapieco-Cheng barotrope et complet sont respectivement donnés par :

– le système de $2 + 2d$ équations :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^\alpha + \partial_{x_j} (\rho^\alpha v_j^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v_i^\alpha) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha v_i^\alpha v_j^\alpha + p^\alpha \delta_{ij}) = -\nu \rho f(c) \delta v_i, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_{x_j} (\rho^\beta v_j^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v_i^\beta) + \partial_{x_j} (\rho^\beta v_i^\beta v_j^\beta + p^\beta \delta_{ij}) = \nu \rho f(c) \delta v_i, \end{array} \right.$$

fermé par des équations d'état de la forme $p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha)$ et $p^\beta = p^\beta(\rho^\beta)$.

– le système de $4 + 2d$ équations :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^\alpha + \partial_{x_j} (\rho^\alpha v_j^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v_i^\alpha) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha v_i^\alpha v_j^\alpha + p^\alpha \delta_{ij}) = -\nu \rho f(c) \delta v_i, \\ \partial_t (\rho^\alpha e^\alpha) + \partial_{x_j} (\rho^\alpha e^\alpha v_j^\alpha + p^\alpha v_j^\alpha) = -\nu \rho f(c) v_j \delta v_j, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_{x_j} (\rho^\beta v_j^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v_i^\beta) + \partial_{x_j} (\rho^\beta v_i^\beta v_j^\beta + p^\beta \delta_{ij}) = \nu \rho f(c) \delta v_i, \\ \partial_t (\rho^\beta e^\beta) + \partial_{x_j} (\rho^\beta e^\beta v_j^\beta + p^\beta v_j^\beta) = \nu \rho f(c) v_j \delta v_j, \end{array} \right.$$

fermé par des équations d'état de la forme $p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha, \epsilon^\alpha)$ et $p^\beta = p^\beta(\rho^\beta, \epsilon^\beta)$, où $\epsilon^\alpha = e^\alpha - \frac{1}{2} v_j^\alpha v_j^\alpha$ et $\epsilon^\beta = e^\beta - \frac{1}{2} v_j^\beta v_j^\beta$.

Les quantités dans le membre de droite sont reliées aux variables dépendantes par :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho^\alpha + \rho^\beta, \\ c = \frac{\rho^\alpha}{\rho^\alpha + \rho^\beta}, \\ \delta v = v^\alpha - v^\beta, \\ v = \frac{\rho^\alpha v^\alpha + \rho^\beta v^\beta}{\rho^\alpha + \rho^\beta}. \end{array} \right.$$

$f(c)$ est une fonction à valeurs strictement positives supposée connue. Enfin, ν est considéré comme un paramètre positif ou nul donné. On rappelle qu'en combinant les relations (4.3), on trouve notamment que :

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^\alpha = v + (1 - c) \cdot \delta v, \\ v^\beta = v - c \cdot \delta v. \end{array} \right.$$

La structure du membre de gauche des systèmes (4.1) et (4.2) est de type dynamique d'un gaz pour chaque fluide α et β . Il est donc possible d'utiliser une approche bi-Lagrange-projection pour leur résolution numérique. Le terme bi-Lagrange, déjà utilisé dans [Cou01] par exemple, exprime le fait que deux grilles lagrangiennes mobiles sont utilisées, chacune se déplaçant à la vitesse du fluide décrit. Sur l'exemple du système complet (4.2) en 1D, le déroulement d'un schéma bi-Lagrange-projection au cours d'une itération en temps $t^n \rightarrow t^{n+1}$ peut être résumé ainsi :

Phase bi-lagrangienne On commence par résoudre en variable de masse m^s le sous-système (de type dynamique d'un gaz avec terme source) associé au fluide s sur l'intervalle $]t^n; t^{n+1}[$ pour chaque fluide $s = \alpha, \beta$. On passe alors des valeurs moyennes initiales $(\tau^s)_i^s$, $(v^s)_i^s$ et $(e^s)_i^s$ aux valeurs moyennes lagrangiennes $\overline{(\tau^s)_i}^{n+1}$, $\overline{(v^s)_i}^{n+1}$ et $\overline{(e^s)_i}^{n+1}$. Ce point est discuté en détail plus loin. Au cours de cette phase, chaque maillage virtuel sur

lequel sont données les quantités $\overline{(\tau^s)}_i^{n+1}$, $\overline{(v^s)}_i^{n+1}$ et $\overline{(e^s)}_i^{n+1}$ se déplace par rapport à la grille eulérienne fixe, selon la relation :

$$(4.5) \quad (x^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t \cdot (v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}},$$

pour $s = \alpha, \beta$, de sorte que la positivité des mailles virtuelles $(\Delta x^s)_i^{n+1} = (x^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - (x^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$ est garantie par la condition suffisante :

$$(4.6) \quad \Delta t \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{\max \left(\max \left(\left| (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| \right)_{\forall i}, \max \left(\left| (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| \right)_{\forall i} \right)}.$$

Phase de projection La phase de projection permet de revenir à un système de coordonnées eulériennes identiques, ce qui permet de décrire les deux fluides comme un mélange. Comme la phase de projection n'est pas modifiée par la présence d'un terme source (voir construction de la projection en annexe D), l'extension de la phase de projection classique (3.11) à un problème à deux fluides est triviale. Le schéma de projection s'écrit, pour $\phi = 1, v, e$ et $s = \alpha, \beta$:

$$(4.7) \quad (\rho^s \phi^s)_i^{n+1} = (\rho^s)_i^n \overline{(\phi^s)}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^s \phi^s)_{i+\frac{1}{2}}^P - (v^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^s \phi^s)_{i-\frac{1}{2}}^P \right),$$

où le flux de projection $(\rho^s \phi^s)_{i+\frac{1}{2}}^P$ est donné par le schéma d'ordre 3 (3.23) avec son limiteur TVD décrit en annexe D.

Pour le système barotrope (4.1) en 1D, l'approche est la même et il suffit de retirer les variables e^α et e^β .

La description ci-dessus montre que seule la phase bi-lagrangienne doit encore être étudiée en détail pour chaque système (4.1) et (4.2) en 1D. Ces points constituent respectivement les objets des première et deuxième sections de ce chapitre. Dans la troisième et dernière section, on propose une extension multidimensionnelle des schémas par directions alternées.

4.1 Schéma bi-Lagrange-projection pour le modèle de Scannapieco-Cheng 1D barotrope

Cette section est dédiée à la construction et l'analyse d'un schéma pour la phase bi-lagrangienne intervenant lors de la résolution numérique du modèle multifluide (4.1) dans sa version 1D :

$$(4.8) \quad \begin{cases} \partial_t \rho^\alpha + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha v^\alpha + p^\alpha) = -\nu \rho f(c) \delta v, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_x (\rho^\beta v^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v^\beta) + \partial_x (\rho^\beta v^\beta v^\beta + p^\beta) = \nu \rho f(c) \delta v. \end{cases}$$

L'analyse asymptotique de ce système a été effectuée au chapitre 2. Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on rappelle le résultat :

$$(4.9) \quad \delta v = -\frac{1}{\nu} \frac{c(1-c)}{f(c)} \left(\frac{1}{\rho^\alpha} \partial_x p^\alpha - \frac{1}{\rho^\beta} \partial_x p^\beta \right) + \mathcal{O}(\nu^{-2}),$$

dont on va se servir plus loin pour montrer que le schéma proposé est AP. On revient maintenant au cas général $\nu \geq 0$. Le mouvement de chaque fluide $s = \alpha, \beta$ peut être décrit par sa propre variable de masse m^s (voir annexe C). Le système ci-dessus prend alors la forme :

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \partial_t \tau^\alpha - \partial_{m^\alpha} v^\alpha = 0, \\ \partial_t v^\alpha + \partial_{m^\alpha} p^\alpha = -\nu \frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta), \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} \partial_t \tau^\beta - \partial_{m^\beta} v^\beta = 0, \\ \partial_t v^\beta + \partial_{m^\beta} p^\beta = \nu \frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

L'intégration en temps et en masse des équations (4.10) associées à chaque fluide s respectivement sur le volume de contrôle $]t^n; t^{n+1}[\times]m_{i-\frac{1}{2}}^s; m_{i+\frac{1}{2}}^s[$ conduit au schéma volumes finis :

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \overline{(\tau^\alpha)}_i^{n+1} = (\tau^\alpha)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} = (v^\alpha)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \left((p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \nu \Delta t \cdot \left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} \overline{(\tau^\beta)}_i^{n+1} = (\tau^\beta)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \left((v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} = (v^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \left((p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \nu \Delta t \cdot \left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où $\Delta m_i^\alpha = (\rho^\alpha)_i^n \Delta x$ et $\Delta m_i^\beta = (\rho^\beta)_i^n \Delta x$. Le schéma ci-dessus correspond à une phase *bi-lagrangienne*, dans la mesure où les quantités $\overline{(\tau^\alpha)}_i^{n+1}$, $\overline{(v^\alpha)}_i^{n+1}$ et $\overline{(\tau^\beta)}_i^{n+1}$, $\overline{(v^\beta)}_i^{n+1}$ sont données sur deux maillages différents en général.

Pour compléter ce schéma numérique, il faut choisir une discrétisation pour les deux flux numériques lagrangiens (termes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$), ainsi que pour le terme source numérique (termes $\left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}}$ et $\left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}}$). Cela constitue l'objet des paragraphes suivants.

4.1.1 Discrétisation du flux

Dans ce qui suit, on construit un flux acoustique prenant en compte la présence du terme source, selon la technique utilisée dans le chapitre 3. On commence donc par écrire les équations caractéristiques, dans lesquelles le terme source apparaît. L'intégration des caractéristiques conduit à un système comportant des intégrales que l'on approche par des quadratures simples. On obtient alors un système linéaire bien posé dont la solution fournit une classe de flux numériques menant à un schéma AP pour les variables τ^α et τ^β .

En utilisant les équations (4.10), on peut écrire pour les solutions régulières :

$$(4.12) \quad \begin{cases} \partial_t p^\alpha + (\pm \rho^\alpha a^\alpha)^2 \partial_{m^\alpha} v^\alpha = 0, \\ \partial_t p^\beta + (\pm \rho^\beta a^\beta)^2 \partial_{m^\beta} v^\beta = 0, \end{cases}$$

où l'on a introduit la vitesse du son associée à chaque fluide $s = \alpha, \beta$:

$$(4.13) \quad a^s = \sqrt{\frac{dp^s}{d\rho^s}}.$$

En combinant les équations (4.10) et (4.12), on trouve que, pour des solutions régulières :

$$(4.14) \quad \begin{cases} [\partial_t \pm (\rho^\alpha a^\alpha) \cdot \partial_{m^\alpha}] p^\alpha \pm (\rho^\alpha a^\alpha) \cdot [\partial_t \pm (\rho^\alpha a^\alpha) \cdot \partial_{m^\alpha}] v^\alpha = \mp (\rho^\alpha a^\alpha) \cdot \nu \frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta), \\ [\partial_t \pm (\rho^\beta a^\beta) \cdot \partial_{m^\alpha}] p^\beta \pm (\rho^\beta a^\beta) \cdot [\partial_t \pm (\rho^\beta a^\beta) \cdot \partial_{m^\alpha}] v^\beta = \pm (\rho^\beta a^\beta) \cdot \nu \frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta). \end{cases}$$

On a par conséquent :

$$(4.15) \quad \begin{cases} dp^\alpha \pm (\rho^\alpha a^\alpha) \cdot dv^\alpha = -\nu \frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\alpha \\ \quad \text{le long de la caractéristique telle que } dm^\alpha = \pm (\rho^\alpha a^\alpha) \cdot dt, \\ dp^\beta \pm (\rho^\beta a^\beta) \cdot dv^\beta = \nu \frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\beta \\ \quad \text{le long de la caractéristique telle que } dm^\beta = \pm (\rho^\beta a^\beta) \cdot dt. \end{cases}$$

On voit que le terme source apparait dans les équations caractéristiques, qui constituent le point de départ de la construction d'un flux numérique acoustique.

L'intégration en masse m^s des caractéristiques (4.15) associées à chaque fluide s mène aux relations intégrales :

$$(4.16) \quad \begin{cases} (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\alpha)_i^n + \int_{m_i^\alpha}^{m_{i+\frac{1}{2}}^\alpha} (\rho^\alpha a^\alpha) \frac{dv^\alpha}{dm^\alpha} dm^\alpha = -\nu \int_{m_i^\alpha}^{m_{i+\frac{1}{2}}^\alpha} \frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\alpha, \\ (p^\alpha)_{i+1}^n - (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \int_{m_{i+\frac{1}{2}}^\alpha}^{m_{i+1}^\alpha} (\rho^\alpha a^\alpha) \frac{dv^\alpha}{dm^\alpha} dm^\alpha = -\nu \int_{m_{i+\frac{1}{2}}^\alpha}^{m_{i+1}^\alpha} \frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\alpha, \\ (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\beta)_i^n + \int_{m_i^\beta}^{m_{i+\frac{1}{2}}^\beta} (\rho^\beta a^\beta) \frac{dv^\beta}{dm^\beta} dm^\beta = \nu \int_{m_i^\beta}^{m_{i+\frac{1}{2}}^\beta} \frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\beta, \\ (p^\beta)_{i+1}^n - (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \int_{m_{i+\frac{1}{2}}^\beta}^{m_{i+1}^\beta} (\rho^\beta a^\beta) \frac{dv^\beta}{dm^\beta} dm^\beta = \nu \int_{m_{i+\frac{1}{2}}^\beta}^{m_{i+1}^\beta} \frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\beta. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant d'approcher les intégrales ci-dessus par des quadratures telles que le système résultant soit bien posé et mène à un flux AP pour τ^α et τ^β . Pour les intégrales du membre de

gauche, on choisit de rester dans l'approximation acoustique, en posant, pour $s = \alpha, \beta$:

$$(4.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{m_i^s}^{m_{i+\frac{1}{2}}^s} (\rho^s a^s) \frac{dv^s}{dm^s} dm^s \simeq A_g^s \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^s)_i^n \right), \\ \int_{m_{i+\frac{1}{2}}^s}^{m_{i+1}^s} (\rho^s a^s) \frac{dv^s}{dm^s} dm^s \simeq A_d^s \left((v^s)_{i+1}^n - (v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{array} \right.$$

où A_g^s et A_d^s sont des discrétisations de $(\rho^s a^s)$ respectivement sur les intervalles $\left] m_i^s; m_{i+\frac{1}{2}}^s \right[$ et $\left] m_{i+\frac{1}{2}}^s; m_{i+1}^s \right[$. Pour les intégrales du membre de droite, on choisit la quadrature à un point :

$$(4.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu \int_{m_i^\alpha}^{m_{i+\frac{1}{2}}^\alpha} \frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\alpha \simeq B_g^\alpha \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \nu \int_{m_{i+\frac{1}{2}}^\alpha}^{m_{i+1}^\alpha} \frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\alpha \simeq B_d^\alpha \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \nu \int_{m_i^\beta}^{m_{i+\frac{1}{2}}^\beta} \frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\beta \simeq B_g^\beta \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \nu \int_{m_{i+\frac{1}{2}}^\beta}^{m_{i+1}^\beta} \frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) dm^\beta \simeq B_d^\beta \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{array} \right.$$

où B_g^s et B_d^s sont des discrétisations de $\nu f(c) \frac{\Delta m}{2}$ respectivement sur les intervalles $\left] m_i^s; m_{i+\frac{1}{2}}^s \right[$ et $\left] m_{i+\frac{1}{2}}^s; m_{i+1}^s \right[$. On a noté $\Delta m = \rho \Delta x$, où $\rho = \rho^\alpha + \rho^\beta$. Comme on l'a déjà expliqué dans le chapitre 3, le choix (4.18) revient à impliciter les termes dans lesquels le coefficient ν apparaît. Cette implication est essentielle pour obtenir un flux de vitesse AP pour τ^α et τ^β . Avant de proposer des discrétisations pour les coefficients A_g^s, A_d^s, B_g^s et B_d^s pour $s = \alpha, \beta$, on étudie le système résultant des approximations ci-dessus.

Proposition 4.1. *Les approximations (4.17) et (4.18) pour le système (4.16) conduisent à un système linéaire en les inconnues $(p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, qui est bien posé si (condition suffisante) :*

$$(4.19) \quad A_g^\alpha, A_d^\alpha, A_g^\beta, A_d^\beta > 0 \quad \text{et} \quad B_g^\alpha, B_d^\alpha, B_g^\beta, B_d^\beta \geq 0.$$

Dans ce cas, la solution unique de ce système est :

$$(4.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\det_M} \left[(A_g^\beta + A_d^\beta) (y_g^\alpha + y_d^\alpha) + (B_g^\beta + B_d^\beta) (y_g^\alpha + y_d^\alpha) + (B_g^\alpha + B_d^\alpha) (y_g^\beta + y_d^\beta) \right], \\ (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\det_M} \left[(A_g^\alpha + A_d^\alpha) (y_g^\beta + y_d^\beta) + (B_g^\alpha + B_d^\alpha) (y_g^\beta + y_d^\beta) + (B_g^\beta + B_d^\beta) (y_g^\alpha + y_d^\alpha) \right], \\ (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[(y_g^\alpha - y_d^\alpha) - (A_g^\alpha - A_d^\alpha) (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (B_g^\alpha - B_d^\alpha) \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right], \\ (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[(y_g^\beta - y_d^\beta) - (A_g^\beta - A_d^\beta) (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (B_g^\beta - B_d^\beta) \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right], \end{array} \right.$$

où l'on a noté :

$$(4.21) \quad \det_M = (A_g^\alpha + A_d^\alpha) (A_g^\beta + A_d^\beta) \left(1 + \frac{B_g^\alpha + B_d^\alpha}{A_g^\alpha + A_d^\alpha} + \frac{B_g^\beta + B_d^\beta}{A_g^\beta + A_d^\beta} \right),$$

et :

$$(4.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_g^\alpha = (p^\alpha)_i^n + A_g^\alpha (v^\alpha)_i^n, \\ y_d^\alpha = -(p^\alpha)_{i+1}^n + A_d^\alpha (v^\alpha)_{i+1}^n, \\ y_g^\beta = (p^\beta)_i^n + A_g^\beta (v^\beta)_i^n, \\ y_d^\beta = -(p^\beta)_{i+1}^n + A_d^\beta (v^\beta)_{i+1}^n. \end{array} \right.$$

Preuve En l'inconnue $x = \left((p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^t$, le système linéaire en question est :

$$(4.23) \quad M \cdot x = y,$$

où l'on a noté :

$$(4.24) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & A_g^\alpha + B_g^\alpha & 0 & -B_g^\alpha \\ -1 & A_d^\alpha + B_d^\alpha & 0 & -B_d^\alpha \\ 0 & -B_g^\beta & 1 & A_g^\beta + B_g^\beta \\ 0 & -B_d^\beta & -1 & A_d^\beta + B_d^\beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} y_g^\alpha \\ y_d^\alpha \\ y_g^\beta \\ y_d^\beta \end{pmatrix}.$$

On trouve que le déterminant de M est donné par (4.21). Lorsque les conditions (4.19) sont réalisées, \det_M est strictement positif, donc le système est bien posé. L'inversion du système est simplifiée si l'on remarque que la somme des lignes de M élimine $(p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$. On trouve alors l'unique solution (4.20). ■

En pratique, la condition (4.19) n'est pas du tout restrictive puisque A_g^s, A_d^s doivent être des discrétisations de $(\rho^s a^s) > 0$ et B_g^s, B_d^s des discrétisations de $\nu f(c) \frac{\Delta m}{2} \geq 0$. On peut donc proposer des discrétisations simples. On introduit les notations naturelles (voir relations (4.3)) :

$$(4.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^n = (\rho^\alpha)_i^n + (\rho^\beta)_i^n, \\ c_i^n = \frac{(\rho^\alpha)_i^n}{(\rho^\alpha)_i^n + (\rho^\beta)_i^n}, \\ \delta v_i^n = (v^\alpha)_i^n - (v^\beta)_i^n, \\ v_i^n = \frac{(\rho^\alpha)_i^n (v^\alpha)_i^n + (\rho^\beta)_i^n (v^\beta)_i^n}{(\rho^\alpha)_i^n + (\rho^\beta)_i^n}. \end{array} \right.$$

Pour chaque fluide s , geler $(\rho^s a^s)$ et $\nu f(c) \frac{\Delta m}{2}$ sur l'interface revient à faire le choix :

$$(4.26) \quad \left| \begin{array}{l} A_g^s = A_d^s = (\rho^s a^s)_{i+\frac{1}{2}}, \\ B_g^s = B_d^s = \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

avec :

$$(4.27) \quad \left| \begin{array}{l} (\rho^s a^s)_{i+\frac{1}{2}} \equiv \frac{(\rho^s a^s)_i^n + (\rho^s a^s)_{i+1}^n}{2}, \\ \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \equiv \frac{\rho_i^n + \rho_{i+1}^n}{2} \Delta x, \\ c_{i+\frac{1}{2}} \equiv \frac{c_i^n + c_{i+1}^n}{2}, \end{array} \right.$$

alors que décentrer $(\rho^s a^s)$ et $\nu f(c) \frac{\Delta m}{2}$ suivant le sens du vent revient à faire le choix :

$$(4.28) \quad \left| \begin{array}{l} A_g^s = (\rho^s a^s)_i^n \quad \text{et} \quad A_d^s = (\rho^s a^s)_{i+1}^n, \\ B_g^s = \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \rho_i^n \Delta x \quad \text{et} \quad B_d^s = \frac{\nu f(c_{i+1}^n)}{2} \rho_{i+1}^n \Delta x. \end{array} \right.$$

En utilisant (4.20), ces deux choix mènent respectivement aux deux flux :

Flux \mathcal{L}_1^{AP} pour le modèle SC barotrope Les composantes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ sont données par (4.20), (4.26) et (4.27).

Flux \mathcal{L}_2^{AP} pour le modèle SC barotrope Les composantes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ sont données par (4.20) et (4.28).

On passe maintenant à l'analyse de ces flux.

Proposition 4.2. *Lorsque $\nu = 0$, les flux \mathcal{L}_1^{AP} et \mathcal{L}_2^{AP} se réduisent respectivement aux flux \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 donnés par :*

Flux \mathcal{L}_1 pour le modèle SC barotrope

$$(4.29) \quad \left| \begin{array}{l} (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(v^\alpha)_i^n + (v^\alpha)_{i+1}^n}{2} + \frac{1}{(\rho^\alpha a^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}} \frac{(p^\alpha)_i^n - (p^\alpha)_{i+1}^n}{2}, \\ (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(v^\beta)_i^n + (v^\beta)_{i+1}^n}{2} + \frac{1}{(\rho^\beta a^\beta)_{i+\frac{1}{2}}} \frac{(p^\beta)_i^n - (p^\beta)_{i+1}^n}{2}, \\ (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(p^\alpha)_i^n + (p^\alpha)_{i+1}^n}{2} + (\rho^\alpha a^\alpha)_{i+\frac{1}{2}} \frac{(v^\alpha)_i^n - (v^\alpha)_{i+1}^n}{2}, \\ (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(p^\beta)_i^n + (p^\beta)_{i+1}^n}{2} + (\rho^\beta a^\beta)_{i+\frac{1}{2}} \frac{(v^\beta)_i^n - (v^\beta)_{i+1}^n}{2}, \end{array} \right.$$

$$\text{avec } (\rho^s a^s)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(\rho^s a^s)_i^n + (\rho^s a^s)_{i+1}^n}{2} \text{ pour } s = \alpha, \beta,$$

Flux \mathcal{L}_2 pour le modèle SC barotrope

$$(4.30) \quad \left\{ \begin{aligned} (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{(p^\alpha)_i^n - (p^\alpha)_{i+1}^n + (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n (v^\alpha)_i^n + (\rho^\alpha a^\alpha)_{i+1}^n (v^\alpha)_{i+1}^n}{(\rho^\alpha a^\alpha)_i^n + (\rho^\alpha a^\alpha)_{i+1}^n}, \\ (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{(p^\beta)_i^n - (p^\beta)_{i+1}^n + (\rho^\beta a^\beta)_i^n (v^\beta)_i^n + (\rho^\beta a^\beta)_{i+1}^n (v^\beta)_{i+1}^n}{(\rho^\beta a^\beta)_i^n + (\rho^\beta a^\beta)_{i+1}^n}, \\ (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{(\rho^\alpha a^\alpha)_{i+1}^n (p^\alpha)_i^n + (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n (p^\alpha)_{i+1}^n + (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n (\rho^\alpha a^\alpha)_{i+1}^n ((v^\alpha)_i^n - (v^\alpha)_{i+1}^n)}{(\rho^\alpha a^\alpha)_i^n + (\rho^\alpha a^\alpha)_{i+1}^n}, \\ (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{(\rho^\beta a^\beta)_{i+1}^n (p^\beta)_i^n + (\rho^\beta a^\beta)_i^n (p^\beta)_{i+1}^n + (\rho^\beta a^\beta)_i^n (\rho^\beta a^\beta)_{i+1}^n ((v^\beta)_i^n - (v^\beta)_{i+1}^n)}{(\rho^\beta a^\beta)_i^n + (\rho^\beta a^\beta)_{i+1}^n}. \end{aligned} \right.$$

Remarque Les flux \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 ci-dessus sont aussi les flux acoustiques que l'on obtient lorsque l'on ne tient pas compte de la présence du terme source dans les équations caractéristiques. Autrement dit, l'utilisation de ces flux lorsque $\nu \neq 0$ correspond à un splitting d'opérateur. •

Preuve Lorsque $\nu = 0$, les coefficients B_g^α , B_d^α , B_g^β et B_d^β apparaissant dans (4.20) sont nuls. Le résultat est alors facilement obtenu. ■

Lemme 4.1. *On considère le système (4.10) et sa formulation volumes finis (4.11) pour une itération n fixée. Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on suppose que l'état discret est tel que :*

$$(4.31) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_i^n &= \mathcal{O}(1), \\ c_i^n &= \mathcal{O}(1), \\ v_i^n &= \mathcal{O}(1), \\ \delta v_i^n &= \mathcal{O}(\nu^{-1}), \end{aligned} \right.$$

avec (4.25). Alors l'utilisation du flux \mathcal{L}_1^{AP} ou \mathcal{L}_2^{AP} conduit à un schéma asymptotic-preserving pour les variables τ^α et τ^β .

Preuve Un résultat similaire a été prouvé dans le cas des équations d'Euler avec friction au chapitre précédent (voir lemme 3.2 et preuve associée). La technique utilisée ici est la même ; les calculs sont reportés dans l'annexe F. ■

4.1.2 Discrétisation du terme source

Dans le paragraphe précédent, on a construit deux versions d'un flux lagrangien dont les composantes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ garantissent que le schéma est AP pour τ^α et τ^β sous l'hypothèse (4.31). Le point essentiel de cette hypothèse est que $\delta v_i^n = \mathcal{O}(\nu^{-1})$, ce qui est le cas si le schéma complet est AP pour v^α et v^β . On va voir que cette propriété est obtenue si l'on

prend pour les composantes du terme source :

$$(4.32) \quad \left| \begin{aligned} \left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{f(c_i^n)}{c_i^n} \left(\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right), \\ \left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{f(c_i^n)}{1-c_i^n} \left(\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right). \end{aligned} \right.$$

Mais d'abord, on commence par énoncer un résultat de conservativité. On rappelle qu'au niveau continu, la masse et l'impulsion du mélange sont des grandeurs conservatives des modèles multifluides considérés, au sens où aucun terme source n'apparaît dans leurs équations.

Proposition 4.3. *Avec la discrétisation (4.32) pour le terme source, le schéma (4.11) avec la projection (4.7) est conservatif pour la masse et l'impulsion du mélange, au sens où :*

$$(4.33) \quad \left| \begin{aligned} \sum_i \left((\rho^\alpha)_i^{n+1} + (\rho^\beta)_i^{n+1} \right) &= \sum_i \left((\rho^\alpha)_i^n + (\rho^\beta)_i^n \right), \\ \sum_i \left((\rho^\alpha v^\alpha)_i^{n+1} + (\rho^\beta v^\beta)_i^{n+1} \right) &= \sum_i \left((\rho^\alpha v^\alpha)_i^n + (\rho^\beta v^\beta)_i^n \right), \end{aligned} \right.$$

aux conditions aux bords près.

Preuve En combinant la phase bi-lagrangienne (4.11) et la phase de projection (4.7), on obtient la forme eulérienne directe du schéma complet :

$$(4.34) \quad \left\{ \begin{aligned} (\rho^\alpha)_i^{n+1} &= (\rho^\alpha)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^P - (v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^P \right), \\ (\rho^\alpha v^\alpha)_i^{n+1} &= (\rho^\alpha v^\alpha)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\alpha v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^P + (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\alpha v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^P - (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \nu \Delta t \cdot (\rho^\alpha)_i^n \left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ (\rho^\beta)_i^{n+1} &= (\rho^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left((v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^P - (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^P \right), \\ (\rho^\beta v^\beta)_i^{n+1} &= (\rho^\beta v^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left((v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\beta v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^P + (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\beta v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^P - (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \nu \Delta t \cdot (\rho^\beta)_i^n \left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

La discrétisation (4.32) annule la contribution du terme source lorsque l'on somme les impulsions des fluides α et β . On obtient alors :

$$(4.35) \quad \left| \begin{aligned} (\rho^\alpha)_i^{n+1} + (\rho^\beta)_i^{n+1} &= (\rho^\alpha)_i^n + (\rho^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \right), \\ (\rho^\alpha v^\alpha)_i^{n+1} + (\rho^\beta v^\beta)_i^{n+1} &= (\rho^\alpha v^\alpha)_i^n + (\rho^\beta v^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(g_{i+\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \right.$$

où l'on a noté :

$$(4.36) \quad \begin{cases} f_{i+\frac{1}{2}} \equiv (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^P + (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^P, \\ g_{i+\frac{1}{2}} \equiv (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\alpha v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^P + (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\beta v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^P + (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Il s'agit bien d'un schéma conservatif. \blacksquare

Lemme 4.2. *On considère le système (4.10) et sa formulation volumes finis (4.11), complétée par le flux \mathcal{L}_1^{AP} , respectivement \mathcal{L}_2^{AP} , et la discrétisation du terme source (4.32). Dans le cas raide $\nu \gg 1$, si l'état discret est tel que (4.31) avec (4.25), alors le schéma est asymptotic-preserving.*

Preuve On a déjà montré que sous les mêmes hypothèses, le schéma est AP pour τ^α et τ^β (voir le lemme 4.1). Il suffit donc de montrer que le schéma est AP pour v^α et v^β . Avec la discrétisation (4.32), les équations discrètes pour v^α et v^β (4.11) deviennent :

$$(4.37) \quad \begin{cases} \left(1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n}\right) \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n} \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} = (v^\alpha)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \left((p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ -\nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{1-c_i^n} \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} + \left(1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{1-c_i^n}\right) \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} = (v^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \left((p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire en les inconnues $\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1}$ et $\overline{(v^\beta)_i}^{n+1}$. Son déterminant vaut $\left(1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n(1-c_i^n)}\right)$, il est strictement positif, donc le système est bien posé. On note par la suite :

$$(4.38) \quad \mu \equiv \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n(1-c_i^n)}.$$

L'unique solution du système (4.37) est :

$$(4.39) \quad \begin{cases} \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} = \frac{1}{1+\mu} \left[(v^\alpha)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \left((p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] + \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \tilde{v}_i, \\ \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} = \frac{1}{1+\mu} \left[(v^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \left((p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] + \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \tilde{v}_i, \end{cases}$$

où l'on a noté :

$$(4.40) \quad \tilde{v}_i \equiv v_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n \Delta x} \left[\left((p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \left((p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right].$$

Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on a aussi $\mu \gg 1$ sur maillage grossier. On vérifie facilement qu'un développement asymptotique de $\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1}$ et $\overline{(v^\beta)_i}^{n+1}$ est alors :

$$(4.41) \quad \begin{cases} \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} = \tilde{v}_i + (1-c_i^n) \cdot \tilde{\delta v}_i + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \\ \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} = \tilde{v}_i - c_i^n \cdot \tilde{\delta v}_i + \mathcal{O}(\nu^{-2}), \end{cases}$$

où l'on a noté :

$$(4.42) \quad \widetilde{\delta v}_i \equiv \frac{\delta v_i^n}{\mu} - \frac{1}{\nu} \frac{c_i^n (1 - c_i^n)}{f(c_i^n)} \left(\frac{1}{(\rho^\alpha)_i^n} \frac{(p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{1}{(\rho^\beta)_i^n} \frac{(p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right).$$

Sous l'hypothèse (4.31), le terme $\frac{\delta v_i^n}{\mu}$ est d'ordre $\mathcal{O}(\nu^{-2})$. Sous cette même hypothèse, on vérifie que les flux de pression $(p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ des flux \mathcal{L}_1^{AP} et \mathcal{L}_2^{AP} sont des discrétisations consistantes avec les pressions partielles p^α et p^β . En comparant (4.41), (4.42) avec le développement asymptotique au niveau continu (4.4), (4.9), on constate que le schéma est AP pour v^α et v^β . ■

4.1.3 Résultats numériques

On procède maintenant à l'évaluation du schéma proposé pour la résolution du modèle multifluide barotrope (4.8), à savoir :

- pour la phase bilagrangienne : (4.11) muni de (4.32). Le flux utilisé est précisé plus loin.
- pour la phase de projection : (4.7) avec le flux de projection \mathcal{P}_3 (3.23) et son limiteur TVD.

Dans le chapitre 2, on a mené l'analyse asymptotique de ce système. On a alors proposé un cas-test pour lequel une solution non triviale est connue. On se propose maintenant de résoudre numériquement ce problème dans le but d'évaluer la précision du schéma proposé dans le régime de diffusion du modèle. La condition initiale considérée est :

$$(4.43) \quad x \in]0; 1[, \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^\alpha(x, 0) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{si } x < 0.5, \\ \epsilon & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \\ v^\alpha(x, 0) = 0, \\ \rho^\beta(x, 0) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } x < 0.5, \\ 1 - \epsilon & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \\ v^\beta(x, 0) = 0, \end{array} \right.$$

où l'on fixe le paramètre ϵ à 10^{-3} pour modéliser une interface entre les deux fluides. On suppose que chaque gaz est un gaz parfait isotherme, représenté par l'équation d'état $p^s = K^s \rho^s$, où $K^s = 1$ pour $s = \alpha, \beta$. Les conditions aux limites sont transitives (Neumann). On se place dans le cas raide, en posant $\nu = 10^3$. En choisissant $f(c) = 1$, on a vu au chapitre 2 que la diffusion de l'interface s'effectue à vitesse finie (voir solution (2.57) et figure 2.1).

On compare les résultats numériques obtenus avec le flux \mathcal{L}_2 (de type splitting) et le nouveau flux \mathcal{L}_2^{AP} . Dans les deux cas, la restriction sur le pas de temps utilisée est une condition CFL classique (voir (3.21)) pour chaque fluide, où l'on fixe le nombre CFL à 0.75. On observe numériquement que sous cette condition simple, les deux schémas sont stables quelle que soit la valeur de $\nu \geq 0$. La figure 4.1 représente les profils obtenus à l'instant $t = 10$ avec différents nombres de mailles. Les résultats obtenus avec le flux \mathcal{L}_2 sont placés à gauche ; ceux obtenus avec

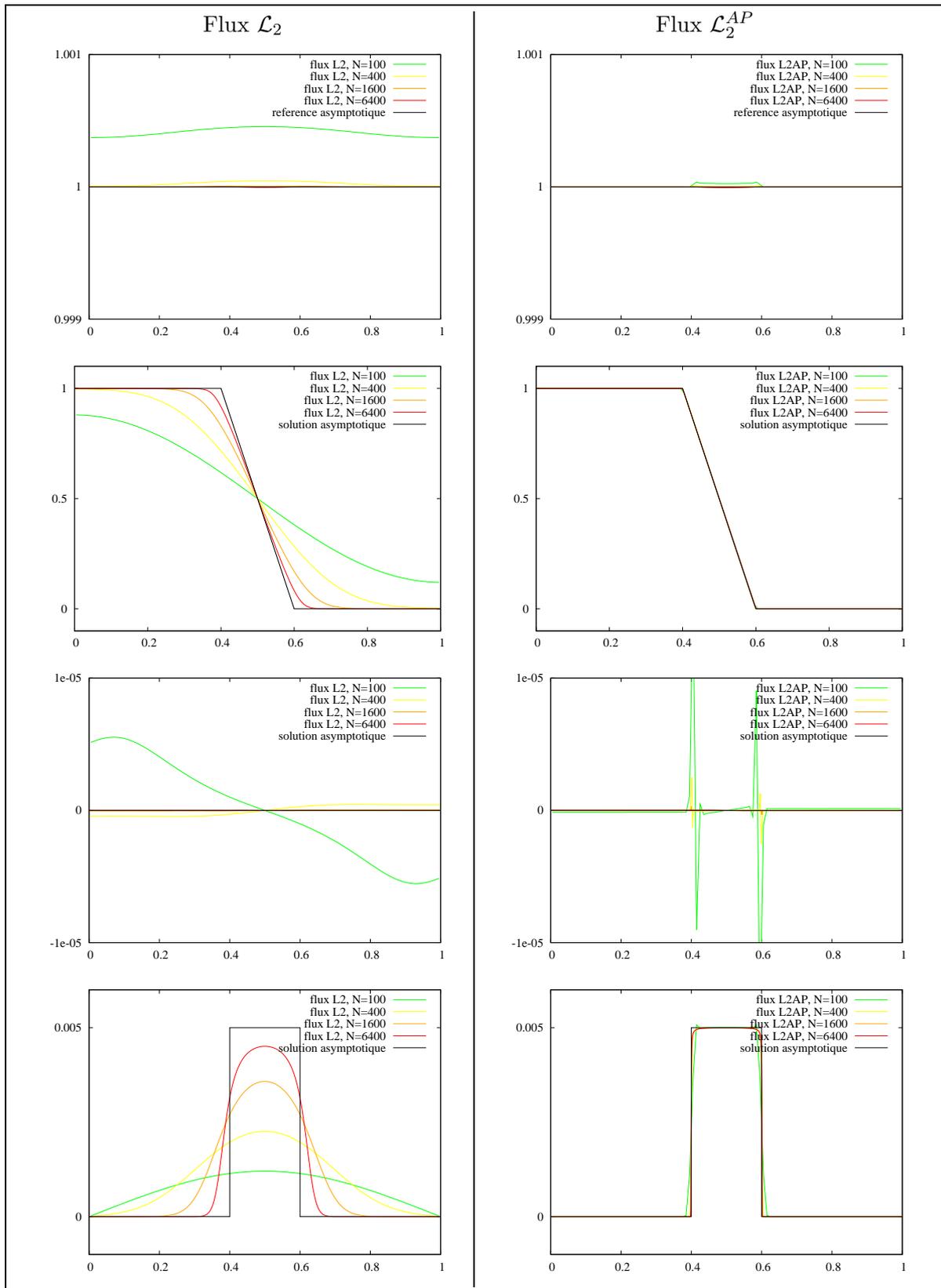


FIG. 4.1 – Comparaison des vitesses de convergence des flux \mathcal{L}_2 (à gauche) et \mathcal{L}_2^{AP} (à droite) pour la condition initiale (4.43). Du haut vers le bas : ρ , c , v et δv . Les profils sont donnés à $t = 10$, avec $\nu = 10^3$. Le nombre CFL est fixé à 0.75.

le flux \mathcal{L}_2^{AP} sont placés à droite. Les quantités représentées sont, du haut vers le bas : la masse volumique du mélange ρ , la fraction massique c du fluide α , la vitesse barycentrique du mélange v et la vitesse relative entre les fluides δv . On observe que les deux schémas convergent vers la même solution, qui coïncide avec la solution de référence proposée analytiquement (voir solution (2.57) et figure 2.1). Par contre, en accord avec les conclusions tirées au chapitre précédent, on voit que le schéma avec flux \mathcal{L}_2 converge très lentement vers la solution dans le cas raide, alors que le nouveau flux \mathcal{L}_2^{AP} restitue les bons profils avec un petit nombre de mailles.

4.2 Schéma bi-Lagrange-projection pour le modèle de Scannapieco-Cheng 1D complet

On propose maintenant une extension du schéma proposé dans la section précédente pour la résolution numérique de la phase bi-lagrangienne associée au modèle multifluide (4.2) dans sa version 1D :

$$(4.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^\alpha + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha) = 0, \\ \partial_t (\rho^\alpha v^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha v^\alpha v^\alpha + p^\alpha) = -\nu \rho f(c) \delta v, \\ \partial_t (\rho^\alpha e^\alpha) + \partial_x (\rho^\alpha e^\alpha v^\alpha + p^\alpha v^\alpha) = -\nu \rho f(c) v \delta v, \\ \partial_t \rho^\beta + \partial_x (\rho^\beta v^\beta) = 0, \\ \partial_t (\rho^\beta v^\beta) + \partial_x (\rho^\beta v^\beta v^\beta + p^\beta) = \nu \rho f(c) \delta v, \\ \partial_t (\rho^\beta e^\beta) + \partial_x (\rho^\beta e^\beta v^\beta + p^\beta v^\beta) = \nu \rho f(c) v \delta v. \end{array} \right.$$

L'analyse asymptotique de ce système a été effectuée au chapitre 2. Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on rappelle que la vitesse relative δv admet le comportement limite (4.9). On revient au cas général $\nu \geq 0$. Le mouvement de chaque fluide $s = \alpha, \beta$ peut être décrit par sa propre variable de masse m^s (voir annexe C). Le système ci-dessus prend alors la forme :

$$(4.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau^\alpha - \partial_{m^\alpha} v^\alpha = 0, \\ \partial_t v^\alpha + \partial_{m^\alpha} p^\alpha = -\nu \frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta), \\ \partial_t e^\alpha + \partial_{m^\alpha} (p^\alpha v^\alpha) = -\nu \frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) v, \\ \partial_t \tau^\beta - \partial_{m^\beta} v^\beta = 0, \\ \partial_t v^\beta + \partial_{m^\beta} p^\beta = \nu \frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta), \\ \partial_t e^\beta + \partial_{m^\beta} (p^\beta v^\beta) = \nu \frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) v. \end{array} \right.$$

L'intégration en temps et en masse des équations associées à chaque fluide s respectivement sur le volume de contrôle $]t^n; t^{n+1}[\times]m_{i-\frac{1}{2}}^s; m_{i+\frac{1}{2}}^s[$ conduit au schéma volumes finis :

$$(4.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{(\tau^\alpha)}_i^{n+1} = (\tau^\alpha)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} = (v^\alpha)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \left((p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \nu \Delta t \cdot \left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ \overline{(e^\alpha)}_i^{n+1} = (e^\alpha)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \left((p^\alpha v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\alpha v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \nu \Delta t \cdot \left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) v \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ \overline{(\tau^\beta)}_i^{n+1} = (\tau^\beta)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \left((v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} = (v^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \left((p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \nu \Delta t \cdot \left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ \overline{(e^\beta)}_i^{n+1} = (e^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \left((p^\beta v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\beta v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \nu \Delta t \cdot \left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) v \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

où $\Delta m_i^\alpha = (\rho^\alpha)_i^n \Delta x$ et $\Delta m_i^\beta = (\rho^\beta)_i^n \Delta x$. En comparant ce schéma avec son équivalent barotrope (4.11), on voit qu'il faut choisir une discrétisation pour les nouveaux termes $(p^\alpha v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(p^\beta v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) v \right)_i^{n+\frac{1}{2}}$ et $\left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) v \right)_i^{n+\frac{1}{2}}$. Cela constitue l'objet des paragraphes suivants.

4.2.1 Discrétisation du flux

Pour les composantes $(v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ ($s = \alpha, \beta$), on choisit d'utiliser le même flux numérique que celui proposé pour le modèle barotrope. Il ne reste donc qu'à choisir une discrétisation pour les composantes $(p^s v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ ($s = \alpha, \beta$). En posant :

$$(4.47) \quad (p^s v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}},$$

on obtient les deux flux :

Flux \mathcal{L}_1^{AP} pour le modèle SC complet Les composantes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ sont données par (4.20), (4.26) et (4.27). Les composantes $(p^\alpha v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(p^\beta v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ sont données par (4.47).

Flux \mathcal{L}_2^{AP} pour le modèle SC complet Les composantes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $(p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ sont données par (4.20) et (4.28). Les composantes $(p^\alpha v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(p^\beta v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ sont données par (4.47).

Le choix (4.47) est motivé par le fait que l'on sait alors trouver une inégalité d'entropie discrète. Avant d'énoncer le résultat, on rappelle (voir chapitre 2) que les entropies des deux fluides vérifient, pour les solutions régulières :

$$(4.48) \quad \left| \begin{array}{l} T^\alpha \frac{dS^\alpha}{dt} = \nu f(c) \frac{1-c}{c} \delta v^2, \\ T^\beta \frac{dS^\beta}{dt} = \nu f(c) \frac{c}{1-c} \delta v^2, \end{array} \right.$$

avec $T^s dS^s = de^s + p^s d\tau^s$ pour $s = \alpha, \beta$.

Proposition 4.4. *Le schéma (4.46) muni du flux \mathcal{L}_1^{AP} ou \mathcal{L}_2^{AP} vérifie les inégalités d'entropie pour chaque fluide :*

$$(4.49) \quad \left| \begin{array}{l} \overline{(T^\alpha)}_i^{n+1} \left(\overline{(S^\alpha)}_i^{n+1} - (S^\alpha)_i^n \right) \geq -\mathcal{A}_i^\alpha - \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i^\alpha - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \mathcal{C}_i^\alpha, \\ \overline{(T^\beta)}_i^{n+1} \left(\overline{(S^\beta)}_i^{n+1} - (S^\beta)_i^n \right) \geq -\mathcal{A}_i^\beta + \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i^\beta - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \mathcal{C}_i^\beta, \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{A}_i^s \leq 0$ et $\mathcal{C}_i^s \geq 0$ pour $s = \alpha, \beta$. Plus précisément, on a noté :

$$(4.50) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_i^s \equiv & \frac{1}{2} \overline{(T^s)}_i^{n+1} \left(\overline{(\tau^s)}_i^{n+1} - (\tau^s)_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S^s}{\partial (\tau^s)^2} \Big|_{v^s, e^s} (U^s) \\ & + \frac{1}{2} \overline{(T^s)}_i^{n+1} \left(\overline{(v^s)}_i^{n+1} - (v^s)_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S^s}{\partial (v^s)^2} \Big|_{\tau^s, e^s} (U^s) \\ & + \frac{1}{2} \overline{(T^s)}_i^{n+1} \left(\overline{(e^s)}_i^{n+1} - (e^s)_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S^s}{\partial (e^s)^2} \Big|_{\tau^s, v^s} (U^s), \end{aligned}$$

pour $s = \alpha, \beta$, où S^s est telle que $T^s dS^s = de^s + p^s d\tau^s$ et $U^s = (\tau^s, v^s, e^s)^t$ un état situé entre $((\tau^s)_i^n, (v^s)_i^n, (e^s)_i^n)^t$ et $(\overline{(\tau^s)}_i^{n+1}, \overline{(v^s)}_i^{n+1}, \overline{(e^s)}_i^{n+1})^t$, et :

$$(4.51) \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{B}_i^\alpha \equiv \left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) v \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}} \cdot \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1}, \\ \mathcal{B}_i^\beta \equiv \left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) v \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}} \cdot \overline{(v^\beta)}_i^{n+1}. \end{array} \right.$$

Avec le flux \mathcal{L}_1^{AP} , \mathcal{C}_i^s est donné par :

$$(4.52) \quad \mathcal{C}_i^s = \frac{\left(N_{i-\frac{1}{2}}^s \right)^2}{2(\rho^s a^s)_{i-\frac{1}{2}} + \nu f(c_{i-\frac{1}{2}}) \Delta m_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{\left(N_{i+\frac{1}{2}}^s \right)^2}{2(\rho^s a^s)_{i+\frac{1}{2}} + \nu f(c_{i+\frac{1}{2}}) \Delta m_{i+\frac{1}{2}}},$$

où :

$$\begin{aligned}
(4.53) \quad \left\{ \begin{aligned}
N_{i+\frac{1}{2}}^\alpha &= (p^\alpha)_i^n - \overline{(p^\alpha)_i}^{n+1} + (\rho^\alpha a^\alpha)_{i+\frac{1}{2}} \left((v^\alpha)_i^n - \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} \right) \\
&\quad - \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \left(\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
N_{i-\frac{1}{2}}^\alpha &= (p^\alpha)_i^n - \overline{(p^\alpha)_i}^{n+1} - (\rho^\alpha a^\alpha)_{i-\frac{1}{2}} \left((v^\alpha)_i^n - \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} \right) \\
&\quad + \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} \left(\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
N_{i+\frac{1}{2}}^\beta &= (p^\beta)_i^n - \overline{(p^\beta)_i}^{n+1} + (\rho^\beta a^\beta)_{i+\frac{1}{2}} \left((v^\beta)_i^n - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right) \\
&\quad + \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right), \\
N_{i-\frac{1}{2}}^\beta &= (p^\beta)_i^n - \overline{(p^\beta)_i}^{n+1} - (\rho^\beta a^\beta)_{i-\frac{1}{2}} \left((v^\beta)_i^n - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right) \\
&\quad - \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} \left((v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right).
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Avec le flux \mathcal{L}_2^{AP} , C_i^s est donné par :

$$(4.54) \quad C_i^s = \frac{\left(N_{i-\frac{1}{2}}^s\right)^2 + \left(N_{i+\frac{1}{2}}^s\right)^2}{2(\rho^s a^s)_i^n + \nu f(c_i^n) \Delta m_i^n},$$

où :

$$\begin{aligned}
(4.55) \quad \left\{ \begin{aligned}
N_{i+\frac{1}{2}}^\alpha &= (p^\alpha)_i^n - \overline{(p^\alpha)_i}^{n+1} + (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n \left((v^\alpha)_i^n - \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} \right) \\
&\quad - \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \left(\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
N_{i-\frac{1}{2}}^\alpha &= (p^\alpha)_i^n - \overline{(p^\alpha)_i}^{n+1} - (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n \left((v^\alpha)_i^n - \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} \right) \\
&\quad + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \left(\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
N_{i+\frac{1}{2}}^\beta &= (p^\beta)_i^n - \overline{(p^\beta)_i}^{n+1} + (\rho^\beta a^\beta)_i^n \left((v^\beta)_i^n - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right) \\
&\quad + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right), \\
N_{i-\frac{1}{2}}^\beta &= (p^\beta)_i^n - \overline{(p^\beta)_i}^{n+1} - (\rho^\beta a^\beta)_i^n \left((v^\beta)_i^n - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right) \\
&\quad - \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \left((v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} \right).
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Preuve La démarche est similaire à celle utilisée dans l'annexe E pour trouver une inégalité d'entropie pour les équations d'Euler avec un terme source. Le détail du calcul est donné dans l'annexe G. ■

L'analyse des inégalités (4.49) est effectuée dans le paragraphe suivant.

4.2.2 Discrétisation du terme source

Pour les composantes $\left(\frac{f(c)}{c}(v^\alpha - v^\beta)\right)_i^{n+\frac{1}{2}}$ et $\left(\frac{f(c)}{1-c}(v^\alpha - v^\beta)\right)_i^{n+\frac{1}{2}}$ du terme source, on choisit d'utiliser l'implicitation (4.32) proposée pour le système barotrope. Il ne reste donc qu'à choisir une discrétisation pour les termes $\left(\frac{f(c)}{c}(v^\alpha - v^\beta)v\right)_i^{n+\frac{1}{2}}$ et $\left(\frac{f(c)}{1-c}(v^\alpha - v^\beta)v\right)_i^{n+\frac{1}{2}}$. En posant :

$$(4.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{f(c)}{c}(v^\alpha - v^\beta)v\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{f(c_i^n)}{c_i^n} \left(\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1}\right) \tilde{v}_i, \\ \left(\frac{f(c)}{1-c}(v^\alpha - v^\beta)v\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{f(c_i^n)}{1-c_i^n} \left(\overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1}\right) \tilde{v}_i, \end{array} \right.$$

avec \tilde{v}_i donné par (4.40), on obtient d'une part un schéma conservatif pour l'énergie totale du mélange, d'autre part une restriction sur le pas de temps qui garantit que le schéma est entropique. Dans ce qui suit, on présente plus précisément ces résultats.

On rappelle qu'au niveau continu, l'énergie totale du mélange est une grandeur conservative du modèle multifluide considéré, au sens où aucun terme source n'apparaît dans son équation.

Proposition 4.5. *Avec la discrétisation (4.56) pour le terme source, le schéma (4.46) avec la projection (4.7) est conservatif pour l'énergie totale du mélange, au sens où :*

$$(4.57) \quad \sum_i \left((\rho^\alpha e^\alpha)_i^{n+1} + (\rho^\beta e^\beta)_i^{n+1} \right) = \sum_i \left((\rho^\alpha e^\alpha)_i^n + (\rho^\beta e^\beta)_i^n \right),$$

aux conditions aux bords près.

Preuve En combinant la phase bi-lagrangienne (4.46) et la phase de projection (4.7), on obtient la forme eulérienne directe du schéma complet. Cette procédure a déjà été effectuée pour le système barotrope (voir système (4.34)). On ne présente alors que les équations pour les énergies des fluides :

$$(4.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rho^\alpha e^\alpha)_i^{n+1} = (\rho^\alpha e^\alpha)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\alpha e^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^P + (p^\alpha v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\alpha e^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^P - (p^\alpha v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \quad - \nu \Delta t \cdot (\rho^\alpha)_i^n \left(\frac{f(c)}{c}(v^\alpha - v^\beta)v \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ (\rho^\beta e^\beta)_i^{n+1} = (\rho^\beta e^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left((v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\beta e^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^P + (p^\beta v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\beta e^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^P - (p^\beta v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \quad + \nu \Delta t \cdot (\rho^\beta)_i^n \left(\frac{f(c)}{1-c}(v^\alpha - v^\beta)v \right)_i^{n+\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

La discrétisation (4.56) annule la contribution du terme source lorsque l'on somme les énergies des fluides α et β . On obtient alors :

$$(4.59) \quad (\rho^\alpha e^\alpha)_i^{n+1} + (\rho^\beta e^\beta)_i^{n+1} = (\rho^\alpha e^\alpha)_i^n + (\rho^\beta e^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}} \right),$$

où l'on a noté :

$$(4.60) \quad h_{i+\frac{1}{2}} \equiv (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\alpha e^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^P + (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (\rho^\beta e^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^P + (p^\alpha v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (p^\beta v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Il s'agit bien d'un schéma conservatif. ■

Proposition 4.6. Avec les discrétisations (4.32), (4.56) où \tilde{v}_i est donné par (4.40), le schéma (4.46) muni du flux \mathcal{L}_1^{AP} , respectivement \mathcal{L}_2^{AP} , est entropique, au sens où :

$$(4.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{(T^\alpha)_i}^{n+1} \frac{\overline{(S^\alpha)_i}^{n+1} - (S^\alpha)_i^n}{\Delta t} \geq \nu f(c_i^n) \frac{1 - c_i^n}{c_i^n} \frac{(\delta v_i^*)^2}{\left(1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n (1 - c_i^n)}\right)^2}, \\ \overline{(T^\beta)_i}^{n+1} \frac{\overline{(S^\beta)_i}^{n+1} - (S^\beta)_i^n}{\Delta t} \geq \nu f(c_i^n) \frac{c_i^n}{1 - c_i^n} \frac{(\delta v_i^*)^2}{\left(1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n (1 - c_i^n)}\right)^2}, \end{array} \right.$$

avec :

$$(4.62) \quad \delta v_i^* = \left[(v^\alpha)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \left((p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] - \left[(v^\beta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \left((p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right],$$

si et seulement si Δt vérifie :

$$(4.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} C_i^\alpha \leq -\mathcal{A}_i^\alpha, \\ \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} C_i^\beta \leq -\mathcal{A}_i^\beta, \end{array} \right.$$

où \mathcal{A}_i^α et \mathcal{A}_i^β sont donnés par (4.50), et C_i^α et C_i^β sont donnés par (4.52), respectivement (4.54).

Remarque Les termes sources apparaissant dans les inégalités (4.61) sont des discrétisations consistantes avec les productions d'entropie au niveau continu (4.48). •

Preuve Avec la discrétisation (4.32), on trouve que :

$$(4.64) \quad \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} = \frac{\delta v_i^*}{1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n (1 - c_i^n)}}.$$

Avec la discrétisation (4.40), on trouve que :

$$(4.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{(v^\alpha)_i}^{n+1} - \tilde{v}_i = (1 - c_i^n) \frac{\delta v_i^*}{1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n (1 - c_i^n)}}, \\ \overline{(v^\beta)_i}^{n+1} - \tilde{v}_i = -c_i^n \frac{\delta v_i^*}{1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n (1 - c_i^n)}}. \end{array} \right.$$

Donc, avec la discrétisation (4.56), les termes \mathcal{B}_i^s (voir équations (4.51)) deviennent :

$$(4.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_i^\alpha = -f(c_i^n) \frac{1 - c_i^n}{c_i^n} \frac{(\delta v_i^*)^2}{\left(1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n (1 - c_i^n)}\right)^2}, \\ \mathcal{B}_i^\beta = f(c_i^n) \frac{c_i^n}{1 - c_i^n} \frac{(\delta v_i^*)^2}{\left(1 + \nu \Delta t \frac{f(c_i^n)}{c_i^n (1 - c_i^n)}\right)^2}. \end{array} \right.$$

Les inégalités (4.49) donnent alors le résultat. ■

L'idéal serait de pouvoir déduire des inégalités (4.63) une restriction explicite sur le pas de temps $\forall \nu \geq 0$ du type condition CFL, mais ce point n'a pas encore abouti. Par contre, on observe numériquement que sous une restriction CFL classique (3.19) pour le mouvement de chaque fluide, le critère (4.63) est vérifié pour toutes les conditions initiales que l'on a considérées.

4.2.3 Résultats numériques

On procède maintenant à l'évaluation du schéma proposé pour la résolution du modèle multifluide complet (4.44), à savoir :

- pour la phase bilagrangienne : (4.46) muni de (4.32) et (4.56). Le flux utilisé est précisé plus loin.
- pour la phase de projection : (4.7) avec le flux de projection \mathcal{P}_3 (3.23) et son limiteur TVD.

On se propose d'étudier l'extension bifluide d'un problème de tube à choc, pour différentes valeurs de la friction ν . La condition initiale considérée est :

$$(4.67) \quad x \in]0; 1[, \quad \left. \begin{array}{l} \rho^\alpha(x, 0) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{si } x < 0.5, \\ \epsilon & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \\ v^\alpha(x, 0) = 0, \\ p^\alpha(x, 0) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{si } x < 0.5, \\ \epsilon & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \\ \rho^\beta(x, 0) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } x < 0.5, \\ 0.125 - \epsilon & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \\ v^\beta(x, 0) = 0, \\ p^\beta(x, 0) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } x < 0.5, \\ 0.1 - \epsilon & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \end{array} \right\}$$

où l'on fixe le paramètre ϵ à 10^{-3} pour modéliser une interface entre les deux fluides. On vérifie facilement que cette condition initiale est telle que, pour le mélange :

$$(4.68) \quad x \in]0; 1[, \quad \left. \begin{array}{l} \rho(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0.5, \\ 0.125 & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \\ v(x, 0) = 0, \\ p(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0.5, \\ 0.1 & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \end{array} \right\}$$

qui est bien la condition initiale de Sod pour un problème à un seul fluide. On suppose que chaque gaz est un gaz parfait représenté par l'équation d'état $p^s = (\gamma^s - 1) \rho^s \epsilon^s$ pour $s = \alpha, \beta$.

Les conditions aux limites sont transitives (Neumann). On prend $f(c) = 1$.

Pour toutes les figures présentées ci-après, le flux utilisé est le flux \mathcal{L}_2^{AP} . La restriction sur le pas de temps utilisée est une condition CFL classique (voir (3.21)) pour chaque fluide, où l'on fixe le nombre CFL à 0.75. On fixe le nombre de mailles à 200. Les solutions de référence sont obtenues numériquement, sur maillage très fin (10^4 mailles). Les profils représentés sont : la densité du mélange ρ (en haut à gauche), la fraction massique c du fluide α (en haut à droite), la vitesse du mélange v (au milieu à gauche), la vitesse relative δv (au milieu à droite), la pression du mélange p (en bas à gauche) et l'énergie interne du mélange ϵ (en bas à droite).

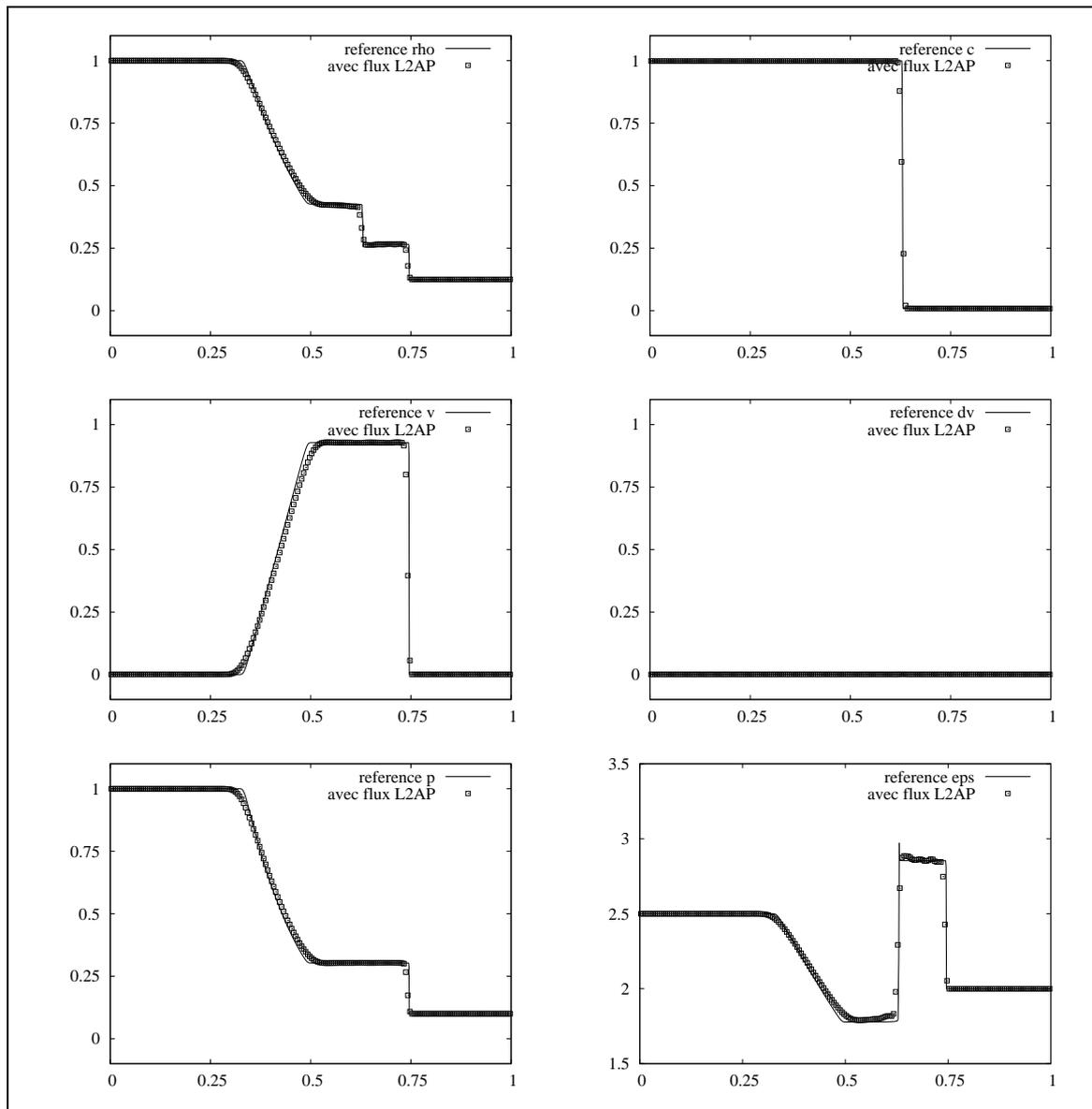


FIG. 4.2 – Profils obtenus à l’instant $t = 0.14$ pour la condition de tube à choc (4.67). Les coefficients polytropiques sont $\gamma^\alpha = \gamma^\beta = 1.4$, et le coefficient de friction est fixé à $\nu = 10^5$.

