

Problèmes de diffusion pour des chaînes d'oscillateurs harmoniques perturbés

Marielle Simon
École Normale Supérieure de Lyon

17 juin 2014

Sous la direction de CÉDRIC BERNARDIN et STEFANO OLLA

Partie 1.

L'équation de la chaleur et la physique statistique

Époque : de 1820 à 1900



Joseph Fourier
(1768 – 1830)



Ludwig Boltzmann
(1844 – 1906)

1 – UN PEU DE PHYSIQUE

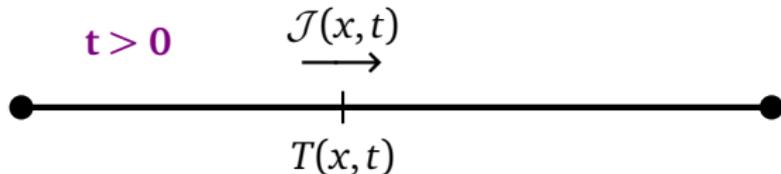
Qu'est-ce que l'équation de la chaleur ?

Initialement : $T_0(x)$



1 – UN PEU DE PHYSIQUE

Qu'est-ce que l'équation de la chaleur ?



$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}$$

LOI DE FOURIER (1822) :

$$\mathcal{J}(x, t) = -\mathbf{D}(T) \frac{\partial T}{\partial x}(x, t)$$

D = coefficient de diffusion

2 – MODÈLE MICROSCOPIQUE

Chaîne de N oscillateurs *harmoniques* couplés



p_x : moment de l'atome x

r_x : distance entre les atomes x et $x + 1$

m_x : masse de l'atome x

2 – MODÈLE MICROSCOPIQUE

Chaîne de N oscillateurs *harmoniques* couplés



p_x : moment de l'atome x

r_x : distance entre les atomes x et $x + 1$

m_x : masse de l'atome x

Énergie totale du système = Hamiltonien

$$\mathcal{H} := \sum_x \left\{ \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{r_x^2}{2} \right\} = \sum_x e_x$$

2 – MODÈLE MICROSCOPIQUE

Chaîne de N oscillateurs *harmoniques* couplés



p_x : moment de l'atome x

r_x : distance entre les atomes x et $x + 1$

m_x : masse de l'atome x

Énergie totale du système = Hamiltonien

$$\mathcal{H} := \sum_x \left\{ \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{r_x^2}{2} \right\} = \sum_x e_x$$

Conditions périodiques

$$\mathbb{T}_N := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \quad (\text{tore discret})$$

Équations de Hamilton

$$\frac{dr_x}{dt} = \frac{p_{x+1}}{m_{x+1}} - \frac{p_x}{m_x}$$
$$\frac{dp_x}{dt} = r_x - r_{x-1}$$

→ Nombre d'équations $\gg 1$

→ Env. aléatoire $\mathbf{m} := \{m_x\}$

Équations de Hamilton

$$\frac{dr_x}{dt} = \frac{p_{x+1}}{m_{x+1}} - \frac{p_x}{m_x}$$
$$\frac{dp_x}{dt} = r_x - r_{x-1}$$

→ Nombre d'équations $\gg 1$

→ Env. aléatoire $\mathbf{m} := \{m_x\}$

▷ Quantités conservées

$$\mathcal{H} := \sum_x \left\{ \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{r_x^2}{2} \right\} \quad \sum p_x \quad \sum r_x \quad \dots$$

Équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dr_x}{dt} &= \frac{p_{x+1}}{m_{x+1}} - \frac{p_x}{m_x} \\ \frac{dp_x}{dt} &= r_x - r_{x-1} \end{aligned}$$

→ Nombre d'équations $\gg 1$

→ Env. aléatoire $\mathbf{m} := \{m_x\}$

▷ Quantités conservées

$$\mathcal{H} := \sum_x \left\{ \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{r_x^2}{2} \right\} \quad \sum p_x \quad \sum r_x \quad \dots$$

▷ Objectifs

- Briser des lois de conservation \Rightarrow **Garder l'énergie \mathcal{H}**
- Rester proche de la dynamique hamiltonienne
- Dédire la loi de Fourier *macroscopique*

Idée de Boltzmann !

Description atomique \Rightarrow Description *macroscopique*

- ① On s'intéresse à $\mu_t^N(\mathbf{dr}, \mathbf{dp})$ loi de probabilité à l'instant t sur

$$\Omega_N := \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N = \text{distances} \times \text{moments.}$$

Idée de Boltzmann !

Description atomique \Rightarrow Description *macroscopique*

- ① On s'intéresse à $\mu_t^N(\mathbf{dr}, \mathbf{dp})$ loi de probabilité à l'instant t sur

$$\Omega_N := \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N = \text{distances} \times \text{moments.}$$

- ② Mesures naturelles pour les modèles de mécanique statistique définis à partir d'une *énergie* (Hamiltonien) :

▷ **Mesures de Gibbs – Boltzmann**

$$\mu_T^N(\mathbf{dr}, \mathbf{dp}) := \frac{1}{Z(T)} \prod_{x=1}^N \exp\left(-\frac{e_x}{T}\right) dr_x dp_x.$$

▷ **Température** = paramètre $T > 0$ avec

$$e_x := \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{r_x^2}{2} \quad \text{et} \quad \int e_x d\mu_T^N = T$$

Partie 2.

