



**HAL**  
open science

# Synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires

Monia Oueder

► **To cite this version:**

Monia Oueder. Synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires. Automatique. Université de Caen, 2012. Français. NNT: . tel-01061799

**HAL Id: tel-01061799**

**<https://theses.hal.science/tel-01061799>**

Submitted on 8 Sep 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Co-tutelle de thèse

entre

l'Université de Caen Basse-Normandie (*France*)

et

l'Université de Gabès (*Tunisie*)

THÈSE

présentée par

**Monia OUEDER**

et soutenue

le 16 juillet 2012

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

Spécialité : Automatique, robotique

(Arrêté du 07 août 2006)

**TITRE : SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR  
LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES**

**MEMBRES du JURY**

M. Mohamed CHAABANE	Pr. à l'ENI de Sfax (Examineur)
M. Mondher FARZA	Pr. à l'Université de Caen (Directeur de thèse)
M. Ridha BEN ABDENNOUR	Pr. à l'ENI de Gabès (Directeur de thèse)
M. Nabil DERBEL	Pr. à l'ENI de Sfax (Rapporteur)
M. Michel ZASADZINSKI	Pr. à l'IUT Longwy (Rapporteur)
M. Mohamed M'SAAD	Pr. des Universités à l'ENSICAEN (Examineur)

*À l'âme de mon père,  
À ma très chère mère,  
À ma sœur et mes frères,  
À mon mari Ali,  
À tous ceux qui m'aiment et que j'aime,  
Je dédie ce travail.*

# Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse sont effectués en cotutelle au sein de l'unité de recherche *COmmande Numérique des PROCédés Industriels*, **CONPRI** de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès, Tunisie, sous la direction de Monsieur Ridha BEN ABDENNOUR et au laboratoire de *Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation de Caen*, **GREYC** équipe Automatique de l'Université de Caen, France, sous la direction de Monsieur Mohamed M'SAAD. Avant de présenter ces travaux, je tiens à remercier tous ceux et celles qui ont participé à l'élaboration et à la réussite de ma thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur Ridha BEN ABDENNOUR, Professeur à l'ENIG et directeur de l'unité de recherche CONPRI, qui a bien voulu me guider jusqu'au terme de ce travail. Je lui suis reconnaissante pour sa disponibilité, ses précieux conseils et tout le soutien qu'il m'a apporté. Ses compétences et ses discussions enrichissantes ont été un atout indéniable à la réussite de ces travaux.

Mes très sincères remerciements s'adressent à mon directeur de thèse, Monsieur Mondher FARZA, Professeur à l'ENSICaen, pour sa gentillesse, sa disponibilité et sa patience au cours de ces années de thèse. Merci pour la confiance qu'il m'a accordé, pour son vif intérêt pour le bon déroulement de mes séjours à Caen et de l'avancement de mes travaux. Je lui suis reconnaissante pour son soutien humain et moral et ses aides durant ces années de thèse.

Je remercie Monsieur Mohamed CHAABANE, Professeur à l'ENIS, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Mes remerciements à Monsieur Michel ZASADZINSKI, Professeur à l'IUT Longwy et Monsieur Nabil DERBEL, Professeur à l'ENIS, d'avoir pris le temps pour juger ce travail et de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse.

Je remercie très vivement Monsieur Mohamed M'SAAD, Professeur de l'ENSICAen et directeur du GREYC, d'avoir fait partie du jury.

Qu'il me soit permis d'exprimer toute ma connaissance et ma profonde gratitude aux Monsieur Ahmed Said NOURI, Maître de Conférences à l'ENIG, Monsieur Kamel ABDERRAHIM, Maître de Conférences à l'ENIG et Madame Majda LTAIEF, Maître Assistant à l'ENIG pour leur soutien, leur sympathie et leurs encouragements.

Une mention toute spéciale à Monsieur Mohamed MIHOUB pour son amitié, ses conseils et surtout pour son soutien moral et sa sympathie.

Toute ma reconnaissance va à tous mes collègues de l'unité CONPRI, l'unité MACS et mes amis de l'ENIG.

Je remercie aussi l'ensemble de mes collègues à l'ISSIG pour leur soutien et leur conseils.

Je n'oublie pas de remercier tous les membres de GREYC particulièrement mes amis Abdou, Amine, Dalal et Nicole pour leur sympathie et leur gentillesse tout au long de mes séjours à Caen.

Enfin, je remercie tout spécialement ma famille, ma mère, ma sœur et mes deux frères pour leur aide et leur tendresse au cours de ces longues années d'étude. Un grand Merci pour mon fiancé et récemment mon mari pour son soutien, sa compréhension et sa patience indéterminés.

# Liste de Publications de Monia OUEDER

## Articles publiés dans des revues internationales avec comité de lecture

1. M. Farza, M. Oueder, R. Ben Abdennour & M. M'Saad, "High gain observer with updated gain for a class of MIMO uniformly observable nonlinear systems", *International Journal of Control - IJC*, Vol. 84, Issue 2, pp. 270–280, 2011.
2. M. Oueder, M. Mihoub, M. Farza & R. Ben Abdennour, "Discrete-time fuzzy high gain observer : A real time application on a chemical reactor", *International Review of Automatic Control, IREACO*, Vol. 4, N°3, pp. 488–495, 2011.
3. M. Oueder, M. Farza, R. Ben Abdennour & M. M'Saad, "High gain observer with updated gain for a class of MIMO non-triangular systems", *Systems and Control Letters*, vol. 61, pp. 298–308, 2012.
4. M. Oueder, M. Mihoub, R. Ben Abdennour & M. Farza, "Discrete fuzzy high gain observer for a class of nonlinear systems", *Transactions on Systems, Signals and Devices, TSSD* (under press).

## Conférences internationales avec comité de lecture

1. M. Oueder, M. Farza, R. Ben Abdennour & M. M'Saad, "A dynamic high gain observer for a class of MIMO non triangular systems", *International Federation of Automation Control -IFAC'11*.
2. M. Oueder, M. Mihoub, R. Ben Abdennour & M. Farza, "Discrete fuzzy high gain observer for a class of nonlinear systems", *International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices - SSD'11*.
3. M. Oueder, M. Farza & R. Ben Abdennour , "Fuzzy high gain observer" , *International Conference on Electrical Systems and Automatic Control - JTEA'10*.
4. M. Farza, M. M'Saad, M.Oueder, L. Sellami & R. Ben Abdennour, "Dynamic high gain observer design", *International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices - SSD'09*.

# Notations

$R$	ensemble des nombres réels.
$R^+$	ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$R^n$	espace vectoriel de dimension $n$ construit sur le corps des réels.
$R^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$ .
$I_n$	matrice d'identité de dimension $n \times n$ (appropriées).
$0_{n \times m}$	matrice nulle de dimension $n \times m$ (appropriées).
$t$	variable temporelle.
$\theta(t)$	paramètre de réglage dynamique du gain de l'observateur.
$\lambda_{\min}(\cdot)$	la plus petite valeur propre de la matrice carrée $(\cdot)$ .
$\lambda_{\max}(\cdot)$	la plus grande valeur propre de la matrice carrée $(\cdot)$ .

## Acronymes

EKF	Filtre de Kalman Etendu.
LMI	Inégalités Matricielles Linéaires.
MIMO	Entrées multiples sorties multiples (Multiple Input Multiple Output).
SBPA	Séquence Binaire Pseudo-Aléatoires.
SDP	Semi Définie Positive.
SNL	Système non linéaire (Non Linear System).



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Sur l'observabilité et les observateurs des systèmes non linéaires</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	7
2.2	Notions d'observabilité . . . . .	8
2.2.1	Principe de l'estimation d'état . . . . .	8
2.2.2	Notion d'observabilité des systèmes non linéaires . . . . .	10
2.2.2.1	Observabilité . . . . .	10
2.2.2.2	Observabilité pour toute entrée . . . . .	12
2.3	Synthèse d'observateur à grand gain pour des classes des systèmes non linéaires multivariables . . . . .	13
2.3.1	Forme canonique d'observabilité des systèmes non linéaires multivariables . . . . .	13
2.3.1.1	Equation de l'observateur . . . . .	15
2.3.1.2	Analyse de la convergence . . . . .	16
2.3.2	Classe générale de systèmes non linéaires multivariables uniformément observable . . . . .	17
2.3.2.1	Formulation du problème . . . . .	17
2.3.2.2	Equation de l'observateur . . . . .	19
2.4	Limites de l'observateur à grand gain classique : Exemples illustratifs	20
2.4.1	Exemple 1 . . . . .	20
2.4.2	Exemple 2 . . . . .	24
2.5	Conclusion . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Synthèse d'un observateur à grand gain dynamique</b>	<b>27</b>
3.1	Introduction . . . . .	27

---

3.2	Synthèse de l'observateur à grand gain dynamique pour une classe des systèmes multivariables . . . . .	27
3.2.1	Formulation du problème . . . . .	27
3.2.1.1	La classe des systèmes . . . . .	28
3.2.1.2	Etude préliminaire et notations . . . . .	29
3.2.2	Synthèse de l'observateur pour la classe des systèmes non linéaires considérée . . . . .	30
3.2.2.1	Equations de l'observateur . . . . .	30
3.2.2.2	Analyse de la convergence . . . . .	31
3.2.2.3	Réglage des paramètres de l'observateur . . . . .	39
3.2.3	Exemple de Simulation . . . . .	40
3.3	Synthèse de l'observateur à gain dynamique pour une classe générale des systèmes non linéaires . . . . .	44
3.3.1	Motivation . . . . .	44
3.3.1.1	Etude préliminaire et notations . . . . .	46
3.3.2	Synthèse de l'observateur . . . . .	48
3.3.2.1	Equations de l'observateur . . . . .	48
3.3.2.2	Preuve de la convergence . . . . .	49
3.3.3	Exemple de simulation . . . . .	58
3.4	Conclusion . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Synthèse d'un observateur à grand gain flou</b>	<b>63</b>
4.1	Motivation . . . . .	63
4.2	Synthèse d'un observateur à grand gain flou . . . . .	63
4.2.1	Synthèse d'un superviseur flou . . . . .	64
4.2.1.1	Fuzzification . . . . .	64
4.2.1.2	Inférence floue . . . . .	65
4.2.1.3	Déffuzification . . . . .	67
4.2.2	Exemple Illustratif . . . . .	68
4.3	Discretisation de l'observateur à grand gain flou . . . . .	71
4.3.1	Formulation du problème . . . . .	71
4.3.2	La forme predictive de l'observateur à grand gain discret . . . . .	71
4.3.3	Les limites de l'observateur à grand gain discret classique . . . . .	73

---

4.3.4	Résultats de simulation . . . . .	75
4.4	Un observateur à grand gain flou : Validation expérimentale sur un réacteur chimique . . . . .	78
4.4.1	Présentation du procédé . . . . .	78
4.4.2	Un modèle de représentation pour le réacteur . . . . .	80
4.4.3	Application de l'observateur à grand gain flou . . . . .	82
4.5	Conclusion . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Contribution à la commande des systèmes non linéaires</b>	<b>87</b>
5.1	Introduction . . . . .	87
5.2	Formulation du problème . . . . .	88
5.3	Commande à grand gain avec retour d'état . . . . .	90
5.3.1	Etude préliminaire . . . . .	90
5.3.2	Synthèse de la loi de commande . . . . .	91
5.3.3	Quelques fonctions de synthèse particulières . . . . .	94
5.3.4	Exemple de simulation . . . . .	95
5.3.5	Limites de la commande à grand gain : Exemple illustratif . . . . .	96
5.4	Commande par backstepping . . . . .	98
5.4.1	Historique de la commande par backstepping . . . . .	98
5.4.2	Principe et synthèse de la loi de commande par backstepping avec retour d'état . . . . .	99
5.4.2.1	Principe . . . . .	99
5.4.2.2	Synthèse de la commande par backstepping . . . . .	100
5.4.3	Exemple de simulation . . . . .	102
5.4.4	Incorporation d'une action intégrale . . . . .	104
5.4.5	Exemple d'illustration . . . . .	107
5.5	Conclusion . . . . .	108



# Table des figures

2.1	Schéma fonctionnel d'un observateur d'état. . . . .	9
2.2	Principe d'estimation d'un observateur d'état. . . . .	9
2.3	Evolution de la sortie mesurée du système. . . . .	23
2.4	Evolution de l'estimation de $x^2$ ( $\theta$ relativement importante). . . . .	24
2.5	Evolution de l'estimation de $x^2$ ( $\theta$ relativement faible). . . . .	24
2.6	Evolution de la sortie mesurée du système. . . . .	25
2.7	Evolution de l'estimation de $x^2$ ( $\theta$ relativement importante). . . . .	26
2.8	Evolution de l'estimation de $x^2$ ( $\theta$ relativement faible). . . . .	26
3.1	Evolution de la sortie bruitée. . . . .	42
3.2	Evolution de $x^2(t)$ estimée par un observateur à grand gain dynamique. . . . .	42
3.3	Evolution du paramètre $\theta$ de l'observateur à grand gain dynamique. . . . .	43
3.4	Evolution de $x^2(t)$ estimée (observateur à grand gain classique). . . . .	44
3.5	Evolution des sorties bruitées $y_1(t)$ et $y_2(t)$ . . . . .	60
3.6	Evolution des estimations des différentes variables d'état manquantes en utilisant l'observateur à grand gain dynamique. . . . .	61
3.7	Evolution du paramètre de synthèse $\theta(t)$ . . . . .	61
3.8	Evolution des estimations des différentes variables d'état manquantes en utilisant l'observateur à grand gain classique pour différentes va- leurs de $\theta$ . . . . .	62
4.1	Le superviseur flou. . . . .	64
4.2	Fonctions d'appartenances relatives aux entrées du superviseur. . . . .	65
4.3	Fonctions d'appartenances relatives au paramètre de synthèse norma- lisé. . . . .	66
4.4	La structure d'un observateur à grand gain incluant la logique floue. . . . .	68
4.5	L'évolution de la sortie mesurée. . . . .	69
4.6	L'évolution des variables d'état estimée et réelle (Observateur à grand gain classique). . . . .	69
4.7	L'évolution des variables d'état estimée et réelle (Observateur à grand gain flou). . . . .	70
4.8	L'évolution du gain de l'observateur. . . . .	70
4.9	L'évolution de la sortie bruitée du système considéré. . . . .	73

---

4.10	L'évolution de l'estimation de $x^2(k)$ , ( $\theta$ relativement faible).	74
4.11	L'évolution de l'estimation de $x^2(k)$ , ( $\theta$ relativement importante).	75
4.12	L'évolution de la sortie mesurée.	76
4.13	L'évolution de l'estimation de $x^2(k)$ (Superviseur flou en ligne).	76
4.14	L'évolution de l'estimation de $x^2(k)$ (Superviseur flou hors ligne).	77
4.15	L'évolution de la sortie du superviseur (gain flou).	77
4.16	Le réacteur chimique.	78
4.17	Schéma synoptique du réacteur.	79
4.18	Entrée d'excitation.	80
4.19	Mesures de l'état (réponse à la SBPA d'identification).	81
4.20	Sorties réelle et prédite du réacteur (Validation expérimentale).	82
4.21	Erreur relative (validation expérimentale).	82
4.22	Evolution de $x^1(k)$ et de son estimée (Observateur à grand gain flou).	83
4.23	Evolution de $x^2(k)$ et son estimée (Observateur à grand gain flou).	83
4.24	Evolution de l'erreur relative d'estimation de $x^1(k)$ (Observateur à grand gain flou).	84
4.25	Evolution de l'erreur relative d'estimation de $x^2(k)$ (Observateur à grand gain flou).	84
4.26	Evolution du paramètre de synthèse (Supervision floue en ligne).	85
5.1	Evolution de l'entrée du filtre de troisième ordre.	95
5.2	Evolution de la commande, de la sortie et de l'erreur de poursuite (Commande à grand gain).	96
5.3	Evolution de la sortie et de la commande pour différentes valeurs de $\lambda$ .	97
5.4	Evolution de la sortie, de l'erreur de poursuite et de la commande ( $\lambda = 5$ et $k_c = 70$ ).	98
5.5	Evolution de la commande, de la sortie et de l'erreur de poursuite (Commande par 'backstepping').	103
5.6	Evolution de la commande, de la sortie et de l'erreur de poursuite du système perturbé (Commande par 'backstepping').	104
5.7	Evolution de la commande, de la sortie et de l'erreur de poursuite du système perturbé (Action intégrale incorporée).	108

# Chapitre 1

## Introduction générale

Une bonne maîtrise d'un procédé passe en général par une information fiable sur ce dernier [91]. Alors, la connaissance de l'état à chaque instant est indispensable pour, par exemple, la synthèse d'une commande, le diagnostic et la détection des défauts des procédés industriels. Par ailleurs, en considérant des contraintes économiques et technologiques ou même de faisabilité, on a intérêt à minimiser le nombre de capteurs pour réduire le coût d'instrumentation et de maintenance. L'exploitation des capteurs logiciels pour la conduite des procédés industriels se trouve, dans ces conditions, nécessaire.

Un capteur logiciel peut être décrit comme étant l'association d'un capteur physique à un algorithme (appelé observateur) permettant de délivrer, à partir des mesures fournies par le capteur physique et des entrées appliquées au système, des estimations en ligne des différentes variables d'état.

La synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires est complètement caractérisée par des conditions nécessaires et suffisantes bien établies. En effet, les premiers travaux sur les observateurs, publiés vers les années soixante par Kalman [47] et Luenberger [59], s'intéressent aux systèmes linéaires invariants au cours de temps. Cependant, la plupart des procédés industriels possèdent des comportements non linéaires ce qui a incité les chercheurs à développer des observateurs non linéaires. Jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une méthode générale qui caractérise la synthèse des observateurs non linéaires, mais on parle des différents algorithmes présents dans la littérature. D'une façon générale, ces algorithmes peuvent être classés en quatre catégories.

La première catégorie se base sur le filtre de Kalman étendu qui a connu un grand succès qui s'explique par sa simplicité d'implémentation en dépit de la complexité des systèmes non linéaires. Cependant, ce filtre souffre d'un majeur inconvénient en terme d'absence d'une preuve complète de sa convergence [75].

La deuxième approche consiste à linéariser la dynamique des erreurs afin de mettre ce système sous une forme où les non linéarités dépendent uniquement des entrées et des sorties mesurables [8, 34, 42, 50, 53, 54, 74, 83, 88, 90]. Mais, la mise sous une

telle forme nécessite des transformations d'état difficiles, ce qui rend l'application de cette approche restreinte à une classe limitée des systèmes non linéaires.

La troisième approche se base sur l'exploitation des techniques des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) en combinaison avec les équations de Lyapunov ou de Ricatti [13, 85]. Plus précisément, le gain de l'observateur est obtenu en résolvant un problème des inégalités matricielles et par suite l'observateur existe si ce système des LMI(s) admet une solution [18, 76]. Comme il est mentionné dans [2], la faisabilité d'un tel problème des LMI(s) est considérée généralement non connu a priori.

La quatrième approche est basée sur la conception des observateurs pour une classe canonique observable des systèmes non linéaires. Les premières contributions sont simultanément publiées dans [11] et [32]. Dans [32], les auteurs ont donné une condition nécessaire et suffisante qui caractérise la classe des systèmes affines non linéaires mono-entrée, mono-sortie observables pour toute entrée. On montre que cette classe des systèmes est difféomorphique à la forme canonique qui se compose d'une dynamique linéaire fixe et d'une dynamique non linéaire triangulaire. En utilisant cette structure, les auteurs ont proposé un observateur à grand gain synthétisé sous une hypothèse de Lipschitz sur la dynamique non linéaire. Le gain de l'observateur proposé est issu de la résolution d'une équation algébrique de Lyapunov qui peut être calculée explicitement. Plusieurs généralisations de ce résultat aux systèmes à plusieurs entrées sont proposées dans [7, 22, 33, 39, 41, 77, 81].

Il existe, dans la littérature, d'autres approches qui n'appartiennent pas à ces quatre catégories et qu'on peut les trouver dans les travaux de Fliess et Jaulin [30, 44].

La principale caractéristique de l'observateur à grand gain, proposé dans [32], est sa simplicité d'implémentation puisque l'observateur est une copie de la dynamique du système avec un gain dont son expression peut être explicitement calculée. De plus, le réglage de l'observateur peut être achevé via le choix d'un seul paramètre de synthèse. L'efficacité de ce type d'observateurs est prouvée par plusieurs applications industrielles [9, 16, 19, 38]. Cependant, l'observateur à grand gain souffre d'un inconvénient majeur qui se résume dans la détermination de son unique paramètre de synthèse. En effet, quelques essais sont nécessaires pour un choix judicieux d'un gain assurant le compromis entre la vitesse de convergence et la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure.

D'une façon générale, le paramètre de synthèse doit être choisi suffisamment grand à la constante de Lipschitz du système non linéaire. Cependant, cette valeur importante rend les estimés de l'observateur à grand gain fortement bruités. Donc, le choix de paramètre doit assurer un compromis entre la précision de l'estimation et l'insensibilité vis-à-vis de perturbations externes, c'est dans ce cadre se situe les travaux de cette thèse.

Ce rapport de thèse est constitué de six chapitres dont le premier consiste en cette introduction. Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à présenter quelques rappels sur le principe d'observation d'état et la notion d'observabilité des systèmes non

---

linéaires puis, dans la suite, une étude particulière est dédiée à l'observateur à grand gain, l'observateur sujet des travaux de thèse, où on détaille la procédure de sa synthèse pour différentes classes des systèmes non linéaires et on détermine par la suite ses avantages et ses inconvénients.

Dans le troisième chapitre, on propose un nouveau type d'observateurs à grand gain ; à savoir l'observateur à grand gain dynamique. Ce nouveau type d'observateurs dérive de l'observateur à grand gain classique en adoptant un paramètre de synthèse variant au cours de temps. Cette variation obéit à une équation différentielle de type Ricatti qui prend en considération le niveau de bruit et de l'état de la convergence. En tenant compte de ces deux aspects, l'observateur à grand gain dynamique utilise un paramètre de synthèse qui prend constamment des valeurs faibles pour assurer la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure et n'augmente que lorsque un cas de divergence se manifeste. Un exemple illustratif est détaillé pour montrer l'apport en performance de ce nouveau type d'observateurs par rapport à l'observateur à grand gain classique. Les résultats satisfaisants obtenus nous ont incité à étendre les travaux de l'observateur proposé à la classe la plus générale des systèmes non linéaires multi-entrées et multi-sorties uniformément observables. De même, pour cette classe des systèmes, un exemple de simulation est détaillé et qui montre bien le succès de l'observateur à grand gain dynamique à la résolution du compromis entre la rapidité de convergence et la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure.

Le quatrième chapitre présente une contribution à la résolution du compromis duquel souffre l'observateur à grand gain, à savoir le compromis entre la rapidité de convergence et la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure. Dans ce chapitre, on adopte la stratégie d'une supervision floue pour le seul paramètre de synthèse de l'observateur à grand gain. Le superviseur synthétisé prend en compte l'état de convergence ainsi que les niveaux de bruits qui affectent le système non linéaire et fournit en ligne et d'une façon intelligente la valeur du paramètre de synthèse adéquat à la situation rencontrée. Un exemple de simulation et une mise en oeuvre pratique sur un réacteur chimique mettant en évidence les avantages de cette stratégie sont donnés.

On s'intéresse, dans le cinquième chapitre, à exploiter les résultats d'estimation d'état obtenus pour la synthèse d'une commande avec retour d'état pour une classe de systèmes non linéaires uniformément observables et commandables qui permet de résoudre un problème de poursuite d'une trajectoire. Le type de la commande choisie est la commande à grand gain. On distingue deux aspects fondamentaux de cette loi de commande retenue [35]. Le premier aspect concerne la nature grand gain de la loi de commande avec retour d'état. Le second réside dans le gain de la loi de commande qui fait apparaître une fonction de synthèse satisfaisant une condition bien définie. Cette fonction de synthèse conduit à une unification des lois de commande de type grand gain. On retrouve naturellement toutes les lois de commande basées sur la technique des modes glissants ainsi que les versions qui y ont été déduites pour s'affranchir du phénomène de réticence intrinsèque à la fonction

signe. Les performances du système de commande non linéaire sont illustrées via un problème de poursuite d'un système non linéaire. Toutefois, on note l'existence des systèmes non linéaires appartenant à la classe des systèmes considérée mais la commande à grand gain ne réussit pas à leur assurer une poursuite parfaite. Cet échec est dû à la fonction de synthèse qui doit respectée une certaine condition. Cette condition peut être assurée par un choix judicieux des paramètres de synthèse. Malgré que ce choix permet une poursuite parfaite de la trajectoire désirée, il génère des valeurs de la commande très fortes ce qui peut solliciter les actionneurs.

Pour surmonter ce problème, la commande par "backstepping" est adoptée. En effet, cette dernière offre une méthode systématique pour effectuer la conception du contrôleur tout en garantissant la stabilité du couple contrôleur-procédé [72] avec un rejet robuste des perturbations du type échelon via l'incorporation d'une action intégrale dans la synthèse du système de commande avec retour d'état. Les performances du système de commande non linéaire sont illustrées via un problème de poursuite d'un système non linéaire soumis à des perturbations d'état du type échelon. Pour la clarté de l'étude, les systèmes considérés sont sans zéro et la sortie de la loi de commande correspond à la sortie physique du système.

Enfin, une conclusion avec des perspectives sont rapportés au dernier chapitre.

# Chapitre 2

## Sur l'observabilité et les observateurs des systèmes non linéaires

### 2.1 Introduction

La commande d'un procédé nécessite souvent la connaissance complète et à tout instant de ces différentes variables d'état. Compte tenu des contraintes économiques, technologiques et même de faisabilité, il est souvent difficile d'accéder à toutes les variables qui constituent le vecteur d'état. Alors, pour résoudre ce problème, la conception d'un tel système auxiliaire, appelé observateur d'état dont ses entrées sont les entrées et les sorties du système réel et sa sortie est le vecteur d'état estimé, s'avère fort indispensable.

Les premiers travaux sur les observateurs ont été publiés vers les années soixante par Kalman [47, 48] et par suite par Luenberger [59]. Depuis, les chercheurs se sont intéressés à la conception des observateurs d'état pour les systèmes linéaires invariants dans le temps et ceci dans un milieu déterministe ou stochastique.

La non linéarité et la non stationnarité des systèmes industriels ont incité les chercheurs à développer des approches étendues des observateurs linéaires telle que le filtre de Kalman étendu [48]. L'inconvénient majeur de ce type d'observateurs est la difficulté de résoudre l'équation dynamique de Ricatti dont il fait appel ainsi que sa stabilité n'est pas prouvée ce qui rend cette méthode inexploitable.

C'est vers les années quatre vingt que d'autres types d'observateurs d'état pour les systèmes non linéaires ont été proposés [32, 31, 36, 53, 54, 84, 82, 88].

Dans un premier temps, les chercheurs ont proposé la synthèse d'un observateur pour une classe des systèmes non linéaires dont le système d'erreur est linéarisable à l'aide des transformations d'état qui rendent les non linéarités du système dépendantes uniquement des entrées et des sorties mesurables du système [53, 54, 88]. A ce niveau, la transformation non linéaire est souvent difficile et l'application est réservée à une classe réduite des systèmes non linéaires.

Une autre approche est apparue, vers les années quatre-vingt dix, qui consiste à bien exploiter les techniques des inégalités matricielles (LMI : Linear Matrix Inequalities) [2, 76]. Cette méthode consiste à synthétiser le gain de l'observateur en résolvant un système LMIs, c'est le cas par exemple de l'observateur de Luenberger généralisé. Mais, l'inconvénient majeur de cette méthode est la relative difficulté de trouver une solution pour le système LMIs considéré.

Les observateurs à grand gain [32, 36] sont des observateurs non linéaires qui prennent en compte la non stationnarité et la non linéarité des procédés industriels et qui assurent, en même temps, une bonne estimation de l'état réel avec un réglage aisé du vecteur gain [15, 22, 23, 64, 52]. Ils ont été introduits, en premier lieu, par Gauthier et *al.* dans [32]. La caractéristique principale de cet observateur réside dans la facilité de son implementation et de son réglage facile assuré à l'aide d'un seul paramètre de synthèse.

Dans ce chapitre, on présente un ensemble des définitions et des outils de base concernant la théorie de l'observation non linéaire. Contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires est liée aux entrées et aux conditions initiales. Les travaux de cette thèse portera sur l'observateur à grand gain, c'est pour cela, dans une deuxième partie, la synthèse de ce type des observateurs est détaillée pour différentes classes des systèmes non linéaires.

## 2.2 Notions d'observabilité

Cette section s'intéresse à la présentation du principe d'estimation d'état et quelques définitions sur la notion d'observabilité des systèmes dynamiques non linéaires.

### 2.2.1 Principe de l'estimation d'état

Un observateur ou reconstituteur d'état est un capteur logiciel permettant la reconstruction des variables d'état internes d'un système à partir des entrées et des sorties du système réel. Alors, l'observateur ou l'estimateur d'état a pour entrées les entrées et les sorties du système réel et pour sorties le vecteur d'état estimé. Le schéma fonctionnel d'un observateur d'état est présenté par la figure 2.1.

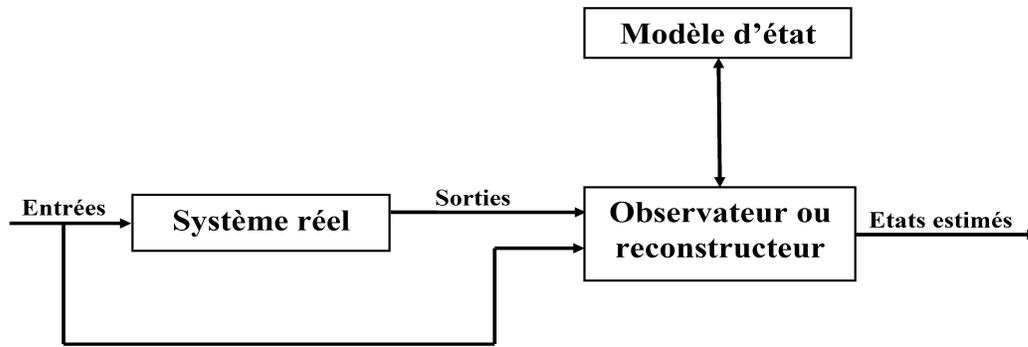


Figure 2.1: Schéma fonctionnel d'un observateur d'état.

Pour un système présenté par le système des équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

Un observateur d'état est présentée sur la figure 2.2.

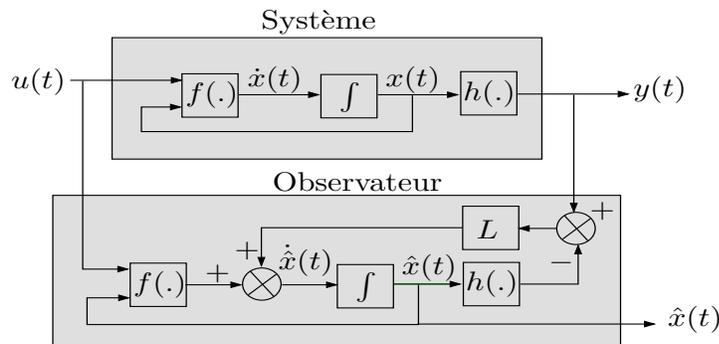


Figure 2.2: Principe d'estimation d'un observateur d'état.

Cette structure fait apparaître d'abord la présence d'un estimateur d'état fonctionnant en boucle ouverte caractérisé par la même dynamique que celle du système. La dynamique désirée en boucle fermée par cet observateur est obtenue par l'introduction d'un vecteur (ou matrice dans le cas multivariable) des gains  $L$ .

Pour un système non linéaire défini par la relation (2.1), l'observateur d'état s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t)) \end{cases}$$

Avant d'entamer la procédure de conception d'un observateur pour un système dynamique, il est important et nécessaire de s'assurer que l'état peut être estimé à partir des informations sur l'entrée et la sortie. C'est en d'autres termes, s'assurer que le système est observable.

## 2.2.2 Notion d'observabilité des systèmes non linéaires

L'observabilité d'un système assure la reconstruction de l'état initial à partir de la seule connaissance des entrées et des sorties disponibles sur un intervalle de temps.

*Un système est dit observable si à partir des mesures des entrées et de sorties on peut reconstruire l'état initial du système.*

### 2.2.2.1 Observabilité

Pour les systèmes non linéaires, contrairement aux systèmes linéaires, il n'existe pas de définition universelle pour l'observabilité. Mais, on définit des types d'observabilité correspondant à des approches locales ou globales, dépendant des entrées ou non [10].

Dans ce qui suit, les différentes définitions d'observabilité seront données en considérant le système non linéaire décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) = (h^1(x(t)), h^2(x(t)), \dots, h^p(x(t)))^T \end{cases} \quad (2.2)$$

avec  $x(t) \in R^n$  est l'état,  $y(t) \in R^p$  est la sortie et  $f$  et  $h$  sont des fonctions analytiques.

L'observabilité est basée sur la possibilité de différencier deux conditions initiales distinctes. On parlera ainsi de la distinguabilité d'un couple de conditions initiales.

**Définition 2.2.1** (*Distinguabilité [31, 57, 87, 91]*) : Deux états initiaux  $x(t_0) = x_{01}$  et  $x(t_0) = x_{02}$  tel que  $x_{01} \neq x_{02}$  sont dits distinguables pour le système (2.2), si  $\forall t \geq t_0$ , on a les sorties correspondantes  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  vérifient  $y_1(t) \neq y_2(t)$ .

Réciproquement, on peut aussi définir le terme indistinguabilité :

**Définition 2.2.2** (*Indistinguabilité [31, 57, 87, 91]*) : Deux états initiaux  $x(t_0) = x_{01}$  et  $x(t_0) = x_{02}$  sont dits indistinguables pour le système (2.2) si  $\forall t \geq t_0$ , on a les sorties correspondantes  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont identiques.

Il est maintenant possible de donner une définition de l'observabilité d'un système en un point, et par extension, de définir un système observable.

**Définition 2.2.3** (*Observabilité [31, 57, 87, 91]*) : Le système (2.2) est dit observable en  $x_0$  si  $x_0$  est distinguable de tout  $x \in R^n$ . Le système (2.2) est observable si  $\forall x_0 \in R^n$ ,  $x_0$  est distinguable.

Si on suppose que les entrées et les sorties ( $u(t)$  et  $y(t)$ ) sont connues, alors, leurs dérivées successives peuvent être évaluées. On détermine, dans la suite, une condition nécessaire pour l'observabilité des systèmes non linéaires.

Pour ce faire, on considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $f : R^n \rightarrow R^n$  et  $h : R^n \rightarrow R$ . On détermine l'expression de  $y(t)$ , au voisinage de  $t_0$ , alors on obtient :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y^{(k)}(t) \frac{(t-t_0)^k}{k!} \quad (2.4)$$

Donc, d'après (2.3), on a :

$$y^{(1)}(t) = \frac{dh(x(t))}{dt} = \frac{\partial h(x(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial h(x(t))}{\partial x} \cdot f(x(t)) = L_f^1 h(x(t))$$

avec  $L_f^1 h(x(t))$  est la dérivée de Lie de la fonction  $h$  par rapport à la fonction  $f$  à l'ordre un. En effet, on définit les dérivées successives de Lie de la fonction  $h$  par rapport à la fonction  $f$  comme étant :

$$L_f^k h(x(t)) = L_f [L_f^{k-1} h(x(t))]; \quad \text{avec} \quad L_f^0 h(x(t)) = h(x(t)) = y(t) \quad (2.5)$$

De même, on peut écrire :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \frac{d^2 h(x(t))}{dt^2} = \frac{d\left[\frac{dh(x(t))}{dt}\right]}{dt} = \frac{d[L_f^1 h(x(t))]}{dt} \\ &= \frac{\partial [L_f^1 h(x(t))]}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial [L_f^1 h(x(t))]}{\partial x} \cdot f(x(t)) = L_f [L_f^1 h(x(t))] \\ &= L_f^2 h(x(t)) \end{aligned}$$

D'où, on peut déduire que la propriété (2.5) est aussi vérifiée à l'ordre 2 et par la suite, il est facile de la vérifier jusqu'à l'ordre  $n$  :

$$y^{(n)}(t) = L_f^n h(x(t)) \quad \forall n \in N$$

D'où, l'expression de  $y(t)$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y^{(k)}(t) \frac{(t-t_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} L_f^k h(x(t)) \frac{(t-t_0)^k}{k!} \quad (2.6)$$

En considérant, maintenant, deux sorties  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ , avec  $y_1(t) \neq y_2(t)$ , le fait que (2.3) est observable et d'après l'équation (2.6), si on considère  $x_{01}$  et  $x_{02}$ , les états initiaux relatives aux sorties  $y_1$  et  $y_2$  respectivement, alors il existe un rang  $i$  où on a :

$$L_f^i h(x_{01}(t)) \neq L_f^i h(x_{02}(t))$$

Donc, on peut déduire de ce fait une condition nécessaire de l'observabilité qui peut être reformulée de la façon suivante :

**Condition 2.2.1** : Le système (2.3) est dit observable si pour tout point  $x \in R^n$ , les  $n$  vecteurs  $\mathcal{O} = \{L_f^{j-1}(h) : j = 1, \dots, n\}$  sont linéairement indépendants et constitue une base de l'espace d'observation  $\Omega$  c'est à dire :

$$\dim(\mathcal{O}) = n$$

où  $n$  est la dimension de l'espace d'observation.

La condition (2.2.1) est appelée condition du rang. Si le gradient de l'ensemble  $\mathcal{O}$  est de dimension  $n$  en  $x_0$ , on dit que le système (2.3) est localement faiblement observable en  $x_0$ .

On remarque que les définitions d'observabilité données précédemment sont toutes pour des systèmes libres (c'est à dire indépendante de l'entrée du système), mais en pratique, tous les systèmes sont commandés et admettent des éventuelles entrées.

### 2.2.2.2 Observabilité pour toute entrée

Pour les systèmes non linéaires, l'observabilité dépend fondamentalement de l'entrée appliquée au système. Autrement dit, le système peut être observable, tout en admettant des entrées qui le rendent inobservable [64].

Dans ce contexte, on définit le concept de l'observabilité en tenant compte des entrées qui se base comme pour l'état des systèmes libres sur le principe d'indistinguabilité. Pour ce faire, on considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.7)$$

avec  $x(t) \in R^n$  est l'état,  $y(t) \in R^p$  est la sortie et  $u(t) \in R^m$  est l'entrée. Lorsqu'une entrée distingue tous les couples d'état initiaux sur  $R^n$ , celle-ci est dite universelle.

**Définition 2.2.4** (Entrée universelle [14, 31, 40, 57, 64]) : Soit le système (2.7), l'entrée  $u(t)$  est dite entrée universelle sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  si elle distingue tout couple de points initiaux différents  $x_{01}(t)$  et  $x_{02}(t)$  sur  $[0, T]$ . Une entrée non universelle est dite singulière.

Lorsqu'il n'existe pas d'entrée singulière parmi l'ensemble des entrées admissibles  $R^m$ , alors tout couple d'états initiaux sont distinguables. Cette propriété est appelée l'observabilité pour toute entrée.

**Définition 2.2.5** (Observabilité pour toute entrée [57, 64]) : Un système dont toutes les entrées admissibles à valeur dans  $R^m$  sont universelles est dit observable pour toute entrée (et l'on dira par la suite uniformément observable).

Le problème de la caractérisation des systèmes uniformément observables dans le cas mono-sortie a été abordé par Gauthier et Bornard [31] pour les systèmes affines en la commande. Ce résultat peut se résumer par le théorème du paragraphe suivant.

### Observabilité des systèmes mono-sortie affines en la commande

On considère le système affine en la commande suivant :

$$\sum_t \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + G(x(t)) u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t)) \in R^m$  et  $y(t) \in R^1$ .