La figure 4.2 représente les profils obtenus avec $\gamma^\alpha = \gamma^\beta = 1.4$, et un coefficient de friction fixé à $\nu = 10^5$. Le terme source étant raide, on observe que le comportement obtenu est celui

d'un système à un seul gaz parfait de coefficient $\gamma = 1.4$. Le flux utilisé étant AP, on obtient les bons profils même avec un faible nombre de mailles.

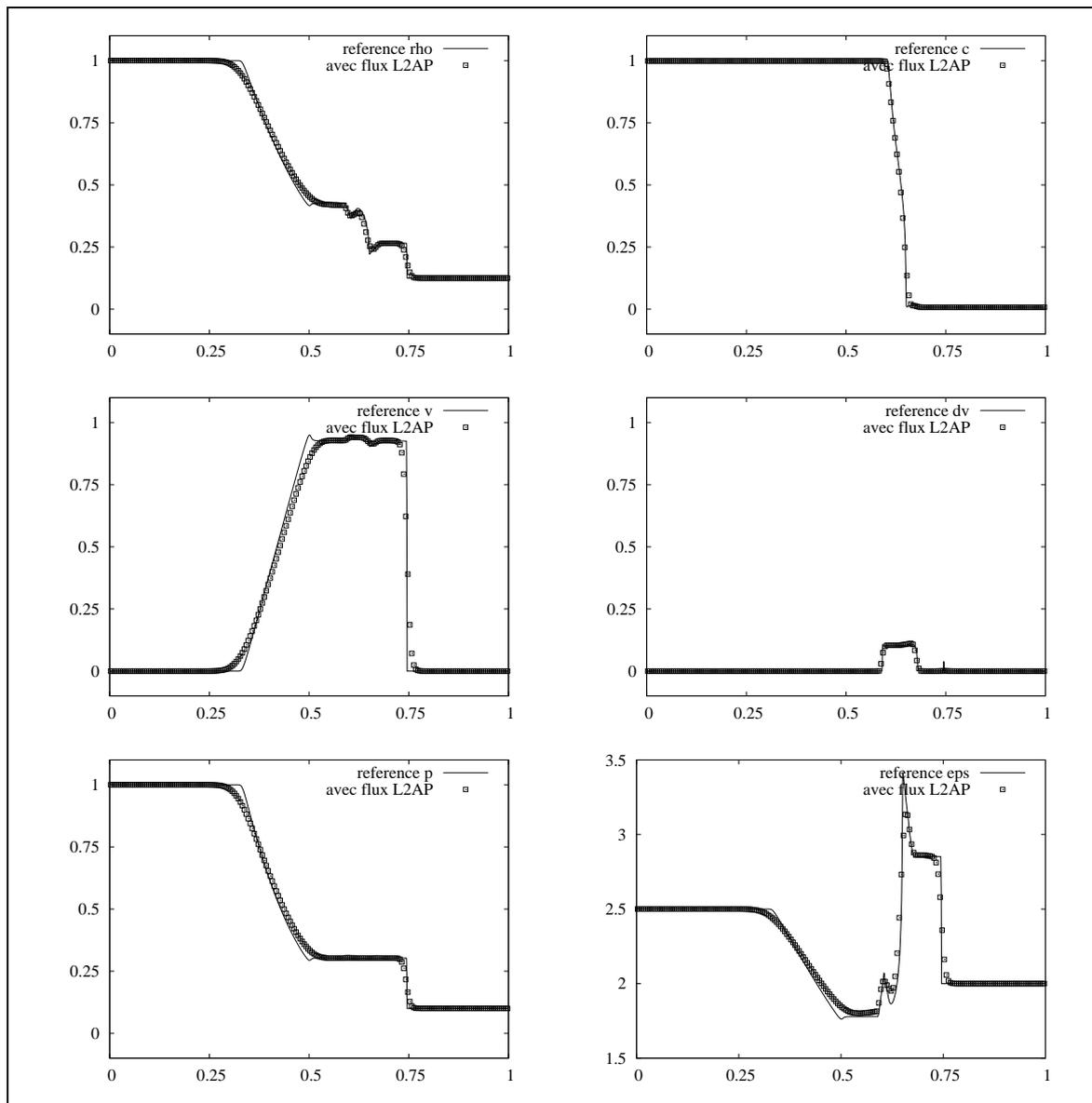


FIG. 4.3 – Profils obtenus à l'instant $t = 0.14$ pour la condition de tube à choc (4.67). Les coefficients polytropiques sont $\gamma^\alpha = \gamma^\beta = 1.4$, et le coefficient de friction est fixé à $\nu = 10^2$.

La figure 4.3 représente les profils obtenus avec $\gamma^\alpha = \gamma^\beta = 1.4$, et un coefficient de friction fixé à $\nu = 10^2$. Ici le terme source n'est pas raide, et les effets bifluides apparaissent. L'épaisseur de la zone de mélange correspond à la largeur du créneau de la vitesse relative (au milieu à droite). Dans cette zone à forte friction entre les fluides, on voit qu'un pic de température apparaît (en bas à droite).

La figure 4.4 représente les profils obtenus avec $\gamma^\alpha = 1.4$ et $\gamma^\beta = 3$, et un coefficient de friction fixé à $\nu = 10^5$. Le modèle résolu permet d'utiliser des coefficients polytropiques différents pour chaque fluide, sans devoir se préoccuper de trouver une relation d'état pour le

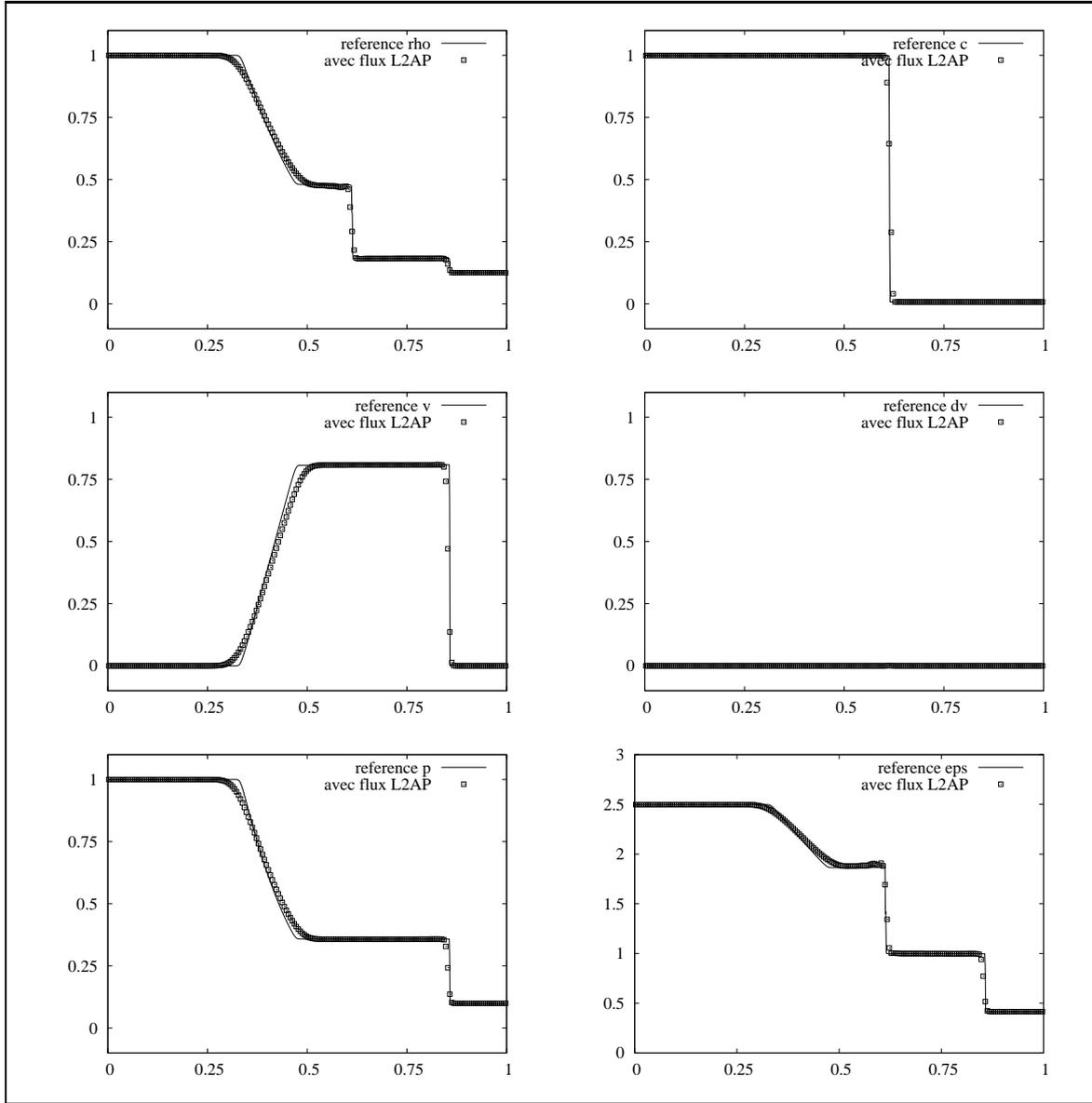


FIG. 4.4 – Profils obtenus à l'instant $t = 0.14$ pour la condition de tube à choc (4.67). Les coefficients polytropiques sont $\gamma^\alpha = 1.4$ et $\gamma^\beta = 3$, et le coefficient de friction est fixé à $\nu = 10^5$.

mélange. Ici, tout se passe comme si, pour le mélange, $\gamma = 1.4$ à gauche de la discontinuité de contact et $\gamma = 3$ à droite.

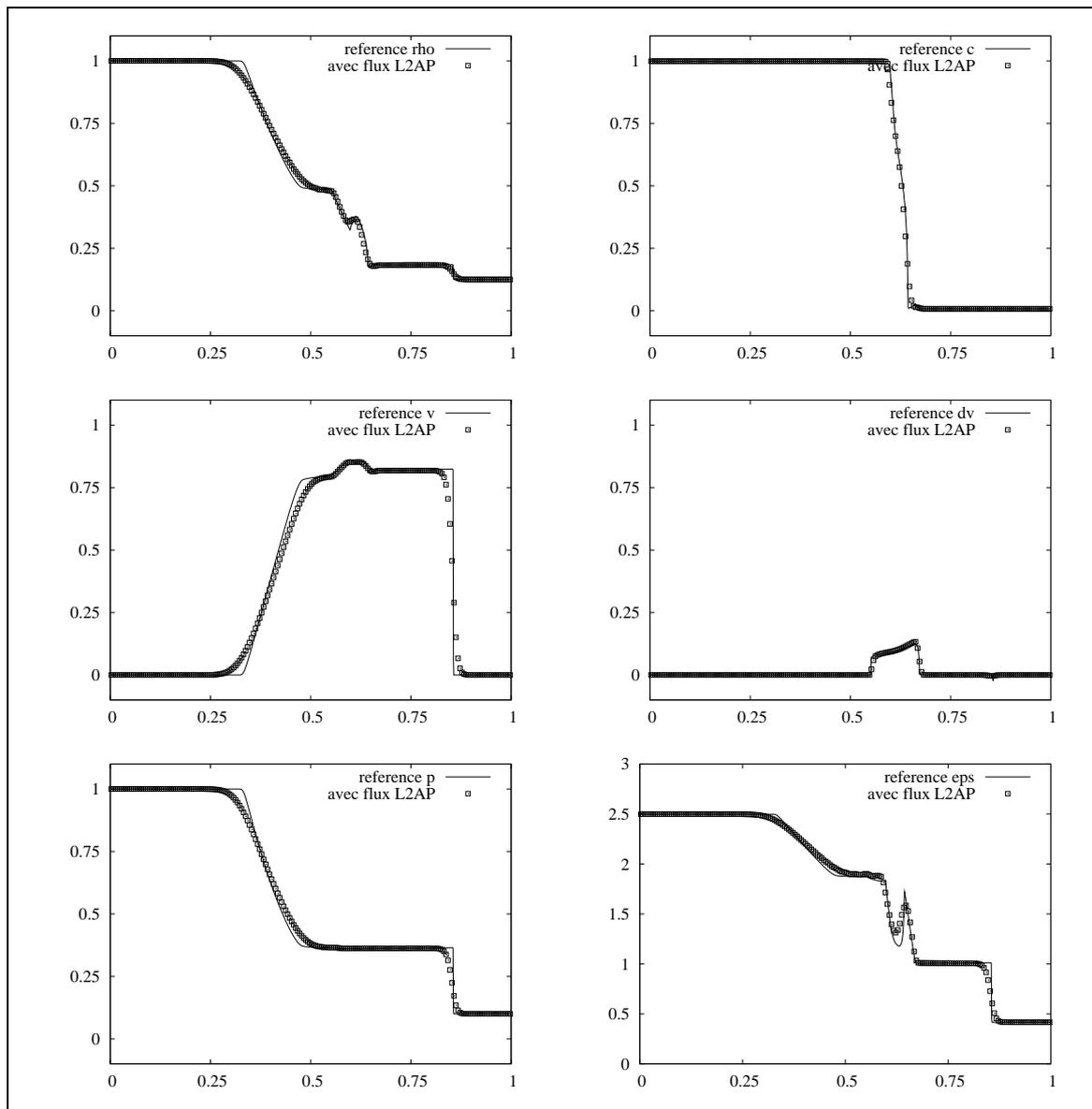


FIG. 4.5 – Profils obtenus à l’instant $t = 0.14$ pour la condition de tube à choc (4.67). Les coefficients polytropiques sont $\gamma^\alpha = 1.4$ et $\gamma^\beta = 3$, et le coefficient de friction est fixé à $\nu = 10^2$.

La figure 4.5 représente les profils obtenus avec $\gamma^\alpha = 1.4$ et $\gamma^\beta = 3$, et un coefficient de friction fixé à $\nu = 10^2$. En réduisant le coefficient de friction, les effets bifluides apparaissent.

4.3 Extension multidimensionnelle par directions alternées

Pour l’extension au 2D et 3D, on choisit d’utiliser la méthode des directions alternées, avec un splitting de Strang (voir [Str68]) introduisant une erreur d’ordre 2 en temps. Pour faire court, on ne présente que l’extension 2D du schéma pour la résolution du modèle multifluide complet. L’extension 2D du schéma pour la résolution du modèle multifluide barotrope est alors triviale.

L'extension au 3D ne présente pas de difficulté supplémentaire.

4.3.1 Description dans le cas 2D pour le modèle multifluide complet

Le modèle de Scannapieco-Cheng complet 2D s'écrit :

$$(4.69) \quad \partial_t \mathcal{U} + \partial_x \mathcal{F}(\mathcal{U}) + \partial_y \mathcal{G}(\mathcal{U}) = \mathcal{Q}(\mathcal{U}),$$

$$\text{avec l'état } \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \rho^\alpha \\ \rho^\alpha u^\alpha \\ \rho^\alpha v^\alpha \\ \rho^\alpha e^\alpha \\ \rho^\beta \\ \rho^\beta u^\beta \\ \rho^\beta v^\beta \\ \rho^\beta e^\beta \end{pmatrix}, \text{ les flux par direction } \mathcal{F}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \rho^\alpha u^\alpha \\ \rho^\alpha u^\alpha u^\alpha + p^\alpha \\ \rho^\alpha v^\alpha u^\alpha \\ \rho^\alpha e^\alpha u^\alpha + p^\alpha u^\alpha \\ \rho^\beta u^\beta \\ \rho^\beta u^\beta u^\beta + p^\beta \\ \rho^\beta v^\beta u^\beta \\ \rho^\beta e^\beta u^\beta + p^\beta u^\beta \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{G}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \rho^\alpha v^\alpha \\ \rho^\alpha u^\alpha v^\alpha \\ \rho^\alpha v^\alpha v^\alpha + p^\alpha \\ \rho^\alpha e^\alpha v^\alpha + p^\alpha v^\alpha \\ \rho^\beta v^\beta \\ \rho^\beta u^\beta v^\beta \\ \rho^\beta v^\beta v^\beta + p^\beta \\ \rho^\beta e^\beta v^\beta + p^\beta v^\beta \end{pmatrix} \text{ et le terme source } \mathcal{Q}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu \rho f(c) (u^\alpha - u^\beta) \\ -\nu \rho f(c) (v^\alpha - v^\beta) \\ -\nu \rho f(c) [(u^\alpha - u^\beta) u + (v^\alpha - v^\beta) v] \\ 0 \\ \nu \rho f(c) (u^\alpha - u^\beta) \\ \nu \rho f(c) (v^\alpha - v^\beta) \\ \nu \rho f(c) [(u^\alpha - u^\beta) u + (v^\alpha - v^\beta) v] \end{pmatrix}.$$

Pour chaque fluide, énergies spécifiques interne et totale sont reliées par $\epsilon^s = e^s - \frac{1}{2} [(u^s)^2 + (v^s)^2]$. On introduit les opérateurs :

$$(4.70) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_x : \mathcal{U} \rightarrow \partial_x \mathcal{F}(\mathcal{U}) - \mathcal{Q}_x(\mathcal{U}), \\ \mathcal{D}_y : \mathcal{U} \rightarrow \partial_y \mathcal{G}(\mathcal{U}) - \mathcal{Q}_y(\mathcal{U}), \end{cases}$$

où l'on a noté $\mathcal{Q}_x(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu\rho f(c)(u^\alpha - u^\beta) \\ 0 \\ -\nu\rho f(c)(u^\alpha - u^\beta)u \\ 0 \\ \nu\rho f(c)(u^\alpha - u^\beta) \\ 0 \\ \nu\rho f(c)(u^\alpha - u^\beta)u \end{pmatrix}$ et $\mathcal{Q}_y(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\nu\rho f(c)(v^\alpha - v^\beta) \\ -\nu\rho f(c)(v^\alpha - v^\beta)v \\ 0 \\ 0 \\ \nu\rho f(c)(v^\alpha - v^\beta) \\ \nu\rho f(c)(v^\alpha - v^\beta)v \end{pmatrix}$. Le système (4.69) peut alors s'écrire :

$$(4.71) \quad \partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0.$$

Pour une itération en temps $t^n \rightarrow t^{n+1}$ donnée, un schéma aux directions alternées pour résoudre (4.69) est :

Etape 1 Commencer par résoudre $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) = 0$ de t^n à t^{n+1} avec la condition initiale U_i^n . On note U_i^1 la solution obtenue.

Etape 2 Résoudre ensuite $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0$ de t^n à t^{n+1} avec la condition initiale U_i^1 . On note U_i^2 la solution obtenue. On ferme le schéma en faisant l'approximation $U_i^{n+1} \simeq U_i^2$.

A ce niveau, on remarque que les systèmes $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) = 0$ et $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0$ sont tous les deux de la forme du modèle multifluide complet 1D (4.44), avec deux équations supplémentaires de type advection, qui sont donc triviales en coordonnées lagrangiennes. Par conséquent, on peut appliquer le nouveau schéma Lagrange-projection présenté dans la section précédente pour résoudre chaque système.

Si à chaque itération en temps, l'approche ci-dessus est utilisée, les directions sont traitées dans l'ordre $x - y - x - y - x - \dots$ qui induit une erreur d'ordre 1 en temps. On peut facilement réduire l'erreur commise à l'ordre 2 en temps en utilisant l'enchaînement suivant :

Etape 1 Commencer par résoudre :

- si n est pair : $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) = 0$,
 - si n est impair : $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0$,
- de t^n à t^{n+1} avec la condition initiale U_i^n . On note U_i^1 la solution obtenue.

Etape 2 Résoudre ensuite :

- si n est pair : $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_y(\mathcal{U}) = 0$,
 - si n est impair : $\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{D}_x(\mathcal{U}) = 0$,
- de t^n à t^{n+1} avec la condition initiale U_i^1 . On note U_i^2 la solution obtenue. On ferme le schéma en faisant l'approximation $U_i^{n+1} \simeq U_i^2$.

Si l'on utilise cette dernière approche, les directions sont traitées dans l'ordre $x - y - y - x - x - y - y - \dots$. Lorsque la valeur de Δt est constante au cours du temps, ce schéma correspond à un splitting de Strang (voir [Str68]).

4.3.2 Résultats numériques

On procède maintenant à l'évaluation du schéma proposé pour la résolution du modèle multifluide complet (4.44) 2D. On emploie un schéma aux directions alternées de type Strang. Pour chaque direction, le schéma utilisé est :

- pour la phase bilagrangienne : (4.46) muni de (4.32) et (4.56). Le flux utilisé est précisé plus loin.
- pour la phase de projection : (4.7) avec le flux de projection \mathcal{P}_3 (3.23) et son limiteur TVD.

On se propose d'étudier les instabilités de Kelvin-Helmholtz (cisaillement d'une interface) et de Richtmyer-Meshkov (perturbation d'une interface par le passage d'un choc). Dans les deux cas, on suppose que chaque fluide $s = \alpha, \beta$ est un gaz parfait représenté par l'équation d'état $p^s = (\gamma^s - 1) \rho^s \epsilon^s$, où l'on fixe $\gamma^\alpha = \gamma^\beta = 1.4$. On prend $f(c) = 1$. La restriction sur le pas de temps utilisée est une condition CFL classique (voir (3.21)) pour chaque fluide, où l'on fixe le nombre CFL à 0.75.

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

La condition initiale considérée est :

$$(4.72) \quad \left. \begin{array}{l} x \in]-0.5; 0.5[, \\ y \in]-0.3; 0.3[, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho^\alpha(x, y, 0) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{si } y < h(x), \\ \epsilon & \text{si } y > h(x), \end{cases} \\ u^\alpha(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < h(x), \\ -1 & \text{si } y > h(x), \end{cases} \\ v^\alpha(x, y, 0) = 0, \\ p^\alpha(x, y, 0) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{si } y < h(x), \\ \epsilon & \text{si } y > h(x), \end{cases} \\ \rho^\beta(x, y, 0) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } y < h(x), \\ 1 - \epsilon & \text{si } y > h(x), \end{cases} \\ u^\beta(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < h(x), \\ -1 & \text{si } y > h(x), \end{cases} \\ v^\beta(x, y, 0) = 0, \\ p^\beta(x, y, 0) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } y < h(x), \\ 1 - \epsilon & \text{si } y > h(x), \end{cases} \end{array}$$

où l'on fixe le paramètre ϵ à 10^{-3} pour modéliser une interface entre les deux fluides. La position de l'interface est repérée par l'équation $h(x) = 0.02 \cdot \sin(2\pi \cdot 4x)$. On vérifie facilement que cette

condition initiale est telle que, pour le mélange :

$$(4.73) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in]-0.5; 0.5[, \\ y \in]-0.3; 0.3[, \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \rho(x, y, 0) = 1, \\ u(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < h(x), \\ -1 & \text{si } y > h(x), \end{cases} \\ v(x, y, 0) = 0, \\ p(x, y, 0) = 1, \end{array} \right.$$

qui correspond bien à une condition initiale pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz pour un seul fluide. Les conditions aux limites sont : périodique suivant x , et transitif suivant y .

Les figures 4.6, 4.7 et 4.8 représentent les profils de la fraction massique c du fluide α obtenus avec un maillage de 200×120 mailles à différents instants avec des coefficients de friction respectifs de $\nu = 10^{10}$, 10^3 et 10^2 . Les instants d'observation sont, du haut vers le bas : $t = 0.00, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$ et 0.30 . Les résultats obtenus avec le flux \mathcal{L}_2 sont consignés dans la colonne de gauche ; ceux obtenus avec le flux \mathcal{L}_2^{AP} sont consignés dans la colonne de droite. Sans surprise, on observe que seul le flux \mathcal{L}_2^{AP} capture le comportement asymptotique dans le cas raide $\nu = 10^{10}$.

Sur le même problème, on procède maintenant à une étude numérique de convergence. La figure 4.10, respectivement 4.9, représente les profils de fraction massique c obtenus à l'instant $t = 0.3$ avec le flux \mathcal{L}_2 , respectivement \mathcal{L}_2^{AP} , sur des maillages de plus en plus fins dont le nombre de mailles est désigné par N . Les profils placés dans les colonnes à gauche ont été calculés avec un coefficient de frottement raide $\nu = 10^{10}$. Au milieu, $\nu = 10^3$, et à droite, $\nu = 10^2$.

On commence par commenter la figure 4.9 associée au flux \mathcal{L}_2^{AP} . Avec $\nu = 10^{10}$ et un temps d'observation de $t = 0.3$, on s'attend à ce que l'épaisseur de la zone de mélange soit infiniment mince (limite asymptotique du modèle). L'étude de raffinement de maillage confirme ce point (voir colonne à gauche). Le fait que les tourbillons prennent des formes de plus en plus complexes est caractéristique d'un écoulement instable. Avec $\nu = 10^3$, on voit dans la colonne du milieu que l'épaisseur de la zone de mélange est mince mais pas nulle. On parle dans ce cas d'interdiffusion. Un point important ici est que cette épaisseur est convergée sur maillage grossier avec le flux \mathcal{L}_2^{AP} . Là encore, l'écoulement est instable. Avec $\nu = 10^2$, on peut commencer à parler d'interpénétration, et l'on s'attend donc à ce que l'épaisseur de la zone de mélange soit plus grande. La colonne à droite confirme cela, et montre que l'épaisseur de la zone de mélange est convergée sur maillage grossier avec le nouveau flux. Fait intéressant, on remarque que l'interpénétration stabilisent l'écoulement.

On commente maintenant la figure 4.10 associée au flux \mathcal{L}_2 . En observant la colonne à droite ($\nu = 10^2$), on vérifie que les profils obtenus avec les schémas avec flux \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_2^{AP} convergent vers la même solution. Cette solution est stabilisée par la possibilité qu'ont les deux fluides de s'interpénétrer. Dans le régime d'interdiffusion $\nu = 10^3$ (colonne du milieu), le schéma avec flux \mathcal{L}_2 nécessite d'être utilisé sur maillage fin pour restituer la bonne épaisseur de zone de mélange. En 3D, l'utilisation d'un tel schéma ne serait donc pas envisageable. La difficulté qu'ont les schémas de type splitting à capturer le comportement asymptotique est bien illustrée par la colonne à gauche, qui correspond au cas raide $\nu = 10^{10}$.

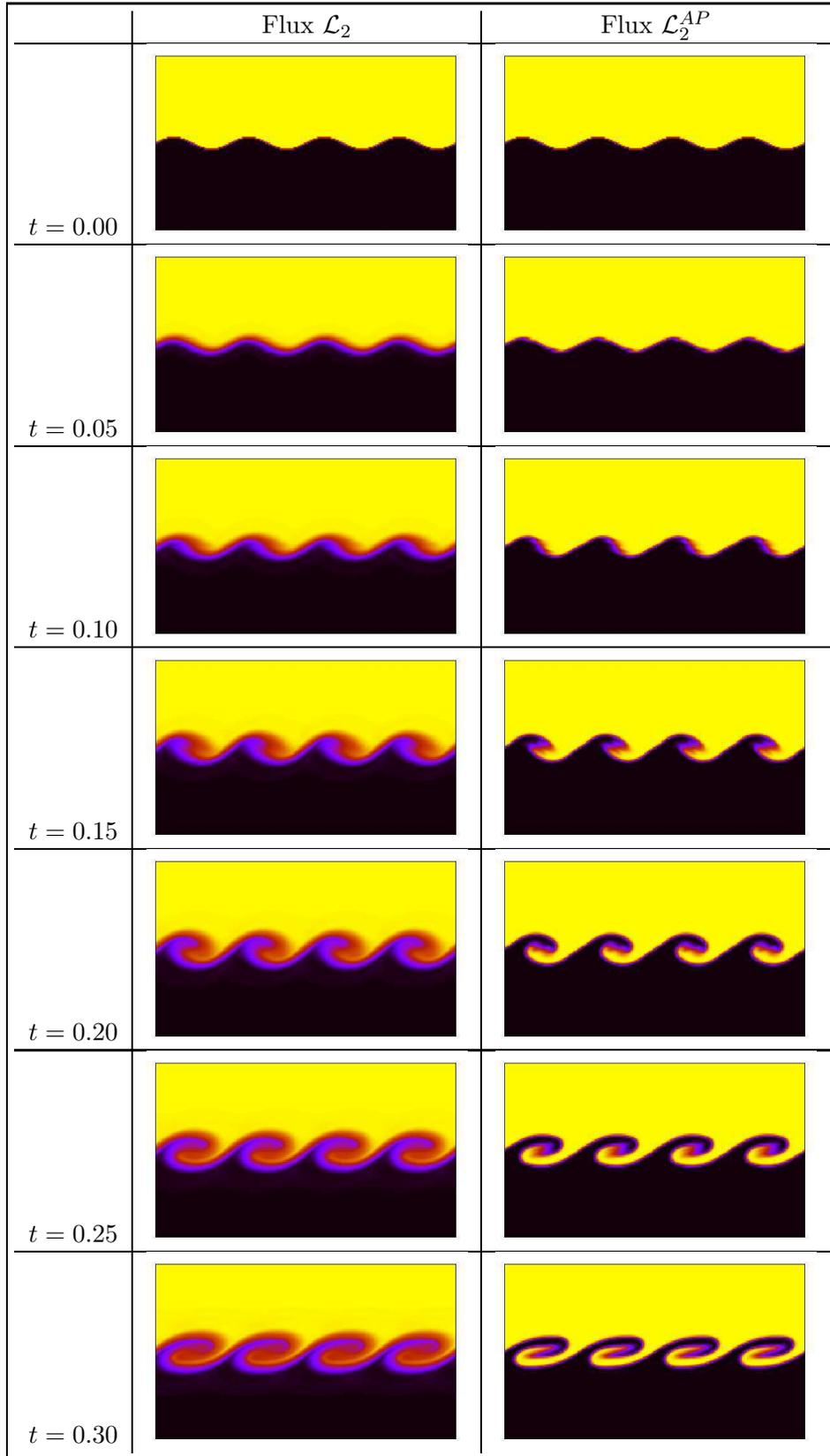


FIG. 4.6 – Profils de fraction massique c au cours du temps pour la condition initiale (4.72), avec $\nu = 10^{10}$. Nombre de mailles $N = 200 \times 120$. Flux \mathcal{L}_2 à gauche et flux \mathcal{L}_2^{AP} à droite.

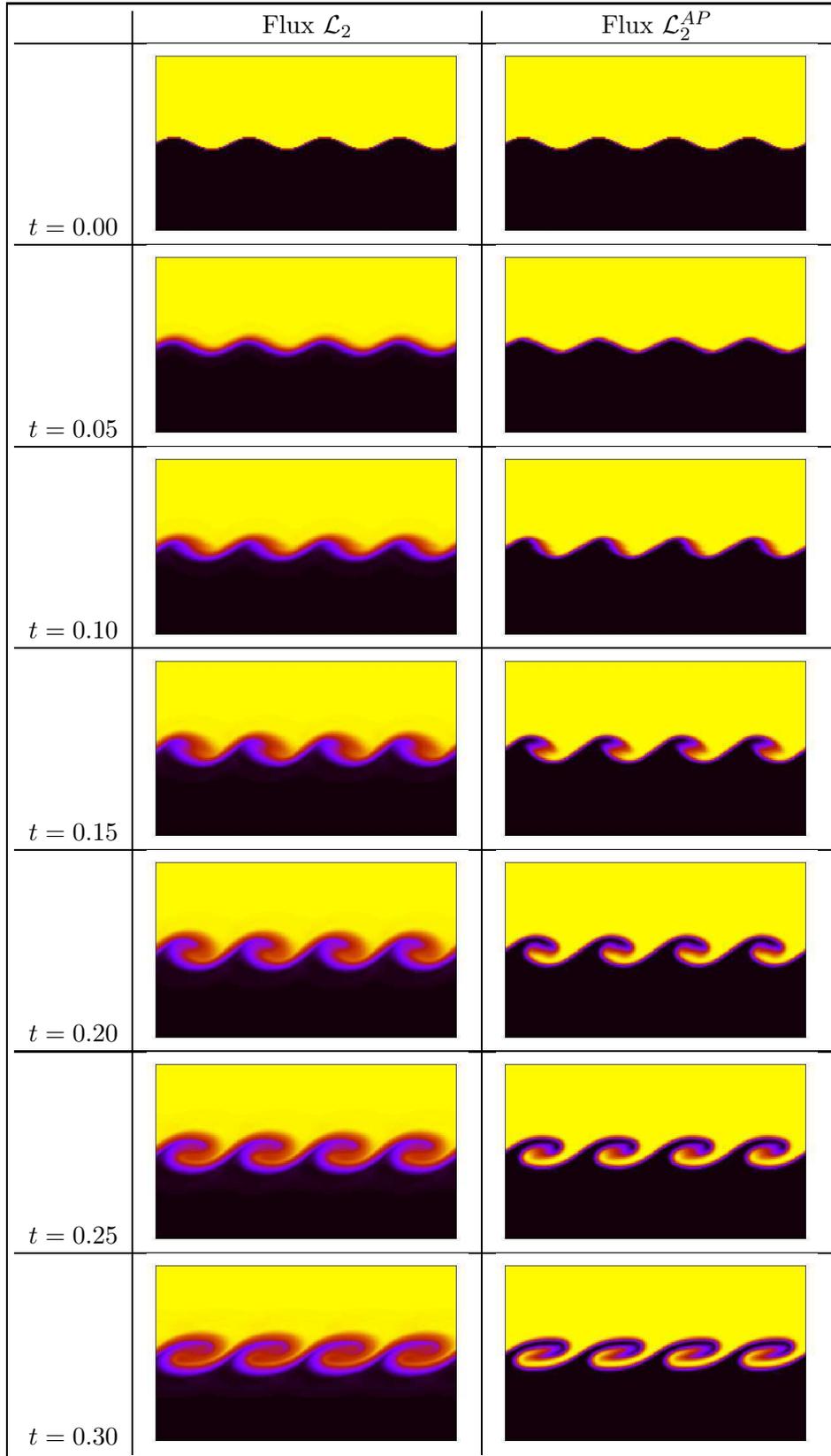


FIG. 4.7 – Profils de fraction massique c au cours du temps pour la condition initiale (4.72), avec $\nu = 10^3$. Nombre de mailles $N = 200 \times 120$. Flux \mathcal{L}_2 à gauche et flux \mathcal{L}_2^{AP} à droite.

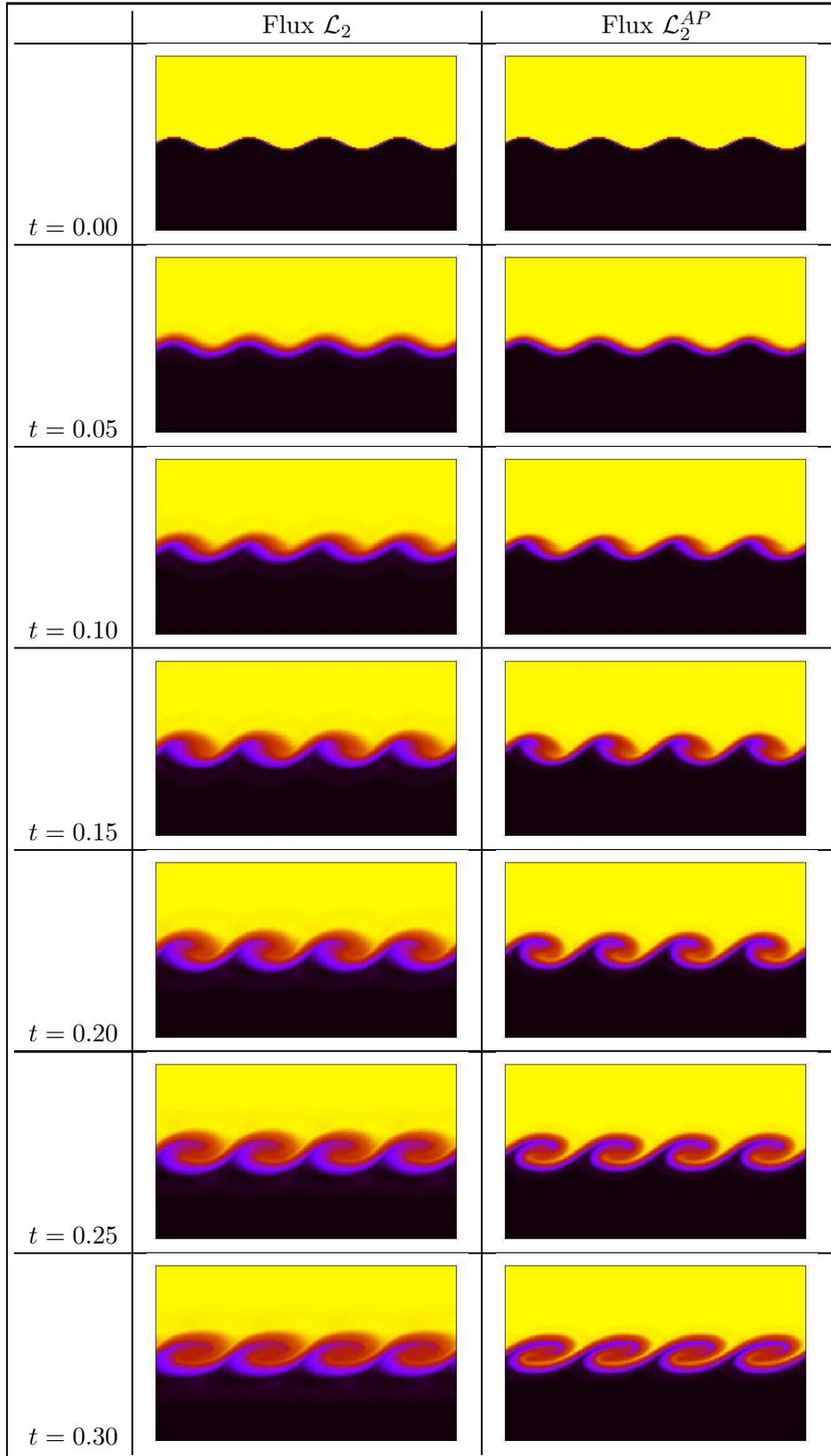


FIG. 4.8 – Profils de fraction massique c au cours du temps pour la condition initiale (4.72), avec $\nu = 10^2$. Nombre de mailles $N = 200 \times 120$. Flux \mathcal{L}_2 à gauche et flux \mathcal{L}_2^{AP} à droite.

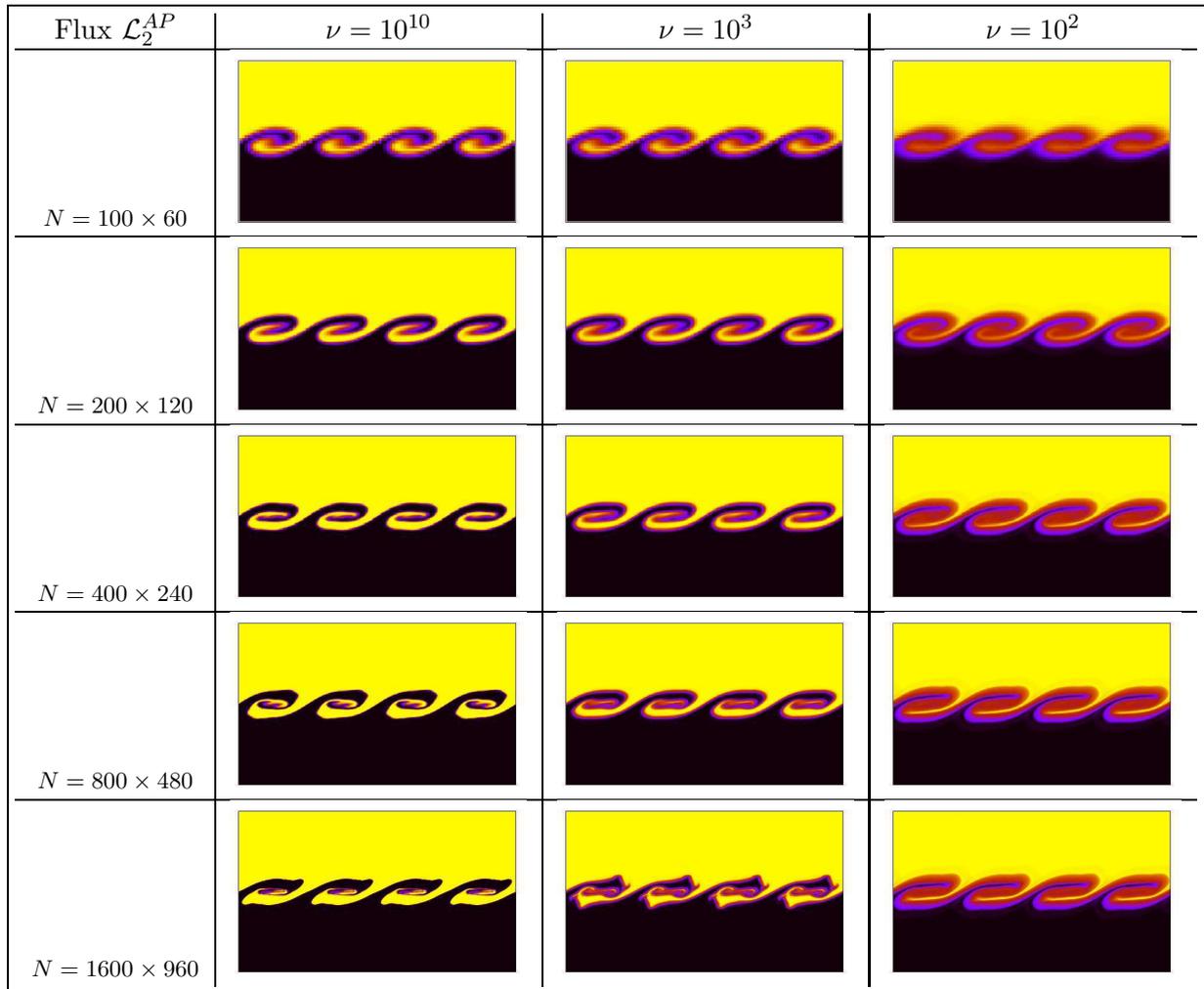


FIG. 4.9 – Etude de convergence du schéma avec flux \mathcal{L}_2^{AP} sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. La condition initiale est (4.72) et le temps d'observation est $t = 0.3$. Profils de fraction massique c pour différents nombres de mailles N par direction et pour différentes valeurs de ν .

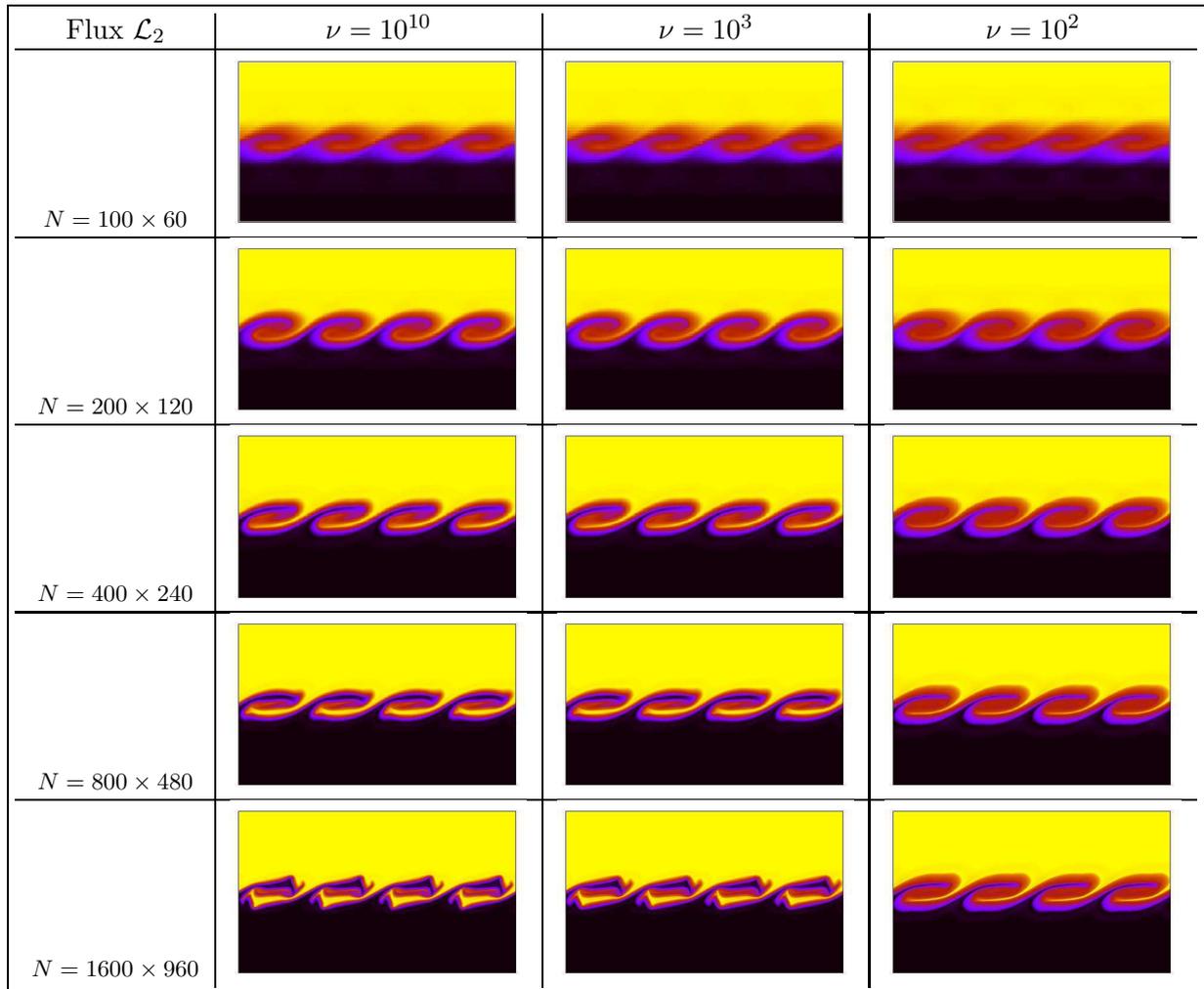


FIG. 4.10 – Etude de convergence du schéma avec flux \mathcal{L}_2 sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. La condition initiale est (4.72) et le temps d'observation est $t = 0.3$. Profils de fraction massique c pour différents nombres de mailles N par direction et pour différentes valeurs de ν .

Instabilité de Richtmyer-Meshkov

La condition initiale considérée est :

$$(4.74) \quad \left. \begin{array}{l} x \in]0; 2[, \\ y \in]0; 0.5[, \end{array} \right| \begin{array}{l} \rho^\alpha(x, y, 0) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{si } x < h(y), \\ \epsilon & \text{si } x > h(y), \end{cases} \\ u^\alpha(x, y, 0) = 0, \\ v^\alpha(x, y, 0) = 0, \\ p^\alpha(x, y, 0) = \begin{cases} 1 - \epsilon & \text{si } x < h(y), \\ \epsilon & \text{si } x > h(y), \end{cases} \\ \rho^\beta(x, y, 0) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } x < h(y), \\ 1 - \epsilon & \text{si } x > h(y), \end{cases} \\ u^\beta(x, y, 0) = 0, \\ v^\beta(x, y, 0) = 0, \\ p^\beta(x, y, 0) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } x < h(y), \\ 1 - \epsilon & \text{si } x > h(y), \end{cases} \end{array}$$

où l'on fixe le paramètre ϵ à 10^{-3} pour modéliser une interface entre les deux fluides. La position de l'interface est repérée par l'équation $h(y) = 0.5 + 0.5 \cdot \cos(2\pi \cdot 2y)$. A $t = 0$, on modélise l'arrivée d'une onde de choc avec l'initialisation :

$$(4.75) \quad \left. \begin{array}{l} x \in]0.05; 0.3[, \\ y \in]0; 0.5[, \end{array} \right| \begin{array}{l} \rho^\alpha(x, y, 0) = 4.22 \cdot (1 - \epsilon), \\ u^\alpha(x, y, 0) = 0, \\ v^\alpha(x, y, 0) = 0, \\ p^\alpha(x, y, 0) = 4.9 \cdot (1 - \epsilon), \\ \rho^\beta(x, y, 0) = 4.22 \cdot \epsilon, \\ u^\beta(x, y, 0) = 0, \\ v^\beta(x, y, 0) = 0, \\ p^\beta(x, y, 0) = 4.9 \cdot \epsilon. \end{array}$$

On vérifie facilement que la condition initiale (4.74)-(4.75) est telle que, pour le mélange :

$$(4.76) \quad \left. \begin{array}{l} x \in]0; 2[, \\ y \in]0; 0.5[, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho(x, y, 0) = \begin{cases} 4.22 & \text{si } x \in]0.05; 0.3[, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \\ u(x, y, 0) = 0, \\ v(x, y, 0) = 0, \\ p(x, y, 0) = \begin{cases} 4.9 & \text{si } x \in]0.05; 0.3[, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

qui correspond bien à une condition initiale pour l'instabilité de Richtmyer-Meshkov pour un seul fluide. Les conditions aux limites sont : transitif suivant x , et périodique suivant y . Dans ce qui suit, on utilise un maillage grossier de $N = 200 \times 50$ mailles.

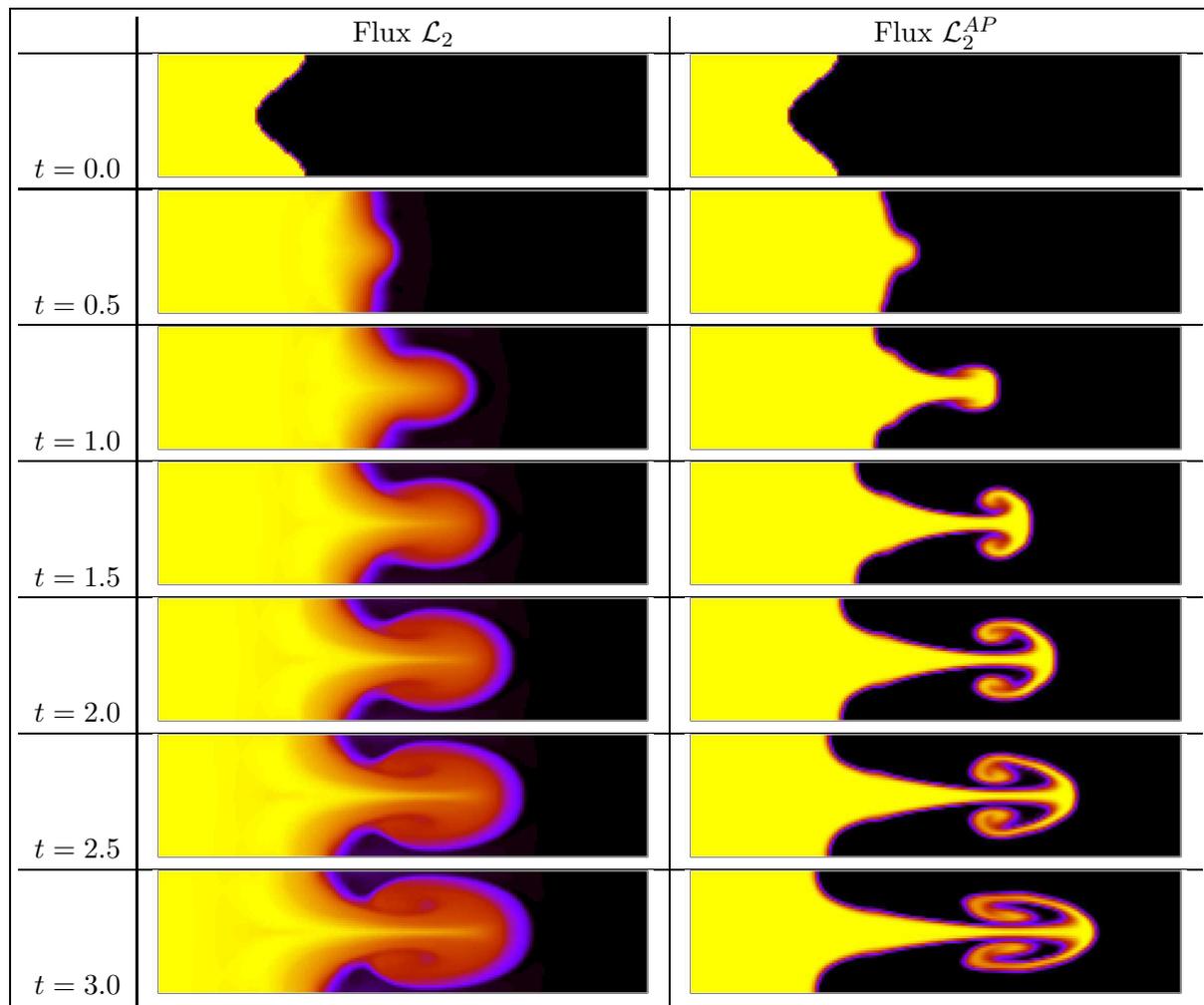


FIG. 4.11 – Profils de fraction massique c au cours du temps pour la condition initiale (4.74), avec $\nu = 10^4$. Nombre de mailles 200×50 . Flux \mathcal{L}_2 à gauche et flux \mathcal{L}_2^{AP} à droite.

Les figures 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14 représentent les profils de la fraction massique c du fluide α obtenus à différents instants avec des coefficients de friction respectifs de $\nu = 10^4$, 10^3 , 10^2 et 10^1 . Les instants d'observation sont, du haut vers le bas : $t = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ et 3.0 . Les résultats obtenus avec le flux \mathcal{L}_2 sont consignés dans la colonne de gauche ; ceux obtenus avec le flux \mathcal{L}_2^{AP} sont consignés dans la colonne de droite.

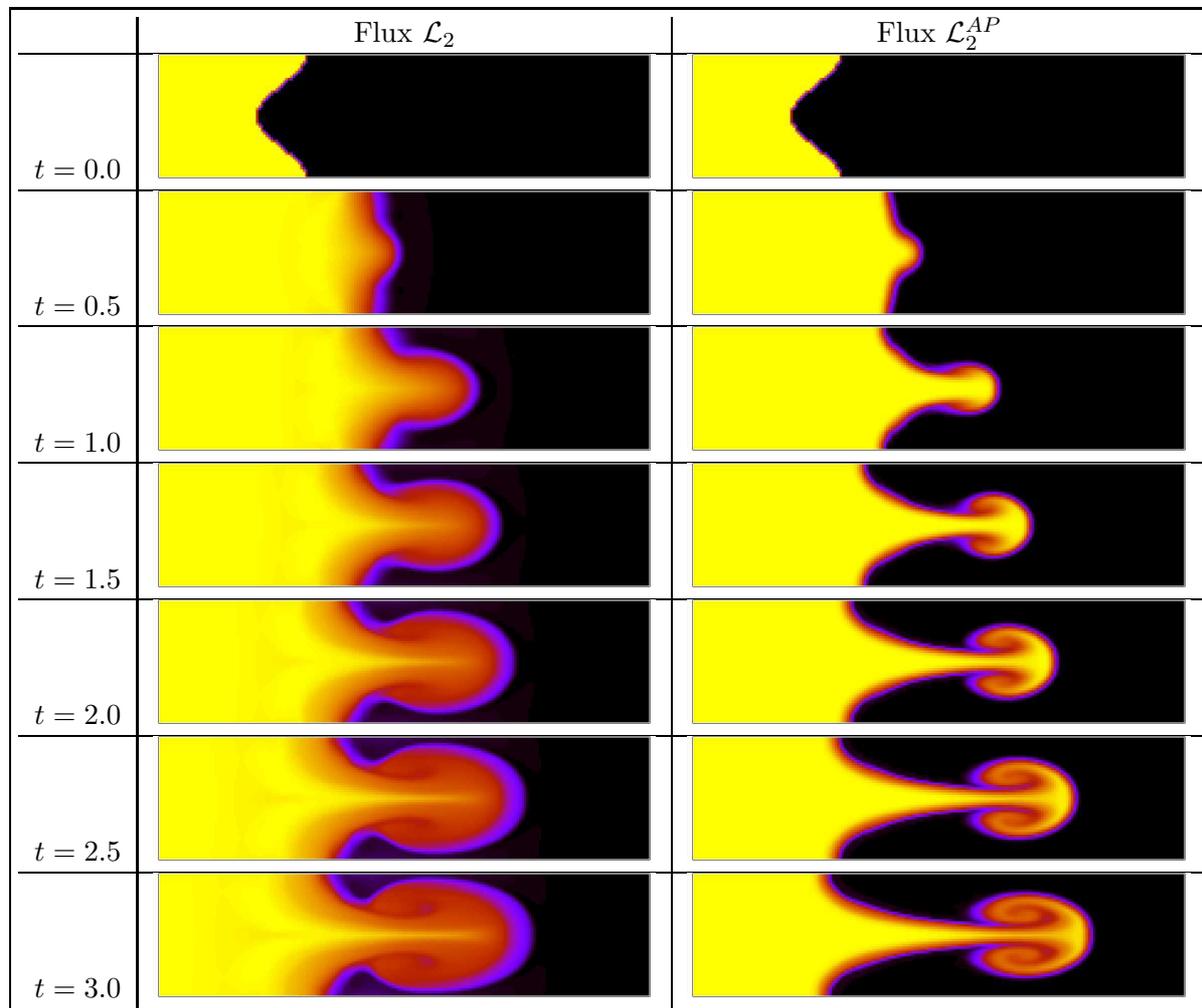


FIG. 4.12 – Profils de fraction massique c au cours du temps pour la condition initiale (4.74), avec $\nu = 10^3$. Nombre de mailles 200×50 . Flux \mathcal{L}_2 à gauche et flux \mathcal{L}_2^{AP} à droite.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé un nouveau schéma de type bi-Lagrange-projection pour la résolution numérique du modèle bifluide de Scannapieco-Cheng dans sa version barotrope ($2+2d$ équations) et complète ($4+2d$ équations). Lorsque le coefficient de frottement entre les fluides ν est nul, on a vérifié que le schéma se réduit à deux schémas Lagrange-projection indépendants pour chaque fluide. Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on a montré que le nouveau schéma est asymptotic-preserving sur maillage grossier, contrairement à un schéma de type splitting. La propriété AP a été obtenue grâce à l'utilisation d'un nouveau flux acoustique, construit à partir des équations caractéristiques dans lesquelles apparait le terme source. La technique d'obtention de ce flux ne dépend pas de l'équation d'état. Concernant la stabilité du nouveau schéma, on a montré qu'il

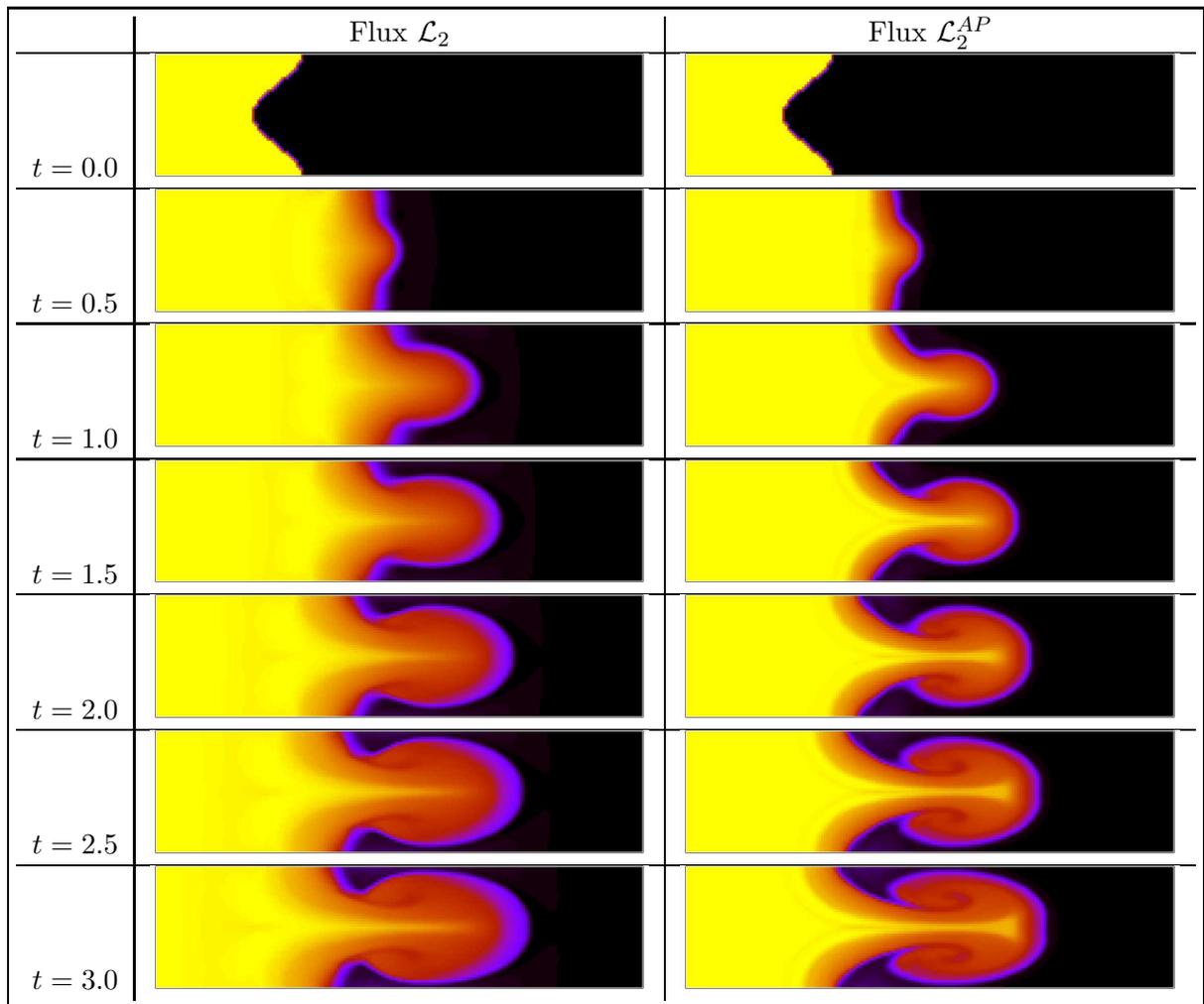


FIG. 4.13 – Profils de fraction massique c au cours du temps pour la condition initiale (4.74), avec $\nu = 10^2$. Nombre de mailles 200×50 . Flux \mathcal{L}_2 à gauche et flux \mathcal{L}_2^{AP} à droite.