Perturbation de la dynamique

[Olla, Varadhan, Yau, 1993]

TRAFIC PERTURBÉ

MARDI 17 JUIN

Mardi 17 juin, le trafic s'améliore sensiblement sur Transilien, TER et TGV. Les circulations qui permettent aux candidats au baccalauréat de rejoindre les centres d'examen seront à nouveau particulièrement suivies et font l'objet d'une information spécifique. SNCF maintient sa recommandation de reporter les déplacements à toutes les personnes qui en ont la possibilité et de consulter les prévisions de circulations.



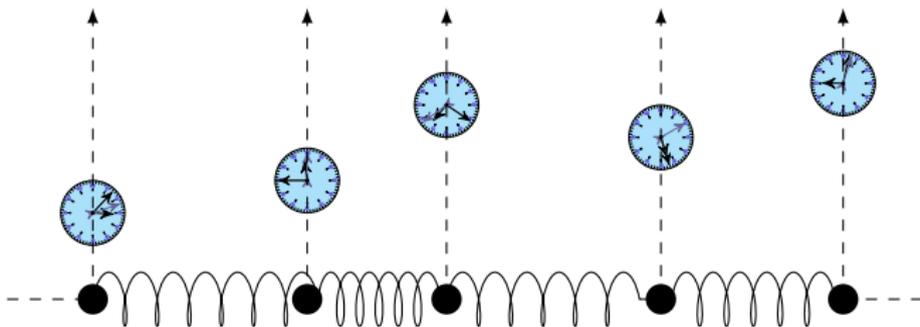
INFO TRAFIC

1– UN PEU DE BRUIT

Choix de la perturbation stochastique : doit conserver \mathcal{H} .

1- UN PEU DE BRUIT

Choix de la perturbation stochastique : doit conserver \mathcal{H} .



Flip noise

Chaque atome x attend de manière indépendante un temps aléatoire exponentiel, puis change son moment p_x en $-p_x$.

D'autres perturbations

- ① ÉCHANGE FORT : lorsque les masses sont **aléatoires**,

$$\frac{p_x}{\sqrt{m_x}} \leftrightarrow r_x \quad (\text{temps poissoniens})$$

D'autres perturbations

- ① ÉCHANGE FORT : lorsque les masses sont **aléatoires**,

$$\frac{p_x}{\sqrt{m_x}} \leftrightarrow r_x \quad (\text{temps poissoniens})$$

▷ Propriétés analytiques plus fortes

D'autres perturbations

- ① ÉCHANGE FORT : lorsque les masses sont **aléatoires**,

$$\frac{p_x}{\sqrt{m_x}} \leftrightarrow r_x \quad (\text{temps poissoniens})$$

▷ Propriétés analytiques plus fortes

- ② ÉCHANGE FAIBLE : lorsque les masses sont **constantes**,

$$p_x \leftrightarrow p_{x+1} \quad (\text{temps poissoniens})$$

D'autres perturbations

- ① ÉCHANGE FORT : lorsque les masses sont **aléatoires**,

$$\frac{p_x}{\sqrt{m_x}} \leftrightarrow r_x \quad (\text{temps poissoniens})$$

▷ Propriétés analytiques plus fortes

- ② ÉCHANGE FAIBLE : lorsque les masses sont **constantes**,

$$p_x \leftrightarrow p_{x+1} \quad (\text{temps poissoniens})$$

▷ Conserve le moment total $\sum p_x$

D'autres perturbations

- ① ÉCHANGE FORT : lorsque les masses sont **aléatoires**,

$$\frac{p_x}{\sqrt{m_x}} \leftrightarrow r_x \quad (\text{temps poissoniens})$$

▷ Propriétés analytiques plus fortes

- ② ÉCHANGE FAIBLE : lorsque les masses sont **constantes**,

$$p_x \leftrightarrow p_{x+1} \quad (\text{temps poissoniens})$$

▷ Conserve le moment total $\sum p_x$

Les deux conservent $\sum \left\{ \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{r_x^2}{2} \right\}$
--

Dynamique finale

- ① La **densité** f_t^N de la loi de probabilité μ_t^N sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^N$ vérifie

$$\boxed{\frac{\partial f_t^N}{\partial t} = (\mathcal{L}_N^{\mathbf{m}})^* f_t^N} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_N^{\mathbf{m}} = \mathcal{A}_N^{\mathbf{m}} + \gamma \mathcal{S}_N$$

Dynamique finale

- ① La **densité** f_t^N de la loi de probabilité μ_t^N sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^N$ vérifie

$$\boxed{\frac{\partial f_t^N}{\partial t} = (\mathcal{L}_N^{\mathbf{m}})^* f_t^N} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_N^{\mathbf{m}} = \mathcal{A}_N^{\mathbf{m}} + \gamma \mathcal{S}_N$$

avec

- le générateur de la dynamique hamiltonienne $\mathcal{A}_N^{\mathbf{m}}$
- le générateur de la perturbation \mathcal{S}_N
- l'intensité de la perturbation $\gamma > 0$
- l'environnement aléatoire \mathbf{m}

Dynamique finale

- ① La **densité** f_t^N de la loi de probabilité μ_t^N sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^N$ vérifie

$$\boxed{\frac{\partial f_t^N}{\partial t} = (\mathcal{L}_N^{\mathbf{m}})^* f_t^N} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_N^{\mathbf{m}} = \mathcal{A}_N^{\mathbf{m}} + \gamma \mathcal{S}_N$$

avec

- le générateur de la dynamique hamiltonienne $\mathcal{A}_N^{\mathbf{m}}$
 - le générateur de la perturbation \mathcal{S}_N
 - l'intensité de la perturbation $\gamma > 0$
 - l'environnement aléatoire \mathbf{m}
- ② **Propriétés des générateurs :**
- description explicite des mesures invariantes \Rightarrow **Ergodicité**

