



**HAL**  
open science

# Synthèse d'observateurs pour des classes de systèmes non linéaires

Moncef Triki

► **To cite this version:**

Moncef Triki. Synthèse d'observateurs pour des classes de systèmes non linéaires. Automatique. Université de Caen, 2011. Français. NNT: . tel-01061690

**HAL Id: tel-01061690**

**<https://theses.hal.science/tel-01061690v1>**

Submitted on 8 Sep 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Co-tutelle de thèse

entre

l'Université de Caen Basse-Normandie (*France*)

et

l'Université de Sfax (*Tunisie*)

(Arrêté du 06 janvier 2005)

THÈSE

présentée par

Moncef TRIKI

et soutenue

le 01 Août 2011

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

Spécialité : Automatique, productique

(Arrêté du 07 août 2006)

**TITRE : SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR  
DES CLASSES DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES**

**MEMBRES du JURY**

- M. N. DERBEL Pr. à l'ENI de Sfax (Examineur)  
M. M. FARZA Pr. à l'Université de Caen (Directeur de thèse)  
M. Y. KOUBAA Pr. à l'ENI de Sfax (Directeur de thèse)  
M. M. M'SAAD Pr. des Universités à l'ENSICAEN (Examineur)  
M. F. M'SAHLI Pr. à l'ENI de Monastir (Rapporteur)  
M. R. OUTBIB Pr. à l'Université d'Aix-Marseille (Rapporteur)

*À mon père et ma mère,  
À mon épouse, pour son indéfectible soutien,  
À mes anges, Yessmine, Yassine et Rayen,  
À tous ceux qui me sont chers.*

# Avant-Propos

Ce travail a été réalisé en cotutelle au sein de l'Unité de **C**ommande **A**utomatique (UCA) de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax et au Laboratoire de **G**roupe de **R**echerche en **I**nformatique, **I**mage, **A**utomatique et **I**nstrumentation de Caen (GREYC) au sein du groupe Automatique de l'université de Caen, à ce titre, je tiens à remercier ses dirigeants.

Je tiens tout particulièrement à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse Monsieur Mondher FARZA, Professeur à l'université de Caen (Laboratoire d'Automatique de Procédés, ISMRA, France) et Monsieur Yassine KOUBAA, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax (Responsable de l'Unité de Commande Automatique), pour leurs conseils, leurs aide qu'ils m'ont accordé dans la réalisation de ce travail et leur confiance dont ils m'ont honoré.

Je tiens à exprimer ma plus vive reconnaissance à Monsieur Nabil DERBEL, Professeur d'automatique à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, pour m'avoir honoré en acceptant d'être le président du jury.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Faouzi M'SAHLI, Professeur d'automatique à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir et Monsieur Rachid OUTBIB, Professeur à l'Université d'Aix Marseille qui ont bien voulu me faire le grand honneur de rapporter cette thèse de doctorat.

Je ne saurais dire toute ma gratitude à Monsieur Mohamed M'SAAD, Professeur des Universités à l'ENSICAEN et directeur du groupe Automatique au Laboratoire GREYC, pour l'honneur qu'il m'a accordé en acceptant d'examiner mon mémoire.

Je voudrais également remercier Monsieur Tarak Maatoug, Maître assistant à l'Institut Supérieur d'Informatique de Medenine, pour son aide qu'il m'a accordé.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent également à tous les membres, à tous les collègues et amis de l'Unité de Commande Automatique (UCA), l'Unité de Commande des Procédés Industriels (UCPI) et du groupe Automatique du laboratoire GREYC, qu'ils trouvent ici un témoignage de mon amitié pour la solidarité et le soutien moral dont ils ont toujours fait preuve.

Je n'oublie pas ma famille, mes frères et mes sœurs, mes beaux-parents, mes beaux-frères et mes belles sœurs, à qui je dois en grande partie l'accomplissement de ce travail par l'espoir et confiance en moi qu'ils ont toujours su me donner. Qu'ils trouvent avec ceci un modeste geste de reconnaissance et de remerciement. Je pense bien sur aussi à mes amis que je les remercie tous.

Je dédie finalement ce travail à :

Mes très chers parents, qui m'ont soutenu durant mes nombreuses années d'études ;

Ma petite famille, ma très chère épouse Hela, mes chers enfants Yessmine, Yassine et Rayen, à qui je dois en grande partie l'accomplissement de ce travail par l'espoir, la confiance et les sacrifices infinis qu'ils ont toujours su me procurer. Qu'ils trouvent avec ceci un modeste geste de reconnaissance et de remerciement.

# Liste des publications de Moncef TRIKI

## Revue Internationale

1. M. Triki, M. Farza, T. Maatoug, M. M'saad, Y. Koubaa and B. Dahhou (2010), "Unknown inputs observers for a class of non linear systems", International Journal of Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering (IJSTA journal), Vol 4, July 2010, pp. 1218-1229
2. M. Farza, M. M'Saad, M. Triki, T. Maatoug and Y. Koubaa , "High gain observer for a class of non triangular systems", Systems and Control Letters 60 (2011) 27-35
3. Y. Agrebi, M. Triki, Y. Koubaa and M. Boussak, "Rotor speed estimation for indirect stator flux oriented induction motor drive based on MRAS scheme", Journal Electrical Systems 3-3 (2007) pp. 131-143

## Conférences Internationales

1. M. Triki, M. Farza, M. M'Saad, T. Maatoug, B. Dahhou (2010), " Observer synthesis for a class of MIMO non triangular systems" , 18th Mediterranean Conference on Control and Automation Congress, Marrakech, Morocco June 23-25 2010, pp.1140-1145 (MED 2010)
2. M. Triki, M. Farza, T. Maatoug, M. M'Saad and Y. Koubaa (2010), " Observer synthesis for a class of non linear systems with nonlinearly parametrized unknown inputs" , 6th International Conference on Electrical Systems and Automatic Control, March 26-28, 2010 (JTEA2010).

3. M. Farza, M. Triki, M. M'Saad et Y. Koubaa (2009), "Unknown inputs observers for a class of non linear systems", 10th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control & computer engineering, Hammamet, Tunisia December 20-22, 2009, pp.1322-1333 (STA 2009).
4. M. Farza, M. M'Saad et M. Triki (2009), "Adaptive observer for a class of MIMO non triangular uniformly observable nonlinear systems", International Conference on Systems, Signals & Devices, Djerba, Tunisia March 2009 (SSD 2009)
5. M. Triki, Farza et M. M'Saad (2008), "High gain adaptive observer for a class of nonlinear systems without triangular structure", 9th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control & computer engineering, Sousse, Tunisia, December 20-22, 2009, pp.1-16 (STA 2008)
6. M. Triki et Y. Koubaa (2006), "Synthèse d'un observateur pour une classe de systèmes fractionnaires ", sixièmes journées scientifiques des jeunes chercheurs en Génie Electrique et Informatique, Hammamet, Tunisie 24-26 mars 2006, (GEI'2006)





# Notations, symboles et abréviations

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{R}^+$	ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}^n$	espace vectoriel de dimension $n$ construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
$I_n$	matrice identité de dimension $n \times n$ (appropriées)
$0_{n \times m}$	matrice nulle de dimension $n \times m$ (appropriées)
$[a, b]$	intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$
$]a, b[$	intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$
$t$	variable temporelle
$[a, b[$	intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	dérivée temporelle de l'état $x$
$C^\omega$	ensemble des fonctions continûment différentiables $\omega$ fois dans $\mathbb{R}^n$
$X > 0$ ( $\geq 0$ )	$X$ définie positive (semi définie positive)
$X < 0$ ( $\leq 0$ )	$X$ définie négative (semi définie négative)
$\dim(X)$	dimension de la matrice $X$
$(\cdot)^T$	transposée du bloc symétrique
$\triangleq$	égal par définition
$\lambda_{min}(P)$	la plus petite valeur propre de la matrice carrée $P$
$\lambda_{max}(P)$	la plus grande valeur propre de la matrice carrée $P$
$\  \cdot \ $	norme Euclidienne
$  a  $	valeur absolue du nombre réel $a$
$\varepsilon$	vecteur des entrées inconnus
$\theta$	paramètre de réglage du gain de l'observateur
$\Phi^c$	fonction réciproque de $\Phi$
$(\cdot)^+$	inverse à gauche ( $\cdot$ )
$\delta$	puissance de $\theta$

**Acronymes**

SNL	Système non linéaire (Non Linear System)
SISO	Mono-entrée Mono-sortie (Single Input Single Output)
MISO	Multi-entrée Mono-sortie (Multiple Input Single Output)
MIMO	Entrées multiples sorties multiples (Multiple Input Multiple Output)
LVT	Linéaire variant dans le temps
EDO	Equation différentielle ordinaire
TVM	Théorème de la valeur moyenne
EDP	Equation à dérivées partielles
LMI	Inéquations Matricielle Linéaires



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>12</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>15</b>
<b>2 Rappel de quelques formes observables</b>	<b>21</b>
2.1 Forme canonique observable pour toute entrée . . . . .	21
2.2 Classe particulière de SNL MIMO uniformément observable . . . . .	24
2.3 Classe particulière de systèmes incertains . . . . .	29
2.3.1 Synthèse d'observateur . . . . .	30
2.3.2 Analyse de convergence . . . . .	31
<b>3 Synthèse d'observateurs pour une forme non triangulaire</b>	<b>35</b>
3.1 Classe du système . . . . .	35
3.2 Préliminaires . . . . .	38
3.2.1 Observabilité pour toute entrée . . . . .	39
3.2.2 Quelques définitions et notations . . . . .	40
3.2.3 Discussion de la classe de systèmes considérée . . . . .	44
3.3 Synthèse de l'observateur . . . . .	48
3.4 Exemple . . . . .	54
3.5 Conclusion . . . . .	55
<b>4 Observateurs à entrées inconnues</b>	<b>59</b>
4.1 Introduction . . . . .	59
4.2 Formulation du problème . . . . .	59
4.3 Cas d'une entrée inconnue . . . . .	66
4.3.1 Cas où $\rho_1 < q$ . . . . .	66
4.3.1.1 Système augmenté . . . . .	66

---

4.3.1.2	Changement de coordonnées . . . . .	68
4.3.1.3	Equations de l'observateur dans les nouvelles coordonnées . . . . .	76
4.3.1.4	Equations de l'observateur dans les coordonnées originales . . . . .	76
4.3.1.5	Exemple . . . . .	81
4.3.1.6	Résultats de simulation . . . . .	86
4.3.2	Cas où $\rho_1 = q$ . . . . .	88
4.4	Cas de plusieurs entrées inconnues . . . . .	89
4.4.1	Cas où $\rho_r < q$ . . . . .	89
4.4.1.1	Système augmenté . . . . .	90
4.4.1.2	Equations de l'observateur dans les coordonnées originales . . . . .	92
4.4.1.3	Exemples . . . . .	99
4.4.1.4	Résultats de simulation . . . . .	104
4.4.2	Cas où $\rho_r = q$ . . . . .	106
4.4.2.1	Système augmenté . . . . .	106
4.4.2.2	Equations de l'observateur dans les coordonnées originales . . . . .	108
4.5	Conclusion . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Synthèse d'un observateur adaptatif</b>	<b>115</b>
5.1	Introduction . . . . .	115
5.2	Formulation du problème . . . . .	116
5.2.1	Quelques préliminaires . . . . .	117
5.2.2	Synthèse de l'observateur . . . . .	121
5.2.3	Analyse de la convergence . . . . .	125
5.3	Exemple . . . . .	133
5.4	Conclusion . . . . .	136
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>139</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>141</b>

# Table des figures

3.1	Mesures bruitées de $x_1^1$ et $x_1^2$ . . . . .	56
3.2	Estimation des états non mesurés . . . . .	57
4.1	Sorties mesurées $x_1$ et $x_2$ . . . . .	87
4.2	Estimation des états non mesurés $x_3$ et $x_4$ . . . . .	87
4.3	Estimation des états non mesurés $x_5$ et $x_6$ . . . . .	87
4.4	Estimation de l'entrée inconnue $v$ . . . . .	88
4.5	Estimation des états non mesurés $x_4$ et $x_5$ . . . . .	102
4.6	Estimation des états non mesurés $x_6$ et $x_7$ . . . . .	102
4.7	Estimation des entrées inconnues $v_1$ et $v_2$ . . . . .	102
4.8	Estimation des états non mesurés $x_4$ et $x_5$ . . . . .	105
4.9	Estimation d'état non mesurés $x_6$ . . . . .	105
4.10	Estimation des entrées inconnues $v_1$ et $v_2$ . . . . .	105
5.1	Mesures bruitées des sorties . . . . .	136
5.2	Paramètres inconnues estimés . . . . .	137
5.3	Estimation des états non mesurés . . . . .	138



# Chapitre 1

## Introduction

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse porte sur la synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires. Les observateurs proposés sont soit des observateurs classiques, généralement utilisés pour l'estimation de l'état, soit des observateurs à entrées inconnues ou encore des observateurs adaptatifs.

En dépit d'une activité de recherche intense et continue pour la synthèse d'observateurs (classiques) pour les systèmes non linéaires multi-sorties (cf. par exemple [Bornard et Hammouri \[1991a\]](#), [Ciccarella \*et al.\* \[1993\]](#), [Farza \*et al.\* \[2004\]](#), [Gauthier et Bornard \[1981\]](#), [Gauthier \*et al.\* \[1992\]](#), [Gauthier et Kupka \[1994\]](#), [Hammouri et Farza \[2003\]](#), [Hou et Pugh \[1999\]](#), [Krener et Isodori \[1983\]](#), [Krener et Respondek \[1985\]](#), [Nijmeijer \[1981\]](#), [X.H.Xia et W.B.Gao \[1989\]](#)), ce problème reste encore ouvert. D'une manière générale, on peut répartir sur cinq classes les différentes approches de synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires. La première est basée sur le filtre de Kalman et a suscité beaucoup d'intérêts pendant longtemps. Ceci est essentiellement dû à une simplicité relative dans sa mise en oeuvre même pour des systèmes de taille importante. De plus, ce filtre constitue souvent le point de départ pour la synthèse d'observateurs pour de tels systèmes. Toutefois, dans la plupart des cas, on manque de preuve de convergence du filtre. La deuxième approche est basée sur la linéarité de l'erreur. Elle consiste à considérer des transformations appropriées qui mettent le système à étudier sous une forme où les non linéarités ne dépendent que des entrées et des sorties (cf. par exemple [Hou et Pugh \[1999\]](#), [Krener et Isodori \[1983\]](#), [Krener et Respondek \[1985\]](#), [Guay \[2002\]](#), [X.H.Xia et W.B.Gao \[1989\]](#)).



Dans les premiers travaux relatifs à cette approche, une difficulté essentielle réside dans la recherche de la transformation appropriée qui nécessite la résolution de systèmes d'Equations à Dérivées Partielles (EDP). Plus récemment, cette difficulté est surmontée par la proposition d'algorithmes constructifs qui permettent de transformer le système original sous la forme appropriée sans avoir à résoudre de systèmes EDP (Souleiman *et al.* [2003]). La troisième approche est basée sur des techniques LMI qui s'appuient sur des équations de type Lyapunov ou Riccati, algébriques ou différentielles (Rajamani [1998]). La synthèse de l'observateur repose alors sur la faisabilité d'un certain nombre d'inéquations matricielles linéaires (Linear Matrix Inequality, LMI). L'inconvénient majeur de cette approche réside dans l'absence dans la plupart des cas de conditions exploitables garantissant la faisabilité des LMI considérés. En effet, la faisabilité de ces LMI devra être vérifiée *a priori* de manière numérique (Arcak et Kokotović [2001]). La quatrième approche utilise des outils de l'algèbre différentielle. Elle consiste à exprimer les états non mesurés en fonction des sorties, des entrées et de leurs dérivées (par rapport au temps) successives, ces dérivées étant calculées par des différentiateurs numériques (cf. par exemple Diop et Fliess [1991b,a], Fliess *et al.* [2008]). La cinquième et dernière approche se base sur des formes canoniques observables. La première contribution qui entre dans le cadre de cette approche est celle de (Gauthier *et al.* [1992]) où les auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour caractériser les systèmes mono-sorties uniformément observables et elle consiste en l'existence d'une transformation qui mette le système sous la forme triangulaire. Cette forme canonique est ensuite exploitée pour la synthèse d'un observateur à grand gain sous certaines conditions, notamment le caractère global Lipschitz des non linéarités. On notera que le gain de l'observateur proposé est issu de la résolution d'une équation algébrique de Lyapunov et son expression a été donnée. La généralisation de ce résultat aux systèmes multi-sorties a fait l'objet de plusieurs travaux dont notamment (Busawon *et al.* [1998], Deza *et al.* [1992], Farza *et al.* [2004], Gauthier et Kupka [1994], Hammouri et Farza [2003], Hou *et al.* [2000], Shim *et al.* [2001], Rudolph et Zeitz [1994]).

Notre contribution en terme de synthèse d'observateurs classiques consiste à proposer un observateur de type grand gain pour une classe de systèmes qui inclut, à notre connaissance, toutes les classes de systèmes observables pour toute entrée

---

considérés dans la littérature pour la synthèse d'observateurs. De plus, des termes incertains ont été considérés dans la classe des systèmes considérés. L'objectif derrière la considération de tels termes est l'utilisation de l'observateur proposé dans le chapitre suivant qui traite des entrées inconnues.

En ce qui concerne la synthèse des observateurs à entrées inconnues, la majorité des travaux existants traitent des systèmes linéaires à entrées inconnues ([Meditch et Hostetter \[1974\]](#), [Johson \[1975\]](#), [Wang \*et al.\* \[1975\]](#), [Bhattacharyya \[1978\]](#), [Kudva \*et al.\* \[1980\]](#), [Yang et Wilde \[1988\]](#), [Hou et Müller \[1992\]](#), [Guan et Saif \[1991\]](#), [Darouach \*et al.\* \[1994\]](#)). D'une manière générale, les solutions apportées à ce problème peuvent être classées en trois catégories ou approches. Dans la première approche, certaines hypothèses relatives à la structure des entrées inconnues sont considérées et un observateur approprié est alors proposé (cf. par exemple [Meditch et Hostetter \[1974\]](#), [Johson \[1975\]](#)). Dans la deuxième approche, les algorithmes proposés consistent à introduire des changements de coordonnées qui permettent de générer un système dynamique indépendant des entrées inconnues. Le système ainsi généré est ensuite exploité pour la synthèse d'observateurs (classiques) permettant l'estimation des états non mesurés de ce système (cf. par exemple [Wang \*et al.\* \[1975\]](#), [Kudva \*et al.\* \[1980\]](#), [Yang et Wilde \[1988\]](#), [Hou et Müller \[1992\]](#), [Guan et Saif \[1991\]](#), [Darouach \*et al.\* \[1994\]](#)). Dans la troisième approche, les solutions proposées consistent à estimer simultanément les états non mesurés et les entrées inconnues. L'inconvénient majeur de la première approche réside dans les hypothèses faites sur la structure des entrées inconnues. De telles hypothèses nécessitent la disponibilité d'une certaine connaissance sur la nature des entrées inconnues qui pourrait ne pas être disponible. Dans la deuxième approche, les algorithmes proposés ne fournissent aucune estimation ni information sur les entrées inconnues. Dans un travail relativement récent ([Corless et Tu \[1998\]](#)) entrant dans le cadre de la troisième approche, l'auteur utilise des techniques LMI pour calculer le gain d'observation. Toutefois, des conditions assez fortes sur la variation de l'erreur d'estimation ont été supposées pour assurer sa convergence. Dans un article plus récent ([Xiong et Saif \[2003\]](#)), les auteurs ont proposé un observateur d'ordre réduit pour estimer simultanément l'état et les entrées inconnues lorsque celles-ci varient lentement en fonction du temps. D'autres travaux concernant la synthèse d'observateurs pour des classes particulières de systèmes non

linéaires sont décrits dans (Xiong et Saif [2001], Boutayeb *et al.* [2002], Farza *et al.* [2004], Liu [2007]). Plus récemment, des conditions nécessaires et suffisantes ont été formulées pour la synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes bilinéaires (Hammouri et Tmar [2010]).

Notre contribution en termes de synthèse d'observateurs à entrées inconnues se situe dans le cadre de la troisième approche. Il s'agit de faire la synthèse d'un observateur de type grand gain pour l'estimation conjointe de l'état non mesuré et des entrées inconnues pour des classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. Pour ce faire, nous supposons simplement que la dérivée première par rapport au temps de chacune de ces entrées est bornée.

Notre dernière contribution dans ce mémoire concerne la synthèse d'observateurs adaptatifs pour une classe de systèmes non linéaires avec une paramétrisation non linéaire. Ce travail est une extension de celui présenté dans (Farza *et al.* [2009b]). En effet, dans (Farza *et al.* [2009b]), les auteurs ont proposé la synthèse d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes, similaire à (2.1) mais où les non linéarités renferment des coefficients constants mais inconnus qui seront estimés conjointement avec les états par l'observateur proposé. La synthèse proposée est effectuée sous les mêmes hypothèses que celles de l'observateur d'état (2.4), proposé pour (2.1), modulo une hypothèse additionnelle relative à une certaine condition d'excitation persistante. Dans notre travail, nous sommes partis d'un système similaire à (3.1), sans dynamique inconnue, où les non linéarités renferment des coefficients constants mais inconnus qui peuvent intervenir de manière quelconque dans tous les blocs. Nous avons alors reformulé la condition d'excitation persistante, ce qui a permis la synthèse d'un observateur pour l'estimation conjointe de tous les états et paramètres inconnus.

Ce mémoire est composé de 6 chapitres dont l'introduction et la conclusion.

Dans le chapitre 2, une forme observable caractérisant une classe de systèmes non linéaires multi-sorties observables pour toute entrée est tout d'abord rappelée. Ensuite, nous introduisons une classe de systèmes qui peuvent se mettre sous la forme

canonique précédemment présentée à l'aide de transformations appropriées qui sont explicitées. Ces transformations seront utilisées dans le chapitre 4 dédié à la synthèse d'observateurs à entrées inconnues. A la fin de ce chapitre, et pour mettre en avant les difficultés introduites par la prise en compte de dynamiques incertaines lors de la synthèse d'observateurs, un système particulier comportant une dynamique incertaine est considéré et un observateur correspondant est synthétisé.

Dans le chapitre 3, nous introduisons une forme canonique d'observabilité caractérisant une large classe de systèmes multi-sorties observables pour toute entrée. Après la discussion de cette forme et sa comparaison avec les formes existantes, un observateur de type grand gain est proposé. La convergence de l'observateur proposé est détaillée et la synthèse est illustrée à travers des exemples.

Le chapitre 4 traite de la synthèse d'observateurs à entrées inconnues. Une classe de systèmes comportant des entrées inconnues est tout d'abord présentée. L'objectif consiste à synthétiser un observateur permettant l'estimation conjointe de tous les états et de toutes les entrées inconnues. Un tel observateur a été effectivement proposé et les différentes étapes de la synthèse ont été détaillées. Plusieurs exemples sont données à titre d'illustration.

Dans le chapitre 5, nous proposons la synthèse d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes non linéaires avec une paramétrisation non linéaire. Les différentes étapes de la synthèse sont détaillées et illustrées à travers un exemple.

Plusieurs résultats de simulation sont présentés dans ce mémoire pour illustrer les performances des différents observateurs proposés.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion et les perspectives de recherche dans le contexte des résultats obtenus.



# Chapitre 2

## Rappel de quelques formes observables

Dans ce chapitre, nous présentons une forme observable (2.1) caractérisant une classe de systèmes non linéaires multi-sorties observables pour toute entrée. Ensuite, nous présenterons une classe particulière de systèmes non linéaires multi-sorties observables pour toute entrée qui peut se mettre, à l'aide d'une transformation appropriée qui sera aussi présentée, sous la forme canonique (2.1). Cette classe particulière sera considérée dans toute la partie qui traite de la synthèse des observateurs à entrées inconnues. Pour mettre en avant la difficulté supplémentaire, introduite lors de la synthèse d'observateurs, par l'existence de termes incertains, nous avons détaillé au dernier paragraphe la synthèse d'un observateur de type grand gain pour un système dont la dynamique de la dernière composante de l'état comporte un terme incertain. Une analyse complète de la convergence de l'observateur est fournie et les propriétés de l'observateur sont discutées.

### 2.1 Forme canonique observable pour toute entrée

On considère les systèmes qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \quad (2.1)$$

où l'état  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^k \in \mathbb{R}^p$ ,  $k = 1, \dots, q$ ,  $n = qp$ , la sortie  $y \in \mathbb{R}^p$ , l'entrée  $u \in \mathbb{R}^\mu$  et  $\varphi(u, x)$  a une structure triangulaire par rapport à  $x$ , c'est-à-dire

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x^1) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix};$$

La matrice  $A$  de dimension  $n \times n$  est la matrice anti-décalage par bloc :

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & 0_p \\ \vdots & & I_p & 0_p \\ 0_p & & & \ddots & I_p \\ 0_p & \dots & 0_p & 0_p \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La matrice d'observation  $C$  a la structure particulière suivante :

$$C = [I_p \ 0_p \ \dots \ 0_p] \quad (2.3)$$

Cette forme canonique a été proposée par ([Hammouri et Farza \[2003\]](#)). Le système (2.1) se compose de plusieurs blocs dont chacun est associé à une composante vectorielle de l'état. La caractéristique principale de ce système réside dans le fait que le premier bloc est associé à toutes les sorties et que les non linéarités du système ont une structure triangulaire, c'est-à-dire la non linéarité d'un bloc ne dépend que des variables propres du bloc ou de celles des blocs supérieurs. Cette forme peut être interprétée comme une généralisation de la forme canonique caractérisant les systèmes mono-sortie uniformément observables ([Gauthier et Bornard \[1981\]](#), [Gauthier et al. \[1992\]](#), [Gauthier et Kupka \[1994\]](#)) .

Pour la synthèse de l'observateur, les hypothèses suivantes sont adoptées :

**Hypothèse 2.1** *La fonction  $\varphi(u, x)$  est globalement Lipschitz par rapport à  $x$ , localement uniformément en  $u$ .*

**Hypothèse 2.2** *L'entrée  $u$  est bornée.*

Rappelons que l'hypothèse (2.1) est classique et elle est généralement adoptée lors de la synthèse d'observateurs de type grand gain (se référer par exemple à [Gauthier et al. \[1992\]](#), [Hammouri et Farza \[2003\]](#)). Cette hypothèse est bien sûr restrictive par son caractère global. Toutefois, en pratique, la trajectoire du système (physique) reste généralement confinée dans un domaine compact borné  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  sur lequel les non linéarités sont lipschitziennes. Dans ce cas, il suffit de les étendre sur tout  $\mathbb{R}^n$  par une fonction globalement lipschitzienne. On pourra se référer par exemple à ([Shim et al. \[2001\]](#), [Farza et al. \[2004\]](#)) où ces problèmes sont traités.

Dans la suite de ce mémoire, on adoptera des hypothèses similaires à (2.1) tout en gardant en mémoire la remarque formulée précédemment.

Un observateur à grand gain pour le système (2.1) est le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\hat{z} - y) \quad (2.4)$$

où

- $\theta > 0$  est le paramètre de réglage de l'observateur.
- $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S + A^T S + S A = C^T C \quad (2.5)$$

- $\Delta_\theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice diagonale par bloc suivante :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right) \quad (2.6)$$

La solution  $S$  de l'équation (2.5) ainsi que le vecteur  $S^{-1} C^T$  peuvent s'exprimer comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{(i+j)} C_{i+j-2}^{j-1} I_p \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n \quad (2.7)$$

$$S^{-1} C^T = \begin{pmatrix} C_q^1 I_p \\ C_q^2 I_p \\ \vdots \\ C_q^q I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_j^i = \frac{j!}{(j-i)! i!} \quad (2.8)$$



où  $I_p$  est la matrice identité  $p \times p$ .

## 2.2 Classe particulière de SNL MIMO uniformément observable

Nous allons présenter maintenant une classe particulière de systèmes non linéaires uniformément observables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée sous la forme canonique présentée ci-dessus. Toutefois, ceci n'est plus vrai lorsque certaines entrées du système ne sont pas connues. C'est pourquoi nous introduisons cette forme particulière d'observabilité sur laquelle nous nous sommes appuyés dans les chapitres suivants pour la synthèse d'observateurs à entrées inconnues.

Soit la classe de systèmes non linéaires MIMO suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = f^0(u, x^1) \end{cases} \quad (2.9)$$

Avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix}; \quad f(u, x) = \begin{pmatrix} f^1(u, x^1, x^2) \\ f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u, x) \\ f^q(u, x) \end{pmatrix};$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $k = 1, \dots, q$  et  $p = n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q$ ,  $\sum_{k=1}^q n_k = n$ ; l'entrée  $u(t) \in \mathcal{U}$  l'ensemble des fonctions absolument continues à dérivées bornées de  $\mathbb{R}^+$  dans  $U$  un compact de  $\mathbb{R}^\mu$ ;  $f(u, x) \in \mathbb{R}^n$  où  $f^k(u, x) \in \mathbb{R}^{n_k}$  et  $f^0(u, x^1) \in \mathbb{R}^{n_0}$ . L'hypothèse suivante est adoptée :

**Hypothèse 2.3** Pour  $0 \leq k \leq q - 1$ ; la fonction  $x^{k+1} \mapsto f^k(u, x^1, \dots, x^k, x^{k+1})$  de  $\mathbb{R}^{n_{k+1}}$  dans  $\mathbb{R}^{n_k}$  est injective. De plus, on suppose que  $\exists \alpha, \beta > 0$  tels que pour tout  $k \in \{0, \dots, q - 1\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall u \in U$ ,

$$0 < \alpha^2 I_{n_{k+1}} \leq \left( \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right)^T \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \leq \beta^2 I_{n_{k+1}}$$

où  $I_{n_{k+1}}$  est la matrice identité  $(n_{k+1}) \times (n_{k+1})$ .

Cette classe de systèmes a été considérée par (Hammouri et Farza [2003]) pour la caractérisation d'une classe des systèmes uniformément observables. Les auteurs ont proposé un observateur à grand gain dont la synthèse a été effectuée en deux étapes. Dans la première étape, les auteurs ont introduit un changement de coordonnées qui a ramené le système (2.9) sous la forme canonique (2.1). La synthèse de l'observateur dans les nouvelles coordonnées est immédiate (c'est l'observateur (2.4)) puis les équations de l'observateur dans les coordonnées originales sont données en considérant la pseudo-inverse de la matrice jacobienne. Ce système a ensuite été reconsidéré par (Farza *et al.* [2005]) où les auteurs ont proposé une version légèrement modifiée de l'observateur présenté dans (Hammouri et Farza [2003]). En effet, la nouvelle version ne nécessite pas l'inversion de toute la matrice jacobienne mais que des termes diagonaux de cette matrice. Nous proposons dans ce qui suit de donner la transformation qui permet de transformer le système (2.9) sous la première forme canonique ainsi que les équations de l'observateur modifié dans les nouvelles coordonnées et les coordonnées originales.

Considérons le changement de coordonnées suivant :

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n_0q}$$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \longrightarrow z = \Phi(u, x) = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^q \end{pmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} z^1 = f^0(u, x^1) \\ z^2 = \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x^1) f^1(u, x^1, x^2) \\ z^3 = \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x^1) \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ z^q = \left( \prod_{k=0}^{q-2} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) f^{q-1}(u, x) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où  $z^k \in \mathbb{R}^{n_0}$ ,  $k = 1, \dots, q$ .

D'après l'hypothèse (2.3), l'application  $\Phi$  est injective; soit  $\Phi^c$  sa fonction réciproque. Avant d'écrire la dynamique de  $z$ , nous introduisons les notations suivantes :

- Soit  $\Lambda(u, x)$  la matrice diagonale en blocs suivante :

$$\Lambda(u, x) = \text{diag} \left( \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x), \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x) \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=0}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) \quad (2.11)$$

D'après l'hypothèse (2.3),  $\Lambda(u, x)$  est inversible à gauche. On désignera dans la suite par  $\Lambda^+(u, x)$  son inverse à gauche. On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} \Lambda(u, x)f(u, x) &= Az + G(u, x) \text{ ou encore} \\ f(u, x) &= \Lambda^+(u, x)Az + \Lambda^+(u, x)G(u, x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $A$  est une matrice carrée  $n_0q \times n_0q$  et  $G(u, x) \in \mathbb{R}^{n_0q}$  et ils sont donnés par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_0} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & I_{n_0} & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & I_{n_0} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } G(u, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left( \prod_{k=0}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) f^q(u, x) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant générer l'expression de la dérivée par rapport au temps de  $z$  :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x)\dot{x}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \\ &= \Lambda(u, x)f(u, x) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) f(u, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \\ &= Az + G(u, x) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) (\Lambda^+(u, x)Az + \Lambda^+(u, x)G(u, x)) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \end{aligned}$$

d'après (2.12).

Notant que la matrice  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right)$  est triangulaire inférieure avec des zéros sur toute sa diagonale. Puisque  $\Lambda^+(u, x)$  est diagonale et que les  $((q-1)n_0)$  premières composantes de  $G(u, x)$  sont nulles, on a :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) \Lambda^+(u, x)G(u, x) = 0 \quad (2.13)$$

Par conséquent, la dynamique de  $z$  peut être réécrite comme suit :

$$\dot{z}(t) = Az + G(u, x) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) \Lambda^+(u, x) Az + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x) \dot{u}(t)$$

Pour alléger les écritures, on adoptera les notations suivantes dans la suite :

$$\begin{aligned} \Theta(u, z) &\triangleq \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) \Lambda^+(u, x) \\ &= \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(z)) - \Lambda(u, \Phi^c(z)) \right) \Lambda^+(u, \Phi^c(z)) \\ \varphi(u, z) &\triangleq \Theta(u, z) Az + G(u, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x) \dot{u}(t) \\ &= \Theta(u, z) Az + G(u, \Phi^c(z)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, \Phi^c(z)) \dot{u}(t) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Compte tenu du fait que  $\Theta(u, z)$  est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale principale, on peut vérifier que la fonction  $\varphi(u, z)$  possède une structure triangulaire.

En utilisant les notations adoptées, le système (2.9) peut être écrit dans les nouvelles coordonnées en  $z$  comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(u, z) \\ y = Cz \end{cases} \tag{2.15}$$

où

$$C = [I_{n_0}, 0_{n_0}, \dots, 0_{n_0}]$$

est une matrice  $n_0 \times n_0 q$  avec  $0_{n_0}$  la matrice nulle de dimension  $n_0 \times n_0$ .

Il est clair que le système (2.15) est sous la forme canonique (2.1). De ce fait, l'observateur (2.4) peut être synthétisé pour ce système (sous l'hypothèse technique portant sur le caractère Lipschitz de la fonction  $\varphi$ ). Toutefois, comme nous l'avons signalé précédemment, l'équation d'un tel observateur dans les coordonnées originales en  $x$ , nécessite l'inversion de toute la matrice jacobienne. Pour contourner cette inversion, un nouvel observateur a été proposé. Les équations de cet observateur s'écrivent dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z} + \varphi(u, \hat{z}) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TC(\hat{z} - z) \\ &\quad - \frac{\partial\Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z})) \left( \Lambda^+(u, \Phi^c(\hat{z})) - \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z})) \right)^+ \right) \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TC(\hat{z} - z)\end{aligned}\tag{2.16}$$

$$\text{où } \hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{z}^1 \\ \hat{z}^2 \\ \vdots \\ \hat{z}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_0q} \text{ avec } \hat{z}^k \in \mathbb{R}^{n_0}, k = 1, \dots, q.$$

Maintenant, il est clair que l'observateur (2.16) s'écrit dans les coordonnées originales  $x$  comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = f(u, \hat{x}) - \theta\Lambda^+(u, \hat{x})\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T(f^0(u, \hat{x}^1) - f^0(u, x^1))\tag{2.17}$$

$$\text{où } \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}, k = 1, \dots, q \text{ et } x \text{ est le vecteur des trajectoires}$$

du système (2.9).

On remarque que l'observateur dans les coordonnées originales ne nécessite pas l'inversion de toute la matrice jacobienne mais que de ses termes diagonaux rassemblés au sein de la matrice  $\Lambda$ .

Nous allons dans ce qui suit essayer de positionner le problème de synthèse d'observateurs pour les systèmes comportant des entrées inconnues. Nous insisterons en particulier sur les difficultés supplémentaires que l'on ne rencontrait pas en l'absence d'entrées inconnues. Pour commencer, nous allons rappeler un résultat connu concernant la synthèse d'observateurs pour les systèmes incertains avec des perturbations additives.

## 2.3 Classe particulière de systèmes incertains

Considérons la classe de systèmes non linéaires MIMO suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) + \varepsilon(t) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \quad (2.18)$$

où l'état  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^k \in \mathbb{R}^p$ ,  $k = 1, \dots, q$ ,  $n = qp$ , la sortie  $y \in \mathbb{R}^p$ ,

l'entrée  $u \in \mathbb{R}^\mu$  et  $\varphi(u, x)$  a une structure triangulaire par rapport à  $x$ , c'est-à-dire

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x^1) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix};$$

Les matrices  $A$  et  $C$  sont respectivement données par (2.2) et (2.3). Enfin,  $\varepsilon(t) =$

$\begin{pmatrix} \varepsilon^1(t) \\ \varepsilon^2(t) \\ \vdots \\ \varepsilon^q(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est une fonction vectorielle et chaque composante  $\varepsilon^k \in \mathbb{R}^p$  est une

fonction inconnue qui sera supposée différentiable par rapport au temps, bornée et avec une dérivée par rapport au temps bornée.

On remarque que la classe de systèmes (2.18) est très similaire à la classe (2.1) qui caractérise une classe de systèmes observables pour toute entrée. La seule différence réside dans l'ajout du terme incertain  $\varepsilon(t)$ . Ce terme incertain peut être considéré comme un vecteur d'entrées inconnues et le problème considéré devient la synthèse d'un observateur pour l'estimation des trajectoires du système (2.18) avec une précision à expliciter.

Il est connu que lorsque les  $q - 1$  premières composantes de  $\varepsilon$  sont identiquement nulles, c'est-à-dire que le vecteur d'entrée inconnues ne comporte qu'une seule composante, la dernière, qui nécessite d'être estimée, alors un observateur peut être

synthétisé pour le système (2.18) et l'erreur d'estimation peut être rendue aussi petite que désirée par un choix approprié des paramètres de synthèse de l'observateur. Dans les autres cas, c'est-à-dire lorsque des composantes du vecteur des entrées inconnues, autres que la dernière, sont non nulles, l'erreur d'estimation ne peut pas être pilotée de manière arbitraire. Nous allons retrouver ces résultats en proposant une synthèse d'observateur de type grand gain pour le système (2.18).