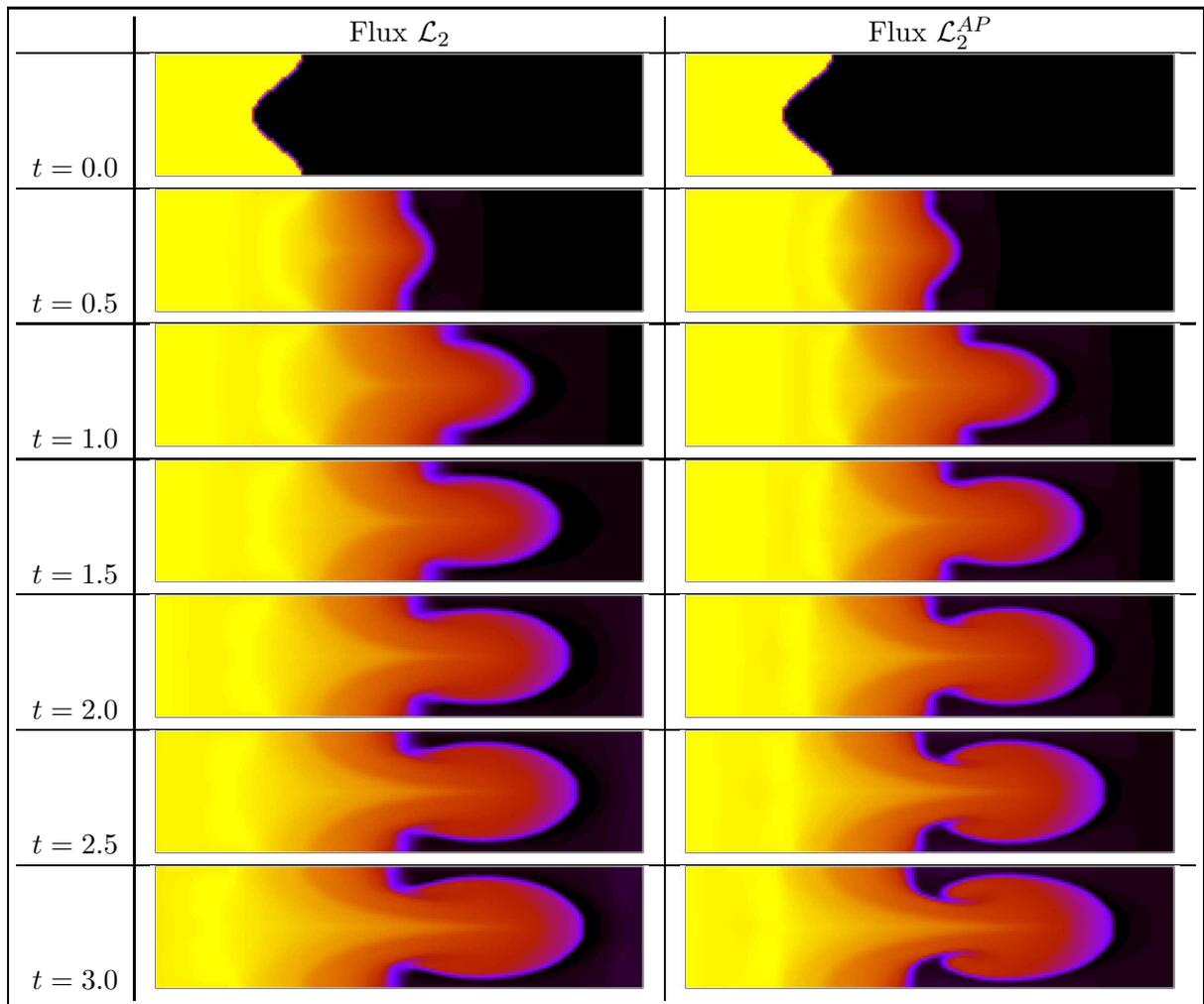


FIG. 4.14 – Profils de fraction massique c au cours du temps pour la condition initiale (4.74), avec $\nu = 10^1$. Nombre de mailles 200×50 . Flux \mathcal{L}_2 à gauche et flux \mathcal{L}_2^{AP} à droite.

vérifie une double inégalité d'entropie discrète, puis on a proposé une restriction sur le pas de temps qui garantit que le schéma est entropique. Cependant, le critère en question est implicite, et ne peut donc qu'être vérifié numériquement au cours de la simulation. L'approfondissement de ce point fait partie de nos perspectives de travail. En pratique, on préfère utiliser une condition CFL classique (qui ne dépend pas de ν) pour l'écoulement de chaque fluide, car on a observé que pour toutes les conditions initiales considérées, le critère d'entropie était vrai sous cette condition simple, quelle que soit la valeur de $\nu \geq 0$. L'extension multidimensionnelle du schéma a été effectuée avec la méthode des directions alternées par splitting de Strang. On a obtenu un schéma global AP en 2D, car le schéma utilisé lors du traitement de chaque direction est AP. Les résultats numériques présentés ont permis de mettre en évidence l'apport du nouveau schéma sur maillage grossier, ainsi que sa robustesse pour de très grandes valeurs du coefficient de frottement. Finalement, on dispose d'un solveur bifluide bivitesse 2D permettant de simuler l'interdiffusion et l'interpénétration des fluides.

Chapitre 5

Un nouveau schéma numérique d'ordre arbitrairement élevé pour les systèmes de lois de conservation avec un terme source raide

Ce chapitre est consacré à la construction et à l'évaluation d'un nouveau schéma numérique d'ordre arbitrairement élevé pour résoudre les systèmes hyperboliques de lois de conservation avec un terme source raide. Présenté sous la forme d'un article¹ issu d'une collaboration avec M. Dumbser et E.F. Toro, ce chapitre est indépendant des autres. On signale cependant que le nouveau schéma présenté dans ce qui suit a déjà été utilisé par les auteurs pour résoudre le modèle bifluide de Scannapieco-Cheng en 1D et 2D. Les résultats de cette étude récente doivent faire l'objet d'une autre publication, actuellement en préparation.

Explicit Finite Volume Schemes of Arbitrary High Order of Accuracy for Hyperbolic Systems with Stiff Source Terms

Michael Dumbser Institut für Aerodynamik und Gasdynamik, Pfaffenwaldring 21, D-70550 Stuttgart, Germany.

Cédric Enaux CEA - DIF, F-91680 Bruyères-Le-Châtel, and MAS Laboratory, Ecole Centrale de Paris, Grande Voie des Vignes, F-92295 Châtenay-Malabry Cedex, France.

Eleuterio F. Toro Laboratory of Applied Mathematics, University of Trento
Via Mesiano 77, F-38050 Trento, Italy.

Abstract In this article we propose a new class of finite volume schemes of arbitrary accuracy in space and time for systems of hyperbolic balance laws with *stiff* source terms. The new class of schemes is based on a three stage procedure. First, in order to achieve high order accuracy in space, a nonlinear weighted essentially non-oscillatory reconstruction procedure is applied to the cell averages at the current time level. Second, the temporal evolution of the resulting reconstruction polynomials is computed *locally* inside each cell exploiting directly the full system of governing equations. In previous ADER schemes, this was achieved via the Cauchy-Kovalevski procedure, where the governing equation is repeatedly differentiated with respect to space and time to construct a Taylor series expansion of the local solution. As the

¹A paraître dans *Journal of Computational Physics*.

Cauchy-Kovalewski procedure is based on Taylor series expansions, it is not able to handle systems with stiff source terms since the Taylor series diverges for this case. Therefore, in this article, we present a new strategy that replaces the Cauchy-Kovalewski procedure for high order time interpolation : we present a special local space-time discontinuous Galerkin (DG) finite element scheme that is able to handle arbitrarily stiff source terms in a stable manner. The solution of this space-time DG method can be proven to have several important robustness properties in the presence of stiff source terms. This step is the only part of the entire algorithm which is locally implicit. The third and last step of the proposed ADER finite volume schemes consists of the standard explicit space-time integration over each control volume, using the local space-time DG solutions at the Gaussian integration points for the intercell fluxes and for the space-time integral over the source term. We will show numerical convergence studies for nonlinear systems in one space dimension with both non-stiff and with very stiff source terms up to sixth order of accuracy in space and time. The application of the new method to a large set of different test cases is shown, in particular the stiff scalar model problem of LeVeque and Yee [LY90], the relaxation system of Jin and Xin [JX95] and the full compressible Euler equations with stiff friction source terms.

Key words Hyperbolic balance laws, stiff source terms, finite volume schemes, ADER approach, local space-time discontinuous Galerkin method, WENO reconstruction.

5.1 Introduction

In this paper, we are concerned with solving numerically one-dimensional hyperbolic systems of *balance* laws (SBL), namely :

$$(5.1) \quad \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}, x, t),$$

where $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ is the conservative state, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ is the flux and $\mathbf{S}(\mathbf{u}, x, t)$ is the source term. The homogeneous system associated to (5.1) is the following hyperbolic system of conservation laws (SCL) :

$$(5.2) \quad \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0.$$

The definition of hyperbolicity only concerns system (5.2) above ; it means that the Jacobian matrix of $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ with respect to \mathbf{u} has real eigenvalues and a set of associated eigenvectors which form a basis of \mathbb{R}^d , where d is the dimension of vector \mathbf{u} . Divergence-free system associated to (5.1) is the name we give to the system

$$(5.3) \quad \partial_t \mathbf{u} = \mathbf{S}(\mathbf{u}, x, t),$$

which is a system of ordinary differential equations (SODE) since it is assumed that no derivative of \mathbf{u} appears through the function \mathbf{S} . Coming from a wide range of different fields, a large number of physical models can be cast in the SBL form (5.1). Fluid mechanics is particularly concerned, since compressible fluid dynamics is usually modeled by the Euler system, which is a hyperbolic SCL. In this case, the source term can model the presence of other physical phenomena, such as gravity, geometrical reaction, friction, chemical reaction, etc.

We now restrict our analysis to source terms of the form $\mathbf{S}(\mathbf{u}, x)$. Compared with SCL, the presence of a source term generally has important consequences on the behaviour of SBL solutions. First, SBL may have non trivial *steady solutions*, namely solutions $\tilde{\mathbf{u}}(x)$ of the following

system :

$$(5.4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{u}}, x).$$

This situation occurs for instance in the case of an isentropic Euler system with gravity or geometrical reaction. Second, SBL may tend towards reduced systems as we will explain now. At least two process are involved in SBL : a conservative process associated to the homogeneous part (5.2) with a characteristic speed ν_f , and a dissipative/productive process associated to the divergence-free part (5.3) with a characteristic speed ν_S . If the time derivative is scaled according to the speed ν_f , the dimensionless form of SBL (5.1) reads as

$$(5.5) \quad \partial_{\bar{t}} \bar{\mathbf{u}} + \partial_{\bar{x}} \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\epsilon} \bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{x}),$$

where bars mean that variables are dimensionless and where $\epsilon \equiv \frac{\nu_f}{\nu_S}$ is the ratio between characteristic speeds. A very small ratio $\epsilon \ll 1$ means that the dissipative/productive process is too fast, compared with the conservative process, to be fully observed. Such a source term is called *stiff* source term. The presence of a stiff source term may make tending the original system towards an asymptotic *reduced system* (see [CLL94]), which can be of different mathematical nature than the original one. This situation occurs for instance in the case of an isentropic Euler system with large friction : the asymptotic limit of the original hyperbolic system is the porous media equation (see [HL92] and [HMP05]), which is parabolic.

By integrating system (5.1) over a finite space-time control volume \mathcal{Q}_i one obtains a finite volume formulation for the system of balance laws (5.1), which usually takes the form

$$(5.6) \quad \bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) + \Delta t \bar{\mathbf{S}}_i.$$

This is shown in more detail in the following section. We emphasize that the exact solution of (5.1) also fulfills (5.6) exactly if all integrals are computed exactly. The integration of (5.1) in space and time gives rise to a temporal integral of the flux across the element boundaries $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}$ and to a space-time integral $\bar{\mathbf{S}}_i$ of the source term inside \mathcal{Q}_i . In practice, to use the finite volume formulation (5.6) as a numerical tool for real computations, one must replace the integrals of the flux and the source by some suitable numerical approximations, that is to say one must choose a concrete numerical scheme.

For SCL, only a numerical flux must be chosen. In this case, the required properties are only the classical ones, namely consistency, stability and accuracy. For SBL, a numerical flux and a numerical source must be chosen. Here, the classical properties for each numerical term are also required, but additional properties are needed for the global numerical scheme, that is to say for the pair numerical flux and numerical source :

- the scheme should be *well-balanced*, which means that it is able to preserve steady states numerically.
- the scheme should be robust, even on *coarse grids* if the source term is stiff. A coarse grid is a grid whose size does not take into account the source term. In other words, characteristic space step and characteristic time step are based on the associated homogeneous SCL only.
- the scheme should be *asymptotically-consistent* (or *asymptotic preserving*) if the source term is stiff, which means that it gives the correct asymptotic behaviour even if the source term is underresolved.

In the last three decades, powerful numerical fluxes have been proposed to solve hyperbolic SCL, for example the fluxes of Godunov [God59], Osher [EO81, OS82] and Roe [Roe81] as well as the various HLL-type fluxes based on the approximate Riemann solver of Harten, Lax and van Leer [HLv83], see e.g. [Ein88, EMRS91, TSS94]. A naive approach to solve SBL would consist of using one of these schemes for the flux $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}$ and using a space-centered explicit scheme for the source $\bar{\mathbf{S}}_i$. In this case, the source part of method (5.6) becomes an explicit Euler scheme, which may be unstable, especially in the stiff case. In order to counter that, the numerical source is usually taken implicitly. Hence, the source part of method (5.6) becomes an implicit Euler scheme, which is unconditionally stable. Anyway, it is well-known that using a classical numerical flux and a space-centered numerical source leads to spurious numerical results; more precisely, the global scheme is neither well-balanced (see [BV94], [GL96], [Gos00] for instance), nor asymptotically-consistent (see [Pem93a], [BS95], [BOP07] for instance). Consequently, several interesting approaches have been proposed to overcome that, as we will see in the following paragraph.

To solve SBL, very commonly used approaches are *splitting* schemes. A splitting approach (also called *fractional step method*) consists of solving iteratively the associated SCL with a classical finite volume scheme, and then the associated SODE with a classical numerical tool, like Runge-Kutta or predictor-corrector methods. The accuracy of the global scheme depends on the number and the order of these sub-steps; for example, a three sub-stage Strang splitting (see [Str68]) is second order accurate in time, but in the non stiff case only, as pointed out in [Jin95]. Although simple and robust, classical first order splittings and Strang splittings lead to global schemes that are neither well-balanced, nor asymptotically-consistent (see [LY90]) because the coupling between numerical flux and numerical source only occurs through the initial condition of each sub-step. Better splitting schemes for particular SBL have been proposed (see [BJ02], [BS95], [MC07], [CJR97]), and are asymptotically-consistent because at least one of the sub-steps takes into account both flux divergence and source term. The high order splitting scheme proposed by Pareschi and Russo [PR00] is asymptotically consistent with the stiff limit and can also reach high order of accuracy in the stiff limit, but it is not uniformly accurate in the whole possible range of the stiffness parameter ϵ .

Another simple approach to solve SBL consists of upwinding the source at the interfaces (*USI schemes*). In the original version of USI schemes (see [BV94], [Jin01]), a classical Riemann solver is first used to evaluate numerically the solution $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}$ of the homogeneous Riemann problem (without source term). This solution is then used in a first order finite volume scheme as argument of the flux, but also as argument of the source term in $\bar{\mathbf{S}}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{S}(\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}) + \mathbf{S}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}))$, so that the same numerical information - based on the homogeneous system only - is given to the flux and the source term, which makes the scheme at least approximately well-balanced. More recently, other USI scheme versions have been proposed, which ensure that the scheme is also formally well-balanced (see [PS03], [BPV01]). The main drawback of these approaches is that the global scheme must be explicit, thus problems may occur in the stiff case. In [BOP07], a new version of USI schemes, designed for stiff relaxation SBL, has been proposed. The resulting scheme is robust, formally asymptotically-consistent and stable under a classical CFL condition, but obtains only first order of accuracy.

In the *well-balanced schemes* (see [GL96], [LeR98], [Gos00]), the source term is seen as a nonconservative product of a larger system. Due to the presence of this nonconservative product, a particular path has to be chosen instead of the classical Rankine-Hugoniot relations. This path can be chosen in such a way that the well-balanced property is formally imposed to

the scheme. Well-balanced schemes are very efficient to maintain steady-states under classical CFL condition $\Delta t \simeq \mathcal{O}(\Delta x)$ (see [Gos00]), but are not designed to capture the good asymptotic behaviour imposed by a stiff source term. More recently, a new version of well-balanced schemes which is also asymptotically-consistent has been proposed for a particular system (see [GT04]), but the resulting scheme is only stable under a very restrictive parabolic CFL condition of the type $\Delta t \simeq \mathcal{O}(\Delta x^2)$.

To solve SBL numerically, other approaches have been proposed. Sometimes, the Riemann problem considered takes into account the source term presence (*generalized Riemann problem*), but solving such a problem asks for additional hypothesis : see [LR88] for one possibility and [GMP84] for an other. Both methods give well-balanced schemes, but are not robust enough to deal with stiff source terms. Concerning stiff relaxation systems, another approach consists of solving numerically the asymptotic reduced system instead of solving the original SBL (see [Bér96], [BOP07]). In this case, numerical results can only be obtained in the stiff case, thus some information is lost from the original SBL. In [LM02] it was pointed out that a semi-discrete discontinuous Galerkin (DG) scheme, i.e. only applying the DG space-discretization and remaining continuous in time, is an asymptotically-consistent scheme for linear systems with stiff relaxation. However, since the main problem of stiff SBL is precisely the *time discretization*, this theoretical result given in [LM02] is only of very limited use in practice. Another idea proposed in [BD06] to solve nonlinear SBL is to use a combination of two tools. First, a relaxation scheme (see [JX95]) is used in order to obtain a linear, but larger, SBL. Second, a well-balanced scheme designed to capture the good asymptotic behaviour is applied on the larger system. The global scheme has many good properties, but is only of first order of accuracy. Finally, some asymptotically-consistent schemes have been derived from the classical upwind flux (see [Pem93b], [JL96], [NP00]). In these cases, the numerical flux is modified by the presence of the source term.

To our knowledge, a lot of tools to solve numerically SBL have been proposed up to now. The best ones among those are well-balanced and asymptotically-consistent, but none of them allows to reach arbitrary orders of accuracy in space and time while being stable under classical CFL condition. The aim of this article is now to construct a method for SBL which is at the same time asymptotically consistent and can reach any order of accuracy in space and time under a standard CFL stability condition. The structure of the paper is as follows : First, in section 5.2 we show the construction of our arbitrary high order finite volume method for systems of balance laws. To assure monotonicity of the numerical solution in the vicinity of discontinuities, we briefly discuss the nonlinear WENO reconstruction operator in section 5.2.1, which is necessary to obtain a high order polynomial data representation from the cell averages before each time step. Then, the main building block of our finite volume discretization is presented in the subsequent section 5.2.2, namely a local space-time discontinuous Galerkin scheme used to evolve the reconstruction polynomials in time taking into account simultaneously the flux as well as the stiff source term. Numerical convergence studies are carried out in section 5.3 for smooth non-stiff and very stiff test problems. Applications of our scheme to various linear and nonlinear systems of balance laws with stiff source terms are shown in section 5.4 and a summary with conclusions and an outlook regarding future work is given in section 5.5.

5.2 An explicit arbitrary high order accurate finite volume scheme for nonlinear hyperbolic systems with stiff source terms

The aim of this article is to find high order accurate non-oscillatory numerical solutions for hyperbolic systems of balance laws for the vector of conserved quantities $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ of the form

$$(5.7) \quad \begin{cases} \text{PDE : } & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \\ \text{IC : } & \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \end{cases}$$

where $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ is in general a nonlinear function of the state \mathbf{u} and $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ may be a stiff nonlinear source term. To illustrate the general framework of the method in the simplest possible way we restrict ourselves in the whole paper to one space dimension. The extension to multiple space dimensions can be done and will be the topic of future research.

The spatial computational domain $\Omega \subset \mathbb{R}$ is covered completely by pairwise disjoint spatial elements $Q_i =]x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}[$, with $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ and the cell average of $\mathbf{u}(x, t)$ within Q_i is defined at time t^n as

$$(5.8) \quad \bar{\mathbf{u}}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t^n) dx.$$

We furthermore define the space-time element spanned by the spatial element Q_i and the time step $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ as $\mathcal{Q}_i = Q_i \times]t^n; t^n + \Delta t[$. The associated relative space and time coordinates $0 \leq \xi \leq 1$ and $0 \leq \tau \leq 1$, within one element \mathcal{Q}_i are given by the relations

$$(5.9) \quad x = x_{i-\frac{1}{2}} + \xi \cdot \Delta x_i, \quad \text{and} \quad t = t^n + \tau \cdot \Delta t.$$

In the following, the numerical solution of (5.7) valid inside each element \mathcal{Q}_i will be denoted with $\mathbf{u}_i(\xi, \tau)$. A standard finite volume discretization of (5.7) is given after integration of (5.7) over each space-time element \mathcal{Q}_i as follows :

$$(5.10) \quad \bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) + \Delta t \bar{\mathbf{S}}_i,$$

with

$$(5.11) \quad \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \int_0^1 \mathbf{f}_h(\mathbf{u}_i(1, \tau), \mathbf{u}_{i+1}(0, \tau)) d\tau \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{S}}_i = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{S}(\mathbf{u}_i(\xi, \tau)) d\xi d\tau,$$

where $\mathbf{f}_h(\mathbf{u}_i(1, \tau), \mathbf{u}_{i+1}(0, \tau))$ denotes a numerical flux function (Riemann solver) that depends on the two arguments $\mathbf{u}_i(1, \tau)$ and $\mathbf{u}_{i+1}(0, \tau)$, which are the boundary extrapolated data on the left and on the right side of the element interface $i + \frac{1}{2}$. For an overview of Riemann solvers see [Tor97]. For all computations shown in this paper we use the Rusanov flux, which is also often called the local Lax-Friedrichs flux. The Rusanov flux is a special case of the HLL flux, with a particularly simple wave speed estimate which is taken to be the maximum of the absolute values of the left and right eigenvalues. For an explicit standard first order Godunov-type finite volume scheme, one would now simply have to set $\mathbf{u}_i(\xi, \tau) = \bar{\mathbf{u}}_i^n$ and $\mathbf{u}_{i+1}(\xi, \tau) = \bar{\mathbf{u}}_{i+1}^n$ for the arguments of the numerical flux and inside the source term integral.

We emphasize that formula (5.10) together with (5.11) allows the construction of *arbitrary* high

order accurate finite volume schemes, provided the representation of the numerical solution $\mathbf{u}_i(\xi, \tau)$ inside each element and as a consequence the arguments of the numerical flux function and the source term are high order accurate in space and time. Since (5.10) only computes the time update of the cell averages $\bar{\mathbf{u}}_i^n$ from time t^n to time t^{n+1} we need to reconstruct higher order polynomial data from these cell averages $\bar{\mathbf{u}}_i^n$ to get better estimates for the arguments of the flux function and the source term in the integrals appearing in (5.11).

Therefore, as described in detail in the subsequent sections, the necessary steps to construct an arbitrary high order essentially non-oscillatory explicit one-step finite volume scheme are the following : (I) Nonlinear (non-oscillatory) reconstruction of spatial polynomials from the given cell averages at time t^n . (II) Local solution of the initial value problem (5.7) inside each element, where the initial data is given by the spatial reconstruction polynomial at time t^n . (III) Numerical integration of the integrals in (5.11) and update of the cell averages according to (5.10).

5.2.1 Nonlinear reconstruction technique

In this section we briefly discuss the proposed nonlinear weighted essentially non-oscillatory (WENO) reconstruction procedure to reconstruct higher order polynomial data within each spatial cell Q_i at time t^n from the given cell averages $\bar{\mathbf{u}}_i^n$. This corresponds to step (I) as outlined at the end of the previous section. We emphasize already at this point that the reconstruction procedure is *nonlinear* and depends strongly on the input data $\bar{\mathbf{u}}_i^n$. Thus, the resulting numerical scheme, even when applied to a completely linear PDE, will be *nonlinear* and thus it will not be possible to give a closed expression of the scheme.

The reconstruction procedure described here for the one-dimensional case follows directly from the guidelines given in [DK07] for general unstructured two- and three-dimensional meshes. It reconstructs *entire polynomials*, as the original ENO approach proposed by Harten *et al.* in [HEOC87]. However, we formally write our method like a WENO scheme [JS96, LOC94] with a particularly simple choice for the linear weights. The most important difference of our approach compared to classical WENO schemes is that standard WENO methods reconstruct *point values* at the Gaussian integration points instead of an entire polynomial valid inside each element Q_i . Reconstruction is done for each element on a reconstruction stencil \mathcal{S}_i^s , which is given by the following union of the element Q_i and its neighbors Q_j ,

$$(5.12) \quad \mathcal{S}_i^s = \bigcup_{j=i+s-k}^{i+s+k} Q_j,$$

where s is the stencil shift with respect to the central element Q_i and k is the spatial extension of the stencil to the left and the right. A central reconstruction stencil is given by $s = 0$, an entirely left-sided stencil is given by $s = -k$ and an entirely right-sided stencil is given by $s = k$. In our approach, we always will use the three fixed reconstruction stencils \mathcal{S}_i^0 , \mathcal{S}_i^{-k} and \mathcal{S}_i^k . Given the cell average data $\bar{\mathbf{u}}_i^n$ in all elements Q_i we are looking for a spatial reconstruction polynomial obtained from \mathcal{S}_i^s at time t^n of the form

$$(5.13) \quad \mathbf{w}_i^s(\xi, t^n) = \sum_{l=0}^M \Psi_l(\xi) \hat{\mathbf{w}}_l^{(i,s)}(t^n) := \Psi_l(\xi) \hat{\mathbf{w}}_l^{(i,s)}(t^n),$$

where we use the rescaled Legendre polynomials for the spatial reconstruction basis functions $\Psi_l(\xi)$ such that the $\Psi_l(\xi)$ form an orthogonal basis on the unit interval $I = [0; 1]$. In the following, we will use standard tensor index notation, implying summation over indices appearing twice. The number of polynomial coefficients (degrees of freedom) is $L = M + 1$, where M is the degree

of the reconstruction polynomial. To compute the reconstruction polynomial $\mathbf{w}_i(\xi, t^n)$ valid for element Q_i we require integral conservation for all elements Q_j inside the stencil \mathcal{S}_i^s , i.e.

$$(5.14) \quad \int_{Q_j} \mathbf{w}_i^s(\xi, t^n) d\xi = \int_{Q_j} \Psi_l(\xi) d\xi \cdot \hat{\mathbf{w}}_l^{(i,s)}(t^n) = \bar{\mathbf{u}}_j^n, \quad \forall Q_j \in \mathcal{S}_i^s.$$

Equation (5.14) yields a linear equation system of the form

$$(5.15) \quad A_{jl} \cdot \hat{\mathbf{w}}_l^{(i,s)}(t^n) = \bar{\mathbf{u}}_j^n$$

for the unknown coefficients $\hat{\mathbf{w}}_l^{(i,s)}(t^n)$ of the reconstruction polynomial on stencil \mathcal{S}_i^s . Since we choose $k = M/2$ for even M and $k = (M + 1)/2$ for odd M , the number of elements in \mathcal{S}_i^s may become larger than the number of degrees of freedom L . In this case, we use a constrained least-squares technique according to [DK07] to solve (5.15).

To obtain the final non-oscillatory reconstruction polynomials for each Q_i at time t^n , we finally construct a data-dependent nonlinear combination of the polynomials $\mathbf{w}_i^0(\xi, t^n)$, $\mathbf{w}_i^{-k}(\xi, t^n)$ and $\mathbf{w}_i^k(\xi, t^n)$ obtained from the central, left-sided and right-sided stencils as follows :

$$(5.16) \quad \mathbf{w}_i(\xi, t^n) = \hat{\mathbf{w}}_l^i(t^n) \Psi_l(\xi),$$

with

$$(5.17) \quad \hat{\mathbf{w}}_l^i(t^n) = \omega_0 \hat{\mathbf{w}}_l^{(i,0)}(t^n) + \omega_{-k} \hat{\mathbf{w}}_l^{(i,-k)}(t^n) + \omega_k \hat{\mathbf{w}}_l^{(i,k)}(t^n).$$

The nonlinear weights ω_s are given by the relations

$$(5.18) \quad \omega_s = \frac{\tilde{\omega}_s}{\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_{-k} + \tilde{\omega}_k}, \quad \tilde{\omega}_s = \frac{\lambda_s}{(\sigma_s + \epsilon)^r}.$$

In our particular formulation, the oscillation indicators σ_s are computed from

$$(5.19) \quad \sigma_s = \Sigma_{lm} \hat{\mathbf{w}}_l^s(t^n) \hat{\mathbf{w}}_m^s(t^n), \quad \text{with} \quad \Sigma_{lm} = \sum_{\alpha=1}^M \int_0^1 \frac{\partial^\alpha \Psi_l(\xi)}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^\alpha \Psi_m(\xi)}{\partial \xi^\alpha} d\xi.$$

Here, Σ_{lm} is the universal oscillation indicator matrix for the reference element Q_E that does neither depend on the problem nor on the mesh, see [DK07]. The parameters ϵ and r are constants for which we typically choose $\epsilon = 10^{-14}$ and $r = 12$. For the linear weights λ_s we choose $\lambda_{-k} = \lambda_k = 1$ and a very large linear weight λ_0 on the central stencil, typically $\lambda_0 = 10^5$. It has been shown previously [JS96, LOC94] that the numerical results are quite insensitive to the WENO parameters ϵ and r and also with respect to the linear weight on the central stencil λ_0 , see [DK07].

The proposed reconstruction usually uses the accurate and linearly stable central stencil reconstruction in those regions of Ω where the solution is smooth because of the large linear weight λ_0 . However, due to the strongly nonlinear dependence of the weights ω_s on the oscillation indicators σ_s , in the presence of discontinuities the smoother left- or right-sided stencils are preferred, as for standard ENO and WENO methods. For the nonlinear scalar case, the reconstruction operator described above can be directly applied to the cell averages \bar{u}_i^n of the conserved quantity u . For nonlinear hyperbolic systems, the reconstruction should be done in characteristic variables [HEOC87, DKTT07] in order to avoid spurious oscillations that may appear when applying ENO or WENO reconstruction operators component-wise to nonlinear hyperbolic systems.

The result of the reconstruction procedure is a non-oscillatory spatial polynomial $\mathbf{w}_i(\xi, t^n)$ defined at time t^n inside each spatial element Q_i . However, we still need to compute the temporal evolution of these polynomials inside each space-time element \mathcal{Q}_i in order to be able to compute the integrals appearing in (5.11).

5.2.2 The local space-time discontinuous Galerkin scheme

In previously published ADER finite volume schemes (see e.g. [DK07, DKTT07, TT05a, TT05b]) and also in the original ENO scheme of Harten *et al.* [HEOC87] the nonlinear reconstruction step (I) as well as the numerical integration and update step (III) as outlined at the end of section 5.2 are very similar compared with the new scheme proposed in this article. The only main difference lies in the solution of the local initial value problem (IVP) defined in step (II). In ADER finite volume schemes and also in the original ENO approach the temporal evolution of the reconstruction polynomial is computed using the so-called Cauchy-Kovalewski or Lax-Wendroff procedure. This procedure constructs a local solution of the IVP making the ansatz of a local time Taylor series expanded at time level t^n , where then time derivatives are replaced by spatial derivatives differentiating repeatedly the governing PDE with respect to space and time. The spatial derivatives are obtained from the reconstruction polynomials at time t^n .

It is a well known fact that methods based on Taylor series usually do not work in the presence of stiff source terms. Therefore, we propose to replace the Cauchy-Kovalewski procedure by a new local space-time DG scheme in order to solve the local IVP in step (II). In our local space-time DG scheme, the usual integration by parts is done only in time and not in space, which establishes a distinct difference compared to the existing global space-time DG schemes [vdVvdV02]. A comparison of the classical Cauchy-Kovalewski procedure and the new local space-time DG scheme will be shown for a simple case to illustrate the difference in the quality of the solution of the local IVP.

Linear scalar model equation

To illustrate the construction and the theoretical properties of our proposed method, in this section we only consider the simple linear scalar model equation with the linear flux and source functions

$$(5.20) \quad f(u) = au \quad \text{and} \quad S(u) = -\nu u, \quad a > 0, \nu > 0,$$

where the stiffness of the relaxation source term is determined by the parameter ν and where we suppose periodic boundary conditions for the moment.

The space of basis and test functions V_h of the local space-time DG scheme is defined to be the space spanned by piecewise polynomials given by the space-time tensor products of the scaled Legendre polynomials $\Psi_i(\xi)$ and $\Psi_j(\tau)$ of degree $0 \leq i, j \leq M$, i.e.

$$(5.21) \quad \Phi_k = \Phi_k(\xi, \tau) = \Psi_i(\xi) \cdot \Psi_j(\tau).$$

In eqn. (5.21) the index k with $1 \leq k = k(i, j) \leq N_d$ is a mono-index ranging from 1 to the number of degrees of freedom $N_d = (M + 1)^2$, computed from the index pair (i, j) . As already defined above, $0 \leq \xi \leq 1$ and $0 \leq \tau \leq 1$ are the spatial and the temporal coordinates in the space-time reference element $\mathcal{Q}_E = [0; 1] \times [0; 1] \in \mathbb{R}^2$. In the following, we will use the following two scalar products of two functions $f(\xi, \tau)$ and $g(\xi, \tau)$,

$$(5.22) \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \tau) \cdot g(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad [f(\xi, \tau), g(\xi, \tau)] = \int_0^1 f(\xi, \tau) \cdot g(\xi, \tau) d\xi,$$

where the first one denotes the space-time scalar product over the space-time reference element \mathcal{Q}_E and the second one is the purely spatial scalar product over the spatial reference element

$\mathcal{Q}_E = [0; 1]$. The local numerical solution u_i of (5.7) inside each space-time control volume \mathcal{Q}_i is approximated within the reference element \mathcal{Q}_E using the basis functions Φ_k as follows :

$$(5.23) \quad u_i = u_i(\xi, \tau) = \sum_{l=1}^{N^d} \Phi_l(\xi, \tau) \cdot \hat{u}_l^i := \Phi_l(\xi, \tau) \hat{u}_l^i,$$

where we again use the classical Einstein summation convention for tensor calculus, which implies summation over all indices appearing twice.

The proposed local space-time discontinuous Galerkin finite element method is now obtained by first rewriting the governing PDE (5.7) together with the assumption (5.20) in terms of the variables in the reference element, i.e.

$$(5.24) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} u + a^* \frac{\partial}{\partial \xi} u = -\nu^* u,$$

with $a^* = \Delta t \xi_x \cdot a$ and $\nu^* = \Delta t \cdot \nu$.

Multiplication of the modified governing PDE with test functions $\Phi_k \in V_h$ and integration over the reference element \mathcal{Q}_E yields

$$(5.25) \quad \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \tau} u_i \right\rangle + a^* \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} u_i \right\rangle = -\nu^* \langle \Phi_k, u_i \rangle.$$

For the space-time discontinuous Galerkin scheme presented in [vdVvdV02] one would now have to integrate both terms on the left hand side by parts in space and time in order to introduce the information from the neighbor elements and to shift the spatial derivative operator onto the test function. For our purposes, however, the integration by parts in space is *not* required since we want to keep a *local* formulation that does not need any information from the neighbor elements but for which it is sufficient to provide an initial condition. Therefore, we only use the integration by parts in time for the first term that contains the time derivative, and obtain

$$(5.26) \quad [\Phi_k(\xi, 1), u_i(\xi, 1)] - [\Phi_k(\xi, 0), w_i(\xi, t^n)] - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_k, u_i \right\rangle + a^* \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} u_i \right\rangle = -\nu^* \langle \Phi_k, u_i \rangle.$$

The spatial scalar products appearing in (5.26) correspond to the fluxes in time direction. Due to the causality principle the future has no influence on the past, i.e. we can take the numerical solution *inside* the element itself for the flux at relative time $\tau = 1$, whereas the flux at relative time $\tau = 0$ will be completely defined by the initial condition $w_i(\xi, t^n) = \Psi_m(\xi) \hat{w}_m^i(t^n)$. The initial condition is hence given by the reconstruction polynomials obtained from the reconstruction operator applied to the cell averages at the current time t^n . We recall that the $\Psi_m(\xi)$ are the reconstruction basis functions introduced in section 5.2.1. Please note that due to the use of a *discontinuous* Galerkin approximation, in general $w_i(\xi, t^n) \neq u_i(\xi, 0^+)$, i.e. the reconstruction polynomials at $t = t^n$ do not necessarily agree with the boundary extrapolated polynomial $u_i(\xi, 0^+)$ of the space-time DG solution inside element \mathcal{Q}_i at $\tau = 0^+$. Inserting the time fluxes and the ansatz for the numerical solution (5.23) into (5.26) yields

$$(5.27) \quad [\Phi_k(\xi, 1), \Phi_l(\xi, 1)] \hat{u}_l^i - [\Phi_k(\xi, 0), \Psi_m(\xi)] \hat{w}_m^i(t^n) - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_k, \Phi_l \right\rangle \hat{u}_l^i + a^* \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_l \right\rangle \hat{u}_l^i = -\nu^* \langle \Phi_k, \Phi_l \rangle \hat{u}_l^i.$$

Introducing the element mass matrix $M_{kl} = \langle \Phi_k, \Phi_l \rangle$, the stiffness matrices with respect to time $K_{kl}^\tau = \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_k, \Phi_l \right\rangle$ and space $K_{kl}^\xi = \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_l \right\rangle$ as well as the flux matrices $F_{km}^0 = [\Phi_k(\xi, 0), \Psi(\xi)]$

and $F_{kl}^1 = [\Phi_k(\xi, 1), \Phi_l(\xi, 1)]$ for relative time $\tau = 0$ and $\tau = 1$, respectively, we obtain the following equation system for the unknowns \hat{u}_l^i :

$$(5.28) \quad Y_{kl} \hat{u}_l^i = F_{km}^0 \hat{w}_m^i(t^n).$$

The system has a unique solution if the system matrix

$$(5.29) \quad Y_{kl} = F_{kl}^1 - K_{kl}^\tau + a^* K_{kl}^\xi + \nu^* M_{kl}$$

is invertible. It will be shown in the following that this is always the case for any value of ν . Therefore, the solution of (5.28) can be written as

$$(5.30) \quad \hat{u}_l^i = Y_{kl}^{-1} \cdot F_{km}^0 \hat{w}_m^i(t^n).$$

We note that the local space-time DG scheme (5.27) requires the solution of the linear equation system (5.28) and thus is *locally implicit*. Due to the local character of the method, the computation of the space-time degrees of freedom \hat{u}_l^i can be done independently for each cell \mathcal{Q}_i , without considering neighbor elements. However, we emphasize that this is the only locally implicit part of the entire algorithm. The resulting finite volume scheme (5.10) is completely explicit.

Properties of the local space-time discontinuous Galerkin scheme

Well-posedness The mass matrix M_{kl} is diagonal since the functions $\Phi_k(\xi, \tau)$ form an orthogonal basis on the space-time reference element \mathcal{Q}_E with respect to the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Therefore, the system matrix Y_{kl} is diagonally dominant in the case $\nu \rightarrow \infty$ and thus the system (5.28) will be always well posed, especially in the stiff limit.

Boundedness of the solution In the following we want to show via asymptotic analysis that the solution u_i of (5.27) remains bounded in the limit $\nu \rightarrow \infty$. Even more, we will show that the discrete solution of (5.27) tends to zero as $\nu \rightarrow \infty$. We therefore write (5.27) with $\Phi_k \in V_h$ and $\nu^* = 1/\epsilon$, where $\epsilon > 0$ is a small parameter and $\nu \rightarrow \infty$ for $\epsilon \rightarrow 0$, as follows :

$$(5.31) \quad [\Phi_k(\xi, 1), u_i(\xi, 1)] - [\Phi_k(\xi, 0), w_i(\xi, t^n)] - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_k, u_i \right\rangle + a^* \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} u_i \right\rangle = -\frac{1}{\epsilon} \langle \Phi_k, u_i \rangle.$$

Furthermore, we write a series expansion for $u^i = u^i(\xi, \tau)$ in terms of the small parameter ϵ with $u_i^{(0)} \in V_h$, $u_i^{(1)} \in V_h$, and $u_i^{(2)} \in V_h$ as

$$(5.32) \quad u_i = u_i^{(0)} + \epsilon u_i^{(1)} + \epsilon^2 u_i^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

After inserting (5.32) into (5.31) we obtain the following equation system in terms of powers of ϵ :

$$(5.33) \quad \begin{aligned} & \epsilon^{-1} \left\langle \Phi_k, u_i^{(0)} \right\rangle + \\ & \epsilon^0 \left(\left[\Phi_k(\xi, 1), u_i^{(0)}(\xi, 1) \right] - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_k, u_i^{(0)} \right\rangle + a^* \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} u_i^{(0)} \right\rangle \right) + \\ & \epsilon^0 \left(\left\langle \Phi_k, u_i^{(1)} \right\rangle - [\Phi_k(\xi, 0), w_i(\xi, t^n)] \right) + \\ & \epsilon^1 \left(\left[\Phi_k(\xi, 1), u_i^{(0)}(\xi, 1) \right] \right) + \\ & \epsilon^1 \left(\left\langle \Phi_k, u_i^{(2)} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_k, u_i^{(1)} \right\rangle + a^* \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} u_i^{(1)} \right\rangle \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \quad \forall \Phi_k \in V_h$$

Since eqn. (5.33) must be fulfilled for *any* value of $\epsilon > 0$, all coefficients after the terms in ϵ must vanish. From the leading term ϵ^{-1} we therefore obtain

$$(5.34) \quad \left\langle \Phi_k, u_i^{(0)} \right\rangle = 0 \quad \forall \Phi_k \in V_h \quad \Rightarrow \quad u_i^{(0)} = 0.$$

Inserting (5.34) in (5.33) and considering the coefficients of the terms ϵ^0 we obtain

$$(5.35) \quad \left\langle \Phi_k, u_i^{(1)} \right\rangle - [\Phi_k(\xi, 0), w_i(\xi, t^n)] = 0,$$

and from the term ϵ^1 we get

$$(5.36) \quad \left\langle \Phi_k, u_i^{(2)} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_k, u_i^{(1)} \right\rangle + a^* \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} u_i^{(1)} \right\rangle = 0.$$

Equations (5.35) and (5.36) connect $u_i^{(1)}$ and $u_i^{(2)}$ with the initial condition $w_i(\xi, t^n)$. Since $w_i(\xi, t^n)$ does not depend explicitly on ϵ , from eqns. (5.34) - (5.36) and the ansatz (5.32) follows

$$(5.37) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_i(\xi, \tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\epsilon u_i^{(1)} + \epsilon^2 u_i^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) = 0.$$

From (5.37) follows the boundedness of $u_i(\xi, \tau)$ in \mathcal{Q}_i in the stiff limit $\epsilon \rightarrow 0$. This property is necessary to eliminate the stiffness from the numerical flux in (5.11) in the limit $\epsilon \rightarrow 0$. For our model problem (5.20) the numerical flux $f_h(u_i(1, \tau), u_{i+1}(0, \tau))$ in (5.11) is a *linear* function of its two arguments $u_i(1, \tau)$ and $u_{i+1}(0, \tau)$. Since (5.37) is valid independently for all elements \mathcal{Q}_i , we get $f_{i+\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ and $f_{i-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ for $\epsilon \rightarrow 0$.

Boundedness of the source term integral Even more important for the robustness of the finite volume scheme (5.10) is the boundedness of the source space-time integral \bar{S}_i defined in (5.11). For the linear scalar model equation (5.20) the source space-time integral reads with $1/\epsilon = \nu^* = \Delta t \nu$ together with the asymptotic ansatz (5.32) and eqn. (5.34) as

$$(5.38) \quad \bar{S}_i = -\nu \langle 1, u_i(\xi, \tau) \rangle = -\Delta t^{-1} \frac{1}{\epsilon} \langle 1, u_i(\xi, \tau) \rangle = -\frac{1}{\Delta t} \left\langle 1, u_i^{(1)} + \epsilon^1 u_i^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\rangle.$$

Using (5.35) and the conservation property (5.14) of the reconstruction operator, i.e. $[1, w_i(\xi, t^n)] = \bar{u}_i^n$, we finally obtain

$$(5.39) \quad \bar{S}_i = -\frac{1}{\Delta t} ([1, w_i(\xi, t^n)] + \mathcal{O}(\epsilon)) = -\frac{1}{\Delta t} (\bar{u}_i^n + \mathcal{O}(\epsilon)),$$

and in the stiff limit $\epsilon \rightarrow 0$ we have

$$(5.40) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{S}_i = -\frac{\bar{u}_i^n}{\Delta t}.$$

Inserting (5.37) and (5.40) into (5.10) and (5.11), we obtain the following finite volume scheme in the stiff limit :

$$(5.41) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \right) + \Delta t \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{S}_i = 0.$$

This means that for *any* bounded initial condition \bar{u}_i^n and for any bounded Δt (e.g. bounded by the standard CFL condition) our finite volume scheme of any order of accuracy captures the stiff limit of (5.7) with (5.20) *exactly*.

Comparison of the Cauchy-Kovalewski procedure with the local space-time DG scheme for a linear scalar ODE

As mentioned already before, in the original ENO approach of Harten *et al.* [HEOC87] and also for ADER finite volume schemes [DK07, DKTT07, TT05a, TMN01], the time-accurate temporal evolution of the reconstruction polynomials $w_i(\xi, t^n)$ is predicted inside each element within one time step using the Cauchy-Kovalewski procedure, where the local solution is computed inside each element via a temporal Taylor series in which the time derivatives are replaced by space derivatives using repeated differentiation of the governing partial differential equation (5.7). As an initial condition for this procedure, the reconstruction polynomials $w_i(\xi, t^n)$ at time $t = t^n$ are taken. In other words, we are looking for a *local* solution $u_i(\xi, \tau)$ of the initial value problem for (5.7) *inside* each space-time element \mathcal{Q}_i , where the initial condition is given by the reconstruction polynomials, i.e. $u(x(\xi), 0) = w_i(\xi, t^n)$.

Neglecting convection for the moment, i.e. setting $a = 0$, the PDE (5.7) with (5.20) reduces to the simple linear ordinary differential equation

$$(5.42) \quad \frac{\partial}{\partial t} u = -\nu u, \quad t \in \mathbb{R}_0^+,$$

whose solution is given by

$$(5.43) \quad u(t, \nu) = u(0)e^{-\nu t}.$$

For very large values of ν , the solution (5.43) tends to the discontinuous limit solution

$$(5.44) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} u(t, \nu) = \begin{cases} u(0) & \text{if } t = 0, \\ 0 & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

It is obvious that a Taylor series expanded at time $t = 0$ is not able to approximate such a discontinuous solution as given by (5.44). For this reason, the Cauchy-Kovalewski method can not be applied in this case to construct a local solution to (5.7) since it is based essentially on the applicability of the Taylor series expansion in time. In order to construct a polynomial approximation to (5.43) that is at the same time high order accurate *and* is able to capture the stiff limit (5.44), we have propose the new local space-time discontinuous Galerkin scheme (5.28) applied to (5.7) locally inside each element. The solution $u_i(\xi, \tau)$ of this local space-time DG scheme applied to all elements \mathcal{Q}_i is used in the finite volume scheme (5.10) to compute the numerical fluxes at the element interfaces and to compute the space-time integral of the source term in (5.11).

scheme is able to capture the limit (5.44) correctly. The correct behaviour of the local space-time DG scheme in the stiff limit $\nu \rightarrow \infty$ compared to the divergence of the classical Cauchy-Kovalewski procedure, which is normally used in ADER finite volume and ADER discontinuous Galerkin schemes [Dum05, DM06, TDBM07], is illustrated in Fig. 5.1. We show the numerical solutions obtained with sixth order schemes (basis polynomials Φ_k of maximal degree five) applied to (5.42) for increasing values of ν with the initial condition $u(0) = 1$. This figure shows very clearly that the Cauchy-Kovalewski procedure already fails for the small value of $\nu = 3$. For very large values of ν , the solution of the Cauchy-Kovalewski procedure is only correct in a very small interval $[0; \delta]$ ($0 < \delta \ll 1$) and diverges quickly in the remaining interval $]\delta; 1]$, whereas our new local space-time DG scheme apparently converges to the correct solution (5.44) of (5.42) for $\nu \rightarrow \infty$ in the interval $]\delta; 1]$. We note furthermore that the local space-time DG scheme produces an almost continuous solution at $\tau = 0$ for small values of ν and exhibits an increasing jump at $\tau = 0$ for increasing ν in order to capture correctly the discontinuous behaviour of (5.43). Note that in all cases shown $u(0) = 1$.

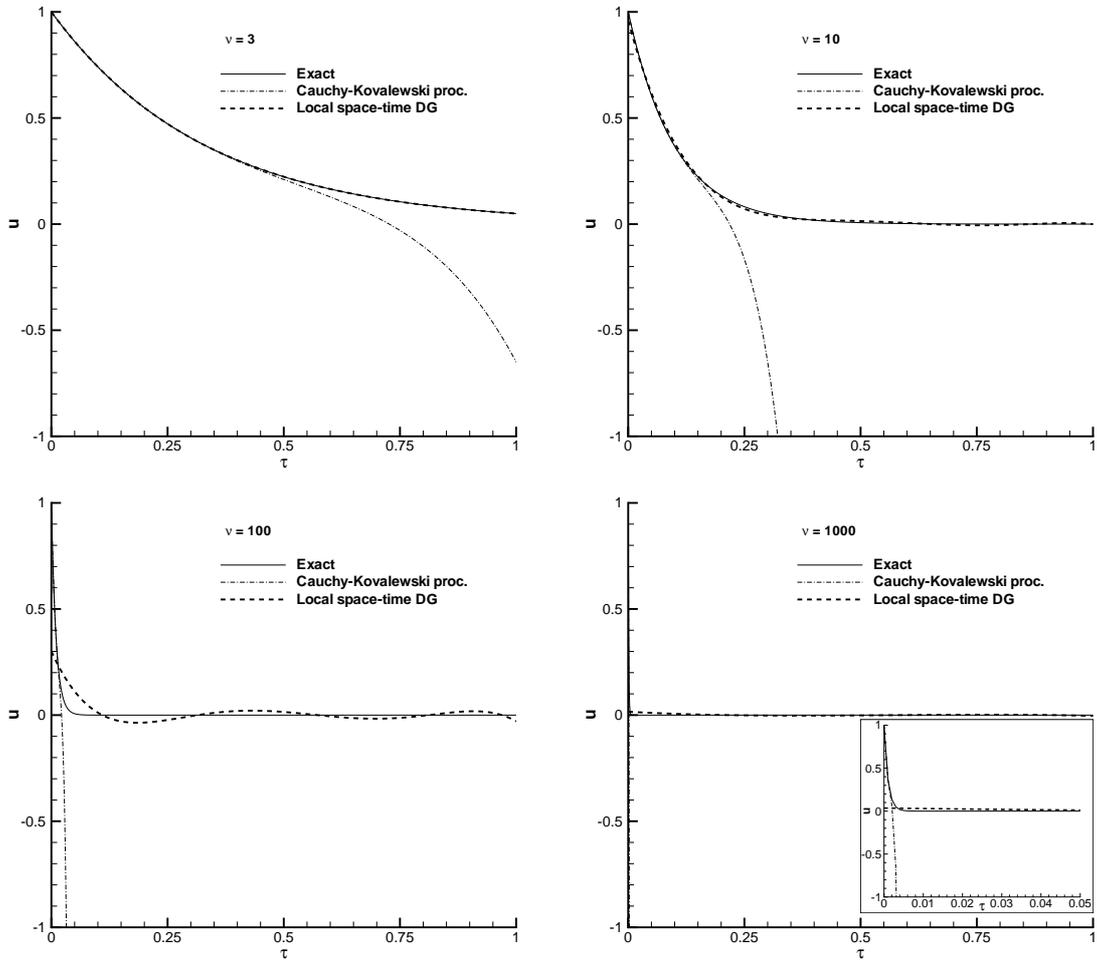


FIG. 5.1 – Exact solution and sixth order numerical solutions of (5.42) using the Cauchy-Kovalewski procedure based on a temporal Taylor series expansion and the new local space-time DG scheme for $\nu = 3$ (top left), $\nu = 10$, (top right), $\nu = 100$ (bottom left) and $\nu = 1000$ (bottom right).

General linear hyperbolic systems with stiff source terms

The extension of the proposed local space-time discontinuous Galerkin scheme to general linear hyperbolic systems is straightforward. We consider linear systems of the form

$$(5.45) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_p + A_{pq} \frac{\partial}{\partial x} u_q = -E_{pq} u_q,$$

where u_p is the vector of state of n unknowns, A_{pq} is a $n \times n$ matrix with real eigenvalues and with a complete set of eigenvectors. The $n \times n$ matrix E_{pq} must be positive definite. We then rewrite the system (5.45) in reference coordinates ξ and τ and obtain

$$(5.46) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_q + A_{pq}^* \frac{\partial}{\partial x} u_q = -E_{pq}^* u_q,$$

with $A_{pq}^* = \Delta t \xi_x \cdot A_{pq}$ and $E_{pq}^* = \Delta t \cdot E_{pq}$. The same steps as described in Section 5.2.2 can be applied and we finally obtain the equation system

$$(5.47) \quad \left(\delta_{pq} (F_{kl}^1 - K_{kl}^\tau) + A_{pq}^* K_{kl}^\xi + E_{pq}^* M_{kl} \right) \hat{u}_{ql}^i = \delta_{pr} F_{km}^0 \hat{w}_{rm}^i(t^n).$$

Here, δ_{pq} is the classical Kronecker symbol. The combination of the indices k, l, m for the degrees of freedom with the indices p and q for the variables can be interpreted as sub-array syntax. Using the sub-array syntax we denote the system matrix

$$(5.48) \quad Y_{pqkl} = \delta_{pq} (F_{kl}^1 - K_{kl}^\tau) + A_{pq}^* K_{kl}^\xi + E_{pq}^* M_{kl},$$

and formally write the solution of (5.47) as

$$(5.49) \quad \hat{u}_{ql}^i = Y_{pqkl}^{-1} \cdot \delta_{pr} F_{km}^0 \hat{w}_{rm}^i(t^n).$$

Eqn. (5.47) is a local linear equation system that can be solved for each element \mathcal{Q}_i independently and thus also leads to a locally implicit scheme for $u_i(\xi, \tau)$ and does not need any information from the neighboring elements.

General nonlinear hyperbolic systems with stiff source terms

For the construction of the space-time DG scheme for general nonlinear hyperbolic systems of conservation laws with source terms of the form (5.7), we also first re-write the system (5.7) in coordinates of the reference element as follows :

$$(5.50) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{f}^*(\mathbf{u}) = \mathbf{S}^*(\mathbf{u}),$$

with the modified flux and source function $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{u}) = \Delta t \xi_x \mathbf{f}(\mathbf{u})$ and $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^*(\mathbf{u}) = \Delta t \mathbf{S}(\mathbf{u})$. We then multiply with the test functions $\Phi_k(\xi, \tau)$, integrate over \mathcal{Q}_E and subsequently integrate the first term containing the time derivative by parts, as in the linear case, in order to obtain

$$(5.51) \quad [\Phi_k(\xi, 1), \mathbf{u}(\xi, 1)] - [\Phi_k(\xi, 0), \mathbf{u}(\xi, 0)] - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_k, \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{f}^* \right\rangle = \langle \Phi_k, \mathbf{S}^* \rangle.$$

Inserting the numerical fluxes in τ direction as well as the ansatz for the numerical solution (5.23) into (5.51) yields the following nonlinear system of equations for the unknowns $\hat{\mathbf{u}}_l^i$

$$(5.52) \quad \left[\Phi_k(\xi, 1), \Phi_l(\xi, 1) \right] \hat{\mathbf{u}}_l^i - [\Phi_k(\xi, 0), \Psi_m(\xi)] \hat{\mathbf{w}}_m^i(t^n) - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_k, \Phi_l \right\rangle \hat{\mathbf{u}}_l^i + \left\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{f}^*(\Phi_l \hat{\mathbf{u}}_l^i) \right\rangle - \left\langle \Phi_k, \mathbf{S}^*(\Phi_l \hat{\mathbf{u}}_l^i) \right\rangle = 0.$$

The necessity to solve the local nonlinear system of equations (5.52) adds further complications to our algorithm compared to the case of linear systems. Due to the locally implicit character of the local space-time DG scheme, the use of a Newton algorithm or other strategies for finding roots of nonlinear equation systems becomes necessary. In this paper, we apply the following strategy :

To compute the solution of (5.52) we first linearize the nonlinear system (5.50) with respect to the initial condition given by $\mathbf{w}^i(\xi, t^n)$, then we solve the resulting linear equation system (5.47) exactly using Gauss-Jordan elimination and obtain as result a first guess $\hat{\mathbf{u}}_l^{(i,1)}$ of the solution $\hat{\mathbf{u}}_l^i$ of (5.52). Linearizing about $\hat{\mathbf{u}}_l^{(i,1)}\Phi_l(\xi, 1)$ and solving the resulting linear system again exactly yields the second guess values $\hat{\mathbf{u}}_l^{(i,2)}$. This procedure is usually repeated for a total number of three times. The third guess values $\hat{\mathbf{u}}_l^{(i,3)}$ are then the starting point of a standard multivariate Newton method for nonlinear systems of equations as described e.g. in chapter 9.7 of [PTVF96]. We remark that for the solution of (5.52) the initial guess used as input for the Newton method remains very crucial even for so-called globally convergence Newton methods as described in [PTVF96]. We note that for nonlinear systems with stiff source terms, most of the computational time of our algorithm is spent in the solution of (5.52). Since the authors are not experts in the field of efficiently solving nonlinear systems of equations, there may be other, much more efficient techniques to solve (5.52). However, the main scope of this article is not to solve (5.52) efficiently but to validate the general approach.

We finally would like to point out that for the special case $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0$ the scheme (5.52) automatically reduces to a standard discontinuous Galerkin method for the nonlinear system of first order ordinary differential equations (ODE)

$$(5.53) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = \mathbf{S}(\mathbf{u}).$$

At this point, we would like to summarize again the necessary steps for our proposed explicit arbitrary high order accurate finite volume schemes for hyperbolic systems with stiff source terms :

- I. Compute the degrees of freedom $\hat{\mathbf{w}}_l^i(t^n)$ of the weighted essentially non-oscillatory (WENO) reconstruction polynomials $\mathbf{w}_i(\xi, t^n)$ at time t^n from the given cell averages $\bar{\mathbf{u}}_l^n$ of the finite volume scheme using (5.15)-(5.19).
- II. Compute the solution $\hat{\mathbf{u}}_l^i$ of the local space-time discontinuous Galerkin method (5.52), where the initial condition is given by the reconstructed degrees of freedom $\mathbf{w}_l^i(\xi, t^n)$ at time t^n .
- III. Use the solution $\mathbf{u}_i(\xi, \tau) = \Phi_l(\xi, \tau)\hat{\mathbf{u}}_l^i$ to compute the arguments for the source term and the numerical flux in (5.11) that are needed for the explicit finite volume scheme (5.10). The integrals appearing in eqn. (5.11) are computed using classical Gaussian quadrature formulae, see e.g. [Str71] for details. Update the cell averages according to (5.10) to the new time t^{n+1} and restart with step (I).

At the end of this section we would like to add a very important remark concerning systems of balance laws : In order to obtain a correct coupling of the flux and the source term inside the local space-time DG scheme (5.52) together with the finite volume discretization (5.10), numerical schemes of order of accuracy of at least *two* must be used, which means that the polynomial degree of the basis and test functions Φ_k must be at least *one*. This is due to the fact that the first order version of the local space-time DG scheme, i.e. the one with polynomial degree zero for the basis and test functions Φ_k , does *not couple* source and flux in the local solution $\mathbf{u}_i(\xi, \tau)$ because the term $\langle \Phi_k, \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{f}^*(\Phi_l \hat{\mathbf{u}}_l^i) \rangle$ in (5.52) vanishes in this case.

5.3 Numerical convergence studies

To assess the convergence behaviour of our method numerically, we solve the following nonlinear hyperbolic system with source terms, for which a non-trivial exact reference solution is known by construction :

$$(5.54) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) &= -\nu (u - u_e) + \frac{\partial}{\partial t} u_e + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} v_e^2 \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) &= -\nu (v - v_e) + \frac{\partial}{\partial t} v_e + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u_e^2 \right). \end{aligned}$$

It is easy to see that any differentiable function pair $u_e(x, t), v_e(x, t)$ satisfies eqn. (5.54). For our convergence studies, we choose the following smooth reference solution :

$$(5.55) \quad u_e(x, t) = U_0 + A_u \sin(kx - \omega t), \quad v_e(x, t) = V_0 + A_v \cos(kx - \omega t).$$

In particular, we choose the following parameters for the reference solution used in the numerical convergence studies : $U_0 = 4, V_0 = 6, A_u = 0.1, A_v = 0.3, k = \omega = 2\pi$. Equation (5.54) is solved on the computational domain $\Omega = [0; 1]$ with periodic boundary conditions. The Courant number is set in the following test cases to $CFL = 0.5$.

First, we assess the capability of our scheme to maintain the balance between the nonlinear advection operator on the left hand side and the source terms on the right hand side in the non-stiff case for $\nu = 10$. The initial conditions for u and v are in this case $u(x, 0) = u_e(x, 0)$ and $v(x, 0) = v_e(x, 0)$. We compute the problem for half a period, i.e. up to the final output time $t = 0.5$. The numerical convergence results obtained for the variable v with the proposed ADER finite volume schemes from second to sixth order of accuracy in space and time are shown in Table 5.1, where N_G denotes the number of grid cells used to discretize the domain Ω . The errors and the associated convergence rates between two successive grid refinements are shown in L^1, L^2 and L^∞ norm. Let $w(x, t)$ denote the second component v of the numerical reconstructed solution. The error norms are computed numerically according to

$$(5.56) \quad \|w - v_e\|_p = \left(\int_0^1 |w(x, t) - v_e(x, t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

using Gaussian quadrature rules of appropriate order. We emphasize that the norms are computed comparing the second component of the reconstructed solution against the exact reference solution v_e . As an approximation for the infinity norm, we take the maximum of the error obtained in any of the Gaussian integration points.

The results presented in Table 5.1 show clearly that the method converges with the designed order of accuracy. They furthermore indicate the capability of the method to maintain a good balance between the source terms on the right hand side of the governing equation and the nonlinear convection on the left hand side, respectively.

Second, we assess the accuracy and the robustness of the proposed schemes in the presence of a very stiff source term. Therefore, we choose in this second test case $\nu = 10^8$. Since we know that the stiff relaxation source term in the governing equation (5.54) will cause the solution to relax to the equilibrium given by the reference solution u_e, v_e from any initial condition, we choose a constant initial condition $u(x, 0) = 10, v(x, 0) = 2$, which is far from the equilibrium u_e, v_e and as a consequence in the first time steps the source is very stiff. Once the equilibrium $u = u_e, v = v_e$ has been reached, the scheme must be able to maintain it. The numerical convergence rates obtained for variable v with ADER finite volume schemes from second to

TAB. 5.1 – Numerical convergence rates for the non-stiff case ($\nu = 10$) obtained with ADER finite volume schemes from second to sixth order of accuracy in space and time.