Le résultat suivant, dû à J.P. Gauthier et G. Bornard [31], donne une condition nécessaire et suffisante pour que le système  $\sum_t$  soit uniformément observable.

**Théorème 2.2.1** [57] *Le système (2.8) est uniformément observable, si et seulement si, il existe un système de coordonnées locales sur  $R^n$  tel que (2.8) soit presque partout localement de la forme :*

$$\Gamma_0 \begin{cases} \dot{z}(t) = A z(t) + \psi(z(t)) + \Phi(z(t)) u(t) \\ y(t) = C z(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi(z(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_n(z(t)) \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0, \dots, 0];$$

$\Phi(z(t)) = \left[ \Phi^1(z(t)) \quad \Phi^2(z(t)) \quad \dots, \quad \Phi^m(z(t)) \right]$  où chaque vecteur colonne,

$$\Phi^k(z(t)) = \begin{bmatrix} \Phi_1^k(z(t)) \\ \vdots \\ \Phi_n^k(z(t)) \end{bmatrix} \text{ de la matrice } \Phi(z(t)) \text{ est triangulaire par rapport à } z(t),$$

c'est à dire  $\Phi_i^k(z(t)) \triangleq \Phi_i^k(z_1(t), z_2(t), \dots, z_i(t))$  pour  $k = 1, \dots, m$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

## 2.3 Synthèse d'observateur à grand gain pour des classes des systèmes non linéaires multivariables

Dans cette section, on présente une étude particulière dédiée à l'observateur à grand gain où on détaille la procédure de sa synthèse pour différentes classes des systèmes non linéaires et on détermine par la suite ses avantages et ses inconvénients.

### 2.3.1 Forme canonique d'observabilité des systèmes non linéaires multivariables

On considère les systèmes non linéaires multivariables "MIMO" qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

où l'état  $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^q(t) \end{pmatrix} \in R^n$ ;  $x^k(t) = \begin{pmatrix} x_1^k(t) \\ \vdots \\ x_p^k(t) \end{pmatrix} \in R^p$ ;  $k = 1, \dots, q$ ; la sortie  $y(t) \in R^p$ ; l'entrée  $u(t) \in R^m$  et  $\varphi(x(t), u(t))$  a une structure triangulaire par rapport à  $x(t)$ , c'est-à-dire :

$$\varphi(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \varphi^1(x^1(t), u(t)) \\ \varphi^2(x^1(t), x^2(t), u(t)) \\ \vdots \\ \varphi^{q-1}(x^1(t), \dots, x^{q-1}(t), u(t)) \\ \varphi^q(x(t), u(t)) \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  de dimension  $n \times n$  est la matrice anti-décalage par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & & 0_p \\ \vdots & & I_p & & \\ & & & \ddots & 0_p \\ 0_p & & & & I_p \\ 0_p & \cdots & & 0_p & 0_p \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La matrice d'observation  $C$  a la structure particulière suivante :

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0_p & \cdots & 0_p \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

La notation  $I_k$  où  $k$  est un entier positif fait référence à  $k \times k$  matrice d'identité, cependant  $0_k$  et  $0_{k_1 \times k_2}$ ,  $k, k_1, k_2$  sont des entiers positifs, dénotent la matrice nulle de dimension  $k \times k$  et  $k_1 \times k_2$ , respectivement.

Pour la synthèse de l'observateur, les hypothèses suivantes sont adoptées :

**Hypothèse 2.3.1** *L'entrée  $u(t)$  est bornée. Plus précisément, nous avons  $u(t) \in U$  pour tout  $t \geq 0$  où  $U$  est un compact respectivement de  $R^m$ .*

**Hypothèse 2.3.2** *La fonction  $\varphi(x(t), u(t))$  est globalement lipschitizienne par rapport à  $x(t)$ , uniformément en  $u(t)$ .*

### 2.3.1.1 Equation de l'observateur

Un observateur à grand gain pour le système (2.10) peut être décrit par le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u, \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (2.13)$$

où :

- $\theta \geq 1$  est le paramètre de réglage de l'observateur.
- $S$  est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov :

$$S + A^T S + S A - C^T C = 0 \quad (2.14)$$

- $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale par blocs suivante :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[ I_p \quad \frac{1}{\theta} I_p \quad \cdots \quad \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right] \quad (2.15)$$

Il est clair que la solution  $S$  de l'équation (2.31) ainsi que le vecteur  $S^{-1} C^T$  peuvent s'exprimer comme suit :

$$S^{-1} C^T = \begin{pmatrix} C_q^1 I_p \\ C_q^2 I_p \\ \vdots \\ C_q^q I_p \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Dans ce contexte, on énonce le résultat suivant :

**Théorème 2.3.1** *Sous les hypothèses (2.3.1) et (2.3.2), le système (2.13) est un observateur exponentiel pour le système (2.10), c'est-à-dire, l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro pour des valeurs assez élevées du paramètre de synthèse  $\theta$ .*

#### Remarques 2.3.1

- L'expression du vecteur gain,  $\theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T$ , est obtenue à partir de l'article d'origine de l'observateur à grand gain [32] où Gauthier a énoncé le premier observateur à grand gain ayant la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), u(t)) - S_\infty^{-1} C^T C (\hat{x}(t) - x(t))$$

avec  $S_\infty$  est la matrice définie positive solution de l'équation :

$$\theta S_\infty + S_\infty A + A^T S_\infty - C^T C = 0 \quad (2.17)$$

Donc, en comparant les deux équations de l'observateur, on peut remarquer que le vecteur gain de l'observateur à grand gain a été décomposé où on a considéré

$$S_\infty = \frac{1}{\theta} \Delta_\theta S \Delta_\theta$$

avec  $S$  est la solution de l'équation (2.17) pour  $\theta = 1$ .

Ceci peut être facilement vérifié.

– Dans le théorème précédent, l'expression  $\Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T$  peut être remplacée par

$$\begin{bmatrix} K_1 \theta I_p \\ \vdots \\ K_q \theta^q I_p \end{bmatrix}$$

où  $K_1, \dots, K_q$  sont tels que les valeurs propres de la matrice  $(A - KC)$  sont à parties réelles négatives.

La preuve du théorème 2.3.1 fait l'objet du paragraphe suivant.

### 2.3.1.2 Analyse de la convergence

**Preuve:** [60]

Soit  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , le vecteur d'erreurs entre les deux vecteurs d'état estimé et réel. On a :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A \tilde{x}(t) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \tilde{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), u(t)) - \varphi(x(t), u(t))$$

Comme dans le cas monosortie, on peut facilement vérifier que :

$$\Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} = \theta A \text{ et } C \Delta_\theta = C$$

On introduit maintenant le changement de variable suivant :  $\bar{x}(t) = \Delta_\theta \tilde{x}(t)$ . On obtient :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \theta A \bar{x}(t) - \theta S^{-1} C^T C \bar{x}(t) + \Delta_\theta (\varphi(\hat{x}(t), u(t)) - \varphi(x(t), u(t)))$$

On définit une fonction candidate de Lyapunov  $V(\bar{x}, t) = \bar{x}^T(t) S \bar{x}(t)$ , où  $S$  est la solution de l'équation algébrique de Lyapunov (2.31). Pour alléger l'écriture et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet la variable temps "t".

La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov,  $\dot{V}(\bar{x})$ , peut être obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= 2 \bar{x}^T S \dot{\bar{x}} \\ &= 2 \theta \bar{x}^T S A \bar{x} - 2 \theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} + 2 \bar{x}^T S \Delta_\theta (\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)) \\ &= -\theta V + \theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} + 2 \bar{x}^T S \Delta_\theta (\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)) - 2 \theta \bar{x}^T C^T C \bar{x} \end{aligned}$$

En utilisant (2.31), la dérivée  $\dot{V}(\bar{x})$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}) &= -\theta V + 2\theta \left( \frac{1}{2} \bar{x}^T C^T C \bar{x} - \bar{x}^T C^T C \bar{x} \right) + 2 \bar{x}^T S \Delta_\theta (\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)) \\ &\leq -\theta V + 2 \bar{x}^T S \Delta_\theta (\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u))\end{aligned}\tag{2.18}$$

Le signe  $\dot{V}(\bar{x})$  dépendra de celui de :

$$\bar{x}^T S \Delta_\theta (\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u))$$

Si on considère l'hypothèse (2.3.2) [23], on déduit que :

$$\|\Delta_\theta (\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u))\| \leq \xi_0 \|\bar{x}\| \quad \text{pour } \theta \geq 1\tag{2.19}$$

où  $\xi_0$  est une constante positive indépendante de  $\theta$ .

D'après l'inégalité (2.19), l'inégalité (2.18) devient :

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}) &\leq -\theta V(\bar{x}) + 2 \lambda_{\max}(S) \|\bar{x}\| \xi_0 \|\bar{x}\| \\ &\leq -(\theta - c_1) V(\bar{x})\end{aligned}$$

où  $c_1 = 2 \frac{\xi_0}{\lambda_{\min}(S)}$  avec  $\lambda_{\min}(S)$  représente la plus petite valeur propre de  $S$ .

Maintenant, si on prend  $\theta_0 = \max\{1, c_1\}$  et en remarquant que pour  $\theta \geq 1$  on a  $\|\bar{x}(t)\| \leq \|\tilde{x}(t)\| \leq \theta^{q-1} \|\tilde{x}(t)\|$ , alors, on peut déduire :

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \theta^{q-1} e^{-(\frac{\theta-c_1}{2})t} \|\tilde{x}(0)\|$$

Ce qui prouve la convergence exponentielle de l'observateur à grand gain.

## 2.3.2 Classe générale de systèmes non linéaires multivariables uniformément observable

### 2.3.2.1 Formulation du problème

On détaille dans cette section la synthèse de l'observateur à grand gain pour une classe plus générale des systèmes non linéaires uniformément observable. Cette classe des systèmes peut être décrit par le système d'équations suivant [24, 57] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + \varphi(x(t), u(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}\tag{2.20}$$

où l'état  $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^q(t) \end{pmatrix} \in R^n$ , avec  $x^k(t) = \begin{pmatrix} x_1^k(t) \\ x_2^k(t) \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k(t) \end{pmatrix} \in R^{n_k}$ ,  $x_i^k(t) \in$

$R^{p_k}$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ ,  $\sum_{k=1}^q n_k = n$ ; la sortie du système  $y(t) =$

$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{pmatrix} \in R^p$  avec  $y_k(t) \in R^{p_k}$ ,  $k = 1, \dots, q$  et  $\sum_{k=1}^q p_k = p$ ;

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_q \end{bmatrix}, \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_k} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I_{p_k} \\ 0 & \cdots & 0 & 0_{p_k} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_q \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$\varphi(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \varphi^1(x(t), u(t)) \\ \varphi^2(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ \varphi^q(x(t), u(t)) \end{pmatrix} \in R^n$ ;  $\varphi^k(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1^k(x(t), u(t)) \\ \varphi_2^k(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^k(x(t), u(t)) \end{pmatrix} \in$

$R^{n_k}$  où chaque fonction  $\varphi_i^k(x(t), u(t)) \in R^{p_k}$ ,  $k = 1, \dots, q$ , possède la structure suivante :

- pour  $1 \leq i \leq \lambda_k - 1$  :

$$\varphi_i^k(x(t), u(t)) = \varphi_i^k(x^1(t), x^2(t), \dots, x^{k-1}(t), x_1^k(t), \dots, x_i^k(t), x_1^{k+1}(t), x_1^{k+2}(t), \dots, x_1^q(t), u(t)) \quad (2.23)$$

- pour  $i = \lambda_k$  :

$$\varphi_{\lambda_k}^k(x(t), u(t)) = \varphi_{\lambda_k}^k(x^1(t), x^2(t), \dots, x_1^q(t), u(t)) \quad (2.24)$$

### Remarques 2.3.2 [57]

1. Il est clair que le système (2.20) inclut la classe de systèmes représentée par la première forme canonique (2.10) puisque cette dernière se déduit de (2.20) en prenant  $q = 1$ , c'est-à-dire en considérant toutes les sorties au sein d'un même bloc.

2. La particularité de cette classe réside dans la structure de la fonction  $\varphi_{\lambda_k}^k$  qui dépend de tout le vecteur d'état  $x$  et non seulement des variables appartenant aux blocs supérieures.

### 2.3.2.2 Equation de l'observateur

Avant d'énoncer les équations de l'observateur, on suppose comme pour la première classe des systèmes non linéaires (2.10) que le fonction  $\varphi(x(t), u(t))$  vérifie l'hypothèse (2.3.2).

On introduit aussi quelques notations et résultats préliminaires :

- Soit  $\Delta_k(\theta)$  une matrice diagonale définie par :

$$\Delta_k(\theta) = \begin{bmatrix} I & & & \\ & \frac{1}{\theta^{\delta_k}} I_{p_k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\theta^{\delta_k(\lambda_k-1)}} I_{p_k} \end{bmatrix}$$

où  $\theta > 0$  est un réel et les  $\delta_k$  sont des réels positifs définis comme suit [24] :

$$\begin{cases} \delta_k = 2^{q-k} \left( \prod_{i=k+1}^q \left( \lambda_i - \frac{3}{2} \right) \right) \\ \delta_q = 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

- Soit  $S_k$  la solution unique de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S_k + A_k^T S_k + S_k A_k = C_k^T C_k$$

On a en particulier :

$$S_k^{-1} C_k^T = \begin{pmatrix} C_{n_k}^1 I_{p_k} \\ C_{n_k}^2 I_{p_k} \\ \vdots \\ C_{n_k}^{n_k} I_{p_k} \end{pmatrix}$$

On considère maintenant le système dynamique décrit par les  $q$  blocs suivants :

$$\dot{\hat{x}}^k(t) = A_k \hat{x}^k(t) + \varphi(\hat{x}^k(t), u(t)) - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T (C_k \hat{x}^k(t) - y_k(t)) \quad (2.26)$$

pour  $k = 1, \dots, q$  avec :

$$\bullet \hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}^1(t) \\ \hat{x}^2(t) \\ \vdots \\ \hat{x}^q(t) \end{pmatrix} \in R^n, \hat{x}^k = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^k(t) \\ \hat{x}_2^k(t) \\ \vdots \\ \hat{x}_{\lambda_k}^k(t) \end{pmatrix} \in R^{n_k}, \hat{x}_i^k(t) \in R^{p_k}, i = 1, \dots, \lambda_k, k = 1, \dots, q.$$

- $\hat{x}_1^k(t) = x_1^k(t)$  (injection de sortie) pour  $k = 1, \dots, q$ .
- $\hat{x}_j^k(t) = \hat{x}_j^k(t)$  si  $j \neq 1$ .
- $e_1^k(t) = \hat{x}_1^k(t) - x_1^k(t)$ .
- $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie connues du système (2.20).

On énonce dans la suite le théorème suivant :

**Théorème 2.3.2** *Supposons que le système (2.20) satisfait l'hypothèse (2.3.2), alors :*

$$\forall M > 0; \exists \theta_0 \geq 0; \exists \lambda_\theta > 0; \exists \mu_\theta > 0 \text{ tel que } \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \lambda_\theta e^{-\mu_\theta t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

pour toute entrée admissible  $u(t)$  telle que  $\|u(t)\| < M$ . De plus,  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \mu_\theta = +\infty$ . En d'autres termes, en considérant des entrées bornées, le système (2.26) est un observateur exponentiel pour le système (2.20).

La preuve de la dite théorème est détaillée dans [24].

Il existe plusieurs extensions dans le cas des systèmes non linéaires multivariés de l'observateur à grand gain et ses applications industrielles sont multiples [9, 16, 19, 38]. Cette popularité est due grâce à son réglage aisé via le seul paramètre de synthèse  $\theta$ .

L'inconvénient majeur de ce type d'observateurs réside dans le choix adéquat du dit paramètre de synthèse. Intuitivement, on doit choisir ce paramètre suffisamment grand pour garantir une bonne précision et relativement faible en présence du bruit pour ne pas errer les estimations. Les limites de l'observateur à grand gain seront détaillées dans la suite.

## 2.4 Limites de l'observateur à grand gain classique : Exemples illustratifs

Dans le but d'illustrer les limites de l'observateur à grand gain, on se propose de traiter le problème d'observation pour deux systèmes non linéaires appartenant à la classe des systèmes uniformément observable.

### 2.4.1 Exemple 1

On considère le système non linéaire décrit par le système d'équations suivant :

$$\Sigma_x: \begin{cases} \dot{x}^1(t) &= f^1(x^2(t), u(t)) = \frac{1}{5} ((x^2(t))^3 + x^2(t) + \cos(2\pi t)) \\ \dot{x}^2(t) &= f^2(x^1(t), x^2(t), u(t)) = -\frac{x^2(t)}{1+3(x^2(t))^2} - 2\frac{x^1(t)}{1+3(x^2(t))^2} \end{cases} \quad (2.27)$$

Il est clair que le système (2.27) n'est pas sous la forme (2.10). Pour le mettre sous la forme canonique d'observabilité uniforme, on peut suivre les étapes suivantes :  
Soit le système non linéaire monovarié :

$$\Sigma_x: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.28)$$

avec

$$x(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) & x^2(t) & \cdots & x^n(t) \end{bmatrix}^T \in R^n; \quad u(t) \in R; \quad y(t) \in R$$

Dans le but de faciliter la reconstruction du vecteur d'état, on procède à un changement des coordonnées permettant d'exprimer la sortie mesurée du système en fonction seulement de la première composante du vecteur d'état. La construction de la totalité du vecteur d'état peut être réalisée par des dérivées successives de la sortie. La représentation résultante est dite forme canonique d'observabilité uniforme. Donc, pour obtenir ceci, on pose :

$$\begin{aligned} z^1(t) &= y(t) = h(x(t)) \\ z^2(t) &= \dot{z}^1(t) = \dot{y}(t) = L_f h(x(t)) \\ z^3(t) &= L_f^2 h(x(t)) \\ &\vdots \\ z^n(t) &= \dot{z}^{n-1}(t) = L_f^{n-1} h(x(t)) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Par le changement des coordonnées considéré, la dynamique du système  $\Sigma_x$  se réécrit dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\Sigma_z: \begin{cases} \dot{z}(t) = A z(t) + \varphi(z(t), u(t)) \\ y(t) = C z(t) = z^1(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

avec :

$$z(t) = \begin{bmatrix} z^1(t) \\ z^2(t) \\ \vdots \\ z^n(t) \end{bmatrix} \in R^n; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{et} \quad \varphi(z(t), u(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_f^n h(x(t)) \end{bmatrix}$$

**Remarque 2.4.1** La représentation sous la forme canonique d'observabilité exige les conditions suivantes :

1. Le changement des coordonnées,  $\Phi$ , réalise une bijection afin de pouvoir reconstruire le vecteur d'état initial, avec  $\Phi$  est telle que :

$$\begin{aligned} \Phi : R^n &\rightarrow R^n \\ x(t) &\mapsto z(t) = \Phi(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} h(x(t)) \\ L_f h(x(t)) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x(t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. La sortie  $y(t)$  doit être  $(n - 1)$  dérivable.

Par conséquent, l'observation du système  $\Sigma_x$  est conditionnée par l'hypothèse globale 2.4.1 suivante :

**Hypothèse 2.4.1** La fonction  $\Phi(x(t), u(t))$  doit être un difféomorphisme.

Pour le système mis dans le nouveau système des coordonnées  $\Sigma_z$ , un observateur à grand gain peut être synthétisé ayant le système des équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = A \hat{z}(t) + \varphi(z(t), u(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C \hat{z}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{z}(t) = \hat{z}^1(t) \end{cases}$$

où :

- $\theta \geq 1$  est le paramètre de réglage de l'observateur.
- $S$  est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov :

$$S + A^T S + S A - C^T C = 0 \quad (2.31)$$

- $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale suivante :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[ 1 \quad \frac{1}{\theta} \quad \cdots \quad \frac{1}{\theta^{n-1}} \right] \quad (2.32)$$

Une fois le vecteur d'état  $z(t)$  est estimé, l'estimation  $\hat{x}(t)$  de l'état  $x(t)$  de (2.28), peut s'obtenir par  $\hat{x}(t) = \Phi^{-1}(\hat{z}(t))$ . Parfois, la fonction  $\Phi^{-1}$  ne peut pas être exprimée en fonction de  $z$  et un autre moyen pour contourner cette difficulté consiste à exprimer l'équation de l'observateur directement dans les coordonnées originales en  $x$ . En effet, en tenant compte du fait que :

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt}$$

L'équation de l'observateur dans les coordonnées originales s'écrit comme suit

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t)) + \varphi(\hat{x}(t), u(t)) - \theta \left( \frac{\partial \Phi(\hat{x}(t))}{\partial x} \right) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (h(\hat{x}(t)) - y(t))$$

Pour le système (2.27), on adopte le changement des variables suivant :

$$\Phi : R^2 \longrightarrow R^2, x(t) \mapsto z(t) = \Phi(x(t)) \text{ avec } z(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ \frac{1}{5} (3(x^2(t))^2 + 1) \end{bmatrix}$$

Par ce changement, on montre facilement que le système (2.27) appartient à la classe (2.10) avec  $p = 1$  et les équations de l'observateur à grand gain, dans les coordonnées originales, sont comme suit [22] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - \theta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\hat{x}, u) \right)^{-1} \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \tilde{x}(t) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.33)$$

avec  $f^T(\hat{x}(t)) = [f^1(\hat{x}^1(t), u(t)), f^2(\hat{x}^1(t), \hat{x}^2(t), u(t))]$ .

Dans le but de simuler des situations pratiques, on entache la sortie du système par des bruits de mesure de moyenne nulle et de variance  $\sqrt{0.5}$  (voir figure 2.3).

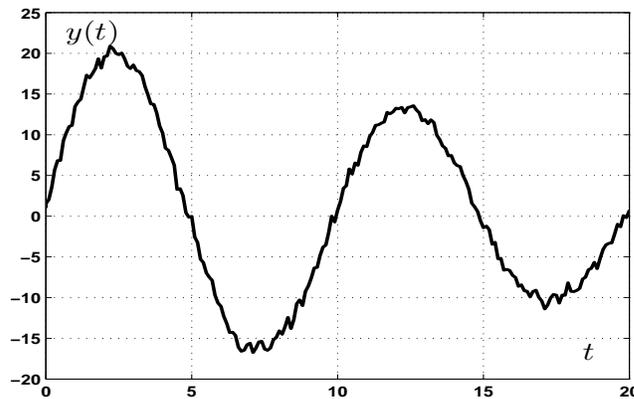


Figure 2.3: Evolution de la sortie mesurée du système.

Pour illustrer les limites de l'observateur à grand gain, On suppose l'estimation de la variable d'état  $x^2$  en utilisant deux valeurs différentes du paramètre de synthèse  $\theta$  ( $\theta = 2$  et  $\theta = 10$ ).

Les figures 2.4 et 2.5 illustrent les estimations de la variable  $x^2$  pour les deux différentes valeurs de  $\theta$ . Il est facile de constater que pour une valeur relativement faible de  $\theta$  ( $\theta = 2$ ), l'estimation est moins sensible aux bruits relativement au cas où la valeur de  $\theta$  est prise relativement importante. Cette insensibilité est assurée au prix d'une mauvaise convergence en terme de rapidité. Par contre, la considération d'une valeur de  $\theta$  relativement importante permet l'accélération de la convergence et la dégradation de la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure. Alors, l'observateur à grand gain doit assurer un compromis entre la rapidité de la convergence et la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure.

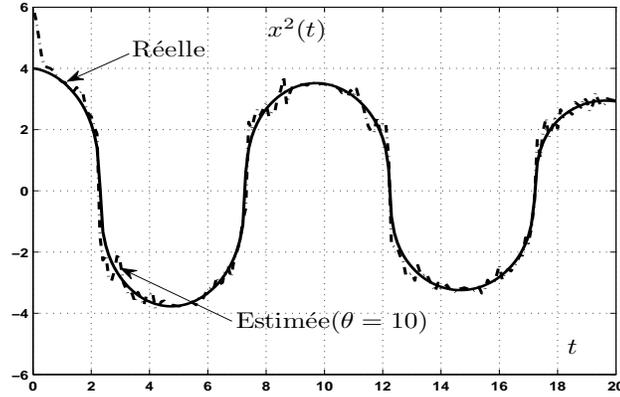


Figure 2.4: Evolution de l'estimation de  $x^2$  ( $\theta$  relativement importante).

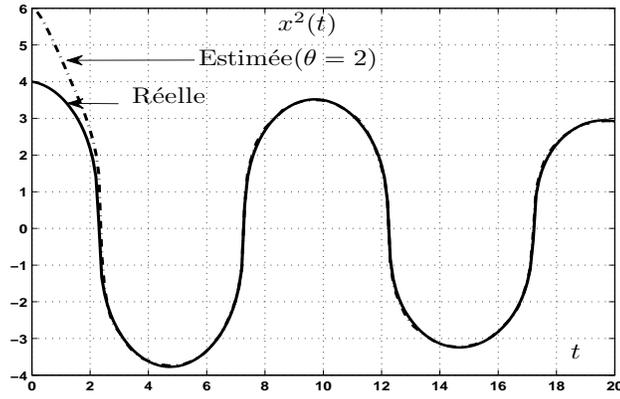


Figure 2.5: Evolution de l'estimation de  $x^2$  ( $\theta$  relativement faible).

### 2.4.2 Exemple 2

On considère le système non linéaire décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = f^1(x^2(t), u(t)) = x^2(t) + (x^2(t))^3 - x^1(t) + \sin(t/\pi) \\ \dot{x}^2(t) = f^2(x^1(t), x^2(t), u(t)) = 10 \cos(10 x^2(t)) + 5 \cos(t) \\ y(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (2.34)$$

Le système (2.34) peut être mis sous la forme (2.10) en considérant le transformation d'état suivante :  $\Phi : R^2 \rightarrow R^2, x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} \mapsto z(t) = \Phi(x(t)) = \begin{pmatrix} z^1(t) \\ z^2(t) \end{pmatrix}$  avec  $z^1(t) = x^1(t)$  et  $z^2(t) = (x^2(t))^3 + x^2(t)$ .

Par ce changement, on montre facilement que le système (2.34) appartient à la classe (2.10) avec  $p = 1$  et les équations de l'observateur à grand gain, dans les coordonnées originales, sont comme suit [22] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - \theta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\hat{x}, u) \right)^{-1} \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C \tilde{x}(t) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

avec  $f^T(\hat{x}(t)) = [f^1(\hat{x}^1(t), u(t)), f^2(\hat{x}^1(t), \hat{x}^2(t), u(t))]$ .

La perturbation externe en terme de bruit de mesure considérée dans ce cas est caractérisée par une moyenne nulle et une variance égale à 0.2. La figure 2.6 donne l'évolution de la sortie soumise à la perturbation précitée.

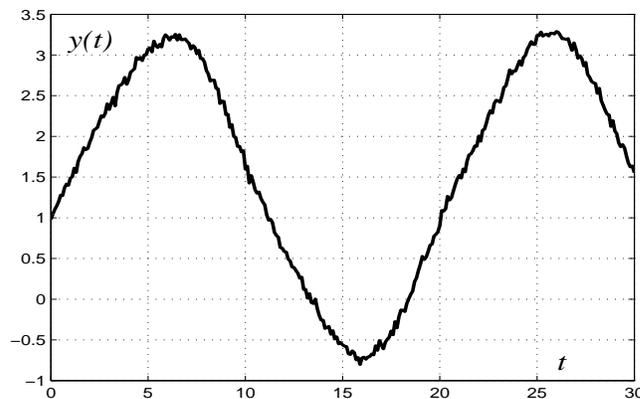
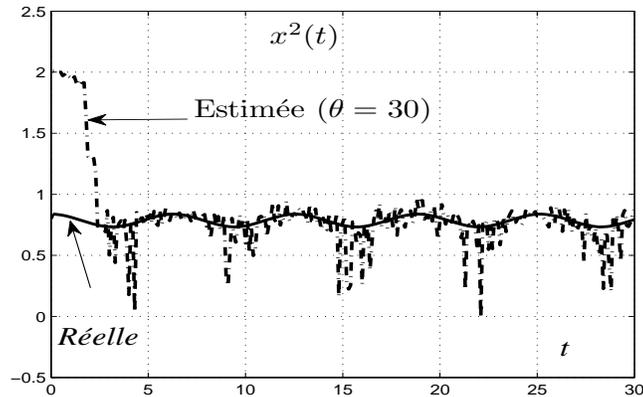
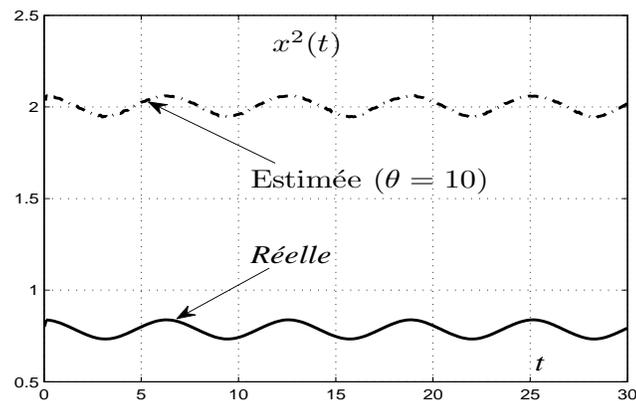


Figure 2.6: Evolution de la sortie mesurée du système.

Pour illustrer les limites de l'observateur à grand gain, dans ce cas, on suppose l'estimation de la variable d'état  $x^2$  en utilisant deux valeurs différentes du paramètre de synthèse  $\theta$  ( $\theta = 10$  et  $\theta = 30$ ).

Les figures 2.7 et 2.8 illustrent les estimations de la variable  $x^2$  pour les deux différentes valeurs de  $\theta$ . Il est facile de constater que pour une valeur relativement faible de  $\theta$  ( $\theta = 10$ ), l'observateur ne réussit pas à estimer la variable d'état manquante, cependant, pour une valeur relativement importante de  $\theta$ , l'estimation de la variable d'état  $x^2$  est réalisée au prix d'une mauvaise convergence en terme de sensibilité aux bruits de mesure. Alors, l'observateur à grand gain doit assurer un compromis entre la rapidité de la convergence et la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure.

Figure 2.7: Evolution de l'estimation de  $x^2$  ( $\theta$  relativement importante).Figure 2.8: Evolution de l'estimation de  $x^2$  ( $\theta$  relativement faible).

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré, dans une première partie, à des rappels sur des concepts relatifs à l'observabilité des systèmes non linéaires. En effet, on a remarqué que pour les systèmes non linéaires il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthodes universelles pour la synthèse d'observateurs. Les approches développées à ce jour sont soit une approximation des algorithmes linéaires (linéarisation autour d'un point de fonctionnement), soit des algorithmes non linéaires spécifiques pour certaines classes de systèmes tels que l'observateur à grand gain.

Dans une deuxième partie, la synthèse des observateurs à grand gain pour des classes des systèmes non linéaires multivariables uniformément observables est développée. Les limites de ce type d'observateurs, moyennant deux exemples illustratifs, sont également envisagées. Un choix judicieux de paramètre de synthèse de l'observateur à grand gain doit assurer le compromis entre la rapidité de la convergence et la robustesse vis-à-vis des bruits de mesures.

# Chapitre 3

## Synthèse d'un observateur à grand gain dynamique

### 3.1 Introduction

La simplicité de l'implémentation est le principal avantage de l'observateur à grand gain, cependant, ce type d'observateurs souffre d'un inconvénient réside dans le bon choix du son unique paramètre de synthèse. Ce dernier choix s'effectue généralement suite à plusieurs essais afin de satisfaire le compromis entre la rapidité ou la précision de l'observateur et son sensibilité vis-à-vis des bruits de mesure.

Généralement, on doit choisir le paramètre de synthèse relativement important lors de la convergence. Une fois, on a obtenu l'estimation des différentes variables d'état, on peut diminuer le paramètre de synthèse afin de garantir une robustesse aux bruits de mesure. Dans ce chapitre, on propose la synthèse d'un observateur à grand gain dynamique qui dérive de l'observateur à grand gain classique, mais il adopte un paramètre de synthèse variant au cours de temps obéissant à une loi de type Riccati.

### 3.2 Synthèse de l'observateur à grand gain dynamique pour une classe des systèmes non linéaires multi-variables

#### 3.2.1 Formulation du problème

On précise, dans ce paragraphe, la classe des systèmes considérée pour la synthèse de l'observateur, puis on présente quelques définitions et une étude préliminaire qui sera nécessaire pour la synthèse de l'observateur.

### 3.2.1.1 La classe des systèmes

La classe des systèmes non linéaires multivariables (multi entrées-multi sorties) à considérer est celle représentée par le système d'équations (2.10), donné dans la section 2.3.1 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t) = Cx(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où l'état  $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^q(t) \end{pmatrix} \in R^n$ ;  $x^k(t) = \begin{pmatrix} x_1^k(t) \\ \vdots \\ x_p^k(t) \end{pmatrix} \in R^p$ ;  $k = 1, \dots, q$ ; la sortie  $y(t) \in R^p$ ; l'entrée  $u(t) \in R^m$  et  $\varphi(u(t), x(t))$  a une structure triangulaire par rapport à  $x$ , c'est-à-dire :

$$\varphi(u(t), x(t)) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u(t), x^1(t)) \\ \varphi^2(u(t), x^1(t), x^2(t)) \\ \vdots \\ \varphi^{q-1}(u(t), x^1(t), \dots, x^{q-1}(t)) \\ \varphi^q(u(t), x(t)) \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  de dimension  $n \times n$  est la matrice anti-décalage par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & & 0_p \\ \vdots & & I_p & & \\ & & & \ddots & 0_p \\ 0_p & & & & I_p \\ 0_p & \cdots & & 0_p & 0_p \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

La matrice d'observation  $C$  a la structure particulière suivante :

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0_p & \cdots & 0_p \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La notation  $I_k$  où  $k$  est un entier positif fait référence à  $k \times k$  matrice d'identité, cependant  $0_k$  et  $0_{k_1 \times k_2}$ ,  $k, k_1, k_2$  sont des entiers positifs, dénotent la matrice nulle de dimension  $k \times k$  et  $k_1 \times k_2$ , respectivement.

L'objectif consiste à synthétiser un observateur à grand gain pour le système (3.1) dont son gain est issu d'une équation algébrique de Lyapunov et ajusté par le choix d'un seul paramètre de synthèse. Mais, contrairement aux observateurs à grand gain classiques [32], et dans le but d'améliorer les performances de ce type des observateurs vis-à-vis des perturbations externes, le paramètre de synthèse doit être variant

dans le temps selon une dynamique permettant l'adoption d'une valeur relativement faible après la convergence [25].

### 3.2.1.2 Etude préliminaire et notations

On considère  $\theta : R \rightarrow R, t \mapsto \theta(t)$  une fonction différentiable variable au cours de temps à valeurs positives et soit la matrice diagonale  $\Delta(\theta(t))$  définie par :

$$\Delta(\theta(t)) = \text{diag} \left( \frac{1}{\theta(t)} I_p, \frac{1}{\theta^2(t)} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^q(t)} I_p \right)$$

On considère, maintenant, la matrice diagonale suivante :

$$\Lambda(\theta(t)) = \theta^{-\sigma}(t) \Delta(\theta(t)) \quad (3.4)$$

avec  $\sigma > 0$  est un réel positif. En tenant compte des structures de  $A$  et  $C$  données par (3.2) et (3.3), respectivement, on peut facilement vérifier les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta(t)) A \Lambda^{-1}(\theta(t)) &= \Delta(\theta(t)) A \Delta^{-1}(\theta(t)) = \theta(t) A \\ C \Lambda^{-1}(\theta(t)) &= \theta^{\sigma+1}(t) C \end{aligned} \quad (3.5)$$

On peut aussi vérifier que :

$$\dot{\Lambda}(\theta(t)) \triangleq \frac{d}{dt} \Lambda(\theta(t)) = -\frac{\dot{\theta}(t)}{\theta(t)} (\sigma I_n + D) \Lambda(\theta(t)) \quad (3.6)$$

avec  $D$  la matrice d'ordre  $n \times n$  suivante :

$$D = \text{diag} (I_p, 2I_p, \dots, qI_p)$$

Soit, maintenant :

$$K = \left[ \begin{array}{cccc} K^1 & K^2 & \dots & K^q \end{array} \right]^T \quad (3.7)$$

une matrice de dimension  $n \times p$ , avec  $K^i \in R^{p \times p}$ , telle que la matrice  $\tilde{A} \triangleq A - K C$  soit une matrice de Hurwitz. Alors, il existe un réel strictement positif  $a > 0$  et une matrice  $S$  Symétrique Définie Positive (SDP) d'ordre  $n \times n$  [55, 58] telle que :

$$\tilde{A}^T S + S \tilde{A} \leq -a S \quad \text{et} \quad D S + S D \geq 0 \quad (3.8)$$

Soit les définitions des matrices suivantes :

$$\begin{aligned} Q &= S D + D S \\ \Omega &= (\sigma S + S D) + (S D + \sigma S) = Q + 2\sigma S \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il est facile de montrer que puisque  $Q \geq 0$  (d'après (3.8)), alors la matrice  $\Omega$  est semi définie positive. Dans ce contexte, on dénote respectivement par  $\lambda_M(\cdot)$  et  $\lambda_m(\cdot)$  la plus grande et la plus petite valeur propre de  $(\cdot)$ . Le nombre de conditionnement de  $(\cdot)$  est noté par  $\mu(\cdot)$ , i. e.  $\mu(\cdot) = \frac{\lambda_M(\cdot)}{\lambda_m(\cdot)}$ .

### 3.2.2 Synthèse de l'observateur pour la classe des systèmes non linéaires considérée

Comme dans toute synthèse d'un observateur à grand gain [22, 32, 37, 39, 80], on considère l'hypothèse de Lipschitz suivante :

**Hypothèse 3.2.1** *La fonction  $\varphi(u, x)$  est globalement lipschitizienne par rapport à  $x$  et uniformément lipschitizienne en  $u$ .*

#### 3.2.2.1 Equations de l'observateur

L'observateur candidat est une dérivée de l'observateur à grand gain classique en adoptant un paramètre de synthèse variable au cours de temps comme mentionné ci-dessus [25] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), u(t)) - \Delta^{-1}(\theta) K \varepsilon(t) \\ \dot{\theta}(t) = -\frac{\mu_1}{2} \theta(t) (a(\theta(t)) - 1) - g(t) \gamma(\|\varepsilon(t)\|); \theta(0) \geq 1 \\ g(t) = \frac{M}{1 + \min(\rho, \frac{1}{T} \int_{\max(0, t-T)}^t \|\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau)} \end{cases} \quad (3.10)$$

avec :

$$\bullet \hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}^1(t) \\ \hat{x}^2(t) \\ \vdots \\ \hat{x}^q(t) \end{pmatrix} \in R^n, \hat{x}^k(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^k(t) \\ \hat{x}_2^k(t) \\ \vdots \\ \hat{x}_p^k(t) \end{pmatrix} \in R^p.$$

$$\bullet e(t) = \hat{x}(t) - x(t).$$

$$\bullet \varepsilon(t) = C e(t) = C (\hat{x}(t) - x(t)).$$

•  $K$  est la matrice d'ordre  $n \times p$ , donnée par l'équation (3.7), et tel que la matrice  $\tilde{A} = A - KC$  soit une matrice de Hurwitz. Le réel  $a$  est donné par l'équation (3.8).

•  $\mu_1 \triangleq \frac{\lambda_m(S)}{\lambda_M(\Omega)}$  où  $S$  et  $\Omega$  sont données respectivement par les équations (3.8) et (3.9).

•  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie mesurées du système réel.

• Les réels  $\rho, T, M > 0$  sont les paramètres de synthèse de l'observateur.