### 2.3.1 Synthèse d'observateur

Pour la synthèse de l'observateur, on considère les hypothèses classiques (2.1) et (2.2), généralement adoptées lors de la synthèse d'observateurs de type grand gain et nous ajoutons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2.4** *Pour chaque  $k = 1, \dots, q$ , la fonction inconnue  $\varepsilon^k(t)$  est bornée, i.e.*

$$\exists \beta_k > 0, \forall t \geq 0 : \sup_{t \geq 0} \|\varepsilon^k(t)\| \leq \beta_k$$

Notons que les hypothèses (2.1) et (2.4) ne requièrent pas la connaissance de la constante de Lipschitz de  $\varphi$ , ni celle de  $\beta$  (borne supérieure de la dérivée par rapport au temps de  $\varepsilon(t)$ ).

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\hat{x} - y) \quad (2.19)$$

où  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^p$ ,  $k = 1, \dots, q$ ,  $n = qp$ ;  $u$ ,  $y$  et  $x$  sont respectivement

l'entrée, la sortie et la trajectoire inconnue du système (2.18),  $S$ ,  $\Delta_\theta$  et  $C$  sont respectivement données par (2.5), (2.6) et (2.3) et finalement  $\theta > 0$  est un paramètre de synthèse.

Nous énonçons le résultat suivant :

**Théorème :** *Sous les hypothèses (2.1) et (2.4), le système (2.19) est un observateur pour le système (2.18) ayant les propriétés suivantes. En l'absence d'incertitude,*

*l'erreur d'observation converge exponentiellement vers 0. Lorsque  $\varepsilon^k = 0$  pour  $k = 1, \dots, q - 1$ , l'erreur d'observation peut être rendu aussi petite que désirée par le choix de valeurs assez élevées de  $\theta$ .*

La preuve de ce théorème est détaillée dans ce qui suit.

### 2.3.2 Analyse de convergence

Soit  $\tilde{x} = \hat{x} - x$  l'erreur d'observation. Nous avons :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x) - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^TC\tilde{x} - \varepsilon$$

Nous introduisons maintenant le changement de variable suivant :

$$\bar{x} = \Delta_\theta\tilde{x} \tag{2.20}$$

où  $\Delta_\theta$  est définie par (2.6). On obtient :

$$\dot{\bar{x}} = \Delta_\theta A\Delta_\theta^{-1}\bar{x} + \Delta_\theta(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \theta S^{-1}C^TC\bar{x} - \Delta_\theta\varepsilon \tag{2.21}$$

En utilisant le fait que  $\Delta_\theta A\Delta_\theta^{-1} = \theta A$ ,  $C\Delta_\theta^{-1} = C$  et en appliquant le théorème de la valeur moyenne (TVM) à  $\varphi$ , l'équation (2.21), devient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi)\tilde{x} - \theta S^{-1}C^TC\bar{x} - \Delta_\theta\varepsilon \\ &= \theta A\bar{x} + \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} - \theta S^{-1}C^TC\bar{x} - \Delta_\theta\varepsilon \end{aligned}$$

où  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_q)^T$  avec  $\xi_k \in \mathbb{R}^n$  ([Farza *et al.*, 2009a]).

Nous introduisons maintenant la fonction de Lyapunov candidate :  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T S \bar{x}$  où  $S$  est la solution de l'équation algébrique de Lyapunov (2.5). Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\bar{x}^T S \dot{\bar{x}} \\ &= 2\bar{x}^T S A \bar{x} + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi)\Delta_\theta^{-1}\bar{x} - 2\bar{x}^T C^TC\bar{x} - 2\bar{x}^T S \Delta_\theta\varepsilon \end{aligned}$$



En utilisant l'équation (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \theta (-\bar{x}^T S \bar{x} + \bar{x}^T C^T C \bar{x}) + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} - 2\theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} - 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \varepsilon \\
&= -\theta V - \theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} - 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \varepsilon \\
&\leq -\theta V + 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1} \bar{x} - 2\bar{x}^T S \Delta_\theta \varepsilon \\
&\leq -\theta V + 2\|\bar{x}^T S\| \|\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1}\| \|\bar{x}\| + 2\|\bar{x}^T S\| \|\Delta_\theta \varepsilon\| \\
&\leq -\theta V + 2\|S\| \|\bar{x}\| \|\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1}\| \|\bar{x}\| + 2\|S\| \|\bar{x}\| \|\Delta_\theta \varepsilon\| \\
&= -\theta V + 2\lambda_{\max}(S) \|\bar{x}\|^2 \|\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1}\| + 2\lambda_{\max}(S) \|\bar{x}\| \|\Delta_\theta \varepsilon\| \\
&\leq -\theta V + 2 \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)} \|\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1}\| V + 2 \frac{\lambda_{\max}(S)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\beta_k^2}{\theta^{2(k-1)}}} \sqrt{V} \quad (2.22)
\end{aligned}$$

où les  $\beta_k$  sont les bornes supérieures des  $\varepsilon^k$  données par l'hypothèse (H2) et  $\lambda_{\max}(\cdot)$  (resp.  $\lambda_{\min}(\cdot)$ ) désigne la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de  $(\cdot)$ .

Finalement, comme le champ de vecteurs  $\varphi$  est globalement lipschitzienne et a une structure triangulaire, nous avons pour tout  $\theta \geq 1$  :

$$\|\Delta_\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, \xi) \Delta_\theta^{-1}\| \leq k \quad (2.23)$$

où  $k$  est une constante positive qui ne dépend pas de  $\theta$ .

Combinant (2.22) et (2.23), nous obtenons :

$$\dot{V} \leq -(\theta - c)V + 2P\left(\frac{1}{\theta}\right)\sqrt{V} \quad (2.24)$$

$$\text{où } c = 2 \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)} \text{ et } P\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{\lambda_{\max}(S)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\beta_k^2}{\theta^{2(k-1)}}}.$$

Nous pouvons dire dès maintenant qu'en l'absence d'incertitude, c'est-à-dire si tous les  $\beta_k = 0$  sont nuls, le polynôme  $P\left(\frac{1}{\theta}\right)$  devient nul et  $V(\bar{e})$  converge exponentiellement vers 0. Il en est de même pour  $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$  et pour  $\tilde{x}$ . Dans le cas où  $P\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0$ , nous devons continuer les développements pour donner une borne supérieure de l'erreur d'estimation  $\tilde{x}$ . En effet, à partir de (2.24), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{V}}{\sqrt{V}} \leq -\frac{\theta - c}{2} \sqrt{V} + P\left(\frac{1}{\theta}\right) \quad (2.25)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\sqrt{V(\bar{x}(t))} &\leq e^{-\frac{\theta-c}{2}t} \sqrt{V(\bar{x}(0))} + \frac{1}{\theta-c} P\left(\frac{1}{\theta}\right) (1 - e^{-\frac{\theta-c}{2}t}) \\ &\leq e^{-\frac{\theta-c}{2}t} \sqrt{V(\bar{x}(0))} + \frac{1}{\theta-c} P\left(\frac{1}{\theta}\right)\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}} e^{-\frac{\theta-c}{2}t} \|\bar{x}(0)\| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}(\theta-c)} P\left(\frac{1}{\theta}\right) \quad (2.26)$$

Revenons maintenant à l'erreur originale  $\tilde{x}$  sachant que pour  $\theta \geq 1$  et compte tenu de (2.20), nous avons

$$\|\bar{x}\| \leq \|\tilde{x}\| \leq \theta^{q-1} \|\bar{x}\| \quad (2.27)$$

L'inégalité (2.26) devient

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}} \theta^{q-1} e^{-\frac{\theta-c}{2}t} \|\tilde{x}(0)\| + \frac{\theta^{q-1}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}(\theta-c)} P\left(\frac{1}{\theta}\right) \quad (2.28)$$

Il est clair que l'erreur asymptotique d'estimation reste dans une boule dont le rayon  $\rho$  est égal à la boule supérieure de  $\frac{\theta^{q-1}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}(\theta-c)} P\left(\frac{1}{\theta}\right)$  pour  $\theta \geq 1$ , i.e.

$$\rho = \sup_{\theta \geq 1} \frac{\theta^{q-1}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}(\theta-c)} P\left(\frac{1}{\theta}\right) \quad (2.29)$$

Pour que la valeur de  $\rho$  puisse tendre vers *zero* indépendamment des bornes  $\beta_k$ , il faut que le polynôme  $P\left(\frac{1}{\theta}\right)$  soit multiple de  $\frac{1}{\theta^{q-1}}$ , ce qui revient à dire que toutes les  $q-1$  premières composantes de  $\varepsilon$  sont identiquement nulles. Dans ce cas,  $\rho$  devient proportionnel à  $\frac{1}{\theta-c}$  et il peut être rendu aussi petit que désiré en prenant des valeurs assez élevées de  $\theta$ . Ceci termine la preuve du théorème.



# Chapitre 3

## Synthèse d'observateurs pour une forme non triangulaire

Dans ce chapitre, nous présentons la synthèse d'un observateur de type grand gain pour une classe de systèmes non linéaires observables pour toute entrée et comportant des incertitudes. La classe de systèmes considérée est formée par plusieurs blocs en cascade et chaque bloc est associé à un sous ensemble des sorties du système. De plus, chacun de ces blocs possède une structure triangulaire par rapport à ses variables mais peut dépendre des états d'autres blocs de manière non triangulaire. Notre objectif derrière la considération de cette classe de systèmes consiste donc à étendre la synthèse d'observateurs de type grand gain à une classe de systèmes plus large de systèmes incluant les classes déjà considérées dans la littérature pour la synthèse de type d'observateurs. Nous montrerons que l'observateur proposé converge exponentiellement en l'absence d'incertitudes. En présence de celles-ci, l'erreur asymptotique d'estimation peut être rendue aussi petite que désirée par le choix de valeurs assez élevées du seul paramètre de synthèse de l'observateur.

### 3.1 Classe du système

Nous considérons les classes de systèmes qui sont difféomorphes à la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) + \bar{\varepsilon}(t) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.1)$$

où

- $x$  est l'état du systèmes et se présente sous la partition suivante

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$$

$$\text{où } x_i^k = \begin{pmatrix} x_{i,1}^k \\ \vdots \\ x_{i,p_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p_k} \text{ avec } x_{i,j}^k \in \mathbb{R} \text{ pour } k = 1, \dots, q, i = 1, \dots, \lambda_k,$$

$$j = 1, \dots, p_k \text{ avec } \sum_{k=1}^q n_k = \sum_{k=1}^q p_k \lambda_k = n; p_k \geq 1 \text{ et } \lambda_k \geq 2$$

- $u$  et  $y$  représentent respectivement l'entrée et la sortie du système. La sortie se présente sous la partition suivante

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

où  $y_k \in \mathbb{R}^{p_k}$  pour  $k = 1, \dots, q$  avec

$$\sum_{k=1}^q p_k = p$$

- Les matrices diagonales par blocs  $A$  et  $C$  sont respectivement définies par

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_q \end{bmatrix} \text{ avec } A_k = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_k} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & I_{p_k} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

et

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_q \end{bmatrix} \text{ avec } C_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

- $\varphi(u, x)$  est un champ de vecteur non linéaire et se présente sous la forme suivante

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x) \\ \varphi^2(u, x) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \varphi^k(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^k(u, x) \\ \varphi_2^k(u, x) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^k(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$$

où la fonction  $\varphi_i^k(u, x) \in \mathbb{R}^{p_k}$  est différentiable par rapport à  $x$  et dépend de l'état de la manière suivante.

- pour  $1 \leq i \leq \lambda_k - 1$  :

$$\varphi_i^k(u, x) = \varphi_i^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x_1^k, x_2^k, \dots, x_i^k, x_1^{k+1}, x_1^{k+2}, \dots, x_1^q) \quad (3.4)$$

- pour  $i = \lambda_k$  :

$$\varphi_{\lambda_k}^k(u, x) = \varphi_{\lambda_k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^q) \quad (3.5)$$

- $\bar{\varepsilon}(t)$  est une fonction complètement inconnue et possède la structure particulière suivante :

$$\bar{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}^1(t) \\ \bar{\varepsilon}^2(t) \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}^q(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \bar{\varepsilon}^k(t) = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1^k(t) \\ \bar{\varepsilon}_2^k(t) \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_{\lambda_k}^k(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$$

où les fonctions  $\bar{\varepsilon}_i^k(t) \in \mathbb{R}^{p_k}$  sont données par

$$\bar{\varepsilon}_i^k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k = 1, \dots, q \text{ et } i = 1, \dots, \lambda_k - 1 \\ \varepsilon_k(t) & \text{pour } k = 1, \dots, q \text{ et } i = \lambda_k \end{cases}$$

où les  $\varepsilon_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, q$  sont des fonctions inconnues et bornées , i.e.

$$\exists \beta > 0; \forall t \geq 0; \|\varepsilon_k(t)\| \leq \beta \quad (3.6)$$

L'objectif recherché derrière l'introduction de la classe (3.1) consiste à étendre les résultats existants sur la synthèse d'observateurs en proposant une forme canonique qui caractérise une large classe de systèmes multi-sorties observables pour toute entrée. Les deux points suivants sont à mettre en avant :

- En l'absence d'incertitude, c'est-à-dire pour  $\bar{\varepsilon} = 0$ , la classe de systèmes (3.1) étend celle considérée dans (Shim *et al.* [2001]) dans deux sens. Tout d'abord, contrairement à la classe considérée dans (Shim *et al.* [2001]) où la sortie de chaque bloc est scalaire, ici, la sortie de chaque bloc est un vecteur appartenant à  $\mathbb{R}^{p_k}$ . Le deuxième aspect réside dans la structure des non linéarités qui est supposée être complètement triangulaire dans Shim *et al.* [2001]. Ici, le dernier étage de chaque bloc peut dépendre de tout l'état et le système global n'a donc pas une structure triangulaire. De plus, il est à signaler que le système considérée dans (Hammouri et Farza [2003]) est difféomorphe à la classe de système (3.1) avec  $q = 1$ , c'est-à-dire que dans (Hammouri et Farza [2003]), toutes les sorties sont regroupées au sein d'un seul bloc.
- En présence d'incertitude, la forme (3.1) inclut la classe de systèmes considérée dans (Farza *et al.* [2004]). Comme nous le verrons plus loin, la considération d'incertitude nous permettra d'utiliser les observateurs proposés pour des systèmes renfermant des entrées inconnues. Ce point sera détaillé plus loin dans cette thèse.

La suite du chapitre est organisée comme suit. Tout d'abord, nous montrerons que le système (3.1) est effectivement observable pour toute entrée. Ensuite, nous définirons quelques variables et introduirons quelques notations. Un lemme technique sera aussi donné. Puis, la structure du système (3.1) sera discutée en insistant sur les nouveautés exhibées par sa structure par rapport aux systèmes existants traités dans la littérature. La synthèse de l'observateur avec une analyse de la convergence sera ensuite détaillée avant de l'illustrer à travers un exemple académique. Avant de conclure, nous donnerons une classe de systèmes qui peut se mettre à l'aide de transformations appropriées, qui seront aussi présentées, sous la forme (3.1).

## 3.2 Préliminaires

Dans ce paragraphe, nous commencerons tout d'abord par montrer que le système (3.1) est observable pour toute entrée. Ensuite, nous introduisons quelques variables qui seront utilisées dans l'équation de l'observateur. Nous énoncerons ensuite un

lemme qui sera fort utile pour la démonstration de la convergence de l'observateur. La démonstration du lemme sera bien sûr fournie. Nous cloturons ce paragraphe par une discussion sur les nouveautés exhibées par la structure du système (3.1) ainsi que sur les difficultés qui sont soulevées par ces nouveautés et sur la façon dont ces difficultés ont été contournées.

### 3.2.1 Observabilité pour toute entrée

La dérivée par rapport au temps des  $(\lambda_k - 1)$  premières composantes du sous-système  $k$ , pour  $k = 1, \dots, q$ , peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i^k &= x_{i+1}^k + \varphi_i^k(u, x^1, \dots, x^{k-1}, x_1^k, x_2^k, \dots, x_i^k, x_1^{k+1}, x_1^{k+2}, \dots, x_1^q), \quad i = 1, \dots, \lambda_k - 1 \\ y_k &= x_1^k \end{cases}$$

$$\text{Soient } x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \text{ avec } x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \text{ et } \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \vdots \\ \bar{x}^q \end{pmatrix} \text{ avec } \bar{x}^k = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^k \\ \bar{x}_2^k \\ \vdots \\ \bar{x}_{\lambda_k}^k \end{pmatrix}$$

$$\text{deux états du système (3.1) associés respectivement aux sorties } y = \begin{pmatrix} y_1 = x_1^1 \\ y_2 = x_1^2 \\ \vdots \\ y_q = x_1^q \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 = \bar{x}_1^1 \\ \bar{y}_2 = \bar{x}_1^2 \\ \vdots \\ \bar{y}_q = \bar{x}_1^q \end{pmatrix}.$$

Pour alléger les notations nous omettrons dans la suite la variable temps  $t$ .

Pour montrer que le système (3.1) est observable (pour toute entrée), il suffit de montrer que :

$$y = \bar{y} \implies x = \bar{x}$$

En effet, supposons que  $y = \bar{y}$ . Ceci implique que

$$x_1^k = y_k = \bar{y}_k = \bar{x}_1^k \text{ pour } k = 1, \dots, q \quad (3.7)$$

En particulier, pour  $k = 1$ , on a

$$x_1^1 = \bar{x}_1^1 \quad (3.8)$$



Dérivons par rapport au temps chaque membre de l'équation (3.8). On obtient

$$\begin{aligned} x_2^1 + \varphi_1^1(u, x_1^1, y_2, \dots, y_q) &= \bar{x}_2^1 + \varphi_1^1(u, \bar{x}_1^1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_q) \\ &= \bar{x}_2^1 + \varphi_1^1(u, x_1^1, y_2, \dots, y_q) \end{aligned} \quad (3.9)$$

La dernière égalité résulte de (3.7) et elle implique que

$$x_2^1 = \bar{x}_2^1 \quad (3.10)$$

En dérivant à nouveau par rapport au temps chaque membre de l'équation (3.10) et en prenant en compte la structure triangulaire de  $\varphi_2^1$  par rapport à  $y$  et  $x_2^1$ , on obtient

$$x_3^1 = \bar{x}_3^1 \quad (3.11)$$

La répétition du même processus jusqu'à  $i = \lambda_1 - 1$  permet de conclure que  $x_{\lambda_1}^1 = \bar{x}_{\lambda_1}^1$ . De ce fait, on obtient  $x^1 = \bar{x}^1$ . Notons que la dernière équation du bloc (correspondant à  $i = \lambda_1$ ) n'a pas été utilisée. Maintenant, il suffit de procéder de la même façon avec tous les autres, pour  $k = 2, \dots, q$ , à partir de la première équation du bloc associée à  $x_1^k$  jusqu'à l'avant dernière associée à  $x_{\lambda_k-1}^k$ . A la fin de chaque étape (correspondant à un bloc), on conclut à  $x^k = \bar{x}^k$ . A la dernière étape, on conclut à  $x^q = \bar{x}^q$  et par la suite on obtient  $x = \bar{x}$ . Le système (3.1) est donc observable (pour toute entrée).

### 3.2.2 Quelques définitions et notations

Pour  $k = 1, \dots, q$ , soit  $\Delta_k(\theta)$  la matrice diagonale définie par :

$$\Delta_k(\theta) = \text{diag} \left( I_{p_k}, \frac{1}{\theta^{\delta_k}} I_{p_k}, \dots, \frac{1}{\theta^{\delta_k(\lambda_k-1)}} I_{p_k} \right) \quad (3.12)$$

où  $\theta > 0$  est un réel et les réels  $\delta_k$  qui interviennent comme des puissances de  $\theta$  sont données comme suit :

$$\begin{cases} \delta_k = 2^{q-k} \left( \prod_{i=k+1}^q (\lambda_i - \frac{3}{2}) \right) & \text{pour } k = 1, \dots, q-1 \\ \delta_q = 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Notons que pour tout  $k = 1, \dots, q-1$ , on a

$$\frac{\delta_k}{2} = (\lambda_{k+1} - \frac{3}{2}) \delta_{k+1} \quad (3.14)$$

Comme  $\lambda_k \geq 2$ , on a  $(\lambda_{k+1} - \frac{3}{2}) \geq \frac{1}{2}$  la suite de nombres réels positifs définie par les  $\delta_k$  est décroissante, c'est-à-dire

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_q = 1 \quad (3.15)$$

Nous définissons aussi la suite suivante de nombres réels pour  $k = 1, \dots, q$  et  $i = 1, \dots, \lambda_k$  :

$$\sigma_i^k = \sigma_1^k + (i-1)\delta_k \quad \text{avec} \quad \sigma_1^k = -(\lambda_k - 1)\delta_k + (\lambda_1 - 1)\delta_1 + \eta\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \quad (3.16)$$

où  $0 < \eta \leq 1$  peut être choisi arbitrairement petit.

Nous allons dans ce qui suit vérifier que  $\sigma_i^k \geq 0$  pour  $k = 1, \dots, q$  et  $i = 1, \dots, \lambda_k$ .

En effet, pour  $k = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sigma_i^1 &= \sigma_1^1 + (i-1)\delta_1 \\ &= (i-1)\delta_1 \\ &\geq 0 \quad \text{pour } i \geq 1 \quad \text{puisque } \delta_1 > 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pour  $k \geq 2$ , on a

$$\begin{aligned} \sigma_i^k &= (\lambda_1 - 1)\delta_1 - (\lambda_k - i)\delta_k + \eta\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \\ &\geq (\lambda_1 - 1)\delta_1 - (\lambda_k - 1)\delta_k \\ &= (\lambda_1 - 1)\delta_1 - \frac{\delta_{k-1}}{2} - \frac{\delta_k}{2} \quad \text{d'après (3.14)} \\ &\geq (\lambda_1 - 1)\delta_1 - \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_1}{2} \quad \text{d'après (3.15)} \\ &= (\lambda_1 - 2)\delta_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Comme pour les  $\Delta_k$ , on définit pour  $k = 1, \dots, q$  les matrices diagonales  $\Lambda_k$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Lambda_k(\theta) &= \theta^{-\sigma_1^k} \Delta_k(\theta) \\ &= \text{diag} \left( \frac{1}{\theta^{\sigma_1^k}} I_{p_k}, \frac{1}{\theta^{\sigma_2^k}} I_{p_k}, \dots, \frac{1}{\theta^{\sigma_{\lambda_k}^k}} I_{p_k} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Notons que, à partir de la définition des  $\sigma_i^k$  donnée par (3.16), on a

$$\sigma_{\lambda_k}^k = (\lambda_1 - 1)\delta_1 + \eta\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

et par conséquent, on obtient

$$\sigma_{\lambda_k}^k - \sigma_{\lambda_l}^l = \eta \left( \frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}} \right) \text{ pour } k, l = 1, \dots, q \quad (3.20)$$

La dernière égalité signifie que quelque soit la différence entre  $\lambda_k$  et  $\lambda_l$ , la différence entre  $\sigma_{\lambda_k}^k$  et  $\sigma_{\lambda_l}^l$  (qui sont les puissances de  $\theta$  sur les dernières lignes respectives de  $\Lambda_k(\theta)$  et  $\Lambda_l(\theta)$ ) peut être rendue aussi petite que désirée en choisissant  $\eta$  arbitrairement petit (très proche de zéro).

Maintenant, en tenant en compte les structures des matrices  $\Lambda_k(\theta)$ ,  $\Delta_k(\theta)$  et  $A_k$  données respectivement par (3.19), (3.12) et (3.2), les identités suivantes sont établies :

$$\begin{aligned} \bullet \Lambda_k(\theta) A_k \Lambda_k^{-1}(\theta) &= \Delta_k(\theta) A_k \Delta_k^{-1}(\theta) = \theta^{\delta_k} A_k \\ \bullet \theta^{-\sigma_1^k} C_k \Lambda_k^{-1}(\theta) &= C_k \Delta_k^{-1}(\theta) = C_k \end{aligned} \quad (3.21)$$

Une autre matrice qui sera utilisée dans l'équation de l'observateur est la matrice  $S_k$  et elle est la solution unique de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S_k + A_k^T S_k + S_k A_k = C_k^T C_k \quad (3.22)$$

où  $A_k$  et  $C_k$  sont définies respectivement par (3.2) et (3.3). Il a été démontré dans (Gauthier *et al.* [1992], Busawon *et al.* [1998]) que la matrice  $S_k$  est symétrique définie positive et que ses entrées s'expriment comme suit (Gauthier *et al.* [1992], Busawon *et al.* [1998]) :

$$S_k^{-1} C_k^T = (C_{\lambda_k}^1 I_{p_k}, \dots, C_{\lambda_k}^{\lambda_k} I_{p_k})^T \text{ où } C_{\lambda_k}^i = \frac{\lambda_k!}{i!(\lambda_k - i)!} \text{ pour } i = 1, \dots, \lambda_k \quad (3.23)$$

Dans la suite, on notera par  $\lambda_{min}^k$  et  $\lambda_{max}^k$  respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de  $S_k$ . Les variables  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$  désignerons respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice diagonale  $S$  définie comme suit :

$$S = \text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_q) \quad (3.24)$$

Nous allons maintenant énoncer un lemme utilisé qui sera utile pour la démonstration de la convergence de l'erreur d'observation. Ce lemme fournit un ensemble de réels qui reflètent l'interconnection entre les non linéarités des différents blocs.

**Lemme 3.2.1** *Posons*

$$\chi_{l,j}^{k,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \equiv 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.25)$$

pour  $k, l = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$  et  $j = 2, \dots, \lambda_l$ . Alors la suite de réels  $\sigma_i^k$  définie par (3.16) est telle que

$$\text{si } \chi_{l,j}^{k,i} = 1 \text{ alors } \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \leq -\frac{\eta}{2^q} \quad (3.26)$$

**Preuve du lemme 3.2.1** : cette preuve se basera sur la prise en considération de la dépendance entre les non linéarités des blocs. En effet, d'après (3.4) et (3.5), si le cas où  $\chi_{l,j}^{k,i} = 1$  pour  $k, l \in \{1, \dots, q\}$  et  $j \in \{2, \dots, \lambda_l\}$  se produit, c'est que nous sommes forcément dans l'une des trois situations suivantes :

- $k > l$  et  $i$  prend n'importe quelle valeur dans  $\{1, \dots, \lambda_k\}$ ; ceci traduit la structure quasi-triangulaire du système global.
- $k = l$  et  $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$  avec  $i \geq j$ ; ceci traduit la structure triangulaire de chaque bloc par rapport à ses propres variables.
- $k < l$  et  $i = \lambda_k$ ; ceci traduit le fait que la dernière couche de chaque bloc peut dépendre de tout l'état.

A partir de (3.16), nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} &= \sigma_1^l + (j-1)\delta_l - \sigma_1^k - (i-1)\delta_k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \\ &= -(\lambda_l - 1)\delta_l + (j-1)\delta_l \\ &\quad + (\lambda_k - 1)\delta_k - (i-1)\delta_k + \eta\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \\ &= (\lambda_k - i - \frac{1}{2})\delta_k + (j - \lambda_l - \frac{1}{2})\delta_l + \eta\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nous allons par la suite vérifier la condition (3.26) en considérant les trois cas listés précédemment en partant de (3.27).

- Le cas  $k > l$  et  $i$  prend n'importe quelle valeur dans  $\{1, \dots, \lambda_k\}$ . Notons que comme  $k > l$ , on a  $k \geq 2$  et l'inégalité (3.27) devient

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} &\leq (\lambda_k - \frac{3}{2})\delta_k - \frac{\delta_l}{2} + \eta\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \\ &= \frac{\delta_{k-1}}{2} - \frac{\delta_l}{2} + \eta\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \quad (\text{d'après (3.14)}) \\ &\leq \eta\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \quad (\text{d'après (3.15)}) \\ &= \frac{\eta}{2^{k-1}}(1 - 2^{k-l}) \leq -\frac{\eta}{2^{k-1}} \leq -\frac{\eta}{2^{q-1}} \leq -\frac{\eta}{2^q} \end{aligned}$$

- Le cas  $k = l$  et  $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$  avec  $i \geq j$ . L'inégalité (3.27) devient

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} = (j - i - 1)\delta_k \leq -\delta_k \leq -1 \leq -\frac{\eta}{2^q}$$

- Le cas  $k < l$  et  $i = \lambda_k$ . L'inégalité (3.27) devient

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} &= -\frac{\delta_k}{2} + (j - \lambda_l - \frac{1}{2})\delta_l + \eta\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \\ &\leq -\frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} + \eta\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \\ &\leq -1 + \frac{\eta}{2^{k-1}}(1 - 2^{k-l}) \quad (\text{puisque } \delta_k \geq \delta_l \geq 1) \\ &\leq -1 + \frac{\eta}{2^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{puisque } l - k \geq 1) \\ &\leq -1 + \frac{\eta}{2^k} \\ &\leq -1 + \frac{\eta}{2} \\ &\leq -\frac{\eta}{2} \quad \text{puisque } \eta \leq 1 \\ &\leq -\frac{\eta}{2^q} \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme.

**Remarque 3.2.1** *Le lemme 3.2.1 représente un point clé dans les développements ultérieurs dans la démonstration de la convergence de l'observateur qui sera proposée pour le système (3.1). En effet, les techniques du grand gain reposent essentiellement sur le caractère lipschitzien des non linéarités. Sous cette hypothèse et pour prouver la convergence de l'observateur, il suffit de montrer que l'on peut rendre aussi petite que désirée, pour  $\theta \geq 1$ , la norme de chaque matrice bloc ( $p_k \times p_l$ ) qui est l'entrée bloc, à la ligne  $k$  et la colonne  $l$ , de la matrice  $n_k \times n_l$  suivante :  $\theta^{-\frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2}} \Lambda_k(\theta) \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^l}(u, x) \Lambda_l^{-1}(\theta)$ , où  $\Lambda_k$  et  $\Lambda_l$  sont définies par (3.19). En tenant en compte les structures diagonales des matrices  $\Lambda_k$  et  $\Lambda_l$ , il est clair que la matrice bloc qui est l'entrée située à la ligne  $k$  et la colonne  $l$  est soit égale à zéro (si  $\chi_{l,j}^{k,i} = 0$ ), soit dépend de  $\theta$  à travers un terme multiplicatif égal à  $\theta^{-\sigma_i^k + \sigma_j^l - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2}}$ . Grâce au lemme 3.2.1, ce terme peut être rendu aussi petit que désiré pour  $\theta \geq 1$  puisque la puissance de  $\theta$  est négative.*

### 3.2.3 Discussion de la classe de systèmes considérée

La structure du système (3.1) exhibe trois nouveautés par rapport aux formes traitées dans la littérature pour lesquelles des observateurs (de type grand gain) ont été proposés (on pourra se référer par exemple à Shim *et al.* [2001], Hammouri et Farza [2003] ) :

- (i) La sortie de chaque bloc pourrait être un vecteur et n'est donc pas nécessairement un signal scalaire
- (ii) La dernière équation différentielle de chaque bloc peut dépendre de tout l'état et le système global n'a pas donc la structure triangulaire.
- (iii) La dernière équation de chaque bloc peut renfermer des termes incertains (variant dans le temps).

On peut se demander de l'utilité de considérer une sortie vectorielle pour un bloc. Pour motiver un tel choix, on considère l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_5 + u(x_3 + x_4) \\ \dot{x}_5 = -u(x_5 + x_6) + ux_8 \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_6 + u(x_3 - x_4) \\ \dot{x}_6 = -u(x_5 - x_6) \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_7 = x_8 + u(x_5 + x_6) \\ \dot{x}_8 = u(x_5 + x_6) \\ y_3 = x_7 \end{cases} \quad (3.30)$$

Il est clair que le système global constitué par les sous-systèmes (3.28), (3.29) et (3.30) n'est pas sous la forme (3.1) puisque la deuxième équation du deuxième sous-système dépend de la deuxième composante associée au premier sous-système et *vice versa*. Effectuons ensuite un simple rearrangement en regroupant ensemble

les deux premières sorties  $x_1$  et  $x_2$ . En effet, posons  $x_1^1 = \begin{pmatrix} x_{1,1}^1 = x_1 \\ x_{1,2}^1 = x_2 \end{pmatrix}$ ,  $x_2^1 =$

$$\begin{pmatrix} x_{2,1}^1 = x_3 \\ x_{2,2}^1 = x_4 \end{pmatrix}, x_3^1 = \begin{pmatrix} x_{3,1}^1 = x_5 \\ x_{3,2}^1 = x_6 \end{pmatrix}, x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 = x_7 \\ x_2^2 = x_8 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, le système (3.28)-(3.29)-(3.30) peut se réécrire sous la forme

suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_2^1 \\ \dot{x}_2^1 = x_3^1 + u \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x_2^1 \\ \dot{x}_3^1 = -u \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x_3^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} x_2^2 \\ \bar{y}_1 = x^1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2 = x_2^2 + u(x_{3,1}^1 + x_{3,2}^1) \\ \dot{x}_2^2 = u(x_{3,1}^1 + x_{3,2}^1) \\ \bar{y}_2 = x_1^2 \end{cases} \quad (3.32)$$

qui est clairement sous la forme (3.1) avec  $q = 2$ , la sortie globale  $y = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$ ,  $p_1 = 2$  et  $p_2 = 1$ , .

Dans le point (ii), la structure non triangulaire du système (3.1) est mise en avant. Une telle structure résulte de la dépendance de tout l'état de la dernière équation de chaque bloc. Une telle structure constitue la principale nouveauté par rapport aux structures existantes. Les techniques utilisées pour contourner la difficulté due à la structure non triangulaire sont similaires à celles communément utilisées lors de la synthèse d'observateurs de type grand gain (on pourra se référer par exemple à Shim *et al.* [2001] et Hammouri et Farza [2003]). Dans ces travaux, les expressions des variables  $\delta_k$  et  $\sigma_i^k$  données par (3.13) et (3.16) sont différentes de celles données ici. En effet, dans (Shim *et al.* [2001]), ces variables ont été définies comme suit :

$$\delta_k = \prod_{i=1}^{k-1} \lambda_k \text{ for } k = 2, \dots, q \text{ avec } \delta_1 = 1 \quad (3.33)$$

$$\sigma_i^k = i\delta_k \text{ } k = 1, \dots, q \text{ et } i = 1, \dots, \lambda_k \quad (3.34)$$

Avec  $\delta_k$  et  $\sigma_i^k$  définies respectivement par (3.33) et (3.34), l'inégalité (3.26) du lemme (3.2.1) ne peut pas être satisfaite. Plus précisément, cette inégalité ne peut pas être satisfaite dans les trois cas considérés dans la démonstration du lemme. On ne pourra vérifier cette inégalité que dans les deux premiers cas :  $k > l$  et  $k = l$ . Pour le troisième cas ( $k < l$ ) qui reflète la structure non triangulaire du système global,

l'inégalité (3.26) n'est pas satisfaite. Nous allons vérifier toutes ces affirmations en reconsidérant les trois cas. Pour ce faire, nous remarquons que compte tenu des expressions de  $\delta_k$  et  $\sigma_i^k$  données respectivement par (3.33) et (3.34), on a :

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} = j\delta_l - i\delta_k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2}$$

•  $k > l$  : on a

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} &\leq \lambda_l \delta_l - \delta_k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \\ &= \delta_{l+1} - \delta_k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \text{ d'après (3.33)} \\ &\leq -\frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \text{ puisque les } \delta_k \\ &\quad \text{donnés par (3.33) défini une séquence décroissante} \\ &< 0 \end{aligned}$$

•  $k = l$  et  $j \leq i$  : on a

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \leq (j - i - 1)\delta_k \leq -\delta_k < 0$$

•  $k < l$  et  $i = \lambda_k$  : dans ce cas, nous allons montrer que l'inégalité (3.26) ne peut pas être satisfaite même avec  $j = 2$ . Ceci veut dire qu'avec les expressions de  $\delta_k$  et  $\sigma_i^k$  données respectivement par (3.33) et (3.34), la dernière équation de chaque bloc doit avoir la même structure triangulaire que toutes les autres équations du même bloc. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} &= (j - \frac{1}{2})\delta_l - (\lambda_k + \frac{1}{2})\delta_k \\ &= (j - \frac{1}{2})\delta_l - \delta_{k+1} - \frac{\delta_k}{2} \\ &\geq (j - \frac{1}{2})\delta_l - \delta_l - \frac{\delta_k}{2} \\ &\geq (2 - \frac{1}{2})\delta_l - \delta_l - \frac{\delta_k}{2} \\ &= \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} > 0 \end{aligned}$$

Dans le point (iii), les incertitudes attachées au système sont mises en avant. En fait, la considération de termes incertains dans la dernière équation de chaque bloc donne lieu à des difficultés similaires à celles décrites au point (ii). Il est bien connu que dans le cas d'un système observable pour toute entrée formée par un seul bloc et renfermant un terme incertain dans sa dernière équation, on peut faire la synthèse



d'un observateur qui est tel que l'erreur asymptotique d'estimation peut être rendue aussi petite que désirée par le choix de valeurs assez élevées de  $\theta$ . Pour le système (3.1), deux difficultés supplémentaires sont à signaler. La première réside dans le caractère non triangulaire du système. Les techniques pour surmonter cette difficulté sont de la même nature que celles décrites au point (ii). La deuxième difficulté réside dans le fait que les  $\lambda_k$  ne sont pas tous égaux. Cette difficulté a été surmontée, comme ce sera détaillée plus loin, en exploitant la propriété (3.20).