N_G	L^1	L^2	L^∞	\mathcal{O}_{L^1}	\mathcal{O}_{L^2}	\mathcal{O}_{L^∞}
ADER-FV $\mathcal{O}2$, ($M = 1$). $\nu = 10$						
8	3.1079E-02	3.3731E-02	5.3694E-02			
16	6.4558E-03	7.8656E-03	1.5286E-02	2.3	2.1	1.8
32	1.1027E-03	1.5591E-03	4.6096E-03	2.5	2.3	1.7
64	1.9859E-04	3.2959E-04	1.1626E-03	2.5	2.2	2.0
128	2.8261E-05	5.5964E-05	2.8027E-04	2.8	2.6	2.1
ADER-FV $\mathcal{O}3$, ($M = 2$). $\nu = 10$						
8	4.0967E-03	5.3548E-03	1.0574E-02			
16	5.4254E-04	7.0971E-04	1.4511E-03	2.9	2.9	2.9
32	6.9171E-05	8.9516E-05	1.8292E-04	3.0	3.0	3.0
64	8.6332E-06	1.1171E-05	2.2846E-05	3.0	3.0	3.0
128	1.0816E-06	1.3965E-06	2.8546E-06	3.0	3.0	3.0
ADER-FV $\mathcal{O}4$, ($M = 3$). $\nu = 10$						
4	1.5831E-02	2.0495E-02	4.1219E-02			
8	1.1568E-03	1.3030E-03	2.2840E-03	3.8	4.0	4.2
16	6.8436E-05	7.6848E-05	1.3577E-04	4.1	4.1	4.1
32	4.1739E-06	4.6990E-06	8.8561E-06	4.0	4.0	3.9
64	2.5792E-07	2.9389E-07	5.4790E-07	4.0	4.0	4.0
ADER-FV $\mathcal{O}5$, ($M = 4$). $\nu = 10$						
4	1.3054E-02	1.5158E-02	2.4062E-02			
8	4.9450E-04	6.3210E-04	1.2255E-03	4.7	4.6	4.3
16	1.6178E-05	2.1234E-05	4.3206E-05	4.9	4.9	4.8
20	5.3607E-06	7.0209E-06	1.4525E-05	4.9	5.0	4.9
32	5.3921E-07	6.8677E-07	1.4518E-06	4.9	4.9	4.9
ADER-FV $\mathcal{O}6$, ($M = 5$). $\nu = 10$						
4	8.3790E-03	9.9571E-03	2.2749E-02			
8	1.6979E-04	2.0617E-04	5.0498E-04	5.6	5.6	5.5
12	1.5335E-05	1.8985E-05	4.7928E-05	5.9	5.9	5.8
16	2.7810E-06	3.4639E-06	9.0072E-06	5.9	5.9	5.8
20	7.5279E-07	9.5828E-07	2.5537E-06	5.9	5.8	5.6

sixth order for this very stiff case ($\nu = 10^8$) are shown in Table 5.2. From the results we can clearly conclude that the method is at the same time able to treat stiff source terms robustly and maintains an excellent balance between flux divergence and source term at the designed order of accuracy in space and time. To our knowledge, this is the first finite volume scheme ever presented in the research literature on stiff source terms that achieves arbitrary high order of accuracy in space and time. This is, of course, only valid for sufficiently smooth solutions.

TAB. 5.2 – Numerical convergence rates for the very stiff case ($\nu = 10^8$) obtained with ADER finite volume schemes from second to sixth order of accuracy in space and time.

N_G	L^1	L^2	L^∞	\mathcal{O}_{L^1}	\mathcal{O}_{L^2}	\mathcal{O}_{L^∞}
ADER-FV $\mathcal{O}2$, ($M = 1$). $\nu = 10^8$						
8	2.9784E-02	3.0049E-02	3.4246E-02			
16	6.3522E-03	7.2830E-03	1.1337E-02	2.2	2.0	1.6
32	5.2567E-04	8.5936E-04	1.7792E-03	3.6	3.1	2.7
64	1.2096E-04	2.1170E-04	4.3802E-04	2.1	2.0	2.0
128	1.5717E-05	3.8232E-05	1.0892E-04	2.9	2.5	2.0
ADER-FV $\mathcal{O}3$, ($M = 2$). $\nu = 10^8$						
8	3.5814E-03	5.0870E-03	9.2163E-03			
16	4.5652E-04	6.7004E-04	1.2552E-03	3.0	2.9	2.9
32	5.7309E-05	8.4607E-05	1.6027E-04	3.0	3.0	3.0
64	7.1382E-06	1.0613E-05	2.0140E-05	3.0	3.0	3.0
128	8.9658E-07	1.3275E-06	2.5379E-06	3.0	3.0	3.0
ADER-FV $\mathcal{O}4$, ($M = 3$). $\nu = 10^8$						
4	1.4142E-02	1.9636E-02	3.8569E-02			
8	1.0485E-03	1.2385E-03	2.3951E-03	3.8	4.0	4.0
16	6.4253E-05	7.5030E-05	1.4553E-04	4.0	4.0	4.0
32	3.9752E-06	4.6373E-06	9.0331E-06	4.0	4.0	4.0
64	2.4920E-07	2.8917E-07	5.5709E-07	4.0	4.0	4.0
ADER-FV $\mathcal{O}5$, ($M = 4$). $\nu = 10^8$						
4	1.3054E-02	1.5158E-02	2.4062E-02			
8	4.9450E-04	6.3210E-04	1.2255E-03	4.7	4.6	4.3
16	1.6179E-05	2.1235E-05	4.3216E-05	4.9	4.9	4.8
32	5.3935E-07	6.8713E-07	1.4690E-06	4.9	4.9	4.9
64	2.0147E-08	2.5747E-08	6.4216E-08	4.7	4.7	4.5
ADER-FV $\mathcal{O}6$, ($M = 5$). $\nu = 10^8$						
4	8.3790E-03	9.9571E-03	2.2749E-02			
8	1.6980E-04	2.0617E-04	5.0498E-04	5.6	5.6	5.5
12	1.5336E-05	1.8986E-05	4.7918E-05	5.9	5.9	5.8
16	2.7812E-06	3.4641E-06	8.9977E-06	5.9	5.9	5.8
20	7.5301E-07	9.5840E-07	2.5566E-06	5.9	5.8	5.6

5.4 Applications

5.4.1 Model system with linear flux and nonlinear source term

We consider the following class of linear advection systems with non linear relaxation :

$$(5.57) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \partial_x u = -\frac{1}{\epsilon} \frac{v}{\alpha(u)}, \end{cases}$$

where ϵ is a positive parameter and $\alpha(u)$ is any given function which satisfies $\alpha(u) > 0 \quad \forall u$ in the domain of interest and does not depend on ϵ . System (5.57) can be seen as a dimensionless system where ϵ is the ratio between the characteristic time of the relaxation process over the

characteristic time of the pure advection process. If the relaxation process is much faster than the advection process, namely if $\epsilon \ll 1$ which corresponds to the stiff case, it is possible to obtain the asymptotic limit of the system. An asymptotic expansion of the relaxing variable formally reads as

$$(5.58) \quad v = v_0 + \epsilon v_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

where v_0 and v_1 are unknown functions of x and t . Here we recall that expansion (5.58) should not be interpreted as a convergent mathematical series, but as a truncated formal expansion. Injecting (5.58) into system (5.57), we find iteratively that $v_0 = 0$ and $v_1 = -\alpha(u)\partial_x u$ for an arbitrary small value of ϵ . Thus, as $\epsilon \rightarrow 0$, variable v is given by the following equation :

$$(5.59) \quad v = -\epsilon\alpha(u)\partial_x u + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

and the asymptotic limit of system (5.57) reads as

$$(5.60) \quad \partial_t u = \epsilon \partial_x [\alpha(u)\partial_x u] + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

which is a non linear diffusion equation.

Example 1 : $\alpha(u) = 1$. We consider first the linear case $\alpha(u) = 1$. According to (5.60), as $\epsilon \rightarrow 0$, system (5.57) reduces to the well-known heat equation :

$$(5.61) \quad \partial_t u = \epsilon \partial_x^2 u,$$

where ϵ plays the role of a (small) diffusion coefficient. Suppose that the domain of interest is $x \in \mathbb{R}$ and that an initial condition $u(x, 0) = u_0(x)$ is given. Then an analytical solution of equation (5.61) is known, namely the following Green function :

$$(5.62) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} d\xi.$$

We now solve the system (5.57) up to the final output time $t = 50$ in the computational domain $\Omega = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ with $\alpha(u) = 1$ using ADER-FV schemes from second to fifth order of accuracy on 100 cells. The local space-time DG scheme for linear systems can be directly applied according to (5.47). We take a stiffness parameter of $\epsilon = 10^{-4}$ and as initial condition we choose

$$(5.63) \quad u_0(x) = \begin{cases} 1000 & \text{if } x \leq 0, \\ 1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

The boundary conditions are chosen to be transmissive. The analytical solution of the heat equation (5.61) with the initial condition (5.63) is given in terms of the error function $\text{erf}(x)$ at $t = 50$ with $\epsilon = 10^{-4}$ as

$$(5.64) \quad u(x, 50) = \frac{1001}{2} - \frac{999}{2} \cdot \text{erf}(5\sqrt{2}x),$$

against which the numerical solutions will be compared. The Courant number is set in all computations to $\text{CFL} = \Delta t / \Delta x = 0.9$. The final output time $t = 50$ is quite large and is reached with the chosen combination of mesh and Courant number after 5556 iterations. Hence, we expect that the low order schemes will add more spurious numerical diffusion in this test case compared to the high order schemes since we compute a large number of time steps. This conjecture is indeed confirmed by our numerical results that are depicted in Fig. 5.2. We

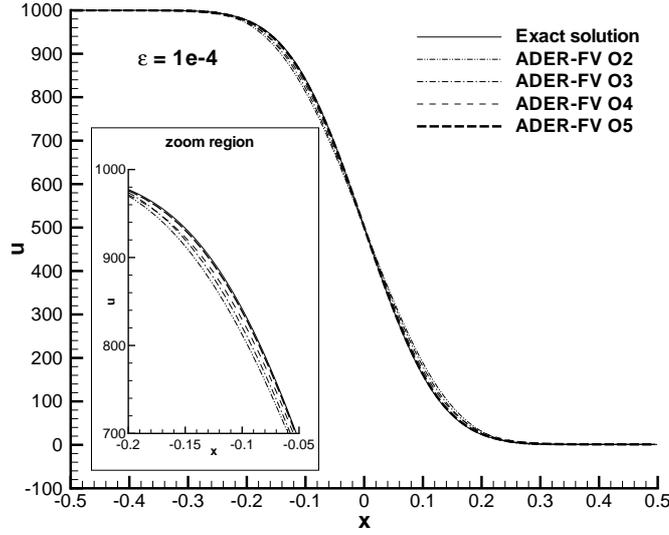


FIG. 5.2 – Exact and numerical solutions obtained on 100 cells using ADER-FV schemes of second to fifth order of accuracy in space and time for the model system with linear flux and stiff linear source ($\epsilon = 10^{-4}$) at time $t = 50$.

can see that generally all the schemes capture the exact reference solution (5.64) quite well. However, the higher order schemes produce better results than the lower order methods. This means that even in the diffusion limit of the stiff system (5.57) higher order schemes may produce better results than lower order methods. We finally would like to emphasize that our numerical results have been obtained using a standard *explicit* one-step high order finite volume scheme, where we only use a particular procedure in order to predict the local time-evolution of the reconstructed polynomials. This is achieved via our new local space-time discontinuous Galerkin scheme proposed in this article. The rest of the finite volume scheme is standard.

Example 2 : $\alpha(u) = u(1 - u)$. We now consider a special non linear case, namely $\alpha(u) = u(1 - u)$. Hypothesis $\alpha(u) > 0$ is valid if and only if $u \in]0; 1[$. In this region, according to (5.60), as $\epsilon \rightarrow 0$, system (5.57) reduces to the following non linear diffusion equation :

$$(5.65) \quad \partial_t u = \epsilon \partial_x [u(1 - u) \partial_x u].$$

Suppose that the domain of interest is $\Omega = [-0.5; 0.5]$ for a given $L > 0$, and that Neumann boundary conditions $(\partial_x u)(-0.5, t) = (\partial_x u)(0.5, t) = 0$ are imposed $\forall t > 0$. Then, for the initial condition we use

$$(5.66) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1^- & \text{if } x \leq 0, & \text{where } 1^- = \lim_{\delta \rightarrow 0} 1 - \delta, \\ 0^+ & \text{if } x > 0, & \text{where } 0^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta, \end{cases}$$

where for small $\delta > 0$, an analytical solution of equation (5.65) is known, namely :

$$(5.67) \quad u(x, t) = \min\left(1, \max\left(0, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\epsilon t}}\right)\right)\right).$$

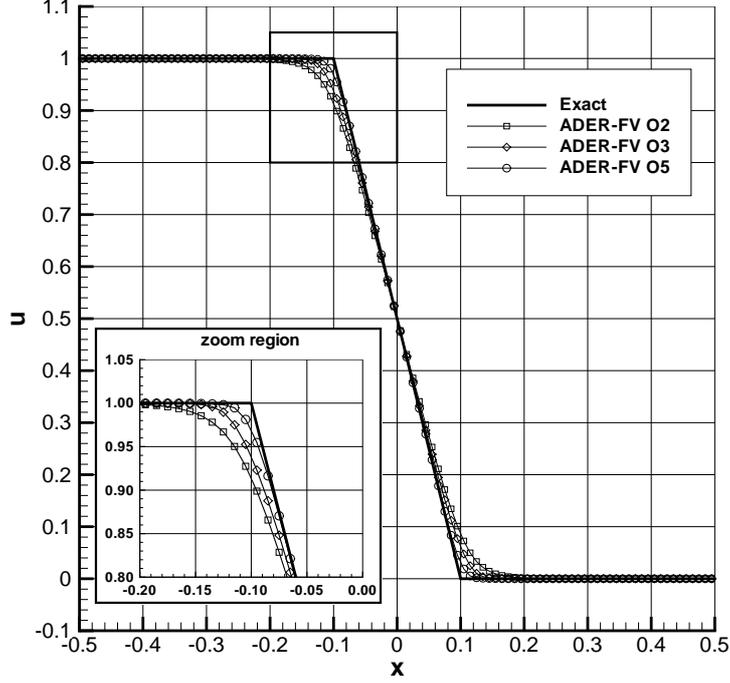


FIG. 5.3 – Exact and numerical solutions obtained on 100 cells using ADER-FV schemes of second, third and fifth order of accuracy in space and time for the model system with linear flux and stiff nonlinear source ($\epsilon = 10^{-3}$) at time $t = 10$.

We solve this test problem for $\delta = 10^{-6}$ with ADER-FV schemes of second, third and fifth order of accuracy using 100 cells in the computational domain Ω up to time $t = 10$ with $\epsilon = 10^{-3}$ and a Courant number of $\text{CFL} = 0.25$. The numerical results and the exact reference solution for the stiff limit are depicted in Fig. 5.3. We note that all methods agree very well with the reference solution and that even in this case, with discontinuities in the first derivative of the solution, we can clearly see an improvement with increasing order of accuracy.

5.4.2 Model system with nonlinear flux and linear source term

We now consider the following class of non linear advection systems with linear relaxation :

$$(5.68) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \partial_x f(u) = -\frac{1}{\epsilon} v, \end{cases}$$

where ϵ is a positive parameter and $f(u)$ is any given function which satisfies $f'(u) \geq 0 \quad \forall u$ in the domain of interest and does not depend on ϵ . Injecting asymptotic expansion (5.58) into system (5.68), we find iteratively that $v_0 = 0$ and $v_1 = -f'(u)\partial_x u$ for an arbitrary small value of ϵ . Thus, as $\epsilon \rightarrow 0$, variable v is given by the following equation :

$$(5.69) \quad v = -\epsilon f'(u)\partial_x u + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

and the asymptotic limit of system (5.68) reads as

$$(5.70) \quad \partial_t u = \epsilon \partial_x [f'(u)\partial_x u] + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

which is a non linear diffusion equation. Note that in the previous section, we had $\alpha(u) > 0$, while here we have $f'(u) \geq 0$.

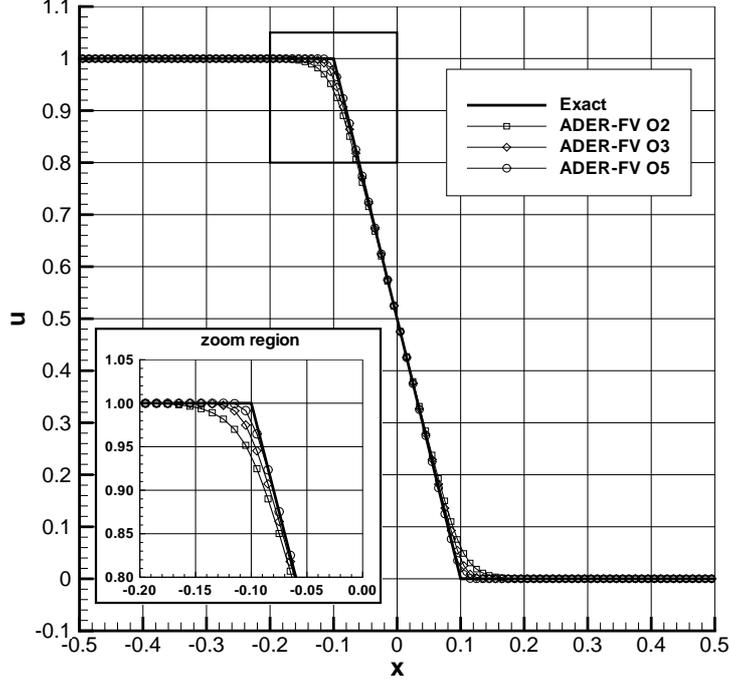


FIG. 5.4 – Exact and numerical solutions obtained on 100 cells using ADER-FV schemes of second, third and fifth order of accuracy in space and time for the model system with nonlinear flux and stiff linear source ($\epsilon = 10^{-3}$) at time $t = 10$.

Example 3 : $f'(u) = u(1 - u)$. We consider the special non linear case $f'(u) = u(1 - u)$, which leads to $f(u) = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3$. The hypothesis $f'(u) > 0$ is verified if and only if $u \in [0; 1]$. In this region, according to (5.70), as $\epsilon \rightarrow 0$, system (5.68) reduces to the non linear diffusion equation (5.65). Suppose that the domain of interest is $x \in [-0.5; 0.5]$ for a given $L > 0$, and that Neumann boundary conditions $(\partial_x u)(-0.5, t) = (\partial_x u)(0.5, t) = 0$ are imposed $\forall t > 0$. Then, an analytical solution of equation (5.65) is (5.67), which is compatible with the initial condition :

$$(5.71) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1^- & \text{if } x \leq 0, & \text{where } 1^- = \lim_{\delta \rightarrow 0} 1 - \delta, \\ 0^+ & \text{if } x > 0, & \text{where } 0^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta, \end{cases}$$

We solve this test problem for $\delta = 10^{-4}$ with ADER-FV schemes of second, third and fifth order of accuracy using 100 cells in the computational domain Ω up to time $t = 10$ with $\epsilon = 10^{-3}$ and a Courant number of $\text{CFL} = 0.25$. The numerical results and the exact reference solution for the stiff limit are depicted in Fig. 5.4. As in the previous test problem, all methods agree again very well with the reference solution and an improvement with increasing order of accuracy is also visible.

5.4.3 Euler equations with stiff friction

In this section we apply our method to the Euler equations of compressible gas dynamics with stiff friction. The full Euler system with friction reads as (5.7) with the vector of conservative

variables \mathbf{u} , the flux $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ and the (stiff) source term $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ as

$$(5.72) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{u}) = -\nu \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho u^2 \end{pmatrix}.$$

The system still needs to be closed by an equation of state (EOS) of the form $p = p(\mathbf{u})$. For the following numerical calculations we consider a computational domain $\Omega = [0; 1]$ with the Dirichlet boundary conditions $\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}(0, 0)$ and $\mathbf{u}(1, t) = \mathbf{u}(1, 0)$ and the initial condition

$$(5.73) \quad \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} (1.65, 0, 5.039849068) & \text{if } x \leq 0.25, \\ (0.01, 0, 0.003962233) & \text{if } x > 0.25. \end{cases}$$

For the stiffness parameter ν we take

$$(5.74) \quad \nu(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0.25, \\ 1500 & \text{if } x > 0.25, \end{cases}$$

which means that we solve the Euler equations *without* any friction in the left quarter of Ω ($x \in [0; 0.25]$) and with *stiff* friction in the region $x \in [0.25; 1]$. This setup corresponds to an interface of an inviscid compressible gas with a porous medium into which the gas may penetrate. For all the following computations we set the Courant number to $\text{CFL} = 0.9$.

Isentropic Euler system with stiff friction Under the assumption that the flow is completely isentropic, we can write the equation of state as

$$(5.75) \quad p(\mathbf{u}) = k\rho^\gamma.$$

In this case, the pressure does not depend on the total energy ρE and thus the energy equation in (5.7) and (5.72) can be omitted. We set $k = 1$ and $\gamma = 1.4$. We solve (5.7) with (5.72) and the EOS (5.75) up to $t = 2.0$ using 100 cells and ADER-FV schemes from second to fourth order of accuracy. The reference solution is computed with a second order ADER-FV scheme on 10000 cells. The results are depicted in Fig. 5.5a. We clearly see that on a fixed grid the diffusion limit of the Euler equations is captured better by the higher order schemes. Although the results of the second order method are still of acceptable accuracy, we nevertheless observe that the second order method adds too much numerical diffusion. A very similar testcase has previously been proposed by Bouchut *et al.* [BOP07]. Unfortunately they did not specify all parameters of their test problem. Especially, the initial and boundary conditions were not given, so it was not possible to compute exactly the same test case. However, the results are qualitatively similar compared to ours.

Full Euler system with stiff friction Using the ideal gas law, the equation of state reads as

$$(5.76) \quad p(\mathbf{u}) = (\gamma - 1)\left(\rho E - \frac{1}{2}\rho u^2\right),$$

where $\gamma = 1.4$. In this case, we must consider the full Euler system including the energy equation. In the initial condition (5.73) the total energy ρE is chosen such that the pressure according to (5.76) is equal to the pressure obtained in the isentropic case from eqn. (5.75). We therefore expect the results to be very similar to the previous ones. Hence, we solve (5.7) with (5.72) and the EOS (5.76) up to $t = 2.0$ using the initial condition (5.73). The computational domain is discretized with 100 cells using ADER-FV schemes from second to fourth order of accuracy.

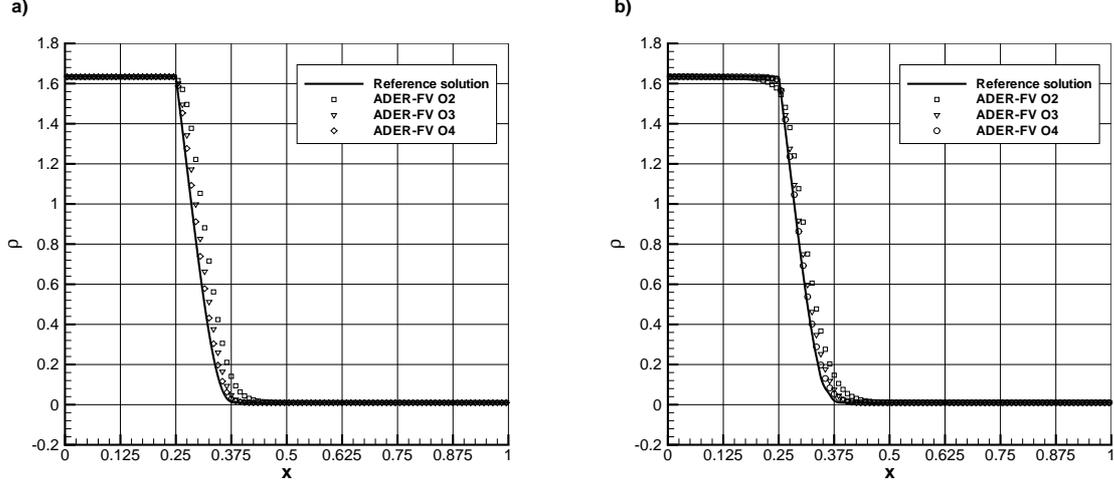


FIG. 5.5 – Reference solution and numerical solutions at time $t = 2$ obtained on 100 cells using ADER-FV schemes of second, third and fourth order of accuracy in space and time for the Euler system with stiff friction. a) Isentropic Euler system (left) and b) Full Euler system with ideal gas EOS (right).

The reference solution is computed again with a second order ADER-FV scheme on 10000 cells. The results are depicted in Fig. 5.5b. Similar to the isentropic case, we observe that also the diffusion limit of the full Euler equations is captured better by the higher order schemes.

We finally would like to remark that even some first order numerical methods designed for stiff systems of balance laws may encounter problems with this test case for the full Euler equations since they may produce negative values for the total energy ρE .

5.4.4 The relaxation system of Jin and Xin

The relaxation system of Jin and Xin [JX95] reads as follows :

$$(5.77) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{v} = 0, \\ \partial_t \mathbf{v} + A \partial_x \mathbf{u} = -\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{v} - \mathbf{f}(\mathbf{u})), \end{cases}$$

where $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ is a given function, ϵ is a positive arbitrary small parameter and A is a constant matrix. The advection part of this system is linear, while the relaxation part is not linear in general, due to the presence of $\mathbf{f}(\mathbf{u})$. It is easy to check that the asymptotic limit of system (5.77) is :

$$(5.78) \quad \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \epsilon \partial_x [(A - J^2(\mathbf{u})) \partial_x \mathbf{u}],$$

where $J = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$. System (5.78) is a hyperbolic system of conservation laws with non linear diffusion if and only if :

$$(5.79) \quad A \geq J^2(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}.$$

We now apply our proposed ADER finite volume schemes for hyperbolic systems with stiff source terms to the relaxation system of Jin and Xin with the following definitions of the vector

\mathbf{u} and the flux function $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ appearing in the source term :

$$(5.80) \quad \mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho E), \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = (\rho u, \rho u^2 + p, u(\rho E + p)),$$

with the equation of state that closes the system,

$$(5.81) \quad p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right).$$

With this choice eqn. (5.77) converges to the compressible Euler equations in the stiff limit. The stiffness parameter $\nu = 1/\epsilon$ is set in all the following test cases to $\nu = 10^{12}$, which leads to a very stiff source term. The matrix A is chosen to be the simple diagonal matrix $A = \text{diag}(a_m, a_m, a_m)$, which is kept constant in space and time.

Shock tube problems We consider initial value problems for (5.77) where the initial condition for \mathbf{u} has the form

$$(5.82) \quad \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} (\rho_L, (\rho u)_L, (\rho E)_L) & \text{if } x \leq x_c, \\ (\rho_R, (\rho u)_R, (\rho E)_R) & \text{if } x > x_c. \end{cases}$$

The initial condition for \mathbf{v} is simply $\mathbf{v}(x, 0) = 0$. For the Euler equations of compressible gas dynamics the exact solution of those Riemann problems can be computed analytically and will serve in the following for validation of our numerical method when applied to the relaxation system of Jin and Xin. We compute the solution of the initial value problem (5.77) and (5.82) using second to fourth order ADER-FV schemes for six different cases of shock tube problems. All initial conditions as well as the final output times t_{end} and the initial position of the discontinuity x_c are listed in Table 5.3. The values a_m defining the matrix A are given for each test case in Table 5.4. For all computations we use a constant Courant number of $\text{CFL} = 0.75$. The exact solution and the numerical solutions obtained by our proposed method are shown for all six shock tube problems in Figures 5.6-5.8, where also the number of mesh cells is indicated. For most of the test cases we note an excellent agreement with the exact solution and most of the numerical solutions are monotone, thanks to the nonlinear WENO reconstruction procedure. We note that the reconstruction is done in the characteristic variables of the compressible Euler equations and *not* in the characteristic variables of the advection operator of the relaxation system of Jin and Xin. This is necessary to suppress unphysical oscillations. Using this particular characteristic reconstruction, small spurious oscillations are only visible for shock tube problems number two and four. We note that these test cases can be even difficult to compute with standard high order finite volume schemes for the compressible Euler equations. Much more numerical difficulties arise in the relaxation system of Jin and Xin due to the very stiff source term. However, the numerical results confirm that our method produces essentially non-oscillatory results, maintains high accuracy even for hyperbolic systems with stiff source terms and has the correct behaviour in the stiff limit.

Shock-density interaction We now consider a test problem proposed originally by Shu and Osher [SO89] for the compressible Euler equations in the more general framework of the stiff relaxation system of Jin and Xin (5.77) in order to emphasize the advantages of high order methods. The computational domain is $\Omega = [-5; 5]$ and the initial condition for \mathbf{u} is given by

$$(5.83) \quad (\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (3.8571, 2.6294, 10.333) & \text{if } x < -4, \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1) & \text{if } x \geq -4, \end{cases}$$

Furthermore we set $\mathbf{v}(x, 0) = 0$. This leads to a shock wave with Mach number $M = 3$ running into the sinusoidal density fluctuation. The interaction of the shock with the density fluctuation

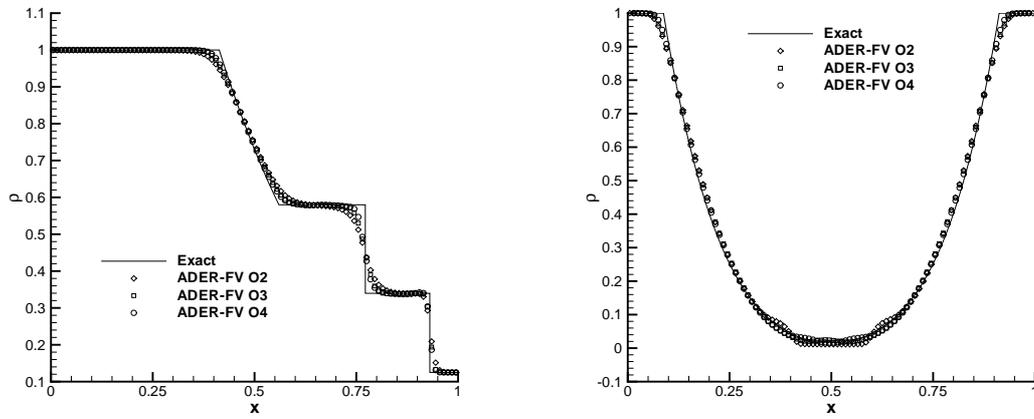


FIG. 5.6 – Exact and numerical solutions for shock tube problems number one (left) and two (right), obtained with the relaxation system of Jin and Xin on 100 cells.

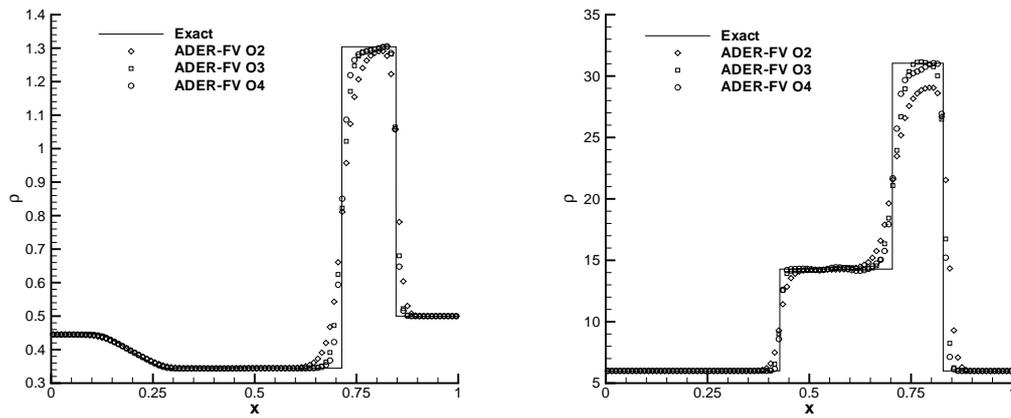


FIG. 5.7 – Exact and numerical solutions for shock tube problems number three (left) and four (right), obtained with the relaxation system of Jin and Xin on 100 cells.

TAB. 5.3 – Initial states left and right, simulation end times and initial position x_c of the discontinuity for the 1D shock tube problems computed with the relaxation system of Jin and Xin.

Case	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	t_{end}	x_c
1	1.0	0.75	1.0	0.125	0.0	0.1	0.20	0.5
2	1.0	-2.0	0.4	1.0	2.0	0.4	0.15	0.5
3	0.445	0.698	3.528	0.5	0.0	0.571	0.14	0.5
4	5.99924	19.5975	460.895	5.99242	-6.19633	46.0950	0.035	0.4
5	1.0	0.0	1000.	1.0	0.0	0.01	0.012	0.5
6	1.0	-19.59745	1000.	1.0	-19.59745	0.01	0.012	0.8

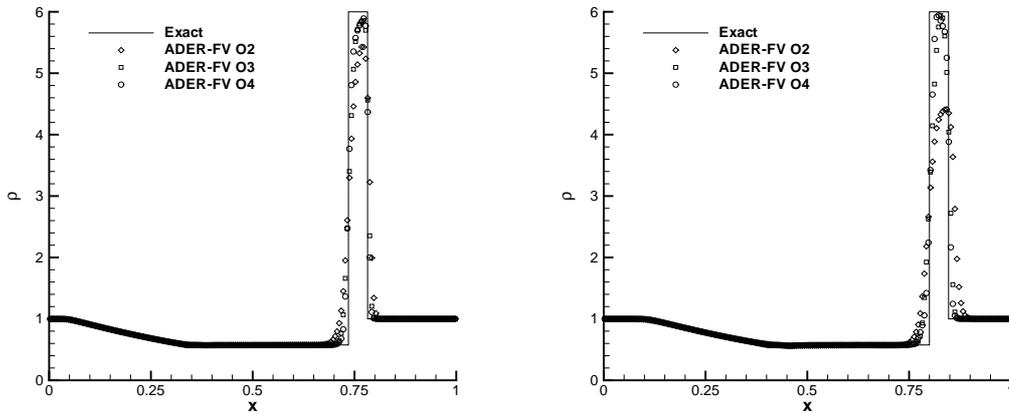


FIG. 5.8 – Exact and numerical solutions for shock tube problems number five (left) and six (right), obtained with the relaxation system of Jin and Xin on 200 cells.

generates sound waves and high-frequency entropy fluctuations that are very difficult to capture with low order schemes on coarse meshes. In Fig. 5.9 we show the numerical results obtained with ADER-FV schemes from second to fourth order of accuracy on 400 cells at the final output time $t = 1.8$. We choose $a_m = 25$ and a Courant number of $\text{CFL} = 0.75$.

One can clearly see that the second order method is not at all able to resolve the high frequency entropy waves. The third order scheme already resolves the whole frequency content but is still too dissipative since the amplitudes of the entropy waves are not yet captured, see Fig. 5.9 on the left. Only the fourth order scheme is able to resolve the whole solution quite well on this relatively coarse mesh, see Fig. 5.9 on the right. The reference solution was computed using a second order TVD finite volume scheme for the compressible Euler equations on 10000 cells.

TAB. 5.4 – Entries a_m of the diagonal matrix A for the 1D shock tube problems.

Case	1	2	3	4	5	6
a_m	7	12	12	900	1500	9000

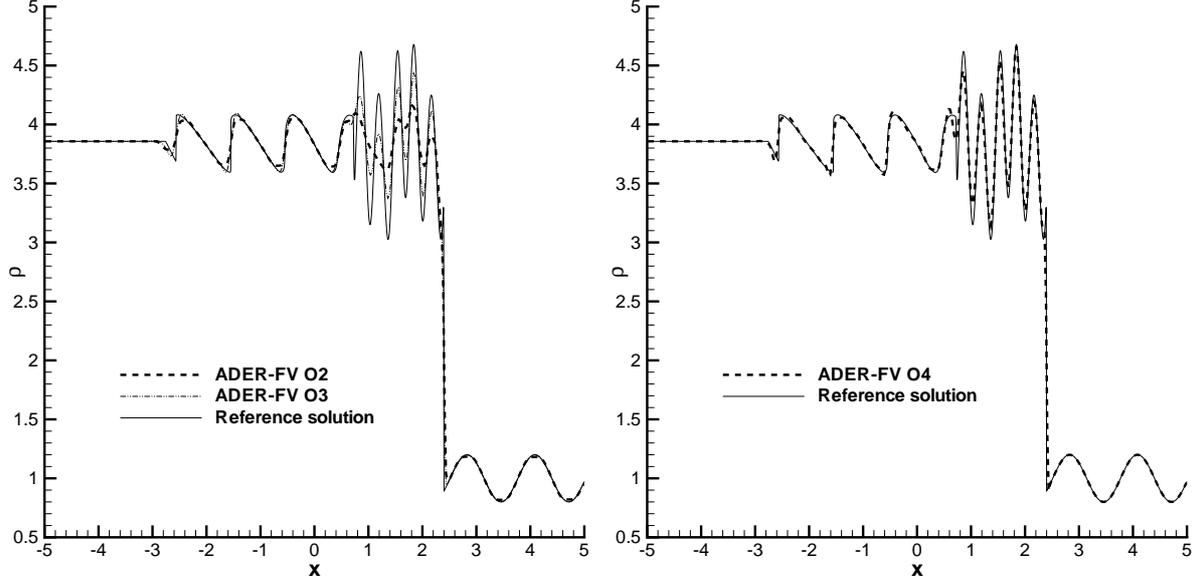


FIG. 5.9 – Reference solution and numerical solutions at $t = 1.8$ for the shock-density interaction test case obtained with the relaxation system of Jin and Xin on 400 cells using ADER-FV schemes of second, third and fourth order of accuracy.

5.4.5 The scalar model problem of LeVeque and Yee

The model problem proposed by LeVeque and Yee [LY90] is a scalar linear advection problem with a non linear reaction source term, which can be stiff. The governing PDE reads as

$$(5.84) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} u = -\nu u \left(u - \frac{1}{2} \right),$$

where ν is a given positive coefficient. The computational domain is $\Omega = [0; 1]$ with transmissive boundary conditions. The following initial condition is considered :

$$(5.85) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 0.3, \\ 0 & \text{if } x > 0.3. \end{cases}$$

With this particular initial condition, the source term is zero. Thus, an analytical solution of problem (5.84)-(5.85) is known, namely : $u(x, t) = u(x - t, 0)$. which means that the initial profile of u is advected with constant speed 1. LeVeque and Yee have pointed out that neither a Mac Cormack predictor-corrector method, nor a Strang splitting method give the physically correct advection speed in the stiff case. We further note that also a standard ADER finite volume scheme [TT05b, TT05a] using the usual Cauchy-Kovalewski procedure instead of our local space-time discontinuous Galerkin scheme to compute $u_i(\xi, \tau)$ from the reconstructed polynomials $w_i(\xi, t^n)$ will produce the wrong advection speed. We now solve the above mentioned test problem up to $t = 0.3$ using 100 cells and a Courant number of $\text{CFL} = 0.75$. Following LeVeque and Yee we take the following values for the stiffness parameter : $\nu = 1$, $\nu = 10$, $\nu = 100$, $\nu = 1000$. The numerical results obtained with our new ADER-FV schemes from second to sixth order of accuracy are depicted in Fig. 5.10 for the non-stiff as well as for the stiff case. We note an excellent agreement with the exact solution in all cases. In particular, the advection speed of $a = 1$ is captured correctly. Furthermore, we can clearly see that our

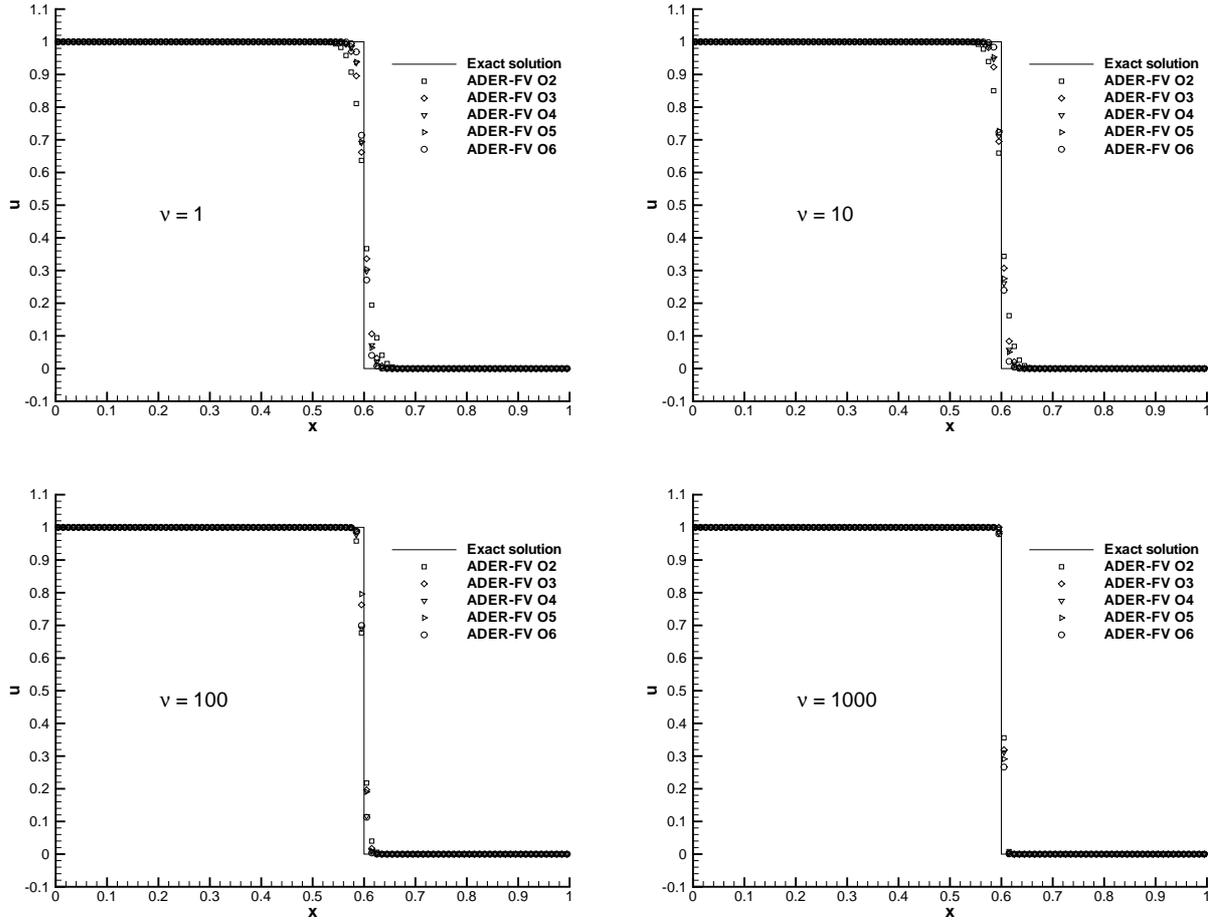


FIG. 5.10 – Exact solution and numerical solutions for the model problem of LeVeque and Yee at $t = 0.3$ using 100 cells for the non-stiff case (top row) and the stiff case (bottom row). $\nu = 1$ (top left), $\nu = 10$, (top right), $\nu = 100$ (bottom left), $\nu = 1000$, (bottom right).

numerical solution is essentially non-oscillatory and that the resolution of the discontinuity is improved in the non-stiff case when using higher order schemes. For the stiff case, we observe less numerical diffusion than in the non-stiff case. This is due to the reaction source term, which has two stable equilibrium solutions at $u = 0$ and at $u = 1$. Any numerical dissipation generated by the numerical scheme will lead to a smearing of the discontinuity and will subsequently lead to intermediate values of u that do not correspond to either of the stable equilibria. The stiff reaction source term will immediately try to push the solution back towards the closest equilibrium, which in the end leads to a generally sharper profile for the stiff case compared to the non-stiff case.

5.5 Summary and conclusions

In this article we have developed a new unsplit explicit essentially non-oscillatory one-step finite volume scheme of arbitrary high order of accuracy in space and time for nonlinear hyperbolic systems with stiff source terms. In continuity with previous work of the authors on schemes of arbitrary high order of accuracy in space and time, we call our new method also

ADER (arbitrary high order **derivatives**) finite volume scheme. The essentially non-oscillatory character of the method is obtained via a special nonlinear WENO reconstruction procedure that produces entire reconstruction polynomials in terms of orthogonal basis functions, instead of point values that are generated usually by standard WENO schemes. The spatial reconstruction polynomials obtained from the particular WENO reconstruction operator are used as initial conditions for a local space-time discontinuous Galerkin scheme which solves an initial value problem for the governing PDE *locally* inside each element without considering the neighboring elements. The local space-time DG scheme leads in general to a *local* system of nonlinear equations that has to be solved individually for each element. In this article, we use a standard globally convergent Newton algorithm [PTVF96] to solve the problem in the nonlinear case. As initial guess we solve an associated linear problem after linearization of the governing PDE. In the case of a purely linear governing PDE, the linear equation system resulting from the local space-time DG scheme can be solved exactly. We emphasize that the local space-time DG scheme is the only locally implicit part appearing in the proposed ADER-FV schemes. The Newton algorithm only has to iterate over the space-time degrees of freedom inside *one element* and does not have to consider the degrees of freedom in the neighboring elements. The resulting ADER finite volume scheme, built upon the solution of the local space-time DG scheme, is then completely explicit. Compared to previous ADER-FV schemes for hyperbolic systems with non-stiff source terms, the new local space-time DG scheme has replaced the usual Cauchy-Kovalewski procedure, which is not able to treat stiff problems. The rest of the scheme remains the same.

We have shown via asymptotic analysis that the new local space-time DG scheme is able to capture correctly the stiff limit in the case of a linear scalar PDE with stiff source term. Subsequently, the boundedness of the space-time integral of the source term \bar{S}_i has been demonstrated in the stiff limit. From this result, it has been deduced that the resulting ADER finite volume scheme is also consistent with the stiff limit for any bounded time step Δt .

Numerical convergence studies for our proposed method have been carried out up to sixth order of accuracy in space and time for a nonlinear hyperbolic system with source terms. A non-stiff case and also a very stiff case have been considered. The ADER-FV schemes then have been applied to several stiff linear and nonlinear model systems for which an analytical reference solution is available. In all the cases our schemes were able to capture very well the stiff limit of these equations and to maintain also the monotonicity of the solution, even using schemes of very high order of accuracy. Usually, the results obtained with the higher order schemes were better than the results obtained with the lower order methods, even for test problems with discontinuities in the state or in the derivatives. We emphasize that for our explicit one-step finite volume method even for very stiff problems the time step is only restricted by the standard CFL stability condition and *not* by the stiffness of the source term. We then have shown an application of ADER-FV schemes of up to fourth order of accuracy to the isentropic and the full Euler equations with stiff friction, where a reference solution has been computed on a very fine mesh. As in the previous cases of the model systems, the ADER-FV schemes also captured the stiff diffusion limit of the Euler equations correctly. Again, the higher order schemes produced better results with less numerical diffusion than the low order schemes.

Subsequently we have applied our new algorithm to a very interesting stiff system of hyperbolic balance laws, namely the stiff relaxation system of Jin and Xin [JX95], which rewrites a nonlinear hyperbolic system as an enlarged linear hyperbolic system with stiff source terms. For the application of our high order algorithm we have chosen the relaxation system corresponding to the compressible one-dimensional Euler equations. We have computed a large number of one-dimensional shock tube problems, for which exact reference solutions are known. For the

relaxation system of Jin and Xin, a particularly large value has been chosen for the stiffness parameter in order to minimize the dissipation induced by the right hand side of the limit equation for \mathbf{u} . We were able to show the benefit of very high order numerical methods even for the stiff relaxation system of Jin and Xin on the standard shock-density interaction test problem proposed originally by Shu and Osher for the compressible Euler equations [SO89]. To our knowledge, up to now no numerical method of accuracy greater than two in space and time has been applied yet to the stiff relaxation system of Jin and Xin.

The most difficult test case treated in this article is the stiff nonlinear scalar test problem proposed by LeVeque and Yee [LY90]. It was shown in [LY90] that robust standard schemes such as the Mac Cormack scheme or the Strang splitting produce oscillatory results for small values of the stiffness parameter and that these methods do not obtain the correct speed of the discontinuity in the very stiff case. However, in this article, for all values of the stiffness parameter studied by LeVeque and Yee, our new ADER-FV schemes were able to produce monotone results with the correct speed of the discontinuity, even in the very stiff case.

At this point, we would like to summarize the advantages and the disadvantages of our proposed ADER-FV scheme for hyperbolic systems with stiff source terms. Among the clear advantages of our scheme is the fact that it can reach any desired order of accuracy greater or equal two in space and time simultaneously. To our knowledge, this has not yet been achieved by any other numerical method for hyperbolic systems with stiff source terms. Furthermore, the unsplit finite volume discretization (5.10) mimics the underlying physics of the governing equation since it is based directly on an integral formulation of the governing PDE (5.7). The same is true for the (also unsplit) local space-time DG scheme, which directly solves a weak formulation of the local initial value problem (5.7) in space-time. The underlying L^2 -projection of the local space-time DG scheme that leads to the Galerkin orthogonality property guarantees the optimality of the numerical solution $\mathbf{u}_i(\xi, \tau)$ in L^2 -norm. Since the local space-time DG scheme can be solved individually for each element \mathcal{Q}_i we suppose that it is easier to solve than a globally implicit scheme that must take into account all $\mathcal{Q}_i \in \Omega$. Numerical evidence has shown that our scheme seems also to be consistent with the stiff limit of the governing PDE. A final advantage is the explicit one-step character of our finite volume discretization that is based on the solution $\mathbf{u}_i(\xi, \tau)$ of the local space-time DG method. However, a first disadvantage of our proposed method is the high computational effort associated with the Newton algorithm that has to be used in the case of nonlinear systems. Compared to the rest of the algorithm, the Newton solver is by far the most expensive part of the scheme. Future work has to be done to make the Newton algorithm for the nonlinear case more efficient and robust. Other, more advanced, techniques can be tried in the future. Seen from a theoretical point of view, another disadvantage of our scheme may be the fact that the first order version of the method does not work since it does not provide the correct coupling of source terms and fluxes which only comes in via a higher order discretization in space and time.

Further extensions and applications of the proposed ADER-FV schemes for stiff problems will concern the extension to multiple space dimensions and the application to two-fluid flow. Of particular interest will be the application to colliding plasma flows with stiff friction and very stiff temperature relaxation. Further applications may also involve chemically reacting flows and kinetic models for compressible gas dynamics. Last but not least, we would like to mention that for the special case $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0$ our local space-time DG scheme reduces to a solver of stiff nonlinear systems of ordinary differential equations (ODE) allowing the development of irregular solutions in time.

Acknowledgments

The first author was funded by a post-doctoral grant of the *Deutsche Forschungsgemeinschaft* (DFG) in the framework of the *DFG Forschungsstipendium* (DU 1107/1-1). The second author was funded by a grant of the French *Commissariat à l'Energie Atomique* (CEA) in the framework of his PhD thesis.

Appendix : reconstruction basis functions

The rescaled Legendre polynomials, which constitute an orthogonal basis on the unit interval $I = [0; 1]$, are given up to polynomial degree $M = 5$ by :

$$\begin{aligned}
 \Psi_0(\xi) &= 1 \\
 \Psi_1(\xi) &= 2\xi - 1 \\
 \Psi_2(\xi) &= 6\xi^2 - 6\xi + 1 \\
 \Psi_3(\xi) &= 20\xi^3 - 30\xi^2 + 12\xi - 1 \\
 \Psi_4(\xi) &= 70\xi^4 - 140\xi^3 + 90\xi^2 - 20\xi + 1 \\
 \Psi_5(\xi) &= 252\xi^5 - 630\xi^4 + 560\xi^3 - 210\xi^2 + 30\xi - 1
 \end{aligned}
 \tag{5.86}$$

Appendix : mass-, flux- and stiffness matrices for the local space-time DG method for the linear case

For polynomial degree $M = 1$, the mass matrix of the local space-time Discontinuous Galerkin scheme is

$$M_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix},
 \tag{5.87}$$

the flux matrices for $\tau = 0$ and $\tau = 1$ are

$$F_{kl}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad F_{kl}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},
 \tag{5.88}$$

and the temporal and spatial stiffness matrices are given by

$$K_{kl}^\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{kl}^\xi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \tag{5.89}$$

For polynomial degree $M = 2$, the mass matrix of the local space-time Discontinuous Ga-

lerkin scheme is

$$(5.90) \quad M_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix},$$

the flux matrices for $\tau = 0$ and $\tau = 1$ are

$$(5.91) \quad F_{kl}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad F_{kl}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

and the temporal and spatial stiffness matrices are given by

$$(5.92) \quad K_{kl}^\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{kl}^\xi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion et perspectives

Le premier chapitre de cette thèse a été consacré à la modélisation multivitesse des écoulements multifluides. Dans une première section, on s'est concentré sur le modèle de Scannapieco-Cheng (SC) dans sa version électriquement neutre. Ses principales formes ont été présentées. L'une d'entre elles, conservative, a mis en évidence le fait que le couplage entre les fluides n'existe formellement que par l'intermédiaire d'un terme source de relaxation des vitesses et de son travail. Ce terme source, caractérisé par un coefficient de relaxation $\nu \geq 0$, a donc joué un rôle central dans tout le reste de l'étude. On a ensuite passé en revue, dans une section indépendante, les principaux modèles multivitesse pour mélanges de fluides miscibles. Cet état de l'art a permis de situer le modèle SC par rapport à d'autres modèles. Une revue similaire des modèles multivitesse pour mélanges de fluides non miscibles a été proposée en annexe.

Dans le second chapitre, on a procédé à l'analyse mathématique du modèle SC dans sa version 1D pour deux fluides α et β . Plus précisément, on a considéré deux systèmes : le modèle SC barotrope à 4 équations, fermé par des relations constitutives de la forme $p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha)$ et $p^\beta = p^\beta(\rho^\beta)$, et le modèle SC complet à 6 équations, fermé par des relations constitutives de la forme $p^\alpha = p^\alpha(\rho^\alpha, \epsilon^\alpha)$ et $p^\beta = p^\beta(\rho^\beta, \epsilon^\beta)$. Dans le cas homogène où $\nu = 0$, on a vu que les deux systèmes sont hyperboliques non strictement. On a ensuite montré dans le cas général $\nu \geq 0$ que chaque système possède une entropie mathématique strictement convexe vérifiant une loi de conservation avec un terme source. Ce terme source étant négatif ou nul, l'entropie mathématique décroît. En cas de forte relaxation des vitesses $\nu \gg 1$, l'analyse asymptotique de chaque système a été menée et a conduit à l'obtention d'un système réduit. On a alors prouvé qu'une condition suffisante pour que le système réduit soit hyperbolique est que le système homogène associé soit hyperbolique. En conclusion, les modèles SC barotrope et complet sont bien posés. On a vu par ailleurs que, dans le cas du modèle SC barotrope, le système réduit associé peut être vu comme un modèle bifluide monovitesse muni d'une équation d'advection-diffusion éventuellement non-linéaire pour la variable fraction massique. On a alors proposé un cas-test avec solution de référence (au sens asymptotique) qui a permis d'évaluer la précision des schémas numériques présentés au chapitre 4. Dans le cas du modèle SC complet, le système réduit associé est monovitesse, mais contient deux équations pour l'énergie, de sorte qu'il est difficile d'en dire plus sur l'interprétation du comportement asymptotique du modèle. Une perspective en terme de modélisation consisterait à inclure dans le système un terme source de relaxation des températures, puis à effectuer l'analyse asymptotique du modèle dans le cas où les processus de relaxation des vitesses et des températures sont tous les deux très rapides.

On s'est ensuite concentré sur la problématique de la résolution numérique des systèmes de lois de conservation avec un terme source raide. Pour atteindre l'objectif de construire un schéma de type Lagrange-projection asymptotic-preserving pour la résolution numérique du modèle SC, on a commencé par étudier le problème modèle des équations d'Euler avec friction, au chapitre 3. Pour ce système, on a montré que l'utilisation d'un schéma Lagrange-projection

avec splitting d'opérateur pour la discrétisation du terme source ne permet pas de capturer le comportement asymptotique du modèle sur maillage grossier. On a alors proposé une technique de construction de flux numérique basée sur les équations caractéristiques et prenant en compte la présence du terme source. L'analyse formelle du nouveau schéma a été effectuée ; en particulier, on a prouvé que le schéma est consistant, asymptotic-preserving et entropique sous une condition de type CFL. Un point important ici est que la borne qui restreint le pas de temps est partiellement implicite. Une perspective de travail est de chercher à majorer cette borne par un terme explicite en temps et qui ne dépend pas du terme source. Ce point est motivé par le fait que dans le cas raide $\nu \gg 1$, on a montré que le schéma est entropique sur maillage grossier. Enfin, des résultats numériques ont permis de mettre en évidence l'apport du nouveau schéma en comparaison avec un schéma plus classique de splitting d'opérateur.

Dans le quatrième chapitre, on a appliqué la technique de construction proposée dans le chapitre précédent aux modèles SC barotrope et complet. Le schéma numérique ainsi obtenu a fait l'objet d'une analyse formelle. On a montré qu'il est asymptotic-preserving et entropique sous une condition de type CFL. Là encore, la restriction du pas de temps est partiellement implicite, mais on observe numériquement que l'utilisation d'une condition CFL classique uniquement basée sur la vitesse des ondes acoustiques est suffisante pour que le schéma soit entropique. Ensuite, une extension 2D du nouveau schéma a été proposée en utilisant la technique des directions alternées. On a alors procédé à plusieurs séries de calculs numériques. Dans le cas barotrope, le problème avec solution asymptotique de référence, proposé au chapitre 2, a permis de montrer que le nouveau schéma capture la limite de diffusion non-linéaire avec un faible nombre de mailles. Dans le cas du modèle complet, l'étude numérique d'une condition initiale de type tube-à-choc bifluide a permis de vérifier que le nouveau schéma peut traiter uniformément les régimes d'interdiffusion et d'interpénétration. En 2D, on a étudié les instabilités de Kelvin-Helmholtz et Richtmyer-Meshkov. Pour une même condition initiale, on a présenté les différents régimes d'écoulement suivant la valeur du coefficient ν . Dans le cas raide, l'apport du nouveau schéma en comparaison avec un schéma de type splitting d'opérateur est très net. On a aussi proposé une étude numérique de convergence, qui montre que les différents schémas convergent vers la même solution, mais avec des vitesses différentes. Point intéressant, on a remarqué que l'interpénétration a tendance à stabiliser les écoulements d'ordinaire instables. Enfin, une perspective du travail présenté dans ce chapitre est l'extension du nouveau schéma à un coefficient ν qui peut dépendre de l'espace. Cette extension ne pose pas *a priori* de difficulté supplémentaire.

Le dernier chapitre de cette thèse, indépendant des autres, a été consacré à des problèmes purement numériques lors de la résolution de systèmes hyperboliques de lois de conservation avec un terme source raide en 1D. On y a proposé un nouveau schéma volumes finis asymptotic-preserving et d'ordre arbitrairement élevé. Une perspective est d'utiliser ce schéma pour résoudre le modèle SC en coordonnées eulériennes, puis de comparer les résultats obtenus avec les résultats présentés au chapitre 4. Ce travail est actuellement en cours et doit faire l'objet d'une publication en 2008.

Appendices

Annexe A

Eléments de modélisation multivitesse des écoulements de mélanges composés de fluides non miscibles

A.1 Introduction

On présente d’abord le cadre général de la modélisation multifluide non miscible. Pour clarifier l’exposé, on définit ensuite le vocabulaire lié aux problèmes multiphasiques. Enfin, on passe en revue le plan global de cette annexe consacrée aux modèles non miscibles.

A.1.1 Généralités sur la modélisation non miscible

Un modèle multifluide non miscible est, d’après Truesdell [Tru69], un modèle où la fraction volumique de chaque espèce constitue une variable dépendante. Ainsi, on modélise la topologie de l’écoulement de façon simplifiée ; lorsque l’on résout numériquement un tel modèle, on sait dire quel volume occupe chaque espèce au sein d’une maille, mais on ne sait pas positionner les interfaces. En modélisation non miscible, les interfaces sont considérées infiniment minces et dépourvues de masse. Les modèles multifluides non miscibles sont adaptés à la résolution simplifiée de problèmes multiphasiques. Ils sont ainsi naturellement utilisés dans plusieurs branches de l’industrie comme le génie pétrolier, le génie chimique, l’aéronautique, la propulsion automobile, le génie nucléaire, etc.

On considère un volume V constitué de deux espèces non miscibles (figure A.1). Tout le volume est rempli par les deux espèces, il n’y a pas de vide. Physiquement, les seules zones où les espèces 1 et 2 sont mélangées de façon intime sont les interfaces, dont l’épaisseur est supposée nulle en modélisation non miscible. Numériquement, la discrétisation du domaine fait apparaître des mailles mixtes *i.e.* des mailles dans lesquelles les deux espèces sont présentes. On note m^s la masse totale de l’espèce s ($s = 1, 2$) contenue dans le volume V . Contrairement aux problèmes miscibles, on peut ici introduire les volumes V^s qu’occupe respectivement chaque espèce à l’intérieur du volume V . Ainsi, on peut définir pour le volume V les quantités macroscopiques suivantes :

- la masse $m \equiv m^1 + m^2$ qui est la somme des masses des espèces,
- la masse volumique $\rho \equiv \frac{m}{V}$,
- la fraction massique $c^s \equiv \frac{m^s}{m}$ de l’espèce s pour $s = 1, 2$. On a toujours $c^1 + c^2 = 1$,

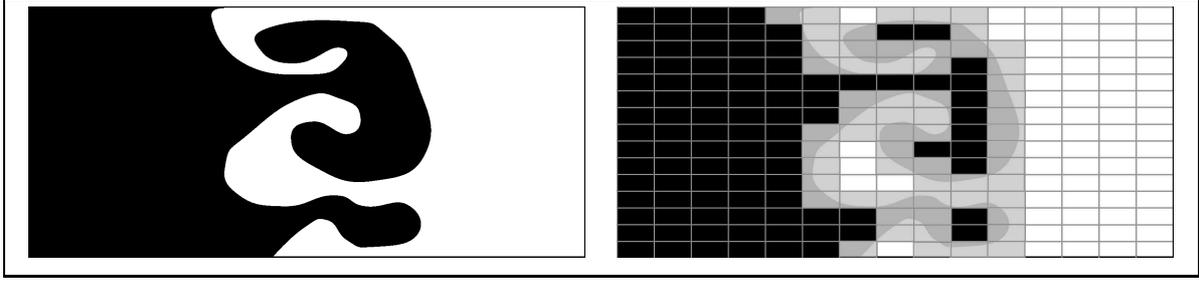


FIG. A.1 – A gauche : deux fluides non miscibles (l’un noir, l’autre blanc). A droite : la discrétisation du domaine fait apparaître des zones de mélange artificiel (en gris), dont l’état est décrit par un modèle multifluide.

– la fraction volumique $\alpha^s \equiv \frac{V^s}{V}$ de l’espèce s pour $s = 1, 2$. En l’absence de vide, $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$.