Dynamique finale

- ① La **densité** f_t^N de la loi de probabilité μ_t^N sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^N$ vérifie

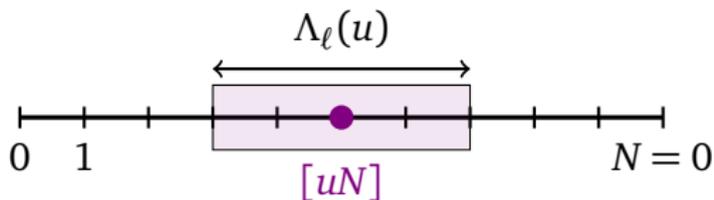
$$\boxed{\frac{\partial f_t^N}{\partial t} = (\mathcal{L}_N^{\mathbf{m}})^* f_t^N} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_N^{\mathbf{m}} = \mathcal{A}_N^{\mathbf{m}} + \gamma \mathcal{S}_N$$

avec

- le générateur de la dynamique hamiltonienne $\mathcal{A}_N^{\mathbf{m}}$
 - le générateur de la perturbation \mathcal{S}_N
 - l'intensité de la perturbation $\gamma > 0$
 - l'environnement aléatoire \mathbf{m}
- ② **Propriétés des générateurs :**
- description explicite des mesures invariantes \Rightarrow **Ergodicité**
 - pas de trou spectral pour $\mathcal{S}_N \Rightarrow$ **Perturbation très dégénérée**

2 – LIMITES HYDRODYNAMIQUES

① Scaling en espace :

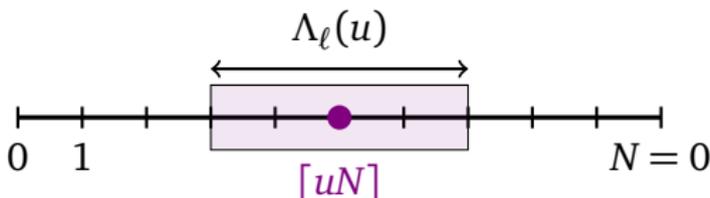


$$1 \ll \ell \ll N$$

② Scaling en temps : échelle diffusive tN^2

2 – LIMITES HYDRODYNAMIQUES

① Scaling en espace :



$$1 \ll \ell \ll N$$

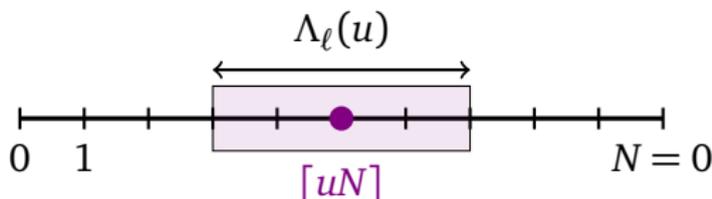
② Scaling en temps : échelle diffusive tN^2

Idée générale

La loi $\mu_{tN^2}^N$ restreinte à $\Lambda_\ell(u)$ est très proche de l'équilibre de Gibbs paramétré par $T(u, t)$

2 – LIMITES HYDRODYNAMIQUES

① Scaling en espace :



$$1 \ll \ell \ll N$$

② Scaling en temps : échelle diffusive tN^2

Idée générale

La loi $\mu_{tN^2}^N$ restreinte à $\Lambda_\ell(u)$ est très proche de l'équilibre de Gibbs paramétré par $T(u, t)$

où $T(u, t)$ est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\mathbf{D}(T) \frac{\partial T}{\partial u} \right]$$

Illustrations

Simulations numériques

- ▶ Température initiale en créneau
- ▶ Système de $N = 256$ atomes

Profil hydrodynamique

Solution de l'EDP



Partie 3.

Variations autour de trois modèles

1 DIFFUSION NORMALE

(i) Masses constantes + flip des moments

▷ *Limites hydrodynamiques*

(ii) Masses aléatoires + flip des moments ... + **échange fort**

▷ *Fluctuations à l'équilibre*

2 DIFFUSION ANORMALE

(i) Masses constantes + échange faible

▷ *Interpolation entre deux régimes grâce au flip*

1 – MASSES CONSTANTES + FLIP

Deux quantités conservées

$$\sum_{x \in \mathbb{T}_N} \left\{ \frac{p_x^2 + r_x^2}{2} \right\} : \text{énergie} \qquad \sum_{x \in \mathbb{T}_N} r_x : \text{déformation}$$

1 – MASSES CONSTANTES + FLIP

Deux quantités conservées

$$\sum_{x \in \mathbb{T}_N} \left\{ \frac{p_x^2 + r_x^2}{2} \right\} : \text{énergie} \quad \sum_{x \in \mathbb{T}_N} r_x : \text{déformation}$$

Famille de lois invariantes, les états de Gibbs

$$\mu_{\mathbf{e}, \mathbf{r}}^N(d\mathbf{r}, d\mathbf{p}) = \frac{1}{Z(\beta, \lambda)} \prod_{x \in \mathbb{T}_N} \exp(-\beta e_x - \lambda r_x) dr_x dp_x$$