### 3.3 Synthèse de l'observateur

Nous supposons comme c'est généralement le cas lors de la synthèse d'observateurs de type grand gain que l'hypothèse suivante est satisfaite (Bornard et Hammouri [1991b], Gauthier *et al.* [1992], Bornard et Hammouri [2002], Hammouri et Farza [2003], Farza *et al.* [2004], Shena et Xia [2008]) :

**Hypothèse 3.1**  $\varphi(u, x)$  est globalement lipschitzienne par rapport  $x$  uniformément en  $u$ .

L'observateur proposé est décrit par le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}}^k = A_k \hat{x}^k + \varphi^k(u, \underline{\hat{x}}) - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T C_k e^k \quad \text{pour } k = 1, \dots, q \quad (3.35)$$

où  $u$  et  $y$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système (3.1),  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé et se présente sous la partition suivante

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \hat{x}^k = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^k \\ \hat{x}_2^k \\ \vdots \\ \hat{x}_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k} \quad \text{et} \quad \hat{x}_i^k = \begin{pmatrix} \hat{x}_{i,1}^k \\ \vdots \\ \hat{x}_{i,p_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p_k}$$

où  $\hat{x}_{i,j}^k \in \mathbb{R}$  pour  $k = 1, \dots, q, i = 1, \dots, \lambda_k, j = 1, \dots, p_k$  avec  $\sum_{k=1}^q n_k = n, \underline{\hat{x}}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$  est l'état estimé modulo une injection des sorties, plus précisément

$$\underline{\hat{x}}_i^k = \begin{cases} x_1^k & \text{pour } i = 1 \\ \hat{x}_i^k & \text{pour } i = 2, \dots, \lambda_k \end{cases}$$

et  $e^k \in \mathbb{R}^n$  est la  $k^{ieme}$  composante du vecteur de l'erreur d'observation et il est défini par

$$e^k = \hat{x}^k - x^k$$

Nous énonçons maintenant le résultat suivant

**Théorème 3.3.1** *Supposons que le système (3.1) satisfait l'hypothèse (3.1), alors  $\forall M > 0 ; \exists \theta_0 > 0 ; \forall \theta > \theta_0 ; \exists \lambda_\theta > 0 ; \exists \mu_\theta > 0 ; \exists \alpha_\theta > 0$  tel que pour  $k \in \{1, \dots, q\}$*

$$\|\hat{x}^k(t) - x^k(t)\| \leq \lambda_\theta e^{-\mu_\theta t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + \alpha_\theta \beta$$

*pour toute entrée admissible  $u$  telle que  $\|u\|_\infty \leq M$  où  $\beta$  est la borne supérieure de  $\|\varepsilon_k\|$  donnée par (3.6). De plus,  $\lambda_\theta$  est polynomial en  $\theta$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \mu_\theta = +\infty$  et  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \alpha_\theta = 0$ .*

**Preuve du théorème 3.3.1.** Soit l'erreur d'estimation  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  et soit  $e^k(t)$  la  $k^{ieme}$  composante de  $e(t)$ . Pour ne pas avoir des équations trop longues et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omettra la variable  $t$  qui désigne le temps. Nous avons :

$$\dot{e}^k = A_k e^k + \varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x) - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T C_k e^k - \bar{\varepsilon}^k \quad (3.36)$$

où  $u$  est une entrée admissible telle que  $\|u\|_\infty \leq M$  où  $M > 0$  est une constante fixée.

Pour  $k = 1, \dots, q$ , posons

$$\bar{e}^k = \Lambda_k(\theta) e^k \quad (3.37)$$

où  $\Lambda_k(\theta)$  est donné par (3.19).

A partir de l'équation (3.36) et en utilisant les identités (3.21) et (3.37), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}^k &= \Lambda_k(\theta) A_k \Lambda_k(\theta)^{-1} \bar{e}^k + \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) - \Lambda_k(\theta) \bar{\varepsilon}^k \\ &\quad - \theta^{\delta_k} \Lambda_k(\theta) \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T C_k \Lambda_k(\theta)^{-1} \bar{e}^k \\ &= \theta^{\delta_k} A_k \bar{e}^k - \theta^{\delta_k} S_k^{-1} C_k^T C_k \bar{e}^k + \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) - \Lambda_k(\theta) \bar{\varepsilon}^k \end{aligned} \quad (3.38)$$

Posons

$$V_k(\bar{e}^k) = \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k \quad (3.39)$$

où  $S_k$  est donné par (3.22) soit  $V(\bar{e}) = \sum_{k=1}^q V_k(\bar{e}^k)$  la fonction de Lyapunov candidate.

Notons que l'on a :

$$V(\bar{e}) \leq \lambda_{max} \|\bar{e}\|^2 \quad (3.40)$$

Rappelons que  $\lambda_{max}$  désigne la plus grande valeur propre de la matrice  $S$  donnée par (3.24).

Dans la suite, on supposera que  $\theta \geq 1$ .

la dérivée par rapport au temps de  $V_k$  est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= 2\bar{e}^{kT} S_k \dot{\bar{e}}^k \\ &= 2\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k A_k \bar{e}^k - 2\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} C_k^T C_k \bar{e}^k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) \\ &\quad - 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) \bar{\varepsilon}^k \end{aligned}$$

A partir de l'équation algébrique de Lyapunov (3.22), on déduit

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= -\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k - \theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} C_k^T C_k \bar{e}^k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) \\ &\quad - 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) \bar{\varepsilon}^k \\ &\leq -\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) - 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) \bar{\varepsilon}^k \\ &\leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\|S_k \bar{e}^k\| \|\Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x))\| + 2\|S_k \bar{e}^k\| \|\Lambda_k(\theta) \bar{\varepsilon}^k\| \\ &\leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \frac{1}{\theta^{\sigma_i^k}} \|(\varphi_i^k(u, \hat{x}) - \varphi_i^k(u, x))\| + 2\sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \frac{\beta}{\theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k}} \end{aligned}$$

où  $\sigma_i^k = \sigma_1^k + (i - 1)\delta_k$  comme donnée par (3.16).

Maintenant d'après l'hypothèse (H1), i.e. la matrice  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  est bornée, ce qui donne

$$\dot{V}_k \leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{-\sigma_i^k} \|e_j^l\| + 2\sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \frac{\beta}{\theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k}}$$

où  $\rho_k = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \right\| / x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|u\|_\infty \leq M \right\}$  et les  $\chi_{l,j}^{k,i}$  ont la même définition que dans le lemme 3.2.1. La dernière inégalité peut se réécrire comme suit

$$\dot{V}_k \leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \|\bar{e}_j^l\| + 2\sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \frac{\beta}{\theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k}}$$

où  $\sigma_j^l$  est définie par (3.16), c'est-à-dire  $\sigma_j^l = \sigma_1^l + (j-1)\delta_l$ .

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \mu_S \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \sqrt{V_l} + 2\sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \frac{\beta}{\theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k}} \\ &= -\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \mu_S \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2}} \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l} + 2\sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \frac{\beta}{\theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k}} \end{aligned}$$

$$\text{où } \mu_S = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}.$$

De plus, d'après le lemme (3.2.1), on a

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \leq -\frac{\eta}{2^q} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k &= (\lambda_1 - 1)\delta_1 + \eta\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \\ &\geq (\lambda_1 - 1)\delta_1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

et en tenant en compte les identités (3.41) et (3.42), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \mu_S \theta^{-\frac{\eta}{2^q}} \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l} \\ &\quad + 2\sqrt{\lambda_{max}} \sqrt{V_k} \frac{\beta}{\theta^{(\lambda_1 - 1)\delta_1}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Posons maintenant

$$V_k^* = \theta^{\delta_k} V_k \text{ et } V^* = \sum_{k=1}^q V_k^* \quad (3.44)$$

D'après (3.15), nous avons

$$V^* \geq \theta^{\delta_q} V = \theta V \quad (3.45)$$

L'inégalité (3.43) devient

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -V_k^* + 2\rho_k \mu_S \theta^{-\frac{\eta}{2^q}} \sqrt{V_k^*} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \sqrt{V_l^*} + 2\sqrt{\lambda_{max}} \sqrt{V_k} \frac{\beta}{\theta^{(\lambda_1 - 1)\delta_1}} \\ &= -V_k^* + 2\lambda_k \rho_k \mu_S \theta^{-\frac{\eta}{2^q}} \sqrt{V_k^*} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \sqrt{V_l^*} + 2\sqrt{\lambda_{max}} \sqrt{V_k} \frac{\beta}{\theta^{(\lambda_1 - 1)\delta_1}} \\ &\leq -V_k^* + 2\lambda_k \rho_k \mu_S \theta^{-\frac{\eta}{2^q}} \sqrt{V_k^*} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \sqrt{V^*} + 2\sqrt{\lambda_{max}} \sqrt{V} \frac{\beta}{\theta^{(\lambda_1 - 1)\delta_1}} \\ &\leq -V_k^* + 2n\lambda_k \rho_k \mu_S \theta^{-\frac{\eta}{2^q}} \sqrt{V_k^*} \sqrt{V^*} + 2\sqrt{\lambda_{max}} \sqrt{V} \frac{\beta}{\theta^{(\lambda_1 - 1)\delta_1}} \\ &\leq -V_k^* + 2n\lambda_k \rho_k \mu_S \theta^{-\frac{\eta}{2^q}} V^* + 2\sqrt{\lambda_{max}} \sqrt{V} \frac{\beta}{\theta^{(\lambda_1 - 1)\delta_1}} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -V^* + 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}}V^* + 2q\sqrt{\lambda_{max}}\sqrt{V}\frac{\beta}{\theta^{(\lambda_1-1)\delta_1}} \\ &= -\left(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}}\right)V^* + 2q\sqrt{\lambda_{max}}\sqrt{V}\frac{\beta}{\theta^{(\lambda_1-1)\delta_1}}\end{aligned}$$

où  $\rho = \max\{\rho_k \text{ pour } 1 \leq k \leq q\}$ .

De plus, à partir de (3.45) et pour  $\theta$  suffisamment élevée de sorte que l'on ait

$$\left(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}}\right) > 0 \quad (3.46)$$

on obtient

$$\dot{V} \leq -\theta\left(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}}\right)V + 2q\sqrt{\lambda_{max}}\sqrt{V}\frac{\beta}{\theta^{(\lambda_1-1)\delta_1}} \quad (3.47)$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\sqrt{V(\bar{e}(t))} &\leq \exp\left(-\frac{\theta(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})}{2}t\right)\sqrt{V(\bar{e}(0))} \\ &\quad + \frac{2q\sqrt{\lambda_{max}}\beta}{(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})\theta^{(1+(\lambda_1-1)\delta_1)}}\end{aligned}$$

et nous obtenons pour  $k = 1, \dots, q$

$$\begin{aligned}\sqrt{V_k(\bar{e}^k(t))} &\leq \sqrt{V(\bar{e}(t))} \\ &\leq \exp\left(-\frac{\theta(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})}{2}t\right)\sqrt{V(\bar{e}(0))} \\ &\quad + \frac{2q\sqrt{\lambda_{max}}\beta}{(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})\theta^{(1+(\lambda_1-1)\delta_1)}}\end{aligned} \quad (3.48)$$

Par ailleurs, on peut déduire à partir des équations (3.37) et (3.39) que

$$\frac{\sqrt{V_k(\bar{e}^k)}}{\sqrt{\lambda_{max}}} \leq \frac{\sqrt{V_k(\bar{e}^k)}}{\sqrt{\lambda_{max}^k}} \leq \|\bar{e}^k\| \leq \frac{\sqrt{V_k(\bar{e}^k)}}{\sqrt{\lambda_{min}^k}} \leq \frac{\sqrt{V_k(\bar{e}^k)}}{\sqrt{\lambda_{min}}} \quad (3.49)$$

et

$$\|\bar{e}^k\| \leq \|e^k\| \leq \theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k} \|\bar{e}^k\| \quad (3.50)$$

A partir de (3.40) et conformément à (3.50), on a

$$\sqrt{V(\bar{e})} \leq \sqrt{\lambda_{max}}\|\bar{e}\| \leq \sqrt{\lambda_{max}}\|e\| \quad (3.51)$$

Combinant (3.49) et (3.50), on obtient

$$\|e^k\| \leq \theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k} \|\bar{e}^k\| \leq \theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k} \frac{\sqrt{V_k(\bar{e}^k)}}{\sqrt{\lambda_{min}}} \quad (3.52)$$

Finalement, à partir des inégalités (3.48) et (3.52), on obtient

$$\begin{aligned} \|e^k(t)\| &\leq \theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}} \exp\left(-\frac{\theta(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})}{2}t\right) \sqrt{V(\bar{e}(0))} \\ &+ \frac{2q\sqrt{\lambda_{max}}\beta}{\sqrt{\lambda_{min}}} \frac{\theta^{\sigma_1^k + (\lambda_k - 1)\delta_k}}{(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})\theta^{(1+(\lambda_1-1)\delta_1)}} \end{aligned}$$

Utilisant (3.42) et (3.51), on obtient

$$\begin{aligned} \|e^k(t)\| &\leq \theta^{(\lambda_1-1)\delta_1 + \eta(1-\frac{1}{2^{k-1}})} \mu_S \exp\left(-\frac{\theta(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})}{2}t\right) \|e(0)\| \\ &+ \frac{2q\mu_S\theta^{(\lambda_1-1)\delta_1 + \eta(1-\frac{1}{2^{k-1}})}}{(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})\theta^{(1+(\lambda_1-1)\delta_1)}} \beta \\ &\leq \theta^{(\lambda_1-1)\delta_1 + \eta} \mu_S \exp\left(-\frac{\theta(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})}{2}t\right) \|e(0)\| \\ &+ \frac{2q\mu_S}{(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})\theta^{1-\eta}} \beta \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ceci termine la preuve du théorème et les paramètres  $\theta_0$ ,  $\lambda_\theta$ ,  $\mu_\theta$  et  $\beta_\theta$  du théorème s'expriment comme suit

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \max(1, (2n^2\rho\mu_S)^{\frac{2q}{\eta}}) \\ \lambda_\theta &= \theta^{(\lambda_1-1)\delta_1 + \eta} \mu_S \\ \mu_\theta &= \frac{\theta(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})}{2} \\ \alpha_\theta &= \frac{2q\mu_S}{\theta^{1-\eta}(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\frac{\eta}{2q}})} \end{aligned}$$

Il est clair que l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro en l'absence d'incertitude et qu'elle peut être rendue aussi petite que désirée en leur présence. En effet, dans ce dernier cas, cette erreur reste dans une boule dont le rayon est proportionnel à  $\frac{1}{\theta^{1-\eta}}$ . Toutefois et comme il est bien connu pour les observateurs de type grand gain (Gauthier *et al.* [1992], Farza *et al.* [2004]), des valeurs élevées du paramètre de synthèse  $\theta$  sont à éviter en pratique car elles contribuent à amplifier les bruits de mesure. De ce fait, le choix de  $\theta$  devrait être un compromis entre une convergence rapide de l'observateur (obtenue à travers élevées de  $\theta$ ) et un bon comportement vis-à-vis des bruits de mesure (obtenues à travers de valeurs relativement faibles de  $\theta$ ). Un tel choix se fait généralement au préalable en simulation en adoptant la stratégie d'essai/erreur..

### 3.4 Exemple

Dans ce paragraphe, les performances de l'observateur proposé sont illustrées à travers l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_2^1 - x_1^1 + x_1^2 u \\ \dot{x}_2^1 = x_3^1 - x_2^1 \\ \dot{x}_3^1 = -x_3^1 - \frac{x_2^1}{1 + (x_2^1)^2} - \frac{x_2^2}{1 + (x_2^2)^2} + u + \varepsilon_1(t) \\ y_1 = x_1^1 \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2 = x_2^2 - x_2^1 x_3^1 - x_1^2 + u x_3^1 \\ \dot{x}_2^2 = -x_2^2 - \frac{x_2^1}{1 + (x_2^1)^2} + \frac{x_3^1}{1 + (x_3^1)^2} - u + \varepsilon_2(t) \\ y_2 = x_1^2 \end{cases} \quad (3.55)$$

où  $u(t) = 5\sin(2\pi t)$ ,  $\varepsilon_1(t) = 0.1\cos(t)$  et  $\varepsilon_2(t) = 0.5\sin(t)$ .

Il est clair que le système (3.54)-(3.55) est sous la forme (3.1), avec  $q = 2$ ,  $p_1 = p_2 = 1$ ,  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 2$ . de plus, il n'appartient pas aux classes de systèmes considérées dans (Hammouri et Farza [2003], Shim *et al.* [2001]). Notons que les conditions initiales considérées sont telles que la trajectoire du système sont bornées et par conséquent l'hypothèse (3.1) est vérifiée. .

Un observateur du type (3.35) peut alors être synthétisé pour le système (3.54)-(3.55). Ses équations peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1^1 \\ \hat{x}_2^1 \\ \hat{x}_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2^1 \\ \hat{x}_3^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1^1 + x_1^2 u \\ -\hat{x}_2^1 \\ -\hat{x}_3^1 - \frac{\hat{x}_2^1}{1 + (\hat{x}_2^1)^2} - \frac{\hat{x}_2^2}{1 + (\hat{x}_2^2)^2} + u \end{pmatrix} - \theta^{\delta_1} \Delta_1^{-1}(\theta) S_1^{-1} C_1^T (\hat{x}_1^1 - y_1) \quad (3.56)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1^2 \\ \hat{x}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{x}_2^1 \hat{x}_3^1 - x_1^2 + u \hat{x}_3^1 \\ -\hat{x}_2^2 - \frac{\hat{x}_2^1}{1 + (\hat{x}_2^1)^2} + \frac{\hat{x}_3^1}{1 + (\hat{x}_3^1)^2} - u \end{pmatrix} - \theta^{\delta_2} \Delta_2^{-1}(\theta) S_2^{-1} C_2^T (\hat{x}_1^2 - y_2) \quad (3.57)$$

où

$$S_1^{-1}C_1^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } S_2^{-1}C_2^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ conformément à (3.23)}$$

et

$$\Delta_1^{-1}(\theta) = \text{diag}(1, \delta_1, \delta_1^2) \text{ et } \Delta_2^{-1}(\theta) = \text{diag}(1, \delta_2) \text{ conformément à (3.12)}$$

Les valeurs de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont calculées conformément à (3.13) et elles sont  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ .

L'observateur (3.56)-(3.57) a été simulé en utilisant des données, relatives à l'entrée  $u$  et les sorties  $y_1$  et  $y_2$ , issues de la simulation du système (3.54)-(3.55). La simulation a été effectuée en prenant  $\theta = 12$  et sous les conditions initiales suivantes  $\hat{x}_1^1(0) = \hat{x}_2^1(0) = x_i^k(0) = 0$   $k = 1, 2$  et  $i = 1, \dots, \lambda_k$ ;  $\hat{x}_2^1(0) = \hat{x}_3^1(0) = \hat{x}_2^2(0) = 0.5$ . Pour se rapprocher du cas réel, chaque mesure a été entachée d'un bruit additif de type Gaussien de moyenne nulle et d'un écart type égal à 0.1. Les sorties bruitées utilisées par l'observateur sont reproduites dans la figure (3.1).

Dans la figure (3.2), nous avons comparé les vraies évolutions des variables non mesurées  $x_2^1$ ,  $x_3^1$  et  $x_2^2$  (issues de la simulation du modèle) avec leur estimé fourni par l'observateur. On notera la bonne qualité de l'estimation et ce en dépit de la présence des incertitudes  $\varepsilon_1(t)$  et  $\varepsilon_2(t)$  ainsi que celle des bruits sur les mesures.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la synthèse d'un observateur à grand gain pour une large classe de systèmes non linéaires MIMO renfermant des incertitudes. La principale contribution a consisté en la relaxation de la structure triangulaire. En effet, la classe de systèmes est composée de sous-systèmes en cascade qui sont tels que la dérivée par rapport au temps de la dernière composante de chaque sous-système peut dépendre de tout l'état du système. En outre, chaque sous-système est associé à un sous ensemble des sorties. En absence d'incertitudes, cette classe inclut les formes canoniques proposées dans (Shim *et al.* [2001], Hammouri et Farza [2003]).



L'erreur asymptotique d'observation de l'observateur proposé converge exponentiellement vers zéro en l'absence d'incertitudes. En présence de celles-ci, cette erreur peut être rendue arbitrairement petite par le choix de valeurs assez élevées du seul paramètre de réglage de l'observateur,  $\theta$ .

Dans la suite de ce mémoire, nous allons considérer des classes de systèmes non linéaires renfermant des entrées inconnues. Nous montrerons alors comment ces classes peuvent se mettre sous la forme (3.1) à l'aide de transformations appropriées. En suite, des observateurs de type (3.35) seront synthétisés pour l'estimation simultanée de l'état du système et de toutes les entrées inconnues.

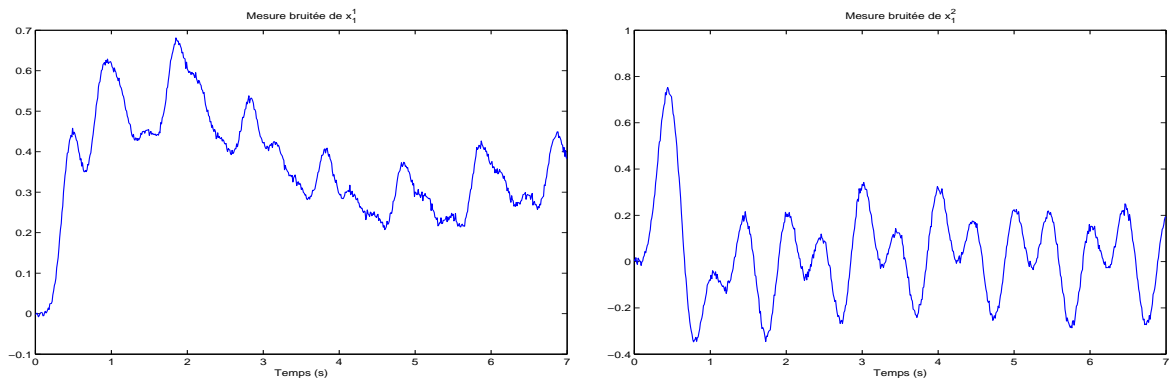


Figure 3.1: Mesures bruitées de  $x_1^1$  et  $x_1^2$

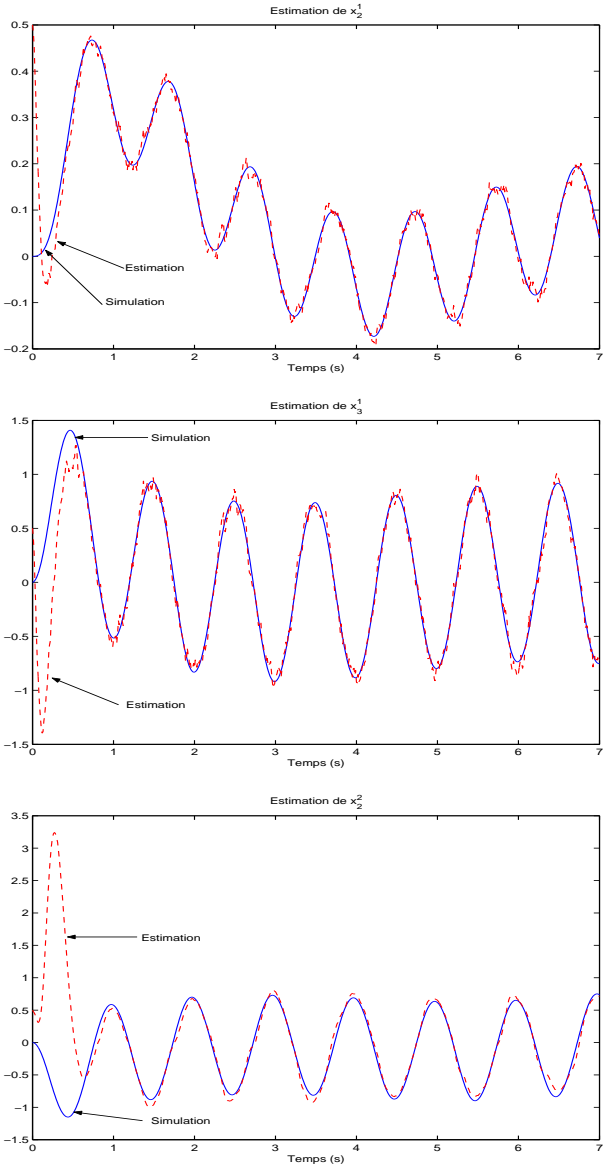


Figure 3.2: Estimation des états non mesurés



# Chapitre 4

## Observateurs à entrées inconnues

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la synthèse d'un observateur de type grand gain pour la classe de systèmes non linéaires observables pour toute entrée (2.9) à laquelle nous avons ajouté des entrées inconnues. L'observateur proposé permet d'estimer conjointement tout l'état du système ainsi que toutes les entrées inconnues sous des conditions suffisantes qui seront données. Leur synthèse ne suppose, ni adopte aucun modèle mathématique pour les entrées inconnues. Nous supposons simplement que la dérivée première par rapport au temps de chacune des entrées inconnues est bornée.

### 4.2 Formulation du problème

Soit la classe de systèmes non linéaires MIMO suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) + g(u, x, v) \\ y = x^1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix}; f(u, x) = \begin{pmatrix} f^1(u, x^1, x^2) \\ f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u, x) \\ f^q(u, x) \end{pmatrix}; g(u, x, v) = \begin{pmatrix} g^1(u, x^1, v) \\ g^2(u, x^1, x^2, v) \\ \vdots \\ g^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}, v) \\ g^q(u, x, v) \end{pmatrix};$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $k = 1, \dots, q$  et  $p = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q$ ,

$$\sum_{k=1}^q n_k = n; \text{ l'entrée inconnue } v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, v^j \in \mathbb{R}^{m_j}, j = 1, \dots, r \text{ avec}$$

$\sum_{j=1}^r m_j = m$ ; l'entrée connue  $u(t) \in \mathcal{U}$  l'ensemble des fonctions absolument continues à dérivées bornées de  $\mathbb{R}^+$  dans  $U$  un compact de  $\mathbb{R}^\mu$ ;  $f(u, x) \in \mathbb{R}^n$  où  $f^k(u, x) \in \mathbb{R}^{n_k}$ .

Nous définissons  $r$  indices caractéristiques,  $\rho_k$ , associés aux entrées inconnues comme suit. On suppose qu'il existe  $r$  entiers  $1 \leq \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_r \leq q$  tels que

$$\forall i < \rho_j : \frac{\partial g^i}{\partial v^j}(u, x, v) \equiv 0 \text{ et } \frac{\partial g^{\rho_j}}{\partial v^j}(u, x, v) \neq 0 \quad (4.2)$$

Pour illustrer la structure de la fonction  $g$  imposée par la condition (4.2), nous proposons de réécrire le système (4.1) sous forme développée. Pour être précis et pour plus de clarté, nous considérerons deux cas selon que  $\rho_r < q$  ou  $\rho_r = q$ .

- **Cas 1** :  $\rho_r < q$

En tenant compte des structures de  $f$  et  $g$ , le système (4.1) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g^1(u, x^1) \\
\vdots \\
\dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\
\dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\
\vdots \\
\dot{x}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2-1}, v^1) \\
\dot{x}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, v^1, v^2) \\
\vdots \\
\dot{x}^{\rho_r-1} = f^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}) + g^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r-1}, v^1, \dots, v^{r-1}) \\
\dot{x}^{\rho_r} = f^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r+1}) + g^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\
\vdots \\
\dot{x}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \dots, x^q) + g^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}, v) \\
\dot{x}^q = f^q(u, x^1, \dots, x^q) + g^q(u, x^1, \dots, x^q, v) \\
y = x^1
\end{array} \right. \quad (4.3)$$

• **Cas 2** :  $\rho_r = q$

Dans ce cas, le système (4.1) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g(u, x^1) \\
\vdots \\
\dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\
\dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\
\vdots \\
\dot{x}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2-1}, v^1) \\
\dot{x}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, v^1, v^2) \\
\vdots \\
\dot{x}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \dots, x^q) + g^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r-1}, v^1, \dots, v^{r-1}) \\
\dot{x}^q = f^q(u, x^1, \dots, x^q) + g^q(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\
y = x^1
\end{array} \right. \quad (4.4)$$

Notons que dans les deux cas ci-dessus, si  $\rho_1 = 1$ , les  $\rho_1 - 1$  premières équations des systèmes (4.3) et (4.4) n'ont plus de sens et sont bien sûr à omettre.

On remarque que lorsque la fonction  $g = 0$ , c'est-à-dire en l'absence d'entrée inconnues, le système (4.1) s'identifie avec le système (2.9) que nous avons considéré précédemment pour la synthèse d'observateurs. Dans la suite, nous allons considérer des hypothèses appropriées sous lesquelles le système (4.1) est observable pour toute entrée. Plus précisément, nous allons considérer des hypothèses sous lesquelles nous pourrions reconstruire tous les états et toutes les entrées inconnues intervenant dans le système (4.1). Puis, nous introduirons des transformations appropriées qui mettront le système (4.1) sous la forme canonique (3.1) pour laquelle nous avons proposé un observateur.

Dans ce qui suit, nous posons pour  $k = 1, \dots, q$ ,

$$\varphi^k(u, x, v) = f^k(u, x) + g^k(u, x, v) \quad (4.5)$$

On adopte maintenant les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 4.1** Pour  $1 \leq k \leq q - 1$ , la fonction  $x^{k+1} \mapsto f^k(u, x^1, \dots, x^k, x^{k+1})$  de  $\mathbb{R}^{n_{k+1}}$  dans  $\mathbb{R}^{n_k}$  est injective pour tout  $(u, x^1, \dots, x^k)$ . De plus, on suppose que  $\exists \alpha_1, \beta_1 > 0$  tels que pour tout  $k \in \{1, \dots, q - 1\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall u \in U$ ,

$$0 < \alpha_1^2 I_{n_{k+1}} \leq \left( \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right)^T \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \leq \beta_1^2 I_{n_{k+1}}$$

où  $I_{n_{k+1}}$  est la matrice identité  $(n_{k+1}) \times (n_{k+1})$ .

Pour la seconde hypothèse, elle sera formulée différemment selon  $\rho_r$  est égal à  $q$  ou non.

• **Cas 1** :  $\rho_r < q$

**Hypothèse 4.2** Pour  $j = 1, \dots, r$ ; la fonction  $\begin{pmatrix} x^{\rho_j+1} \\ v^j \end{pmatrix} \mapsto \varphi^{\rho_j}(u, x^1, \dots, x^{\rho_j}, x^{\rho_j+1}, v^1, \dots, v^j)$  de  $\mathbb{R}^{n_{\rho_j+1}+m_j}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{\rho_j}}$  est injective pour tout  $(u, x^1, \dots, x^{\rho_j}, v^1, \dots, v^{j-1})$ . De plus, si l'on pose

$$F^{\rho_j}(x, u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^{\rho_j}}{\partial x^{\rho_j+1}}(u, x, v) & \frac{\partial \varphi^{\rho_j}}{\partial v^j}(u, x, v) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

alors  $\exists \alpha_2, \beta_2 > 0$  tels que pour  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in U, \forall v \in \mathbb{R}^m$

$$0 < \alpha_1^2 I_{n_{\rho_j+1}+m_j} \leq (F^{\rho_j}(x, u, v))^T F^{\rho_k}(x, u, v) \leq \beta_1^2 I_{n_{\rho_j+1}+m_j} \quad (4.7)$$

• **Cas 2** :  $\rho_r = q$

Dans ce cas, l'hypothèse (4.2) s'énonce en deux parties (1) et (2) comme suit :

**Hypothèse 4.3**

(1) Pour  $j = 1, \dots, r-1$  ; la fonction

$$\begin{pmatrix} x^{\rho_j+1} \\ v^j \end{pmatrix} \mapsto \varphi^{\rho_j}(u, x^1, \dots, x^{\rho_j}, x^{\rho_j+1}, v^1, \dots, v^j)$$

de  $\mathbb{R}^{n_{\rho_j+1}+m_j}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{\rho_j}}$  est injective pour tout  $(u, x^1, \dots, x^{\rho_j}, v^1, \dots, v^{j-1})$ .

De plus, si l'on pose

$$F^{\rho_j}(x, u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^{\rho_j}}{\partial x^{\rho_j+1}}(u, x, v) & \frac{\partial \varphi^{\rho_j}}{\partial v^j}(u, x, v) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

alors  $\exists \alpha_2, \beta_2 > 0$  tels que pour  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in U, \forall v \in \mathbb{R}^m$

$$0 < \alpha_1^2 I_{n_{\rho_j+1}+m_j} \leq (F^{\rho_j}(x, u, v))^T F^{\rho_k}(x, u, v) \leq \beta_1^2 I_{n_{\rho_j+1}+m_j} \quad (4.9)$$

(2) Pour  $j = r$  ; la fonction  $v^r \mapsto g^q(u, x, v^1, \dots, v^r)$  de  $\mathbb{R}^{m_r}$  dans  $\mathbb{R}^{n_q}$  est injective pour tout  $(u, x, v^1, \dots, v^{r-1})$ . De plus,  $\exists \alpha_2, \beta_2 > 0$  tels que pour  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in U, \forall v \in \mathbb{R}^m$

$$0 < \alpha_1^2 I_{m_r} \leq \left( \frac{\partial g^q}{\partial v^r}(u, x, v) \right)^T \frac{\partial g^q}{\partial v^r}(u, x, v) \leq \beta_1^2 I_{m_r} \quad (4.10)$$

Avant de continuer, nous proposons de commenter et discuter les hypothèses adoptées.

On remarque qu'en l'absence d'entrées inconnues, ces hypothèses sont équivalentes à l'hypothèse (H1) adoptée pour le système (2.9). Examinons maintenant la condition de rang qui met en jeu les entrées inconnues. Cette condition s'exprime différemment selon que  $\rho_r < q$  ou  $\rho_r = q$ . Examinons ces deux cas séparément.



• **Cas 1** :  $\rho_r < q$

Dans ce cas, la condition de rang impliquant les entrées inconnues est donnée par les inégalités (4.7). Ces inégalités impliquent que le rang de la matrice  $F^{\rho_j}(x, u, v)$  est égal à  $n_{\rho_j+1} + m_j$ . Or cette matrice est rectangulaire comportant  $n_{\rho_j}$  lignes et  $n_{\rho_j+1} + m_j$  colonnes. La condition (4.7) implique donc que l'on a :

$$n_{\rho_j+1} + m_j \leq n_{\rho_j}, \quad j = 1, \dots, r \quad (4.11)$$

ou de manière équivalente

$$m_j \leq n_{\rho_j} - n_{\rho_j+1}, \quad j = 1, \dots, r \quad (4.12)$$

En sommant de 1 à  $r$ , on obtient :

$$\begin{aligned} m &\leq \sum_{j=1}^r (n_{\rho_j} - n_{\rho_j+1}) \\ &= n_{\rho_1} - n_{\rho_{r+1}} \\ &\leq n_1 - n_q \\ &\leq p - 1 \end{aligned}$$

Les deux dernières inégalités résultent du fait que l'on a  $p = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q$ .

Il ressort de cette analyse que le nombre d'entrées inconnues  $m$  doit être strictement inférieur au nombre de mesures  $p$  i.e.  $m \leq p - 1$ . Cette inégalité rappelle l'inégalité bien connue dans le cadre de synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes linéaires. En effet, cette inégalité doit être satisfaite pour que soit possible la synthèse d'un observateur avec des pôles arbitraires pour l'estimation de l'état du système indépendamment des entrées inconnues. A titre de rappel, une condition nécessaire pour la synthèse d'un observateur à entrées inconnues pour l'estimation de l'état indépendamment des entrées inconnues est que le nombre des entrées inconnues  $m$  est inférieur ou égal au nombre de sorties  $p$ , i.e.  $m \leq p$ . Toutefois, lorsque  $p = m$ , on ne peut pas placer tous les pôles de l'observateur.

Examinons maintenant l'autre cas.

• **Cas 2** :  $\rho_r = q$

Comme dans le cas précédent, la condition (4.9) implique

$$n_{\rho_{j+1}} + m_j \leq n_{\rho_j}, \quad j = 1, \dots, r-1 \quad (4.13)$$

ou de manière équivalente

$$m_j \leq n_{\rho_j} - n_{\rho_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, r-1 \quad (4.14)$$

En sommant de 1 à  $r-1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} m - m_r &\leq \sum_{j=1}^{r-1} (n_{\rho_j} - n_{\rho_{j+1}}) \\ &= n_{\rho_1} - n_{\rho_r} \\ &\leq n_1 - n_q \end{aligned} \quad (4.15)$$

c'est-à-dire

$$m \leq p - (n_q - m_r) \quad (4.16)$$

Compte tenu de la condition (4.9), le rang de la matrice rectangulaire  $n_q \times m_r$ ,  $\frac{\partial g^q}{\partial v^r}(u, x, v)$  est égal à  $m_r$ , ce qui implique que  $n_q \geq m_r$  et la condition (4.16) devient

$$m \leq p \quad (4.17)$$

Nous remarquons que dans ce cas, le nombre d'entrées inconnues peut être égal au nombre de sorties.

Dans la suite, nous allons tout d'abord plonger (4.1) dans un système de taille plus grande, qu'on appellera système augmenté, ayant les mêmes sorties et présentant des propriétés structurelles particulières qui seront mises en avant. Ensuite nous introduirons une transformation sur le système augmenté qui le transformera sous une forme observable pour toute entrée que l'on utilisera alors pour la synthèse d'un observateur permettant l'estimation simultanée de tous les états et de toutes les entrées inconnues.

Pour la clarté de l'exposé, nous proposons de considérer d'abord le cas  $r = 1$ . Ensuite, la généralisation au cas où  $r > 1$  sera détaillée. On se référera à ce cas par celui d'une entrée inconnue.

### 4.3 Cas d'une entrée inconnue

Dans ce cas, l'entrée inconnue  $v$  s'identifie avec la composante  $v^1$ , i.e.  $v = v^1$ . Pour des raisons de clarté, nous utiliserons la notation  $v^1$  pour nous référer à l'entrée inconnue. Comme précédemment, nous allons traiter deux cas selon que  $\rho_1$  est strictement inférieur à  $q$  ou  $\rho_1 = q$ . Sans nuire à la généralité, on supposera dans les deux cas que  $\rho_1 > 1$ .