Comme on connaît le volume occupé par chaque espèce, on peut travailler avec la masse volumique réelle $\hat{\rho}^s$ de chaque espèce, définie par :

$$(A.1) \quad \hat{\rho}^s \equiv \frac{m^s}{V^s}$$

On rappelle que, contrairement à la masse volumique partielle ρ^s utilisée dans les modèles miscibles, la masse volumique réelle est une variable thermodynamique intensive. On a en effet :

$$(A.2) \quad \rho = \alpha^1 \hat{\rho}^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2$$

En modélisation miscible, on ne peut jamais remonter à l’information des masses volumiques réelles $\hat{\rho}^s = \frac{\rho^s}{\alpha^s}$ puisque α^s n’est pas défini. Par contre, en modélisation non miscible, on peut facilement obtenir les masses volumiques partielles à l’aide de la relation :

$$(A.3) \quad \rho^s = c^s \rho = \alpha^s \hat{\rho}^s$$

A.1.2 Milieux multiphasiques : quelques définitions

En mécanique des fluides, une *phase* est une espèce continue et pure. Elle peut être à l’état liquide ou gazeux. Un fluide *multiphasique* est un mélange de phases vu à une échelle telle qu’à chaque point de l’espace ne se trouve qu’une seule phase. La frontière entre deux phases est appelée *interface* ; les interfaces n’ont ni épaisseur, ni masse. Lorsque l’on parle d’écoulement multiphasique, on interdit - par définition - de regarder le milieu à une échelle où il existe des zones de mélange intime entre les espèces et on interdit de regarder une phase à une échelle où le modèle du milieu continu n’est plus valable. Ainsi, la construction d’un modèle multiphasique à partir de la théorie cinétique n’aurait aucun sens. Lorsque l’on parle de la modélisation *multifluide* d’un écoulement multiphasique, il s’agit d’une simplification de la modélisation du problème : on se place à une échelle un peu floue où les interfaces ne sont plus parfaitement localisées. Autrement dit, l’échelle de modélisation multifluide miscible est beaucoup plus fine que l’échelle de modélisation multifluide non miscible.

A.1.3 Plan

On commence par présenter en détail la technique des équations moyennées qui permet de construire le modèle non miscible standard à 6 équations et le célèbre modèle à 7 équations de Baer-Nunziato. Une discussion est consacrée aux nombreuses fermetures recensées dans la littérature pour ces modèles non conservatifs. On se concentre ensuite sur le formalisme introduit par Godunov et Romensky (voir [GR95]) et basé sur les principes de la thermodynamique étendue pour construire une autre classe de modèles non miscibles. On va voir que ces derniers modèles ont l'avantage d'être non seulement symétriques hyperboliques, mais aussi conservatifs en variables du mélange et pourvus d'une inégalité d'entropie. Enfin, on fait la synthèse des différentes classes de modèles non miscibles.

A.2 Technique des équations moyennées

La technique des équations moyennées, également appelée procédure d'homogénéisation, consiste à moyenner des équations de conservation dans le but de s'affranchir d'une description trop locale des écoulements considérés. Sous sa forme la plus générale, elle aboutit à un système ouvert, caractérisé par une vitesse et une pression pour chaque phase. On va voir que l'inconvénient majeur de ce procédé est qu'il introduit dans le système des termes d'une part non conservatifs, d'autre part difficiles à évaluer (grandeurs aux interfaces notamment). Les auteurs des ouvrages de référence traitant des techniques d'homogénéisation sont Ishii (en 1975, voir [Ish75]) et Drew & Passman (en 1999, voir [DP99]). Depuis, on constate que ces techniques sont largement utilisées pour construire des modèles non miscibles (voir par exemple [Cou01]). Plus récemment, des auteurs ont recensé les différentes variantes de procédure d'homogénéisation (voir [ABCGP03]). On distingue notamment deux approches :

- la première approche, utilisée dans [DP99] et [Cou01], consiste à moyenner les équations de conservation écrites pour le fluide global. Dans ce cas, on part du principe que le milieu peut être modélisé localement par les équations d'Euler.
- la seconde approche, utilisée dans [Mur03], consiste à moyenner les équations de conservation écrites pour chaque phase pure. Dans ce cas, on ne fait pas d'hypothèse particulière sur le fluide global, mais on suppose que chaque phase peut être modélisée localement par les équations d'Euler.

Les deux approches permettent de dégager les mêmes structures finales d'équations comme le modèle dit *standard isobare à 6 équations* et le modèle dit *de Baer-Nunziato à 7 équations* (en référence à [BN86]). Par souci de clarté et afin d'alléger les notations, on choisit de ne détailler ici que la première approche en se basant sur [DP99] ; on renvoie à [Mur03] pour le détail de la deuxième approche.

La technique des équations moyennées se compose de plusieurs étapes, correspondant à différents niveaux de modélisation :

1. Modélisation locale du milieu : on suppose que le milieu peut être modélisé localement par des équations de conservation classiques,
2. Modélisation biphasique du milieu : on multiplie les équations locales du milieu par une fonction caractéristique qui permet de localiser les deux phases,
3. Modélisation biffuide du milieu : on moyenne les équations biphasiques pour simplifier la modélisation de la topologie de l'écoulement. On ne peut plus localiser précisément chaque phase, mais on conserve l'information des fractions volumiques.
4. Evaluation des termes sources : la première étape de fermeture consiste à associer une signification physique à chaque terme source issu de la procédure de moyenne. On introduit

notamment les différents transferts aux interfaces.

5. Fermeture : les dernières étapes de fermeture consistent à choisir, souvent arbitrairement, les valeurs des quantités interfaciales.

A.2.1 Modélisation locale du milieu

On suppose que l'écoulement du milieu vérifie localement les équations de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie :

$$(A.4) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_j}(\rho v_j) = 0 \\ \partial_t(\rho v_i) + \partial_{x_j}(\rho v_i v_j + P_{ij}) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_{x_j}(\rho e v_j + P_{ij} v_i + q_j) = 0 \end{cases}$$

Les notations sont usuelles : ρ est la masse volumique locale, v la vitesse locale absolue, P le tenseur local des contraintes, e l'énergie locale totale massique et q le flux local de chaleur. On distingue généralement les contraintes sphériques ou de pression (P_{jj}) des contraintes de cisaillement ou visqueuses ($P_{ij}, i \neq j$). On introduit pour cela les notations :

$$(A.5a) \quad p \equiv \frac{P_{jj}}{D}$$

$$(A.5b) \quad \Pi_{ij} \equiv P_{ij} - p \delta_{ij}$$

On rappelle que D est la dimension de l'espace et P_{jj} la trace du tenseur P . Le scalaire p est la pression locale du milieu et Π est le tenseur local des contraintes visqueuses.

A.2.2 Modélisation biphasique du milieu

Le milieu est un mélange composé de deux phases pures séparées par des interfaces, zones supposées infiniment minces et sans masse. Pour suivre cette topologie discontinue, on introduit la fonction caractéristique de phase $\chi^s(x, t)$, également appelée fonction de phase. Par définition :

$$(A.6) \quad \chi^s(x, t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ appartient à la phase } s \text{ à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions de phase étant discontinues aux interfaces, on se place dans le cadre des fonctions généralisées. Dans la suite, les dérivations sont donc appliquées au sens des distributions. Ainsi, on a par exemple $\partial_{x_i} \chi^s = -\delta n_i^s$, où δ est la fonction caractéristique de l'interface et n^s est le vecteur unitaire normal à l'interface. Par convention, n^s pointe vers l'extérieur de la zone où se trouve s . On rappelle que si f est une fonction continuellement différentiable et T une distribution, on a toujours la formule de dérivation usuelle $\frac{\partial}{\partial x}(fT) = T \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial T}{\partial x}$.

En multipliant les équations du système (A.4) par la fonction de phase χ^s , on obtient un système d'équations de conservation pour la phase s avec termes de production :

$$(A.7) \quad \begin{cases} \partial_t(\chi^s \rho) + \partial_{x_j}(\chi^s \rho v_j) = \rho \partial_t \chi^s + \rho v_j \partial_{x_j} \chi^s \\ \partial_t(\chi^s \rho v_i) + \partial_{x_j}(\chi^s \rho v_i v_j + \chi^s P_{ij}) = \rho v_i \partial_t \chi^s + (\rho v_i v_j + P_{ij}) \partial_{x_j} \chi^s \\ \partial_t(\chi^s \rho e) + \partial_{x_j}(\chi^s \rho e v_j + \chi^s P_{ij} v_i + \chi^s q_j) = \rho e \partial_t \chi^s + (\rho e v_j + P_{ij} v_i + q_j) \partial_{x_j} \chi^s \end{cases}$$

Les deux systèmes (A.7) pour $s = 1, 2$ forment un modèle biphasique qui n'est pas fermé : il faut une équation supplémentaire pour déterminer χ^s . En l'absence de réaction chimique et

de changement de phase, la fonction de phase χ^s reste constante le long des trajectoires. La dérivée totale de χ^s est donc nulle le long de la trajectoire d'une interface. Ainsi, en notant v^I la vitesse de l'interface, on a :

$$(A.8) \quad \partial_t \chi^s + v_j^I \partial_{x_j} \chi^s = 0$$

L'équation (A.8) est connue sous le nom d'*équation topologique* (voir [DP99]). A l'aide de (A.8), on peut réécrire le système (A.7) sous la forme :

$$(A.9) \quad \begin{cases} \partial_t (\chi^s \rho) + \partial_{x_j} (\chi^s \rho v_j) = \rho (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s \\ \partial_t (\chi^s \rho v_i) + \partial_{x_j} (\chi^s \rho v_i v_j + \chi^s P_{ij}) = \rho v_i (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s + P_{ij} \partial_{x_j} \chi^s \\ \partial_t (\chi^s \rho e) + \partial_{x_j} (\chi^s \rho e v_j + \chi^s P_{ij} v_i + \chi^s q_j) = \rho e (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s + (P_{ij} v_i + q_j) \partial_{x_j} \chi^s \end{cases}$$

A.2.3 Modélisation biffuide du milieu

En général, on ne connaît pas les positions et le mouvement des interfaces, surtout lorsqu'elles sont nombreuses. On passe alors à une représentation biffuide du milieu en moyennant les équations biphasiques (A.9). Pour cela, on introduit un opérateur de moyenne $\langle \cdot \rangle$, supposé vérifier les propriétés classiques de linéarité $\langle \alpha a + \beta b \rangle = \alpha \langle a \rangle + \beta \langle b \rangle$, d'idempotence $\langle \langle a \rangle b \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$ et de commutativité avec les opérateurs de dérivation et d'intégration. Dans l'ouvrage [DP99], les auteurs consacrent un chapitre à la comparaison des différents opérateurs de moyenne généralement utilisés. $\langle \cdot \rangle$ peut être défini comme la limite de la moyenne statistique d'un nombre N de réalisations a : $\langle a \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i$. Contrairement aux moyennes spatiales, temporelles ou spatio-temporelles, seule la moyenne statistique - aussi appelée moyenne d'ensemble - est rigoureusement valable pour des écoulements non homogènes instationnaires. Il est néanmoins possible d'effectuer la procédure d'homogénéisation sans nécessairement choisir le type d'opérateur de moyenne car la forme finale des équations ne dépend pas du type de l'opérateur.

A l'aide de $\langle \cdot \rangle$, on introduit la variable :

$$(A.10) \quad \alpha^s \equiv \langle \chi^s \rangle$$

Si l'opérateur de moyenne est une moyenne spatiale, α^s correspond à la *fraction volumique* de la phase s . Dans le cas général, on parle de *taux de présence*. Dans la suite, on utilise les deux noms sans distinction particulière.

On introduit les valeurs moyennes suivantes :

$$(A.11a) \quad \hat{\rho}^s \equiv \frac{\langle \chi^s \rho \rangle}{\alpha^s}$$

$$(A.11b) \quad \hat{p}^s \equiv \frac{\langle \chi^s p \rangle}{\alpha^s}$$

$$(A.11c) \quad \hat{\Pi}_{ij}^s \equiv \frac{\langle \chi^s \Pi_{ij} \rangle}{\alpha^s}$$

$$(A.11d) \quad \hat{q}_i^s \equiv \frac{\langle \chi^s q_i \rangle}{\alpha^s}$$

$\hat{\rho}^s$ correspond à la masse volumique moyenne réelle de la phase s . Pour s'en convaincre, on peut choisir l'opérateur de moyenne spatiale $\langle \phi \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \phi dV$ et calculer $\hat{\rho}^s$ dans le cas simple de deux phases séparées par une interface en $1D$. De la même manière, toutes les quantités marquées d'un accent circonflexe sont des valeurs moyennes *réelles*, grandeurs thermodynamiques intensives. On déduit facilement des définitions (A.11) les quantités *partielles* correspondantes, grandeurs thermodynamiques extensives :

$$\begin{aligned} \text{(A.12a)} \quad \rho^s &= \alpha^s \hat{\rho}^s \\ \text{(A.12b)} \quad p^s &= \alpha^s \hat{p}^s \\ \text{(A.12c)} \quad \Pi_{ij}^s &= \alpha^s \hat{\Pi}_{ij}^s \\ \text{(A.12d)} \quad q_i^s &= \alpha^s \hat{q}_i^s \end{aligned}$$

On définit également la vitesse moyenne et l'énergie totale massique moyenne de la phase s , évaluées comme des moyennes de Favre :

$$\begin{aligned} \text{(A.13a)} \quad v_i^s &\equiv \frac{\langle \chi^s \rho v_i \rangle}{\alpha^s \hat{\rho}^s} \\ \text{(A.13b)} \quad e^s &\equiv \frac{\langle \chi^s \rho e \rangle}{\alpha^s \hat{\rho}^s} \end{aligned}$$

La définition (A.13a) permet d'introduire la vitesse de fluctuation c^s :

$$\text{(A.14)} \quad c_i^s \equiv v_i - v_i^s$$

Une conséquence directe des définitions (A.13a) et (A.14) est la propriété suivante :

$$\text{(A.15)} \quad \langle \chi^s \rho c_i^s \rangle = 0$$

En prenant la valeur moyenne de chaque équation du système (A.9) et en utilisant les notations (A.10), (A.11), (A.13) et (A.14), on obtient :

$$\text{(A.16)} \quad \begin{cases} \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_j^s) = \dot{M}^s \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s v_j^s + \alpha^s \hat{P}_{ij}^s) = \dot{F}_i^s \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s v_j^s + \alpha^s \hat{P}_{ij}^s v_i^s + \alpha^s \hat{q}_j^s) = \dot{E}^s \end{cases}$$

Pour le second membre de (A.16), on a noté :

$$\text{(A.17)} \quad \dot{M}^s \equiv \langle \rho (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s \rangle$$

\dot{M}^s représente la densité de transfert de masse de la phase s vers l'autre phase.

$$\text{(A.18)} \quad \dot{F}_i^s \equiv \langle \rho v_i (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s \rangle + \langle p \partial_{x_i} \chi^s \rangle + \langle \Pi_{ij} \partial_{x_j} \chi^s \rangle - \partial_{x_j} \langle \chi^s \rho c_i^s c_j^s \rangle$$

\dot{F}^s représente la densité de transfert d'impulsion de la phase s vers l'autre phase.

$$(A.19) \quad \dot{E}^s \equiv \langle \rho h (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s \rangle - \langle p \partial_t \chi^s \rangle \\ + \langle \Pi_{ij} v_i \partial_{x_j} \chi^s \rangle + \langle q_j \partial_{x_j} \chi^s \rangle - \partial_{x_j} \langle \chi^s \rho e c_j^s + \chi^s P_{ij} c_i^s \rangle$$

\dot{E}^s représente la densité de transfert d'énergie de la phase s vers l'autre phase. Dans (A.19), on a introduit l'enthalpie locale h du milieu, définie par :

$$(A.20) \quad h \equiv e + \frac{p}{\rho}$$

A.2.4 Evaluation des termes sources

Les deux systèmes (A.16) pour $s = 1, 2$ forment un modèle bifluide non fermé. Il s'agit maintenant d'associer à chaque terme de production une signification physique en vue de formuler ensuite des hypothèses de fermeture.

On suppose que les sommes sur les espèces des équations (A.16) forment un nouveau système de lois de conservation pour le milieu, vu globalement cette fois comme un mélange. De ce point de vue, si le mélange est un système isolé et en l'absence de réactions chimiques, la masse, l'impulsion et l'énergie totale du mélange doivent être conservées. On impose donc les relations (A.21) :

$$(A.21a) \quad \sum_s \dot{M}^s = 0$$

$$(A.21b) \quad \sum_s \dot{F}_i^s = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, D$$

$$(A.21c) \quad \sum_s \dot{E}^s = 0$$

On remarque que l'on peut dégager une structure commune de certains termes de (A.17), (A.18) et (A.19). Pour mettre en évidence cette structure, on introduit les notations :

$$(A.22a) \quad u_i^{I,s} \equiv \frac{\langle \rho v_i (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s \rangle}{\dot{M}^s}$$

$$(A.22b) \quad h^{I,s} \equiv \frac{\langle \rho h (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s \rangle}{\dot{M}^s}$$

$u^{I,s}$ représente la vitesse moyenne de l'espèce s aux interfaces et $h^{I,s}$ l'enthalpie moyenne de l'espèce s aux interfaces. Si il existe un transfert de masse entre les deux phases ($\dot{M}^s \neq 0$), on peut interpréter $\dot{M}^s u^{I,s}$ comme le transfert d'impulsion engendré par ce transfert de masse et $\dot{M}^s h^{I,s}$ comme le transfert d'enthalpie engendré par ce transfert de masse.

On introduit la notation $\frac{\partial}{\partial n^s} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} n_j^s$, où n^s est le vecteur unitaire normal à l'interface et qui pointe vers l'extérieur de la phase s . On définit alors la pression moyenne $p^{I,s}$ de l'espèce s au niveau des interfaces par :

$$(A.23) \quad p^{I,s} \equiv \frac{\left\langle p \frac{\partial \chi^s}{\partial n^s} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial \chi^s}{\partial n^s} \right\rangle}$$

La définition (A.23) permet de faire apparaître une fluctuation de pression $p^{f,s}$ définie par :

$$(A.24) \quad p^{f,s} \equiv p - p^{I,s}$$

Une conséquence directe des définitions (A.23) et (A.24) est la propriété suivante pour $p^{f,s}$:

$$(A.25) \quad \left\langle p^{f,s} \frac{\partial \chi^s}{\partial n^s} \right\rangle = 0$$

En utilisant (A.24), on peut maintenant écrire :

$$(A.26a) \quad \langle p \partial_{x_i} \chi^s \rangle = p^{I,s} \partial_{x_i} \alpha^s + \langle p^{f,s} \partial_{x_i} \chi^s \rangle$$

$$(A.26b) \quad \langle p \partial_t \chi^s \rangle = p^{I,s} \partial_t \alpha^s + \langle p^{f,s} \partial_t \chi^s \rangle$$

On introduit ensuite la densité de force de traînée d^s (*drag force*) :

$$(A.27) \quad d_i^s \equiv \left\langle \left(p^{f,s} \delta_{ij} + \Pi_{ij} \right) \partial_{x_j} \chi^s \right\rangle$$

Le dernier terme $\langle \chi^s \rho c_i^s c_j^s \rangle$ de (A.18) est la corrélation d'un produit de fluctuations, il est donc négligé devant les autres termes de (A.18).

Concernant le second membre (A.19) de l'équation de bilan d'énergie de l'espèce s (voir (A.16)), on procède à quelques approximations supplémentaires. On remarque d'abord que, en vertu de (A.24), on a :

$$(A.28) \quad -\langle p \partial_t \chi^s \rangle + \langle \Pi_{ij} v_i \partial_{x_j} \chi^s \rangle = -p^{I,s} \partial_t \alpha^s + \left\langle \left(p^{f,s} \delta_{ij} + \Pi_{ij} \right) v_i \partial_{x_j} \chi^s \right\rangle - \left\langle p^{f,s} (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s \right\rangle$$

Si on suppose que la différence des vitesses $(v_j - v_j^I)$ est faible, le terme $\langle p^{f,s} (v_j - v_j^I) \partial_{x_j} \chi^s \rangle$ devient négligeable devant les autres termes de (A.28). Par ailleurs, on fait l'approximation suivante :

$$(A.29) \quad \left\langle \left(p^{f,s} \delta_{ij} + \Pi_{ij} \right) v_i \partial_{x_j} \chi^s \right\rangle \simeq d_j^s u_j^{I,s}$$

Les termes restants de (A.19) sont incorporés dans un unique terme de transfert d'énergie Φ^s :

$$(A.30) \quad \Phi^s \equiv \langle q_j \partial_{x_j} \chi^s \rangle - \partial_{x_j} \langle \chi^s \rho e c_j^s + \chi^s P_{ij} c_i^s \rangle$$

Ainsi, avec les notations (A.17), (A.22), (A.23), (A.24), (A.27), (A.30) et sous l'hypothèse (A.29), on peut écrire le système (A.16) sous la forme :

$$(A.31) \quad \begin{cases} \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_j^s) = \dot{M}^s \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s v_j^s + \alpha^s \hat{P}_{ij}^s) = p^{I,s} \partial_{x_i} \alpha^s + d_i^s + \dot{M}^s u_i^{I,s} \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s v_j^s + \alpha^s \hat{P}_{ij}^s v_i^s + \alpha^s \hat{q}_j^s) = -p^{I,s} \partial_t \alpha^s + d_j^s u_j^{I,s} + \dot{M}^s h^{I,s} + \Phi^s \end{cases}$$

Conjointement au système (A.31), on déduit de (A.21) les relations :

$$(A.32a) \quad \sum_s \alpha^s = 1$$

$$(A.32b) \quad \sum_s \dot{M}^s = 0$$

$$(A.32c) \quad \sum_s (p^{I,s} \partial_{x_i} \alpha^s + d_i^s + \dot{M}^s u_i^{I,s}) = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, D$$

$$(A.32d) \quad \sum_s (-p^{I,s} \partial_t \alpha^s + d_j^s u_j^{I,s} + \dot{M}^s h^{I,s} + \Phi^s) = 0$$

A.2.5 Fermetures

Malgré les hypothèses simplificatrices formulées jusqu'ici, les deux systèmes (A.31) pour $s = 1, 2$ forment un modèle bifluide non miscible à 6 équations encore loin d'être fermé, puisque les quantités $(\alpha^s, u^{I,s}, p^{I,s}, h^{I,s})$, les flux (\hat{P}^s, \hat{q}^s) et les productions (\dot{M}^s, d^s, Φ^s) ne sont pas encore reliés aux variables $(\hat{\rho}^s, v^s, e^s)$. Dans cette section dédiée aux différentes fermetures proposées dans la littérature, on ne discute pas de la modélisation des termes de transfert \dot{M}^s , d^s et Φ^s car elle dépend essentiellement de la nature du problème traité. On se place donc dans un cadre où débit de masse et transfert d'énergie sont nuls ($\dot{M}^s = 0$ et $\Phi^s = 0$) et on suppose la force de traînée d^s connue. Pour la même raison, on ne propose pas d'équations d'état spécifiques pour \hat{P}^s et \hat{q}^s ; on se place au contraire dans le cas simple où les deux phases sont eulériennes. On prend ainsi $\hat{P}_{ij}^s = \hat{p}^s \delta_{ij}$ et $\hat{q}_i^s = 0$, et on suppose que les relations d'état $\hat{p}^s = \hat{p}^s(\hat{\rho}^s, \epsilon^s)$ pour $s = 1, 2$ sont connues. On a noté $\epsilon^s \equiv e^s - \frac{1}{2} v_j^s v_j^s$ l'énergie interne massique de l'espèce s . On admet enfin que lorsque le débit de masse aux interfaces est nul, les pressions et vitesses moyennes interfaciales ne dépendent pas de la phase, *i.e.* $p^{I,s} = p^I$ et $u^{I,s} = u^I$. Dans ces conditions, le système (A.31) s'écrit sous la forme :

$$(A.33) \quad \begin{cases} \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_j^s) = 0 \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s v_j^s + \alpha^s \hat{p}^s \delta_{ij}) = p^I \partial_{x_i} \alpha^s + d_i^s \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s v_j^s + \alpha^s \hat{p}^s v_j^s) = -p^I \partial_t \alpha^s + d_j^s u_j^I \end{cases}$$

Les relations (A.32) se réduisent à :

$$(A.34a) \quad \sum_s \alpha^s = 1$$

$$(A.34b) \quad \sum_s d_i^s = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, D$$

On note que le système (A.33), construit par la technique des équations moyennées, est non conservatif en raison de la présence des termes $p^I \partial_{x_i} \alpha^s$ et $p^I \partial_t \alpha^s$. Compte tenu de la relation (A.34a), le système (A.33) compte seulement 6 équations pour les 7 inconnues $(\hat{\rho}^1, \hat{\rho}^2, v^1, v^2, e^1, e^2, \alpha^1)$. On discute maintenant des différentes fermetures proposées dans la littérature pour les variables α^s , u^I et p^I .

Modèles à 6 équations

Dans les modèles à 6 équations, la valeur de α^s ($s = 1$ ou 2) est fournie par l'existence d'une relation entre les pressions \hat{p}^1 et \hat{p}^2 . L'hypothèse classique est :

$$(A.35) \quad \hat{p}^1 = \hat{p}^2 = p$$

La fermeture (A.35), dite *isobare*, est très répandue car elle semble être physiquement légitime dans la plupart des problèmes biphasiques. Elle conduit à des relations d'état du type $\epsilon^s = \epsilon^s(\hat{\rho}^s, p)$ pour $s = 1, 2$.

La vitesse moyenne des interfaces est le plus souvent identique à celle du mouvement moyen du mélange :

$$(A.36) \quad u_i^I = u_i \equiv \frac{\alpha^1 \hat{\rho}^1 v_i^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2 v_i^2}{\alpha^1 \hat{\rho}^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2}$$

Pour la pression moyenne aux interfaces, le choix le plus simple consiste à prendre :

$$(A.37) \quad p^I = p$$

Les relations (A.35), (A.36) et (A.37) ferment le système (A.33). On obtient alors le modèle standard isobare à 6 équations :

$$(A.38) \quad \begin{cases} \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_j^s) = 0 \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s v_j^s) + \alpha^s \partial_{x_i} p = d_i^s \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s v_j^s + \alpha^s p v_j^s) = -p \partial_t \alpha^s + d_j^s u_j \end{cases}$$

Le modèle standard isobare à 6 équations n'est ni conservatif, ni hyperbolique, ce qui pose des difficultés au niveau du traitement des chocs et de la résolution numérique du système (voir [Cou01] par exemple).

On note par ailleurs qu'une simplification supplémentaire, de nature mathématique, consiste à supposer l'écoulement *barotrope*, où les relations d'état sont du type $\hat{\rho}^s = \hat{\rho}^s(p)$. Il y a trois types d'écoulements barotropes : les écoulements *isentropiques*¹, les écoulements *isothermes*² et les écoulements sous l'approximation d'eau peu profonde. Dans ces trois cas, on ne modélise

¹Dans la littérature des modèles diphasiques, l'adjectif *isentropique* est utilisé avec deux sens différents. Un écoulement isentropique est un écoulement où l'entropie de chaque phase reste constante : $\frac{dS^1}{dt} = \frac{dS^2}{dt} = 0$. Une fermeture isentropique est une fermeture où l'on suppose que les deux phases ont la même entropie à tout instant : $S^1 = S^2 = S$.

²Même remarque que pour l'adjectif isentropique.

pas l'énergie des phases : on se contente d'un système à 4 équations (conservation de la masse et de l'impulsion pour chaque phase). Le modèle obtenu alors est connu sous le nom de modèle standard à 4 équations. Sans véritable intérêt du point de vue de l'ingénieur, il fait l'objet de nombreuses publications d'ordre mathématique car, comme le modèle standard à 6 équations, il n'est ni conservatif, ni hyperbolique.

Modèles à 7 équations de type Baer-Nunziato

Dans les modèles à 7 équations, on introduit une équation supplémentaire sur α^s pour éviter d'imposer une relation entre les pressions des phases. On note $\dot{\alpha}^s$ le transfert de fraction volumique, défini par :

$$(A.39) \quad \dot{\alpha}^s \equiv u_j^I \partial_{x_j} \alpha^s - \langle v_j^I \partial_{x_j} \chi^s \rangle = - \langle v_j^{I,f} \partial_{x_j} \chi^s \rangle$$

On a introduit la vitesse interfaciale de fluctuation $v_i^{I,f} \equiv v_i^I - u_i^I$. En prenant la valeur moyenne de l'équation topologique (A.8), on obtient alors la relation :

$$(A.40) \quad \partial_t \alpha^s + u_j^I \partial_{x_j} \alpha^s = \dot{\alpha}^s$$

Une conséquence directe de (A.40) et (A.34a) est la propriété suivante :

$$(A.41) \quad \sum_s \dot{\alpha}^s = 0$$

En combinant (A.40) et (A.33), on obtient le modèle à 7 équations de type Baer-Nunziato :

$$(A.42) \quad \begin{cases} \partial_t \alpha^s + u_j^I \partial_{x_j} \alpha^s = \dot{\alpha}^s \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_j^s) = 0 \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s v_j^s + \alpha^s \hat{P}_{ij}^s) = p^I \partial_{x_i} \alpha^s + d_i^s \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s v_j^s + \alpha^s \hat{P}_{ij}^s v_i^s + \alpha^s \hat{q}_j^s) = (p^I \partial_{x_j} \alpha^s + d_j^s) u_j^I - p^I \dot{\alpha}^s \end{cases}$$

Contrairement au modèle standard à 6 équations, le modèle à 7 équations de type Baer-Nunziato est hyperbolique. Pour cette raison, il constitue actuellement un modèle de référence pour les mécaniciens des fluides multiphasiques. Le modèle à 7 équations a pourtant deux inconvénients majeurs : il n'est pas conservatif et les grandeurs moyennes aux interfaces sont difficiles à modéliser proprement. On traite maintenant de ce dernier point.

Modélisation de $\dot{\alpha}^s$ Dans [BN86], Baer et Nunziato interprètent $\dot{\alpha}^s$ comme un terme qui doit conduire à la relaxation des pressions. Ils posent donc :

$$(A.43) \quad \dot{\alpha}^1 = \frac{1}{pt^r} (\hat{p}^1 - \hat{p}^2)$$

$p \equiv \alpha^1 \hat{p}^1 + \alpha^2 \hat{p}^2$ est la pression du mélange. t^r , supposé connu, représente un temps caractéristique de relaxation des pressions. Depuis, l'hypothèse (A.43) est très largement utilisée (voir par exemple les thèses [Seg02], [M03], [Mur03]). Néanmoins, si l'on ne souhaite pas forcer la relaxation des pressions, on peut poser $\dot{\alpha}^s = 0$.

Modélisation de u^I et p^I Dans la littérature, on relève par exemple les choix suivants :

- Dans [BN86], les auteurs considèrent un mélange constitué d'une phase (indiquée 1) beaucoup plus compressible que l'autre (indiquée 2). Ils choisissent alors de prendre pour p^I la pression de la phase la plus compressible ($p^I = \hat{p}^1$) et pour la vitesse u^I la vitesse de la phase la moins compressible ($u^I = u^2$).
- Dans [SA99], pression et vitesse moyennes interfaciales sont prises comme étant égales aux grandeurs du mélange, c'est-à-dire $p^I = \alpha^1 \hat{p}^1 + \alpha^2 \hat{p}^2$ et $u^I = \frac{\alpha^1 \hat{p}^1 v^1 + \alpha^2 \hat{p}^2 v^2}{\alpha^1 \hat{p}^1 + \alpha^2 \hat{p}^2}$. La vitesse u^I , évaluée ici comme une moyenne de Favre, correspond à la vitesse du centre de masse du milieu.
- Dans [DB82], un choix original est fait pour la vitesse moyenne interfaciale : $u^I = \alpha^1 v^1 + \alpha^2 v^2$. Il s'agit alors d'une moyenne pondérée par les fractions volumiques, ainsi la vitesse u^I correspond à la vitesse du centre géométrique du milieu.
- Dans [SCB99], des choix plus généraux ont été proposés à l'aide d'une analyse obtenue à partir d'une approche discrète des équations (voir [AS03]). En $1D$, les auteurs proposent $p^I = \frac{z^1 \hat{p}^2 + z^2 \hat{p}^1}{z^1 + z^2} + \text{sgn}\left(\frac{\partial \alpha^1}{\partial x}\right) \frac{z^1 z^2}{z^1 + z^2} (v^2 - v^1)$ et $u^I = \frac{z^1 v^1 + z^2 v^2}{z^1 + z^2} + \text{sgn}\left(\frac{\partial \alpha^1}{\partial x}\right) \frac{1}{z^1 + z^2} (\hat{p}^2 - \hat{p}^1)$, où on a introduit les impédances acoustiques $z^s \equiv \hat{\rho}^s c^s$ (c^s étant la vitesse du son dans la phase s). On remarque que la pression p^I est déterminée par un produit croisé de variables des espèces alors que la vitesse u^I non, ce qui rappelle la structure des solutions du solveur de Riemann acoustique.
- Dans [GSS96], les auteurs proposent de croiser les quantités des espèces aussi bien pour la pression moyenne interfaciale $p^I = \alpha^1 \hat{p}^2 + \alpha^2 \hat{p}^1$ que pour la vitesse moyenne interfaciale $u^I = \alpha^1 v^2 + \alpha^2 v^1$.

Les différentes fermetures que l'on vient de présenter sont souvent basées sur des considérations physiques en liaison avec des résultats expérimentaux. Il est pourtant bien connu que u^I et p^I influencent la nature mathématique du système. Pour cette raison, certains travaux récents sont consacrés à la construction mathématique et à la comparaison des propriétés mathématiques des fermetures pour u^I et p^I . Dans le cas $1D$, une analyse très intéressante est donnée dans [Seg02] et [CGHS02]; on la résume dans ce qui suit.

Hypothèses A.1. *On suppose que le modèle doit être consistant³ avec l'état limite d'équilibre des vitesses et des pressions, c'est-à-dire que :*

$$(A.44) \quad \begin{cases} v^1 = v^2 = v \\ \hat{p}^1 = \hat{p}^2 = p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u^I = v \\ p^I = p \end{cases}$$

Hypothèses A.2. *On suppose que la vitesse moyenne interfaciale peut s'écrire sous la forme :*

$$(A.45) \quad u^I = \beta v^1 + (1 - \beta) v^2$$

La fonction scalaire $0 \leq \beta \leq 1$ peut dépendre a priori de toutes les variables $\alpha^s, \alpha^s \hat{p}^s, \alpha^s \hat{\rho}^s v^s, \alpha^s \hat{\rho}^s e^s$ pour $s = 1, 2$.

Hypothèses A.3. *On suppose que la pression moyenne interfaciale peut s'écrire sous la forme :*

$$(A.46) \quad p^I = \gamma \hat{p}^1 + (1 - \gamma) \hat{p}^2$$

La fonction scalaire $0 \leq \gamma \leq 1$ peut dépendre a priori de toutes les variables $\alpha^s, \alpha^s \hat{p}^s, \alpha^s \hat{\rho}^s v^s, \alpha^s \hat{\rho}^s e^s$ pour $s = 1, 2$.

³Le nom *propriété de consistance* est introduit dans [CGHS02].

On note que les hypothèses A.2 et A.3 sont compatibles avec l'hypothèse de départ A.1. On trouve alors dans [Seg02] et [CGHS02] les résultats suivants :

Proposition A.1. *Sous l'hypothèse A.2, le champ associé à la valeur propre u^I du système (A.42) est linéairement dégénéré si :*

$$(A.47) \quad \beta = 1 \text{ ou } \beta = \frac{\alpha^1 \hat{\rho}^1}{\alpha^1 \hat{\rho}^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2} \text{ ou } \beta = 0$$

Proposition A.2. *On note s^s l'entropie massique de la phase s et on pose $\eta^s \equiv \log s^s + \psi^s(\alpha^s)$ où $\psi^1(\alpha^1) = \psi^2(\alpha^2)$. Sous les hypothèses A.2 et A.3, et si $\gamma = \frac{a^1(1-\beta)}{a^1(1-\beta)+a^2\beta}$ avec $a^s \equiv \frac{1}{s^s} \left(\frac{\partial s^s}{\partial p^s} \right) \left(\frac{\partial \epsilon^s}{\partial p^s} \right)^{-1}$ pour $s = 1, 2$, l'inégalité d'entropie (A.48) est valable pour les solutions régulières du système (A.42) :*

$$(A.48) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta + \frac{\partial}{\partial x} F_\eta \leq 0$$

On a posé $\eta \equiv -\alpha^1 \hat{\rho}^1 \eta^1 - \alpha^2 \hat{\rho}^2 \eta^2$ et $F_\eta \equiv -\alpha^1 \hat{\rho}^1 \eta^1 v^1 - \alpha^2 \hat{\rho}^2 \eta^2 v^2$.

On renvoie à [Seg02] et [CGHS02] pour les preuves des propositions A.1 et A.2.

En détaillant dans cette section la technique des équations moyennées, on a construit le modèle standard à 6 équations (non hyperbolique) et le modèle à 7 équations de type Baer-Nunziato (inconditionnellement hyperbolique). Les deux modèles sont non conservatifs. On a vu que la littérature concernant la modélisation des quantités interfaciales est très vaste et que le problème reste d'actualité. On vient de voir par exemple que le choix des valeurs de u^I et p^I peut avoir de fortes conséquences sur les propriétés mathématiques du modèle considéré, comme l'existence d'une inégalité d'entropie.

A.3 Principes de la thermodynamique étendue et formalisme de Godunov et Romensky

En 1995, Godunov et Romensky proposèrent un nouveau formalisme pour une classe de systèmes symétriques hyperboliques de lois de conservation dérivant d'un unique potentiel (voir [GR95]), sans faire mention à l'époque des principes de la thermodynamique étendue. En 1998, Romensky appliqua ce formalisme pour construire des nouveaux modèles de mécanique des milieux continus, comme des équations pour le mouvement des diélectriques, des équations pour le mouvement de l'hélium superfluide, des équations pour le transfert de chaleur à vitesse finie et des équations pour les écoulements multiphasiques multivitesse (voir [Rom98], [Rom01]). Cette fois, le lien entre ce nouveau formalisme et les principes de la thermodynamique étendue est explicitement reconnu. A partir de 2002, Romensky et Toro se concentrèrent sur l'application de ce formalisme au problème des écoulements biphasiques compressibles à deux vitesses et une pression (voir [RT03], [RZST03]). Le modèle alors proposé a l'avantage d'être symétrique hyperbolique et conservatif, ce qui permet de développer une théorie rigoureuse pour traiter les chocs. En 2004, les mêmes auteurs proposèrent une extension de leur modèle à deux pressions et deux températures (voir [RRT04]) et mirent en évidence, sous certaines hypothèses, un lien entre leur modèle et celui de Baer-Nunziato construit avec la technique des équations moyennées (voir [RT04]). On reviendra sur ce dernier point lors de la comparaison des modèles. En se basant sur l'ensemble des papiers cités plus haut, on présente le formalisme dont il est question, puis on construit le modèle dit *de Godunov-Romensky*.

A.3.1 Présentation du formalisme

Pour une classe de systèmes d'équations de la mécanique des milieux continus, le formalisme de Godunov et Romensky permet de formuler des lois thermodynamiques et des relations constitutives qui ont les deux avantages d'être thermodynamiquement compatibles et mathématiquement bien posées. Pour utiliser ce formalisme, il faut néanmoins se donner initialement la forme du système que l'on considère. On va voir que ce formalisme est en quelque sorte un outil mathématique qui se fonde sur les principes de la thermodynamique étendue exposés dans la première partie de ce document.

On considère dans un premier temps la classe de systèmes de lois de conservation suivante :

$$\begin{aligned}
 (A.49a) \quad & \partial_t L_{q_i} + \partial_{x_k} (u_k L)_{q_i} = 0 \\
 (A.49b) \quad & \partial_t L_{u_i} + \partial_{x_k} [(u_k L)_{u_i} - r_{i\alpha} L_{k\alpha} - b_i L_{b_k} - d_i L_{d_k} + j_k L_{j_i} - \delta_{ik} j_\alpha L_{j\alpha}] = 0 \\
 (A.49c) \quad & \partial_t L_{r_{il}} + \partial_{x_k} (u_k L_{r_{il}} - u_i L_{r_{kl}}) = 0 \\
 (A.49d) \quad & \partial_t L_{d_i} + \partial_{x_k} (u_k L_{d_i} - u_i L_{d_k} - e_{ikl} b_l) = 0 \\
 (A.49e) \quad & \partial_t L_{b_i} + \partial_{x_k} (u_k L_{b_i} - u_i L_{b_k} - e_{ikl} d_l) = 0 \\
 (A.49f) \quad & \partial_t L_n + \partial_{x_k} (u_k L_n + j_k) = 0 \\
 (A.49g) \quad & \partial_t L_{j_k} + \partial_{x_k} (u_\alpha L_{j_\alpha} + n) = 0
 \end{aligned}$$

On a noté e_{ikl} le pseudo-scalaire⁴ unité. Chaque terme des équations (A.49) dérive⁵ de l'unique potentiel générateur L qui dépend des variables :

$$(A.50) \quad L = L(q_i, u_i, r_{il}, d_i, b_i, n, j_k)$$

Pour les variables u_i , d_i , b_i et r_{il} , l'indice i varie de 1 à 3. Par contre le nombre des variables q_i est quelconque. Les indices l et k varient de 1 à 3.

Le système (A.49) est fermé, mais d'autres lois de conservation stationnaires sont compatibles avec ce système. En dérivant (A.49c) par rapport à x_i , on trouve :

$$(A.51) \quad \partial_t \partial_{x_i} L_{r_{il}} = 0$$

Autrement dit, si la condition initiale vérifie $\partial_{x_i} L_{r_{il}} = 0$, alors la même égalité reste valable à tout instant. De la même manière, on peut obtenir les équations :

$$\begin{aligned}
 (A.52a) \quad & \partial_{x_i} L_{r_{il}} = 0 \\
 (A.52b) \quad & \partial_{x_i} L_{d_i} = 0 \\
 (A.52c) \quad & \partial_{x_i} L_{b_i} = 0 \\
 (A.52d) \quad & \partial_{x_i} L_{j_k} - \partial_{x_k} L_{j_i} = 0
 \end{aligned}$$

⁴Par définition du pseudo-scalaire unité, $e_{ijk} = 0$ si une même valeur se répète dans les indices ; $e_{ijk} = 1$ si les valeurs de i , j et k respectent le sens indirect $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$; $e_{ijk} = -1$ si les valeurs de i , j et k respectent le sens direct $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Ainsi, la notation $\omega_i = e_{ijk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k}$ signifie que ω est le rotationnel de V .

⁵Les notations de dérivation adoptées ici sont celles de Godunov et Romensky. Par exemple, L_{q_i} représente la dérivée partielle de L par rapport à q_i .

Les équations (A.52) sont compatibles avec le système (A.49). On arrive au premier résultat important :

Propriété A.1 (du système (A.49)). *Le système global formé par les équations (A.49) et (A.52) admet une loi de conservation instationnaire supplémentaire, équivalente au premier principe de la thermodynamique.*

Preuve de la propriété A.1 Pour obtenir cette loi, il faut prendre la combinaison linéaire suivante des équations (A.49) et (A.52) :

$$\begin{aligned} & q_i \times (\text{A.49}).a + u_i \times (\text{A.49}).b + r_{il} \times (\text{A.49}).c + d_i \times (\text{A.49}).d \\ & + b_i \times (\text{A.49}).e + n \times (\text{A.49}).f + j_k \times (\text{A.49}).g + u_i r_{il} \times (\text{A.52}).a \\ & + u_i d_i \times (\text{A.52}).b + u_i b_i \times (\text{A.52}).c + u_i j_k \times (\text{A.52}).d \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$(A.53) \quad \partial_t \Pi_0 + \partial_{x_k} \Pi_k = 0$$

Où l'énergie totale Π_0 du système est définie par :

$$(A.54) \quad \Pi_0 \equiv q_i L_{q_i} + u_i L_{u_i} + r_{il} L_{r_{il}} + d_i L_{d_i} + b_i L_{b_i} + n L_n + j_k L_{j_k} - L$$

Et où le flux d'énergie totale Π_k est défini par :

$$(A.55) \quad \begin{aligned} \Pi_k \equiv & u_k (q_i L_{q_i} + u_i L_{u_i} + r_{il} L_{r_{il}} + d_i L_{d_i} + b_i L_{b_i} + n L_n) \\ & + u_l (j_k L_{j_k} - r_{l\beta} L_{r_{k\beta}} - d_l L_{d_k} - b_l L_{b_k}) + j_k n + e_{k\alpha\beta} d_\alpha b_\beta \end{aligned}$$

■

L'équation (A.53) correspond à la loi de conservation de l'énergie totale du système formé par les équations (A.49) et (A.52). On présente maintenant le deuxième résultat important :

Propriété A.2 (du système (A.49)). *Le système global formé par les équations (A.49) et (A.52) peut être écrit de façon équivalente sous la forme d'un système symétrique qui est hyperbolique si le potentiel L est une fonction convexe de ses variables.*

Preuve de la propriété A.2 On commence par ajouter à l'équation (A.49b) le terme (A.56) :

$$(A.56) \quad r_{i\alpha} \partial_{x_k} L_{r_{k\alpha}} + d_i \partial_{x_k} L_{d_k} + b_i \partial_{x_k} L_{b_k} + j_k (\partial_{x_i} L_{j_k} - \partial_{x_k} L_{j_i}) = 0$$

Aux équations (A.49c), (A.49d), (A.49e) et (A.49g), on ajoute respectivement les termes (A.57) :

$$(A.57) \quad u_i \partial_{x_k} L_{r_{kl}} = 0 \quad u_i \partial_{x_k} L_{d_k} = 0 \quad u_i \partial_{x_k} L_{b_k} = 0 \quad u_i (\partial_{x_i} L_{j_k} - \partial_{x_k} L_{j_i}) = 0$$

On obtient alors le nouveau système :

$$\begin{aligned}
\text{(A.58a)} \quad & \partial_t L_{q_i} + \partial_{x_k} (u_k L)_{q_i} = 0 \\
\text{(A.58b)} \quad & \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} - L_{r_{k\alpha}} \frac{\partial r_{i\alpha}}{\partial x_k} - L_{d_k} \frac{\partial d_i}{\partial x_k} - L_{b_k} \frac{\partial b_i}{\partial x_k} + L_{j_i} \frac{\partial j_k}{\partial x_k} - L_{j_\alpha} \frac{\partial j_\alpha}{\partial x_i} = 0 \\
\text{(A.58c)} \quad & \partial_t L_{r_{il}} + \partial_{x_k} (u_k L)_{r_{il}} - L_{r_{kl}} \partial_{x_k} u_i = 0 \\
\text{(A.58d)} \quad & \partial_t L_{d_i} + \partial_{x_k} (u_k L)_{d_i} - L_{d_k} \partial_{x_k} u_i - e_{ikl} \partial_{x_k} b_l = 0 \\
\text{(A.58e)} \quad & \partial_t L_{b_i} + \partial_{x_k} (u_k L)_{b_i} - L_{b_k} \partial_{x_k} u_i - e_{ikl} \partial_{x_k} d_l = 0 \\
\text{(A.58f)} \quad & \partial_t L_n + \partial_{x_k} (u_k L)_n + \partial_{x_k} j_k = 0 \\
\text{(A.58g)} \quad & \partial_t L_{j_i} + \partial_{x_k} (u_k L)_{j_i} + L_{j_\alpha} \partial_{x_i} u_\alpha - L_{j_l} \partial_{x_k} u_k + \partial_{x_l} n = 0
\end{aligned}$$

Le système (A.58) est symétrique parce que les deux premiers termes de chaque équation peuvent être décrits par les matrices hessiennes des fonctions L et $v_k L$. On remarque que les autres termes sont symétriques. L'hyperbolicité requiert simplement que L soit une fonction convexe de ses variables. ■

A.3.2 Construction du modèle bifluide de Godunov-Romensky

On vient de voir que les systèmes de loi de conservation qui appartiennent à la classe (A.49) sont symétriques hyperboliques si L est convexe et admettent une loi de conservation supplémentaire qui correspond au premier principe de la thermodynamique. Dans [Rom01], les auteurs étendent leur analyse à une classe de systèmes d'équations de bilan, c'est-à-dire des lois de conservation en présence de termes de production. On se sert maintenant de ces travaux pour construire le modèle bifluide non miscible à deux vitesses de Godunov-Romensky.

On considère un fluide biphasique. L'état de chaque phase s est caractérisé par sa masse volumique partielle ρ^s et sa vitesse absolue v_i^s . Pour le mélange, on prend les définitions usuelles $\rho \equiv \rho^1 + \rho^2$ et $v_i \equiv \frac{1}{\rho} (\rho^1 v_i^1 + \rho^2 v_i^2)$. Par ailleurs, on note $c \equiv \frac{\rho^1}{\rho}$ la fraction massique de la phase 1 et $V_i \equiv v_i^1 - v_i^2$ la vitesse relative entre les deux phases. S est l'entropie du mélange.

Modèle à une pression

On suppose que l'équation d'état du mélange est de la forme :

$$\text{(A.59)} \quad \xi(\tau, S, c, V) = \epsilon(\tau, S, c) + \frac{1}{2} c(1-c) V_j V_j$$

ξ est l'énergie interne massique du mélange et ϵ est l'énergie interne inerte massique du mélange. On a noté $\tau \equiv \frac{1}{\rho}$ le volume spécifique du mélange.

On choisit de représenter le mouvement du milieu biphasique par le système suivant (voir [Rom01]) :

$$\begin{aligned}
\text{(A.60a)} \quad & \partial_t L_{q_\omega} + \partial_{x_k} (u_k L)_{q_\omega} = \frac{j_k \pi_k}{q_\omega} \\
\text{(A.60b)} \quad & \partial_t L_{q_0} + \partial_{x_k} (u_k L)_{q_0} = 0 \\
\text{(A.60c)} \quad & \partial_t L_{u_i} + \partial_{x_k} (u_k L)_{u_i} + \partial_{x_k} (j_k L_{j_i} + \delta_{ik} j_\alpha L_{j_\alpha}) = 0 \\
\text{(A.60d)} \quad & \partial_t L_n + \partial_{x_k} (u_k L_n + j_k) = 0 \\
\text{(A.60e)} \quad & \partial_t L_{j_k} + \partial_{x_k} (u_\alpha L_{j_\alpha} + n) = -(e_{k\alpha\beta} u_\alpha \omega_\beta + \pi_k) \\
\text{(A.60f)} \quad & \partial_{x_\alpha} L_{j_k} - \partial_{x_k} L_{j_\alpha} = -e_{k\alpha\beta} \omega_\beta
\end{aligned}$$

Pour le potentiel générateur, on choisit :

$$(A.61) \quad L = -\xi_\tau + \rho V_k \xi_{V_k}$$

Pour les variables, on prend :

$$(A.62a) \quad q_\omega = T = \xi_S$$

$$(A.62b) \quad q_0 = \xi - S\xi_S - \tau\xi_\tau - c\xi_c - \frac{v_j v_j}{2}$$

$$(A.62c) \quad u_i = v_i$$

$$(A.62d) \quad n = \xi_c$$

$$(A.62e) \quad j_k = \rho \xi_{V_k}$$

On peut alors donner une interprétation physique à chaque équation du système (A.60). L'équation (A.60a) exprime le bilan d'entropie :

$$(A.63) \quad \partial_t (\rho S) + \partial_{x_k} (\rho S v_k) = \frac{\rho \xi_{V_k} \pi_k}{T}$$

L'équation (A.60b) exprime la conservation de la masse du mélange :

$$(A.64) \quad \partial_t \rho + \partial_{x_k} (\rho v_k) = 0$$

L'équation (A.60c) exprime la conservation de l'impulsion du mélange :

$$(A.65) \quad \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_k} (\rho v_i v_k - \delta_{ik} \xi_\tau + \rho V_i \xi_{V_k}) = 0$$

L'équation (A.60d) exprime la conservation de la fraction massique de l'espèce 1 :

$$(A.66) \quad \partial_t (\rho c) + \partial_{x_k} (\rho c v_k + \rho \xi_{V_k}) = 0$$

L'équation (A.60e) exprime le bilan de vitesse relative entre les phases :

$$(A.67) \quad \partial_t V_k + \partial_{x_k} (v_\alpha V_\alpha + \xi_c) = -(e_{k\alpha\beta} v_\alpha \omega_\beta + \pi_k)$$

La dernière équation du système (A.60) a pour fonction de déterminer la vortacité ω_β :

$$(A.68) \quad \partial_{x_\alpha} V_k - \partial_{x_k} V_\alpha = -e_{k\alpha\beta} \omega_\beta$$

Pour fermer le nouveau système d'équations, il est indispensable d'indiquer la dépendance entre la friction π_k et les paramètres d'état du milieu. On choisit généralement une relation de la forme :

$$(A.69) \quad \pi_k = K \xi_{V_k} = Kc(1-c)V_k$$

K est une fonction à expliciter.

On vient de construire la version la plus simple du modèle de Godunov-Romensky, *i.e.* un modèle bifluide non miscible à deux vitesses et une seule pression :

$$\begin{aligned}
(\text{A.70a}) \quad & \partial_t \rho + \partial_{x_k} (\rho v_k) = 0 \\
(\text{A.70b}) \quad & \partial_t (\rho c) + \partial_{x_k} (\rho c v_k + \rho \xi V_k) = 0 \\
(\text{A.70c}) \quad & \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_k} (\rho v_i v_k - \delta_{ik} \xi_\tau + \rho V_i \xi V_k) = 0 \\
(\text{A.70d}) \quad & \partial_t V_k + \partial_{x_k} (v_\alpha V_\alpha + \xi c) = -(e_{k\alpha\beta} v_\alpha \omega_\beta + \pi_k) \\
(\text{A.70e}) \quad & \partial_{x_\alpha} V_k - \partial_{x_k} V_\alpha = -e_{k\alpha\beta} \omega_\beta \\
(\text{A.70f}) \quad & \partial_t (\rho S) + \partial_{x_k} (\rho S v_k) = \frac{\rho \xi V_k \pi_k}{T}
\end{aligned}$$

Le modèle (A.70) est fermé par la relation d'état (A.59) et la loi (A.69).

Modèle à deux pressions

Dans [RZST03], le potentiel générateur L dépend d'une variable supplémentaire : la fraction volumique α de l'espèce 1. Dans ce cas, avec la même technique qu'avant, la considération d'une nouvelle classe de systèmes permet d'obtenir le modèle suivant :

$$\begin{aligned}
(\text{A.71a}) \quad & \partial_t \rho + \partial_{x_k} (\rho v_k) = 0 \\
(\text{A.71b}) \quad & \partial_t (\rho v_l) + \partial_{x_k} (\rho v_l v_k + p \delta_{lk} + \rho V_l \xi V_k) = 0 \\
(\text{A.71c}) \quad & \partial_t (\rho e) + \partial_{x_k} (\rho e v_k + p v_k + \rho v_k V_l \xi V_l + \rho \xi c \xi V_k) = 0 \\
(\text{A.71d}) \quad & \partial_t (\rho \alpha) + \partial_{x_k} (\rho \alpha v_k) = -\Phi \\
(\text{A.71e}) \quad & \partial_t (\rho c) + \partial_{x_k} (\rho c v_k + \rho \xi V_k) = 0 \\
(\text{A.71f}) \quad & \partial_t V_k + \partial_{x_k} (v_l V_k + \xi c) = -(e_{klj} v_l \omega_k + \pi_k)
\end{aligned}$$

$e \equiv \xi + \frac{v_j v_j}{2}$ est l'énergie totale massique du mélange. L'équation (A.71) est une équation de bilan pour la densité de fraction volumique d'une phase. Cette fois, l'énergie interne massique du mélange est de la forme :

$$(\text{A.72}) \quad \xi (\rho, \alpha, c, V, S) = \epsilon (\rho, \alpha, c, S) + c(1-c) \frac{V_j V_j}{2}$$

Dans les équations (A.71b) et (A.71c), la pression p du mélange est définie par :

$$(\text{A.73}) \quad p \equiv \rho^2 \epsilon_\rho$$

Le nouveau terme source Φ décrit la relaxation de la fraction volumique vers l'état d'équilibre :

$$(\text{A.74}) \quad \Phi \equiv \frac{\rho}{t^r} \xi_\alpha$$

On a noté t^r un coefficient proportionnel au temps caractéristique de relaxation des fractions volumiques.

On garde la relation (A.69) pour la friction et la relation de compatibilité (A.68) pour la vorticité. Dans ce cas, le système (A.71) est fermé si l'on se donne explicitement l'équation d' tat (A.72). Il s'agit pour le moment d'un modèle à une seule pression et une seule température. Cependant la connaissance des fractions volumiques permet d'accéder aux masses volumiques réelles $\hat{\rho}^s$ et aux pressions réelles \hat{p}^s de chaque espèce.

On décompose l'énergie totale massique du mélange ; on pose :

$$(A.75) \quad \epsilon = c^1 \epsilon^1 + c^2 \epsilon^2$$

ϵ^1 , respectivement ϵ^2 , dépend *a priori* de $\hat{\rho}^1$ et S^1 , respectivement $\hat{\rho}^2$ et S^2 . Dans le cas général, les entropies S^1 et S^2 ne sont pas égales, et peuvent être différentes de l'entropie globale du mélange. Dans [RZST03], une analyse des relations d'état des espèces est donnée lorsque les entropies des espèces sont écartées de l'entropie du mélange. De cette analyse, les auteurs déduisent les relations de fermeture suivantes :

$$(A.76a) \quad p = \alpha^1 \hat{p}^1 + \alpha^2 \hat{p}^2$$

$$(A.76b) \quad \epsilon_\alpha = \tau (\hat{p}^2 - \hat{p}^1)$$

$$(A.76c) \quad \epsilon_c = \epsilon^1 + \frac{\hat{p}^1}{\hat{\rho}^1} - \epsilon^2 - \frac{\hat{p}^2}{\hat{\rho}^2}$$

Le modèle obtenu alors est constitué de 6 équations et prend la forme :

$$(A.77) \quad \begin{cases} \partial_t (\alpha^1 \hat{\rho}^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2) + \partial_{x_k} (\alpha^1 \hat{\rho}^1 v_k^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2 v_k^2) = 0 \\ \partial_t (\alpha^1 \hat{\rho}^1 v_l^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2 v_l^2) + \partial_{x_k} (\alpha^1 \hat{\rho}^1 v_l^1 v_k^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2 v_l^2 v_k^2 + p \delta_{lk}) = 0 \\ \partial_t ((\alpha^1 \hat{\rho}^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2) \alpha) + \partial_{x_k} ((\alpha^1 \hat{\rho}^1 v_k^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2 v_k^2) \alpha) = \frac{1}{t^r} (\hat{p}^2 - \hat{p}^1) \\ \partial_t (\alpha^1 \hat{\rho}^1) + \partial_{x_k} (\alpha^1 \hat{\rho}^1 v_k^1) = 0 \\ \partial_t (v_k^1 - v_k^2) + \partial_{x_k} \left(\frac{v_l^1 v_l^1}{2} + \epsilon^1 + \frac{\hat{p}^1}{\hat{\rho}^1} - \frac{v_l^2 v_l^2}{2} - \epsilon^2 - \frac{\hat{p}^2}{\hat{\rho}^2} \right) = -e_{klj} v_l \omega_j - \pi_k \\ \partial_t ((\alpha^1 \hat{\rho}^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2) S) + \partial_{x_k} ((\alpha^1 \hat{\rho}^1 v_k^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2 v_k^2) S) = \frac{\tau}{t^r} (\hat{p}^2 - \hat{p}^1)^2 + \pi_k V_k \end{cases}$$

Les inconnues sont $\hat{\rho}^1$, $\hat{\rho}^2$, α , v_l^1 , v_l^2 et S . Le modèle est fermé par la relation d' tat (A.72), la relation (A.69) et la relation de compatibilité sur la vorticité :

$$(A.78) \quad \partial_{x_j} V_k - \partial_{x_k} v_j = -e_{klj} \omega_j$$

En conclusion, le modèle (A.77) est une extension à deux pressions du modèle de Godunov-Romensky. Le second membre $\frac{\tau}{t^r} (\hat{p}^2 - \hat{p}^1)^2 + \pi_k V_k$ de l'équation pour l'entropie étant la somme de deux carrés, il est positif ou nul. Ainsi, par construction, le modèle (A.77) contient une inégalité d'entropie et il a l'avantage d'être conservatif et symétrique hyperbolique. Cependant on note que le formalisme de Godunov-Romensky est composé de deux phases. La première, qui concerne le choix des variables et de la forme du système d'équations, est essentiellement basée sur l'expérience du théoricien et non sur des principes rigoureux de construction. La deuxième, qui consiste à expliciter les relations constitutives inconnues à l'aide des principes de la thermodynamique étendue, est par contre exclusivement calculatoire. Ainsi, on ne peut pas actuellement dire de ce formalisme qu'il constitue une technique ultime de construction de modèles, car les modèles obtenus sont le fruit d'une série de choix arbitraires guidés par des

exigences d'ordre mathématique. Pourquoi, par exemple, avoir choisi la vitesse relative entre les phases comme inconnue du système ? La réponse est donnée par Després dans [DLR03], qui démontre qu'il s'agit de la seule variable disponible en $1D$ pour former un modèle bivitesse conservatif.

Remarque sur un modèle récent à deux pressions et deux températures Dans [RRT04], les auteurs proposent un modèle bifluide non miscible à deux vitesses, deux pressions mais aussi deux températures. Il s'agit d'un modèle constitué de 7 équations. Comparativement au système (A.77) constitué de 6 équations, l'équation supplémentaire est une équation sur l'énergie d'une espèce. Ce nouveau modèle étant construit à l'aide du formalisme de Godunov et Romensky, il est conservatif, hyperbolique et admet une inégalité pour l'entropie globale du mélange. •

A.4 Modèles bifluides non miscibles

Dans cette section, on présente de manière synthétique les différents modèles non miscibles bifluides bivitesse construits dans les sections précédentes. Il s'agit du modèle non conservatif standard à 6 équations, des modèles non conservatifs à 7 équations de type Baer-Nunziato et des modèles conservatifs à 5 et 6 équations de type Godunov-Romensky. On présente également le modèle isobare-isotherme de Després.

A.4.1 Modèle standard à 6 équations

Le modèle non miscible standard à 6 équations est construit grâce à la technique des équations moyennées. Dans le cas non visqueux, en l'absence de flux de chaleur et en l'absence de transfert de masse et d'énergie entre les espèces, il prend la forme générale :

$$(A.79) \quad \begin{cases} \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_j^s) = 0 \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s v_j^s + \alpha^s \hat{p}^s \delta_{ij}) = p^I \partial_{x_i} \alpha^s + d_i^s \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s v_j^s + \alpha^s \hat{p}^s v_j^s) = -p^I \partial_t \alpha^s + d_j^s u_j^I \end{cases}$$

Aux 6 équations (A.79) ($s = 1, 2$), on ajoute respectivement les contraintes de saturation et de conservation globale de l'impulsion du mélange :

$$(A.80a) \quad \sum_s \alpha^s = 1$$

$$(A.80b) \quad \sum_s d_i^s = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, D$$

Les notations sont les suivantes :

Notation	Signification	Définition formelle
s	indice d'espèce	
i, j	indices de direction d'espace	
D	dimension de l'espace	$D = 1, 2$ ou 3
α^s	fraction volumique de l'espèce s	
$\hat{\rho}^s$	masse volumique réelle de l'espèce s	
v^s	vitesse absolue de l'espèce s	
\hat{p}^s	pression réelle de l'espèce s	
p^I	pression moyenne aux interfaces	
d^s	densité de force de traînée de l'espèce s	
e^s	énergie totale massique de l'espèce s	$e^s = \epsilon^s + \frac{1}{2}v_j^s v_j^s$
ϵ^s	énergie interne massique de l'espèce s	
u^I	vitesse moyenne absolue des interfaces	

Le modèle standard à 6 équations est non conservatif en raison de la présence des termes $p^I \partial_{x_i} \alpha^s$ et $p^I \partial_t \alpha^s$ (on suppose que la traînée d^s n'est pas un terme différentiel). Compte tenu de la relation (A.80a), le système (A.79) compte seulement 6 équations pour les 7 inconnues $(\hat{\rho}^1, \hat{\rho}^2, v^1, v^2, e^1, e^2, \alpha^1)$. La valeur de α^s ($s = 1$ ou 2) est alors fournie par l'existence d'une relation entre les pressions \hat{p}^1 et \hat{p}^2 . L'hypothèse classique est :

$$(A.81) \quad \hat{p}^1 = \hat{p}^2 = p$$

La fermeture (A.81), dite *isobare*, est très répandue car elle semble être physiquement légitime dans la plupart des problèmes biphasiques. Elle conduit à des relations d'état du type $\epsilon^s = \epsilon^s(\hat{\rho}^s, p)$ pour $s = 1, 2$. La vitesse moyenne des interfaces est le plus souvent identique à celle du mouvement moyen du mélange, c'est-à-dire que :

$$(A.82) \quad u_i^I = v_i \equiv \frac{\alpha^1 \hat{\rho}^1 v_i^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2 v_i^2}{\alpha^1 \hat{\rho}^1 + \alpha^2 \hat{\rho}^2}$$

Pour la pression moyenne aux interfaces, le choix le plus simple associé à l'hypothèse (A.81) consiste à prendre :

$$(A.83) \quad p^I = p$$

On obtient alors un modèle fermé, appelé modèle standard isobare à 6 équations :

$$(A.84) \quad \begin{cases} \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_j^s) = 0 \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s v_j^s) + \alpha^s \partial_{x_i} p = d_i^s \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s v_j^s + \alpha^s p v_j^s) = -p \partial_t \alpha^s + d_j^s v_j \end{cases}$$

Le modèle standard isobare à 6 équations a deux inconvénients majeurs : d'une part, il n'est pas hyperbolique, ce qui pose des difficultés au niveau de la résolution numérique des systèmes ; d'autre part, il n'est pas conservatif, ce qui pose des difficultés pour le traitement mathématique des chocs.