1 – MASSES CONSTANTES + FLIP

Deux quantités conservées

$$\sum_{x \in \mathbb{T}_N} \left\{ \frac{p_x^2 + r_x^2}{2} \right\} : \text{énergie} \quad \sum_{x \in \mathbb{T}_N} r_x : \text{déformation}$$

Famille de lois invariantes, les états de Gibbs

$$\mu_{\mathbf{e}, \mathbf{r}}^N(\mathbf{dr}, \mathbf{dp}) = \frac{1}{Z(\beta, \lambda)} \prod_{x \in \mathbb{T}_N} \exp(-\beta e_x - \lambda r_x) dr_x dp_x$$

où

$$\begin{cases} \beta := \beta(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = \left\{ \int \frac{p_x^2}{2} \mu_{\mathbf{e}, \mathbf{r}}^N(\mathbf{dr}, \mathbf{dp}) \right\}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{e} - \mathbf{r}^2/2} \\ \lambda := \lambda(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = -\beta \int r_x \mu_{\mathbf{e}, \mathbf{r}}^N(\mathbf{dr}, \mathbf{dp}) = -\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e} - \mathbf{r}^2/2} \end{cases}$$

Équilibre de Gibbs local

- ▶ **Initialement**, deux *profils* d'énergie et de déformation :

$\mathbf{e}_0(\cdot)$ et $\mathbf{r}_0(\cdot)$ sur le tore continu \mathbb{T}

Équilibre de Gibbs local

- ▷ **Initialement**, deux *profils* d'énergie et de déformation :

$$\mathbf{e}_0(\cdot) \text{ et } \mathbf{r}_0(\cdot) \text{ sur le tore continu } \mathbb{T}$$

- ▷ Les **mesures d'équilibre de Gibbs local** associées aux profils \mathbf{r}_0 et \mathbf{e}_0 définis sur \mathbb{T} sont

$$\mu_{\mathbf{e}_0(\cdot), \mathbf{r}_0(\cdot)}^N(\mathbf{dr}, \mathbf{dp}) = \frac{\prod_{x \in \mathbb{T}_N} \exp \left\{ -\beta_0 \left(\frac{x}{N} \right) e_x - \lambda_0 \left(\frac{x}{N} \right) r_x \right\} \mathbf{dr}_x \mathbf{dp}_x}{Z_{\beta_0(\cdot), \lambda_0(\cdot)}}$$

Théorème 1 [S. 2013]

On suppose que μ_0^N est un équilibre de Gibbs local associé aux profils \mathbf{e}_0 et \mathbf{r}_0 :

$$\mu_0^N = \mu_{\mathbf{e}_0(\cdot), \mathbf{r}_0(\cdot)}^N$$

Alors, $\mu_{tN^2}^N$ est **proche** de l'équilibre de Gibbs local associé aux profils $\mathbf{e}(t, \cdot)$ et $\mathbf{r}(t, \cdot)$ définis sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$ et solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}^2}{2} \right), \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{r}(0, u) = \mathbf{r}_0(u), \\ \mathbf{e}(0, u) = \mathbf{e}_0(u), \end{cases}$$

Théorème 1 [S. 2013]

On suppose que μ_0^N est un équilibre de Gibbs local associé aux profils \mathbf{e}_0 et \mathbf{r}_0 :

$$\mu_0^N = \mu_{\mathbf{e}_0(\cdot), \mathbf{r}_0(\cdot)}^N$$

Alors, $\mu_{tN^2}^N$ est **proche** de l'équilibre de Gibbs local associé aux profils $\mathbf{e}(t, \cdot)$ et $\mathbf{r}(t, \cdot)$ définis sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$ et solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}^2}{2} \right), \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{r}(0, u) = \mathbf{r}_0(u), \\ \mathbf{e}(0, u) = \mathbf{e}_0(u), \end{cases}$$

au sens où

$$H\left(\mu_{tN^2}^N \mid \mu_{\mathbf{e}(t, \cdot), \mathbf{r}(t, \cdot)}^N\right) = o(N)$$

Théorème 1 [S. 2013]

On suppose que μ_0^N est un équilibre de Gibbs local associé aux profils \mathbf{e}_0 et \mathbf{r}_0 :

$$\mu_0^N = \mu_{\mathbf{e}_0(\cdot), \mathbf{r}_0(\cdot)}^N$$

Alors, $\mu_{tN^2}^N$ est **proche** de l'équilibre de Gibbs local associé aux profils $\mathbf{e}(t, \cdot)$ et $\mathbf{r}(t, \cdot)$ définis sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$ et solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}^2}{2} \right), \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{r}(0, u) = \mathbf{r}_0(u), \\ \mathbf{e}(0, u) = \mathbf{e}_0(u), \end{cases}$$

au sens où

$$H\left(\mu_{tN^2}^N \mid \mu_{\mathbf{e}(t, \cdot), \mathbf{r}(t, \cdot)}^N\right) = o(N) \quad \rightsquigarrow \quad H\left(\mu_{tN^2}^N \mid \tilde{\mu}_{\mathbf{e}(t, \cdot), \mathbf{r}(t, \cdot)}^N\right) = o(N)$$

Corollaire

La conclusion $H_N(t) := H\left(\mu_{tN^2}^N \mid \tilde{\mu}_{\mathbf{e}(t,\cdot), \mathbf{r}(t,\cdot)}^N\right) = o(N)$ implique

Limite hydrodynamique

Pour toute fonction G continue sur \mathbb{T} , “toute” fonction φ , et tout $\delta > 0$,

$$\mu_{tN^2}^N \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} G\left(\frac{x}{N}\right) \tau_x \varphi - \int_{\mathbb{T}} G(u) \tilde{\varphi}(\mathbf{e}(t, u), \mathbf{r}(t, u)) du \right| > \delta \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

où $\tilde{\varphi}$ est la moyenne grand-canonique de φ (i.e. sous $\mu_{\mathbf{e}, \mathbf{r}}$).

Corollaire

La conclusion $H_N(t) := H\left(\mu_{tN^2}^N \mid \tilde{\mu}_{\mathbf{e}(t,\cdot),\mathbf{r}(t,\cdot)}^N\right) = o(N)$ implique

Limite hydrodynamique

Pour toute fonction G continue sur \mathbb{T} , “toute” fonction φ , et tout $\delta > 0$,

$$\mu_{tN^2}^N \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} G\left(\frac{x}{N}\right) \tau_x \varphi - \int_{\mathbb{T}} G(u) \tilde{\varphi}(\mathbf{e}(t,u), \mathbf{r}(t,u)) du \right| > \delta \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

où $\tilde{\varphi}$ est la moyenne grand-canonique de φ (i.e. sous $\mu_{\mathbf{e},\mathbf{r}}$).

- **Inégalité entropique** : pour tout $\alpha > 0$,

$$\int g \, d\mu_{tN^2}^N \leq \frac{H_N(t)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \log \left(\int e^{\alpha g} \, d\tilde{\mu}_{\mathbf{e}(t,\cdot),\mathbf{r}(t,\cdot)}^N \right)$$

- **Lemme de Gronwall** sur $H_N(t)$

Corollaire

La conclusion $H_N(t) := H\left(\mu_{tN^2}^N \mid \tilde{\mu}_{\mathbf{e}(t,\cdot),\mathbf{r}(t,\cdot)}^N\right) = o(N)$ implique

Limite hydrodynamique

Pour toute fonction G continue sur \mathbb{T} , “toute” fonction φ , et tout $\delta > 0$,

$$\mu_{tN^2}^N \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} G\left(\frac{x}{N}\right) \tau_x \varphi - \int_{\mathbb{T}} G(u) \tilde{\varphi}(\mathbf{e}(t,u), \mathbf{r}(t,u)) du \right| > \delta \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

où $\tilde{\varphi}$ est la moyenne grand-canonique de φ (i.e. sous $\mu_{\mathbf{e},\mathbf{r}}$).

- **Inégalité entropique** : pour tout $\alpha > 0$,

$$\int g d\mu_{tN^2}^N \leq \frac{H_N(t)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \log \left(\int e^{\alpha g} d\tilde{\mu}_{\mathbf{e}(t,\cdot),\mathbf{r}(t,\cdot)}^N \right)$$

- **Lemme de Gronwall** sur $H_N(t)$

Éléments de preuve

1. Système non gradient

$$\frac{de_x}{dt} = \nabla[j_{x,x+1}](t) \quad \text{mais } j_{x,x+1} = -p_{x+1}r_x \text{ n'est pas un gradient.}$$

Éléments de preuve

1. Système non gradient

$$\frac{de_x}{dt} = \nabla[j_{x,x+1}](t) \quad \text{mais } j_{x,x+1} = -p_{x+1}r_x \text{ n'est pas un gradient.}$$

▷ *Solution* : équations de **fluctuation–dissipation**.

$$j_{x,x+1} = \nabla[f_x] + \mathcal{L}_N(g_x)$$

[Landim, Yau 1997]

Éléments de preuve

1. Système non gradient

$$\frac{de_x}{dt} = \nabla[j_{x,x+1}](t) \quad \text{mais } j_{x,x+1} = -p_{x+1}r_x \text{ n'est pas un gradient.}$$

▷ *Solution* : équations de **fluctuation–dissipation**.

$$j_{x,x+1} = \nabla[f_x] + \mathcal{L}_N(g_x)$$

[Landim, Yau 1997]

2. Méthode d'entropie relative

- ▷ avec deux lois de conservation,
- ▷ termes de correction jusqu'au second ordre.

[Yau, 1991] [Funaki, Uchiyama, Yau 1996]

3. Hautes énergies

- ▷ Besoin de contrôler tous les moments d'énergie

$$\forall k \geq 1, \quad \int \left(\sum_{x \in \mathbb{T}_N} e_x^k \right) d\mu_{tN^2}^N \leq C(k) \cdot N.$$

3. Hautes énergies

- ▷ Besoin de contrôler tous les moments d'énergie

$$\forall k \geq 1, \quad \int \left(\sum_{x \in \mathbb{T}_N} e_x^k \right) d\mu_{tN^2}^N \leq C(k) \cdot N.$$

- ▷ *Idée* : L'ensemble des combinaisons convexes de mesures gaussiennes est préservée par la dynamique.

Proposition

Si μ_0^N est une mesure de Gibbs locale, alors pour tout $t > 0$, μ_t^N est une combinaison convexe de mesures gaussiennes.

d'après [Bernardin, Kannan, Lebowitz, Lukkarinen, 2011]

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : Relation de fluctuation/dissipation exacte 😞

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : ~~Relation de fluctuation/dissipation exacte~~ 😞

... Mais on peut définir un coefficient de diffusion ! 😊

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : Relation de fluctuation/dissipation exacte ☹️

... Mais on peut définir un coefficient de diffusion ! 😊

1. *Première définition* : via Green–Kubo

$$\mathbf{D}^{GK}(T) := \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^{\mathbf{m}} \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \langle j_{x,x+1}(t) j_{0,1}(0) \rangle_T dt \right]$$

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : Relation de fluctuation/dissipation exacte ☹️

... Mais on peut définir un coefficient de diffusion ! 😊

1. *Première définition* : via Green–Kubo

$$\mathbf{D}^{GK}(T) := \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^{\mathbf{m}} \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \langle j_{x,x+1}(t) j_{0,1}(0) \rangle_T dt \right] \quad \checkmark$$

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : Relation de fluctuation/dissipation exacte ☹️

... Mais on peut définir un coefficient de diffusion ! 😊

1. *Première définition* : via Green–Kubo

$$\mathbf{D}^{GK}(T) := \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^m \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \langle j_{x,x+1}(t) j_{0,1}(0) \rangle_T dt \right] \quad \checkmark$$

2. *Deuxième définition* : On cherche le coefficient \mathbf{D} tel que

$$\mathbb{E}^m \left\langle \left(\int_0^t \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \left[j_{x,x+1} - \underbrace{\left\{ \mathbf{D}(e_{x+1} - e_x) + \mathcal{L}_N^m(\tau_x f) \right\}}_{\text{fluctuation-dissipation}} \right] ds \right)^2 \right\rangle_T$$

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : Relation de fluctuation/dissipation exacte ☹️

... Mais on peut définir un coefficient de diffusion ! 😊

1. *Première définition* : via Green–Kubo

$$\mathbf{D}^{GK}(T) := \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^m \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \langle j_{x,x+1}(t) j_{0,1}(0) \rangle_T dt \right] \quad \checkmark$$

2. *Deuxième définition* : On cherche le coefficient \mathbf{D} tel que

$$\mathbb{E}^m \left\langle \left(\int_0^t \sum_{x \in \mathbb{T}_N} [j_{x,x+1} - \{ \mathbf{D}(e_{x+1} - e_x) + \mathcal{L}_N^m(\tau_x f) \}] ds \right)^2 \right\rangle_T$$

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : Relation de fluctuation/dissipation exacte ☹️

... Mais on peut définir un coefficient de diffusion ! 😊

1. *Première définition* : via Green–Kubo

$$\mathbf{D}^{GK}(T) := \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^m \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \langle j_{x,x+1}(t) j_{0,1}(0) \rangle_T dt \right] \quad \checkmark$$

2. *Deuxième définition* : On cherche le coefficient \mathbf{D} tel que

$$\mathbb{E}^m \left\langle \left(\int_0^t \sum_{x \in \mathbb{T}_N} [j_{x,x+1} - \{ \mathbf{D}(e_{x+1} - e_x) + \mathcal{L}_N^m(\tau_x f) \}] ds \right)^2 \right\rangle_T$$

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : Relation de fluctuation/dissipation exacte ☹️

... Mais on peut définir un coefficient de diffusion ! 😊

1. *Première définition* : via Green–Kubo

$$\mathbf{D}^{GK}(T) := \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^m \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \langle j_{x,x+1}(t) j_{0,1}(0) \rangle_T dt \right] \quad \checkmark$$

2. *Deuxième définition* : On cherche le coefficient \mathbf{D} tel que

$$\mathbb{E}^m \left\langle \left(\int_0^t \sum_{x \in \mathbb{T}_N} [j_{x,x+1} - \{ \mathbf{D}(e_{x+1} - e_x) + \mathcal{L}_N^m(\tau_x f) \}] ds \right)^2 \right\rangle_T$$

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : Relation de fluctuation/dissipation exacte ☹️

... Mais on peut définir un coefficient de diffusion ! 😊

1. *Première définition* : via Green–Kubo

$$\mathbf{D}^{GK}(T) := \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^m \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \langle j_{x,x+1}(t) j_{0,1}(0) \rangle_T dt \right] \quad \checkmark$$

2. *Deuxième définition* : On cherche le coefficient \mathbf{D} tel que

$$\underbrace{\mathbb{E}^m \left\langle \left(\int_0^t \sum_{x \in \mathbb{T}_N} [j_{x,x+1} - \{ \mathbf{D}(e_{x+1} - e_x) + \mathcal{L}_N^m(\tau_x f) \}] ds \right)^2 \right\rangle_T}$$

$$\inf_{f \in \mathcal{H}} \limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{tN} \times (\star) = 0 \quad ??$$

2 – ON CHANGE LES MASSES !

Problème : Relation de fluctuation/dissipation exacte ☹️

... Mais on peut définir un coefficient de diffusion ! 😊

1. *Première définition* : via Green-Kubo

$$\mathbf{D}^{GK}(T) := \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^m \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \langle j_{x,x+1}(t) j_{0,1}(0) \rangle_T dt \right] \quad \checkmark$$

2. *Deuxième définition* : On cherche le coefficient \mathbf{D} tel que

$$\underbrace{\mathbb{E}^m \left\langle \left(\int_0^t \sum_{x \in \mathbb{T}_N} [j_{x,x+1} - \{ \mathbf{D}(e_{x+1} - e_x) + \mathcal{L}_N^m(\tau_x f) \}] ds \right)^2 \right\rangle_T}$$

$$\inf_{f \in \mathcal{H}} \limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{tN} \times (\star) = 0 \quad ??$$

Méthode non-gradient revisitée

Autrement dit : on va construire une norme $\|\cdot\|_T$ qui vérifie

1. il existe une suite de fonctions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|j_{0,1} - \mathbf{D}(e_1 - e_0) - \mathcal{L}^{\mathbf{m}}(f_k)\|_T \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

2. il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} qui contient $j_{0,1}$ et tel que

$$\mathcal{H} = \{e_1 - e_0\} \oplus \overline{\{\mathcal{L}^{\mathbf{m}}f\}}$$

Méthode non-gradient revisitée

Autrement dit : on va construire une norme $\|\cdot\|_T$ qui vérifie

1. il existe une suite de fonctions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|j_{0,1} - \mathbf{D}(e_1 - e_0) - \mathcal{L}^m(f_k)\|_T \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

2. il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} qui contient $j_{0,1}$ et tel que

$$\mathcal{H} = \{e_1 - e_0\} \oplus \overline{\{\mathcal{L}^m f\}}$$

Outils nécessaires : conditions sur $\mathcal{L}^m = \mathcal{A}^m + \gamma \mathcal{S}$

- a) Norme reliée à $(-\mathcal{S})^{-1}$ \triangleright Trou spectral !

Méthode non-gradient revisitée

Autrement dit : on va construire une norme $\|\cdot\|_T$ qui vérifie

1. il existe une suite de fonctions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|j_{0,1} - \mathbf{D}(e_1 - e_0) - \mathcal{L}^m(f_k)\|_T \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

2. il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} qui contient $j_{0,1}$ et tel que

$$\mathcal{H} = \{e_1 - e_0\} \oplus \overline{\{\mathcal{L}^m f\}}$$

Outils nécessaires : conditions sur $\mathcal{L}^m = \mathcal{A}^m + \gamma \mathcal{S}$

- a) Norme reliée à $(-\mathcal{S})^{-1}$ \triangleright **Trou spectral**

Méthode non-gradient revisitée

Autrement dit : on va construire une norme $\|\cdot\|_T$ qui vérifie

1. il existe une suite de fonctions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|j_{0,1} - \mathbf{D}(e_1 - e_0) - \mathcal{L}^m(f_k)\|_T \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

2. il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} qui contient $j_{0,1}$ et tel que

$$\mathcal{H} = \{e_1 - e_0\} \oplus \overline{\{\mathcal{L}^m f\}}$$

Outils nécessaires : conditions sur $\mathcal{L}^m = \mathcal{A}^m + \gamma \mathcal{S}$

- a) Norme reliée à $(-\mathcal{S})^{-1}$ \triangleright ~~Trou spectral~~
- b) Remplacer \mathcal{L} par \mathcal{S} \triangleright Condition de secteur **affaiblie**

Méthode non-gradient revisitée

Autrement dit : on va construire une norme $\|\cdot\|_T$ qui vérifie

1. il existe une suite de fonctions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|j_{0,1} - \mathbf{D}(e_1 - e_0) - \mathcal{L}^m(f_k)\|_T \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

2. il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} qui contient $j_{0,1}$ et tel que

$$\mathcal{H} = \{e_1 - e_0\} \oplus \overline{\{\mathcal{L}^m f\}}$$

Outils nécessaires : conditions sur $\mathcal{L}^m = \mathcal{A}^m + \gamma \mathcal{S}$

- a) Norme reliée à $(-\mathcal{S})^{-1}$ \triangleright ~~Trou spectral~~
- b) Remplacer \mathcal{L} par \mathcal{S} \triangleright Condition de secteur **affaiblie**
 \triangleright Si on ajoute l'échange $\frac{p_x}{\sqrt{m_x}} \leftrightarrow r_x$

Fluctuations de l'énergie

- ▷ **Conséquence du TCL** : Si $\{r_x, p_x\}$ sont distribués selon μ_T

$$\mathcal{Y}^N(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^N \delta_{x/N}(\cdot) \{e_x - T\}$$

converge en distribution vers un champ gaussien.

Fluctuations de l'énergie

- **Conséquence du TCL** : Si $\{r_x, p_x\}$ sont distribués selon μ_T

$$\mathcal{Y}^N(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^N \delta_{x/N}(\cdot) \{e_x - T\}$$

converge en distribution vers un champ gaussien.

Théorème 2 [S. 2014]

Le champ de fluctuations de l'énergie

$$\mathcal{Y}_t^N(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^N \delta_{x/N}(\cdot) \{e_x(tN^{\mathbf{a}}) - T\}$$

dans l'échelle diffusive $\mathbf{a} = \mathbf{2}$ converge en distribution vers un processus de Ornstein-Uhlenbeck généralisé \mathcal{Y}_t solution de

$$\partial_t \mathcal{Y} = \mathbf{D} \partial_x^2 \mathcal{Y} dt + \sqrt{4\mathbf{D}T^2} \partial_x \mathcal{B}(x, t)$$

où \mathcal{B} est un bruit blanc standard, \mathbf{D} est le coefficient de diffusion.