#### 4.3.1 Cas où $\rho_1 < q$

Dans ce cas, le système (4.1) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\ \dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \dots, x^q) + g^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}, v^1) \\ \dot{x}^q = f^q(u, x^1, \dots, x^q) + g^q(u, x^1, \dots, x^q, v^1) \\ y = x^1 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

##### 4.3.1.1 Système augmenté

Nous allons maintenant plonger le système (4.18) dans un système de taille plus grande. Plus précisément, le système augmenté est composé de deux blocs dont les sorties correspondantes sont égales à celles du système original (4.18). Les variables associées au premier blocs sont  $x^1, \dots, x^{\rho_1+1}$  et  $v^1$ . Celles associées au deuxième blocs sont des copies des variables du système, c'est-à-dire  $x^1, \dots, x^q$ . Ainsi, le plongement considéré peut être interprété comme étant une application injective  $\Psi$  définie comme suit :  $\Psi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+\dots+n_{\rho_1+1}+m+n}$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ v^1 \end{pmatrix} \mapsto z = \Psi(x, v) = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$

avec  $z^1 = \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ \dots \\ z_{\rho_1+1}^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+\dots+n_{\rho_1+1}+m}$  et  $z^2 = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ \dots \\ z_q^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . Les expressions de  $z_i^1$  et  $z_i^2$  sont définies comme suit :

$$\begin{cases} z_k^1 &= x^k, \quad k = 1, \dots, \rho_1 \\ z_{\rho_1+1}^1 &= \begin{pmatrix} z_{\rho_1+1,1}^1 \\ z_{\rho_1+1,2}^1 \end{pmatrix} \text{ avec } z_{\rho_1+1,1}^1 = x^{\rho_1+1} \text{ et } z_{\rho_1+1,2}^1 = v \\ z_k^2 &= x^k, \quad k = 1, \dots, q \end{cases} \quad (4.19)$$

Il est aisé de montrer que cette transformation met le système (4.18) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1^1 &= f^1(u, z_1^1, z_2^1) + g(u, z_1^1) \\ \vdots &= \vdots \\ \dot{z}_{\rho_1-1}^1 &= f^{\rho_1-1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1) + g^{\rho_1-1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1-1}^1) \\ \dot{z}_{\rho_1}^1 &= f^{\rho_1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1,1}^1) + g^{\rho_1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, z_{\rho_1+1,2}^1) \\ \dot{z}_{\rho_1+1}^1 &= \begin{pmatrix} f^{\rho_1+1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, z_{\rho_1+1,1}^1, z_{\rho_1+2}^2) + g^{\rho_1+1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1,1}^1, z_{\rho_1+1,2}^1) \\ \varepsilon^1(t) \end{pmatrix} \\ y_1 &= z_1^1 \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1^2 &= f^1(u, z_1^2, z_2^2) + g^1(u, z_1^2) \\ \vdots &= \vdots \\ \dot{z}_{\rho_1-1}^2 &= f^{\rho_1-1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1}^2) + g^{\rho_1-1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1-1}^2) \\ \dot{z}_{\rho_1}^2 &= f^{\rho_1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1+1}^2) + g^{\rho_1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1}^2, z_{\rho_1+1}^1) \\ \dot{z}_{\rho_1+1}^2 &= f^{\rho_1+1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1+1}^2, z_{\rho_1+2}^2) + g^{\rho_1+1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1+1}^2, z_{\rho_1+2}^1) \\ \vdots & \\ \dot{z}_{q-1}^2 &= f^{q-1}(u, z_1^2, \dots, z_q^2) + g^{q-1}(u, z_1^2, \dots, z_{q-1}^2, z_{\rho_1+2}^1) \\ \dot{z}_q^2 &= f^q(u, z_1^2, \dots, z_q^2) + g^q(u, z_1^2, \dots, z_q^2, z_{\rho_1+2}^1) \\ y_2 &= z_1^2 \end{cases} \quad (4.21)$$

Notons que  $z_k^1 \in \mathbb{R}^{n_k}$  pour  $k = 1, \dots, \rho_1$  et que  $z_{\rho_1+1}^1 \in \mathbb{R}^{n_{\rho_1+1}+m}$ . Rappelons aussi que  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{\rho_1}$  et que l'on a aussi compte tenu de la condition (4.9),  $n_{\rho_1} \geq n_{\rho_1+1} + m$ . On déduit que les tailles des blocs du système (4.20) sont décroissantes, le premier bloc ayant la plus grande taille et elle est égale au nombre de

sorties. Cette propriété est aussi vraie pour le deuxième sous-système puisqu'il est une simple copie du système original et que cette propriété est vraie pour le système original.

Nous allons maintenant définir la transformation  $\Phi$ , qui met le système (4.20)-(4.20) sous la forme canonique (3.1).

#### 4.3.1.2 Changement de coordonnées

Soit  $\Phi$ , l'application injective suivante  $\Phi : \mathbb{R}^{n_1+\dots+n_{\rho_1+1}+m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{p(\rho_1+1)+pq}$ ,

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \mapsto \xi = \Phi(u, z) = \begin{pmatrix} \xi^1 = \Phi_1(u, z) \\ \xi^2 = \Phi_2(u, z) \end{pmatrix} \text{ avec } \xi^1 = \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \dots \\ \xi_{\rho_1+1}^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\rho_1+1)p} \text{ et}$$

$$\xi^2 = \begin{pmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \dots \\ \xi_q^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{qp}. \text{ Les expressions de } \xi_i^1 \text{ et } \xi_i^2 \text{ sont définies comme suit :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1^1 = \Phi_{1,1}(u, z_1^1) = z_1^1 \\ \xi_2^1 = \Phi_{1,2}(u, z_1^1, z_2^1) = f^1(u, z_1^1, z_2^1) \\ \xi_3^1 = \Phi_{1,3}(u, z_1^1, z_2^1, z_3^1) = \frac{\partial f^1}{\partial z_2^1}(u, z_1^1, z_2^1) f^2(u, z_1^1, z_2^1, z_3^1) \\ \vdots = \vdots \\ \xi_{\rho_1}^1 = \Phi_{1,\rho_1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1) = \left( \prod_{k=1}^{\rho_1-2} \frac{\partial f^k}{\partial z_{k+1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{k+1}^1) \right) f^{\rho_1-1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1) \\ \xi_{\rho_1+1}^1 = \Phi_{1,\rho_1+1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1) = \left( \prod_{k=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^k}{\partial z_{k+1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{k+1}^1) \right) (f^{\rho_1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, z_{\rho_1+1,1}^1) + g^{\rho_1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, z_{\rho_1+1,2}^1)) \end{array} \right. \quad (4.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\xi_1^2 = \Phi_{2,1}(u, z_1^2) = z_1^2 \\
\xi_2^2 = \Phi_{2,2}(u, z_1^2, z_2^2) = f^1(u, z_1^2, z_2^2) \\
\xi_3^2 = \Phi_{2,3}(u, z_1^2, z_2^2, z_3^2) = \frac{\partial f^1}{\partial z_2^2}(u, z_1^2, z_2^2) f^2(u, z_1^2, z_2^2, z_3^2) \\
\vdots \\
\xi_{\rho_1}^2 = \Phi_{2,\rho_1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1}^2) = \left( \prod_{k=1}^{\rho_1-2} \frac{\partial f^k}{\partial z_{k+1}^2}(u, z_1^2, \dots, z_{k+1}^2) \right) \\
\qquad \qquad \qquad f^{\rho_1-1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1}^2) \\
\xi_{\rho_1+1}^2 = \Phi_{2,\rho_1+1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1+1}^2) = \left( \prod_{k=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^k}{\partial z_{k+1}^2}(u, z_1^2, \dots, z_{k+1}^2) \right) \\
\qquad \qquad \qquad f^{\rho_1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1+1}^2) \\
\vdots \\
\xi_q^2 = \Phi_{2,q}(u, z_1^2, \dots, z_q^2) = \left( \prod_{k=1}^{q-2} \frac{\partial f^k}{\partial z_{k+1}^2}(u, z_1^2, \dots, z_{k+1}^2) \right) \\
\qquad \qquad \qquad f^{q-1}(u, z_1^2, \dots, z_q^2)
\end{array} \right. \quad (4.23)$$

La transformation  $\Phi_2$  est similaire à celle introduite au chapitre 1 pour mettre la forme (2.9) sous la forme canonique (2.1). Nous avons  $z_1^1 = \xi_1^1$ . Compte tenu des hypothèses (H1) et (H2) et en utilisant le théorème des fonctions implicites, chaque variable  $z_k^1$ ,  $k = 2, \dots, \rho_1$ , peut s'exprimer comme fonction de  $\xi_1^1, \dots, \xi_k^1$ . Les variables  $z_{\rho_1+1,1}^1$  et  $z_{\rho_1+1,2}^1$  peuvent s'exprimer d'après l'hypothèse (H2) et en utilisant le théorème des fonctions implicites en fonction de  $\xi_1^1, \dots, \xi_{\rho_1+1}^1$ . De même, nous avons  $z_1^2 = \xi_1^2$  et chaque variable  $z_k^2$ ,  $k = 2, \dots, q$ , peut s'exprimer comme fonction de  $\xi_1^2, \dots, \xi_k^2$ . Nous allons maintenant exprimer les dérivées par rapport au temps des  $\xi_k^1$  pour  $k = 1, \dots, \rho_1 + 1$  et  $\xi_k^2$  pour  $k = 1, \dots, q$ .

Remarquons tout d'abord les identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial z_1^1}(u, z) = I_{n_1} \\ \bullet \text{ Pour } k = 2, \dots, \rho_1 : \\ \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_k^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{i+1}^1) \\ \bullet \frac{\partial \Phi_{1,\rho_1+1}}{\partial z_{\rho_1+1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1) = \left( \prod_{i=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{i+1}^1) \right) \\ \left( \frac{\partial f^{\rho_1}}{\partial z_{\rho_1+1,1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, z_{\rho_1+1,1}^1) \frac{\partial g^{\rho_1}}{\partial z_{\rho_1+1,2}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, z_{\rho_1+1,2}^1) \right) \\ \bullet \frac{\partial \Phi_{2,1}}{\partial z_1^2}(u, z) = I_{n_1} \\ \bullet \text{ Pour } k = 2, \dots, q : \\ \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_k^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^2}(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Maintenant, il est clair que  $\dot{\xi}_1^1 = \xi_2^1$  et  $\dot{\xi}_1^2 = \xi_2^2$ . Soit maintenant  $2 \leq k \leq \rho_1$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k^1 &= \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \dot{u} + \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \dot{z}_i^1 \right) \\ &= \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \dot{u} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) (f^i(u, z_1^1, \dots, z_{i+1}^1) + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Pour  $2 \leq k \leq \rho_1 - 1$ , on a

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k^1 &= \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_k^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) f^k(u, z_1^1, \dots, z_{k+1}^1) + \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \dot{u} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) (f^i(u, z_1^1, \dots, z_{i+1}^1) + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_k^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) g^k(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \end{aligned}$$

Utilisant (4.24), on obtient

$$\begin{aligned}
\xi_k^1 &= \left( \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{i+1}^1) \right) f^k(u, z^1, \dots, z_{k+1}^1) + \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \dot{u} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) (f^i(u, z^1, \dots, z_{i+1}^1) + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) \\
&\quad + \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_k^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) g^k(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \\
&= \xi_{k+1}^1 + \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \dot{u} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) (f^i(u, z^1, \dots, z_{i+1}^1) + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) \\
&\quad + \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_k^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) g^k(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \\
&\triangleq \xi_{k+1}^1 + \psi_k^1(u, \dot{u}, \xi_1^1, \dots, \xi_k^1)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\psi_k^1(u, \dot{u}, \xi_1^1, \dots, \xi_k^1) &\triangleq \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \dot{u} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \right. \\
&\quad \quad \left. (f^i(u, z^1, \dots, z_{i+1}^1) + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) \\
&\quad + \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_k^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) g^k(u, z_1^1, \dots, z_k^1) \tag{4.26}
\end{aligned}$$

On remarque que la fonction  $\psi_k^1$  est triangulaire par rapport à  $\xi^1$ . Ceci se justifie par le fait que le membre droit de l'égalité (4.26) dépend de  $z_1^1$  jusqu'à  $z_k^1$  qui peuvent s'exprimer comme nous l'avons exprimé plus haut, en utilisant le théorème des fonctions implicites (dont l'utilisation est justifiée par les hypothèses (H1) et (H2)), en fonction de  $\xi_1^1, \dots, \xi_k^1$ .

Pour  $k = \rho_1$ , l'égalité (4.25) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
\xi_{\rho_1}^1 &= \left( \prod_{i=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{i+1}^1) \right) (f^{\rho_1}(u, z^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1) + g^{\rho_1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, z_{\rho_1+2}^1)) \\
&\quad + \frac{\partial \Phi_{1,\rho_1}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1) \dot{u} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\rho_1-1} \left( \frac{\partial \Phi_{1,k}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) (f^i(u, z^1, \dots, z_{i+1}^1) + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) \\
&\triangleq \xi_{\rho_1+1}^1 + \psi_{\rho_1}^1(u, \dot{u}, \xi_1^1, \dots, \xi_{\rho_1}^1) \tag{4.27}
\end{aligned}$$



avec

$$\begin{aligned} \psi_{\rho_1}^1(u, \dot{u}, \xi_1^1, \dots, \xi_{\rho_1}^1) &\triangleq \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1) \dot{u} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\rho_1-1} \left( \frac{\partial \Phi_{1, k}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_k^1) (f^i(u, z^1, \dots, z_{i+1}^1) \right. \\ &\quad \left. + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Les arguments utilisés pour prouver que  $\psi_{\rho_1}^1$  est triangulaire par rapport à  $\xi$  sont les mêmes que ceux utilisés pour  $\psi_k^1$ ,  $2 \leq k \leq \rho_1 - 1$ .

Calculons maintenant la dérivée par rapport au temps de  $\xi_{\rho_1+1}^1$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{\rho_1+1}^1 &= \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1) \dot{u} + \sum_{i=1}^{\rho_1+1} \left( \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1) \dot{z}_i^1 \right) \\ &= \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1) \dot{u} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\rho_1} \left( \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1) (f^i(u, z^1, \dots, z_{i+1}^1) + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial z_{\rho_1+1,1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1) \dot{z}_{\rho_1+1,1}^1 \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial z_{\rho_1+1,2}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1) \dot{z}_{\rho_1+1,2}^1 \\ &= \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1) \dot{u} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\rho_1} \left( \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1) (f^i(u, z^1, \dots, z_{i+1}^1) + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial z_{\rho_1+1,1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1) (f^{\rho_1+1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1, z_{\rho_1+2}^2) \\ &\quad + g^{\rho_1+1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1)) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial z_{\rho_1+1,2}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1) \varepsilon(t) \\ &= \psi_{\rho_1+1}^1(u, \dot{u}, \xi) + \left( \prod_{i=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{i+1}^1) \right) \frac{\partial g^{\rho_1}}{\partial v^1}(u, \xi^1) \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_{\rho_1+1}^1(u, \dot{u}, \xi) &= \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial u}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1) \dot{u} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\rho_1} \left( \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial z_i^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1) (f^i(u, z^1, \dots, z_{i+1}^1) \right. \\ &\quad \left. + g^i(u, z_1^1, \dots, z_i^1)) \right) + \frac{\partial \Phi_{1, \rho_1+1}}{\partial z_{\rho_1+1}^1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1) \\ &\quad (f^{\rho_1+1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1, z_{\rho_1+2}^2) + g^{\rho_1+1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+2}^1)) \end{aligned}$$

Calculons maintenant  $\xi_k^2$  pour  $2 \leq k \leq \rho_1 - 1$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}
\xi_k^2 &= \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial u}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \dot{u} + \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \dot{z}_i^2 \right) \\
&= \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial u}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \dot{u} \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) (f^i(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) + g^i(u, z_1^2, \dots, z_i^2)) \right) \\
&= \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial u}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \dot{u} \\
&\quad + \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_k^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) (f^k(u, z_1^2, \dots, z_{k+1}^2) + g^k(u, z_1^2, \dots, z_k^2)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) (f^i(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) + g^i(u, z_1^2, \dots, z_i^2)) \right) \\
&= \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial u}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \dot{u} \\
&\quad + \left( \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^2}(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) \right) (f^k(u, z_1^2, \dots, z_{k+1}^2) + g^k(u, z_1^2, \dots, z_k^2)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) (f^i(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) + g^i(u, z_1^2, \dots, z_i^2)) \right) \\
&= \xi_{k+1}^2 + \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial u}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \dot{u} \\
&\quad + \left( \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^2}(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) \right) g^k(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) (f^i(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) + g^i(u, z_1^2, \dots, z_i^2)) \right) \\
&\stackrel{\Delta}{=} \xi_{k+1}^2 + \psi_k^2(u, \dot{u}, \xi_1^2, \dots, \xi_k^2) \tag{4.30}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\psi_k^2(u, \dot{u}, \xi_1^2, \dots, \xi_k^2) &= \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial u}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \dot{u} \\
&\quad + \left( \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^2}(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) \right) g^k(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) (f^i(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) + g^i(u, z_1^2, \dots, z_i^2)) \right) \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Le caractère triangulaire de  $\psi_k^2$  se justifie par les mêmes arguments utilisés pour  $\psi_k^1$ .

Pour  $\rho_1 \leq k \leq q-1$ , les calculs sont similaires et la seule différence réside dans le fait

que  $z_{\rho_1+1,2}^1$  devient un argument de  $g^k$ . Mais comme nous l'avons expliqué, cette variable peut s'exprimer comme fonction de  $\xi_1^1, \dots, \xi_{\rho_1+1}^1$ . Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_k^2 &= \xi_{k+1}^2 + \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial u}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \dot{u} \\
&+ \left( \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^2}(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) \right) g^k(u, z_1^2, \dots, z_k^2, z_{\rho_1+2}^1) \\
&+ \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) f^i(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{\rho_1-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) g^i(u, z_1^2, \dots, z_i^2) \right) \\
&+ \sum_{i=\rho_1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) g^i(u, z_1^2, \dots, z_i^2, z_{\rho_1+2}^1) \right) \\
&\triangleq \xi_{k+1}^2 + \psi_k^2(u, \dot{u}, \xi_1^2, \dots, \xi_k^2, \xi^1)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

avec

$$\begin{aligned}
\psi_k^2(u, \dot{u}, \xi_1^2, \dots, \xi_k^2, \xi^1) &\triangleq \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial u}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) \dot{u} \\
&+ \left( \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^2}(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) \right) g^k(u, z_1^2, \dots, z_k^2, z_{\rho_1+2}^1) \\
&+ \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) f^i(u, z_1^2, \dots, z_{i+1}^2) \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{\rho_1-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) g^i(u, z_1^2, \dots, z_i^2) \right) \\
&+ \sum_{i=\rho_1}^{k-1} \left( \frac{\partial \Phi_{2,k}}{\partial z_i^2}(u, z_1^2, \dots, z_k^2) g^i(u, z_1^2, \dots, z_i^2, z_{\rho_1+2}^1) \right)
\end{aligned}$$

Pour  $k = q$ , on posera  $\dot{\xi}_q^2 = \psi_q^k(u, \dot{u}, \xi)$ .

Compte tenu des développements précédents, les dynamiques des variables  $\xi^1$  et  $\xi^2$  peuvent s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1^1 = \xi_2^1 \\ \dot{\xi}_2^1 = \xi_3^1 + \psi_2^1(u, \dot{u}, \xi_1^1, \xi_2^1) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{\xi}_{\rho_1-1}^1 = \xi_{\rho_1}^1 + \psi_{\rho_1-1}^1(u, \dot{u}, \xi_1^1, \dots, \xi_{\rho_1-1}^1) \\ \dot{\xi}_{\rho_1}^1 = \xi_{\rho_1+1}^1 + \psi_{\rho_1}^1(u, \dot{u}, \xi_1^1, \dots, \xi_{\rho_1}^1) \\ \dot{\xi}_{\rho_1+1}^1 = \psi_{\rho_1+1}^1(u, \dot{u}, \xi) + \left( \prod_{i=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^1}(u, \xi^1) \right) \frac{\partial g^{\rho_1}}{\partial v^1}(u, \xi^1) \varepsilon(t) \\ y_1 = \xi_1^1 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1^2 = \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_2^2 = \xi_3^2 + \psi_2^2(u, \dot{u}, \xi_1^2, \xi_2^2) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{\xi}_{\rho_1-1}^2 = \xi_{\rho_1}^2 + \psi_{\rho_1-1}^2(u, \dot{u}, \xi_1^2, \dots, \xi_{\rho_1-1}^2) \\ \dot{\xi}_{\rho_1}^2 = \xi_{\rho_1+1}^2 + \psi_{\rho_1}^2(u, \dot{u}, \xi_1^2, \dots, \xi_{\rho_1}^2, \xi^1) \\ \dot{\xi}_{\rho_1+1}^2 = \xi_{\rho_1+2}^2 + \psi_{\rho_1+1}^2(u, \dot{u}, \xi_1^2, \dots, \xi_{\rho_1+1}^2, \xi^1) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{q-1}^2 = \xi_q^2 + \psi_{q-1}^2(u, \dot{u}, \xi_1^2, \dots, \xi_{q-1}^2, \xi^1) \\ \dot{\xi}_q^2 = \psi_q^2(u, \dot{u}, \xi) \\ y_2 = \xi_1^2 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Il est clair que le système (4.33)-(4.34) est sous la forme (3.1) avec  $q = 2$ ,  $\lambda_1 = \rho_1 + 1$  et  $\lambda_2 = q$ . De ce fait, un observateur de type (3.35) peut être synthétisé pour l'estimation de  $\xi^1$  et  $\xi^2$ . Avant de donner les équations de cet observateur, considérons l'écriture compacte suivante du système (4.33)-(4.34) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}^1 = A_1 \xi^1 + \psi^1(\dot{u}, u, \xi) \\ y_1 = \xi_1^1 \end{array} \right. \quad (4.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}^2 = A_2 \xi^2 + \psi^2(\dot{u}, u, \xi) \\ y_2 = \xi_1^2 \end{array} \right. \quad (4.36)$$

où  $A_1$  est la matrice anti-décalage carrée d'ordre  $(\rho_1+1)p$ , c'est-à-dire  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_{(\rho_1+1)p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $A_2$  est la matrice anti-décalage carrée d'ordre  $qp$ .

### 4.3.1.3 Equations de l'observateur dans les nouvelles coordonnées

Un observateur de type (3.35) pour (4.35)-(4.36) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}^1 &= A_1 \hat{\xi}^1 + \psi^1(\dot{u}, u, \underline{\xi}) - \theta^{\delta_1} \Delta_1^{-1}(\theta) S_1^{-1} C_1^T (\hat{\xi}_1^1 - \xi_1^1) \\ \dot{\hat{\xi}}^2 &= A_2 \hat{\xi}^2 + \psi^2(\dot{u}, u, \underline{\xi}) - \theta^{\delta_2} \Delta_2^{-1}(\theta) S_2^{-1} C_2^T (\hat{\xi}_1^2 - \xi_1^2) \end{cases} \quad (4.37)$$

où les gains  $S_1^{-1} C_1^T$  et  $S_2^{-1} C_2^T$  s'expriment comme suit :

$$S_1^{-1} C_1^T = \begin{bmatrix} C_{\rho_1+1}^1 I_p \\ C_{\rho_1+1}^2 I_p \\ \vdots \\ C_{\rho_1+1}^{\rho_1+1} I_p \end{bmatrix} \quad S_2^{-1} C_2^T = \begin{bmatrix} C_q^1 I_p \\ C_q^2 I_p \\ \vdots \\ C_q^q I_p \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Les valeurs de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  peuvent être déterminées à partir de la formule générale (3.13) qui donne dans ce cas  $\delta_2 = 1$  et  $\delta_1 = 2(q - \frac{3}{2}) = 2q - 3$ .

Les matrices  $\Delta_1(\theta)$  et  $\Delta_2(\theta)$  sont données par :

$$\begin{aligned} \Delta_1(\theta) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{1}{\theta^{\delta_1}} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{\rho_1 \delta_1}} I_p \right) \\ \Delta_2(\theta) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right) \end{aligned}$$

### 4.3.1.4 Equations de l'observateur dans les coordonnées originales

L'observateur (4.37) peut être écrit dans les coordonnées en  $z$ . Son gain, dans ces coordonnées, est égal au produit de l'inverse (généralisée) de la jacobienne de la transformation  $\Phi$ , qui fait passer des coordonnées en  $z$  à celles en  $\xi$ , par le gain de l'observateur dans les coordonnées en  $\xi$ . Avant d'écrire les équations de l'observateur dans les coordonnées en  $z$ , considérons l'écrite compacte du système (4.20)-(4.21) :

$$\begin{cases} \dot{z}^1 &= f_1(u, z) + g_1(u, z) + \bar{\varepsilon}(t) \\ \dot{z}^2 &= f_2(u, z) + g_2(u, z) \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\text{où } f_1(u, z) = \begin{bmatrix} f^1(u, z_1^1, z_2^1) \\ \vdots \\ f^{\rho_1-1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1) \\ f^{\rho_1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1) \\ f^{\rho_1+1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1, z_{\rho_1+2}^2) \\ 0 \end{bmatrix}, f_2(u, z) = \begin{bmatrix} f^1(u, z_1^2, z_2^2) \\ \vdots \\ f^{\rho_1-1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1}^2) \\ f^{\rho_1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1+1}^2) \\ f^{\rho_1+1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1+1}^2, z_{\rho_1+2}^2) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u, z_1^2, \dots, z_q^2) \\ f^q(u, z_1^2, \dots, z_q^2) \end{bmatrix},$$

$$g_1(u, z) = \begin{bmatrix} g^1(u, z_1^1) \\ \vdots \\ g^{\rho_1-1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1-1}^1) \\ g^{\rho_1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, z_{\rho_1+2}^1) \\ g^{\rho_1+1}(u, z_1^1, \dots, z_{\rho_1+1}^1, z_{\rho_1+2}^1) \\ 0 \end{bmatrix}, g_2(u, z) = \begin{bmatrix} g^1(u, z_1^2) \\ \vdots \\ g^{\rho_1-1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1-1}^2) \\ g^{\rho_1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1}^2, z_{\rho_1+1}^1) \\ g^{\rho_1+1}(u, z_1^2, \dots, z_{\rho_1+1}^2, z_{\rho_1+2}^1) \\ \vdots \\ g^q(u, z_1^2, \dots, z_q^2, z_{\rho_1+2}^1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \bar{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon^1(t) \end{bmatrix}.$$

L'observateur (4.37) s'écrit dans les coordonnées en  $z$  comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}^1 &= f_1(u, \hat{z}) + g_1(u, \hat{z}) - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^1}(u, \hat{z})\right)^+ \theta^{\delta_1} \Delta_1^{-1}(\theta) S_1^{-1} C_1^T (\hat{z}_1^1 - z_1^1) \\ \dot{\hat{z}}^2 &= f_2(u, \hat{z}) + g_2(u, \hat{z}) - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z^2}(u, \hat{z})\right)^+ \theta^{\delta_2} \Delta_2^{-1}(\theta) S_2^{-1} C_2^T (\hat{z}_1^2 - z_1^2) \end{cases} \quad (4.40)$$

où la notation  $(\cdot)^+$  désigne l'inverse à gauche de la matrice de rang plein en colonnes  $(\cdot)$ . Rappelons que l'inverse à gauche s'exprime comme suit :

$$(\cdot)^+ = ((\cdot)^T(\cdot))^{-1}(\cdot)^T$$

Comme les matrices  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^1}(u, \hat{z})$  et  $\frac{\partial \Phi_2}{\partial z^2}(u, \hat{z})$  sont des matrices triangulaires inférieures, on pourra les remplacer par leur diagonale (Farza *et al.* [2005]). En effet, calculons les diagonales de ces matrices et donnons les équations de l'observateur résultant.

Notons par  $\Lambda_1(\hat{z}^1)$  et  $\Lambda_2(\hat{z}^2)$  les diagonales respectives de  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^1}(u, \hat{z})$  et  $\frac{\partial \Phi_2}{\partial z^2}(u, \hat{z})$ .

Nous avons :

$$\Lambda_1(u, \hat{z}^1) = \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial z_2^1}(u, z^1), \dots, \prod_{k=1}^{\rho_1-1} \left( \frac{\partial f^k}{\partial z_{k+1}^1}(u, z^1) \right), \right. \\ \left. \prod_{k=1}^{\rho_1-1} \left( \frac{\partial f^k}{\partial z_{k+1}^1}(u, z^1) \right) F^{\rho_1}(u, z^1) \right) \quad (4.41)$$

$$\Lambda_2(u, \hat{z}^2) = \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial z_2^2}(u, z^2), \dots, \prod_{k=1}^{q-1} \left( \frac{\partial f^k}{\partial z_{k+1}^2}(u, z^2) \right) \right) \quad (4.42)$$

$$\text{où } F^{\rho_1}(u, z^1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{\rho_1}}{\partial z_{\rho_1+1}^1}(u, z^1) & \frac{\partial g^{\rho_1}}{\partial v^1}(u, z^1) \end{bmatrix}.$$

Les matrices diagonales par blocs  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  peuvent être présentées par les formes compactes suivantes :

$$\Lambda_1(u, \hat{z}^1) = \text{diag} (I_p, \Lambda_{1,2}(u, \hat{z}^1), \dots, \Lambda_{1,\rho_1+1}(u, \hat{z}^1))$$

$$\Lambda_2(u, \hat{z}^2) = \text{diag} (I_p, \Lambda_{2,2}(u, \hat{z}^2), \dots, \Lambda_{2,q}(u, \hat{z}^2))$$

avec

- Pour  $k = 2, \dots, \rho_1$  :  $\Lambda_{2,k}(u, \hat{z}^1) = \prod_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^1}(u, z^1) \right)$
- $\Lambda_{1,\rho_1+1}(u, \hat{z}^1) = \prod_{k=1}^{\rho_1-1} \left( \frac{\partial f^k}{\partial z_{k+1}^1}(u, z^1) \right) F^{\rho_1}(u, z^1)$
- Pour  $k = 2, \dots, q$  :  $\Lambda_{2,k}(u, \hat{z}^2) = \prod_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\partial f^i}{\partial z_{i+1}^2}(u, z^2) \right)$

Comme chacune des matrices  $\Lambda_{1i}, \Lambda_{2j}$ ,  $i = 1, 2, 3$  et  $j = 1, \dots, 4$  est inversible à gauche, les matrices  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  le sont aussi et leur inverse à gauche s'expriment comme suit :

$$\Lambda_1^+(u, \hat{z}^1) = \text{diag} (I_p, \Lambda_{1,2}^+(u, \hat{z}^1), \dots, \Lambda_{1,\rho_1+1}^+(u, \hat{z}^1))$$

$$\Lambda_2^+(u, \hat{z}^2) = \text{diag} (I_p, \Lambda_{2,2}^+(u, \hat{z}^2), \dots, \Lambda_{2,q}^+(u, \hat{z}^2))$$

On pourra donc utiliser dans les coordonnées en  $z$  l'observateur suivant qui ne nécessite pas le calcul de tous les termes de la matrice jacobienne :

$$\begin{cases} \hat{z}^1 &= f_1(u, \hat{z}) + g_1(u, \hat{z}) - (\Lambda_1(u, \hat{z}))^+ \theta^{\delta_1} \Delta_1^{-1}(\theta) S_1^{-1} C_1^T (\hat{z}_1^1 - z_1^1) \\ \hat{z}^2 &= f_2(u, \hat{z}) + g_2(u, \hat{z}) - (\Lambda_2(u, \hat{z}))^+ \theta^{\delta_2} \Delta_2^{-1}(\theta) S_2^{-1} C_2^T (\hat{z}_1^2 - z_1^2) \end{cases} \quad (4.43)$$

On peut directement déduire à partir de l'observateur (4.43), des estimés  $\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^q$  et  $\hat{v}$ , des variables originales  $x^1, \dots, x^q$  et  $v$ . En effet, nous avons  $\hat{v} = \hat{z}_{\rho_1+1,2}^1$  et  $\hat{x}^k = \hat{z}_k^2$  pour  $k = 1, \dots, q$ . Remarquons que les estimés de  $x^k$  pour  $k = 1, \dots, \rho_1 + 1$  peuvent aussi être déduites à partir des variables du premier bloc comme suit :  $x^k = z_k^1$  pour  $k = 1, \dots, \rho_1$  et  $x^{\rho_1+1} = z_{\rho_1+1,1}^1$ . En fait, on remarque que lorsque  $\rho_1 + 1 = q$ , le premier sous-système du système (4.43) permet l'estimation de toutes les variables du système original et l'observateur global devra dans ce cas se restreindre à ce sous-système, le deuxième sous-système est donc à écarter.

L'observateur (4.43) a été synthétisé pour le système augmenté (4.20)-(4.21). Nous allons dans ce qui suit faire le lien entre la structure de cet observateur et celle du système original (4.18). Pour des raisons de lisibilité, nous allons procéder à un renommage des variables de l'observateur. En effet, nous allons adopter les notations suivantes :

- Pour  $k = 1, \dots, q$  :  

$$\hat{x}^k = \hat{z}_k^2$$
- Pour  $k = 1, \dots, \rho_1$  :  

$$\hat{\eta}^k = \hat{z}_k^1$$
- $\hat{\eta}^{\rho_1+1} = \hat{z}_{\rho_1+1,1}^1$
- $\hat{v}^1 = \hat{z}_{\rho_1+1,2}^1$

Avec ces notations, l'observateur (4.43) peut s'écrire sous la forme développée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{\eta}}^1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{\eta}}^{\rho_1-1} \\ \dot{\hat{\eta}}^{\rho_1} \\ \left( \begin{array}{c} \dot{\hat{\eta}}^{\rho_1+1} \\ \dot{\hat{v}}^1 \end{array} \right) \end{array} \right. = \begin{array}{l} f^1(u, \hat{\eta}^1, \hat{\eta}^2) + g^1(u, \hat{\eta}^1) - C_{\rho_1+1}^1 \theta^{\delta_1} (\hat{\eta}^1 - y) \\ f^{\rho_1-1}(u, \hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, \hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^{\rho_1-1}) \\ \quad - C_{\rho_1+1}^{\rho_1-1} \theta^{(\rho_1-1)\delta_1} \Lambda_{1,\rho_1-1}(u, \hat{\eta}) (\hat{\eta}^1 - y) \\ f^{\rho_1}(u, \hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, \hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^{\rho_1}, \hat{v}^1) \\ \quad - C_{\rho_1+1}^{\rho_1} \theta^{(\rho_1)\delta_1} \Lambda_{1,\rho_1}(u, \hat{\eta}) (\hat{\eta}^1 - y) \\ \left( \begin{array}{c} f^{\rho_1+1}(u, \hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^{\rho_1+1}, x^{\rho_1+2}) + g^{\rho_1+1}(u, \hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^{\rho_1+1}, \hat{v}^1) \\ 0 \\ -C_{\rho_1+1}^{\rho_1+1} \theta^{(\rho_1+1)\delta_1} \Lambda_{1,\rho_1}(u, \hat{\eta}, \hat{v}^1) (\hat{\eta}^1 - y) \end{array} \right) \end{array} \quad (4.45)$$



$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\hat{x}}^1 = f^1(u, \hat{x}^1, \hat{x}^2) + g^1(u, \hat{x}^1) - C_q^1 \theta(\hat{x}^1 - y) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{\rho_1-1}) \\
\quad - C_q^{\rho_1-1} \theta^{(\rho_1-1)} \Lambda_{2, \rho_1-1}(u, \hat{x})(\hat{x}^1 - y) \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{\rho_1}, \hat{v}^1) \\
\quad - C_q^{\rho_1} \theta^{(\rho_1)} \Lambda_{2, \rho_1}(u, \hat{x})(\hat{x}^1 - y) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{q-1} = f^{q-1}(u, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^q) + g^{q-1}(u, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{q-1}, \hat{v}^1) \\
\quad - C_q^{q-1} \theta^{q-1} \Lambda_{2, q-1}(u, \hat{x})(\hat{x}^1 - y) \\
\dot{\hat{x}}^q = f^q(u, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^q) + g^q(u, \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^q, \hat{v}^1) \\
\quad - C_q^q \theta^q \Lambda_{2, q}(u, \hat{x})(\hat{x}^1 - y)
\end{array} \right. \quad (4.46)$$

La structure de l'observateur (4.45)-(4.46) est relativement simple. En effet, cet observateur est composé de deux sous-systèmes. Pour générer le deuxième sous-système, il suffit de considérer le système original (4.18) et procéder comme si l'entrée inconnue  $v$  était connue. Dans ce cas, ce système appartient à la classe de systèmes considérée dans (Hammouri et Farza [2003], Farza *et al.* [2005]) pour laquelle les auteurs ont proposé un observateur. Cet observateur prend la forme du deuxième sous-système dans ce cas. Toutefois, comme l'entrée inconnue  $v$  n'est pas disponible, on utilise le premier sous-système (4.45) pour l'estimer. L'estimation ainsi obtenue est injectée dans le deuxième observateur (4.46). Notons aussi que la structure du premier sous-système est similaire à l'observateur proposée dans (Farza *et al.* [2005]). Pour résumer, l'observateur global (4.45)-(4.46) est composé de deux observateurs en cascade. Le deuxième observateur est du type proposé dans (Hammouri et Farza [2003], Farza *et al.* [2005]) où l'entrée inconnue est remplacée par son estimé délivrée par le premier observateur. Ce dernier est synthétisé à partir d'un modèle obtenu en copiant les  $\rho_1 + 1$  premiers blocs du système original. Les états de ce modèle sont les variables d'états associées aux  $\rho_1 + 1$  premiers blocs auxquelles est ajouté l'entrée inconnue.

Comme nous l'avons noté plus haut, que dans le cas où  $\rho_1 + 1 = q$ , la variable  $x^{q+2}$  n'existe pas et n'a pas de sens. Dans ce cas, le premier sous-système devient indépendant du deuxième et permet d'estimer toutes les variables d'état du système ainsi que l'entrée inconnue. L'observateur global du système se restreint donc dans

ce cas au premier sous-système.

Nous allons maintenant donner un exemple pour illustrer les différentes étapes de la synthèse d'observateur décrites plus haut.