Concernant le mélange vu comme un fluide global, on obtient les équations de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie en sommant sur les espèces les équations du système (A.84) :

$$(A.85) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0 \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) = 0 \\ \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + \sigma_{ij} v_i + Q_j) = 0 \end{cases}$$

Les notations sont les suivantes :

Notation	Signification	Définition formelle
ρ	masse volumique du mélange	$\rho = \sum_s \alpha^s \hat{\rho}^s$
v	vitesse absolue du mélange	$\rho v_i = \sum_s \alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s$
u^s	vitesse relative de l'espèce s par rapport au mélange	$u_i^s = v_i^s - v_i$
σ	tenseur des contraintes totales du mélange	$\sigma_{ij} = p \delta_{ij} + R_{ij}$
R	tenseur des contraintes de Reynolds	$R_{ij} = \sum_s R_{ij}^s = \sum_s \alpha^s \hat{\rho}^s u_i^s u_j^s$
e	énergie totale massique du mélange	$\rho e = \sum_s \alpha^s \hat{\rho}^s e^s$
Q	flux d'énergie du mélange	$Q_i = \sum_s \left[\left(\epsilon^s + \frac{1}{2} u_j^s u_j^s + \frac{p}{\hat{\rho}^s} \right) \alpha^s \hat{\rho}^s u_i^s \right]$

Remarque sur la préservation du repos par le modèle standard isobare On considère un mélange de deux espèces non miscibles dans le cas $1D$. Le mélange est supposé être initialement au repos, c'est-à-dire que, à $t = 0$:

$$(A.86) \quad v^1 = v^2 = v \quad \text{et} \quad \partial_x v = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x p = 0$$

En injectant la condition initiale (A.86) dans les systèmes (A.84) et (A.85), on obtient respectivement les systèmes suivants, valable à $t = 0$:

$$(A.87) \quad \begin{cases} D^t (\alpha^s \hat{\rho}^s) = 0 \\ \partial_t v^s = 0 \\ D^t e^s = -p D^t \alpha^s \end{cases}$$

$$(A.88) \quad \begin{cases} D^t \rho = 0 \\ \partial_t v = 0 \\ D^t e = 0 \end{cases}$$

On a introduit la dérivée lagrangienne $D^t \equiv \partial_t + v \partial_x$. On déduit du système (A.88) que les variables ρ et e sont advectées à la vitesse v . Comme la pression du mélange suit une loi d'état de type $p = p(\rho, e)$, on a :

$$(A.89) \quad D^t p = \frac{\partial p}{\partial \rho} D^t \rho + \frac{\partial p}{\partial e} D^t e = 0$$

L'équation (A.89) montre que la pression du mélange est advectée à la vitesse v , ainsi le profil uniforme de pression à $t = 0$ reste uniforme au cours du temps. Le modèle standard isobare à 6 équations préserve donc le repos. •

A.4.2 Modèle à 7 équations de type Baer-Nunziato

Les modèles à 7 équations de type Baer-Nunziato sont également construits grâce à la technique des équations moyennées. Dans le cas non visqueux, en l'absence de flux de chaleur et en l'absence de transfert de masse et d'énergie entre les espèces, ils sont tous issus de la forme initiale (A.79). Pour fermer le système, on introduit une équation supplémentaire sur α^s pour éviter d'imposer une relation entre les pressions des phases (comme c'est le cas pour le modèle standard à 6 équations). Les modèles à 7 équations de type Baer-Nunziato s'écrivent alors :

$$(A.90) \quad \begin{cases} \partial_t \alpha^s + u_j^I \partial_{x_j} \alpha^s = \dot{\alpha}^s & (s = 1 \text{ ou } 2) \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_j^s) = 0 & (s = 1 \text{ et } 2) \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s v_i^s v_j^s + \alpha^s \hat{p}^s \delta_{ij}) = p^I \partial_{x_i} \alpha^s + d_i^s & (s = 1 \text{ et } 2) \\ \partial_t (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s) + \partial_{x_j} (\alpha^s \hat{\rho}^s e^s v_j^s + \alpha^s \hat{p}^s v_j^s) = (p^I \partial_{x_j} \alpha^s + d_j^s) u_j^I - p^I \dot{\alpha}^s & (s = 1 \text{ et } 2) \end{cases}$$

On a noté $\dot{\alpha}^s$ le transfert de fraction volumique entre les espèces. Conjointement aux équations (A.90), on doit satisfaire aux contraintes :

$$(A.91a) \quad \sum_s \dot{\alpha}^s = 0$$

$$(A.91b) \quad \sum_s \alpha^s = 1$$

$$(A.91c) \quad \sum_s d_i^s = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, D$$

En utilisant les contraintes (A.91), la sommation sur les espèces des équations (A.90) permet de retrouver les lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie pour le mélange (voir équations (A.85)).

Dans [BN86], Baer et Nunziato interprètent $\dot{\alpha}^s$ comme un terme qui doit conduire à la relaxation des pressions des phases. Ils posent donc :

$$(A.92) \quad \dot{\alpha}^1 = \mu (\hat{p}^1 - \hat{p}^2)$$

Le coefficient μ , supposé connu, représente une vitesse caractéristique de relaxation des pressions. Depuis, l'hypothèse (A.92) est très largement utilisée. Néanmoins, si l'on ne souhaite pas forcer la relaxation des pressions, on peut poser $\dot{\alpha}^s = 0$.

Contrairement au modèle standard à 6 équations, le modèle à 7 équations de type Baer-Nunziato est inconditionnellement hyperbolique. Pour cette raison, il constitue actuellement un modèle de référence pour les mécaniciens des fluides multiphasiques. Le modèle à 7 équations a pourtant un inconvénient majeur : il n'est pas conservatif, on ne peut donc pas développer de théorie mathématique pour le traitement des chocs. Par ailleurs, le choix des valeurs pour les grandeurs moyennes aux interfaces p^I et u^I est souvent arbitraire, et fait l'objet d'une littérature très vaste (on renvoie le lecteur à la section sur la technique des équations moyennées pour une synthèse des fermetures proposées). On constate cependant que certaines fermetures se démarquent des autres car elles octroient au système de bonnes propriétés mathématiques. Dans [CGHS02] par exemple, les auteurs montrent que le champ associé à la valeur propre u^I

du système est linéairement dégénéré et qu'il existe une inégalité d'entropie pour le système si on choisit la fermeture :

$$(A.93a) \quad u_i^I = c^1 v_i^1 + c^2 v_i^2$$

$$(A.93b) \quad p^I = \frac{a^1 c^2}{a^1 c^2 + a^2 c^1} \hat{p}^1 + \frac{a^2 c^1}{a^1 c^2 + a^2 c^1} \hat{p}^2$$

On rappelle que $c^s = \frac{\alpha^s \hat{\rho}^s}{\rho}$ est la fraction massique de l'espèce s . On a posé $a^s \equiv \frac{1}{s^s} \left(\frac{\partial s^s}{\partial \hat{p}^s} \right) \left(\frac{\partial \epsilon^s}{\partial \hat{p}^s} \right)^{-1}$, où s^s est l'entropie massique de la phase s . Si $a^1 = a^2$, on retrouve ainsi la fermeture croisée $p^I = c^2 \hat{p}^1 + c^1 \hat{p}^2$.

Remarque sur la préservation du repos par le modèle de Baer-Nunziato On se place dans le cas $1D$. On considère la condition initiale de repos suivante :

$$(A.94) \quad v^1 = v^2 = v \quad \text{et} \quad \partial_x v = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x p = 0$$

On se place également dans le cas où les pressions réelles des espèces sont à l'équilibre :

$$(A.95) \quad \hat{p}^1 = \hat{p}^2 = p$$

Sous ces hypothèses, il n'y a qu'une seule vitesse et qu'une seule pression au sein du domaine à $t = 0$, ce qui force $u^I = v$ et $p^I = p$. En injectant la condition initiale (A.94)-(A.95) dans les systèmes d'équations (A.90) et (A.85), on obtient respectivement les systèmes suivants, valables à $t = 0$:

$$(A.96) \quad \begin{cases} D^t \alpha^s = 0 \\ D^t (\alpha^s \hat{\rho}^s) = 0 \\ \partial_t v^s = 0 \\ D^t e^s = 0 \end{cases}$$

$$(A.97) \quad \begin{cases} D^t \rho = 0 \\ \partial_t v = 0 \\ D^t e = 0 \end{cases}$$

On a introduit la dérivée lagrangienne $D^t \equiv \partial_t + v \partial_x$. On déduit des équations des systèmes (A.96) et (A.97) que l'état initial de repos est préservé par les modèles de type Baer-Nunziato. Tous les profils conservent leur forme initiale et sont advectés à la vitesse v . •

A.4.3 Modèles conservatifs de type Godunov-Romensky

La classe de modèles que l'on présente maintenant est construite à l'aide du formalisme de Godunov-Romensky. Par construction, les modèles ainsi obtenus sont conservatifs et symétriques hyperboliques ; ils vérifient également une égalité ou une inégalité d'entropie. Pour avoir une vue d'ensemble de ces modèles, on commence par exposer le modèle à 5 équations dans le cas où l'entropie du mélange ne varie pas, puis on présente le modèle à 6 équations dans le cas où l'entropie du mélange peut varier.

Modèle à 5 équations

On se donne une relation d'état pour l'énergie du mélange de la forme :

$$(A.98) \quad \xi(\rho, c, s, V) = \epsilon(\rho, c, s) + c(1-c) \frac{V_j V_j}{2}$$

En les variables ρ , (ρc) , (ρv) , V et (ρs) , le modèle isentropique à 5 équations est conservatif. Ici, l'adjectif *isentropique* signifie que l'entropie du mélange ne varie pas : $\frac{ds}{dt} = 0$ (voir la dernière équation de (A.99)). Le modèle s'écrit :

$$(A.99) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0 \\ \partial_t (\rho c) + \partial_{x_j} (\rho c v_j + \rho \xi_{V_j}) = 0 \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + (\rho)^2 \xi_\rho \delta_{ij} + \rho V_i \xi_{V_j}) = 0 \\ \partial_t V_i + \partial_{x_i} (v_j V_j + \xi_c) = 0 \\ \partial_t (\rho s) + \partial_{x_j} (\rho s v_j) = 0 \end{cases}$$

Les solutions du système (A.99) vérifient une loi de conservation supplémentaire, celle de l'énergie totale du mélange :

$$(A.100) \quad \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + (\rho)^2 \xi_\rho v_j + \rho v_i V_i \xi_{V_j} + \rho \epsilon_c \xi_{V_j}) = 0$$

Par convention, lorsqu'une variable est placée en indice, on effectue une dérivation partielle par rapport à cette variable. Par exemple, $\xi_{V_j} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial V_j}$. Les notations sont les suivantes :

Notation	Signification	Définition formelle
ξ	énergie interne massique du mélange	
ϵ	énergie interne inerte massique du mélange	$\epsilon = \xi - c(1-c) \frac{V_j V_j}{2}$
e	énergie totale massique du mélange	$e = \xi + \frac{v_j v_j}{2}$
ρ	masse volumique du mélange	
c	fraction massique de l'espèce 1	
s	entropie massique du mélange	
v	vitesse absolue du mélange	
V	vitesse relative entre les phases	$V_i = v_i^1 - v_i^2$

Le modèle (A.99) est fermé par la relation d'état (A.98), supposée connue explicitement. On remarque d'ailleurs que, d'après (A.98), on a directement la relation $\xi_{V_j} = c(1-c)V_j$. Généralement, on définit la pression p et la température T du mélange par les relations :

$$(A.101a) \quad p \equiv (\rho)^2 \xi_\rho$$

$$(A.101b) \quad T \equiv \xi_s$$

Le modèle conservatif (A.99) est symétrique hyperbolique si l'énergie interne inerte du mélange ϵ est une fonction convexe des variables τ , c et s , où $\tau \equiv \frac{1}{\rho}$ est le volume spécifique (voir [RT03]).

Remarque sur le modèle à 5 équations de type Godunov-Romensky Dans [RT03], le modèle (A.99) est présenté par les auteurs comme un modèle pour les écoulements biphasiques. Pourtant la fraction volumique de chaque espèce n'apparaît pas dans les équations. Ainsi, d'après la définition de Truesdell dans [Tru69], il s'agirait d'un modèle miscible, *i.e.* adapté à la modélisation de fluides mélangés au niveau particulaire. •

Modèle à 6 équations avec fermeture isentropique

Dans les modèles plus récents à 6 équations construits à l'aide du formalisme de Godunov-Romensky, on introduit la fraction massique d'une espèce dans la liste des variables (voir [RT04]). On se donne alors une relation d'état pour l'énergie du mélange de la forme :

$$(A.102) \quad \xi(\rho, c, \alpha, s, V) = \epsilon(\rho, c, \alpha, s) + c(1-c) \frac{V_j V_j}{2}$$

On a noté α la fraction volumique de l'espèce 1. Dans le cas général d'un écoulement où l'entropie du mélange peut varier, le modèle à 6 équations de type Godunov-Romensky⁶ s'écrit :

$$(A.103) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0 \\ \partial_t (\rho c) + \partial_{x_j} (\rho c v_j + \rho \xi_{V_j}) = 0 \\ \partial_t (\rho \alpha) + \partial_{x_j} (\rho \alpha v_j) = -\frac{\rho}{t^r} \xi_\alpha \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + (\rho)^2 \xi_\rho \delta_{ij} + \rho V_i \xi_{V_j}) = 0 \\ \partial_t V_i + \partial_{x_i} (v_j V_j + \xi_c) = -(\partial_{x_j} V_i - \partial_{x_i} V_j) v_j - K \xi_{V_i} \\ \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + (\rho)^2 \xi_\rho v_j + \rho v_i V_i \xi_{V_j} + \rho \xi_c \xi_{V_j}) = 0 \end{cases}$$

On a noté t^r un coefficient lié au temps caractéristique de relaxation des fractions volumiques et K la vitesse caractéristique de relaxation des vitesses des phases. Ces deux scalaires sont supposés connus. Les significations des autres notations sont consignées dans le tableau précédent. Parallèlement, les solutions du système (A.103) vérifient une inégalité d'entropie :

$$(A.104) \quad \partial_t (\rho s) + \partial_{x_j} (\rho s v_j) = \frac{\rho}{\xi_s} \left(\frac{1}{t^r} (\xi_\alpha)^2 + K \xi_{V_j} \xi_{V_j} \right) \geq 0$$

Le modèle (A.103) est fermé par la relation d'état (A.102), supposée connue explicitement. On remarque d'ailleurs que, d'après (A.102), on a directement la relation $\xi_{V_j} = c(1-c)V_j$. Généralement, on définit la pression p et la température T du mélange par les relations :

$$(A.105a) \quad p \equiv (\rho)^2 \xi_\rho$$

$$(A.105b) \quad T \equiv \xi_s$$

On considère que les grandeurs des phases sont liées aux grandeurs du mélange par les relations usuelles :

$$(A.106a) \quad \epsilon = c^1 \epsilon^1 + c^2 \epsilon^2$$

$$(A.106b) \quad p = \alpha^1 \hat{p}^1 + \alpha^2 \hat{p}^2$$

Dans ce modèle, la connaissance des fractions volumiques des espèces permet de calculer les masses volumiques réelles $\hat{\rho}^s$ et les pressions réelles \hat{p}^s des phases. La première équation de (A.106) constitue une hypothèse forte : on suppose que l'équation d'état du mélange peut être dérivée des équations d'état pour les phases. Autrement dit :

$$(A.107) \quad \epsilon(\alpha, c, \rho, s) = c^1 \epsilon^1(\hat{\rho}^1, s) + c^2 \epsilon^2(\hat{\rho}^2, s) = c \epsilon^1 \left(\frac{c\rho}{\alpha}, s \right) + (1-c) \epsilon^2 \left(\frac{(1-c)\rho}{1-\alpha}, s \right)$$

⁶Le nom de Godunov est cité en référence au formalisme de construction des modèles. Cependant, les modèles les plus récents (2003 à 2005) ont été proposés par Romensky et Toro.

Dans (A.107), on a supposé que chaque phase possède la même entropie massique, celle du mélange. Pour cette raison, on trouve souvent dans la littérature que ce modèle est fermé par une hypothèse isentropique, au sens $s^1 = s^2 = s$. Les conséquences des hypothèses (A.106) sont (voir [RT04]) :

$$(A.108a) \quad \epsilon_\alpha = \frac{\hat{p}^2 - \hat{p}^1}{\rho}$$

$$(A.108b) \quad \epsilon_c = \epsilon^1 + \frac{\hat{p}^1}{\hat{\rho}^1} - \epsilon^2 - \frac{\hat{p}^2}{\hat{\rho}^2}$$

Le coefficient t^r peut donc être interprété également comme un terme proportionnel au temps caractéristique de relaxation des pressions des phases. Le modèle à 6 équations à deux vitesses, deux pressions et une seule entropie (soit une seule température), s'écrit finalement :

$$(A.109) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_j} (\rho v_j) = 0 \\ \partial_t (\rho c) + \partial_{x_j} (\rho c v_j + \rho c (1-c) V_j) = 0 \\ \partial_t (\rho \alpha) + \partial_{x_j} (\rho \alpha v_j) = \frac{1}{t^r} (\hat{p}^1 - \hat{p}^2) \\ \partial_t (\rho v_i) + \partial_{x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} + \rho c (1-c) V_i V_j) = 0 \\ \partial_t V_i + \partial_{x_i} \left(\frac{v_j^1 v_j^1}{2} - \frac{v_j^2 v_j^2}{2} + h^1 - h^2 \right) = - (\partial_{x_j} V_i - \partial_{x_i} V_j) v_j - K c (1-c) V_j \\ \partial_t (\rho e) + \partial_{x_j} (\rho e v_j + p v_j + \rho c (1-c) V_i V_j v_i + \rho c (1-c) (h^1 - h^2 + \frac{1-2c}{2} V_i V_i) V_j) = 0 \end{cases}$$

Dans (A.109), on a introduit l'enthalpie massique de la phase s :

$$(A.110) \quad h^s \equiv \epsilon^s + \frac{\hat{p}^s}{\hat{\rho}^s}$$

On remarque que la cinquième équation du système (A.109) n'est pas conservative en raison de la présence dans le second membre du terme non conservatif $(\partial_{x_j} V_i - \partial_{x_i} V_j) v_j$ lié à la vorticité de l'écoulement. Par ailleurs, ce terme n'est pas un invariant galiléen. Il est identiquement nul pour un problème en une seule dimension d'espace. Ainsi, en $1D$, le modèle (A.109) est rigoureusement conservatif et respecte le principe d'invariance galiléenne. Dans le cas multidimensionnel, ce terme est généralement négligé de manière à préserver le caractère conservatif du modèle et le respect du principe d'invariance galiléenne ; il faut alors retenir qu'il s'agit d'une approximation.

Remarque sur la non préservation du repos par le modèle de Godunov-Romensky On se place dans le cas $1D$. On considère la condition initiale de repos suivante :

$$(A.111) \quad V = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x v = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x p = 0$$

On suppose par ailleurs que les pressions réelles des espèces sont à l'équilibre :

$$(A.112) \quad \hat{p}^1 = \hat{p}^2 = p$$

En injectant la condition initiale (A.111)-(A.112) dans le système d'équations (A.109), on obtient le système d'équations suivant, valable à $t = 0$:

$$(A.113) \quad \begin{cases} D^t \rho = 0 \\ D^t c = 0 \\ D^t \alpha = 0 \\ \partial_t v = 0 \\ \partial_t V = -\partial_x (h^1 - h^2) \\ D^t e = 0 \end{cases}$$

On a noté $D^t \equiv \partial_t + v\partial_x$ la dérivée lagrangienne. On déduit de la cinquième équation de (A.113) que le gradient de la différence des enthalpies va générer une mise en mouvement des espèces. L'apparition d'une vitesse relative V va alors influencer le reste du système (A.109). On vient de voir que les modèles de type Godunov-Romensky ne préservent pas le repos. •

A.4.4 Modèle isobare-isotherme de Després

Dans [DLR03] et [DJMT03], Després présente et utilise un modèle non miscible conservatif fermé par l'hypothèse d'égalité des pressions phasiques $\hat{p}^1 = \hat{p}^2 \equiv p$ et l'hypothèse d'égalité des températures phasiques $T^1 = T^2 \equiv T$. En une seule dimension d'espace, le modèle isobare-isotherme de Després s'écrit :

$$(A.114) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 \\ \partial_t (\rho c) + \partial_x (\rho c v + \rho c (1-c)V) = 0 \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho (v)^2 + p + \rho c (1-c)(V)^2) = 0 \\ \partial_t V + \partial_x (vV - \frac{1-2c}{2}(V)^2 + \mu^1 - \mu^2) = d \\ \partial_t (\rho e) + \partial_x (\rho e v + p v + \rho c (1-c)(V)^2 v + \rho c (1-c)V (\mu^1 - \mu^2 + \frac{1-2c}{2}(V)^2)) = 0 \end{cases}$$

Les notations sont cohérentes avec celles utilisées plus haut. d est une traînée massique, $\mu^s \equiv h^s - T s^s$ est le potentiel chimique généralisé massique de la phase s et $h^s \equiv \epsilon^s + \frac{p}{\rho^s}$ est l'enthalpie massique de la phase s . Comme dans le modèle standard isobare à 6 équations, l'hypothèse $\hat{p}^1 = \hat{p}^2$ permet de se passer d'une équation pour la fraction volumique d'une des phases. Le modèle (A.114) est proche du modèle de Godunov-Romensky (A.109) fermé par l'hypothèse $s^1 = s^2$. Si dans (A.109) on suppose en plus que $\hat{p}^1 = \hat{p}^2$, la seule différence entre le modèle de Després et celui de Godunov-Romensky est l'apparition des potentiels chimiques généralisés à la place des enthalpies des phases. Un point important est que Després montre comment dériver son modèle par le calcul lorsque l'on suppose qu'un modèle bifluide non miscible est une extension bifluide des équations d'Euler pour le mélange avec une thermodynamique globale. Enfin, l'auteur propose un résultat d'hyperbolicité : le modèle (A.114) est hyperbolique si la vitesse relative V est subsonique et si l'entropie du mélange est suffisamment grande (voir [DLR03]).

A.5 Conclusion sur la partie non miscible

Les modèles bifluides non miscibles sont nombreux. La technique des équations moyennées permet de construire une première classe de ces modèles, mais elle a l'inconvénient de fournir des modèles non conservatifs. Tous les modèles construits de cette manière préservent l'équilibre d'une configuration de repos. Par ailleurs, les modèles obtenus par cette technique doivent être fermés par des choix sur la modélisation de la vitesse moyenne et de la pression moyenne

aux interfaces entre les phases. Le modèle le plus simple construit par la technique des équations moyennées est le modèle standard isobare à 6 équations ; il est non conservatif et non hyperbolique. Egalement non conservatifs, les modèles à 7 équations de type Baer-Nunziato sont hyperboliques et respectent le principe d'invariance galiléenne. La littérature traitant des différentes fermetures est très vaste, mais les récents travaux de Coquel, Seguin *et al.* (voir [CGHS02]) permettent de dégager une classe de fermetures mathématiquement idéales, qui garantissent notamment l'existence d'une inégalité d'entropie.

Le formalisme introduit par Godunov en 1995 a permis à Romensky et Toro de construire une autre classe de modèles bifluides non miscibles. Cette technique s'appuie sur une série de choix guidés par des objectifs d'ordre mathématique, notamment le choix de la forme du système d'équations et celui des variables indépendantes. On obtient ainsi des modèles conservatifs symétriques hyperboliques complétés par une inégalité d'entropie. Le modèle le plus célèbre de cette classe est le modèle à 6 équations fermé par l'hypothèse d'égalité des entropies des phases. Dans ce cas, il faut retenir que la conservativité du modèle ainsi que le respect du principe d'invariance galiléenne en plusieurs dimensions d'espace sont les conséquences d'une approximation (on néglige la vorticité de la vitesse relative entre les phases). Proche du modèle de Godunov-Romensky, le modèle isobare-isotherme (au sens $\hat{p}^1 = \hat{p}^2$ et $T^1 = T^2$) construit par Després est conservatif, contient une inégalité d'entropie et possède un domaine d'hyperbolicité.

Annexe B

Sur les matrices symétriques définies positives

Soit M une matrice réelle symétrique de taille $n \times n$ et soit x un vecteur réel de taille n . Par définition, M est définie positive si et seulement si $(Mx, x) > 0 \quad \forall x \neq 0$. On peut montrer que lorsque M est définie positive, il est équivalent de dire que toutes ses valeurs propres sont strictement positives. En pratique, il n'est pourtant pas nécessaire de *calculer* les valeurs propres de M pour dire s'il s'agit d'une matrice définie positive. On va voir qu'il suffit de passer par l'étude du signe des coefficients du polynôme caractéristique de M pour conclure.

Théorème B.1. *Soit M une matrice réelle symétrique de taille $n \times n$. On note λ_i ses valeurs propres (i de 1 à n , qu'elles soient distinctes ou non), et $P(\lambda) \equiv \det(M - \lambda Id)$ son polynôme caractéristique. On note a_j les coefficients de ce polynôme, j de 0 à n . Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :*

1. M est définie positive,
2. $\lambda_i > 0$ pour i de 1 à n ;
3. $\text{sign}(a_j) = (-1)^j$ pour j de 0 à n .

Preuve On ne montre pas l'équivalence - bien connue - entre les propositions 1 et 2. On montre l'équivalence entre les propositions 2 et 3.

Dans sa forme développée, P s'écrit :

$$(B.1) \quad P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Dans sa forme factorisée, P s'écrit :

$$(B.2) \quad P(\lambda) = (\lambda_n - \lambda)(\lambda_{n-1} - \lambda) \dots (\lambda_1 - \lambda).$$

En développant l'expression (B.2) et en comparant le résultat avec l'expression (B.1), on obtient les relations :

$$(B.3) \quad \begin{aligned} a_n &= (-1)^n, \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i, \\ a_{n-2} &= (-1)^{n-2} \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j, \\ &\dots \\ a_0 &= \prod_{i=1}^n \lambda_i. \end{aligned}$$

On en déduit l'implication de la proposition 2 vers la proposition 3.

On montre l'implication de 3 vers 2 par l'absurde. On suppose que les coefficients de P vérifient $\text{sign}(a_j) = (-1)^j$ pour j de 0 à n , mais que M n'est pas définie positive, c'est-à-dire qu'il existe au moins une valeur λ_k telle que $\lambda_k \leq 0$. En évaluant la quantité $P(\lambda_k)$, on trouve que :

$$\begin{aligned} & P(\lambda_k) > 0 \text{ quand } \lambda_k = 0, \\ \text{(B.4)} \quad & P(\lambda_k) > 0 \text{ quand } \lambda_k \neq 0 \text{ et } n \text{ est pair,} \\ & P(\lambda_k) > 0 \text{ quand } \lambda_k \neq 0 \text{ et } n \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Dans tous les cas, $P(\lambda_k) \neq 0$, d'où la contradiction. ■

Annexe C

Expression des équations d'Euler 1D en coordonnées eulériennes, lagrangiennes et de masse

Les équations d'Euler 1D en la coordonnée eulérienne x sont :

$$(C.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \Big|_t = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial x} \Big|_t = 0, \\ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial(\rho e v + p v)}{\partial x} \Big|_t = 0. \end{array} \right.$$

On note $x(X, t)$ la solution de l'équation différentielle :

$$(C.2) \quad \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_X (X, t) = v(x(X, t), t),$$

associée à la condition initiale $x(X, 0) = X$. La position X est appelée coordonnée de Lagrange ou coordonnée lagrangienne. Le jacobien associé au passage de la coordonnée eulérienne à la coordonnée lagrangienne est noté :

$$(C.3) \quad J_L(X, t) = \frac{\partial x}{\partial X} \Big|_t (X, t).$$

En dérivant (C.2) par rapport à X à t constant, on trouve la relation :

$$(C.4) \quad \frac{\partial J_L}{\partial t} \Big|_X (X, t) = J_L(X, t) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_t (x, t),$$

correspondant à l'identité de Piola. Par la suite, pour une fonction quelconque $\phi(x, t)$ exprimée en coordonnées eulériennes, on note $\phi_L(X, t)$ cette même fonction exprimée en coordonnées lagrangiennes, c'est-à-dire que :

$$(C.5) \quad \phi_L(X, t) = \phi(x(X, t), t).$$

Comme :

$$(C.6) \quad dx(X, t) = J_L(X, t) \cdot dX + v_L(X, t) \cdot dt,$$

on a les deux relations :

$$(C.7) \quad \left. \frac{\partial \phi_L}{\partial t} \right|_X (X(x, t), t) = \left[\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_x + v \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_t \right] (x, t),$$

et :

$$(C.8) \quad \left. \frac{\partial \phi_L}{\partial X} \right|_t (X(x, t), t) = \left[J \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_t \right] (x, t).$$

On déduit de (C.4) et (C.7) que :

$$(C.9) \quad \left. \frac{\partial (J_L \phi_L)}{\partial t} \right|_X (X(x, t), t) = \left[J \cdot \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial (\phi v)}{\partial x} \right|_t \right) \right] (x, t).$$

En sommant les deux dernières équations, on trouve la relation importante :

$$(C.10) \quad \left[\left. \frac{\partial (J_L \phi_L)}{\partial t} \right|_X + \left. \frac{\partial \psi_L}{\partial X} \right|_t \right] (X(x, t), t) = \left[J \cdot \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial (\phi v + \psi)}{\partial x} \right|_t \right) \right] (x, t),$$

pour deux fonctions quelconques ϕ et ψ . L'application de la relation (C.10) aux quatre couples $(\phi, \psi) = (1, -v), (\rho, 0), (\rho v, p)$ et $(\rho e, p v)$ constitue une bijection entre le système eulérien :

$$(C.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial (1)}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial (0)}{\partial x} \right|_t = 0, \\ \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} \right|_t = 0, \\ \left. \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial x} \right|_t = 0, \\ \left. \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial (\rho e v + p v)}{\partial x} \right|_t = 0. \end{array} \right.$$

et son expression lagrangienne :

$$(C.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial (J_L)}{\partial t} \right|_X - \left. \frac{\partial v_L}{\partial X} \right|_t = 0, \\ \left. \frac{\partial (J_L \rho_L)}{\partial t} \right|_X = 0, \\ \left. \frac{\partial (J_L (\rho v)_L)}{\partial t} \right|_X + \left. \frac{\partial p_L}{\partial X} \right|_t = 0, \\ \left. \frac{\partial (J_L (\rho e)_L)}{\partial t} \right|_X + \left. \frac{\partial (p_L v_L)}{\partial X} \right|_t = 0. \end{array} \right.$$

L'ordre des équations ayant été préservé, on remarque que la première équation de (C.11), triviale, conduit à une équation non triviale pour le système lagrangien. La seconde équation du système (C.12) donne $J_L \rho_L (X, t) = J_L \rho_L (X, 0) \equiv \rho_L^0 (X)$, d'où :

$$(C.13) \quad J_L = \rho_L^0 \cdot \tau_L,$$

où $\tau_L \equiv \frac{1}{\rho_L}$ est le volume spécifique. Compte tenu de ce résultat, la seconde équation de (C.12) est maintenant triviale, de sorte que le système se réduit au système classique des équations d'Euler exprimées en coordonnées lagrangiennes :

$$(C.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (\rho_L^0 \tau_L)}{\partial t} \Big|_X - \frac{\partial v_L}{\partial X} \Big|_t = 0, \\ \frac{\partial (\rho_L^0 v_L)}{\partial t} \Big|_X + \frac{\partial p_L}{\partial X} \Big|_t = 0, \\ \frac{\partial (\rho_L^0 e_L)}{\partial t} \Big|_X + \frac{\partial (p_L v_L)}{\partial X} \Big|_t = 0. \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un système de lois de conservation. Le fait que la fonction $\rho_L^0(X)$ ne dépende pas du temps suggère le changement de variables $(X, t) \rightarrow (m, t)$, où l'on a posé :

$$(C.15) \quad dm = \rho_L^0 \cdot dX.$$

m est appelée variable de masse¹. En notant, pour une fonction quelconque ϕ_L :

$$(C.16) \quad \phi_m(m, t) = \phi_L(X(m, t), t),$$

on obtient les relations :

$$(C.17) \quad \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \Big|_m (m(X, t), t) = \frac{\partial \phi_L}{\partial t} \Big|_X (X, t),$$

et :

$$(C.18) \quad \frac{\partial \phi_m}{\partial m} \Big|_t (m(X, t), t) = \frac{1}{\rho_L^0} \cdot \frac{\partial \phi_L}{\partial X} \Big|_t (X, t).$$

Ainsi les équations d'Euler 1D exprimées en variable de masse prennent la forme du système de lois de conservation suivant :

$$(C.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_m}{\partial t} \Big|_m - \frac{\partial v_m}{\partial m} \Big|_t = 0, \\ \frac{\partial v_m}{\partial t} \Big|_m + \frac{\partial p_m}{\partial m} \Big|_t = 0, \\ \frac{\partial e_m}{\partial t} \Big|_m + \frac{\partial (p_m v_m)}{\partial m} \Big|_t = 0. \end{array} \right.$$

Pour finir, on donne les équations relatives au passage des coordonnées de masse (m, t) vers les coordonnées eulériennes (x, t) , obtenues en combinant les relations (C.7), (C.8), (C.17) et (C.18) :

$$(C.20) \quad \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \Big|_m (m(x, t), t) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_x + v \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_t \right] (x, t),$$

et :

$$(C.21) \quad \frac{\partial \phi_m}{\partial m} \Big|_t (m(x, t), t) = \left[\tau \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_t \right] (x, t).$$

¹ m est parfois appelée coordonnée de masse, ceci par abus de langage.

Annexe D

Schéma Lagrange-projection pour les équations d'Euler 1D homogènes

On s'intéresse ici à la résolution numérique des équations d'Euler 1D homogènes exprimées en coordonnées eulériennes :

$$(D.1) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho e) + \partial_x (\rho e v + p v) = 0. \end{cases}$$

Le système est fermé par une relation de la forme $p = p(\tau, \epsilon)$, où $\epsilon \equiv e - \frac{1}{2}v^2$ et $\tau \equiv \rho^{-1}$. L'utilisation de la méthode des volumes finis est particulièrement bien adaptée à la résolution numérique du système (D.1) dans la mesure où il s'agit d'un système non-linéaire conservatif. L'intégration en espace et en temps des équations du système (D.1) sur un volume de contrôle $]t^n; t^{n+1}[\times]x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}[$ conduit à la formulation :

$$(D.2) \quad \begin{cases} \langle \rho \rangle_i^{n+1} = \langle \rho \rangle_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\langle \rho v \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \langle \rho v \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \langle \rho v \rangle_i^{n+1} = \langle \rho v \rangle_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\langle \rho v^2 + p \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \langle \rho v^2 + p \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \langle \rho e \rangle_i^{n+1} = \langle \rho e \rangle_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\langle \rho e v + p v \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \langle \rho e v + p v \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{cases}$$

où l'on a noté $\Delta t \equiv t^{n+1} - t^n$ et $\Delta x \equiv x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. Pour une fonction quelconque $\phi(x, t)$, on a utilisé les notations $\langle \phi \rangle_i^n = \langle \phi \rangle_i(t^n)$ et $\langle \phi \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \langle \phi \rangle^{n+\frac{1}{2}}(x_{i+\frac{1}{2}})$, où $\langle \phi \rangle^{n+\frac{1}{2}}(x)$ est la valeur moyenne temporelle définie par :

$$(D.3) \quad \langle \phi \rangle^{n+\frac{1}{2}}(x) \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi(x, t) dt,$$

et où $\langle \phi \rangle_i(t)$ est la valeur moyenne spatiale définie par :

$$(D.4) \quad \langle \phi \rangle_i(t) \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi(x, t) dx.$$

On utilisera parfois les notations $\langle \phi |_E \rangle_i(t) \equiv \langle \phi \rangle_i(t)$ et $\langle \phi |_t \rangle^{n+\frac{1}{2}}(x) \equiv \langle \phi \rangle^{n+\frac{1}{2}}(x)$ pour insister respectivement sur le caractère eulérien et le caractère temporel de ces moyennes. Les schémas numériques de la forme (D.2) sont des schémas volumes finis eulériens¹ *directs*, au sens où le passage des valeurs $\{\langle \rho \rangle_i^n, \langle \rho v \rangle_i^n, \langle \rho e \rangle_i^n\}_{\forall i}$ aux valeurs $\{\langle \rho \rangle_i^{n+1}, \langle \rho v \rangle_i^{n+1}, \langle \rho e \rangle_i^{n+1}\}_{\forall i}$ se fait en une seule étape, donnée par (D.2). Les schémas eulériens directs se distinguent les uns des autres par le choix d'un flux numérique (ici, $\langle \rho v \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $\langle \rho v^2 + p \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\langle \rho e v + p v \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$). Parmi les flux numériques les plus utilisés, on peut citer le flux de Godunov et le flux de Roe. Le flux acoustique, dans sa version eulérienne directe, manque sévèrement de robustesse (voir [Tor97]).

Les schémas Lagrange-projection sont des schémas eulériens² *indirects*, car le passage des valeurs $\{\langle \rho \rangle_i^n, \langle \rho v \rangle_i^n, \langle \rho e \rangle_i^n\}_{\forall i}$ aux valeurs $\{\langle \rho \rangle_i^{n+1}, \langle \rho v \rangle_i^{n+1}, \langle \rho e \rangle_i^{n+1}\}_{\forall i}$ se fait en deux étapes, par l'intermédiaire de valeurs moyennes massiques sur grille mobile $\{\langle \tau |_m \rangle_i^{n+1}, \langle v |_m \rangle_i^{n+1}, \langle e |_m \rangle_i^{n+1}\}_{\forall i}$ définies plus loin. Ce découpage en deux étapes permet de simplifier la résolution du problème en séparant l'étude des ondes de pression de l'étude des phénomènes d'advection.

D.1 Formulation intégrale exacte

Les schémas Lagrange-projection sont parfois présentés comme un splitting d'opérateur de la façon suivante :

- la première étape, lagrangienne, consiste à résoudre numériquement le système :

$$(D.5) \quad \begin{cases} \partial_t \tau - \frac{1}{\rho} \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0, \\ \partial_t e + \frac{1}{\rho} \partial_x (pv) = 0, \end{cases}$$

pour un pas de temps $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, avec pour condition initiale l'ensemble des valeurs $\{\langle \rho \rangle_i^n, \langle \rho v \rangle_i^n, \langle \rho e \rangle_i^n\}_{\forall i}$. L'ensemble des valeurs obtenues à la fin de cette étape est noté $\{\tau_i^L, v_i^L, e_i^L\}_{\forall i}$.

- la seconde étape, appelée projection, consiste à résoudre numériquement le système d'advection :

$$(D.6) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + v \partial_x \rho = 0, \\ \partial_t (\rho v) + v \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho e) + v \partial_x (\rho e) = 0, \end{cases}$$

pour le pas de temps Δt , avec pour condition initiale l'ensemble des valeurs $\{\tau_i^L, v_i^L, e_i^L\}_{\forall i}$. L'hypothèse est alors faite que les valeurs obtenues à la fin de cette étape correspondent aux valeurs moyennes recherchées $\langle \rho \rangle_i^{n+1}$, $\langle \rho v \rangle_i^{n+1}$ et $\langle \rho e \rangle_i^{n+1}$.

On peut vérifier que la combinaison des deux étapes présentées ici mène à un système consistant avec les équations d'Euler en coordonnées eulériennes (D.1). Cette interprétation simple permet

¹On appelle schéma *eulérien* un schéma construit sur grille fixe, par opposition aux schémas *lagrangiens* qui sont construits sur grille mobile.

²En effet, les schémas Lagrange-projection, construits sur grille fixe, restituent des valeurs moyennes sur grille fixe à la fin de chaque itération.

de construire des schémas d'ordre au plus 1 en temps, en raison de l'erreur intrinsèquement liée au splitting d'opérateur (voir [Str68]).

Par opposition à l'approche qui vient d'être décrite, le choix est ici fait de garder aussi longtemps que possible une formulation intégrale exacte des équations, de manière à identifier où se situent les approximations numériques indispensables et éventuellement permettre la montée en ordre. On décrit maintenant les schémas Lagrange-projection au cours d'une itération en temps $t^n \rightarrow t^{n+1}$.

D.1.1 Préliminaires

On renvoie à l'annexe C pour les détails concernant les systèmes de coordonnées eulérien, lagrangien et de masse. Le domaine temporel est découpé en pas de temps $\Delta t^n \equiv t^{n+1} - t^n$ de durées éventuellement différentes. Cependant, pour une itération donnée, on note le pas de temps Δt pour simplifier. Pour une fonction quelconque $\phi(x, t)$, on rappelle que la valeur moyenne temporelle, notée $\langle \phi \rangle^{n+\frac{1}{2}}(x)$ ou $\langle \phi |_t \rangle^{n+\frac{1}{2}}(x)$, est définie par (D.3).

L'espace eulérien est découpé en N mailles identiques de largeur Δx . Les positions des cloisons gauche et droite d'une maille eulérienne i sont notées $x_{i-\frac{1}{2}}$ et $x_{i+\frac{1}{2}}$ respectivement. Le maillage eulérien est fixe. Pour une fonction quelconque $\phi(x, t)$, on rappelle que la valeur moyenne spatiale eulérienne, notée $\langle \phi \rangle_i(t)$ ou $\langle \phi |_E \rangle_i(t)$, est définie par (D.4).

L'espace lagrangien est découpé en un même nombre de mailles N . Le maillage lagrangien étant mobile, on s'intéresse maintenant à la description de son mouvement. On note $x_{i+\frac{1}{2}}(t) \equiv x(X_{i+\frac{1}{2}}, t)$ la fonction donnant la position eulérienne de la cloison $i + \frac{1}{2}$ du maillage lagrangien au cours du temps $t \in]t^n; t^{n+1}[$. La fonction $x(X, t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$(D.7) \quad \partial_t x = v.$$

Après intégration en temps sur $]t^n; t^{n+1}[$, on trouve $x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = x_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta t \cdot \langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, où l'on a noté $x_{i+\frac{1}{2}}^n \equiv x_{i+\frac{1}{2}}(t^n)$. A l'instant t^n , on suppose que les maillages eulérien et lagrangien coïncident, c'est-à-dire que $x_{i+\frac{1}{2}}^n = X_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+\frac{1}{2}}$. On obtient alors :

$$(D.8) \quad x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = x_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t \cdot \langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}},$$

de sorte qu'en général, à un instant t quelconque, le maillage lagrangien est composé de mailles de largeurs différentes notées $\Delta x_i(t) \equiv x_{i+\frac{1}{2}}(t) - x_{i-\frac{1}{2}}(t)$, comme le montre la figure D.1. A l'instant t^{n+1} , on a notamment la relation :

$$(D.9) \quad \Delta x_i^{n+1} = \Delta x + \Delta t \cdot \left(\langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \langle v |_t \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

Pour une fonction quelconque $\phi(X, t)$, on introduit la valeur moyenne spatiale lagrangienne $\langle \phi |_L \rangle_i(t)$ définie par :

$$(D.10) \quad \langle \phi |_L \rangle_i(t) \equiv \frac{1}{\Delta X_i} \int_{X_{i-\frac{1}{2}}}^{X_{i+\frac{1}{2}}} \phi(X, t) dX,$$

où, compte tenu de la correspondance des maillages à l'instant t^n :

$$(D.11) \quad \Delta X_i \equiv X_{i+\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2}} = \Delta x.$$

On note $\rho^0(X)$ la distribution lagrangienne de densité à l'instant t^n . On vérifie par un changement de variable qu'à l'instant t^n , les valeurs moyennes eulérienne et lagrangienne sont reliées par :

$$(D.12) \quad \langle \rho \phi |_E \rangle_i^n = \langle \rho^0 \phi |_L \rangle_i^n.$$

pour toute fonction ϕ . Le même type de calcul pour $\phi = \tau$ permet d'obtenir :

$$(D.13) \quad \langle \rho^0 \tau |_L \rangle_i(t) = \frac{\Delta x_i(t)}{\Delta x},$$

pour tout instant t .

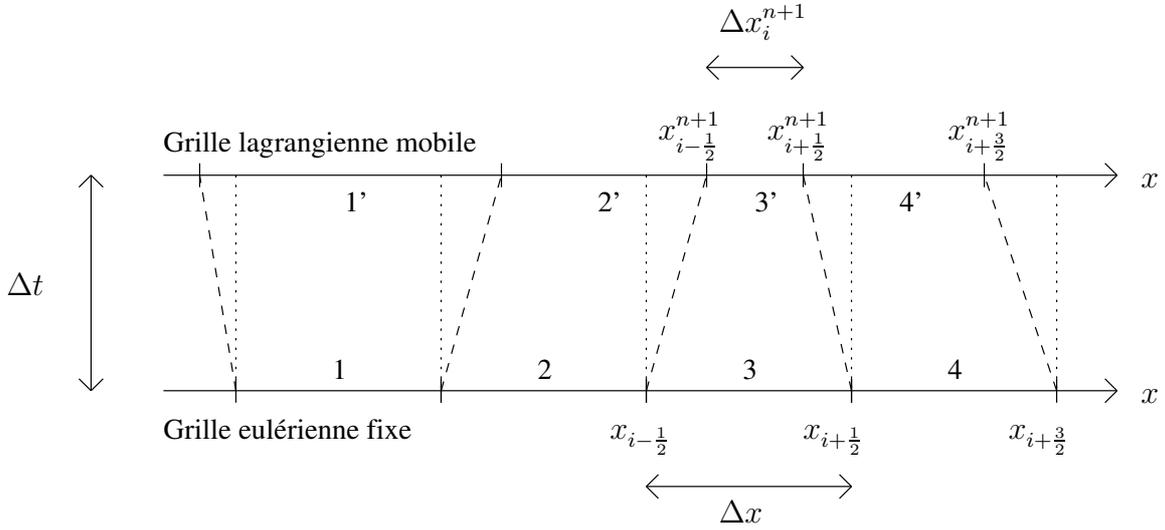


FIG. D.1 – Correspondance entre la grille eulérienne et la grille lagrangienne. On distingue les 4 types de mailles lagrangiennes : la maille 1 est en détente, la maille 2 en translation vers la droite, la maille 3 en compression et la maille 4 en translation vers la gauche.

L'espace de masse est également découpé en N mailles. On note $m_{i+\frac{1}{2}} \equiv m\left(X_{i+\frac{1}{2}}\right)$ la fonction donnant la coordonnée de masse de la cloison $i + \frac{1}{2}$ du maillage lagrangien. Cette fonction est solution de l'équation différentielle :

$$(D.14) \quad \frac{dm}{dX} = \rho^0.$$

Après intégration en espace de cette relation sur $\left] X_{i-\frac{1}{2}}; X_{i+\frac{1}{2}} \right]$, on obtient :

$$(D.15) \quad \Delta m_i = \Delta X_i \cdot \langle \rho^0 |_L \rangle_i.$$

Avec (D.11) et (D.12) pour $\phi = 1$, on trouve que :

$$(D.16) \quad \Delta m_i = \Delta x \cdot \langle \rho |_E \rangle_i^n.$$

Pour une fonction quelconque $\phi(m, t)$, on introduit la valeur moyenne massique $\langle \phi | m \rangle_i(t)$ définie par :

$$(D.17) \quad \langle \phi | m \rangle_i(t) \equiv \frac{1}{\Delta m_i} \int_{m_{i-\frac{1}{2}}}^{m_{i+\frac{1}{2}}} \phi(m, t) dm.$$

A l'aide d'un changement de variable et de (D.15), on vérifie que les valeurs moyennes lagrangienne et massique sont reliées, pour toute fonction ϕ et pour tout instant t , par :

$$(D.18) \quad \langle \phi | m \rangle_i(t) = \frac{\langle \rho^0 \phi | L \rangle_i(t)}{\langle \rho^0 | L \rangle}.$$

Pour conclure ces préliminaires, on remarque que la combinaison des relations (D.12) et (D.18) permet d'obtenir une équation reliant les trois types de valeurs moyennes à l'instant t^n :

$$(D.19) \quad \frac{\langle \rho \phi | E \rangle_i^n}{\langle \rho | E \rangle_i^n} = \frac{\langle \rho^0 \phi | L \rangle_i^n}{\langle \rho^0 | E \rangle_i} = \langle \phi | m \rangle_i^n,$$

pour toute fonction ϕ . Par ailleurs, en divisant l'équation (D.9) par Δm_i et en utilisant (D.18) pour $\phi = \tau$ et (D.13) à $t = t^{n+1}$, on obtient la relation de nature purement géométrique :

$$(D.20) \quad \langle \tau | m \rangle_i^{n+1} = \langle \tau | m \rangle_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(\langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \langle v | t \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

D.1.2 Phase lagrangienne

La phase lagrangienne consiste à résoudre sur l'intervalle de temps $]t^n; t^{n+1}[$ les équations d'Euler exprimées en variable de masse :

$$(D.21) \quad \begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m v = 0, \\ \partial_t v + \partial_m p = 0, \\ \partial_t e + \partial_m (pv) = 0, \end{cases}$$

associées à la condition initiale :

$$(D.22) \quad \phi(m, t^n) = \begin{cases} \dots \\ \frac{\langle \rho \phi | E \rangle_{i-1}^n}{\langle \rho | E \rangle_{i-1}^n} \text{ si } m \in]m_{i-\frac{3}{2}}; m_{i-\frac{1}{2}}[, \\ \frac{\langle \rho \phi | E \rangle_i^n}{\langle \rho | E \rangle_i^n} \text{ si } m \in]m_{i-\frac{1}{2}}; m_{i+\frac{1}{2}}[, \\ \frac{\langle \rho \phi | E \rangle_{i+1}^n}{\langle \rho | E \rangle_{i+1}^n} \text{ si } m \in]m_{i+\frac{1}{2}}; m_{i+\frac{3}{2}}[, \\ \dots \end{cases}$$

pour $\phi = \tau, v, e$. L'intégration du système (D.21) sur le volume de contrôle $]t^n; t^{n+1}[\times]m_{i-\frac{1}{2}}; m_{i+\frac{1}{2}}[$ conduit au schéma :

$$(D.23) \quad \begin{cases} \langle \tau | m \rangle_i^{n+1} = \langle \tau | m \rangle_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(\langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \langle v | t \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \langle v | m \rangle_i^{n+1} = \langle v | m \rangle_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(\langle p | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \langle p | t \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \langle e | m \rangle_i^{n+1} = \langle e | m \rangle_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \left(\langle pv | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \langle pv | t \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{cases}$$

où les valeurs moyennes :

$$(D.24) \quad \langle \phi | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi \left(m_{i+\frac{1}{2}}, t \right) dt,$$

pour $\phi = -v, p, (pv)$, sont appelés flux lagrangiens. On retrouve l'équation (D.20), qui avait été obtenue géométriquement. L'intégration en masse de la condition initiale (D.22) sur l'intervalle $]m_{i-\frac{1}{2}}; m_{i+\frac{1}{2}}[$ donne $\Delta m_i \cdot \langle \phi | m \rangle_i^n = \Delta x \cdot \langle \rho \phi | E \rangle_i^n$ pour $\phi = \tau, v, e$. Le schéma (D.23) est donc conservatif au sens où, pour $\phi = 1, \tau, v, e$:

$$(D.25) \quad \sum_{\forall i} \Delta m_i \cdot \langle \phi | m \rangle_i^{n+1} = \sum_{\forall i} \Delta x \cdot \langle \rho \phi | E \rangle_i^n,$$

aux conditions aux bords près. La condition de stabilité du schéma (D.23) est discutée plus loin (voir (D.47)). Pour compléter le schéma, il faut choisir une discrétisation pour les composantes du flux numérique $\langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, $\langle p | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\langle pv | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ définies par (D.3). Comme aucune approximation n'a été réalisée jusqu'ici, c'est l'erreur commise sur l'approximation de ces intégrales en temps qui détermine l'ordre de la phase lagrangienne. Deux flux numériques seront présentés plus loin. Bien que d'ordre 1 en masse et en temps, on verra plus loin qu'ils peuvent être facilement modifiés pour prendre en compte la présence d'un terme source, ce qui constitue la raison principale de notre choix.

D.1.3 Phase de projection

A la fin de la phase lagrangienne, on dispose d'un ensemble de valeurs moyennes massiques $\left\{ \langle \tau | m \rangle_i^{n+1}, \langle v | m \rangle_i^{n+1}, \langle e | m \rangle_i^{n+1} \right\}_{\forall i}$ définies sur un maillage qui s'est déplacé par rapport à la grille eulérienne initiale. Il est d'ailleurs nécessaire de contrôler le pas de temps pour garantir que les mailles lagrangiennes ne se croisent pas. Une condition suffisante est :

$$(D.26) \quad \Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\max_{\forall i} \left| \langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right|},$$

le facteur $\frac{1}{2}$ provenant des mailles en compression (maille 3 de la figure D.1). L'objectif de la phase de projection consiste à trouver les valeurs moyennes eulériennes associées $\left\{ \langle \rho | E \rangle_i^{n+1}, \langle \rho v | E \rangle_i^{n+1}, \langle \rho e | E \rangle_i^{n+1} \right\}_{\forall i}$ définies sur la grille fixe initiale.

Pour une fonction quelconque $\phi(X, t)$, on peut toujours écrire :

$$(D.27) \quad \int_{X_{i-\frac{1}{2}}}^{X_{i+\frac{1}{2}}} \rho^0 \phi(X, t^{n+1}) \, dX = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}^{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} \rho \phi(x, t^{n+1}) \, dx,$$

$$= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \rho \phi(x, t^{n+1}) \, dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} \rho \phi(x, t^{n+1}) \, dx + \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} \rho \phi(x, t^{n+1}) \, dx.$$

Avec (D.16) et (D.18), on trouve alors que :

$$(D.28) \quad \langle \rho \phi |_E \rangle_i^{n+1} = \langle \rho |_E \rangle_i^n \langle \phi |_m \rangle_i^{n+1}$$

$$- \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} \rho \phi(x, t^{n+1}) \, dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}} \rho \phi(x, t^{n+1}) \, dx \right].$$

Cette relation est valable pour toutes les configurations de maillage, que les mailles lagrangiennes soient en compression, en détente et/ou en translation. Le schéma associé à la phase de projection s'écrit donc, pour $\phi = 1, v, e$:

$$(D.29) \quad \langle \rho \phi |_E \rangle_i^{n+1} = \langle \rho |_E \rangle_i^n \langle \phi |_m \rangle_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(\langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \langle \rho \phi |_E^* \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \langle v |_t \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \langle \rho \phi |_E^* \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right),$$

où l'on a introduit le flux de projection :

$$(D.30) \quad \langle \rho \phi |_E^* \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \equiv \begin{cases} \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} \rho \phi(x, t^{n+1}) \, dx & \text{si } \langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \neq 0, \\ \text{indifférent} & \text{si } \langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0. \end{cases}$$

Par construction, le schéma (D.29) est conservatif au sens où, pour $\phi = 1, v, e$:

$$(D.31) \quad \sum_{\forall i} \Delta x \cdot \langle \rho \phi |_E \rangle_i^{n+1} = \sum_{\forall i} \Delta m_i \cdot \langle \phi |_m \rangle_i^{n+1},$$

aux conditions aux bords près. Comme pour la phase lagrangienne, aucune approximation n'a été réalisée jusqu'ici. C'est donc l'erreur commise sur l'approximation numérique des flux de projection $\langle \rho \phi |_E^* \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$, définis par les intégrales (D.30), qui détermine l'ordre de la phase de projection. Deux approximations sont proposées plus loin ; l'une d'ordre 1 et l'autre d'ordre 3.

D.1.4 Schéma complet

Le schéma complet est conservatif pour les valeurs moyennes eulériennes de $\rho, \rho v$ et ρe , au sens où :

$$(D.32) \quad \sum_{\forall i} \Delta x \cdot \langle \rho \phi |_E \rangle_i^{n+1} = \sum_{\forall i} \Delta x \cdot \langle \rho \phi |_E \rangle_i^n,$$

aux conditions aux bords près. Cette relation est obtenue en combinant (D.25) et (D.31).

Pour résumer, le schéma Lagrange-projection se déroule de la façon suivante :

- on calcule d'abord les flux lagrangiens (D.24) pour la condition initiale (D.22),
- on effectue alors la marche en temps (D.23),
- ensuite, pour les profils ainsi obtenus, on calcule les flux de projection (D.30),
- enfin, on effectue la projection (D.29).

Sous cette forme, le schéma est exact. Mais en pratique, le calcul des flux lagrangiens et des flux de projection doit passer par des approximations numériques dont la précision détermine la précision du schéma complet.

Remarque : forme eulérienne directe En combinant les phases lagrangienne (D.23) et de projection (D.29), on obtient le schéma :

$$(D.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \rho \rangle_i^{n+1} = \langle \rho \rangle_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\langle v \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \langle \rho |_{E}^* \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \langle v \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \langle \rho |_{E}^* \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right], \\ \langle \rho v \rangle_i^{n+1} = \langle \rho v \rangle_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\langle v \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \langle \rho v |_{E}^* \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + \langle p \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \left(\langle v \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \langle \rho v |_{E}^* \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + \langle p \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right], \\ \langle \rho e \rangle_i^{n+1} = \langle \rho e \rangle_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\langle v \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \langle \rho e |_{E}^* \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + \langle p v \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \left(\langle v \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \langle \rho e |_{E}^* \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + \langle p v \rangle_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right], \end{array} \right.$$

qui est la forme eulérienne directe des schémas Lagrange-projection. Cette forme n'a cependant qu'un intérêt pédagogique puisque le flux doit être calculé en deux étapes. •

D.2 Solveurs acoustiques pour le flux lagrangien

On s'intéresse maintenant à la détermination d'approximations numériques pour le flux lagrangien (D.24). Pour faciliter l'extension du schéma à des systèmes plus complexes (présence d'un terme source, modèle bifluide), on a choisi de travailler avec des flux lagrangiens simples et robustes que sont les flux acoustiques. Dans ce qui suit, les crochets identifiant les valeurs moyennes sont abandonnés pour alléger les notations. Par exemple, v_i^n désigne la valeur moyenne massique $\langle v |_m \rangle_i^n$, alors que $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ désigne la valeur moyenne temporelle $\langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$.

Pour des écoulements isentropiques, les équations d'Euler 1D homogènes sont :

$$(D.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0, \end{array} \right.$$

où $p = p(\rho)$. La vitesse du son est $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. Pour les solutions régulières, le système (D.34) peut être écrit de façon équivalente sous la forme :

$$(D.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t + v \partial_x) p + (\pm \rho a)^2 \partial_x v = 0, \\ \rho (\partial_t + v \partial_x) v + \partial_x p = 0, \end{array} \right.$$

ou encore, en variable de masse :

$$(D.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t p + (\pm \rho a)^2 \partial_m v = 0, \\ \partial_t v + \partial_m p = 0. \end{array} \right.$$

Les ondes acoustiques de ce système se propagent à vitesses opposées $\pm\rho a$. En suivant chaque onde, on peut alors écrire :

$$(D.37) \quad dp \pm \rho a \cdot dv = 0 \text{ le long de la caractéristique telle que } dm = \pm\rho a \cdot dt.$$

Les quantités $dp \pm \rho a \cdot dv$ correspondent aux invariants de Riemann pour les équations d'Euler isentropiques. En suivant une caractéristique, les coordonnées m et t sont liées, de sorte que toute fonction $\phi(m, t)$ peut être vue comme une fonction de m seulement, notée $\phi(m)$. L'intégration en masse des équations (D.37) respectivement sur les intervalles $]m_i; m_{i+\frac{1}{2}}[$ [et] $m_{i+\frac{1}{2}}; m_{i+1}[$ donne :

$$(D.38) \quad \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_i^n + \int_{m_i}^{m_{i+\frac{1}{2}}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm = 0, \\ p_{i+1}^n - p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \int_{m_{i+\frac{1}{2}}}^{m_{i+1}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm = 0. \end{cases}$$

L'*approximation acoustique* consiste à approcher les intégrales ci-dessus par des quadratures de la forme :

$$(D.39) \quad \begin{cases} \int_{m_i}^{m_{i+\frac{1}{2}}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm \simeq A_g \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_i^n \right), \\ \int_{m_{i+\frac{1}{2}}}^{m_{i+1}} (\rho a) \frac{dv}{dm} dm \simeq A_d \left(v_{i+1}^n - v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{cases}$$

où les coefficients A_g et A_d sont des discrétisations de (ρa) respectivement sur les intervalles $]m_i; m_{i+\frac{1}{2}}[$ [et] $m_{i+\frac{1}{2}}; m_{i+1}[$.

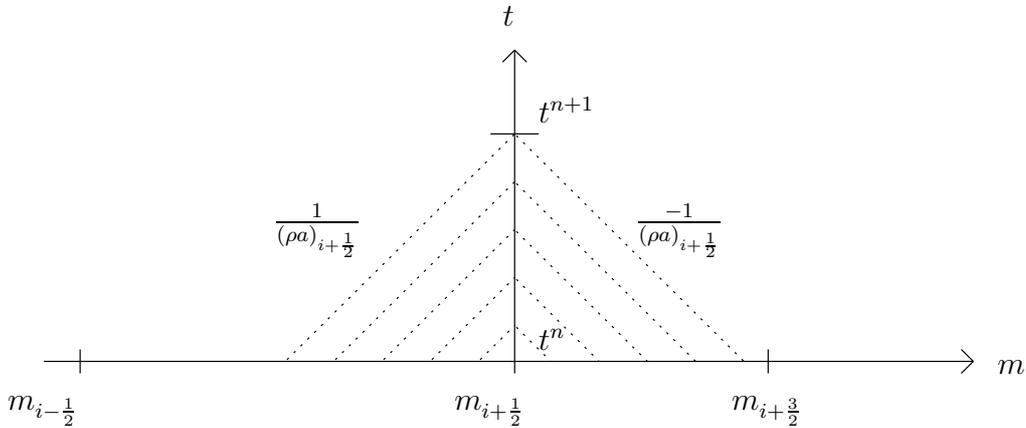


FIG. D.2 – Construction du solveur acoustique à 1 pente moyenne. L'hypothèse est faite que les caractéristiques sont des droites, de même pente au signe près.