•  $\gamma : R \rightarrow R_+, \|\varepsilon(t)\| \mapsto \gamma(\|\varepsilon(t)\|)$  une fonction croissante à valeurs réelles positives qui satisfait les propriétés suivantes :

i)  $\gamma(0) = 0$

ii)  $\gamma(x) > 0, x > 0$

On note que les équations de l'observateur contiennent trois paramètres de synthèse  $M$ ,  $T$  et  $\rho$ . Le choix des deux premiers paramètres sera discuté ultérieurement. Quant au paramètre  $\rho$ , son choix n'est pas critique parce qu'il est principalement introduit pour saturer l'intégrale  $\frac{1}{T} \int_{\max(0, t-T)}^t \|\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau$ . Alors, par conséquent, une valeur relativement importante de  $\rho$  peut suffire.

On énonce maintenant le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1** [21, 25]

*Supposons que le système (3.1) satisfait l'hypothèse (3.2.1). Alors, les trajectoires du système (3.10) convergent exponentiellement vers celles du système (3.1) pour des valeurs relativement importantes de  $M$ .*

La preuve du théorème 3.2.1 fait l'objet du paragraphe suivant.

**3.2.2.2 Analyse de la convergence**

**Preuve:** Tout d'abord, on dérive par rapport au temps  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ . Pour alléger les expressions et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet la variable de temps "t". On obtient alors [25] :

$$\dot{e} = A e + (\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)) - \Delta^{-1}(\theta) K C e \quad (3.11)$$

avec  $u$  est une entrée admissible telle que  $\|u\|_\infty \leq \eta$ ,  $\eta > 0$  est une constante donnée.

On considère le changement des variables suivant :

$$\bar{e} = \Lambda(\theta) e \quad (3.12)$$

où  $\Lambda(\theta)$  est donnée par (3.4).

A partir de l'équation (3.11) et en utilisant les équations (3.5) et (3.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}} &= \Lambda(\theta)\dot{e} + \dot{\Lambda}(\theta)\Lambda^{-1}(\theta)\bar{e} \\ &= \Lambda(\theta)A\Lambda^{-1}(\theta)\bar{e} + \Lambda(\theta)(\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)) - \Lambda(\theta)\Delta^{-1}(\theta)K C \Lambda^{-1}(\theta)\bar{e} - \frac{\dot{\theta}}{\theta}(\sigma I_n + D)\bar{e} \\ &= \theta A \bar{e} - \theta K C \bar{e} + \Lambda(\theta)(\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)) - \frac{\dot{\theta}}{\theta}(\sigma I_n + D)\bar{e} \\ &= \theta \tilde{A} \bar{e} + \Lambda(\theta)(\varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u)) - \frac{\dot{\theta}}{\theta}(\sigma I_n + D)\bar{e} \end{aligned}$$

On considère une fonction candidate de Lyapunov :

$$V(\bar{e}) = \bar{e}^T S \bar{e} \quad (3.13)$$

où  $S$  est donnée par (3.8).

A ce stade, on énonce que pour tout  $t \geq 0$ , on a  $\theta(t) \geq 1$ . Cette inégalité sera montrée dans le paragraphe suivant, où on déterminera les bornes inférieure et supérieure de  $\theta(t)$ .

En effet, d'après (3.12) et (3.13) et puisque  $\theta \geq 1$ , on a :

$$\forall t \geq 0 : \|e(t)\| \leq \|\bar{e}(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_m(S)}} \sqrt{V(\bar{e}(t))} \quad (3.14)$$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\bar{e}^T S \dot{\bar{e}} \\ &= 2\theta \bar{e}^T S \tilde{A} \bar{e} + 2\bar{e}^T S \Lambda(\theta)(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - 2\frac{\dot{\theta}}{\theta} (\sigma \bar{e}^T S \bar{e} + \bar{e}^T S D \bar{e}) \\ &= 2\theta \bar{e}^T S \tilde{A} \bar{e} + 2\bar{e}^T S \Lambda(\theta)(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \end{aligned}$$

avec  $\Omega$  est la matrice semi définie positive donnée par (3.9). En utilisant (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -a\theta \bar{e}^T S \bar{e} + 2\bar{e}^T S \Lambda(\theta)(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \\ &\leq -a\theta V + 2\|S\bar{e}\| \|\Lambda(\theta)(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x))\| - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \\ &\leq -a\theta V + 2\sqrt{\lambda_M(S)}\sqrt{V} \sum_{k=1}^q \frac{1}{\theta^{\sigma+k}} \|\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)\| - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \\ &\leq -a\theta V + 2\sqrt{\lambda_M(S)}\sqrt{V} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^k \theta^{-(\sigma+k)} \beta_{kl} \|e^l\| - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \\ &\leq -a\theta V + 2\beta\sqrt{\lambda_M(S)}\sqrt{V} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^k \theta^{-(\sigma+k)} \|e^l\| - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \\ &= -a\theta V + 2\beta\sqrt{\lambda_M(S)}\sqrt{V} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^k \theta^{-(\sigma+k)} \|\theta^{\sigma+l} e^l\| - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \\ &= -a\theta V + 2\beta\sqrt{\lambda_M(S)}\sqrt{V} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^k \theta^{l-k} \|e^l\| - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \\ &\leq -a\theta V + 2\beta\sqrt{\lambda_M(S)}\sqrt{V} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^k \theta^{l-k} \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{\lambda_m(S)}} - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \end{aligned}$$

avec  $\beta_{kl} = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^l}(u, x) \right\|, 1 \leq k \leq q \text{ et } x \in R^n \right\}$  et  $\beta = \max_{\substack{1 \leq k \leq q \\ 1 \leq l \leq k}} \beta_{kl}$ .

Puisque  $\theta(t) \geq 1$ , on a, alors :

$$\dot{V} \leq -a\theta V + 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)} V - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^T \Omega \bar{e} \quad (3.15)$$

Soit :

$$W(\bar{e}) = \bar{e}^T \Omega \bar{e} \quad (3.16)$$

Alors, on a :

$$\mu_1 W \triangleq \frac{\lambda_m(S)}{\lambda_M(\Omega)} W \leq V \leq \frac{\lambda_M(S)}{\lambda_m(\Omega)} W \triangleq \mu_2 W \quad (3.17)$$

On note que  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \mu(S)\mu(\Omega)$ . En utilisant (3.16), l'inégalité (3.15) devient :

$$\dot{V} \leq -a\theta V + 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)} V - \frac{\dot{\theta}}{\theta} W$$

En remplaçant  $\frac{\dot{\theta}}{\theta}$  par son expression, on obtient :

$$\dot{V} \leq -a\theta V + 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)} V + \frac{\mu_1}{2} (a(\theta - 1) - g(t)\gamma(\|\varepsilon\|)) W$$

Par référence à (3.17), on a :

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{a}{2}(\theta + 1)V + 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)} V - \frac{\mu_1}{2\mu_2} g(t)\gamma(\|\varepsilon\|) V \quad (3.18)$$

Le reste de la preuve est comme suit. Tout d'abord, on montre la bornitude de  $\theta(t)$  et on donne les expressions de sa borne supérieure et inférieure. En particulier, on montre que pour tout  $t > 0$ ,  $\theta(t) \geq 1$  comme mentionné a priori. Puis, la bornitude de l'erreur d'observation de la sortie  $\varepsilon(t)$  est montrée. Par la suite, on montre la bornitude de  $e(t)$  et finalement, la convergence exponentielle vers zéro de  $\varepsilon(t)$  et  $e(t)$  est montrée successivement.

### ***La bornitude de $\theta(t)$***

Pour ce faire, on considère les deux cas qui dépendent du signe de  $\dot{\theta}(t)$ . Avant de considérer ces deux cas, il est à noter que d'après l'expression de  $\dot{\theta}(t)$ , on a :

$$\theta = 1 \Rightarrow \dot{\theta}(t) \geq 0$$

Donc, de ce fait et vu que  $\theta(0) \geq 1$ , on peut déduire :

$$\forall t \geq 0 : \theta(t) \geq 1 \quad (3.19)$$

On discute, maintenant, les deux cas de figures de  $\dot{\theta}(t)$ .

- $\dot{\theta}(t) \geq 0$  :

Puisque  $\theta(t) \geq 1$  et d'après l'équation (3.10), on obtient :

$$a(\theta(t) - 1) - g(t)\gamma(\|\varepsilon(t)\|) \leq 0$$

ceci implique que :

$$\theta(t) \leq 1 + \frac{g(t) \gamma(\|\varepsilon(t)\|)}{a} \leq 1 + \frac{M}{a} \gamma(\|\varepsilon(t)\|)$$

Donc

$$\forall t \geq 0 : \theta(t) \leq 1 + \frac{M \gamma_{\max}}{a} \quad (3.20)$$

avec  $\gamma_{\max}$  est la borne supérieure de  $\gamma(t)$ .

- $\dot{\theta}(t) \leq 0$  : Puisque  $\theta(t) \geq 1$  et par référence à l'équation (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &\leq -\frac{\mu_1}{2} (a (\theta(t) - 1) - g(t) \gamma(\|\varepsilon\|)) \\ &\leq -\frac{a\mu_1}{2} \theta(t) + \frac{a\mu_1}{2} \left(1 + \frac{M\gamma_{\max}}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

En intégrant la relation (3.21) entre un temps  $t_0$  et  $t$ , avec  $t_0 < t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \theta(t) &\leq e^{-\frac{a\mu_1}{2}(t-t_0)} \theta(t_0) + \left(1 + \frac{M\gamma_{\max}}{a}\right) \\ &\leq \theta(t_0) + \left(1 + \frac{M\gamma_{\max}}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Maintenant, le temps  $t_0$  peut prendre la valeur 0 car  $\theta(0)$  est choisie arbitrairement. Elle peut prendre, par ailleurs, la valeur finale de la période où  $\dot{\theta}(t) \geq 0$ . Par référence à la relation (3.20), on a :

$$\theta(t_0) \leq 1 + \frac{M \gamma_{\max}}{a}$$

Donc, on peut déduire, que  $\forall t_0$ , on peut choisir la valeur de  $M$  suffisamment grande afin d'obtenir :

$$\theta(t_0) \leq 1 + \frac{M \gamma_{\max}}{a}$$

L'équation (3.22) devient :

$$\theta(t) \leq 2 \left(1 + \frac{M \gamma_{\max}}{a}\right) \quad (3.23)$$

En résumé, et d'après les équations (3.19), (3.20) et (3.23),  $\theta(t)$  est bornée et satisfait la relation suivante :

$$1 \leq \theta(t) \leq \theta_{\max} \triangleq 2 \left(1 + \frac{M \gamma_{\max}}{a}\right) \quad (3.24)$$

**La bornitude de  $\|\varepsilon(t)\|$**

Pour montrer que  $\|\varepsilon(t)\|$  est bornée, on suppose le cas contraire :

$$\exists N > 0; \exists t^* > T; \forall t \geq (t^* - T) : \|\varepsilon(t)\| > N \text{ et } \frac{1}{T} \int_{t^*-T}^t \|\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau > \rho \quad (3.25)$$

Alors, par conséquent, on obtient :

$$\forall t \geq (t^* - T) : \|\varepsilon(t)\| > N \text{ et } g(t) = \frac{M}{1 + \rho} \quad (3.26)$$

Soit  $\gamma_N = \gamma(N)$ .

Puisque  $\gamma$  est une fonction croissante de  $\|\varepsilon(t)\|$ , alors, on a :

$$\forall t \geq (t^* - T) : \gamma(\|\varepsilon(t)\|) \geq \gamma_N$$

Choisissons  $M$  comme suit :

$$M = \frac{\lambda(1 + \rho)}{\gamma_N} \quad (3.27)$$

avec  $\lambda$  est une constante positive choisie telle que :

$$\lambda > \frac{4\beta\mu_2q^2\sqrt{\mu(S)}}{\mu_1}$$

Pour  $t \geq (t^* - T)$ , en utilisant (3.26), l'inégalité (3.18) devient :

$$\dot{V}(\bar{\varepsilon}(t)) \leq -\frac{a}{2}(\theta + 1)V + 2\beta q^2\sqrt{\mu(S)}V - \frac{\mu_1}{2\mu_2} \frac{M\gamma_N}{(1 + \rho)} V(\bar{\varepsilon}(t))$$

En remplaçant  $M$  par son expression, (3.27), on obtient :

$$\dot{V}(\bar{\varepsilon}(t)) \leq -\frac{a}{2}(\theta + 1)V + \left(2\beta q^2\sqrt{\mu(S)} - \frac{\lambda\mu_1}{2\mu_2}\right) V(\bar{\varepsilon}(t)) \leq -\left(\frac{\lambda\mu_1}{2\mu_2} - 2\beta q^2\sqrt{\mu(S)}\right) V(\bar{\varepsilon}(t))$$

L'intégration des termes de gauche et de droite de l'inégalité entre  $(t^* - T)$  et  $t$  donne :

$$V(\bar{\varepsilon}(t)) \leq \exp\left(-\left(\frac{\lambda\mu_1}{2\mu_2} - 2\beta q^2\sqrt{\mu(S)}\right)(t - (t^* - T))\right) V(\bar{\varepsilon}(t^* - T)) \quad (3.28)$$

Maintenant, si on choisit  $t = 2(t^* - T)$ , on obtient :

$$V(\bar{\varepsilon}(2(t^* - T))) \leq \exp\left(-\left(\frac{\lambda\mu_1}{2\mu_2} - 2\beta q^2\sqrt{\mu(S)}\right)(t^* - T)\right) V(\bar{\varepsilon}(t^* - T)) \quad (3.29)$$

Puisque  $V(\bar{\varepsilon}(t^* - T))$  est constante, on peut choisir  $\lambda$  suffisamment grande afin d'obtenir :

$$V(\bar{\varepsilon}(2(t^* - T))) \leq \exp\left(-\left(\frac{\lambda\mu_1}{2\mu_2} - 2\beta q^2\sqrt{\mu(S)}\right)(t^* - T)\right) V(\bar{\varepsilon}(t^* - T)) < \lambda_m(S) \frac{N^2}{4} \quad (3.30)$$

En combinant (3.14) et (3.30), on obtient, pour  $t \geq t^* - T$  :

$$\|\varepsilon(2(t^* - T))\|^2 \leq \|e(2(t^* - T))\|^2 \leq \|\bar{e}(2(t^* - T))\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_m(S)} V(\bar{e}(2(t^* - T))) < \frac{N^2}{4}$$

i.e.

$$\|\varepsilon(2(t^* - T))\| < \frac{N}{2}$$

Ceci est en contradiction avec (3.25) et  $\|\varepsilon(t)\|$  est bornée. Dans ce contexte, on note  $B_\varepsilon$  la borne supérieure de  $\|\varepsilon(t)\|$ , i. e.

$$\forall t \geq 0 : \|\varepsilon(t)\| \leq B_\varepsilon \quad (3.31)$$

On s'intéresse dans le paragraphe suivant à montrer la bornitude de  $\|e(t)\|$ .

### **La bornitude de $\|e(t)\|$**

Pour montrer la bornitude de  $\|e(t)\|$ , on introduit le changement des variables suivant :

$$\tilde{e} = \Lambda(\bar{\theta})e \quad (3.32)$$

avec  $\bar{\theta}$  est une constante satisfaisant la contrainte suivante :

$$\bar{\theta} > \max\left\{\theta_{max}, 2\frac{\beta q^2 \sqrt{\mu(S)}}{a}\right\} \quad (3.33)$$

avec  $\theta_{max}$  est la borne donnée par (3.24). La dynamique de l'erreur (3.11) est transformée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}} &= Ae - \Delta^{-1}(\bar{\theta})KCe + \varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u) + \Delta^{-1}(\bar{\theta})KCe - \Delta^{-1}(\theta)KCe \\ &= Ae - \Delta^{-1}(\bar{\theta})KCe + \varphi(\hat{x}, u) - \varphi(x, u) + \Delta^{-1}(\bar{\theta})K\varepsilon - \Delta^{-1}(\theta)K\varepsilon \end{aligned} \quad (3.34)$$

En utilisant (3.32) et (3.34) et en procédant comme auparavant, on obtient :

$$\dot{\tilde{e}} = \bar{\theta}(A - KC)\tilde{e} + \Lambda(\bar{\theta})(\varphi(u, \hat{x}) - \varphi(u, x)) + \bar{\theta}^{-\sigma}K\varepsilon - \bar{\theta}^{-\sigma}\Delta^{-1}\left(\frac{\theta}{\bar{\theta}}\right)K\varepsilon \quad (3.35)$$

Maintenant, on considère une nouvelle fonction de Lyapunov  $V(\tilde{e}) = \tilde{e}^T S \tilde{e}$  pour le système (3.35). Procédant comme auparavant, on peut montrer que (voir l'inégalité (3.15)) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{e}) &\leq -a\bar{\theta}V + 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)}V + 2\bar{\theta}^{-\sigma}\|S\tilde{e}\|\|K\|B_\varepsilon(1 + \|\Delta^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}})\|) \\ &\leq -(a\bar{\theta} - 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)})V + 4\frac{\lambda_M(S)}{\sqrt{\lambda_m(S)}}\|K\|B_\varepsilon\sqrt{V} \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que  $\theta(t) \geq 1$  et  $\frac{\bar{\theta}(t)}{\theta} < 1$ . Alors, l'inégalité précédente conduit à :

$$\sqrt{V(\tilde{e}(t))} \leq \exp\left(-\frac{(a\bar{\theta} - 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)})}{2}\right) \sqrt{V(\tilde{e}(0))} + kB_\varepsilon \quad (3.36)$$

avec :

$$k = 4\sqrt{\lambda_M(S)} \frac{\|K\|}{(a\bar{\theta} - 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)})} \quad (3.37)$$

ceci implique que  $V(\tilde{e}(t))$  est bornée et par la suite l'est  $\tilde{e}(t)$  ou équivalent parlant  $e(t)$ . Dans ce contexte, on note  $B_e$  la borne supérieure de  $\|e(t)\|$ , i. e.

$$\forall t \geq 0 : \|e(t)\| \leq B_e \quad (3.38)$$

Pour terminer la preuve de convergence, on montre d'abord que  $\varepsilon(t)$  converge vers zéro et ensuite la convergence vers zéro de  $e(t)$  est prouvée.

### *La convergence vers zéro de $\|\varepsilon(t)\|$*

On montre, dans la suite, que  $\|\varepsilon(t)\|$  converge exponentiellement vers zéro. Pour ce faire, on procède par contradiction et on suppose que  $\|\varepsilon(t)\|$  ne converge pas exponentiellement vers zéro. Ceci implique que :

$$\forall c > 0; \forall \alpha > 0; \forall T^* > T; \exists t^* > T^* : \|\varepsilon(t^*)\| > ce^{-\alpha t^*} \quad (3.39)$$

Mais, puisque  $t \mapsto \|\varepsilon(t)\| - ce^{-\alpha t}$  est une fonction continue, alors on a :

$$\forall c > 0; \forall \alpha > 0; \forall T^* > T; \exists T_1 > 0; \forall t \in [t^*, t^* + T_1] : \|\varepsilon(t)\| > ce^{-\alpha t} \geq ce^{-\alpha t^*} \quad (3.40)$$

Maintenant, puisque  $\|\varepsilon(t)\|$  est bornée et en choisissant  $\rho > B_\varepsilon^2$ , on a, pour tout  $t \geq t^*$  :

$$g(t) \geq \frac{M}{1 + B_\varepsilon^2} \quad (3.41)$$

On choisit  $M$  comme suit :

$$M = \frac{\lambda(1 + B_\varepsilon^2)}{\gamma_m} \quad (3.42)$$

avec  $\gamma_m = \inf\{\gamma(\|\varepsilon(t)\|); t \in [t^*, t^* + T_1]\}$  et  $\lambda$  est une constante positive qui satisfait  $\lambda > 4\beta q^2 \sqrt{\mu(S)}$ . En utilisant (3.41), l'inégalité (3.18) devient :

$$\dot{V}(\bar{e}(t)) \leq -\frac{a}{2}(\theta + 1)V(\bar{e}(t)) + 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)}V(\bar{e}(t)) - \frac{\mu_1}{2\mu_2} \frac{M}{1 + B_\varepsilon^2} \gamma_m V(\bar{e}(t))$$

En remplaçant  $M$  par son expression, (3.42), dans (3.18), on obtient pour tout  $t \in [t^*, t^* + T_1]$  :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}(t)) &\leq -\frac{a}{2}(\theta + 1)V(\bar{e}(t)) + \left(2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)} - \frac{\lambda\mu_1}{2\mu_2}\right) V(\bar{e}(t)) \\ &\leq -\left(\frac{\lambda\mu_1}{2\mu_2} - 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)}\right) V(\bar{e}(t)) \end{aligned} \quad (3.43)$$

En intégrant (3.43) sur l'intervalle  $[t^*, t^* + T_1]$ , on obtient :

$$V(\bar{e}(t^* + T_1)) \leq \exp\left(-\left(\frac{\lambda\mu_1}{2\mu_2} - 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)}\right) T_1\right) V(\bar{e}(t^*))$$

ou équivalent parlant :

$$\|\bar{e}(t^* + T_1)\| \leq \sqrt{\mu(S)} \exp\left(-\left(\frac{\lambda\mu_1}{4\mu_2} - \beta q^2 \sqrt{\mu(S)}\right) T_1\right) \|\bar{e}(t^*)\|$$

Maintenant, d'après (3.12) et (3.4), on a, pour  $\theta(t) \geq 1$  :

$$\|\bar{e}(t)\| \leq \|e(t)\| \leq \theta^{\sigma+q} \|\bar{e}(t)\| \quad (3.44)$$

Donc, par conséquent, on a :

$$\|\varepsilon(t^* + T_1)\| \leq \|e(t^* + T_1)\| \leq \theta^{\sigma+q} \|\bar{e}(t^* + T_1)\| \leq \theta_{max}^{\sigma+q} \|\bar{e}(t^* + T_1)\| \quad (3.45)$$

En combinant (3.44) et (3.45), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t^* + T_1)\| &\leq \sqrt{\mu(S)} \theta_{max}^{\sigma+q} \exp\left(-\left(\frac{\lambda\mu_1}{4\mu_2} - \beta q^2 \sqrt{\mu(S)}\right) T_1\right) \|\bar{e}(t^*)\| \\ &\leq \sqrt{\mu(S)} \theta_{max}^{\sigma+q} \exp\left(-\left(\frac{\lambda\mu_1}{4\mu_2} - \beta q^2 \sqrt{\mu(S)}\right) T_1\right) \|e(t^*)\| \\ &\leq \sqrt{\mu(S)} B_e \theta_{max}^{\sigma+q} \exp\left(-\left(\frac{\lambda\mu_1}{4\mu_2} - \beta q^2 \sqrt{\mu(S)}\right) T_1\right) \end{aligned}$$

avec  $B_e$  est la borne supérieure de  $e(t)$  donnée par (3.38). Donc, il est clair maintenant qu'on peut choisir  $\lambda$  suffisamment grande de telle façon à avoir :

$$\sqrt{\mu(S)} B_e \theta_{max}^{\sigma+q} \exp\left(-\left(\frac{\lambda\mu_1}{4\mu_2} - \beta q^2 \sqrt{\mu(S)}\right) T_1\right) < \frac{1}{2} c e^{-\alpha(T_1+t^*)} \quad (3.46)$$

La combinaison de (3.40) et (3.46) conduit à une contradiction i. e.

$$0 < ce^{-\alpha(T_1+t^*)} < \|\varepsilon(t^* + T_1)\| < \frac{1}{2}ce^{-\alpha(T_1+t^*)}$$

D'où, la convergence vers zéro de  $\|\varepsilon(t)\|$  est prouvée et on a :

$$\exists c > 0; \exists \alpha > 0; \exists T^* > T; \forall t > T^* : \|\varepsilon(t)\| \leq ce^{-\alpha t} \quad (3.47)$$

Pour terminer la preuve du théorème, on doit montrer la convergence exponentielle vers zéro de  $\|e(t)\|$ .

### *La convergence vers zéro de $e(t)$*

On procède de la même façon lorsqu'on a montré la bornitude de  $e(t)$  et on reconsidère le même changement des variables donné par (3.32). Donc, procédant comme auparavant et imitant l'équation (3.36), on peut facilement obtenir pour  $t \geq T^*$ , où  $T^*$  est donnée par (3.47) :

$$\sqrt{V(\tilde{e}(t))} \leq \exp\left(-\frac{(a\bar{\theta} - 2\beta q^2 \sqrt{\mu(S)})}{2}\right) \sqrt{V(\tilde{e}(0))} + kce^{-\alpha t} \quad (3.48)$$

où  $\bar{\theta}$  et  $k$  sont données respectivement par les équations (3.33) et (3.37). Il est clair à partir de (3.48) que  $V(\tilde{e}(t))$  converge exponentiellement vers zéro. Ce qui termine la preuve du théorème.

### 3.2.2.3 Réglage des paramètres de l'observateur

Comme on l'a déjà mentionné, les équations de l'observateur contiennent trois paramètres de réglage  $M$ ,  $T$  et  $\rho$  [25, 67, 68]. Le choix du paramètre  $\rho$  n'est pas critique parce qu'il est introduit principalement pour saturer l'intégrale  $\frac{1}{T} \int_{\max(0, t-T)}^t \|\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau$ . Par conséquent, le choix d'une valeur suffisamment grande pour  $\rho$  peut convenir. Le choix des autres paramètres  $M$ ,  $T$  et la fonction  $\gamma$  se fait comme suit :

#### *- Choix de la fonction $\gamma$*

Il est nécessaire que la fonction  $\gamma(\cdot)$  soit une fonction croissante bornée avec  $\gamma(x) > 0$  pour tout  $x > 0$  et  $\gamma(0) = 0$ . Plusieurs fonctions réelles peuvent être retenues. On considère pour les exemples de simulation deux fonctions :

- Choix 1 :

$$\gamma(\xi) = \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} \quad \text{avec} \quad \xi \in R_+^* \quad (3.49)$$

- Choix 2 :

$$\gamma(\xi) = \tanh \xi^2 \quad \text{avec} \quad \xi \in \mathbb{R}_+^* \quad (3.50)$$

- *Choix des paramètres  $M$  et  $T$*

Réécrivons de nouveau  $g(t)$  :

$$g(t) = \frac{M}{1 + \min(\rho, \mathcal{P}_T(t))}$$

avec

$$\mathcal{P}_T(t) = \frac{1}{T} \int_{\max(0, t-T)}^t \|\tilde{y}(\tau)\|^2 d\tau$$

représente la puissance de l'erreur d'observation  $\varepsilon(t)$ , calculée sur une fenêtre glissante de largeur  $T$ . Il est clair que la fonction  $g(t)$  est bornée comme suit :

$$\forall t \geq 0 : \frac{M}{1 + \rho} \leq g(t) \leq M$$

Le paramètre  $M$  peut être choisi relativement grand en l'absence des bruits de mesure. Cette valeur importante permet aussi au paramètre  $\theta(t)$  d'atteindre des valeurs importantes ce qui permet, par conséquent, d'accélérer la convergence et autoriser le paramètre  $\theta(t)$  de régagner la valeur 1 prédéfinie. Mais, la considération des valeurs importantes de  $M$  n'est pas souhaitable dans un environnement bruité. Dans le but de prendre en compte la présence des bruits de mesure, la valeur de  $M$  est divisé par la puissance de l'erreur d'observation de la sortie calculée sur une horizon glissante de largeur  $T$ .

### 3.2.3 Exemple de Simulation

Dans le but d'illustrer les performances offertes par l'observateur proposé, on reconsidère le système non linéaire décrit par le système d'équations (2.34) donné dans la section 2.4 du premier chapitre.

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = f^1(x^2(t), u(t)) = x^2(t) + (x^2(t))^3 - x^1(t) + \sin(t/\pi) \\ \dot{x}^2(t) = f^2(x^1(t), x^2(t), u(t)) = 10 \cos(10x^2(t)) + 5 \cos(t) \\ y(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (3.51)$$

Un observateur de la forme (3.10) peut être synthétisé dans l'espace des coordonnées  $z$ . Pour obtenir les équations de l'observateur dans les coordonnées originales, il suffit de multiplier le vecteur gain dans les nouvelles coordonnées,  $\Delta^{-1}(\theta) K$ , par l'inverse de la matrice jacobienne de transformation,  $(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\hat{x}))^{-1}$ .

Pour l'exemple considéré, les équations de l'observateur dans les coordonnées originales sont détaillées comme suit [25] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}^1(t) \\ \dot{\hat{x}}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}^2(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\hat{x}^2(t))^3 - \hat{x}^1 + \sin(t/\pi) \\ 10 \cos(10\hat{x}^2(t)) + 5 \cos(t) \end{pmatrix} \\ \quad - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+3(\hat{x}^2(t))^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\theta(t)K^1 \\ \theta^2(t)K^2 \end{pmatrix} Ce(t) \\ \dot{\theta}(t) = -\frac{\mu_1}{2} \theta(t) (a(\theta(t) - 1) - g(t) \gamma(\|\varepsilon(t)\|)) \\ g(t) = \frac{M}{1 + \frac{1}{T} \int_{\max(0, t-T)}^t \|\varepsilon^2(\tau)\| d\tau} \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Les simulations numériques réalisées considèrent les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0.8, \hat{x}_1(0) = 1, \hat{x}_2(0) = 2, \theta(0) = 120$$

Le gain  $K$  est choisi égal à :

$$K = \begin{pmatrix} K_1 = 2 \\ K_2 = 1 \end{pmatrix}$$

ceci permet de placer les deux pôles de la matrice  $\tilde{A} = A - KC$  à  $(-1)$ . La matrice  $S$ , donnée par (3.8), est telle que  $a = 1$  et que la matrice  $Q = SD + DS$  est semi définie positive. Le paramètre  $\sigma$  est pris égal à zéro et le paramètre  $\mu_1$  est égal à 0.04.

Dans le but d'illustrer le résultat de l'observation, on a considéré le cas sans bruit et les cas des deux niveaux de bruits additionnés aux instants  $t = 15$  et  $t = 35$  et ont respectivement des variances égales à  $\sqrt{0.07}$  et  $\sqrt{0.1}$ . Finalement, à l'instant  $t = 58$ , on a reconsidéré le cas déterministe. L'évolution de la sortie considérée est illustrée sur la figure 3.1.

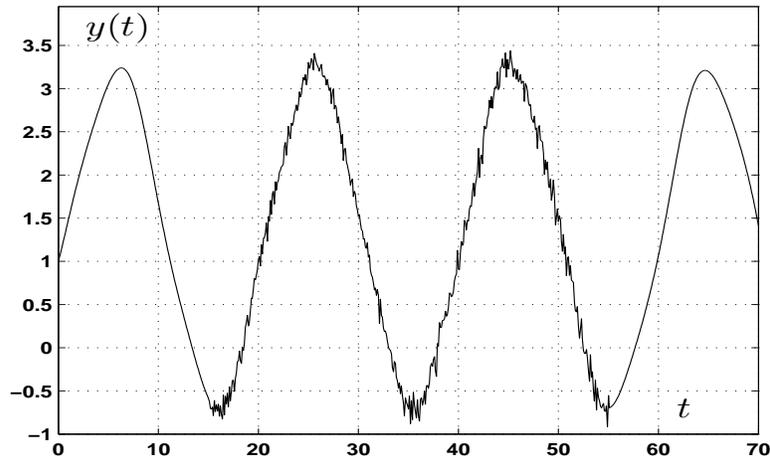
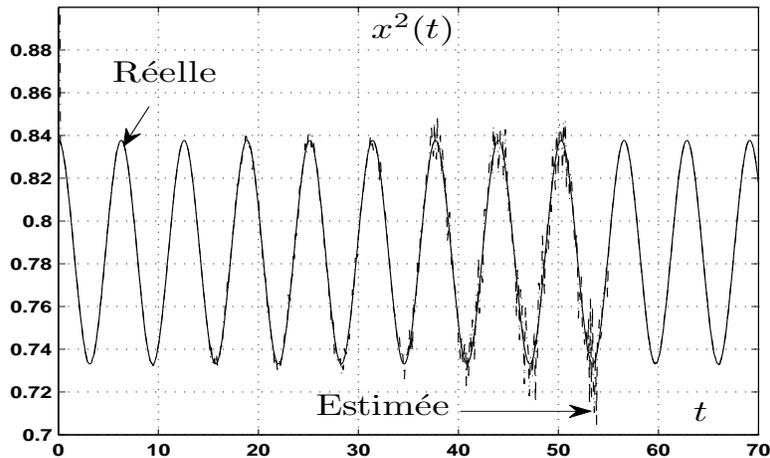


Figure 3.1: Evolution de la sortie bruitée.

Les valeurs des paramètres  $M$  et  $T$  utilisées en simulation sont égales respectivement à 1000 et 1. Quant à la fonction  $\gamma$ , plusieurs simulations sont réalisées en considérant les fonctions données par (3.49) et (3.50). Puisque les résultats obtenus sont pratiquement identiques, alors, seuls les résultats obtenus par la fonction  $\gamma$  spécifiée dans (3.49), sont présentés, i. e.

$$\gamma(\|\varepsilon\|) = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}$$

L'estimation de la variable d'état  $x^2(t)$  donnée par l'observateur proposé est illustrée sur la figure 3.2.

Figure 3.2: Evolution de  $x^2(t)$  estimée par un observateur à grand gain dynamique.

La valeur initiale relativement importante de  $\theta$  a conduit à une convergence rapide de l'état estimé vers l'état réel. Les résultats obtenus montrent clairement que l'observateur proposé résout parfaitement le compromis entre la rapidité de convergence et la sensibilité aux bruits de mesure. L'évolution du paramètre de synthèse  $\theta$  est donnée sur la figure 3.3.

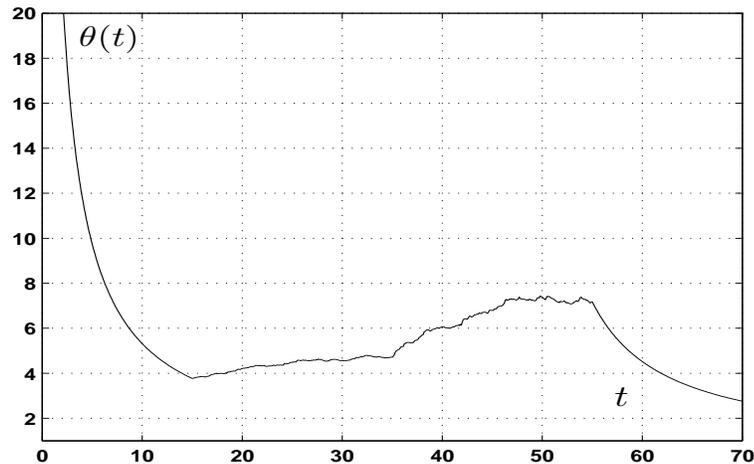


Figure 3.3: Evolution du paramètre  $\theta$  de l'observateur à grand gain dynamique.

On note qu'à partir de l'instant  $t = 58$ , la sortie est de nouveau non bruitée et le paramètre  $\theta$  décroît jusqu'à la valeur prédéfinie 1.

Les résultats obtenus par l'observateur proposé sont comparés par ceux obtenus avec l'observateur à grand gain classique [32, 23] pour deux différentes valeurs de  $\theta$  ( $\theta = 20$  et  $\theta = 30$ ). La figure 3.4 laisse apparaître que la valeur de  $\theta = 20$  est jugé petite pour assurer l'estimation précise de la variable d'état  $x^2$ . Par contre, une valeur de  $\theta = 30$  a pu assurer une bonne estimation dans le cas sans bruits de mesure. Dans le cas contraire, les estimations fournies par l'observateur à grand gain classique avec  $\theta = 30$  sont très bruitées et ceci met en valeur l'amélioration apportée par l'observateur à grand gain dynamique.

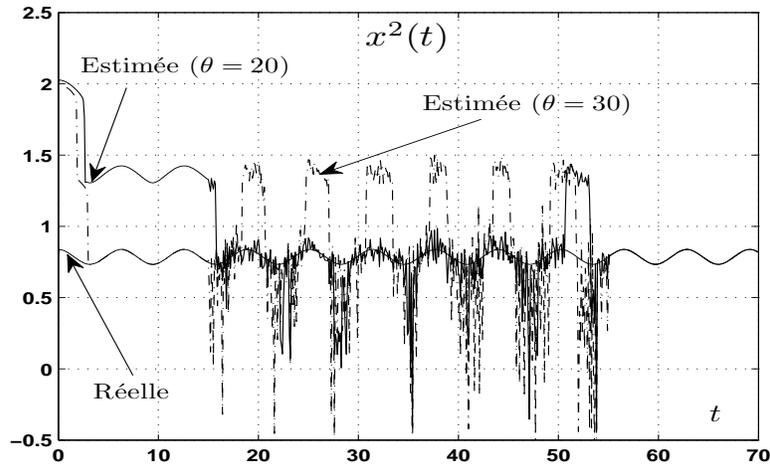


Figure 3.4: Evolution de  $x^2(t)$  estimée (observateur à grand gain classique).

### 3.3 Synthèse de l'observateur à grand gain dynamique pour la classe la plus générale des systèmes non linéaires multivariables uniformément observables

#### 3.3.1 Motivation

Comme s'est mentionné dans le premier chapitre, jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas de classe générale qui représente les systèmes non linéaires multi-entrées et multi-sorties uniformément observables à toute entrée. Mais, on peut parler des classes qui représentent ces systèmes, dans la section précédente, on a présenté la synthèse de l'observateur à grand gain dynamique pour la classe des systèmes non linéaires multivariables obtenue par extension directe de la classe des systèmes non linéaires monovariables uniformément observable. Dans cette section, on détaille la synthèse et l'analyse de la convergence de ce nouveau type des observateurs pour la classe des systèmes non linéaires multivariables présentée par (2.20) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.53)$$

où l'état  $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^q(t) \end{pmatrix} \in R^n$ , avec  $x^k(t) = \begin{pmatrix} x_1^k(t) \\ x_2^k(t) \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k(t) \end{pmatrix} \in R^{n_k}$ ,  $x_i^k(t) \in R^{p_k}$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ ,  $\sum_{k=1}^q n_k = n$ ;

la sortie du système  $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{pmatrix} \in R^p$  avec  $y_k(t) \in R^{p_k}$ ,  $k = 1, \dots, q$  et  $\sum_{k=1}^q p_k = p$ ;

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_q \end{bmatrix}, \quad A_k = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_k} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & I_{p_k} \\ 0 & \dots & 0 & 0_{p_k} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_q \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\varphi(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \varphi^1(x(t), u(t)) \\ \varphi^2(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ \varphi^q(x(t), u(t)) \end{pmatrix} \in R^n;$$

$$\varphi^k(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1^k(x(t), u(t)) \\ \varphi_2^k(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^k(x(t), u(t)) \end{pmatrix} \in R^{n_k} \text{ où chaque fonction } \varphi_i^k(x(t), u(t)) \in R^{p_k}$$

$k = 1, \dots, q$ , possède la structure suivante :

- pour  $1 \leq i \leq \lambda_k - 1$  :

$$\varphi_i^k(x(t), u(t)) = \varphi_i^k(x^1(t), x^2(t), \dots, x^{k-1}(t), x_1^k(t), \dots, x_i^k(t), x_1^{k+1}(t), x_1^{k+2}(t), \dots, x_1^q(t), u(t)) \quad (3.56)$$

- pour  $i = \lambda_k$  :

$$\varphi_{\lambda_k}^k(x(t), u(t)) = \varphi_{\lambda_k}^k(x^1(t), x^2(t), \dots, x_1^q(t), u(t)) \quad (3.57)$$

Cette classe est, d'après nos connaissances et jusqu'à l'heure actuelle, la classe la plus générale représentant les systèmes non linéaires multivariables uniformément observables.

Dans le paragraphe suivant, on procède, comme auparavant, à détailler une étude préliminaire et présenter quelques variables qui seront utiles lors de la synthèse de l'observateur.