#### 4.3.1.5 Exemple

Considérons le système dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \cos(t)x_3 - \sin(t)x_4 \\ \dot{x}_2 = \sin(t)x_3 + \cos(t)x_4 \\ \dot{x}_3 = x_3x_5 - (x_3 - a)(v^3 + v) - x_3 \\ \dot{x}_4 = (x_3 - a)x_5 + x_3v - x_4 \\ \dot{x}_5 = x_6^3 + x_6 - 3v\sin^2(v) - x_5 \\ \dot{x}_6 = -x_6 - 3x_5\cos(v) + 3x_5\sin(v) \\ y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

où l'état  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ , la sortie  $y \in \mathbb{R}^2$  et l'entrée inconnue  $v \in \mathbb{R}$ . Le

système (4.47) est sous la forme (4.18). En effet, nous avons :

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, x^3 = x_5, x^4 = x_6, v = v \quad (4.48)$$

$$f^1(u, x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \cos(t)x_3 - \sin(t)x_4 \\ \sin(t)x_3 + \cos(t)x_4 \end{pmatrix}, g^1(u, x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$f^2(u, x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} x_3x_5 \\ (x_3 - a)x_5 \end{pmatrix},$$

$$g^2(u, x^1, x^2, v^1) = \begin{pmatrix} -(x_3 - a)(v^3 + v) - x_3 \\ x_3v - x_4 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$f^3(u, x) = x_6^3 + x_6 - 3v\sin^2(v),$$

$$g^3(u, x^1, x^2, x_3, v) = -3v\sin^2(v) - x_5 \quad (4.51)$$

$$f^4(u, x) = 0, g^4(u, x, v) = -x_6 - 3x_5 \cos(v) + 3x_5 \sin(v) \quad (4.52)$$

Notons que comme les fonctions  $f^k$  et  $g^k$  peuvent contenir des termes triangulaires, les expressions des fonctions  $f^2$  et  $g^2$  données plus haut ne sont pas uniques. En effet, le terme  $-x_3$  (resp.  $-x_4$ ) intervenant dans la dynamique de  $x_3$  (resp. de  $x_4$ ) peut indifféremment être pris en compte soit dans l'expression de  $f^2$ , soit dans celle de  $g^2$ . Ici, ces deux termes ont été tenus en compte dans l'expression de  $g^2$ . La même remarque est à faire pour le terme triangulaire  $-x_5$  qui intervient dans la dynamique de  $x_5$  et qui pourrait être tenu en compte indifféremment dans l'expression de  $f^3$  ou  $g^3$ . De même, dans la dernière équation, l'expression de la dynamique de  $x_6$  peut être répartie de manière arbitraire entre  $f^4$  et  $g^4$  de sorte que l'on ait  $\dot{x}_6 = f^4(u, x) + g^4(u, x, v)$ .

Notre système se compose de quatre blocs associés aux variables  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  et  $x^4$  et nous avons ainsi  $q = 4$ . L'indice caractéristique associé à l'entrée inconnue  $\rho_1$  correspond au numéro du premier bloc où apparaît l'entrée inconnue. Ici, l'entrée

inconnue apparaît dans la dynamique de  $x^2$  et nous avons ainsi  $\rho_1 = 2$ .

Pour la simulation on suppose que l'expression suivante (inconnue par l'observateur) est utilisée pour l'entrée inconnue :

$$v(t) = 0.5\cos(3t) \quad (4.53)$$

Le système augmenté associé au système (4.47) est constitué de deux sous-systèmes. Le premier sous-système contient  $\rho_1 + 1 = 3$  blocs. Les  $\rho_1 = 2$  premiers blocs sont une copie des premiers blocs du système original. Le troisième et dernier bloc se compose de deux sous-blocs. Le premier sous-bloc est une copie du troisième bloc du système original. Le deuxième sous-bloc est égal à l'entrée inconnue. Le deuxième sous-système est une copie du système (4.47) tout entier. Utilisons les mêmes notations utilisées précédemment pour écrire le système augmenté. On pose :

$$\begin{aligned} z^1 &= \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_3^1 \end{pmatrix} \text{ avec } z_k^1 = \begin{pmatrix} z_{k,1}^1 \\ z_{k,2}^1 \end{pmatrix}, z_{k,1}^1, z_{k,2}^1 \in \mathbb{R} \text{ pour } k = 1, 2, 3 \\ z^2 &= \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ z_3^2 \\ z_4^2 \end{pmatrix} \text{ avec } z_k^2 = \begin{pmatrix} z_{k,1}^2 \\ z_{k,2}^2 \end{pmatrix} \text{ pour } k = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{1,1}^1 = x_1 \\ z_{1,2}^1 = x_2 \\ z_{2,1}^1 = x_3 \\ z_{2,2}^1 = x_4 \\ z_{3,1}^1 = x_5 \\ z_{3,2}^1 = v \end{array} \right. \quad (4.55)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{1,1}^2 = x_1 \\ z_{1,2}^2 = x_2 \\ z_{2,1}^2 = x_3 \\ z_{2,2}^2 = x_4 \\ z_3^2 = x_5 \\ z_4^2 = x_6 \end{array} \right. \quad (4.56)$$

Le système augmenté s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1^1 = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} z_2^1 \\ \dot{z}_2^1 = \begin{pmatrix} z_{2,1}^1 z_{3,1}^1 - (z_{2,1}^1 - a)((z_{3,2}^1)^3 + z_{3,2}^1) - z_{2,1}^1 \\ (z_{2,1}^1 - a)z_{3,1}^1 + z_{2,1}^1 z_{3,2}^1 - z_{2,2}^1 \end{pmatrix} \\ \dot{z}_3^1 = \begin{pmatrix} (z_4^2)^3 + z_4^2 - 3z_{3,2}^1 \sin^2(z_{3,2}^1) - z_{3,1}^1 \\ \varepsilon(t) \end{pmatrix} \\ y_1 = z_1^1 = \begin{pmatrix} z_{1,1}^1 \\ z_{1,2}^1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1^2 = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} z_2^2 \\ \dot{z}_2^2 = \begin{pmatrix} z_{2,1}^2 z_{3,1}^2 - (z_{2,1}^2 - a)((z_{3,2}^2)^3 + z_{3,2}^2) - z_{2,1}^2 \\ (z_{2,1}^2 - a)z_{3,1}^2 + z_{2,1}^2 z_{3,2}^2 - z_{2,2}^2 \end{pmatrix} \\ \dot{z}_3^2 = (z_4^2)^3 + z_4^2 - 3z_{3,2}^2 \sin^2(z_{3,2}^2) - z_3^2 \\ \dot{z}_4^2 = -z_4^2 - 3z_3^2 \cos(z_{3,2}^2) + 3z_3^2 \sin(z_{3,2}^2) \\ y_2 = z_1^2 = \begin{pmatrix} z_{1,1}^2 \\ z_{1,2}^2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.58)$$

Un observateur de type (4.43) peut être synthétisé. Avant d'écrire les équations de cet observateur, nous devons calculer les entrées des matrices  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  dont les expressions sont respectivement données par (4.42) et (4.42). Pour plus de clarté, nous allons tout d'abord exprimer ces matrices en utilisant les coordonnées en  $x$  puis on les exprimera dans les coordonnées en  $z$ . Pour ce faire, nous posons :

$$\begin{aligned} F(u, x, v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f^2}{\partial x_5}(u, x) & \frac{\partial g^2}{\partial v}(u, x, v) \\ x_3 & -(x_3 - a)(3v^2 + 1) \\ (x_3 - a) & x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons

$$\Lambda_1(u, x, v) = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x) & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x)F(u, x) \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_2(u, x) = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ 0_2 & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x) & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ 0_2 & 0_2 & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x)\frac{\partial f^2}{\partial x^3}(u, x) & 0_{2 \times 1} \\ 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x)\frac{\partial f^2}{\partial x^3}(u, x)\frac{\partial f^3}{\partial x^4}(u, x) \end{pmatrix}$$

où  $I_2$  (resp.  $0_2$ ) est la matrice identité (resp. nulle) d'ordre 2 et  $0_{2 \times 1}$  est la matrice nulle avec deux lignes et une colonne.

Par ailleurs, nous avons bien sûr :

$$\frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^3}(u, x) = \frac{\partial f^2}{\partial x_5}(u, x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 - a \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f^3}{\partial x^4}(u, x) = \frac{\partial f^3}{\partial x_6}(u, x) = 3x_6^2 + 1$$

Avant de donner les équations de l'observateur, nous représentons les matrices diagonales par blocs  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  par les formes compactes suivantes :

$$\Lambda_1(u, x, v) = \text{diag}(I_2, \Lambda_{12}(u, x), \Lambda_{13}(u, x, v))$$

$$\Lambda_2(u, x) = \text{diag}(I_2, \Lambda_{22}(u, x), \Lambda_{23}(u, x), \Lambda_{24}(u, x))$$

avec

$$\Lambda_{12}(u, x) = \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x)$$

$$\Lambda_{13}(u, x) = \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x)F(u, x)$$

$$\Lambda_{22}(u, x) = \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x)$$

$$\Lambda_{23}(u, x) = \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x)\frac{\partial f^2}{\partial x^3}(u, x)$$

$$\Lambda_{24}(u, x) = \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x)\frac{\partial f^2}{\partial x^3}(u, x)\frac{\partial f^3}{\partial x^4}(u, x)$$

Nous pouvons maintenant donner les équations de l'observateur pour le système (4.57)-(4.58) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1^1 = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \hat{z}_2^1 - 3\theta^{\delta_1}(\hat{z}_1^1 - y) \\ \dot{\hat{z}}_2^1 = \begin{pmatrix} \hat{z}_{2,1}^1 \hat{z}_{3,1}^1 - (\hat{z}_{2,1}^1 - a)((\hat{z}_{3,2}^1)^3 + \hat{z}_{3,2}^1) - \hat{z}_{2,1}^1 \\ (\hat{z}_{2,1}^1 - a)\hat{z}_{3,1}^1 + \hat{z}_{2,1}^1 \hat{z}_{3,2}^1 - \hat{z}_{2,2}^1 \end{pmatrix} - 3\theta^{2\delta_1} \Lambda_{12}^+(\hat{z}^1)(\hat{z}_1^1 - y) \\ \dot{\hat{z}}_3^1 = \begin{pmatrix} \hat{z}_4^2 + \hat{z}_4^2 - 3\hat{z}_{3,2}^1 \sin^2(\hat{z}_{3,2}^1) - \hat{z}_{3,1}^1 \\ 0 \end{pmatrix} - \theta^{3\delta_1} \Lambda_{13}^+(\hat{z}^1)(\hat{z}_1^1 - y) \end{cases} \quad (4.59)$$

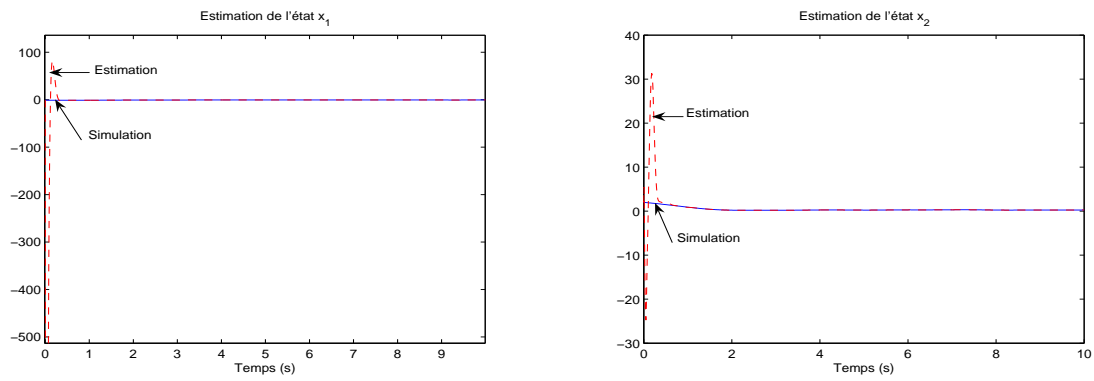
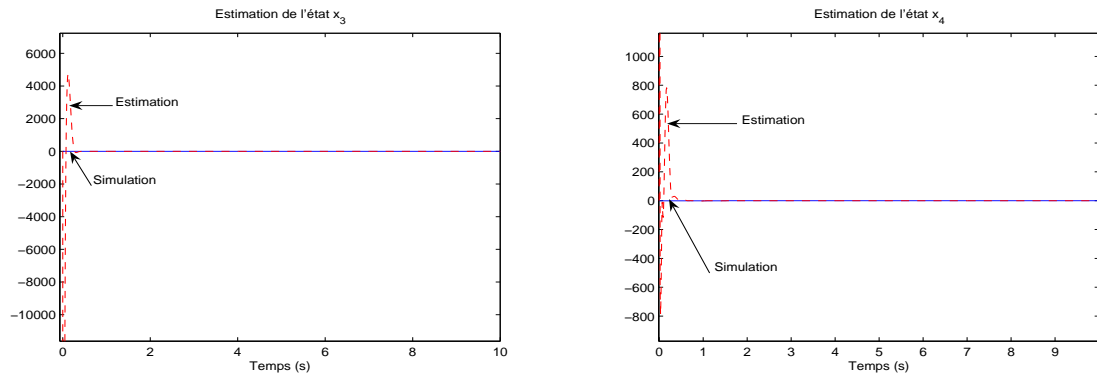
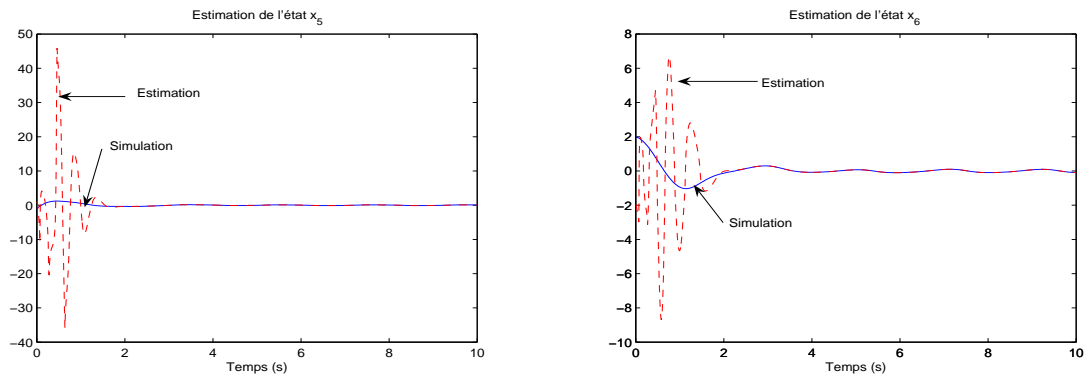
$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1^2 = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \hat{z}_2^2 - 4\theta(\hat{z}_1^2 - y) \\ \dot{\hat{z}}_2^2 = \begin{pmatrix} \hat{z}_{2,1}^2 \hat{z}_{3,1}^2 - (\hat{z}_{2,1}^2 - a)((\hat{z}_{3,2}^2)^3 + \hat{z}_{3,2}^2) - \hat{z}_{2,1}^2 \\ (\hat{z}_{2,1}^2 - a)\hat{z}_{3,1}^2 + \hat{z}_{2,1}^2 \hat{z}_{3,2}^2 - \hat{z}_{2,2}^2 \end{pmatrix} - 6\theta^2 \Lambda_{22}^+(\hat{z}^2)(\hat{z}_1^2 - y) \\ \dot{\hat{z}}_3^2 = \hat{z}_4^2 + \hat{z}_4^2 - 3\hat{z}_{3,2}^2 \sin^2(\hat{z}_{3,2}^2) - \hat{z}_{3,1}^2 - 4\theta^3 \Lambda_{23}^+(\hat{z}^2)(\hat{z}_1^2 - y) \\ \dot{\hat{z}}_4^2 = -\hat{z}_4^2 - 3\hat{z}_3^2 \cos(\hat{z}_{3,2}^2) + 3\hat{z}_3^2 \sin(\hat{z}_{3,2}^2) - \theta^4 \Lambda_{24}^+(\hat{z}^2)(\hat{z}_1^2 - y) \end{cases} \quad (4.60)$$

Rappelons que conformément à (4.55) et (4.56), les estimés de l'état et de l'entrée inconnue se déduisent comme suit :

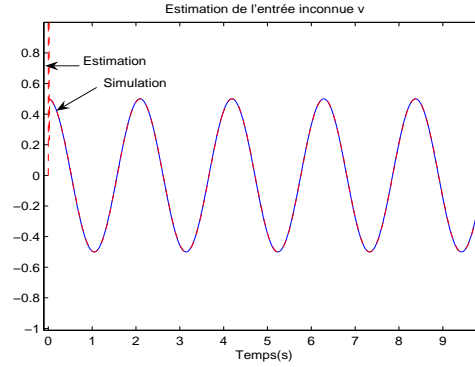
$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \hat{z}_{1,1}^2 \\ \hat{x}_2 = \hat{z}_{1,2}^2 \\ \hat{x}_3 = \hat{z}_{2,1}^2 \\ \hat{x}_4 = \hat{z}_{2,2}^2 \\ \hat{x}_5 = \hat{z}_3^2 \\ \hat{x}_6 = \hat{z}_4^2 \\ \hat{v} = \hat{z}_{3,2}^1 \end{cases} \quad (4.61)$$

#### 4.3.1.6 Résultats de simulation

Un observateur de la forme (4.45-4.46) a été utilisé pour estimer conjointement  $x_i, i = 1, 2, \dots, 6$  et  $v$ . Cet observateur a été simulé en utilisant des données issues de la simulation. Dans les figures (4.2), (4.3) et (4.4), les évolutions dans le temps de  $x_3$  à  $x_6$  et  $v$  (issues de la simulation du modèle) sont comparées avec leurs estimations respectives obtenues par l'observateur. La valeur de  $\theta$  est égal à 10. Les résultats

Figure 4.1: Sorties mesurées  $x_1$  et  $x_2$ Figure 4.2: Estimation des états non mesurés  $x_3$  et  $x_4$ Figure 4.3: Estimation des états non mesurés  $x_5$  et  $x_6$



Figure 4.4: Estimation de l'entrée inconnue  $v$ 

obtenus montrent clairement les performances de l'observateur (4.2-4.3 et 4.4). Ce dernier a fourni une estimation satisfaisante des états et aussi de l'entrée inconnue. Rappelons que l'expression de l'entrée inconnue (l'équation (4.53)) introduite pour des buts de simulation est ignorée par l'observateur.

### 4.3.2 Cas où $\rho_1 = q$

Dans ce cas, Le système (4.1) peut se réécrire dans ce cas comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \dots, x^q) + g^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ \dot{x}^q = f^q(u, x^1, \dots, x^q) + g^q(u, x^1, \dots, x^q, v^1) \\ \dot{v}^1 = \varepsilon(t) \\ y = x^1 \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Le système (4.62) est maintenant composé de  $(q + 1)$  blocs, le dernier bloc étant associé à l'entrée inconnue  $v^1$ . Ce système peut se mettre à l'aide de la transformation (2.10) sous une forme appartenant à la classe de système considérée dans (Farza *et al.* [2005]) pour laquelle les auteurs ont proposé un observateur. Nous n'avons donc pas à considérer de système auxiliaire comme dans le cas où  $\rho_1 < q$ . Les équations de

l'observateur s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}^1 = f^1(u, x^1, \hat{x}^2) + g(u, x^1) - C_{q+1}^1 \theta (\hat{x}^1 - x^1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q) + g^{q-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{q-1}) \\ \quad - C_{q+1}^{q-1} \theta^{q-1} \left( \prod_{k=1}^{q-2} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, \hat{x}) \right) (\hat{x}^1 - x^1) \\ \dot{\hat{x}}^q = f^q(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q) + g^q(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q, \hat{v}^1) \\ \quad - C_{q+1}^q \theta^q \left( \prod_{k=1}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, \hat{x}) \right) (\hat{x}^1 - x^1) \\ \dot{\hat{v}}^1 = -C_{q+1}^{q+1} \theta^{q+1} \left( \prod_{k=1}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) \frac{\partial g^q}{\partial v^1}(u, \hat{x}, \hat{v}^1) (\hat{x}^1 - x^1) \end{array} \right. \quad (4.63)$$

Nous allons dans ce qui suit montrer comment généraliser l'approche proposée au cas de plusieurs entrées inconnues.

## 4.4 Cas de plusieurs entrées inconnues

Comme précédemment et par souci de clarté, nous allons considérer deux cas selon que  $\rho_r < q$  ou  $\rho_r = q$ .

### 4.4.1 Cas où $\rho_r < q$

Par souci de clarté, on reproduit le système (4.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g^1(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\ \dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2-1}, v^1) \\ \dot{x}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, v^1, v^2) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_r-1} = f^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}) + g^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r-1}, v^1, \dots, v^{r-1}) \\ \dot{x}^{\rho_r} = f^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r+1}) + g^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\ \vdots \\ \dot{x}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \dots, x^q) + g^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}, v) \\ \dot{x}^q = f^q(u, x^1, \dots, x^q) + g^q(u, x^1, \dots, x^q, v) \\ y = x^1 \end{array} \right.$$

La démarche est la même que dans le cas d'une seule entrée inconnue. Elle consiste à considérer un système augmenté pour lequel un observateur sera proposé.

#### 4.4.1.1 Système augmenté

Le système augmenté est composé de  $\rho_r + 1$  sous-systèmes en cascade. Le dernier de ces sous-systèmes est une copie du système (4.3). Le premier système est composé des  $\rho_1 + 1$  premiers blocs du système (4.3), le deuxième des  $\rho_2 + 1$  premiers blocs du système (4.3), etc. L'avant dernier sous-système est composé des  $\rho_r + 1$  premiers blocs du système (4.3). Toujours par souci de clarté et pour ne pas perdre de lisibilité par l'ajout de variables indexées, nous allons reproduire les  $\rho_r$  sous-systèmes en gardant le même nom pour les états de ces sous-systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g^1(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\ \dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\ \dot{x}^{\rho_1+1} = f^{\rho_1+1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+2}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}, v^1) \\ \dot{v}^1(t) = \varepsilon^1(t) \\ y_1 = x^1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g^1(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\ \dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2-1}, v^1) \\ \dot{x}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, v^1, v^2) \\ \dot{x}^{\rho_2+1} = f^{\rho_2+1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}, x^{\rho_2+2}) + g^{\rho_2+1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, x^{\rho_2+1}, v^1, v^2) \\ \dot{v}^2(t) = \varepsilon^2(t) \\ y_2 = x^1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g^1(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\ \dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2-1}, v^1) \\ \dot{x}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, v^1, v^2) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_r-1} = f^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}) + g^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r-1}, v^1, \dots, v^{r-1}) \\ \dot{x}^{\rho_r} = f^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r+1}) + g^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\ \dot{x}^{\rho_r+1} = f^{\rho_r+1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r+1}, x^{\rho_r+2}) + g^{\rho_r+1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}, x^{\rho_r+1}, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\ \dot{v}^r(t) = \varepsilon^r(t) \\ y_r = x^1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g^1(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\ \dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2-1}, v^1) \\ \dot{x}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, v^1, v^2) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_r-1} = f^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}) + g^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r-1}, v^1, \dots, v^{r-1}) \\ \dot{x}^{\rho_r} = f^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r+1}) + g^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\ \vdots \\ \dot{x}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \dots, x^q) + g^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}, v) \\ \dot{x}^q = f^q(u, x^1, \dots, x^q) + g^q(u, x^1, \dots, x^q, v) \\ y_{r+1} = x^1 \end{array} \right.$$

Remarquons que si  $\rho_{r+1} = q$ , les deux derniers sous systèmes deviennent identiques et l'un d'eux doit donc être éliminé.

#### 4.4.1.2 Equations de l'observateur dans les coordonnées originales

En considérant une transformation similaire à (2.10), nous pouvons mettre le système global formés par les  $r + 1$  sous-systèmes sous la forme (3.1) pour laquelle un observateur de type (3.35) sera synthétisé.

En fait, l'observateur global est constitué par  $r + 1$  sous-systèmes en cascade. Le premier sous système sert à fournir une estimation de  $v^1$ , le deuxième une estimation de  $v^2$  etc, l'avant dernier sous-système délivrant une estimation de  $v^r$  et enfin le dernier sous-système permet l'estimation de tous les états.

Nous allons donner dans ce qui suit les  $r + 1$  matrices diagonales par bloc,  $\Lambda_k(u, x, v)$ , qui se trouvent en fait sur la diagonale de la jacobienne de la transformation qui met le système (4.3) sous la forme (3.1). Avant de donner les expressions des  $\Lambda_k$ ,

nous définissons les matrices suivantes :

Pour  $j = 1, \dots, r$  :

$$F_j(u, x, v) = \left( \frac{\partial f^{\rho_j}}{\partial x^{\rho_j+1}}(u, x) \quad \frac{\partial g^{\rho_j}}{\partial v^j}(u, x, v) \right) \quad (4.64)$$

Les matrices  $\Lambda_k(u, x, v)$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \Lambda_1(u, x, v) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x), \prod_{k=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) F_1(u, x, v) \right) \\ \Lambda_2(u, x, v) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=1}^{\rho_2-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x), \prod_{k=1}^{\rho_2-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) F_2(u, x, v) \right) \\ &\vdots \\ \Lambda_r(u, x, v) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=1}^{\rho_r-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x), \prod_{k=1}^{\rho_r-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) F_r(u, x, v) \right) \\ \Lambda_{r+1}(u, x, v) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=1}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$(4.66)$$

Avant de donner les équations de l'observateur et toujours par souci de clarté, nous allons réécrire les équations du systèmes en affectant à chaque bloc une variable d'état. En effet, à chaque bloc  $k$  pour  $k = 1, \dots, r$ , nous associons la variable d'état

$$\bar{\eta}^k = \begin{pmatrix} \eta^k \\ v^k \end{pmatrix} \text{ où } \eta^k = \begin{pmatrix} \eta_1^k \\ \vdots \\ \eta_{\rho_k+1}^k \end{pmatrix}. \text{ Avec ces notations, le système précédent se}$$

réécrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1^1 = f^1(u, \eta_1^1, \eta_2^1) + g^1(u, \eta_1^1) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho_1-1}^1 = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1}^1) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1-1}^1) \\ \dot{\eta}_{\rho_1}^1 = f^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1+1}^1) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1}^1, \hat{v}^1) \\ \begin{pmatrix} \dot{\eta}_{\rho_1+1}^1 \\ \dot{v}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{\rho_1+1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1+2}^1) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1+1}^1, v^1) \\ \varepsilon^1(t) \end{pmatrix} \\ y_1 = \eta_1^1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\eta}_1^2 = f^1(u, \eta_1^2, \eta_2^2) + g^1(u, \eta_1^2) \\
\vdots \\
\dot{\eta}_{\rho_1-1}^2 = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_1}^2) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_1-1}^2) \\
\dot{\eta}_{\rho_1}^2 = f^{\rho_1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_1+1}^2) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_1}^2, \hat{v}^1) \\
\vdots \\
\dot{\eta}_{\rho_2-1}^2 = f^{\rho_2-1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2}^2) + g^{\rho_2-1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2-1}^2, v^1) \\
\dot{\eta}_{\rho_2}^2 = f^{\rho_2}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2+1}^2) + g^{\rho_2}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2}^2, v^1, v^2) \\
\left( \begin{array}{c} \dot{\eta}_{\rho_2+1}^2 \\ \dot{v}^2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_2+1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2+1}^2, \eta_{\rho_2+2}^3) + g^{\rho_2+1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2+1}^2, v^1, v^2) \\ \varepsilon^2(t) \end{array} \right) \\
y_2 = \eta_1^2
\end{array} \right.$$

⋮

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\eta}_1^r = f^1(u, \eta_1^r, \eta_2^r) + g^1(u, \eta_1^r) \\
\vdots \\
\dot{\eta}_{\rho_1-1}^r = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_1}^r) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_1-1}^r) \\
\dot{\eta}_{\rho_1}^r = f^{\rho_1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_1+1}^r) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_1}^r, v^1) \\
\vdots \\
\dot{\eta}_{\rho_2-1}^r = f^{\rho_2-1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_2}^r) + g^{\rho_2-1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_2-1}^r, v^1) \\
\dot{\eta}_{\rho_2}^r = f^{\rho_2}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_2+1}^r) + g^{\rho_2}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_2}^r, v^1, v^2) \\
\vdots \\
\dot{\eta}_{\rho_r-1}^r = f^{\rho_r-1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_r}^r) + g^{\rho_r-1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_r-1}^r, v^1, \dots, v^{r-1}) \\
\dot{\eta}_{\rho_r}^r = f^{\rho_r}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_r+1}^r) + g^{\rho_r}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_r}^r, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\
\left( \begin{array}{c} \dot{\eta}_{\rho_r+1}^r \\ \dot{v}^r \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_r+1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_r+1}^r, x^{\rho_r+2}) + g^{\rho_r+1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_r}^r, \eta_{\rho_r+1}^r, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\ \varepsilon^r(t) \end{array} \right) \\
y_r = \eta_1^r
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g^1(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\ \dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2-1}, v^1) \\ \dot{x}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, v^1, v^2) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_r-1} = f^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}) + g^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r-1}, v^1, \dots, v^{r-1}) \\ \dot{x}^{\rho_r} = f^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r+1}) + g^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\ \vdots \\ \dot{x}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \dots, x^q) + g^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}, v) \\ \dot{x}^q = f^q(u, x^1, \dots, x^q) + g^q(u, x^1, \dots, x^q, v) \\ y_{r+1} = x^1 \end{array} \right.$$

Les équations de l'observateur sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{\eta}}_1^1 = f^1(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1) + g^1(u, \eta_1^1) - C_{\rho_1+1}^1 \theta^{\delta_1} \Lambda_{11}^+(u, \hat{\eta}^1) (\hat{\eta}_1^1 - x^1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{\eta}}_{\rho_1-1}^1 = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1}^1) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1-1}^1) \\ \quad - C_{\rho_1+1}^{\rho_1-1} \theta^{(\rho_1-1)\delta_1} \Lambda_{1, \rho_1-1}^+(u, \hat{\eta}^1) (\hat{\eta}_1^1 - x^1) \\ \dot{\hat{\eta}}_{\rho_1}^1 = f^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+1}^1) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \eta_{\rho_1}^1, \hat{v}^1) \\ \quad - C_{\rho_1+1}^{\rho_1} \theta^{\rho_1 \delta_1} \Lambda_{1, \rho_1}^+(u, \hat{\eta}^1) (\hat{\eta}_1^1 - x^1) \\ \left( \begin{array}{c} \dot{\hat{\eta}}_{\rho_1+1}^1 \\ \hat{v}^1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_1+1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+2}^1) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+1}^1, \hat{v}^1) \\ 0 \\ -C_{\rho_1+1}^{\rho_1+1} \theta^{(\rho_1+1)\delta_1} \Lambda_{1, \rho_1+1}^+(u, \hat{\eta}^1, \hat{v}^1) (\hat{\eta}_1^1 - x^1) \end{array} \right) \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\hat{\eta}}_1^2 = f^1(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2) + g^1(u, \eta_1^2) - C_{\rho_2+1}^1 \theta^{\delta_2} \Lambda_{21}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_1-1}^2 = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1}^2) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1-1}^2) \\
\quad - C_{\rho_2+1}^{\rho_1-1} \theta^{(\rho_1-1)\delta_2} \Lambda_{2, \rho_1-1}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_1}^2 = f^{\rho_1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+1}^2) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1}^2, \hat{v}^1) \\
\quad - C_{\rho_2+1}^{\rho_1} \theta^{\rho_1 \delta_2} \Lambda_{2, \rho_1}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_2-1}^2 = f^{\rho_2-1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2}^2) + g^{\rho_2-1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2-1}^2, \hat{v}^1) \\
\quad - C_{\rho_2+1}^{\rho_2-1} \theta^{(\rho_2-1)\delta_2} \Lambda_{2, \rho_2-1}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_2}^2 = f^{\rho_2}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2+1}^2) + g^{\rho_2}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2}^2, \hat{v}^1, \hat{v}^2) \\
\quad - C_{\rho_2+1}^{\rho_2} \theta^{\rho_2 \delta_2} \Lambda_{2, \rho_2}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\left( \begin{array}{c} \dot{\hat{\eta}}_{\rho_2+1}^2 \\ \hat{v}^2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_2+1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2+1}^2, \hat{\eta}_{\rho_2+2}^3) + g^{\rho_2+1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2+1}^2, \hat{v}^1, \hat{v}^2) \\ 0 \\ -C_{\rho_2+1}^{\rho_2+1} \theta^{(\rho_2+1)\delta_2} \Lambda_{2, \rho_2+1}^+(u, \hat{\eta}^2, \hat{v}) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \end{array} \right)
\end{array} \right.$$

⋮

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{\hat{\eta}}_1^r = f^1(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r) + g^1(u, \eta_1^r) - C_{\rho_r+1}^1 \theta^{\delta_r} \Lambda_{r,1}^+(u, \hat{\eta}^r) (\hat{\eta}_1^r - x^1) \\
 \vdots \\
 \dot{\hat{\eta}}_{\rho_1-1}^r = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \eta_{\rho_1}^r) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \eta_{\rho_1-1}^r) \\
 \quad - C_{\rho_r+1}^{\rho_1-1} \theta^{(\rho_1-1)\delta_r} \Lambda_{r,\rho_1-1}^+(u, \hat{\eta}^r) (\hat{\eta}_1^r - x^1) \\
 \dot{\hat{\eta}}_{\rho_1}^r = f^{\rho_1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+1}^r) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1}^r, \hat{v}^1) \\
 \quad - C_{\rho_r+1}^{\rho_1} \theta^{\rho_1 \delta_r} \Lambda_{r,\rho_1}^+(u, \hat{\eta}^r) (\hat{\eta}_1^r - x^1) \\
 \vdots \\
 \dot{\hat{\eta}}_{\rho_2-1}^r = f^{\rho_2-1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2}^r) + g^{\rho_2-1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2-1}^r, \hat{v}^1) \\
 \quad - C_{\rho_r+1}^{\rho_2-1} \theta^{(\rho_2-1)\delta_r} \Lambda_{r,\rho_2-1}^+(u, \hat{\eta}^r) (\hat{\eta}_1^r - x^1) \\
 \dot{\hat{\eta}}_{\rho_2}^r = f^{\rho_2}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2+1}^r) + g^{\rho_2}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2}^r, \hat{v}^1, \hat{v}^2) \\
 \quad - C_{\rho_r+1}^{\rho_2} \theta^{\rho_2 \delta_r} \Lambda_{r,\rho_2}^+(u, \hat{\eta}^r) (\hat{\eta}_1^r - x^1) \\
 \vdots \\
 \dot{\hat{\eta}}_{\rho_r-1}^r = f^{\rho_r-1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_r}^r) + g^{\rho_r-1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_r-1}^r, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^{r-1}) \\
 \quad - C_{\rho_r+1}^{\rho_r-1} \theta^{(\rho_r-1)\delta_r} \Lambda_{r,\rho_r-1}^+(u, \hat{\eta}^r) (\hat{\eta}_1^r - x^1) \\
 \dot{\hat{\eta}}_{\rho_r}^r = f^{\rho_r}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_r+1}^r) + g^{\rho_r}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_r}^r, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^r) \\
 \quad - C_{\rho_r+1}^{\rho_r} \theta^{(\rho_r)\delta_r} \Lambda_{r,\rho_r}^+(u, \hat{\eta}^r) (\hat{\eta}_1^r - x^1) \\
 \left( \begin{array}{c} \dot{\hat{\eta}}_{\rho_r+1}^r \\ \dot{\hat{v}}^r \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_r+1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_r+1}^r, x^{\rho_r+2}) + g^{\rho_r+1}(u, \eta_1^r, \hat{\eta}_2^r, \dots, \hat{\eta}_{\rho_r+1}^r, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^r) \\ 0 \\ -C_{\rho_r+1}^{\rho_r+1} \theta^{(\rho_r+1)\delta_r} \Lambda_{r,\rho_r+1}^+(u, \hat{\eta}^r) (\hat{\eta}_1^r - x^1) \end{array} \right)
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\hat{x}}^1 = f^1(u, x^1, \hat{x}^2) + g^1(u, x^1) - C_q^1 \theta \Lambda_{r+1,1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_1-1}) \\
\quad - C_q^{\rho_1-1} \theta^{\rho_1-1} \Lambda_{r+1, \rho_1-1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_1}, \hat{v}^1) \\
\quad - C_q^{\rho_1} \theta^{\rho_1} \Lambda_{r+1, \rho_1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_2-1}, \hat{v}^1) \\
\quad - C_q^{\rho_2-1} \theta^{\rho_2-1} \Lambda_{r+1, \rho_2-1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_2}, \hat{v}^1, \hat{v}^2) \\
\quad - C_q^{\rho_2} \theta^{\rho_2} \Lambda_{r+1, \rho_2}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_r-1} = f^{\rho_r-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_r}) + g^{\rho_r-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_r-1}, \hat{v}^1, \dots, v^{r-1}) \\
\quad - C_q^{\rho_r-1} \theta^{\rho_r-1} \Lambda_{r+1, \rho_r-1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_r} = f^{\rho_r}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_r+1}) + g^{\rho_r}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_r}, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^r) \\
\quad - C_q^{\rho_r} \theta^{\rho_r} \Lambda_{r+1, \rho_r}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q) + g^{q-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{q-1}, \hat{v}) \\
\quad - C_q^{q-1} \theta^{q-1} \Lambda_{r+1, q-1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\dot{\hat{x}}^q = f^q(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q) + g^q(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q, \hat{v}) - C_q^q \theta^q \Lambda_{r+1, q}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1)
\end{array} \right.$$

où les  $\delta_k$ ,  $k = 1, \dots, r$  sont données par

$$\begin{aligned}
\delta_k &= 2^{r+1-k} \left(q - \frac{3}{2}\right) \prod_{i=k+1}^r \left(\rho_i + 1 - \frac{3}{2}\right) \\
&= 2^{r+1-k} \left(q - \frac{3}{2}\right) \prod_{i=k+1}^r \left(\rho_i - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Les expressions des  $\delta_k$  données par (4.67) sont valables lorsque  $\rho_r + 1 < q$ , c'est-à-dire lorsque  $\rho_r \neq q - 1$ . En effet et comme nous l'avons signalé lorsque  $\rho_r = q - 1$ , on n'aura plus en total que  $r$  blocs, le dernier bloc permettant l'estimation simultanée de  $v^r$  et de tout l'état. Les expressions des  $\delta_k$ , pour  $k = 1, \dots, r - 1$  deviennent alors

$$\begin{aligned}
\delta_k &= 2^{r-k} \left(q - \frac{3}{2}\right) \prod_{i=k+1}^{r-1} \left(\rho_i + 1 - \frac{3}{2}\right) \\
&= 2^{r-k} \left(q - \frac{3}{2}\right) \prod_{i=k+1}^{r-1} \left(\rho_i - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Pour le dernier bloc, on a  $\delta_r = 1$ .

#### 4.4.1.3 Exemples

Nous allons illustrer dans ce qui suit la synthèse de l'observateur dans le cas de plusieurs entrées inconnues à travers deux exemples. Pour éviter un nombre important d'équations, nous n'allons considérer que deux entrées inconnues. Dans le premier exemple, l'indice caractéristique de la deuxième entrée inconnue est strictement inférieur à  $q - 1$ . Dans le deuxième exemple, cet indice sera pris égal à  $q - 1$ .