3 – DIFFUSION ANORMALE

Reformulation des fluctuations : Soient F et G deux fonctions lisses,

$$\left\langle \mathcal{Y}_t^N(F) \mathcal{Y}_0^N(G) \right\rangle_T \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2T^2 \iint_{\mathbb{R}^2} F(u)G(v) \mathbf{P}_t(u-v) du dv$$

où \mathbf{P}_t est le semi-groupe associé aux générateurs suivants :

3 – DIFFUSION ANORMALE

Reformulation des fluctuations : Soient F et G deux fonctions lisses,

$$\left\langle \mathcal{Y}_t^N(F) \mathcal{Y}_0^N(G) \right\rangle_T \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2T^2 \iint_{\mathbb{R}^2} F(u)G(v) \mathbf{P}_t(u-v) dudv$$

où \mathbf{P}_t est le semi-groupe associé aux générateurs suivants :

1. Diffusion normale, $a = 2$

▷ Harmonique + masses constantes + flip(γ)

$$\mathcal{L} = \mathbf{D}(\gamma) \cdot \Delta$$

$$\mathbf{D}(\gamma) \propto \gamma^{-1} \quad [\text{S. 2013}]$$

3 – DIFFUSION ANORMALE

Reformulation des fluctuations : Soient F et G deux fonctions lisses,

$$\left\langle \mathcal{Y}_t^N(F) \mathcal{Y}_0^N(G) \right\rangle_T \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2T^2 \iint_{\mathbb{R}^2} F(u)G(v) \mathbf{P}_t(u-v) dudv$$

où \mathbf{P}_t est le semi-groupe associé aux générateurs suivants :

1. Diffusion normale, $a = 2$

▷ Harmonique + masses constantes + flip(γ)

$$\mathcal{L} = \mathbf{D}(\gamma) \cdot \Delta$$

$$\mathbf{D}(\gamma) \propto \gamma^{-1} \quad [\text{S. 2013}]$$

2. Diffusion anormale, $a = 3/2$

▷ Harmonique + masses constantes + échange faible(γ)

$$\mathcal{L} = -\mathbf{D}(\gamma)(-\Delta)^{3/4}$$

$$\mathbf{D}(\gamma) \propto \gamma^{-1/2}$$

3 – DIFFUSION ANORMALE

Reformulation des fluctuations : Soient F et G deux fonctions lisses,

$$\left\langle \mathcal{Y}_t^N(F) \mathcal{Y}_0^N(G) \right\rangle_T \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2T^2 \iint_{\mathbb{R}^2} F(u)G(v) \mathbf{P}_t(u-v) du dv$$

où \mathbf{P}_t est le semi-groupe associé aux générateurs suivants :

1. **Diffusion normale, $a = 2$** \Rightarrow MOMENT PAS CONSERVÉ

$$\mathcal{L} = \mathbf{D} \cdot \Delta$$

2. **Diffusion anormale, $a = 3/2$** \Rightarrow MOMENT CONSERVÉ

$$\mathcal{L} = -\mathbf{D}(-\Delta)^{3/4}$$

Vers un “crossover” ?

Nouveau système :

Vers un “crossover” ?

Nouveau système :

Harmonique + Masses constantes

Vers un “crossover” ?

Nouveau système :

Harmonique + Masses constantes

+ Échange faible $p_x \leftrightarrow p_{x+1}$

Vers un “crossover” ?

Nouveau système :

Harmonique + Masses constantes

+ Échange faible $p_x \leftrightarrow p_{x+1} \Rightarrow$ **Moment préservé**

Vers un “crossover” ?

Nouveau système :

Harmonique + Masses constantes

+ Échange faible $p_x \leftrightarrow p_{x+1} \Rightarrow$ **Moment préservé**

+ **Flip d'intensité** $\gamma := N^{-\mathbf{b}}$

Vers un “crossover” ?

Nouveau système :

Harmonique + Masses constantes

+ Échange faible $p_x \leftrightarrow p_{x+1} \Rightarrow$ **Moment préservé**

+ **Flip d'intensité** $\gamma := N^{-b}$

Résultats [Bernardin Gonçalves Jara Sasada S. 2014]

$b < 2/3$ Laplacien standard (échelle **$a = 2 - b/2$**)

Vers un “crossover” ?

Nouveau système :

Harmonique + Masses constantes

+ Échange faible $p_x \leftrightarrow p_{x+1} \Rightarrow$ **Moment préservé**

+ **Flip d'intensité** $\gamma := N^{-b}$

Résultats [Bernardin Gonçalves Jara Sasada S. 2014]

$b < 2/3$ Laplacien standard (échelle $a = 2 - b/2$)

$b > 1$ Laplacien fractionnaire (échelle $a = 3/2$)

CHAÎNES D'OSCILLATEURS HARMONIQUES EN 3 VARIATIONS

- ① *Masses constantes + flip des moments*
 - ▷ Deux quantités conservées (énergie et déformation)
 - ▷ Coefficient de diffusion bien défini (sens de Green-Kubo)
 - ▷ **Limites hydrodynamiques et fluctuations diffusives**
- ② *Masses i.i.d. bornées + flip(γ) + échange fort(λ)*
 - ▷ Coefficient de diffusion bien défini pour tout $\lambda \geq 0$
 - ▷ Fluctuations de l'énergie à l'équilibre pour $\lambda > 0$
 - ▷ **Limites hydrodynamiques ??**
- ③ *Masses constantes + échange faible + flip d'intensité N^{-b}*
 - ▷ **Fluctuations de l'énergie à l'équilibre** : deux régimes
 - ▷ Région du paramètre : $\mathbf{b} \in [2/3, 1]$??

Merci de votre attention !