### 3.3.1.1 Etude préliminaire et notations

On considère  $\theta : R \rightarrow R, t \mapsto \theta(t)$  une fonction différentiable à valeurs positives variable au cours de temps et pour  $k = 1, \dots, q$ , on considère la matrice diagonale  $\Delta_k(\theta(t))$  définie par [67, 68] :

$$\Delta_k(\theta(t)) = \text{diag}\left(\frac{1}{(\theta(t))^{\delta_k}} I_{p_k}, \frac{1}{(\theta(t))^{2\delta_k}} I_{p_k}, \dots, \frac{1}{(\theta(t))^{\lambda_k \delta_k}} I_{p_k}\right) \quad (3.58)$$

Les variables  $\delta_k$ , définissent la puissance de  $\theta$ , sont données par l'équation (2.25).

$$\begin{cases} \delta_k = 2^{q-k} \left( \prod_{i=k+1}^q (\lambda_i - \frac{3}{2}) \right) \\ \delta_q = 1 \end{cases} \quad (3.59)$$

On note que pour tout  $k = 1, \dots, q-1$ , on a [68] :

$$\frac{\delta_k}{2} = (\lambda_{k+1} - \frac{3}{2}) \delta_{k+1} \quad (3.60)$$

Puisque  $\lambda_k \geq 2$ , alors, les  $\delta_q$  constituent une suite décroissante des réels positifs, i. e.

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_q = 1 \quad (3.61)$$

On donne, maintenant, un lemme qui sera utile dans l'analyse de convergence de l'observateur. Ce lemme permet de trouver une séquence des réels qui reflète dans un sens les interconnexions entre les blocs des non linéarités. Sa preuve est détaillée dans l'annexe 5.5.

**Lemme 3.3.1** *Pour  $k, l = 1, \dots, q, i = 1, \dots, \lambda_k$  et  $j = 2, \dots, \lambda_l - 1$ , on définit  $\chi_{l,j}^{k,i}$  comme suit [24, 68] :*

$$\chi_{l,j}^{k,i} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j}(u, x) \equiv 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et On considère la séquence des réels suivante :

$$\sigma_i^k = \sigma_1^k + i\delta_k, \quad k = 1, \dots, q \text{ et } i = 1, \dots, \lambda_k \quad (3.62)$$

avec :

$$\sigma_1^k = -\lambda_k \delta_k + \lambda_1 \delta_1 + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \quad (3.63)$$

et les  $\delta_k$  sont données par l'expression (3.59). Alors, les termes de cette séquence satisfont la propriété suivante :

$$(P1) \quad Si \lambda_{l,j}^{k,i} = 1 \text{ alors } \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} \leq -\frac{1}{2^q} \quad (3.64)$$

On note que les réels  $\sigma_1^k$  donnée par la lemme 3.3.1 satisfassent aussi la propriété suivante :

$$\sigma_{\lambda_k}^k \stackrel{\Delta}{=} \sigma_1^k + \lambda_k \delta_k = 1 + \lambda_1 \delta_1 = \sigma_{\lambda_1}^1 \text{ pour } k = 1, \dots, q \quad (3.65)$$

Il est à noter aussi que la séquence des réels  $\sigma_k^i$  vérifie aussi les deux propriétés suivantes [68] :

$$P1. \text{ pour } k = 1, \dots, q, \text{ et } i = 1, \dots, \lambda_k, \text{ on a } \sigma_i^k > 0$$

et

$$P2. \text{ pour } k = 1, \dots, q, \text{ on a } \sigma_{\lambda_k}^k = \sigma_{\lambda_1}^1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k} \right)$$

Pour vérifier la première propriété, on note, tout d'abord, que d'après (3.64), on a  $\sigma_1^1 = \frac{1}{2}$ . Donc, on peut montrer que  $\sigma_1^k > \sigma_1^{k-1}$  pour tout  $k = 2, \dots, q$ . En effet :

$$\begin{aligned} \sigma_1^k - \sigma_1^{k-1} &= \lambda_{k-1} \delta_{k-1} - \lambda_k \delta_k + \left( \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} \right) > \lambda_{k-1} \delta_{k-1} - \lambda_k \delta_k \\ &= \lambda_{k-1} \delta_{k-1} - \frac{3\delta_k}{2} - \left( \lambda_k - \frac{3}{2} \right) \delta_k = \lambda_{k-1} \delta_{k-1} - \frac{3\delta_k}{2} - \frac{\delta_{k-1}}{2} \text{ d'après (3.60)} \\ &= \left( \lambda_{k-1} - \frac{1}{2} \right) \delta_{k-1} - \frac{3\delta_k}{2} \geq \frac{3\delta_{k-1}}{2} - \frac{3\delta_k}{2} \text{ puisque } \lambda_{k-1} \geq 2 \\ &\geq 0 \text{ d'après (3.61)} \end{aligned}$$

Alors, par conséquent, on a  $\sigma_1^k > \sigma_1^{k-1} > \sigma_1^1 > 0$  et par la suite, on a  $\sigma_i^k > 0$  pour  $i \geq 2$ , puisque  $\sigma_i^k = \sigma_1^k + \delta_k \lambda_k$  et  $\delta_k \lambda_k > 0$ . La deuxième propriété découle de (3.64) puisqu'on a :

$$\sigma_{\lambda_k}^k = \sigma_1^k + \delta_k \lambda_k = \delta_1 \lambda_1 + \left( 1 - \frac{1}{2^k} \right) = \frac{1}{2} + \delta_1 \lambda_1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k} \right) = \sigma_{\lambda_1}^1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k} \right) \quad (3.66)$$

Avant de finir cette section, on définit come précédemment quelques matrices qui seront utile pour démontrer la convergence de l'observateur. En effet, pour  $k = 1, \dots, q$ , soit :

$$\Lambda_k(\theta(t)) = (\theta(t))^{-\sigma_1^k} \Delta_k(\theta(t)) \quad (3.67)$$

avec les  $\sigma_1^k$  sont des réels positifs donnés par la lemme 3.3.1 et les  $\Delta_k(\theta(t))$  est définie par l'équation (3.58). En prenant en compte les structures de  $A_k$  et  $C_k$  données par (3.54) et (3.55), respectivement, on peut montrer que les identités suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} \Lambda_k(\theta(t)) A_k \Lambda_k^{-1}(\theta(t)) &= \Delta_k(\theta(t)) A_k \Delta_k^{-1}(\theta(t)) = (\theta(t))^{\delta_k} A_k \\ C_k \Lambda_k^{-1}(\theta(t)) &= (\theta(t))^{\sigma_1^k + \delta_k} C_k \end{aligned} \quad (3.68)$$

De plus, on peut facilement vérifier que :

$$\dot{\Lambda}_k(\theta(t)) \triangleq \frac{d}{dt}\Lambda_k(\theta(t)) = -\frac{\dot{\theta}(t)}{\theta(t)}\Lambda_k(\theta(t))(\sigma_1^k I_k + \delta_k D_k) \quad (3.69)$$

avec  $I_k$  est la matrice identité d'ordre  $k \times k$  et  $D_k$  est la matrice diagonale, d'ordre  $n_k \times n_k$ , suivante :  $D_k = \text{diag}(1, 2, \dots, n_k)$ .

Maintenant, pour  $k = 1, \dots, q$ , on définit :

$$K_k^T = \left[ K_{k,1}^T \quad K_{k,2}^T \quad \dots \quad K_{k,n_k}^T \right]^T \quad \text{avec } K_{k,i} \in R^{p_k \times p_k} \quad (3.70)$$

la matrice d'ordre  $n_k \times p_k$  de telle façon à avoir la matrice  $\tilde{A}_k \triangleq A_k - K_k C_k$  une matrice de Hurwitz. Alors, il existe un réel strictement positif  $a > 0$  et  $q$  matrices Définies Positives  $S_k$ , d'ordre  $n_k \times n_k$  ([55, 58]) tels que :

$$\tilde{A}_k^T S_k + S_k \tilde{A}_k \leq -a S_k \quad \text{et} \quad D_k S_k + S_k D_k \geq 0 \quad (3.71)$$

Soit :

$$\begin{aligned} Q_k &= S_k D_k + D_k S_k; \quad \Omega_k = \delta_k Q_k + 2\sigma_1^k S_k \\ \Omega &= \text{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_q); \quad S = \text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_q) \end{aligned} \quad (3.72)$$

En prenant en considération les faits que  $Q_k \geq 0$  (d'après (3.71),  $\sigma_1^k > 0$  et  $S_k = S_k^T > 0$ ), alors, on peut déduire que  $\Omega_k$  est une matrice Symétrique Définie Positive (SDP) et l'est aussi  $\Omega$ . Dans ce contexte, on note par  $\lambda_M(\cdot)$  et  $\lambda_m(\cdot)$  la valeur propre la plus grande et la plus petite de  $(\cdot)$ , respectivement. Le nombre de conditionnement de  $(\cdot)$  est noté par  $\mu(\cdot)$ , i.e.  $\mu(\cdot) = \frac{\lambda_M(\cdot)}{\lambda_m(\cdot)}$ .

### 3.3.2 Synthèse de l'observateur

Comme dans toute synthèse de l'observateur à grand gain [22, 32, 80], on considère la même hypothèse de Lipschitz que précédemment : l'hypothèse 3.2.1.

#### 3.3.2.1 Equations de l'observateur

L'observateur proposé pour cette classe des systèmes non linéaires dérive de l'observateur à grand gain classique moyennant un gain variable au cours de temps comme il est détaillé dans le système des équations suivant [67, 68] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^k(t) = A_k \hat{x}^k(t) + \varphi^k(\hat{x}(t), u(t)) - \Delta_k^{-1}(\theta(t)) K_k C_k e^k(t), \quad k = 1, \dots, q \\ \dot{\theta}(t) = -\frac{\mu-1}{2} \theta(t) (a(\theta(t)) - 1) - g(t) \gamma(\|\tilde{y}(t)\|) \quad \text{avec } \theta(0) \geq 1 \\ g(t) = \frac{M}{1 + \min(\rho, \frac{1}{T} \int_{\max(0, t-T)}^t \|\tilde{y}(\tau)\|^2 d\tau)} \end{cases} \quad (3.73)$$

avec :

$$\bullet \hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}^1(t) \\ \hat{x}^2(t) \\ \vdots \\ \hat{x}^q(t) \end{pmatrix} \in R^n, \hat{x}^k(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^k(t) \\ \hat{x}_2^k(t) \\ \vdots \\ \hat{x}_{\lambda_k}^k(t) \end{pmatrix} \in R^{n_k}, \hat{x}_i^k(t) \in R^{p_k}, i = 1, \dots, \lambda_k,$$

$$k = 1, \dots, q, \sum_{k=1}^q n_k = n.$$

- $\hat{x}_1^k(t) = x_1^k(t)$  (injection de la sortie) pour  $k = 1, \dots, q$ .
- $\hat{x}_i^k(t) = \hat{x}_i^k(t)$  si  $i \neq 1$ .
- $e^k(t) = \hat{x}^k(t) - x^k(t)$ ,  $\tilde{y}(t) = Ce(t) = C(\hat{x}(t) - x(t))$ ,  $\mu_1 = \frac{\lambda_m(S)}{\lambda_M(\Omega)}$ .
- $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie mesurées du système réel.
- Les réels  $\rho, T, M > 0$  sont les paramètres de synthèse de l'observateur.
- $\gamma : R \rightarrow R_+$ ,  $\|\varepsilon\| \mapsto \gamma(\|\varepsilon\|)$  une fonction croissante à valeurs réelles positives qui satisfait les propriétés suivantes :
  - i)  $\gamma(0) = 0$
  - ii)  $\gamma(x) > 0, x > 0$

On note que, comme précédemment, les équations de l'observateur contiennent trois paramètres de synthèse  $M, T$  et  $\rho$  dont on a détaillé leurs choix plus haut (section 3.2.2.3).

On énonce maintenant le théorème suivant :

**Théorème 3.3.1** [67, 68]

*Supposons que le système (3.53) satisfait l'hypothèse (3.2.1), alors, les trajectoires du système (3.73) convergent exponentiellement vers celles du système (3.53) pour des valeurs relativement importantes de  $M$ .*

La preuve de ce théorème sera l'objet du paragraphe suivant.

**3.3.2.2 Preuve de la convergence**

L'analyse de la convergence de ce type des observateurs comprend les mêmes étapes que celle de la section 3.2.2.2, donc, dans un premier temps, on calcule la dérivée par rapport au temps de  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , puis, on montre la bornitude de  $\theta(t)$  et par la suite on détaille l'analyse de la bornitude de  $\tilde{y}(t)$  et de  $e(t)$  et finalement la convergence exponentielle vers zéro de  $\tilde{y}(t)$  puis de  $e(t)$  seront montrées [67, 68].

Concernant la démonstration de la bornitude de  $\theta(t)$ , cette analyse est identique à celle de la section 3.2.2.2 et ses bornes inférieure et supérieure sont par la suite identiques et déjà déterminées. On s'intéresse, maintenant, à détailler le reste de la preuve de la convergence.

Pour ce faire, on dérive par rapport au temps le vecteur  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  et on considère  $e^k(t)$  la  $k^{\text{ième}}$  composante de  $e(t)$ . Pour alléger les expressions et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet la variable temps "t" [67, 68]. On obtient alors :

$$\dot{e}^k = A_k e^k + \varphi^k(\hat{\underline{x}}, u) - \varphi^k(x, u) - \Delta_k^{-1}(\theta) K_k C_k e^k \quad (3.74)$$

avec  $u$  une entrée admissible telle que  $\|u\|_\infty \leq \eta$ ,  $\eta > 0$  est une constante donnée. Pour  $k = 1, \dots, q$ , on considère :

$$\bar{e}^k = \Lambda_k(\theta) e^k \quad (3.75)$$

D'après l'équation (3.74) et en utilisant (3.68) et (3.69), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}^k &= \Lambda_k(\theta) \dot{e}^k + \dot{\Lambda}_k(\theta) \Lambda_k^{-1}(\theta) \bar{e}^k \\ &= \Lambda_k(\theta) A_k \Lambda_k^{-1}(\theta) \bar{e}^k + \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(\hat{\underline{x}}, u) - \varphi^k(x, u)) - \Lambda_k(\theta) \Delta_k^{-1}(\theta) K_k C_k \Lambda_k^{-1}(\theta) \bar{e}^k \\ &\quad - \frac{\dot{\theta}}{\theta} (\sigma_1^k I_k + \delta_k D_k) \bar{e}^k \\ &= \theta^{\delta_k} A_k \bar{e}^k - \theta^{\delta_k} K_k C_k \bar{e}^k + \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(\hat{\underline{x}}, u) - \varphi^k(x, u)) - \frac{\dot{\theta}}{\theta} (\sigma_1^k I_k + \delta_k D_k) \bar{e}^k \\ &= \theta^{\delta_k} \tilde{A}_k \bar{e}^k + \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(\hat{\underline{x}}, u) - \varphi^k(x, u)) - \frac{\dot{\theta}}{\theta} (\sigma_1^k I_k + \delta_k D_k) \bar{e}^k \end{aligned}$$

Soit :

$$V_k(\bar{e}^k) = \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k \quad (3.76)$$

et soit :

$$V(\bar{e}) = \sum_{k=1}^q V_k(\bar{e}^k) = \bar{e}^T S \bar{e}$$

avec  $S$ , donnée par (3.72), une fonction candidate de Lyapunov. On note que d'après (3.75) et (3.76), on a pour  $\theta(t) \geq 1$  :

$$\forall t \geq 0 : \|e^k(t)\|^2 \leq \|\bar{e}^k(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_m(S_k)} V_k(\bar{e}^k(t))$$

et par conséquent, on a :

$$\forall t \geq 0 : \|e(t)\| \leq \|\bar{e}(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_m(S)}} \sqrt{V(\bar{e}(t))} \quad (3.77)$$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= 2\bar{e}^{kT} S_k \dot{\bar{e}}^k \\ &= 2\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k \tilde{A}_k \bar{e}^k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(\hat{\underline{x}}, u) - \varphi^k(x, u)) - 2\frac{\dot{\theta}}{\theta} (\sigma_1^k \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k + \delta_k \bar{e}^{kT} S_k D_k \bar{e}^k) \\ &= 2\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k \tilde{A}_k \bar{e}^k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(\hat{\underline{x}}, u) - \varphi^k(x, u)) - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k \end{aligned}$$

avec  $\Omega_k$ , la matrice symétrique définie positive, donnée par (3.72). En utilisant (3.71), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_k &\leq -a\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta)(\varphi^k(\hat{x}, u) - \varphi^k(x, u)) - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k \\
 &\leq -a\theta^{\delta_k} V_k + 2\|S_k \bar{e}^k\| \|\Lambda_k(\theta)(\varphi^k(\hat{x}, u) - \varphi^k(x, u))\| - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k \\
 &\leq -a\theta^{\delta_k} V_k - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k + 2\sqrt{\lambda_M(S)} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \frac{1}{\theta^{\sigma_i^k}} \|(\varphi_i^k(\hat{x}, u) - \varphi_i^k(x, u))\|
 \end{aligned}$$

avec  $\sigma_i^k$  et  $\sigma_j^l$  sont définies par (3.62). Alors :

$$\dot{V}_k \leq -a\theta^{\delta_k} V_k - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k + 2\rho_k \sqrt{\lambda_M(S)} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{-\sigma_i^k} \|e_j^l\|$$

avec  $\rho_k = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \right\| ; x \in R^n \text{ et } \|u\|_\infty \leq \eta \right\}$  et la séquence des réels  $\chi_{l,j}^{k,i}$  est définie par le lemme 3.3.1.

Alors :

$$\dot{V}_k \leq -a\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \sqrt{\lambda_M(S)} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \|e_j^l\| - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k$$

Par conséquent, on obtient :

$$\dot{V}_k \leq -a\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \sqrt{\lambda_M(S)} \sqrt{V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \frac{\sqrt{V_l}}{\sqrt{\lambda_m(S)}} - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k$$

Donc :

$$\dot{V}_k \leq -a\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \mu(S) \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2}} \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l} - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k \quad (3.78)$$

Maintenant, puisque  $\theta(t) \geq 1$ , comme s'est montré dans la section 3.2.2.2 et d'après la lemme 3.3.1, on a :

$$\theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2}} \leq \theta^{-\frac{1}{2}}$$

Alors, l'inégalité (3.78) devient :

$$\dot{V}_k \leq -a\theta^{\delta_k} V_k - \frac{\dot{\theta}}{\theta} \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k + 2\lambda_k \rho_k \mu(S) \theta^{-\frac{1}{2q}} \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l} \quad (3.79)$$

On considère  $W_k(\bar{e}^k) = \bar{e}^{kT} \Omega_k \bar{e}^k$  et  $W(\bar{e}) = \sum_{k=1}^q W_k(\bar{e}^k)$ . On a :

$$\mu_1 W_k \triangleq \frac{\lambda_m(S)}{\lambda_M(\Omega)} W_k \leq V_k \leq \frac{\lambda_M(S)}{\lambda_m(\Omega)} W_k \triangleq \mu_2 W_k$$

On note que  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \mu(S)\mu(\Omega)$ . Donc, l'inéquation (3.79) devient :

$$\dot{V}_k \leq -a\theta^{\delta_k} V_k - \frac{\dot{\theta}}{\theta} W_k + 2\lambda_k \rho_k \mu(S) \theta^{-\frac{1}{2q}} \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l}$$

Maintenant, pour  $k = 1, \dots, q$ , on considère  $V_k^* = a\theta^{\delta_k}V_k$  et soit  $V^* = \sum_{k=1}^q V_k^*$ . On note que puisque  $\theta \geq 1$  et d'après (3.61), on a :

$$a\theta V = a\theta^{\delta_q}V \leq V^* \leq a\theta^{\delta_1}V$$

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -V_k^* + 2\lambda_k \frac{\rho_k}{a} \mu(S) \theta^{-\frac{1}{2q}} \sqrt{V_k^*} \sum_{l=1}^q \sum_{j=2}^{\lambda_l} \sqrt{V_l^*} - \frac{\dot{\theta}}{\theta} W_k \\ &\leq -V_k^* + 2\lambda_k n \frac{\rho_k}{a} \mu(S) \theta^{-\frac{1}{2q}} \sqrt{V_k^*} \sqrt{V^*} - \frac{\dot{\theta}}{\theta} W_k \\ &\leq -V_k^* + 2\lambda_k n \frac{\rho_k}{a} \mu(S) \theta^{-\frac{1}{2q}} V^* - \frac{\dot{\theta}}{\theta} W_k \end{aligned}$$

Donc :

$$\dot{V} \leq -V^* + 2n^2 \frac{\rho}{a} \mu(S) \theta^{-\frac{1}{2q}} V^* - \frac{\dot{\theta}}{\theta} W$$

avec  $\rho = \max\{\rho_k, 1 \leq k \leq q\}$ . En remplaçant  $\frac{\dot{\theta}}{\theta}$  par son expression, on obtient :

$$\dot{V} \leq -V^* + 2n^2 \frac{\rho}{a} \mu(S) \theta^{-\frac{1}{2q}} V^* + \frac{\mu_1}{2} (a(\theta - 1) - g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|)) W \quad (3.80)$$

Deux cas sont à considérer qui dépendent de si  $\theta(t)$ , qui obéit à l'équation différentielle (3.73), est supérieure ou non à la quantité :

$$\theta_c \triangleq (8n^2 \frac{\rho}{a} \mu(S))^{2q} \quad (3.81)$$

• Cas 1 :  $\theta(t) > \theta_c$ . On peut facilement vérifier que :

$$\theta(t) - (8n^2 \frac{\rho}{a} \mu(S))^{2q} > 0 \implies 1 - (2n^2 \frac{\rho}{a} \mu(S)) \theta^{-\frac{1}{2q}}(t) > \frac{3}{4} \quad (3.82)$$

En utilisant (3.80) et (3.82), l'inéquation (3.80) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -(1 - 2n^2 \frac{\rho}{a} \mu(S) \theta^{-\frac{1}{2q-1}}) V^* + \frac{\mu_1}{2} (a(\theta - 1) - g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|)) W \\ &\leq -\frac{3}{4} a\theta V + \frac{\mu_1}{2} (a(\theta - 1) - g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|)) W \\ &\leq -\frac{3}{4} a\theta V + \frac{\mu_1}{2} a(\theta - 1) W - \frac{\mu_1}{2} g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|) W \\ &\leq -\frac{3}{4} a\theta V + \frac{1}{2} a(\theta - 1) V - \frac{\mu_1}{2\mu_2} g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|) V \\ &\leq -\frac{1}{4} a(\theta + 1) V(t) - \frac{\mu_1}{4\mu_2} g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|) V(t) \end{aligned} \quad (3.83)$$

• Cas 2 :  $\theta(t) \leq \theta_c$ . En utilisant (3.80) et le fait que  $\theta^{-\frac{1}{2q}}(t) \leq 1$ , l'inéquation (3.80) devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -V^* + \frac{\theta_c^{\frac{1}{2q}}}{4} V^* + \frac{\mu_1}{2} (a(\theta - 1) - g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|))W \\
 &\leq -V^* + a \frac{\theta_c^{\frac{1}{2q}}}{4} \theta^{\delta_1} V + \frac{\mu_1}{2} a(\theta - 1)W - \frac{\mu_1}{2} g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|)W \\
 &\leq -V^* + a \frac{\theta_c^{\frac{1}{2q}}}{4} \theta^{\delta_1} V + \frac{\mu_1}{2} a(\theta - 1)W - \frac{\mu_1}{2} g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|)W \\
 &\leq -a\theta V + \frac{a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}}{4} V + \frac{1}{2} a(\theta - 1)V - \frac{\mu_1}{2\mu_2} g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|)V \\
 &\leq -\frac{1}{4} a(\theta + 1)V(t) + \frac{a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}}{4} V - \frac{\mu_1}{4\mu_2} g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|)V
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

En comparant (3.83), (3.84) et (3.77), on peut facilement conclure que pour tout  $\theta$ , on a :

$$\dot{V} \leq -\frac{a}{4}(\theta + 1)V + \frac{a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}}{4} V - \frac{\mu_1}{4\mu_2} g(t)\gamma(\|\tilde{y}\|)V \tag{3.85}$$

Le reste de la preuve, est comme précédemment, consiste à montrer la bornitude de  $\|\tilde{y}(t)\|$  et la bornitude de  $\|e(t)\|$ , et finalement à détailler l'analyse de la convergence exponentielle vers zéro de  $\|\tilde{y}(t)\|$  et de  $\|e(t)\|$ . Donc, on s'intéresse dans la suite à montrer la bornitude de  $\|\tilde{y}(t)\|$  et de  $\|e(t)\|$ .

***La bornitude de l'erreur d'observation de la sortie  $\|\tilde{y}(t)\|$***

On montre dans ce qui suit la bornitude de  $\|\tilde{y}(t)\|$ . En effet, pour ce faire, on procède par contradiction. On suppose le contraire et on choisit  $\rho$  suffisamment grande afin d'obtenir :

$$\exists K > 0; \exists t^* > T; \forall t \geq t^* - T : \|\tilde{y}(t)\| > N \text{ et } \frac{1}{T} \int_{t^*-T}^t \|\tilde{y}(\tau)\|^2 d\tau > \rho \tag{3.86}$$

Par conséquent, on a :

$$\forall t \geq t^* - T : \|\tilde{y}(t)\| > N \text{ et } g(t) = \frac{M}{1 + \rho}$$

On considère  $\gamma_N = \gamma(N)$ . Puisque  $\gamma$  est une fonction positive croissante de  $\|\tilde{y}\|$ , alors, on a :

$$\forall t \geq t^* - T : \gamma(\|\tilde{y}(t)\|) \geq \gamma_N$$

On choisit  $M$  comme suit :

$$M = \frac{\lambda(1 + \rho)}{\gamma_N} \tag{3.87}$$

où  $\lambda$  est une constante positive choisie de telle façon que  $\lambda > \theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}} \frac{\mu_2}{\mu_1}$ . Pour  $t \geq t^* - T$ , en utilisant (3.86), l'inéquation (3.85) devient :

$$\dot{V}(\bar{e}(t)) \leq -\frac{1}{4}a(\theta + 1)V(\bar{e}(t)) + \frac{a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}}{4}V(\bar{e}(t)) - \frac{\mu_1}{4\mu_2} \frac{M\gamma_N}{1+\rho} V(\bar{e}(t))$$

En remplaçant  $M$  par son expression, (3.87), on obtient :

$$\dot{V}(\bar{e}(t)) \leq -\frac{1}{4}a(\theta + 1)V(\bar{e}(t)) + (\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}} - \frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda)\frac{1}{4}V(\bar{e}(t)) \leq -(\frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda - \theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}})\frac{1}{4}V(\bar{e}(t))$$

Le résultat d'intégration de deux cotés de l'inégalité entre  $t^* - T$  et  $t$  donne :

$$V(\bar{e}(t)) \leq \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda - \theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}\right)(t - (t^* - T))\right)V(\bar{e}(t^* - T)) \quad (3.88)$$

Maintenant, si on choisit  $t = 2(t^* - T)$ , on obtient :

$$V(\bar{e}(2(t^* - T))) \leq \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda\mu_1}{\mu_2} - \theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}\right)(t^* - T)\right)V(\bar{e}(t^* - T)) \quad (3.89)$$

Puisque  $V(\bar{e}(t^* - T))$  est constante, on peut choisir  $\lambda$  suffisamment grande afin d'obtenir :

$$V(\bar{e}(2(t^* - T))) \leq \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda\mu_1}{\mu_2} - \theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}\right)(t^* - T)\right)V(\bar{e}(t^* - T)) < \lambda_m(S)\frac{N^2}{4} \quad (3.90)$$

En combinant (3.88) et (3.89), on obtient, pour  $t \geq t^* - T$  :

$$\|\tilde{y}(2(t^* - T))\|^2 \leq \|e(2(t^* - T))\|^2 \leq \|\bar{e}(2(t^* - T))\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_m(S)}V(\bar{e}(2(t^* - T))) < \frac{N^2}{4}$$

i.e.

$$\|\tilde{y}(2(t^* - T))\| < \frac{N}{2}$$

Ceci est en contradiction avec (3.86) et  $\|\tilde{y}(t)\|$  est bornée. Dans ce contexte, on note  $B_{\tilde{y}}$  la borne supérieure de  $\|\tilde{y}(t)\|$ , i. e.

$$\forall t \geq 0 : \|\tilde{y}(t)\| \leq B_{\tilde{y}} \quad (3.91)$$

**La bornitude de vecteur des erreurs d'observation**  $\|e(t)\|$

On montre, maintenant, la bornitude de  $\|e(t)\|$ . Pour ce faire, on introduit le changement des coordonnées suivant :

$$\tilde{e}^k = \Lambda_k(\bar{\theta})e^k, \quad k = 1, \dots, q \quad (3.92)$$

avec  $\bar{\theta}$  est une constante qui satisfait :

$$\bar{\theta} \geq \max\{\theta_{max}, \theta_c\} \quad (3.93)$$

où  $\theta_{max}$  et  $\theta_c$  sont données par (3.24) et (3.81), respectivement. Alors, la dynamique de l'erreur (3.74) est transformée en :

$$\dot{e}^k = A_k e^k - \Delta_k^{-1}(\bar{\theta}) K_k C_k e^k + \varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x) + \Delta_k^{-1}(\bar{\theta}) K_k C_k e^k - \Delta_k^{-1}(\theta) K_k C_k e^k \quad (3.94)$$

En utilisant (3.92) et (3.94) et procédant comme précédemment, on obtient :

$$\dot{\tilde{e}}^k = \bar{\theta}^{\delta_k} (A_k - K_k C_k) \tilde{e}^k + \Lambda(\bar{\theta}) (\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) + \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} K_k \tilde{y}_k - \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \Delta_k^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}}) K_k \tilde{y}_k$$

On considère, maintenant,  $\tilde{V}_k(\tilde{e}^k) = \tilde{e}^{kT} S_k \tilde{e}^k$  et on considère la fonction de Lyapunov  $\tilde{V}(\tilde{e}) = \sum_{k=1}^q \tilde{V}_k(\tilde{e}^k)$  pour le système (3.94). Procédant comme auparavant, on peut montrer que (voir l'inéquation (3.79)) :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}_k &\leq -a\bar{\theta}^{\delta_k} \tilde{V}_k + 2\lambda_k \rho_k \mu(S) \bar{\theta}^{-\frac{1}{2q}} \sqrt{\bar{\theta}^{\delta_k} \tilde{V}_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{\lambda_l} \sqrt{\bar{\theta}^{\delta_l} \tilde{V}_l} + \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k K_k \tilde{y}_k \\ &\quad - \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k \Delta_k^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}}) K_k \tilde{y}_k \end{aligned}$$

Maintenant, pour  $k = 1, \dots, q$ , on considère  $\tilde{V}_k^* = \bar{\theta}^{\delta_k} \tilde{V}_k$  et soit  $\tilde{V}^* = \sum_{k=1}^q \tilde{V}_k^*$ . On note que :

$$\bar{\theta} \tilde{V} \leq \tilde{V}^* \leq \bar{\theta}^{\delta_1} \tilde{V} \quad (3.95)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}_k &\leq -a\tilde{V}_k^* + 2\lambda_k \rho_k \mu(S) \bar{\theta}^{-\frac{1}{2q}} \sqrt{\tilde{V}_k^*} \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{\lambda_l} \sqrt{\tilde{V}_l^*} + \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k K_k \tilde{y}_k - \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k \Delta_k^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}}) K_k \tilde{y}_k \\ &\leq -a\tilde{V}_k^* + 2\lambda_k n \rho_k \mu(S) \bar{\theta}^{-\frac{1}{2q}} \sqrt{\tilde{V}_k^*} \sqrt{\tilde{V}^*} + \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k K_k \tilde{y}_k - \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k \Delta_k^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}}) K_k \tilde{y}_k \\ &\leq -a\tilde{V}_k^* + 2\lambda_k n \rho_k \mu(S) \bar{\theta}^{-\frac{1}{2q}} \tilde{V}^* + \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k K_k \tilde{y}_k - \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k \Delta_k^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}}) K_k \tilde{y}_k \end{aligned}$$

Alors :

$$\dot{\tilde{V}} \leq -a\tilde{V}^* + 2n^2 \rho \mu(S) \bar{\theta}^{-\frac{1}{2q}} \tilde{V}^* + \sum_{k=1}^q (\bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k K_k \tilde{y}_k - \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k \Delta_k^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}}) K_k \tilde{y}_k)$$

D'après le choix de  $\bar{\theta}$  et en utilisant (3.82), on obtient :

$$\dot{\tilde{V}} \leq -a\frac{3}{4}\bar{\theta}\tilde{V} + \sum_{k=1}^q (\bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k K_k \tilde{y}_k - \bar{\theta}^{-\sigma_1^k} \tilde{e}^{kT} S_k \Delta_k^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}}) K_k \tilde{y}_k)$$

Maintenant, il est clair que :

$$\sum_{k=1}^q \bar{\theta}^{-\sigma_k} \tilde{e}^k S_k K_k \tilde{y}_k \leq \|K_M\| B_{\tilde{y}} \frac{\lambda_{\max}(S)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \sqrt{\tilde{V}} \quad (3.96)$$

avec  $B_{\tilde{y}}$  est la borne supérieur de  $\tilde{y}(t)$  donnée par (3.91) et  $K_M = \max_{1 \leq k \leq q} \|K_k\|$ . Identiquement, puisque  $\frac{\theta}{\bar{\theta}} < 1$ , on a  $\|\Delta_k^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}})\| < 1$  et :

$$\sum_{k=1}^q \bar{\theta}^{-\sigma_k} \tilde{e}^{kT} S_k \Delta_k^{-1}(\frac{\theta}{\bar{\theta}}) K_k \tilde{y}_k \leq \|K_M\| B_{\tilde{y}} \frac{\lambda_{\max}(S)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \sqrt{\tilde{V}} \quad (3.97)$$

D'après les estimations mentionnées précédemment, on a :

$$\dot{\tilde{V}} \leq -\frac{3}{4} a \bar{\theta} \tilde{V} + 2 \beta B_{\tilde{y}} \sqrt{\tilde{V}} \quad (3.98)$$

avec  $\beta = \|K_M\| \frac{\lambda_{\max}(S)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}}$ , ceci conduit à :

$$\sqrt{\tilde{V}(\tilde{e}(t))} \leq \exp(-\frac{3}{8} a \bar{\theta} t) \sqrt{\tilde{V}(\tilde{e}(0))} + \frac{8 \beta}{3 a \bar{\theta}} B_{\tilde{y}} \quad (3.99)$$

Par conséquent,  $\tilde{V}(\tilde{e}(t))$  est bornée et par la suite l'est aussi  $\tilde{e}(t)$ , ou equivalent parlant  $e(t)$ . Dans ce contexte, on note  $B_e$  la borne supérieure de  $\|e(t)\|$ , i.e.

$$\forall t \geq 0 : \|e(t)\| \leq B_e \quad (3.100)$$

***La convergence vers zéro de l'erreur d'observation de la sortie  $\|\tilde{y}(t)\|$***

Pour terminer la preuve, on montre, tout d'abord, que  $\|\tilde{y}(t)\|$  converge vers zéro puis la convergence de  $\|e(t)\|$  vers zéro est détaillée. On montre, maintenant, que  $\|\tilde{y}(t)\|$  converge vers zéro. En effet, on doit montrer que non seulement  $\|\tilde{y}\|$  converge vers zéro, mais elle y converge exponentiellement. Ceci peut faire par contradiction. En effet, on suppose que  $\|\tilde{y}\|$  ne converge pas exponentiellement vers zéro. Ceci implique que :

$$\forall c > 0; \forall \alpha > 0; \forall T^* > T; \exists t^* > T^* : \|\tilde{y}(t^*)\| > ce^{-\alpha t^*}$$

Mais, puisque la fonction  $t \mapsto \|\tilde{y}(t)\| - ce^{-\alpha t}$  est une fonction continue, on a aussi :

$$\forall c > 0; \forall \alpha > 0; \forall T^* > T; \exists T_1 > 0; \forall t \in [t^*, t^* + T_1] : \|\tilde{y}(t)\| > ce^{-\alpha t} \geq ce^{-\alpha(t^* + T_1)} \quad (3.101)$$

Maintenant, puisque  $\|\tilde{y}\|$  est bornée et en choisissant  $\rho > B_{\tilde{y}}^2$ , on a pour  $t \geq t^*$  :

$$g(t) \geq \frac{M}{1 + B_{\tilde{y}}^2} \quad (3.102)$$

Maintenant, on choisit  $M$  comme suit :

$$M = \frac{\lambda(1 + B_{\tilde{y}}^2)}{\gamma_m} \quad (3.103)$$

avec  $\gamma_m = \inf\{\gamma(\|\tilde{y}(t)\|); t \in [t^*, t^* + T_1]\}$  et  $\lambda$  est une constante positive qui satisfait  $\lambda > \theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}} \frac{\mu_2}{a\mu_1}$ . En utilisant (3.102), l'inéquation (3.85) devient :

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{4}a(\theta + 1)V(t) + \frac{a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}}{4}V - \frac{\mu_1}{4\mu_2} \frac{M}{(1 + B_{\tilde{y}}^2)} \gamma_m V$$

En remplaçant  $M$  par son expression, (3.103), dans (3.85), on obtient pour tout  $t \in [t^*, t^* + T_1]$  :

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{4}a(\theta + 1)V(t) + (a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2}} - \frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda)\frac{1}{4}V \leq -(\frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda - a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2}})\frac{1}{4}V \quad (3.104)$$

En intégrant (3.104) sur l'intervalle  $[t^*, t^* + T_1]$ , on a :

$$V(\bar{e}(t^* + T_1)) \leq \exp(-\frac{T_1}{4}(\frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda - a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}))V(\bar{e}(t^*))$$

ou équivalent parlant :

$$\|\bar{e}(t^* + T_1)\| \leq \sqrt{\mu(S)} \exp(-\frac{T_1}{4}(\frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda - a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}))\|\bar{e}(t^*)\|$$

Alors, maintenant, d'après (3.67) et (3.75) et en utilisant (3.65) et (3.66), on a pour  $\theta(t) \geq 1$  :

$$\|\bar{e}^k(t)\| \leq \|e^k\| \leq \theta^{\sigma_{\tilde{I}}^k + \lambda_k \delta_k} \|\bar{e}^k\| = \theta^{\sigma_{\tilde{I}}^k} \|\bar{e}^k\| = \theta^{\sigma_{\tilde{I}}^k + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2k})} \|\bar{e}^k\| \leq \theta^{\sigma_{\tilde{I}}^k + \frac{1}{2}} \|\bar{e}^k\| \quad (3.105)$$

Donc :

$$\|\bar{e}(t)\| \leq \|e\| \leq \theta^{\sigma_{\tilde{I}}^k + \frac{1}{2}} \|\bar{e}\|$$

Alors, par conséquent, on a :

$$\|\tilde{y}(t^* + T_1)\| \leq \|e(t^* + T_1)\| \leq \theta^{\sigma_{\tilde{I}}^k + \frac{1}{2}} \|\bar{e}(t^* + T_1)\| \leq \theta_{max}^{\sigma_{\tilde{I}}^k + \frac{1}{2}} \|\bar{e}(t^* + T_1)\| \quad (3.106)$$

En combinant (3.105) et (3.106), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}(t^* + T_1)\| &\leq \sqrt{\mu(S)} \theta_{max}^{\sigma_{\tilde{I}}^k + \frac{1}{2}} e^{(-\frac{T_1}{4}(\frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda - a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}))} \|\bar{e}(t^*)\| \\ &\leq \sqrt{\mu(S)} \theta_{max}^{\sigma_{\tilde{I}}^k + \frac{1}{2}} e^{(-\frac{T_1}{4}(\frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda - a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}))} \|e(t^*)\| \\ &\leq \sqrt{\mu(S)} B_e \theta_{max}^{\sigma_{\tilde{I}}^k + \frac{1}{2}} e^{(-\frac{T_1}{4}(\frac{\mu_1}{\mu_2}\lambda - a\theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}))} \end{aligned}$$

avec  $B_e$  est la borne supérieure de  $e(t)$  donnée par (3.100). Il est clair, maintenant, que si on choisit  $\lambda$  suffisamment grande de telle sorte à avoir :

$$\sqrt{\mu(S)} B_e \theta_{max}^{\sigma_{\lambda 1} + \frac{1}{2}} e^{(-\frac{T_1}{4} (\frac{\mu_1}{\mu_2} \lambda - a \theta_c^{\delta_1 + \frac{1}{2q}}))} < \frac{1}{2} c e^{-\alpha(T_1 + t^*)} \quad (3.107)$$

La combinaison de (3.101) et de (3.107) conduit à une contradiction, i.e.

$$0 < c e^{-\alpha(T_1 + t^*)} < \|\tilde{y}(t^* + T_1)\| < \frac{1}{2} c e^{-\alpha(T_1 + t^*)}$$

La convergence vers zéro de  $\tilde{y}$  est prouvée et on a alors :

$$\exists c > 0; \alpha > 0; \exists T^* > T; \forall t > T^* : \|\tilde{y}(t)\| \leq c e^{-\alpha t} \quad (3.108)$$

**La convergence vers zéro du vecteur des erreurs d'observation**  $\|e(t)\|$

Pour compléter la preuve de la convergence, on doit montrer la convergence exponentielle vers zéro de  $\|e(t)\|$ . On procède comme précédemment lors de la démonstration de la bornitude de  $\|e(t)\|$  et considérons de nouveau le même changement des variables donné par (3.92). Procédant comme auparavant et imitant (3.99), on obtient pour  $t \geq T^*$  où  $T^*$  est donnée par (3.108) :

$$\sqrt{\tilde{V}(\tilde{e}(t))} \leq \exp\left(-\frac{3}{8} a \bar{\theta} t\right) \sqrt{\tilde{V}(\tilde{e}(0))} + m c e^{-\alpha t} \quad (3.109)$$

avec  $\bar{\theta}$  est donnée par (3.93) et  $m$ ,  $c$  et  $\alpha$  sont des réels positifs constants. Ceci termine la preuve du théorème.