##### Exemple 1 :

Considérons le système dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \cos(t)x_4 - \sin(t)x_5 \\ \dot{x}_2 = \sin(t)x_4 + \cos(t)x_5 \\ \dot{x}_3 = x_4^3 + x_5^5 + \sin(x_3) + v_1^3 + v_1 \\ \dot{x}_4 = x_3x_6 - (x_3 - a)(v_2^3 + v_2) - v_1 \\ \dot{x}_5 = (x_3 - a)x_6 + x_3v_2 - x_5 - \sin(v_1) \\ \dot{x}_6 = x_7^3 + x_7 - 3v_1 \sin^2(v_2) - x_5 - \sin(x_6) + v_1v_2 \\ \dot{x}_7 = -x_6 - 3x_5 \cos(v_1) + 3x_5 \sin(v_2) \\ y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.69)$$

Nous avons ici  $q = 4$ ,  $\rho_1 = 1$  et  $\rho_2 = 2$ . L'observateur est composé de trois blocs en cascade avec  $\delta_1 = 2^{3-1}(4 - \frac{3}{2})(3 - \frac{3}{2}) = 15$  et  $\delta_2 = 2^{2-1}(4 - \frac{3}{2}) = 5$  conformément à (4.67). Il s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\hat{\eta}}_1^1 \\ \dot{\hat{\eta}}_2^1 \\ \dot{\hat{\eta}}_3^1 \\ \dot{\hat{\eta}}_4^1 \\ \dot{\hat{\eta}}_5^1 \\ \dot{\hat{v}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\hat{\eta}_4^1 - \sin(t)\hat{\eta}_5^1 \\ \sin(t)\hat{\eta}_4^1 + \cos(t)\hat{\eta}_5^1 \\ (\hat{\eta}_4^1)^3 + (\hat{\eta}_4^1)^5 + \hat{v}_1^3 + \hat{v}_1 \\ x_3\hat{\eta}_6^2 - (x_3 - a)(\hat{v}_2^3 + \hat{v}_2) - \hat{v}_1 \\ (x_3 - a)\hat{\eta}_6^2 + x_3\hat{v}_2 - \hat{\eta}_5^1 - \sin(\hat{v}_1) \\ 0 \end{pmatrix} - 2\theta^{\delta_1} \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1^1 - x_1 \\ \hat{\eta}_2^1 - x_2 \\ \hat{\eta}_3^1 - x_3 \end{pmatrix} \\ \\ -\theta^{2\delta_1} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 3(\hat{\eta}_4^1)^2 & 5(\hat{\eta}_5^1)^4 & 3\hat{v}_1^2 + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1^1 - x_1 \\ \hat{\eta}_2^1 - x_2 \\ \hat{\eta}_3^1 - x_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\hat{\eta}}_1^2 \\ \dot{\hat{\eta}}_2^2 \\ \dot{\hat{\eta}}_3^2 \\ \dot{\hat{\eta}}_4^2 \\ \dot{\hat{\eta}}_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\hat{\eta}_4^2 - \sin(t)\hat{\eta}_5^2 \\ \sin(t)\hat{\eta}_4^2 + \cos(t)\hat{\eta}_5^2 \\ (\hat{\eta}_4^2)^3 + (\hat{\eta}_5^2)^5 + \hat{v}_1^3 + \hat{v}_1 \\ x_3\hat{\eta}_6^2 - (x_3 - a)(\hat{v}_2^3 + \hat{v}_2) - \hat{v}_1 \\ (x_3 - a)\hat{\eta}_6^2 + x_3\hat{v}_2 - \hat{\eta}_5^2 - \sin(\hat{v}_1) \end{pmatrix} - 3\theta^{\delta_2} \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1^2 - x_1 \\ \hat{\eta}_2^2 - x_2 \\ \hat{\eta}_3^2 - x_3 \end{pmatrix} \\ \\ -3\theta^{2\delta_2} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \\ 3(\hat{\eta}_4^2)^2 & 5(\hat{\eta}_5^2)^4 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1^2 - x_1 \\ \hat{\eta}_2^2 - x_2 \\ \hat{\eta}_3^2 - x_3 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{\eta}}_6^2 \\ \dot{\hat{v}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_7^3 + \hat{x}_7 - 3\hat{v}_1 \sin^2(\hat{v}_2) - \hat{\eta}_5^2 - \sin(\hat{\eta}_6^2) + \hat{v}_1\hat{v}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ -\theta^{3\delta_2} \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \\ 3(\hat{\eta}_4^2)^2 & 5(\hat{\eta}_5^2)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & -(x_3 - a)(3\hat{v}_2^2 + 1) \\ x_3 - a & x_3 \end{pmatrix} \right\}^+ \\ \\ \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1^2 - x_1 \\ \hat{\eta}_2^2 - x_2 \\ \hat{\eta}_3^2 - x_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \\ \dot{\hat{x}}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\hat{x}_4 - \sin(t)\hat{x}_5 \\ \sin(t)\hat{x}_4 + \cos(t)\hat{x}_5 \\ \hat{x}_4^3 + \hat{x}_5^5 + \hat{v}_1^3 + \hat{v}_1 \\ x_3\hat{x}_6 - (x_3 - a)(\hat{v}_2^3 + \hat{v}_2) - \hat{v}_1 \\ (x_3 - a)\hat{x}_6 + x_3\hat{v}_2 - \hat{x}_5 - \sin(\hat{v}_1) \end{pmatrix} - 4\theta \begin{pmatrix} \hat{x}_1 - x_1 \\ \hat{x}_2 - x_2 \\ \hat{x}_3 - x_3 \end{pmatrix} \\
\dot{\hat{x}}_6 = \hat{x}_7^3 + \hat{x}_7 - 3\hat{v}_1 \sin^2(\hat{v}_2) - \hat{x}_5 - \sin(\hat{x}_6) + \hat{v}_1 \hat{v}_2 \\
- 6\theta^2 \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \\ 3\hat{x}_4^2 & 5\hat{x}_5^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 - x_1 \\ \hat{x}_2 - x_2 \\ \hat{x}_3 - x_3 \end{pmatrix} \right\}^+ \\
\dot{\hat{x}}_7 = -\hat{x}_6 - 3\hat{x}_5 \cos(\hat{v}_1) + 3\hat{x}_5 \sin(\hat{v}_2) \\
- \frac{\theta^4}{3\hat{x}_7^2 + 1} \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \\ 3\hat{x}_4^2 & 5\hat{x}_5^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 - a \end{pmatrix} \right\}^+ \begin{pmatrix} \hat{x}_1 - x_1 \\ \hat{x}_2 - x_2 \\ \hat{x}_3 - x_3 \end{pmatrix}
\end{array} \right.$$

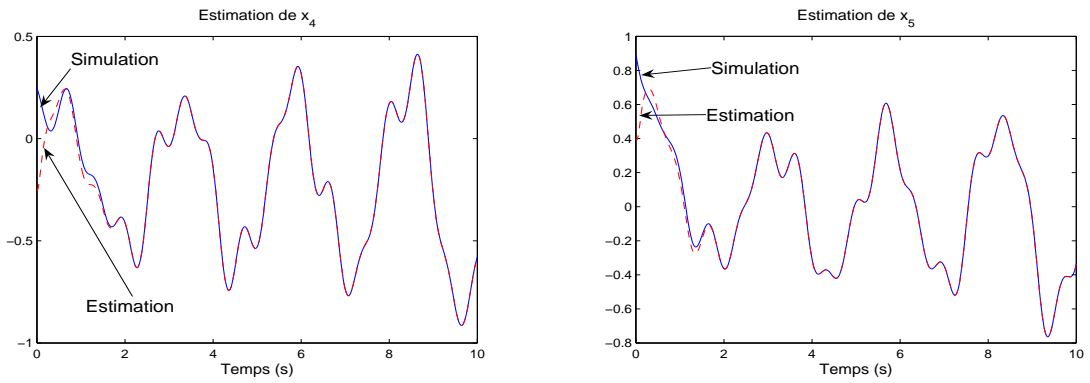
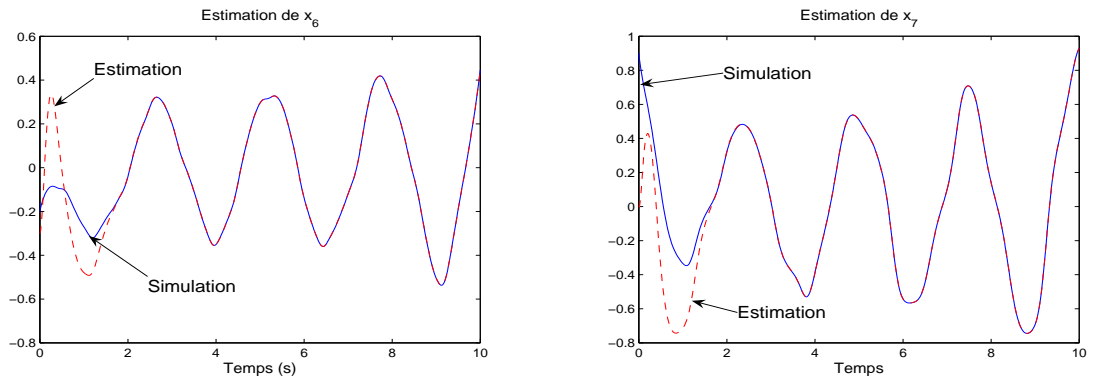
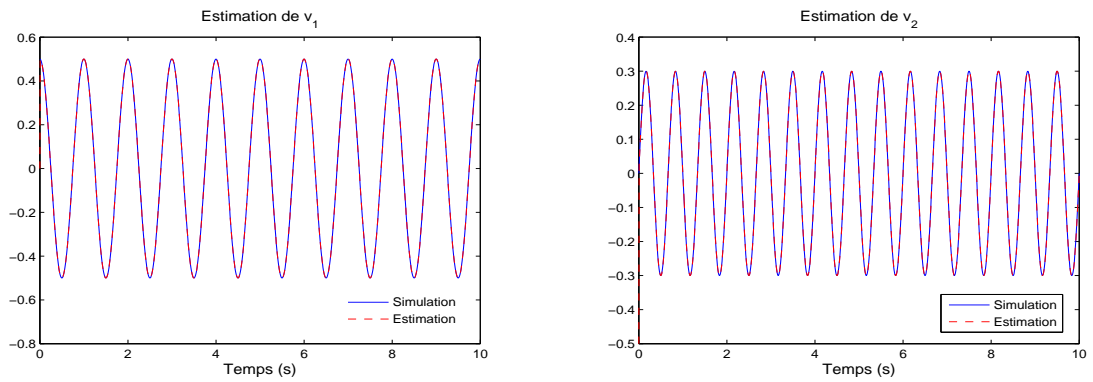
La simulation a été effectuée en prenant  $a = -0.3$ ,  $\theta = 5$  et sous les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = [1; 0.5; 0.9; 0.25; +0.9; -0.2; 0.9], \quad \hat{x}(0) = [1; 0.5; 0.9; -0.25; +0.4; -0.3; 0]$$

$$\hat{v}_1(0) = 0; \quad \hat{v}_2(0) = -0.5;$$

Les expressions des entrées inconnues utilisées dans la simulation sont :  $v_1 = 0.5\cos(3\pi t)$  et  $v_2 = 0.3\sin(2\pi t)$ ;

Les figures (4.5), (4.6) et (4.7) montrent bien la convergence des états estimés ainsi que les entrées inconnues vers les valeurs réelles du modèle.

Figure 4.5: Estimation des états non mesurés  $x_4$  et  $x_5$ Figure 4.6: Estimation des états non mesurés  $x_6$  et  $x_7$ Figure 4.7: Estimation des entrées inconnues  $v_1$  et  $v_2$

**Exemple 2 :**

Modifions légèrement l'exemple précédent où l'on ne considère plus que six états (la variable  $x_7$  est rejetée et est remplacée par 0 dans la dynamique de  $x_6$ ) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(t)x_4 - \sin(t)x_5 \\ \dot{x}_2 = \sin(t)x_4 + \cos(t)x_5 \\ \dot{x}_3 = x_4^3 + x_5^5 + v_1^3 + v_1 \\ \dot{x}_4 = x_3x_6 - (x_3 - a)(v_2^3 + v_2) - v_1 \\ \dot{x}_5 = (x_3 - a)x_6 + x_3v_2 - x_5 - \sin(v_1) \\ \dot{x}_6 = -3v_1\sin^2(v_2) - x_5 + v_1v_2 \\ y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.70)$$

Nous avons ici  $q = 3$ ,  $\rho_1 = 1$  et  $\rho_2 = 2$ . L'observateur est composé de deux blocs en cascade avec  $\delta_1 = 2^{2-1}(3 - \frac{3}{2}) = 3$ . Il s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\hat{\eta}}_1^1 \\ \dot{\hat{\eta}}_2^1 \\ \dot{\hat{\eta}}_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)\hat{\eta}_4^1 - \sin(t)\hat{\eta}_5^1 \\ \sin(t)\hat{\eta}_4^1 + \cos(t)\hat{\eta}_5^1 \\ (\hat{\eta}_4^1)^3 + (\hat{\eta}_5^1)^5 + \hat{v}_1^3 + \hat{v}_1 \end{pmatrix} - 2\theta^{\delta_1} \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1^1 - x_1 \\ \hat{\eta}_2^1 - x_2 \\ \hat{\eta}_3^1 - x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{\eta}}_4^1 \\ \dot{\hat{\eta}}_5^1 \\ \dot{\hat{v}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3\hat{x}_6 - (x_3 - a)(\hat{v}_2^3 + \hat{v}_2) - \hat{v}_1 \\ (x_3 - a)\hat{x}_6 + x_3\hat{v}_2 - \hat{\eta}_5^1 - \sin(\hat{v}_1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\theta^{2\delta_1} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 3(\hat{\eta}_4^1)^2 & 5(\hat{\eta}_5^1)^4 & 3\hat{v}_1^2 + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1^1 - x_1 \\ \hat{\eta}_2^1 - x_2 \\ \hat{\eta}_3^1 - x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$



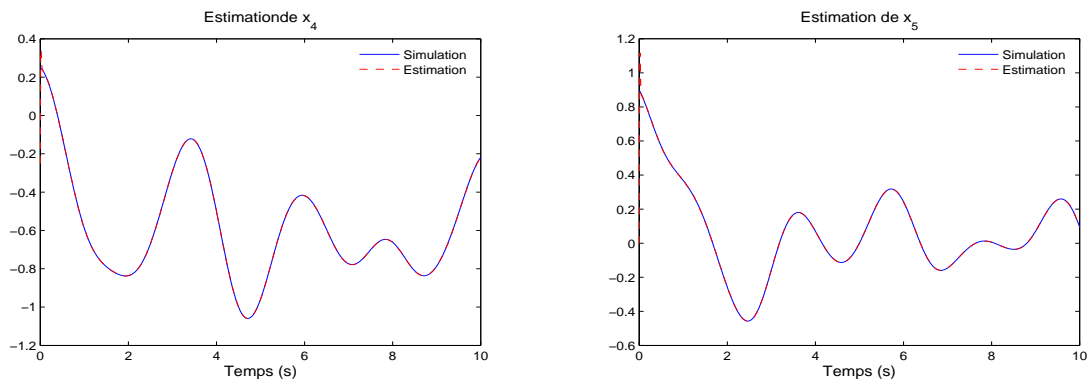
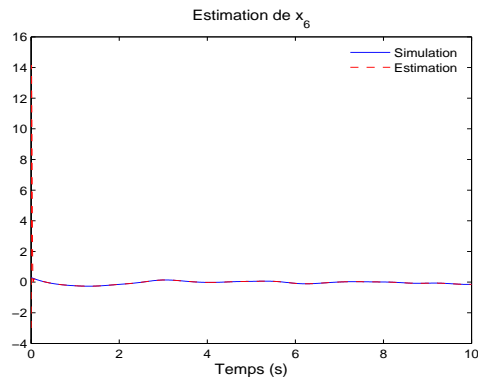
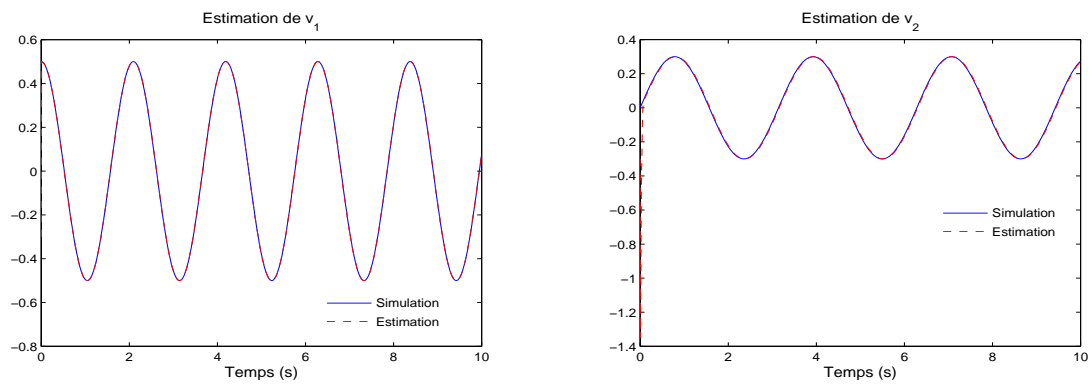
$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \\ \dot{\hat{x}}_5 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \cos(t)\hat{x}_4 - \sin(t)\hat{x}_5 \\ \sin(t)\hat{x}_4 + \cos(t)\hat{x}_5 \\ \hat{x}_4^3 + \hat{x}_5^5 + \hat{v}_1^3 + \hat{v}_1 \\ x_3\hat{x}_6 - (x_3 - a)(\hat{v}_2^3 + \hat{v}_2) - \hat{v}_1 \\ (x_3 - a)\hat{x}_6 + x_3\hat{v}_2 - \hat{x}_5 - \sin(\hat{v}_1) \end{array} \right) - 3\theta \left( \begin{array}{c} \hat{x}_1 - x_1 \\ \hat{x}_2 - x_2 \\ \hat{x}_3 - x_3 \end{array} \right) \\ \\ \left( \begin{array}{c} \dot{\hat{x}}_6 \\ \dot{\hat{v}}_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} -3\hat{v}_1 \sin^2(\hat{v}_2) - \hat{x}_5 + \hat{v}_1\hat{v}_2 \\ 0 \end{array} \right) \\ \\ -3\theta^2 \left( \begin{array}{cc} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \\ 3(\hat{\eta}_4^2)^2 & 5(\hat{\eta}_5^2)^4 \end{array} \right)^+ \left( \begin{array}{c} \hat{x}_1 - x_1 \\ \hat{x}_2 - x_2 \\ \hat{x}_3 - x_3 \end{array} \right) \\ \\ -\theta^3 \left\{ \left( \begin{array}{cc} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \\ 3\hat{x}_4^2 & 5\hat{x}_5^4 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} x_3 & -(x_3 - a)(3\hat{v}_2^2 + 1) \\ x_3 - a & x_3 \end{array} \right) \right\}^+ \\ \\ \left( \begin{array}{c} \hat{x}_1 - x_1 \\ \hat{x}_2 - x_2 \\ \hat{x}_3 - x_3 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

#### 4.4.1.4 Résultats de simulation

La simulation a été effectuée en prenant  $a = -2$ ,  $\theta = 200$  et sous les conditions initiales suivantes  $x(0) = [1; 0.5; 1; 0.25; +0.9; +0.3]$ ,  $\hat{x}(0) = [1; 0.5; 1; -0.25; 0; -0.25]$ ,  $\hat{v}_1(0) = -0.3$ ;  $\hat{v}_2(0) = -0.9$ ;

Les expressions des entrées inconnues utilisées dans la simulation sont :  $v_1 = 0.5\cos(3t)$  et  $v_2 = 0.3\sin(2t)$ ;

Les figures (4.8), (4.9) et (4.10) montrent bien la convergence des états estimés ainsi que les entrées inconnues vers les valeurs réelles du modèle.

Figure 4.8: Estimation des états non mesurés  $x_4$  et  $x_5$ Figure 4.9: Estimation d'état non mesurés  $x_6$ Figure 4.10: Estimation des entrées inconnues  $v_1$  et  $v_2$

#### 4.4.2 Cas où $\rho_r = q$

Par souci de clarté, on reproduit le système (4.3) :

Dans ce cas, le système (4.1) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\ \dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2-1}, v^1) \\ \dot{x}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, v^1, v^2) \\ \vdots \\ \dot{x}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \dots, x^q) + g^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r-1}, v^1, \dots, v^{r-1}) \\ \dot{x}^q = f^q(u, x^1, \dots, x^q) + g^q(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\ y = x^1 \end{array} \right. \quad (4.71)$$

En procédant de la même façon que précédemment, on peut générer le système augmenté associé au (4.71) qui se compose de  $r$  blocs en cascade. Ce système ainsi que l'observateur seront décrits dans ce qui suit :

##### 4.4.2.1 Système augmenté

Il est composé par les  $r$  blocs en cascade suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1^1 = f^1(u, \eta_1^1, \eta_2^1) + g^1(u, \eta_1^1) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho_1-1}^1 = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1}^1) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1-1}^1) \\ \dot{\eta}_{\rho_1}^1 = f^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1+1}^1) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1}^1, \hat{v}^1) \\ \left( \begin{array}{l} \dot{\eta}_{\rho_1+1}^1 \\ \hat{v}^1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} f^{\rho_1+1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1+2}^1) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \dots, \eta_{\rho_1+1}^1, v^1) \\ \varepsilon^1(t) \end{array} \right) \\ y_1 = \eta_1^1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1^2 = f^1(u, \eta_1^2, \eta_2^2) + g^1(u, \eta_1^2) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho_1-1}^2 = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_1}^2) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_1-1}^2) \\ \dot{\eta}_{\rho_1}^2 = f^{\rho_1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_1+1}^2) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_1}^2, \hat{v}^1) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho_2-1}^2 = f^{\rho_2-1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2}^2) + g^{\rho_2-1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2-1}^2, v^1) \\ \dot{\eta}_{\rho_2}^2 = f^{\rho_2}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2+1}^2) + g^{\rho_2}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2}^2, v^1, v^2) \\ \left( \begin{array}{c} \dot{\eta}_{\rho_2+1}^2 \\ \dot{v}^2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_2+1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2+1}^2, \eta_{\rho_2+2}^3) + g^{\rho_2+1}(u, \eta_1^2, \dots, \eta_{\rho_2+1}^2, v^1, v^2) \\ \varepsilon^2(t) \end{array} \right) \\ y_2 = \eta_1^2 \end{array} \right.$$

⋮

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1^{r-1} = f^1(u, \eta_1^{r-1}, \eta_2^{r-1}) + g^1(u, \eta_1^{r-1}) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho_1-1}^{r-1} = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_1}^{r-1}) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_1-1}^{r-1}) \\ \dot{\eta}_{\rho_1}^{r-1} = f^{\rho_1}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_1+1}^{r-1}) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_1}^{r-1}, v^1) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho_2-1}^{r-1} = f^{\rho_2-1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_2}^r) + g^{\rho_2-1}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_2-1}^r, v^1) \\ \dot{\eta}_{\rho_2}^{r-1} = f^{\rho_2}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_2+1}^r) + g^{\rho_2}(u, \eta_1^r, \dots, \eta_{\rho_2}^r, v^1, v^2) \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho_{r-1}-1}^{r-1} = f^{\rho_{r-1}-1}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_{r-1}}^{r-1}) \\ \quad + g^{\rho_{r-1}-1}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_{r-1}-1}^{r-1}, v^1, \dots, v^{r-2}) \\ \dot{\eta}_{\rho_{r-1}}^{r-1} = f^{\rho_{r-1}}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_{r-1}+1}^{r-1}) \\ \quad + g^{\rho_{r-1}}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_{r-1}}^{r-1}, v^1, \dots, v^{r-2}, v^{r-1}) \\ \left( \begin{array}{c} \dot{\eta}_{\rho_{r-1}+1}^r \\ \dot{v}^{r-1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_{r-1}+1}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_{r-1}+1}^{r-1}, x^{\rho_{r-1}+2}) \\ \varepsilon^{r-1}(t) \end{array} \right) \\ \quad + \left( \begin{array}{c} g^{\rho_{r-1}+1}(u, \eta_1^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_{r-1}}^{r-1}, \eta_{\rho_{r-1}+1}^{r-1}, v^1, \dots, v^{r-2}, v^{r-1}) \\ 0 \end{array} \right) \\ y_{r-1} = \eta_1^{r-1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(u, x^1, x^2) + g^1(u, x^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1-1}) \\ \dot{x}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_1}, v^1) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2-1}, v^1) \\ \dot{x}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \dots, x^{\rho_2}, v^1, v^2) \\ \vdots \\ \dot{x}^{\rho_r-1} = f^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}) + g^{\rho_r-1}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r-1}, v^1, \dots, v^{r-1}) \\ \dot{x}^{\rho_r} = f^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}) + g^{\rho_r}(u, x^1, \dots, x^{\rho_r}, v^1, \dots, v^{r-1}, v^r) \\ \dot{v}^r = \varepsilon(t) \\ y_r = x^1 \end{array} \right.$$

#### 4.4.2.2 Equations de l'observateur dans les coordonnées originales

L'observateur global est constitué par  $r$  sous-systèmes en cascade. Le premier sous-système sert à fournir une estimation de  $v^1$ , le deuxième une estimation de  $v^2$  etc, l'avant dernier sous-système délivrant une estimation de  $v^{r-1}$  et enfin le dernier sous-système permet l'estimation conjointe de tous les états et de  $v^r$ .

Comme dans le cas où  $\rho_r < q$ , nous allons donner dans ce qui suit les  $r$  matrices diagonales par bloc,  $\Lambda_k(u, x, v)$ , qui se trouvent en fait sur la diagonale de la jacobienne de la transformation qui met le système (4.71) sous la forme (5.1). Avant de donner les expressions des  $\Lambda_k$ , nous définissons les matrices suivantes :

- Pour  $j = 1, \dots, r - 1$  :

$$F_j(u, x, v) = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f^{\rho_j}}{\partial x^{\rho_j+1}}(u, x) & \frac{\partial g^{\rho_j}}{\partial v^j}(u, x, v) \end{array} \right) \quad (4.72)$$

- $F_r(u, x, v) = \frac{\partial g^q}{\partial v^r}(u, x, v) \quad (4.73)$

Les matrices  $\Lambda_k(u, x, v)$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(u, x, v) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x), \prod_{k=1}^{\rho_1-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) F_1(u, x, v) \right) \\
\Lambda_2(u, x, v) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=1}^{\rho_2-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x), \prod_{k=1}^{\rho_2-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) F_2(u, x, v) \right) \\
&\vdots \\
\Lambda_{r-1}(u, x, v) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=1}^{\rho_{r-1}} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x), \prod_{k=1}^{\rho_{r-1}} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) F_{r-1}(u, x, v) \right) \\
\Lambda_r(u, x, v) &= \text{diag} \left( I_p, \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=1}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x), \prod_{k=1}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) F_r(u, x, v) \right)
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\tag{4.75}$$

Les équations de l'observateur sont :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\hat{\eta}}_1^1 = f^1(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1) + g^1(u, \eta_1^1) - C_{\rho_1+1}^1 \theta^{\delta_1} \Lambda_{11}^+(u, \hat{\eta}^1) (\hat{\eta}_1^1 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_1-1}^1 = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1}^1) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1-1}^1) \\
\quad - C_{\rho_1+1}^{\rho_1-1} \theta^{(\rho_1-1)\delta_1} \Lambda_{1, \rho_1-1}^+(u, \hat{\eta}^1) (\hat{\eta}_1^1 - x^1) \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_1}^1 = f^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+1}^1) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \eta_{\rho_1}^1, \hat{v}^1) \\
\quad - C_{\rho_1+1}^{\rho_1} \theta^{\rho_1 \delta_1} \Lambda_{1, \rho_1}^+(u, \hat{\eta}^1) (\hat{\eta}_1^1 - x^1) \\
\left( \begin{array}{c} \dot{\hat{\eta}}_{\rho_1+1}^1 \\ \dot{\hat{v}}^1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_1+1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+2}^1) + g^{\rho_1+1}(u, \eta_1^1, \hat{\eta}_2^1, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+1}^1, \hat{v}^1) \\ 0 \\ -C_{\rho_1+1}^{\rho_1+1} \theta^{(\rho_1+1)\delta_1} \Lambda_{1, \rho_1+1}^+(u, \hat{\eta}^1, \hat{v}^1) (\hat{\eta}_1^1 - x^1) \end{array} \right)
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\hat{\eta}}_1^2 = f^1(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2) + g^1(u, \eta_1^2) - C_{\rho_2+1}^1 \theta^{\delta_2} \Lambda_{21}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_1-1}^2 = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1}^2) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1-1}^2) \\
\quad - C_{\rho_2+1}^{\rho_1-1} \theta^{(\rho_1-1)\delta_2} \Lambda_{2, \rho_1-1}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_1}^2 = f^{\rho_1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+1}^2) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1}^2, \hat{v}^1) \\
\quad - C_{\rho_2+1}^{\rho_1} \theta^{\rho_1 \delta_2} \Lambda_{2, \rho_1}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_2-1}^2 = f^{\rho_2-1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2}^2) + g^{\rho_2-1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2-1}^2, \hat{v}^1) \\
\quad - C_{\rho_2+1}^{\rho_2-1} \theta^{(\rho_2-1)\delta_2} \Lambda_{2, \rho_2-1}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\dot{\hat{\eta}}_{\rho_2}^2 = f^{\rho_2}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2+1}^2) + g^{\rho_2}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2}^2, \hat{v}^1, \hat{v}^2) \\
\quad - C_{\rho_2+1}^{\rho_2} \theta^{\rho_2 \delta_2} \Lambda_{2, \rho_2}^+(u, \hat{\eta}^2) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \\
\left( \begin{array}{c} \dot{\hat{\eta}}_{\rho_2+1}^2 \\ \hat{v}^2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_2+1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2+1}^2, \hat{\eta}_{\rho_2+2}^3) + g^{\rho_2+1}(u, \eta_1^2, \hat{\eta}_2^2, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2+1}^2, \hat{v}^1, \hat{v}^2) \\ 0 \\ -C_{\rho_2+1}^{\rho_2+1} \theta^{(\rho_2+1)\delta_2} \Lambda_{2, \rho_2+1}^+(u, \hat{\eta}^2, \hat{v}) (\hat{\eta}_1^2 - x^1) \end{array} \right)
\end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
\left\{ \begin{array}{l}
\hat{\eta}_1^{r-1} = f^1(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}) + g^1(u, \eta_1^{r-1}) \\
\quad - C_{\rho_{r-1}+1}^1 \theta^{\delta_{r-1}} \Lambda_{r-1,1}^+(u, \hat{\eta}^{r-1}) (\hat{\eta}_1^{r-1} - x^1) \\
\vdots \\
\hat{\eta}_{\rho_1-1}^{r-1} = f^{\rho_1-1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \eta_{\rho_1}^{r-1}) + g^{\rho_1-1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1-1}^{r-1}) \\
\quad - C_{\rho_{r-1}+1}^{\rho_1-1} \theta^{(\rho_1-1)\delta_{r-1}} \Lambda_{r-1,\rho_1-1}^+(u, \hat{\eta}^{r-1}) (\hat{\eta}_1^{r-1} - x^1) \\
\hat{\eta}_{\rho_1}^{r-1} = f^{\rho_1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1+1}^{r-1}) + g^{\rho_1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_1}^{r-1}, \hat{v}^1) \\
\quad - C_{\rho_{r-1}+1}^{\rho_1} \theta^{\rho_1 \delta_{r-1}} \Lambda_{r-1,\rho_1}^+(u, \hat{\eta}^{r-1}) (\hat{\eta}_1^{r-1} - x^1) \\
\vdots \\
\hat{\eta}_{\rho_2-1}^{r-1} = f^{\rho_2-1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2}^{r-1}) + g^{\rho_2-1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2-1}^{r-1}, \hat{v}^1) \\
\quad - C_{\rho_{r-1}+1}^{\rho_2-1} \theta^{(\rho_2-1)\delta_{r-1}} \Lambda_{r-1,\rho_2-1}^+(u, \hat{\eta}^{r-1}) (\hat{\eta}_1^{r-1} - x^1) \\
\hat{\eta}_{\rho_2}^{r-1} = f^{\rho_2}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2+1}^{r-1}) + g^{\rho_2}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_2}^{r-1}, \hat{v}^1, \hat{v}^2) \\
\quad - C_{\rho_{r-1}+1}^{\rho_2} \theta^{\rho_2 \delta_{r-1}} \Lambda_{r-1,\rho_2}^+(u, \hat{\eta}^{r-1}) (\hat{\eta}_1^{r-1} - x^1) \\
\vdots \\
\hat{\eta}_{\rho_{r-1}-1}^{r-1} = f^{\rho_{r-1}-1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_{r-1}}^{r-1}) \\
\quad + g^{\rho_{r-1}-1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_{r-1}-1}^{r-1}, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^{r-2}) \\
\quad - C_{\rho_{r-1}+1}^{\rho_{r-1}-1} \theta^{(\rho_{r-1}-1)\delta_{r-1}} \Lambda_{r-1,\rho_{r-1}-1}^+(u, \hat{\eta}^{r-1}) (\hat{\eta}_1^{r-1} - x^1) \\
\hat{\eta}_{\rho_{r-1}}^{r-1} = f^{\rho_{r-1}}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_{r-1}+1}^{r-1}) \\
\quad + g^{\rho_{r-1}}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_{r-1}}^{r-1}, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^{r-1}) \\
\quad - C_{\rho_{r-1}+1}^{\rho_{r-1}} \theta^{(\rho_{r-1})\delta_{r-1}} \Lambda_{r-1,\rho_{r-1}}^+(u, \hat{\eta}^{r-1}) (\hat{\eta}_1^{r-1} - x^1)
\end{array} \right. \\
\left( \begin{array}{c} \hat{\eta}_{\rho_{r-1}+1}^{r-1} \\ \hat{v}^{r-1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} f^{\rho_{r-1}+1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_{r-1}+1}^{r-1}, \hat{x}^{\rho_{r-1}+2}) \\ 0 \\ g^{\rho_{r-1}+1}(u, \eta_1^{r-1}, \hat{\eta}_2^{r-1}, \dots, \hat{\eta}_{\rho_{r-1}+1}^{r-1}, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^{r-1}) \\ 0 \\ -C_{\rho_{r-1}+1}^{\rho_{r-1}+1} \theta^{(\rho_{r-1}+1)\delta_{r-1}} \Lambda_{r-1,\rho_{r-1}+1}^+(u, \hat{\eta}^{r-1}) (\hat{\eta}_1^{r-1} - x^1) \end{array} \right)
\end{aligned}$$



$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\hat{x}}^1 = f^1(u, x^1, \hat{x}^2) + g^1(u, x^1) - C_{q+1}^1 \theta \Lambda_{r,1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_1-1} = f^{\rho_1-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_1}) + g^{\rho_1-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_1-1}) \\
\quad - C_{q+1}^{\rho_1-1} \theta^{\rho_1-1} \Lambda_{r,\rho_1-1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_1} = f^{\rho_1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_1+1}) + g^{\rho_1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_1}, \hat{v}^1) \\
\quad - C_{q+1}^{\rho_1} \theta^{\rho_1} \Lambda_{r,\rho_1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_2-1} = f^{\rho_2-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_2}) + g^{\rho_2-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_2-1}, \hat{v}^1) \\
\quad - C_{q+1}^{\rho_2-1} \theta^{\rho_2-1} \Lambda_{r,\rho_2-1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_2} = f^{\rho_2}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_2+1}) + g^{\rho_2}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_2}, \hat{v}^1, \hat{v}^2) \\
\quad - C_{q+1}^{\rho_2} \theta^{\rho_2} \Lambda_{r,\rho_2}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_{r-1}-1} = f^{\rho_{r-1}-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_{r-1}}) \\
\quad + g^{\rho_{r-1}-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_{r-1}-1}, \hat{v}^1, \dots, v^{r-2}) \\
\quad - C_{q+1}^{\rho_{r-1}-1} \theta^{\rho_{r-1}-1} \Lambda_{r,\rho_{r-1}-1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\dot{\hat{x}}^{\rho_{r-1}} = f^{\rho_{r-1}}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_{r-1}+1}) \\
\quad + g^{\rho_{r-1}}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\rho_{r-1}}, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^{r-1}) \\
\quad - C_{q+1}^{\rho_{r-1}} \theta^{\rho_{r-1}} \Lambda_{r,\rho_{r-1}}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\vdots \\
\dot{\hat{x}}^{q-1} = f^{q-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q) + g^{q-1}(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{q-1}, \hat{v}^1, \dots, \hat{v}^{r-1}) \\
\quad - C_{q+1}^{q-1} \theta^{q-1} \Lambda_{r,q-1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\dot{\hat{x}}^q = f^q(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q) + g^q(u, x^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^q, \hat{v}) \\
\quad - C_{q+1}^q \theta^q \Lambda_{r,q}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1) \\
\dot{\hat{v}}^r = -C_{q+1}^{q+1} \theta^{q+1} \Lambda_{r,q+1}^+(u, \hat{x}) (\hat{x}^1 - x^1)
\end{array} \right.$$

où les  $\delta_k$ ,  $k = 1, \dots, r-1$  sont données par

$$\begin{aligned}
\delta_k &= 2^{r-k} \left(q + 1 - \frac{3}{2}\right) \prod_{i=k+1}^r \left(\rho_i + 1 - \frac{3}{2}\right) \\
&= 2^{r-k} \left(q - \frac{1}{2}\right) \prod_{i=k+1}^r \left(\rho_i - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un observateur de type grand gain permettant l'estimation conjointe de tout l'état et de toutes les entrées inconnues pour

---

une classe de systèmes non linéaires multi-sorties. La synthèse de cet observateur s'est effectuée sous certaines conditions suffisantes qui s'inspirent de celles adoptées en l'absence d'entrées inconnues.



# Chapitre 5

## Synthèse d'un observateur adaptatif

### 5.1 Introduction

Un observateur adaptatif est proposé pour une classe de systèmes non linéaire MIMO avec une paramétrisation non linéaire. Ce dernier est composé de sous-systèmes en cascade où à chaque sous-système est associé à un sous-ensemble des variables de sortie. Chaque sous-système possède une structure triangulaire pour ses propres variables d'état et peut dépendre de l'état de tous les autres sous-systèmes de telle sorte que le système global a une structure non triangulaire. La paramétrisation non linéaire par rapport aux paramètres inconnus est générale, puisque chaque sous-système peut comporter n'importe quel paramètre. Le gain de l'observateur proposé renferme une fonction de synthèse qui doit satisfaire à une condition simple qui est donnée.

Le réglage du gain d'observateur est effectué par le choix d'un seul paramètre et cela est valable quelle que soit la dimension des systèmes considérée et le nombre de paramètres à estimer. La convergence exponentielle de cet observateur est garantie sous certaines conditions d'excitation persistante. Les résultats des simulations sont donnés à titre illustratif.