Parmi les choix les plus simples, on retient :

– le choix :

$$(D.40) \quad A_g = A_d = (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} \equiv \frac{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n}{2},$$

qui est une quadrature à un seul état moyen, dont les chemins d'intégration sont représentés par la figure D.2,

– le choix :

$$(D.41) \quad A_g = (\rho a)_i^n \quad \text{et} \quad A_d = (\rho a)_{i+1}^n,$$

qui est une quadrature à deux états, dont les chemins d'intégration sont représentés par la figure D.3.

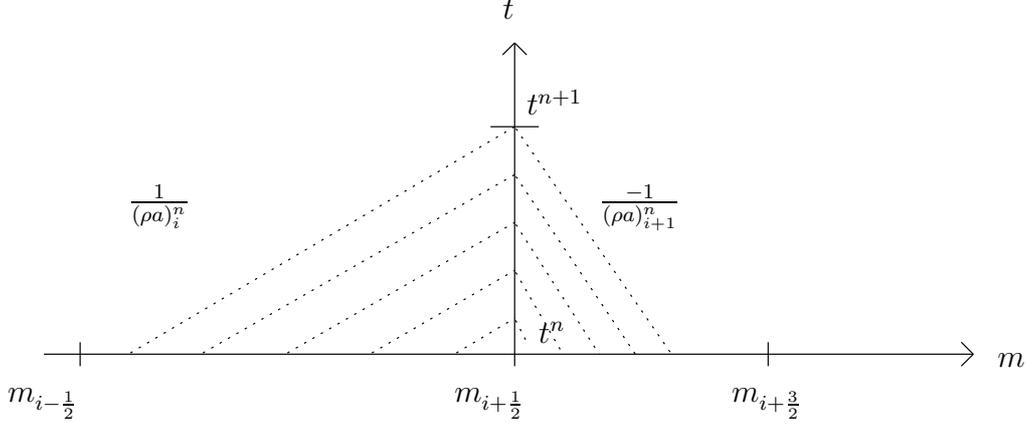


FIG. D.3 – Construction du solveur acoustique à 2 pentes. L'hypothèse est faite que les caractéristiques sont des droites, mais de pentes éventuellement différentes.

Dans tous les cas, sous l'approximation (D.39), le système (D.38) devient :

$$(D.42) \quad \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_i^n + A_g \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_i^n \right) = 0, \\ p_{i+1}^n - p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - A_d \left(v_{i+1}^n - v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0, \end{cases}$$

qui est un système linéaire en l'inconnue $\left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^t$. Son déterminant vaut $A_g + A_d$, de sorte que si $A_g, A_d > 0$ (condition suffisante), la solution unique de (D.42) est :

$$(D.43) \quad \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{A_d p_i^n + A_g p_{i+1}^n + A_g A_d (v_i^n - v_{i+1}^n)}{A_g + A_d}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n - p_{i+1}^n + A_g v_i^n + A_d v_{i+1}^n}{A_g + A_d}. \end{cases}$$

Il faut encore déterminer une discrétisation pour la composante du flux $(pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$. On va voir qu'avec le choix :

$$(D.44) \quad (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}},$$

on peut montrer que le schéma (D.23) est stable dans la mesure où il respecte une inégalité d'entropie discrète sous une condition de type CFL.

Finalement, on a construit les deux flux numériques suivants :

Flux lagrangien \mathcal{L}_1

$$(D.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n + p_{i+1}^n}{2} + (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_i^n - v_{i+1}^n}{2}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v_i^n + v_{i+1}^n}{2} + \frac{1}{(\rho a)_{i+\frac{1}{2}}} \frac{p_i^n - p_{i+1}^n}{2}, \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

où $(\rho a)_{i+\frac{1}{2}}$ est donné par (D.40). Ce flux, appelé flux acoustique à 1 état, est utilisé par exemple dans [Des97].

Flux lagrangien \mathcal{L}_2

$$(D.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(\rho a)_{i+1}^n p_i^n + (\rho a)_i^n p_{i+1}^n + (\rho a)_i^n (\rho a)_{i+1}^n (v_i^n - v_{i+1}^n)}{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n}, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n - p_{i+1}^n + (\rho a)_i^n v_i^n + (\rho a)_{i+1}^n v_{i+1}^n}{(\rho a)_i^n + (\rho a)_{i+1}^n}, \\ (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

Ce flux, appelé flux acoustique à 2 états, a été proposé dans [God59].

Pour ces deux flux, on peut écrire une inégalité d'entropie discrète qui permet de montrer que le schéma (D.23) est stable sous la condition CFL (voir [Des97] et [Des01]) :

$$(D.47) \quad \Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta m_i}{\widetilde{\rho a}_i^n} \right)_{\forall i}.$$

Cependant la valeur de $\widetilde{\rho a}_i^n$ n'est pas la même suivant que l'on utilise le flux \mathcal{L}_1 ou le flux \mathcal{L}_2 . En effet, pour le flux \mathcal{L}_1 , on a :

$$(D.48) \quad \widetilde{\rho a}_i^n = \frac{(\rho a)_{i-\frac{1}{2}} + (\rho a)_{i+\frac{1}{2}}}{2} \cdot \max \left(1, \frac{((\rho a)_i^n)^2}{(\rho a)_{i-\frac{1}{2}} (\rho a)_{i+\frac{1}{2}}} \right),$$

alors que pour le flux \mathcal{L}_2 , on a :

$$(D.49) \quad \widetilde{\rho a}_i^n = (\rho a)_i^n.$$

La restriction (3.20) est plus forte que la restriction (3.21), ce qui explique que l'on utilise généralement le flux \mathcal{L}_2 .

Dans ce paragraphe, on a construit les flux acoustiques à 1 et 2 états comme une discrétisation des équations caractéristiques qui suivent les ondes acoustiques. Pourtant, on choisit d'utiliser ces flux numériques pour la résolution des équations d'Euler complètes, quelle que soit la nature des ondes (détente, choc, discontinuité de contact). Ce choix s'appuie sur la propriété suivante, que l'on trouve dans [CW84] par exemple : les flux acoustiques à 1 et 2 états sont également des approximations de la solution exacte du problème de Riemann lagrangien (ils peuvent donc être interprétés comme des schémas de Godunov).

Remarque : le flux acoustique vu comme un schéma de flux Pour les équations d'Euler isentropiques, le flux acoustique de forme générale (D.43) peut s'écrire sous la forme d'un schéma de type Roe en la variable flux. En effet, en notant $F \equiv \begin{pmatrix} -v \\ p \end{pmatrix}$, (D.43) devient :

$$(D.50) \quad F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{F_i^n + F_{i+1}^n}{2} + M \cdot \frac{F_i^n - F_{i+1}^n}{2},$$

où :

$$(D.51) \quad M = \begin{pmatrix} \frac{A_g - A_d}{A_g + A_d} & -\frac{2}{A_g + A_d} \\ -\frac{2A_g A_d}{A_g + A_d} & -\frac{A_g - A_d}{A_g + A_d} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de M , à savoir ± 1 , sont distinctes, donc M est une matrice diagonalisable. Par contre, pour les équations d'Euler complètes, le choix (D.44) ne permet pas d'écrire le flux complet sous la forme (D.50). •

D.3 Nouveau flux d'ordre 3 pour le flux de projection

Ce paragraphe est consacré à la détermination d'approximations numériques pour les flux de projection (D.30). On commence par rappeler l'expression du flux géométrique d'ordre 1. Ce flux étant très diffusif, on propose ensuite un nouveau flux de projection d'ordre 3 basé sur une reconstruction de type PPM et filtré par des limiteurs TVD ou MP.

D.3.1 Projection géométrique d'ordre 1

On considère les fonctions $\phi = 1, v, e$. La projection la plus simple consiste à supposer que le produit des valeurs moyennes $\langle \rho |_m \rangle_i^{n+1} \langle \phi |_m \rangle_i^{n+1}$ représente en réalité la fonction $\rho \phi(x, t^{n+1})$ elle-même dans l'intervalle $\left] x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}; x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \right[$ (voir figure D.4). Il s'agit d'une approximation d'ordre 1 en espace. Dans ce cas, le flux de projection devient simplement :

Flux de projection \mathcal{P}_1

$$(D.52) \quad \langle \rho \phi |_E^* \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \begin{cases} \langle \rho |_m \rangle_{i+1}^{n+1} \langle \phi |_m \rangle_{i+1}^{n+1} & \text{si } \langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} < 0, \\ \langle \rho |_m \rangle_i^{n+1} \langle \phi |_m \rangle_i^{n+1} & \text{si } \langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} > 0, \\ \text{indifférent} & \text{si } \langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0. \end{cases}$$

D.3.2 Projection d'ordre 3 avec nouveau flux de type PPM et limiteurs

La méthode PPM³, proposée dans [CW84], consiste à reconstruire, sur maillage éventuellement non régulier, des paraboles à partir d'un ensemble de valeurs moyennes. L'intégration de ces paraboles permet de construire des flux d'ordre 3. Les auteurs utilisent

³Piecewise Parabolic Method.

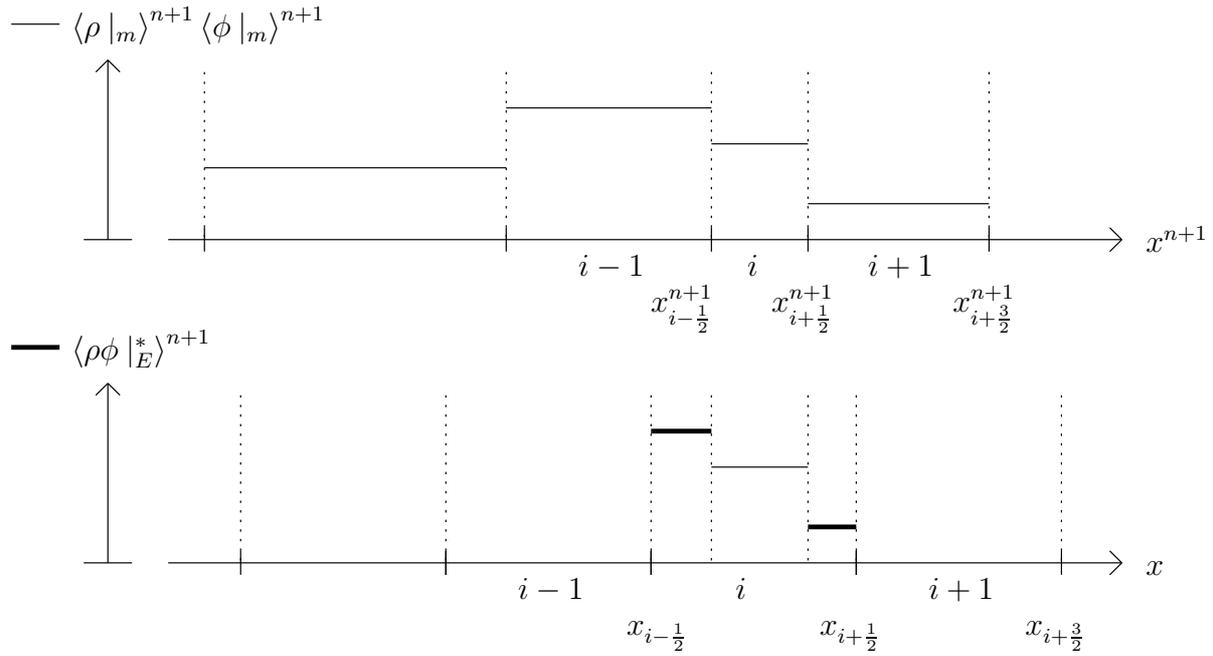


FIG. D.4 – Principe de la projection d'ordre 1. Les produits des valeurs moyennes massiques (en haut) sont directement associés à la fonction $\rho\phi(x, t^{n+1})$, de sorte que le flux de projection est un flux décentré amont (en bas).

d'abord cette méthode pour résoudre une équation d'advection linéaire, puis pour améliorer la précision du flux lagrangien lors de la résolution des équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes.

Dans ce document, on choisit d'utiliser la méthode PPM non pas pour améliorer la précision de la phase lagrangienne, mais pour améliorer la précision de la phase de projection. Ce choix est motivé d'une part par la volonté de réduire la diffusion numérique du schéma Lagrange-projection essentiellement produite lors de la phase de projection ; d'autre part parce qu'on veut garder des flux lagrangiens simples pour pouvoir ensuite leur appliquer une extension lors de la présence d'un terme source.

L'adaptation de la méthode PPM au flux de projection que l'on présente maintenant est nouvelle, au sens où l'on ne garde du schéma proposé dans [CW84] que le mode de construction des paraboles pour des solutions régulières (tous les limiteurs de pente originaux sont donc écartés). Une conséquence importante est qu'on impose la continuité des paraboles aux interfaces, ce qui simplifie la construction du flux. Le contrôle des oscillations qui apparaissent en présence de discontinuités s'effectue en dernier lieu, par l'application de limiteurs récents garantissant une projection TVD⁴ ou MP⁵.

Nouveau flux de projection de type PPM

On décrit maintenant la construction du flux de projection d'ordre 3. Le principe de la méthode PPM est représenté par la figure D.5.

⁴Total Variation Diminishing.

⁵Monotonicity-Preserving.

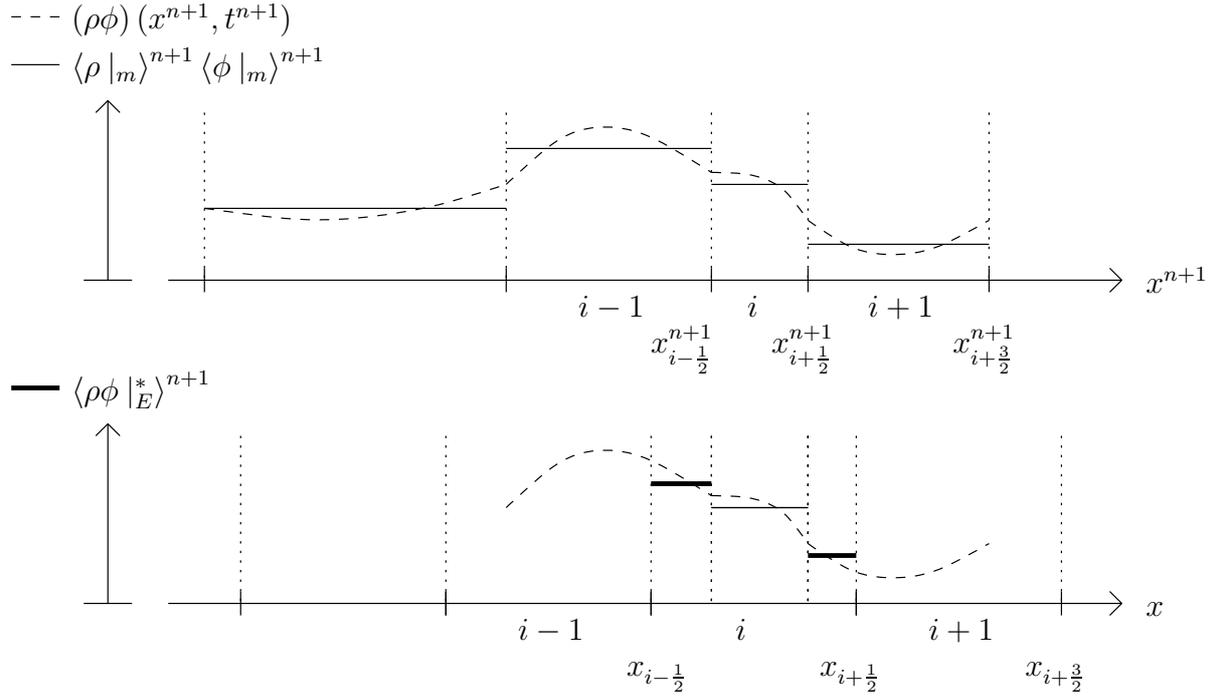


FIG. D.5 – Principe de la projection d'ordre 3 avec schéma PPM. A partir des valeurs moyennes massiques, une parabole est reconstruite dans chaque maille lagrangienne (en haut). Ce sont les valeurs moyennes des morceaux de paraboles sur les zones de chevauchement qui sont associées aux flux de projection (en bas).

La fonction $\rho\phi(x, t^{n+1})$ est remplacée par la fonction polynomiale par morceaux :

$$(D.53) \quad \rho\phi(x, t^{n+1}) \simeq \begin{cases} \dots \\ p_i^\phi(x) \text{ si } x \in \left] x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}; x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \right[, \\ p_{i+1}^\phi(x) \text{ si } x \in \left] x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}; x_{i+\frac{3}{2}}^{n+1} \right[, \\ \dots \end{cases}$$

où les p_i^ϕ sont des paraboles de la forme :

$$(D.54) \quad \left| \begin{aligned} p_i^\phi(x) &= p_{i-\frac{1}{2}}^\phi + y \left(\left(p_{i+\frac{1}{2}}^\phi - p_{i-\frac{1}{2}}^\phi \right) + p_{6,i}^\phi (1-y) \right), \\ \text{avec } y &\equiv \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1}} \in]0; 1[. \end{aligned} \right.$$

En prenant $y = 0, 1$, on voit que les quantités $p_{i-\frac{1}{2}}^\phi, p_{i+\frac{1}{2}}^\phi$ sont les valeurs de p_i^ϕ aux bords de la maille i . Aux interfaces, on impose aux paraboles d'être jointes de façon continue :

$$(D.55) \quad p_i^\phi \left(x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = p_{i+1}^\phi \left(x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = p_{i+\frac{1}{2}}^\phi.$$

Il reste à déterminer les expressions des termes $p_{6,i}^\phi$ et $p_{i+\frac{1}{2}}^\phi$. Le premier terme est obtenu en imposant à p_i^ϕ d'avoir pour valeur moyenne :

$$(D.56) \quad \frac{1}{\Delta x_i^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}^{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} p_i^\phi(x) dx = \langle \rho | m \rangle_i^{n+1} \langle \phi | m \rangle_i^{n+1},$$

ce qui permet d'obtenir, après intégration de (D.54) :

$$(D.57) \quad p_{6,i}^\phi = 6 \left(\langle \rho | m \rangle_i^{n+1} \langle \phi | m \rangle_i^{n+1} - \frac{1}{2} \left(p_{i-\frac{1}{2}}^\phi + p_{i+\frac{1}{2}}^\phi \right) \right).$$

On décrit maintenant l'obtention du terme $p_{i+\frac{1}{2}}^\phi$. On note $P^\phi(x) \equiv \int^x \rho \phi(x', t^{n+1}) dx'$. En vertu de (D.53) et (D.56), cette définition entraîne que :

$$(D.58) \quad P^\phi \left(x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = \sum_{k \leq i} \langle \rho | m \rangle_k^{n+1} \langle \phi | m \rangle_k^{n+1} \Delta x_k^{n+1}.$$

On reconstruit une interpolation polynomiale de degré 4 pour P^ϕ autour de l'interface $i + \frac{1}{2}$ en considérant le stencil des 5 points $\left(x_{i+k+\frac{1}{2}}^{n+1}, P^\phi \left(x_{i+k+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \right)$ où $k = -2, -1, 0, 1, 2$. La valeur de $p_{i+\frac{1}{2}}^\phi$ est alors obtenue par différentiation, puisque $p_{i+\frac{1}{2}}^\phi = \frac{dP^\phi}{dx} \left(x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \right)$. On trouve après calcul :

$$(D.59) \quad p_{i+\frac{1}{2}}^\phi = \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} \langle \rho | m \rangle_i^{n+1} \langle \phi | m \rangle_i^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} \langle \rho | m \rangle_{i+1}^{n+1} \langle \phi | m \rangle_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}} + c_0 \left(\langle \rho | m \rangle_{i+1}^{n+1} \langle \phi | m \rangle_{i+1}^{n+1} - \langle \rho | m \rangle_i^{n+1} \langle \phi | m \rangle_i^{n+1} \right) - c_- \delta p_{i+1}^\phi + c_+ \delta p_i^\phi,$$

où l'on a noté :

$$(D.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 \equiv \frac{2\Delta x_i^{n+1} \Delta x_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}) (\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1})} \\ \quad \times \left(\frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1}}{2\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}} - \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + 2\Delta x_{i+1}^{n+1}} \right), \\ c_- \equiv \frac{\Delta x_i^{n+1}}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}} \cdot \frac{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1}}{2\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}}, \\ c_+ \equiv \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}} \cdot \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_{i+2}^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + 2\Delta x_{i+1}^{n+1}}, \end{array} \right.$$

et :

$$(D.61) \quad \delta p_i^\phi = \frac{2\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1}}{\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}} \cdot \frac{\Delta x_i^{n+1} \left(\langle \rho | m \rangle_{i+1}^{n+1} \langle \phi | m \rangle_{i+1}^{n+1} - \langle \rho | m \rangle_i^{n+1} \langle \phi | m \rangle_i^{n+1} \right)}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}} + \frac{\Delta x_i^{n+1} + 2\Delta x_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1}} \cdot \frac{\Delta x_i^{n+1} \left(\langle \rho | m \rangle_i^{n+1} \langle \phi | m \rangle_i^{n+1} - \langle \rho | m \rangle_{i-1}^{n+1} \langle \phi | m \rangle_{i-1}^{n+1} \right)}{\Delta x_{i-1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i+1}^{n+1}}.$$

Remarque : réduction des coefficients sur maillage régulier Sur maillage régulier $\Delta x_i^{n+1} = \Delta x^{n+1} \forall i$, les coefficients (D.60) se réduisent à $c_0 = 0$ et $c_- = c_+ = \frac{1}{6}$. La moyenne des pentes (D.61) devient simplement $\delta p_i^\phi = \frac{1}{2} \left(\langle \rho | m \rangle_{i+1}^{n+1} \langle \phi | m \rangle_{i+1}^{n+1} - \langle \rho | m \rangle_{i-1}^{n+1} \langle \phi | m \rangle_{i-1}^{n+1} \right)$. On trouve alors que :

$$(D.62) \quad p_{i+\frac{1}{2}}^\phi = \frac{7}{2} \left(\langle \rho | m \rangle_i^{n+1} \langle \phi | m \rangle_i^{n+1} + \langle \rho | m \rangle_{i+1}^{n+1} \langle \phi | m \rangle_{i+1}^{n+1} \right) - \frac{1}{12} \left(\langle \rho | m \rangle_{i-1}^{n+1} \langle \phi | m \rangle_{i-1}^{n+1} + \langle \rho | m \rangle_{i+2}^{n+1} \langle \phi | m \rangle_{i+2}^{n+1} \right).$$

•

En résumé, dans le cas général d'un maillage quelconque, les paraboles p_i^ϕ sont déterminées de façon unique par (D.54), (D.57), (D.59), (D.60) et (D.61). Le flux de projection d'ordre 3 associé à ces paraboles est :

$$(D.63) \quad \langle \rho \phi | E \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} p_{i+1}^\phi(x) dx & \text{si } \langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} < 0, \\ \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} p_i^\phi(x) dx & \text{si } \langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} > 0, \\ \text{indifférent si } \langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0. \end{cases}$$

Ces intégrales peuvent être calculées analytiquement. Tout calcul fait, on trouve :

Flux de projection \mathcal{P}_3

(D.64)

$$\langle \rho \phi | E \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^\phi + \frac{1}{2} \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} \left(p_{i+\frac{3}{2}}^\phi - p_{i+\frac{1}{2}}^\phi + \left(1 - \frac{2}{3} \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} \right) p_{6,i+1}^\phi \right) & \text{si } \langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} < 0, \\ p_{i+\frac{1}{2}}^\phi - \frac{1}{2} \frac{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i^{n+1}} \left(p_{i+\frac{1}{2}}^\phi - p_{i-\frac{1}{2}}^\phi - \left(1 - \frac{2}{3} \frac{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i^{n+1}} \right) p_{6,i}^\phi \right) & \text{si } \langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} > 0, \\ \text{indifférent si } \langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \end{cases}$$

où les différents coefficients sont donnés par (D.54), (D.57), (D.59), (D.60) et (D.61).

Limiteurs

En présence de discontinuités, l'utilisation du flux de projection \mathcal{P}_3 conduit naturellement à des oscillations. Des limiteurs de flux doivent donc être utilisés pour stabiliser le schéma. On choisit d'utiliser deux limiteurs récents proposés dans [DT04] et [SH97] : un limiteur TVD et un limiteur MP. L'efficacité de ces limiteurs pour stabiliser des schémas d'ordre très élevé est mise en évidence dans [PJ06] par exemple.

Avant d'aller plus loin, on donne quelques précisions sur les notations. Pour un ensemble de quantités quelconques $\{\phi_k\}$ pour $k = 1, \dots, K$, on introduit la notation d'intervalle :

$$(D.65) \quad [[\phi_1, \dots, \phi_K]] = [\min(\phi_1, \dots, \phi_K), \max(\phi_1, \dots, \phi_K)],$$

ainsi que la fonction :

$$(D.66) \quad \text{minmod}(\phi_1, \phi_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi_1 \times \phi_2 \leq 0, \\ \min(|\phi_1|, |\phi_2|) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour un fonction quelconque ϕ , on note, pour alléger les équations :

$$(D.67) \quad \phi_i \equiv \langle \rho | m \rangle_i^{n+1} \langle \phi | m \rangle_i^{n+1}.$$

On définit la courbure :

$$(D.68) \quad d_i^\phi \equiv \phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1},$$

et l'on introduit :

$$(D.69) \quad d_{i+\frac{1}{2}}^\phi \equiv \text{minmod}(d_i^\phi, d_{i+1}^\phi).$$

Enfin, les nombres de courant considérés sont notés :

$$(D.70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_{i+\frac{1}{2}}^+ \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x_i^{n+1}} \langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \nu_{i+\frac{1}{2}}^- \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x_{i+1}^{n+1}} \langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

Limiteur TVD Le premier limiteur est un limiteur TVD qui impose au flux $\langle \rho \phi | E \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ de rester confiné dans l'intervalle Ω_{TVD}^ϕ , défini par :

– lorsque $\langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} > 0$:

$$(D.71) \quad \Omega_{\text{TVD}}^\phi \equiv [[\phi_i, \phi_{i+1}]] \cap \left[\left[\phi_i, \left(\phi_{i+\frac{1}{2}} \right)_{UL}^+ \right] \right],$$

où :

$$(D.72) \quad \left(\phi_{i+\frac{1}{2}} \right)_{UL}^+ \equiv \phi_i + \frac{1 - \nu_{i+\frac{1}{2}}^+}{\nu_{i+\frac{1}{2}}^+} (\phi_i - \phi_{i-1}).$$

– lorsque $\langle v | t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} < 0$:

$$(D.73) \quad \Omega_{\text{TVD}}^\phi \equiv [[\phi_i, \phi_{i+1}]] \cap \left[\left[\phi_{i+1}, \left(\phi_{i+\frac{1}{2}} \right)_{UL}^- \right] \right].$$

où :

$$(D.74) \quad \left(\phi_{i+\frac{1}{2}} \right)_{UL}^- \equiv \phi_{i+1} - \frac{1 + \nu_{i+\frac{1}{2}}^-}{\nu_{i+\frac{1}{2}}^-} (\phi_{i+1} - \phi_{i+2}).$$

Limiteur MP Le second limiteur est un limiteur MP qui impose au flux $\langle \rho\phi |_E^* \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ de rester confiné dans l'intervalle Ω_{MP}^ϕ . On note :

$$(D.75) \quad \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{MD} \equiv \frac{1}{2} \left(\phi_i + \phi_{i+1} - d_{i+\frac{1}{2}}^\phi \right).$$

L'intervalle Ω_{MP}^ϕ est défini par :

– lorsque $\langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} > 0$:

$$(D.76) \quad \Omega_{\text{MP}}^\phi \equiv \left[\left[\phi_i, \phi_{i+1}, \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{MD} \right] \cap \left[\left[\phi_i, \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{UL}^+, \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{LC}^+ \right] \right],$$

où $\left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{UL}^+$ est donné par (D.72), et :

$$(D.77) \quad \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{LC}^+ \equiv \phi_i - \frac{\nu_{i+\frac{1}{2}}^+ - 1}{2\nu_{i+\frac{1}{2}}^+} \left(\phi_i - \phi_{i-1} + d_{i-\frac{1}{2}}^\phi \right).$$

– lorsque $\langle v |_t \rangle_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} < 0$:

$$(D.78) \quad \Omega_{\text{MP}}^\phi \equiv \left[\left[\phi_i, \phi_{i+1}, \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{MD} \right] \cap \left[\left[\phi_{i+1}, \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{UL}^-, \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{LC}^- \right] \right],$$

où $\left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{UL}^-$ est donné par (D.74), et :

$$(D.79) \quad \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}\right)_{LC}^- \equiv \phi_{i+1} - \frac{\nu_{i+\frac{1}{2}}^- + 1}{2\nu_{i+\frac{1}{2}}^-} \left(\phi_{i+1} - \phi_{i+2} + d_{i+\frac{3}{2}}^\phi \right).$$

On appelle flux de projection \mathcal{P}_3^{TVD} la restriction du flux \mathcal{P}_3 par le limiteur TVD, et flux de projection \mathcal{P}_3^{MP} la restriction du flux \mathcal{P}_3 par le limiteur MP.

D.4 Résultats numériques

On procède maintenant à l'évaluation du schéma Lagrange-projection (D.23), (D.29) sur deux cas-tests classiques. Pour chaque résultat numérique, on précise quel flux lagrangien parmi les flux \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , et quel flux de projection parmi \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_3 , \mathcal{P}_3^{TVD} et \mathcal{P}_3^{MP} , ont été utilisés. Le premier cas-test est un problème d'advection linéaire obtenu comme comportement limite des équations d'Euler, et le second est un cas-test de Sod (tube à choc). Le premier problème permet d'évaluer l'apport du flux de projection d'ordre 3 par rapport au flux de projection d'ordre 1, et de justifier de l'utilisation des limiteurs TVD et MP. Le second problème a pour but d'évaluer le schéma complet sur un cas-test standard, pour permettre au lecteur de comparer les résultats présentés ici avec d'autres résultats fournis par la littérature. Dans cette section, le coefficient polytropique du gaz parfait est fixé à $\gamma = 1.4$.

D.4.1 Limite d'advection linéaire

On compare les flux de projection \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_3 , \mathcal{P}_3^{TVD} et \mathcal{P}_3^{MP} sur un problème d'advection linéaire obtenu comme le comportement limite des équations d'Euler 1D lorsque la condition initiale est à l'équilibre mécanique, c'est-à-dire :

$$(D.80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(x, 0) = \rho^0(x), \\ v(x, 0) = 1, \\ p(x, 0) = 1. \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites sont périodiques. Pour une telle condition initiale, les flux lagrangiens \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 donnent tous les deux $p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 1$ et $v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 1, \forall i, \forall n$. Du point de vue discret, la phase lagrangienne ne modifie donc aucune valeur, ce qui permet de ne comparer que les flux de projection. Deux conditions initiales $\rho^0(x)$ sont considérées.

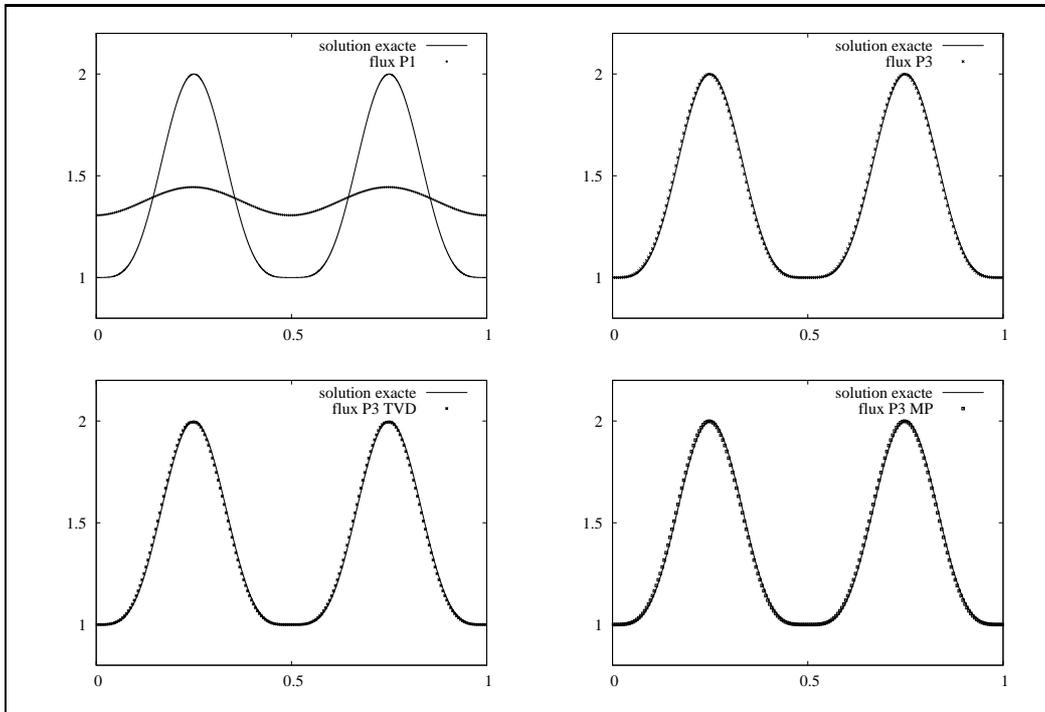


FIG. D.6 – Comparaison des solutions numériques fournies par les différents flux de projection pour la limite d'advection linéaire des équations d'Euler 1D avec des conditions aux limites périodiques et la condition initiale régulière (D.81); représentation de $\rho(x, t)$ en fonction de $x \in]0; 1[$ au temps $t = 10$ (10 cycles) avec $CFL = 0.75$ et 200 mailles. Le flux de projection \mathcal{P}_1 (en haut à gauche) est très dissipatif. Pour des solutions régulières, aucune différence n'apparaît visuellement entre les résultats fournis par les flux de projection \mathcal{P}_3 (en haut à droite), \mathcal{P}_3^{TVD} (en bas à gauche) et \mathcal{P}_3^{MP} (en bas à droite).

La première condition initiale, régulière, est (D.80) avec :

$$(D.81) \quad x \in]0; 1[, \quad \rho^0(x) = 1 + (\sin(2\pi x))^4.$$

Dans la figure D.6, le temps final est $t = 10$, ce qui correspond à 10 cycles, et le domaine a été découpé en 200 mailles. On voit que le flux de projection \mathcal{P}_1 est très dissipatif, en comparaison

avec le flux de projection \mathcal{P}_3 . Par ailleurs, aucune différence n'apparaît visuellement entre les résultats fournis par les flux de projection d'ordre 3 sans limiteur, d'ordre 3 avec limiteur TVD et d'ordre 3 avec limiteur MP. L'ordre effectif des schémas est évalué dans la figure D.7, où l'on vérifie que le flux \mathcal{P}_1 conduit bien à un schéma d'ordre 1, et que le flux \mathcal{P}_3 conduit bien à un schéma d'ordre 3. On constate par contre que l'utilisation du limiteur TVD réduit l'ordre du schéma à 2, alors que l'utilisation du limiteur MP restitue l'ordre 3 du schéma original sans limiteur.

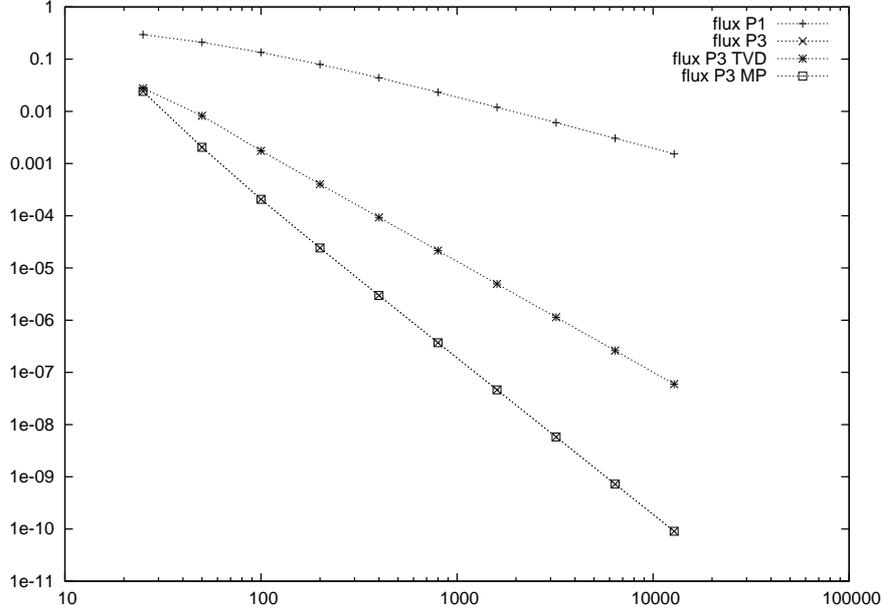


FIG. D.7 – Comparaison des solutions numériques fournies par les différents flux de projection sur un problème d'advection linéaire avec la condition initiale régulière (D.81) ; représentation de la norme L^2 de l'erreur en fonction du nombre de mailles (échelle logarithmique) pour les différents schémas utilisés, avec $t = 1$ (1 cycle) et $CFL = 0.75$. Les pentes, obtenues par la méthode des moindres carrés, déterminent l'ordre effectif des schémas. La valeur absolue de la pente associée au flux \mathcal{P}_1 vaut 0.86. Celle associée au flux \mathcal{P}_3 vaut 3.08. L'utilisation du flux \mathcal{P}_3^{TVD} , avec une pente de 2.11, dégrade l'ordre du schéma, alors que l'utilisation du flux \mathcal{P}_3^{MP} , avec une pente de 3.08, ne modifie pas l'ordre du schéma.

La seconde condition initiale, non régulière, est (D.80) avec :

$$(D.82) \quad x \in]-1; 1[, \quad \rho^0(x) = \begin{cases} 1 + \exp\left(-\frac{\log(2)(x+0.7)^2}{0.0009}\right) & \text{si } x \in]-0.8; -0.6[, \\ 2 & \text{si } x \in]-0.4; -0.2[, \\ 2 - |10(x-0.1)| & \text{si } x \in]0; 0.2[, \\ 1 + \sqrt{1 - 100(x-0.5)^2} & \text{si } x \in]0.4; 0.6[, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la figure D.8, le temps final est $t = 10$ (5 cycles) et le domaine a été découpé en 200 mailles. On voit que le schéma avec flux de projection \mathcal{P}_3 est oscillant et n'est donc pas utilisable

lorsque l'on veut préserver la positivité de ρ pour des valeurs proches de 0. L'utilisation du flux \mathcal{P}_3^{MP} constitue un intermédiaire intéressant dans la mesure où les oscillations sont nettement réduites, sans pour autant réduire l'ordre du schéma. Le flux \mathcal{P}_3^{TVD} rend le schéma parfaitement monotone, ce qui constitue un gage de robustesse.

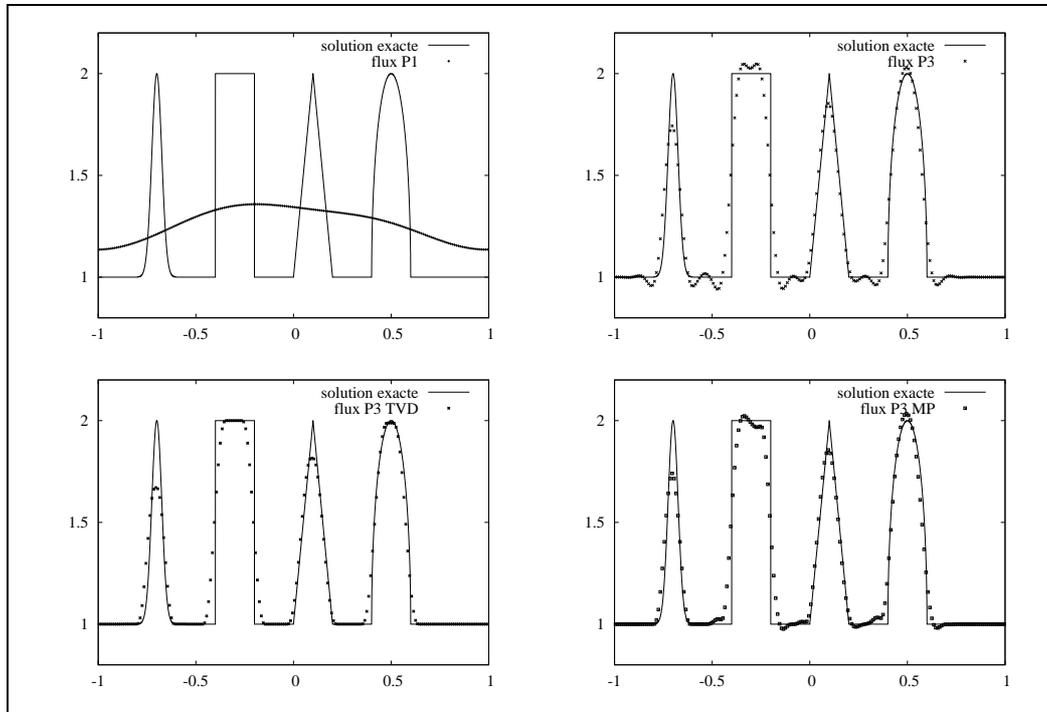


FIG. D.8 – Comparaison des solutions numériques fournies par les différents flux de projection pour la limite d'advection linéaire des équations d'Euler 1D avec des conditions aux limites périodiques et la condition initiale non régulière (D.82) ; représentation de $\rho(x, t)$ en fonction de $x \in]-1; 1[$ au temps $t = 10$ (5 cycles) avec $CFL = 0.75$ et 200 mailles. Le schéma avec flux \mathcal{P}_1 est monotone mais trop dissipatif pour être utilisé en temps long. Le schéma avec flux de projection d'ordre 3 sans limiteur (en haut à droite) est oscillant. L'utilisation du flux \mathcal{P}_3^{TVD} (en bas à gauche) rend le schéma monotone. L'utilisation du flux \mathcal{P}_3^{MP} (en bas à droite) constitue un intermédiaire intéressant.

Des résultats similaires ont été obtenus pour une vitesse de translation négative $v = -1$.

Remarque sur l'extension multidimensionnelle par directions alternées Pour l'extension du schéma Lagrange-projection au 2D et 3D, on utilise généralement la méthode des directions alternées, avec un splitting de Strang (voir [Str68]) introduisant une erreur d'ordre 2 en temps. On ne décrit pas la méthode ici, mais on présente quelques résultats numériques (figures D.9, D.10, D.11) permettant d'illustrer l'apport du flux de projection d'ordre 3 sur un problème d'advection 2D. Les deux conditions initiales considérées sont représentées par la figure D.9. ●

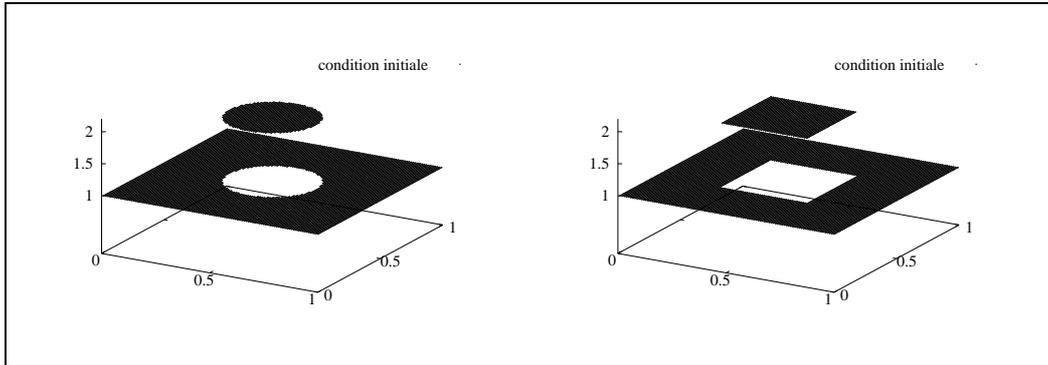


FIG. D.9 – Conditions initiales pour la limite d’advection linéaire des équations d’Euler 2D. Données sur une grille de 100×100 mailles.

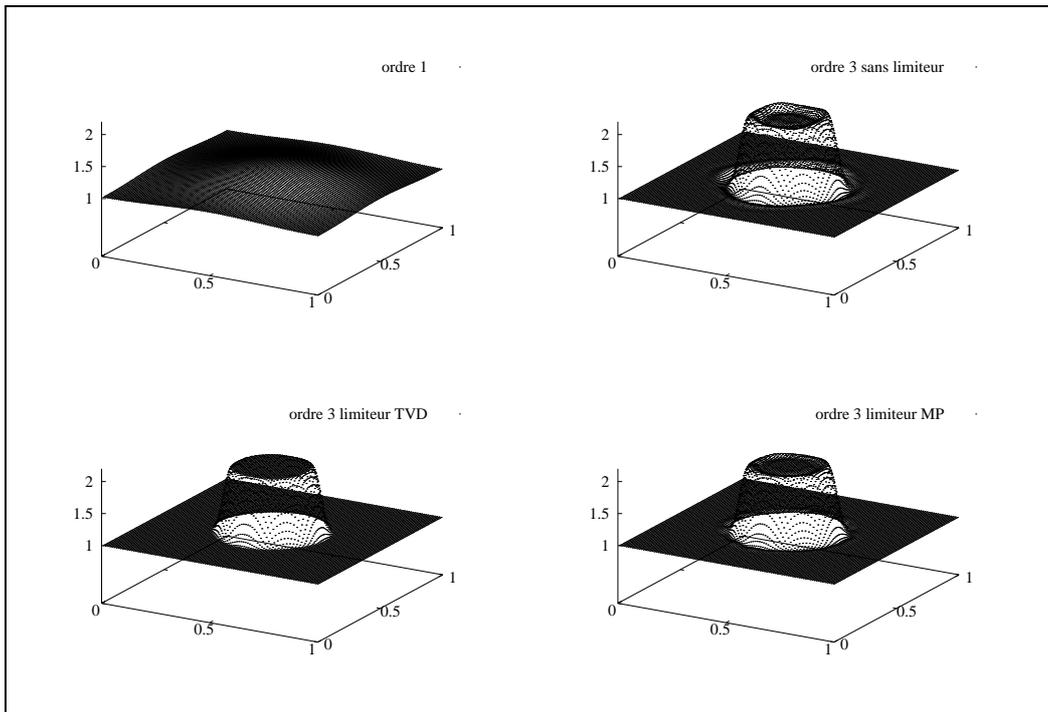


FIG. D.10 – Pour le cercle, profils obtenus à $t = 10$ avec une vitesse d’advection $u = 1$, $v = -1$ sur une grille de 100×100 mailles avec un CFL de 0.75.

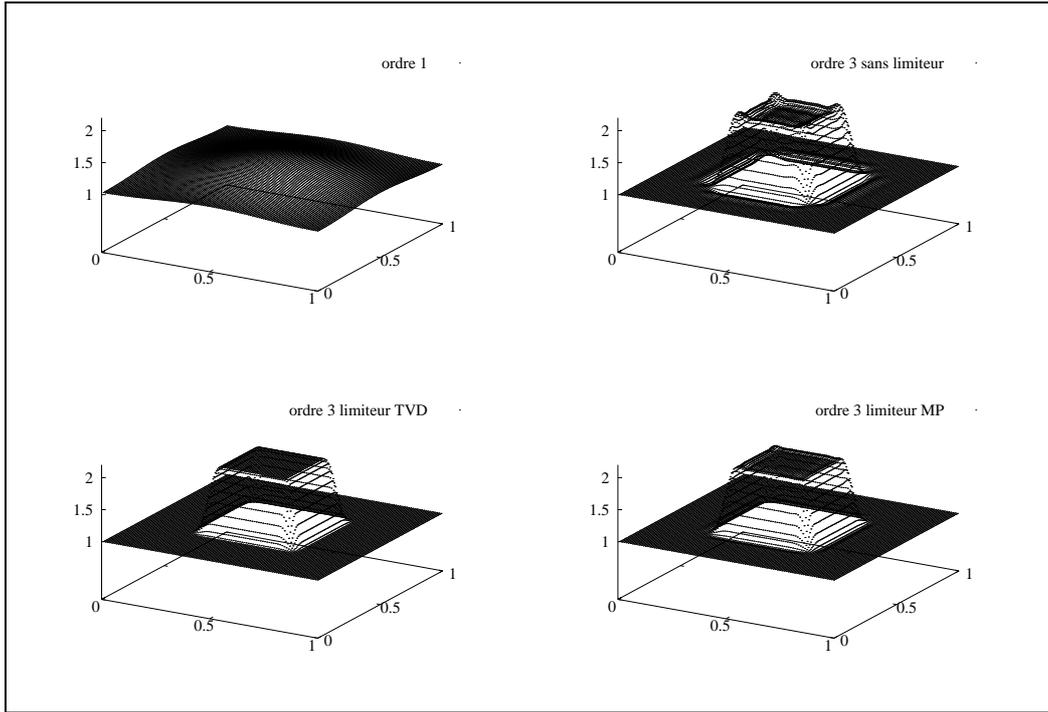


FIG. D.11 – Pour le carré, profils obtenus à $t = 10$ avec une vitesse d’advection $u = 1$, $v = -1$ sur une grille de 100×100 mailles avec un CFL de 0.75.

D.4.2 Tube à choc

On considère maintenant la condition initiale de Sod :

$$(D.83) \quad x \in]0; 1[, \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0.5, \\ 0.125 & \text{si } x > 0.5, \end{cases} \\ v(x, 0) = 0, \\ p(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0.5, \\ 0.1 & \text{si } x > 0.5. \end{cases} \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites sont transitives (type Neumann). Tous les résultats numériques présentés pour ce cas-test sont donnés à l’instant $t = 0.14$, avec 200 mailles et un nombre CFL de 0.75.

Les figures D.12 et D.13 montrent les profils de densité (en haut à gauche), de vitesse (en haut à droite), de pression (en bas à gauche) et d’énergie interne (en bas à droite) obtenus avec le même flux de projection \mathcal{P}_1 et avec les flux lagrangiens respectifs \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 . On voit que ces résultats numériques sont très proches pour ce problème. Dans la suite, on choisit donc de n’utiliser plus qu’un flux lagrangien, à savoir le flux \mathcal{L}_2 .

Les figures D.14 et D.15 montrent les mêmes profils obtenus avec le même flux lagrangien \mathcal{L}_2 et avec les flux de projection respectifs \mathcal{P}_3^{TVD} et \mathcal{P}_3^{MP} . La comparaison de ces figures avec les figures D.12 et D.13 met en évidence l’apport d’un flux de projection d’ordre 3, notamment au niveau de la discontinuité de contact.

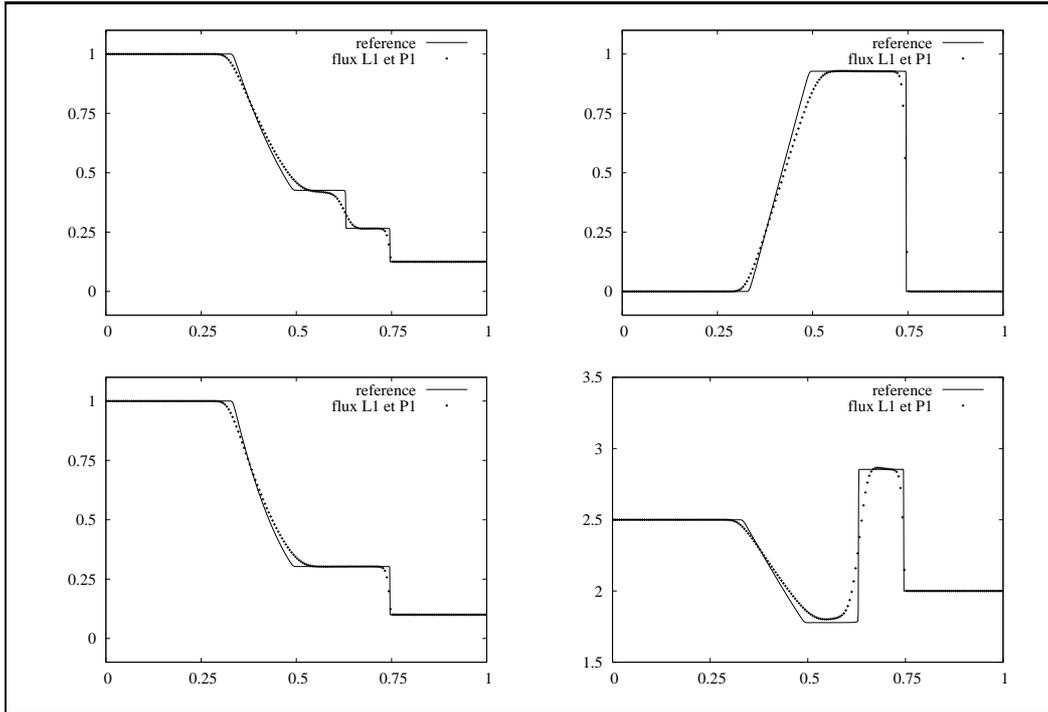


FIG. D.12 – Cas-test de Sod (D.83), à $t = 0.14$ avec 200 mailles et $CFL = 0.75$; représentation des profils ρ (en haut à gauche), v (en haut à droite), p (en bas à gauche) et ϵ (en bas à droite) en fonction de $x \in]0; 1[$, obtenus avec les flux \mathcal{L}_1 et \mathcal{P}_1 .

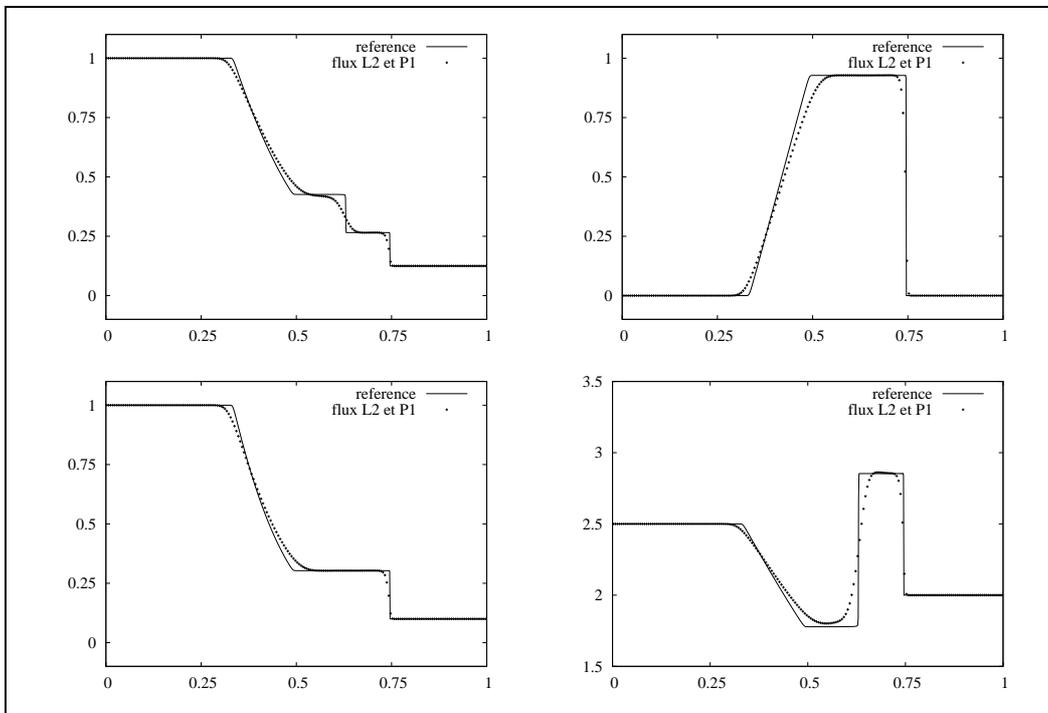


FIG. D.13 – Mêmes conditions que pour la figure D.12; profils obtenus avec les flux \mathcal{L}_2 et \mathcal{P}_1 .

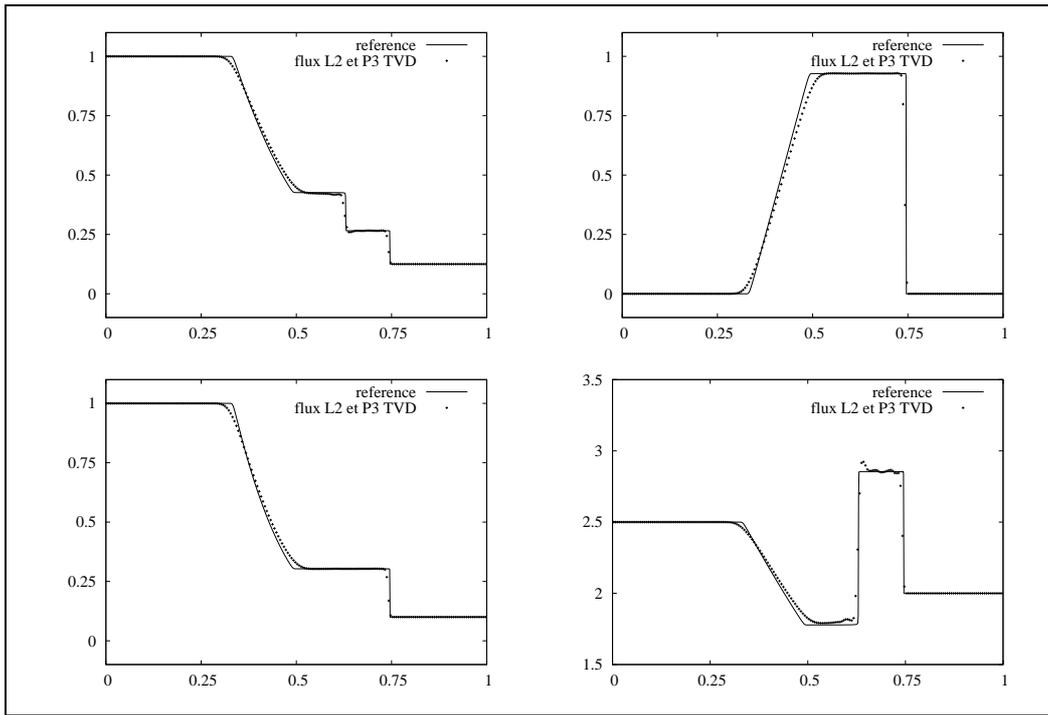


FIG. D.14 – Mêmes conditions que pour la figure D.12 ; profils obtenus avec les flux \mathcal{L}_2 et \mathcal{P}_3^{TVD} .

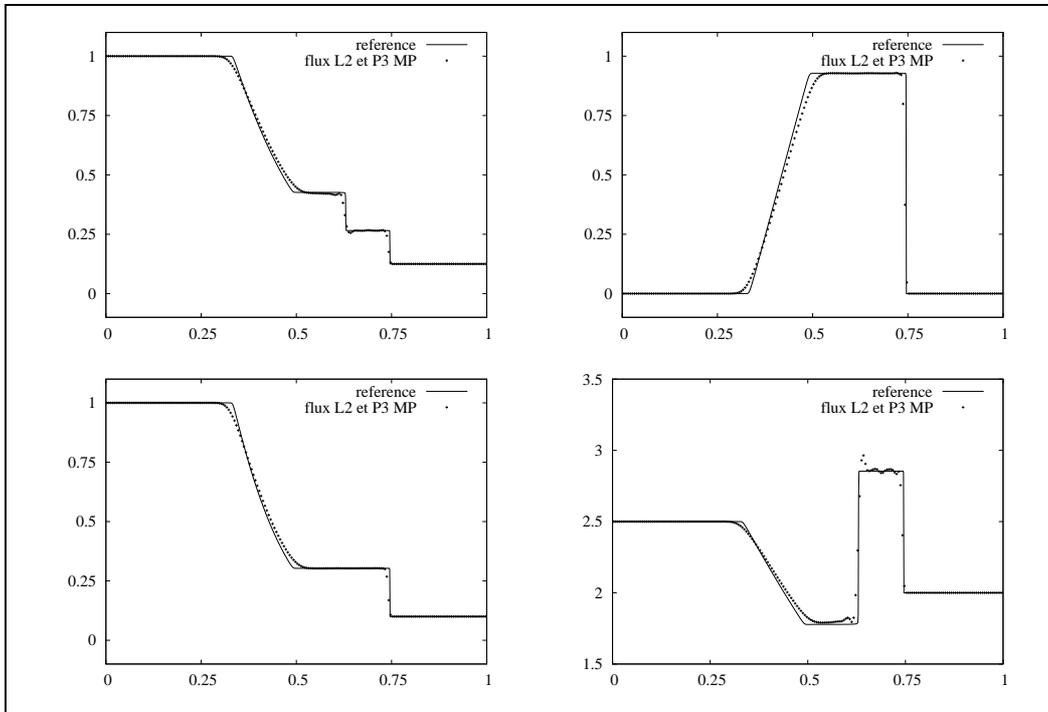


FIG. D.15 – Mêmes conditions que pour la figure D.12 ; profils obtenus avec les flux \mathcal{L}_2 et \mathcal{P}_3^{MP} .

D.5 Conclusion

Dans cette annexe, on a commencé par présenter de façon originale, à savoir sous forme intégrale exacte, la classe des schémas Lagrange-projection pour la résolution numérique des équations d'Euler 1D homogènes. C'est l'obtention des intégrales exactes requises pendant la phase de projection qui a permis d'identifier un moyen d'améliorer la précision de cette phase. On a alors proposé un nouveau flux de projection d'ordre 3 basé sur une reconstruction PPM et stabilisé par des limiteurs TVD et MP. Les résultats numériques ont mis en évidence l'apport de ce flux par rapport à une projection géométrique d'ordre 1. Concernant la phase lagrangienne, le choix a été fait d'utiliser le flux lagrangien simple qu'est le flux acoustique, dont le mode de construction bien maîtrisé permet l'extension à des problèmes plus complexes (présence d'un terme source, modèle bifluide).