### 3.3.3 Exemple de simulation

Dans le but d'illustrer les performances apportées par l'observateur proposé, on considère le système non linéaire suivant [68] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1(t) = x_2^1(t) - x_1^1(t) + x_1^2(t)u(t) \\ \dot{x}_2^1(t) = x_3^1(t) - x_2^1(t) \\ \dot{x}_3^1(t) = -x_3^1(t) - \frac{x_2^1(t)}{1+(x_2^1(t))^2} - \frac{x_2^2(t)}{1+(x_2^2(t))^2} - 10 \cos(10x_2^1(t)) + u(t) \\ y_1(t) = x_1^1(t) \end{cases} \quad (3.110)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2(t) = x_2^2(t) - x_2^1(t)x_3^1(t) - x_1^2(t) + u(t)x_3^1(t) \\ \dot{x}_2^2(t) = -x_2^2(t) - \frac{x_2^2(t)}{1+(x_2^2(t))^2} + \frac{x_3^1(t)}{1+(x_3^1(t))^2} - 10x_2^1(t) \sin(10x_2^1(t)) + \nu \\ y_2(t) = x_1^2(t) \end{cases} \quad (3.111)$$

avec  $u(t) = 5 \sin(2\pi t)$  et  $\nu$  est une perturbation extérieure qui prend la valeur 3 entre les instants  $t_1 = 6s$  et  $t_2 = 7s$  et zéro ailleurs. L'introduction de  $\nu$  est pour des raisons illustratives, ceci permet de tester le comportement de l'observateur proposé, et en particulier celui de  $\theta(t)$ , en présence de ce type des perturbations. On note que le système (3.110)-(3.111) est sous la forme (3.53) avec  $q = 2$ ,  $p_1 = p_2 = 1$ ,  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 2$ .

Un observateur de la forme (3.73) peut être synthétisé pour le système (3.110)-(3.111). Les équations de l'observateur sont détaillées dans le système des équations suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1^1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2^1(t) \\ \dot{\hat{x}}_3^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2^1(t) \\ \hat{x}_3^1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1^1(t) + x_1^2(t)u(t) \\ -\hat{x}_2^1(t) \\ -\hat{x}_3^1(t) - \frac{\hat{x}_2^1(t)}{1+(\hat{x}_2^1(t))^2} - \frac{\hat{x}_3^2(t)}{1+(\hat{x}_2^2(t))^2} - 10 \cos(10\hat{x}_2^1(t)) + u(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3(\theta(t))^{\delta_1} \\ 3(\theta(t))^{2\delta_1} \\ (\theta(t))^{3\delta_1} \end{pmatrix} (\hat{x}_1^1(t) - y_1(t)) \quad (3.112)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1^2(t) \\ \dot{\hat{x}}_2^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2^2(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{x}_2^1(t)\hat{x}_3^1(t) - x_1^2(t) + u(t)\hat{x}_3^1(t) \\ -\hat{x}_2^2(t) - \frac{\hat{x}_2^2(t)}{1+(\hat{x}_2^2(t))^2} + \frac{\hat{x}_3^1(t)}{1+(\hat{x}_3^1(t))^2} - 10\hat{x}_2^1(t) \sin(10\hat{x}_2^1(t)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2(\theta(t))^{\delta_2} \\ (\theta(t))^{2\delta_2} \end{pmatrix} (\hat{x}_1^2(t) - y_2(t)) \quad (3.113)$$

avec  $\delta_1 = \delta_2 = 1$  sont calculés d'après (3.59). Les matrices de gain  $K_k$ , avec  $k = 1$  et 2, de l'observateur sont choisies de telle sorte que tous les pôles de chaque matrice  $\tilde{A}_k = A_k - K_k C_k$  sont assignés à la valeur  $-1$ .

Dans ce qui suit, on donne les résultats de simulation obtenus en considérant les conditions initiales :

$$\hat{x}_1^1(0) = \hat{x}_2^1(0) = x_i^k(0) = 0; k = 1, 2 \text{ et } i = 1, \dots, \lambda_k; \hat{x}_2^1(0) = \hat{x}_3^1(0) = \hat{x}_2^2(0) = 0.5, \theta(0) = 1$$

La simulation est enregistrée entre les instants 0s et 10s, toutes les variables d'état mesurées sont entachées d'un bruit de mesure de moyenne nulle et de variance égale à  $\sqrt{0.1}$ . Pour des raisons d'illustration, on choisit d'annuler les différents bruits de mesure à l'instant  $t = 8s$  et les sorties deviennent intactes. L'évolution des différentes sorties est illustrée sur la figure 3.5.

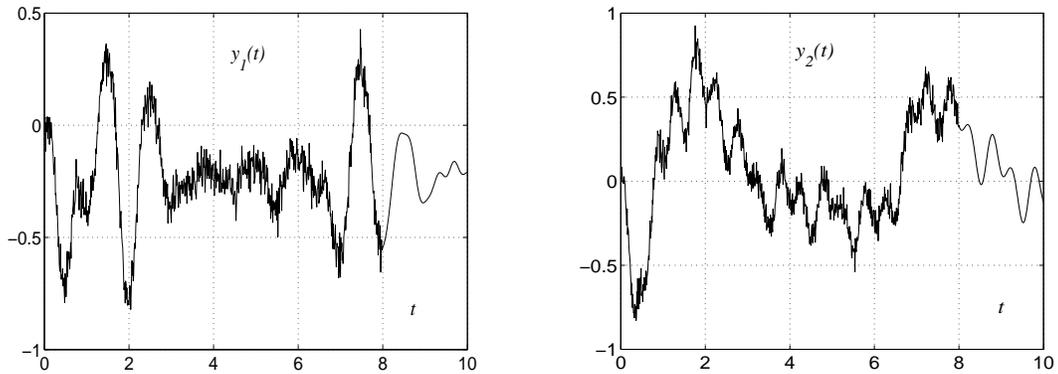


Figure 3.5: Evolution des sorties bruitées  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ .

Les valeurs des paramètres  $M$ ,  $T$  et  $a$  utilisés lors de la simulation sont égales à 1000, 0.25 et 20, respectivement. Quant à la fonction  $\gamma$ , elle est choisie comme suit :

$$\gamma(\tilde{y}) = \frac{\|\tilde{y}\|^2}{1 + \|\tilde{y}\|^2}$$

L'estimation de toutes les variables d'état inaccessibles données par l'observateur à grand gain dynamique est illustrée sur la figure 3.6 ce qui montre clairement l'apport de l'observateur proposé. L'évolution du paramètre de synthèse  $\theta(t)$  est donnée par la figure 3.7. Cette figure montre que le paramètre  $\theta$  croît au début de la simulation jusqu'à l'instant  $t = 0.5$ , approximativement. A cet instant, toutes les erreurs d'observations diminuent ce qui permet à  $\theta$  de décroître. Identiquement, lors de l'ajout de la perturbation extérieure (à  $t = 6s$ ), les erreurs d'observation, en particulier celui liée à  $x_2^2(t)$ , augmente et ceci induit une augmentation de la valeur de  $\theta$ . Dès que la perturbation extérieure est annulée, les erreurs d'observation ainsi que la valeur de  $\theta$  diminuent. Ces résultats montrent clairement que dès que la convergence des variables estimées vers celles réelles est assurée, la valeur du paramètre de synthèse  $\theta$  diminue et garde des valeurs faibles tout en garantissant des estimations précises.

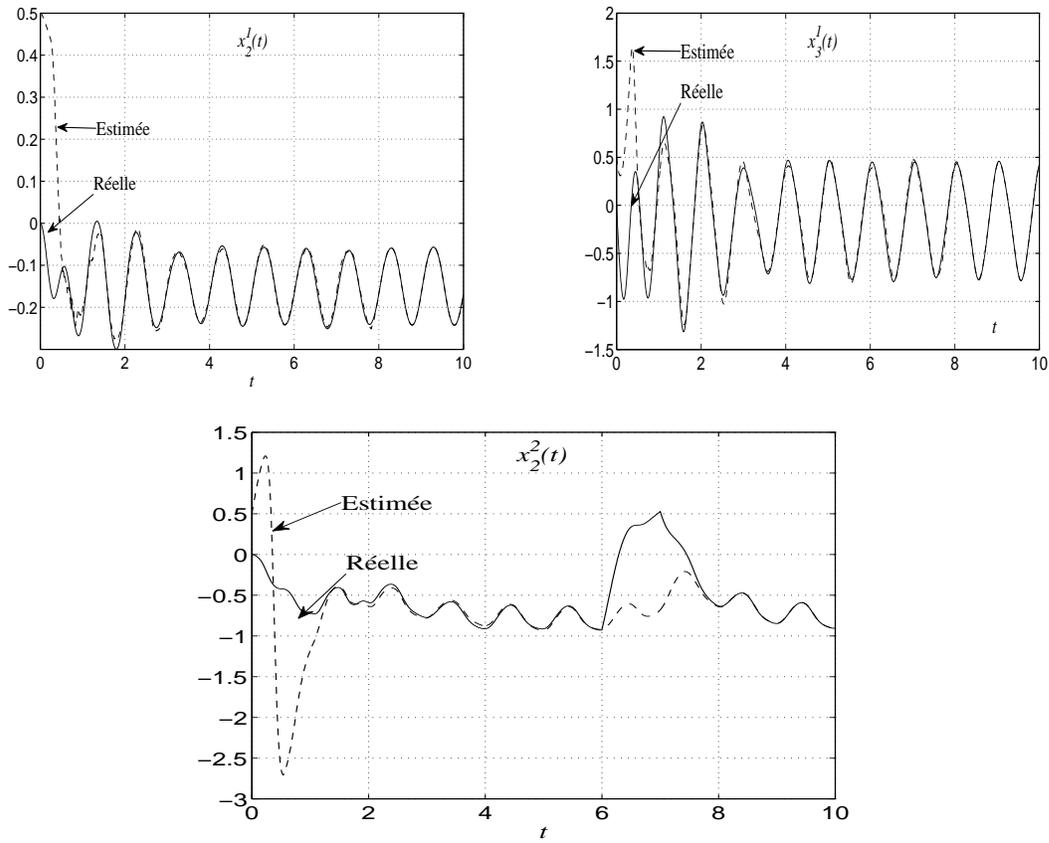


Figure 3.6: Evolution des estimations des différentes variables d'état manquantes en utilisant l'observateur à grand gain dynamique.

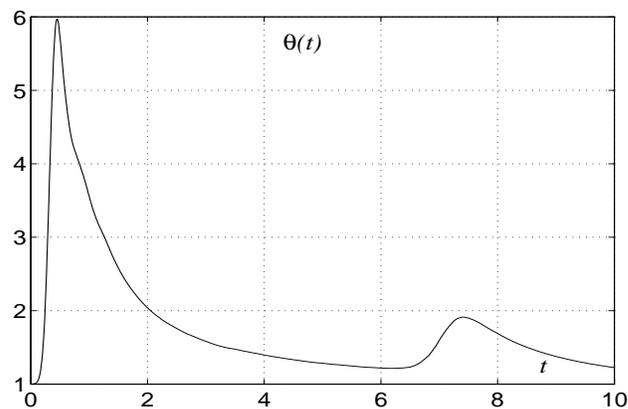


Figure 3.7: Evolution du paramètre de synthèse  $\theta(t)$ .

Pour des raisons de comparaison, on simule, dans les mêmes conditions, le système en utilisant l'observateur à grand gain classique pour deux valeurs différentes de  $\theta$ ,  $\theta = 1.5$  et  $\theta = 5$ , respectivement. Les résultats enregistrés sont donnés sur la figure 3.8. On note, alors, par une simple comparaison l'apport de l'observateur à grand

gain dynamique en terme de résolution du compromis : rapidité de convergence et robustesse vis-à-vis des bruits de mesure.

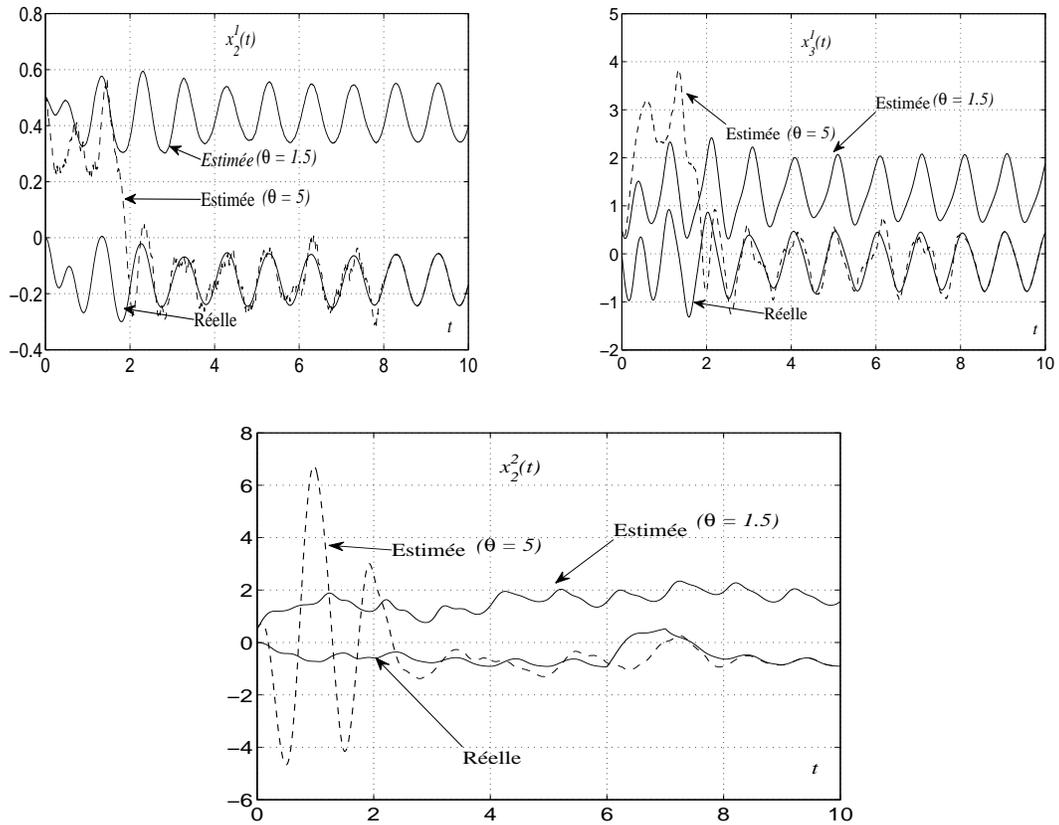


Figure 3.8: Evolution des estimations des différentes variables d'état manquantes en utilisant l'observateur à grand gain classique pour différentes valeurs de  $\theta$ .

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé un observateur à grand gain dynamique afin de résoudre le dilemme rapidité de la convergence - sensibilité aux bruits de mesure. Des simulations sur des systèmes non linéaires MIMO ont confirmé les améliorations notables apportées par ce type des observateurs. Les bons résultats obtenus en terme d'observation nous ont incités à les exploiter pour la synthèse des lois de commandes pour les systèmes non linéaires.

# Chapitre 4

## Synthèse d'un observateur à grand gain flou

### 4.1 Motivation

Comme il est mentionné dans le deuxième chapitre, l'observateur à grand gain est caractérisé par la simplicité de l'implémentation et par un réglage qui concerne uniquement un seul paramètre de synthèse. Le choix de ce dernier paramètre s'effectue généralement d'une façon intuitive et à la base d'un compromis entre la rapidité de convergence et la précision de l'estimation essentiellement en présence d'un bruit de mesure.

Dans ce chapitre, on propose de robustifier l'observateur à grand gain vis-à-vis des bruits de mesure en exploitant le formalisme dit "logique floue" pour effectuer un choix intelligent et en ligne du gain de l'observateur. En effet, ce choix se fait en considérant à la fois le niveau de bruit et l'erreur d'observation d'une situation rencontrée.

### 4.2 Synthèse d'un observateur à grand gain flou

Le concept de la logique floue a été introduit, vers les années soixante, par Lotfi Zadeh [89] et a été présenté comme étant une méthode de traitement d'informations au moyen d'appartenances partielles au lieu d'appartenance totale ou non-appartenance. Cette approche n'a pas été appliquée aux problèmes d'ingénierie avant les années soixante dix en l'absence de moyens de calcul puissants. Au niveau de l'observation des systèmes, cette méthodologie permet d'arriver de façon simple à des conclusions bien définies à partir d'informations vagues, ambiguës, imprécises, bruitées ou partielles. L'approche se base sur des règles simples de la forme : "Si X est A et Y est B alors Z est C" pour résoudre des problèmes d'identification, de commande ou d'observation [46]. Plusieurs combinaisons de cette approche avec les observateurs non linéaires ont été considérées dans la littérature [12, 45, 73].

## 4.2.1 Synthèse d'un superviseur flou

Des indices relatifs aux niveaux de perturbations externes affectant le procédé et à la convergence des estimés doivent être exploités pour la supervision. Les constatations illustrées par simulation numérique ont conduit à retenir, par exemple, le rapport signal sur bruit  $I_{bruit}(t)$  et la variance de l'erreur de l'estimation sur un horizon glissant  $I_{conv}(t)$  comme entrées du superviseur flou et la valeur du paramètre de synthèse  $\theta_F(t)$  comme sortie [3, 4, 5, 61, 63]. Les indices retenus dans le présent cas sont, donc, les suivants :

$$I_{bruit}(t) = \frac{1}{N} \sum_N \left| \frac{10 \log(\overline{y^2(t)})}{\overline{e_y^2(t)}} \right|$$

$$I_{conv}(t) = \left( \overline{e_y(t)} \right)^2$$

avec :

- $e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  est l'erreur d'observation de la sortie.
- $\overline{e_y(t)}$  représente la valeur moyenne de l'erreur d'observation de la sortie.
- $\overline{y^2(t)}$  et  $\overline{e_y^2(t)}$  représentent respectivement les valeurs moyennes des carrés de la sortie et de l'erreur d'observation.
- $N$  représente l'horizon de calcul.

Les valeurs moyennes sont calculées d'une façon récursive sur une fenêtre glissante de largeur  $N_w$  [4]. En effet, si  $\overline{S}$  est la moyenne d'un signal  $S$ , on a :

$$\overline{S(t)} = \frac{1}{N_w} \sum_{j=t}^{t+N_w-1} S(j)$$

$$\overline{S(t)} = \frac{1}{N_w} \left[ N_w \overline{S(t-1)} + S(t) - S(t-N_w) \right]$$

$$\overline{S(t)} = \overline{S(t-1)} + \frac{1}{N_w} [S(t) - S(t-N_w)]$$

Le schéma fonctionnel du superviseur flou considéré est donné sur la figure 4.1. La supervision comporte, principalement, trois étapes ; à savoir : la fuzzification, l'inférence floue et la défuzzification.



Figure 4.1: Le superviseur flou.

### 4.2.1.1 Fuzzification

Cette étape consiste à convertir les entrées réelles ( $I_{bruit}(t)$  et  $I_{conv}(t)$ ) en entrées floues en associant, par exemple, un ensemble des fonctions d'appartenance trian-

gulaires centrées sur les nombres  $N_{ce_j}$  aux variables linguistiques considérées (voir figure 4.2).

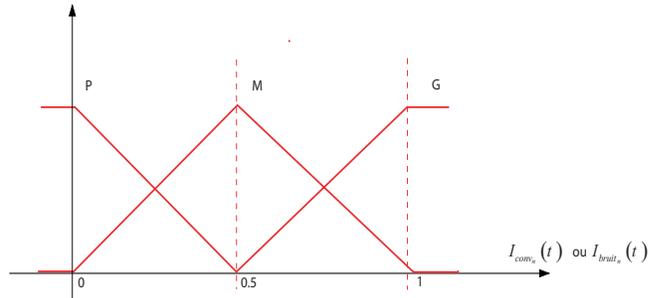


Figure 4.2: Fonctions d'appartenance relatives aux entrées du superviseur.

avec :

- P : Petit.
- M : Moyen.
- G : Grand.

Les expressions des variables normalisées (sur l'intervalle  $[0, 1]$ )  $I_{bruit_n}(t)$  et  $I_{conv_n}(t)$  et les nombres centraux  $N_{ce_j}$  sont donnés par [66] :

$$I_{bruit_n}(t) = \frac{I_{bruit}(t) - I_{bruit_{min}}}{I_{bruit_{max}} - I_{bruit_{min}}} \quad (4.1)$$

$$I_{conv_n}(t) = \frac{I_{conv}(t) - I_{conv_{min}}}{I_{conv_{max}} - I_{conv_{min}}} \quad (4.2)$$

$$N_{ce_i} = \frac{i - 1}{n_e - 1} \quad (4.3)$$

avec :  $n_e$  est le nombre des ensembles flous associés à chaque entrée et  $1 \leq i \leq n_e$ . Dans le présent cas, trois ensembles flous sont retenus pour chaque entrée de supervision

( $n_e = 3$ ).

#### 4.2.1.2 Inférence floue

La synthèse du superviseur nécessite une étape expérimentale permettant le développement d'une base de règles logiques et méthodologiques. L'étape d'inférence consiste à appliquer les règles linguistiques (données par les base des règles) aux entrées floues afin d'évaluer la sortie normalisée du superviseur ( $\theta_{F_n}(t)$ ). Les règles de l'inférence floue gérant la supervision en ligne sont résumées dans le tableau suivant [66, 69, 70, 71].

	$\theta_{F_n}(t)$	$I_{conv_n}(t)$		
		P	M	G
$I_{bruit_n}(t)$	P	TP	TP	P
	M	TP	P	M
	G	M	G	TG

Table 4.1: Tableau de décision relative à la sortie  $\theta_{F_n}(t)$ .

avec :

- TP : Très Petit.
- P : Petit.
- M : Moyen.
- G : Grand.
- TG : Très Grand.

Une des règles considérées peut être formulée comme suit :

Si  $I_{bruit_n}(t)$  est P **ET**  $I_{conv_n}(t)$  est M **Alors**  $\theta_{F_n}(t)$  est TP.

Le tableau d'inférence associe  $n_s$  ensembles flous à la sortie du superviseur. Des fonctions d'appartenance triangulaires peuvent être également retenues pour la sortie de supervision (voir figure 4.3).

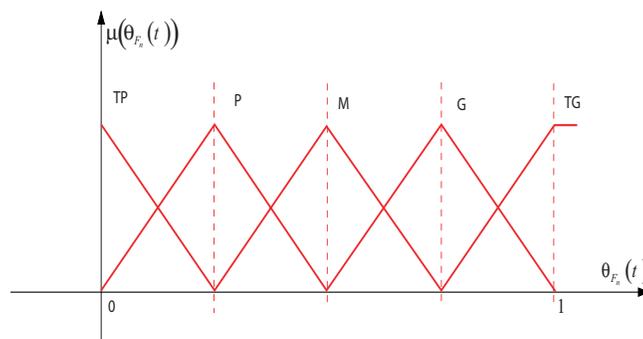


Figure 4.3: Fonctions d'appartenances relatives au paramètre de synthèse normalisé.

Ces fonctions d'appartenances sont définies sur l'univers de discours  $[0, 1]$  et centrées sur les nombres  $N_{cs_l}$  :

$$N_{cs_l} = \frac{l - 1}{n_s - 1} \quad (4.4)$$

avec :  $1 \leq l \leq n_s$ .

La méthode d'inférence MAX-MIN est adoptée pour la détermination de la contribution de chaque règle partielle. Cette méthode assigne à l'opération logique "ET"

un minimum et à l'opération logique "OU" un maximum. Par suite, la sortie du superviseur est déterminée par le calcul des coefficients  $D_l$  donnés par la formule suivante :

$$D_l = \underset{\text{règle } l}{Max} \left\{ \underset{i \rightarrow l}{Min} [\mu_i (I_{conv_n}(t), I_{bruit_n}(t))] \right\} \quad (4.5)$$

avec  $1 \leq i, \leq n_e$  et  $1 \leq l \leq n_s$ .

En fait, les termes  $D_l$  correspondent aux hauteurs des trapèzes obtenus par la troncature des fonctions d'appartenance triangulaires correspondant à la sortie du superviseur.

#### 4.2.1.3 Déffuzification

L'opération de défuzzification consiste à calculer la valeur numérique de la sortie du superviseur à partir de sa valeur floue. La sortie du superviseur peut être calculée par la formule du centre de gravité :

$$\theta_{F_n}(t) = \frac{\sum_{l=1}^{n_s} D_l N_{cs_l}}{\sum_{l=1}^{n_s} D_l} \quad (4.6)$$

A la fin de chaque cycle de supervision, l'expression du paramètre de synthèse peut être formulée :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_{min} + \theta_{F_n}(t) * \theta_{max}; \\ \theta_{min} &\geq 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\theta_{min}$  obéit aux conditions de convergence exponentielle développées dans la section 2.3.1.2 et précisées par la relation (2.19).

Le schéma fonctionnel de l'observateur à grand gain supervisé est donné sur la figure 4.4 [66].

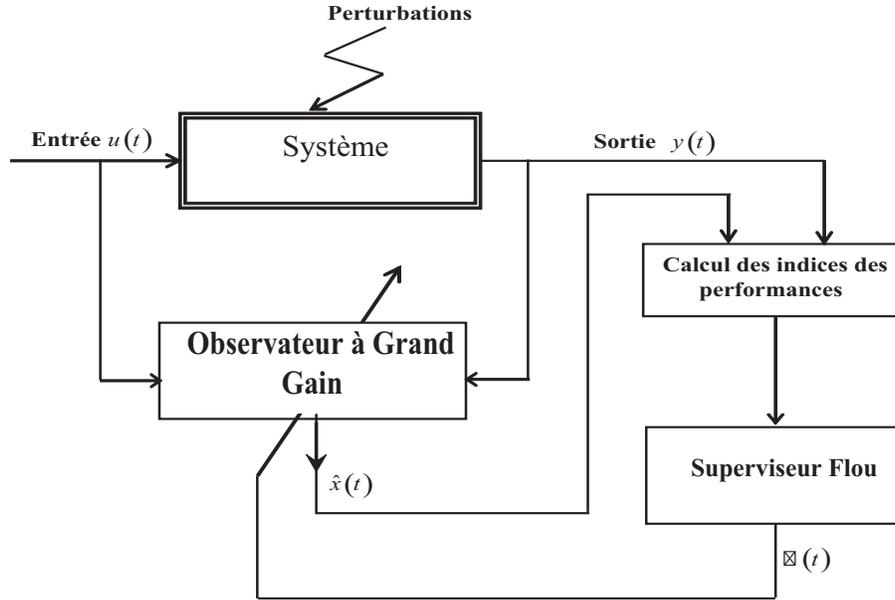


Figure 4.4: La structure d'un observateur à grand gain incluant la logique floue.

## 4.2.2 Exemple Illustratif

Dans le but d'illustrer les performances offertes par cette stratégie, on se propose de reconsidérer le problème d'observation pour le système non linéaire décrit par (2.27).

$$\Sigma_x: \begin{cases} \dot{x}^1(t) &= f^1(x^2(t), u(t)) = \frac{1}{5} ((x^2(t))^3 + x^2(t) + \cos(2\pi t)) \\ \dot{x}^2(t) &= f^2(x^1(t), x^2(t), u(t)) = -\frac{x^2(t)}{1+3(x^2(t))^2} - 2\frac{x^1(t)}{1+3(x^2(t))^2} \end{cases} \quad (4.8)$$

Les équations de l'observateur, dans les coordonnées originales, sont comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), u(t)) - \left(\frac{\partial \Phi(\hat{x}, u)}{\partial x}\right)^{-1} L(C\tilde{x}(t)) \\ L = \theta(t)\Delta^{-1}(\theta(t))S^{-1}C^T \end{cases} \quad (4.9)$$

Dans le but de considérer des situations réelles, on entache la sortie du système par des bruits de mesure de moyenne nulle et de variance  $\sqrt{1.5}$  et on considère, à l'instant  $t = 25s$ , un problème de convergence en revenant aux conditions initiales. La sortie bruitée est illustrée sur la figure 4.5 .

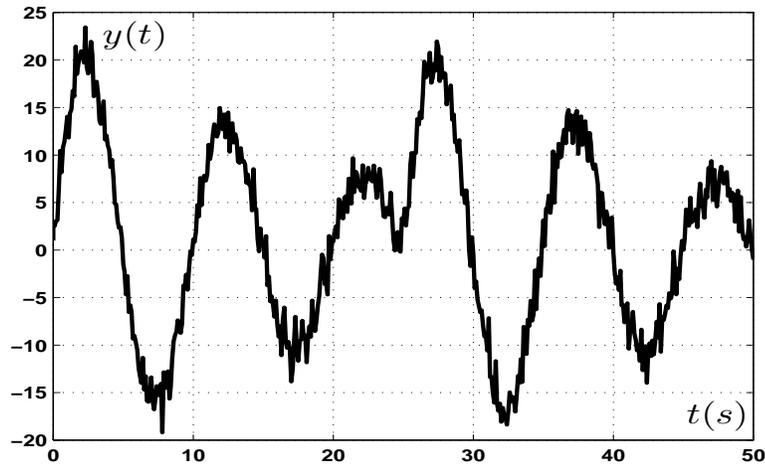


Figure 4.5: L'évolution de la sortie mesurée.

L'estimation de la variable d'état  $x_2(t)$  par exploitation de l'observateur à grand gain supervisé est illustrée par la figure 4.7. Par comparaison à la figure 4.6, donnant le résultat de l'estimation à grand gain classique ( $\theta$  relativement importante), on peut clairement déduire une amélioration notable en termes de rapidité de convergence et insensibilité au bruit affectant la système. Donc, on peut conclure que l'observateur à grand gain flou résout parfaitement le compromis entre la rapidité de la convergence et la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure.

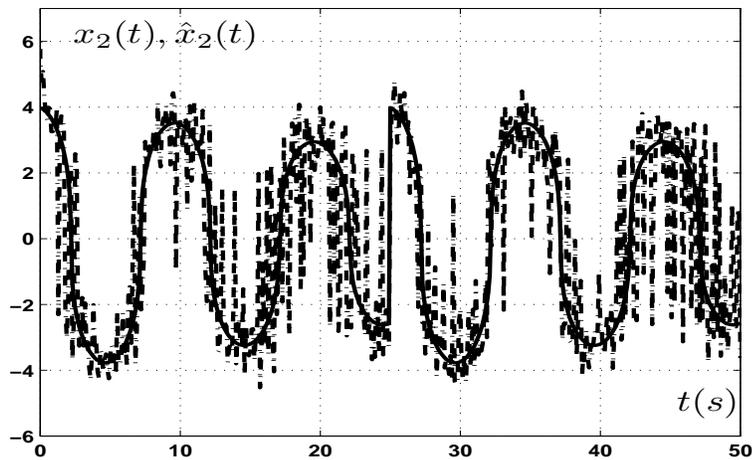


Figure 4.6: L'évolution des variables d'état estimée et réelle (Observateur à grand gain classique).

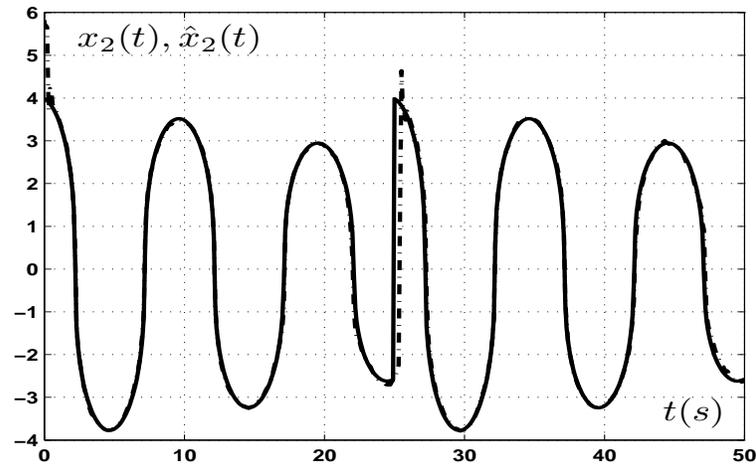


Figure 4.7: L'évolution des variables d'état estimée et réelle (Observateur à grand gain flou).

L'évolution du gain supervisé par la logique floue est donnée sur la figure 4.8. On peut noter que le superviseur propose un paramètre de synthèse relativement faible pour assurer l'insensibilité aux bruits de mesure et ne suggère une valeur relativement importante que lorsque un problème de convergence s'annonce.

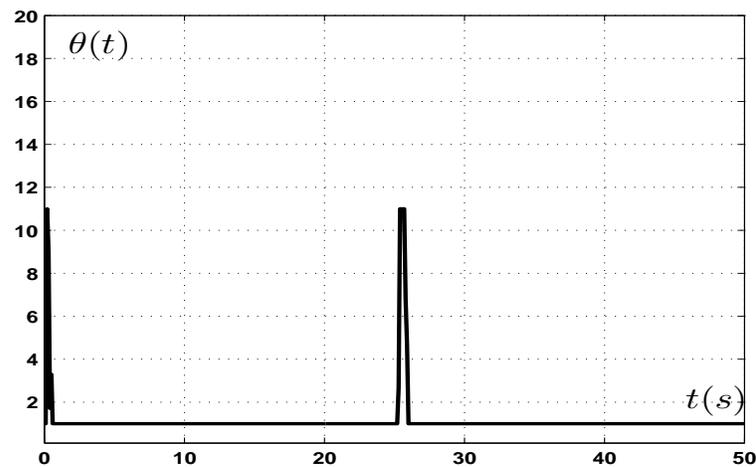


Figure 4.8: L'évolution du gain de l'observateur.

Les résultats satisfaisants illustrés par l'observateur à grand gain flou dans le domaine continu nous ont incité à l'implémenter en temps discret.

## 4.3 Discrétisation de l'observateur à grand gain flou

### 4.3.1 Formulation du problème

On considère le système non linéaire continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = F^1[x^1(t), u(t)] x^2(t) + b^1[x^1(t), u(t)] \\ \dot{x}^2(t) = b^2[x^1(t), x^2(t), u(t)] \\ y(t) = \bar{C} x(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

où l'état  $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$  et la sortie  $y \in \mathbb{R}^p$ , avec  $p = n_1 \geq n_2$  et  $n_1 + n_2 = n$ .  $F^1$  est une matrice rectangulaire de dimension  $n_1 \times n_2$ ; l'entrée  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $B(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} b^1(x_1(t), u(t)) \\ b^2(x(t), u(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  avec  $b^i(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$ ; finalement :

$$\bar{C} = [I_{n_1}, 0_{n_1 \times n_2}] \quad (4.11)$$

avec  $I_{n_1}$  est la matrice identité de dimension  $n_1 \times n_1$  et  $0_{n_1 \times n_2}$  est la matrice nulle de dimension  $n_1 \times n_2$ .

Une simple discrétisation d'Euler du système (4.10) donne :

$$\begin{cases} x^1(k+1) = x^1(k) + T_e [F^1(y(k), u(k)) x^2(k) + b^1(y(k), u(k))] \\ x^2(k+1) = x^2(k) + T_e [b^2(y(k), u(k), x^2(k))] \\ y(k) = \bar{C} x(k) = x^1(k) \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $T_e$  est la période d'échantillonnage retenue et  $\xi(k)$  dénote la valeur de toute variable  $\xi$  à l'instant d'échantillonnage  $k$ .

La forme condensée du système (4.12) peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} x(k+1) = (I_n + T_e F^k(y(k), u(k))) x(k) + T_e B^k(y(k), x^2(k), u(k)) \\ y(k) = \bar{C} x(k) = x^1(k) \end{cases} \quad (4.13)$$

avec  $F^k(u(k), y(k)) = \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_1} & F^1(y(k), u(k)) \\ 0_{n_2 \times n_1} & 0_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix}$  est une matrice carrée de dimension  $(n \times n)$ ;  $B^k(y(k), x^2(k), u(k)) = \begin{bmatrix} b^1(y(k), u(k)) \\ b^2(y(k), x^2(k), u(k)) \end{bmatrix}$ .

### 4.3.2 La forme predictive de l'observateur à grand gain discret

La synthèse de l'observateur considère l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 4.3.1** [20] *La fonction  $b^2(y(k), x^2(k), u(k))$  est globalement lipschitzienne par rapport à  $x^2(k)$  localement uniformément en  $u(k)$  et  $y(k)$ .*

Un observateur pour le système (4.13) peut être décrit par la forme predictive suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k+1|k) - L(k)\bar{C}(\hat{x}(k+1|k) - x(k+1)) \\ \hat{x}(k+1|k) &= (I_n + T_e F^k)\hat{x}(k) + T_e B(u(k), y(k), \hat{x}_2(k)) \\ L(k) &= \theta T_e \Lambda^+(k)(I_n - T_e A)\Delta_\theta^{-1}S_1^{-1}\bar{C}^T \end{cases} \quad (4.14)$$

avec :

- $\hat{x}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}^1(k) \\ \hat{x}^2(k) \end{bmatrix} \in R^n$  avec  $\hat{x}^i(k) \in R^{n_i}, i = 1, 2$ ;  $u(k)$  et  $y(k)$  sont les entrées et les sorties du système (4.13), respectivement.
- $A = \begin{bmatrix} 0_{n_1} & I_{n_1} \\ 0_{n_1} & 0_{n_1} \end{bmatrix}$ .
- $S_1$  est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov :

$$S_1 + A^T S_1 + S_1 A - \bar{C}^T \bar{C} = 0 \quad (4.15)$$

avec  $\bar{C}$  est donné par l'équation (4.11). On peut facilement démontrer que la solution explicite de (4.15) est donnée par :

$$S_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & -I_{n_1} \\ -I_{n_1} & 2I_{n_1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

- $\Delta_\theta = \text{diag}(I_{n_1}, \frac{1}{\theta} I_{n_1})$ .
- $\Lambda(y(k), u(k)) = \text{diag}[I_{n_1}, F^1(y(k), u(k))]$  et  $\Lambda^+(y(k), u(k))$  est son inverse à droite.
- $\theta$  est le paramètre de synthèse choisi de telle sorte que  $0 < \theta T_s < 1$ .

Maintenant, on énonce le théorème suivant :

**Théorème 4.3.1** [20]

*Supposons que le système (4.13) satisfait l'hypothèse (4.3.1), alors, le système (4.14) est un observateur à convergence exponentielle pour le système (4.13).*

On note que le terme  $\hat{x}(k+1|k)$  permet de prédire la valeur de  $x(k+1)$  entre les instants  $k$  et  $k+1$ . Quand la valeur de  $\bar{C}x(k+1)$  devient valable, il est utilisé pour l'ajustement de la valeur prédite  $\hat{x}(k+1|k)$  pour trouver l'estimation nécessaire.

### 4.3.3 Les limites de l'observateur à grand gain discret classique

L'observateur à grand gain discret permet d'obtenir des estimations rapides et précises pour les systèmes non linéaires discrets. Il convient de noter qu'une valeur relativement importante augmente la sensibilité de l'observateur aux bruits de mesure ; cas fréquent dans l'environnement industriel. La synthèse du gain de l'observateur peut être, donc, confrontée à un compromis : la rapidité et la précision versus la sensibilité aux bruits de mesure. Ce problème est illustré par l'exemple de simulation suivant [69, 70, 71].

On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x^1(k+1) = x^1(k) + \frac{1}{5}T_e [(x^2(k))^2 + 1]x^2(k) + u(k) \\ x^2(k+1) = x^2(k) - T_e \left[ \frac{x^2(k) + 2x^1(k)}{1 + 3(x^2(k))^2} \right] \\ y(k) = x^1(k) \end{cases} \quad (4.17)$$

où  $x(k) = \begin{pmatrix} x^1(k) \\ x^2(k) \end{pmatrix} \in R^{n_1+n_2}$ , avec  $n_1 = n_2 = 1$ .  $u(k) = \cos(2\pi k T_e)$  et  $y(k)$  dénotent l'entrée et la sortie mesurées, respectivement. La période d'échantillonnage  $T_e$  retenue par considération de la dynamique du système est égale à 0.01s.

Il est facile de remarquer que le système (4.17) est sous la forme (4.13). En particulier, on a :  $F^1(k) = \frac{1}{5}((x^2(k))^2 + 1)$  et  $b^2(k) = \frac{x^2(k) + 2x^1(k)}{1 + 3(x^2(k))^2}$ .

Donc, comme résultat, un observateur de la forme (4.14) peut être synthétisé. Pour simuler des situations pratiques, la sortie du système (4.17) est entachée par un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à  $\sqrt{0.5}$  (voir figure 4.9).

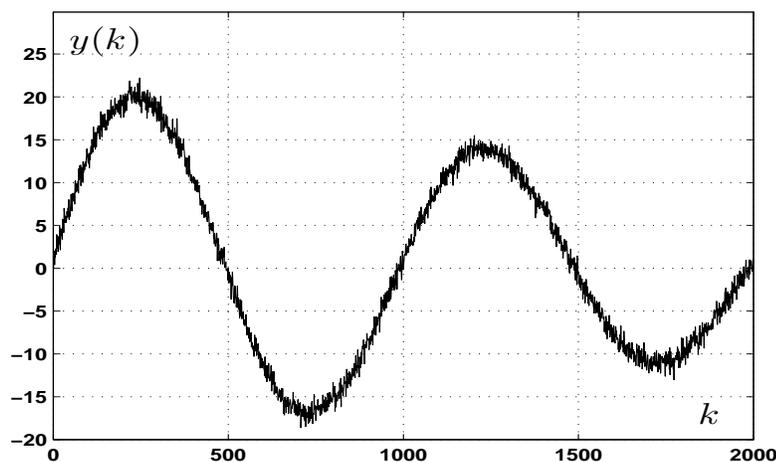


Figure 4.9: L'évolution de la sortie bruitée du système considéré.

On considère, dans un premier temps, l'estimation de la variable d'état  $x^2(k)$  par un observateur à grand gain classique en utilisant deux valeurs constantes du paramètre de synthèse (petit et grand :  $\theta = 1$  et  $\theta = 10$ ).

Les figures 4.10 et 4.11 enregistrent l'évolution de l'estimation de la variable d'état  $x^2(k)$  pour les deux valeurs retenues de  $\theta$ . On peut clairement conclure que, d'une part, avec une valeur de  $\theta$  relativement importante, le résultat d'estimation est relativement sensible aux bruits de mesure. D'autre part, l'adoption d'une valeur relativement faible de  $\theta$  conduit à une convergence lente vers la valeur réelle. Donc, comme dans le domaine continu, l'observateur à grand gain discret classique doit obéir au compromis entre la rapidité de convergence et la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure. La synthèse d'un superviseur reposant sur le mode de raisonnement humain et permettant un choix optimal et en ligne de la valeur du paramètre de synthèse  $\theta$  s'avère, donc, nécessaire.

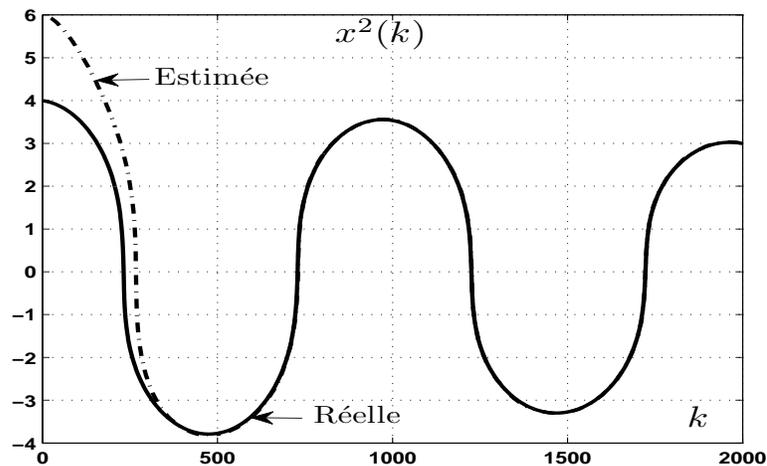


Figure 4.10: L'évolution de l'estimation de  $x^2(k)$ , ( $\theta$  relativement faible).

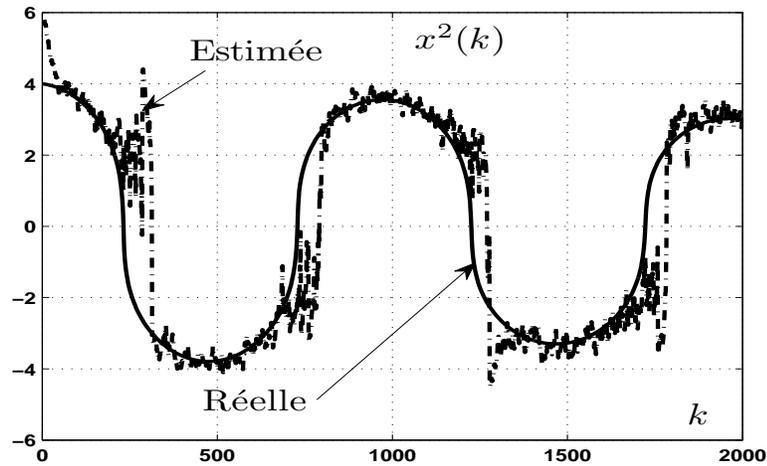


Figure 4.11: L'évolution de l'estimation de  $x^2(k)$ , ( $\theta$  relativement importante).

#### 4.3.4 Résultats de simulation

Pour des raisons de comparaison avec l'observateur à grand gain classique, l'observateur discret à grand gain flou est mis en oeuvre dans le cas du système (4.17). L'équation de l'observateur peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = (I_n + T_e F^k) \hat{x}(k) + T_e B(y(k), \hat{x}^2(k), u(k)) \\ \quad - L(k) \bar{C} ((I_n + T_e F^k) \hat{x}(k) + B(y(k), \hat{x}^2(k), u(k)) - x(k+1)) \\ L(k) = \theta_{F_n}(k) T_e \Lambda^+(k) (I_n - T_e A) \Delta_{\theta_{fuzzy}}^{-1} S_1^{-1} C^T \end{cases} \quad (4.18)$$

Dans le but d'illustrer les performances de l'observateur à grand gain flou discret en termes de précision de l'estimation et de sensibilité aux bruits de mesure, on entache la sortie du système (4.17) par un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à  $\sqrt{1.5}$ . Par ailleurs, une rupture paramétrique est simulée à l'instant  $k = 1500$ . La sortie mesurée, dans les conditions précitées, est enregistrée sur la figure 4.12.

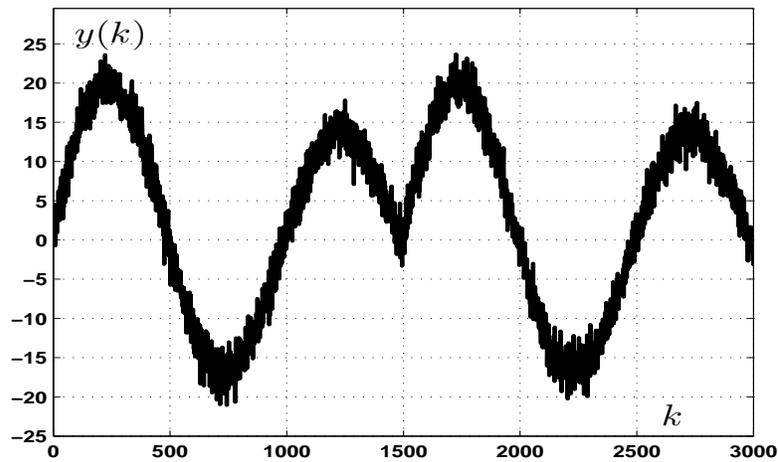


Figure 4.12: L'évolution de la sortie mesurée.

L'estimation de la variable d'état  $x^2(k)$  en exploitant l'observateur discret à grand gain flou est donnée sur la figure 4.13. La figure 4.14 donne l'évolution de  $x^2(k)$  dans le cas des deux différentes valeurs de  $\theta$  ( $\theta = 1$ ,  $\theta = 10$ ). Il est clair que, par comparaison avec l'observateur discret à grand gain classique, une amélioration notable des performances est enregistrée. En effet, la figure 4.13 montre une estimation rapide et précise associée à une robustesse vis-à-vis aux bruits de mesure.

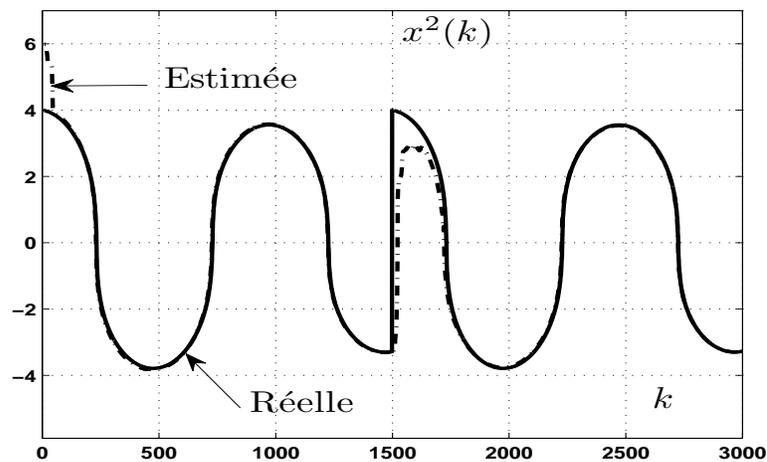


Figure 4.13: L'évolution de l'estimation de  $x^2(k)$  (Superviseur flou en ligne).

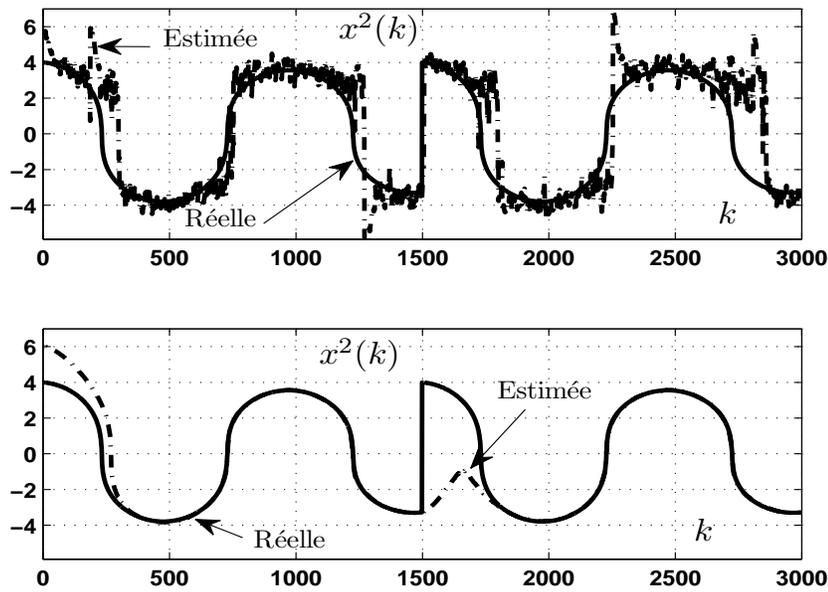


Figure 4.14: L'évolution de l'estimation de  $x^2(k)$  (Superviseur flou hors ligne).

L'évolution du paramètre de synthèse supervisé par la logique floue est illustrée sur la figure 4.15. On peut noter que le paramètre de synthèse continue à prendre des valeurs faibles pour assurer la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure et ne prend des valeurs relativement grandes qu'en présence d'une perturbation paramétrique. Les résultats satisfaisants obtenus en simulation numérique nous ont incité à implanter la stratégie de la supervision floue du paramètre de synthèse l'observateur à grand gain sur un procédé réel.

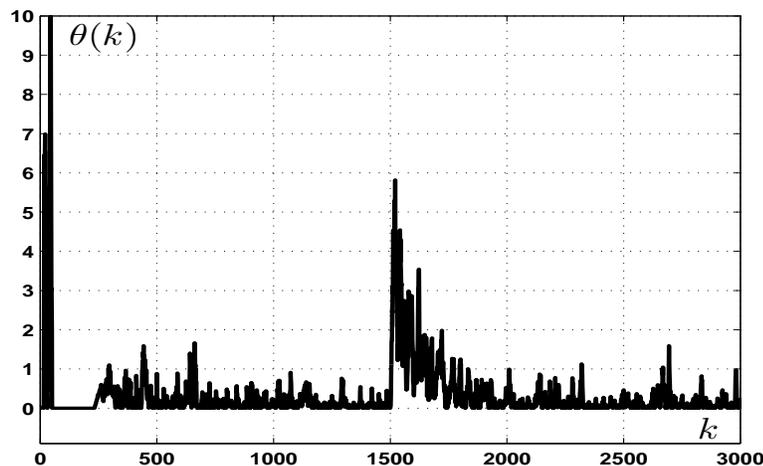


Figure 4.15: L'évolution de la sortie du superviseur (gain flou).

## 4.4 Un observateur à grand gain flou : Validation expérimentale sur un réacteur chimique

### 4.4.1 Présentation du procédé

Une application réelle de l'observateur à grand gain flou proposé sur un réacteur chimique est réalisée.



Figure 4.16: Le réacteur chimique.

Le réacteur, (figure 4.16) [62], est entouré d'une double enveloppe dans laquelle circule un fluide caloporteur. Ce dernier sert à réchauffer ou refroidir le milieu réactionnel. Deux types d'action sur la température de ce fluide caloporteur sont possibles [62] :

- Chauffage au moyen de trois résistances prévues à cet effet.
- Refroidissement par circulation d'eau froide dans l'échangeur (voir figure 4.17).

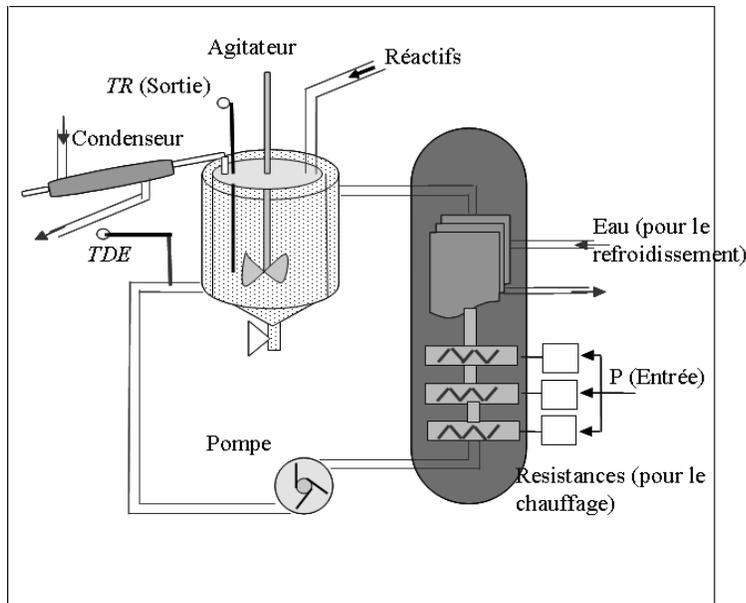
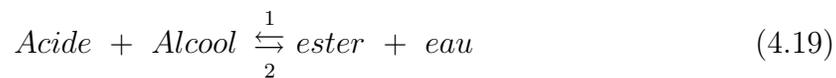


Figure 4.17: Schéma synoptique du réacteur.

Une carte d'interface RTI820 assure l'acquisition des données numériques et l'envoi des signaux permettant de fixer la puissance transmise aux résistances de chauffage et l'ouverture de la vanne du circuit de refroidissement.

La réaction chimique considérée est celle de l'estérification du grignon d'olives. Ce dernier, riche en acides gras, réagit avec l'alcool et produit un ester ; un produit largement utilisé dans la fabrication des produits cosmétiques. Le grignon de l'huile d'olives est constitué essentiellement d'un acide gras monoinsaturé. Ce dernier est caractérisé par une température d'ébullition voisine de  $300^{\circ}\text{C}$ . La réaction se fait selon l'équation suivante :



A l'état d'équilibre, la solution contient ses quatre différents éléments. Pour déplacer l'équilibre de la réaction (4.19) dans le sens 1 et augmenter ainsi la proportion en ester de la solution finale, on doit prélever l'eau présente dans la solution. La température d'ébullition de l'eau étant inférieure à celles du grignon d'olives et de l'ester, le choix d'un alcool à température d'ébullition sensiblement supérieure à  $100^{\circ}\text{C}$  permet d'éliminer exclusivement l'eau par évaporation en portant la température de la solution à une valeur légèrement supérieure à  $100^{\circ}\text{C}$ . On a utilisé, pour cela, comme alcool le 1-butanol dont la température d'ébullition est de  $118^{\circ}\text{C}$ .

Le réacteur peut être considéré comme un système monovariable ayant une entrée la puissance de chauffage  $P(W)$  et une sortie la température du milieu réactionnel. L'acquisition de l'entrée et la sortie du réacteur est assurée par la carte d'acquisition RTI820.

#### 4.4.2 Un modèle de représentation pour le réacteur

On considère, dans ce cas, comme variables d'état du réacteur ; la température du milieu réactionnel  $TR(C)$  (notée  $x^1(k)$ ) et la température du fluide caloporteur  $TF(C)$  (notée  $x^2(k)$ ) [62].

##### *Identifications structurelle et paramétrique*

Une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) est appliquée à l'entrée du réacteur. Ce dernier est excité essentiellement dans les différents domaines de fonctionnement relatifs aux trois phases (échauffement, réaction et refroidissement). L'entrée d'excitation est représentée sur la figure 4.18.

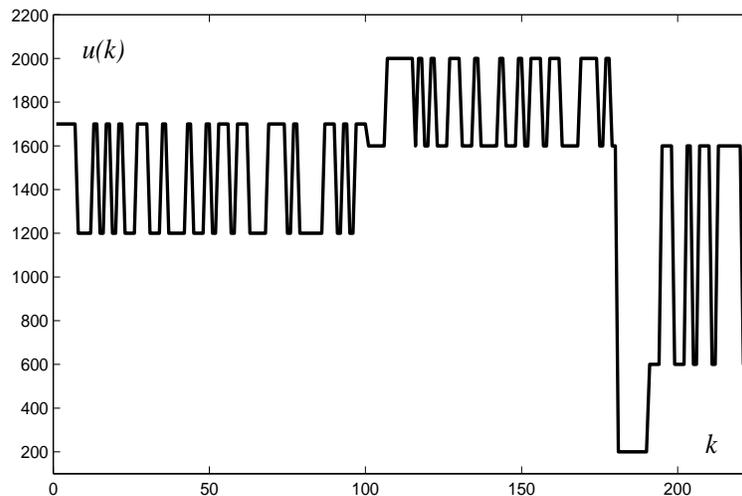


Figure 4.18: Entrée d'excitation.

La période d'échantillonnage retenue, en fonction de la dynamique du procédé, est égale à 180s [3]. En exploitant les mesures entrées/sorties, une identification structurelle a favorisé la modélisation globale du procédé par une fonction de transfert du second ordre sans retard.

L'estimation des variables d'état impose l'adoption d'un modèle d'état. Conformément aux résultats de l'identification structurelle, la structure retenue est celle d'un modèle du second ordre sans retard :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec :

$$x(k) = \begin{pmatrix} x^1(k) \\ x^2(k) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$x^1(k)$  est la première variable d'état égale à la sortie (température du réacteur),  $x^2(k)$  est la deuxième variable d'état représentant la température de la double enveloppe à l'instant  $k$  et  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont des constantes réelles. L'identification paramétrique, réalisée à la base d'une acquisition des variables d'état  $x^1(k)$  et  $x^2(k)$  (figure 4.19) a conduit au modèle donné par la relation (4.21)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.6158 & 0.3600 \\ 0.0409 & 0.9118 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0033 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned} \quad (4.21)$$

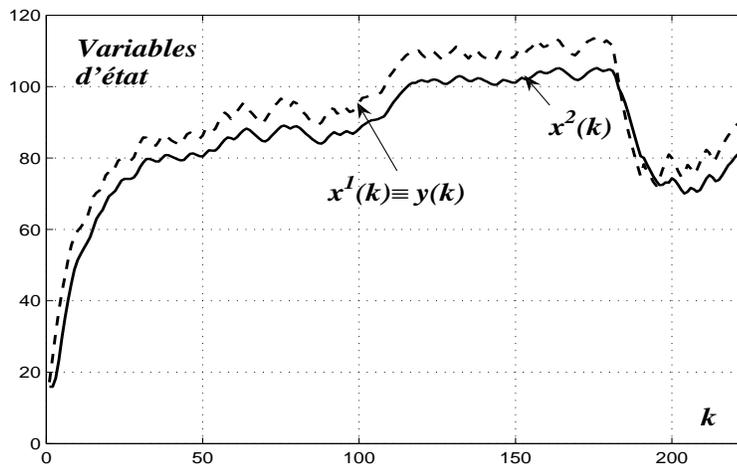


Figure 4.19: Mesures de l'état (réponse à la SBPA d'identification).

La figure 4.20, donnant le résultat d'une validation expérimentale de l'identification paramétrique, renseigne sur une précision suffisante particulièrement dans la phase de réaction. En effet, l'erreur relative entre la sortie réelle et la sortie du modèle nominal (figure 4.21) confirme la dite observation.

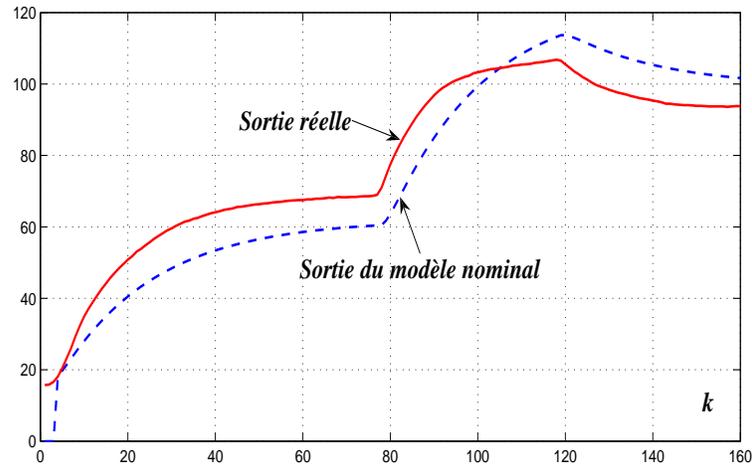


Figure 4.20: Sorties réelle et prédite du réacteur (Validation expérimentale).

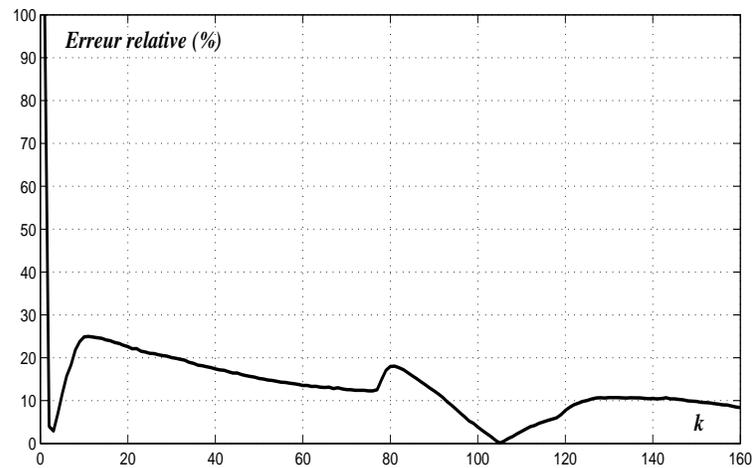


Figure 4.21: Erreur relative (validation expérimentale).

### 4.4.3 Application de l'observateur à grand gain flou

On se propose, dans ce paragraphe, d'exploiter la stratégie de l'observation incluant la logique floue pour estimer les variables d'état du réacteur chimique. L'observateur proposé, donné par l'équation (4.18), est implémenté en utilisant le modèle nominal (4.21). L'entrée  $u(k)$  est choisie de telle sorte que les variables d'état couvrent toutes les régions correspondantes à la réaction d'esterification [71].

Les figures 4.22 et 4.23, représentant l'évolution des variables d'état réelles et estimées, et les figures 4.24 et 4.25, enregistrant l'évolution des erreurs d'estimation, valident les résultats de simulation et montrent les bonnes performances offertes par l'observateur à grand gain flou proposé en termes de rapidité de convergence et de robustesse.

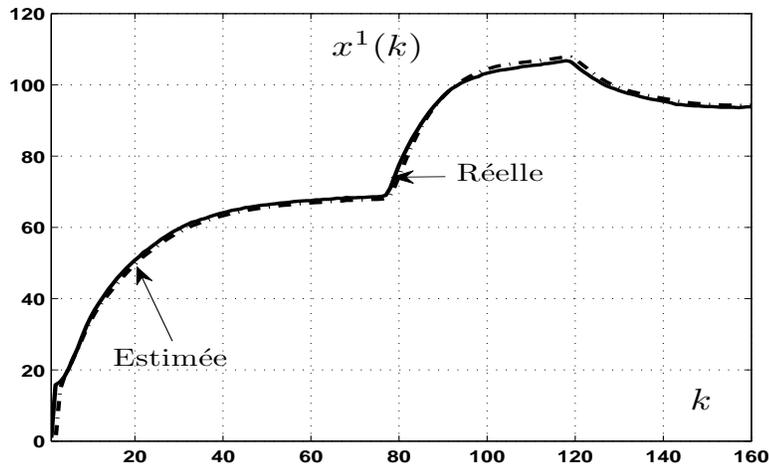


Figure 4.22: Evolution de  $x^1(k)$  et de son estimée (Observateur à grand gain flou).

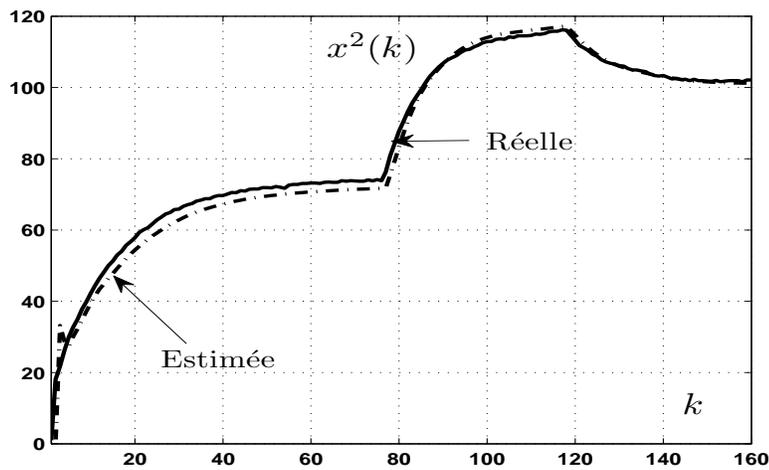


Figure 4.23: Evolution de  $x^2(k)$  et son estimée (Observateur à grand gain flou).

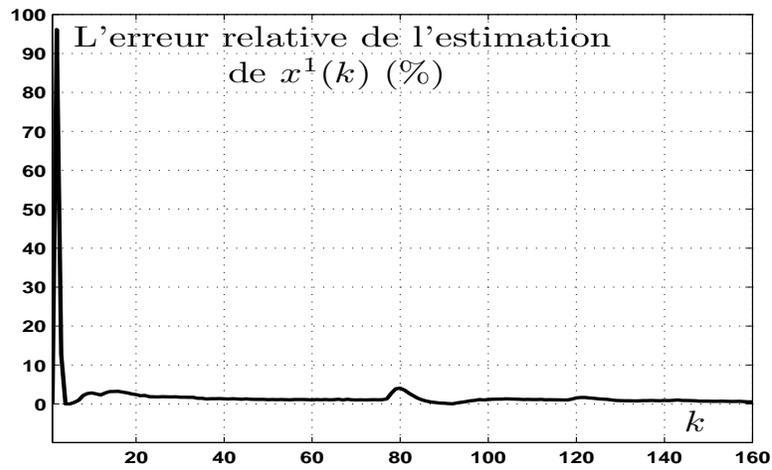


Figure 4.24: Evolution de l'erreur relative d'estimation de  $x^1(k)$  (Observateur à grand gain flou).

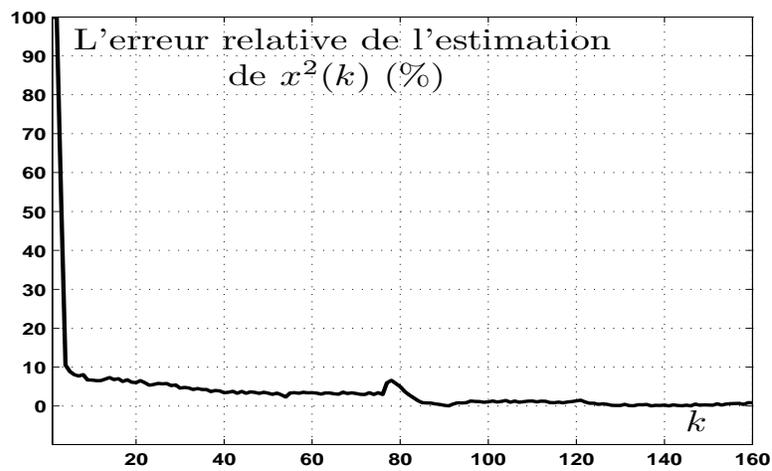


Figure 4.25: Evolution de l'erreur relative d'estimation de  $x^2(k)$  (Observateur à grand gain flou).

L'évolution du paramètre supervisé de l'observateur est illustrée sur la figure 4.26.

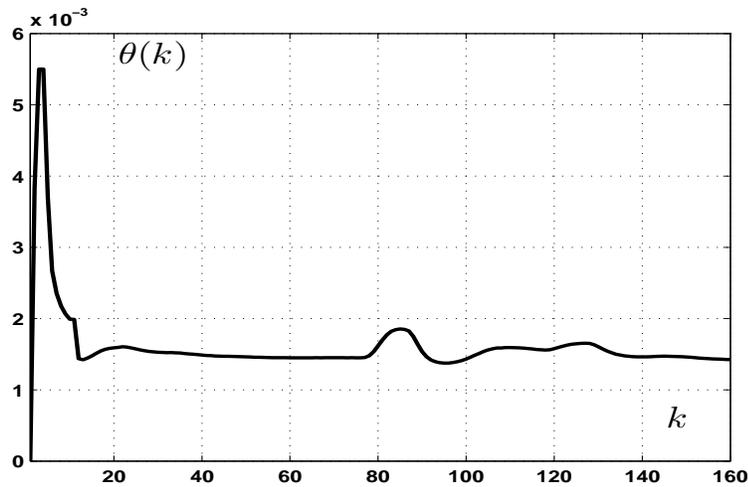


Figure 4.26: Evolution du paramètre de synthèse (Supervision floue en ligne).

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé une supervision floue de l'observateur à grand gain. Cette technique a permis de résoudre le dilemme rapidité de la convergence - sensibilité aux bruits de mesure grâce à un choix intelligent et en ligne du paramètre de synthèse de l'observateur à grand gain. Une simulation sur un système non linéaire et une validation expérimentale sur un réacteur chimique d'estérification d'huile d'olives ont confirmé les améliorations notables apportées par l'observateur à grand gain flou proposé.



# Chapitre 5

## Contribution à la commande des systèmes non linéaires

### 5.1 Introduction

Le problème de commande des systèmes non linéaires a attiré une attention particulière de plusieurs chercheurs tout au long des dernières décennies [35, 43, 56, 60, 65, 72, 78]. Plusieurs méthodes ont été développées pour la synthèse des systèmes de commande à partir des techniques de linéarisation, de platitude, de grand gain, de structure variable, de modes glissants et de backstepping [28, 29, 35, 43, 56, 78]. Les contributions se distinguent particulièrement par la classe des systèmes non linéaires considérée et donc les hypothèses de modélisation faites, et de la nature des résultats de stabilité et de performances réalisés aussi bien en régulation qu'en poursuite. Cette recherche intensive a permis d'étendre des concepts bien établis pour les systèmes linéaires aux systèmes non linéaires, notamment la compensation robuste des perturbations de type échelon modulo une incorporation d'une action intégrale dans la synthèse du système de commande [35, 60, 72, 79].

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier le problème de poursuite parfaite d'une trajectoire de référence de sortie, en présence des perturbations pour une classe des systèmes non linéaires ayant une structure triangulaire inférieure. Plus précisément, on limite l'étude aux systèmes non linéaires commandables et uniformément observables sans dynamiques des zéros.

Pour la résolution de ce problème, on propose, dans un premier temps, une commande à grand gain avec retour d'état. La conception de cette loi de commande est particulièrement obtenue par dualité avec l'observateur de type grand gain. Le gain de la loi de commande fait apparaître une fonction de synthèse satisfaisant une condition bien définie. Cette fonction de synthèse conduit à une unification des lois de commande de type grand gain. On retrouve naturellement toutes les lois de commande basées sur la technique des modes glissants ainsi que les versions qui y ont

été déduites pour s'affranchir du phénomène de réticence intrinsèque à la fonction signe.

Dans un deuxième temps, on montre, moyennant un exemple illustratif, les limites de la commande à grand gain. Cette limitation est due principalement à l'existence des systèmes non linéaires appartenant à la classe des systèmes considérée qui lors de l'application de la loi de commande à grand gain, la fonction de synthèse n'est pas respectée. Pour surmonter ces problèmes, les techniques de backstepping sont adoptées. En effet, cette commande offre une méthode systématique pour effectuer la conception du contrôleur tout en garantissant la stabilité du couple contrôleur-procédé [72] avec un rejet robuste des perturbations du type échelon via l'incorporation d'une action intégrale dans la synthèse du système de commande avec retour d'état. Les performances du système de commande non linéaire sont illustrées via un problème de poursuite d'un système non linéaire soumis à des perturbations d'état du type échelon.

## 5.2 Formulation du problème

On cherche à résoudre un problème de poursuite pour les systèmes non linéaires décrits par les équations d'état et de sortie suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(x(t)) \\ y(t) = Cx(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\text{avec } x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in R^n; \quad \varphi(x(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1(t)) \\ \varphi_2(x_1(t), x_2(t)) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) \\ \varphi_n(x(t)) \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (5.2)$$

où l'état du système  $x(t) \in \Omega$  un compact de  $R^n$ , l'entrée  $u(t) \in U$  un compact de  $R$ . On suppose que la fonction  $\varphi(x(t))$  vérifie l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 5.2.1** : La fonction  $\varphi(x(t))$  est lipschitzienne sur  $\Omega$  par rapport à  $x$ , c'est à dire :  $\forall \xi \in \Omega, \left\| \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial x} \right\|$  est bornée.

Le problème de la commande considéré consiste en une poursuite asymptotique parfaite d'une trajectoire de sortie que l'on notera  $\{\bar{y}(t)\} \in R$  soit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \bar{y}(t)) = 0 \quad (5.3)$$

On supposera que les dérivées de la séquence de référence jusqu'à l'ordre  $n$  sont disponibles. A la séquence  $\{\bar{y}(t)\} \in R$  correspond une séquence d'entrée et une trajectoire d'état du système qui seront respectivement notés  $\{\bar{u}(t)\} \in R$  et  $\{\bar{x}(t)\} \in R^n$ .

Compte tenu de la classe considérée des systèmes, on peut définir un modèle de référence comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) + \varphi(\bar{x}(t)) \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

Les variables d'état  $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{bmatrix} \in R^n$  et l'entrée  $\bar{u}(t) \in R$  sont alors données par :

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \bar{y}(t) \\ \bar{x}_k(t) = \dot{\bar{x}}_{k-1}(t) - \varphi_{k-1}(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_{k-1}(t)) \text{ pour } k \in [2, n] \\ \bar{u}(t) = \dot{\bar{x}}_n(t) - \varphi_n(\bar{x}(t)) \end{cases} \quad (5.5)$$

et peuvent être déterminées d'une manière recursive à partir de la séquence de référence et ses dérivées successives comme suit :

$$\bar{x}_k(t) = g_k(\bar{y}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(k-1)}(t)) \text{ pour } k \in [1, n]$$

avec  $\bar{y}^{(i)}(t) = \frac{d^i \bar{y}}{dt^i}$  pour  $i \in [1, n-1]$

où les fonctions  $g_i$  sont données par :

$$\begin{cases} g_1(\bar{y}(t)) = \bar{y}(t) \\ g_k(\bar{y}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(k-1)}(t)) = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial g_{k-1}(\bar{y}, \dots, \bar{y}^{(k-2)})}{\partial \bar{y}^{(j)}} \bar{y}^{(j+1)}(t) \\ \quad - \varphi_{k-1}(g_1(\bar{y}(t)), \dots, g_{k-1}(\bar{y}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(k-2)}(t))) \text{ pour } k \in [2, n] \end{cases}$$

En effet, d'après le relation (5.5), on a :

$$\begin{aligned} \bar{x}_k(t) &= \dot{\bar{x}}_{k-1}(t) - \varphi_{k-1}(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_{k-1}(t)) \text{ pour } k \in [2, n] \\ &= \frac{dg_k(\bar{y}, \bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(k-2)})}{dt} - \varphi_{k-1}(\bar{y}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(k-2)}(t)) \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial g_{k-1}(\bar{y}, \bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(k-2)})}{\partial \bar{y}^{(j)}} \bar{y}^{(j+1)}(t) - \varphi_{k-1}(g_1(\bar{y}(t)), \dots, g_{k-1}(\bar{y}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(k-2)}(t))) \\ &\text{pour } k \in [2, n] \end{aligned}$$

Le problème de poursuite parfaite en sortie (5.3) peut être alors étendu au problème de poursuite de trajectoire défini par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (5.6)$$

où  $e(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ .

Alors, le problème peut s'interpréter dans ces conditions comme un problème de régulation pour le système d'erreur obtenu à partir des équations (5.1) et (5.4) :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = A e(t) + B (u(x(t)) - \bar{u}(t)) + \varphi(x(t)) - \varphi(\bar{x}(t)) \\ e_m(t) = y(t) - \bar{y}(t) \end{cases} \quad (5.7)$$

### 5.3 Commande à grand gain avec retour d'état

La loi de commande avec retour d'état qui nous intéresse est obtenue en exploitant la dualité avec les observateurs du type grand gain afin de pouvoir réaliser une convergence exponentielle de l'état du système vers l'origine et réaliser ainsi une régulation parfaite en un temps raisonnable [35, 60]. Avant d'énoncer la loi de commande, une étude préliminaire est nécessaire.

#### 5.3.1 Etude préliminaire

Dans cette section, on introduit quelques variables qui seront utiles dans le calcul de la commande.

On définit  $\Delta(\lambda)$  la matrice diagonale suivante :

$$\Delta_\lambda = \text{diag} \left( 1, \frac{1}{\lambda}, \dots, \frac{1}{\lambda^{n-1}} \right) \quad (5.8)$$

où  $\lambda > 0$  est un scalaire strictement positif. En tenant compte des structures de  $A$  et  $B$  données par (5.2), on peut facilement démontrer les identités suivantes :

$$\Delta_\lambda A \Delta_\lambda^{-1} = \lambda A; \quad \Delta_\lambda B = \frac{1}{\lambda^{q-1}} B$$

Soit la matrice  $\bar{S}$ , la solution de l'équation algébrique suivante :

$$\bar{S} + A^T \bar{S} + \bar{S} A = \bar{S} B B^T \bar{S} \quad (5.9)$$

**Remarque 5.3.1** On considère la matrice  $T$  définie par :

$$T = T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Compte tenu de la structure des matrices  $B, C$  donnée par l'équation (5.2), un calcul simple permet d'établir l'identité suivante :

$$T C^T C T = B B^T \quad (5.10)$$

Alors, l'équation algébrique de Lyapunov définie par :

$$S + A^T S + S A = C^T C \quad (5.11)$$

peut se mettre sous la forme suivante :

$$T S T + T A^T T T S T + T S T T A T = T C^T C T$$

En posant  $\tilde{S} = T S T$ , cette dernière équation s'écrit alors :

$$\tilde{S} + A \tilde{S} + \tilde{S} A^T = B B^T$$

Soit

$$\bar{S} = \tilde{S}^{-1} = T S^{-1} T \quad (5.12)$$

Comme  $S$  est une solution unique symétrique et définie positive de l'équation (5.11),  $\bar{S}$  en sera de même pour l'équation algébrique (5.9).

En tenant compte de la relation (5.12) ainsi que de l'expression  $S^{-1} C^T$  donnée dans [57], on obtient :

$$B^T \bar{S} = C S^{-1} T = \begin{bmatrix} C_n^n & C_n^{n-1} & \dots & C_n^1 \end{bmatrix}$$

Soit  $K_c : R \rightarrow R$  une fonction bornée (i. e.  $\forall \xi \in R^n : \|K_c(\xi)\| \leq k_c$  où  $k_c \geq 0$  est une constante) satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall \xi \in \Omega \quad \text{on a } \xi^T K_c(\xi) \geq \frac{1}{2} \xi^T \xi \quad (5.13)$$

où  $\Omega$  est un compact de  $R^n$ .

### 5.3.2 Synthèse de la loi de commande

Compte tenu des observateurs du type grand gain dynamique ou non proposés dans [35, 60, 67, 68] pour les systèmes uniformément observables, on peut suggérer une structure de loi de commande avec retour d'état du type grand gain pour les systèmes considérés. Soit :

$$\begin{cases} \zeta(e(t)) = -K_c (\lambda B^T \bar{S} \Delta_\lambda e(t)) \\ u(x(t)) = \bar{u}(t) + \zeta(e(t)) \\ u(x(t)) = \dot{\bar{x}}_n(t) - \varphi_n(\bar{x}(t)) + \zeta(e(t)) \end{cases} \quad (5.14)$$

Cette loi de commande avec retour d'état réalise bien l'objectif de poursuite considéré (5.6) comme l'indique le résultat fondamental suivant.

**Théorème 5.3.1** [35] *Les trajectoires d'état et de sortie du système (5.1)-(5.2) soumis à l'hypothèse 5.2.1 où l'entrée  $u$  est donnée par (5.14) convergent globalement exponentiellement vers celles du modèle de référence (5.4) pour des valeurs relativement grandes de  $\lambda$ .*

**Preuve:** [35]

On s'intéresse, tout d'abord, au calcul de la dérivée de  $e(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ , alors, en tenant compte des équations (5.7) et (5.14), la dynamique des erreurs peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) + B\zeta(e(t)) + \varphi(x(t)) - \varphi(\bar{x}(t)) \\ &= Ae(t) - BK_c(\lambda^q B^T \bar{S} \Delta_\lambda e(t)) + \varphi(x(t)) - \varphi(\bar{x}(t)) \end{aligned} \quad (5.15)$$

On pose :

$$\bar{e}(t) = \lambda^q \Delta_\lambda e(t) \quad (5.16)$$

En utilisant les équations (5.15) et (5.16), on a :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}(t) &= \lambda^q \Delta_\lambda \dot{e}(t) = \Delta_\lambda A \Delta_\lambda^{-1} \bar{e}(t) - \lambda^q \Delta_\lambda B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}(t)) + \lambda^q \Delta_\lambda (\varphi(x(t)) - \varphi(\bar{x}(t))) \\ &= \lambda A \bar{e}(t) - \lambda B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}(t)) + \lambda^q \Delta_\lambda (\varphi(x(t)) - \varphi(\bar{x}(t))) \end{aligned} \quad (5.17)$$

On considère la fonction quadratique suivante :

$$V(\bar{e}(t)) = \bar{e}^T(t) \bar{S} \bar{e}(t) \quad (5.18)$$

Dans la suite, pour alléger les expressions et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet la variable temps " $t$ ". La dérivée par rapport au temps de  $V$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{V}(\bar{e}) = 2 \bar{e}^T \bar{S} \dot{\bar{e}} = 2 \lambda \bar{e}^T \bar{S} A \bar{e} - 2 \lambda \bar{e}^T \bar{S} B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) + 2 \lambda^q \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(\bar{x}))$$

L'équation (5.9) peut s'écrire comme suit :

$$2 \bar{e}^T \bar{S} A \bar{e} = -\bar{e}^T \bar{S} \bar{e} + \bar{e}^T \bar{S} B B^T \bar{S} \bar{e}$$

Par ailleurs, la dérivée de la fonction  $V$ , peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\lambda V + \lambda \bar{e}^T \bar{S} B B^T \bar{S} \bar{e} - 2\lambda \bar{e}^T \bar{S} B K_c (B^T \bar{S} \bar{e}) + 2\lambda^q \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(\bar{x})) \\ &= -\lambda V - 2\lambda (\xi^T K_c(\xi) - \frac{1}{2} \xi^T \xi) + 2\lambda^q \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(\bar{x})) \end{aligned}$$

où  $\xi = B^T \bar{S} \bar{e}$ . En utilisant l'inégalité (5.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda V + 2\lambda^q \bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(\bar{x})) \\ &\leq -\lambda V + 2\lambda^q \|\bar{e}^T \bar{S} \Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(\bar{x}))\| \end{aligned} \quad (5.19)$$

Par ailleurs, le théorème de la valeur moyenne donne :

$$\varphi(x) - \varphi(\bar{x}) = \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial x} (x - \bar{x})$$

où  $\xi \in \Omega$ . On aura alors

$$\|\Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(\bar{x}))\| = \left\| \Delta_\lambda \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial x} e \right\| = \left\| \frac{1}{\lambda^q} \Delta_\lambda \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial x} \Delta_\lambda^{-1} \bar{e} \right\| \leq \left\| \frac{1}{\lambda^q} \Delta_\lambda \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial x} \Delta_\lambda^{-1} \right\| \|\bar{e}\|$$

Or,  $\varphi$  est une fonction triangulaire de classe  $C^1$  par rapport à  $x$ . Alors, pour tout  $\xi \in R^n$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial x} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\xi)}{\partial x_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{\partial \varphi_2(\xi)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(\xi)}{\partial x_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & 0 \\ \frac{\partial \varphi_n(\xi)}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_n(\xi)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ \Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi) \Delta_\lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} \times & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{\times}{\lambda} & \times & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\times}{\lambda^2} & \frac{\times}{\lambda} & \times & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\times}{\lambda^{n-1}} & \frac{\times}{\lambda^{n-2}} & \cdots & \frac{\times}{\lambda} & \times \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque la fonction  $\varphi$  est lipschitzienne sur  $\Omega$ , la matrice  $\frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial x}$  est bornée sur  $\Omega$ . Et compte tenu de la structure de  $\varphi(x)$ , cette matrice est triangulaire inférieure. La matrice  $\Delta_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi) \Delta_\lambda^{-1}$  ne dépend donc que des termes en  $1/\lambda$  et sa norme est bornée par une constante indépendante de  $\lambda$  pour tout  $\lambda \geq 1$ . Il en résulte que

$$2\lambda^q \|\bar{S} \bar{e}\| \|\Delta_\lambda (\varphi(x) - \varphi(\bar{x}))\| \leq \gamma V \quad (5.20)$$

où  $\gamma > 0$  est une constante indépendante de  $\lambda$ . En combinant (5.19) et (5.20), on obtient

$$\dot{V} \leq -(\lambda - \gamma) V$$

Par conséquent

$$V(\bar{e}(t)) \leq e^{-(\lambda - \gamma)t} V(\bar{e}(0))$$

Ce qui termine la preuve du théorème.

### 5.3.3 Quelques fonctions de synthèse particulières

Le gain de commande avec retour d'état dépend d'une fonction de synthèse  $K_c$  bornée complètement caractérisée par la propriété (5.13). Dans ce qui suit, on donnera quelques fonctions satisfaisant cette propriété. On distingue :

- Les fonctions de synthèse de type grand gain données par :

$$K_c(\xi) = k_c \xi \quad (5.21)$$

où  $k_c$  est une constante positive avec  $k_c \geq \frac{1}{2}$ . On notera que cette fonction vérifie la condition requise sur tout compact de  $R^n$ .

- Les fonctions de synthèse de type modes glissants données par :

$$K_c(\xi) = k_c \text{sign}(\xi) \quad (5.22)$$

où  $k_c$  est une constante positive et 'sign' est la fonction signe usuelle. On notera que la condition (5.13) est toujours vérifiée par (5.22) dans le cas des systèmes à entrées bornées et à des états bornées, toutefois, il est à signaler que ces fonctions induisent un phénomène de réticence lors de leur utilisation dans les cas pratiques.

- Les fonctions de synthèse utilisées dans la pratique des méthodes à modes glissants pour s'affranchir du phénomène de réticence, notamment :

$$K_c(\xi) = k_c \tanh(k_0 \xi) \quad (5.23)$$

où  $\tanh$  signifie la fonction tangente hyperbolique et  $k_c$  et  $k_0$  sont deux scalaires positifs. Il est aisé de voir que la fonction (5.23) vérifie bien la condition (5.13) pour des valeurs relativement grandes de  $k_c$ .

Il est important de remarquer que le choix de la fonction  $K_c$  ne se limite pas aux fonctions présentées précédemment [35].

### 5.3.4 Exemple de simulation

On se propose de traiter un problème de poursuite pour un système non linéaire décrit par le système des équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \sin(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2^2(t) + x_1(t) \cos(x_1(t) x_2(t)) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (5.24)$$

où l'état  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in R^2$ , l'entrée  $u(t) \in R$  et la sortie  $y(t) \in R$ . Il est clair que le modèle (5.24) est sous la forme (5.1). Par conséquent, on peut appliquer la loi de commande proposée.

La trajectoire de sortie de référence correspond à la sortie d'un filtre de troisième ordre, de gain statique unitaire avec un pôle triple en  $p = -1$ , attaqué par l'entrée donnée sur la figure 5.1.

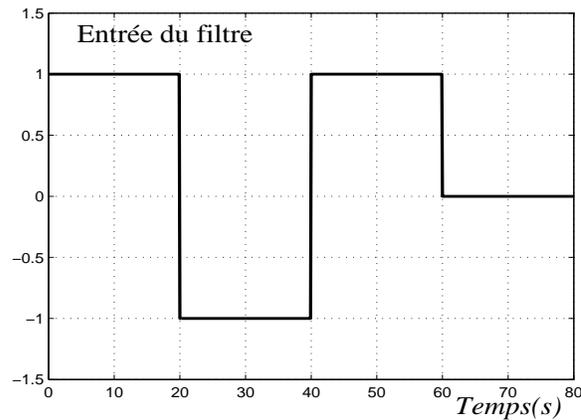


Figure 5.1: Evolution de l'entrée du filtre de troisième ordre.

La fonction de synthèse choisie est celle définie par (5.23). Les paramètres de synthèse sont les suivantes

$$k_c = 10; k_0 = 0.5; \lambda = 10$$

Les résultats enregistrés sont donnés sur la figure 5.2. Sur cette figure, on présente l'évolution du comportement d'entrée-sortie du système ainsi que l'erreur de poursuite. Par ailleurs, on peut clairement déduire le bon comportement du système de commande.

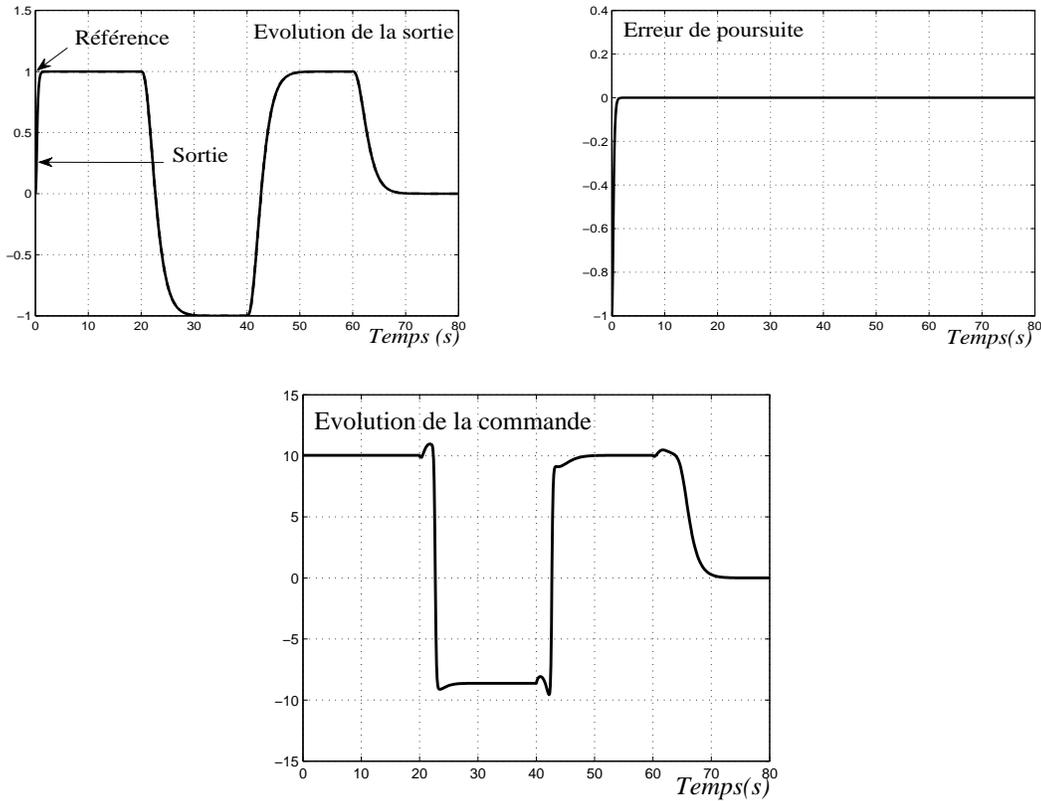


Figure 5.2: Evolution de la commande, de la sortie et de l'erreur de poursuite (Commande à grand gain).

### 5.3.5 Limites de la commande à grand gain : Exemple illustratif

Dans le but d'illustrer les limites de la commande à grand gain, on se propose de traiter le problème de poursuite de la trajectoire pour un système non linéaire appartenant à la classe des systèmes commandables, uniformément observable.

On considère le système non linéaire décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - 5 \sin(x_1^2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)x_2(t) \cos(10x_2(t)) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (5.25)$$

où l'état  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in R^2$ , l'entrée  $u(t) \in R$  et la sortie  $y(t) \in R$ . Il est clair que le modèle (5.25) est sous la forme (5.1). Par conséquent, on peut lui appliquer la loi de commande à grand gain proposée.

La trajectoire de sortie de référence correspond bien à la sortie d'un filtre de troisième ordre, de gain statique unitaire avec un pôle triple en  $p = -1$ , excité par l'entrée donnée sur la figure 5.1. La fonction de synthèse choisie est celle définie par (5.23). Les paramètres de synthèse sont les suivantes :

$$k_c = 10; k_0 = 0.5;$$

Pour illustrer les limites de la commande à grand gain, on choisit de traiter le problème de la poursuite pour deux valeurs différentes de  $\lambda$  ( $\lambda = 1$  et  $\lambda = 2$ ). Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure 5.3.

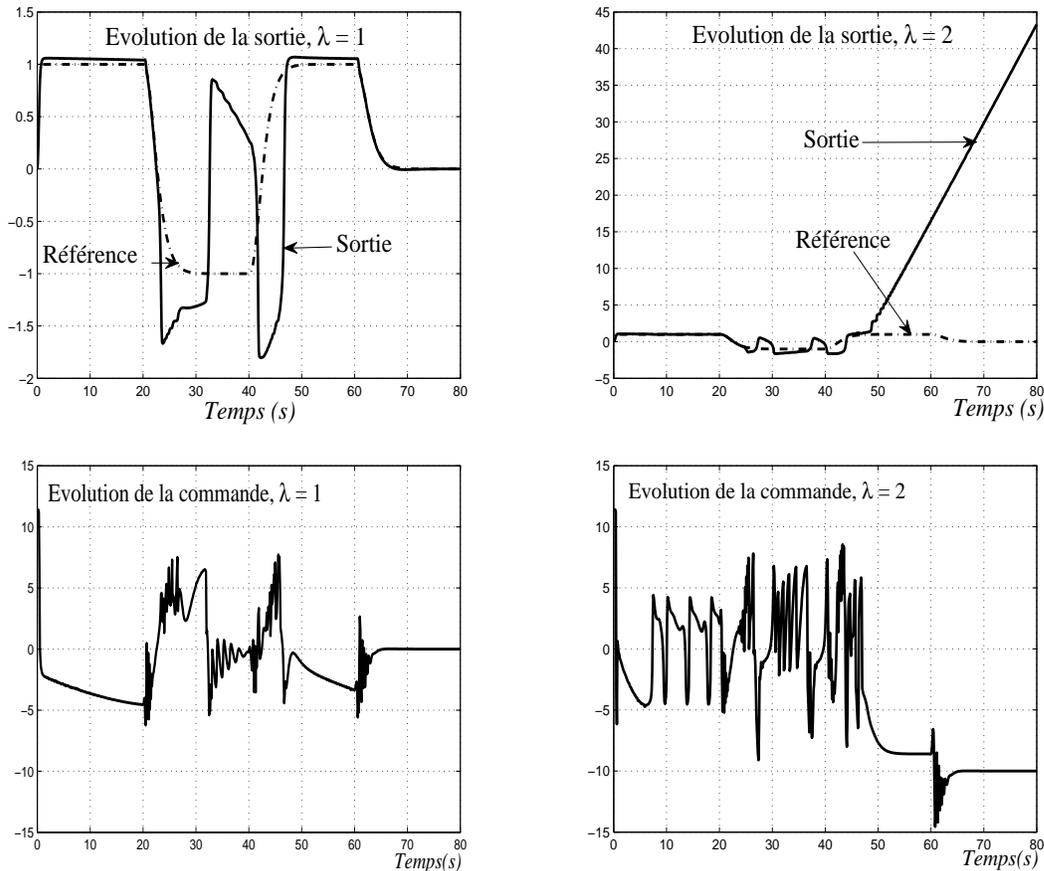


Figure 5.3: Evolution de la sortie et de la commande pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

On peut conclure, à partir de la figure 5.3, l'échec de la commande à grand gain à résoudre le problème de la poursuite de trajectoire pour le système (5.25), malgré que ce dernier appartient à la classe des systèmes non linéaires commandable et uniformément observables. Cet échec est dû à la fonction de synthèse (5.23) qui doit, à tout instant, vérifier la condition (5.13). Cette condition peut être assurée par le bon choix des paramètres de synthèse  $k_c$  et  $\lambda$ . En effet, en augmentant les paramètres  $k_c$  et  $\lambda$ , le système (5.25) poursuit facilement la trajectoire désirée mais cette poursuite est assurée au prix de la génération des valeurs très importantes de la commande ce qui peut solliciter les actionneurs comme s'est illustré sur la figure 5.4.

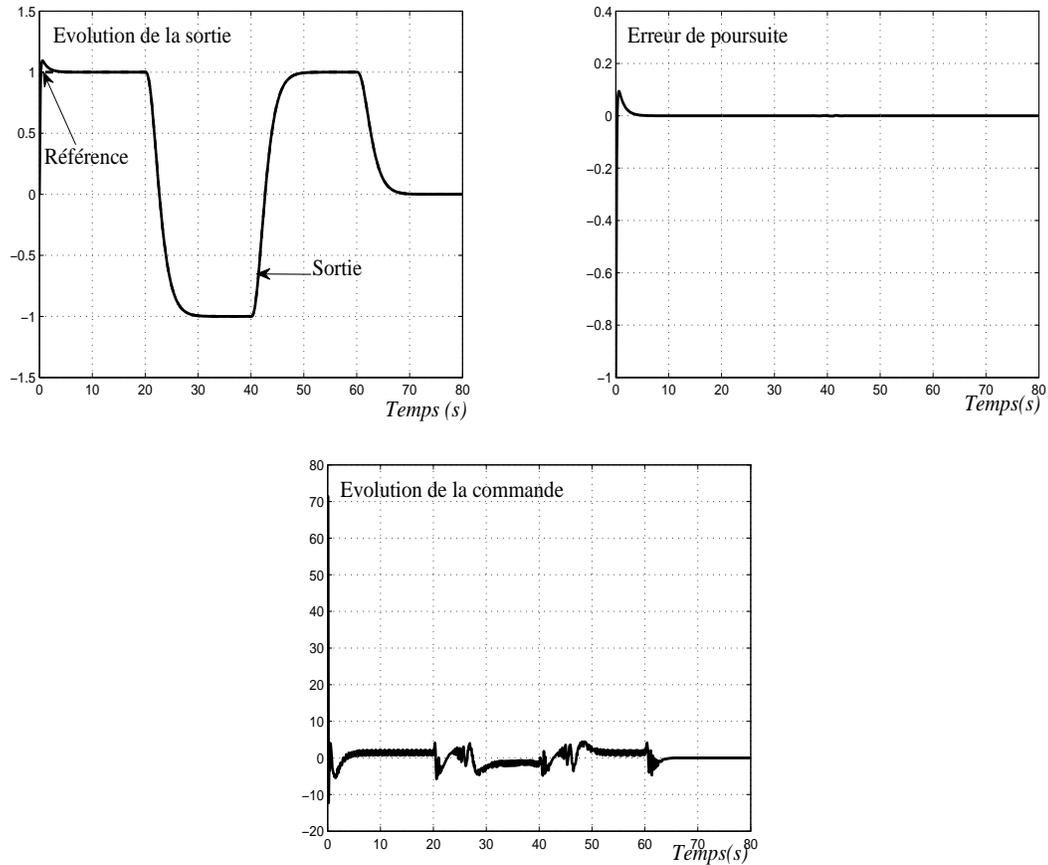


Figure 5.4: Evolution de la sortie, de l'erreur de poursuite et de la commande ( $\lambda = 5$  et  $k_c = 70$ ).

Pour surmonter ces limites, on choisit d'appliquer un nouveau type de commande non linéaires : La commande par backstepping.

## 5.4 Commande par backstepping

La section suivante présente dans un premier temps un bref historique de la commande par backstepping. Dans un deuxième temps, un exemple est étudié afin de se familiariser avec la technique. Finalement, quelques observations et simulations sont présentées.

### 5.4.1 Historique de la commande par backstepping

La technique de 'backstepping' a été développée par Kanellakopoulos *et al.* [49] et inspiré par les travaux de Feuer & Morse [26] d'une part et Tsinias [86] et Kokotovic & Sussmann [51] d'autre part. Elle offre une méthode systématique pour synthétiser un contrôleur pour les systèmes non linéaires. Le mot 'backstepping' est

particulièrement justifié par le processus récursif intrinsèque à la synthèse. Il permet d'effectuer une synthèse constructive d'une loi de commande pour les systèmes non linéaires triangulaires en adoptant une approche de Lyapunov [17]. L'idée consiste à calculer une loi de commande afin de garantir que la dérivée d'une certaine fonction (de Lyapunov) soit définie positive et que sa dérivée soit toujours négative.

## 5.4.2 Principe et synthèse de la loi de commande par backstepping avec retour d'état

### 5.4.2.1 Principe

Dans ce qui suit, on détaille une nouvelle considération de la commande par backstepping. Alors, afin d'illustrer le principe de cette méthode, on reconsidère la classe des systèmes commandables et uniformément observables présentée par les équations (5.1)-(5.2).

Alors, on cherche à résoudre un problème de poursuite pour les systèmes non linéaires décrits par les équations (5.1)-(5.2).

Le problème de la commande considéré consiste en une poursuite asymptotique parfaite d'une trajectoire de sortie que l'on notera  $\{\bar{y}(t) \in R\}$ , soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \bar{y}(t)) = 0 \quad (5.26)$$

On supposera que les dérivées de la séquence de référence jusqu'à l'ordre  $n$  sont disponibles. A la séquence  $\bar{y}(t) \in R$ , correspond une trajectoire d'état du système qui sera notée  $\bar{x}(t) \in R^n$ . Compte tenu de la classe considérée des systèmes, on peut définir un modèle de référence comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) + \varphi(x(t)) + \Lambda (x(t) - \bar{x}(t)) + A^T (x(t) - \bar{x}(t)) + B u(t) \\ \bar{y}(t) = C \bar{x}(t) = \bar{x}_1(t) \end{cases} \quad (5.27)$$

où  $\Lambda = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$  avec  $c_i, i = 1, \dots, n$  sont des constantes positives et représentent les paramètres de synthèse de la commande par 'backstepping'.

Les variables d'état  $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{pmatrix}$  et l'entrée  $u(t) \in R$  sont alors données par

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \bar{y}(t) \\ \bar{x}_k(t) = \dot{\bar{x}}_{k-1}(t) - \varphi_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) - c_{k-1}(x_{k-1}(t) - \bar{x}_{k-1}(t)) - (x_{k-1}(t) - \bar{x}_{k-1}(t)) \\ u(t) = \dot{\bar{x}}_n(t) - \varphi_n(x(t)) - c_{n-1}(x_{n-1}(t) - \bar{x}_{n-1}(t)) - (x_{n-1}(t) - \bar{x}_{n-1}(t)) \end{cases} \quad (5.28)$$

et peuvent être déterminées d'une manière recursive à partir de la séquence de référence et ses dérivées successives.

Le problème de poursuite parfaite en sortie (5.26) peut être alors étendu au problème de poursuite de trajectoire d'état défini par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e(t)) = 0$$

où  $e(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ . Alors, le problème peut être interprété comme un problème de régulation pour le système d'erreur obtenu à partir des équations du système (5.1) et du modèle de référence (5.27) :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = A e(t) - \Lambda e(t) - A^T e(t) \\ e_m(t) = y(t) - \bar{y}(t) \end{cases}$$

**Théorème 5.4.1** *Les trajectoires d'état et de sortie du système (5.1)-(5.2) où l'entrée  $u(t)$  est donnée par (5.28) convergent exponentiellement vers celles du modèle de référence (5.27) pour des valeurs de relativement grandes de  $c_i, i = 1, \dots, n$ .*

La preuve du théorème fait l'objet du paragraphe suivant.

**Preuve:** On considère la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T(t) e(t)$$

Dans la suite, pour alléger les expressions et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet la variable temps " $t$ ". La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov peut être écrite comme suit :

$$\dot{V} = e^T \dot{e} = e^T (A - A^T) e - e^T \Lambda e$$

En tenant compte de la structure de la matrice  $A$ , alors  $\dot{V}$  est détaillée comme suit :

$$\dot{V} = -e^T \Lambda e < 0$$

Puisque  $\Lambda = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$  avec  $c_i > 0, i = 1, \dots, n$ , ce qui termine la preuve.

#### 5.4.2.2 Synthèse de la commande par backstepping

Afin d'illustrer le principe de la méthode du backstepping, un système non linéaire de deuxième ordre est considéré. On considère le système décrit par les équations d'état et de sortie suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \varphi_1(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \varphi_2(x_1(t), x_2(t)) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (5.29)$$

Le problème de commande considéré consiste en une poursuite asymptotique parfaite d'une trajectoire de sortie que l'on notera  $\bar{y}(t) \in R$ , soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \bar{y}(t)) = 0 \quad (5.30)$$

On supposera que les dérivées de la séquence de référence jusqu'à l'ordre 2 sont disponibles. A la séquence  $\bar{y}(t) \in R$ , correspond une trajectoire d'état du système qui sera notée  $\bar{x}(t) \in R^2$ . Compte tenu de la classe considérée des systèmes, on peut définir un modèle de référence comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{x}_2(t) + \varphi_1(x_1(t)) + c_1(x_1(t) - \bar{x}_1(t)) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \varphi_2(x_1(t), x_2(t)) + c_2(x_2(t) - \bar{x}_2(t)) + (x_1(t) - \bar{x}_1(t)) + u(t) \end{cases} \quad (5.31)$$

telles que  $c_1, c_2$  sont des constantes strictement positives.

Les variables d'état  $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{pmatrix}$  et l'entrée  $u(t) \in R$  sont alors données par :

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \bar{y}(t) \\ \bar{x}_2(t) = \dot{\bar{x}}_1(t) - \varphi_1(x_1(t)) - c_1(x_1(t) - \bar{x}_1(t)) \\ u(t) = \dot{\bar{x}}_2(t) - \varphi_2(x_1(t), x_2(t)) - c_2(x_2(t) - \bar{x}_2(t)) - (x_1(t) - \bar{x}_1(t)) \end{cases} \quad (5.32)$$

et peuvent être déterminées d'une manière recursive à partir de la séquence de référence et ses dérivées successives.

Le problème de poursuite parfaite en sortie (5.30) peut être alors étendu au problème de poursuite de trajectoire d'état défini par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (e(t)) = 0$$

où  $e(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ .

Et ce dernier peut être interprété comme un problème de régulation pour le système d'erreur obtenu à partir des équations du système (5.29) et du modèle de référence (5.31).

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) - c_1 e_1(t) \\ \dot{e}_2(t) = -c_2 e_2(t) - e_1(t) \end{cases} \quad (5.33)$$

**Théorème 5.4.2** *Les trajectoires d'état et de sortie du système (5.29) où l'entrée  $u(t)$  est donnée par (5.32) convergent exponentiellement vers celles du modèle de référence (5.31) pour des valeurs de relativement grandes de  $c_i, i = 1, \dots, 2$ .*

**Démonstration**

Considérons la fonction quadratique suivante  $V = \frac{1}{2} e^T(t) e(t)$ . On choisit, dans la suite, pour alléger les expressions et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, d'omettre la variable temps "t". Alors, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T \dot{e} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} \\ &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \\ &= e_1 (e_2 - c_1 e_1) + e_2 (-c_2 e_2 - e_1) \\ &= -c_1 e_1^2 - c_2 e_2^2 \end{aligned}$$

Donc  $\dot{V} < 0$  et on a la convergence exponentielle du système des erreurs (5.33) vers zéro et par la suite la convergence des états de référence vers les états réels en appliquant la loi de commande (5.32).

Alors les trajectoires de référence peuvent être déterminées de la façon suivante :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{y} \\ \bar{x}_2 = \dot{\bar{y}} - \varphi_1(x_1) - c_1(x_1 - \bar{y}) \\ u = \ddot{\bar{y}} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 - c_1(\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}}) - \varphi_2(x_1, x_2) - c_2(x_2 - \dot{\bar{y}} + \varphi_1(x_1) + c_1(x_1 - \bar{y})) - (x_1 - \bar{y}) \end{cases}$$

Donc la commande  $u$  est calculée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u &= \ddot{\bar{y}} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 - c_1(\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}}) - \varphi_2(x_1, x_2) - c_2(x_2 - \dot{\bar{y}} + \varphi_1(x_1) + c_1(x_1 - \bar{y})) - (x_1 - \bar{y}) \\ &= \ddot{\bar{y}} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 - c_1(\dot{x}_1 - \dot{\bar{y}}) - \varphi_2(x_1, x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \varphi_1(x_1)) + c_2(\dot{\bar{y}} - \varphi_1(x_1) - c_1(x_1 - \bar{y})) - (x_1 - \bar{y}) \\ &= \ddot{\bar{y}} + \dot{\bar{y}}(c_1 + c_2) + \bar{y}(1 + c_1 c_2) - \dot{x}_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + c_1 + c_2 \right) - x_1(c_1 c_2 + 1) - \varphi_2(x_1, x_2) \\ &= \ddot{\bar{y}} + (c_1 + c_2)(\dot{\bar{y}} - \dot{x}_1) + (1 + c_1 c_2)(\bar{y} - x_1) - \varphi_2(x_1, x_2) - \dot{x}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Donc, la loi de commande  $u$  à appliquer au système est donnée par l'équation suivante :

$$u = \ddot{\bar{y}} + (c_1 + c_2)(\dot{\bar{y}} - \dot{x}_1) + (1 + c_1 c_2)(\bar{y} - x_1) - \varphi_2(x_1, x_2) - \dot{x}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \quad (5.34)$$

**5.4.3 Exemple de simulation**

Pour montrer l'apport de la commande par 'backstepping' par rapport à la commande à grand gain, on reconsidère l'exemple de simulation donné par (5.25).

La trajectoire de sortie de référence correspond bien à la sortie d'un filtre de troisième ordre, de gain statique unitaire avec un pôle triple en  $p = -1$ , excité par l'entrée donnée sur la figure 5.1. Les paramètres de synthèse sont les suivantes :

$$c_1 = c_2 = 2$$

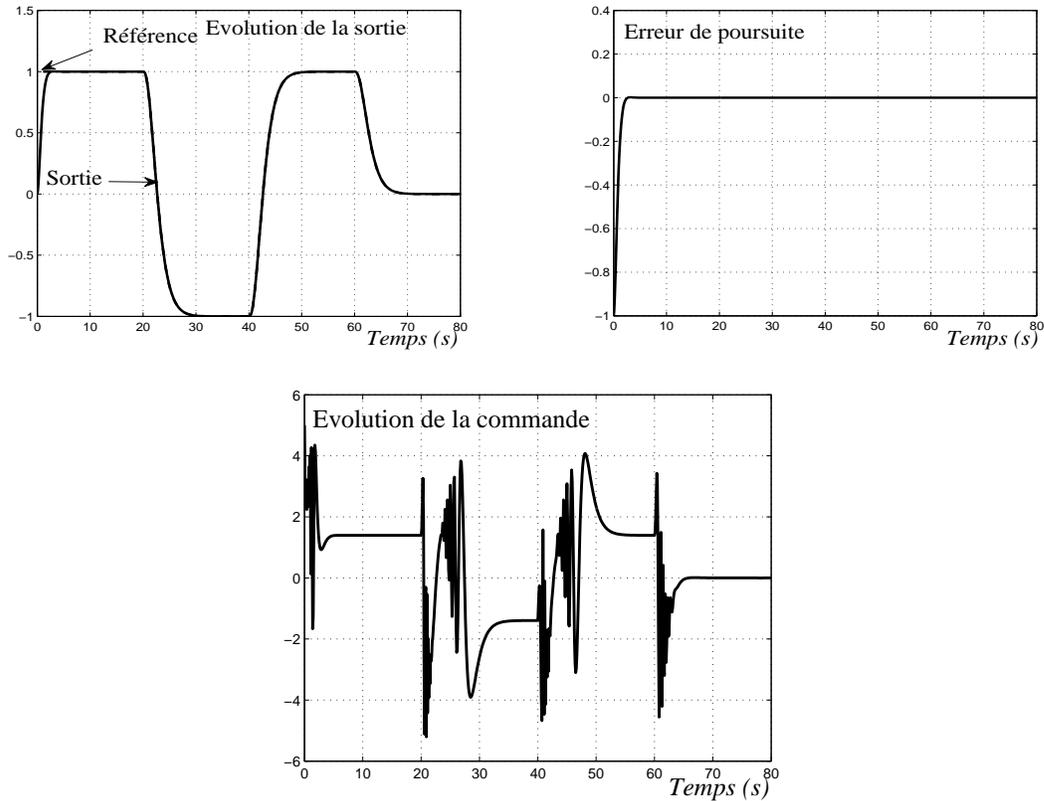


Figure 5.5: Evolution de la commande, de la sortie et de l'erreur de poursuite (Commande par 'backstepping').

L'ensemble des résultats enregistrés sont illustrés sur la figure 5.5, où on présente l'évolution du comportement d'entrée-sortie ainsi que l'erreur de poursuite. On note bien le bon comportement de la commande par backstepping à résoudre le problème de poursuite de trajectoire et la sortie du système suit parfaitement la trajectoire de référence.

Toutefois, il est à noter que la loi de commande trouvée précédemment (5.34) ne corrige pas parfaitement les perturbations extérieures ceci est dû à l'absence d'une action intégrale. Donc, en présence d'un changement de consigne et/ou une perturbation à moyenne non nulle et/ou une erreur d'identification, la loi de commande synthétisée montre sa défaillance à assurer une poursuite parfaite de trajectoire.

La figure 5.6 illustre bien cette limite où on a enregistré l'évolution du comportement d'entrée-sortie ainsi que l'erreur de poursuite en présence d'une perturbation d'état du type échelon d'amplitude unitaire affectant le fonctionnement du système sur l'intervalle de temps [32, 60].

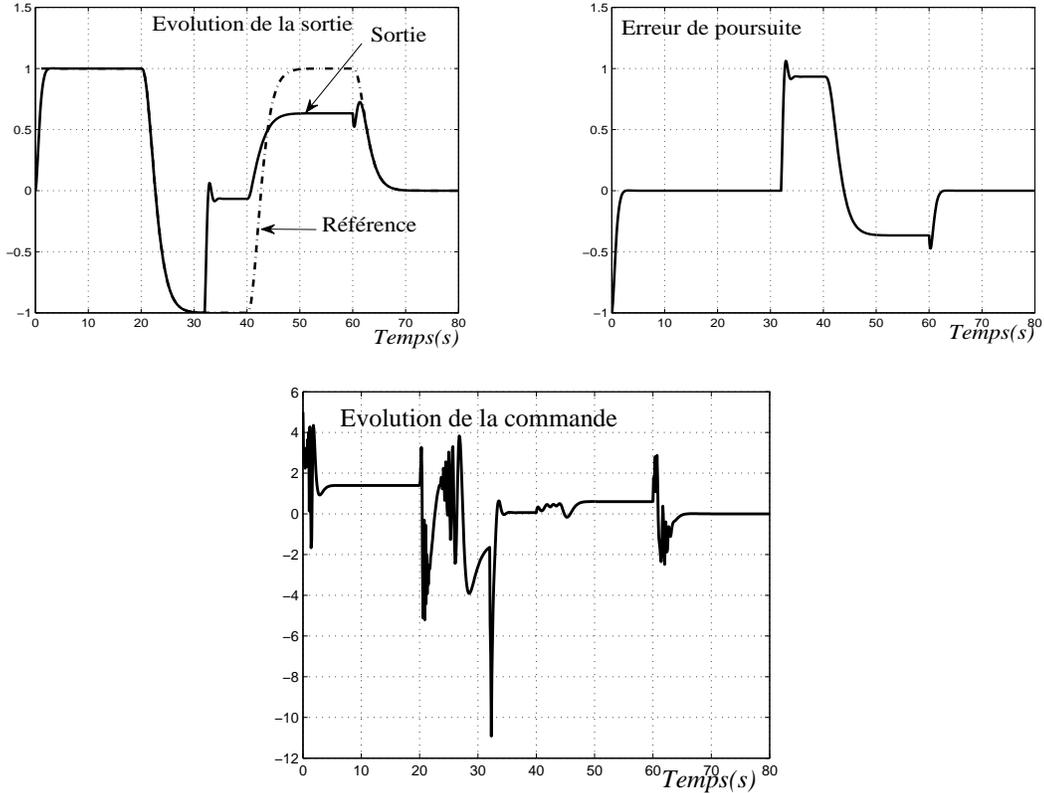


Figure 5.6: Evolution de la commande, de la sortie et de l'erreur de poursuite du système perturbé (Commande par 'backstepping').

Pour corriger cette limite, l'inclusion d'une action intégrale s'avère nécessaire.

#### 5.4.4 Incorporation d'une action intégrale

Le contrôleur, généré par la commande par backstepping, est du type PD (Proportionnel Dérivée). Par conséquent, celui-ci ne permet pas d'éliminer les perturbations externes à moyenne non nulle à moins qu'elles soient à la sortie d'un procédé intégrateur. Afin d'être en mesure d'éliminer ces erreurs, une solution consiste à doter les régulateurs obtenus d'une action intégrale [6]. L'idée principale se résume à introduire, d'une manière virtuelle, un intégrateur en cascade avec le procédé et à procéder à l'élaboration de la loi de commande de façon conventionnelle à l'aide de la méthode du backstepping. Ensuite, cet intégrateur sera transféré dans le régulateur ce qui permettra de garantir une erreur nulle due à des perturbations à moyenne non nulle à l'entrée et/ou à la sortie du procédé [72].

Pour des fins de comparaison, on reprend le procédé décrit par la relation (5.29). Un intégrateur virtuel est ajouté et le système augmenté est décrit par le système suivant :

$$\overbrace{\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \varphi_1(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \varphi_2(x_1(t), x_2(t)) + u(t) \end{cases}}^{\bullet} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) + \dot{u}(t) \end{cases}$$

On considère le changement des coordonnées suivant :

$$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) \\ z_2(t) = x_2(t) \\ z_3(t) = u(t) \end{cases}$$

Donc leurs dynamiques s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) + \varphi_1(z_1(t)) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) + \varphi_2(z_1(t), z_2(t)) \\ \dot{z}_3(t) = v(t) \end{cases} \quad (5.35)$$

Le problème de commande considéré consiste en une poursuite asymptotique parfaite d'une trajectoire de sortie que l'on notera  $\bar{y}(t) \in R$ , soit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \bar{y}(t)) = 0 \quad (5.36)$$

On supposera que les dérivées de la séquence de référence jusqu'à l'ordre 2 sont disponibles. A la séquence  $\bar{y}(t) \in R$ , correspond une trajectoire d'état du système qui sera notée  $\bar{z}(t) \in R^2$ . Compte tenu de la classe considérée des systèmes, on peut définir un modèle de référence comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}_1(t) = \bar{z}_2(t) + \varphi_1(z_1(t)) + c_1(z_1(t) - \bar{z}_1(t)) \\ \dot{\bar{z}}_2(t) = (z_1(t) - \bar{z}_1(t)) + c_2(z_2(t) - \bar{z}_2(t)) + \bar{z}_3(t) + \varphi_2(z_1(t), z_2(t)) \\ \dot{\bar{z}}_3(t) = v(t) + (z_2(t) - \bar{z}_2(t)) + c_3(z_3(t) - \bar{z}_3(t)) \end{cases} \quad (5.37)$$

telles que  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont des constantes strictement positives.

Les variables d'état  $\bar{z}(t) = \begin{pmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \\ \bar{z}_3(t) \end{pmatrix}$  et l'entrée  $v(t) \in R$  sont alors données par :

$$\begin{cases} \bar{z}_1(t) = \bar{y}(t) \\ \bar{z}_2(t) = \dot{\bar{z}}_1(t) - \varphi_1(z_1(t)) - c_1(z_1(t) - \bar{y}(t)) \\ \bar{z}_3(t) = \dot{\bar{z}}_2(t) - (z_1(t) - \bar{y}(t)) - c_2(z_2(t) - \bar{z}_2(t)) - \varphi_2(z_1(t), z_2(t)) \\ v(t) = \dot{\bar{z}}_3(t) - (z_2(t) - \bar{z}_2(t)) - c_3(z_3(t) - \bar{z}_3(t)) \end{cases}$$

et peuvent être déterminées d'une manière recursive à partir de la séquence de référence et ses dérivées successives.

Le problème de poursuite parfaite en sortie (5.36) peut être alors étendu au problème de poursuite de trajectoire d'état défini par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{z}(t)) = 0$$

où  $\tilde{z}(t) = z(t) - \bar{z}(t)$ . Et ce dernier peut être interprété comme un problème de régulation pour le système d'erreur obtenu à partir des équations du système (5.35) et du modèle de référence (5.37).

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{z}}_1(t) = \tilde{z}_2(t) - c_1 \tilde{z}_1(t) \\ \dot{\tilde{z}}_2(t) = \tilde{z}_3(t) - \tilde{z}_1(t) - c_2 \tilde{z}_2(t) \\ \dot{\tilde{z}}_3(t) = -\tilde{z}_2(t) - c_3 \tilde{z}_3(t) \end{cases}$$

En considérant le système d'erreur précité et en considérant une fonction de Lyapunov, et en choisissant d'omettre, dans la suite et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, la variable temps "t", on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \dot{\tilde{z}}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 & 1 & 0 \\ -1 & -c_2 & 1 \\ 0 & -1 & -c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \end{pmatrix}$$

On peut dire que le système d'erreur converge vers zéro. On obtient, donc, les trajectoires de référence  $\bar{z}_1$ ,  $\bar{z}_2$  et  $\bar{z}_3$ , telle que :

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \bar{y} \\ \bar{z}_2 &= \dot{\bar{z}}_1 - c_1 \bar{z}_1 - \varphi_1(z_1) = \dot{\bar{y}} - c_1(z_1 - \bar{y}) - \varphi_1(z_1) \\ \bar{z}_3 &= \dot{\bar{z}}_2 - \bar{z}_1 - c_2 \bar{z}_2 - \varphi_2(z_1, z_2) = \ddot{\bar{y}} - c_1(\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 - (z_1 - \bar{y}) - c_2(z_2 - \bar{z}_2) - \varphi_2(z_1, z_2) \\ &= \ddot{\bar{y}} - c_1(\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 - (z_1 - \bar{y}) - c_2(\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) - c_1 c_2(z_1 - \bar{y}) - \varphi_2(z_1, z_2) \\ &= \ddot{\bar{y}} - (c_1 + c_2)(\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) - (1 + c_1 c_2)(z_1 - \bar{y}) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 - \varphi_2(z_1, z_2) \end{aligned}$$

La nouvelle commande  $v$ , est telle que :

$$\begin{aligned} v = \dot{u} &= \dot{\bar{z}}_3 - \tilde{z}_2 - c_3 \tilde{z}_3 - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial^2 x_1} (z_2)^2 - z_2 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right) - z_3 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) \\ &= \bar{y}^{(3)} - (c_1 + c_2)(\ddot{z}_1 - \ddot{\bar{y}}) - (1 + c_1 c_2)(\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) - \overbrace{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \dot{z}_1} - \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \dot{z}_2 \right] \\ &\quad - (z_2 - \dot{\bar{y}} + c_1(z_1 - \bar{y}) + \varphi_1(z_1)) \\ &\quad - c_3(z_3 - \ddot{\bar{y}} + (c_1 + c_2)(\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) + (1 + c_1 c_2)(z_1 - \bar{y}) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \varphi_2(z_1, z_2)) \\ &= \bar{y}^{(3)} - (c_1 + c_2)(\ddot{z}_1 - \ddot{\bar{y}}) - (1 + c_1 c_2)(\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) - \overbrace{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \dot{z}_1} - \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \dot{z}_2 \right] - (\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) - c_1(z_1 - \bar{y}) \\ &\quad - c_3(\ddot{z}_1 - \ddot{\bar{y}}) - c_3(c_1 + c_2)(\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) - c_3(1 + c_1 c_2)(z_1 - \bar{y}) \end{aligned}$$

Donc on aura :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \bar{y}^{(3)} - \overbrace{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \dot{z}_1}^{\bullet} - \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \dot{z}_2 \right] \\ &\quad - (c_1 + c_2 + c_3) (\ddot{z}_1 - \ddot{\bar{y}}) - (2 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3) (\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) - (c_1 + c_3 + c_1 c_2 c_3) (z_1 - \bar{y}) \end{aligned}$$

En transférant l'intégrateur introduit dans le procédé à la loi de commande, la loi de commande finale est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} u &= \ddot{\bar{y}} - \int \overbrace{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \dot{z}_1}^{\bullet} dt - \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \dot{z}_2 \right] dt \\ &\quad - (c_1 + c_2 + c_3) (z_1 - \dot{\bar{y}}) - (2 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3) (z_1 - \bar{y}) - (c_1 + c_3 + c_1 c_2 c_3) \int (z_1 - \bar{y}) dt \\ &= \ddot{\bar{y}} - \varphi_2(z_1, z_2) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 \\ &\quad - (c_1 + c_3 + c_1 c_2 c_3) \int (z_1 - \bar{y}) dt - (2 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3) (z_1 - \bar{y}) - (c_1 + c_2 + c_3) (\dot{z}_1 - \dot{\bar{y}}) \end{aligned}$$

Cette notation met en évidence les similitudes avec un contrôleur PID (Proportionnel Intégral Dérivée). Ce type de contrôleur permet d'obtenir une erreur nulle en régime permanent, pour des perturbations non nulles à l'entrée et/ou à la sortie du procédé.

### 5.4.5 Exemple d'illustration

Pour des raisons de comparaison, on reconsidère l'exemple de simulation donné par (5.25). La trajectoire de sortie de référence correspond bien à la sortie d'un filtre de troisième ordre, de gain statique unitaire avec un pôle triple en  $p = -1$ , excité par l'entrée donnée sur la figure 5.1. Les paramètres de synthèse retenus sont les suivantes :

$$c_1 = c_2 = c_3 = 5$$

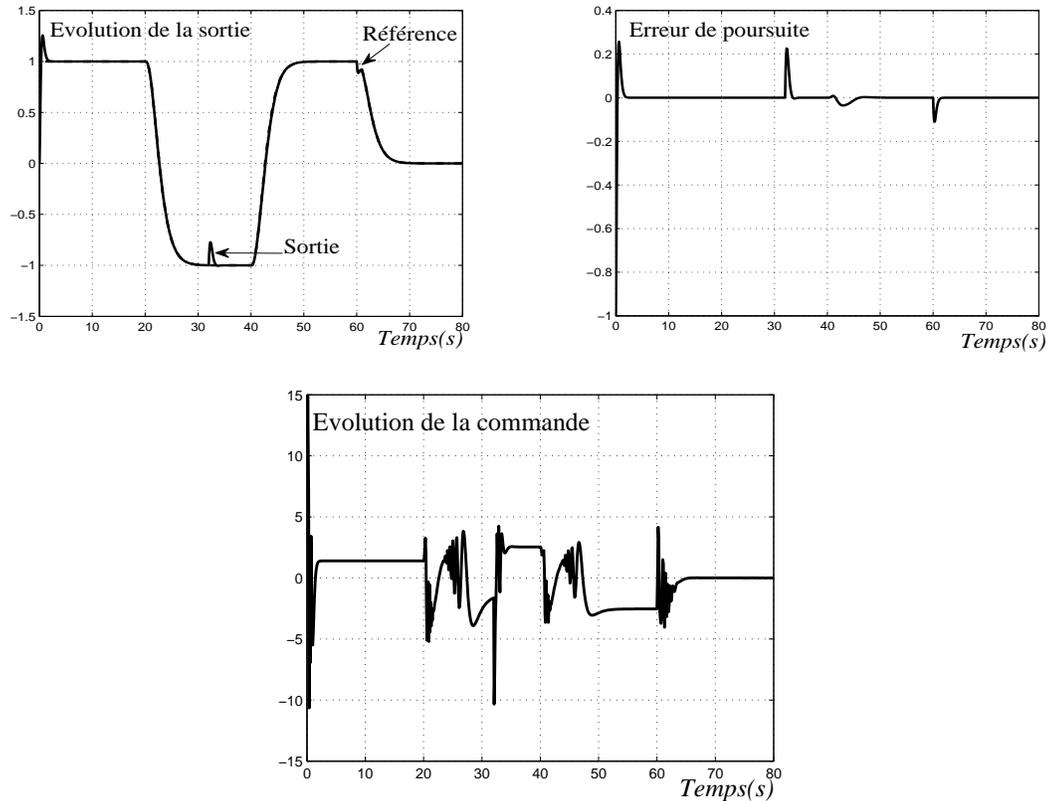


Figure 5.7: Evolution de la commande, de la sortie et de l'erreur de poursuite du système perturbé (Action intégrale incorporée).

La figure 5.7, enregistrant l'ensemble des résultats trouvés, montre clairement l'effet bénéfique de l'ajout d'un intégrateur dans la loi de commande. En effet, les perturbations d'état en échelon unitaire appliquée entre les instants ( $t = 32s$  et  $t = 60s$ ), sont rejetées complètement et ceci sans compromettre la stabilité en boucle fermée.

## 5.5 Conclusion

La motivation de ce chapitre consiste à étudier le problème de poursuite parfaite d'une trajectoire de référence de sortie, en présence des perturbations pour une classe des systèmes non linéaires ayant une structure triangulaire inférieure.

Pour la résolution de ce problème, on a proposé, dans un premier temps, une commande à grand gain avec retour d'état, puis moyennant un exemple de simulation, on a soulevé les limites de la dite commande et par la suite la commande par 'backstepping' est adoptée. On a illustré les différents avantages de ce type des commandes, particulièrement la possibilité d'incorporer relativement facilement une action intégrale au niveau de la synthèse du système de commande pour réaliser un rejet asymptotique de perturbations d'état et/ou de sortie du type échelon.

# Conclusion générale et perspectives

Les travaux développés dans cette thèse, ont porté sur la synthèse des observateurs de type grand gain pour certaines classes des systèmes non linéaires observables pour toute entrée. Ces observateurs présentent plusieurs avantages ; à savoir une convergence exponentielle prouvée théoriquement ainsi qu'un réglage aisé du gain via le choix d'un seul paramètre. Cependant, le majeur inconvénient de ce type d'observateurs est l'assurance d'un compromis entre la rapidité de l'estimation et la sensibilité aux bruits de mesure affectant les mesures des entrées et/ou sorties accessibles.

Pour surmonter ce problème, un observateur à grand gain dynamique est proposé pour les différentes classes des systèmes non linéaires observables pour toute entrée, spécialement pour une forme canonique caractérisant une large classe de systèmes observables pour toute entrée. La caractéristique principale de cette forme réside dans le fait qu'elle ne possède pas une structure complètement triangulaire et elle inclut toutes les formes canoniques observables existantes. L'observateur à grand gain dynamique proposé, dérive de l'observateur à grand gain classique, et il adopte un paramètre de synthèse variant au cours de temps. Cette variation obéit à une équation différentielle de type Ricatti qui prend en considération le niveau du bruit et l'état de la convergence. En tenant compte de ces deux aspects, l'observateur à grand gain dynamique utilise un paramètre de synthèse qui prend constamment des valeurs faibles pour assurer la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure et n'augmente que lorsque un cas de divergence se manifeste.

Afin d'assurer le compromis entre la précision de convergence et la sensibilité aux bruits de mesure, une autre contribution, qui consiste à l'exploitation de la stratégie floue, est détaillée. Cette contribution conduit à un choix convenable et en ligne du paramètre de synthèse de l'observateur à grand gain. En effet, le superviseur flou synthétisé prend en compte l'état de la convergence et le niveau de bruit affectant le système non linéaire et fournit en ligne et d'une façon intelligente le valeur du paramètre de synthèse adéquat à la situation rencontrée.

L'apport en performances des différents solutions proposées ; à savoir les observateurs à grand gain dynamique et à grand gain flou sont illustrées en simulation à travers des exemples académiques. Une application en temps réel est réalisée dans le cas

discret et pour l'observateur à grand gain flou sur un réacteur d'estérification d'huile d'olives.

Dans le dernier chapitre, une loi de commande de type grand gain est synthétisée en exploitant le concept de dualité entre observation et commande. En effet, on a montré qu'une commande avec retour d'état du type grand gain, avec un gain issu de la résolution explicite d'une équation algébrique de Lyapunov, peut être synthétisée pour un système ayant une structure triangulaire uniformément observable et commandable. Moyennant un exemple de simulation, on a soulevé les limites de la commande à grand gain et par la suite la commande par 'backstepping' est adoptée comme solution. Les différents avantages de ce type des commandes sont mis en évidence, particulièrement, la possibilité d'incorporer relativement facilement une action intégrale dans la synthèse du système de commande pour réaliser un rejet asymptotique de perturbations d'état et/ou de sortie du type échelon.

Plusieurs perspectives des travaux présentés sont envisageables. Tout d'abord, il s'agit d'étendre la synthèse des observateurs à grand gain dynamique à des classes plus larges de systèmes non linéaires uniformément observables exhibant des retards dans les non linéarités triangulaires. Par ailleurs, la génération d'une classe globale renfermant toutes les formes des systèmes non linéaires MIMO uniformément observables s'avère un axe riche de recherche.

On travaille actuellement à étendre les résultats obtenus en terme de commande avec retour d'état au cas avec retour de sortie. En effet, la plupart des systèmes industriels, pour des raisons de coût ou de faisabilité, ne dispose pas toujours de toutes les variables d'état. L'utilisation d'un observateur d'état, spécialement un observateur robuste vis-à-vis des bruits de mesure, s'avère alors fortement nécessaire.

## Preuve de la lemme 3.3.1

**Preuve:** Cette preuve se base sur la prise en considération de la dépendance entre les non linéarités des blocs. En effet, d'après 2.23 et 2.24, si le cas où  $\chi_{l,j}^{k,i} = 1$  pour  $k, l \in \{1, \dots, q\}$  et  $j \in \{2, \dots, \lambda_l\}$  se produit si et seulement si l'une des trois situations sont rencontrées :

- $k > l$  et  $i$  prend n'importe quelle valeur dans  $\{1, \dots, \lambda_k\}$  et ceci traduit d'une façon la structure quasi-triangulaire du système non linéaire global.
- $k = l$  et  $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$  avec  $i \geq j$  et ceci est relié à la structure triangulaire de chaque bloc par rapport à ses propres variables.
- $k < l$  et  $i = \lambda_k$  ceci permet à la dernière couche de chaque bloc de dépendre de tout le vecteur d'état.

Par conséquent, il suffit de considérer les trois situations situées auparavant dans le but de vérifier la condition (3.64).

D'après (3.63), on a :

$$\begin{aligned}
 \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} &\leq (\lambda_k - \frac{3}{2})\delta_k - \frac{\delta_l}{2} + \left( \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}} \right) \\
 &= \frac{\delta_{k-1}}{2} - \frac{\delta_l}{2} + \left( \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}} \right) \quad \text{d'après (3.60)} \\
 &\leq \left( \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}} \right) = \frac{1}{2^{k-1}}(1 - 2^{k-l}) \quad \text{d'après (3.61)} \\
 &\leq -\frac{1}{2^{k-1}} \leq -\frac{1}{2^{q-1}} \leq -\frac{1}{2^q}
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

- $k = l$  et  $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$  avec  $i \geq j$  :

L'équation (5.38) devient :

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} = (j - i - 1)\delta_k \leq -\delta_k \leq -1 \leq -\frac{1}{2^q}$$

- $k < l$  et  $i = \lambda_k$  :

L'équation (5.38) devient :

$$\begin{aligned}
\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_l}{2} - \frac{\delta_k}{2} &= -\frac{\delta_k}{2} + \left(j - \lambda_l - \frac{1}{2}\right) \delta_l + \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \\
&\leq -\frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} + \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \\
&\leq -1 + \frac{1}{2^{k-1}} (1 - 2^{k-1}) \quad \text{puisque } \delta_k \geq \delta_l \geq 1 \\
&\leq -1 + \frac{1}{2^{k-1}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \quad \text{puisque } l - k \geq 1 \\
&\leq -1 + \frac{1}{2^k} \\
&\leq -1 + \frac{1}{2} \\
&\leq -\frac{1}{2} \\
&\leq -\frac{1}{2^q}
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la lemme.

# Bibliographie

- [1] A. Akhenak. "Conception des observateurs non linéaires par approche multimodèle : Application au diagnostic". Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.
- [2] M. Arcak, and P. Kokotovic. "Nonlinear Observers : A Circle Criterion Design and Robustness Analysis". *Automatica*, vol. 37 : pp. 1923–1930, 2001.
- [3] R. Ben Abdennour, P. Borne, M. Ksouri, and F. M'sahli. "*Identification et commande numérique des procédés industriels*". Editions Technip, Paris, 2001.
- [4] R. Ben Abdennour, G. Favier, and M. Ksouri. "Fuzzy Trace Identification Algorithms for Non-stationary Systems". *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, vol. 6 : pp. 403–417, 1998.
- [5] R. Ben Abdennour, M. Ltaief, and M. Ksouri, . "Un coefficient d'apprentissage flou pour les réseaux de neurones artificiels". *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 35 : pp. 1089–1103, 2001.
- [6] A. R. Benaskeur, L. N. Paquin, and A. Desbiens. "Toward Industrial Process Control Applications of the Backstepping". *Process Control and Instrumentation*, 2000.
- [7] K. Busawon, M. Farza, and H. Hammouri. "Observer Design for a Special Class of Nonlinear Systems". *International Journal of Control*, vol. 71 : pp. 405–418, 1998.
- [8] D. Bestle, and M. Zeitz. "Canonical Form Observer Design for Nonlinear Time-variable Systems". *International Journal of Control*, vol. 38 : pp. 419–431, 1983.
- [9] E. Busvelle, F. Viel, and J.-P. Gauthier. "Stability of Polymerization Reactors using I/O Linearization and a High-Gain Observer". *Automatica*, vol. 7 : pp. 971–984, 1995.
- [10] C. Canudas de Wit. "*Optimisation, Discrétisation et Observateurs : Commande des moteurs asynchrones 2*". Hermes Science Publications, 2000.

- [11] G. Ciccarella, M. D. Mora, and A. Germani. "A Luenberger-like Observer for Nonlinear Systems". *International Journal of Control*, vol. 57, I. 3, pp. 537–556, 1993.
- [12] B.-S. Chen C.-S. Tseng, and Y.-F. Li. "Robust Fuzzy Observer-based Fuzzy Control Design for Nonlinear Systems with Persistent Bounded Disturbances : A Novel Decoupled Approach". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 160 : pp. 2824–2843, 2009.
- [13] H. H Choi, and K. S. Ro. "LMI-based Sliding-Mode Observer Design Method". *Control, Theory Applications, IEE Proceedings*, vol. 152 : pp. 113–115, 2005.
- [14] D'Angelo. "*Linear Time Varying Systems : Analysis and Synthesis*". Allyn and Bacon, 1970.
- [15] A. M. Dabroom, and H. K. Khalil. "Output Feedback Sampled-data Control of Nonlinear Systems using High-Gain Observers". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46 : pp. 1712–1725, 2001.
- [16] F. Deza, E. Busvelle, and J.P. Gauthier. "Exponentially Converging Observers for Distillation Columns and Internal Stability for the Dynamic Output Feedback". *Chemical Engineering Science*, vol. 47 : pp. 3935–3641, 1992.
- [17] M. Elkhailil. "*Modélisation, Observation et Commande : Une approche multi-modèle*". Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès-Tunisie et Université de Caen Basse-Normandie-France, 2011.
- [18] X. Fan, and M. Arcak. "Observer Design for Systems with Multivariable Monotone Nonlinearities". *Systems & Control letters*, vol. 50 : pp. 319–330, 2003.
- [19] M. Farza, H. Hammouri, C. Jallut, and J. Liéto. "State Observation of a Nonlinear system : Application to (bio)Chemical Processes". *AIChE Journal*, vol. 45 : pp. 93–106, 1999.
- [20] M. Farza, and M. M'Saad. "Discrete-time Observer Synthesis for a Class of Nonlinear Systems". *Transactions on Systems and Signal Devices*, vol. 1 : pp. 13–26, 2006.
- [21] M. Farza, M. M'Saad, M.Oueder, L. Sellami, and R. Ben Abdennour. "Dynamic High Gain Observer Design". *International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices-SSD'09*, 2009.
- [22] M. Farza, M. M'Saad, and L. Rossignol. "Observer Design for a Class of MIMO Nonlinear Systems". *Automatica*, vol. 40 : pp. 135–143, 2004.

- 
- [23] M. Farza, M. M'saad, and M. Sekher. "A Set of Observers for a Class of Nonlinear Systems". *International Federation of Automation Control-IFAC'05*, 2005.
- [24] M. Farza, M. M'saad, M. Triki, and T. Maatoug. "High Gain Observer for a Class of Non-triangular Systems". *Systems & Control Letters*, vol. 60 : pp. 27–35, 2011.
- [25] M. Farza, M. Oueder, R. Ben Abdennour, and M. M'Saad. "High Gain Observer with Updated Gain for a Class of MIMO Uniformly Observable Nonlinear Systems". *International Journal of Control*, vol. 84 : pp. 270–280, 2010.
- [26] A. Feurer and A. S. Morse. "Adaptive Control of Single-Input-Single-Output Linear Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23(4) : pp. 557–569, 1978.
- [27] A. F. Filippov. "Application of the Theory of the Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides to Nonlinear Control Problems". *Proceedings of 1<sup>st</sup> IFAC World Congress*, vol. 1 : pp. 923–925, 1960.
- [28] M. Fliess, J. Levine, P. Martin and P. Rouchon. "Flatness and Defect of Nonlinear Systems : Introductory Theory and Examples". *International Journal of Control*, vol. 61 : pp. 1327–1361, 1995.
- [29] M. Fliess, J. Levine, P. Martin and P. Rouchon. "A Lie-backlund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-44 : pp. 922–937, 1999.
- [30] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez. "Nonlinear Estimation is Easy". *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 4 : pp. 12–27, 2008.
- [31] J.P. Gauthier, and G. Bornard. "Observability for any  $u(t)$  of a Class of Nonlinear Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26 : pp. 922–926, 1981.
- [32] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. "A Simple Observer for Nonlinear Systems - Application to Bioreactors". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37 : pp. 875–880, 1992.
- [33] J. Gauthier, and I. Kupka. "Observability and Observers for Nonlinear Systems". *SIAM Journal Control Optimisation*, vol. 32 : pp. 975–994, 1994.
- [34] M. Guay. "Observer Linearization by Output-Dependent Time-Scale Transformations". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47 : pp. 1730–1735, 2002.

- [35] S. Hajji. "*Modélisation, Observation et Commande de la Machine Asynchrone*". Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax-Tunisie et Université de Caen Basse-Normandie-France, 2009.
- [36] H. Hammouri, and G. Bornard. "A High Gain Observer for a Class of Uniformly Observable Systems". *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, vol. 3 : pp. 1494–1496, 1991.
- [37] H. Hammouri, G. Bornard, and K. Busawon. "High Gain Observer for Structured Multi-output Nonlinear Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55 : pp. 987-992, 2010.
- [38] H Hammouri K. Busawon, A. Yahoui, and G. Grellet. "A Nonlinear Observer for Induction Motors". *The European Physical Journal - Applied Physics*, vol. 15 : pp. 181–188, 2001.
- [39] H. Hammouri, and M. Farza. "Nonlinear Observers for Locally Uniformly Observable Systems". *ESAIM*, vol. 9 : pp. 353–370, 2003.
- [40] R. Herman, and A.J. Kerner. "Nonlinear Controllability and Observability". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22 : pp. 728–740, 1977.
- [41] M. Hou, K. Busawon, and M. Saif. "Observer Design for a Class of MIMO Nonlinear Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45(7) : pp. 1350–1355, 2000.
- [42] M. Hou, and A. C. Pugh. "Observer with Linear Error Dynamics for Nonlinear Multi-output Systems". *Systems & Control Letters*, vol. 37 : pp. 1–9, 1999.
- [43] A. Isidori. "*Nonlinear Control Systems*". Springer, 3<sup>rd</sup> Edition, 1995.
- [44] L. Jaulin. "Robust Set-membership State Sstimation ; Application to Underwater Robotics". *Automatica*, vol. 45 : pp. 2002-2006, 2009.
- [45] B. Jiang M. Dong, and J. L. Wang. "Fuzzy Observer based Fault Accomodation for Nonlinear Systems". *IEEE International Conference on Control and Automation*, vol.1 : pp. 1649–1652, 2007.
- [46] F. Jnos. "Left-continuous  $t$ -norms in Fuzzy Logic". *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 1 : pp. 1785–8860, 2004.
- [47] R. E. Kalman. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". *Transactions ASME, Journal Basic Engineering*, vol. 82 : pp. 34–45, 1960.
- [48] R. E. Kalman, and R. Bucy. "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory". *Transactions ASME, Journal Basic Engineering*, vol. 83 : pp. 95–108, 1961.

- 
- [49] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic and A. S. Morse. "Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36(11) : pp. 1241–1253, 1991.
- [50] N. Kazantzis, and C. Kravaris. "Nonlinear Observer Design using Lyapunov's Auxiliary Theorem". *Systems & Control Letters*, vol. 34 : pp. 241–247, 1998.
- [51] P. V. Kokotovic and H. J. Sussmann. "A Positive Real Condition for Global Stabilization of Nonlinear Systems". *Systems & Control Letters*, vol. 13 : pp. 125–133, 1989.
- [52] Y. Koobaa, M. Farza, and M. M'saad. "Observeur Adaptatif pour une Classe des Systèmes Non Linéaires". *Cinquième Conférence Internationale des Sciences et Techniques de l'Automatique*, STA'04, 2004.
- [53] A. Krener, and W. Respondek. "Nonlinear Observers with Linearizable Error Dynamics". *SIAM Journal Control Optimisation*, vol. 23 : pp. 197–216, 1985.
- [54] A. J. Krener, and A. Isidori. "Linearization by Output Injection and Nonlinear Observers". *Systems & Control Letters*, vol. 3 : pp. 47–52, 1983.
- [55] P. Krishnamurthy, and F. Khorrami. "Generalized Adaptive Output-feedback Form with Unknown Parameters multiplying High Output Relative-degree States". In *Proceedings of the 41<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, 2002.
- [56] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic. *"Nonlinear and Adaptive Control Design"*. John Wiley and Sons, 1995.
- [57] F. Liu. *"Synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires"*. Thèse de doctorat, Université de Caen Basse-Normandie-France, 2007.
- [58] H. Lei, and W. Lin. "Universal Adaptive Control of Nonlinear Systems with Unknown Growth Rate by Output Feedback". *Automatica*, vol. 42 : pp. 1783–1789, 2006.
- [59] D. Luenberger. "An Introduction to Observer". *IEEE Transactions on Automatic and Control*, AC-16 : pp. 596–602, 1971.
- [60] T. Maatoug. *"Synthèse d'observateurs adaptatifs pour les systèmes non linéaires"*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax-Tunisie et Université de Caen Basse-Normandie-France, 2009.
- [61] A. Messaoud, M. Lataief, and R. Ben Abdennour. "Fuzzy Supervision for a Multimodel Generalized Predictive Control based on Performances Index".

- International Journal on Sciences and Techniques of Automatic control and Computer Engineering*, vol. 1 : pp. 181–195, 2007.
- [62] M. Mihoub. "*Contributions à la commande numérique et à l'observation des systèmes complexes en régime glissant*". Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès, 2010.
- [63] M. Mihoub, A. Messaoud, M. Lataief, A. S. Nouri, and R. Ben Abdennour. "Fuzzy Supervision for a Discrete Second Order Sliding Mode Control". *International Conference on Modelling, Identification and Control*, 2008.
- [64] M. Nadri. "*Observation et commande des systèmes non linéaires et application aux bioprocédés*". Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon-1, 2001.
- [65] H. Nijmeijer, and A. J. Van der Schaft. "*Nonlinear Dynamical Control Systems*". Springer-Verlag, 1991.
- [66] M. Oueder, M. Farza, and R. Ben Abdennour. "Fuzzy High Gain Observer". *International Conference on Electrical Systems and Automatic Control*, JTEA'10, 2010.
- [67] M. Oueder, M. Farza, R. Ben Abdennour, and M. M'Saad. "A Dynamic High Gain Observer for a Class of MIMO Non Triangular Systems". *International Federation of Automation Control*, IFAC'11, 2011.
- [68] M. Oueder, M. Farza, R. Ben Abdennour, and M. M'Saad. "High Gain Observer with Updated Gain for a Class of MIMO Non-Triangular Systems". *Systems & Control Letters Journal*, vol. 61 : pp. 298–308, 2012.
- [69] M. Oueder, M. Mihoub, R. Ben Abdennour, and M. Farza. "Discrete Fuzzy High Gain Observer for a Class of Nonlinear Systems". *International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, SSD'11, 2011.
- [70] M. Oueder, M. Mihoub, R. Ben Abdennour, and M. Farza. "Discrete Fuzzy High Gain Observer for a Class of Nonlinear Systems". *Transactions on Systems, Signals & Devices Journal*, TSSD, (under press).
- [71] M. Oueder, M. Mihoub, M. Farza, and R. Ben Abdennour. "Discrete-time Fuzzy High Gain Observer : A Real Time Application on a Chemical Reactor". *International REview of Automatic COntrol*, IREACO, vol. 4 : pp. 488–495, 2011.
- [72] L. N. Paquin. "Application du backstepping à une colonne de flottation". Thèse de doctorat, Faculté des Etudes Supérieures de l'Université Laval, 2000.

- [73] J. H. Park, and G.-T. Park. "Adaptive Fuzzy Observer with Minimal Dynamic Order for Uncertain Nonlinear Systems". *IEE Proceedings Control Theory Applicatons*, vol. 150 : pp. 189–197, 2003.
- [74] S. Raghavan, and J. K. Hedrick. "Observer Design for a Class of Nonlinear systems". *International Journal of Control*, vol. 59 : pp. 515-528, 1994.
- [75] Z.Raida. "Steering an Adaptive Antenna Array by the Simplified Kalman Filter". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43 : pp. 627-629, 1995.
- [76] R. Rajamani. "Obsevers for Lipschitz Nonlinear Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43 : pp. 397–401, 1998.
- [77] J. Rudolph, and M. Zeitz. "A Block Triangular Nonlinear Observer Normal Form". *Systems & Control Letters*, vol. 23 : pp. 1–8, 1994.
- [78] R. Sepulchre, M. Jankovic and P. Kokotovic. "*Constructive Nonlinear Control*". Springer, 1997.
- [79] S. Seshagiri, and H. Khalil. "Robust Output Feedback Regulation of Minimum-Phase Nonlinear Systems using Conditional Integrators". *Automatica*, vol. 41 : pp. 43–54, 1996.
- [80] Y. Shen, and X. Xia. "Semi-global Finite-time Observers for Nonlinear Systems". *Automatica*, vol. 44 : pp. 3152-3156, 2008.
- [81] H. Shim, Y.I.Son, and J.H.Seo. "Semi-global Observer for Multi-output Nonlinear Systems". *Systems & Control Letters*, vol. 42 : pp. 233–244, 2001.
- [82] J.J.E Slotine, J.K. Hedrick, and E.A. Misawa. "Nonlinear State Estimation using Sliding Observers". *IEEA Conference on Decision and Control*, vol. 1 : pp. 332–339, 1986.
- [83] I. Souleiman, A. Glumineau, and G. Schreirer. "Direct Transformation of Nonlinear Systems into State Affine MISO Form and Nonlinear Observers Design". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48 : pp. 2191–2196, 2003.
- [84] J. J. Slotine, J. K. Hedrik, and E. A. Misawa. "On Sliding Observers for Nonlinear Systems". *ASME Journal Dynamic Systems Measurments*, vol. 109 : pp. 245–352, 1987.
- [85] C. P. Tan, and C. Edwards. "An LMI Approach for Designing Sliding Mode Observers". *International Journal of Control*, vol. 74 : pp. 1559–1568, 2001.
- [86] J. Tsinias. "Sufficient Lyapunov-like Conditions for Stabilization". *Mathematical Control Signal Systems*, vol. 2 : pp. 343–357, 1989.

- 
- [87] V. I. Utkin. "Variable Structure Systems with Sliding Modes". *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22 : pp. 212–222, 1977.
- [88] X. H. Xia, and W. B. Gao. "Nonlinear Observer Design by Observer Error Linearization". *SIAM Journal Control Optimization*, vol. 27 : pp. 199–216, 1989.
- [89] L. Zadeh. "Fuzzy Sets". *Information and Control*, vol. 8 : pp. 338–353, 1965.
- [90] M. Zeitz. "The Extended Luenberger Observer for Nonlinear Systems". *Systems & Control Letters*, vol. 9 : pp. 149–156, 1987.
- [91] A. Zemouche. "*Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*". Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2007.

**TITRE :** Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires

**Résumé.** Les observateurs sont des capteurs logiciels ayant pour but la reconstruction d'état pour la supervision, la commande ou le diagnostic des systèmes.

Dans ce travail, on s'intéresse à la résolution du compromis entre la rapidité de la convergence et l'insensibilité aux bruits de mesure duquel souffre l'observateur à grand gain. Dans un premier temps, on propose la synthèse d'un observateur à grand gain dynamique pour certaines classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. La caractéristique principale de ce type d'observateurs réside dans le fait que le gain de l'observateur est pris variable au cours de temps et obéit à une dynamique de type Ricatti. La convergence exponentielle de l'observateur à grand gain dynamique est détaillée. Ensuite, on adopte une stratégie floue pour la résolution du dit compromis et on valide cette approche sur un réacteur chimique. Dans la dernière partie de ce travail, on traite la synthèse d'une commande avec retour d'état pour une classe des systèmes non linéaires afin de résoudre un problème de poursuite de trajectoire. Les performances des observateurs proposés sont illustrées en simulation à travers des exemples académiques et des exemples réels d'application relatifs à un réacteur chimique.

**Mots clés :** Systèmes non linéaires, Réacteurs Chimiques, Commande des processus.

**TITLE :** Synthesis of observers for nonlinear systems.

**Astract.** The observers are considered as soft sensors. They are designed for the supervision, for the control or for diagnosis of systems.

In this work, we deal with the resolution of the compromise between the convergence rapidity and the insensitivity to the noise measurements from which suffers the high gain observer. Firstly, we propose the synthesis of a dynamic high gain observer for some classes of nonlinear uniformly observable systems. The main characteristic of this observer lies in the fact that the observer's gain is taken variable through the time and obeys to a Ricatti dynamic. The exponential convergence of the proposed observer is detailed. Then, we adopt a fuzzy strategy to resolve the latter compromise and we confirm this approach through a chemical reactor. In the last part of this work and in order to resolve a tracking trajectory problem, we treat the synthesis of a state feedback control law for a class of nonlinear systems. The performances of the proposed observers are illustrated in simulation through academic examples and real ones dealing with a chemical reactor.

**keywords :** Nonlinear systems, Chemical Reactors, Process control.