## 5.2 Formulation du problème

On considère la classe de systèmes MIMO qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, \rho, x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\text{où l'état } x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}, x_i^k = \begin{pmatrix} x_{i,1}^k \\ x_{i,2}^k \\ \vdots \\ x_{i,p_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p_k},$$

$$x_{i,j}^k \in \mathbb{R} \quad k = 1, \dots, q, \quad i = 1, \dots, \lambda_k, \quad j = 1, \dots, p_k \text{ et } \sum_{k=1}^p n_k = n;$$

$$\text{la sortie } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ avec } y_k = \begin{pmatrix} y_{k,1} \\ y_{k,2} \\ \vdots \\ y_{k,p_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p_k}, y_{k,j} \in \mathbb{R},$$

$$k = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, p_k \text{ et } \sum_{k=1}^q p_k = p;$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \text{ avec } \rho_i \in \mathbb{R}, \text{ est le vecteur de paramètres constants inconnus ;}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_q \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_q \end{bmatrix} \text{ avec}$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_k} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & I_{p_k} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\varphi(u, \rho, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, \rho, x) \\ \varphi^2(u, \rho, x) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, \rho, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \varphi^k(u, \rho, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^k(u, \rho, x) \\ \varphi_2^k(u, \rho, x) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^k(u, \rho, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k} \text{ où } \varphi_i^k \in \mathbb{R}^{p_k}.$$
 On suppose que les non linéarités  $\varphi$  dépendent de l'état de la manière suivante :

- Pour  $1 \leq i \leq \lambda_k - 1$

$$\varphi_i^k(u, \rho, x) = \varphi_i^k(u, \rho, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}; x_1^k, x_2^k, \dots, x_i^k; x_1^{k+1}, x_1^{k+2}, \dots, x_1^q) \quad (5.4)$$

- Pour  $i = \lambda_k$  :

$$\varphi_{\lambda_k}^k(u, \rho, x) = \varphi_{\lambda_k}^k(u, \rho, x^1, x^2, \dots, x^q) \quad (5.5)$$

### 5.2.1 Quelques préliminaires

Avant de présenter la synthèse de l'observateur, nous introduisons quelques définitions et notations.

- Pour  $k = 1, \dots, q$ , soit la matrice diagonale  $\Delta_k(\theta)$  définie comme suit :

$$\Delta_k(\theta) = \begin{bmatrix} I_{p_k} & & & \\ & \frac{1}{\theta^{\delta_k}} I_{p_k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\theta^{\delta_k(\lambda_k-1)}} I_{p_k} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

où  $\theta > 0$  est un réel strictement positif et les réels  $\delta_k$  sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \delta_k = 2^{q-k} \prod_{i=k+1}^q (\lambda_i - \frac{3}{2}) & \text{pour } 1 \leq k \leq q-1; \\ \delta_q = 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

pour tout  $k = 1, \dots, q-1$ , on a

$$\frac{\delta_k}{2} = (\lambda_{k+1} - \frac{3}{2}) \delta_{k+1} \quad (5.8)$$

Depuis  $\lambda_k \geq 2$ , on a  $(\lambda_{k+1} - \frac{3}{2}) \geq \frac{1}{2}$  et donc les  $\delta_k$  constituent une suite décroissante de nombres réels positifs :

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_q = 1 \quad (5.9)$$

- Considérons maintenant les  $q$  réels  $\sigma_1^k$ ,  $k = 1, \dots, q$ , définis comme suit :

$$\sigma_1^k = (\lambda_1 - \frac{1}{2})\delta_1 - (\lambda_k - \frac{1}{2})\delta_k + (1 - \frac{1}{2^{k-1}}) \quad (5.10)$$

On définit également la séquence suivante des nombres scalaires

$$\sigma_i^k = \sigma_1^k + (i - 1)\delta_k \quad (5.11)$$

Il est facile de vérifier que :

$$\text{pour } k = 1, \dots, q, \text{ et } i = 1, \dots, \lambda_k : \sigma_i^k \geq 0 \quad (5.12)$$

En effet, pour  $k = 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_i^1 &= \sigma_1^1 + (i - 1)\delta_1 \\ &= (i - 1)\delta_1 \\ &\geq 0 \text{ pour } i \geq 1 \text{ puisque } \delta_1 > 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Pour  $k \geq 2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_i^k &= (\lambda_1 - 1)\delta_1 - (\lambda_k - i)\delta_k + (1 - \frac{1}{2^{k-1}}) \\ &\geq (\lambda_1 - 1)\delta_1 - (\lambda_k - 1)\delta_k \\ &= (\lambda_1 - 1)\delta_1 - \frac{\delta_{k-1}}{2} - \frac{\delta_k}{2} \text{ selon (5.8)} \\ &\geq (\lambda_1 - 1)\delta_1 - \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_1}{2} \text{ selon (5.9)} \\ &= (\lambda_1 - 2)\delta_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

- Considérons l'équation algébrique de Lyapunov suivante

$$S_k + A_k^T S_k + S_k A_k = C_k^T C_k \quad (5.15)$$

où les matrices  $A_k$  et  $C_k$  étant celles définies en (5.2)(5.3). Il est que cette équation (5.15) admet une solution unique  $S_k$  qui est symétrique définie positive.

La matrice  $A_k - S_k^{-1} C_k^T C_k$  est une matrice stable.

De plus, la matrice  $S_k$  est explicitement donnée dans (Busawon *et al.* [1998]) et en particulier nous avons :

$$S_k^{-1} C_k^T = (C_{\lambda_k}^1 I_{p_k}, \dots, C_{\lambda_k}^{\lambda_k} I_{p_k})^T \text{ où } C_{\lambda_k}^i = \frac{\lambda_k!}{i!(\lambda_k - i)!} \text{ pour } i = 1, \dots, \lambda_k \quad (5.16)$$

A partir de  $S_k$ , nous définissons la matrice diagonale par bloc,  $S$ , comme suit :

$$S = \text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_q) \quad (5.17)$$

Dans la suite, nous notons par  $\lambda_{min}^k$  et  $\lambda_{max}^k$  respectivement, les plus petite et plus grandes valeurs propres de la matrice  $S_k$ . Les variables  $\lambda_{min}(\cdot)$  et  $\lambda_{max}(\cdot)$  peuvent être les plus petite et plus grandes valeurs propres de  $(\cdot)$ .

• Pour  $k = 1, \dots, q$ , on définit la matrice diagonale  $\Lambda_k(\theta)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Lambda_k(\theta) &= \theta^{-\sigma_1^k} \Delta_k(\theta) \\ &= \text{diag} \left( \frac{1}{\theta^{\sigma_1^k}} I_{p_k}, \frac{1}{\theta^{\sigma_2^k}} I_{p_k}, \dots, \frac{1}{\theta^{\sigma_{\lambda_k}^k}} I_{p_k} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Maintenant, et en tenant compte des structures de  $\Lambda_k(\theta)$ ,  $\Delta_k(\theta)$  et  $A_k$ , respectivement donné par (5.18), (5.6) and (5.2), nous pouvons vérifier les identités suivantes :

$$\begin{aligned} * \Lambda_k(\theta) A_k \Lambda_k^{-1}(\theta) &= \Delta_k(\theta) A_k \Delta_k^{-1}(\theta) = \theta^{\delta_k} A_k \\ * \theta^{-\sigma_1^k} C_k \Lambda_k^{-1}(\theta) &= C_k \Delta_k^{-1}(\theta) = C_k \end{aligned} \quad (5.19)$$

• Pour  $k = 1, \dots, q$ , nous considérons les fonctions  $K_k : \mathbb{R}^{p_k} \rightarrow \mathbb{R}^{p_k}$  satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall \tilde{y}_k \in \mathbb{R}^{p_k} : \tilde{y}_k^T K_k(\tilde{y}_k) \geq \frac{1}{2} \tilde{y}_k^T \tilde{y}_k \quad (5.20)$$

Avant de finir ce paragraphe, nous avons besoin du lemme suivant pour les preuves de notre principal résultat. Ce lemme, aussi, pour prouver la séquence des réels qui reflètent aux interconnexions entre les états non linéaires des sous systèmes.

**Lemme 5.2.1** *Soit*

$$\chi_{l,j}^{k,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \equiv 0 \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.21)$$

pour  $k, l = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$  et  $j = 2, \dots, \lambda_l$ . Alors, la séquence des nombres réels  $\sigma_i^k$  défini par (5.11) sont tels que

$$\text{si } \chi_{l,j}^{k,i} = 1 \text{ alors } \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \leq -\varepsilon \triangleq -\frac{1}{2^{q-1}} \quad (5.22)$$



**Preuve du lemme 5.2.1 :** Ceci doit être fait en utilisant les deux faits suivants. Tout d'abord, selon la dépendance d'état donnée par (5.25) et (5.26), le cas où  $(\chi_{l,j}^{k,i} = 1$  pour  $k, l \in \{1, \dots, q\}$  et  $j \in \{2, \dots, \lambda_l\}$  se produit si et seulement si l'une des trois situations suivantes est rencontrée.

- $k > l$  et  $i$  prend n'importe quelle valeur dans  $\{1, \dots, \lambda_k\}$ ; ceci traduit la structure triangulaire comme tout le système
- $k = l$  et  $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$  avec  $i \geq j$ ; ceci est lié à la structure triangulaire de chaque sous-système à l'égard de ses variables.
- $k < l$  et  $i = \lambda_k$ ; ceci résulte que la dernière équation de chaque sous-système peut dépendre des variables de tous les sous-systèmes.

Ensuite, il résulte de (5.10) que

$$\begin{aligned}
 \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} &= \sigma_1^l + (j-1)\delta_l - \sigma_1^k - (i-1)\delta_k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \\
 &= -(\lambda_l - 1)\delta_l + (j-1)\delta_l \\
 &\quad + (\lambda_k - 1)\delta_k - (i-1)\delta_k + \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \\
 &= \left(\lambda_k - i - \frac{1}{2}\right)\delta_k + \left(j - \lambda_l - \frac{1}{2}\right)\delta_l + \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

pour vérifier la condition (5.22) il suffit de considérer les trois situations citées ci-dessus en utilisant (5.23). nous avons :

- $k > l$  et  $i$  quelconques dans  $\{1, \dots, \lambda_k\}$ . Notons d'abord que depuis  $k > l$ , on obtient  $k \geq 2$  et donc l'égalité (5.23) devient

$$\begin{aligned}
 \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} &\leq \left(\lambda_k - \frac{3}{2}\right)\delta_k - \frac{\delta_l}{2} + \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \\
 &= \frac{\delta_{k-1}}{2} - \frac{\delta_l}{2} + \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \text{ selon (5.8)} \\
 &\leq \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}} \text{ selon (5.9)} \\
 &= \frac{1}{2^{k-1}}(1 - 2^{k-l}) \leq -\frac{1}{2^{k-1}} \leq -\frac{1}{2^{q-1}}
 \end{aligned}$$

- $k = l$  et  $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$  avec  $i \geq j$ . L'équation (5.23) devient

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} = (j - i - 1)\delta_k \leq -\delta_k \leq -1 \leq -\frac{1}{2^{q-1}}$$

- $k < l$  et  $i = \lambda_k$ . L'équation (5.23) devienne

$$\begin{aligned}
\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} &= -\frac{\delta_k}{2} + (j - \lambda_l - \frac{1}{2})\delta_l + (\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}) \\
&\leq -\frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} + (\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}) \\
&\leq -1 + \frac{1}{2^{k-1}}(1 - 2^{k-l}) \text{ puisque } \delta_k \geq \delta_l \geq 1 \\
&\leq -1 + \frac{1}{2^{k-1}}(1 - \frac{1}{2}) \text{ puisque } l - k \geq 1 \\
&\leq -1 + \frac{1}{2^k} \\
&\leq -1 + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2} \\
&\leq -\frac{1}{2^{q-1}} \text{ ( } q \geq 2 \text{)}
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme.

### 5.2.2 Synthèse de l'observateur

Rappelons que notre objectif consiste à synthétiser un observateur adaptatif pour estimer conjointement l'état  $x$  ainsi que le vecteur de paramètres inconnus  $\rho$ . Une telle synthèse nécessite l'adoption de certaines hypothèses. À cette étape, on suppose ce qui suit :

**Hypothèse 5.1** *L'état  $x$ , l'entrée  $u$  et les paramètres inconnus  $\rho_i$  pour  $i = 1, \dots, m$  sont bornés, c'est-à-dire qu'il existe des ensembles  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^s$  et  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  tels que pour tout  $t \geq 0$ ,  $x(t) \in X$ ,  $u(t) \in U$  et  $\rho \in \Omega$ .*

**Hypothèse 5.2** *La fonction  $\Psi(u, \rho, x)$  est globalement Lipschitzienne par rapport à  $x$  et  $\rho$  uniformément en  $u$ .*

Puisque l'état  $x$  et le vecteur de paramètres  $\rho$  sont réduits dans l'ensemble borné  $X \times \Omega$ , on peut étendre les non linéarités  $\varphi(u, \rho, x)$  en  $g(u, \rho, x)$  de telle sorte que la restriction de  $g(u, \rho, x)$  coïncide avec  $\varphi(u, \rho, x)$  dans  $X \times \Omega$  et que  $g(u, \rho, x)$  devient globalement Lipschitzienne, c'est à dire, lipschitzienne sur tout l'espace  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . En effet, soit  $\sigma_x : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ ,  $x \mapsto \sigma_x(x)$  et  $\sigma_\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega$ ,  $\rho \mapsto \sigma_\rho(\rho)$  sont des fonctions de saturation lisses bornées  $\sigma_x(x) = x$  et  $\sigma_\rho(\rho) = \rho$  pour tout  $x \in X$  et

$\rho \in \Omega$  (voir par exemple Shim [2000], Shim *et al.* [2001], Colon [1992]). On définit l'extension Lipschitzienne,  $g$ , de  $\varphi$  comme suit :

$$g(u, \rho, x) = \varphi(u, \sigma_\rho(\rho), \sigma_x(x))$$

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g(u, \rho, x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\text{où } g(u, \rho, x) = \begin{pmatrix} g^1(u, \rho, x) \\ g^2(u, \rho, x) \\ \vdots \\ g^q(u, \rho, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } g^k(u, \rho, x) = \begin{pmatrix} g_1^k(u, \rho, x) \\ g_2^k(u, \rho, x) \\ \vdots \\ g_{\lambda_k}^k(u, \rho, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k} \text{ où}$$

$g_i^k \in \mathbb{R}^{p_k}$ . Il est clair que les linéarités  $g$  dépendent de l'état comme dans  $\varphi$ . Plus précisément, on a :

- Pour  $1 \leq i \leq \lambda_k - 1$

$$g_i^k(u, \rho, x) = g_i^k(u, \rho, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}; x_1^k, x_2^k, \dots, x_i^k; x_1^{k+1}, x_1^{k+2}, \dots, x_1^q) \quad (5.25)$$

- Pour  $i = \lambda_k$  :

$$g_{\lambda_k}^k(u, \rho, x) = g_{\lambda_k}^k(u, \rho, x^1, x^2, \dots, x^q) \quad (5.26)$$

Maintenant, il est clair que le système (5.24) coïncide avec le système (5.1) pour tout  $(u, \rho, x) \in U \times \Omega \times X$ . Par conséquent, pour la synthèse de l'observateur, nous considérons le système (5.24) au lieu de (5.1). En effet, le système (5.24) doit être pris en considération dans le prochain paragraphe. S'il vous plaît noter que pour toute entrée bornée  $u \in U$ ,  $g(u, \rho, x)$  est, par construction, globalement Lipschitzienne par rapport à  $x$  et  $\rho$  et est bornée pour tout  $(x, \rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Considérons le système dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\hat{x}}^k(t) = A_k \hat{x}^k + g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) \\
\quad - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1} S_k^{-1} C_k^T K_k(C_k \tilde{x}^k) \\
\quad - \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + 1} \Lambda_k^{-1} \Upsilon_k(t) P(t) \sum_{l=1}^q \theta^{-\sigma_l^1 + \frac{\delta_l}{2}} \Upsilon_l^T(t) C_l^T K_l(C_l \tilde{x}^l); \quad k = 1, \dots, q \\
\dot{\hat{\rho}}(t) = -P(t) \sum_{l=1}^q \theta^{-\sigma_l^1 + \frac{\delta_l}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_l^T(t) C_l^T K_l(C_l \tilde{x}^l) \\
\dot{\Upsilon}_k(t) = \theta^{\delta_k} (A_k - S_k^{-1} C_k^T C_k) \Upsilon_k(t) \\
\quad + \theta^{\frac{\delta_k}{2} - \frac{1}{2}} \Lambda_k \frac{\partial g^k}{\partial \rho}(u, \hat{\rho}, \hat{x}); \quad \text{avec } \Upsilon_k(0) = 0 \quad k = 1, \dots, q \\
\dot{P}(t) = -\theta P(t) \left( \sum_{k=1}^q \Upsilon_k^T(t) C_k^T C_k \Upsilon_k(t) \right) P(t) + \theta P(t) \quad \text{avec } P(0) = P^T(0) > 0
\end{array} \right. \quad (5.27)$$

$$\text{où } \hat{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \quad x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k},$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec } \hat{x}^k = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^k \\ \hat{x}_2^k \\ \vdots \\ \hat{x}_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}, x_i^k \in \mathbb{R}^{p_k}, \hat{x}_i^k \in \mathbb{R}^{p_k} \quad k = 1, \dots, q$$

avec  $\hat{x}_1^k = x_1^k$  et  $\hat{x}_i^k = \hat{x}_i^k$  pour  $i = 2, \dots, \lambda_k$  (injection de sortie) et  $\sum_{k=1}^p n_k = n$ ;  
 $u$  et  $y_k$ ,  $k = 1, \dots, q$  sont respectivement les entrées et les sorties du système (5.24);  
les matrices  $A_k$ ,  $C_k$ ,  $\Delta_k$ ,  $\Lambda_k$  et  $S_k$  sont données respectivement par (5.2), (5.3), (5.6), (5.15) et (5.18). Chaque fonction  $K_k$  est tel que  $K_k : \mathbb{R}^{p_k} \rightarrow \mathbb{R}^{p_k}$  satisfait la propriété (5.20). Finalement, les réels  $\delta_k$  et  $\sigma_1^k$  sont données respectivement par (5.7) et (5.10).

Avant d'énoncer notre résultat, nous adoptons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 5.3** *L'entrée  $u(t)$  est telle que pour toute trajectoire  $\hat{x}(t)$  du système (5.27) issue de  $(\hat{x}(0), \hat{\rho}(0)) \in X \times \Omega$ , la matrice  $\left( \sum_{k=1}^q \Upsilon_k^T(t) C_k^T C_k \Upsilon_k(t) \right)$  est une excitation persistante c'est à dire*

$$\exists \delta_1, \delta_2 > 0; \exists T > 0; \forall t \geq 0 :$$

$$\delta_1 I_m \leq \int_t^{t+T} \sum_{k=1}^q \Upsilon_k^T(\tau) C_k^T C_k \Upsilon_k(\tau) d\tau \leq \delta_2 I_m$$

Nous énonçons maintenant le théorème suivant :

**Théorème 5.2.1** *Sous les hypothèses (5.1), (5.2) et (5.3), le système (5.27) est un observateur adaptatif pour le système (5.24) et la convergence d'erreur d'estimation est exponentielle pour des valeurs relativement grandes de  $\theta$ .*

La démonstration du théorème est détaillée dans la section suivante. Toutefois, avant de détailler cette preuve, nous rappelons quelques observations qui seront utilisées tout au long de la preuve. Certaines observations sont également donnés dans (Farza *et al.* [2009a]).

1) Comme dans (Farza *et al.* [2009a]), on remarque que la matrice  $\Upsilon_k(t)$  est bornée. Cela veut dire que la matrice  $\frac{\partial g^k}{\partial \rho}$  est bornée (selon l'hypothèse Lipschitz). De plus la borne supérieure correspondante ne dépend pas de  $\theta$  lorsque  $\theta > 1$ . La matrice  $\theta(A - S^{-1}C^T C)$  est stable. Pour le prouver, nous faisons un changement de l'échelle de temps par la mise  $\tau = t/\theta^{\delta_k}$  et soit  $\tilde{\Upsilon}_k(t) = \Upsilon_k(\frac{t}{\theta^{\delta_k}})$ . A partir des équations (5.27), on a :

$$\dot{\tilde{\Upsilon}}_k(t) = (A_k - S_k^{-1}C_k^T C_k)\tilde{\Upsilon}_k(t) + \frac{1}{\theta^{\frac{\delta_k+1}{2}}} \Lambda_k(\theta) \frac{\partial g^k}{\partial \rho}(u(\frac{t}{\theta^{\delta_k}}), \hat{\rho}(\frac{t}{\theta^{\delta_k}}), \hat{x}(\frac{t}{\theta^{\delta_k}})) \quad (5.28)$$

Selon l'expression de  $\Lambda_k(\theta)$  donnée par (5.18) et de  $\sigma_i^k \geq 0$  (voir (5.12)), la matrice  $\frac{1}{\theta^{\frac{\delta_k+1}{2}}} \Lambda_k(\theta) \frac{\partial g^k}{\partial \rho}(u(\frac{t}{\theta^{\delta_k}}), \hat{\rho}(\frac{t}{\theta^{\delta_k}}))$  est bornée et que sa borne supérieure est indépendante de  $\theta$  pour  $\theta \geq 1$ . Puisque la matrice  $A_k - S_k^{-1}C_k^T C_k$  est stable, nous pouvons conclure directement que  $\tilde{\Upsilon}_k(t)$  (ou équivalente à celle de  $\Upsilon_k(t)$ ) est bornée avec une borne supérieure indépendante de  $\theta$ .

La matrice  $\Upsilon_k$  est la version filtrée de  $\frac{\partial g^k}{\partial \rho}$ . On choisit une condition initiale de  $\Upsilon_k$  égale à zéro afin de rendre le comportement transitoire plus courte .

2) Sous l'hypothèse (5.3), la matrice  $P(t)$  régie par l'EDO décrite dans (5.27) est SPD et bornée. En outre, les bornes supérieures et inférieures sont indépendantes de  $\theta$ . Pour prouver ceci, nous changeons de nouveau l'échelle de temps par  $\tau = t/\theta$  et soit  $\bar{P}(t) = P(\frac{t}{\theta})$ . Alors, on obtient :

$$\dot{\bar{P}}(t) = -\bar{P}(t) \left( \sum_{k=1}^q \Upsilon_k^T(\frac{t}{\theta}) C_k^T C_k \Upsilon_k(\frac{t}{\theta}) \right) \bar{P}(t) + \bar{P}(t) \text{ with } \bar{P}(0) = \bar{P}^T(0) > 0 \quad (5.29)$$

Encore sous l'hypothèse (5.3), nous avons montré dans (Zhang et Clavel [2001]) que  $\bar{P}$  est SPD et bornée et que la borne correspondante (évidemment) ne dépend pas de  $\theta$ . Le même résultat est valable pour  $P(t)$ .

3) Le gain de l'observateur (5.27) implique des fonctions de conception  $k_k$  qui satisfont la propriété (5.20). Des expressions particulières de ces fonctions sont données dans (Farza *et al.* [2009a]) et il est démontré que ces expressions donnent lieu à des observateurs adaptatifs à grand gain ( $k_k(\tilde{y}_k) = K_1 \tilde{y}_k$  où  $K_1 > 0$  est un nombre réel constant positif tel que  $K_1 > 0$ ), observateurs adaptatifs mode glissant classique ( $K_k(\tilde{y}_k) = k_1 \text{sign}(\tilde{y}_k)$ ) et les observateurs adaptatifs de type mode glissant ( $K_k(\tilde{y}_k) = k_1 \tanh(k_0 \tilde{y}_k)$  avec  $K_0, K_1 > 0$  des constantes réelles positives). Cette partie a été entièrement discutée dans (Farza *et al.* [2009a]) et ne sera pas détaillée.

4) Nous notons que dans le cas où  $q = 1$ , c'est à dire toutes les sorties appartiennent à un même bloc, et le système (5.1) est composé par un seul bloc,  $x \triangleq x^1$ , et elle correspond à la classe des systèmes non linéaire paramétrés pris en compte dans (Farza *et al.* [2009a]). Dans un tel cas, la matrice  $\Lambda_k$  coïncide avec  $\Delta_k$  puisque  $\sigma_1^1 = 0$  et on peut facilement vérifier que l'observateur (5.27) devient identique à celui qui est proposé dans (Farza *et al.* [2009a]).

### 5.2.3 Analyse de la convergence

Posons  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ ,  $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \rho(t)$  et soit  $\tilde{x}^k(t)$  la  $k^{\text{ième}}$  composante de  $\tilde{x}(t)$ .

Pour simplifier l'écriture, nous allons omettre dans ce qui suit la variable temps  $t$ .

On a :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^k &= A_k \tilde{x}^k - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1} S_k^{-1} C_k^T K_k (C_k \tilde{x}^k) + g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \rho, x) \\ &\quad - \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Lambda_k^{-1} \left( \theta \Upsilon_k P \sum_{l=1}^q \theta^{\frac{1}{2} + \frac{\delta_l}{2} - \frac{\sigma_l^1}{2}} \Upsilon_l^T C_l^T K_l (C_l \tilde{x}^l) \right) \\ &= A_k \tilde{x}^k - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1} S_k^{-1} C_k^T K_k (C_k \tilde{x}^k) + g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x) \\ &\quad + g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x) + \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Lambda_k^{-1} \Upsilon_k \dot{\tilde{\rho}} \end{aligned}$$

où  $u$  est une entrée admissible telle que  $\|u\|_\infty \leq M$ , où  $M$  est une constante positive donnée telle que  $M > 0$ .

Posons

$$\bar{x}^k = \Lambda_k(\theta)\tilde{x}^k \quad (5.30)$$

où  $\Lambda_k(\theta)$  est donnée par (5.18). Pour la commodité de notation, l'argument  $\theta$  de  $\Delta_k$  et  $\Lambda_k$  est omise dans la suite.

En tenant compte des propriétés (5.19) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}^k &= \Lambda_k A_k \Lambda_k^{-1} \dot{\tilde{x}}^k - \theta^{\delta_k} \Lambda_k \Delta_k^{-1} S_k^{-1} C_k^T K_k (C_k \Lambda_k^{-1} \tilde{x}^k) + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) \\ &\quad + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x)) + \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_k \dot{\tilde{\rho}} \\ &= \theta^{\delta_k} A_k \tilde{x}^k - \theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} S_k^{-1} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \tilde{x}^k) + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) \\ &\quad + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x)) + \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_k \dot{\tilde{\rho}} \end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant la variable suivante :

$$\eta^k = \bar{x}^k - \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_k \tilde{\rho} \quad (5.31)$$

Où  $\Upsilon_k$  est régie par les équations différentielles ordinaires (EDO) donnée dans (5.27).

La dynamique de la variable  $\eta^k$  peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^k &= \dot{\bar{x}}^k - \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \dot{\Upsilon}_k \tilde{\rho} - \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_k \dot{\tilde{\rho}} \\ &= \theta^{\delta_k} A_k \left( \eta^k + \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_k \tilde{\rho} \right) - \theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} S_k^{-1} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) \\ &\quad - g^k(u, \hat{\rho}, x) + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x)) - \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \dot{\Upsilon}_k \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} &= \theta^{\delta_k} A_k \eta^k + \theta^{\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} A_k \Upsilon_k \tilde{\rho} - \theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} S_k^{-1} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) \\ &\quad + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x)) \\ &\quad - \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \left( \theta^{\delta_k} (A_k - S_k^{-1} C_k^T C_k) \Upsilon_k(t) + \theta^{\frac{\delta_k}{2} - \frac{1}{2}} \Lambda_k \frac{\partial g^k}{\partial \rho}(u, \hat{\rho}, \hat{x}) \right) \tilde{\rho} \\ &= \theta^{\delta_k} A_k \eta^k - \theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} S_k^{-1} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) + \theta^{\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} S_k^{-1} C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} \\ &\quad + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) \\ &\quad + \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x)) - \Lambda_k \frac{\partial g}{\partial \rho}(u, \hat{\rho}, \hat{x}) \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Introduisons les fonctions suivantes

$$V_k(\eta^k) = \eta^{kT} S_k \eta^k \quad (5.34)$$

$$V(\eta) = \sum_{k=1}^q V_k(\eta^k) \quad (5.35)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= 2\eta^{kT} S_k \dot{\eta}^k \\ &= 2\theta^{\delta_k} \eta^{kT} S_k A_k \eta^k - 2\theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} \eta^{kT} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \eta^{kT} C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} \\ &\quad + 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) + 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x)) \\ &\quad - 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) \frac{\partial g}{\partial \rho}(u, \hat{\rho}, \hat{x}) \tilde{\rho} \\ &= \theta^{\delta_k} (-\eta^{kT} S_k \eta^k + \eta^{kT} C_k C_k^T \eta^k) - 2\theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} \eta^{kT} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) \\ &\quad + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \eta^{kT} C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} + 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) \\ &\quad + 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x)) - 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) \frac{\partial g}{\partial \rho}(u, \hat{\rho}, \hat{x}) \tilde{\rho} \\ &= -\theta^{\delta_k} V_k + \theta^{\delta_k} \eta^{kT} C_k C_k^T \eta^k - 2\theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} \eta^{kT} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) \\ &\quad + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \eta^{kT} C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} + 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) \\ &\quad + 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x)) - 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) \frac{\partial g}{\partial \rho}(u, \hat{\rho}, \hat{x}) \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dans ce qui suit, nous allons chercher à borner  $2\eta^{kT} S_k \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x))$ .

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) &\leq 2 \|S_k \eta^k\| \| \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) \| \\ &\leq 2 \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \frac{1}{\sigma_i^k} \|g_i^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g_i^k(u, \hat{\rho}, x)\| \end{aligned}$$

où  $\sigma_i^k = \sigma_1^k + (i-1)\delta_k$  est donnée dans (5.11).

En tenant compte de l'hypothèse (5.1), c'est à dire la bornitude de  $\frac{\partial g}{\partial x}$ , nous avons :

$$2\eta^{kT} S_k \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) \leq 2\beta_k \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{-\sigma_i^k} \|\tilde{x}_j^l\|$$

$$\text{où } \beta_k = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial g_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \right\| / x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|u\|_\infty \leq M \right\}$$



et  $\chi_{l,j}^{k,i}$  est défini dans le Lemme 5.2.1.

En utilisant la relation (5.30), la dernière inégalité se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
2\eta^{kT} S_k \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) &\leq 2\beta_k \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{-\sigma_i^k} \|\theta^{\sigma_j^l} \bar{x}_j^l\| \\
&= 2\beta_k \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{-\sigma_i^k + \sigma_j^l} \|\bar{x}_j^l\| \\
&\leq 2\beta_k \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{-\sigma_i^k + \sigma_j^l} \|\bar{x}_j^l\|
\end{aligned}$$

où  $\lambda_{max}^k$  est la plus grande valeur propre de  $S_k$

Maintenant, selon l'équation (5.31), nous obtenons

$$\begin{aligned}
2\eta^{kT} S_k \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) &\leq 2\beta_k \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \\
&\quad \theta^{-\sigma_i^k + \sigma_j^l} \left( \|\eta^l\| + \|\theta^{-\frac{\delta_l}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_l \tilde{\rho}\| \right) \\
&\leq 2\beta_k \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \\
&\quad \theta^{-\sigma_i^k + \sigma_j^l} \left( \frac{\sqrt{V_l}}{\sqrt{\lambda_{min}^l}} + \|\theta^{-\frac{\delta_l}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_l \tilde{\rho}\| \right) \\
&= 2\beta_k \sqrt{\lambda_{max}^k} \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \\
&\quad \theta^{-\sigma_i^k + \sigma_j^l - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2}} \left( \frac{\sqrt{\theta^{\delta_l} V_l}}{\sqrt{\lambda_{min}^l}} + \|\theta^{\frac{1}{2}} \Upsilon_l \tilde{\rho}\| \right)
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 5.2.1, on a

$$\text{si } \chi_{l,j}^{k,i} \neq 0 \text{ alors } \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} \leq -\varepsilon \quad (5.37)$$

Ainsi, on obtient pour  $\theta \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
2\eta^{kT} S_k \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) &\leq 2\beta_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \left( \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\lambda_{min}(S)} \|\theta^{\frac{1}{2}} \Upsilon_l\| \|\tilde{\rho}\| \right) \\
&\leq 2\lambda_k \beta_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \left( \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l} \right. \\
&\quad \left. + \gamma \sqrt{\lambda_{min}(S)} \theta^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\rho}\| \right) \quad (5.38)
\end{aligned}$$

où  $\mu_S = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}}$  avec  $S$  donnée par (5.17) et  $\gamma = \max_{1 \leq l \leq q} \{\sup_{t \geq 0} \|\Upsilon(t)\|\}$

Posons maintenant

$$V_k^* = \theta^{\delta_k} V_k \quad \text{et} \quad V^* = \sum_{k=1}^q V_k^* \quad (5.39)$$

il résulte de (5.9) que

$$V^* \geq \theta^{\delta_q} V = \theta V \quad (5.40)$$

et l'inégalité (5.38) devient

$$\begin{aligned} 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, \hat{x}) - g^k(u, \hat{\rho}, x)) &\leq 2\lambda_k \beta_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_k^*} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \left( \sqrt{V_l^*} + \gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)} \theta^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\rho}\| \right) \\ &\leq 2\lambda_k \beta_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_k^*} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \left( \sqrt{V^*} + \gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)} \theta^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\rho}\| \right) \\ &\leq 2n \lambda_k \beta_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_k^*} \left( \sqrt{V^*} + \gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)} \theta^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\rho}\| \right) \\ &\leq 2n \lambda_k \beta_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V^*} \left( \sqrt{V^*} + \gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)} \theta^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\rho}\| \right) \\ &= 2n \lambda_k \beta_k \mu_S \left( \theta^{-\varepsilon} V^* + \theta^{-\varepsilon + \frac{1}{2}} \sqrt{\lambda_{\min}(S)} \gamma \sqrt{V^*} \|\tilde{\rho}\| \right) \\ &\leq 2n \lambda_k \beta_k \mu_S \left( \theta^{-\varepsilon} V^* + \frac{1}{2} \theta^{-\varepsilon} \gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)} (V^* + \theta \|\tilde{\rho}\|^2) \right) \\ &= (2n \lambda_k \beta_k \mu_S + \gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)}) \theta^{-\varepsilon} V^* \\ &\quad + n \lambda_k \beta_k \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \gamma \theta^{1-\varepsilon} \|\tilde{\rho}\|^2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Compte tenu de la condition Lipschitzienne globale de  $g$  par rapport à  $\rho$ , nous avons pour  $\theta \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \|\Lambda_k (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x))\| &\leq k_1 \|\tilde{\rho}\| \\ \|\Lambda_k \frac{\partial g}{\partial \rho}(u, \hat{\rho}, \hat{x}) \tilde{\rho}\| &\leq k_2 \|\tilde{\rho}\| \end{aligned}$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes qui ne dépendent pas de  $\theta$ .

Cela mène à

$$\begin{aligned} 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (g^k(u, \hat{\rho}, x) - g^k(u, \rho, x)) \\ - 2\eta^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) \frac{\partial g}{\partial \rho}(u, \hat{\rho}, \hat{x}) \tilde{\rho} &\leq 2c \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \sqrt{V_k} \|\tilde{\rho}\| \\ &\leq c \sqrt{\lambda_{\max}(S)} (V_k + \|\tilde{\rho}\|^2) \end{aligned} \quad (5.42)$$

où  $c$  est une constante tel que  $c = k_1 + k_2$

Utilisant les inégalités (5.41) et (5.42), l'équation (5.36) devient

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -V_k^* + \theta^{\delta_k} \eta^{kT} C_k C_k^T \eta^k - 2\theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} \eta^{kT} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \eta^{kT} C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} \\ &\quad (2n\lambda_k \beta_k \mu_S + \gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)}) \theta^{-\varepsilon} V^* + n\lambda_k \beta_k \gamma \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \theta^{1-\varepsilon} \|\tilde{\rho}\|^2 \\ &\quad + c\sqrt{\lambda_{\max}(S)} (V_k + \|\tilde{\rho}\|^2) \end{aligned} \tag{5.43}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -V^* + \sum_{k=1}^q \left( (2n\lambda_k \beta_k \mu_S + \gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)}) \theta^{-\varepsilon} V^* + n\lambda_k \beta_k \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \gamma \theta^{1-\varepsilon} \|\tilde{\rho}\|^2 \right. \\ &\quad \left. + c\sqrt{\lambda_{\max}(S)} (V_k + \|\tilde{\rho}\|^2) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^q \left( \theta^{\delta_k} \eta^{kT} C_k C_k^T \eta^k - 2\theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} \eta^{kT} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \eta^{kT} C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} \right) \\ &\leq -V^* + (2n^2 \beta \mu_S + q\gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)}) \theta^{-\varepsilon} V^* + c\sqrt{\lambda_{\max}(S)} V + n^2 \beta \gamma \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \theta^{1-\varepsilon} \|\tilde{\rho}\|^2 \\ &\quad + qc\sqrt{\lambda_{\max}(S)} \|\tilde{\rho}\|^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^q \left( \theta^{\delta_k} \eta^{kT} C_k C_k^T \eta^k - 2\theta^{-\sigma_1^k + \delta_k} \eta^{kT} C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \eta^{kT} C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} \right) \end{aligned} \tag{5.44}$$

où  $\beta = \max\{\beta_k \text{ pour } 1 \leq k \leq q\}$ .

Soit  $\bar{V}(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}^T P^{-1}(t) \tilde{\rho}$ . on a :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}}(t) &= 2\tilde{\rho}^T P^{-1}(t) \dot{\tilde{\rho}} - \tilde{\rho}^T P^{-1}(t) \dot{P}(t) P^{-1}(t) \tilde{\rho} \\ &= -2\tilde{\rho}^T \sum_{k=1}^q \theta^{-\sigma_1^k + \frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_k^T(t) C_k^T K_k (C_k \tilde{x}^k) - \theta \tilde{\rho}^T P^{-1}(t) \bar{\rho} \\ &\quad + \theta \tilde{\rho}^T \left( \sum_{k=1}^q \Upsilon_k^T C_k^T C_k \Upsilon_k \right) \tilde{\rho} \\ &= -\theta \bar{V} - 2 \sum_{k=1}^q \theta^{-\sigma_1^k + \frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} (\Upsilon_k \tilde{\rho})^T C_k^T K_k (\theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k) \\ &\quad + \theta \sum_{k=1}^q (\Upsilon_k \tilde{\rho})^T C_k^T C_k (\Upsilon_k \tilde{\rho}) \end{aligned} \tag{5.45}$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov candidate :  $W(\eta, \tilde{\rho}) = V(\eta) + \bar{V}(\tilde{\rho})$ .