Annexe E

Preuve de l'inégalité d'entropie discrète du chapitre 3

Cette annexe est dédiée à la démonstration de la proposition 3.3, que l'on rappelle :

Proposition E.1. *Le schéma (3.28) muni du flux \mathcal{L}_1^{AP} (3.46), respectivement \mathcal{L}_2^{AP} (3.47), vérifie l'inégalité d'entropie :*

$$(E.1) \quad \overline{T}_i^{n+1} \left(\overline{S}_i^{n+1} - S_i^n \right) \geq -\mathcal{A}_i - \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \mathcal{C}_i,$$

avec $\mathcal{A}_i \leq 0$ et $\mathcal{C}_i \geq 0$. Plus précisément, on a noté :

$$(E.2) \quad \mathcal{A}_i \equiv \frac{1}{2} \overline{T}_i^{n+1} \left[\left(\overline{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} \Big|_{v,e} (U) + \left(\overline{v}_i^{n+1} - v_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \Big|_{\tau,e} (U) + \left(\overline{e}_i^{n+1} - e_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial e^2} \Big|_{\tau,v} (U) \right],$$

où S est l'entropie donnée par $TdS = de - vdv + pd\tau$ et $U = (\tau, v, e)^t$ un état situé entre $(\tau_i^n, v_i^n, e_i^n)^t$ et $(\overline{\tau}_i^{n+1}, \overline{v}_i^{n+1}, \overline{e}_i^{n+1})^t$, et :

$$(E.3) \quad \mathcal{B}_i \equiv (v^2)_i^{n+\frac{1}{2}} - \overline{v}_i^{n+1} v_i^{n+\frac{1}{2}},$$

et :

$$(E.4) \quad \mathcal{C}_i \equiv \frac{\left[p_i^n - \overline{p}_i^{n+1} + (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} (v_i^n - \overline{v}_i^{n+1}) - \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2} \overline{v}_i^{n+1} \right]^2}{2 \left((\rho a)_{i+\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2} \right)} + \frac{\left[p_i^n - \overline{p}_i^{n+1} - (\rho a)_{i-\frac{1}{2}} (v_i^n - \overline{v}_i^{n+1}) + \nu \frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}{2} \overline{v}_i^{n+1} \right]^2}{2 \left((\rho a)_{i-\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right)},$$

respectivement :

$$(E.5) \quad \mathcal{C}_i \equiv \frac{(p_i^n - \overline{p}_i^{n+1})^2 + \left((\rho a)_i^n (v_i^n - \overline{v}_i^{n+1}) - \nu \frac{\Delta m_i}{2} \overline{v}_i^{n+1} \right)^2}{(\rho a)_i^n + \nu \frac{\Delta m_i}{2}}.$$

Preuve On paramètre les fonctions avec θ ($0 \leq \theta \leq 1$) entre les temps t^n et t^{n+1} :

$$(E.6) \quad \begin{cases} \tau_i(\theta) = \tau_i^n + \theta(\bar{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n), \\ v_i(\theta) = v_i^n + \theta(\bar{v}_i^{n+1} - v_i^n), \\ e_i(\theta) = e_i^n + \theta(\bar{e}_i^{n+1} - e_i^n), \end{cases}$$

et l'on pose $g_i(\theta) = S(\tau_i(\theta), \epsilon_i(\theta))$. On a donc $g_i(0) = S_i^n$ et $g_i(1) = \bar{S}_i^{n+1}$. Un développement de Taylor de g au second ordre est :

$$(E.7) \quad g_i(0) = g_i(1) - g'_i(1) + \frac{1}{2}g''_i(\theta_i), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1,$$

avec :

$$(E.8) \quad \begin{aligned} g'_i(1) &= \frac{dS}{d\theta}(\tau_i(1), v_i(1), e_i(1)), \\ &= (\bar{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n) \left. \frac{\partial S}{\partial \tau} \right|_{v,e}(\tau_i(1), v_i(1), e_i(1)) \\ &+ (\bar{v}_i^{n+1} - v_i^n) \left. \frac{\partial S}{\partial v} \right|_{\tau,e}(\tau_i(1), v_i(1), e_i(1)) \\ &+ (\bar{e}_i^{n+1} - e_i^n) \left. \frac{\partial S}{\partial e} \right|_{\tau,v}(\tau_i(1), v_i(1), e_i(1)), \end{aligned}$$

et :

$$(E.9) \quad \begin{aligned} g''_i(\theta_i) &= \frac{d^2S}{d\theta^2}(\tau_i(\theta_i), v_i(\theta_i), e_i(\theta_i)), \\ &= (\bar{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n)^2 \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} \right|_{v,e}(\tau_i(\theta_i), v_i(\theta_i), e_i(\theta_i)) \\ &+ (\bar{v}_i^{n+1} - v_i^n)^2 \left. \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \right|_{\tau,e}(\tau_i(\theta_i), v_i(\theta_i), e_i(\theta_i)) \\ &+ (\bar{e}_i^{n+1} - e_i^n)^2 \left. \frac{\partial^2 S}{\partial e^2} \right|_{\tau,v}(\tau_i(\theta_i), v_i(\theta_i), e_i(\theta_i)), \\ &= \frac{2}{\bar{T}_i^{n+1}} \mathcal{A}_i. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant (E.7) et (E.9), on a :

$$(E.10) \quad \begin{aligned} \bar{T}_i^{n+1} g'_i(1) &= \bar{T}_i^{n+1} (\bar{S}_i^{n+1} - S_i^n) + \frac{1}{2} \bar{T}_i^{n+1} g''_i(\theta_i), \\ &= \bar{T}_i^{n+1} (\bar{S}_i^{n+1} - S_i^n) + \mathcal{A}_i. \end{aligned}$$

Or, de (E.8) et $TdS = de - vdv + pd\tau$, on déduit :

$$(E.11) \quad \bar{T}_i^{n+1} g'_i(1) = (\bar{e}_i^{n+1} - e_i^n) - \bar{v}_i^{n+1} (\bar{v}_i^{n+1} - v_i^n) + \bar{p}_i^{n+1} (\bar{\tau}_i^{n+1} - \tau_i^n).$$

En utilisant les équations discrètes (3.28), cette relation devient :

$$(E.12) \quad \bar{T}_i^{n+1} g'_i(1) = -\frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \mathcal{D}_i - \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i,$$

où l'on a noté :

$$(E.13) \quad \mathcal{D}_i \equiv (pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (pv)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \bar{p}_i^{n+1} \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

En combinant (E.10) et (E.12), on obtient l'égalité :

$$(E.14) \quad \bar{T}_i^{n+1} \left(\bar{S}_i^{n+1} - S_i^n \right) = -\mathcal{A}_i - \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot \mathcal{D}_i.$$

Il reste donc à trouver un majorant de \mathcal{D}_i . Comme $(pv)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ pour les flux \mathcal{L}_1^{AP} et \mathcal{L}_2^{AP} , on peut factoriser \mathcal{D}_i :

$$(E.15) \quad \mathcal{D}_i = \left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} \right) \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) - \left(p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} \right) \left(v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right).$$

L'astuce consiste alors à remarquer que $\left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} \right) \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right)$ peut être vu comme un double produit, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$(E.16) \quad \begin{aligned} \left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} \right) \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) &= \frac{\left[p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} + K_{i+\frac{1}{2}} \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \right]^2}{2K_{i+\frac{1}{2}}} \\ &\quad - \frac{\left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} \right)^2 + \left(K_{i+\frac{1}{2}} \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \right)^2}{2K_{i+\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

pour tout coefficient $K_{i+\frac{1}{2}} > 0$, d'où la majoration :

$$(E.17) \quad \left(p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} \right) \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \leq \frac{\left[p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} + K_{i+\frac{1}{2}} \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \right]^2}{2K_{i+\frac{1}{2}}}.$$

De manière similaire, on trouve que :

$$(E.18) \quad - \left(p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} \right) \left(v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \leq \frac{\left[p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} - K_{i-\frac{1}{2}} \left(v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \right]^2}{2K_{i-\frac{1}{2}}},$$

pour tout coefficient $K_{i-\frac{1}{2}} > 0$. On distingue maintenant deux cas.

Cas du flux \mathcal{L}_1^{AP} En utilisant (3.46), on trouve que :

$$(E.19) \quad \begin{cases} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left((\rho a)_{i+\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2} \right) v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_i^n + (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} v_i^n, \\ p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left((\rho a)_{i-\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right) v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_i^n - (\rho a)_{i-\frac{1}{2}} v_i^n, \end{cases}$$

d'où :

$$(E.20) \quad \left| \begin{aligned} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} + \left((\rho a)_{i+\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2} \right) \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \\ = p_i^n - \bar{p}_i^{n+1} + (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} (v_i^n - \bar{v}_i^{n+1}) - \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2} \bar{v}_i^{n+1}, \\ p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} - \left((\rho a)_{i-\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right) \left(v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \\ = p_i^n - \bar{p}_i^{n+1} - (\rho a)_{i-\frac{1}{2}} (v_i^n - \bar{v}_i^{n+1}) + \nu \frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}{2} \bar{v}_i^{n+1}. \end{aligned} \right.$$

En utilisant (E.17) avec $K_{i+\frac{1}{2}} = (\rho a)_{i+\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{2}$ et (E.18) avec $K_{i-\frac{1}{2}} = (\rho a)_{i-\frac{1}{2}} + \nu \frac{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}{2}$, et en comparant avec (E.4), on trouve que $\mathcal{D}_i \leq \mathcal{C}_i$, d'où le résultat (E.1).

Cas du flux \mathcal{L}_2^{AP} En utilisant (3.47), on trouve que :

$$(E.21) \quad \left| \begin{aligned} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left((\rho a)_i^n + \nu \frac{\Delta m_i}{2} \right) v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_i^n + (\rho a)_i^n v_i^n, \\ p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left((\rho a)_i^n + \nu \frac{\Delta m_i}{2} \right) v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_i^n - (\rho a)_i^n v_i^n, \end{aligned} \right.$$

d'où :

$$(E.22) \quad \left| \begin{aligned} p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} + \left((\rho a)_i^n + \nu \frac{\Delta m_i}{2} \right) \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \\ = p_i^n - \bar{p}_i^{n+1} + (\rho a)_i^n (v_i^n - \bar{v}_i^{n+1}) - \nu \frac{\Delta m_i}{2} \bar{v}_i^{n+1}, \\ p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{p}_i^{n+1} - \left((\rho a)_i^n + \nu \frac{\Delta m_i}{2} \right) \left(v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{v}_i^{n+1} \right) \\ = p_i^n - \bar{p}_i^{n+1} - (\rho a)_i^n (v_i^n - \bar{v}_i^{n+1}) + \nu \frac{\Delta m_i}{2} \bar{v}_i^{n+1}. \end{aligned} \right.$$

En utilisant (E.17) avec $K_{i+\frac{1}{2}} = (\rho a)_i + \nu \frac{\Delta m_i}{2}$ et (E.18) avec $K_{i-\frac{1}{2}} = (\rho a)_i + \nu \frac{\Delta m_i}{2}$, et en comparant avec (E.5), on trouve que $\mathcal{D}_i \leq \mathcal{C}_i$, d'où le résultat (E.1). ■

Annexe F

Preuve de la propriété AP du chapitre 4

Cette annexe est dédiée à la démonstration du lemme 4.1, que l'on rappelle :

Lemme F.1. *On considère le système (4.10) et sa formulation volumes finis (4.11) pour une itération n fixée. Dans le cas raide $\nu \gg 1$, on suppose que l'état discret est tel que :*

$$(F.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^n = \mathcal{O}(1), \\ c_i^n = \mathcal{O}(1), \\ v_i^n = \mathcal{O}(1), \\ \delta v_i^n = \mathcal{O}(\nu^{-1}), \end{array} \right.$$

avec (4.25). Alors l'utilisation du flux \mathcal{L}_1^{AP} ou \mathcal{L}_2^{AP} conduit à un schéma asymptotic-preserving pour les variables τ^α et τ^β .

Preuve Il s'agit de prouver que, lorsque $\nu \gg 1$, le développement asymptotique des équations discrètes pour τ^α et τ^β de (4.11) munies du flux \mathcal{L}_1^{AP} ou \mathcal{L}_2^{AP} est une discrétisation consistante avec le développement asymptotique des équations continues pour τ^α et τ^β de (4.10). Comme ces équations ne contiennent pas de terme source, il suffit de vérifier que le développement asymptotique des composantes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ du flux numérique est une discrétisation du développement asymptotique des vitesses v^α et v^β au niveau continu. Un tel développement a été mené à l'ordre 1 au chapitre 2 ; on a notamment vu que les vitesses peuvent s'écrire :

$$(F.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^\alpha = v + (1-c)\delta v, \\ v^\beta = v - c\delta v, \end{array} \right.$$

où, dans le cas raide $\nu \gg 1$, la vitesse du mélange $v = cv^\alpha + (1-c)v^\beta$ vérifie l'équation :

$$(F.3) \quad \partial_t v - \partial_m p = 0,$$

qui régit le mouvement d'ensemble du milieu, et la vitesse relative $\delta v = v^\alpha - v^\beta$ est donnée par la relation :

$$(F.4) \quad \delta v = -\frac{1}{\nu} \frac{c(1-c)}{f(c)} \left(\partial_{m^\alpha} p^\alpha - \partial_{m^\beta} p^\beta \right),$$

qui régit le processus d'interdiffusion. On va maintenant montrer que, lorsque $\nu \gg 1$, le développement asymptotique d'ordre 1 des composantes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ des flux \mathcal{L}_1^{AP} et \mathcal{L}_2^{AP} est une discrétisation de (F.2)-(F.3)-(F.4).

Les expressions des flux \mathcal{L}_1^{AP} et \mathcal{L}_2^{AP} sont obtenues en injectant (4.21) et (4.22) dans (4.20). La différence entre les deux flux intervient lors du choix des coefficients A et B (voir équations (4.26) et (4.28)). Dans ce qui suit, on traite les deux cas simultanément. Pour alléger les équations, on note, pour $s = \alpha, \beta$:

$$(F.5) \quad r_{i+\frac{1}{2}}^s \equiv A_g^s + A_d^s,$$

et :

$$(F.6) \quad f_{i+\frac{1}{2}}^k \equiv \begin{cases} f\left(\frac{c_i^n + c_{i+1}^n}{2}\right) & \text{si } k = 1 \quad (\text{flux } \mathcal{L}_1^{AP}), \\ \frac{\rho_i^n f(c_i^n) + \rho_{i+1}^n f(c_{i+1}^n)}{\rho_i^n + \rho_{i+1}^n} & \text{si } k = 2 \quad (\text{flux } \mathcal{L}_2^{AP}), \end{cases}$$

de sorte que :

$$(F.7) \quad B_g^s + B_d^s = \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}}.$$

On note également :

$$(F.8) \quad y_{i+\frac{1}{2}}^s \equiv y_g^s + y_d^s,$$

où les quantités y_g^s et y_d^s sont données par (voir équations (4.22)) :

$$(F.9) \quad \begin{cases} y_g^s = (p^s)_i^n + A_g^s (v^s)_i^n, \\ y_d^s = -(p^s)_{i+1}^n + A_d^s (v^s)_{i+1}^n. \end{cases}$$

Avec ces notations, les composantes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ du flux numérique s'écrivent :

$$(F.10) \quad \begin{cases} (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^\beta y_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \left(y_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + y_{i+\frac{1}{2}}^\beta \right)}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha r_{i+\frac{1}{2}}^\beta + \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \left(r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + r_{i+\frac{1}{2}}^\beta \right)}, \\ (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha y_{i+\frac{1}{2}}^\beta + \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \left(y_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + y_{i+\frac{1}{2}}^\beta \right)}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha r_{i+\frac{1}{2}}^\beta + \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \left(r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + r_{i+\frac{1}{2}}^\beta \right)}, \end{cases}$$

ou encore, en divisant numérateurs et dénominateurs par le produit $r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha r_{i+\frac{1}{2}}^\beta \neq 0$:

$$(F.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{y_{i+\frac{1}{2}}^\alpha}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha} + \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + y_{i+\frac{1}{2}}^\beta}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha r_{i+\frac{1}{2}}^\beta}}{1 + \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + r_{i+\frac{1}{2}}^\beta}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha r_{i+\frac{1}{2}}^\beta}}, \\ (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{y_{i+\frac{1}{2}}^\beta}{r_{i+\frac{1}{2}}^\beta} + \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + y_{i+\frac{1}{2}}^\beta}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha r_{i+\frac{1}{2}}^\beta}}{1 + \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + r_{i+\frac{1}{2}}^\beta}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha r_{i+\frac{1}{2}}^\beta}}. \end{array} \right.$$

En introduisant :

$$(F.12) \quad \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} \equiv \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + r_{i+\frac{1}{2}}^\beta},$$

qui est une quantité analogue à la fraction massique du fluide α pondérée par les vitesses du son de chaque fluide, on peut définir le flux de vitesse moyenne :

$$(F.13) \quad \tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \equiv \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(1 - \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}\right) (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}},$$

et le flux de vitesse relative :

$$(F.14) \quad \widetilde{\delta v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \equiv (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Les composantes $(v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $(v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ du flux peuvent alors s'écrire sous la forme simple :

$$(F.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(1 - \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}\right) \widetilde{\delta v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\ (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} \widetilde{\delta v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

similaire à (F.2). On se concentre maintenant sur l'étude des termes $\tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\widetilde{\delta v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$.

Terme $\tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ En injectant (F.11) dans (F.13), on trouve que :

$$(F.16) \quad \tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + y_{i+\frac{1}{2}}^\beta}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + r_{i+\frac{1}{2}}^\beta},$$

qui peut encore s'écrire, compte tenu de (F.9) :

$$(F.17) \quad \tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^n - K_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta m_{i+\frac{1}{2}}},$$

où l'on a noté :

$$(F.18) \quad \tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^n \equiv \frac{A_g^\alpha (v^\alpha)_i^n + A_g^\beta (v^\beta)_i^n + A_d^\alpha (v^\alpha)_{i+1}^n + A_d^\beta (v^\beta)_{i+1}^n}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + r_{i+\frac{1}{2}}^\beta},$$

et :

$$(F.19) \quad K_{i+\frac{1}{2}} \equiv \frac{2\Delta m_{i+\frac{1}{2}}}{\left(r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + r_{i+\frac{1}{2}}^\beta\right) \Delta t}.$$

$\tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^n$ est une quantité analogue à la vitesse moyenne du mélange à l'instant t^n pondérée par les vitesses du son de chaque fluide, et $K_{i+\frac{1}{2}}$ est le nombre de Courant moyen au niveau de l'interface $i + \frac{1}{2}$. La relation (F.17) est bien une discrétisation de (F.3), indépendamment de la valeur de ν .

Terme $\widetilde{\delta v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ En injectant (F.11) dans (F.14), on trouve que :

$$(F.20) \quad \widetilde{\delta v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{y_{i+\frac{1}{2}}^\alpha}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha} - \frac{y_{i+\frac{1}{2}}^\beta}{r_{i+\frac{1}{2}}^\beta}}{1 + \nu f_{i+\frac{1}{2}}^k \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha + r_{i+\frac{1}{2}}^\beta}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha r_{i+\frac{1}{2}}^\beta}}.$$

Dans le cas raide $\nu \gg 1$, sous l'hypothèse (F.1), on a $(p^s)_i^n = \mathcal{O}(1)$ et $(v^s)_i^n = v_i^n + \mathcal{O}(\nu^{-1})$ pour $s = \alpha, \beta$ et $\forall i$. Par conséquent, compte tenu de (F.9) :

$$(F.21) \quad \frac{y_{i+\frac{1}{2}}^\alpha}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha} - \frac{y_{i+\frac{1}{2}}^\beta}{r_{i+\frac{1}{2}}^\beta} = \frac{(p^\alpha)_i^n - (p^\alpha)_{i+1}^n}{r_{i+\frac{1}{2}}^\alpha} - \frac{(p^\beta)_i^n - (p^\beta)_{i+1}^n}{r_{i+\frac{1}{2}}^\beta} + \mathcal{O}(\nu^{-1}).$$

On en déduit que le développement asymptotique de $\widetilde{\delta v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ à l'ordre 1 est :

$$(F.22) \quad \widetilde{\delta v}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\nu} \frac{\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} \left(1 - \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}\right)}{f_{i+\frac{1}{2}}^k} \left(\frac{(p^\alpha)_{i+1}^n - (p^\alpha)_i^n}{\Delta m_{i+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{(p^\beta)_{i+1}^n - (p^\beta)_i^n}{\Delta m_{i+\frac{1}{2}} \left(1 - \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}\right)} \right).$$

Il s'agit bien d'une discrétisation de (F.4), ce qui achève la preuve. ■

Annexe G

Preuve de l'inégalité d'entropie discrète du chapitre 4

Cette annexe est dédiée à la démonstration de la proposition 4.4, que l'on rappelle :

Proposition G.1. *Le schéma (4.46) muni du flux \mathcal{L}_1^{AP} ou \mathcal{L}_2^{AP} vérifie les inégalités d'entropie pour chaque fluide :*

$$(G.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{(T^\alpha)}_i^{n+1} \left(\overline{(S^\alpha)}_i^{n+1} - (S^\alpha)_i^n \right) \geq -\mathcal{A}_i^\alpha - \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i^\alpha - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \mathcal{C}_i^\alpha, \\ \overline{(T^\beta)}_i^{n+1} \left(\overline{(S^\beta)}_i^{n+1} - (S^\beta)_i^n \right) \geq -\mathcal{A}_i^\beta + \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i^\beta - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \mathcal{C}_i^\beta, \end{array} \right.$$

avec $\mathcal{A}_i^s \leq 0$ et $\mathcal{C}_i^s \geq 0$ pour $s = \alpha, \beta$. Plus précisément, on a noté :

$$(G.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_i^s \equiv & \frac{1}{2} \overline{(T^s)}_i^{n+1} \left(\overline{(\tau^s)}_i^{n+1} - (\tau^s)_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S^s}{\partial (\tau^s)^2} \Big|_{v^s, e^s} (U^s) \\ & + \frac{1}{2} \overline{(T^s)}_i^{n+1} \left(\overline{(v^s)}_i^{n+1} - (v^s)_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S^s}{\partial (v^s)^2} \Big|_{\tau^s, e^s} (U^s) \\ & + \frac{1}{2} \overline{(T^s)}_i^{n+1} \left(\overline{(e^s)}_i^{n+1} - (e^s)_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S^s}{\partial (e^s)^2} \Big|_{\tau^s, v^s} (U^s), \end{aligned}$$

pour $s = \alpha, \beta$, où S^s est telle que $T^s dS^s = de^s + p^s d\tau^s$ et $U^s = (\tau^s, v^s, e^s)^t$ un état situé entre $((\tau^s)_i^n, (v^s)_i^n, (e^s)_i^n)^t$ et $(\overline{(\tau^s)}_i^{n+1}, \overline{(v^s)}_i^{n+1}, \overline{(e^s)}_i^{n+1})^t$, et :

$$(G.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_i^\alpha \equiv \left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) v \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{f(c)}{c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}} \cdot \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1}, \\ \mathcal{B}_i^\beta \equiv \left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) v \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{f(c)}{1-c} (v^\alpha - v^\beta) \right)_i^{n+\frac{1}{2}} \cdot \overline{(v^\beta)}_i^{n+1}. \end{array} \right.$$

Avec le flux \mathcal{L}_1^{AP} , \mathcal{C}_i^s est donné par :

$$(G.4) \quad \mathcal{C}_i^s = \frac{\left(N_{i-\frac{1}{2}}^s \right)^2}{2(\rho^s a^s)_{i-\frac{1}{2}} + \nu f(c_{i-\frac{1}{2}}) \Delta m_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{\left(N_{i+\frac{1}{2}}^s \right)^2}{2(\rho^s a^s)_{i+\frac{1}{2}} + \nu f(c_{i+\frac{1}{2}}) \Delta m_{i+\frac{1}{2}}},$$

où :

$$\begin{aligned}
 N_{i+\frac{1}{2}}^\alpha &= (p^\alpha)_i^n - \overline{(p^\alpha)}_i^{n+1} + (\rho^\alpha a^\alpha)_{i+\frac{1}{2}} \left((v^\alpha)_i^n - \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} \right) \\
 &\quad - \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \left(\overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
 N_{i-\frac{1}{2}}^\alpha &= (p^\alpha)_i^n - \overline{(p^\alpha)}_i^{n+1} - (\rho^\alpha a^\alpha)_{i-\frac{1}{2}} \left((v^\alpha)_i^n - \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} \right) \\
 &\quad + \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} \left(\overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} - (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
 N_{i+\frac{1}{2}}^\beta &= (p^\beta)_i^n - \overline{(p^\beta)}_i^{n+1} + (\rho^\beta a^\beta)_{i+\frac{1}{2}} \left((v^\beta)_i^n - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right) \\
 &\quad + \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right), \\
 N_{i-\frac{1}{2}}^\beta &= (p^\beta)_i^n - \overline{(p^\beta)}_i^{n+1} - (\rho^\beta a^\beta)_{i-\frac{1}{2}} \left((v^\beta)_i^n - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right) \\
 &\quad - \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} \left((v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right).
 \end{aligned}
 \tag{G.5}$$

Avec le flux \mathcal{L}_2^{AP} , C_i^s est donné par :

$$C_i^s = \frac{\left(N_{i-\frac{1}{2}}^s\right)^2 + \left(N_{i+\frac{1}{2}}^s\right)^2}{2(\rho^s a^s)_i^n + \nu f(c_i^n) \Delta m_i^n},
 \tag{G.6}$$

où :

$$\begin{aligned}
 N_{i+\frac{1}{2}}^\alpha &= (p^\alpha)_i^n - \overline{(p^\alpha)}_i^{n+1} + (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n \left((v^\alpha)_i^n - \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} \right) \\
 &\quad - \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \left(\overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} - (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
 N_{i-\frac{1}{2}}^\alpha &= (p^\alpha)_i^n - \overline{(p^\alpha)}_i^{n+1} - (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n \left((v^\alpha)_i^n - \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} \right) \\
 &\quad + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \left(\overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} - (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
 N_{i+\frac{1}{2}}^\beta &= (p^\beta)_i^n - \overline{(p^\beta)}_i^{n+1} + (\rho^\beta a^\beta)_i^n \left((v^\beta)_i^n - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right) \\
 &\quad + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right), \\
 N_{i-\frac{1}{2}}^\beta &= (p^\beta)_i^n - \overline{(p^\beta)}_i^{n+1} - (\rho^\beta a^\beta)_i^n \left((v^\beta)_i^n - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right) \\
 &\quad - \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \left((v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right).
 \end{aligned}
 \tag{G.7}$$

Preuve L'idée de la preuve est similaire à celle utilisée dans l'annexe E. Pour chaque fluide

$s = \alpha, \beta$, on paramètre les fonctions avec θ^s ($0 \leq \theta^s \leq 1$) entre les temps t^n et t^{n+1} :

$$(G.8) \quad \begin{cases} \tau_i^s(\theta^s) = (\tau^s)_i^n + \theta^s \left(\overline{(\tau^s)_i^{n+1}} - (\tau^s)_i^n \right), \\ v_i^s(\theta^s) = (v^s)_i^n + \theta^s \left(\overline{(v^s)_i^{n+1}} - (v^s)_i^n \right), \\ e_i^s(\theta^s) = (e^s)_i^n + \theta^s \left(\overline{(e^s)_i^{n+1}} - (e^s)_i^n \right), \end{cases}$$

et l'on pose $g_i^s(\theta^s) = S^s(\tau_i^s(\theta^s), \epsilon_i^s(\theta^s))$. On a donc $g_i^s(0) = (S^s)_i^n$ et $g_i^s(1) = \overline{(S^s)_i^{n+1}}$. Un développement de Taylor de g^s au second ordre est :

$$(G.9) \quad g_i^s(0) = g_i^s(1) - (g_i^s)'(1) + \frac{1}{2} (g_i^s)''(\theta_i^s), \quad 0 \leq \theta_i^s \leq 1,$$

avec :

$$(G.10) \quad \begin{aligned} (g_i^s)'(1) &= \frac{dS^s}{d\theta^s}(\tau_i^s(1), v_i^s(1), e_i^s(1)), \\ &= \left(\overline{(\tau^s)_i^{n+1}} - (\tau^s)_i^n \right) \frac{\partial S^s}{\partial \tau^s} \Big|_{v^s, e^s}(\tau_i^s(1), v_i^s(1), e_i^s(1)) \\ &+ \left(\overline{(v^s)_i^{n+1}} - (v^s)_i^n \right) \frac{\partial S^s}{\partial v^s} \Big|_{\tau^s, e^s}(\tau_i^s(1), v_i^s(1), e_i^s(1)) \\ &+ \left(\overline{(e^s)_i^{n+1}} - (e^s)_i^n \right) \frac{\partial S^s}{\partial e^s} \Big|_{\tau^s, v^s}(\tau_i^s(1), v_i^s(1), e_i^s(1)), \end{aligned}$$

et :

$$(G.11) \quad \begin{aligned} (g_i^s)''(\theta_i^s) &= \frac{d^2 S^s}{d(\theta^s)^2}(\tau_i^s(\theta_i^s), v_i^s(\theta_i^s), e_i^s(\theta_i^s)), \\ &= \left(\overline{(\tau^s)_i^{n+1}} - (\tau^s)_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S^s}{\partial (\tau^s)^2} \Big|_{v^s, e^s}(\tau_i^s(\theta_i^s), v_i^s(\theta_i^s), e_i^s(\theta_i^s)) \\ &+ \left(\overline{(v^s)_i^{n+1}} - (v^s)_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S^s}{\partial (v^s)^2} \Big|_{\tau^s, e^s}(\tau_i^s(\theta_i^s), v_i^s(\theta_i^s), e_i^s(\theta_i^s)) \\ &+ \left(\overline{(e^s)_i^{n+1}} - (e^s)_i^n \right)^2 \frac{\partial^2 S^s}{\partial (e^s)^2} \Big|_{\tau^s, v^s}(\tau_i^s(\theta_i^s), v_i^s(\theta_i^s), e_i^s(\theta_i^s)), \\ &= \frac{2}{(T^s)_i^{n+1}} \mathcal{A}_i^s. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant (G.9) et (G.11), on a :

$$(G.12) \quad \begin{aligned} \overline{(T^s)_i^{n+1}} (g_i^s)'(1) &= \overline{(T^s)_i^{n+1}} \left(\overline{(S^s)_i^{n+1}} - (S^s)_i^n \right) + \frac{1}{2} \overline{(T^s)_i^{n+1}} (g_i^s)''(\theta_i^s), \\ &= \overline{(T^s)_i^{n+1}} \left(\overline{(S^s)_i^{n+1}} - (S^s)_i^n \right) + \mathcal{A}_i^s. \end{aligned}$$

Or, de (G.10) et $T^s dS^s = de^s - v^s dv^s + p^s d\tau^s$, on déduit :

$$(G.13) \quad \overline{(T^s)_i^{n+1}} (g_i^s)'(1) = \left(\overline{(e^s)_i^{n+1}} - (e^s)_i^n \right) - \overline{(v^s)_i^{n+1}} \left(\overline{(v^s)_i^{n+1}} - (v^s)_i^n \right) + \overline{(p^s)_i^{n+1}} \left(\overline{(\tau^s)_i^{n+1}} - (\tau^s)_i^n \right).$$

En utilisant les équations discrètes (4.46), on trouve alors :

$$(G.14) \quad \begin{cases} \overline{(T^\alpha)_i^{n+1}} (g_i^\alpha)'(1) = -\frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \mathcal{D}_i^\alpha - \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i^\alpha, \\ \overline{(T^\beta)_i^{n+1}} (g_i^\beta)'(1) = -\frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \mathcal{D}_i^\beta + \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i^\beta, \end{cases}$$

où l'on a noté :

(G.15)

$$\mathcal{D}_i^s \equiv (p^s v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^s v^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \left((p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (p^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \overline{(p^s)}_i^{n+1} \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

En combinant (G.12) et (G.14), on obtient les égalités :

$$(G.16) \quad \begin{cases} \overline{(T^\alpha)}_i^{n+1} \left(\overline{(S^\alpha)}_i^{n+1} - (S^\alpha)_i^n \right) = -\mathcal{A}_i^\alpha - \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i^\alpha - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\alpha} \cdot \mathcal{D}_i^\alpha, \\ \overline{(T^\beta)}_i^{n+1} \left(\overline{(S^\beta)}_i^{n+1} - (S^\beta)_i^n \right) = -\mathcal{A}_i^\beta + \nu \Delta t \cdot \mathcal{B}_i^\beta - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^\beta} \cdot \mathcal{D}_i^\beta. \end{cases}$$

Il reste donc à trouver un majorant de \mathcal{D}_i^α et \mathcal{D}_i^β . Comme $(p^s v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ pour les flux \mathcal{L}_1^{AP} et \mathcal{L}_2^{AP} , on peut factoriser \mathcal{D}_i^s :

(G.17)

$$\mathcal{D}_i^s = \left((p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} \right) \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right) - \left((p^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} \right) \left((v^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right).$$

L'astuce consiste alors à remarquer que $\left((p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} \right) \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right)$ peut être vu comme un double produit, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

(G.18)

$$\begin{aligned} \left((p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} \right) \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right) &= \frac{\left[(p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} + K_{i+\frac{1}{2}}^s \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right) \right]^2}{2K_{i+\frac{1}{2}}^s} \\ &\quad - \frac{\left((p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} \right)^2 + \left(K_{i+\frac{1}{2}}^s \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right) \right)^2}{2K_{i+\frac{1}{2}}^s}, \end{aligned}$$

pour tout coefficient $K_{i+\frac{1}{2}}^s > 0$, d'où la majoration :

(G.19)

$$\left((p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} \right) \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right) \leq \frac{\left[(p^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} + K_{i+\frac{1}{2}}^s \left((v^s)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right) \right]^2}{2K_{i+\frac{1}{2}}^s}.$$

De manière similaire, on trouve que :

(G.20)

$$-\left((p^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} \right) \left((v^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right) \leq \frac{\left[(p^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^s)}_i^{n+1} - K_{i-\frac{1}{2}}^s \left((v^s)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^s)}_i^{n+1} \right) \right]^2}{2K_{i-\frac{1}{2}}^s},$$

pour tout coefficient $K_{i-\frac{1}{2}}^s > 0$. On distingue maintenant deux cas.

Cas du flux \mathcal{L}_1^{AP} En utilisant (4.20) avec (4.26), on trouve que :

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left((\rho^\alpha a^\alpha)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \right) (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\
& = (p^\alpha)_i^n + (\rho^\alpha a^\alpha)_{i+\frac{1}{2}} (v^\alpha)_i^n + \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\
& (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left((\rho^\alpha a^\alpha)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} \right) (v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\
& = (p^\alpha)_i^n - (\rho^\alpha a^\alpha)_{i-\frac{1}{2}} (v^\alpha)_i^n - \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\
& (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left((\rho^\beta a^\beta)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \right) (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\
& = (p^\beta)_i^n + (\rho^\beta a^\beta)_{i+\frac{1}{2}} (v^\beta)_i^n - \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\
& (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left((\rho^\beta a^\beta)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} \right) (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\
& = (p^\beta)_i^n - (\rho^\beta a^\beta)_{i-\frac{1}{2}} (v^\beta)_i^n + \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} (v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}},
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\tag{G.21}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^\alpha)_i^{n+1}} + \left((\rho^\alpha a^\alpha)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \right) \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\alpha)_i^{n+1}} \right) = N_{i+\frac{1}{2}}^\alpha, \\
& (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^\alpha)_i^{n+1}} - \left((\rho^\alpha a^\alpha)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} \right) \left((v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\alpha)_i^{n+1}} \right) = N_{i-\frac{1}{2}}^\alpha, \\
& (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^\beta)_i^{n+1}} + \left((\rho^\beta a^\beta)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}} \right) \left((v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)_i^{n+1}} \right) = N_{i+\frac{1}{2}}^\beta, \\
& (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^\beta)_i^{n+1}} - \left((\rho^\beta a^\beta)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}} \right) \left((v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)_i^{n+1}} \right) = N_{i-\frac{1}{2}}^\beta,
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\tag{G.22}$$

où $N_{i+\frac{1}{2}}^\alpha$, $N_{i-\frac{1}{2}}^\alpha$, $N_{i+\frac{1}{2}}^\beta$ et $N_{i-\frac{1}{2}}^\beta$ sont donnés par (G.5). En utilisant (G.19) avec $K_{i+\frac{1}{2}}^\alpha =$

$(\rho^\alpha a^\alpha)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}}$ et $K_{i+\frac{1}{2}}^\beta = (\rho^\beta a^\beta)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i+\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i+\frac{1}{2}}$, et (G.20) avec

$K_{i-\frac{1}{2}}^\alpha = (\rho^\alpha a^\alpha)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}}$ et $K_{i-\frac{1}{2}}^\beta = (\rho^\beta a^\beta)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\nu f(c_{i-\frac{1}{2}})}{2} \Delta m_{i-\frac{1}{2}}$, on

trouve que $\mathcal{D}_i^s \leq \mathcal{C}_i^s$ pour $s = \alpha, \beta$, d'où le résultat (G.1).

Cas du flux \mathcal{L}_2^{AP} En utilisant (4.20) avec (4.28), on trouve que :

$$(G.23) \quad \left| \begin{aligned} & (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left((\rho^\alpha a^\alpha)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \right) (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ & = (p^\alpha)_i^n + (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n (v^\alpha)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\ & (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left((\rho^\alpha a^\alpha)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \right) (v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ & = (p^\alpha)_i^n - (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n (v^\alpha)_i^n - \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\ & (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left((\rho^\beta a^\beta)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \right) (v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ & = (p^\beta)_i^n + (\rho^\beta a^\beta)_i^n (v^\beta)_i^n - \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n (v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \\ & (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left((\rho^\beta a^\beta)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \right) (v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \\ & = (p^\beta)_i^n - (\rho^\beta a^\beta)_i^n (v^\beta)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n (v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

d'où :

$$(G.24) \quad \left| \begin{aligned} & (p^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^\alpha)}_i^{n+1} + \left((\rho^\alpha a^\alpha)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \right) \left((v^\alpha)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} \right) = N_{i+\frac{1}{2}}^\alpha, \\ & (p^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^\alpha)}_i^{n+1} - \left((\rho^\alpha a^\alpha)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \right) \left((v^\alpha)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\alpha)}_i^{n+1} \right) = N_{i-\frac{1}{2}}^\alpha, \\ & (p^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^\beta)}_i^{n+1} + \left((\rho^\beta a^\beta)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \right) \left((v^\beta)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right) = N_{i+\frac{1}{2}}^\beta, \\ & (p^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(p^\beta)}_i^{n+1} - \left((\rho^\beta a^\beta)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n \right) \left((v^\beta)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{(v^\beta)}_i^{n+1} \right) = N_{i-\frac{1}{2}}^\beta, \end{aligned} \right.$$

où $N_{i+\frac{1}{2}}^\alpha$, $N_{i-\frac{1}{2}}^\alpha$, $N_{i+\frac{1}{2}}^\beta$ et $N_{i-\frac{1}{2}}^\beta$ sont donnés par (G.7). En utilisant (G.19) avec $K_{i+\frac{1}{2}}^\alpha = (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n$ et $K_{i+\frac{1}{2}}^\beta = (\rho^\beta a^\beta)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n$, et (G.20) avec $K_{i-\frac{1}{2}}^\alpha = (\rho^\alpha a^\alpha)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n$ et $K_{i-\frac{1}{2}}^\beta = (\rho^\beta a^\beta)_i^n + \frac{\nu f(c_i^n)}{2} \Delta m_i^n$, on trouve que $\mathcal{D}_i^s \leq \mathcal{C}_i^s$ pour $s = \alpha, \beta$, d'où le résultat (G.1). ■

Table des figures

1.1	Mélange de fluides miscibles	16
1.2	Collision entre deux particules neutres	20
2.1	Modèle SC barotrope : diffusion de la fraction massique	70
3.1	Euler friction 1D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 0$	95
3.2	Euler friction 1D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 1$	96
3.3	Euler friction 1D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10$	97
3.4	Euler friction 1D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10^2$	98
3.5	Euler friction 1D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10^3$	99
3.6	Euler friction 1D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10^4$	100
3.7	Euler friction 1D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10^5$	101
3.8	Euler friction 1D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10^6$	102
3.9	Euler friction 1D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10^7$	103
3.10	Euler friction 1D : comparaison des schémas en temps long.	105
3.11	Euler friction 1D : comparaison des schémas en temps long, zoom.	105
3.12	Euler friction 2D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 0$	107
3.13	Euler friction 2D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10$	108
3.14	Euler friction 2D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10^2$	108
3.15	Euler friction 2D : tube à choc à $t = 0.14$, avec $\nu = 10^7$	108
4.1	Modèle SC barotrope : diffusion à vitesse finie d'une interface	123
4.2	Modèle SC complet : tube à choc bifluide avec $\gamma^\alpha = \gamma^\beta$ et $\nu = 10^5$	131
4.3	Modèle SC complet : tube à choc bifluide avec $\gamma^\alpha = \gamma^\beta$ et $\nu = 10^2$	132
4.4	Modèle SC complet : tube à choc bifluide avec $\gamma^\alpha \neq \gamma^\beta$ et $\nu = 10^5$	133
4.5	Modèle SC complet : tube à choc bifluide avec $\gamma^\alpha \neq \gamma^\beta$ et $\nu = 10^2$	134
4.6	Modèle SC complet : instabilité de Kelvin-Helmholtz avec $\nu = 10^{10}$	139
4.7	Modèle SC complet : instabilité de Kelvin-Helmholtz avec $\nu = 10^3$	140
4.8	Modèle SC complet : instabilité de Kelvin-Helmholtz avec $\nu = 10^2$	141
4.9	Modèle SC complet : étude de convergence du flux \mathcal{L}_2^{AP} sur l'instabilité KH	142
4.10	Modèle SC complet : étude de convergence du flux \mathcal{L}_2 sur l'instabilité KH	143
4.11	Modèle SC complet : instabilité de Richtmyer-Meshkov avec $\nu = 10^4$	145
4.12	Modèle SC complet : instabilité de Richtmyer-Meshkov avec $\nu = 10^3$	146
4.13	Modèle SC complet : instabilité de Richtmyer-Meshkov avec $\nu = 10^2$	147
4.14	Modèle SC complet : instabilité de Richtmyer-Meshkov avec $\nu = 10^1$	148
5.1	Exact solution and sixth order numerical solutions of (5.42) using the Cauchy-Kovalewski procedure based on a temporal Taylor series expansion and the new local space-time DG scheme for $\nu = 3$ (top left), $\nu = 10$, (top right), $\nu = 100$ (bottom left) and $\nu = 1000$ (bottom right).	164

5.2	Exact and numerical solutions obtained on 100 cells using ADER-FV schemes of second to fifth order of accuracy in space and time for the model system with linear flux and stiff linear source ($\epsilon = 10^{-4}$) at time $t = 50$	171
5.3	Exact and numerical solutions obtained on 100 cells using ADER-FV schemes of second, third and fifth order of accuracy in space and time for the model system with linear flux and stiff nonlinear source ($\epsilon = 10^{-3}$) at time $t = 10$	172
5.4	Exact and numerical solutions obtained on 100 cells using ADER-FV schemes of second, third and fifth order of accuracy in space and time for the model system with nonlinear flux and stiff linear source ($\epsilon = 10^{-3}$) at time $t = 10$	173
5.5	Reference solution and numerical solutions at time $t = 2$ obtained on 100 cells using ADER-FV schemes of second, third and fourth order of accuracy in space and time for the Euler system with stiff friction. a) Isentropic Euler system (left) and b) Full Euler system with ideal gas EOS (right).	175
5.6	Exact and numerical solutions for shock tube problems number one (left) and two (right), obtained with the relaxation system of Jin and Xin on 100 cells.	177
5.7	Exact and numerical solutions for shock tube problems number three (left) and four (right), obtained with the relaxation system of Jin and Xin on 100 cells.	177
5.8	Exact and numerical solutions for shock tube problems number five (left) and six (right), obtained with the relaxation system of Jin and Xin on 200 cells.	178
5.9	Reference solution and numerical solutions at $t = 1.8$ for the shock-density interaction test case obtained with the relaxation system of Jin and Xin on 400 cells using ADER-FV schemes of second, third and fourth order of accuracy.	179
5.10	Exact solution and numerical solutions for the model problem of LeVeque and Yee at $t = 0.3$ using 100 cells for the non-stiff case (top row) and the stiff case (bottom row). $\nu = 1$ (top left), $\nu = 10$, (top right), $\nu = 100$ (bottom left), $\nu = 1000$, (bottom right).	180
A.1	Fluides non miscibles et zones de mélange artificiel	190
D.1	Schéma Lagrange-projection : grilles eulérienne et lagrangienne.	228
D.2	Construction du solveur acoustique à 1 pente moyenne.	233
D.3	Construction du solveur acoustique à 2 pentes.	234
D.4	Schéma de principe de la projection d'ordre 1.	237
D.5	Schéma de principe de la projection d'ordre 3.	238
D.6	Comparaison des flux de projection sur advection 1D d'un profil régulier.	243
D.7	Précision des flux de projection sur advection d'un profil régulier.	244
D.8	Comparaison des flux de projection sur advection 1D d'un profil non régulier.	245
D.9	Conditions initiales pour advection linéaire 2D.	246
D.10	Comparaison des flux de projection sur advection 2D d'un cercle.	246
D.11	Comparaison des flux de projection sur advection 2D d'un carré.	247
D.12	Tube à choc pour équations d'Euler, flux \mathcal{L}_1 et \mathcal{P}_1	248
D.13	Tube à choc pour équations d'Euler, flux \mathcal{L}_2 et \mathcal{P}_1	248
D.14	Tube à choc pour équations d'Euler, flux \mathcal{L}_2 et \mathcal{P}_3^{TVD}	249
D.15	Tube à choc pour équations d'Euler, flux \mathcal{L}_2 et \mathcal{P}_3^{MP}	249

Bibliographie

- [ABCGP03] S. Aniel-Buchheit, A. Chanoine, O. Grégoire, and F. Pinson. Etablissement formel d'un modèle diphasique bifluide, partie i : formulation locale. Technical Report SFME/LETR/RT/03-026/A, Nept_2003_L2.2/17, Commissariat à l'Energie Atomique, 2003.
- [AS03] R. Abgrall and R. Saurel. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, 186(2) :361–396, 2003.
- [BD06] C. Buet and B. Després. Asymptotic preserving and positive schemes for radiation hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 215(2) :717–740, 2006.
- [BGL91] C. Bardos, F. Golse, and C.D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. i. formal derivations. *Journal of Statistical Physics*, 63(1/2) :323–343, 1991.
- [BJ02] W. Bao and S. Jin. Error estimates on the random projection methods for hyperbolic conservation laws with stiff reaction terms. *Applied Numerical Mathematics*, 43 :315–333, 2002.
- [BN86] M.R. Baer and J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition in reactive granular materials. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(6) :861–889, 1986.
- [BOP07] F. Bouchut, H. Ounaissa, and B. Perthame. Upwinding of the source term at interfaces for Euler equations with high friction. *Computers and Mathematics with Applications*, 53(3-4) :361–375, 2007.
- [Bou04] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Birkhauser Verlag, 2004. ISBN : 3-7643-6665-6.
- [BPV01] R. Botchorishvili, B. Perthame, and A. Vasseur. Equilibrium schemes for scalar conservation laws with stiff sources. *Mathematics of Computation*, 72(241) :131–157, 2001.
- [BS95] E. Burman and L. Sainsaulieu. Numerical analysis of two operator splitting methods for an hyperbolic system of conservation laws with stiff relaxation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128 :291–314, 1995.
- [BV94] A. Bermudez and M.E. Vazquez. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers and Fluids*, 23(8) :1049–1071, 1994.
- [Bér96] F. Béreux. Zero-relaxation limit versus operator splitting for two-phase fluid flow computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133 :93–124, 1996.
- [Cat48] C. Cattaneo. Sulla conduzione del calore. *Atti sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 1948.
- [CC39] S. Chapman and T.G. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases, third edition*. Cambridge Mathematical Library, 1939. ISBN : 0-521-40844-x.

- [Cer75] C. Cercignani. *The Boltzmann equation and its applications*. Springer-Verlag, 1975. ISBN : 0-387-96637-4.
- [CGHS02] F. Coquel, T. Gallouet, J.M. Hérard, and N. Seguin. Closure laws for a two-fluid two-pressure model. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, I(334) :927–932, 2002.
- [Che06] F.F. Chen. *Introduction to plasma physics and controlled fusion, second edition*. Springer, 2006. ISBN : 0-306-41332-9.
- [Cho98] A.R. Choudhuri. *The physics of fluids and plasmas, an introduction for astrophysicists*. Cambridge University Press, 1998. ISBN : 0-521-55543-4.
- [CJR97] R.E. Caffisch, S. Jin, and G. Russo. Uniformly accurate schemes for hyperbolic systems with relaxation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34 :246–281, 1997.
- [CLL94] G.Q. Chen, C.D. Levermore, and T.P. Liu. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 47(6) :787–830, 1994.
- [Cou01] P.H. Cournède. *Un schéma bilagrangé plus projection pour la simulation bifluide des instabilités de mélange*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2001.
- [Cra92] C.W. Cranfill. A new multifluid turbulent-mix model. Technical Report NM, LA-UR-92-2484, Los Alamos National Laboratory, 1992.
- [CW84] P. Colella and P.R. Woodward. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations. *Journal of Computational Physics*, 54(1) :174–201, 1984.
- [DB82] J.M. Delhayé and J.A. Bouré. *General equations and two-phase flow modeling, in Handbook of Multiphase Systems, volume 1*. G. Hestroni - Hemisphere, 1982.
- [Des97] B. Després. Inégalité entropique pour un solveur conservatif du système de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 324(I) :1301–1306, 1997.
- [Des01] B. Després. Lagrangian systems of conservation laws. *Numerische Mathematik*, 89 :99–134, 2001.
- [DJMT03] B. Després, S. Jaouen, C. Mazeran, and T. Takashi. Theoretical and numerical study of a multiphase hydrodynamic model. In *Proceedings of the CEMRACS*, 2003.
- [DK07] M. Dumbser and M. Käser. Arbitrary high order non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for linear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 221 :693–723, 2007.
- [DKTT07] M. Dumbser, M. Käser, V.A. Titarev, and E.F. Toro. Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 226 :204–243, 2007.
- [DLD96] P. Degond and B. Lucquin-Desreux. The asymptotics of collision operators for two species of particles of disparate masses. *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, 6(3) :405–436, 1996.
- [DLR03] B. Després, F. Lagoutière, and D. Ramos. Stability of a thermodynamically coherent multi-phase model. *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, 13(10) :1463–1487, 2003.
- [DM06] M. Dumbser and C.D. Munz. Building blocks for arbitrary high order discontinuous Galerkin schemes. *Journal of Scientific Computing*, 27 :215–230, 2006.

- [DMP98] A. Decoster, P.A. Markowich, and B. Perthame. *Modeling of collisions*. P.A. Raviart, 1998. ISBN : 2-84299-055-2.
- [DP99] D.A. Drew and S.L. Passman. *Theory of multicomponent fluids, Applied Mathematical Sciences 135*. Springer, 1999. ISBN : 0-387-98380-5.
- [DT04] V. Daru and C. Tenaud. High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. *Journal of Computational Physics*, 193(2) :563–594, 2004.
- [Dum05] M. Dumbser. *Arbitrary High Order Schemes for the Solution of Hyperbolic Conservation Laws in Complex Domains*. Shaker Verlag, Aachen, 2005.
- [Ein88] B. Einfeldt. On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25 :294–318, 1988.
- [EMRS91] B. Einfeldt, C. D. Munz, P. L. Roe, and B. Sjögreen. On godunov-type methods near low densities. *Journal of Computational Physics*, 92 :273–295, 1991.
- [Ena06] C. Enaux. Revue et comparaison de modèles bifluïdes bivitesse d’interpénétration. Technical Report ISSN 0429-3460, Rapport CEA R-6108, 2006.
- [EO81] B. Engquist and S. Osher. One sided difference approximations for nonlinear conservation laws. *Mathematics of Computation*, 36 :321–351, 1981.
- [Erd56] A. Erdelyi. *Asymptotic expansions*. Dover publications, 1956. ISBN : 0-486-60318-0.
- [FM72] A. Fisher and D.P. Marsden. The einstein evolution equations as a first order quasi-linear symmetric hyperbolic system. *Comm. Math. Phy.* 28, 1972.
- [Fri74] K.O. Friedrichs. On the laws of relativistic electro-magneto-fluid dynamics. *Comm. Pure Appl. Math.* 27, p.749-808, 1974.
- [GJ01] J. Glimm and H. Jin. An asymptotic analysis of two-phase fluid mixing. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 32(3) :213–236, 2001.
- [GL96] J.M. Greenberg and A.Y. LeRoux. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(1) :1–16, 1996.
- [GMP84] J. Glimm, G. Marshall, and B. Plohr. A generalized Riemann problem for quasi-one-dimensional gas flows. *Advances in Applied Mathematics*, 5 :1–30, 1984.
- [God59] S.K. Godunov. A finite difference method for the numerical computation and discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sb*, 47 :271–306, 1959.
- [Gol98] F. Golse. From kinetic to macroscopic models. In Université d’Orléans, editor, *L’Etat de la Recherche de la S.M.F., Equations cinétiques*, 1998.
- [Gos00] L. Gosse. A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Computers and Mathematics with Applications*, 39 :135–159, 2000.
- [GR95] S.K. Godunov and E.I. Romensky. Thermodynamics, conservation laws and symmetric forms of differential equations in mechanics of continuous media. *Computational Fluid Dynamics Review*, Wiley, New York :19–31, 1995.
- [Gra63] H. Grad. Asymptotic theory of the Boltzmann equation. *Physics of Fluids*, 6(2) :147–181, 1963.
- [GS03] V. Garzo and A. Santos. *Kinetic theory of gases in shear flows, nonlinear transport*. Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN : 1-4020-1436-8.

- [GSS96] J. Glimm, D. Saltz, and D.H. Sharp. Renormalization group solution of two phase flow equations for Rayleigh-Taylor mixing. *Physics Letters, A* 222(3) :171–176, 1996.
- [GT04] L. Gosse and G. Toscani. Asymptotic-preserving and well-balanced schemes for radiative transfer and the Rosseland approximation. *Numerische Mathematik*, 98(2) :223–250, 2004.
- [HEOC87] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. Chakravarthy. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III. *Journal of Computational Physics*, 71 :231–303, 1987.
- [HK00] W.H. Hui and S. Koudriakov. The role of coordinates in the computation of discontinuities in one-dimensional flow. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 8 :495–510, 2000.
- [HL92] L. Hsiao and T.P. Liu. Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping. *Communications in Mathematical Physics*, 143 :599–605, 1992.
- [HLv83] A. Harten, P.D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1) :35–61, 1983.
- [HMP05] F. Huang, P. Marcati, and R. Pan. Convergence to the Barenblatt solution for the compressible Euler equations with damping and vacuum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 176 :1–24, 2005.
- [Ish75] M. Ishii. *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow, Direction des études et recherches d'EDF, volume 22*. Eyrolles, 1975. ASIN : B0006CLL3M.
- [Jin95] S. Jin. Runge-Kutta methods for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms. *Journal of Computational Physics*, 122(1) :51–67, 1995.
- [Jin99] S. Jin. Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(2) :441–454, 1999.
- [Jin01] S. Jin. A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 35(4) :631–645, 2001.
- [JL96] S. Jin and C.D. Levermore. Numerical schemes for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms. *Journal of Computational Physics*, 126(2) :449–467, 1996.
- [JS96] G.-S. Jiang and C.W. Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, pages 202–228, 1996.
- [JX95] S. Jin and Z. Xin. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48 :235–277, 1995.
- [KMB⁺01] A.K. Kapila, R. Menikoff, J.B. Bdzil, S.F. Son, and D.S. Stewart. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials : reduced equations. *Physics of Fluids*, 13(10) :3002–3024, 2001.
- [Lag00] F. Lagoutiere. *Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides compressibles à plusieurs constituants*. PhD thesis, Université Paris VI, 2000.
- [LeR98] A.Y. LeRoux. Riemann solvers for some hyperbolic problems with a source term. In *ESAIM : Proceedings CANUM Vol.6*, pages 75–90, 1998.

- [Lev96] C.D. Levermore. Moment closure hierarchies for kinetic theories. *Journal of Statistical Physics*, 83(5/6) :1021–1065, 1996.
- [Liu72] I.S. Liu. Method of lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1972.
- [LM02] R.B. Lowrie and J.E. Morel. Methods for hyperbolic systems with stiff relaxation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40 :413–423, 2002.
- [LOC94] X.D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational physics*, 115 :200–212, 1994.
- [LP81] E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii. *Physical kinetics, course of theoretical physics, Landau and Lifshitz, volume 10*. Pergamon press, 1981. ISBN : 0-08-026480-8.
- [LR88] P. LeFloch and P.A. Raviart. An asymptotic expansion for the solution of the generalized Riemann problem. part i : General theory. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 5(2) :179–207, 1988.
- [LY90] R.J. LeVeque and H.C. Yee. A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms. *Journal of Computational Physics*, 86(1) :187–210, 1990.
- [M03] O. Le Métayer. *Modélisation et résolution de la propagation de fronts perméables, application aux fronts d'évaporation et de détonation*. PhD thesis, Université de Provence, Aix-Marseille I, IUSTI, 2003.
- [Mai96] P.H. Maire. *Etablissement et comparaison de modèles fluides pour un plasma faiblement ionisé quasi-neutre, détermination des conditions aux limites à la paroi*. PhD thesis, Université Paris VI, 1996.
- [MC07] F. Miniati and P. Colella. A modified higher order Godunov's scheme for stiff source conservative hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 224(2) :519–538, 2007.
- [MR93] I. Muller and T. Ruggeri. *Rational extended thermodynamics, second edition*. Springer, 1993. ISBN : 0-387-98373-2.
- [Mur03] A. Murrone. *Modèles bifluïdes à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach*. PhD thesis, Université de Provence, Aix-Marseille I, 2003.
- [NP00] G. Naldi and L. Pareschi. Numerical schemes for hyperbolic systems of conservation laws with stiff diffusive relaxation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37(4) :1246–1270, 2000.
- [OS82] S. Osher and F. Solomon. Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws. *Mathematics of Computation*, 38 :339–374, 1982.
- [PA00] R.B. Pember and R.W. Anderson. A comparison of staggered-mesh Lagrange plus remap and cell-centered direct Eulerian Godunov schemes for Eulerian shock hydrodynamics. Technical Report UCRL-JC-139820, Lawrence Livermore National Laboratory, 2000.
- [Pem93a] R.B. Pember. Numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation. i. spurious solutions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53(5) :1293–1330, 1993.
- [Pem93b] R.B. Pember. Numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation. ii. higher order Godunov methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(4) :824–859, 1993.

- [PJ06] S. Del Pino and H. Jourdain. Arbitrary high-order schemes for the linear advection and wave equations : application to hydrodynamics and aeroacoustics. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 342(I) :441–446, 2006.
- [PR00] L. Pareschi and G. Russo. Implicit-explicit runge-kutta schemes for stiff systems of differential equations. *Advances in the Theory of Computational Mathematics*, 3 :269–288, 2000.
- [PS03] B. Perthame and C. Simeoni. Convergence of the upwind interface source method for hyperbolic conservation laws. In T. Hou and E. Tadmor editors, editors, *Proceedings of Hyp2002*. Springer, 2003.
- [PTVF96] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77*, volume 1. Cambridge University Press, 1996.
- [Roe81] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–372, 1981.
- [Rom98] E.I. Romensky. Hyperbolic systems of thermodynamically compatible conservation laws in continuum mechanics. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(10) :115–130, 1998.
- [Rom01] E.I. Romensky. Thermodynamics and hyperbolic systems of balance laws in continuum mechanics. *Godunov methods : theory and applications, edited by E.F. Toro*, 2001.
- [RRT04] E.I. Romensky, A.D. Resnyansky, and E.F. Toro. Conservative hyperbolic model for compressible two-phase flow with different phase pressures and temperatures. Technical Report 04034, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint, 2004.
- [RT03] E.I. Romensky and E.F. Toro. Shock waves in compressible two-phase flows. Technical Report 03026, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint, 2003.
- [RT04] E.I. Romensky and E.F. Toro. Compressible two-phase flows : two-pressure models and numerical methods. Technical Report 04012, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint, 2004.
- [RZST03] E.I. Romensky, D. Zeidan, A. Slaouti, and E.F. Toro. Hyperbolic conservative model for compressible two-phase flow. Technical Report 03022, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint, 2003.
- [SA99] R. Saurel and R. Abgrall. A multiphase godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 150(2) :425–467, 1999.
- [SC02] A.J. Scannapieco and B. Cheng. A multifluid interpenetration mix model. *Physics Letters*, 299(A) :49–64, 2002.
- [SCB99] R. Saurel, J.P. Cocchi, and P.B. Butler. A numerical study of cavitation in the wake of a hypervelocity underwater projectile. *Journal of Propulsion and Power* 15(4), 1999.
- [Seg02] N. Seguin. *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques*. PhD thesis, Université de Provence, Aix-Marseille I, 2002.
- [Sen] R. Sentis. On the numerical simulation of plasma flows with mixing. Manuscript en cours de publication.
- [Ser96a] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation I : hyperbolicité, entropies, ondes de choc*. Diderot éditeur, Arts et Sciences, 1996. ISBN : 2-84134-068-6.

- [Ser96b] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation II : structures géométriques, oscillation et problèmes mixtes*. Diderot éditeur, Arts et Sciences, 1996. ISBN : 2-84134-072-4.
- [SH97] A. Suresh and H.T. Huynh. Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge-Kutta stepping. *Journal of Computational Physics*, 136(1) :83–99, 1997.
- [SO89] C.W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II. *Journal of Computational Physics*, 83 :32–78, 1989.
- [Str68] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3) :506–517, 1968.
- [Str71] A.H. Stroud. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [Tad03] E. Tadmor. Entropy stability theory for difference approximations of non linear conservation laws and related time-dependent problems. *Acta Numerica*, 12 :451–512, 2003.
- [TDBM07] A. Taube, M. Dumbser, D. Balsara, and C.D. Munz. Arbitrary high order discontinuous Galerkin schemes for the magnetohydrodynamic equations. *Journal of Scientific Computing*, 30(3) :441–464, 2007.
- [TM80] C. Truesdell and R.G. Muncaster. *Fundamentals of Maxwell’s kinetic theory of a simple monoatomic gas*. Academic Press, 1980. ISBN : 0-12-701350-4.
- [TMN01] E.F. Toro, R.C. Millington, and L.A.M Nejad. Towards very high order Godunov schemes. In E.F. Toro, editor, *Godunov Methods. Theory and Applications*, pages 905–938. Kluwer/Plenum Academic Publishers, 2001.
- [Tor97] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, 1997. ISBN : 3-540-61676-4.
- [Tru69] C. Truesdell. *Rational thermodynamics, second edition*. Springer-Verlag, 1984 (first ed. 1969). ISBN : 0-387-90874-9.
- [TSS94] E.F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the Harten-Lax-van Leer Riemann solver. *Journal of Shock Waves*, 4 :25–34, 1994.
- [TT05a] V.A. Titarev and E.F. Toro. ADER schemes for three-dimensional nonlinear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 204 :715–736, 2005.
- [TT05b] E.F. Toro and V.A. Titarev. ADER schemes for scalar hyperbolic conservation laws with source terms in three space dimensions. *Journal of Computational Physics*, 202 :196–215, 2005.
- [Tza05] A. E. Tzavaras. Relative entropy in hyperbolic relaxation. *Communications in Mathematical Sciences*, 3(2) :119–132, 2005.
- [VCK65] W.G. Vincenti and Jr C.H. Kruger. *Introduction to physical gas dynamics*. Robert E. Krieger publishing company, 1965. ISBN : 0-88275-309-6.
- [vdVvdV02] J. van der Vegt and H. van der Ven. Space-time discontinuous galerkin finite element method with dynamics grid motion for inviscid compressible flows, part I. General formulation. *Journal of Computational Physics*, 182 :546–585, 2002.
- [WCC⁺04] D.C. Wilson, C.W. Cranfill, C. Christensen, R.A. Forster, R.R. Peterson, C.K. Li, F.H. Séguin, J.A. Frenje, R.D. Petrasso, P.W. McKenty, F.J. Marshall, V. Yu. Glebov, C. Stoeckl, G.J. Schmid, N. Izumi, and P. Amendt. Multifluid interpenetration mixing in directly driven inertial confinement fusion capsule implosions. *Physics of Plasmas*, 11(5) :2723–2728, 2004.

- [WSC⁺03] D.C. Wilson, A.J. Scannapieco, C.W. Cranfill, M.R. Clover, N.M. Hoffman, and J. Collins. Degradation of radiatively driven inertial confinement fusion capsule implosions by multifluid interpenetration mixing. *Physics of Plasmas*, 10(11) :4427–4434, 2003.