

Habilitation à Diriger des Recherches

Daniele FAENZI

Quelques applications des fibrés vectoriels en géométrie algébrique

Composition du jury :

Enrique Artal Bartolo (Zaragoza)

Jacky Cresson (Pau)

Olivier Debarre – rapporteur (ENS Paris)

Laurent Manivel (Grenoble)

Frank-Olaf Schreyer – rapporteur (Saarbrücken)

Edoardo Sernesi – rapporteur (Rome III)

Jean Vallès (Pau)

La géométrie algébrique est l'étude des variétés algébriques, c'est-à-dire les lieux des points qui vérifient un certain nombre d'équations polynomiales en plusieurs variables. Par exemple une courbe algébrique plane, telle une droite ou une conique, est formée par les points qui annulent un polynôme en deux variables. Ces objets géométriques sont étudiés depuis toujours par les mathématiciens, sous différents points de vue (topologique, analytique, combinatoire etc), en vue d'applications de nature très variée (physique mathématique, optimisation, complexité algébrique...). Les fibrés vectoriels, omniprésents en géométrie (fibré tangent, normal etc), peuvent être vus comme des espaces vectoriels qui se déplacent de manière continue sur une variété. Ils constituent un outil important en géométrie algébrique, et sont à la base de mon travail d'une décennie.

Le premier exemple de fibré que nous allons rencontrer est le tangent logarithmique $T(-\log D)$ associé à un diviseur D . Nous allons nous concentrer sur deux questions fondamentales : d'abord sait-on écrire $T(-\log D)$ avec générateurs et relations ? Ensuite, jusqu'à quel point $T(-\log D)$ détermine D lui-même (problème de Torelli) ? Lorsque D est une réunion d'hyperplans (un "arrangement"), il est légitime de se demander si la combinatoire détermine au moins la longueur de la résolution de $T(-\log D)$, c'est la conjecture de Terao. J'essaierai de répondre au moins partiellement à ces questions en faisant appel à la dualité projective et à une nouvelle approche fonctorielle.

La deuxième classe de fibrés que nous allons étudier est celle des fibrés CM (Cohen-Macaulay) : il s'agit des fibrés les plus simples possibles d'un point de vue cohomologique. Quelques variétés n'admettent qu'un nombre fini de ces fibrés ("type CM fini"), alors que dans d'autres cas ces fibrés forment des familles de dimension aussi grande que l'on veut ("type CM sauvage"). Nous allons étudier les quelques cas connus de variétés qui ont un comportement "entre les deux", dites de "type CM modéré". Ces variétés, que j'ai découvert récemment, viennent s'ajouter à la courbe elliptique (Atiyah 1957).

La dernière classe de fibrés que nous allons regarder est celle des fibrés instantons, notamment sur certaines variétés tridimensionnelles ("solides") à courbure positive que l'on appelle de Fano. J'aimerais montrer comment un solide de Fano de genre 10 est lié à une certaine cubique de dimension 7, construite par Coble en 1917, dont le lieu singulier est la surface Jacobienne d'une courbe lisse de genre 2.