



**HAL**  
open science

# Modélisation, observation et commande : une approche multimodèle

Mansoura Elkhail

► **To cite this version:**

Mansoura Elkhail. Modélisation, observation et commande : une approche multimodèle. Automatique. Université de Caen; Université de Gabès (Tunisie), 2011. Français. NNT : . tel-01064321

**HAL Id: tel-01064321**

**<https://theses.hal.science/tel-01064321v1>**

Submitted on 16 Sep 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

U.F.R. : SCIENCES CAEN

ECOLE DOCTORALE : SIMEM

Co-tutelle de thèse

entre

l'Université de Caen Basse-Normandie (*France*)

et

l'Université de Gabès (*Tunisie*)

(Arrêté du 06 janvier 2005)

THÈSE

présentée par

**Mansoura ELKHALIL**

et soutenue

le 19 mars 2011

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

Spécialité : Automatique, robotique

(Arrêté du 07 août 2006)

**TITRE : MODELISATION, OBSERVATION ET COMMANDE  
UNE APPROCHE MULTIMODELE**

**MEMBRES du JURY**

- |                     |   |
|---------------------|---|
| M. M. E. ABDELKARIM | Pr. à l'ENIG de Gabès (Examineur)                         |
| M. R. BEN ABDENNOUR | Pr. à l'ENIG de Gabès (Directeur de thèse)                |
| M. M. CHAABANE      | Pr. de l'Université de Sfax (Rapporteur)                  |
| M. B. DAHHOU        | Pr. à l'Université Paul Sabatier de Toulouse (Rapporteur) |
| M. M. FARZA         | Pr. à l'Université de Caen (Examineur)                    |
| M. M. M'SAAD        | Pr. à l'ENSICAEN (Directeur de thèse)                     |

*Á ma mère,  
Ma source éternelle d'inspiration, de motivation et de bénédiction  
Á mon père,  
Mon maître de passion, de patience et de persévérance  
Á mes sœurs et mes frères  
Á Ahmed Yassine  
Á Mariouma  
Á toute ma famille et mes amis d'enfance et de toute circonstance  
Á mon mari...*

## Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse sont le fruit de recherches, effectués en cotutelle au sein de l'unité de recherche *COmmande Numérique des PROCédés Industriels*, **CONPRI** de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès, Tunisie, sous la direction de Monsieur Ridha Ben ABDENNOUR et au laboratoire de *Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation de Caen*, **GREYC** équipe Automatique de l'Université de Caen, France, sous la direction de Monsieur Mohamed M'SAAD. Avant de présenter ces travaux, je tiens à remercier tous ceux et celles qui ont participé à l'élaboration et à la réussite de ma thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Ridha Ben ABDENNOUR, Professeur à l'ENIG et à Monsieur Mohamed M'SAAD, Professeur à l'ENSI-CAEN, mes directeurs de thèse, pour toute leur aide précieuse, leur disponibilité et leur patience au cours de ces années de thèse. Merci également pour leur excellent encadrement qui a contribué au bon déroulement de mes travaux. Leurs qualités de chercheur, leurs qualités humaines, leur regard bienveillant m'ont permis de mener à bon terme cette thèse.

Cette thèse ne pourrait pas avoir été menée à bien sans la confiance, la patience et la générosité de Monsieur Ridha Ben ABDENNOUR à qui je veux adresser mes vifs remerciements, en particulier. Il a su m'aider, me soutenir et orienter mes recherches aux bons moments, avec un grand professionnalisme, rigueur et gentillesse. Je lui suis aussi reconnaissante de la confiance qu'il m'a toujours témoignée.

Je remercie chaleureusement Madame Majda LTAIEF, Maitre Assistant à l'ENIG, pour ses directives scientifiques, pédagogiques et même personnelles pour lesquelles je lui suis hautement redevable. De même, je lui suis extrêmement reconnaissante pour son soutien humain et moral et son aide précieuse durant ces années de thèse.

Je remercie vivement Monsieur Mondher FARZA, Professeur à l'ENSICAEN, d'avoir fait partie du jury. Je lui apporte ma plus sincère gratitude pour le temps précieux qu'il m'a accordé tout au long de mon séjour à Caen. Sa gentillesse et sa disponibilité ont grandement contribué à rendre ma tâche facile et mon séjour agréable.

Je remercie également Monsieur Mohamed Naceur ABDELKRIM Professeur à l'ENIG de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Mes sincères remerciements à Monsieur Boutaib DAHHOU Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse et Monsieur Mohamed CHAABANE Professeur à l'ENIS, d'avoir pris le temps de juger ce travail et de m'avoir fait l'honneur d'être

rapporteurs de ma thèse.

Une mention toute spéciale à Madame Awatef BATITA et Madame Saloua BEL-HADJ ALI, pour leur amitié, leurs conseils et surtout pour leur soutien quotidien et leur sympathie.

Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur Ahmed Saïd NOURI, Maitre de Conférences à l'ENIG et Monsieur Kamel ABDERRAHIM, Maitre de Conférences à l'ENIG, pour leur soutien quotidien, leur encouragement et leur immense disponibilité.

Je ne saurez oublier mes collègues et mes amis, avec les quels j'ai partagé de très beaux moments à CONPRI Mihoub et Anis. Merci et bonne chance à : Monia, Khadija, Saida, Asma, Inès, Lamaa, Houda, Nesrine et Nizar.

# Notations

## Principaux symboles

$I$	Matrice identité (resp. de dimension appropriée).
$A^T$	Transposée d'une matrice $A$ .
$A^{-1}$	Inverse d'une matrice $A$ .

## Variables

$u(k)$	Signal de commande à l'instant $k$ .
$y(k)$	Sortie du système à l'instant $k$ .
$r(k)$	Signal de référence à l'instant $k$ .
$y_r(k)$	Sortie du modèle de référence à l'instant $k$ .
$y_m(k)$	Sortie multimodèle à l'instant $k$ .
$y_i(k)$	Sortie du $i^{\text{ème}}$ modèle local à l'instant $k$ .
$v_i(k)$	Degré de validité du $i^{\text{ème}}$ modèle local à l'instant $k$ .
$r_i(k)$	Résidu du $i^{\text{ème}}$ modèle local à l'instant $k$ .
$\mathcal{M}_i$	$i^{\text{ème}}$ modèle local.
$N$	Nombre des modèles locaux.
$e_u(k)$	Erreur de poursuite d'entrée à l'instant $k$ .
$e_y(k)$	Erreur de poursuite de sortie à l'instant $k$ .
$p(k)$	Perturbation harmonique à l'instant $k$ .

## **Abréviations**

MRAC	Commande Adaptative avec Modèle de Référence.
VS-MRAC	Commande Adaptative avec Modèle de Référence à Structure Variable.
DVS-MRAC	Commande Numérique Adaptative avec Modèle de Référence à Structure Variable.
SPR	Strictement Positive Réelle.
NSPR	N'est pas Strictement Positive Réelle.
Re(.)	Réel de (.).
MM-MRC	Commande Multimodèle avec Modèle de Référence.
EW-RLS	Algorithme de Moindres Carrés Récursif de type Ellipsoïdal.
LPV	Linéaire à Paramètres Variants.
LMI	Inégalités Matricielles Linéaires.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Notations</b>	<b>iv</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Liste de Publications</b>	<b>4</b>

## **Chapitre I**

### **Commande numérique adaptative avec modèle de référence**

I.1	Introduction . . . . .	6
I.2	Commande numérique adaptative avec modèle de référence . . . . .	7
I.2.1	Position de problème . . . . .	8
I.2.2	Calcul de la loi de commande numérique avec modèle de référence . . . . .	10
I.3	Synthèse de la commande numérique adaptative avec modèle de référence . . . . .	12
I.3.1	Synthèse de la loi de commande MRAC dans le cas où $n^* = 1$ et $W_m(q^{-1})$ est SPR . . . . .	12
I.3.1.1	Modèle de l'erreur . . . . .	16
I.3.1.2	Analyse de stabilité . . . . .	16

I.3.2	Synthèse de la loi de commande MRAC dans le cas où $n^* \geq 1$ , $k_p = k_m$ connu et $W_m(q^{-1})$ n'est pas SPR . . . . .	19
I.3.2.1	Modèle de l'erreur . . . . .	22
I.3.3	Résultats de simulation . . . . .	25
I.4	Commande numérique adaptative avec modèle de référence à structure variable . . . . .	29
I.4.1	Introduction . . . . .	29
I.4.2	Synthèse de la commande numérique DVS-MRAC . . . . .	29
I.4.3	Résultats de simulation . . . . .	31
I.5	Conclusion . . . . .	32

<b>Chapitre II</b>
--------------------

<b>Commande avec modèle de référence : une approche multimodèle</b>
---

II.1	Introduction . . . . .	33
II.2	Représentation multimodèle . . . . .	34
II.3	Méthode de classification floue . . . . .	37
II.3.1	Sélection des centres de classes . . . . .	37
II.3.2	Identification structurelle et paramétrique . . . . .	38
II.4	Calcul des fonctions de validité . . . . .	39
II.5	Synthèse de la commande multimodèle . . . . .	41
II.6	Commande multimodèle avec modèle de référence . . . . .	43
II.7	Commande d'un système linéaire fortement variant dans le temps . . . . .	45
II.8	Commande en temps réel d'un réacteur chimique . . . . .	47
II.8.1	Description du procédé expérimental . . . . .	47
II.8.2	Identification du réacteur . . . . .	49
II.9	Commande multimodèle du réacteur . . . . .	52
II.10	Conclusion . . . . .	54

**Chapitre III**

**Une commande multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel : application à un bioprocédé**

III.1 Introduction . . . . .	56
III.2 Description du modèle de bioprocédé . . . . .	57
III.3 Commande non linéaire par "backstepping" . . . . .	58
III.3.1 Principe . . . . .	58
III.3.1.1 Conception de la loi de commande . . . . .	58
III.3.2 Résultats de simulation . . . . .	60
III.4 Commande multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel	62
III.4.1 Commande avec modèle de référence sur l'état partiel . . .	62
III.4.1.1 Formulation du problème . . . . .	63
III.4.2 Synthèse du système de commande . . . . .	65
III.4.2.1 Calcul des prédicteurs . . . . .	65
III.4.2.2 Détermination de la loi de commande . . . . .	66
III.4.2.3 Performances du système de commande . . . . .	68
III.5 Commande multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel : application à un bioréacteur . . . . .	70
III.5.1 Construction de la base des modèles . . . . .	70
III.5.2 Résultats de simulation . . . . .	71
III.6 Conclusion . . . . .	73

**Chapitre IV**

**La commande multimodèle pour la compensation des perturbations périodiques**

IV.1 Introduction . . . . .	75
IV.2 Compensation adaptative des perturbations périodiques . . . . .	76
IV.2.1 Modélisation des perturbations . . . . .	76
IV.2.2 Compensation adaptative des perturbations harmoniques .	77

IV.2.3	L'algorithme d'identification E $\omega$ -RLS . . . . .	81
IV.2.4	Résultats de simulation . . . . .	87
IV.2.5	L'approche multimodèle pour la compensation des perturbations de charge en présence des systèmes linéaires variant dans le temps . . . . .	90
IV.2.5.1	Structure de la commande multimodèle . . . . .	90
IV.2.5.2	Résultats de simulation . . . . .	91
IV.3	Compensation des perturbations harmoniques à fréquence variable . . . . .	95
IV.3.1	Cas d'une seule perturbation harmonique . . . . .	95
IV.3.2	Cas de plusieurs perturbations harmoniques à fréquence variable . . . . .	96
IV.3.3	Compensation des perturbations non stationnaires : une approche multimodèle . . . . .	98
IV.3.3.1	Estimation de la période d'une perturbation . . . . .	103
IV.3.3.2	Commande multimodèle . . . . .	105
IV.3.3.3	Résultats de simulation . . . . .	105
IV.4	Conclusion . . . . .	109

**Chapitre V**

**Synthèse de commande prédictive à base de modèle d'état et de multiobservateur**

V.1	Introduction . . . . .	111
V.2	Synthèse de la loi de commande avec modèle de référence sur l'état partiel . . . . .	112
V.3	Synthèse de la commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel . . . . .	114
V.3.1	Prédiction optimale de l'erreur de poursuite en sortie . . . . .	115
V.3.2	Synthèse de la loi de commande . . . . .	116
V.4	Commande prédictive multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel . . . . .	118

*Table des matières*

---

V.4.1 Synthèse du système de commande . . . . .	120
V.4.2 Performances de l'observateur . . . . .	123
V.4.3 Stabilité du système de commande avec retour d'état . . . . .	125
V.5 Commande d'un bioréacteur . . . . .	126
V.6 Conclusion . . . . .	131
<b>Conclusion générale</b>	<b>132</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>134</b>

# Table des figures

I.1	Schéma fonctionnel d'une commande numérique avec modèle de référence. . . . .	9
I.2	Schéma fonctionnel d'une commande adaptative avec modèle de référence ( $n^* = 1$ , $W_m(q^{-1})$ est SPR). . . . .	13
I.3	Organigramme relatif au calcul de la loi de commande numérique MRAC (cas où $n^* = 1$ , $W_m(q^{-1})$ est SPR). . . . .	18
I.4	Schéma fonctionnel d'une commande adaptative avec modèle de référence ( $n^* \geq 1$ , $W_m(q^{-1})$ NSPR, $k_m = k_p$ ) . . . . .	19
I.5	Organigramme relatif au calcul de la loi de commande numérique MRAC (cas où $n^* \geq 1$ , $W_m(q^{-1})$ est NSPR). . . . .	24
I.6	Variations des paramètres du système considéré. . . . .	25
I.7	Evolutions des sorties du système et du modèle de référence. . . . .	26
I.8	Système faiblement variant dans le temps. . . . .	26
I.9	Lois de variation des paramètres du système. . . . .	27
I.10	Evolutions des sorties du système et du modèle de référence. . . . .	27
I.11	Système fortement variant dans le temps. . . . .	28
I.12	DVS-MRAC. . . . .	32
I.13	Evolutions des paramètres du régulateur. . . . .	32
II.1	Représentation multimodèle d'un système complexe. . . . .	35
II.2	Structure générale d'une commande multimodèle à commutation. . . . .	42
II.3	Schéma fonctionnel d'une commande multimodèle avec modèle de référence. . . . .	44
II.4	Validation de la modélisation. . . . .	46
II.5	Commande multimodèle avec modèle de référence. . . . .	46
II.6	Evolutions des validités des modèles. . . . .	47
II.7	Dispositif expérimental. . . . .	48
II.8	Caractéristique statique du réacteur. . . . .	49

II.9	Données d'identification. . . . .	50
II.10	Validation du multimodèle. . . . .	51
II.11	Sorties du réacteur et du modèle global. . . . .	51
II.12	Erreurs de modélisation relatives. . . . .	52
II.13	Performances entrée-sortie du système de commande multimodèle. . .	53
II.14	Performances du système de commande multimodèle. . . . .	53
II.15	Performances entrée-sortie du système de commande monomodèle. . .	54
II.16	Erreur de poursuite du système de commande monomodèle. . . . .	54
III.1	Concentrations de substrat de sortie et de référence. . . . .	61
III.2	Commande non linéaire par "backstepping". . . . .	62
III.3	Structure RST du système de commande. . . . .	68
III.4	Les signaux d'excitation et de sortie. . . . .	70
III.5	Comportement entrée/sortie du bioréacteur. . . . .	72
III.6	Erreur relative de poursuite et degrés de validité. . . . .	72
III.7	Fonctions de sensibilité usuelles. . . . .	73
IV.1	Organigramme de compensation adaptative des perturbations. . . . .	86
IV.2	Perturbation de charge sinusoïdale. . . . .	87
IV.3	Performances entrée-sortie du système de commande. . . . .	88
IV.4	Evolutions des paramètres estimés. . . . .	88
IV.5	Variations des paramètres du modèle. . . . .	89
IV.6	Compensation adaptative des perturbations sinusoïdales. . . . .	89
IV.7	Evolutions des paramètres estimés. . . . .	89
IV.8	Schéma fonctionnel du système de commande multimodèle. . . . .	91
IV.9	Structure du prédicteur local. . . . .	91
IV.10	Compensation multimodèle des perturbations de charge. . . . .	93
IV.11	Evolutions des paramètres estimés. . . . .	93
IV.12	Compensation multimodèle des perturbations de charge (fusion). . . .	94
IV.13	Evolutions des degrés de validité. . . . .	95
IV.14	. . . . .	96
IV.15	Compensation adaptative des perturbations de charge. . . . .	96
IV.16	Perturbation de charge non stationnaire. . . . .	97
IV.17	Compensation adaptative des perturbations de charge. . . . .	98
IV.18	Evolutions des paramètres estimés . . . . .	98
IV.19	Compensation des perturbations de charge. . . . .	101

*Table des figures*

---

IV.20 Evolutions des degrés de validité. . . . .	101
IV.21 Compensation des perturbations de charge. . . . .	102
IV.22 Degrés de validité des modèles des perturbations. . . . .	102
IV.23 Structure de base d'une boucle de verrouillage d'amplitude et de phase. . . . .	104
IV.24 Schéma fonctionnel de compensation des perturbations. . . . .	105
IV.25 Compensation des perturbations harmoniques. . . . .	107
IV.26 Commutation des régulateurs élémentaires. . . . .	107
IV.27 Compensation des perturbations harmoniques. . . . .	108
IV.28 Commutation des régulateurs élémentaires. . . . .	108
IV.29 Estimation des perturbations et de leur période. . . . .	108
V.1 Comportement d'entrée/sortie du bioréacteur. . . . .	128
V.2 . . . . .	129
V.3 Evolutions de la sortie réelle et la sortie estimée multimodèle. . . . .	129

# Introduction générale

Un effort considérable a été consacré à l'étude et la commande des systèmes dynamiques non linéaires. La diversité des comportements et des phénomènes dynamiques qui peuvent être observés pour cette classe de systèmes, fait que les techniques de commande non linéaire sont, en particulier, confrontées au problème de détermination d'un modèle mathématique qui décrit avec précision le comportement dynamique du procédé et elles sont restreintes à des classes particulières de systèmes non linéaires [37, 92].

Ces techniques se distinguent souvent, par les hypothèses de modélisation prises en considération et de la nature des résultats de stabilité et de performances réalisées aussi bien en régulation qu'en poursuite. Par conséquent, contrairement aux techniques de commande linéaire, les commandes non linéaires constituent un champ de recherche fertile et qui reste encore ouvert.

La théorie des systèmes linéaires est, par contre, arrivée à un aboutissement très élevé. Par ailleurs les nouveaux travaux de recherche développés, sont les pluparts en liaison avec les tentatives faites pour l'utilisation des techniques linéaires pour la modélisation et la commande des systèmes non linéaires, motivés notamment par les résultats probants en matière de théorie linéaire [65, 70, 88].

C'est dans ce cadre que s'inscrit l'approche multimodèle qui permet de tirer le meilleur profit du savoir faire incontestable qui a été développé sur la robustesse des systèmes de commande linéaire tout au long des dernières années et des premiers résultats sur la modélisation multimodèle date des travaux de *Johansen* et *Foss* [38, 39]. Motivé essentiellement par le savoir faire en matière de commande linéaire, de plus en l'absence d'un modèle de connaissance précis l'approche multimodèle constitue un outil efficace et bien adapté à la modélisation des systèmes non linéaires à large domaine de fonctionnement, comme le montre les nombreuses applications dans les domaines académiques, biomédical et industriel [57, 62, 83, 85].

L'idée de cette approche est de pouvoir appréhender le comportement complexe du système par une famille de modèles locaux caractérisant le fonctionnement du système dans les différentes zones de fonctionnement.

Les outils classique d'identification, d'analyse et de contrôle tel que la logique floue, les modèles de *Takagi-Sugeno*, les réseaux de neurones et la décomposition

en ondelette peuvent être convenablement exploitées pour construire la famille des modèles locaux dont la structure peut être obtenue suite à une linéarisation autour des points de fonctionnement ou à partir des mesures expérimentales d'entrées/sorties en utilisant les algorithmes usuels d'identification [90]. Ces modèles peuvent être, aussi, obtenus en utilisant les techniques de classification floue récemment développées [9, 19, 53, 54, 98].

Par ailleurs, ces modèles sont aisément exploités soit pour étudier localement certaines propriétés du système, soit pour construire des régulateurs locaux fournissant des commandes élémentaires performantes. Pour chaque modèle un contrôleur local est associé. Le contrôleur global est obtenu suite à une commutation entre les contrôleurs locaux [42, 56, 58, 79, 84], ou suite à une fusion de ces derniers [22, 30, 94].

C'est dans ce cadre que s'inscrit l'objectif de ce travail. En effet, les résultats disponibles sur l'identification et la commande des systèmes linéaires sont judicieusement exploités pour la modélisation et la commande des systèmes linéaires variants dans le temps et/ou les systèmes non linéaires par une approche multimodèle.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre présente une étude détaillée de la commande numérique adaptative avec modèle de référence MRAC. Par ailleurs, en se basant sur cette loi de commande, une version discrète de la commande à structure variable adaptative avec modèle de référence utilisant les entrées et les sorties (DVS-MRAC) est développée. La robustesse des deux techniques de commande est évaluée à travers un exemple académique de simulation.

Le second chapitre donne une présentation concise des différentes composantes de l'approche multimodèle, en l'occurrence la représentation multimodèle et la synthèse multimodèle. Un schéma de commande multimodèle avec modèle de référence (MM-MRC) est établi. Des résultats de simulation sont présentés pour mettre en évidence les performances de la commande (MM-MRC) proposée par rapport à la commande MRAC et DVS-MRAC dans le cas d'un système linéaire avec des variations paramétriques importantes dans le temps. Par ailleurs, une mise en œuvre expérimentale sur un réacteur chimique est réalisée pour souligner, encore une fois, l'intérêt du schéma de commande développé pour l'asservissement des procédés industriels.

Le troisième chapitre, est consacré à la commande multimodèle prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel. Le concept de modèle de référence sur l'état partiel permet de ramener un problème d'asservissement en un problème de régulation. Quant à la commande prédictive, elle permet de traiter convenablement un problème de régulation aux moindres carrés. La commande multimodèle proposée, est utilisée pour traiter un problème d'asservissement d'un bioréacteur dans un contexte de simulation réaliste, pour montrer la faisabilité d'une telle

commande par rapport à une méthode de commande non linéaire, notamment, le "backstepping".

Le quatrième chapitre traite le problème de la compensation des perturbations harmoniques, dans un contexte de commande avec modèle de référence sur l'état partiel. Deux cas sont considérés : le cas d'un système fortement variant dans le temps en présence des perturbations à fréquence fixe et le cas des perturbations harmoniques à fréquence variable en présence d'un système invariant. Dans les deux cas, un schéma de commande multimodèle pour la compensation des perturbations est proposé.

Dans le même contexte, une procédure de supervision appropriée est proposée dans le cas d'une variation simultanée des paramètres de la perturbation, en l'occurrence, la phase et la fréquence. Cette procédure combine l'approche multimodèle avec une boucle de verrouillage d'amplitude et de phase destinée pour estimer la période de la perturbation. Les performances des schémas de commande développés, sont évaluées à travers des exemples académiques de simulation.

Le cinquième chapitre aborde le problème de la commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel multimodèle à base de modèle d'état. Cette technique de commande est combinée avec une méthode d'estimation d'état basée sur le concept de multiobservateur. Le recours à la seconde méthode de *Lyapunov* conduit à l'obtention des conditions, sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles linéaires, garantissant d'une part, la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation et d'autre part la stabilité du système global muni de la loi de commande multimodèle élaborée. La commande multimodèle proposée est appliquée pour la commande d'un bioréacteur.

Une conclusion et des perspectives achèvent ce présent mémoire.

# Liste de Publications

## Articles publiés dans des revues internationales avec comité de lecture

1. M. Elkhail, M. Ltaief & R. Ben Abdennour, "The multimodel approach for numerical model reference control", *Transactions on Systems, Signals & Devices, Issues on Systems Analysis & Automatic Control, TSSD*, vol. 3(1), pp. 103-120, 2008.
2. M. Elkhail, M. Ltaief, R. Ben Abdennour & M. M'Saad, "Compensation adaptative des perturbations harmoniques : Une approche multimodèle", *Automatique et Informatique Appliquée, Académie Roumaine*, 2009.
3. M. Elkhail, M. Ltaief, R. Ben Abdennour & M. M'Saad, "Multimodel reference model control : an experimental validation on a chemical reactor", *International Journal of Modeling, Identification and Control, IJMIC*, vol. 9(4), pp. 350-358, 2010.
4. I. Romdhane, M. Elkhail & R. Ben Abdennour, "Multiple harmonic disturbances rejection using a new supervision procedure", *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic Control & Computer Engineering, IJ-STA*, vol. 4(1), pp. 1232-1245, 2010.

## Conférences internationales avec comité de lecture

1. M. Elkhail, M. Ltaief & R. Ben Abdennour, "The multimodel approach for numerical model reference control of highly non stationary system", *fourth International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices, SSD' 07, Hammamet, Tunisia, 2007.*
2. M. Elkhail, M. Ltaief, A. S. Nouri, R. Ben Abdennour & M. M'Saad, "Sampled Data Model Reference Control : Performance enhancements using Multimodel and Variable Structure Control", *International Conference on Automation, Robotics and Control Systems, ARCS-08, Orlando, FL, USA, 2008.*
3. M. Elkhail, M. Ltaief, R. Ben Abdennour & M. M'Saad, " Compensation adaptative des perturbations harmoniques : Une approche multimodèle ", *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'08, Bucarest, Roumanie, 2008.*
4. M. Elkhail, M. Ltaief, R. Ben Abdennour & M. M'Saad, "Adaptive rejection of harmonic disturbances with time varying frequency : A multimodel approach", *5<sup>ème</sup> Conférence Internationale d'Electronique et d'Automatique, JTEA, Hammamet, Tunisie, 2008.*
5. M. Elkhail, M. Ltaief, M. M'Saad & R. Ben Abdennour, "Control of non-linear bioprocess using the Backstepping and the Multimodel Partial State Reference Model control designs", *10<sup>th</sup> International conference on Sciences and Techniques of Automatic control & Computer Engineering, STA'2009, Hammamet, Tunisia.*

# Chapitre I

## Commande numérique adaptative avec modèle de référence

### I.1 Introduction

L'élaboration des lois de commande susceptibles de réaliser les performances désirées a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Particulièrement, la Commande Adaptative avec Modèle de Référence (MRAC) a suscité un réel intérêt. Le concept de la loi de commande MRAC consiste tout simplement à ajuster les paramètres du régulateur en vue de réaliser une poursuite parfaite d'un modèle de référence, incorporant la dynamique désirée en boucle fermée. Pour ce faire, plusieurs structures de cette loi de commande ont été élaborées. La structure adoptée dans ce travail repose essentiellement sur les travaux de Narendra dans le cas des systèmes échantillonnés [75].

Par ailleurs, les résultats disponibles ont été principalement obtenus dans le cas des systèmes linéaires invariants ou lentement variants dans le temps. La motivation consiste à évaluer la robustesse de la loi de commande MRAC en présence de variations paramétriques importantes.

Entre autres, la commande à structure variable est devenue une approche séduisante pour le contrôle et la commande des systèmes complexes [101, 102]. Cet intérêt particulier est motivé essentiellement, par les résultats disponibles sur la convergence, la stabilité et la robustesse intrinsèques aux Structures Variables. Une attention particulière a été portée sur la commande à structure variable Adaptative avec Modèle de Référence utilisant uniquement les entrées et les sorties (VS-MRAC) [35, 36, 52, 80]. Cette structure de commande a été mise au point pour améliorer les performances de la Commande Adaptative avec Modèle de Référence.

Plusieurs avantages sont ainsi soulignés par rapport à la commande MRAC :

- Un bon comportement en régime transitoire.
- Une stabilité asymptotique globale.
- Une insensibilité par rapport aux non linéarités et aux variations paramétriques.
- Une meilleure robustesse vis-à-vis des dynamiques négligées.

Ce chapitre comporte deux parties. La première est consacrée à l'étude et la synthèse de la Commande Adaptative avec Modèle de Référence, en se référant aux travaux de Narendra [75, 76]. La seconde partie est dédiée au développement et à la synthèse de la commande (VS-MRAC) échantillonnée. Les performances des deux techniques de commande sont également évaluées et comparées dans un contexte de simulation approprié.

## I.2 Commande numérique adaptative avec modèle de référence

On considère un système linéaire monovarié échantillonné décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} X_p(k+1) = A_p X_p(k) + B_p u(k) \\ y(k) = C_p^T X_p(k) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

avec :  $A_p$  est une matrice de dimension  $(n \times n)$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  sont deux vecteurs de dimension  $n$ . La fonction de transfert du système est alors donnée par :

$$W_p(q) = C_p^T (qI - A_p)^{-1} B_p = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \dots + b_m}{q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n} \quad (\text{I.2})$$

$$W_p(q^{-1}) = q^{-n^*} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}} = q^{-d} k_p \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

où :

- $A(q^{-1})$  est un polynôme monique de degré  $n$  connu.
- $B(q^{-1})$  est un polynôme monique et stable de degré  $m$  connu tel que  $m \leq n$ .
- $k_p$  est un gain de signe connu.
- $n^* = n - m = d \geq 1$  est le degré relatif du système.

Les deux polynômes ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n} \\ B(q^{-1}) &= 1 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m} \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Soit le modèle de référence, représentant le comportement désiré du système de commande. Ce modèle est décrit par le couple  $\{r(k), y_r(k)\}$  et représenté par la fonction de transfert suivante :

$$W_m(q^{-1}) = k_m q^{-d} \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (\text{I.4})$$

avec :

- $r(k)$  est une entrée de référence bornée.
- $B_m(q^{-1})$  est un polynôme monique et stable de degré  $g \leq m$ .
- $A_m(q^{-1})$  est un polynôme monique et stable de degré  $n$ .
- $k_m$  est un gain constant et positif.

où :

$$\begin{aligned} A_m(q^{-1}) &= 1 + a_{m1}q^{-1} + \dots + a_{mn}q^{-n} \\ B_m(q^{-1}) &= 1 + b_{m1}q^{-1} + \dots + b_{mg}q^{-g} \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

### I.2.1 Position de problème

Étant donné un système à paramètres inconnus décrit par le pair  $\{u(k), y(k)\}$  et un modèle de référence, décrit par le pair  $\{r(k), y_r(k)\}$ , et représentant le comportement désiré du système en boucle fermée. L'objectif essentiel est l'élaboration d'une loi de commande minimisant l'erreur entre la sortie du système et la sortie du modèle de référence. Cette loi de commande, dite avec modèle de référence, vérifie alors l'équation suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |e_1(k)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |y(k) - y_r(k)| = 0 \quad (\text{I.6})$$

La structure générale du système de commande peut être représentée par le schéma fonctionnel de la figure I.1.

avec :

- GSA1 et GSA2 sont deux générateurs des signaux auxiliaires.
- $V^{(1)}(k)$  et  $V^{(2)}(k)$  sont deux vecteurs des signaux auxiliaires de dimensions  $(n-1)$ .
- $C^T = (c_1, \dots, c_{n-1})$  et  $D^T = (d_0, \dots, d_{n-1}) = (d_0, \bar{D}^T)$ , sont les paramètres du régulateur.

D'après le schéma fonctionnel du système de commande on a :

$$u(k) = k_0 r(k) + W_1(q^{-1})u(k) + W_2(q^{-1})y(k) \quad (\text{I.7})$$

Soit  $W_{BF}(q^{-1})$  la fonction de transfert du système de commande :

$$y(k) = W_{BF}(q^{-1})r(k) = W_p(q^{-1})u(k) \quad (\text{I.8})$$



or  $B(q^{-1})$  est un polynôme stable. On peut, donc, en déduire :

$$W_{BF}(q^{-1}) = \frac{q^{-d}k_p k_0 N(q^{-1})}{[N(q^{-1}) - E(q^{-1})] \frac{A(q^{-1})}{B(q^{-1})} - q^{-d}k_p [d_0 N(q^{-1}) + F(q^{-1})]} \quad (\text{I.14})$$

Comme on l'a mentionné précédemment, le modèle de référence permet de spécifier les performances du système de commande. On peut écrire alors :

$$W_{BF}(q^{-1}) = W_m(q^{-1}) \quad (\text{I.15})$$

Pour que  $W_{BF}(q^{-1})$  contient les mêmes zéros que le modèle de référence, le polynôme  $N(q^{-1})$  est choisi comme suit [74] :

$$N(q^{-1}) = L(q^{-1})B_m(q^{-1}) \quad (\text{I.16})$$

où  $L(q^{-1})$  est un polynôme monique d'Hurwitz de degré  $(n - m - 1)$ . Les équations (I.4) et (I.15) permettent de déduire :

$$k_0 = \frac{k_m}{k_p} \quad (\text{I.17})$$

$$[N(q^{-1}) - E(q^{-1})] \frac{A(q^{-1})}{B(q^{-1})} - q^{-d}k_p [d_0 N(q^{-1}) + F(q^{-1})] = A_m(q^{-1})L(q^{-1}) \quad (\text{I.18})$$

### *Cas particulier*

Si  $n^* = 1$ ,  $L(q^{-1}) = 1$  et on a alors :

$$N(q^{-1}) = B_m(q^{-1}) \quad (\text{I.19})$$

Si on prend :

$$N(q^{-1}) - E(q^{-1}) = B(q^{-1}) \quad (\text{I.20})$$

L'équation (I.18) devient :

$$A(q^{-1}) - q^{-d}k_p [d_0 N(q^{-1}) + F(q^{-1})] = A_m(q^{-1}) \quad (\text{I.21})$$

## **I.2.2 Calcul de la loi de commande numérique avec modèle de référence**

D'après les relations (I.11) et (I.12), on peut écrire :

$$W_1(q^{-1}) = \frac{E(q^{-1})}{N(q^{-1})} = \frac{c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{n-1} q^{-(n-1)}}{1 + n_1 q^{-1} + \dots + n_{n-1} q^{-(n-1)}} \quad (\text{I.22})$$

$$W_2(q^{-1}) = d_0(k) + \frac{F(q^{-1})}{N(q^{-1})} = d_0 + \frac{d_1q^{-1} + \dots + d_{n-1}q^{-(n-1)}}{1 + n_1q^{-1} + \dots + n_{n-1}q^{-(n-1)}} \quad (\text{I.23})$$

Les représentations d'état correspondantes peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} V^{(1)}(k+1) &= \Lambda V^{(1)}(k) + Bu(k) \\ u_F(k) &= C^T V^{(1)}(k) \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

$$\begin{aligned} V^{(2)}(k+1) &= \Lambda V^{(2)}(k) + By(k) \\ y_F(k) &= \bar{D}^T V^{(2)}(k) + d_0 y(k) \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

$$\text{avec : } \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -n_{n-1} & \dots & \dots & \dots & -n_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = [c_{n-1} \dots \dots c_1]$$

$$\bar{D}^T = [d_{n-1} \dots \dots d_1]$$

D'après la figure I.1, la loi de commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$u(k) = k_0 r(k) + u_F(k) + y_F(k) \quad (\text{I.26})$$

or d'après (I.24) et (I.25), en présence d'incertitudes paramétriques, l'expression (I.26) peut être formulée comme suit :

$$\begin{aligned} u(k) &= k_0(k)r(k) + C^T(k)V^{(1)}(k) + \bar{D}^T(k)V^{(2)}(k) + d_0(k)y(k) \\ &= \theta^T(k) \varphi(k) \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

avec :

$$\theta^T(k) = [k_0(k) \ C^T(k) \ \bar{D}^T(k) \ d_0(k)]$$

$$\varphi^T(k) = [r(k) \ V^{(1)T}(k) \ V^{(2)T}(k) \ y(k)]$$

Finalement, le calcul de la loi de commande nécessite la connaissance des paramètres du système à commander. Or, en pratique, ces paramètres sont inconnus, ou mal connus et, s'ils sont variables dans le temps, leur loi de variation est inconnue. L'estimation en ligne des paramètres de commande s'avère, donc, nécessaire.

Dans ce cas, la loi de commande s'écrit sous la forme suivante :

$$u(k) = \hat{\theta}^T(k) \varphi(k)$$

où  $\hat{\theta}(k)$  est le vecteur des paramètres de commande à estimer.

## I.3 Synthèse de la commande numérique adaptative avec modèle de référence

La structure de la loi de commande est telle que le comportement du système de commande soit stable et équivalent au modèle de référence, même en présence des dynamiques négligées et d'incertitudes paramétriques. Le développement de cette loi de commande et la preuve de stabilité, ont fait l'objet de travaux de recherche de Narendra et Valvani en continu et encore en échantillonné [74, 75, 76]. Selon le degré relatif du système et la nature de la fonction de transfert du modèle de référence, deux cas sont alors considérés :

- $n^* = 1$  et  $W_m(q^{-1})$  est strictement positive réelle (SPR).
- $n^* \geq 1$  et  $W_m(q^{-1})$  n'est pas strictement positive réelle (NSPR).

Afin d'étudier les conditions de convergence et de synthétiser la loi de commande, on rappelle la définition d'une fonction de transfert strictement positive réelle :

*Une fonction de transfert  $H(z)$  est strictement positive réelle si et seulement si :*

- $H(z)$  est asymptotiquement stable (tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité).
- $Re(H(z)) > 0$  pour tout  $z$  sur le cercle unité.

### I.3.1 Synthèse de la loi de commande MRAC dans le cas où $n^* = 1$ et $W_m(q^{-1})$ est SPR

Le schéma fonctionnel dans ce cas particulier est donné par la figure I.2. D'après cette dernière, la loi de commande s'écrit :

$$u(k) = \theta^T(k)\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k) \quad (\text{I.28})$$

avec  $\alpha > 0$  et  $\Gamma = \Gamma^T$ .

D'après les équations (I.1), (I.24) et (I.25), la représentation dans l'espace d'état du système de commande peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_g X(k) + B_g u(k) \\ y(k) = H^T X(k) \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

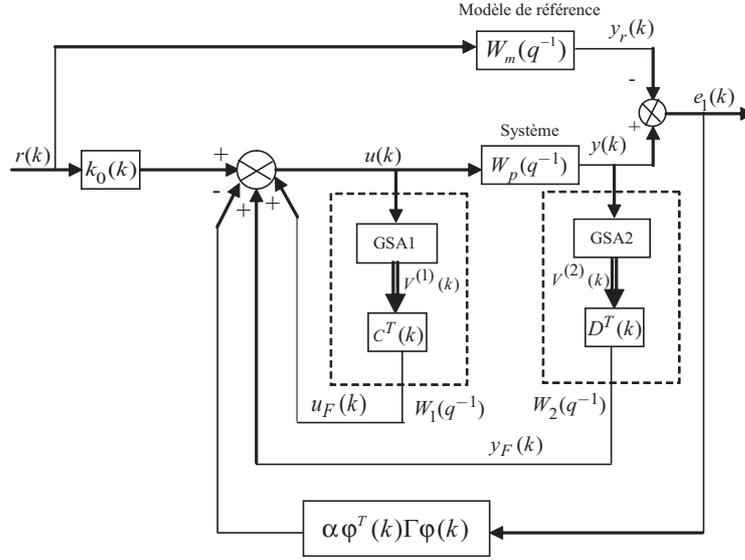


FIG. I.2 – Schéma fonctionnel d'une commande adaptative avec modèle de référence ( $n^* = 1$ ,  $W_m(q^{-1})$  est SPR).

avec :

$$X(k) = \begin{pmatrix} X_p(k) \\ V^{(1)}(k) \\ V^{(2)}(k) \end{pmatrix} \text{ un vecteur d'état de dimension } (3n - 2).$$

$$A_g = \begin{bmatrix} A_p & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & \Lambda & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ BC_p^T & \vdots & 0 & \vdots & \Lambda \end{bmatrix}$$

$$B_g = \begin{bmatrix} B_p \\ \dots \\ B \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H^T = [C_p^T \vdots 0 \vdots 0],$$

Le vecteur des paramètres  $\theta^T(k)$  peut s'écrire comme suit :

$$\theta^T(k) = \theta^{*T} + \tilde{\theta}^T(k) \quad (\text{I.30})$$

avec :

$\theta^{*T} = [k_0^* C^{*T} \bar{D}^{*T} d_0^*]$  est le vecteur à paramètres optimaux.

$\tilde{\theta}^T(k)$  est le vecteur des erreurs sur les paramètres de commande.

L'expression de la loi de commande se réécrit, alors, comme suit :

$$u(k) = (\theta^{*T} + \tilde{\theta}^T(k))\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k) \quad (\text{I.31})$$

En remplaçant cette dernière expression dans (I.29) on obtient :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_g X(k) + B_g ((\theta^{*T} + \tilde{\theta}^T(k))\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k)) \\ y(k) = H^T X(k) \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

Or :  $\varphi^T(k) = [r(k) V^{(1)T}(k) V^{(2)T}(k) y(k)]$

Il en résulte que :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_g X(k) + B_g \begin{pmatrix} k_0^* r(k) + C^{*T} V^{(1)}(k) + \bar{D}^{*T} V^{(2)}(k) \\ + d_0^* y(k) + \tilde{\theta}^T(k)\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k) \end{pmatrix} \\ y(k) = H^T X(k) \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_g X(k) + B_g \begin{pmatrix} k_0^* r(k) + [d_0^* C_p^T \ C^{*T} \ \bar{D}^{*T}] X(k) \\ + \tilde{\theta}^T(k)\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k) \end{pmatrix} \\ y(k) = H^T X(k) \end{cases}$$

Finalement, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_{gc} X(k) + B_g (k_0^* r(k) + \tilde{\theta}^T(k)\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k)) \\ y(k) = H_g^T X(k) \end{cases} \quad (\text{I.33})$$

avec :

$$A_{gc} = \begin{bmatrix} A_p + B_p d_0^* C_p^T & \vdots & B_p C^{*T} & \vdots & B_p \bar{D}^{*T} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ B d_0^* C_p^T & \vdots & \Lambda + B C^{*T} & \vdots & B \bar{D}^{*T} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ B C_p^T & \vdots & 0 & \vdots & \Lambda \end{bmatrix}$$

$$H_g^T = [C_p^T : 0 : 0]$$

si  $\theta^T(k) = \theta^{*T} \Rightarrow \tilde{\theta}(k) = 0$  et le terme  $\alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k) \rightarrow 0$ , le système de commande a le même comportement que le modèle de référence. Si  $X_{mc}$  est le vecteur d'état non minimal du modèle de référence, dont les  $(3n - 2)$  éléments correspondent à ceux du système de commande, une réalisation non minimale ( $A_{gc}, B_g$  et  $H_g^T$ ) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} X_{mc}(k+1) = A_{gc}X_{mc}(k) + B_g k_0^* r(k) \\ y_r(k) = H_g^T X_{mc}(k) \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

avec :

$$X_{mc}(k) = \begin{pmatrix} X_m(k) \\ V_m^{(1)}(k) \\ V_m^{(2)}(k) \end{pmatrix}$$

La relation précédente permet d'écrire :

$$y_r(k) = (H_g^T (qI - A_{gc})^{-1} B_g) k_0^* r(k) = W_m(q^{-1})r(k) \quad (\text{I.35})$$

D'après les relations (I.33) et (I.35), on peut écrire :

$$y(k) = W_m(q^{-1})[r(k) + \frac{1}{k_0^*}(\tilde{\theta}^T(k)\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k))] \quad (\text{I.36})$$

Finalement, il en résulte que :

$$e_1(k) = y(k) - y_r(k) = \frac{1}{k_0^*} W_m(q^{-1})(\tilde{\theta}^T(k)\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k)) \quad (\text{I.37})$$

si on pose :

$$v(k) = \tilde{\theta}^T(k)\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k) \quad (\text{I.38})$$

l'erreur de poursuite peut s'écrire, donc, comme suit :

$$e_1(k) = \frac{1}{k_0^*} W_m(q^{-1})v(k) \quad (\text{I.39})$$

### I.3.1.1 Modèle de l'erreur

Si on définit le vecteur de l'erreur comme suit :

$$e(k) = X(k) - X_{mc}(k)$$

La représentation d'état dans l'espace de l'erreur, d'après les relations (I.33), (I.34) et (I.38) s'écrit :

$$\begin{cases} e(k+1) = A_{gc}e(k) + B_g v(k) \\ e_1(k) = H_g^T e(k) \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

Si on note par  $W_e(q^{-1})$  la fonction de transfert liant la sortie  $e_1(k)$  à l'entrée  $v(k)$ , la relation (I.40) se réécrit :

$$W_e(q^{-1}) = H_g^T (qI - A_{gc})^{-1} B_g \quad (\text{I.41})$$

On peut, donc, conclure d'après (I.39) et (I.41) que :

$$W_e(q^{-1}) = \frac{1}{k_0^*} W_m(q^{-1})$$

La loi adaptative de type gradient est donnée par [75, 76] :

$$\Delta \tilde{\theta}(k) = \tilde{\theta}(k+1) - \tilde{\theta}(k) = -\Gamma e_1(k) \varphi(k) \quad (\text{I.42})$$

### I.3.1.2 Analyse de stabilité

Le lemme ci-dessous donne une condition nécessaire qui doit être vérifiée afin que le système, décrit par l'équation (I.40) et (I.42), soit stable.

**Lemme I.3.1.** [75, 76] *Étant donné une matrice  $A_{gc}(n \times n)$  dont toutes ses valeurs propres appartenant au cercle unité, une matrice symétrique et définie positive  $\Gamma$ , deux vecteurs  $B_g, H_g \in \mathbb{R}^n$  avec  $(A_{gc}, B_g)$  contrôlable et un vecteur  $\varphi(k) : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  dont tous les éléments sont bornés, si la fonction de transfert  $H_g^T (qI - A_{gc})^{-1} B_g$  est strictement positive réelle alors le système d'équation (I.40) et (I.42) est stable et  $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$ .*

***Loi d'adaptation des paramètres***

Dans ce cas (  $n^* = 1$  et  $W_m(q^{-1})$  est SPR), L'algorithme d'adaptation des paramètres est donné par les équations suivantes :

$$e_1(k) = y(k) - y_r(k) \quad (\text{I.43})$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \Gamma e_1(k) \varphi(k) \quad (\text{I.44})$$

$$u(k) = \hat{\theta}^T(k) \varphi(k) - \alpha \varphi^T(k) \Gamma \varphi(k) e_1(k)$$

avec :

$$\theta^T(k) = [k_0(k) \ C^T(k) \ \bar{D}^T(k) \ d_0(k)]$$

$$\varphi^T(k) = [r(k) \ V^{(1)T}(k) \ V^{(2)T}(k) \ y(k)]$$

L'organigramme de la figure I.3 donne les différentes étapes de calcul de la loi de commande adaptative avec modèle de référence.

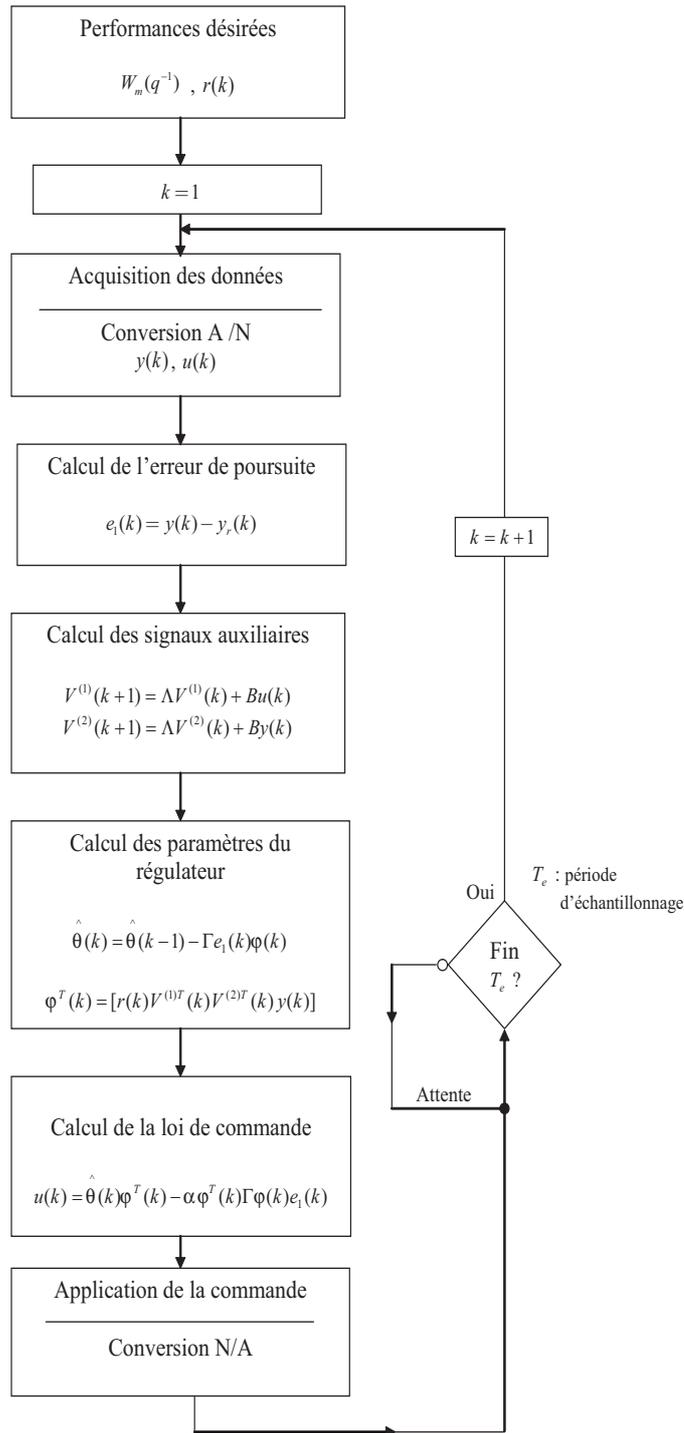


FIG. I.3 – Organigramme relatif au calcul de la loi de commande numérique MRAC (cas où  $n^* = 1$ ,  $W_m(q^{-1})$  est SPR).

### I.3.2 Synthèse de la loi de commande MRAC dans le cas où $n^* \geq 1$ , $k_p = k_m$ connu et $W_m(q^{-1})$ n'est pas SPR

Comme on l'a déjà mentionné, la structure de la loi de commande développée précédemment suppose que  $W_m(q^{-1})$  est strictement positive réelle (SPR). Cependant, si le degré relatif du système  $n^* \geq 1$ , cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite. Dans ce cas, on suppose qu'il existe un polynôme  $L(q^{-1})$  d'Hurwitz de degré  $(n^* - 1)$  tel que  $W_m(q^{-1})L(q^{-1})$  est strictement positive réelle [74].

L'erreur  $e_1(k)$ , dans ces conditions, désigne l'erreur de poursuite entre la sortie du système  $y(k)$  et une sortie fictive  $y_r^*(k)$ .

La structure de la loi de commande peut être représentée par la figure I.4.

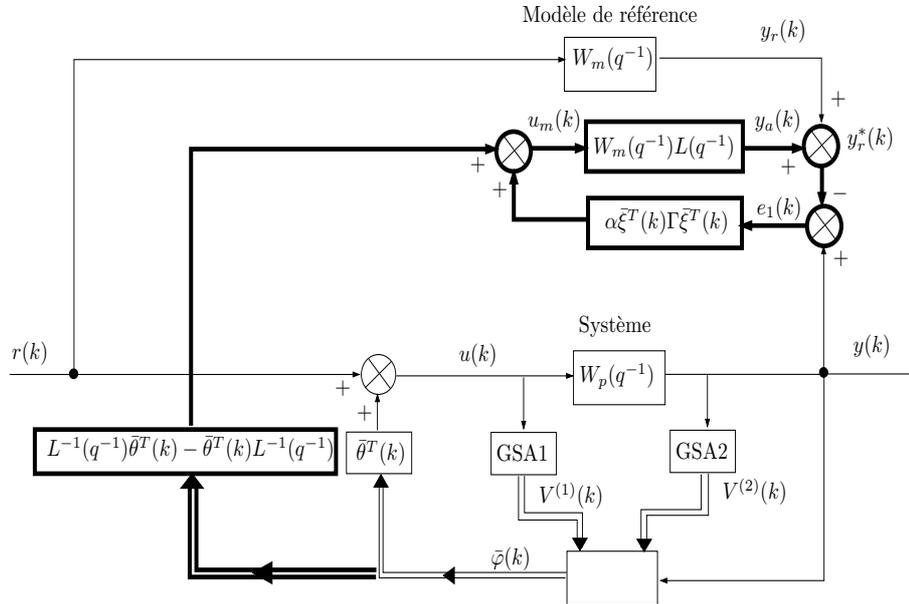


FIG. I.4 – Schéma fonctionnel d'une commande adaptative avec modèle de référence ( $n^* \geq 1$ ,  $W_m(q^{-1})$  NSPR,  $k_m = k_p$ )

D'après la figure I.4, la loi de commande est sous la forme :

$$u(k) = \bar{\theta}^T(k) \bar{\varphi}(k) + r(k) \quad (\text{I.45})$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^T(k) &= [C^T(k) \bar{D}^T(k) d_0(k)] \\ \bar{\varphi}^T(k) &= [V^{(1)T}(k) V^{(2)T}(k) y(k)] \end{aligned}$$

- $e_1(k) = y(k) - y_r^*(k)$  est appelée l'erreur auxiliaire ou l'erreur augmentée.
- $y_r^*(k) = y_r(k) + y_a(k)$
- $y_a(k)$  est la sortie auxiliaire du modèle de référence donnée par l'équation suivante :

$$y_a(k) = L(q^{-1})W_m(q^{-1}) \left( [L^{-1}(q^{-1})\bar{\theta}^T(k) - \bar{\theta}^T(k)L^{-1}(q^{-1})] \bar{\phi}(k) + \alpha \bar{\xi}^T(k) \Gamma \bar{\xi}(k) e_1(k) \right) \quad (\text{I.46})$$

$$\text{avec } \bar{\xi}(k) = L^{-1}(q^{-1})\bar{\phi}(k).$$

Soit  $\bar{\bar{\theta}}(k)$  le vecteur de l'erreur sur les paramètres :

$$\bar{\bar{\theta}}(k) = \bar{\theta}(k) - \bar{\theta}^*$$

Puisque  $\bar{\theta}^*$  est constant, on peut écrire :

$$\bar{\theta}(k) - L(q^{-1})\bar{\theta}(k)L^{-1}(q^{-1}) = \bar{\bar{\theta}}(k) - L(q^{-1})\bar{\bar{\theta}}(k)L^{-1}(q^{-1})$$

Finalement l'expression (I.46) devient :

$$y_a(k) = L(q^{-1})W_m(q^{-1}) \left( [L^{-1}(q^{-1})\bar{\bar{\theta}}^T(k) - \bar{\bar{\theta}}^T(k)L^{-1}(q^{-1})] \bar{\phi}(k) + \alpha \bar{\xi}^T(k) \Gamma \bar{\xi}(k) e_1(k) \right) \quad (\text{I.47})$$

donc, on a :

$$y_r^*(k) = y_r(k) + y_a(k)$$

$$y_r^*(k) = W_m(q^{-1})r(k) + W_m(q^{-1}) \left[ \bar{\bar{\theta}}^T(k) - L(q^{-1})\bar{\bar{\theta}}^T(k)L^{-1}(q^{-1}) \right] \bar{\phi}(k) \\ + W_m(q^{-1})L(q^{-1})\alpha \bar{\xi}^T(k) \Gamma \bar{\xi}(k) e_1(k)$$

Par référence à la loi de commande donnée par la relation (I.45), la sortie du système de commande s'écrit :

$$y(k) = W_p(q^{-1})u(k) = W_p(q^{-1}) [\bar{\theta}^T(k)\bar{\phi}(k) + r(k)]$$

D'autre part, en régime permanent et pour  $\bar{\theta}(k) = \bar{\theta}^*$ , la fonction de transfert de système de commande s'identifie à  $W_m(q^{-1})$  :

$$y(k) = W_p(q^{-1})u(k) = W_p(q^{-1}) [\bar{\theta}^{*T}\bar{\phi}(k) + r(k)] = W_m(q^{-1})r(k)$$

Par référence à l'équation (I.29) et en suivant le même raisonnement que dans la section §I.3.1, on peut écrire :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_g X(k) + B_g ((\bar{\theta}^{*T} + \bar{\bar{\theta}}^T(k))\bar{\varphi}(k) + r(k)) \\ y(k) = H^T X(k) \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Il en résulte que :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_g X(k) + B_g \begin{pmatrix} C^{*T} V^{(1)}(k) + \bar{D}^{*T} V^{(2)}(k) \\ + d_0^* y(k) + \bar{\bar{\theta}}^T(k)\bar{\varphi}(k) + r(k) \end{pmatrix} \\ y(k) = H^T X(k) \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_g X(k) + B_g \begin{pmatrix} [d_0^* C_p^T \quad C^{*T} \quad \bar{D}^{*T}] X(k) \\ + \bar{\bar{\theta}}^T(k)\bar{\varphi}(k) + r(k) \end{pmatrix} \\ y(k) = H^T X(k) \end{cases}$$

Finalement l'équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_{gc} X(k) + B_g (r(k) + \bar{\bar{\theta}}^T(k)\bar{\varphi}(k)) \\ y(k) = H_g^T X(k) \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

si  $\bar{\theta}^T(k) = \bar{\theta}^{*T} \Rightarrow \bar{\bar{\theta}}^T(k) = 0$ , le système en boucle fermée a le même comportement que le modèle de référence.

Si  $X_{mc}$  est le vecteur d'état non minimal du modèle de référence, la représentation d'état correspondante s'écrit :

$$\begin{cases} X_{mc}(k+1) = A_{gc} X_{mc}(k) + B_g r(k) \\ y_r(k) = H_g^T X_{mc}(k) \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

La relation précédente permet d'écrire :

$$y_r(k) = (H_g^T (qI - A_{gc})^{-1} B_g) r(k) = W_m(q^{-1}) r(k) \quad (\text{I.51})$$

D'après les relations (I.49) et (I.51) on peut écrire :

$$y(k) = W_m(q^{-1}) \left[ r(k) + \bar{\bar{\theta}}^T(k) \bar{\bar{\phi}}(k) \right] \quad (\text{I.52})$$

Il en résulte que :

$$e_1(k) = y(k) - y_r^*(k) = W_m(q^{-1}) L(q^{-1}) \left[ \left( \bar{\bar{\theta}}^T(k) \bar{\bar{\xi}}(k) - \alpha \bar{\bar{\xi}}^T(k) \Gamma \bar{\bar{\xi}}(k) \right) e_1(k) \right] \quad (\text{I.53})$$

### I.3.2.1 Modèle de l'erreur

La représentation d'état de l'erreur est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} e(k+1) = A_{gc} e(k) + B_g L(q^{-1}) \left( \bar{\bar{\theta}}^T(k) \bar{\bar{\xi}}(k) - \alpha \bar{\bar{\xi}}^T(k) \Gamma \bar{\bar{\xi}}(k) \right) e_1(k) \\ e_1(k) = H_g^T e(k) \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

D'après (I.53) et (I.54) on a :

$$e_1(k) = (H_g^T (qI - A_{gc})^{-1} B_g) L(q^{-1}) v(k) = W_m(q^{-1}) L(q^{-1}) v(k) \quad (\text{I.55})$$

avec :

$$v(k) = \bar{\bar{\theta}}^T(k) \bar{\bar{\xi}}(k) - \alpha \bar{\bar{\xi}}^T(k) \Gamma \bar{\bar{\xi}}(k) e_1(k)$$

La loi adaptative de type gradient est donnée par [20, 21] :

$$\Delta \bar{\bar{\theta}}(k) = \bar{\bar{\theta}}(k+1) - \bar{\bar{\theta}}(k) = -\Gamma e_1(k) \bar{\bar{\xi}}(k)$$

Finalement l'équation (I.55) permet d'écrire :  $W_e(q^{-1}) = L(q^{-1}) W_m(q^{-1})$ . Pour assurer la stabilité du système (I.54), il faut que la fonction de transfert de l'erreur  $W_e(q^{-1})$  soit strictement positive réelle (lemme du Kalman-Yacubovich). En effet, le polynôme  $L(q^{-1})$  est choisi tel que  $L(q^{-1}) W_m(q^{-1})$  soit strictement positive réelle (SPR) d'où  $W_e(q^{-1})$  l'est aussi et la condition de convergence est vérifiée.

#### Choix de $L(q^{-1})$

Généralement pour le cas ( $n^* = 1$ ),  $L(q^{-1})$  est souvent pris comme suit [75] :

$$L^{-1}(q^{-1}) = W_m(q^{-1})$$

**Loi d'adaptation des paramètres**

Dans ce cas ( $n^* \geq 1$ ,  $k_p = k_m$  et  $W_m(q^{-1})$  n'est pas SPR), l'algorithme d'adaptation des paramètres est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) - \Gamma e_1(k) \bar{\xi}(k) \\ u(k) &= r(k) + \hat{\theta}^T(k) \bar{\phi}(k) \\ e_1(k) &= y(k) - y_r(k) - y_a(k)\end{aligned}\tag{I.56}$$

avec :

$$y_a(k) = L(q^{-1})W_m(q^{-1}) \left( [L^{-1}(q^{-1})\bar{\theta}^T(k) - \bar{\theta}^T(k)L^{-1}(q^{-1})] \bar{\phi}(k) + \alpha \bar{\xi}^T(k) \Gamma \bar{\xi}(k) e_1(k) \right)\tag{I.57}$$

et

$$\bar{\xi}(k) = L^{-1}(q^{-1})\bar{\phi}(k); \quad \bar{\theta}^T(k) = [C^T(k) \bar{D}^T(k) d_0(k)]$$

$$\bar{\phi}^T(k) = \left[ V^{(1)T}(k) \ V^{(2)T}(k) \ y(k) \right]$$

L'organigramme relatif au calcul de la loi de commande adaptative avec modèle de référence correspondant à ce cas est donné sur la figure [I.5](#).

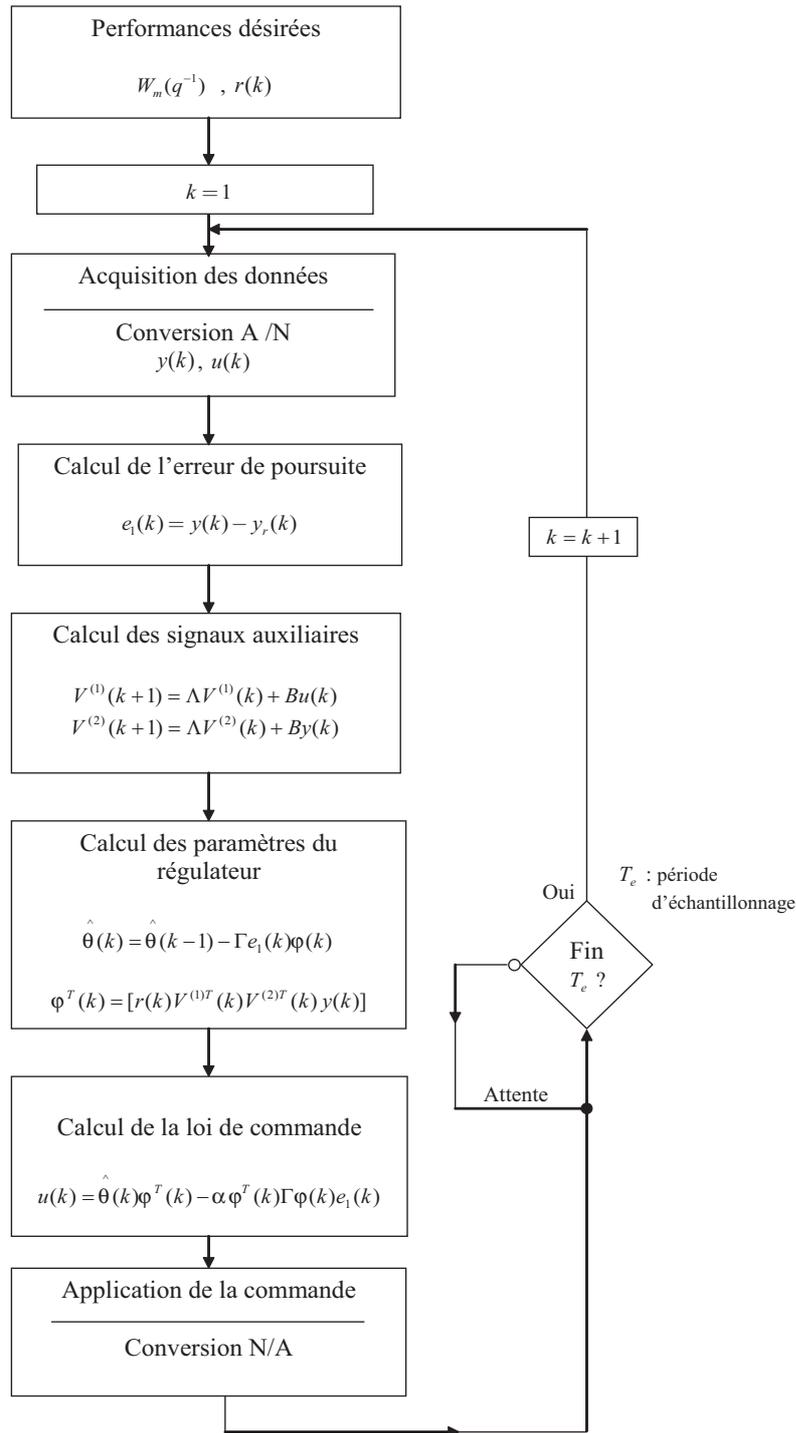


FIG. I.5 – Organigramme relatif au calcul de la loi de commande numérique MRAC (cas où  $n^* \geq 1$ ,  $W_m(q^{-1})$  est NSPR).

### I.3.3 Résultats de simulation

Afin d'évaluer la robustesse de la commande adaptative avec modèle de référence vis-à-vis des variations paramétriques, les cas des systèmes faiblement et fortement variants dans le temps sont pris en considération.

#### 1. Cas d'un système faiblement variant dans le temps

On considère un système de second ordre variant dans le temps, de degré relatif ( $n^* = 1$ ) et décrit par l'équation suivante :

$$y(k) = -a_1(k)y(k-1) - a_2(k)y(k-2) + k_p(k)(b_1(k)u(k-1) + b_2(k)u(k-2)) \quad (\text{I.58})$$

Les paramètres  $a_i(k)$  et  $b_i(k)$  varient dans le temps comme l'indique la figure I.6 suivante :

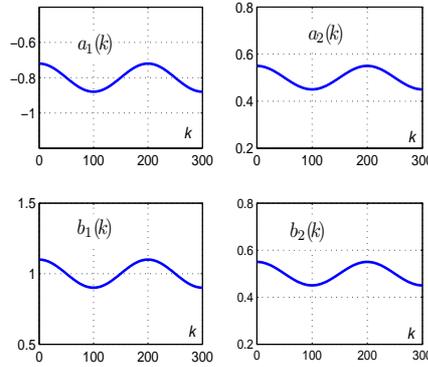


FIG. I.6 – Variations des paramètres du système considéré.

La commande MRAC conçue précédemment est appliquée au système linéaire faiblement variant dans le temps pour pouvoir suivre avec une bonne précision la sortie du modèle de référence, représentée par l'équation suivante :

$$y_r(k) = 0.99y_r(k-1) - 0.246y_r(k-2) + 0.45(r(k-1) - 0.043r(k-2)) \quad (\text{I.59})$$

avec  $r(k)$  est une entrée de référence décrite par la relation suivante :

$$r(k) = \begin{cases} 0.8\sin\left(\frac{\pi k}{15}\right) & \text{si } k \leq \frac{N}{3} \\ 1.5\sin\left(\frac{\pi k}{60}\right)\cos\left(\frac{\pi k}{30}\right) & \text{si } k > \frac{N}{3} \end{cases} \quad (\text{I.60})$$

La figure I.7, donne les évolutions des sorties du modèle de référence et du système linéaire faiblement variant dans le temps considéré. On note que la sortie du système suit avec une bonne précision la sortie du modèle de référence retenue.

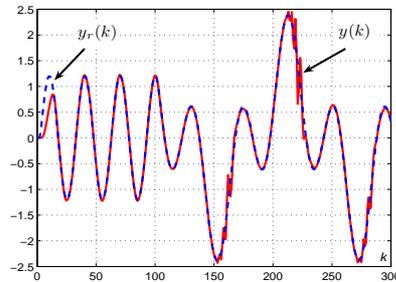
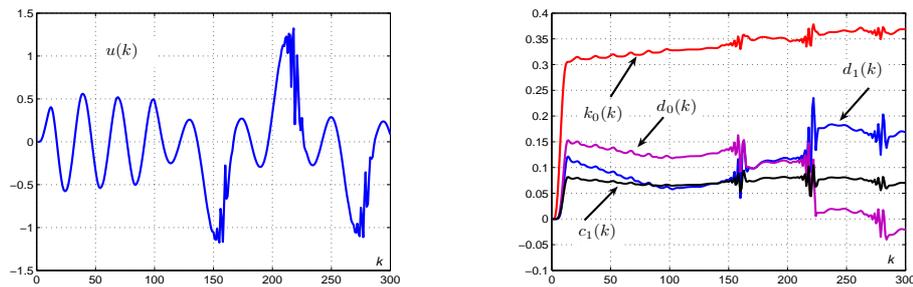


FIG. I.7 – Evolutions des sorties du système et du modèle de référence.

La figure I.8 donne les évolutions du signal de commande et des paramètres de commande relatifs au cas étudié.



(a) Evolution du signal de commande.

(b) Evolutions des paramètres du régulateur.

FIG. I.8 – Système faiblement variant dans le temps.

## 2. Cas d'un système fortement variant dans le temps

Dans le présent cas, on considère le même système variant dans le temps décrit par l'équation (I.58), avec un degré de variation paramétrique relativement important. Les lois de variation des paramètres  $a_i(k)$  et  $b_i(k)$  sont données sur la figure I.9.

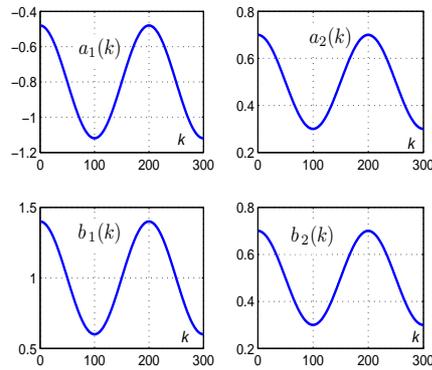


FIG. I.9 – Lois de variation des paramètres du système.

La figure I.10 illustre, les évolutions des sorties du système et du modèle de référence. Cette figure montre que la sortie du système est loin d'être représentative du comportement désiré et diverge après quelques itérations renseignant sur l'instabilité du système de commande.

Les évolutions du signal de commande et des paramètres de commande, dans ce dernier cas, sont données par la figure I.11.

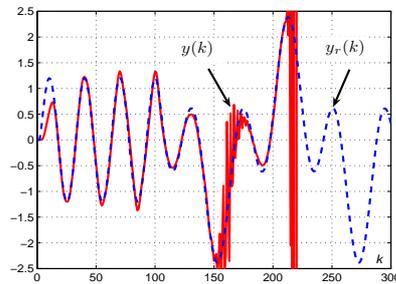
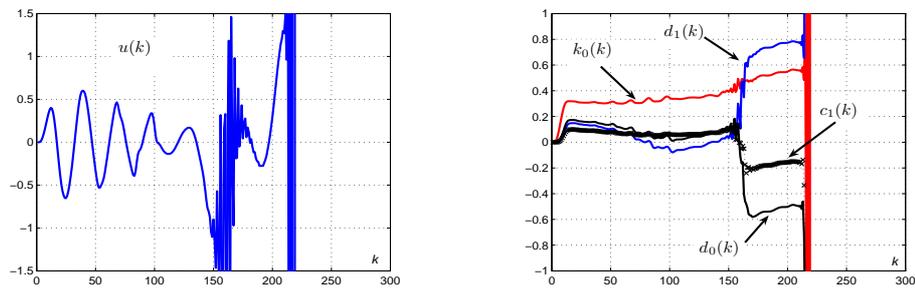


FIG. I.10 – Evolutions des sorties du système et du modèle de référence.



(a) Evolution du signal de commande.

(b) Evolutions des paramètres du régulateur.

FIG. I.11 – Système fortement variant dans le temps.

## I.4 Commande numérique adaptative avec modèle de référence à structure variable

### I.4.1 Introduction

La commande adaptative avec modèle de référence à structure variable utilisant les entrées et les sorties représente une alternative intéressante pour traiter les problèmes de la commande adaptative avec modèle de référence, vue que les systèmes ainsi obtenus sont insensibles aux variations paramétriques et aux dynamiques négligées [36, 35]. En effet, l'algorithme désigné par VS-MRAC développé, utilise une loi d'adaptation à structure variable au lieu de la loi d'adaptation intégrale [74]. Cet algorithme assure une convergence asymptotique de l'erreur de poursuite et présente des conditions de robustesse inhérentes aux structures variables [35, 80, 52].

En se basant sur la commande numérique MRAC, on présente dans la suite la synthèse de cette loi de commande DVS-MRAC, dans le cas d'un système de degré relatif  $n^* = 1$  et la fonction de transfert du modèle de référence est strictement positive réelle.

### I.4.2 Synthèse de la commande numérique DVS-MRAC

En utilisant les mêmes hypothèses déjà formulées dans le cas de la commande MRAC et les mêmes filtres définis par les équations (I.24) et (I.25) la loi de commande est donnée par l'équation suivante :

$$u(k) = \theta^T(k)\varphi(k) - \alpha\varphi^T(k)\Gamma\varphi(k)e_1(k) \quad (\text{I.61})$$

avec :

$e_1(k) = y(k) - y_r(k)$  est l'erreur de poursuite.

$\varphi^T(k) = \left[ r(k) \ V^{(1)T}(k) \ V^{(2)T}(k) \ y(k) \right]$  est le vecteur des observations.

$\theta(k)$  est le vecteur des paramètres du régulateur.

L'objectif est de déterminer une loi de commande  $u(k)$  assurant la condition suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |e_1(k)| = 0$$

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(e(k)) = V(k) = 2e^T(k)Pe(k) \quad (\text{I.62})$$

$P = P^T$  est une matrice définie positive.

Par référence à la relation (I.40), la représentation d'état dans l'espace de l'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} e(k+1) = A_{gc}e(k) + B_g v(k) \\ e_1(k) = H_g^T e(k) \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

Compte tenu de la relation (I.63), l'équation (I.62) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) = 2 [e^T(k+1)Pe(k+1) - e^T(k)Pe(k)] \\ \Delta V(k) &= 2 [(A_{gc}e(k) + B_g v(k))^T P (A_{gc}e(k) + B_g v(k)) - e^T(k)Pe(k)] \\ \Delta V(k) &= 2 [e^T(k) (A_{gc}^T P A_{gc} - P) e(k) + 2e^T(k) A_{gc}^T P B_g v(k) + B_g^T P B_g v^2(k)] \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de *Kalman-Yacubovich* :

**Lemme I.4.1.** *Si  $H_g^T (qI - A_{gc})^{-1} B_g$  est une fonction de transfert strictement réelle positive, il existe des matrices  $P = P^T > 0$  et  $L = L^T > 0$  et un vecteur  $\eta$  tel que :*

$$A_{gc}^T P A_{gc} - P = -\eta \eta^T - \varepsilon L \quad (\text{I.64})$$

$$A_{gc}^T P B_g = \frac{H_g}{2} + \nu q \quad \text{et} \quad -B_g^T P B_g = \nu^2 \quad (\text{I.65})$$

$\varepsilon, \nu$  deux scalaires positifs.

On obtient :

$$\Delta V(k) = -2e^T(k) [\eta \eta^T + \varepsilon L] e(k) + 2e^T(k) \nu(k) H_g + 4e^T(k) \nu(k) \nu \eta - 2\nu^2 \nu^2(k)$$

$$\Delta V(k) = -2 [e^T(k) \eta - \nu \nu(k)]^2 - 2\varepsilon e^T(k) L e(k) + 2e_1(k) \nu(k)$$

or on a :

$$\nu(k) = \tilde{\theta}^T(k) \varphi(k) - \alpha \varphi^T(k) \Gamma \varphi(k) e_1(k)$$

Pour que  $\Delta V(k) < 0$ , il faut que :

$$2e_1(k) \nu(k) < 0 \Rightarrow 2e_1(k) \tilde{\theta}^T(k) \varphi(k) - \alpha \varphi^T(k) \Gamma \varphi(k) e_1^2(k) < 0 \quad (\text{I.66})$$

soit :

$$2e_1(k) \tilde{\theta}^T(k) \varphi(k) < 0 \quad (\text{I.67})$$

et comme :

$$\tilde{\theta}(k) = \theta(k) - \theta^*$$

il en résulte que :

$$2 \sum_{i=1}^{2n} (\theta_i(k) - \theta_i^*) \varphi_i(k) e_1(k) < 0 \quad (\text{I.68})$$

Une solution pour assurer la stabilité ( $\Delta V(k) < 0$ ) peut être alors énoncée comme suit :

$$\theta_i(k) = -\theta_{il} \text{sign}(e_1(k) \varphi_i(k)) , \quad i = 1 \dots 2n \quad (\text{I.69})$$

où  $\theta_{il} > |\theta_i^*|$  pour  $i \in [1 \ 2n]$  sont connus a priori. Ces paramètres  $\theta_i^*$  sont déterminés de manière à réaliser une poursuite parfaite i.e  $y(k) = y_r(k)$ .

En remplaçant  $\theta_i(k)$  par son expression (I.69), l'équation (I.68) devient :

$$2 \sum_{i=1}^{2n} [-\theta_{il} |\varphi_i(k) e_1(k)| - \theta_i^* \varphi_i(k) e_1(k)] < 0 \quad (\text{I.70})$$

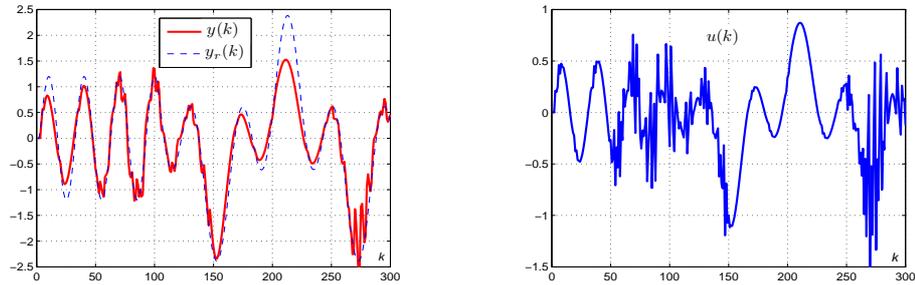
### I.4.3 Résultats de simulation

Comme on l'a mentionné précédemment, en présence des systèmes fortement variant dans le temps, les performances de la commande MRAC se dégradent considérablement.

Une solution, est d'appliquer la commande DVS-MRAC développée ci-dessus (cas où  $n^* = 1$  et  $W_m(q^{-1})$  est SPR). En effet, on considère le système discret fortement variant dans le temps donné par l'équation (I.58) tout en gardant les mêmes conditions de simulations que la cas précédent.

La figure I.12(a), donne les évolutions des sorties du modèle de référence et du système fortement non stationnaire considéré. Cette figure prouve que la commande DVS-MRAC développée a pu assurer un comportement stable du système vis-à-vis des fortes variations paramétriques.

La figure I.12(b), illustre les évolutions des signaux de commande relatives à ce cas étudié.



(a) Evolutions des sorties du système et du modèle de référence.

(b) Evolution des signal de commande.

FIG. I.12 – DVS-MRAC.

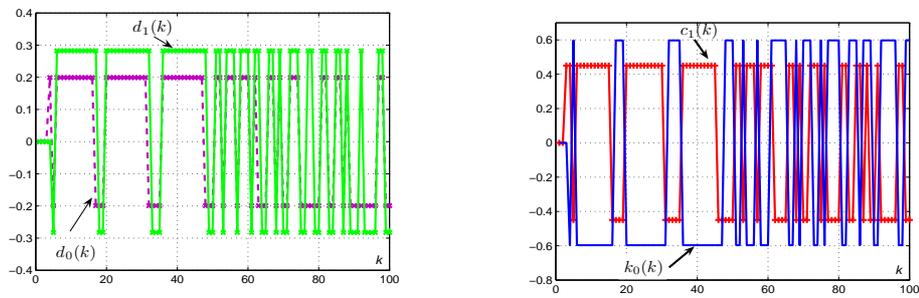


FIG. I.13 – Evolutions des paramètres du régulateur.

## I.5 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre une étude détaillée de la commande adaptative avec modèle de référence des systèmes échantillonnés [74, 75, 76]. La robustesse de cette loi de commande MRAC vis-à-vis des variations paramétriques est évaluée à travers un exemple de simulation. Les résultats de simulation, ainsi obtenus, ont prouvé l'insuffisance de cette loi de commande MRAC, en présence des systèmes fortement variants dans le temps.

Par ailleurs, afin d'améliorer les performances de cette dernière vis-à-vis des fortes variations paramétriques, une approche à structure variable discrète (VS-MRAC) est élaborée. Pour ce faire, une version discrète (DVS-MRAC), pour un système de degré relatif égal à un, est avancée. Les résultats de simulations ont prouvé que la loi de commande proposée est relativement robuste par rapport à la commande MRAC classique.

# Chapitre II

## Commande avec modèle de référence : une approche multimodèle

### II.1 Introduction

Une attention particulière a été réservée à l'approche multimodèle qui permet de tirer le meilleur profit du savoir faire incontestable qui a été développé sur la robustesse des systèmes de commande linéaire tout au long des dernières années et des premiers résultats sur la modélisation multimodèle qui offre la possibilité de pouvoir approximer raisonnablement la dynamique d'un système non linéaire par une famille de modèles linéaires ou non linéaires relativement simple [53, 58, 94]. Chaque modèle est dit local dans la mesure où il permet de décrire la dynamique du système dans une zone de fonctionnement relativement restreinte et cohérente avec son domaine de validité. Cette famille de modèles peut être obtenue à partir d'une approche de modélisation expérimentale des systèmes que l'on peut développer à partir des méthodes d'identification disponibles modulo une décomposition appropriée du domaine de fonctionnement du système.

L'approche multimodèle permet de réaliser un bon compromis entre les performances et la simplicité de mise en oeuvre du système de commande. La synthèse sous-jacente est réalisée en deux étapes. La première étape consiste à effectuer des synthèses de régulateurs à partir de chacun des modèles locaux et des performances requises en utilisant une méthode de commande adéquate pour ce faire. La seconde étape consiste à élaborer une loi de commande globale à partir d'une combinaison linéaire des lois de commande locales issue d'une procédure d'interpolation adéquate. Des études de stabilité des systèmes LPV ont permis de légitimer cette approche intuitive qui a été particulièrement utilisée pour la

synthèse des pilotes automatiques sous le vocale de commande à gains préprogrammés.

Une présentation concise des différentes composantes de l'approche de commande multimodèle est faite dans ce chapitre, en l'occurrence la représentation multimodèle et la synthèse multimodèle. Cette présentation est illustrée par l'élaboration d'une méthode de commande multimodèle avec modèle de référence sur la sortie du système et son application à la synthèse d'un asservissement de température pour un réacteur chimique disponible au sein de L'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès. Outre cette validation expérimentale, des résultats de simulation sont présentés pour mettre en évidence les performances de la commande multimodèle proposée par rapport à une commande adaptative avec modèle de référence à structure variable dans le cas d'un système linéaire avec des variations paramétriques importantes dans le temps.

## II.2 Représentation multimodèle

Comme il a été mentionné lors de l'introduction, le concept de modélisation multimodèle consiste tout simplement à représenter la dynamique d'un système non linéaire par une famille de modèles relativement simples caractérisant convenablement le fonctionnement du système dans les différentes zones de son fonctionnement. Cette famille de modèles constitue la base des modèles locaux du système. La sortie du modèle global, dite sortie multimodèle, est obtenue par une combinaison des sorties des modèles locaux via une procédure d'interpolation appropriée. La contribution d'un modèle local dans la description du comportement global du système est mesurée par un degré de pertinence ou de validité. Ce dernier est estimé à chaque instant par un processus de décision adéquat. La structure de commande multimodèle peut être représentée par la figure II.1 [53].

La précision d'une représentation multimodèle dépend essentiellement de la précision de ses modèles locaux et de la procédure d'interpolation considérée. Le choix d'une procédure d'interpolation dépend naturellement des domaines de validité des modèles locaux. On distingue deux cas selon que les domaines de validité soient disjoints ou non. Dans le cas des domaines de validité disjoints, un seul modèle de la base est valable à chaque instant, soit :

$$y_m(k) = y_i(k) \text{ pour } i \in [1, N]$$

où  $y_m(k)$  et  $y_i(k)$  désignent respectivement la sortie multimodèle et la sortie du modèle  $\mathcal{M}_i$  et  $N$  n'est autre que la dimension de la base de modèles. Une séquence de commutation est requise pour ce faire et est déterminée principalement à partir du comportement entrée-sortie du système [44]. Dans le cas d'un recouvrement

des domaines de validité, plusieurs modèles de la base sont valables à chaque instant. La sortie multimodèle résulte de la fusion des sorties des modèles locaux comme suit :

$$y_m(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k)y_i(k) \text{ pour } i \in [1, N]$$

où la séquence  $\{v_i(k)\}_{i \in [1, N]}$  désigne les degrés de validité vérifiant la contrainte :

$$\sum_{i=1}^N v_i(k) = 1$$

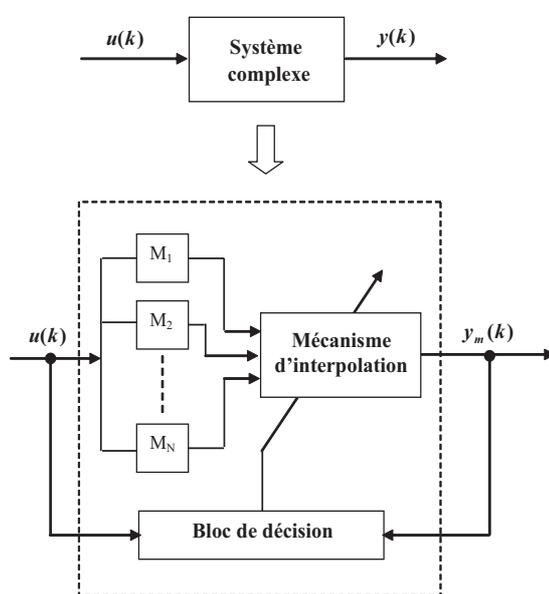


FIG. II.1 – Représentation multimodèle d'un système complexe.

L'élaboration de la base des modèles du système est effectuée en plusieurs étapes comme suit [30, 82] :

- Décomposition du domaine de fonctionnement du système en zones de fonctionnement assurant un recouvrement du domaine initial. Cette tâche inclut une définition des régimes de fonctionnement ainsi que l'identification des variables caractéristiques pouvant être employées pour les caractériser. Ceci permet de déterminer la forme, la position et le nombre de fonctions de validité.
- Définition des structures de modèles locaux à partir des connaissances disponibles sur le système ou que l'on peut déterminer par des expériences

relativement simples.

- Identification des modèles de la famille à partir d'un protocole expérimental cohérent avec leurs domaines de validité et des méthodes d'identification disponibles.
- Fusion des modèles locaux en un modèle global et validation du multimodèle obtenu.

La démarche classique de modélisation consiste en une linéarisation du modèle du système autour de plusieurs points de fonctionnement dans le cas d'un système non linéaire ou une détermination des intervalles de temps dans lesquels les paramètres du modèle du système sont relativement constants dans le cas d'un système variant dans le temps.

D'autres techniques de modélisation plus élaborées ont été développées. Elles sont particulièrement basées sur une partition adéquate du domaine de fonctionnement du système en exploitant judicieusement les mesures d'entrées/sorties. Ces méthodes sont motivées par des considérations de réalisation séquentielle et automatique des étapes liées à la modélisation. On distingue notamment les techniques de classification floue dont l'intérêt réside dans le fait qu'elles n'exigent aucune information a priori sur le domaine de fonctionnement du système et que le nombre de modèles peut être déterminé automatiquement. Plusieurs algorithmes de classification ont été proposés, en l'occurrence l'algorithme de *C-means*, l'algorithme de *Gustafson-Kessel* [9] et l'algorithme de *subtractive clustering* ou de *Chiu* [9, 19] dont le principe et les étapes seront détaillés au paragraphe II.3.

Dans ce qui suit on présente la méthode d'identification multimodèle développée dans [53, 54]. Cette méthode exploite l'algorithme de classification floue de *subtractive clustering* ou de *Chiu* pour la partition du domaine de fonctionnement et la méthode de test du rapport des déterminants instrumentaux *RDI* [6] pour l'identification structurelle des modèles locaux.

## II.3 Méthode de classification floue

La procédure de classification de données numériques est réalisée par la méthode de *Chiu* [19, 91]. Cette méthode consiste à sélectionner, parmi un ensemble de données, les points représentatifs des classes qui seront considérées comme centres de classes moyennant un calcul de potentiel. Une fois les centres de classes sont sélectionnés, on procède à la construction des classes et ce par la recherche des données appartenant à chaque classe moyennant un calcul de distance [91]. On présente, dans ce qui suit, les principales étapes relatives à la stratégie de classification.

### II.3.1 Sélection des centres de classes

Étant donné un ensemble de données d'identification  $\{y_i(k) \text{ pour } i \in [1, N_H]\}$  acquises sur le système, la procédure de classification basée sur la méthode de *Chiu*, associe à chaque mesure  $y_i$  un potentiel  $P_i$  donnée par l'expression suivante :

$$P_i = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{N_H} \exp\left(\frac{-4 \|y_i - y_h\|^2}{r_a^2}\right) \quad (\text{II.1})$$

où  $r_a$  est un scalaire positif qui gère la décroissance du potentiel et  $y_h$ . On notera que le potentiel décroît exponentiellement lorsque  $y_h$  s'éloigne de  $y_i$ . Le premier centre de classe sélectionné, noté  $y_1^*$ , est la donnée dont le potentiel  $P_1^*$  exprimé par la relation (II.1) est maximal. Pour éviter de sélectionner des données dans le voisinage du premier centre  $y_1^*$  comme autres centres de classes, la procédure de classification modifie la valeur du potentiel de chaque donnée comme suit :

$$P_i \leftarrow P_i - P_1^* \exp\left(\frac{-4 \|y_i - y_1^*\|^2}{r_b^2}\right) \quad (\text{II.2})$$

Le paramètre  $r_b > 0$  doit être choisi strictement supérieur à  $r_a$ . Le deuxième centre de classe est sélectionné comme étant la donnée ayant le maximum des potentiels modifiés donnés par la relation (II.2). Soient  $y_2^*$  le deuxième centre et  $P_2^*$  le potentiel modifié associé. De la même façon on sélectionne le  $c^{\text{ème}}$  centre  $y_c^*$  ayant comme potentiel  $P_c^*$ , et on modifie les potentiels comme suit :

$$P_i \leftarrow P_i - P_c^* \exp\left(\frac{-4 \|y_i - y_c^*\|^2}{r_b^2}\right) \quad (\text{II.3})$$

*Chiu* a introduit deux paramètres positifs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  avec  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  pour conditionner le choix des centres. En effet, l'arrêt de la procédure de sélection des différents centres de classes obéit, à chaque étape, aux inégalités suivantes :

- Si  $P_c^* > \varepsilon_1 P_1^*$ , alors la sélection est autorisée.
- Si  $P_c^* < \varepsilon_2 P_1^*$ , alors la sélection est achevée.
- Si  $\varepsilon_2 P_1^* \leq P_c^* \leq \varepsilon_1 P_1^*$  et si

$$\frac{\text{Min}(|y_c^* - y_1^*|, |y_c^* - y_2^*|, \dots, |y_c^* - y_{(c-1)}^*|)}{r_a} < 1 - \frac{P_c^*}{P_1^*} \quad (\text{II.4})$$

où  $y_c^*$  est le centre courant et  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_{(c-1)}^*$  sont les centres déjà sélectionnés, alors le centre à retenir est celui qui correspond à la valeur maximale des potentiels après rejection de la valeur courante  $P_c^*$ .

Une fois les centres  $y_c^*$  des classes sont sélectionnés, on procède à la recherche des éléments  $y_i$  appartenant à chaque classe, et ce par un simple calcul des distances entre  $y_i$  et  $y_c^*$ , soit :

$$d_{ic} = |y_i - y_c^*|$$

$y_i$  appartient à la classe dont le centre correspond au minimum de la distance  $d_{ic} \min_c(d_{ic})$ . En pratique, on considère plutôt des distances normalisées données par :

$$d_{ic_n} = \frac{d_{ic}}{|y_{\max} - y_{\min}|}$$

Cette procédure permet de regrouper les données de mesures en plusieurs classes dont chacune est associée à un modèles de la base de la forme  $ARX$ . Une identification structurelle suivie d'une identification paramétrique conduit ainsi à l'expression du modèle de la base.

### II.3.2 Identification structurelle et paramétrique

Pour chaque ensemble de données relatif à une classe, une identification structurelle et paramétrique doit être réalisée. L'identification structurelle consiste à estimer l'ordre du modèle à partir de la méthode de test du rapport des déterminants instrumentaux  $RDI$  ([6]). Considérons un ensemble de données relatif à une classe  $c$  ( $N_c$  données), la procédure d'estimation de l'ordre  $n_c$  construit, pour différentes valeurs de l'ordre  $n$  ( $n \in [1, n_{\max}]$ ), les matrices d'informations  $Q_l$  et  $Q_{l+1}$  ( voir relation (II.5)) et évalue le rapport des déterminants instrumentaux correspondant  $RDI_n$  donné par la relation (II.6). On retient comme ordre  $n_c$  de la classe  $c$  la valeur de  $n$  pour laquelle le rapport  $RDI(l)$  augmente rapidement pour la première fois. En effet, la matrice  $Q_{l+1}$  devient singulière quand  $n$  est égal à l'ordre exact.

$$Q_l = \frac{1}{N_c} \sum_{k_t=1}^{N_c} \begin{bmatrix} u_c(k_t) \\ u_c(k_t+1) \\ \vdots \\ u_c(k_t-l+1) \\ u_c(k_t+l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c(k_t+1) \\ u_c(k_t+1) \\ \vdots \\ y_c(k_t+l) \\ u_c(k_t+l) \end{bmatrix}^T \quad (\text{II.5})$$

$$RDI(l) = \left| \frac{\det(Q_l)}{\det(Q_{l+1})} \right| \quad (\text{II.6})$$

Quant à la détermination des paramètres, elle peut être réalisée par une méthode d'identification appropriée, notamment une variante des méthodes des moindres carrés [46], [50].

## II.4 Calcul des fonctions de validité

L'approche multimodèle vise à réduire la complexité du système en décomposant son espace de fonctionnement en un nombre fini de zones de fonctionnement. Le comportement du système étant de moindre complexité dans chaque zone, un modèle local de structure simple peut alors être considéré. Ainsi, en fonction de la zone où le système évolue, la sortie de chaque modèle local est plus ou moins mise à contribution en vue d'approcher le comportement global du système. La contribution de chaque modèle local est quantifiée par une fonction de pondération, appelée aussi degré de validité ou degré d'appartenance ou d'activation, associée à chaque zone de fonctionnement. Le degré de validité d'un modèle local  $\mathcal{M}_i$  est une valeur comprise entre 0 et 1. La valeur 1 indique que le modèle  $\mathcal{M}_i$  représente parfaitement le système dans la zone correspondante, alors que la valeur 0 implique que le modèle  $\mathcal{M}_i$  est complètement inadéquat. Dans le cas où le degré de validité est compris entre 0 et 1, le modèle  $\mathcal{M}_i$  correspondant représente partiellement le comportement du système. Les degrés de validité peuvent être déterminés de différentes manières qui dépendent de la méthode utilisée pour la décomposition de l'espace de fonctionnement [53, 94, 98].

La détermination des validités peut être effectuée par une méthode des résidus en deux étapes qui sont présentées ci dessous :

- La détermination des résidus  $r_i(k)$  qui consiste à calculer une distance géométrique, en l'occurrence la distance entre l'état du système et le domaine

de validité de chacun des modèles donnée par :

$$r_i(k) = \|x_s(k) - x_i(k)\|$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme, e.g. la norme euclidienne, et  $x_s(k)$  et  $x_i(k)$  sont le vecteur d'état du système et le vecteur d'état du modèle  $\mathcal{M}_i$  respectivement donnés par :

$$x_s(k) = \begin{bmatrix} x_{s_1}(k) \\ \vdots \\ x_{s_{n_s}}(k) \end{bmatrix} \text{ et } x_i(k) = \begin{bmatrix} x_{i_1}(k) \\ \vdots \\ x_{i_{n_s}}(k) \end{bmatrix}$$

Dans la pratique, c'est la distance entre la sortie du système et les sorties des modèles locaux qui est la plus utilisée, soit :

$$r_i(k) = \|y(k) - y_i(k)\| \text{ pour } i \in [1, N] \quad (\text{II.7})$$

Ces résidus sont ensuite normalisés comme suit [22] :

$$r_{i_n}(k) = \frac{r_i(k)}{\sum_{j=1}^N r_j(k)}$$

- Les validités peuvent être déduites à partir de la relation suivante :

$$v_i(k) = 1 - r_{i_n}(k) \quad (\text{II.8})$$

et normalisées comme suit [44, 61] :

$$v_{i_n}(k) = \frac{v_i(k)}{\sum_{j=1}^N v_j(k)} = \frac{v_i(k)}{\sum_{j=1}^N 1 - r_{j_n}(k)} = \frac{v_i(k)}{N - 1} \quad (\text{II.9})$$

Une fois déterminées, les validités  $v_i(k)$  peuvent subir des traitements supplémentaires pour réduire leur sensibilité aux perturbations. Une opération de renforcement usuelle des validités est donnée par :

$$v_i^{renf}(k) = v_i(k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (1 - v_j(k)) \quad (\text{II.10})$$

où  $v_i^{renf}(k)$  désigne la validité renforcée. Cette expression montre que ce type de validité contient un terme de renforcement. Si  $\mathcal{M}_i$  représente convenablement le système à l'instant considéré ( $r_i(k) \cong 0$ ), alors il faut limiter les validités des autres modèles,  $v_i(k) \cong 0$  avec  $i \neq j$ . Ainsi cette expression est valable dans le cas

où il existe un seul modèle qui représente convenablement le système à l'instant considéré.

L'opération de renforcement qui a été utilisée lors des premiers travaux portant exclusivement sur des calculs de validités par l'approche géométrique est donnée par :

$$v_i^{renf}(k) = v_i(k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left( 1 - e^{-\left(\frac{r_{jn}}{\sigma}\right)^2} \right) \quad (\text{II.11})$$

où  $\sigma$  est un scalaire positif. Les validités renforcées normalisées correspondantes sont données par la relation suivante :

$$v_{i_n}^{renf}(k) = \frac{v_i^{renf}(k)}{\sum_{j=1}^N v_j^{renf}(k)} \quad (\text{II.12})$$

On notera que la modélisation n'est qu'une étape préliminaire pour étudier localement certaines propriétés du système ou pour déterminer une famille de régulateurs réalisant localement les performances requises.

## II.5 Synthèse de la commande multimodèle

Quelque soit la méthode de synthèse adoptée, le régulateur local résultant peut être mis sous la forme usuelle suivante :

$$S_i(q^{-1})u_i(k) + R_i(q^{-1})y(k) = T_i(q^{-1})y_r(k+d) \quad (\text{II.13})$$

où les polynômes  $S_i(q^{-1})$ ,  $R_i(q^{-1})$  et  $T_i(q^{-1})$  sont déterminés à partir du modèle de commande local  $\mathcal{M}_i$ . Le régulateur global est obtenu par une commutation ou une fusion des régulateurs locaux [22, 30, 42, 79].

La commutation entre les régulateurs locaux est effectuée selon une séquence déterminée en résolvant un problème d'optimisation des indices de performance donnés par :

$$J_i(k) = \alpha e_i^2(k) + \beta \sum_{j=1}^k e^{-\lambda(k-j)} e_i^2(k) \text{ pour } i \in [1, N] \quad (\text{II.14})$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  sont des scalaires positifs dont la spécification est faite en fonction de la vitesse de commutation entre les régulateurs et  $e_i(k)$  désigne l'erreur entre la sortie du système et celle du modèle local  $\mathcal{M}_i$ , soit :

$$e_i(k) = y(k) - y_i(k)$$

Le régulateur sélectionné est celui qui correspond au modèle local présentant l'indice de performance le plus faible. La commande  $u_i(k)$  effectivement appliquée au système coïncide à chaque instant avec celle du modèle ayant une validité égale à l'unité. On notera que la commutation des régulateurs peut conduire à des performances dynamiques non souhaitables, e.g. des pics de commande relativement importants. Elle offre néanmoins la possibilité d'associer des régulateurs de différents types, on parle dans ce cas de multicommande ou de multirégulateur. La figure II.2 montre une structure générale d'une commande multimodèle basée sur une commutation de régulateurs.

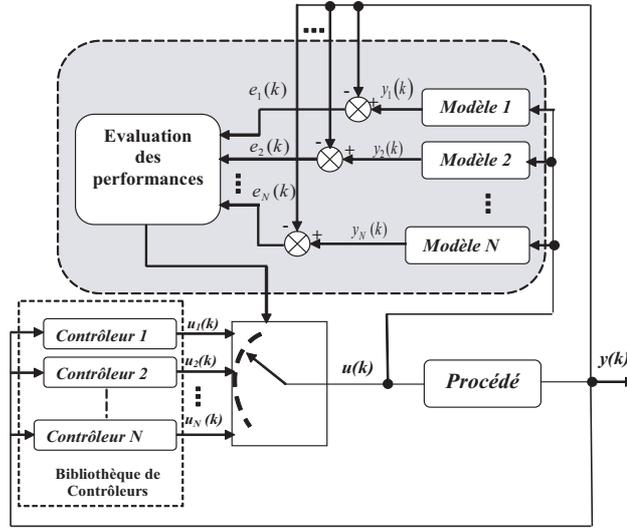


FIG. II.2 – Structure générale d'une commande multimodèle à commutation.

Dans le cas où le système peut être convenablement représenté par une somme pondérée de modèles locaux, on peut utiliser une technique de fusion des commandes élémentaires pour déterminer la commande globale, soit :

$$u_g(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k)u_i(k)$$

avec les  $v_i(k)$  sont les degrés de validités associés à chaque modèle local  $\mathcal{M}_i$  et  $u_i(k)$  est la commande qui lui est associée, elle est déterminée à partir du régulateur (II.13). Le régulateur ainsi obtenu est dit à modèle global implicite. On peut considérer différents types de lois de commande dans le contexte d'une fusion de régulateurs [22, 44, 61].

Par ailleurs, le régulateur global peut être obtenu à partir d'une fusion au niveau des paramètres des régulateurs locaux comme suit :

$$S_g(q^{-1})u(k) + R_g(q^{-1})y(k) = T_g(q^{-1})y_r(k+d) \quad (\text{II.15})$$

avec

$$S_g(q^{-1}) = \sum_{i=1}^N v_i(k) S_i(q^{-1}) \quad (\text{II.16})$$

$$R_g(q^{-1}) = \sum_{i=1}^N v_i(k) R_i(q^{-1}) \quad (\text{II.17})$$

$$T_g(q^{-1}) = \sum_{i=1}^N v_i(k) T_i(q^{-1}) \quad (\text{II.18})$$

Ce type de fusion requiert une même structure de loi de commande, elle permet de réaliser un passage relativement doux et progressif d'un régulateur à l'autre.

## II.6 Commande multimodèle avec modèle de référence

Dans le cas des systèmes dont la dynamique peut être raisonnablement décrite par une combinaison de modèles linéaires dont les zéros sont situés dans le domaine de stabilité et de performances requises, on peut élaborer une commande multimodèle avec modèle de référence (MM-MRC) qui est particulièrement appropriée au problème de poursuite parfaite [25]. La structure de la commande adoptée est donnée par la figure II.3 et se distingue par le fait que la commande effectivement appliquée au système résulte d'une fusion au niveau des paramètres des régulateurs élémentaires. On notera que ces régulateurs sont conçus en adoptant la méthode de synthèse de commande avec modèle de référence présentée au chapitre I. La loi de commande multimodèle peut se mettre alors sous la forme :

$$u_g(k) = k_{0g}(k)r(k) + C_g^T(k)V^{(1)}(k) + \bar{D}_g^T(k)V^{(2)}(k) + d_{0g}(k)y(k) \quad (\text{II.19})$$

avec :

$$\begin{cases} k_{0g}(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k)k_{0i}(k) \\ C_g^T(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k)C_i^T(k) \\ \bar{D}_g^T(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k)\bar{D}_i^T(k) \\ d_{0g}(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k)d_{0i}(k) \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

où les  $v_i(k)$  pour  $i \in [1, N]$  ne sont autres que les degrés de validités de la famille des modèles locaux considérée et qui peuvent être déterminés par l'approche des résidus conformément aux relations (II.7), (II.11) et (II.12).

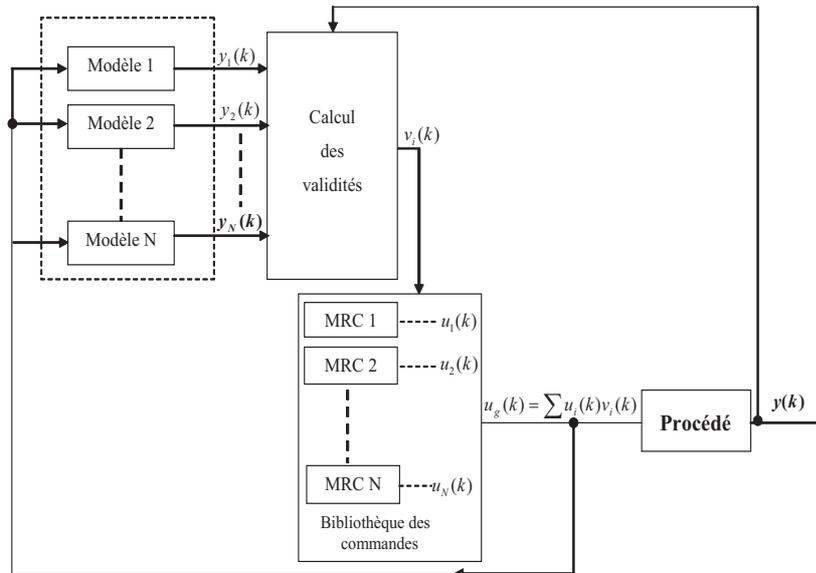


FIG. II.3 – Schéma fonctionnel d'une commande multimodèle avec modèle de référence.

Dans ce qui suit, on présentera deux applications pour illustrer les performances de l'approche de commande multimodèle proposée. La première application concerne un système linéaire variant dans le temps, alors que la seconde application concerne un réacteur chimique disponible à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès.

## II.7 Commande d'un système linéaire fortement variant dans le temps

Dans cette application, on cherche à montrer que la commande MM-MRC est mieux adaptée pour les systèmes linéaires fortement variants dans le temps que la commande avec modèle de référence à structure variable (VS-MRAC) proposée au chapitre I pour affiner les performances de la commande adaptative avec modèle de référence (MRAC) comme l'indique la figure I.12. Pour ce faire, on considérera le système linéaire fortement variant dans le temps présenté au chapitre précédent pour pouvoir comparer les performances du système de commande MM-MRC par rapport à celles réalisées par la commande VS-MRAC.

La pierre d'achoppement de la synthèse consiste en l'élaboration d'une famille de modèles linéaires pour décrire le comportement dynamique du système avec l'approche de modélisation expérimentale décrite ci-dessus, à partir d'un protocole expérimental adéquat. La représentation multimodèle qui a donné les meilleurs résultats de validation est donnée par la base des quatre modèles suivants :

$$\mathcal{M}_1(z^{-1}) = 0.9987z^{-1} \frac{1 + 0.6183z^{-1}}{1 - 0.6543z^{-1} + 0.3807z^{-2}} \quad (\text{II.21})$$

$$\mathcal{M}_2(z^{-1}) = 0.8888z^{-1} \frac{1 + 0.7720z^{-1}}{1 - 0.8275z^{-1} + 0.3125z^{-2}} \quad (\text{II.22})$$

$$\mathcal{M}_3(z^{-1}) = 1.2736z^{-1} \frac{1 + 0.4484z^{-1}}{1 - 0.5688z^{-1} + 0.6219z^{-2}} \quad (\text{II.23})$$

$$\mathcal{M}_4(z^{-1}) = 0.5846z^{-1} \frac{1 + 0.3795z^{-1}}{1 - 1.2168z^{-1} + 0.4026z^{-2}} \quad (\text{II.24})$$

On notera que la validation a été particulièrement réalisée avec un signal d'excitation donnée par :

$$u(k) = 0.2 \sin\left(\frac{\pi k}{35}\right) + 0.2 \sin\left(\frac{\pi k}{10}\right) \quad (\text{II.25})$$

La figure II.4 montre respectivement les sorties du système et du multimodèle ainsi que les évolutions des degrés de validité des modèles. On notera que la représentation multimodèle élaborée est relativement bien précise.

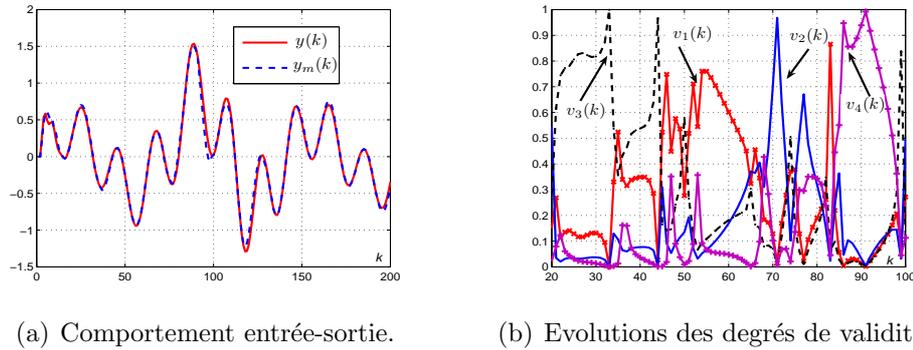


FIG. II.4 – Validation de la modélisation.

Les figures II.5 et II.6 montrent respectivement les performances d'entrée-sortie du système de commande MM-MRC et les évolutions des degrés de validités correspondantes. Il apparaît clairement que les performances de poursuite réalisées sont meilleures par rapport à celles réalisées par le système de commande DVS-MRAC données par la figure I.12. On notera que les évolutions des degrés de validité permettent d'apprécier la contribution de chaque loi de commande élémentaire à la commande globale du système linéaire variant dans le temps.

**Remarque 1.** *Les synthèses des systèmes de commande multimodèle et de commande adaptative avec modèle de référence à structure variable ne sont pas basées sur les mêmes hypothèses de modélisation. Les bonnes performances de la commande multimodèle sont une conséquence naturelle d'une bonne représentation multimodèle de la dynamique du système.*

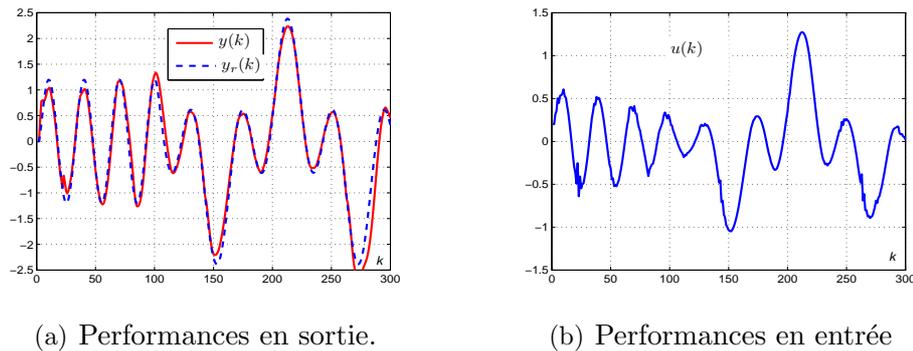


FIG. II.5 – Commande multimodèle avec modèle de référence.

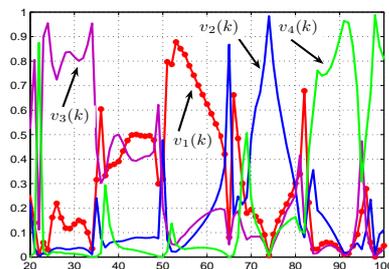


FIG. II.6 – Evolutions des validités des modèles.

## II.8 Commande en temps réel d'un réacteur chimique

Les réacteurs chimiques utilisés dans la fabrication des produits cosmétiques et pharmaceutiques sont de plus en plus complexes. Les réactions qui y sont fortement exothermiques pour induire des effets importants sur la productivité, la qualité et la sécurité. L'asservissement de la température du milieu réactionnel constitue une tâche indispensable pour une bonne conduite de ces réacteurs comme en témoignent les contributions consacrées à ce problème ( voir par exemple [7], [62], [57], [68], [70], [73], [83], [93]).

Notons toutefois que le problème d'asservissement de température d'un réacteur chimique est encore ouvert dans la mesure où l'on ne dispose pas encore d'une méthodologie rigoureuse pour le traiter convenablement. La pierre d'achoppement de ce problème relève principalement de la complexité du processus physico-chimique qui se déroule dans ces réacteurs. Les modèles de connaissance disponibles ne peuvent se mettre sous les formes sympathiques considérées dans la théorie de la commande. Par ailleurs, on ne peut pas décrire la dynamique de ces réacteurs par un modèle linéaire invariant car ils opèrent généralement en modes multiples.

On se propose dans ce qui suit d'étudier la faisabilité d'une commande multimodèle avec modèle de référence pour la synthèse d'un asservissement de température pour un réacteur chimique d'estérification d'huile d'olives [26]. Ce dernier est utilisé comme un procédé pilote à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès.

### II.8.1 Description du procédé expérimental

La figure II.7 montre le dispositif expérimental du procédé. On distingue un réacteur chimique à double enveloppe muni d'un système de chauffage et de refroidissement.

dissement et trois capteurs de température. Ce réacteur est principalement utilisé en mode batch pour réaliser une réaction exothermique d'estérification d'huile d'olives végétales par un alcool, i.e.  $Acide + Alcool \rightleftharpoons Ester + Eau$ . Le chauffage est effectué par un fluide caloporteur qui circule à débit constant dans la double enveloppe. La puissance thermique requise par la réaction chimique considérée est fournie par des résistances. Le refroidissement du fluide caloporteur est assuré par un échangeur à plaques en acier embouties dans lequel circule de l'eau froide du robinet à débit variable. Les capteurs de température sont utilisés pour mesurer les températures du milieu réactionnel et celles du fluide caloporteur à l'entrée et à la sortie de la double enveloppe. Le procédé est relié à un ordinateur par une carte entrées-sorties *RTI – 820*.

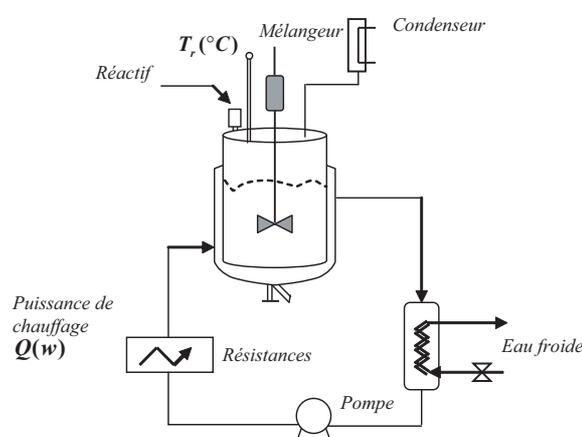


FIG. II.7 – Dispositif expérimental.

La réaction d'estérification considérée est réalisée en mode batch. On distingue trois phases de fonctionnement pour la production de l'ester à haute valeur ajoutée.

- Une phase de chauffage. Le réactif se trouvant initialement à une température ambiante est chauffé à une température correspondante à la température de la réaction. La durée du chauffage est spécifiée par l'opérateur.
- Une phase de réaction, ou de production de l'ester, durant laquelle la température du milieu réactionnel est maintenue constante. Le rendement de la réaction considéré est optimale pour une température de réaction de l'ordre de  $105^{\circ}\text{C}$ .
- Une phase de refroidissement jusqu'à la température ambiante pour récupérer l'ester. La durée de refroidissement doit être relativement rapide pour éviter la formation d'éventuels sous produits.

## II.8.2 Identification du réacteur

L'identification du réacteur a été effectuée en deux étapes. La première étape consiste en la détermination de la caractéristique statique du réacteur pour pouvoir définir convenablement la décomposition de son domaine de fonctionnement en zones de fonctionnement où la dynamique du réacteur peut être raisonnablement décrite par un modèle linéaire. La seconde étape concerne l'identification des modèles linéaires susceptible de décrire la dynamique du réacteur sur tout le domaine de son fonctionnement.

La figure II.8 montre la caractéristique statique du réacteur qui a été obtenue à partir d'une étude expérimentale appropriée pour ce faire. Outre le caractère non linéaire incontestable du réacteur, il apparaît que son comportement dynamique peut être décrit par un modèle linéaire pour chacune des phases de son fonctionnement, en l'occurrence les phases de chauffage, de réaction et de refroidissement.

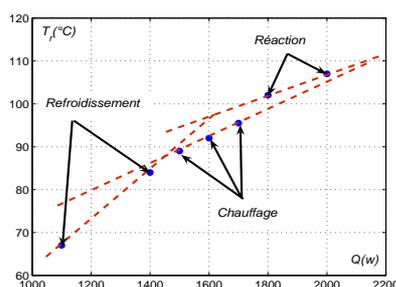


FIG. II.8 – Caractéristique statique du réacteur.

L'identification des trois modèles de représentation du réacteur ont été identifiés à partir de son comportement d'entrée-sortie. La séquence d'entrée a été judicieusement choisie, comme l'indique la figure II.9, pour bien exhiber les dynamiques du réacteur dans toutes ses phases de fonctionnement. Elle consiste en trois séquences de puissance de chauffe situées dans les zones de fonctionnement respectives du réacteur. L'identification des trois modèles est réalisée avec l'approche de modélisation expérimentale précédemment présentée, en l'occurrence une identification structurale basée sur le test du rapport des déterminants instrumentaux suivi d'une identification paramétrique aux moindres carrés. Les modèles obtenus sont donnés sous la forme de fonctions de transfert ci dessous.

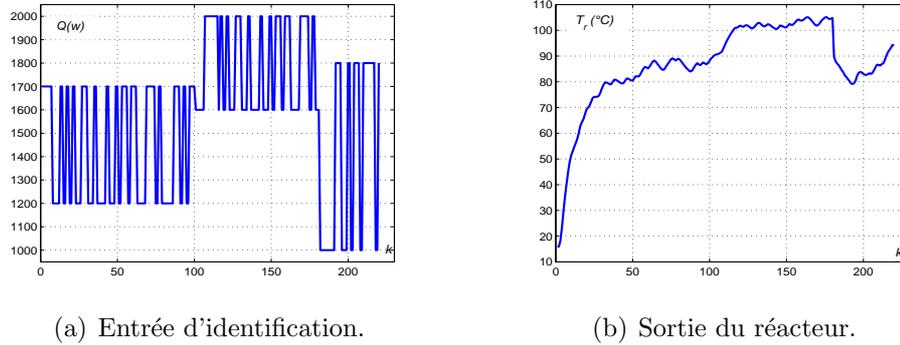


FIG. II.9 – Données d'identification.

- Modèle de chauffage

$$\mathcal{G}_h(z^{-1}) = z^{-2} \frac{B_h(z^{-1})}{A_h(z^{-1})}$$

avec :

$$B_h(z^{-1}) = 0.0026 - 0.0001z^{-1} \text{ et } A_h(z^{-1}) = 1 - 1.3939z^{-1} + 0.4313z^{-2}$$

- Modèle de réaction

$$\mathcal{G}_r(z^{-1}) = z^{-2} \frac{B_r(z^{-1})}{A_r(z^{-1})}$$

avec :

$$B_r(z^{-1}) = 0.0019 - 0.0004z^{-1} \text{ et } A_r(z^{-1}) = 1 - 1.2820z^{-1} + 0.3081z^{-2}$$

- Modèle de refroidissement

$$\mathcal{G}_c(z^{-1}) = z^{-2} \frac{B_c(z^{-1})}{A_c(z^{-1})}$$

avec :

$$B_c(z^{-1}) = 0.001 + 0.0004z^{-1} \text{ et } A_c(z^{-1}) = 1 - 1.3293z^{-1} + 0.3542z^{-2}$$

Par ailleurs, l'ensemble des données a été exploité pour identifier un seul modèle global susceptible de représenter la dynamique du réacteur sur son domaine de fonctionnement. Le modèle global obtenu est donné par la fonction de transfert :

$$\mathcal{G}_{MG}(z^{-1}) = z^{-2} \frac{B_{MG}(z^{-1})}{A_{MG}(z^{-1})}$$

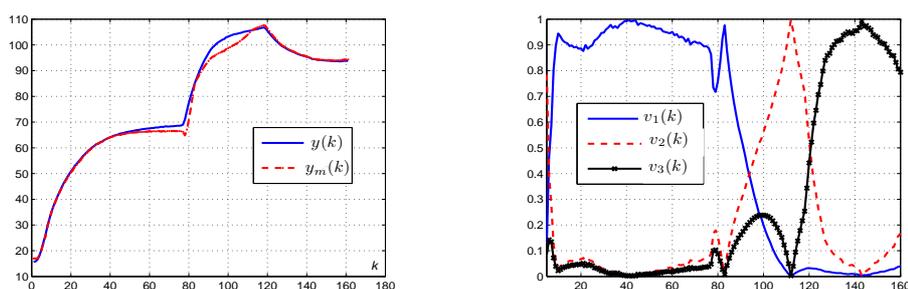
avec :

$$B_{MG}(z^{-1}) = 0.0019 - 0.0004z^{-1} \text{ et } A_{MG}(z^{-1}) = 1 - 1.1862z^{-1} + 0.2308z^{-2}$$

La sortie multimodèle effective est obtenue par la fusion des trois sorties des modèles locaux comme suit :

$$y_m(k) = v_1(k) y_1(k) + v_2(k) y_2(k) + v_3(k) y_3(k) \quad (\text{II.26})$$

où  $v_1(k)$ ,  $v_2(k)$  et  $v_3(k)$  sont les degrés de validité obtenus par la méthode de résidus présentée précédemment. Ce multimodèle peut être validée par rapport à sa capacité de reproduire le comportement entrée-sortie du réacteur et ses performances par rapport au comportement d'entrée-sortie du modèle global. L'approche multimodèle permet de reproduire au mieux le comportement d'entrée-sortie du réacteur comme le montrent les figures II.10 et II.12. En effet, elle conduit à une erreur relativement réduite par rapport à celle qui résulte de l'approche monomodèle. On notera plus particulièrement que les degrés de validité mettent en évidence la complémentarité des modèles dans la description de la dynamique du réacteur.



(a) Sorties du réacteur et de son multimodèle.

(b) Degrés de validité.

FIG. II.10 – Validation du multimodèle.

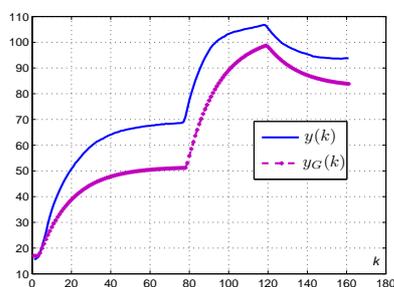


FIG. II.11 – Sorties du réacteur et du modèle global.

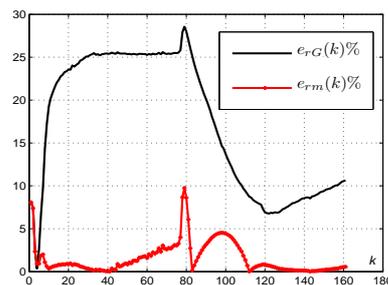


FIG. II.12 – Erreurs de modélisation relatives.

## II.9 Commande multimodèle du réacteur

La méthode de commande multimodèle avec modèle de référence a été utilisée pour la synthèse d'un asservissement de la température de réaction à partir de la représentation multimodèle élaborée. Le profil de la température de référence est choisi d'une manière cohérente aux différentes phases de fonctionnement du réacteur : le milieu réactionnel est d'abord chauffé de la température ambiante jusqu'à la température de la réaction. Cette température est ensuite maintenue constante jusqu'à la fin de la réaction. Et enfin le réacteur est refroidi jusqu'à la température ambiante. Un tel profil est préalablement filtré par un système de second ordre de gain statique unitaire donné par la fonction de transfert :

$$W_m(z^{-1}) = 0.18z^{-2} \frac{1 - 0.00083z^{-1}}{1 - 1.12z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

La tâche de régulation est particulièrement importante durant la phase de réaction où la température du réacteur doit être ramenée à l'isotherme désirée relativement rapidement sous les contraintes de sécurité requises. Pour mieux apprécier les performances en régulation, une perturbation a été volontairement introduite sur le processus de réaction, elle consiste en une baisse relativement brusque de la température du réacteur aux instants d'échantillonnage [55,65]. Une telle perturbation est provoquée par une augmentation du débit de l'eau provenant du robinet.

Les figures II.13 et II.14 montrent respectivement les performances d'entrée-sortie du système de commande multimodèle avec modèle de référence du réacteur. Ces performances sont à comparer avec celles réalisées par un système de commande avec modèle de référence conçu à partir du modèle global du comportement du réacteur et qui sont données par les figures II.15 et II.16. Il apparaît clairement que la commande multimodèle permet de réaliser un affinement des

performances comme l'indiquent les évolutions des erreurs de poursuite. Cet affinement est une conséquence naturelle du concept de multimodèle comme le montrent les évolutions des degrés de validité des modèles.

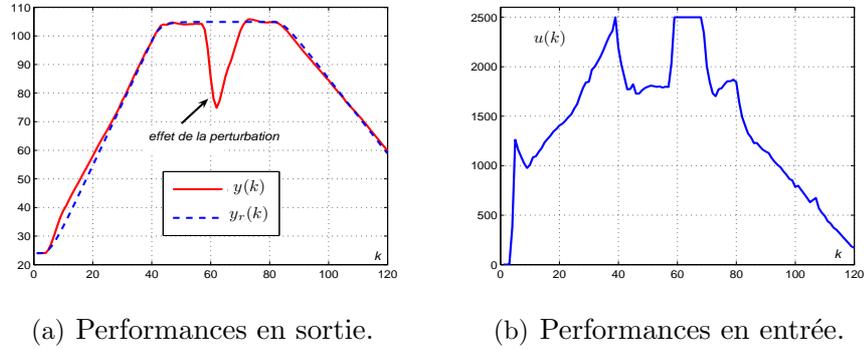


FIG. II.13 – Performances entrée-sortie du système de commande multimodèle.

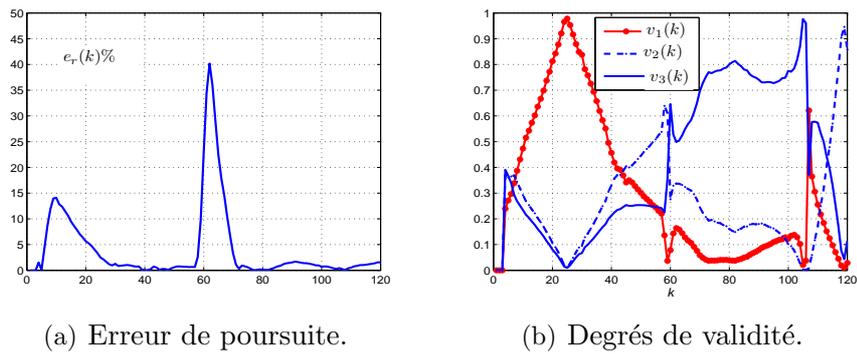


FIG. II.14 – Performances du système de commande multimodèle.

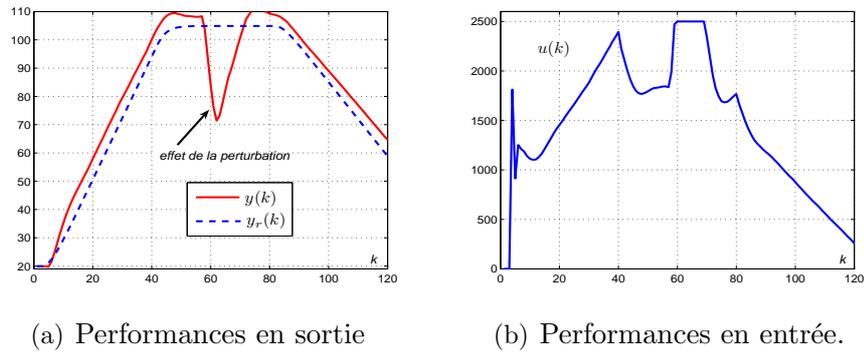


FIG. II.15 – Performances entrée-sortie du système de commande monomodèle.

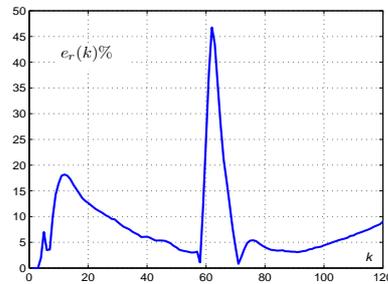


FIG. II.16 – Erreur de poursuite du système de commande monomodèle.

## II.10 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'élaboration d'une méthode de commande multimodèle pour les systèmes dont la dynamique peut être raisonnablement décrite par une famille de modèles linéaires invariants dans le temps, e.g. les systèmes variants dans le temps et les systèmes non linéaires. Les résultats disponibles sur l'identification et la commande des systèmes ont été judicieusement exploités pour ce faire. La loi de commande sous-jacente est obtenue à partir d'une fusion adéquate des lois de commande élémentaires associées aux modèles locaux qui constituent la représentation multimodèle du système. La base des modèles est élaborée d'une manière systématique à partir d'une approche d'identification appropriée qui permet de déterminer aussi bien la structure que les paramètres du modèle.

Une méthode de commande multimodèle avec modèle de référence a été développée dans ce contexte et utilisée pour traiter deux problèmes d'asservissement.

Le premier concerne un système linéaire fortement variant dans le temps qui a été utilisé au chapitre I pour souligner les limitations de la commande adaptative avec modèle de référence à structure variable. Il a été montré que la commande multimodèle permet d'incorporer une bonne capacité d'adaptation dans la synthèse via une fusion appropriée des régulateurs élémentaires conçus à partir de la base des modèles. Le second relève de l'asservissement de la température d'un réacteur chimique opérant en mode batch pour réaliser une réaction d'estérification d'huile d'olives végétales par un alcool. Une validation expérimentale a été effectuée pour mettre en évidence l'affinement des performances d'un système de commande multimodèle avec modèle de référence par rapport à celles d'un système de commande avec modèle de référence conçu à partir d'un modèle de comportement global du réacteur. Outre les performances en poursuite, une attention particulière a été réservée aux performances en régulation qui sont cruciales dans le contexte d'une réaction exothermique.

# Chapitre III

## Une commande multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel : application à un bioprocédé

### III.1 Introduction

La théorie des systèmes linéaires est relativement bien structurée comme en témoignent le nombre important d'ouvrages disponibles et d'applications industrielles réussies qui ont permis d'acquérir un savoir faire en la matière. Ceci n'est pas le cas pour les systèmes non linéaires où les problèmes de modélisation, d'observation et de commande ont été principalement traités pour des classes particulières et restent encore ouverts dans le cas général [37, 92].

En attendant une théorie plus complète sur les systèmes non linéaires, un effort considérable a été consacré aux problèmes d'observation et de commande des systèmes non linéaires dont le comportement dynamique peut être raisonnablement décrit par une famille de modèles linéaires. C'est dans ce cadre que s'inscrit l'approche multimodèle qui exploite judicieusement tous les résultats disponibles sur la théorie des systèmes linéaires incertains pour étendre le champ de son application aux systèmes non linéaires [33, 52, 83, 107].

On présente dans ce chapitre une approche de commande multimodèle qui a été développée à partir de la commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel. Le concept de modèle de référence sur l'état partiel permet de ramener un problème d'asservissement en un problème de régulation. Quant à la commande prédictive, elle permet de traiter convenablement un problème de

régulation aux moindres carrés.

L'approche de commande proposée a été utilisée pour traiter un problème d'asservissement d'un bioréacteur dans un contexte de simulation utilisant un modèle de connaissances, des perturbations de charges réaliste et un bruit de mesure pour tenir compte des incertitudes inéluctables de la métrologie disponible. La motivation d'une telle application est de montrer la faisabilité d'une commande multimodèle par rapport à une méthode de commande non linéaire appropriée du bioréacteur. Pour ce faire, on a d'abord traité le problème en utilisant une approche de commande non linéaire, notamment la commande "backstepping" incorporant une action intégrale et une action de filtrage appropriées [1, 10, 11, 29, 41]. Les performances obtenues sont considérées comme une référence en la matière puisqu'elles ont été obtenues à partir du modèle de connaissances du bioréacteur.

Outre une conclusion, ce chapitre se compose de deux parties. La première partie est réservée à une description du bioréacteur suivi de la synthèse du système de commande non linéaire du type "backstepping" considérée et des résultats de simulation obtenus. La seconde partie est consacrée à l'approche de commande multimodèle proposée et son application au problème d'asservissement du bioréacteur.

## III.2 Description du modèle de bioprocédé

Le système à commander est un bioprocédé utilisé pour générer une population de microorganismes (levures, bactéries, champignons, etc.) aux dépens de certains substrats carbonés, dans des conditions physico-chimiques favorables (température, pH) [40, 47]. En effet, ces procédés biotechnologiques sont complexes, due à la nature très variée des phénomènes multiples qui se déroulent en faisant intervenir des organismes vivants. Par conséquent, ces procédés constituent un excellent champ d'application utilisant les outils modernes de l'automatique [2, 5, 21, 52, 85, 88, 89, 107]. L'objectif de commande consiste, généralement, dans le cas des bioréacteurs à réguler la concentration de l'une des espèces chimiques de manière à permettre au système de conserver certaines propriétés physico-chimiques, comme par exemple son pH.

On considère plus particulièrement une culture microbienne simple dans laquelle une biomasse de concentration  $x_2(t)$  se développe en consommant un substrat de concentration  $x_1(t)$  au sein d'un bioréacteur infiniment mélangé. On suppose que le bioréacteur fonctionne en mode continu avec un taux de dilution  $D(t)$  et une concentration d'alimentation en substrat  $S_{in}$ . Le modèle dynamique

du procédé ainsi décrit peut s'écrire comme suit : [5, 47, 52]

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = v_r(t) - D(t)x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) = -k_r v_r(t) + D(t)(S_{in} - x_1(t)) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  désignent respectivement les concentrations du substrat et de la biomasse ;  $v_r(t)$  est la vitesse de la réaction ;  $k_r$  est le coefficient du rendement. On suppose que la concentration du substrat  $x_1(t)$  est mesurée en ligne. L'objectif consiste donc à réguler la concentration du substrat à l'intérieur du bioréacteur, quelques soient les variations de l'alimentation en substrat  $S_{in}$  et en utilisant le taux de dilution  $D(t)$  comme variable de commande [31].

### III.3 Commande non linéaire par "backstepping"

Cette partie a pour finalité d'illustrer qu'en présence d'un modèle de connaissances, comme celui décrit par l'équation (III.1), le problème d'asservissement du bioréacteur peut être convenablement résolu avec une technique de commande non linéaire du type "backstepping".

#### III.3.1 Principe

Le concept de "backstepping" permet d'effectuer une synthèse constructive d'une loi de commande pour les systèmes non linéaires triangulaires en adoptant une approche *Lyapunov* [10, 11, 29, 41]. Le mot "backstepping" est particulièrement justifiée par le processus récursif intrinsèque à la synthèse. La structure triangulaire des systèmes requise permet de décomposer le problème de synthèse en une famille finie de sous-problèmes de commande en définissant des commandes virtuelles appropriées. Chaque sous-problème est traité à partir d'une approche *Lyapunov* compte tenu de la solution du sous-problème précédent. La loi de commande globale est obtenue à la fin du processus.

##### III.3.1.1 Conception de la loi de commande

Dans le but de compenser l'effet des perturbations de charges et des bruits de mesures, une action intégrale filtrée est incorporée dans la synthèse du régulateur. En effet, le modèle du bioréacteur donné par l'équation (III.1) peut se récrire en considérant cette action intégrale filtrée et l'erreur de poursuite  $\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - S^*(t)$  comme suit [5] :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}^f(t) = \tilde{x}_1^f(t) \\ \dot{\tilde{x}}_1^f(t) = -\frac{1}{\tau}\tilde{x}_1^f(t) + \frac{1}{\tau}\tilde{x}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_1(t) = -\alpha(t) + D(t)(S_{in} - x_1(t)) - \dot{S}^*(t) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

ou  $\tilde{x}_1^f(t)$  est l'erreur de poursuite filtrée : générée par un filtre de premier ordre de gain statique unitaire et de constante de temps  $\tau$ .

Le modèle donné par l'équation (III.2) est adopté pour élaborer la loi de commande par "backstepping" en suivant les étapes suivantes :

### **Etape 1**

On pose l'erreur  $\epsilon_1$  comme suit :

$$\epsilon_1 = \sigma^f \quad (\text{III.3})$$

La première fonction candidate de *Lyapunov* choisie est donnée par la relation suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2}\epsilon_1^2$$

Cette fonction doit être toujours positive et sa dérivée doit être négative pour assurer la convergence de  $\epsilon_1$  vers zéro. La dérivée est donnée par :

$$\dot{V}_1 = \dot{\epsilon}_1 \epsilon_1$$

Afin que cette dérivée soit toujours négative, il faut qu'elle prenne la forme suivante :

$$\dot{V}_1 = -c_1 \epsilon_1^2$$

Il en résulte que :

$$\dot{\epsilon}_1 = -c_1 \epsilon_1 \implies \tilde{x}_1^f(t) = -c_1 \epsilon_1, \quad c_1 > 0$$

Cette relation indique la valeur que doit prendre l'état  $\tilde{x}_1^f(t)$  pour satisfaire le critère de stabilité.  $\tilde{x}_1^f(t)$  est considéré alors, comme une commande virtuelle. Toutefois, il n'est pas possible d'agir directement sur l'état. On introduit alors une autre variable d'erreur  $\epsilon_2$  définie par :

$$\epsilon_2 = \tilde{x}_1^f(t) - \tilde{x}_1^f(t)_{dsir} = \tilde{x}_1^f(t) + c_1 \epsilon_1 = \dot{\epsilon}_1 + c_1 \epsilon_1 \quad (\text{III.4})$$

où  $\tilde{x}_1^f(t)_{dsir}$  est l'état désiré de  $\tilde{x}_1^f(t)$ .

### **Etape 2**

La fonction de *Lyapunov* augmentée qui prenne en compte l'erreur possible sur l'état  $\tilde{x}_1^f(t)$  est :

$$V_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1^2 + \frac{1}{2}\epsilon_2^2$$

Afin de respecter le critère de *Lyapunov*  $\dot{\epsilon}_2$  doit prendre la valeur suivante :

$$\dot{\epsilon}_2 = -c_2\epsilon_2, \quad c_2 > 0$$

### **Etape 3**

Ponant la variable d'erreur finale  $\epsilon_3$  comme suit :

$$\epsilon_3 = \dot{\epsilon}_2 + c_2\epsilon_2 \quad (\text{III.5})$$

La fonction de *Lyapunov* finale peut être choisie comme suit :

$$V_3 = \frac{1}{2}\epsilon_3^2$$

La dérivée de cette fonction est négative pourvu que :

$$\dot{\epsilon}_3 = -c_3\epsilon_3, \quad c_3 > 0 \quad (\text{III.6})$$

En effet, en utilisant les équations (III.2), (III.3), (III.4), (III.5) et (III.6), la loi de commande globale obtenue est donnée par la relation suivante :

$$D(t) = \frac{1}{S_{in} - x_1(t)} \left( \eta \tilde{x}_1^f(t) + \rho \tilde{x}_1(t) - \epsilon \sigma^f(t) + \alpha(t) + \dot{S}^*(t) \right)$$

où :

$$\begin{aligned} \eta &= c_3(1 - \tau c_1 - \tau c_2) + c_2(1 - \tau c_1) + c_1 - \frac{1}{\tau} \\ \rho &= \frac{1}{\tau} - c_2 - c_3 - c_1, \quad \epsilon = \tau c_1 c_2 c_3 \end{aligned}$$

avec  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont les paramètres de synthèse du "backstepping".

La loi de commande élaborée requiert la connaissance de la vitesse de la réactions normalisée  $\alpha(t) = k_r v_r(t)$ . Cette mesure peut être obtenue en utilisant un observateur à grand gain [5], illustré par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = -\hat{\alpha}(t) + D(t)(S_{in} - \hat{x}_1(t)) - 2\theta(\hat{x}_1(t) - x_1(t)) \\ \dot{\hat{\alpha}}(t) = \theta^2(\hat{x}_1(t) - x_1(t)) \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

avec  $\hat{\alpha}(t)$  est l'estimé de  $\alpha(t)$  et  $\theta > 0$  est le paramètre de synthèse de l'observateur.

## **III.3.2 Résultats de simulation**

On présente dans ce qui suit les résultats de simulation qui ont été obtenus. Pour mieux illustrer l'applicabilité de la commande non linéaire considérée, les simulations ont été réalisées dans un contexte réaliste.

- Une vitesse de réaction  $v_r(t)$  donnée par l'équation suivante :

$$v_r(t) = \frac{\mu_{max} x_1(t)}{K_s + x_1(t)} x_2(t) \quad (\text{III.8})$$

où  $\mu_{max}$  est la vitesse spécifique de croissance maximale et  $K_s$  est la constante de saturation.

- Les valeurs numériques des paramètres du modèle sont :

$$\mu_{max} = 1.064(\text{jour}^{-1}), K_s = 43.9(\text{mg/l}) k_r = 2.686 \text{ et } S_{in} = 400(\text{mg/l})$$

- Un bruit de mesure de moyenne nulle et variance  $0.223(\text{mg/l})$ .
- Une perturbation de type échelon sur la concentration de substrat d'alimentation d'amplitude  $10(\text{mg}/(\text{l.jour}))$  intervenant entre les instants 100 et 250.

Quant aux paramètres de synthèse utilisés dans la loi de commande, ils ont été spécifiés comme suit :

$$\tau = 500 ; \theta = 10; c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

Le profil de la concentration de substrat de référence choisi a été préalablement filtré pour générer la sortie de référence  $S^*(t)$ . Un filtre de premier ordre de gain statique unitaire et de constante de temps  $10.55 s$  a été utilisé pour ce faire.

Les résultats de simulation, donnés par les figures III.1 et III.2, montrent clairement que la commande par "backstepping" réalise bien les performances désirées aussi bien en régulation qu'en poursuite. On notera que la robustesse en stabilité du système de commande est intrinsèque à celle de l'approche de synthèse adoptée et qu'elle dépend des paramètres de synthèse sous-jacents.

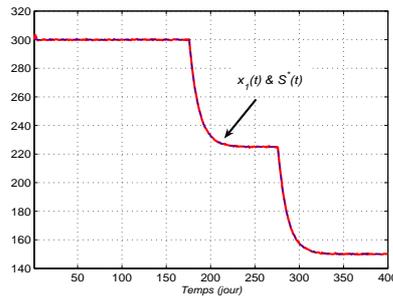


FIG. III.1 – Concentrations de substrat de sortie et de référence.

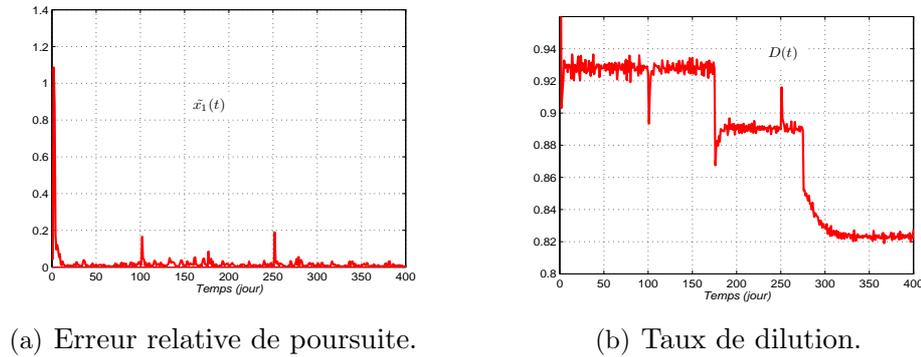


FIG. III.2 – Commande non linéaire par "backstepping".

### III.4 Commande multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel

Les performances requises consistent à maintenir la concentration de substrat contenu dans le bioréacteur dans un voisinage d'une séquence de concentration de référence indépendamment des perturbations qui affectent le fonctionnement du procédé. Pour mieux appréhender le problème de commande, on procédera d'une manière progressive en deux parties. La première est consacrée à la présentation de la commande avec modèle de référence sur l'état partiel. La deuxième partie consiste en la synthèse de cette commande basée sur l'approche multimodèle proposée.

#### III.4.1 Commande avec modèle de référence sur l'état partiel

La motivation principale de la commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel considérée est sa large applicabilité, sa simplicité de spécification des performances et sa robustesse [65, 67, 69, 70]. Le problème d'applicabilité concerne particulièrement les systèmes exhibant un retard pur relativement important avec des zéros arbitraires, i.e. qui ne sont pas nécessairement situés dans le domaine de stabilité. On notera que des zéros situés dans le domaine de stabilité est beaucoup plus une exception qu'une règle dans la pratique des systèmes échantillonnés. Cette exigence constitue d'ailleurs la principale limitation des techniques de commande avec modèle de référence ou à variance minimale qui permettent de réaliser les plus hautes performances en poursuite. La simplicité de spécification des performances, elle résulte naturellement du concept de modèle de référence sur l'état partiel qui permet de spécifier d'une manière indépendante les objectifs de poursuite et de régulation. Quant à la robustesse, c'est celle d'une synthèse d'un système de commande prédictive que l'on peut effectuer de manière

à réaliser un modelage adéquat des fonctions de sensibilité usuelles.

### III.4.1.1 Formulation du problème

La commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel s'applique aux systèmes dont le comportement d'entrée-sortie peut être décrit par :

$$\begin{cases} A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-d) + v(k) \\ D(q^{-1})v(k) = C(q^{-1})\gamma(k) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

avec :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nAq^{-nA} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_nBq^{-nB} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_nCq^{-nC} \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_nDq^{-nD} \end{aligned}$$

où  $u(k)$  et  $y(k)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système,  $v(k)$  représente les perturbations qui affectent le fonctionnement du système et  $\{\gamma(k)\}$  est une séquence d'impulsions de moyenne nulle et d'amplitudes inconnues (contexte déterministe) ou une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance finie (contexte stochastique).

Le modèle (III.9) peut se récrire sous la forme d'une représentation d'état partiel comme suit :

$$\begin{cases} A(q^{-1})D(q^{-1})z(k) = D(q^{-1})u(k-d) + M(q^{-1})\gamma(k-d) \\ y(k) = B(q^{-1})z(k) + L(q^{-1})\gamma(k) \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

avec :

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})D(q^{-1})L(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})M(q^{-1})$$

où  $z(k)$  désigne l'état partiel du système et n'est autre qu'une variable d'état d'une forme canonique commandable.

L'objectif de commande avec modèle de référence sur l'état partiel consiste à modeler l'équation de l'erreur de poursuite d'état partiel conformément à l'équation suivante :

$$z(k) - z_r(k) = F(q^{-1})\gamma(k-d) \quad (\text{III.11})$$

avec :

$$z_r(k) = \beta y_r(k) \text{ avec } y_r(k) = W_m(q^{-1})r(k) \text{ et } \beta = \frac{1}{B(1)} \quad (\text{III.12})$$

où  $F(q^{-1}) = \frac{F_n(q^{-1})}{F_d(q^{-1})}$  représente un filtre asymptotiquement stable, dont la spécification est effectuée conformément à la dynamique de régulation désirée,  $W_m(q^{-1})$  est la fonction de transfert du modèle de référence sur l'état partiel, dont la spécification est effectuée à partir de la dynamique de poursuite désirée, et  $\{z_r(k)\}$  et  $\{r(k)\}$  représentent respectivement la séquence de référence que l'on désire faire suivre à l'état partiel générée et la séquence de points de consigne correspondante. On notera que le scalaire  $\beta$  a été introduit pour réaliser la condition élémentaire d'une dynamique de poursuite, en l'occurrence un gain statique unitaire.

En utilisant les équations (III.10), (III.11) et (III.12), le comportement d'entrée-sortie du système de commande peut être décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} e_{uf}(k) = \frac{A(q^{-1})D(q^{-1})F_n(q^{-1}) - M(q^{-1})F_d(q^{-1})}{F_d(q^{-1})} \gamma(k) \\ e_y(k) = \frac{L(q^{-1})F_d(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})F_n(q^{-1})}{F_d(q^{-1})} \gamma(k) \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

où  $e_{uf}(k)$  et  $e_y(k)$  désignent respectivement les erreurs de poursuite par rapport aux trajectoires d'entrée et de la sortie données par :

$$\begin{aligned} e_{uf}(k) &= D(q^{-1})e_u(k) = D(q^{-1})(u(k) - A(q^{-1})\beta y_r(k+d)) \\ e_y(k) &= y(k) - B(q^{-1})\beta y_r(k) \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Le problème de commande avec modèle de référence sur l'état partiel peut être alors interprété comme un problème de régulation par rapport aux erreurs de poursuite d'entrée-sortie  $e_{uf}(k)$  et  $e_y(k)$ . Ce problème de régulation peut être résolu aux moindres carrés via une synthèse du type commande prédictive comme il a été proposé dans [69, 67]. L'objectif de commande prédictive sous-jacent consiste à minimiser, au sens d'un horizon fuyant, le critère quadratique suivant :

$$J = \mathcal{E} \left\{ \sum_{j=h_i}^{h_p} (e_y(k+j))^2 + \lambda \sum_{j=0}^{h_c-1} (e_{uf}(k+j))^2 \right\} \quad (\text{III.15})$$

sous la contrainte

$$e_{uf}(k+j) = 0 \text{ pour } j \in [h_c, h_p - d] \quad (\text{III.16})$$

où  $h_i \geq d$ ,  $h_p$ ,  $h_c$  sont respectivement les horizons d'initialisation, de prédiction et de commande et  $\lambda$  est un scalaire positif.

### III.4.2 Synthèse du système de commande

On montre aisément que l'objectif de commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel est équivalent à la minimisation du critère quadratique suivant :

$$\hat{J} = \sum_{j=h_i}^{h_p} (\hat{e}_y(k+j/t))^2 + \lambda \sum_{j=0}^{h_c-1} (e_{uf}(k+j))^2 \quad (\text{III.17})$$

sous la contrainte (III.16) et où  $\hat{e}_y(k+j)$  est un prédicteur optimal à  $j$  pas de l'erreur de poursuite en sortie. Dans ce qui suit, on présentera les différentes étapes de synthèse du système de commande.

#### III.4.2.1 Calcul des prédicteurs

On notera d'abord que le modèle de commande (III.10) peut se récrire sous la forme :

$$\begin{cases} A(q^{-1})e_y(k) = B(q^{-1})e_u(k-d) + v(k) \\ D(q^{-1})v(k) = C(q^{-1})\gamma(k) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

que l'on peut interpréter comme un modèle aux performances. Ce dernier permet de déterminer aisément le prédicteur à  $j$  pas de l'erreur de poursuite en sortie, soit :

$$\hat{e}_y(k+j/k) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} F_j(q^{-1}) e_{uf}(k+j-d) + \frac{G_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} e_y(k) \quad (\text{III.19})$$

avec :

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})D(q^{-1})F_j(q^{-1}) + q^{-j}G_j(q^{-1}) \quad (\text{III.20})$$

On notera que la structure de la solution unique  $(F_j(q^{-1}), G_j(q^{-1}))$  de la division euclidienne ci-dessus est donnée par :

$$\begin{aligned} F_j(q^{-1}) &= f_o + f_1 q^{-1} + \dots + f_{j-1} q^{-(j-1)} \\ G_j(q^{-1}) &= g_o^j + g_1^j q^{-1} + \dots + g_{n_{G_j}}^j q^{-n_{G_j}} \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

avec :

$$n_{G_j} \leq \max(n_A + n_D - 1, n_C - j)$$

La forme du prédicteur n'est pas appropriée pour la détermination de la loi de commande dans la mesure où le terme  $\frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} F_j(q^{-1}) e_{uf}(k+j-d)$  est une combinaison linéaire des erreurs de poursuite en entrée aussi bien dans le passé

que dans le présent et le futur. Pour pallier ce problème, il suffit de procéder à une seconde division euclidienne :

$$\frac{B(q^{-1})F_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} = Q_j(q^{-1}) + q^{-j+d-1} \frac{R_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} \quad (\text{III.22})$$

qui admet une solution unique pourvu que sa structure soit donnée par :

$$\begin{aligned} Q_j(q^{-1}) &= q_o + q_1 q^{-1} + \dots + q_{(j-d-1)} q^{-j+d} \\ R_j(q^{-1}) &= r_o^j + r_1^j q^{-1} + \dots + r_{n_{R_j}}^j q^{-n_{R_j}} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

avec :

$$n_{R_j} \leq \max(n_B + d - 2, n_C - 1)$$

En effet, compte tenu de la division euclidienne (III.22), l'équation du prédicteur à  $j$  pas (III.4.2.1) peut se récrire comme suit :

$$\hat{e}_y(k + j/k) = Q_j(q^{-1})e_{uf}(k + j - d) + \frac{R_j(q^{-1})}{C(q^{-1})}e_{uf}(k - 1) + \frac{G_j(q^{-1})}{C(q^{-1})}e_y(k) \quad (\text{III.24})$$

Il apparaît clairement que le prédicteur dépend des erreurs de poursuite filtrées en entrée qui seront déterminées conformément à l'objectif de commande et des erreurs de poursuite d'entrée-sortie disponible à l'instant  $k$ , soit :

$$\hat{e}_y(k + j/k) = Q_j(q^{-1})e_{uf}(k + j - d) + \hat{e}_{y_o}(k + j/k) \quad (\text{III.25})$$

avec :

$$C(q^{-1})\hat{e}_{y_o}(k + j/k) = R_j(q^{-1})e_{uf}(k - 1) + G_j(q^{-1})e_y(k) \quad (\text{III.26})$$

### III.4.2.2 Détermination de la loi de commande

Notons d'abord que le critère quadratique (III.17) sous la contrainte (III.16) peut se récrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\hat{J} = \|Q_r E_{uf}(k + hc - 1) + \hat{E}_{y_o}(k + hp/t)\|^2 + \lambda \|E_{uf}(k + hc - 1)\|^2 \quad (\text{III.27})$$

avec

$$\begin{aligned} E_{uf}^T(k + hc - 1) &= [e_{uf}(k) \hat{e}_{uf}(k + 1) \dots e_{uf}(k + hc - 1)] \\ \hat{E}_{y_o}^T(t + hp/t) &= [\hat{e}_{y_o}(k + hi/k) \hat{e}_{y_o}(k + hi + 1/k) \dots \hat{e}_{y_o}(k + hp/k)] \\ Q_r &= \begin{bmatrix} q_{hi-d} & \dots & q_o & 0 & \dots & 0 \\ q_{hi-d+1} & \dots & q_1 & q_o & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{hc-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & q_o \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{hp-d} & \dots & \dots & \dots & q_{hp-d-hc-1} & \dots \end{bmatrix} \quad \text{pour } hc > hi - d - 1 \end{aligned}$$

ou

$$Q_r = \begin{bmatrix} q_{hi-d} & \dots & q_o & \dots & \dots & q_{hi-d-hc-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{hp-d} & \dots & \dots & \dots & \dots & q_{hp-d-hc-1} \end{bmatrix} \quad \text{pour } hc \leq hi - d - 1$$

Le vecteur des erreurs de poursuite en entrée filtrés  $E_{uf}(k+hc-1)$  qui minimise le critère (III.27) vérifie la condition d'optimalité :

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial E_{uf}(k+hc-1)} \left( E_{uf}(k+hc-1) \right) = 0$$

Il est donc obtenu à partir de l'équation :

$$[Q_r^T Q_r + \lambda I_{hc}] E_{uf}(k+hc-1) = -Q_r^T \hat{E}_{yo}(k+hp/k) \quad (\text{III.28})$$

Il faut remarquer que le calcul de la séquence optimale des erreurs de poursuite en entrée filtrées  $E_{uf}^*(k+hc-1)$  est possible pourvu que le paramètre de synthèse  $\lambda$  soit légèrement supérieur au zéro de la machine utilisée.

Le concept *d'horizon fuyant* consiste à ne prendre en considération que la première composante du vecteur de la séquence optimale des erreurs de poursuite en entrée filtrées  $E_{uf}^*(k+hc-1)$ , soit  $e_{uf}(k)$ , et à recommencer le processus d'optimisation à chaque instant d'échantillonnage pour maintenir le système en boucle fermée. La loi de commande à horizon fuyant qui en résulte est alors donnée par :

$$e_{uf}(k) = - \sum_{j=hi}^{hp} \gamma_j \hat{e}_{yo}(k+j/k) \quad (\text{III.29})$$

où les coefficients  $\gamma_j$  pour  $j \in [hi, hp]$  ne sont autres que les composantes de la première ligne de la matrice  $[Q_r^T Q_r + \lambda I_{hc}]^{-1} Q_r^T$ . En tenant compte de l'expression (III.25)-(III.26) du prédicteur, on peut récrire la loi de commande (III.29) comme suit :

$$e_{uf}(k) = - \sum_{j=hi}^{hp} \gamma_j R_j(q^{-1}) e_{uf}(k-1) - \sum_{j=hi}^{hp} \gamma_j G_j(q^{-1}) e_y(k)$$

ou d'une manière équivalente sous la forme désormais usuelle :

$$S(q^{-1}) e_{uf}(k) + R(q^{-1}) e_y(k) = 0 \quad (\text{III.30})$$

avec

$$S(q^{-1}) = C(q^{-1}) + \sum_{j=hi}^{hp} \gamma_j q^{-1} R_{j-d}(q^{-1}) \quad (\text{III.31})$$

$$R(q^{-1}) = \sum_{j=hi}^{hp} \gamma_j G_j(q^{-1}) \quad (\text{III.32})$$

### III.4.2.3 Performances du système de commande

En utilisant les expressions des erreurs de poursuite d'entrée-sortie (III.14), la loi de commande (III.30) peut se récrire sous la forme usuelle :

$$S(q^{-1})D(q^{-1})u(k) + R(q^{-1})y(k) = T(q^{-1})y_r(k+d) \quad (\text{III.33})$$

avec :

$$T(q^{-1}) = \beta P_c(q^{-1}) = \beta \left( A(q^{-1})D(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1}) \right)$$

Le système de commande peut être alors représenté comme l'indique la figure III.3.

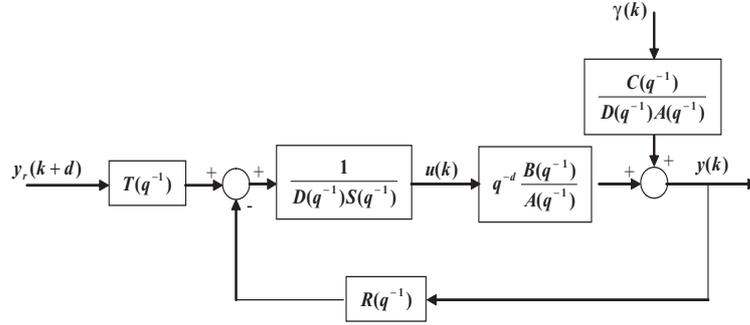


FIG. III.3 – Structure RST du système de commande.

Les performances d'entrée-sortie d'un tel système de commande sont respectivement données par :

$$\begin{cases} y(k) = \beta B(q^{-1}) y_r(k) + \frac{S(q^{-1})C(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \gamma(k) \\ u(k) = \beta A(q^{-1}) y_r(k+d) - \frac{R(q^{-1})C(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \gamma(k) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

Il apparaît clairement que les objectifs de poursuite et de régulation peuvent être spécifiés d'une manière indépendante à travers le modèle de référence sur l'état partiel, i.e. la fonction de transfert  $W_m(z^{-1})$ , et les paramètres de synthèse de l'objectif de commande, i.e. la dynamique du prédictor  $C(q^{-1})$ , l'horizon de prédiction  $[h_i, h_p]$ , l'horizon de commande  $h_c$  et le scalaire positif  $\lambda$ . Ces paramètres de synthèse sont spécifiés de manière à réaliser un modelage approprié des fonctions de sensibilité usuelles. Ces fonctions de sensibilité représentent aussi bien des quantificateurs de performances nominales que des mesures de robustesse en stabilité. On utilise généralement une procédure itérative qui consiste à repenser la spécification des paramètres de synthèse tant que les formes des fonctions de sensibilité usuelles ne sont pas jugées satisfaisantes [72]. On donne par la suite un aperçu sur les fonctions de sensibilité.

- Les perturbations de charge en sortie (respectivement en entrée) sont reliées à la sortie (respectivement à l'entrée) par la fonction de sensibilité du système de commande appelée fonction de sensibilité directe  $\Sigma(q^{-1})$ .

$$\Sigma(q^{-1}) = \frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

- Les bruits de mesure en sortie (respectivement en entrée) sont reliés à la sortie (respectivement à l'entrée) par : l'opposé de la fonction de sensibilité directe connue par la fonction de sensibilité complémentaire  $\Gamma(q^{-1})$  du système de commande donnée par :

$$\Sigma(q^{-1}) + \Gamma(q^{-1}) = 1 ; \quad \Gamma(q^{-1}) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

- Les perturbations de charge en entrée et les bruits de mesure en entrée sont reliés à la sortie par la fonction de transfert  $GS(q^{-1})$  :

$$GS(q^{-1}) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}\Sigma(q^{-1})$$

- Les perturbations de charge en sortie et les bruits de mesure en sortie sont reliés à l'entrée par la fonction de transfert  $RS(q^{-1})$  :

$$RS(q^{-1}) = \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})}\Sigma(q^{-1})$$

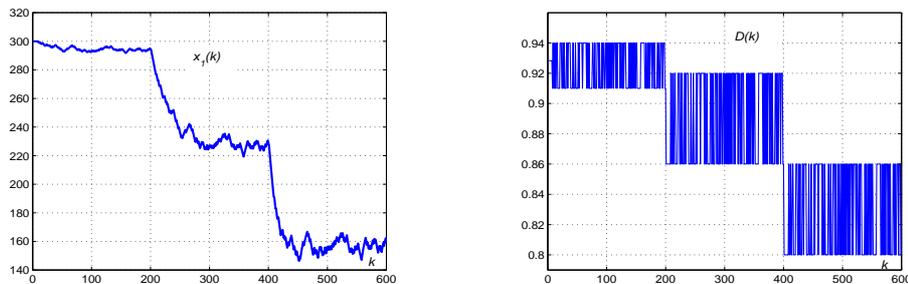
Comme les bruits de mesure sont plutôt dominants pour les hautes fréquences et que les effets des perturbations de charge sont particulièrement cruciaux pour les basses fréquences, il est naturel de chercher à réduire le gain de la fonction de sensibilité directe  $\Sigma(q^{-1})$  en basses fréquences et respectivement le gain de la fonction de sensibilité complémentaire  $\Gamma(q^{-1})$  en hautes fréquences. Les gabarits fréquentiels typiques des fonctions de sensibilité usuelles du système de

commande consistent en des gains suffisamment faibles aux basses fréquences où les perturbations de charge sont dominantes et aux hautes fréquences où les bruits de mesure sont prépondérants [86].

## III.5 Commande multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel : application à un bioréacteur

### III.5.1 Construction de la base des modèles

Afin de disposer d'un jeu de données approprié pour l'identification, le procédé donné par l'équation (III.1) est excité dans toute la gamme des variables considérées tant en amplitude qu'en fréquence. L'expérience consiste à appliquer un taux de dilution variable, en respectant ses valeurs limites entre un taux de dilution nul et la zone de lavage. La sortie du bioréacteur qui correspond à la concentration du substrat  $x_1(k)$  décrit trois paliers spécifiques. Le système est alors excité autour de chaque palier (considéré comme une zone de fonctionnement) par une séquence binaire pseudo aléatoire correspondant au taux de dilution  $D(k)$  (voir figure III.4(b)). La sortie du bioréacteur  $x_1(k)$  est donnée par la figure III.4(a). L'ensemble de mesures ainsi généré est exploité pour déterminer la base des modèles qui permettent de mieux appréhender le comportement du procédé dans chaque zone de fonctionnement.



(a) Evolution du signal de sortie du bioréacteur.

(b) Evolution du signal d'excitation.

FIG. III.4 – Les signaux d'excitation et de sortie.

La base obtenue est formée par trois modèles de second ordre donnés par les

fonctions de transfert suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(z^{-1}) &= z^{-1} \frac{21.9658 + 7.6156z^{-1}}{1 - 0.7035z^{-1} - 0.2063z^{-2}} \\ \mathcal{M}_2(z^{-1}) &= z^{-1} \frac{57.5180 + 15.2630z^{-1}}{1 - 0.4166z^{-1} - 0.1792z^{-2}} \\ \mathcal{M}_3(z^{-1}) &= z^{-1} \frac{21.5206 + 8.5460z^{-1}}{1 - 0.7309z^{-1} - 0.1501z^{-2}}\end{aligned}\tag{III.35}$$

Un régulateur élémentaire a été conçu pour chaque modèle à partir de l'approche de commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel décrite dans le paragraphe précédent. La loi de commande multimodèle globale appliquée au bioréacteur est obtenue à partir de la fusion des commandes élémentaires  $u_i(k)$  comme suit :

$$u(k) = \sum_{i=1}^3 v_i(k) u_i(k)\tag{III.36}$$

où les  $v_i(k)$  pour  $k \in [1, 3]$  sont les degrés de validité.

### III.5.2 Résultats de simulation

Rappelons que le problème d'asservissement du bioréacteur est de maintenir la concentration de substrat en sortie dans un voisinage d'une concentration de référence indépendamment des variations de la concentration du substrat d'alimentation. Ces performances ont été spécifiées à partir des paramètres de synthèse de la méthode de commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel comme suit :

- Un modèle de référence sur l'état partiel donnée par la fonction de transfert suivante :

$$W_m(z^{-1}) = z^{-1} \frac{0.0660 + 0.0240z^{-1}}{1 - 0.7050z^{-1} - 0.2050z^{-2}}$$

- Un modèle des perturbations de charge du type échelon

$$D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

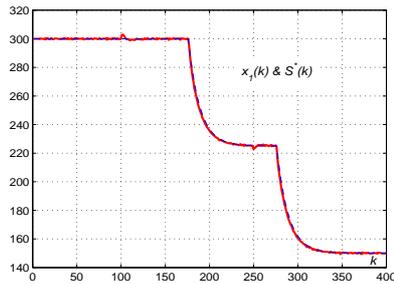
- Une dynamique de prédiction caractérisée par :

$$C(q^{-1}) = 1 - 0.3940q^{-1} - 0.0423q^{-2} + 0.0212q^{-3}$$

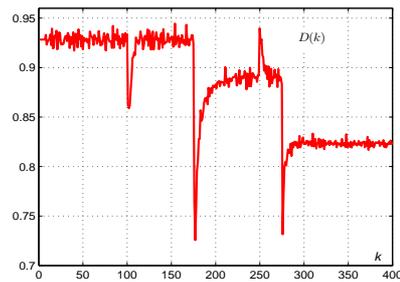
- Des horizons de prédiction et de commande données par :

$$[h_i, h_p] = [1, 12], h_c = 1 \text{ et } \lambda = 1$$

Les simulations ont été faites comme dans le cas de la commande non linéaire du type "backstepping" pour pouvoir faire une comparaison relativement raisonnable. Les figures III.5 et III.6 montrent le comportement d'entrée-sortie de l'asservissement et son erreur de poursuite ainsi que l'évolution des degrés de validité de la famille de modèles linéaires décrivant la dynamique du bioréacteur. On notera que les performances obtenues sont bien satisfaisantes si l'on juge par celles obtenues par le système de commande non linéaire.



(a) Concentrations de substrat de sortie et de référence.



(b) Taux de dilution.

FIG. III.5 – Comportement entrée/sortie du bioréacteur.

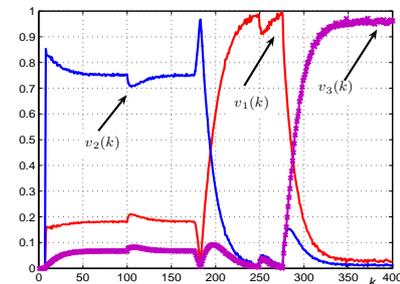
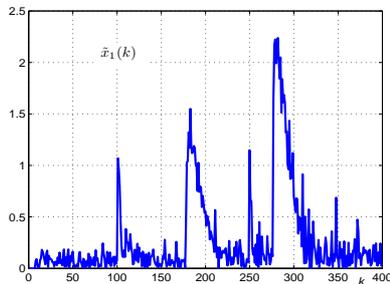
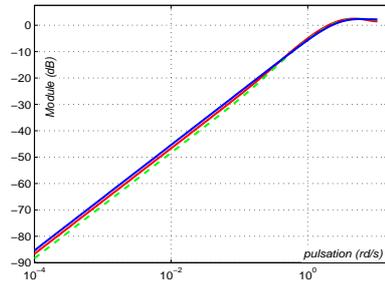
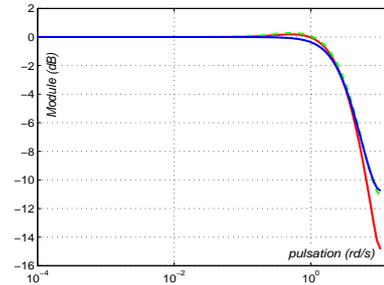


FIG. III.6 – Erreur relative de poursuite et degrés de validité.

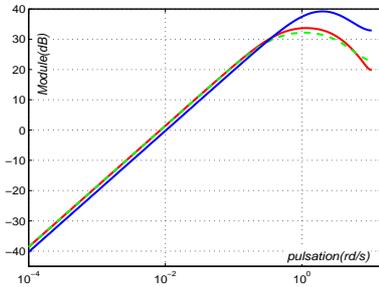
La figure III.7 montre les diagrammes en amplitude de Bode des fonctions de sensibilité usuelles des systèmes de commande élémentaires. Le modelage obtenu est relativement satisfaisant modulo une sensibilité aux bruits de mesure en entrée. Ceci explique les fluctuations du signal de commande.



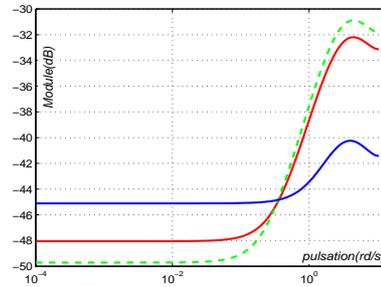
(a) Fonction de sensibilité.



(b) Fonction de sensibilité complémentaire.



(c) Fonction de sensibilité\*régulateur.



(d) Fonction de sensibilité\*modèle de commande.

FIG. III.7 – Fonctions de sensibilité usuelles.

## III.6 Conclusion

La motivation de ce chapitre a été de montrer la faisabilité d'une approche de commande multimodèle pour les systèmes non linéaires dont la dynamique peut être convenablement décrite par une famille de modèles linéaires. Pour ce faire, on a traité un problème d'asservissement d'un bioréacteur en utilisant deux synthèses différentes. La première est une synthèse non linéaire basée sur le concept de "backstepping" et utilisant le modèle de connaissances du bioréacteur. Les performances du système de commande sous-jacentes peuvent être alors considérées comme une référence dans la mesure où la dynamique du bioréacteur est parfaitement décrite par le modèle de commande. La seconde synthèse relève de la commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel et utilise une famille de trois modèles qui permettent de réaliser une bonne approximation du comportement d'entrée-sortie du bioréacteur.

Les résultats de simulation obtenus ont montré que les performances du système de commande multimodèle sont semblables à celles obtenues par le système

de commande non linéaire. Il est important de remarquer que la comparaison est légitime car une action intégrale avec un filtrage adéquat ont été incorporés dans la synthèse du système de commande non linéaire pour ne pas privilégier la synthèse multimodèle.

En guise d'une bonne conclusion, on peut se permettre de dire que rien ne vaut une synthèse appropriée si l'on dispose de toutes les informations requises pour ce faire. Néanmoins, l'approche multimodèle peut être un bon outil ingénieur dans le cas où la dynamique du système à commander est relativement complexe pour être décrite par des formes canoniques sympathiques, pour un lecteur intentionné de la littérature sur les systèmes non linéaires.

# Chapitre IV

## La commande multimodèle pour la compensation des perturbations périodiques

### IV.1 Introduction

Le problème de rejet des perturbations harmoniques inconnues a reçu une attention particulière tout au long de la dernière décennie [12, 45, 87, 103]. Les contributions réalisées sont principalement basées sur une utilisation appropriée des concepts de modèle interne et d'adaptation paramétrique et ont été consacrées à la classe des systèmes dont la dynamique peut être convenablement approximée par un modèle linéaire invariant. Le concept de modèle interne consiste tout simplement à incorporer les pôles du modèle des perturbations dans la configuration des pôles du régulateur en vue de réaliser une compensation asymptotique parfaite des perturbations [106]. Quant au concept d'adaptation paramétrique, il permet d'élaborer un modèle des perturbations en temps réel à partir des résultats disponibles sur l'identification des systèmes et la commande adaptative [46, 50].

On distingue deux approches de compensation adaptative des perturbations harmoniques. La première est dite indirecte puisque la synthèse du régulateur est réalisée en deux étapes : une adaptation des paramètres du modèle des perturbations suivi d'une conception du régulateur conformément au principe du modèle interne. La seconde approche est dite directe dont la mesure où l'adaptation paramétrique est directement utilisée pour adapter les paramètres du régulateur. Cette adaptation directe est faite à partir d'une erreur d'équation adéquate issue d'une paramétrisation judicieuse de l'ensemble des régulateurs stabilisants. Cette paramétrisation n'est autre qu'une paramétrisation de *Youla-Kucera* réalisant le

concept du modèle interne qui a été proposée dans [100, 99] et respectivement développée pour le rejet adaptatif des perturbations dans [45, 87, 103]. L'adaptation des paramètres du régulateur est particulièrement faite à partir de celle des paramètres d'un polynôme que l'on notera  $Q(q^{-1})$  pour recouvrir l'appellation Q-paramétrisation communément utilisée dans la littérature.

Les contributions [45, 103] concernent le contexte de régulation avec un placement des pôles et une adaptation paramétrique usuelle aux moindres carrés. Quant à la contribution [87], elle est faite dans un contexte d'asservissement avec modèle de référence sur l'état partiel avec une adaptation paramétrique robuste par rapport aux perturbations. Cette adaptation paramétrique est issue du concept d'identification par appartenance à un ensemble [16]. On notera plus particulièrement que l'adaptation est automatiquement gelée en absence d'information relativement riche pour améliorer le processus de modélisation considéré modulo une bonne spécification d'un paramètre de synthèse, en l'occurrence une borne supérieure sur les perturbations.

Les résultats disponibles sur le rejet adaptatif des perturbations harmoniques ont été principalement obtenus dans le cas des systèmes linéaires invariants. Les méthodes sous-jacentes peuvent être appliquées aux systèmes lentement variants dans le temps dans les limites de la robustesse du régulateur central considéré [23]. Dans ce chapitre, on se propose d'étudier le problème du rejet adaptatif des perturbations harmoniques inconnues dans le cas des systèmes linéaires variants dans le temps en adoptant une approche multimodèle. Par ailleurs, le cas de perturbations harmoniques à fréquence variable en présence d'un système invariant dans le temps est également considéré [27]. Dans le même contexte, on envisage d'évaluer la méthode de compensation dans le cas d'une combinaison linéaire des perturbations harmoniques à fréquence variable et/ou une distorsion de phase ou d'amplitude.

## IV.2 Compensation adaptative des perturbations périodiques

### IV.2.1 Modélisation des perturbations

Le problème de modélisation des perturbations a reçu une attention particulière puisqu'il est impossible de concevoir des systèmes de commande réalisant une compensation parfaite des perturbations sans aucune connaissance sur la nature des perturbations ou des bruits de mesure. On distingue deux classes de perturbations selon leur réalisation : une réalisation déterministe ou une réalisation aléatoire.

La transformée en  $z$  d'une perturbation déterministe  $p(k)_{k \in \mathbb{N}}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P(z) = H(z)\delta(k)$$

avec :

$$H(z) = P(z) \text{ et } \delta(k) = 1$$

Une perturbation déterministe peut être alors interprétée comme la réponse impulsionnelle d'un système dynamique dont la fonction de transfert est égale à la transformée en  $z$  de cette perturbation. A titre d'exemple, on peut représenter les perturbations du type échelon et une perturbation sinusoïdale de pulsation  $w$  respectivement comme suit :

$$(1 - q^{-1})p(k) = v\delta(k) \quad (\text{IV.1})$$

et

$$(1 - 2\cos(wT_e)q^{-1} + q^{-2})p(k) = v\sin(wT_e)\delta(k - 1) \quad (\text{IV.2})$$

où  $v$  est l'amplitude de la perturbation.

En plus des perturbations déterministes, les systèmes sont soumis à des perturbations aléatoires ou stochastiques  $\mathbf{v}(k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Ces perturbations peuvent être des bruits de mesure qui peuvent être interprétées comme la réponse à un bruit blanc de moyenne nulle et de variance finie.

On montre qu'une perturbation aléatoire  $\mathbf{v}(k)_{k \in \mathbb{N}}$  peut être décrite par un processus stochastique comme suit :

$$p(k) = H(z^{-1})\gamma(k)$$

avec :

$$H(e^{-jwT_e}) = S(\mathbf{v}(k)_{k \in \mathbb{N}})$$

où  $H(z^{-1})$  est une fonction de transfert propre dont le module est égal au spectre de la séquence  $\{\mathbf{v}(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\{\gamma(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une séquence des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variances finies.

## IV.2.2 Compensation adaptative des perturbations harmoniques

Considérons la classe des systèmes dont le comportement entrée-sortie est donné par :

$$\begin{cases} A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k - d) + p(k) , & d \geq 1 \\ D(q^{-1})p(k) = C(q^{-1})\delta(k) \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

avec :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nAq^{-nA} \\ B(q^{-1}) &= b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_nBq^{-nB} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_nCq^{-nC} \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_nDq^{-nD} \end{aligned}$$

où  $u(k)$  et  $y(k)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie de système,  $p(k)$  représente les perturbations de charge qui affectent le fonctionnement du système et  $\delta(k)$  est une impulsion unitaire. On se propose d'étudier le problème de compensation adaptative des perturbations de charge dans le contexte suivant [87].

### Hypothèses

**H1.** La fonction de transfert du système  $\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$  est connue ou préalablement déterminée par une identification appropriée.

**H2.** Le générateur des perturbation  $G(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}$  est stable au sens de Lyapunov, i.e. les racines de  $D(q^{-1})$  sont situées dans disque unité et celles qui sont sur le cercle sont simples.

**H3.** Les polynôme  $B(q^{-1})$  et  $D(q^{-1})$  sont premiers entre eux.

Pour ce faire, on utilisera une loi de commande avec modèle de référence sur l'état partiel donnée par [67] :

$$S(q^{-1})u(k) + R(q^{-1})y(k) = P_c(q^{-1})\beta y_r(k+d) \quad (\text{IV.4})$$

avec :

$$\beta = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n_B} b_i}$$

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1})$$

Les performances d'entrée sortie du système de commande correspondant sont obtenues en éliminant respectivement l'entrée et la sortie entre les équations du système (IV.3) et celles du régulateur (IV.4), soit :

$$y(k) = \beta B(q^{-1})y_r(k) + \frac{S(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} p(k) \quad (\text{IV.5})$$

$$u(k) = \beta A(q^{-1})y_r(k+d) - \frac{R(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} p(k) \quad (\text{IV.6})$$

On notera que  $P_c(q^{-1})$  n'est autre que le polynôme caractéristique du système de commande et que le scalaire  $\beta$  permet d'assurer la propriété élémentaire d'une poursuite, en l'occurrence un gain statique unitaire.

Les erreurs de poursuite d'entrée-sortie du système de commande, que l'on notera respectivement  $e_u(k)$  et  $e_y(k)$ , sont alors données par les équations :

$$e_y(k) = y(k) - \beta B(q^{-1})y_r(k) = \frac{S(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} p(k) \quad (\text{IV.7})$$

et

$$e_u(k) = u(k) - \beta A(q^{-1})y_r(k+d) = -\frac{R(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} p(k) \quad (\text{IV.8})$$

On notera que ces erreurs de poursuite sont des quantificateurs temporels des performances dans la mesure où elles permettent d'apprécier le comportement d'entrée-sortie par rapport à ses trajectoires de référence admissibles respectivement données par les séquences :

$$\{\beta A(q^{-1})y_r(k+d)\} \text{ et } \{\beta B(q^{-1})y_r(k)\}$$

Il apparaît clairement que le système de commande est stable si  $P_c(q^{-1})$  est un polynôme d'Hurwitz et qu'il réalise une compensation parfaite des perturbations de charge si et seulement si  $D(q^{-1})$  divise  $S(q^{-1})$ , soit :

$$S(q^{-1}) = M(q^{-1})D(q^{-1}) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} e_y(k) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

La compensation des perturbations peut être alors réalisée en exploitant judicieusement la famille des régulateurs stabilisants via une paramétrisation de Youla-Kucera que l'on peut spécifier comme suit.

Si le régulateur  $(R_o(q^{-1}), S_o(q^{-1}))$  stabilise le système, alors on peut définir une famille des régulateurs stabilisants comme suit :

$$S(q^{-1}) = S_o(q^{-1}) - q^{-d}Q(q^{-1})B(q^{-1}) \quad (\text{IV.10})$$

$$R(q^{-1}) = R_o(q^{-1}) + Q(q^{-1})A(q^{-1}) \quad (\text{IV.11})$$

avec :

$$Q(q^{-1}) = q_0 + q_1q^{-1} + \dots + q_{n_Q}q^{-n_Q}$$

Cette paramétrisation des régulateurs stabilisants permet de traiter le problème de rejet des perturbations dans la mesure où il suffit de déterminer le

polynôme  $Q(q^{-1})$  à la lumière du principe du modèle interne (IV.9) à partir du polynôme  $S_o(q^{-1})$ . Pour ce faire, il suffit de déterminer les polynômes  $M(q^{-1})$  et  $Q(q^{-1})$  à partir de l'équation polynomiale :

$$S_o(q^{-1}) = M(q^{-1})D(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})Q(q^{-1}) \quad (\text{IV.12})$$

qui admet bien une solution unique, compte tenu de l'hypothèse  $\mathcal{H}3$ , pourvu que les degrés des polynômes sous-jacents soient spécifiés comme suit :

$$n_M = n_B + d - 1 \text{ et } n_Q = n_D - 1$$

Cette idée a été judicieusement exploitée par Tsypkin [100] pour traiter le problème de compensation adaptative aux moindres carrés dans le cas où le modèle des perturbations est inconnu dans un contexte de régulation. Cette contribution à été utilisée avec succès pour traiter des problèmes de compensation adaptative dans le cas d'un système flexible et d'un procédé de fermentation [45, 103]. Le cas de compensation adaptative des perturbations dans un contexte de poursuite a été traité dans [24] en utilisant le concept de modèle de référence sur l'état partiel avec un algorithme d'adaptation paramétrique relevant des techniques d'identification par appartenance à un ensemble, pour des considérations par rapport aux erreurs de modélisation inéluctables [87].

La pierre d'achoppement de la compensation adaptative des perturbations est une équation d'erreur qui résulte naturellement de l'équation d'erreur de poursuite en sortie en tenant compte du fait que les perturbations peuvent être déterminées à partir du comportement d'entrée-sortie si l'on dispose du modèle du système, i.e. la fonction de transfert  $G(z^{-1}) = z^{-d} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ , comme le stipule l'hypothèse  $\mathcal{H}1$ . En effet, on peut récrire l'équation d'erreur en sortie (IV.7) sous la forme suivante compte tenu de l'expression (IV.10) du polynôme  $S(q^{-1})$  caractérisant la famille des régulateurs stabilisants.

$$e_y(k) = \frac{S_o(q^{-1}) - q^{-d}B(q^{-1})Q(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} p(k) \quad (\text{IV.13})$$

avec :

$$p(k) = A(q^{-1})y(k) - q^{-d}B(q^{-1})u(k) \quad (\text{IV.14})$$

Et cette équation peut bien se mettre sous la forme d'une erreur d'équation :

$$e_y(k) = z(k) - \phi(k)^T \theta \quad (\text{IV.15})$$

avec :

$$\theta = \begin{bmatrix} q_o \\ \vdots \\ q_{n_Q} \end{bmatrix} \text{ et } \phi(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ \vdots \\ w(k - n_Q) \end{bmatrix}$$

où  $\{z(k)\}$  et  $\{w(k)\}$  sont des séquences que l'on peut déterminer à partir du comportement d'entrée-sortie du système de commande et de la connaissance disponible sur les systèmes et les performances requises comme suit :

$$z(k) = \frac{S_o(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} p(k)$$

$$w(k) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} p(k)$$

Les paramètres  $\{q_i\}_{i \in [0, n_Q]}$  peuvent être alors obtenus en temps réel à partir d'un algorithme d'adaptation paramétrique adéquat.

Il est important de remarquer que cette compensation des perturbations est réalisée sans aucune modification des pôles du système de commande modulo une adaptation paramétrique précise. On peut utiliser un algorithme du type moindres carrés dans le contexte déterministe des perturbations considéré. Dans un contexte réaliste où la modélisation du système n'est pas parfaite et la mesure de la sortie n'est pas infiniment précise, il est plus sage de tirer le meilleur profit des résultats disponibles sur la robustesse des algorithmes d'adaptation paramétrique [46]. Dans ce qui suit, on propose de réaliser cette adaptation paramétrique avec un algorithme robuste des moindres carrés développé dans [16] et connu sous l'appellation E $\omega$ -RLS.

### IV.2.3 L'algorithme d'identification E $\omega$ -RLS

Une attention particulière a été accordée à l'algorithme d'adaptation paramétrique basé sur l'identification par appartenance à un ensemble [87]. Contrairement aux algorithmes d'identification classiques, la motivation réside dans la possibilité de traiter le problème d'identification en présence des perturbations bornées sans avoir recours à toute hypothèse de modélisation [50]. Le problème d'identification, sous jacent, consiste à déterminer le plus petit ensemble de paramètres, correspondant aux mesures disponibles ainsi qu'à la borne supérieure des perturbations, contenant les modèles indiscernables du système [104]. Une méthode d'identification a été développée pour traiter un tel problème. Cette dernière consiste à combiner l'algorithme des moindres carrés récursifs moyennant une pondération appropriée de données avec un concept de stabilité robuste [16]. En effet, les paramètres estimés sont projetés sur les frontières d'une région ellipsoïdale conformément à la borne supérieure des perturbations. L'adaptation paramétrique est automatiquement gelée lorsque l'information acquise n'est pas susceptible d'améliorer le processus d'estimation paramétrique.

Le problème d'identification donné par l'équation (IV.15) peut être alors résolu en utilisant la méthode recursive de type ellipsoïdale en présence de perturbations bornées à partir du modèle suivant :

$$z(k) = \phi(k)^T \theta + e_y(k) \text{ avec } |e_y(k)| \leq \gamma \quad (\text{IV.16})$$

Le critère d'identification sous-jacent est :

$$J(\hat{\theta}(k)) = \sum_{i=0}^k \lambda(i, k) (z(i) - \theta^T(k) \phi(i))^2 \quad (\text{IV.17})$$

où  $\lambda(i, k)$  est un facteur d'oubli variant dans le temps donné par :

$$\lambda(i, k) = \lambda^{k-i} \lambda(i) \text{ et } \lambda(k, k) = \lambda(k) \text{ avec } \lambda \in [0, 1]$$

La séquence des paramètres  $\{\hat{\theta}(k)\}$  qui minimise le critère donné par l'équation (IV.17), l'algorithme d'adaptation se formule comme suit :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \lambda(k) F(k) \phi(k) \varepsilon(k)$$

$$F^{-1}(k) = \lambda F^{-1}(k-1) + \lambda(k) \phi(k) \phi^T(k)$$

avec :

$$F(k) = \frac{1}{\lambda} \left[ F(k-1) - \frac{\lambda(k) F(k-1) \phi(k) \phi^T(k) F(k-1)}{\lambda + \lambda(k) \gamma(k)} \right]$$

et

$$\gamma(k) = \phi^T(k) F(k-1) \phi(k)$$

Soient  $\varepsilon(k)$  l'erreur a posteriori et  $\hat{z}(k) = \hat{\theta}^T(k) \phi(k)$  le prédicteur a posteriori. L'expression de  $\varepsilon(k)$  est de la forme :

$$\varepsilon(k) = z(k) - \hat{z}(k) = z(k) - \hat{\theta}^T(k) \phi(k)$$

or d'après (IV.16) on a :

$$\varepsilon(k) = \theta^T(k) \phi(k) + e_y(k) - \hat{\theta}^T(k) \phi(k) = \tilde{\theta}^T(k) \phi(k) + e_y(k) \quad (\text{IV.18})$$

avec  $\tilde{\theta}(k)$  est le vecteur des erreurs sur les paramètres.

Soient  $\varepsilon_0(k)$  l'erreur a priori et  $\hat{z}_0(k) = \hat{\theta}^T(k-1) \phi(k)$  le prédicteur a priori.

$$\varepsilon_0(k) = z(k) - \hat{z}_0(k) = \tilde{\theta}^T(k-1) \phi(k) + e_y = \tilde{\theta}^T(k-1) \phi(k) + e_y(k)$$

Soit  $\hat{\theta}(k)$  le vecteur estimé qui minimise le critère (IV.17), à la convergence on a :

$$\theta(k) - \hat{\theta}(k) = \tilde{\theta}(k) = 0$$

En utilisant l'équation (IV.18), on peut écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) = e_y(k)$$

or d'après l'équation (IV.16) on a  $|e_y(k)| \leq \gamma \Rightarrow |\boldsymbol{\varepsilon}(k)| \leq \gamma$

d'où on a :

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(k))^2 - (\gamma)^2 \leq 0 \quad (\text{IV.19})$$

On définit la contrainte suivante :

$$h(\boldsymbol{\theta}(k)) = (\boldsymbol{\varepsilon}(k))^2 - (\gamma)^2 \leq 0 \quad (\text{IV.20})$$

Le problème d'estimation consiste alors, à estimer  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$  qui minimise le critère  $J(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k))$  et satisfait la contrainte donnée par (IV.20).

La relation entre l'erreur a priori  $\boldsymbol{\varepsilon}_0(k)$  et a posteriori  $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \frac{\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_0(k)}{\lambda + \lambda(k) \gamma(k)} \quad (\text{IV.21})$$

avec :

$$\gamma(k) = \boldsymbol{\phi}^T(k) P(k-1) \boldsymbol{\phi}(k)$$

En utilisant la relation (IV.21), l'équation (IV.20) peut se récrire comme suit :

$$h(\boldsymbol{\theta}(k)) = \left[ \frac{\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_0(k)}{\lambda + \lambda(k) \gamma(k)} \right]^2 - (\gamma)^2 \leq 0 \quad (\text{IV.22})$$

d'où  $h(\boldsymbol{\theta}(k)) = h(\boldsymbol{\theta}(k-1), \lambda(k))$

En effet, le problème peut être résolu en introduisant la fonction de Lagrange suivante :

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}(k), \boldsymbol{\mu}) = J(\boldsymbol{\theta}(k)) + \boldsymbol{\mu} h(\boldsymbol{\theta}(k-1), \lambda(k)) \quad (\text{IV.23})$$

où  $\boldsymbol{\mu} \geq 0$  est le multiplicateur de Lagrangian donné par :

$$\boldsymbol{\mu} = 0 \text{ si } h(\boldsymbol{\theta}(k-1), \lambda(k)) < 0$$

$$\boldsymbol{\mu} \neq 0 \text{ si } h(\boldsymbol{\theta}(k-1), \lambda(k)) = 0$$

En effet, pour minimiser le critère  $\Lambda(\boldsymbol{\theta}(k), \boldsymbol{\mu})$ , les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\frac{\partial^2 \Lambda(\boldsymbol{\theta}(k), \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2(k)} = \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta}(k))}{\partial \boldsymbol{\theta}^2(k)} = \sum_{i=0}^k \lambda(i, k) \boldsymbol{\phi}(i) \boldsymbol{\phi}^T(i) \geq 0$$

Cette condition est vérifiée car  $\lambda(i, k) \geq 0$  et  $\phi(i)\phi^T(i) \geq 0$

Les deux conditions suivantes sont alors nécessaires et suffisantes pour définir un minimum absolu [16].

$$\frac{\partial \Lambda(\theta(k), \mu)}{\partial \theta(k)} = 0 \quad (\text{IV.24})$$

$$\frac{\partial \Lambda(\theta(k), \mu)}{\partial \mu} = 0 \quad (\text{IV.25})$$

L'équation (IV.24) est équivalente à :

$$\frac{\partial J(\theta(k))}{\partial \theta(k)} = 0$$

L'équation (IV.25) peut se récrire d'une manière équivalent comme suit :

$$\frac{\partial \Lambda(\theta(k), \mu)}{\partial \mu} = h(\theta(k-1), \lambda(k)) = 0$$

Et compte tenu de l'équation (IV.22), on a :

$$\left[ \frac{\lambda \varepsilon_0(k)}{\lambda + \lambda(k) \gamma(k)} \right]^2 = \gamma^2 \quad (\text{IV.26})$$

d'où

$$\lambda(k) = \frac{\lambda}{\gamma(k)} \left[ \frac{|\varepsilon_0(k)|}{\gamma} - 1 \right] \quad (\text{IV.27})$$

avec :

$$\gamma(k) = \phi^T(k) P(k-1) \phi(k)$$

Le coefficient  $\lambda(k) \geq 0$  ce qui permet d'écrire d'après l'équation précédente :

$$|\varepsilon_0(k)| \geq \gamma \text{ et } \gamma(k) \neq 0$$

En effet, d'après l'équation (IV.19) on a :

$$|\varepsilon_0(k)| \leq \gamma$$

Les deux équations précédentes permettent de déduire que la solution unique qui vérifie l'équation (IV.27) est :

$$\lambda(k) = 0$$

Finalement, si  $\lambda(k) = 0$ , alors  $h(\theta(k)) < 0$  est vérifiée et la minimisation de  $\Lambda(\theta(k), \mu)$  revient à minimiser  $J(\theta(k))$ .

Le coefficient  $\lambda(k)$  est donné par l'équation suivante :

$$\lambda(k) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\gamma(k)} \left[ \frac{|\varepsilon_0(k)|}{\gamma} - 1 \right] & \text{si } |\varepsilon_0(k)| > \gamma \text{ et } \gamma(k) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.28})$$

La loi d'adaptation paramétrique définie ci dessus est alors donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{\lambda(k) F(k-1) \phi(k)}{\lambda + \lambda(k) \phi^T(k) F(k-1) \phi(k)} \varepsilon_0(k) \\ F(k) = \frac{1}{\lambda} \left[ F(k-1) - \frac{\lambda(k) F(k-1) \phi(k) \phi^T(k) F(k-1)}{\lambda + \lambda(k) \phi^T(k) F(k-1) \phi(k)} \right] \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

On notera que l'adaptation paramétrique est gelée dans les deux situations suivantes

- Les données d'entrée/sortie sont jugées relativement "pauvres" pour affiner la connaissance acquise sur la dynamique du système tot au long du processus d'adaptation paramétrique, i.e.  $\phi^T(k) F(k-1) \phi(k) \simeq 0$ .
- L'erreur de prédiction à priori est relativement petite par rapport aux perturbations, i.e.  $|\varepsilon_0(k)| \leq \gamma$ .

Dans ces deux derniers cas on a  $\lambda(k) = 0$  et  $\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1)$ .

L'organigramme de la figure [IV.1](#) résume le principe de la méthode de compensation adaptative des perturbations développée.

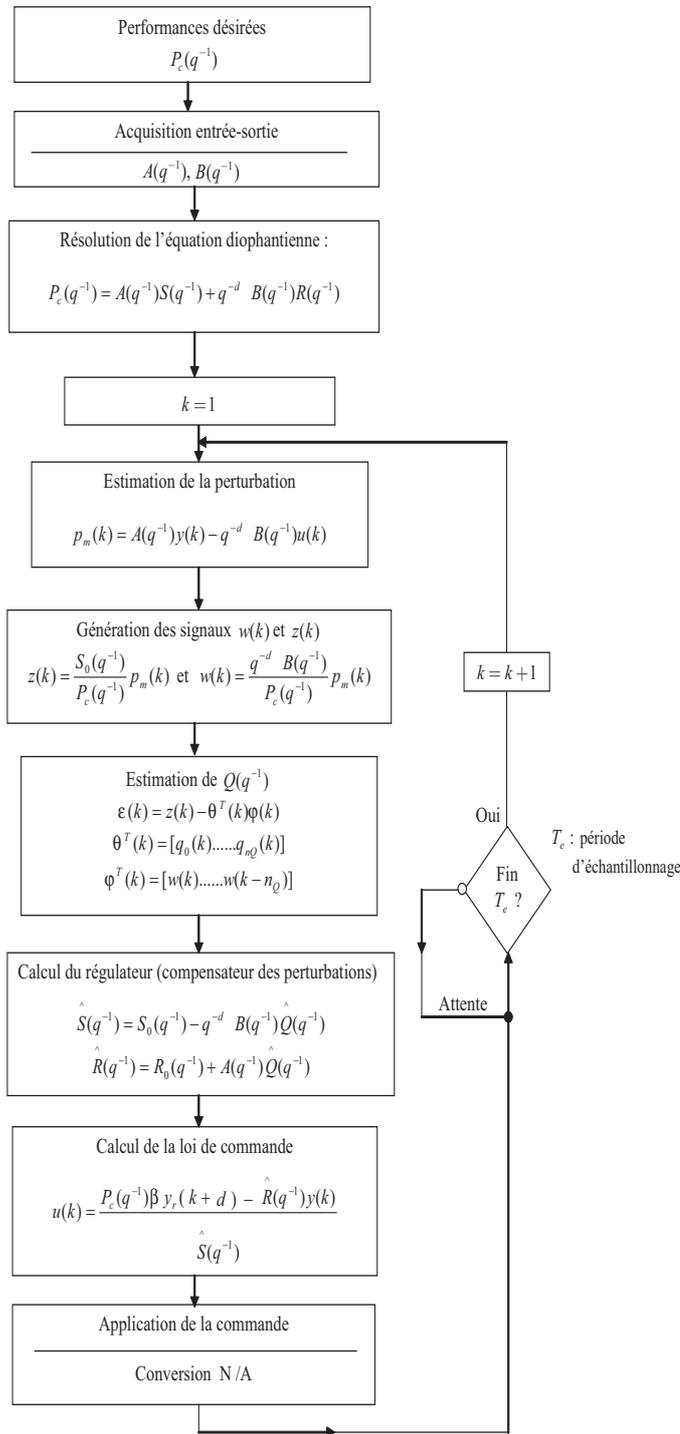


FIG. IV.1 – Organigramme de compensation adaptative des perturbations.

## IV.2.4 Résultats de simulation

Dans ce qui suit, on présente des résultats de simulation obtenus avec l'algorithme de compensation adaptative présenté ci-dessus pour illustrer ses performances dans un contexte idéal et sa robustesse dans le cas d'une connaissance imparfaite du système, notamment un système linéaire variant dans le temps.

Dans le cas idéal, le système considéré est supposé être parfaitement décrit par un modèle linéaire invariant dans le temps décrit par :

$$y(k) = 0.5y(k-1) - 0.1y(k-2) + 0.3u(k-1) + 0.25u(k-2) + p(k) \quad (\text{IV.30})$$

où  $p(k)$  est une perturbation de charge sinusoïdale donnée sur la figure IV.2.

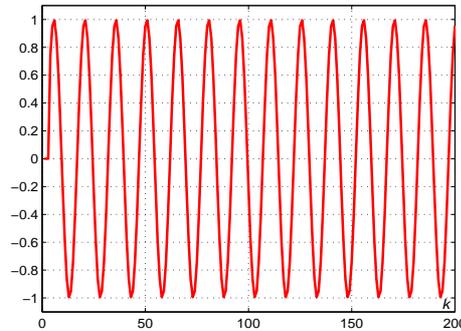


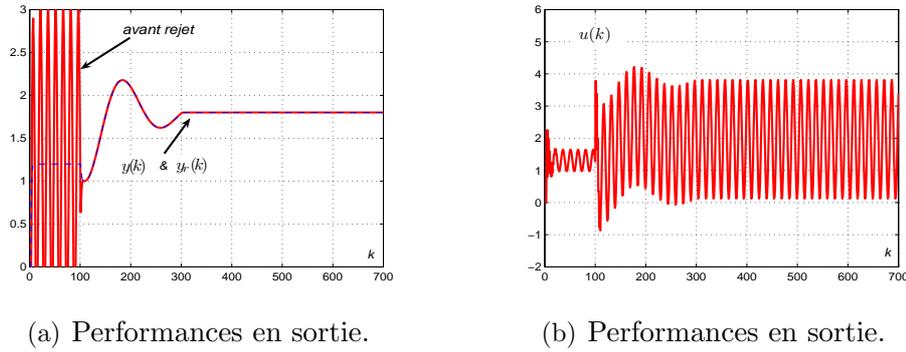
FIG. IV.2 – Perturbation de charge sinusoïdale.

Le modèle de référence sur l'état partiel retenu dans ce cas est donné par l'équation :

$$y_r(k) = 0.6y_r(k-1) - 0.1y_r(k-2) + r(k-1) + 0.2r(k-2) \quad (\text{IV.31})$$

où  $\{r(k)\}$  est la séquence de point de consigne.

La figure IV.3 montre le comportement d'entrée-sortie du système de commande. On notera que la compensation des perturbations est parfaite, dès que la procédure de rejection de perturbation est mise en œuvre à l'instant  $k = 100$ . Ces performances résultent naturellement de celles de l'algorithme d'adaptation paramétrique sous-jacent, en l'occurrence sa convergence paramétrique comme l'indique la figure IV.4.



(a) Performances en sortie.

(b) Performances en sortie.

FIG. IV.3 – Performances entrée-sortie du système de commande.

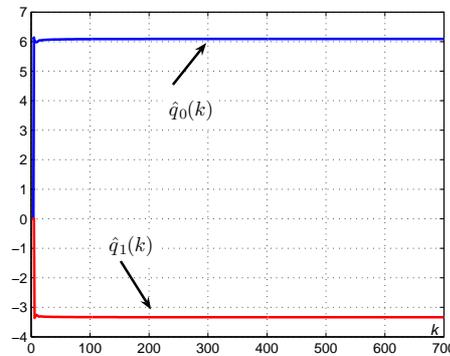


FIG. IV.4 – Evolutions des paramètres estimés.

Considérons maintenant le cas où le système est décrit par un modèle linéaire variant dans le temps donné par :

$$y(k) = -a_o(k)y(k-1) - a_1(k)y(k-2) + b_o(k)u(k-1) + b_1(k)u(k-2) + p(k) \quad (\text{IV.32})$$

où les paramètres  $a_i(k)$  et  $b_i(k)$  varient dans le temps comme l'indique la figure IV.5.

Les figures IV.6 et IV.7 montrent respectivement le comportement d'entrée-sortie du système de commande et l'évolution des paramètres estimés. Ces résultats de simulation ont été obtenus avec les mêmes paramètres de synthèse que dans le cas idéal. Il apparaît clairement que l'algorithme de compensation adaptative considéré n'est pas bien approprié au cas des systèmes qui exhibent des changements dynamiques.

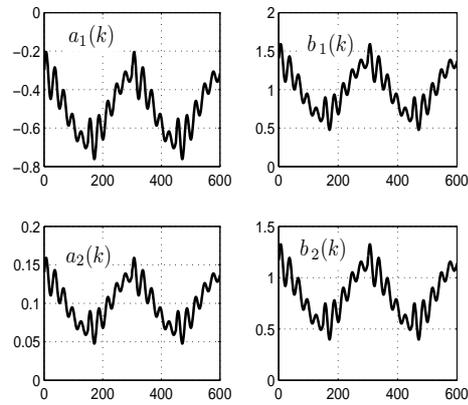
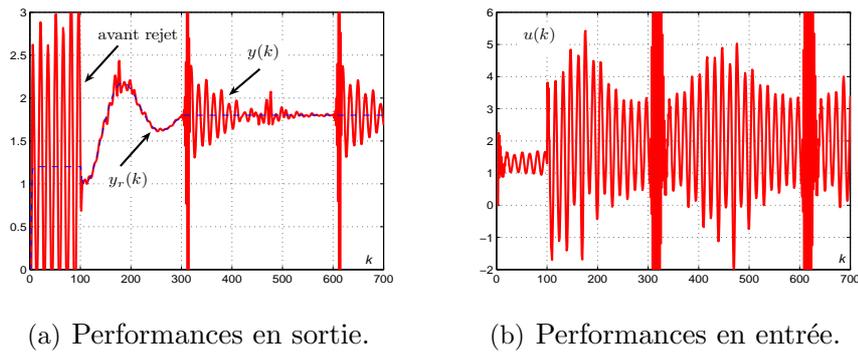


FIG. IV.5 – Variations des paramètres du modèle.



(a) Performances en sortie.

(b) Performances en entrée.

FIG. IV.6 – Compensation adaptative des perturbations sinusoïdales.

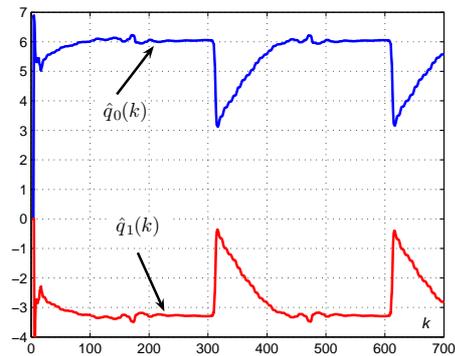


FIG. IV.7 – Evolutions des paramètres estimés.

## IV.2.5 L'approche multimodèle pour la compensation des perturbations de charge en présence des systèmes linéaires variant dans le temps

Devant le constat de carence de robustesse de l'algorithme de compensation adaptative des perturbations proposé par rapport aux variations des paramètres du modèle du système, on se propose dans ce qui suit d'étudier l'apport d'une approche multimodèle pour la compensation des perturbations en présence d'un système dont les paramètres sont variables dans le temps.

L'approche multimodèle est principalement basée sur une famille finie de  $N$  modèles linéaires invariants permettant de représenter au mieux le comportement dynamique du système linéaire invariants à partir d'une décomposition adéquate du domaine de fonctionnement. L'algorithme de compensation adaptative est obtenu à partir d'une commutation appropriée entre les lois de compensation adaptative directe correspondantes à chaque modèle de la famille pour réaliser les performances requises dans son domaine de validité. Un algorithme d'adaptation paramétrique robuste est utilisé pour ce faire pour garantir une bonne robustesse dans le cas de variations relativement lentes de la fréquence des perturbations harmoniques. La commutation est particulièrement effectuée à la base d'informations pertinentes reconstruites par un superviseur constitué d'une famille de prédicteurs dont la conception est faite à partir de la famille des modèles considérée.

### IV.2.5.1 Structure de la commande multimodèle

On utilisera plus particulièrement la structure de la commande multimodèle avec modèle de référence [78, 79, 84] donnée par la figure IV.8. Le commutateur sélectionne le contrôleur associé au prédicteur qui minimise le critère suivant [42] :

$$J_i(k) = \alpha \varepsilon_i^2(k) + \beta \sum_{j=1}^k e^{-\lambda(k-j)} \varepsilon_i^2(k) \text{ pour } i \in [1, N] \quad (\text{IV.33})$$

avec :

$$\varepsilon_i(k) = y(k) - \hat{y}_{ri}(k)$$

où  $\hat{y}(k)$  et  $\hat{y}_{ri}(k)$  sont respectivement la sortie du système et la sortie du  $i^{\text{ème}}$  prédicteur et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  sont des constantes positives.

La figure IV.9 donne la structure du prédicteur local considéré, soit :

$$P_c(q^{-1})\hat{y}_{ri}(k) = \frac{1}{\beta_i} \left( S_i(q^{-1})u(k-d) + R_i(q^{-1})y(k-d) \right) \quad (\text{IV.34})$$

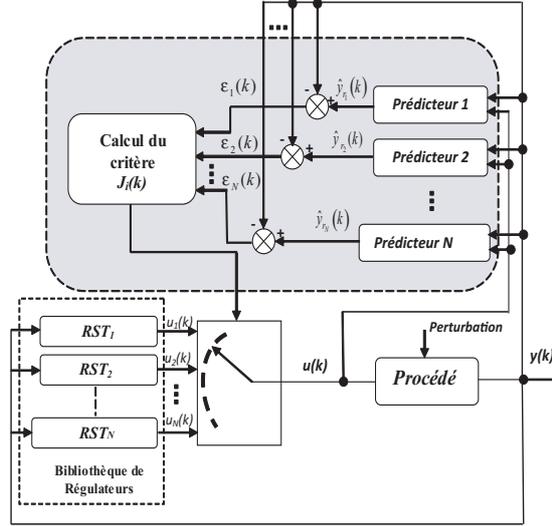


FIG. IV.8 – Schéma fonctionnel du système de commande multimodèle.

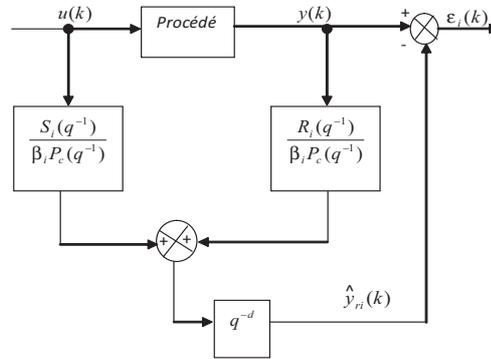


FIG. IV.9 – Structure du prédicteur local.

#### IV.2.5.2 Résultats de simulation

L'approche de commande multimodèle avec modèle de référence présentée ci-dessus a été appliquée pour traiter le problème de compensation des perturbations harmoniques pour le système linéaire variant dans le temps décrit par l'équation

(IV.32). La base des modèles représentant le comportement global du système et servant pour la synthèse de la loi de commande multimodèle a été générée par la méthode de classification de *Chiu* présentée au chapitre II. Le système linéaire variant dans le temps est raisonnablement approximé par trois modèles de second ordre donnés par les fonctions de transfert suivantes :

$$\mathcal{M}_1(z^{-1}) = 0.2964z^{-1} \frac{1 + 0.8649z^{-1}}{1 - 0.4721z^{-1} + 0.1336z^{-2}} \quad (\text{IV.35})$$

$$\mathcal{M}_2(z^{-1}) = 0.2737z^{-1} \frac{1 + 0.9669z^{-1}}{1 - 0.4290z^{-1} + 0.1394z^{-2}} \quad (\text{IV.36})$$

$$\mathcal{M}_3(z^{-1}) = 0.3600z^{-1} \frac{1 + 0.7443z^{-1}}{1 - 0.4668z^{-1} + 0.0998z^{-2}} \quad (\text{IV.37})$$

Pour chaque modèle local, on associe un algorithme de compensation adaptative des perturbations.

On présente dans ce qui suit les résultats de simulation obtenus dans le cas d'une commutation entre les régulateurs locaux et d'une fusion des régulateurs locaux.

#### 1- *Cas de la commutation*

La loi de commande à appliquer effectivement au système est obtenue par une commutation entre les lois de commande élémentaires données par :

$$S_i(q^{-1})u_i(k) + R_i(q^{-1})y(k) = T_i(q^{-1})y_r(k+d) \text{ pour } i \in [1,3] \quad (\text{IV.38})$$

avec :

$$\begin{aligned} S_i(q^{-1}) &= S_{oi}(q^{-1}) - q^{-d}\hat{Q}_i(q^{-1})B_i(q^{-1}) \\ R_i(q^{-1}) &= R_{oi}(q^{-1}) + \hat{Q}_i(q^{-1})A_i(q^{-1}) \\ T_i(q^{-1}) &= \beta_i P_c(q^{-1}) = \frac{1}{B_i(1)} P_c(q^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

Les figures IV.10 et IV.11 montrent le comportement entrée-sortie du système de compensation adaptative multimodèle et les évolutions des paramètres estimés correspondantes. L'affinement des performances par rapport à celles réalisées par la compensation adaptative proposée plus haut est incontestable ; il suffit de contempler les figures IV.10 et IV.6 pour s'en convaincre.

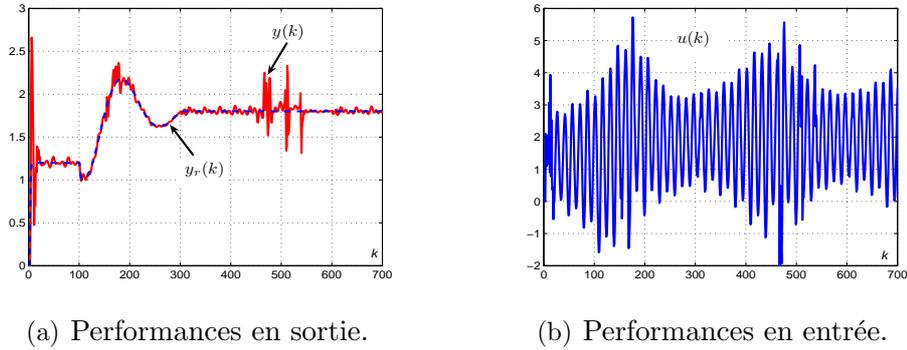


FIG. IV.10 – Compensation multimodèle des perturbations de charge.

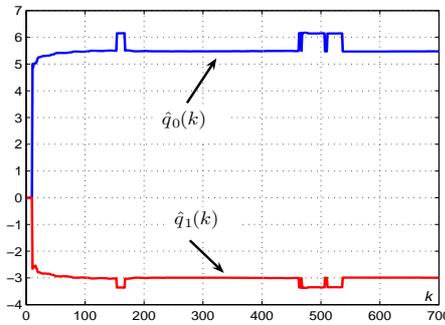


FIG. IV.11 – Evolutions des paramètres estimés.

## 2- Cas de la fusion

Dans le cas d'une fusion, l'erreur de modélisation  $\epsilon_i(k)$  peut être exploitée pour déterminer les différentes validités des modèles partiels exprimant la contribution de chaque modèle dans la description globale du comportement du système. Les validités sont alors données par l'expression suivante :

$$v_i(k) = \frac{1}{N-1} \left( 1 - \frac{r_i(k)}{\sum_{c=1}^N r_c(k)} \right) \text{ pour } i \in [1, 3] \quad (\text{IV.40})$$

avec :

$$r_i(k) = |\epsilon_i(k)| \quad (\text{IV.41})$$

La loi de commande globale  $u_g(k)$  à appliquer au système est obtenue par une fusion des paramètres des régulateurs locaux comme suit :

$$S_g(q^{-1})u(k) + R_g(q^{-1})y(k) = T_g(q^{-1})y_r(k+d) \quad (\text{IV.42})$$

où  $S_g(q^{-1})$ ,  $R_g(q^{-1})$  et  $T_g(q^{-1})$  sont les polynômes de la commande multimodèle donnés en fonction des polynômes partiels  $S_i(q^{-1})$ ,  $R_i(q^{-1})$  et  $T_i(q^{-1})$  de chaque régulateur local et des degrés de validités  $v_i(k)$  comme suit :

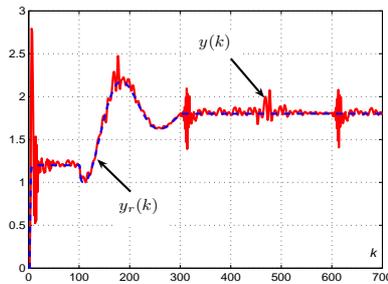
$$\begin{aligned} T_g(q^{-1}) &= \sum_{i=1}^N v_i(k) T_i(q^{-1}) \\ S_g(q^{-1}) &= \sum_{i=1}^N v_i(k) S_i(q^{-1}) \\ R_g(q^{-1}) &= \sum_{i=1}^N v_i(k) R_i(q^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

avec :

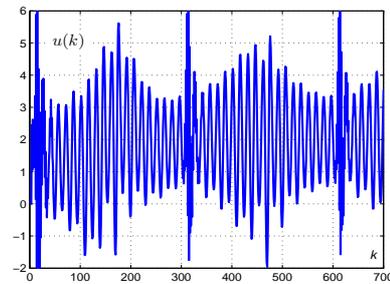
$$\begin{aligned} S_i(q^{-1}) &= S_{oi}(q^{-1}) - q^{-d} \hat{Q}_i(q^{-1}) B_i(q^{-1}) \\ R_i(q^{-1}) &= R_{oi}(q^{-1}) + \hat{Q}_i(q^{-1}) A_i(q^{-1}) \\ T_i(q^{-1}) &= \beta_i P_c(q^{-1}) = \frac{1}{B_i(1)} P_c(q^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

où  $P_c(q^{-1})$  désigne le polynôme caractéristique du système de commande.

Les figures IV.12 et IV.13 montrent respectivement le comportement d'entrée-sortie du système de commande multimodèle et les évolutions des degrés de validités correspondants. Les performances obtenues sont meilleures que celles obtenues par le système de compensation adaptative proposé plus-haut.



(a) Performances en sortie.



(b) Performances en entrée.

FIG. IV.12 – Compensation multimodèle des perturbations de charge (fusion).

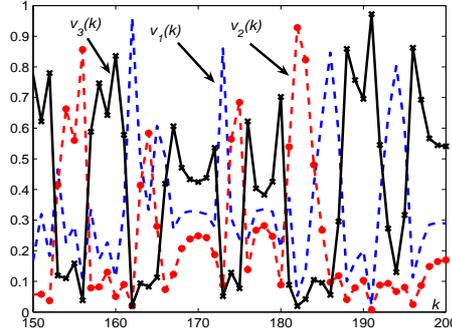


FIG. IV.13 – Evolutions des degrés de validité.

### IV.3 Compensation des perturbations harmoniques à fréquence variable

On se propose dans cette partie d'évaluer la robustesse de la méthode de compensation adaptative des perturbations décrite précédemment dans le cas des perturbations harmoniques à fréquence variable en supposant que la modélisation du système est parfaite. On considérera d'abord le cas d'une seule perturbation et ensuite le cas de plusieurs perturbations.

#### IV.3.1 Cas d'une seule perturbation harmonique

Le système est supposé linéaire invariant dans le temps de second ordre donné par l'équation suivante :

$$y(k) = 0.05y(k-1) - 0.68y(k-2) + u(k-1) + 1.55u(k-2) + p(k) \quad (\text{IV.45})$$

où  $p(k)$  est une perturbation de charge harmonique à fréquence variable donnée par :

$$(1 - 2\cos(2\Pi f(k)T_e)q^{-1} + q^{-2})p(k) = v\sin(2\Pi f(k)T_e)\delta(k-1)$$

où  $f(k)$  est une fréquence variable. La figure montre les variations de la fréquence considérées (figure IV.14-a) et la perturbation qui en résulte (figure IV.14-b).

La figure IV.15 montre les performances d'entrée-sortie du système de compensation adaptative proposé. On notera que l'algorithme d'adaptation paramétrique considéré n'est pas doté d'une bonne capacité d'adaptation pour réaliser la compensation des perturbations non stationnaire.

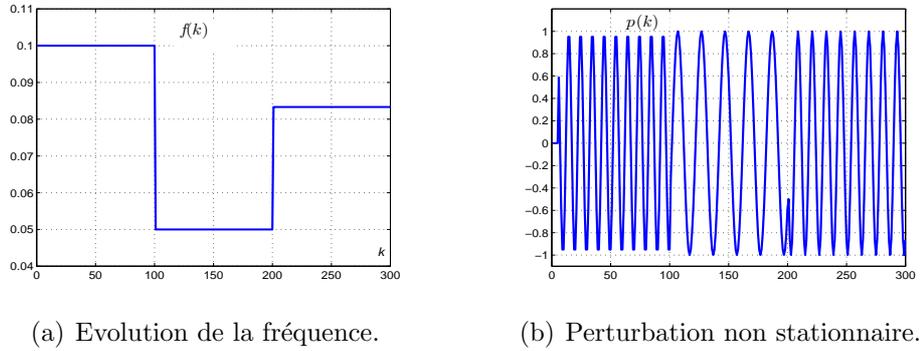


FIG. IV.14 –

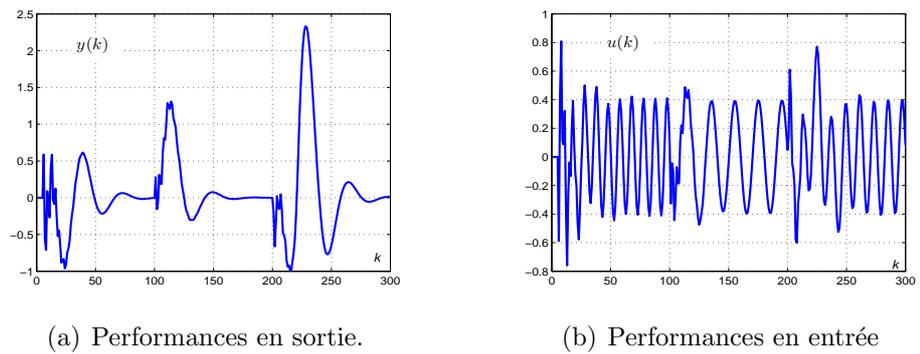


FIG. IV.15 – Compensation adaptative des perturbations de charge.

### IV.3.2 Cas de plusieurs perturbations harmoniques à fréquence variable

Considérons le cas du système linéaire invariant dans le temps de premier ordre donné par l'équation suivant :

$$y(k) = 0.6703y(k-1) + 0.3297u(k-1) + p(k) \quad (\text{IV.46})$$

où  $p(k)$  est issue de la somme de deux perturbations harmoniques  $p_l(k)$  et  $p_j(k)$  de fréquences  $f_l$  et  $f_j$  variables dans le temps comme suit :

- pour  $1 < k \leq 500$  et  $2500 < k \leq 3000$ ,  $f_i = 10\text{Hz}$  et  $f_j = 15\text{Hz}$ .
- pour  $500 < k \leq 1000$  et  $1500 < k \leq 2000$ ,  $f_i = 5\text{Hz}$  et  $f_j = 8\text{Hz}$ .
- pour  $1000 < k \leq 1500$  et  $2000 < k \leq 2500$ ,  $f_i = 10\text{Hz}$  et  $f_j = 8\text{Hz}$ .

La figure IV.16 montre l'évolution de la perturbation de charge sinusoïdale non stationnaire correspondante.

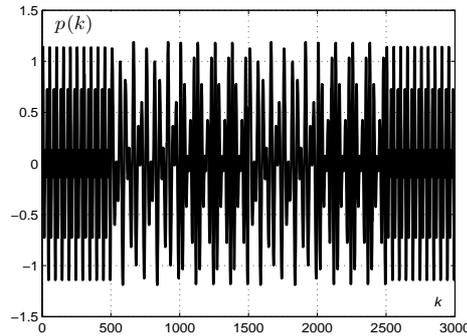


FIG. IV.16 – Perturbation de charge non stationnaire.

Les figures IV.17 et IV.18 montrent respectivement les performances réalisées par le système de compensation adaptative proposé et l'évolution des paramètres estimés correspondants. Comme dans le cas d'une seule perturbation, on retrouve l'incapacité de l'algorithme d'adaptation paramétrique à traiter le cas des perturbations non stationnaires.

On montrera, dans le paragraphe suivant, que l'approche multimodèle offre une solution plus intéressante modulo une bonne connaissance de la dynamique des perturbations.

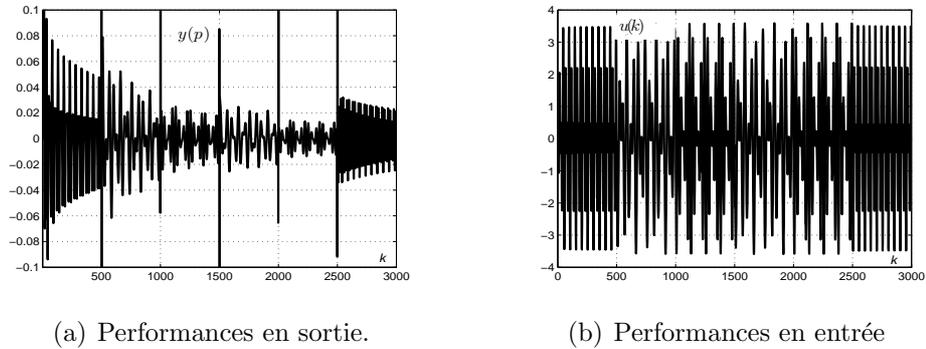


FIG. IV.17 – Compensation adaptative des perturbations de charge.

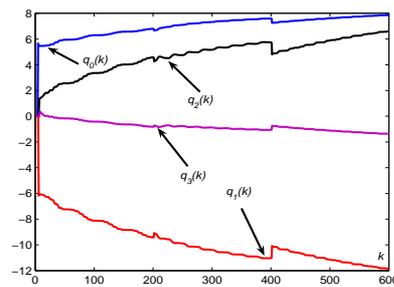


FIG. IV.18 – Evolutions des paramètres estimés .

### IV.3.3 Compensation des perturbations non stationnaires : une approche multimodèle

La compensation des perturbations non stationnaires peut être réalisée par une compensation multimodèle pourvu que ces perturbations puissent être raisonnablement décrites par une combinaison linéaire finie de perturbations stationnaires dont les modèles sont connus, i.e.

$$p(k) = \sum_{i=1}^{N_f} \alpha_i p_i(k) \quad (\text{IV.47})$$

avec :

$$D_i(q^{-1})p_i(k) = C_i(q^{-1})\delta(k) \quad (\text{IV.48})$$

où les  $\alpha_i$  pour  $i \in [1, N_f]$  sont des scalaires inconnus. On peut alors concevoir une famille de régulateurs  $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in [1, N_f]}$  de manière à ce que chaque système de commande élémentaire correspondant au  $\mathcal{R}_i$  réalise une compensation parfaite de la composante de perturbation décrite par la fonction de transfert  $\mathcal{H}_i(z^{-1}) = \frac{C_i(z^{-1})}{D_i(z^{-1})}$ .

La loi de commande multimodèle peut être alors élaborée à partir d'une fusion des régulateurs  $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in [1, N_f]}$  comme suit :

$$S_g(q^{-1})u_g(k) + R_g(q^{-1})y(k) = P_c(q^{-1})\beta y_r(k+d) \quad (\text{IV.49})$$

avec :

$$\begin{aligned} S_g(q^{-1}) &= \sum_{i=1}^{N_f} v_i(k) S_i(q^{-1}) \\ R_g(q^{-1}) &= \sum_{i=1}^{N_f} v_i(k) R_i(q^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

où  $P_c(q^{-1})$  désigne le polynôme caractéristique spécifié conformément à la dynamique de régulation désirée et les  $v_i(k)$  représentent les degrés de validité des modèles des perturbations stationnaires  $\mathcal{H}_i(z^{-1})$  donnés par :

$$v_i(k) = \frac{1}{N_f - 1} \left( 1 - \frac{r_i(k)}{\sum_{c=1}^{N_f} r_c(k)} \right) \quad (\text{IV.51})$$

avec

$$r_i(k) = |p(k) - p_i(k)| \quad (\text{IV.52})$$

où  $p_i(k)$  désigne les perturbations élémentaires stationnaires. Rappelons que  $p(k)$  peut être reconstruite du comportement entrée-sortie du système comme suit :

$$p(k) = A(q^{-1})y(k) - q^{-d}B(q^{-1})u(k) \quad (\text{IV.53})$$

et que  $(S_i(q^{-1}), R_i(q^{-1}))$  n'est autre que la paire polynomiale associée au régulateur  $\mathcal{R}_i$  réalisant une compensation parfaite de la composante stationnaire  $p_i(k)$  des perturbations et que l'on peut déterminer à partir de la famille des régulateurs stabilisants comme suit :

$$\begin{aligned} S_i(q^{-1}) &= S_o(q^{-1}) - q^{-d}Q_i(q^{-1})B(q^{-1}) \\ R_i(q^{-1}) &= R_o(q^{-1}) + Q_i(q^{-1})A(q^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

avec :

$$S_o(q^{-1}) = M_i(q^{-1})D_i(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})Q_i(q^{-1}) \quad (\text{IV.55})$$

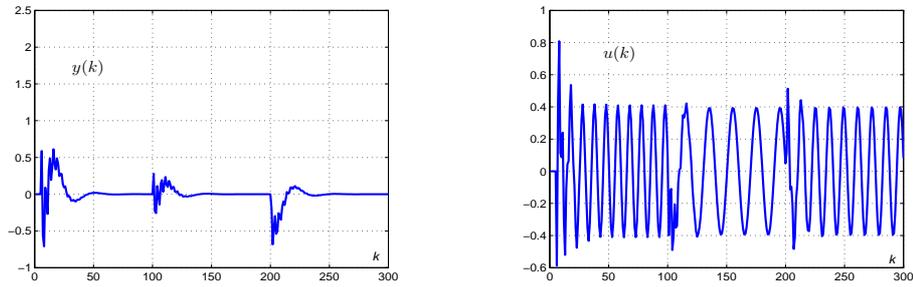
Rappelons que le polynôme  $S_o(q^{-1})$  est issu de la synthèse du régulateur central  $\mathcal{R}_o$  que l'on effectue à partir de la solution de l'équation polynomiale :

$$A(q^{-1})S_o(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})R_o(q^{-1}) = P_c(q^{-1})$$

On présente dans ce qui suit des résultats de simulation qui montrent clairement la faisabilité de l'approche de compensation multimodèle des perturbations non stationnaires que l'on peut modéliser par une combinaison linéaire de perturbations stationnaires dont on connaît les modèles générateurs.

Les figures [IV.19](#) et [IV.20](#) montrent respectivement les performances entrée-sortie du système de compensation multimodèle et les évolutions des degrés de validité des modèles des perturbations correspondants dans le cas d'une perturbation harmonique à fréquence variable. Les variations considérées de la fréquence sont les mêmes que celles utilisées dans le cas d'une seule perturbation pour le système de compensation adaptative présenté plus haut et dont les performances entrée-sortie sont données par la figure [IV.15](#)). Notons que la compensation est quasi-parfaite et que les transitoires qui résultent des variations du régulateur global sont admissibles.

Les figures [IV.21](#) et [IV.22](#) montrent respectivement les performances entrée-sortie du système de compensation multimodèle et les évolutions des degrés de validité des modèles des perturbations correspondants dans le cas d'une somme de deux perturbations harmoniques à fréquence variable. Ces composantes harmoniques sont les mêmes que celles utilisées dans le cas d'une combinaison linéaire de deux perturbations harmoniques à fréquence variable pour le système de compensation adaptative présenté plus haut et dont les performances entrée-sortie sont données par la figure [IV.17](#). Ceci corrobore la faisabilité d'une approche multimodèle pour la compensation des perturbations non stationnaires relativement bien modélisées.



(a) Performances en sortie.

(b) Performances en entrée.

FIG. IV.19 – Compensation des perturbations de charge.

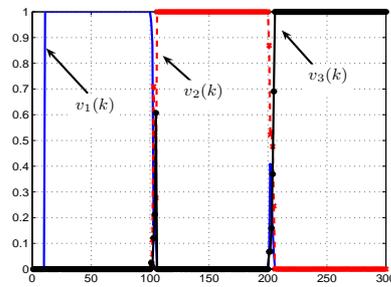


FIG. IV.20 – Evolutions des degrés de validité.

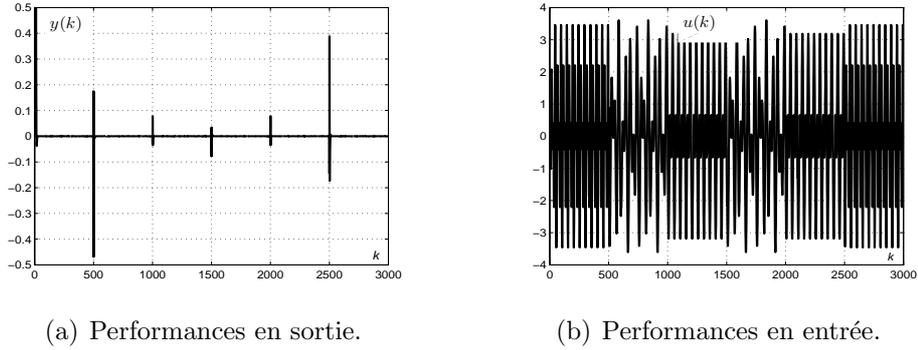


FIG. IV.21 – Compensation des perturbations de charge.

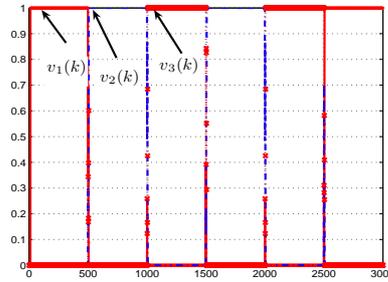


FIG. IV.22 – Degrés de validité des modèles des perturbations.

Il est important de remarquer que les amplitudes et les phases des perturbations harmoniques considérées ont été supposées invariantes dans le temps et que les performances du système de compensation multimodèle proposé peuvent se dégrader en présence des variations d'amplitude et de phase des perturbations. Pour pallier ce problème, il s'avère nécessaire de modifier le critère de décision relatif à la validité des modèles des perturbations. Une solution consiste à ne prendre en compte que la période de la perturbation en modifiant la relation (IV.52) comme suit :

$$r_i(k) = \hat{T}(k) - T_i(k) \quad (\text{IV.56})$$

où les  $T_i(k)$  pour  $i \in [1, N_f]$  désignent les périodes partielles des composantes harmoniques des perturbations et  $\hat{T}(k)$  est une estimée de la période des perturbations. Cette estimation est réalisée par une méthode appropriée que l'on présente ci-dessous.

### IV.3.3.1 Estimation de la période d'une perturbation

La boucle de verrouillage d'amplitude et de phase est principalement destinée à la reconstruction d'un signal périodique dans la mesure où elle permet de réaliser une estimation conjointe de son amplitude et sa phase [13, 14]. On notera que l'estimation de la période est directement déduite de celle de la phase.

Pour mieux appréhender les choses, considérons une perturbation harmonique  $p(k)$  décrite par l'équation suivante :

$$p(k) = a(k)\cos(\varphi(k)) \quad (\text{IV.57})$$

où  $a(k)$  et  $\varphi(k)$  sont respectivement l'amplitude et la phase de la perturbation. L'estimation de la perturbation peut être effectuée à partir du modèle d'estimation suivant :

$$\hat{p}(k) = \hat{a}(k)\cos(\hat{\varphi}(k)) \quad (\text{IV.58})$$

où  $\hat{a}(k)$  et  $\hat{\varphi}(k)$  désignent respectivement des estimées de  $a(k)$  et  $\varphi(k)$ . Quant à l'estimation de la fréquence, elle peut être déterminée à partir de l'estimée de la phase comme suit :

$$\hat{w}(k) = \hat{\varphi}(k+1) - \hat{\varphi}(k) \quad (\text{IV.59})$$

Et cette estimée permet de déduire une estimée de la période.

$$\hat{T}(k) = \frac{2\Pi}{\hat{w}(k)} \quad (\text{IV.60})$$

On notera que l'équation (IV.59) peut se récrire sous la forme :

$$\hat{w}(k) = \frac{1 - q^{-1}}{q^{-1}} \hat{\varphi}(k) \quad (\text{IV.61})$$

qui fait apparaître explicitement la fonction de transfert reliant la fréquence de la perturbation à sa phase. Ce modèle d'estimation de la fréquence d'un signal harmonique en fonction de sa phase est généralement modifié pour des considérations de stabilité et de performances comme suit :

$$\hat{w}(k) = \frac{1}{\beta_w} \frac{1 - q^{-1}}{(1 - \alpha_w q^{-1})} \hat{\varphi}(k) \text{ avec } \alpha_w = 1 - \frac{1}{\beta_w} \quad (\text{IV.62})$$

où le paramètre  $\beta_w$  est choisi de manière à assurer que le paramètre  $\alpha_w$  soit strictement inférieur à un.

L'estimation d'une perturbation harmonique peut être alors effectuée aux moindres carrés à partir de la minimisation du critère suivant :

$$J = \mathcal{E} \left\{ (e(k))^2 \right\} \quad (\text{IV.63})$$

avec

$$e(k) = p(k) - \hat{p}(k) = a(k)\cos(\varphi(k)) - \hat{a}(k)\cos(\hat{\varphi}(k)) \quad (\text{IV.64})$$

On peut alors utiliser un algorithme du gradient pour réaliser une estimation de l'amplitude et la fréquence du signal comme suit :

$$\hat{a}(k) = \hat{a}(k-1) + 2\gamma_a e(k-1)\cos(\hat{\varphi}(k)) \quad (\text{IV.65})$$

$$\hat{w}(k) = \hat{w}(k-1) + 2\gamma_w e(k-1)\sin(\hat{\varphi}(k)) \quad (\text{IV.66})$$

où  $\gamma_a$  et  $\gamma_w$  sont des scalaires positifs qui représentent les gains d'adaptation de l'algorithme.

Et en utilisant les équations (IV.61) et (IV.66), on peut déterminer une estimée de la phase comme suit :

$$\hat{\varphi}(k) = \hat{\varphi}(k-1) + \beta_w \hat{w}(k) - \beta_w \alpha_w \hat{w}(k-1) \quad (\text{IV.67})$$

La structure de base de la boucle de verrouillage d'amplitude et de phase considérée est représentée comme l'indique la figure IV.23.

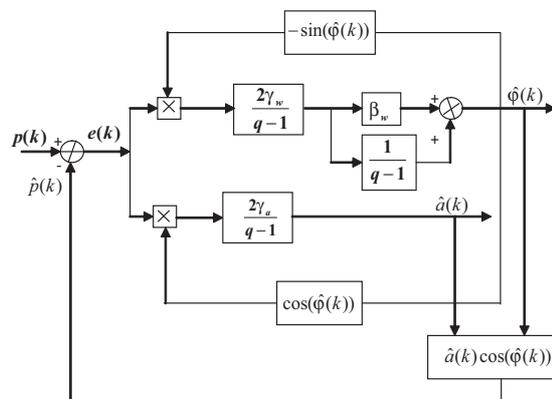


FIG. IV.23 – Structure de base d'une boucle de verrouillage d'amplitude et de phase.

### IV.3.3.2 Commande multimodèle

Supposons que les perturbations peuvent être décomposées sous la forme d'une combinaison linéaire finie de signaux harmonique  $p_i(k)$  de période et d'amplitude respectives  $T_i(k)$  et  $a_i(k)$ , on peut alors adopter une démarche de synthèse multimodèle caractérisée par une loi de commutation basée sur la minimisation du critère suivant :

$$J_i(k) = \alpha r_i^2(k) + \beta \sum_{j=1}^k e^{-\lambda(k-j)} r_i^2(k) \text{ pour } i \in [1, N_f] \quad (\text{IV.68})$$

avec :

$$r_i(k) = \hat{T}(k) - T_i(k) \quad (\text{IV.69})$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  sont des scalaires positifs qui représentent des paramètres de synthèse de la supervision. Le schéma de commande proposé est représenté par la figure IV.24.

Rappelons que chaque régulateur élémentaire est conçu conformément au principe du modèle interne pour réaliser une compensation parfaite de la composante  $p_i(k)$  des perturbations.

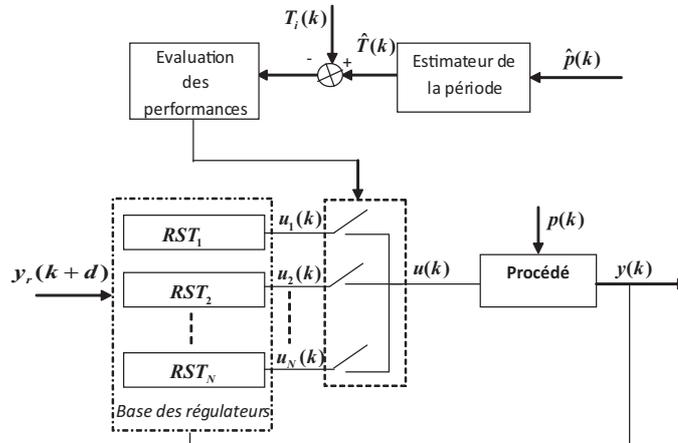


FIG. IV.24 – Schéma fonctionnel de compensation des perturbations.

### IV.3.3.3 Résultats de simulation

les résultats de simulation présentés dans ce qui suit ont été obtenus en appliquant la méthode de commande multimodèle présentée ci-dessus au système perturbé suivant :

$$y(k) = 0.74y(k-1) + 0.35y(k-2) + 0.95u(k-1) + 0.75u(k-2) + p(k) \quad (\text{IV.70})$$

où  $p(k)$  représente est une perturbation donnée :

$$p(k) = \begin{cases} 0.6\sin(\frac{2\Pi}{60}k) & \text{pour } k < 1000 \\ 0.8\sin(\frac{2\Pi}{40}k + \frac{2\Pi}{3}) & \text{pour } 1000 \leq k < 2000 \\ 0.5\sin(\frac{2\Pi}{80}k) & \text{pour } k \geq 2000 \end{cases} \quad (\text{IV.71})$$

On notera un déphasage égal à  $\frac{2\Pi}{3}$  apparaît entre les instants 1000 et 2000.

Les paramètres de synthèse ont été spécifiés comme suit :

$$P_c(q^{-1}) = 1 + 1.339q^{-1} + 1.0635q^{-2} + 0.4987q^{-3} + 0.1298q^{-4}$$

et

$$\alpha = 0.0001, \beta = 0.0001 \text{ et } \lambda = 0.09$$

Pour mieux appréhender le problème induit par des variations simultanées des paramètres du modèle des perturbations sur le critère de décision adopté, on propose de faire une synthèse initiale sans utiliser le module d'estimation de la période, i.e. l'erreur de décision est donnée par l'équation (IV.52). Les performances du système de commande résultant sont données par la figure IV.25. Il est clair que la stratégie de supervision considérée ne permet pas de réaliser la compensation requise des perturbations et plus particulièrement sur la période d'apparition du déphasage. Ceci est confirmé par l'évolution de la commutation entre les contrôleurs partiels comme l'indique la figure IV.26.

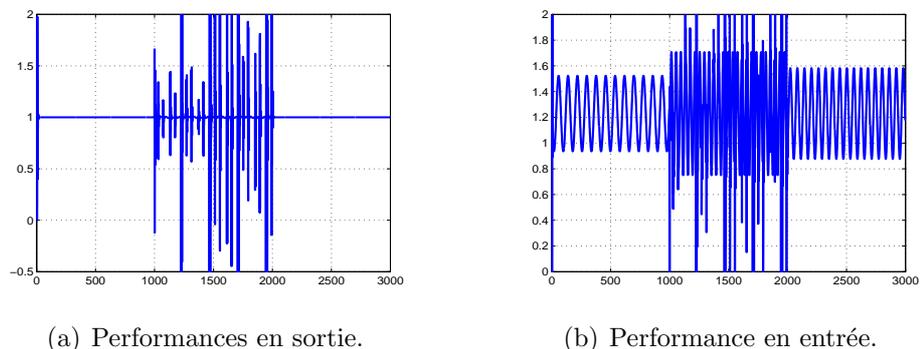


FIG. IV.25 – Compensation des perturbations harmoniques.

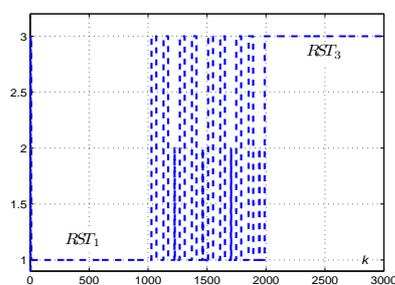


FIG. IV.26 – Commutation des régulateurs élémentaires.

La figure IV.27 montre les performances entrée-sortie du système de commande conçu avec une approche multimodèle utilisant une loi de commutation basée sur l'estimation des périodes des composantes harmoniques des perturbations via une boucle de verrouillage d'amplitude et de phase appropriée. La figure IV.28 corrobore le principe de commutation des régulateurs adopté : un seul régulateur est sélectionné pour chaque composante des perturbations de période  $T_i(k)$ . Les évolutions des périodes réelle et estimée ainsi que les perturbations reconstruites par la boucle de verrouillage d'amplitude et de phase sont respectivement données par IV.29. L'affinement des performances via une estimation adéquate de la période des perturbations est remarquable.

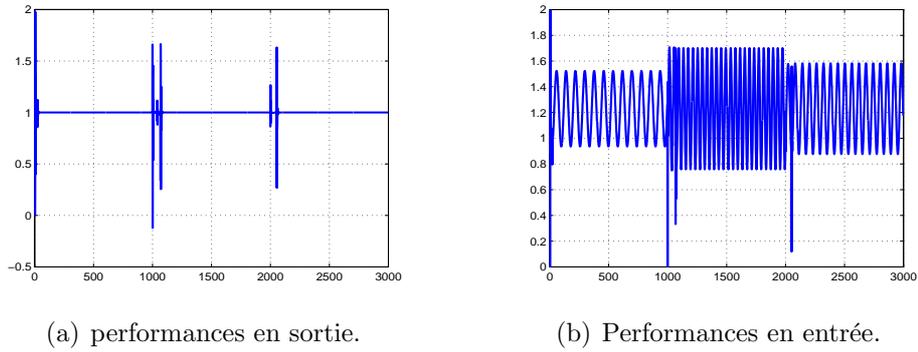


FIG. IV.27 – Compensation des perturbations harmoniques.

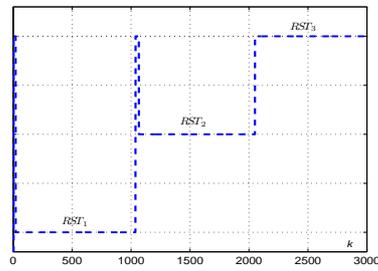


FIG. IV.28 – Commutation des régulateurs élémentaires.

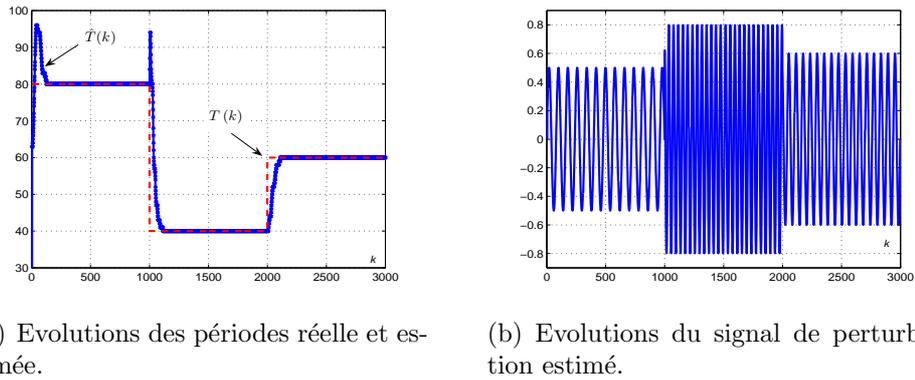


FIG. IV.29 – Estimation des perturbations et de leur période.

## IV.4 Conclusion

Le problème de compensation adaptative des perturbations a connu une attention particulière tout au long de la dernière décennie. Parmi les solutions disponibles, c'est la méthode de compensation adaptative directe introduite par Tsytkin qui a été bien appréciée pour sa simplicité. Elle utilise le principe du modèle interne en exploitant judicieusement la paramétrisation de Yula-Kucera de l'ensemble des régulateurs stabilisants. Des résultats probants ont été obtenus dans le cas où le comportement entrée-sortie du système peut être raisonnablement décrit par un modèle linéaire invariant et qu'une bonne connaissance sur la structure du modèle des perturbations est disponible. On retrouve toutefois tous les problèmes usuels de robustesse des algorithmes d'adaptation paramétrique par rapport aux erreurs de modélisation du système et aux variations des paramètres du modèle des perturbations.

La motivation de ce chapitre est double. La première motivation est une présentation compréhensive de la méthode de compensation adaptative directe dans un contexte de commande avec modèle de référence sur l'état partiel avec une illustration de ses mauvaises performances dans le cas d'un système linéaire variant dans le temps via un exemple académique. Le concept de modèle de référence sur l'état partiel est principalement adopté pour pouvoir spécifier d'une manière indépendante les dynamiques de poursuite et de régulation. La seconde motivation est de montrer que le concept de commande multimodèle peut être utilisé à bon escient pour traiter le problème de compensation des perturbations harmoniques.

Trois méthodes de commande multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel ont été proposées. La première méthode concerne les systèmes linéaires variants dans le temps, dont le comportement entrée-sortie du système est supposé être raisonnablement approximé par une famille finie de modèles linéaires invariants, soumis à des perturbations stationnaires. Elle est particulièrement basée sur l'utilisation d'une compensation adaptative directe pour chaque modèle élémentaire avec une logique de supervision adéquate pour la détermination de la loi de commande globale. La seconde méthode est consacrée au cas des systèmes linéaires invariants soumis à des perturbations non stationnaires que l'on peut modéliser par une combinaison linéaire finie de perturbations harmoniques stationnaires de fréquences connues. Elle est basée sur une synthèse élémentaire exploitant la paramétrisation de Yula-Kucera de l'ensemble des régulateurs stabilisants conformément au principe du modèle interne. La loi de commande globale est obtenue à partir d'une fusion appropriée des régulateurs élémentaires. La troisième méthode se distingue par rapport à la seconde par l'utilisation d'une boucle de verrouillage d'amplitude et de phase pour reconstruire les perturbations

et fournir une estimation raisonnable de la période des perturbations. La loi de commande globale est obtenue par une commutation des régulateurs élémentaires basée sur l'estimation de la période des perturbations.

Des résultats de simulation ont été présentés pour mettre en évidence les performances de chacune des méthodes proposées et mieux appréhender leurs limitations. Il faut absolument remarquer que ces méthodes requièrent une connaissance sur le comportement dynamique du système et les perturbations qui affectent son fonctionnement, e.g. une famille finie de modèles linéaires invariants ou une famille finie de composantes harmoniques. Cette connaissance ne peut être acquise d'une manière systématique si l'on juge par les méthodes d'identification disponibles.

# Chapitre V

## Synthèse de commande prédictive à base de modèle d'état et de multiobservateur

### V.1 Introduction

Les comportements dynamiques de nombreux systèmes physiques peuvent être décrits à l'aide d'un modèle mathématique qui fait intervenir un ensemble d'équations différentielles mettant en relation un nombre fini de variables internes, appelées également variables d'état. L'évolution temporelle du système est donc caractérisée par l'évolution de ses variables d'état qui dépend des signaux d'excitation appliqués et des conditions initiales.

La représentation d'état du système est particulièrement bien adaptée à la synthèse des systèmes de commande modulo une estimation adéquate des variables d'état. En effet, la mesure des variables d'état est beaucoup plus une exception qu'une règle dans la pratique. Une telle estimation est effectuée par un observateur asymptotique conçu à partir d'une approche modale ou optimale. Ces observateurs sont des systèmes dynamiques qui permettent de reconstruire les variables d'état du système à partir de son comportement d'entrée-sortie en utilisant une structure relativement simple introduite par *Luenberger*. Cette dernière consiste en le modèle du système avec une action proportionnelle appropriée sur l'erreur d'observation de sortie

Une recherche acharnée a été consacrée au problème de synthèse d'observateurs des systèmes linéaires et d'une classe de systèmes non linéaires que l'on peut réécrire sous la forme d'un modèle linéaire modulo une transformation adéquate. Les contributions sous-jacentes ont été étendues au cas des systèmes dont

le comportement dynamique peut être convenablement décrit par une famille de modèles linéaires [3, 18, 32, 48, 49, 59, 97]. Ces travaux s'inscrivent naturellement dans le cadre des études de stabilisation des systèmes dans le contexte d'une approche multimodèle. La synthèse de l'observateur est communément basée sur une approche de *Lyapunov* qui consiste à vérifier un ensemble d'inégalités matricielles linéaires *LMI*.

Dans ce chapitre, on propose une approche de commande multimodèle avec retour d'état incorporant un observateur. La synthèse du système de commande avec retour d'état est effectuée en utilisant une technique de commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel, alors que la synthèse de l'observateur est basée sur une approche *LMI*. Le concept de modèle de référence est particulièrement motivé par des considérations de simplicité de spécification des performances [71]. Quant à l'approche *LMI*, elle s'est imposée par son adéquation aux synthèses multimodèles issues des résultats disponibles sur la robustesse des systèmes linéaires incertains.

Ce chapitre est organisé en quatre parties. Dans la première partie, on donne la représentation d'état et la structure de l'observateur considérées. La seconde partie est dédiée à la synthèse du système de commande avec retour d'état sous-jacent. On y présente l'objectif de commande et les étapes de synthèse du système de commande prédictive multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel. La troisième partie est réservée à la synthèse de l'observateur et l'analyse de stabilité du système de commande. Dans la quatrième partie, on présente un ensemble de résultats de simulation pour mieux appréhender les performances du système de commande multimodèle proposé. Ces résultats concernent la commande d'un bioréacteur.

## V.2 Synthèse de la loi de commande avec modèle de référence sur l'état partiel

La commande avec modèle de référence sur l'état partiel représente une alternative relativement intéressante pour traiter efficacement le problème de poursuite. Sa motivation principale réside dans sa capacité à spécifier indépendamment les dynamiques de poursuite et de régulation [67]. Considérant le modèle linéaire sous forme entrée/sortie suivant :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-d) + v(k) \text{ avec } D(q^{-1})v(k) = \omega(k) \quad (\text{V.1})$$

avec :

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

où  $u(k)$  et  $y(k)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système,  $v(k)$  représente les perturbations qui affectent le fonctionnement du système et  $\omega(k)$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance finie.

Le système (V.1) peut être écrit sous la forme :

$$D(q^{-1})A(q^{-1})y(k) = D(q^{-1})B(q^{-1})u(k-d) + \omega(k) \quad (\text{V.2})$$

En soustrayant à chaque terme de cette équation le terme

$D(q^{-1})B(q^{-1})A(q^{-1})B^{-1}(1)y_r(k)$ , il vient finalement :

$$\begin{aligned} D(q^{-1})A(q^{-1})(y(k) - B(q^{-1})B^{-1}(1)y_r(k)) = \\ D(q^{-1})B(q^{-1})(u(k-d) - A(q^{-1})B^{-1}(1)y_r(k)) + \omega(k) \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Cette relation s'exprime sous la forme d'un modèle aux performances donné par :

$$D(q^{-1})A(q^{-1})ey(k) = D(q^{-1})B(q^{-1})eu(k-d) + \omega(k) \quad (\text{V.4})$$

où  $ey(k)$  et  $eu(k)$  désignent les erreurs de poursuite de sortie et d'entrée d'un système de commande avec modèle de référence sur l'état partiel respectivement données par :

$$\begin{aligned} ey(k) &= y(k) - B(q^{-1})B^{-1}(1)y_r(k) \\ eu(k) &= u(k) - A(q^{-1})B^{-1}(1)y_r(k+d) \end{aligned}$$

Pour des considérations de robustesse, on utilisera des pondérations fréquentielles sur les erreurs de poursuite d'entrée/sortie filtrées respectivement données par les opérateurs :

$$W_u(q^{-1}) = \frac{W_{un}(q^{-1})}{W_{ud}(q^{-1})} \quad \text{et} \quad W_y(q^{-1}) = \frac{W_{yn}(q^{-1})}{W_{yd}(q^{-1})}$$

Ces pondérations permettent de modéliser convenablement les fonctions de sensibilité usuelles du système de commande sous-jacent [71]. Le modèle de synthèse correspondant est alors donné par :

$$A_a(q^{-1})ey_f(k) = B_a(q^{-1})eu_f(k-d) + C_a(q^{-1})\omega(k) \quad (\text{V.5})$$

avec :

$$A_a(q^{-1}) = A(q^{-1})W_{yd}(q^{-1})W_{un}(q^{-1})D(q^{-1}) = 1 + a_1^a q^{-1} + \dots + a_n^a q^{-n} \quad (\text{V.6})$$

$$B_a(q^{-1}) = q^{-d}B(q^{-1})W_{yn}(q^{-1})W_{ud}(q^{-1}) = b_1^a q^{-1} + \dots + b_n^a q^{-n} \quad (\text{V.7})$$

$$C_a(q^{-1}) = W_{yn}(q^{-1})W_{un}(q^{-1}) = 1 + c_1^a q^{-1} + \dots + c_n^a q^{-n} \quad (\text{V.8})$$

où  $eu_f(k)$  et  $ey_f(k)$  sont les erreurs de poursuite d'entrée/sortie filtrées respectivement définies par :

$$eu_f(k) = D(q^{-1})W_u(q^{-1})eu(k) \quad \text{et} \quad ey_f(k) = W_y(q^{-1})ey(k)$$

Le modèle de synthèse (V.5) montre clairement que la dynamique qui relie les erreurs de poursuite d'entrée-sortie est la même que celle du système. On peut ainsi transformer un problème de poursuite et de régulation en un problème de régulation par rapport aux erreurs de poursuite d'entrée-sortie. La synthèse du système de commande peut être alors réalisée à partir d'une représentation d'état associée au modèle de commande (V.5), notamment la forme canonique d'observabilité donnée par :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Beu_f(k) + E\omega(k) \\ ey_f(k) = Cx(k) + \omega(k) \end{cases} \quad (\text{V.9})$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -a_1^a & & & \\ -a_2^a & I_{n-1} & & \\ \vdots & & & \\ -a_n^a & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1^a \\ b_2^a \\ \vdots \\ b_n^a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état associé à la forme canonique d'observabilité  $(A, B, C)$  et  $n$  désigne l'ordre du modèle de commande (V.5).

### V.3 Synthèse de la commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel

Comme il a été mentionné, on utilisera une loi de commande avec retour d'état incorporant un observateur. On présentera dans ce qui suit la structure d'un prédicteur optimal de la sortie du système qui sera utilisée pour la synthèse du système de commande prédictive multimodèle. l'essence d'une telle synthèse repose sur la possibilité de réaliser une prédiction appropriée de l'erreur de poursuite en sortie en fonction des informations disponibles à l'instant  $k$ . Cette prédiction est effectuée à partir du modèle de commande (V.9).

### V.3.1 Prédiction optimale de l'erreur de poursuite en sortie

L'estimation des variables d'état d'un système à partir de son comportement d'entrée-sortie est communément réalisée par un observateur du type *Luenberger* donné par :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + B e_{y_f}(k) + E(e_{y_f}(k) - \hat{e}_{y_f}(k)) \\ \hat{e}_{y_f}(k) = C\hat{x}(k) \end{cases} \quad (\text{V.10})$$

où  $\hat{x}(k)$  désigne l'estimé du vecteur d'état  $x(k)$ ,  $\hat{e}_{y_f}(k)$  est l'erreur de poursuite de sortie reconstruite par l'observateur et  $E$  n'est autre que le gain d'observation. Ce dernier peut être déterminé d'une manière optimale au sens de la minimisation de la variance de l'erreur de prédiction, i.e.  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ .

Notons que l'erreur de poursuite en sortie à l'instant  $k+j$  peut être obtenue récursivement à partir de l'équation de sortie du modèle (V.9), soit :

$$\begin{aligned} e_{y_f}(k+j) = CA^j x(k) + \sum_{l=1}^j CA^{j-l} B e_{y_f}(k+l-1) + CA^{j-1} E \omega(k) \\ + \sum_{l=1}^j CA^{j-l} E \omega(k+l-1) + \omega(k+j) \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

Le terme  $CA^j x(k)$  ne dépend que de l'état du système dont une estimation  $\hat{x}(k)$  peut être obtenue par un observateur optimal donné par la relation (V.10).

Le terme  $\sum_{l=1}^j CA^{j-l} B e_{y_f}(k+l-1)$  est une somme pondérée des futures valeurs de l'erreur de poursuite en entrée, qui doivent être déterminées en fonction de la politique de commande adoptée.

Le terme  $\sum_{l=1}^j CA^{j-l} E \omega(k+l-1) + \omega(k+j)$ , est imprédictible et ne peut donc être utilisé dans l'équation du prédicteur.

La perturbation  $\omega(k)$  sur la sortie du système n'est pas directement mesurable mais en utilisant l'équation de sortie du modèle de commande, une estimation  $\hat{\omega}(k/k)$  peut être obtenue à partir des signaux d'entrée/sortie à l'instant  $k$  et de l'estimation d'état donnée comme suit [31] :

$$\hat{\omega}(k/k) = e_{y_f}(k) - C\hat{x}(k) \quad (\text{V.12})$$

L'estimation optimale  $\hat{e}_{y_f}(k+j/k)$  de la sortie du modèle de commande en fonction des informations disponibles à l'instant  $k$  peut être déduite de l'équation (V.11) [31].

$$\hat{e}_{y_f}(k+j/k) = CA^j \hat{x}(k/k) + \sum_{l=1}^j CA^{j-l} B e_{y_f}(k+l-1) + CA^{j-1} E \hat{\omega}(k) \quad (\text{V.13})$$

Et compte tenu de l'équation (V.12), on aura :

$$\begin{aligned} \hat{e}y_f(k+j/k) &= CA^{j-1}(A-EC)\hat{x}(k/k) \\ &\quad + \sum_{l=1}^j CA^{j-l}Beu_f(k+l-1) + CA^{j-1}Eey_f(k) \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

On peut alors exprimer les prédicteurs de l'erreur de poursuite en sortie sur un horizon de prédiction  $h_p$  en fonction des erreurs de poursuite en entrée présente et futures comme suit :

$$\hat{E}Y(k+j/k) = \Psi EU_f(k+h_p-1) + \Phi(A-EC)\hat{x}(k) + \Phi Eey_f(k) \quad (\text{V.15})$$

avec :

$$\hat{E}Y_f(k+h_p) = [\hat{e}y_f(k+1) \cdots \hat{e}y_f(k+h_p/k)]^T \quad (\text{V.16})$$

$$EU_f(k+h_p-1) = [eu_f(k) \cdots eu_f(k+h_p-1)]^T \quad (\text{V.17})$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ CA^{j-1}B & \cdots & CA^{j-l}B & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ CA^{h_p-1}B & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & CB \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{j-1} \\ \vdots \\ CA^{h_p-1} \end{bmatrix}$$

### V.3.2 Synthèse de la loi de commande

L'objectif de commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel consiste à minimiser par rapport au vecteur de commande  $EU_f(k+h_c-1)$  le critère quadratique suivant :

$$\begin{aligned} J = \mathcal{E} \left\{ \sum_{j=h_i}^{h_p} (ey_f(k+j)^T Q(j) ey_f(k+j)) \right. \\ \left. + \sum_{j=h_i}^{h_c} (eu_f(k+j-h_i)^T R(j) eu_f(k+j-h_i)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

sous la contrainte

$$eu_f(k+j) = 0 \text{ pour } j \in [h_c \dots h_p]$$

où  $h_i$ ,  $h_p$  et  $h_c$  désignent respectivement les horizons d'initialisation, de prédiction et de commande et  $Q$  et  $R$  sont des matrices diagonales de pondérations symétriques et définies positives. Ces paramètres de synthèse permettent de définir les

performances en régulation requises.

La synthèse de la loi de commande est basée sur le principe d'équivalence certitude qui stipule que la minimisation du critère (V.18) est équivalente à celle du critère suivant :

$$\begin{aligned} \hat{J} = & \sum_{j=h_i}^{h_p} (\hat{e}y_f(k+j)^T \mathbf{Q}(j) \hat{e}y_f(k+j)) \\ & + \sum_{j=h_i}^{h_c} (eu_f(k+j-h_i)^T \mathbf{R}(j) eu_f(k+j-h_i)) \end{aligned} \quad (\text{V.19})$$

où  $\hat{e}y_f(k+j/k)$  n'est autre que le prédicteur optimal à  $j$  pas de l'erreur de poursuite en sortie donnée par l'équation (V.14).

Compte tenu des relations (V.16) et (V.17), le critère quadratique (V.19) peut être récrit sous la forme vectorielle suivante

$$\hat{J} = \hat{E}Y_f(k+h_p)^T \mathbf{Q} \hat{E}Y_f(k+h_p) + EU_f(k+h_c-1)^T \mathcal{R} EU_f(k+h_c-1) \quad (\text{V.20})$$

avec :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(h_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{Q}(h_p) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(h_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{R}(h_c) \end{bmatrix}$$

Cette forme permet d'obtenir aisément les erreurs de poursuite en entrée optimales recherchées, soit :

$$EU_f(k+h_c-1) = -(\mathcal{R} + \Psi^T \mathbf{Q} \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{Q} \Sigma(k) \quad (\text{V.21})$$

avec :

$$\Sigma(k) = \Phi(A - EC)\hat{x}(k) + \Phi E ey_f(k)$$

où  $\Psi$  et  $\Phi$  sont des matrices respectivement définies par :

$$\Psi = \begin{bmatrix} CA^{h_i-1}B \dots CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^{h_i}B \dots \dots CB & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{h_p-1}B \dots \dots \dots CA^{h_p-h_c}B \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} CA^{h_i-1} \\ CA^{h_i} \\ \vdots \\ CA^{h_p-1} \end{bmatrix}$$

La loi de commande est alors donnée par la relation suivante :

$$eu_f(k) = -\Gamma \Phi(A - EC)\hat{x}(k) - \Gamma \Phi E ey_f(k) = -K_1 \hat{x}(k) - K_2 ey_f(k) \quad (\text{V.22})$$

où  $\Gamma$  est un vecteur constitué de la première ligne de la matrice  $(\mathcal{R} + \Psi^T \mathbf{Q} \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{Q}$ .

## V.4 Commande prédictive multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel

On distingue deux structures de représentation d'état pour les systèmes non linéaires décrit par des familles finies de modèles [82]. La première structure est connue sous l'appellation de multimodèle de *Takagi-Sugeno* : les modèles sous-jacents sont *homogènes* dans le sens où ils partagent la même structure et le même espace d'état. La seconde structure est connue sous l'appellation de *multimodèle découplé* : les modèles sous-jacents sont *hétérogènes* dans la mesure où ils ont une structure et un espace d'état différent.

La représentation dans l'espace d'état du multimodèle découplé est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u(k) \\ y_i(k) = C_i x_i(k) \\ y_m(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k) y_i(k) \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

avec :

$$\sum_{i=1}^N v_i(k) = 1 \text{ avec } 0 \leq v_i \leq 1 \text{ pour } i \in [1, N]$$

où  $N$  est le nombre des modèles locaux,  $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^1$  et  $y_i(k) \in \mathbb{R}^1$  représentent respectivement le vecteur d'état du modèle  $\mathcal{M}_i$  et sa commande et sa sortie correspondantes,  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$  et  $C_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}$  sont les matrices d'état, d'entrée et de sortie correspondantes au vecteur d'état  $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$  et  $y_m(k) \in \mathbb{R}^1$  désigne la sortie multimodèle.

La structure découplée est particulièrement motivée par les considérations suivantes :

- Une adaptation aisée des techniques d'analyse des systèmes linéaires au cas multimodèle.
- Une exploitation judicieuse du concept du multimodèle.
- Des structures de modèles complètement différentes, e.g. des modèles linéaires ou non linéaires de dimension différentes pourvu que les sorties soient sommables.

Notons que les fonctions  $v_i(k)$  désignent ici les degrés de validité qui permettent de pondérer la sortie de chaque modèle  $\mathcal{M}_i$  décrit par sa réalisation d'état  $(A_i, B_i, C_i)$ . Ces degrés de validité sont particulièrement donnés par la relation (II.12).

Dans le cas général,  $v_i(k) = \mu_i(\xi(k))$  est une fonction de pondération d'une variable d'indexation  $\xi(k)$ . Cette dernière, peut être l'entrée, la sortie ou une variable d'état du système.

En adoptant la représentation multimodèle (V.23) tout en tenant compte de la représentation d'état du modèle aux performances (V.9), on peut décrire chaque modèle  $\mathcal{M}_i$  par une représentation d'état de la forme :

$$\begin{cases} x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i e u_f(k) \\ e y_{fi}(k) = C_i x_i(k) \\ e y_f(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k) e y_{fi}(k) \end{cases} \quad (\text{V.24})$$

avec  $e u_f(k)$  est l'erreur de poursuite d'entrée filtrée globale, elle s'écrit en fonction des erreurs de poursuite en entrée partielles comme suit :

$$e u_f(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k) e u_{fi}(k) \quad (\text{V.25})$$

où

$$A_i = \begin{bmatrix} -a_{1i}^a & & & \\ -a_{2i}^a & I_{ni-1} & & \\ \vdots & & & \\ -a_{ni}^a & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{1i}^a \\ b_{2i}^a \\ \vdots \\ b_{ni}^a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_i = [1 \quad 0 \dots 0]$$

Pour chaque modèle  $\mathcal{M}_i$  décrit par la représentation (V.24), on peut associer un observateur d'état  $O_i$  donné par :

$$\begin{cases} \hat{x}_i(k+1) = A_i \hat{x}_i(k) + B_i e u_f(k) + E_i (e y_f(k) - \hat{e} y_f(k)) \\ \hat{e} y_{fi}(k) = C_i \hat{x}_i(k) \\ \hat{e} y_f(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k) \hat{e} y_{fi}(k) \end{cases} \quad (\text{V.26})$$

où  $\hat{x}_i(k)$  est l'estimé du vecteur d'état  $x_i(k)$ ,  $e y_f(k)$  est l'erreur de poursuite de sortie mesurée du système,  $\hat{e} y_f(k)$  est l'erreur de poursuite de sortie reconstruite par l'observateur et  $E_i$  est le gain d'observation de l'observateur d'état  $O_i$  associé au modèle  $\mathcal{M}_i$ .

Par analogie avec la relation (V.22), on notera que l'erreur de poursuite en entrée partielle est donnée par :

$$eu_{fi}(k) = -\Gamma_i \Phi_i (A_i - E_i C_i) \hat{x}_i(k) - \Gamma_i \Phi_i E_i e y_{fi}(k) = -K_{1i} \hat{x}_i(k) - K_{2i} e y_{fi}(k) \quad (\text{V.27})$$

où  $\Gamma_i$  est la première ligne de la matrice  $(\mathcal{R} + \Psi_i^T Q \Psi_i)^{-1} \Psi_i^T Q$  et les matrices  $\Psi_i$  et  $\Phi_i$  associées au modèle  $\mathcal{M}_i$  sont respectivement données par :

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} C_i A_i^{h_i-1} B_i & \dots & C_i B_i & 0 & \dots & 0 \\ C_i A_i^{h_i} B_i & \dots & \dots & C_i B_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_i A_i^{h_p-1} B_i & \dots & \dots & \dots & \dots & C_i A_i^{h_p-h_c} B_i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_i = \begin{bmatrix} C_i A_i^{h_i-1} \\ C_i A_i^{h_i} \\ \vdots \\ C_i A_i^{h_p-1} \end{bmatrix}$$

#### V.4.1 Synthèse du système de commande

Pour ce faire, soient les vecteurs augmentés suivants :

$$X(k) = [x_1(k) \dots x_i(k) \dots x_N(k)]^T \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\hat{X}(k) = [\hat{x}_1(k) \dots \hat{x}_i(k) \dots \hat{x}_N(k)]^T \in \mathbb{R}^n$$

avec :

$$n = \sum_{i=1}^N n_i$$

On peut alors récrire les équations du modèle de commande et de l'observateur sous une forme plus compacte comme suit :

$$\begin{cases} X(k+1) = \tilde{A}X(k) + \tilde{B}eu_f(k) \\ \hat{X}(k+1) = \tilde{A}\hat{X}(k) + \tilde{B}eu_f(k) + \tilde{E}(ey_f(k) - \tilde{C}(k)\hat{X}(k)) \end{cases} \quad (\text{V.28})$$

avec :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & A_i & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\tilde{C}(k) = [v_1(k)C_1^T \dots v_i(k)C_i^T \dots v_N(k)C_N^T] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$\tilde{E} = [E_1^T \dots E_i^T \dots E_N^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$ey_f(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k) ey_{fi}(k)$$

L'erreur d'observation correspondante, soit  $\tilde{X}(k) = X(k) - \hat{X}(k)$ , est alors décrite par l'équation :

$$\tilde{X}(k+1) = (\tilde{A} - \tilde{E}\tilde{C}(k))\tilde{X}(k) \quad (\text{V.29})$$

avec :

$$\tilde{X}(k) = [\tilde{x}_1(k) \dots \tilde{x}_i(k) \dots \tilde{x}_N(k)]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{x}_i(k) = x_i(k) - \hat{x}_i(k)$$

En utilisant la relation (V.27), l'erreur de poursuite en entrée filtrée globale  $eu_f(k)$  donnée par l'équation (V.25) devient :

$$eu_f(k) = - \sum_{i=1}^N v_i(k) K_{1i} \hat{x}_i(k) - \sum_{i=1}^N v_i(k) K_{2i} C_i x_i(k) \quad (\text{V.30})$$

ou d'une manière équivalente

$$eu_f(k) = - \sum_{i=1}^N v_i(k) (K_{1i} + K_{2i} C_i) x_i(k) + \sum_{i=1}^N v_i(k) K_{1i} \tilde{x}_i(k) \quad (\text{V.31})$$

Cette expression peut se récrire sous la forme :

$$eu_f(k) = -\tilde{\mathcal{K}}(k)X(k) + \tilde{K}_1(k)\tilde{X}(k) \quad (\text{V.32})$$

avec :

$$\tilde{\mathcal{K}}(k) = \begin{bmatrix} v_1(k) \mathcal{K}_1 \\ \vdots \\ v_i(k) \mathcal{K}_i \\ \vdots \\ v_N(k) \mathcal{K}_N \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad \tilde{K}_1(k) = \begin{bmatrix} v_1(k) K_{11} \\ \vdots \\ v_i(k) K_{1i} \\ \vdots \\ v_N(k) K_{1N} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

où les  $K_{1i} \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}$  et  $\mathcal{K}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}$  ne sont autres que les gains de commande avec retour d'état correspondants au modèle  $\mathcal{M}_i$ , soit :

$$\mathcal{K}_i = K_{1i} + K_{2i} C_i$$

Les équations du système de commande sont obtenues en substituant l'équation de la commande (V.32) dans celle du modèle de commande (V.28), on aura alors :

$$\begin{cases} X(k+1) = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{\mathcal{K}}(k))X(k) + \tilde{B}\tilde{K}_1(k)\tilde{X}(k) \\ \tilde{X}(k+1) = (\tilde{A} - \tilde{E}\tilde{C}(k))\tilde{X}(k) \end{cases} \quad (\text{V.33})$$

ou d'une manière équivalente :

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ \tilde{X}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{\mathcal{K}}(k) & \tilde{B}\tilde{K}_1(k) \\ 0 & \tilde{A} - \tilde{E}\tilde{C}(k) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ \tilde{X}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{V.34})$$

En remarquant que la matrice  $\tilde{C}(k)$  peut être réécrite sous la forme

$$\tilde{C}(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k) \tilde{C}_i$$

avec :

$$\tilde{C}_i = [0 \ \dots \ C_i \ \dots \ 0]$$

De même, on peut définir les matrices  $\tilde{\mathcal{K}}(k)$  et  $\tilde{K}_1(k)$  comme suit :

$$\tilde{\mathcal{K}}(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k) \tilde{\mathcal{K}}_i$$

$$\tilde{K}_1(k) = \sum_{i=1}^N v_i(k) \tilde{K}_{1i}$$

avec les matrices  $\tilde{\mathcal{K}}_i$  et  $\tilde{K}_{1i}$  sont respectivement données par :

$$\tilde{\mathcal{K}}_i = [0 \ \dots \ \mathcal{K}_i \ \dots \ 0]^T ; \quad \tilde{K}_{1i} = [0 \ \dots \ K_{1i} \ \dots \ 0]^T$$

Alors, on peut réécrire le système de commande (V.34) comme suit :

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ \tilde{X}(k+1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N v_i(k) \begin{pmatrix} \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{\mathcal{K}}_i & \tilde{B}\tilde{K}_{1i} \\ 0 & \tilde{A} - \tilde{E}\tilde{C}_i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ \tilde{X}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{V.35})$$

ou

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ \tilde{X}(k+1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N v_i(k) \begin{pmatrix} \Theta_i & \tilde{B}\tilde{K}_{1i} \\ 0 & \Omega_i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ \tilde{X}(k) \end{bmatrix} \quad (\text{V.36})$$

avec :

$$\Theta_i = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{\mathcal{K}}_i , \quad \Omega_i = \tilde{A} - \tilde{E}\tilde{C}_i$$

L'analyse de la stabilité du système de commande est étroitement liée aux propriétés des matrices :

$$\Xi_i = \begin{pmatrix} \Theta_i & \tilde{B}\tilde{K}_{1i} \\ 0 & \Omega_i \end{pmatrix}$$

Elle est généralement effectuée en adoptant une approche de *Lyapunov* utilisant une fonction de *Lyapunov* du type :

$$V(X(k)) = X(k)^T P X(k) , \quad P > 0 \quad (\text{V.37})$$

Le résultat fondamental suivant précise les conditions suffisantes de stabilité du système de commande.

**Théorème V.4.1.** *Le système de commande (V.36) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P$  telles que :*

$$\begin{cases} P > 0 \\ \Xi_i^T P \Xi_i - P < 0 \text{ pour } i \in [1, N] \end{cases} \quad (\text{V.38})$$

Et comme le théorème de séparation est préservé dans le cas multimodèles [59], le système de commande (V.36) est asymptotiquement stable si et seulement si les propriétés suivantes sont vraies.

- $\mathcal{P}1$ . L'erreur d'observation est asymptotiquement nulle dans le cas idéal considéré. La stabilité de l'observateur est assurée par un choix judicieux du gain d'observation  $\tilde{E}$  qui peut être considéré comme un paramètre de synthèse.
- $\mathcal{P}2$ . La loi de commande par retour d'état sous jacente (équation (V.25)) est stabilisante, cette loi de commande est la solution du problème de commande (V.19).

Le résultat fondamental donné par le théorème V.4.1 peut être alors énoncé à la lumière du principe de séparation comme suit :

**Théorème V.4.2.** *Le système de commande (V.36) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices  $P_1, P_2$  telles que :*

$$\begin{cases} P_1 > 0 \\ \Theta_i^T P_1 \Theta_i - P_1 < 0 \text{ pour } i \in [1, N] \end{cases} \quad (\text{V.39})$$

$$\begin{cases} P_2 > 0 \\ \Omega_i^T P_2 \Omega_i - P_2 < 0 \text{ pour } i \in [1, N] \end{cases} \quad (\text{V.40})$$

Les conditions *LMI*(V.39) assure la stabilité du système de commande prédictive avec retour d'état donnée par l'équation (V.25), alors que les conditions *LMI* (V.40) permettent de garantir la stabilité de l'observateur et donc une erreur d'observation asymptotiquement nulle dans notre cas idéal.

## V.4.2 Performances de l'observateur

La synthèse de l'observateur consiste à déterminer les gains  $E_i$  des observateurs élémentaires de telle sorte que l'erreur d'observation d'état, donnée par l'équation (V.29), soit asymptotiquement nulle tout en tenant compte de la combinaison des sorties des modèles  $\mathcal{M}_i, i \in [1, N]$ . Pour assurer une telle convergence, les gains sont déterminés directement à partir des conditions *LMI* (V.40) de stabilité asymptotique de l'observateur. On peut néanmoins introduire des performances

dynamiques caractérisées par un placement des pôles de l'observateur dans une région privilégiée du domaine de stabilité asymptotique [20, 82].

Une approche générale permettant de caractériser l'appartenance des valeurs propres d'une matrice à une région déterminée du plan complexe en termes de *LMI* est proposée par [20]. Cette approche peut être considérée comme une généralisation de l'inégalité de *Lyapunov* (V.40) à partir du concept de *D-stabilité* d'une matrice défini comme suit.

**Definition V.4.1.** Une matrice réelle  $A$  est dite *D-stable* si ses valeurs propres sont contenues à l'intérieur d'une région  $D$  du plan complexe définie par une *LMI*.

En effet, on peut définir des régions dans le plan complexe, e.g. une bande, un disque ou un secteur conique, en terme de *LMI* [18] comme le montre la proposition suivante :

Une matrice  $A$  est dite *D-stable* dans la région  $D$  définie par un disque de rayon  $r$  et de centre  $(q, 0)$  si et seulement s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $P$  satisfaisant les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} P = P^T > 0 \\ \begin{pmatrix} -rP & -qP + PA \\ -qP + A^T P & -rP \end{pmatrix} < 0 \text{ pour } i \in [1, N] \end{cases} \quad (\text{V.41})$$

Cette proposition offre la possibilité d'affiner les performances de l'observateur en spécifiant convenablement les scalaires  $r$  et  $q$ .

Le résultat fondamental suivant est une conséquence naturelle de la région *LMI* définie par la relation (V.41) en remplaçant la matrice  $A$  par  $\Omega_i$  [82].

**Théorème V.4.3.** Les valeurs propres du système (V.29) décrivant l'erreur d'observation d'état entre le multimodèle découplé et l'observateur (V.28) sont arbitrairement assignées dans le disque de rayon  $r$  et de centre  $(q, 0)$  du plan complexe s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $P$  vérifiant les *LMI* suivantes :

$$\begin{pmatrix} -rP & -qP + P\Omega_i \\ -qP + \Omega_i^T P & -rP \end{pmatrix} < 0 \text{ pour } i \in [1, N] \quad (\text{V.42})$$

$$r > 0, q \geq 0$$

avec :

$$\Omega_i = \tilde{A} - \tilde{E}\tilde{C}_i$$

Notons que le changement de variable  $G = P\tilde{E}$  permet d'exprimer les conditions *LMI* (V.42) comme suit :

$$\begin{pmatrix} -rP & -qP + P\tilde{A} - G\tilde{C}_i \\ -qP + \tilde{A}P - (G\tilde{C}_i)^T P & -rP \end{pmatrix} < 0 \text{ pour } i \in [1, N] \quad (\text{V.43})$$

$$r > 0, q \geq 0$$

et de déterminer le gain d'observation en conséquence, soit :

$$\tilde{E} = P^{-1}G \quad (\text{V.44})$$

### V.4.3 Stabilité du système de commande avec retour d'état

Les conditions *LMI* de stabilité du système de commande avec retour d'état sous-jacent (V.39) sont relativement fortes dans la mesure où elles doivent être satisfaites pour une même matrice  $P_1$ . Ce conservatisme peut être relativement réduit en utilisant une fonction de *Lyapunov polyquadratique* comme il a été proposé dans la contribution [96], notamment :

$$V(X(k)) = X(k)^T \left[ \sum_{i=1}^N v_i(k) P_{1i} \right] X(k), P_{1i} > 0 \quad (\text{V.45})$$

Les conditions *LMI* (V.39) peuvent être alors modifiées comme suit :

$$\begin{cases} P_{1i} > 0 \\ \Theta_i^T P_{1i} \Theta_i - P_{1i} < 0 \text{ pour } i \in [1, N] \end{cases} \quad (\text{V.46})$$

Et en appliquant le complément de *Shur*, on obtient :

$$\begin{cases} P_{1i} > 0 \\ \begin{pmatrix} P_{1i} & (P_{1j} \Theta_i)^T \\ (P_{1j} \Theta_i) & P_{1j} \end{pmatrix} > 0 \text{ pour } i \in [1, N] \end{cases} \quad (\text{V.47})$$

La vraisemblance avec les modèles flous *TS* a permis, via la relation (V.47), d'introduire un degré de liberté supplémentaire qui s'est avéré très utile pour la synthèse du système de commande avec retour d'état [18, 32, 66]. De nouvelles conditions de stabilité ont été établies comme le montre le résultat fondamental suivant.

**Théorème V.4.4.** *Le système de commande (V.36) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices matrices  $P_{1i}$  et  $P_{1j}$  symétriques et définies positives et une matrice  $M$  telles que :*

$$\begin{cases} P_{1i} > 0 \\ \begin{pmatrix} P_{1i} & (M\Theta_i)^T \\ (M\Theta_i) & M + M^T - P_{1j} \end{pmatrix} > 0 \text{ pour } i \in [1, N] \end{cases} \quad (\text{V.48})$$

## V.5 Commande d'un bioréacteur

L'approche de commande multimodèle proposée a été utilisée pour traiter le problème de commande du bioréacteur présenté au chapitre III pour mieux apprécier ses performances. Rappelons que la sortie du procédé est la concentration en substrat  $S(t)$  et que sa variable de commande est le taux de dilution et que les performances désirées consistent en une bonne poursuite avec une compensation des perturbations des variations du substrat d'alimentation et une bonne insensibilité aux bruits de mesure inéluctables. La synthèse a été particulièrement effectuée à partir d'une famille des trois modèles qui ont été identifiés lors de la synthèse présentée au chapitre III. Ces modèles ont permis de construire un modèle de synthèse à partir des formes canoniques observables de chaque modèle de la famille et d'une pondération fréquentielle en entrée modulo une action intégrale, soit :

$$D(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \text{ et } W_u(q^{-1}) = \frac{1}{1 + 0.6q^{-1}}$$

L'action intégrale permet de réaliser une compensation admissible des variations du substrat d'alimentation que l'on peut considérer comme perturbations du type échelon susceptibles, alors que la pondération fréquentielle permet d'affiner le modelage des fonctions de sensibilité usuelles du système de commande. Les réalisations d'état associées à chaque modèle de synthèse sont données par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.7309 & 1 & 0 \\ -0.5808 & 0 & 1 \\ -0.1501 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 21.5206 \\ 21.4584 \\ 5.1276 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ 0 \ 0]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.7035 & 1 & 0 \\ -0.4972 & 0 & 1 \\ -0.2063 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 21.9658 \\ 20.7951 \\ 4.5694 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [1 \ 0 \ 0]$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1.4166 & 1 & 0 \\ -0.2374 & 0 & 1 \\ -0.1792 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 57.5180 \\ 49.7738 \\ 9.1578 \end{bmatrix}, \quad C_3 = [1 \ 0 \ 0]$$

Les gains d'observation ont été déterminés à partir de la résolution du système *LMI* respectivement données par les équations (V.43) et (V.44) sans aucune contrainte sur le domaine de stabilité asymptotique. La matrice  $P$  correspondante

est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 17.5447 & 16.5001 & 9.1691 & -1.1240 & -0.8759 & -0.7667 & -0.9719 & -0.7207 & -0.6181 \\ 16.5001 & 23.6510 & 6.4962 & -0.8838 & -0.2830 & -0.3821 & -0.8387 & -0.3252 & -0.3064 \\ 9.1691 & 6.4962 & 39.3732 & -0.7557 & -0.4169 & -0.1381 & -0.6212 & -0.4141 & -0.1456 \\ -1.1240 & -0.8838 & -0.7557 & 17.3028 & 16.0736 & 10.3058 & -0.9858 & -0.7369 & -0.6261 \\ -0.8759 & -0.2830 & -0.4169 & 16.0736 & 23.8821 & 5.9040 & -0.8425 & -0.3309 & -0.3158 \\ -0.7667 & -0.3821 & -0.1381 & 10.3058 & 5.9040 & 39.1947 & -0.6420 & -0.4011 & -0.1424 \\ -0.9719 & -0.8387 & -0.6212 & -0.9858 & -0.8425 & -0.642 & 17.4980 & 13.7002 & 8.9214 \\ -0.7207 & -0.3252 & -0.4141 & -0.7369 & -0.3309 & -0.4011 & 13.7002 & 26.6693 & 5.7290 \\ -0.6181 & -0.3064 & -0.1456 & -0.6261 & -0.3158 & -0.1424 & 8.9214 & 5.7290 & 40.9144 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier aisément qu'elle est bien symétrique et définie positive avec un spectre inclus dans le domaine de stabilité asymptotique, notamment :

$$\mathcal{V}(P) = [3.462 \quad 3.6829 \quad 7.1154 \quad 27.22 \quad 27.6007 \quad 28.8756 \quad 46.55 \quad 50.4724 \quad 51.0487]$$

et déterminer le gain d'observation : correspondant  $\tilde{E}$ , soit :

$$\tilde{E}^T = [0.71 \quad -0.1936 \quad -0.05 \quad 0.7 \quad -0.1657 \quad -0.0688 \quad 0.605 \quad -0.079 \quad -0.0597]$$

Par ailleurs, un système de commande prédictive avec retour d'état incorporant un observateur a été conçu pour chacun des trois modèles de synthèse conformément à l'équation (V.27) pour élaborer la loi commande multimodèle du bioréacteur, en l'occurrence :

$$u(k) = \sum_{i=1}^3 v_i(k) u_i(k) \quad (\text{V.49})$$

où les commandes partielles  $u_i(k)$  sont calculées à partir des erreurs de poursuite d'entrée partielles  $eu_{fi}(k)$  comme suit :

$$eu_{fi}(k) = D(q^{-1})W_u(q^{-1})(u_i(k) - A_i(q^{-1})B_i^{-1}(1)y_r(k+d))$$

Les paramètres de synthèse de la loi de commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel ont été spécifiés comme suit :

$$h_p = 5, h_c = 3, h_i = 1$$

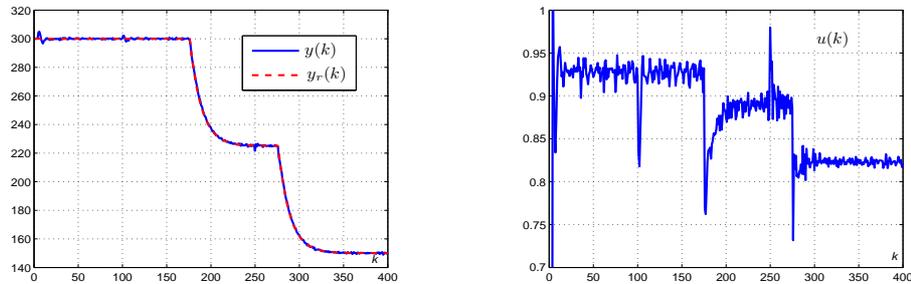
$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_i = \text{diag}(\mathbf{R}_i) \text{ et } \mathcal{Q}_i = \text{diag}(\mathbf{Q}_i) \text{ pour } i \in [1, 3]$$

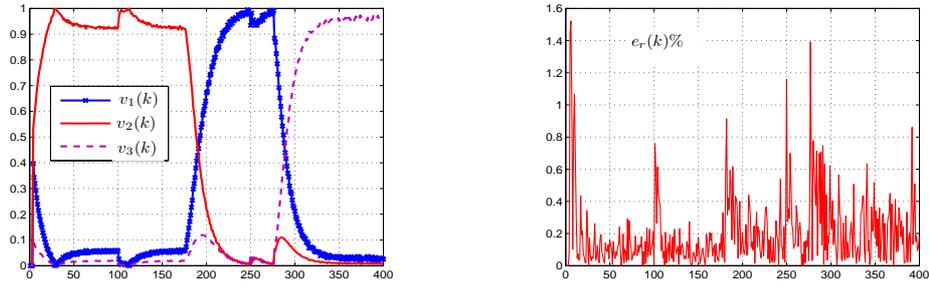
Les figures V.1, V.2 et V.3 montrent respectivement le comportement entrée/sortie du bioréacteur, les évolutions des degrés de validité, de l'erreur relative de poursuite et de la sortie du système par rapport à la sortie estimée par le multimodèle. On notera que les performances du système de commande multimodèle proposé sont relativement bonnes aussi bien en poursuite qu'en régulation et que les degrés de validité sont relativement cohérentes par rapport au protocole expérimental considéré. On peut aussi apprécier la bonne qualité de reconstruction d'état obtenue en dépit des perturbations appliquées sur la sorties du bioréacteur.



(a) Évolutions de sortie réelle du système et de sortie de référence.

(b) Évolution du signal de commande.

FIG. V.1 – Comportement d'entrée/sortie du bioréacteur.



(a) Evolutions des degrés de validités. (b) Evolutions de l'erreur relative de poursuite.

FIG. V.2 –

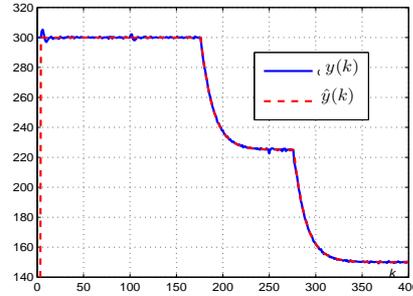


FIG. V.3 – Evolutions de la sortie réelle et la sortie estimée multimodèle.

Par ailleurs, on peut réduire le conservatisme de la synthèse multimodèle élaborée en résolvant les contraintes *LMI* données par la relation (V.48). On trouve :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4.5898 & 4.7880 & 4.8691 & -2.8680 & -2.9401 & -2.7404 & -0.7182 & -0.8377 & -0.7209 \\ 4.7880 & 5.2431 & 4.8582 & -2.9152 & -3.1034 & -2.3979 & -0.7925 & -0.9666 & -0.8337 \\ 4.8691 & 4.8582 & 8.0975 & -2.7604 & -2.2992 & -4.1447 & -0.8747 & -1.2610 & -1.1314 \\ -2.8680 & -2.9152 & -2.7604 & 4.8092 & 5.0185 & 5.0771 & -0.7466 & -0.8787 & -0.7831 \\ -2.9401 & -3.1034 & -2.2992 & 5.0185 & 5.7502 & 4.2932 & -0.8357 & -1.0320 & -0.8943 \\ -2.7404 & -2.3979 & -4.1447 & 5.0771 & 4.2932 & 9.8009 & -0.8473 & -1.1015 & -1.1055 \\ -0.7182 & -0.7925 & -0.8747 & -0.7466 & -0.8357 & -0.8473 & 0.6232 & 0.6038 & 0.9602 \\ -0.8377 & -0.9666 & -1.2610 & -0.8787 & -1.0320 & -1.1015 & 0.6038 & 1.2332 & -0.5480 \\ -0.7209 & -0.8337 & -1.1314 & -0.7831 & -0.8943 & -1.1055 & 0.9602 & -0.5480 & 5.7132 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4.5913 & 4.7818 & 4.8627 & -2.8592 & -2.9366 & -2.7341 & -0.7138 & -0.8367 & -0.7179 \\ 4.7818 & 5.2359 & 4.8542 & -2.9053 & -3.0999 & -2.3906 & -0.7910 & -0.9655 & -0.8322 \\ 4.8627 & 4.8542 & 8.0951 & -2.7550 & -2.3000 & -4.1478 & -0.8690 & -1.2591 & -1.1285 \\ -2.8592 & -2.9053 & -2.7550 & 4.7910 & 5.0090 & 5.0724 & -0.7493 & -0.8789 & -0.7854 \\ -2.9366 & -3.0999 & -2.3000 & 5.0090 & 5.7449 & 4.2934 & -0.8355 & -1.0315 & -0.8945 \\ -2.7341 & -2.3906 & -4.1478 & 5.0724 & 4.2934 & 9.8090 & -0.8526 & -1.1042 & -1.1093 \\ -0.7138 & -0.7910 & -0.8690 & -0.7493 & -0.8355 & -0.8526 & 0.6225 & 0.6030 & 0.9598 \\ -0.8367 & -0.9655 & -1.2591 & -0.8789 & -1.0315 & -1.1042 & 0.6030 & 1.2327 & -0.5483 \\ -0.7179 & -0.8322 & -1.1285 & -0.7854 & -0.8945 & -1.1093 & 0.9598 & -0.5483 & 5.7129 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 4.5885 & 4.7816 & 4.8569 & -2.8235 & -2.9226 & -2.7297 & -0.7259 & -0.8421 & -0.7181 \\ 4.7816 & 5.2402 & 4.8449 & -2.8984 & -3.0978 & -2.3980 & -0.7938 & -0.9664 & -0.8298 \\ 4.8569 & 4.8449 & 8.1104 & -2.7573 & -2.3072 & -4.1340 & -0.8670 & -1.2565 & -1.1296 \\ -2.8235 & -2.8984 & -2.7573 & 4.8078 & 5.0195 & 5.0725 & -0.7602 & -0.8858 & -0.7824 \\ -2.9226 & -3.0978 & -2.3072 & 5.0195 & 5.7541 & 4.2892 & -0.8413 & -1.0349 & -0.8912 \\ -2.7297 & -2.3980 & -4.1340 & 5.0725 & 4.2892 & 9.8057 & -0.8496 & -1.1022 & -1.1055 \\ -0.7259 & -0.7938 & -0.8670 & -0.7602 & -0.8413 & -0.8496 & 0.6277 & 0.6062 & 0.9577 \\ -0.8421 & -0.9664 & -1.2565 & -0.8858 & -1.0349 & -1.1022 & 0.6062 & 1.2342 & -0.5504 \\ -0.7181 & -0.8298 & -1.1296 & -0.7824 & -0.8912 & -1.1055 & 0.9577 & -0.5504 & 5.7112 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 4.4026 & 4.6152 & 4.4455 & -2.7384 & -2.8550 & -2.5003 & -0.6818 & -0.8124 & -0.5874 \\ 4.6152 & 5.1508 & 4.3260 & -2.8180 & -3.0344 & -2.1998 & -0.7585 & -0.9573 & -0.6683 \\ 4.4455 & 4.3260 & 7.7113 & -2.5334 & -2.1496 & -3.5167 & -0.7535 & -1.2062 & -0.8599 \\ -2.7384 & -2.8180 & -2.5334 & 4.6146 & 4.8830 & 4.5976 & -0.7175 & -0.8700 & -0.6527 \\ -2.8550 & -3.0344 & -2.1496 & 4.8830 & 5.7458 & 3.7843 & -0.8168 & -1.0556 & -0.7473 \\ -2.5003 & -2.1998 & -3.5167 & 4.5976 & 3.7843 & 8.9663 & -0.7324 & -1.0311 & -0.8334 \\ -0.6818 & -0.7585 & -0.7535 & -0.7175 & -0.8168 & -0.7324 & 0.5935 & 0.5838 & 0.8443 \\ -0.8124 & -0.9573 & -1.2062 & -0.8700 & -1.0556 & -1.0311 & 0.5838 & 1.2562 & -0.6684 \\ -0.587 & -0.6683 & -0.8599 & -0.6527 & -0.7473 & -0.8334 & 0.8443 & -0.6684 & 5.4423 \end{bmatrix}$$

On remarquera que les trois matrices sont bien symétriques et définies positives et que les spectres correspondants sont bien situés dans le domaine de stabilité asymptotique conformément aux exigences de stabilité asymptotique du système de commande, soit :

$$\mathcal{V}(P_1) = [0.0004 \quad 0.0064 \quad 0.0992 \quad 0.106 \quad 1.226 \quad 4.3973 \quad 4.9913 \quad 10.06 \quad 24.9724]$$

$$\mathcal{V}(P_2) = [0.0004 \quad 0.007 \quad 0.1014 \quad 0.105 \quad 1.2244 \quad 4.397 \quad 4.9923 \quad 10.06 \quad 24.9477]$$

$$\mathcal{V}(P_3) = [0.0004 \quad 0.0066 \quad 0.0917 \quad 0.1199 \quad 1.266 \quad 4.394 \quad 4.9965 \quad 10.07 \quad 24.9324]$$

## V.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une présentation concise d'une approche d'état de commande multimodèle combinant judicieusement les concepts de prédiction optimale et de modèle de référence sur l'état partiel ainsi que les résultats disponibles sur la robustesse des systèmes incertains. La synthèse est effectuée en trois étapes :

- $\mathcal{E}1$  Elaboration d'une réalisation d'état multimodèle pour mieux décrire le comportement dynamique du système non linéaire.
- $\mathcal{E}2$  Elaboration d'un multiobservateur pour réaliser une estimation consistante des variables d'état du système.
- $\mathcal{E}3$  Elaboration d'un système de commande multimodèle prédictive avec retour d'état.

Une analyse de stabilité du système de commande a été effectuée en adoptant une approche de *Lyapunov* permettant de prendre en compte les exigences en performances via des contraintes *LMI*.

L'approche de commande multimodèle proposée a été utilisée pour traiter un problème d'asservissement d'un bioréacteur. Les résultats de simulation obtenus sont relativement prometteurs, en l'occurrence une bonne poursuite avec une compensation admissible des perturbations de charge susceptibles d'affecter le fonctionnement du bioréacteur.

# Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire apportent une contribution à la modélisation et à la commande des systèmes complexes, dont la dynamique peut être convenablement décrite par une approche multimodèle.

Avant d'aborder le concept multimodèle, nous avons présenté au cours du premier chapitre, le principe de la commande numérique adaptative avec modèle de référence (MRAC) et sa version à structure variable (DVS-MRAC). L'évaluation de la robustesse des deux lois de commande en présence de système fortement variant dans le temps a été également envisagée, pour souligner les limitations de ces deux techniques de commande et mettre en évidence l'apport de l'approche multimodèle.

Après, une présentation concise des différentes composantes de l'approche multimodèle, un schéma de commande multimodèle avec modèle de référence (MM-MRC) est développé. Une validation expérimentale sur un réacteur chimique est effectuée pour mettre en évidence l'affinement des performances d'un système de commande multimodèle avec modèle de référence par rapport à celles d'un système de commande avec modèle de référence conçu à partir d'un modèle de comportement global du réacteur.

Afin de montrer la faisabilité de la commande multimodèle par rapport à une méthode de commande non linéaire, le problème d'asservissement d'un bioréacteur est traité en utilisant deux synthèses différentes. La première est non linéaire et basée sur le concept de "backstepping" et utilisant le modèle de connaissances du bioréacteur. Les performances du système de commande sous-jacentes peuvent être alors considérées comme une référence dans la mesure où la dynamique du bioréacteur est parfaitement décrite par le modèle de commande. La seconde synthèse exploite la commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel et l'approche multimodèle. Les résultats de simulation obtenus ont montré que les performances du système de commande multimodèle sont semblables à celles obtenues par le système de commande non linéaire.

Dans le but d'assurer non seulement de bonnes performances en poursuite, mais aussi des bonnes performances en rejet des perturbations, on a montré que l'approche multimodèle peut être utilisée à bon escient pour traiter le problème de compensation des perturbations harmoniques. Dans ce contexte, trois méthodes de compensation de perturbations multimodèle sont proposées. La première mé-

thode concerne les systèmes linéaires variants dans le temps, dont le comportement entrée-sortie est supposé être raisonnablement approximé par une famille finie de modèles linéaires invariants, soumis à des perturbations stationnaires. Elle est particulièrement basée sur l'utilisation d'une méthode de compensation adaptative directe de perturbation avec une logique de supervision adéquate pour la détermination de la loi de commande avec modèle de référence sur l'état partiel global.

La seconde méthode est consacrée au cas des systèmes linéaires invariants soumis à des perturbations non stationnaires que l'on peut modéliser par une combinaison linéaire finie de perturbations harmoniques stationnaires de fréquences connues. Elle est basée sur une synthèse élémentaire exploitant la paramétrisation de  $\mathcal{Y}$ ula- $\mathcal{K}$ ucera de l'ensemble des régulateurs stabilisants conformément au principe du modèle interne. La loi de commande globale est obtenue à partir d'une fusion appropriée des régulateurs élémentaires.

La troisième méthode se distingue par rapport à la seconde par l'utilisation d'une boucle de verrouillage d'amplitude et de phase pour reconstruire les perturbations et fournir une estimation raisonnable de la période des perturbations. La loi de commande globale est obtenue par une commutation des régulateurs élémentaires.

Finalement, on a proposé une commande prédictive multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel basée sur une représentation d'état. La synthèse consiste, d'une part, à élaborer une réalisation d'état multimodèle pour mieux décrire le comportement dynamique du système non linéaire et, d'autre part, à élaborer un système de commande multimodèle prédictive avec retour d'état. Un multiobservateur a été également utilisé pour réaliser une estimation consistante des variables d'état du système. En outre, une analyse de stabilité du système de commande est effectuée en adoptant une approche de *Lyapunov* permettant de prendre en compte les exigences en performances via des contraintes *LMI*.

Les résultats proposés dans cette thèse ouvrent de multiples perspectives :

- Le calcul de validités dans ce mémoire utilise l'approche de résidus. Il serait intéressant d'explorer d'autres méthodes pour le calcul des validités.
- Le problème de l'identification des modèles locaux demeure un domaine à explorer à l'appui de la structure multimodèle proposée.
- Le concept de multiobservateur a été introduit pour fournir une estimation consistante des variables d'état du système. Une étude plus poussée du multiobservateur peut être envisagée.

# Bibliographie

- [1] F. Abdulgalil. *Commande non linéaire dans les systèmes de forage pétrolier : Contribution à la suppression du phénomène de "Stick-Slip"*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, France, 2006.
- [2] R. Aguilar, R. M. Guerra, A. Poznyak. Non linear PID controller for the regulation of fixed bed bireactors, *Proceedings of the 41<sup>th</sup> IEEE, Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, 2002.
- [3] A. Akhenak. *Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèle : application au diagnostic*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2004.
- [4] K. J. Aström, K. B. Wittenmar. On self-tuning regulators. *Automatica*, vol. 9, pp. 185–199, 1973.
- [5] A. Bédoui, M. Farza, M. M'saad, M. Ksouri. Robust nonlinear controllers for bioprocesses. *Proceedings of the 17<sup>th</sup> IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [6] R. Ben Abdennour, P. Borne, M. Ksouri, F. M'sahli. *Identification et commande numérique des procédés industriels*. Technip, Paris, France, 2001.
- [7] R. Ben Abdennour, M. Ksouri, F. M'sahli. Experimental nonlinear model based predictive control for a class of semi-batch chemical reactors. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 20(6), pp. 459–463, 2002.
- [8] F. Ben Amara, P. T. Kambanba, A. G. Ulsoy. Adaptive sinusoidal disturbance rejection in linear discrete-time systems-Part I : Theory. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control disturbances*. pp. 648–654, 1999.
- [9] R. Babuska, P. J. Van Der Veen, U. Kaymak. Improved covariance estimation for gustafson-kessel clustering. *Proceedings of Fuzzy IEEE*, Hawai, USA, pp. 1081–1085, 2002.
- [10] A. R. Benaskeur, L. N. Paquin, A. Desbiens. Toward industrial process control applications of the backstepping. *Process Control and Instrumentation*, 2000.

- [11] A. R. Benaskeur, A. Desbiens. Application of adaptive backstepping to the stabilization of the inverted pendulum. *Electrical and Computer Engineering, IEEE Canadian Conference*, vol. 1, pp. 113–116, 1998.
- [12] M. Bodson, S. C. Douglas. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency. *Automatica*, pp. 2213–2221, 1997.
- [13] M. Bodson. Rejet de perturbations périodiques à fréquence variable et inconnue. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA*, Tunisie, 2004.
- [14] M. Bodson. Rejection of periodic disturbances of unknown and time-varying frequency. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, pp. 67–88, 2005.
- [15] R. Boukezzoula. *Commande floue d'une classe de systèmes non linéaires : Application au problème de suivi de trajectoire*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, France, 2000.
- [16] C. de Wit Canudas, J. Carrillo. A modified ew-rls algorithm for systems with bounded disturbances. *International Federation of Automatic Control*, 1990.
- [17] E. F. Camacho, C. Bordons. *Model predictive control*. Edition Springer Verlag, London, 2004.
- [18] M. Chadli. *Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2002.
- [19] S. L. Chiu. Fuzzy model identification based on cluster estimation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, vol. 2, pp. 267–278, 1994.
- [20] M. Chilali, P. Gahinet, P. Apkarian. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44(12), pp. 2257–2270, 1999.
- [21] O. H. Dagci, M. O. Efe, O. Kaynak, X. Yu. Variable structure systems in control of biochemical processes , *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, vol. 3, pp. 1690-1695, 2001.
- [22] F. Delmotte. *Analyse multi-modèle*. Thèse de doctorat, UST de Lille, France, 1997.
- [23] J. C. Doyle. Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, pp. 607–611, 1979.
- [24] M. Elkhailil, M. Ltaief, R. Ben Abdennour, M. M'Saad. Compensation adaptative des perturbations harmoniques : Une approche multimodèle. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'08*, Bucarest, Roumanie, 2008.
- [25] M. Elkhailil, M. Ltaief, R. Ben Abdennour. The multimodel approach for numerical model reference control. *Transactions on Systems, Signals & Devices, TSSD*, vol. 3(1), pp. 103–120, 2008.

- [26] M. Elkhail, M. Ltaief, R. Ben Abdennour, M. M'Saad. Multimodel reference model control : an experimental validation on a chemical reactor. *International Journal of Modeling, Identification and Control, IJMIC*, vol. 9(4), pp. 350–358, 2010.
- [27] I. Romdhane, M. Elkhail, R. Ben Abdennour. Multiple harmonic disturbances rejection using a new supervision procedure. *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering, IJ-STA*, vol. 4(1), pp. 1232–1245, 2010.
- [28] A. Feuer, K. S. Morse. Adaptive control of single input single-output hear systems. *IEEE, Transactions on Automatic Control*, vol. 23, 1978.
- [29] Y. C. Fu, J. S. Lin. Nonlinear backstepping control design of the Furuta Pendulum. *IEEE Conference on Control Applications*, Toronto, Canada, 2005.
- [30] K. Gasso. *Identification des systèmes dynamiques non linéaires : Approche multimodèle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine France, 2000.
- [31] O. Gehan. *Sur la commande de procédès industriels*. Thèse de doctorat, Université de Caen, France, 2000.
- [32] T. M. Guerra, L. Vermeiren. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, vol. 40(5), pp. 823–829, 2004.
- [33] G. Gregor, G. Lightbody. Control of highly nonlinear processes using self-tuning control and multiple/local model approaches. *IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems*, vol. 3(1), pp. 171-167, Slovenia, 2000.
- [34] Z. Hua, V. Kulkarni, L. Pao. Adaptive control for rejecting disturbances with time varying frequencies in tape systems. *American Control Confrence*, 2005.
- [35] L. Hsu, D. Aldayr. Analysis and design of IO based variable structure adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, 1994.
- [36] L. Hsu, R. R. Costa. Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements : Part I. *International Journal of control*, vol. 49, pp. 399–416, 1989.
- [37] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, 1989.
- [38] T. A. Johansen, B. A. Foss. Operating regime based process modelling and identification. *Computers and Chemical Ingrneering*, vol. 21, pp. 159–176, 1997.
- [39] T. A. Johansen, B. A. Foss. Editorial : Multiple model approaches to modelling and control. *International Journal of control*, vol. 72(7), pp. 575, 1999.

- [40] M. N. Kabbaj. *Développement d'algorithmes de détection et isolation de défauts pour la supervision des bioprocédés*. Thèse de doctorat, INSA, Toulouse, France, 2004.
- [41] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, A. S. Morse. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36(11), 1991.
- [42] A. Karimi, I. D. Landau. Robust adaptive control of flexible transmission system using multiple models. *IEEE, Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, 2000.
- [43] H. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, second edition, USA, 1996.
- [44] M. Ksouri-Lahmari. *Contribution à la commande multimodèle des processus complexes*. Thèse de doctorat, UST de Lille, France, 1999.
- [45] I. D. Landau, D. Patrascu. Adaptive narrow disturbance rejection applied to an active suspension-an internal model principle approach. *Automatica*, vol. 41 pp. 563–574, 2005.
- [46] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad. *Adaptive Control*. Springer Verlag, 1997.
- [47] F. Liu. *Synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Caen, France, 2007.
- [48] C. Lin, Q. G. Wang, T. H. Lee. Improvement on observer-based  $H_\infty$  control for T.S fuzzy systems. *Automatica*, vol. 41, pp. 1651–1656, 2005.
- [49] J. C. Lon, M. L. Lin. Observer-based robust  $H_\infty$  control for fuzzy systems using two-step procedure. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 12(3), pp. 350–359, 2004.
- [50] L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. Prentice Hall, 1993.
- [51] R. A. Lopez, N. Gonzalez, G. S. Corte. Tracking substrate trajectories in continuous aerobic wastewater reactors via nonlinear PI controllers. *Journal of Applied Research and Technology*, vol. 4, pp. 40-49, 2006.
- [52] P. Lopez, A. S. Nouri. *Théorie élémentaire et pratique de la commande par les régimes glissants*. Mathématiques et applications 55, SMAI, Springer - Verlag, 2006.
- [53] M. Ltaief. *Contributions à la représentation multimodèle des systèmes complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 2005.
- [54] M. Ltaief, K. Abderrahim, R. Ben Abdennour. Contributions to the multi-model approach : Systematic determination of a models'base and validities estimation. *Journal of Automation & Systems Engineering (JASE)*, vol. 2(3), 2008.
- [55] G. Luders, K. S. Narendra. An adaptive observer and identifier for multivariable linear system. *7<sup>th</sup> Annual Princeton Conference of Information Sciences and systems*, 1973.

- [56] A. Massaoud, M. Ltaief, R. Ben Abdennour. Partial predictors for the supervision of a multimodel generalized predictive control of highly non stationary systems. *American Control Conference, ACC*, 2008.
- [57] A. Massaoud, M. Ltaief, R. Ben Abdennour. Supervision based on Partial predictors for a multimodel generalized predictive control : Experimental validation on a semi-batch reactor. *International Journal of Modeling, Identification and Control, IJMIC*, vol. 4(1), pp. 153–173, 2009.
- [58] A. Massaoud. *Sur la représentation et la commande prédictive multimodèles des systèmes complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale de Gabès, 2010.
- [59] X. J. Ma, Z. Q. Sun, Y. Y. He. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE, Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6(1), 1998.
- [60] J. M. Maciejowski. *Predictive control with constraints*. Edition Prentice Hall, Harlow, 2002.
- [61] S. Mezghani, A. Elkamel, P. Borne. Multimodel control of discrete systems with uncertainties. *International Journal of Studies in Informatics and Control*, 2000.
- [62] M. Mihoub. *Contributions à l'observation des systèmes complexes en régime glissant*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale de Gabès, 2010.
- [63] R. V. Monopoli. Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1974.
- [64] G. Monsees. *Discrete-Time Sliding Mode Control*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology, 2002.
- [65] S. Morales, B. Dahhou, G. Roux, J. P Babary. A pole placement partial state reference model adaptive control of a rapid thermal processor. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 7(1), pp. 45–61, 2007.
- [66] Y. Morère. *Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, France, 2001.
- [67] M. M'Saad, G. Sanchez. Partial state reference model adaptive control of a multivariable systems. *Automatica*. vol. 28, pp. 1189–1197, 1992.
- [68] M. M'Saad, M. Bouslimani, M. Latifi. PID adaptive control of exothermic stirred tank reactors. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> IEEE Conference on Control Applications*, Vancouver, Canada, 1993.
- [69] M. M'Saad, L. Dugard, SH. Hammad. A suitable Generalized Predictive Adaptive Controller case study : Control of flexible arm. *Automatica*, vol. 29(3), pp. 589–608, 1993.
- [70] M. M'Saad, E. Miklovicova, I. Hejda, M.A. Latifi. Partial state reference model control of a chemical reactors. *Proceedings of the 35<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Japan, 1996.

- [71] M. M'Saad, J. Chebassier. *Commande optimale*. Diderot, Arts et Sciences, pp. 2–67, 1996.
- [72] M. M'Saad, J. Chebassier. Partial state model predictive control : iterative performance enhancement and an experimental evaluation, *Proceedings of the 8<sup>th</sup> Conference of Yale*, 1996.
- [73] F. M'Sahli, C. Fayeche, R. Ben Abdennour, M. Ksouri. Application of adaptive controllers for the temperature control of a semi-batch reactor. *International Journal of Computational Engineering Science*, vol. 2(2), pp. 287–307, 2001.
- [74] K. S. Narendra, L. S. Valvani. Stable adaptive controller design-direct control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, 1978.
- [75] K. S. Narendra, L. S. Valvani. Stable discrete adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25(3), 1980.
- [76] K. S. Narendra, Y. H. Lin. A new error model for adaptive systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25(3), 1980.
- [77] K. S. Narendra, A. M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. 1989.
- [78] K. S. Narendra, J. Balakrishnan. Adaptive control using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, 1997.
- [79] K. S. Narendra, J. Balakrishnan. Adaptive control of discrete-time systems using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, 2000.
- [80] A. S. Nouri. *Généralisation du régime glissant et de la commande à structure variable applications aux actionneurs classiques et à muscles artificiels*. Thèse de doctorat, INSA, France, 1994.
- [81] A. S. Nouri, M. Mihoub, R. Ben Abdennour. Multimodel discrete sliding mode control for non stationary systems. *International Journal of Modeling, Identification and Control*, vol. 3(4), pp. 368–375, 2008.
- [82] R. Orjuela. *Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale IAEM Lorraine, France, 2008.
- [83] L. Ozkan, M. V. Kothare. Stability analysis of a multimodel predictive control algorithm with application to control of chemical reactors. *Journal of Process Control* vol. 16, pp. 81–90, 2006.
- [84] O. Pages. *Etude et comparaison de différentes structures de commande multi-contrôleurs. Application à un axe robotisé*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, France, 2001.
- [85] V. H. G. Palacio. *Modélisation et commande floues de type Takagi-Sugeno appliquées à un bioprocédé de traitement des eaux usées*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse III, France, 2007.

- [86] A. R. Pedro. *Robustification de lois de commande prédictive par la paramétrisation de Youla*. Thèse de doctorat, Paris, France, 2003.
- [87] M. Pouliquen, M. M'Saad. Further stability and convergence analysis of set membership identification. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Symposium on Control, Communication and Signal Processing*, Marrakech, 2006.
- [88] S. Ramaswamy, T. J. Cutright, H. K. Qammar. Control of a continuous bioreactor using model predictive control. *Process Biochemistry*, vol. 40, pp. 2763-2770, 2005.
- [89] G. Roux, B. Dahhou. Adaptive nonlinear control of a real-life fermentation process. *Proceeding of the 3<sup>th</sup> IEEE Conference on Control and Applications*, vol. 2, pp. 909-914, 1994.
- [90] R. Schorten, R. Marry-Smith, R. Bjorgan, H. Gollee. On the interpretation of local models in blended multiple model structures. *International Journal of control*, vol. 72(7), pp. 620-628, 1999.
- [91] A. Shigeo. *Neural networks and fuzzy systems theory and applications*. Kluwer Academic Publishers, USA, 1997.
- [92] J. E. Slotine, W. Li. *Applied Non-linear Control*. Prentice-Hall, USA, 1991.
- [93] I. Y. Smets, J. E. Claes, E. J. November, G. P. Bastin, J. F. V. Impe. Optimal adaptive control of (bio)chemical reactors : past, present and future. *Journal of Process Control* vol. 14, pp. 795-805, 2004.
- [94] S. Talmoudi. *L'approche multimodèle et les réseaux de neurones artificiels pour l'identification des systèmes complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'ingénieurs de Tunis, 2005.
- [95] S. Talmoudi, K. Abderrahim, R. Ben Abdennour, M. Ksouri. Approach using neural networks for complex systems modeling and identification. *Nonlinear Dynamics & Systems Theory, An International Journal of Research and Surveys*, vol. 8(3), 2008.
- [96] K. Tanaka, T. Hori, H. Wang. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11(4), pp. 582-589, 2003.
- [97] T. Tanaka, H. O. Ikeda, H. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers : Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems Technology*, vol. 6(2), 1998.
- [98] L. Thiaw. *Identification de systèmes dynamiques non linéaires par réseaux de neurones et multimodèles*. Thèse de doctorat, Université Paris XII, France, 2008.
- [99] Y. Z. Tsytkin. Robust continuous control systems with internal models. *Control Theory and Advanced Technology*. pp. 159-172, 1993.
- [100] Y. Z. Tsytkin. Stochastic discrete systems with internal models. *Journal of Automatisatation and Information Sciences*, 1997.

- [101] V. I. Utkin. Sliding modes and their application in variable structure systems. *Institute of Control Sciences, Edition MIR, USSR*, 1978.
- [102] V. I. Utkin. Discontinuous control systems : State of art in theory and applications. *Proceedings of the 10<sup>th</sup> IFAC World COngress*, vol. 1, pp. 75–94, 1987.
- [103] S. Valentinotti. *Adaptive rejection of unstable disturbances : application to a fed-batch fermentation process*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, France, 2001.
- [104] E. Walter, L. Pronzato. *Identification of parametric models*. Springer-Verlag, 1997.
- [105] A. Witkowska, M. Tomera, R. Smierzchalski. A backstepping approach to ship course control. *International Journal, AMCS*, vol. 17(1), pp. 73–85, 2007.
- [106] W. M. Wonham. On a matrix riccati equation of stochastic control. *SIAM Journal of Control*, vol. 4, pp. 681–698, 1968.
- [107] J. Zeng, D. Y. Xue, D. C. Yuan. The study of multiple model predictive control in wastewater treatment process. *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 2008.

## Résumé

Cette thèse concerne la commande des systèmes dont la dynamique peut être convenablement décrite par une approche multimodèle à partir d'une étude d'affinement des performances d'un système de commande adaptative avec modèle de référence. Quatre approches de commande multimodèle ont été proposées. La première approche est basée sur la commande avec modèle de référence sur la sortie. Une validation expérimentale réussie a été effectuée sur un réacteur chimique. La seconde approche est basée sur la commande prédictive avec modèle de référence sur l'état partiel. Des résultats de simulation, obtenus à partir d'un modèle physique d'un bioréacteur, ont montré que les performances du système de commande multimodèle sont semblables à celles obtenues par un système de commande non linéaire appropriée du type backstepping. La troisième approche est consacrée à la compensation des perturbations harmoniques dans le cas où la dynamique du système peut être raisonnablement décrite par une famille de modèles linéaires invariants. La quatrième approche est basée sur une commande prédictive multimodèle avec modèle de référence sur l'état partiel issue d'une synthèse LMI.

**Mots clés :** Approche multimodèle, Commande avec modèle de référence, Commande prédictive, Synthèse LMI, Compensation des perturbations harmoniques, Réacteur chimique, Bioréacteur.

## Abstract

This thesis is devoted to the control of systems with dynamics can be suitably described by a multimodel approach from an investigation study of a model reference adaptive control performance enhancement. Four multimodel control approaches have been proposed. The first approach is based on an output reference model control design. A successful experimental validation involving a chemical reactor has been carried out. The second approach is based on a suitable partial state model reference predictive control design. Simulation results involving a physical model of a bioreactor have showed that the underlying control system performs as well as an appropriate backstepping control system. The third approach is dedicated to harmonic disturbance compensation for dynamical systems that can be described by a finite set of linear time invariant models. The fourth approach is an LMI based multimodel partial state reference model predictive control design.

**Key words :** Multimodel approach, Model reference control, Predictive control, LMI design, Harmonic disturbance compensation, Chemical reactor, Bioreactor.