Puis, en utilisant (5.44) et (5.45), nous avons :

$$\begin{aligned}
\dot{W} &\leq -V^* + (2n^2\beta\mu_S + q\gamma\sqrt{\lambda_{\min}(S)})\theta^{-\varepsilon}V^* + c\sqrt{\lambda_{\max}(S)}V \\
&\quad + n^2\beta\gamma\sqrt{\lambda_{\max}(S)}\theta^{1-\varepsilon}\|\tilde{\rho}\|^2 + qc\sqrt{\lambda_{\max}(S)}\|\tilde{\rho}\|^2 \\
&\quad + \sum_{k=1}^q \left( \theta^{\delta_k}\eta^{kT}C_kC_k^T\eta^k - 2\theta^{-\sigma_1^k+\delta_k}\eta^{kT}C_k^TK_k(\theta^{\sigma_1^k}C_k\bar{x}^k) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}\eta^{kT}C_k^TC_k\Upsilon_k\tilde{\rho} \right) \\
&\quad - \theta\bar{V} - 2\sum_{k=1}^q \theta^{-\sigma_1^k+\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}(\Upsilon_k\tilde{\rho})^TC_k^TK_k(\theta^{\sigma_1^k}C_k\bar{x}^k) + \theta\sum_{k=1}^q(\Upsilon_k\tilde{\rho})^TC_k^TC_k(\Upsilon_k\tilde{\rho}) \\
&\leq -V^* + (2n^2\beta\mu_S + q\gamma\sqrt{\lambda_{\min}(S)})\theta^{-\varepsilon}V^* + c\sqrt{\lambda_{\max}(S)}V \\
&\quad - \theta\left(1 - \frac{n^2\beta\gamma\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\theta^{-\varepsilon}\right)\bar{V} + qc\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\bar{V} \\
&\quad + \sum_{k=1}^q \left( \theta^{\delta_k}\eta^{kT}C_kC_k^T\eta^k - 2\theta^{-\sigma_1^k+\delta_k}\eta^{kT}C_k^TK_k(\theta^{\sigma_1^k}C_k\bar{x}^k) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}\eta^{kT}C_k^TC_k\Upsilon_k\tilde{\rho} \right) \\
&\quad - 2\sum_{k=1}^q \theta^{-\sigma_1^k+\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}(\Upsilon_k\tilde{\rho})^TC_k^TK_k(\theta^{\sigma_1^k}C_k\bar{x}^k) + \theta\sum_{k=1}^q(\Upsilon_k\tilde{\rho})^TC_k^TC_k(\Upsilon_k\tilde{\rho}) \\
&= -\left(1 - (2n^2\beta\mu_S + q\gamma\sqrt{\lambda_{\min}(S)})\theta^{-\varepsilon}\right)V^* + c\sqrt{\lambda_{\max}(S)}V \\
&\quad - \theta\left(1 - \frac{n^2\beta\gamma\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\theta^{-\varepsilon}\right)\bar{V} + qc\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\bar{V} \\
&\quad + \sum_{k=1}^q \left( \theta^{\delta_k}\eta^{kT}C_kC_k^T\eta^k + \theta(\Upsilon_k\tilde{\rho})^TC_k^TC_k(\Upsilon_k\tilde{\rho}) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}\eta^{kT}C_k^TC_k\Upsilon_k\tilde{\rho} \right) \\
&\quad - 2\sum_{k=1}^q \theta^{-\sigma_1^k+\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}(\Upsilon_k\tilde{\rho})^TC_k^TK_k(\theta^{\sigma_1^k}C_k\bar{x}^k) + \theta^{-\sigma_1^k+\delta_k}\eta^{kT}C_k^TK_k(\theta^{\sigma_1^k}C_k\bar{x}^k) \\
&= -\left(1 - (2n^2\beta\mu_S + q\gamma\sqrt{\lambda_{\min}(S)})\theta^{-\varepsilon}\right)V^* + c\sqrt{\lambda_{\max}(S)}V \\
&\quad - \theta\left(1 - \frac{n^2\beta\gamma\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\theta^{-\varepsilon}\right)\bar{V} + qc\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\bar{V} \\
&\quad + \sum_{k=1}^q \left( \theta^{\delta_k}\eta^{kT}C_kC_k^T\eta^k + \theta(\Upsilon_k\tilde{\rho})^TC_k^TC_k(\Upsilon_k\tilde{\rho}) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}\eta^{kT}C_k^TC_k\Upsilon_k\tilde{\rho} \right) \\
&\quad - 2\sum_{k=1}^q \theta^{-2\sigma_1^k+\delta_k}\left(\theta^{\sigma_1^k}(\eta^k + \theta^{-\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}\Upsilon_k\tilde{\rho})\right)^TC_k^TK_k(\theta^{\sigma_1^k}C_k\bar{x}^k) \\
&= -\left(1 - (2n^2\beta\mu_S + q\gamma\sqrt{\lambda_{\min}(S)})\theta^{-\varepsilon}\right)V^* + c\sqrt{\lambda_{\max}(S)}V \\
&\quad - \theta\left(1 - \frac{n^2\beta\gamma\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\theta^{-\varepsilon}\right)\bar{V} + qc\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\bar{V} \\
&\quad + \sum_{k=1}^q \left( \theta^{\delta_k}\eta^{kT}C_kC_k^T\eta^k + \theta(\Upsilon_k\tilde{\rho})^TC_k^TC_k(\Upsilon_k\tilde{\rho}) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}\eta^{kT}C_k^TC_k\Upsilon_k\tilde{\rho} \right) \\
&\quad - 2\sum_{k=1}^q \theta^{-2\sigma_1^k+\delta_k}\left(\theta^{\sigma_1^k}(\eta^k + \theta^{-\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}\Upsilon_k\tilde{\rho})\right)^TC_k^TK_k(\theta^{\sigma_1^k}C_k\bar{x}^k) \\
&= -\left(1 - (2n^2\beta\mu_S + q\gamma\sqrt{\lambda_{\min}(S)})\theta^{-\varepsilon}\right)V^* + c\sqrt{\lambda_{\max}(S)}V \\
&\quad - \theta\left(1 - \frac{n^2\beta\gamma\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\theta^{-\varepsilon}\right)\bar{V} + qc\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}\bar{V} \\
&\quad + \sum_{k=1}^q \left( \theta^{\delta_k}\eta^{kT}C_kC_k^T\eta^k + \theta(\Upsilon_k\tilde{\rho})^TC_k^TC_k(\Upsilon_k\tilde{\rho}) + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}\eta^{kT}C_k^TC_k\Upsilon_k\tilde{\rho} \right) \\
&\quad - 2\sum_{k=1}^q \theta^{-2\sigma_1^k+\delta_k}\left(\theta^{\sigma_1^k}(\eta^k + \theta^{-\frac{\delta_k}{2}+\frac{1}{2}}\Upsilon_k\tilde{\rho})\right)^TC_k^TK_k(\theta^{\sigma_1^k}C_k\bar{x}^k)
\end{aligned} \tag{5.46}$$

L'utilisation de la propriété (5.20) satisfaite par la fonction  $K_k$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
2\theta^{-2\sigma_1^k + \delta_k} \left( \theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x} \right)^T K_k \left( \theta^{\sigma_1^k} C_k \bar{x}^k \right) &\geq \theta^{-2\sigma_1^k + \delta_k} \theta^{2\sigma_1^k} \bar{x}^{kT} C_k^T C_k \bar{x}^k \\
&= \theta^{\delta_k} \left( \eta^k + \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_k \tilde{\rho} \right)^T C_k^T C_k \left( \eta^k + \theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \Upsilon_k \tilde{\rho} \right) \\
&= \theta^{\delta_k} \left( \eta^{kT} C_k^T C_k \eta^k + 2\theta^{-\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \eta^{kT} C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} \right. \\
&\quad \left. + \theta^{-\delta_k + 1} (\Upsilon_k \tilde{\rho})^T C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} \right) \\
&= \theta^{\delta_k} \eta^{kT} C_k^T C_k \eta^k + 2\theta^{\frac{\delta_k}{2} + \frac{1}{2}} \eta^{kT} C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} \\
&\quad + \theta (\Upsilon_k \tilde{\rho})^T C_k^T C_k \Upsilon_k \tilde{\rho} \tag{5.47}
\end{aligned}$$

En tenant compte de (5.47), l'équation (5.46) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{W} &\leq - \left( 1 - (2n^2 \beta \mu_S + q\gamma) \theta^{-\varepsilon} \right) V^* + c \sqrt{\lambda_{\max}(S)} V \\
&\quad - \theta \left( 1 - \frac{n^2 \beta \gamma \sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)} \theta^{-\varepsilon} \right) \bar{V} + qc \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)} \bar{V} \tag{5.48}
\end{aligned}$$

Maintenant , il suffit de choisir  $\theta$  suffisamment grand tel que  $\theta \geq 1$  et

$$1 - (2n^2 \beta \mu_S + q\gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)}) \theta^{-\varepsilon} > \frac{1}{2} \text{ et } 1 - \frac{n^2 \beta \gamma \sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)} \theta^{-\varepsilon} > \frac{1}{2}$$

c'est à dire :

$$\theta = \max \left( 1, (4n^2 \beta \mu_S + q\gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)})^{\frac{1}{\varepsilon}}, \left( \frac{2n^2 \beta \gamma \sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) \tag{5.49}$$

En utilisant l'inéquation (5.40), celle (5.48) devient :

$$\begin{aligned}
\dot{W} &\leq -\theta \left( 1 - (2n^2 \beta \mu_S + q\gamma \sqrt{\lambda_{\min}(S)}) \theta^{-\varepsilon} \right) V + c \sqrt{\lambda_{\max}(S)} V \\
&\quad - \theta \left( 1 - \frac{n^2 \beta \gamma \sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)} \theta^{-\varepsilon} \right) \bar{V} + qc \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)} \bar{V} \\
&\leq -\frac{1}{2} \theta V + c \sqrt{\lambda_{\max}(S)} V - \frac{1}{2} \theta \bar{V} + qc \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)} \bar{V} \\
&= -\frac{\theta - 2c \sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{2} V - \frac{\theta - 2qc \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}}{2} \bar{V} \tag{5.50}
\end{aligned}$$

Encore une fois, il suffit de choisir  $\theta$  suffisamment grand de telle sorte que la condition (5.49) est satisfaite avec

$$\frac{\theta - 2c \sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{2} > \frac{\theta}{4} \text{ et } \frac{\theta - 2qc \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)}}{2} > \frac{\theta}{4} \tag{5.51}$$

c'est à dire

$$\theta = \max \left( 1, (4n^2\beta\mu_S + q\gamma\sqrt{\lambda_{\min}(S)})^{\frac{1}{\varepsilon}}, \left( \frac{2n^2\beta\mu_S\gamma}{\lambda_{\max}(P)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, 2c\sqrt{\lambda_{\max}(S)}, 2qc\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\lambda_{\max}(P)} \right)$$

Par conséquent (5.50) devient

$$\dot{W} \leq -\frac{\theta}{4}W \quad (5.52)$$

Ceci termine la démonstration.

## 5.3 Exemple

Dans cette section, un exemple est fourni pour illustrer la théorie décrite ci-dessus et de montrer l'efficacité de la synthèse de l'observateur proposé. En effet, considérons le système non linéaire multi-sortie suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 - u\frac{\rho_1}{1 + \rho_2^2 x_2^2} - x_1^3 \\ \dot{x}_3 = x_5 + u\rho_1^2(x_3 + x_4) - x_3^3 \\ \dot{x}_5 = -x_5 + u(x_5 + x_6) + ux_8 \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad (5.53)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_4 - u\rho_1\rho_2 - x_2^3 \\ \dot{x}_4 = x_6 + u\rho_2^2(x_3 - x_4) - x_4^3 \\ \dot{x}_6 = -u(x_5 - x_6 + x_7) \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (5.54)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_7 = x_8 + u(x_5 + x_6) - \rho_3^3 x_7 - x_7 \\ \dot{x}_8 = u\rho_3(x_5 + x_6) - \rho_1\rho_2 x_8 \\ y_3 = x_7 \end{cases} \quad (5.55)$$

Il est facile de voir que le système complet composé par les trois blocs (5.53), (5.54) et (5.55) n'est pas en forme (5.1) puisque la deuxième équation du deuxième bloc dépend vraiment du deuxième composant du premier bloc et vice versa. Laissez-nous effectuer un simple réarrangement en regroupant les deux premières sorties  $x_1$  et  $x_2$ . En effet,

$x_1^1 = \begin{pmatrix} x_{1,1}^1 = x_1 \\ x_{1,2}^1 = x_2 \end{pmatrix}, x_2^1 = \begin{pmatrix} x_{2,1}^1 = x_3 \\ x_{2,2}^1 = x_4 \end{pmatrix}, x_3^1 = \begin{pmatrix} x_{3,1}^1 = x_5 \\ x_{3,2}^1 = x_6 \end{pmatrix}, x^1 = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 = x_7 \\ x_2^2 = x_8 \end{pmatrix}$ . En utilisant ces notations, les systèmes (5.53)-(5.54)-(5.55) peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_2^1 - \begin{pmatrix} u \frac{\rho_1}{1 + \rho_2^2 x_2^2} + (x_{1,1}^1)^3 \\ u \rho_1 \rho_2 + (x_{1,2}^1)^3 \end{pmatrix} \\ \dot{x}_2^1 = x_3^1 + \begin{pmatrix} u \rho_1^2 (x_{2,1}^1 + x_{2,2}^1) - (x_{2,1}^1)^3 \\ u \rho_2^2 (x_{2,1}^1 - x_{2,2}^1) - (x_{2,2}^1)^3 \end{pmatrix} \\ \dot{x}_3^1 = \begin{pmatrix} -x_{3,1}^1 + u(x_{3,1}^1 + x_{3,2}^1 + x_2^2) \\ -u(x_{3,1}^1 - x_{3,2}^1 + x_1^2) \end{pmatrix} \\ \bar{y}_1 = x_1^1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.56)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2 = x_2^2 + u(x_{3,1}^1 + x_{3,2}^1) - \rho_3^3 u - x_1^2 \\ \dot{x}_2^2 = u \rho_3 (x_{3,1}^1 + x_{3,2}^1) - \rho_1 \rho_2 x_2^2 \\ \bar{y}_2 = x_1^2 \end{cases} \quad (5.57)$$

Il est clair dans la forme du système (5.1) avec  $q = 2$ , que le vecteur de sortie  $y = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$ ,  $p_1 = 2$  et  $p_2 = 1$ .

Nous remarquons que le système (5.56) - (5.57) implique trois paramètres inconnus  $\rho_1, \rho_2$  et  $\rho_3$  qui doivent être estimés. Les deux premiers,  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , interviennent dans les deux blocs tandis que le troisième paramètre  $\rho_3$  apparaît dans le deuxième bloc seulement.

Un observateur de type (5.27) a été synthétisé pour l'estimation simultanée des états et du vecteur des paramètres  $\rho_i$ . Dans cet exemple, on peut vérifier que les différents paramètres introduits dans les sections précédentes sont comme suit :

$$q = 2, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \delta_1 = 2^{q-1}(\lambda_2 - \frac{3}{2}) = 1, \delta_2 = \delta_q = 1$$

$$\sigma_1^1 = 0, \sigma_1^2 = (\lambda_1 - 1)\delta_1 - (\lambda_2 - 1)\delta_2 + (1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

Tous les états du modèle ont été initialiser à la valeur 1. En ce qui concerne l'observateur, les estimations de sortie,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_7$  ont été initialiser avec leur valeur réelle, soit 1. Les estimations initiales sur les états non mesurés ont été arbitrairement fixés à zéro. Les valeurs des paramètres utilisés dans la simulation du modèle sont  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 2$  et  $\rho_3 = 4$ . Les estimations initiales de ces paramètres ont également été fixées arbitrairement à zéro. L'expression de l'entrée  $u$  utilisé dans la simulation est de  $u = \sin(13t) + \sin(19t)$ .

Dans ce qui suit, on doit donner des résultats de simulation obtenus avec les fonctions de synthèse de l'observateur spécialisées comme  $k_k(\tilde{y}_k) = \tilde{y}_k$ . En fait, de nombreuses autres simulations ont été effectuées avec d'autres expressions satisfaisant la propriété (5.20) et les résultats obtenus étaient très similaires à ceux donnés ci-après. En fait et comme mentionné dans (Farza *et al.* [2009a]), du point de vue synthèse de l'observateur, l'introduction des fonctions de synthèses  $k_k$  permet de montrer clairement que les observateurs de mode glissant appartiennent à la classe des observateurs à grand gain avec une spécification particulière de cette fonction.

Avant l'utilisation par l'observateur, chaque sortie  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  a été corrompue par un bruit additif Gaussien avec valeur moyenne nulle et une variance égale à  $1.0e^{-3}$ ,  $5.0e^{-3}$  et 0,1, respectivement. Les sorties bruyantes obtenues sont présentées dans la figure (5.1).

Le réglage du paramètre de synthèse  $\theta$  est effectué en utilisant une méthode empirique (essai-erreur) de manière à satisfaire la propriété bien connue liée à son choix : un tel choix est un compromis entre la convergence rapide de l'observateur, obtenue grâce à des valeurs relativement élevées de  $\theta$ , et un bon comportement en ce qui concerne le bruit de mesure qui est obtenu lorsque les valeurs de  $\theta$  sont choisies relativement faibles.

L'estimation des paramètres inconnus  $\rho_i, i = 1, 2, et 3$  est illustrée dans la figure (5.2). L'estimation est obtenue avec trois valeurs de  $\theta$  qui sont  $\theta = 5$ ,  $\theta = 10$  et  $\theta = 15$ , respectivement. Bien que l'on puisse considérer tous ces résultats sont satisfaisantes, ceux obtenus avec le gain  $\theta = 10$  sont un peu préférables, puisqu'ils constituent un bon compromis entre la convergence rapide (obtenu avec la valeur  $\theta = 15$ ) et un bon



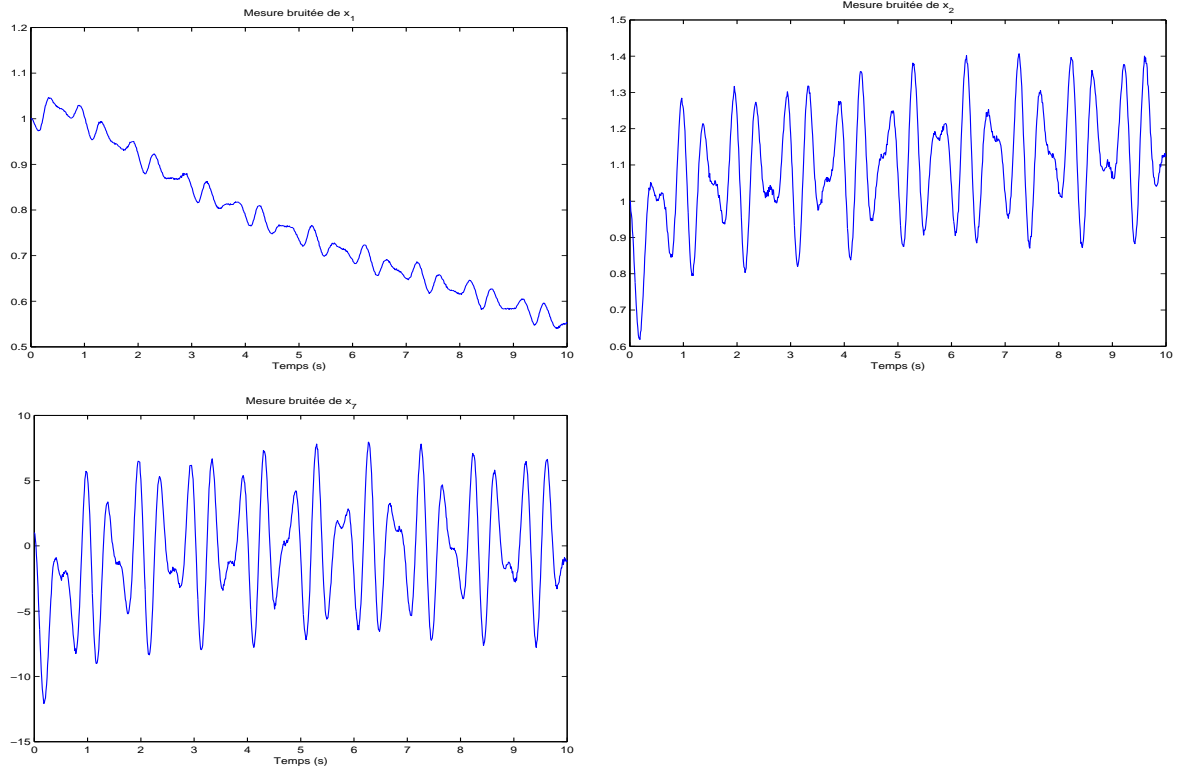


Figure 5.1: Mesures bruitées des sorties

comportement en ce qui concerne le bruit de mesure (obtenu avec la valeur  $\theta = 5$ ).

Afin d'éviter la redondance de courbes, nous donnons seulement les estimations d'état obtenues avec  $\theta = 10$ . Ces estimations sont présentées dans la figure (5.3) où ils sont comparés avec leurs valeurs réelles issues de la simulation du modèle.

## 5.4 Conclusion

Un observateur adaptatif à grand gain pour une classe de systèmes non linéaires MIMO a été présenté. L'objectif principal est d'étendre les résultats existants sur la synthèse d'observateur adaptatif pour une classe plus générale de systèmes composés de blocs en cascade avec des interconnexions non trivial. En effet, deux points principaux liés à la classe des systèmes considérés sont à souligner. La première porte sur le fait que la dernière équation différentielle de chaque bloc peut dépendre de tout l'état et donc l'ensemble du système ne suppose pas une structure triangulaire. Le second est lié à la paramétrisation non linéaire qui est assez générale, puisque

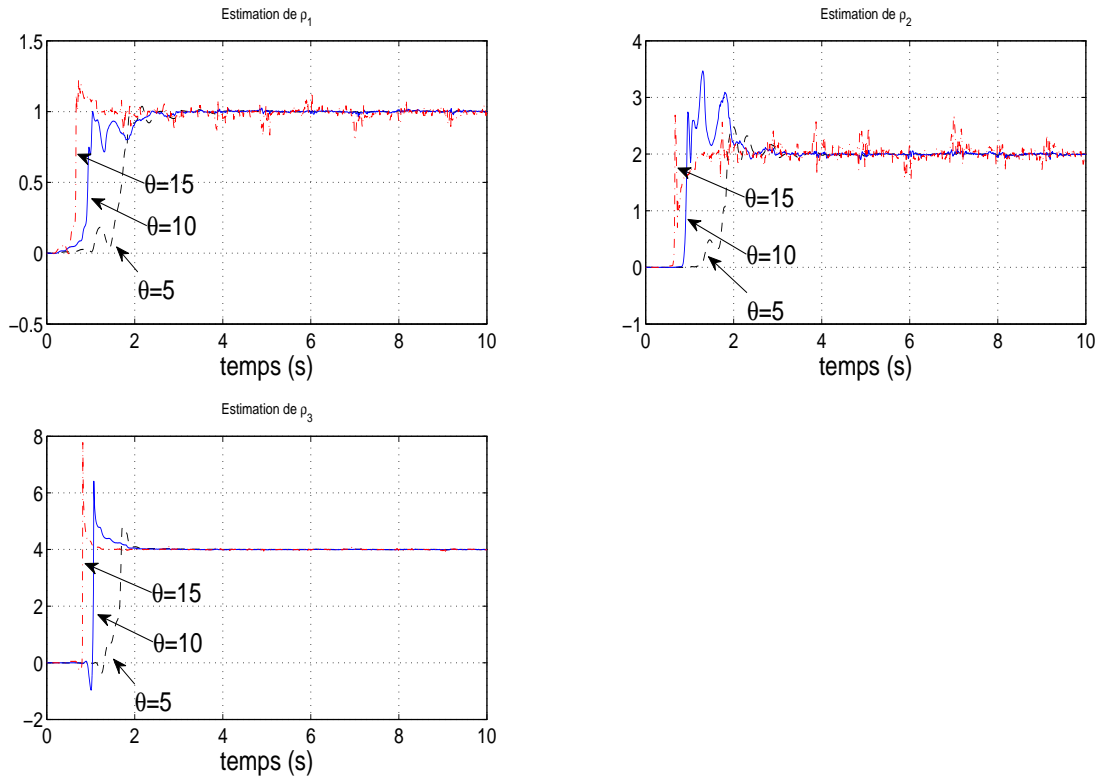


Figure 5.2: Paramètres inconnues estimés

chaque paramètre inconnu n'est pas associé à un seul bloc, mais il peut apparaître dans n'importe quel bloc du système.

D'un point de vue fondamental, nous avons montré que la convergence exponentielle de l'observateur a été garantie sous une condition d'excitation persistante bien définie. Un exemple est donné afin d'illustrer la structure de la classe considérée des systèmes et de montrer l'efficacité de la synthèse de l'observateur proposé.

Soulignons cependant que le problème de la recherche transformations d'état qui apportent des systèmes qui sont observables pour toute entrée dans la forme (5.1) n'a pas été étudié ici et reste un problème ouvert.

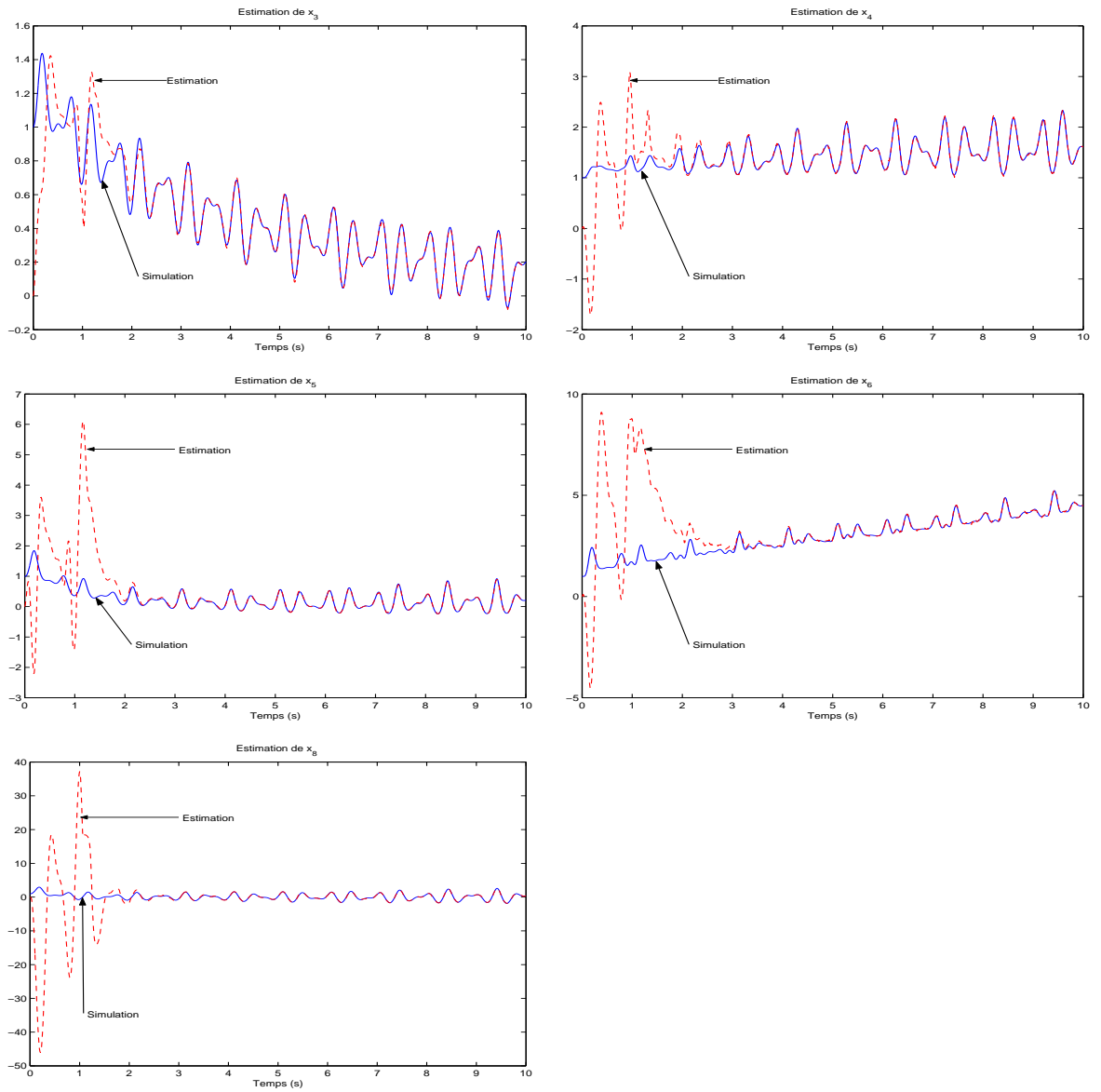


Figure 5.3: Estimation des états non mesurés

# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons présenté plusieurs types d'observateurs pour certaines classes de systèmes non linéaires observables pour toute entrée. Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à une forme canonique caractérisant une large classe de systèmes observables pour toute entrée. La caractéristique principale de cette forme réside dans le fait qu'elle ne possède pas une structure complètement triangulaire et elle inclut les formes canoniques observables existantes. De plus, cette forme renferme des termes variant dans le temps qui sont incertains. La motivation principale derrière la considération de tels termes est de pouvoir utiliser les observateurs proposés lorsque des entrées inconnues sont considérées.

Nous avons proposé pour la forme considérée un observateur d'état de type grand gain dont le gain se règle à travers le choix d'un seul paramètre de synthèse et ce quelque soit la dimension du système. La synthèse de ce gain se fait à travers la résolution d'une équation algébrique de Lyapunov dont la solution a été explicitée.

Le deuxième type d'observateurs proposé dans cette thèse est un observateur à entrées inconnues. Nous avons tout d'abord considéré une classe de systèmes non linéaires observables pour toute entrée et nous avons supposé que certaines variables d'état ont une dynamique inconnue et sont considérées comme étant des entrées inconnues. Sous des hypothèses appropriées garantissant l'observabilité des variables d'état et des entrées inconnues, nous avons exhibé des transformations de coordonnées qui ont mis le système original sous la forme canonique considérée au chapitre

précédent. Ainsi, l'observateur d'état proposé précédemment peut être utilisé pour l'estimation conjointe des variables d'état et des entrées inconnues. Comme tous les observateurs précédents, le réglage de l'observateur proposé se fait à travers le choix d'un seul paramètre quelque soit le nombre des variables d'états et des paramètres inconnus.

Nous travaillons actuellement pour étendre la forme canonique observable de sorte qu'elle puisse caractériser des classes plus larges de systèmes observables pour toute entrée. Un autre axe de recherche sur lequel nous avons entamé des travaux qui consiste à appliquer les observateurs à entrées inconnues et l'observateur adaptatif pour l'estimation conjointe des états et de certains paramètres du moteur asynchrone. On s'intéresse en particulier au cas où les seules mesures disponibles sont celles du courants statoriques et des tensions, c'est-à-dire sans la mesure de la vitesse mécanique.

# Bibliographie

- ARCAK**, M. et **KOKOTOVIĆ**, P. (2001). Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37:1923–1930.
- BHATTACHARYYA**, S. P. (1978). Observer design for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 23:483–484.
- BORNARD**, G. et **HAMMOURI**, H. (1991a). A high gain observer for a class of uniformly observable systems. *Dans Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 122, Brighton, England.
- BORNARD**, G. et **HAMMOURI**, H. (1991b). A high gain observer for a class of uniformly observable systems. *Dans In Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, England.
- BORNARD**, G. et **HAMMOURI**, H. (December 2002). A graph approach to uniform observability of nonlinear multi output systems. *Dans Proc. of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA.
- BOUTAT**, D., **BENALI**, A., **HAMMOURI**, H. et **BUSAWON**, K. (2009). New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs. *Automatica*, 45:2187–2193.
- BOUTAYEB**, M., **DAROUACH**, M. et **RAFARALAHY**, H. (2002). Generalized state-space observers for chaotic synchronization and secure communication. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, 49:345–349.
- BUSAWON**, K., **FARZA**, M. et **HAMMOURI**, H. (1998). Observer design for a special class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 71:405–418.
- CICCARELLA**, G., **MORA**, M. D. et **GERMANI**, A. (1993). A Luenberger-like observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 57:537–556.

- COLON, L.** (1992). *Differentiable Manifolds*. Birkhauser.
- CORLESS, M.** et **TU, J.** (1998). State and Input Estimation for a Class of Uncertain Systems. *Automatica*, 34(6):757–764.
- DAROUACH, M., ZASADZINSKI, M.** et **XU, S.** (1994). Full-Order Observer for Linear Systems with Unknown Inputs. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 39(3):606–609.
- DEZA, F., BUSVELLE, E.** et **GAUTHIER, J.** (1992). Exponentially converging observers for distillation columns and internal stability for the dynamic output feedback. *Chemical Eng. Sci.*, 47:3935–3641.
- DIOP, S.** et **Fliess, M.** (1991a). Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. *Dans Proc. 36th IEEE Conf. Decision Control*, pages 714–719, Brighton.
- DIOP, S.** et **Fliess, M.** (1991b). On nonlinear observability. *Dans Proc. 1st Europ. Control Conf*, pages 152–157, Hermès.
- FARZA, M., M'SAAD, M., MAATOUG, T.** et **KAMOUN, M.** (2009a). Adaptive observer for Nonlinearly Parameterized Class of Nonlinear systems. *Automatica*, 45:2292–2299.
- FARZA, M., M'SAAD, M.** et **ROSSIGNOL, L.** (2004). Observer Design for a class of MIMO nonlinear systems. *Automatica*, 40:135–143.
- FARZA, M., M'SAAD, M.** et **SEKHER, M.** (2005). A set of observers for a class of nonlinear systems. *Dans Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, praha, Czech Republic.
- FARZA, M., M'SAAD, M.** et **TRIKI, M.** (2009b). Adaptive observer for a class of MIMO non triangular uniformly observable nonlinear systems. *Dans In Proc. 6th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, Djerba, Tunisia.
- Fliess, M., JOIN, C.** et **SIRA-RAMÍREZ, H.** (2008). Nonlinear estimation is easy. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 4 : 12-27.

- GAUTHIER, J.** et **BORNARD, G.** (1981). Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 26:922–926.
- GAUTHIER, J., HAMMOURI, H.** et **OTHMAN, S.** (1992). A simple observer for nonlinear systems - Application to bioreactors. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-37:875–880.
- GAUTHIER, J.** et **KUPKA, I.** (1994). Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. Control. Optim.*, 32:975–994.
- GUAN, Y.** et **SAIF, M.** (1991). A Novel Approach to the Design of Unknown Inputs Observers. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 36(5):632–635.
- GUAY, M.** (2002). Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 47:1730–1735.
- HAMMOURI, H.** et **FARZA, M.** (2003). Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. *ESAIM : COCV*, 9:353–370.
- HAMMOURI, H.** et **TMAR, Z.** (2010). Unknown input observer for state affine systems : A necessary and sufficient condition. *Automatica*, 46:271–278.
- HOU, M., BUSAWON, K.** et **SAIF, M.** (2000). Observer Design for a class of MIMO nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 45(7):1350–1355.
- HOU, M.** et **MÜLLER, P. C.** (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-37:871–875.
- HOU, M.** et **PUGH, A. C.** (1999). Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems. *Syst. Contr. Lett.*, 37:1–9.
- JAULIN, L.** (2009). Robust set-membership state estimation ; application to underwater robotics. *Automatica*, 45:2002–2006.
- JOHNSON, C. D.** (1975). On observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs. *International Journal of Control*, 14:825–831.
- KALMAN, R. E.** et **BUKY, R. S.** (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng.*, pages 95–108.



- KAZANTZIS**, N. et **KRAVARIS**, C. (1998). Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34:241–247.
- KRENER**, A. J. et **ISODORI**, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Syst. Contr. Lett.*, 3:47–52.
- KRENER**, A. J. et **RESPONDEK**, W. (1985). Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM J. Contr. Optim.*, 23:197–216.
- KUDVA**, P., **VISWANADHAM**, N. et **RAMAKRISHNA**, A. (1980). Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-25:113–115.
- LIU**, F. (2007). Synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires. *Phd thesis*, Université de Caen/Basse Normandie, France.
- MEDITCH**, J. S. et **HOSTETTER**, G. H. (1974). Observers for systems with unknown and inaccessible inputs. *International Journal of Control*, 19:473–480.
- NIJMEIJER**, H. (1981). Observability of a class of nonlinear systems : A geometric approach. *Ricerche di Automatica*, 12:1–19.
- RAJAMANI**, R. (1998). Observers for Lipschitz Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3):397–401.
- RUDOLPH**, J. et **ZEITZ**, M. (1994). A block triangular nonlinear observer normal form. *Syst. Contr. Lett.*, 23:1–8.
- SHENA**, Y. et **XIA**, X. (2008). Semi-global finite-time observers for nonlinear systems. *Automatica*, 44:3152–3156.
- SHIM**, H. (2000). *A passivity-based nonlinear observer and a semi-global separation principale*. Phd thesis, School of Electrical Engineering, Seoul National University.
- SHIM**, H., **SON**, Y. et **SEO**, J. (2001). Semi-global observer for multi-output nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 42:233–244.
- SOULEIMAN**, I., **GLUMINEAU**, A. et **SCHREIRER**, G. (2003). Direct Transformation of nonlinear systems into state affine MISO form and nonlinear observers design. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 48:2191–2196.

- WANG**, S. H., **DAVISON**, E. J. et **DORATO**, P. (1975). Observing the state of systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-20:716–717.
- X.H.XIA** et **W.B.GAO** (1989). Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM J.Control Optim.*, 27(1):199–216.
- XIONG**, Y. et **SAIF**, M. (2001). Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-46(12):2012–2017.
- XIONG**, Y. et **SAIF**, M. (2003). Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica*, 39:1389–1398.
- YANG**, F. et **WILDE**, R. W. (1988). Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-33:677–681.
- ZHANG**, Q. et **CLAVEL**, A. (2001). Adaptive observer with exponential forgetting factor for linear time-varying systems. *Dans In Proc. 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida.