



HAL
open science

Multiresolution pour la Visualisation Scientifique

Georges-Pierre Bonneau

► **To cite this version:**

Georges-Pierre Bonneau. Multiresolution pour la Visualisation Scientifique. Synthèse d'image et réalité virtuelle [cs.GR]. Université de Grenoble, 2000. tel-01064669

HAL Id: tel-01064669

<https://theses.hal.science/tel-01064669v1>

Submitted on 16 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MEMOIRE d'HABILITATION

présenté par

Georges-Pierre Bonneau

pour obtenir le grade de

L'Habilitation à Diriger des Recherches

de

**L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
(Grenoble 1)**

Spécialité: Informatique et Mathématiques Appliquées

Multirésolution pour la Visualisation Scientifique

Date de soutenance: 26 juin 2000

Composition du jury:

Pr. Claude PUECH	Président
Jean-Daniel BOISSONAT, D.R.	Rapporteur
Pr. Hans HAGEN	Rapporteur
Pr. Bernd HAMANN	Rapporteur
Pr. Bernard LACOLLE	Examineur
Pr. Jean-Claude LEON	Examineur

Habilitation préparée au sein du laboratoire

LMC/IMAG

Remerciements

Table des matières

Première partie: Synthèse des travaux	5
Introduction	7
1 Visualisation Scientifique: tour d’horizon	13
1.1 Objectifs	13
1.2 Historique	15
1.3 Techniques	15
1.3.1 Données volumiques	16
1.3.1.1 Extraction de surfaces iso-valeurs	16
1.3.1.2 Lancer de rayon volumique	16
1.3.2 Champs de vecteur	16
1.3.2.1 Lignes, surfaces et volumes de courant	16
1.3.2.2 Visualisation topologique	17
2 Analyse multirésolution par subdivision	19
2.1 Subdivision dyadique, uniforme et stationnaire	19
2.2 Subdivisions généralisées	22
2.3 Applications de l’analyse multirésolution par subdivision	25
3 Analyse multirésolution non imbriquée	29
3.1 Conditions nécessaire sur les espaces d’approximation	30
3.2 Espaces d’approximation et fonctions échelles intermédiaires	30
3.3 Espaces de détail et fonctions ondelettes	31
3.4 Semi-orthogonalité et orthogonalité	31
3.5 Algorithmes d’analyse et de synthèse multirésolution	32
3.6 Choix des fonctions échelles intermédiaires	33
4 Visualisation multirésolution de données volumiques	35
4.1 Fonctions échelles BLaC	37

4.2 Fonctions échelles intermédiaires	38
4.3 Ondelettes BLaC	39
4.4 Implémentation	41
4.5 Résultats	43
5 Visualisation sur des triangulations irrégulières	45
5.1 Décomposition et reconstruction locale	47
5.1.1 Données constantes par morceaux	47
5.1.2 Données linéaires par morceaux	50
5.2 Décomposition et reconstruction globale	55
5.2.1 Données constantes par morceaux	55
5.2.2 Données linéaires par morceaux	62
5.3 Résultats	63
6 Bilan et perspectives	67
Références	69

Deuxième partie: Articles et publications 73

Ondelettes BLaC (Vis'96)	75
Analyse multirésolution non imbriquée (Computing)	83
Triangulations irrégulières, données constantes par morceaux I (CGI'98) .	101
Triangulations irrégulières, données constantes par morceaux II (TVCG) .	109
Triangulations irrégulières, données linéaires par morceaux (Vis'98)	125
Ondelettes de Haar optimales sur la sphère (Vis'99)	133
Ondelettes pour la visualisation scientifique (à paraître)	143
Données définies sur des polyèdres (Journées CSA)	155

Première Partie

Synthèse des travaux

de 1995 à 1999

Introduction

Les travaux de recherche dont ce mémoire est l'objet sont dédiés à la visualisation à différents niveaux de détail - multirésolution - de données scientifiques. Les données scientifiques abordées sont de deux types. Les premières sont définies sur des grilles tri-dimensionnelles uniformes; le domaine d'application correspondant étant alors la visualisation de données d'origines médicales provenant de coupes tomographiques ou de scanners IRM. Les secondes sont définies sur des réseaux triangulaires irréguliers, planaires ou sphériques; les domaines d'applications correspondants étant entre autres la visualisation de données topographiques (terrain visualization), ou encore de données provenant de calculs par éléments finis.

L'intérêt d'une visualisation à différents niveaux de détail provient de deux nécessités contradictoires. D'une part, la visualisation doit s'insérer dans le cadre d'un *processus interactif*, processus au cours duquel à l'observation d'un phénomène physique ou à la résolution d'un modèle numérique, succède une phase de visualisation des résultats obtenus, puis une étape de changement des paramètres du phénomène physique ou du modèle numérique observé, dans une direction souhaitée par le scientifique. Cette boucle - observation/calcul - visualisation - modification des paramètres - sera décrite et illustrée plus en détail dans une première partie consacrée à la visualisation scientifique. Parallèlement à la nécessité d'interactivité, la visualisation doit traiter des *masses de données toujours plus importantes*, compte tenu de l'accélération des moyens de calculs et d'acquisition. Or, même si les performances graphiques sont également en augmentation, celles-ci sont loin d'être suffisantes pour compenser la multiplication des données à traiter. Cette contradiction interactivité/grande masse de données est encore plus marquée dans une architecture réseau où un serveur gère les données et les distribue à un ensemble de clients, stations graphiques de moindre coût. Au problème des capacités graphiques réduites s'ajoute alors celui de la limitation de la bande passante des réseaux, et donc du temps nécessaire au transfert des données du serveur vers le client.

Citons parmi d'autres l'exemple du système DODS (Distributed Ocean Data System, [13]). Ce système est composé côté serveur d'un ensemble de scripts

CGI, un par type de données, et côté client d'un ensemble de fonctions permettant d'interpréter les données récupérées sur le serveur. De nombreux sites web utilisent ce système pour fournir des visualisations de données océanographiques (température de l'eau, vitesse du vent, humidité, courants,...). Mais ces sites web ne permettent pas de traiter progressivement les données réceptionnées: la totalité des données transmises doit être parvenue à la station cliente avant d'en avoir une visualisation. Pour obtenir un résultat dans un délai raisonnable, il est donc nécessaire de sélectionner une partie infime des données disponibles.

Ainsi une représentation acceptable des données à visualiser devrait être hiérarchique et permettre de réaliser les objectifs suivants:

- vue globale à une résolution arbitraire,
- vue locale exacte,
- transmission progressive par réseau,
- compression.

De plus les algorithmes réalisant ces objectifs devraient avoir un coût moyen minimal en temps et en espace, typiquement $O(N)$ ou $O(N \log(N))$ avec de petites constantes. Toutes ces caractéristiques sont remplies par la représentation hiérarchique des données basée sur l'analyse multirésolution par transformée en ondelettes. Ces méthodes d'analyse multirésolution permettent en effet de représenter une fonction à plusieurs niveaux de résolution en stockant le niveau de résolution le plus grossier, ainsi que les erreurs entre niveaux successifs. Ce codage par erreurs successives, plutôt que par mémorisation de tous les niveaux de résolution, explique le coût linéaire en espace des algorithmes d'analyse multirésolution. Les erreurs sont codées par des coefficients dits de détails. Chacun de ces coefficients est associé à une fonction de base, appelée ondelette à cause de son comportement oscillant, et de sa localité. Ainsi la transformée en ondelettes s'apparente à un changement de base entre la base d'origine dans laquelle est connue la fonction, et la base des ondelettes. L'*analyse* désigne le passage de la base d'origine à la base des ondelettes, la *synthèse* désigne la transformation inverse. Alors qu'un changement de base quelconque requiert un temps quadratique, la base des ondelettes est construite de telle manière que ces changements de base puissent s'effectuer en temps linéaire. Procéder à l'analyse suivie de la synthèse redonne les coefficients de la fonction dans sa base d'origine, autrement dit cela revient à ne rien faire.

Les applications qui nous intéressent dans le cadre de la visualisation scientifique résultent de la sélection de certains coefficients de détails - et de la suppression des autres - après l'analyse, et avant la synthèse. Cette sélection est basée sur les propriétés d'orthogonalité et de localité de la base des ondelettes. Sans entrer dans les détails, indiquons que les propriétés d'orthogonalité relient l'erreur provoquée par la suppression de coefficients de détails avec la valeur de ces coefficients: l'erreur sera faible si les coefficients de faible magnitude

sont supprimés. Les propriétés de localité permettent elles de préciser la zone influencée par la suppression d'un coefficient de détail.

Ainsi pour obtenir une *vue globale* à une résolution arbitraire, on peut sélectionner le pourcentage désiré des coefficients de détail les plus significatifs (i.e. les plus grands en valeur absolue). La *compression* résulte du même principe. La *transmission progressive* est optimisée lorsque l'on transmet les coefficients de détails par ordre décroissant de magnitude. Enfin une *vue locale exacte* est obtenue en sélectionnant tous les coefficients de détail dont la zone d'influence intersecte le région à visualiser.

Ces propriétés expliquent pourquoi l'analyse multirésolution a déjà été utilisée avec succès en visualisation scientifique, par exemple pour la visualisation de données médicales volumiques [20], pour la visualisation de données océanographiques [42], ou encore pour la visualisation de champs de vecteurs [33].

Mais l'analyse multirésolution par transformée en ondelettes impose des restrictions qui empêchent certains types de visualisations, ou même qui interdisent la visualisation de certains types de données. Une des principales restrictions est que la grille sur laquelle sont définies les données doit être obtenue par une succession de subdivisions partant d'une grille grossière. Ces subdivisions définissent une suite de grilles de plus en plus fines, telle que les cellules d'une grille sont subdivisées par les cellules de la grille suivante. Une telle suite de grilles est dite connectée par subdivision. Lorsque les données ont une structure simple, comme en analyse d'image où elles sont définies sur des grilles bidimensionnelles uniformes, il est aisé de leur associer une suite de grilles connectée par subdivision, en partant d'une grille ne comportant qu'une seule face, et en découpant en quatre chaque face pour obtenir la grille suivante, jusqu'à l'obtention d'une grille assez fine pour contenir l'image à analyser.

Mais lorsque les données sont définies sur une structure plus complexe, telle qu'une triangulation irrégulière pour des données topographiques par exemple, il est alors impossible de leur associer une suite de grilles connectée par subdivision.

Face à ce problème, deux types de solutions ont été proposées jusqu'alors: Les premières consistent à ne plus faire appel au cadre mathématique de l'analyse multirésolution, et à élaborer des procédés de simplification de triangulation cherchant à minimiser un critère d'erreur [12,11,23]. Les secondes passent par l'approximation des données originales par d'autres définies sur une suite de grilles connectée par subdivision, et appliquent ensuite les algorithmes d'analyse multirésolution sur ce nouvel ensemble de données [15].

Les travaux présentés dans ce mémoire proposent une troisième approche consistant à relaxer les restrictions imposées par la théorie classique de l'analyse multirésolution par transformée en ondelettes tout en conservant les propriétés

souhaitables pour les applications visées en visualisation scientifique. Les restrictions relaxées portent sur les espaces d'approximation associés à l'analyse multirésolution. Ce sont les espaces fonctionnels correspondant à chaque niveau de résolution, dans lesquelles la fonction d'origine est successivement approximée lors de l'analyse. Ces espaces doivent être imbriqués: l'espace correspondant à une résolution donnée doit être totalement inclus dans chacun des espaces correspondants aux résolutions plus fines. C'est cette imbrication qui implique entre autre la connectivité par subdivision de la grille de définition des données.

Une des principales contributions des travaux de ce mémoire est de proposer un cadre d'analyse multirésolution n'imposant pas cette imbrication, mais la remplaçant par une condition moins forte liée à la croissance des espaces d'approximation. Par exemple, lorsque les données sont définies sur des triangulations irrégulières, il est possible de leur associer une suite d'espaces d'approximation liée à des grilles triangulaires obtenues par appauvrissement de la grille originale. Cette suite d'espaces d'approximation n'est pas imbriquée, car la suite de grilles correspondante n'est pas connectée par subdivision, mais elle vérifie cependant les hypothèses restreintes du nouveau cadre d'analyse multirésolution. Ce nouveau cadre permet alors de définir des algorithmes d'analyse générant une approximation grossière des données originales et un ensemble de coefficients de détails. Le même type d'applications que celles décrites plus haut est alors possible, par la sélection de certains coefficients de détails suivie de la synthèse de l'ensemble des données.

Le nouveau cadre généralisé d'analyse multirésolution proposé dans ce mémoire a été également utilisé pour développer des algorithmes de visualisation multirésolution de données volumiques médicales. Les données étant définies sur des grilles uniformes, ce n'est pas la structure qui empêche l'application du cadre classique d'analyse multirésolution, mais c'est le type de visualisation souhaitée qui est en cause: le but recherché est d'obtenir un compromis entre régularité et netteté des visualisations, tout en ayant des ondelettes de support minimal, afin de réduire les temps de calcul. Ce but poursuivi a nécessité le choix d'une suite d'espaces d'approximation incompatible avec la condition d'imbrication imposée par le cadre classique d'analyse multirésolution, mais compatible avec la condition moins forte du cadre généralisé introduit dans ce mémoire. Plus concrètement, l'analyse multirésolution proposée est paramétrée par un scalaire compris entre 0 et 1, les valeurs faibles de ce paramètre privilégiant la netteté et les valeurs fortes la régularité des visualisations.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante:

- Le chapitre 1 donne un tour d'horizon des objectifs et des axes de recherche en visualisation scientifique. Ce chapitre dépasse le cadre des travaux

développés dans ce mémoire. Néanmoins compte-tenu de la relative jeunesse de ce domaine de recherche - les premières structures internationales ayant moins de dix ans - et de sa faible représentation dans la communauté scientifique nationale, il a semblé utile de présenter ce tour d'horizon.

- Le chapitre 2 est consacré aux méthodes classiques d'analyse multirésolution. Il en décrit le cadre général, les algorithmes de base permettant d'analyser ou de synthétiser un ensemble de données à différentes résolutions, ainsi que les applications développées pour la visualisation scientifique. Le propos n'est pas de donner une présentation exhaustive des méthodes d'analyse multirésolution, mais d'en extraire les propriétés et les algorithmes essentiels aux applications visées. Ce chapitre décrit également les restrictions imposées par le cadre classique de l'analyse multirésolution, et explique en quoi ces restrictions empêchent leur utilisation pour les applications exposées aux chapitres suivants.

- Le chapitre 3 expose le cadre généralisé d'analyse multirésolution commun aux applications présentées dans les chapitres suivants. La démarche scientifique qui a prévalu à l'établissement de ce cadre généralisé a été pragmatique: chronologiquement ce sont les recherches menées autour de l'application dédiée à la visualisation de données médicales volumiques qui ont abouti à ce cadre généralisé. Par la suite il est apparu que ce cadre pouvait être utilisé dans les autres applications présentées dans ce mémoire, concernant les données définies sur des triangulations irrégulières.

- Le chapitre 4 porte sur la visualisation de données médicales volumiques. Une nouvelle base d'ondelettes a été définie, conjugant les avantages de deux autres bases d'ondelettes classiques: celle de Haar et celle linéaire. Cette base d'ondelettes, dénommée "BLaC Wavelets" (Blending of Linear and Constant wavelets), permet à l'utilisateur de choisir son propre compromis entre la régularité et la netteté des visualisations.

- Le chapitre 5 décrit les applications concernant la visualisation multirésolution de données définies sur des triangulations irrégulières, planaires ou sphériques. Il débute par la présentation des algorithmes relatifs aux données constantes par morceaux (une donnée par face triangulaire). Dans ce cas les différents niveaux de résolution sont liés à une structure de triangulation hiérarchique, construite par élimination progressive de sommets non voisins dans la triangulation de départ. Diverses modifications de ces algorithmes sont présentées, permettant d'imposer des contraintes de reconstruction exacte en certains sommets, ou d'optimiser la structure hiérarchique pour une meilleure visualisation. Ces algorithmes sont ensuite

généralisés pour prendre en compte des données linéaires par morceaux (une donnée par sommet). La difficulté provient alors d'une perte de la localité des algorithmes définis pour les données constantes par morceaux. Les méthodes développées sont toujours basées sur la suppression de sommets, mais ne font plus appel à la même structure de triangulations hiérarchiques.

- Le chapitre 6 dresse le bilan des travaux effectués et aborde les perspectives. Celles-ci s'articulent autour de deux points: un projet européen de réseau de formation par la recherche (RTN) intitulé Multiresolution IN Geometric modELing (MINGLE), qui doit débiter en janvier 2000, et une collaboration avec le laboratoire Sols,Solides,Structures sur la visualisation multirésolution de données définies sur des polyèdres.

Chapitre 1

Visualisation Scientifique: Tour d'horizon

Ce chapitre procède à un rapide tour d'horizon des objectifs et des axes de recherche en visualisation scientifique. Il ne s'agit pas de donner une présentation complète de tous les aspects de la visualisation scientifique, mais de préciser les contours d'un domaine de recherche relativement récent, et faiblement représenté dans la communauté scientifique nationale. Une présentation plus complète de l'historique, des buts et des méthodes en visualisation scientifique est donnée dans [14].

1.1) Objectifs de la visualisation scientifique

Il est possible de définir la visualisation scientifique de plusieurs manières. D'abord en disant qu'il s'agit d'extraire d'un ensemble de données ou d'informations, une connaissance permettant une meilleure compréhension des phénomènes sous-jacents. Ou plus concrètement qu'il s'agit de synthétiser des images expliquant des données provenant d'une simulation numérique ou d'observations physiques. C'est donc un passage obligé pour de nombreux domaines des sciences de l'ingénierie, de la vie, ou de l'information, dès lors que la visualisation des phénomènes étudiés en permet une meilleure compréhension.

Deux illustrations permettront de préciser ces définitions. La première concerne la radiothérapie. Un DRT INPG de Miguel Juston en coopération avec la société TFM Consultants, et faisant suite à un projet de fin d'étude ENSIMAG [27], a été débuté en septembre 1999 sur ce sujet, sous mon encadrement. Un traitement en radiothérapie consiste à exposer une zone tumorale à une série d'irradiations destinées à détruire des cellules cancéreuses. Un accélérateur génère un cône irradiant dont la forme est contrôlée par une série de lamelles disposées près de la source irradiante. Afin de détruire un maximum de cellules cancéreuses tout en préservant les cellules saines environnantes et en évitant l'irradiation d'organes vitaux, la détermination pour chaque séance d'irradiation, de la forme du cône,

de son axe, de l'intensité et de la durée de l'irradiation est donc essentielle. Pour la mise au point du traitement, le médecin radiothérapeute dispose d'une série de coupes médicales et d'un logiciel de simulation déterminant la dose de radiation reçue en chaque cellule d'un volume donné. Diverses visualisations de ces données peuvent être utilisées pour aider le médecin. Il peut visualiser des surfaces iso-doses, constituées par l'ensemble des points où la dose a une valeur prédéterminée. Il peut obtenir une visualisation volumique des données simulant l'image qui serait obtenue par une radiographie classique. Les doses simulées peuvent également être superposées aux coupes médicales... Le médecin utilise ces visualisations pour déterminer les paramètres du traitement dans un processus interactif de modification des paramètres / calcul des doses reçues / visualisation des résultats.

La deuxième illustration est issue de l'aérodynamique. Un ingénieur concevant une aile d'avion dispose de logiciels de calcul par différences finies ou par éléments finis lui permettant de résoudre les équations différentielles partielles traduisant les lois de l'écoulement de l'air. Il peut alors observer le comportement local de l'écoulement en regardant le parcours de particules élémentaires le long de l'aile, ou en simulant visuellement l'écoulement de fumées. Cette visualisation peut même être immersive [10]. Pour obtenir une visualisation globale de l'écoulement il peut utiliser les méthodes dites topologiques, qui visualisent des lignes (pour les écoulements bi-dimensionnels) ou des surfaces (pour les écoulements tri-dimensionnels) de séparation de l'écoulement. L'ingénieur peut alors corriger la surface de l'aile en tenant compte de ces visualisations.

Ces deux exemples ont en commun le fait qu'ils s'inscrivent dans un processus de conception interactif, qu'il est possible de schématiser comme présenté en figure 1. Certains auteurs parlent alors de *boucle de la découverte scientifique* [34]. Dans les deux exemples cités, les temps de calcul de la géométrie de la visualisation, et de rendu [†] de cette géométrie doivent être minimisés.

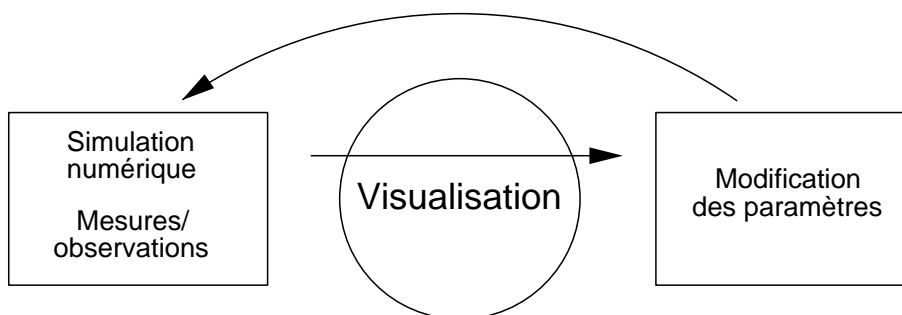


figure 1: processus interactif en visualisation scientifique

[†] le rendu désigne le passage de la géométrie 3D à l'image écran

1.2) Historique de la visualisation scientifique

Telle qu'elle vient d'être définie, la visualisation scientifique regroupe toutes les méthodes permettant de représenter graphiquement des données observées ou simulées. Il est clair que l'utilisation de graphiques pour la description de phénomènes a toujours existé, même bien avant l'apparition de l'ordinateur. Ainsi tracer l'historique de la visualisation scientifique ne consiste pas à dater les débuts de l'utilisation de graphiques en science, mais à déterminer quand les compétences acquises en visualisation dans des domaines très divers se sont réunies pour aboutir à la création d'un domaine de recherche propre. L'initiative de ce regroupement a été prise lors d'un séminaire de la NSF (National Science Foundation, USA) les 9 et 10 février 1987, auquel étaient conviés des universitaires, des agences gouvernementales et des industriels américains. Ce séminaire a défini les objectifs d'un nouveau domaine de recherche, dénommé alors "Visualization in Scientific Computing (ViSC)" [NSF'87]. Trois ans plus tard, la première conférence internationale sur ce thème a eu lieu: co-sponsorisée par les organisations IEEE et ACM, la conférence annuelle "Visualization" a acquis rapidement une audience largement internationale. Dix ans après sa première édition, la conférence Visualisation s'est imposée comme le rendez-vous annuel incontournable de la recherche en visualisation scientifique, ainsi qu'en témoigne le dernier pourcentage d'acceptation des papiers (36%). En Europe, notamment en Allemagne, plusieurs équipes de recherche se consacrent exclusivement à ce domaine. Depuis 1991 un séminaire tri-annuel sur la visualisation scientifique, réservé sur invitation, est organisé au centre de conférence international de Dagstuhl† en Allemagne. J'aurai l'honneur de co-organiser en compagnie de G. Nielson (professeur ASU), et F. Post (professeur Delft, pays-bas) la quatrième édition de ce séminaire, les 21-26 mai 2000. Par ailleurs l'association Eurographics organise chaque année les rencontres d'un groupe de travail sur la visualisation scientifique. En ce qui concerne les publications, elles ont d'abord été soumises à des revues classiques de disciplines adjacentes, telles que IEEE Computer Graphics and Applications pour l'informatique graphique. Ce n'est qu'avec la création en 1995 de la revue IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, au rythme de parution trimestriel, qu'une publication très majoritairement dédiée à la visualisation scientifique a vu le jour.

1.3) Techniques de la visualisation scientifique

Les techniques utilisées en visualisation scientifique sont à l'image des types de données qu'elles doivent traiter: elles sont très variées. Cette section a pour but de donner un aperçu de cette variété grâce à la présentation de certaines de ces techniques parmi les plus utilisées et sur lesquelles les recherches continuent.

† <http://www.dagstuhl.de>

1.3.1) Données volumiques

Les deux premières techniques présentées concernent la visualisation de données scalaires définies sur des grilles volumiques uniformes. Les champs d'application pour ce type de données sont principalement la visualisation de données médicales issues de scanners IRM ou de coupes tomographiques.

1.3.1.1) Extraction de surfaces iso-valeurs

Il s'agit ici de déterminer une surface constituée par l'ensemble des points où les données ont une même valeur fixée par l'utilisateur. L'algorithme dit du "Marching-Cube" [30] consiste à interpoler linéairement les données discrètes, et à extraire pour chaque cellule volumique élémentaire un ensemble de triangles séparant les points où les données sont plus grandes ou plus petites que la valeur fixée. Cet algorithme a été le point de départ de nombreuses publications destinées par exemple à hiérarchiser l'extraction des triangles, à éviter l'apparition de trous dans la surface extraite, ou encore à préciser la topologie de la triangulation extraite.

1.3.1.2) Lancer de rayon volumique

Contrairement au lancer de rayon utilisé en synthèse d'image, dans lequel les rayons lumineux issus de l'oeil se réfléchissent et se réfractent sur les surfaces de la scène, le lancer de rayon volumique est basé sur des rayons simulés traversant de part en part en ligne droite le volume de données, et accumulant une intensité selon une loi de propagation faisant intervenir l'émission et l'opacité de chaque cellule élémentaire du volume traversé. La recherche sur le lancer de rayon volumique est très active. De nombreuses architectures faisant intervenir des algorithmes parallèles sont développées [29,21,35]. Les applications, à l'origine destinées à la visualisation de données médicales, s'élargissent à la biologie (microscopie confocale), à la géologie (données sismiques), ou encore à l'industrie (inspection de pièces par tomographie). L'année 1999 a vu l'apparition des premières cartes PCI accélératrices de rendu volumique, à bas prix [36].

1.3.2) Champs de vecteur

Un autre axe de recherche important de la visualisation scientifique concerne les données vectorielles provenant principalement de la simulation numérique. Les applications visées incluent la météorologie, la dynamique des fluides, l'électromagnétisme, ou encore la mécanique.

1.3.2.1) Lignes, surfaces et volumes de courant

Ces trois algorithmes sont basés sur le calcul de la trace de particules tangentielle au champ de vecteur. Les lignes de courant sont obtenues à partir

d'un unique point initial. Les surfaces de courant sont obtenues en choisissant un segment initial à partir duquel sont calculées des lignes de courant. Ces lignes de courant sont interpolées par une triangulation. La surface résultante, notamment sa courbure, renseigne sur le comportement du champ de vecteurs. Cette surface peut également être colorée pour visualiser simultanément des données scalaires relatives au champ de vecteur. Les volumes de courant sont obtenus à partir d'un polygone initial, en calculant les lignes de courants issues des sommets de ce polygone, et en évaluant une tétraédrisation du volume englobé par ces lignes de courant. Un algorithme de lancer de rayon volumique est alors appliqué sur le volume résultant. Il est possible ainsi de simuler visuellement le parcours de fumées en aérodynamique, ou de traceurs fluorescents en hydrodynamique.

1.3.2.2) Visualisation topologique

Il s'agit ici de donner une visualisation globale du champ de vecteur, contrairement aux lignes, surfaces et volumes de courant qui renseignent sur sa nature locale. Cette visualisation est basée sur le calcul de lignes (pour des champs bidimensionnels) ou de surfaces (pour des champs tridimensionnels) séparant le champ de vecteurs en zones à l'intérieur desquelles le champ a un comportement simple [24]. Des méthodes d'interpolation continues des données peuvent être utilisées pour obtenir un meilleur résultat [37].

Chapitre 2

Analyse multirésolution par subdivision

La première partie de ce chapitre porte sur les bases de l'analyse multirésolution telles qu'elles ont été formulées par Stéphane Mallat dans [32]. Ces travaux ont permis d'unifier dans un cadre commun des algorithmes de décomposition hiérarchiques divers, développés principalement en analyse du signal. Les données traitées sont ici définies sur la totalité de la droite réelle. La deuxième partie présente la cadre général de l'analyse multirésolution par subdivision tel qu'il a été introduit dans [31] et appliqué en informatique graphique [39]. Cette partie met en évidence les limites de ce cadre classique. La troisième partie illustre certaines applications de l'analyse multirésolution pour la visualisation scientifique. Une présentation plus complète des applications en visualisation scientifique a été publiée [9].

Avertissement: Ce chapitre ne présente que les idées et les techniques de base de l'analyse multirésolution. Son ambition est de permettre, au lecteur expert en analyse multirésolution de faire le lien entre les thèmes présentés dans ce mémoire et la théorie classique, et au lecteur novice de disposer d'une introduction brève et intuitive à l'analyse multirésolution.

2.1) Subdivision dyadique, uniforme et stationnaire

Les bases de l'analyse multirésolution telles que formulées par S. Mallat [32] font intervenir les translatées et les dilatées de deux fonctions, la fonction dite échelle-mère, notée $\varphi(x)$, et la fonction dite ondelette-mère, notée $\psi(x)$. On parle de subdivision dyadique et uniforme car la fonction échelle-mère est supposée vérifier une équation du type:

$$\varphi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k) , \quad (1)$$

et que les translatées $\varphi(x - k)$ sont supposées former une base de l'espace V^0 qu'elles engendrent. En itérant la relation (1), il apparaît que les fonctions

$\varphi(2^n x - k)$ pour un n fixé forment une base d'un espace V^n , appelé **espace d'approximation**, tel que la suite des espaces (V^n) ainsi définie est imbriquée: $V^n \subset V^{n+1}$.

La subdivision est dite stationnaire, car la même règle (1) existe entre tous les niveaux de subdivision successifs. Intuitivement, V^n correspond à une résolution fixe, et la résolution augmente (s'affine) lorsque n augmente.

La fonction ondelette-mère ψ vérifie une relation du type:

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k). \quad (2)$$

(2) implique en particulier que ψ appartient à V^1 . En fait, les fonctions $\{\psi(2^n x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ sont supposées former une base du complémentaire W^n de V^{n+1} dans V^n : $V^{n+1} = V^n \oplus W^n$.

Cette dernière relation explique pourquoi les espaces W^n sont appelés **espaces de détail**: ils permettent en effet de coder l'erreur d'approximation entre les résolutions successives.

Le cas où les fonctions $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormale de V^0 est particulièrement intéressant, car alors en posant $g_k = (-1)^k h_{1-k}$, il apparaît que les fonctions $\{\psi(2^n x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ constituent une base orthogonale de W^n , qui est alors le complémentaire orthogonal de V^n .

Notons $\varphi_k^n(x) = \varphi(2^n x - k)$, et $\psi_k^n(x) = \psi(2^n x - k)$. L'**analyse multirésolution**, ou **décomposition**, consiste, en partant d'une fonction donnée f connue à une résolution dite maximale N_{\max} :

$$f(x) = \sum x_k^{N_{\max}} \varphi_k^{N_{\max}}(x),$$

à calculer les coefficients x_k^n de ses approximations successives dans les espaces V^n ($n \leq N_{\max}$), et les coefficients de détail y_k^n stockant l'erreur entre V^n et V^{n+1} . Ces coefficients sont calculés par les relations suivantes:

$$x_l^n = \sum_k \overline{h_{k-2l}} x_k^{n+1} \quad (3)$$

$$y_l^n = \sum_k \overline{g_{k-2l}} x_k^{n+1} \quad (4)$$

L'analyse est ainsi un algorithme qui fonctionne en cascade, et qui peut être schématisé comme en fig. 2.

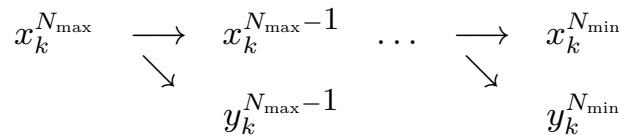


figure 2: algorithme d'analyse multirésolution

À chaque niveau de résolution, les coefficients d'échelle x_k^{n+1} sont remplacés par les coefficients d'échelle x_k^n et les coefficients de détail y_k^n . Ainsi l'algorithme ne requiert pas de mémoire supplémentaire. A la fin de la décomposition, seuls les coefficients d'échelle les plus grossiers $x_{N_{\min}}$ et les coefficients d'ondelettes à tous les niveaux $y_k^n, n = N_{\min}, \dots, N_{\max}$ sont conservés en mémoire, et la relation suivante lie ces coefficients aux données originales:

$$\sum_k x_k^{N_{\max}} \varphi_k^{N_{\max}} = \sum_k x_k^{N_{\min}} \varphi_k^{N_{\min}} + \sum_k y_k^{N_{\min}} \psi_k^{N_{\min}} + \dots + \sum_k y_k^{N_{\max}-1} \psi_k^{N_{\max}-1} \quad (5)$$

Cette relation signifie que les données originales ont été décomposées comme somme d'une approximation grossière, et de coefficients de détails stockant l'erreur entre les résolutions successives:

$$\underbrace{x_k^{N_{\min}}}_{\text{code l'approx. grossière}}, \underbrace{y_k^{N_{\min}}}_{\text{code l'erreur entre les niv. min et min+1}}, \dots, \underbrace{y_k^{N_{\max}-1}}_{\text{code l'erreur entre les niv. max-1 et max}}$$

Le procédé inverse, dénommé **synthèse** ou **reconstruction**, consiste à retrouver la fonction initiale en partant de son approximation dans $V^{N_{\min}}$ et des coefficients de détail successifs. Cette synthèse s'effectue grâce à la relation

$$x_k^{n+1} = 2 \sum_l h_{k-2l} x_l^n + 2 \sum_l g_{k-2l} y_l^n \quad (6)$$

L'exemple le plus trivial d'analyse multirésolution est obtenu pour les coefficients $h_0 = h_1 = 1/2$. Il s'agit du système de Haar [22]. La figure 3 illustre l'analyse multirésolution pour le système de Haar. Le passage de la résolution $n + 1$ à n consiste ici à calculer la moyenne de deux données consécutives, et à stocker comme coefficient de détail la moitié de la différence entre ces deux données.

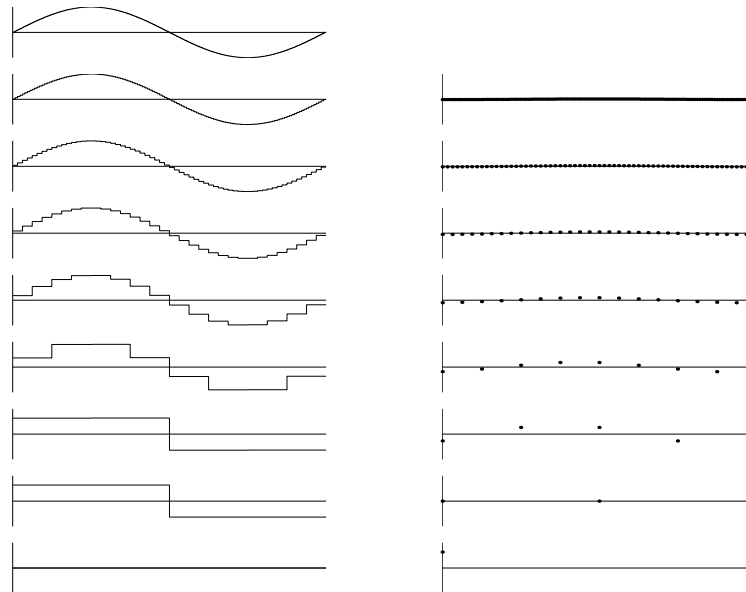


figure 3: analyse multirésolution d'un signal sinusoidale par les ondelettes de Haar. A gauche approximations aux résolutions 8,...,1; à droite coefficients d'ondelettes stockant l'erreur entre les approximations successives.

2.2) Subdivisions généralisées

Les techniques d'analyse multirésolution présentées dans la partie précédente sont destinées à traiter des données définies sur toute la droite réelle. Cela s'explique par le fait qu'elles trouvent leur source en analyse du signal. De plus, le processus de subdivision décrit dans la partie précédente est uniforme: les mêmes coefficients sont utilisés tout le long de la droite réelle. Lorsqu'il est devenu intéressant d'utiliser l'analyse multirésolution pour des applications en informatique graphique, il s'est avéré nécessaire de pouvoir prendre en compte des données définies sur des ensembles plus généraux, comme des intervalles bornés pour décrire des courbes ([16]), ou des triangulations dans \mathbb{R}^3 pour décrire des surfaces de topologie quelconque ([31]). Il n'est alors plus possible de définir toutes les fonctions échelles et ondelettes comme translatées et dilatées de deux fonctions mères. Dans ce contexte, tous les ensembles abordés sont supposés avoir une dimension finie. L'analyse multirésolution est maintenant basée sur l'existence d'une suite d'espaces fonctionnels V^n imbriquée:

$$V^n \subset V^{n+1}, \quad (7)$$

qui joue le même rôle que dans la partie précédente: chaque espace V^n correspond à une résolution fixe, et celle-ci augmente lorsque n augmente. Les espaces de détail W^n , codant l'erreur entre deux résolutions successives, sont des supplémentaires de V^n dans V^{n+1} , non nécessairement orthogonaux:

$$V^{n+1} = V^n \oplus W^n. \quad (8)$$

Les espaces V^n et W^n ont pour base respective (φ_k^n) et (ψ_k^n) . Les fonctions (φ_k^n) sont appelées fonctions échelles, (ψ_k^n) fonctions ondelettes. Ces fonctions ne sont donc plus forcément définies sur la droite réelle, et ne sont également plus supposées être les translatées et dilatées de fonctions mères. Les relations (7) et (8) impliquent l'existence de matrices rectangulaires A^n , B^n , P^n et Q^n telles que

$$(\varphi_k^n) = {}^t P^n (\varphi_k^{n+1}) \quad (9)$$

$$(\psi_k^n) = {}^t Q^n (\varphi_k^{n+1}) \quad (10)$$

$$(\varphi_k^{n+1}) = {}^t A^n (\varphi_k^n) + {}^t B^n (\psi_k^n). \quad (11)$$

Les relations (9) et (10) sont les équivalents des relations (1) et (2) dans le nouveau cadre. Ces relations décrivent un procédé de subdivision non stationnaire (les matrices changent à chaque résolution) et non uniforme (les lignes des matrices ne sont pas des copies translatées les une des autres). Les relations (9), (10) et (11) sont liées entre elles: les matrices A^n , B^n , P^n et Q^n doivent vérifier la relation suivante, dénommée **condition de reconstruction**:

$$P^n A^n + Q^n B^n = \begin{pmatrix} P^n & Q^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^n \\ B^n \end{pmatrix} = I. \quad (12)$$

L'analyse multirésolution d'une fonction f connue à une résolution N_{\max} consiste à calculer ses approximations successives dans les espaces de résolution moindre, ainsi que les erreurs d'approximation entre les résolutions successives. La formule (5) liant les approximations aux résolutions N_{\max} et N_{\min} reste valable, mais les coefficients d'échelle (x_k^{n+1}) et (x_k^n) et les coefficients de détail (y_k^n) sont maintenant liés par les relations suivantes:

$$(x_k^n) = A^n (x_k^{n+1}) \quad (13)$$

$$(y_k^n) = B^n (x_k^{n+1}) \quad (14)$$

$$(x_k^{n+1}) = P^n (x_k^n) + Q^n (y_k^n). \quad (15)$$

(13), (14) et (15) sont les équivalents des relations (3), (4) et (6) dans le nouveau contexte. Le schéma de calcul en cascade donné en fig. 2 reste valable dans ce nouveau contexte. Les flèches dans ce schéma correspondent maintenant à des multiplications matricielles.

Exemple 1: Courbes multirésolution

Ce cadre permet de décrire des courbes sous forme multirésolution [16]. Les espaces V^n correspondent alors à des espaces de courbes splines polynomiales sur une séquence de nœuds qui est subdivisée entre chaque niveau de résolution. Les fonctions échelles et ondelettes au bord de l'intervalle de définition ne sont pas translatées de celles situées au centre de l'intervalle de définition, et le procédé de subdivision associé est non-uniforme.

Exemple 2: Ondelettes sphériques

Ce cadre permet également de définir des fonctions échelles et ondelettes sur la sphère [4,38,33]. Les domaines de définition des fonctions de V^n sont obtenus par subdivision d'une triangulation sphérique de base. La figure 4 montre 2 niveaux de subdivision partant d'un octaèdre et d'un icosaèdre sphérique. Les espaces V^n peuvent être constitués par l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur ces domaines ([4,33]) ou par d'autres ensembles de fonctions plus lisses lorsque l'application le nécessite ([38]). La figure 6 montre les approximations successives dans les espaces V^n , résultantes de l'analyse d'un ensemble de données topographiques sur une grille icosaédrique subdivisée cinq fois, avec les ondelettes développées dans [4].

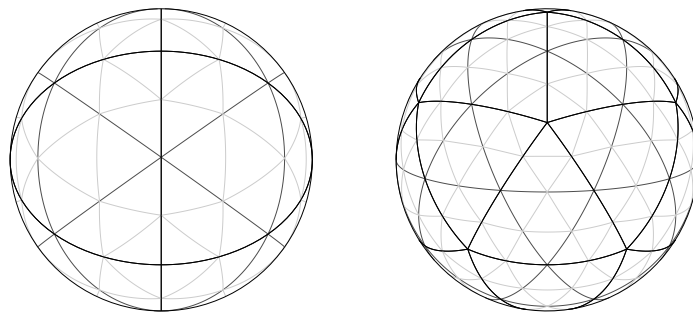


figure 4: domaine de définition des ondelettes sphériques: à gauche octaèdre subdivisé deux fois, à droite icosaèdre subdivisé deux fois.

Restrictions imposées par la subdivision

La relation (9) liant les fonctions échelles de deux résolutions successives impose tout d'abord que ces fonctions doivent avoir des domaines de définition obtenus par subdivision d'un domaine de base. Concernant les subdivisions dyadiques, uniformes et stationnaires présentées dans la partie précédente, le domaine correspondant à V^0 est constitué de l'ensemble des intervalles entiers. Chaque intervalle est ensuite divisé en deux intervalles de même longueur à chaque étape de subdivision. Dans le cas des ondelettes sphériques présentées dans cette section, le domaine de base est une triangulation sphérique, et la subdivision consiste à diviser chaque triangle en quatre en insérant les milieux géodésiques le long de chaque arête.

Il apparaît ainsi que les algorithmes d'analyse multirésolution ne peuvent traiter que des données définies sur des grilles de topologies très restreintes. En particulier l'analyse multirésolution ne permet pas de traiter des données définies sur des triangulations irrégulières.

D'autre part, la relation (9) impose également que le "comportement" des fonctions échelles doit être le même à tous les niveaux de résolutions: par exemple,

si elles sont linéaires à une résolution donnée, alors elles le sont également à toutes les résolutions. Ainsi dans l'application présentée au chapitre 4, où sur certains intervalles les fonctions échelles d'une résolution sont linéaires, alors que celles d'une résolution plus élevée sont toutes constantes, il est impossible de satisfaire une relation du type (9).

2.3) Applications de l'analyse multirésolution par subdivision

Jusqu'à présent seuls les algorithmes d'analyse et de synthèse ont été présentés. Ils permettent uniquement d'obtenir des approximations à des résolutions fixes, correspondants aux espaces d'approximation V^n . Il est possible de contrôler plus finement la localité et la qualité des approximations en sélectionnant certains coefficients d'ondelettes, et en n'utilisant que ceux-ci lors de la synthèse. On parle alors de synthèse partielle. Cette sélection est rendue possible par le fait que les fonctions ondelettes sont localisées (idéalement elles ont un support compact, et au minimum elles décroissent rapidement), et qu'elles vérifient certaines propriétés d'orthogonalité qui lient la qualité de l'approximation aux valeurs des coefficients d'ondelettes supprimés lors de la synthèse partielle (idéalement lorsque la base des fonctions d'ondelettes est orthonormale, l'erreur d'approximation est égale à la norme des coefficients d'ondelettes supprimés).

Les applications présentées dans cette section procèdent toutes de la reconstruction partielle d'un ensemble de données. Les illustrations sont basées sur les ondelettes sphériques développées dans [4], appliquées à un ensemble de données topographiques plaqué sur un icosaèdre sphérique subdivisé 7 fois.

Transmission et visualisation progressive par réseau

Pour cette application l'ensemble de données est analysé sur un serveur, et les coefficients d'ondelettes sont triés. Ces coefficients sont ensuite transmis par les réseaux vers une station cliente, en ordre décroissant de valeur absolue. Les données sont alors synthétisées progressivement sur la station cliente. La figure 5 illustre l'application de transmission progressive. Le tableau 1 donne les erreurs relatives pour un nombre croissant de coefficients de détail transmis. La figure 7 montre certaines des visualisations associées.

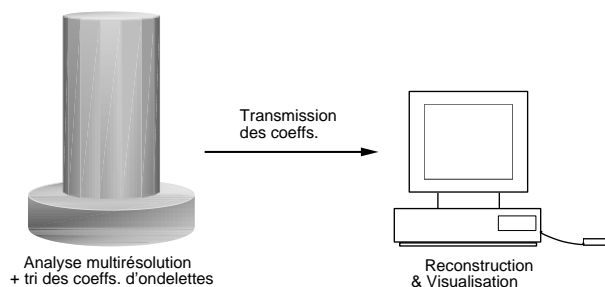


Figure 5: transmission et visualisation progressive par réseau

# coef. de détail	erreur L^2 relative
5000	0.122
10000	0.092
20000	0.066
40000	0.042
70000	0.026
100000	0.017
150000	0.008
200000	0.004

Table 1: erreur L^2 relative pour la reconstruction progressive de l'ensemble de données topographiques

Zoom

Pour cette application, l'ensemble de données est reconstruit en n'utilisant que les coefficients d'ondelettes dont la fonction associée à un support intersectant une région d'intérêt choisie par l'utilisateur. La région utilisée dans la figure 8 correspond aux points v de la sphère, tels que $\langle v, c \rangle > \alpha$, où c est le centre de la région d'intérêt et $\alpha = 0.9$.

Reconstruction locale approximée

Ici seuls les coefficients d'ondelettes de valeur absolue la plus grande dans une région d'intérêt choisie, sont utilisés lors de la reconstruction. La figure 9 illustre cette application.

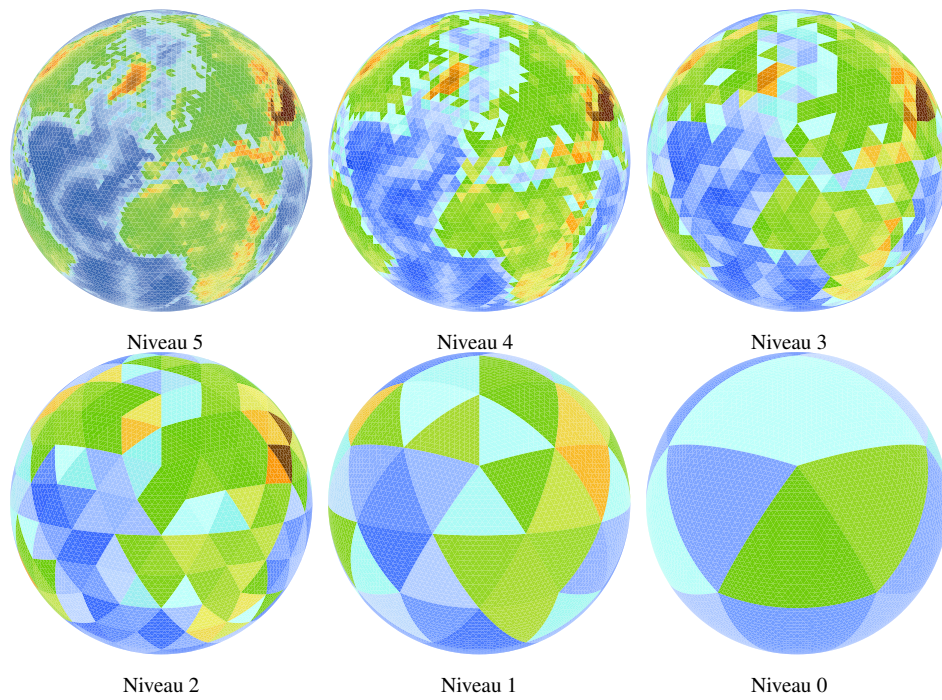


figure 6: analyse multirésolution de données topographiques plaquées sur une triangulation icosaédrique subdivisée 5 fois

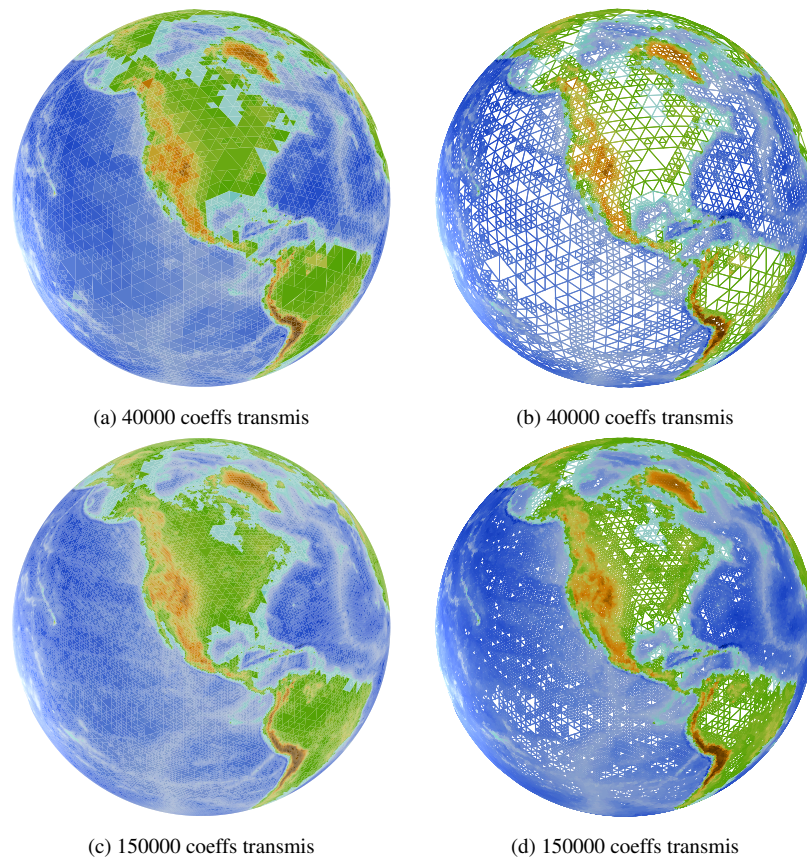


figure 7: visualisation progressive de données topographiques plaquées sur une triangulation icosaédrique subdivisée 7 fois

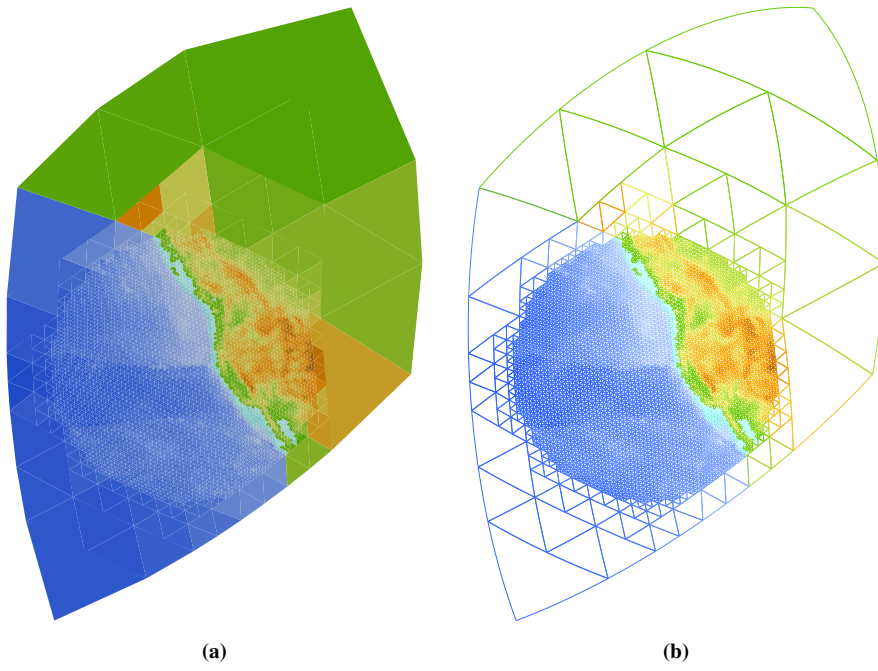


figure 8: zoom

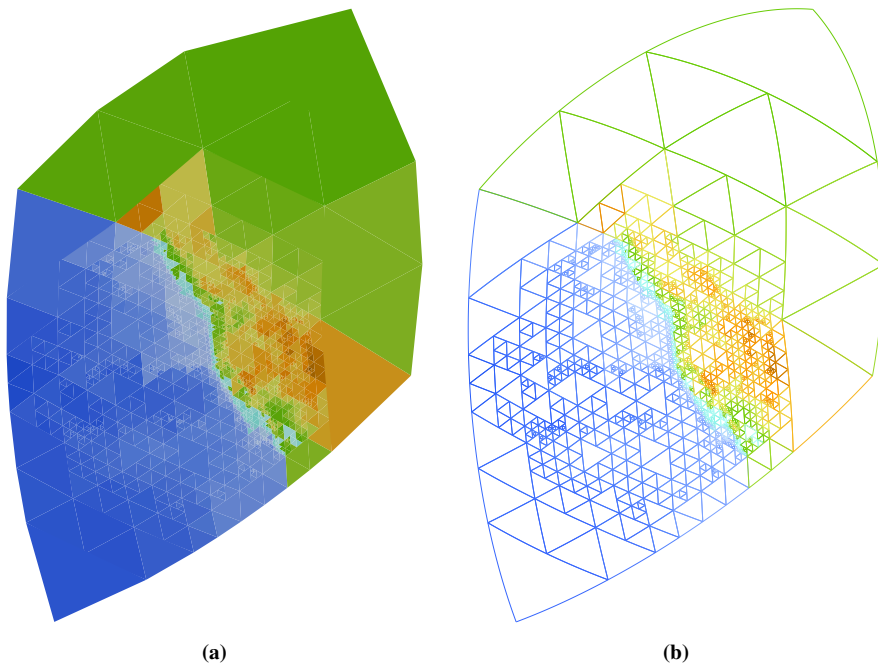


figure 9: reconstruction locale approximée

Chapitre 3

Analyse multirésolution non imbriquée

Le chapitre précédent a présenté l'analyse multirésolution par subdivision, ainsi que les restrictions imposées par la subdivision. Celles-ci incluent l'impossibilité de traiter des données définies sur des triangulations irrégulières, ainsi que le manque de flexibilité dans le choix des fonctions échelles. C'est cette dernière restriction, rencontrée lors du travail de recherche concernant la visualisation de données volumiques présenté au chapitre 4, qui a motivé le cadre généralisé d'analyse multirésolution développé dans ce chapitre. Ce cadre a été légèrement modifié par la suite lorsqu'il est apparu qu'il était susceptible de permettre également le traitement de données sur des triangulations irrégulières. Ce cadre a été introduit dans la publication [8].

Le point commun entre les applications présentées aux chapitres 4, 5 et 6 est l'existence d'une suite d'espaces d'approximation V^n découlant directement des objectifs visés par l'application, mais ne vérifiant pas la propriété d'imbrication (7) requise par les analyses multirésolution basées sur la subdivision. Néanmoins cette suite d'espaces est telle que lorsque n augmente, les espaces V^n permettent d'approximer à une précision arbitraire les données originales. Intuitivement, ces espaces "grossissent" jusqu'à permettre de décrire exactement les données d'origine. Cette dernière propriété amène naturellement à se poser la question de la mise au point d'algorithmes d'analyse et de synthèse multirésolution du type de ceux présentés au chapitre précédent, mais pouvant s'appliquer au cas où les espaces d'approximation ne sont pas imbriqués. Ce chapitre montre que de tels algorithmes peuvent être développés grâce à l'utilisation d'*espaces intermédiaires* permettant de faire le lien entre les espaces d'approximation non imbriqués. En décrivant le plus grand commun dénominateur des applications qui suivent dans ce mémoire, ce chapitre propose des pistes et un cadre de travail pour l'analyse multirésolution non imbriquée, susceptibles d'être utilisés dans d'autres cas.

3.1) Condition nécessaire sur les espaces d'approximation

La suite des espaces d'approximation V^n doit vérifier les conditions suivantes:

- i) V^n est isomorphe à un sous-espace de V^{n+1} ,
- ii) les espaces V^n permettent d'approximer à une précision arbitraire les données originales.

La condition i) signifie que les espaces V^n croissent. Cette condition remplace la condition d'imbrication (7) nécessitée par les analyses multirésolution basées sur la subdivision. Autrement dit chaque espace V^n correspond à une résolution fixe, la résolution s'affine lorsque n augmente, mais une approximation à une résolution donnée n'appartient pas forcément à l'ensemble des approximations pour les résolutions supérieures.

La condition ii) sera vérifiée trivialement dans les applications des chapitres suivants, puisque les données originales appartiendront à un des espaces d'approximation, considéré comme celui de résolution maximale.

3.2) Espaces d'approximation et fonctions échelles intermédiaires

Comme au chapitre précédent, les fonctions échelles sont les fonctions de base des espaces d'approximation V^n et sont notées (φ_k^n) . Lorsque la condition d'imbrication (7) est satisfaite, le lien entre les deux niveaux de résolution est donné par l'équation de subdivision (9) qui exprime chaque fonction échelle (φ_k^n) comme combinaison linéaire des fonctions échelles plus fines (φ_k^{n+1}) . Dans le nouveau cadre non-imbriqué, la condition i) implique qu'il existe des fonctions $(\tilde{\varphi}_k^n)$ formant une base d'un espace \tilde{V}^n isomorphe à V^n et inclus dans V^{n+1} . Ainsi le lien entre les niveaux de résolution n et $n + 1$ est maintenant donné par un procédé en deux étapes: la première étape consiste à appliquer l'isomorphisme, i.e. remplacer les fonctions échelles originales φ_k^n par les fonctions échelles intermédiaires $(\tilde{\varphi}_k^n)$, et la seconde à appliquer l'équation de subdivision qui exprime les fonctions intermédiaires $(\tilde{\varphi}_k^n)$ comme combinaison linéaire des fonctions plus fines (φ_k^{n+1}) :

$$(\varphi_k^n) \longleftrightarrow (\tilde{\varphi}_k^n) = {}^t P^n(\varphi_k^{n+1}).$$

La relation précédente est dénommée *équation de subdivision approximée* car dans les applications des chapitres suivants, la fonction échelle intermédiaire $\tilde{\varphi}_k^n$ sera proche de φ_k^n . En notant S^n l'isomorphisme de V^n vers l'espace intermédiaire \tilde{V}^n , l'équation de subdivision approximée prend la forme suivante:

$$S^n(\varphi_k^n) = (\tilde{\varphi}_k^n) = {}^t P^n(\varphi_k^{n+1}), \quad (16)$$

et remplace l'équation de subdivision exacte (9) dans ce nouveau contexte.

3.3) Espaces de détail et fonctions ondelettes

Puisque les espaces d'approximation ne sont plus imbriqués, il n'est plus possible de définir les espaces de détail comme supplémentaires entre les espaces de résolutions successives. Dans le nouveau contexte l'espace de détail W^n code l'erreur entre l'espace intermédiaire \tilde{V}^n et l'espace de résolution plus fine V^{n+1} , autrement dit W^n est maintenant choisi comme un supplémentaire de \tilde{V}^n dans V^{n+1} :

$$V^{n+1} = \tilde{V}^n \oplus W^n. \quad (17)$$

Les fonctions ondelettes ψ_k^n sont des fonctions de base de ce nouvel espace de détail W^n . La relation (17) implique comme dans le cadre des analyses multirésolutions par subdivision l'existence de matrices rectangulaires Q^n , A^n et B^n , telles que

$$(\psi_k^n) = {}^t Q^n (\varphi_k^{n+1}) \quad (18)$$

$$(\varphi_k^{n+1}) = A^n (\tilde{\varphi}_k^n) + B^n (\psi_k^n) \quad (19)$$

La même condition de reconstruction (12) liant les matrices P^n , Q^n , A^n , et B^n doit être vérifiée dans le nouveau contexte.

3.4) Semi-orthogonalité et orthogonalité

Dans le chapitre précédent les propriétés d'orthogonalité de la base d'ondelette ont été très brièvement évoquées. Elles sont précisées ici dans le contexte de l'analyse multirésolution non imbriquée.

Semi-orthogonalité

L'analyse est dite semi-orthogonale ssi:

$${}^t P^n G_{n+1} Q^n = 0, \quad (20)$$

où $G_{n+1} = \left(\langle \varphi_k^{n+1}, \varphi_l^{n+1} \rangle \right)$ est la matrice du produit scalaire dans l'espace d'approximation V^{n+1} . (20) signifie que les fonctions ondelettes sont orthogonales aux fonctions échelles intermédiaires. Cette propriété assure que le passage de la résolution $n + 1$ à la résolution intermédiaire se fait de manière optimale, en projetant selon la distance la plus courte. Comme pour l'analyse multirésolution par subdivision, il est aisé de montrer que les matrices A^n et B^n vérifient alors également une relation d'orthogonalité:

$$A^n G_{n+1}^{-1} {}^t B^n = 0, \quad (21)$$

et que les matrices de reconstruction P^n et Q^n peuvent être calculées à partir des matrices de décomposition A^n et B^n par les formules:

$$\begin{aligned} P^n &= G_{n+1}^{-1} {}^t A^n \left(A G_{n+1}^{-1} {}^t A^n \right)^{-1} \\ Q^n &= G_{n+1}^{-1} {}^t B^n \left(B G_{n+1}^{-1} {}^t B^n \right)^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

Orthogonalité

L'analyse est dite **orthogonale** ssi en plus des conditions (20), les relations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= I, \\ {}^t P^n P^n &= I, \\ {}^t Q^n Q^n &= I, \end{aligned}$$

ce qui signifie que les bases de fonctions échelles, de fonctions échelles intermédiaires, et de fonctions d'ondelettes sont orthogonales. Cette propriété assure que l'erreur entre l'approximation à la résolution $n+1$ et l'approximation intermédiaire est égale à la norme des coefficients d'ondelettes à la résolution n . Dans ce cas, les matrices d'analyse et de reconstruction sont transposées les unes des autres: $P^n = {}^t A^n$, $Q^n = {}^t B^n$.

3.5) Algorithmes d'analyse et de synthèse multirésolution

Les algorithmes d'analyse et de synthèse peuvent être présentés sous deux angles de vue: l'un purement algorithmique ne portant que sur le calcul pratique des coefficients d'échelle et de détail, l'autre fonctionnel, s'intéressant aux approximations correspondants à ces coefficients d'échelle et de détail.

D'un point de vue purement algorithmique rien n'est changé par rapport aux algorithmes multirésolution par subdivision: les formules de décomposition (13), (14) et de reconstruction (15) restent les mêmes.

D'un point de vue fonctionnel le passage entre deux résolutions successives se fait maintenant en deux étapes, comme schématisé dans la figure 10. Ce passage en deux étapes est illustré géométriquement et comparé au cadre de l'analyse par subdivision dans la figure 11 dans le cas d'une analyse semi-orthogonale, i.e. lorsque le passage à l'approximation intermédiaire se fait selon la plus courte distance.

$$\begin{array}{ccc}
 \sum_k x_k^{n+1} \varphi_k^{n+1} & \xrightarrow{\text{approx.}} & \sum_k x_k^n \tilde{\varphi}_k^n & \xleftrightarrow{\text{isomorph.}} & \sum_k x_k^n \varphi_k^n \\
 & \searrow & & & \\
 & & \sum_k y_k^n \psi_k^n & &
 \end{array}$$

figure 10: les deux étapes lors de l'analyse multirésolution non imbriquée

Dans la figure 11 les espaces fonctionnels sont symbolisés par des espaces géométriques. A gauche est symbolisé la configuration correspondant à l'analyse par subdivision: l'espace V^n est inclus dans l'espace V^{n+1} , le passage de V^{n+1} à V^n se fait par projection orthogonale. A droite, l'espace V^n n'est pas inclus dans l'espace V^{n+1} , le passage de V^{n+1} à V^n se fait par projection orthogonale sur l'espace intermédiaire \tilde{V}^n , puis par l'isomorphisme S^n de l'espace intermédiaire vers l'espace V^n .

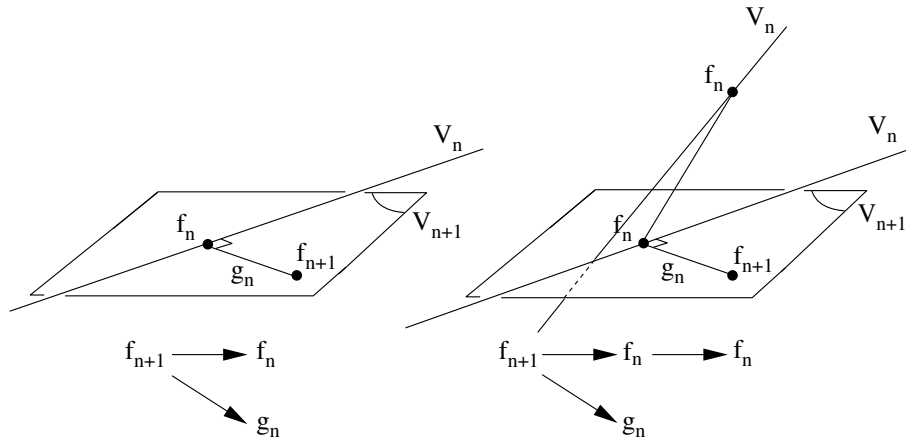


figure 11: illustration géométrique de l'analyse par subdivision (à gauche) et l'analyse non imbriquée (à droite), dans le cas semi-orthogonal.

3.6) Choix des fonctions échelles intermédiaires

Si le choix des fonctions échelles est souvent imposé directement par l'application visée, celui des fonctions échelles intermédiaires est plus complexe. Dans le chapitre 4 concernant la visualisation de données volumiques, ce choix est également imposé par l'application, puisque les fonctions échelles intermédiaires sont choisies proche des fonctions échelles, et telles que l'équation de subdivision approximée (16) soit une combinaison des équations de subdivision exacte pour les ondelettes de Haar et pour les ondelettes linéaires.

Par contre dans les applications portant sur les données définies sur des triangulations irrégulières, ce choix peut être décrit indépendamment de l'application concernée. En effet les fonctions échelles intermédiaires sont alors choisies de telle manière que le passage de la résolution $n + 1$ à la résolution n se fasse

toujours par la meilleure approximation. Pour cela il faut que les coefficients d'échelle soient solution du système linéaire $G_n(x_k^n) = (\langle \varphi_k^n, \sum_l x_l^{n+1} \varphi_l^{n+1} \rangle)$, donc que la matrice de reconstruction A^n soit donnée par:

$$A^n = G_n^{-1} \left(\langle \varphi_k^n, \varphi_l^{n+1} \rangle \right).$$

Puisque de plus les analyses multirésolutions concernées sont semi-orthogonales, la matrice P^n est fixée par (22), et donc les fonctions échelles intermédiaires sont fixées par (16).

Chapitre 4

Visualisation multirésolution de données volumiques

Ce chapitre est dédié à la visualisation de données définies sur des grilles volumiques uniformes. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de la publication [5]. Dans le domaine médical les ordres de grandeur des volumes de données sont de $256^2 \times 100$ (soit un peu plus de 6Mo) pour un ensemble moyen, et le plus souvent de $512^2 \times 200$ (soit 50Mo). La rapidité des algorithmes est donc un facteur essentiel. Les algorithmes d'analyse multirésolution les plus rapides sont ceux basés sur les ondelettes de Haar. Ils correspondent à des fonctions échelles constantes par morceaux et donc discontinues. Un défaut de cette base d'ondelettes est que si un petit nombre de coefficients de détail sont utilisés lors de la reconstruction, la discontinuité de l'approximation obtenue produit un effet d'"escalier" dans la visualisation, comme l'illustre la partie gauche (a) de la figure 12. On peut donc être tenté d'utiliser des bases d'ondelettes continues, telles que les ondelettes linéaires par morceaux développées dans [16]. Mais il s'avère que lorsque les données à traiter sont très irrégulières, comme c'est souvent le cas dans le domaine médical, la régularité des ondelettes peut entraîner des zones de flou lorsqu'un petit nombre de coefficients d'ondelette est utilisé. Sur la partie droite (b) de la figure 12 ce phénomène est observable dans les zones où l'image est discontinue, comme par exemple le long du bord du chapeau. Autrement dit la régularité des ondelettes n'est bénéfique que si les données à traiter sont elles-mêmes régulières. Une explication de ce phénomène est donnée dans la figure 13, qui montre le résultat du passage de la résolution 4 (2^4 données) à la résolution 3 d'un ensemble de données toutes nulles, sauf celle du milieu (la 8^{ième}) (voir (a)). Avec le système de Haar on obtient un unique coefficient d'échelle non-nul, et un unique coefficient de détail non nul (voir (b)), tandis que les ondelettes linéaires aboutissent à un grand nombre de coefficients d'échelle et de détail non nuls (voir (c)). Ainsi une reconstruction avec un coefficient de détail sera exacte dans le premier cas, et sera loin des données originales dans le second cas.



figure 12: reconstruction utilisant 1% des coefficients de détail, (a) ondelettes de Haar, (b) ondelettes linéaires

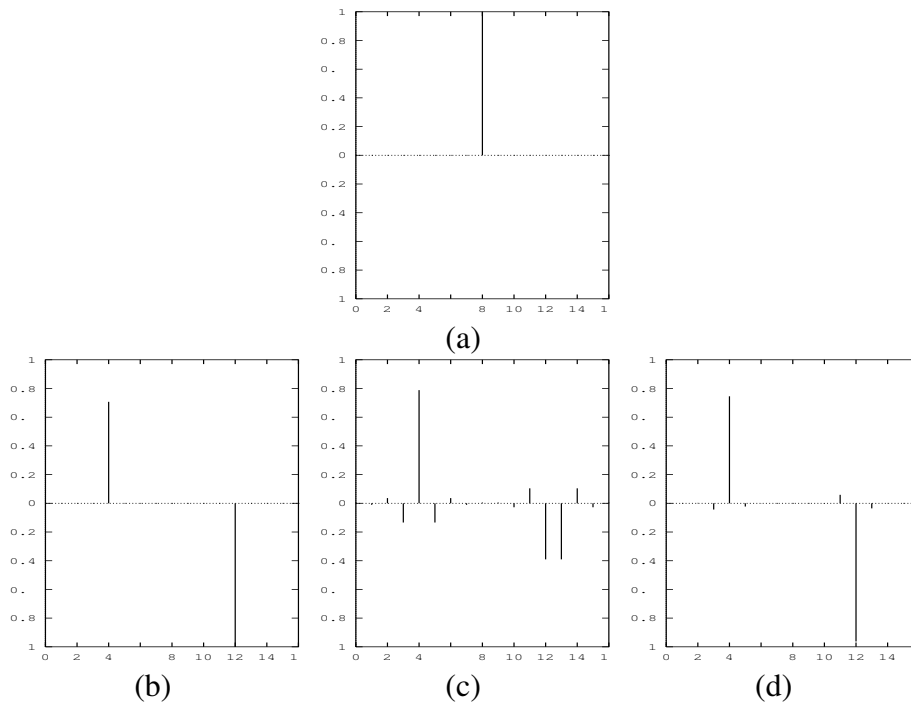


figure 13: une étape d'analyse d'un signal discontinu (a) par (b) les ondelettes de Haar, (c) les ondelettes linéaires, (d) les ondelettes BLaC pour $\Delta = 0.2$

L'idée de départ du travail présenté dans ce chapitre, réalisé en commun avec G. Nielson (Prof. ASU) et S. Hahmann (M.C. INPG) a été de rechercher un compromis entre la régularité des visualisations, meilleure pour la base linéaire, et la netteté, meilleure pour la base de Haar. Pour obtenir ce compromis, une famille de base d'ondelettes dépendante d'un paramètre Δ a été développée, telle que le choix du paramètre $\Delta = 0$ aboutisse à la base de Haar, et le choix $\Delta = 1$ aboutisse à la base linéaire. Cette famille a été dénommée BLaC (pour Blending of Linear and Constant). La partie (d) de la figure 13 montrant le résultat de l'analyse du signal discontinu pour un paramètre Δ proche de la base de Haar, donne une première illustration de ce compromis.

4.1) Fonctions échelles BLaC

Les fonctions échelles BLaC sont obtenues par translation et dilation d'une fonction échelle mère, comme dans le cas de la subdivision uniforme et stationnaire décrite au chapitre 2:

$$\varphi_k^n = \varphi(2^n x - k).$$

La fonction échelle mère est représentée à la figure 14, elle est définie par:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\Delta} & \text{si } x \in [0, \Delta] \\ 1 & \text{si } x \in [\Delta, 1] \\ \frac{1+\Delta-x}{\Delta} & \text{si } x \in [1, 1+\Delta] \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1+\Delta \end{cases}$$

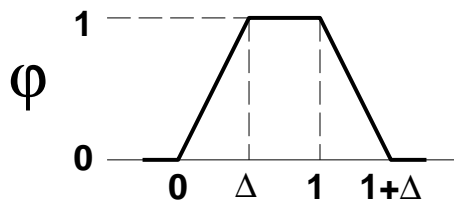


figure 14: fonction échelle mère BLaC



figure 15: fonctions échelles pour Δ variant entre 0 et 1

La figure 15 montre quelques-unes de ces fonctions mères pour des valeurs du paramètre Δ variant entre 0 et 1. Pour $\Delta = 0$ on obtient les fonctions échelles de Haar, et pour $\Delta = 1$ les fonctions échelles linéaires. Ce choix découle directement du compromis recherché entre les bases de Haar et linéaire. La raison pour laquelle ce choix naturel implique l'utilisation du cadre généralisé d'analyse multirésolution défini au chapitre précédent est illustré dans la figure 17: sur certains intervalles les fonctions échelles de la résolution $n + 1$ sont toutes constantes, tandis que celles de la résolution n ne le sont pas. Il est donc impossible d'obtenir une relation de subdivision exacte de la forme (9), autrement dit la suite d'espaces d'approximation V^n pour ce choix de fonctions échelles est non imbriquée.

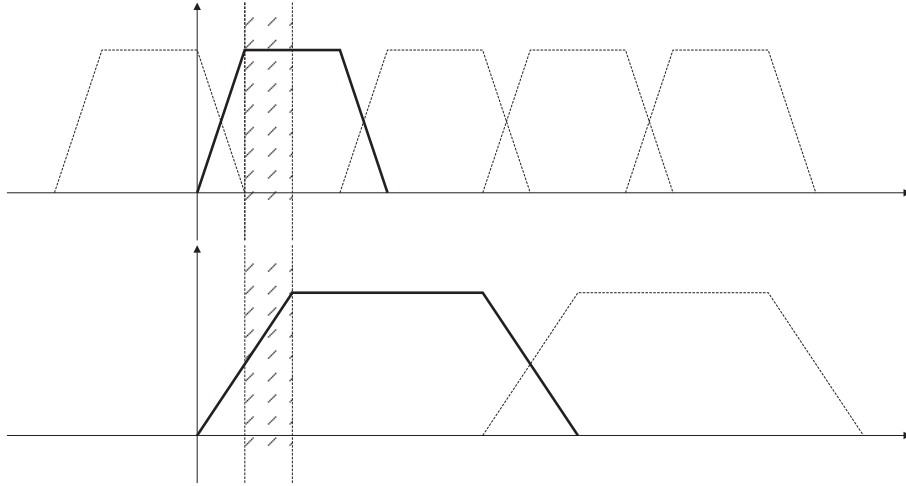


figure 16: les fonctions échelles BLaC ne vérifient pas d'équation de subdivision, les espaces d'approximation ne sont pas imbriqués.

4.2) Fonctions échelles intermédiaires

Comme il a été exposé au chapitre précédent, il est nécessaire de définir des fonctions échelles intermédiaires, ou de manière équivalente une équation de subdivision approximée du type (16). Pour cette application de visualisation volumique, le choix a été guidé par la forme des équations de subdivision exactes pour les ondelettes de Haar et pour les ondelettes linéaires. Pour le système de Haar, cette équation est:

$$\text{Haar } \varphi_k^n = \text{Haar } \varphi_{2k}^{n+1} + \text{Haar } \varphi_{2k+1}^{n+1}.$$

Pour le système linéaire, cette équation est:

$$\text{linéaire } \varphi_k^n = \frac{1}{2} \text{linéaire } \varphi_{2k-1}^{n+1} + \text{linéaire } \varphi_{2k}^{n+1} + \frac{1}{2} \text{linéaire } \varphi_{2k+1}^{n+1}.$$

Afin d'interpoler ces deux équations, la fonction échelle intermédiaire $\tilde{\varphi}_k^n$ a été choisie comme combinaison linéaire des trois fonctions φ_{2k-1}^{n+1} , φ_{2k}^{n+1} , et φ_{2k+1}^{n+1} . Pour que l'analyse multirésolution conserve les constantes, il a été de plus requis que la somme des coefficients de l'équation de subdivision approximée soit égale à 1. Cela mène à l'équation suivante:

$$\tilde{\varphi}_k^n = \alpha \times \varphi_{2k-1}^{n+1} + 1 \times \varphi_{2k}^{n+1} + (1 - \alpha) \times \varphi_{2k+1}^{n+1}. \quad (23)$$

Il reste alors à déterminer le coefficient scalaire α . Celui-ci a été choisi de telle manière que $\tilde{\varphi}_k^n$ soit le plus proche de φ_k^n :

$$\|\varphi_k^n - \tilde{\varphi}_k^n\|_{L^2} \longrightarrow \min$$

Ce minimum est atteint ssi α est solution de l'équation linéaire suivante, obtenue par dérivation de $\|\varphi_k^n - \tilde{\varphi}_k^n\|^2$:

$$\left\langle \alpha\varphi_{2k-1}^{n+1} + \varphi_{2k}^{n+1} + (1 - \alpha)\varphi_{2k+1}^{n+1} - \varphi_k^n, \varphi_{2k-1}^{n+1} - \varphi_{2k+1}^{n+1} \right\rangle = 0.$$

La valeur de α ainsi obtenue est en fait indépendante du niveau de résolution n et de la localisation k . Pour $\Delta = 0$, on trouve $\alpha = 1$, et donc l'équation de subdivision approximée (23) redonne la subdivision exacte de Haar. Pour $\Delta = 1$, la solution est $\alpha = \frac{1}{2}$, et on retrouve alors l'équation de subdivision exacte linéaire.

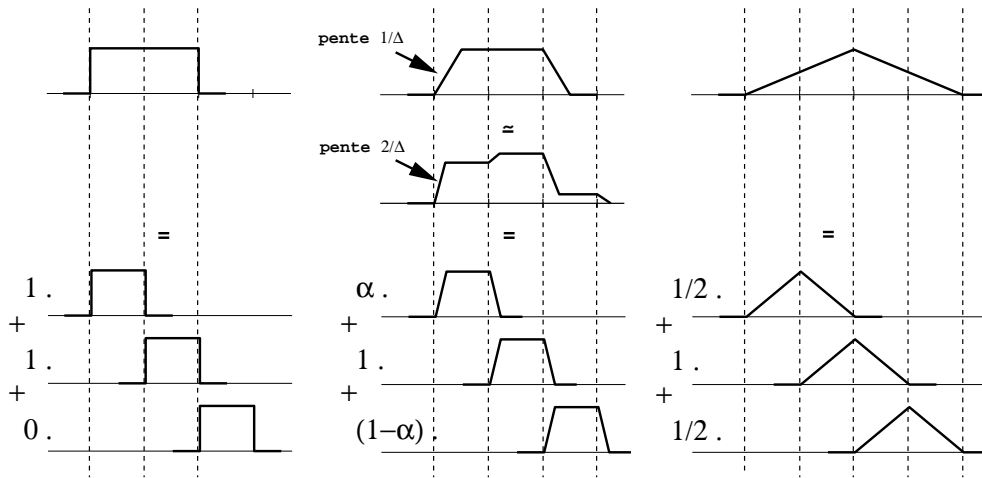


figure 17: equations de subdivision, (a) exacte pour le système de Haar, (b) approximée pour les fonctions BLaC, (c) exacte pour le système linéaire

La figure 17 illustre les trois équations de subdivision de Haar, BLaC, et linéaire. La fonction au milieu en haut est la fonction échelle BLaC φ_k^n , celle située juste en dessous est la fonction échelle intermédiaire $\tilde{\varphi}_k^n$.

4.3) Ondelettes BLaC

Une fois les fonctions échelles et l'équation de subdivision choisies, il reste à déterminer les ondelettes. Comme pour les ondelettes de Haar et les ondelettes linéaires de [16], les ondelettes BLaC ont été choisies pour être semi-orthogonales, i.e. dans notre contexte orthogonales à toutes les fonctions échelles intermédiaires, et pour avoir un support minimal, afin d'accélérer la reconstruction. Puisque les ondelettes à la résolution n sont obtenues comme combinaison linéaire des fonctions échelles à la résolution $n + 1$ (voir équation (18)), il faut donc minimiser le nombre des fonctions utilisées dans cette combinaison linéaire. On constate qu'en utilisant une combinaison linéaire de 5 fonctions échelles à la résolution $n + 1$, on aboutit à une ondelette dont le

support intersecte exactement celui de 4 fonctions échelles intermédiaires à la résolution n :

$$\psi_k^n = a\varphi_{2^{k-1}}^{n+1} + b\varphi_{2^k}^{n+1} + c\varphi_{2^{k+1}}^{n+1} + d\varphi_{2^{k+2}}^{n+1} + e\varphi_{2^{k+3}}^{n+1}.$$

Cette situation est illustrée dans la figure 18.

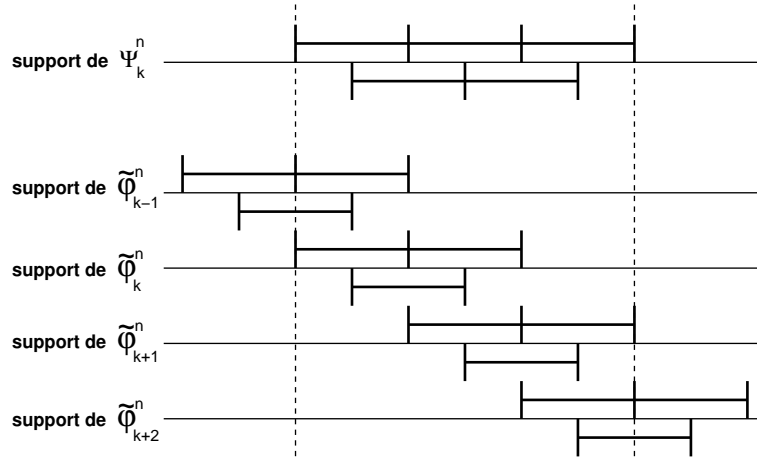


figure 18: intersections entre le support de l'ondelette et les supports des fonctions échelles intermédiaires.

Pour que cette ondelette soit orthogonale à toutes les fonctions échelles intermédiaires, il suffit donc qu'elle soit orthogonale aux 4 qui intersectent son support. On dispose donc d'assez de coefficients (5) pour résoudre les 4 conditions d'orthogonalité suivantes:

$$\langle \psi_k^n, \tilde{\varphi}_l^n \rangle = 0, \text{ où } l = k - 1, k, k + 1, k + 2.$$

Ce système homogène de 4 équations à 5 inconnues est résolu de manière unique en imposant que la norme L^2 de l'ondelette soit égale à 1:

$$\int |\psi_k^n|^2 = 1.$$

La figure 19 montre l'ondelette en gras, et les 4 fonctions intermédiaires dont elle intersecte le support, et avec lesquelles elle est orthogonale.

Les coefficients a, b, c, d, e sont indépendants du niveau de résolution n et de la localisation k . Lorsque $\Delta = 0$ et $\Delta = 1$, on retrouve les ondelettes de Haar et les ondelettes linéaires semi-orthogonales. La figure 20 montre les fonctions ondelettes pour 4 différentes valeurs du paramètre Δ .

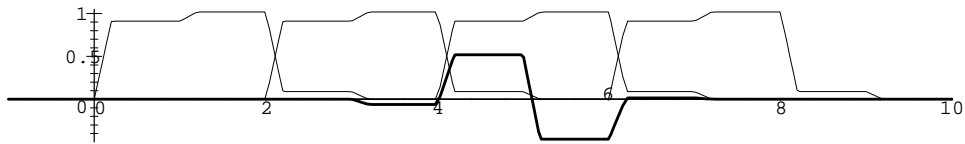


figure 19: ondelette BLaC (en gras) et fonctions échelles intermédiaires orthogonales.

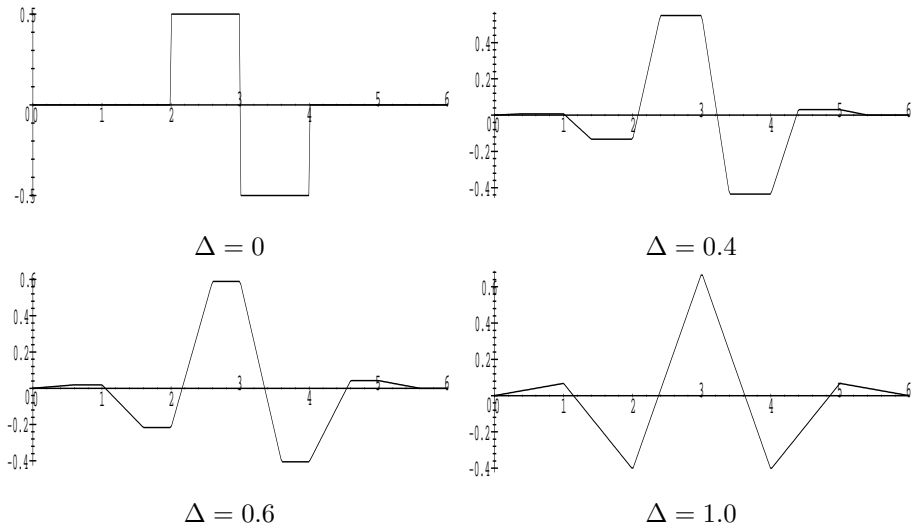


figure 20: ondelettes BLaC pour différentes valeurs du paramètre Δ

4.4) Implémentation

Traitement des bords

Dans les parties précédentes de ce chapitre, il a été supposé que les données sont définies sur \mathbb{R} . En pratique, les données sont de taille $2^N \times 2^N \times 2^N$. Il est donc nécessaire de traiter les bords de manière particulière. Ceci est possible en définissant sur les bords des fonctions échelles, intermédiaires et ondelettes différentes de celles situées au centre du domaine. Sans entrer dans les détails, précisons que la première et la dernière fonction échelle diffèrent (i.e. ne sont pas les translatées) des autres, et que la première et la dernière fonction ondelette diffèrent des autres. La figure 21 montre les fonctions ondelettes du bord pour le paramètre $\Delta = \frac{1}{3}$.

Reconstruction

La donnée des fonctions échelles intermédiaires et des fonctions ondelettes détermine les matrices de reconstruction P^n et Q^n . Puisque les fonctions choisies sont à support compact, ces matrices sont donc creuses, ce sont même des matrices à bande. La reconstruction peut donc être implémentée efficacement.

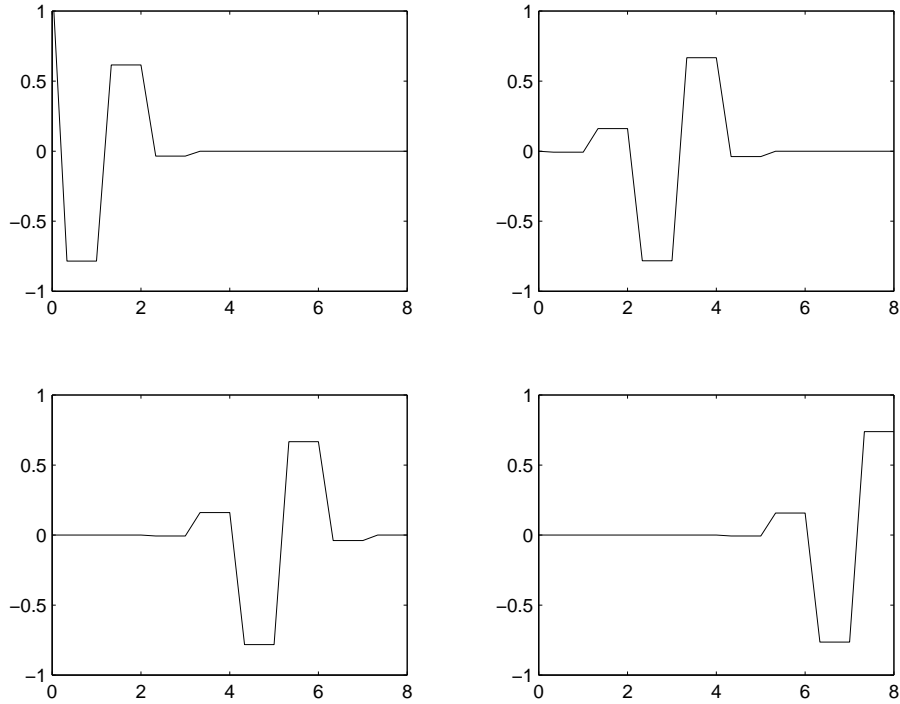


figure 21: fonctions ondelettes pour $\Delta = \frac{1}{3}$, au niveau de résolution 3.

Décomposition

Pour effectuer la décomposition (13) (14), la condition de reconstruction (12) laisse à penser que l'inversion d'un système linéaire de taille $(2^{n+1} + 1) \times (2^{n+1} + 1)$ serait nécessaire. En fait il est possible, grâce à la semi-orthogonalité, d'effectuer la décomposition en inversant deux systèmes linéaires de la moitié de cette taille, et surtout de structure très simple. Pour le voir, il faut revenir à l'équation liant les approximations entre deux niveaux de résolution:

$$\sum_{k=0}^{2^{n+1}} x_k^{n+1} \varphi_k^{n+1} = \sum_{k=0}^{2^n} x_k^n \tilde{\varphi}_k^n + \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k^n \psi_k^n.$$

Pour calculer les coefficients d'échelle x_k^n , on effectue le produit scalaire de chacun des membres de la précédente équation par les fonctions intermédiaires $\tilde{\varphi}_l^n$. Puisque les ondelettes sont orthogonales à ces fonctions intermédiaires, le membre de droite se simplifie, et il vient:

$$\left\langle \sum_{k=0}^{2^{n+1}} x_k^{n+1} \varphi_k^{n+1}, \tilde{\varphi}_l^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{2^n} x_k^n \langle \tilde{\varphi}_k^n, \tilde{\varphi}_l^n \rangle. \quad (24)$$

On voit donc que les coefficients recherchés x_k^n sont solution d'un système linéaire de taille $(2^n + 1) \times (2^n + 1)$, dont la matrice $\langle \tilde{\varphi}_k^n, \tilde{\varphi}_l^n \rangle$ a de très bonnes propriétés: c'est une matrice symétrique, définie positive, et à bande. Il est donc possible de résoudre le système par l'algorithme de Cholesky. Cet

algorithme est numériquement stable, ce qui est crucial étant donné la taille des ensembles à traiter. De plus l'algorithme de Cholesky préserve la structure de bande de la matrice, ce qui implique que les coefficients x_k^n peuvent être calculés en un temps linéaire.

On calcule de même les coefficients de détails y_k^n en résolvant le système linéaire suivant:

$$\left\langle \sum_{k=0}^{2^n} x_k^{n+1} \varphi_k^{n+1}, \psi_l^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k^n \langle \psi_k^n, \psi_l^n \rangle .$$

C'est également un système que l'on peut résoudre par l'algorithme de Cholesky pour des matrices à bande.

Il ressort donc qu'une étape d'analyse peut être effectuée en temps linéaire. Puisque le nombre de données est divisé par deux à chaque étape d'analyse, cela implique que l'analyse complète est effectuée en temps linéaire.

4.5) Résultats

La figure 22 montre différentes reconstructions partielles d'un ensemble de données volumiques de taille $256 \times 256 \times 128$. Le rendu volumique a été effectué par le logiciel Volpack de l'université de Stanford [†]. Ces images illustrent, particulièrement pour un petit nombre de coefficients d'ondelettes utilisés, le compromis obtenu entre la netteté des visualisations (vers la gauche) et leur régularité (vers la droite).

[†] <http://www-graphics.stanford.edu/>

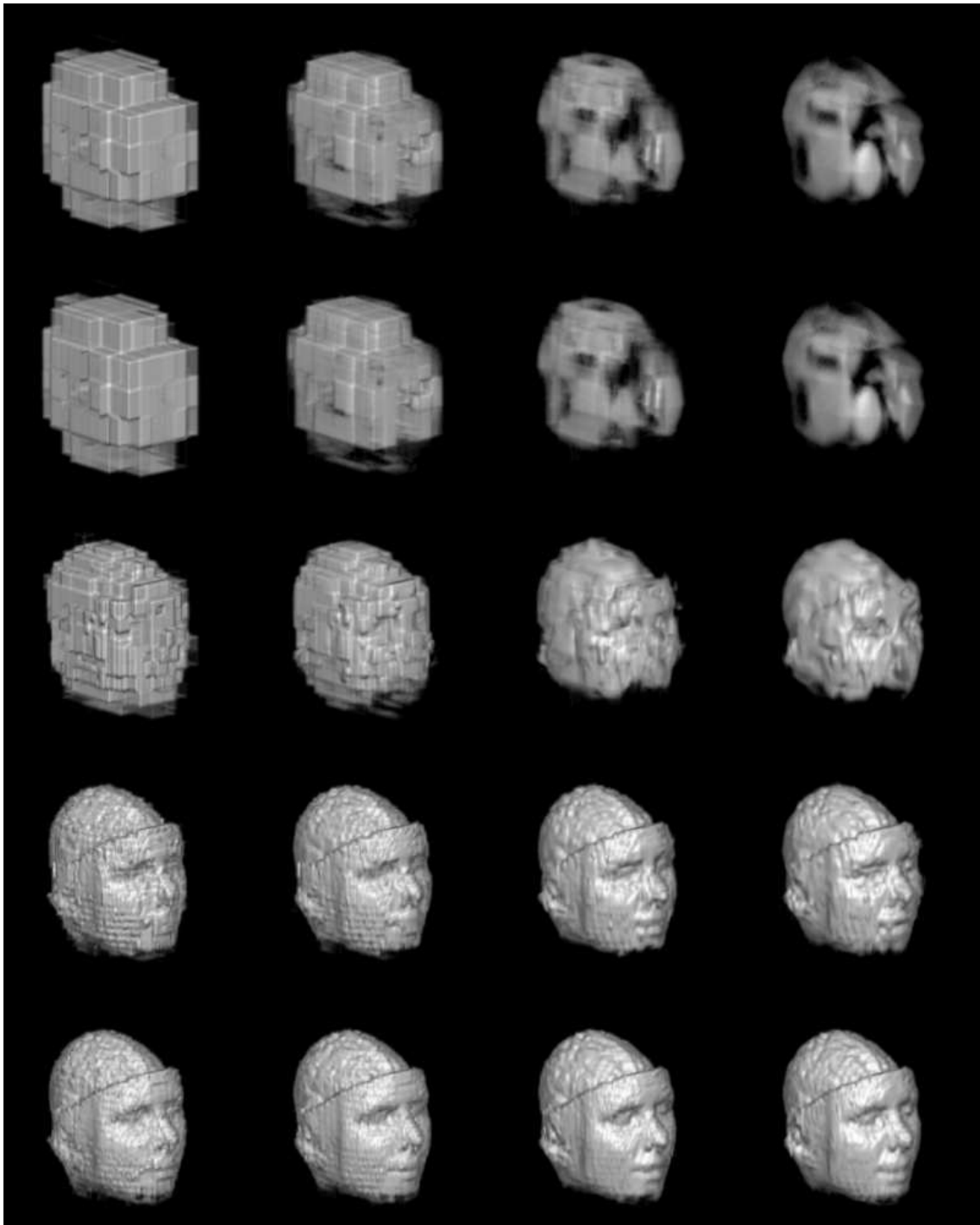


figure 22: reconstructions partielles par les ondelettes BLaC; de haut en bas, 0.01%, 0.05%, 0.1%, 0.5% et 1% des coefficients utilisés; de gauche à droite, $\Delta = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$.

Chapitre 5

Visualisation multirésolution sur des triangulations irrégulières

Au chapitre 2, il a été exposé que l'analyse multirésolution par subdivision suppose que la grille sur laquelle sont définies les données à traiter est construite par un procédé de subdivision récursive d'une grille de base. Ainsi à chaque analyse multirésolution par subdivision est associée une hiérarchie qui a une structure d'arbre: la visualisation volumique par ondelette est basée sur une structure d'octree [5,20], la radiosité par ondelette [19] et les ondelettes triangulaires [4,38,33] sont basées sur une structure de quadtree (ou plus exactement de forêt de quadtrees). Pour ces ondelettes triangulaires, la forêt de quadtrees est obtenue par insertion récursive de sommets au milieu des arêtes (cf. chapitre 2, page 22).

Lorsque les données sont définies sur des triangulations irrégulières, il n'est pas possible de leur associer une structure d'arbre. Les structures hiérarchiques correspondants sont alors plus complexes. Celles-ci incluent les grilles progressives [25,26], basées sur la suppression d'arêtes, ou divers types de triangulations hiérarchiques basées sur la suppression (ou l'insertion) de sommets [28,11,1,12], ou de triangles [23, 18].

Le travail présenté dans ce chapitre fait se rejoindre les deux approches: il est basé sur des structures hiérarchiques obtenues par suppression de sommets dans la triangulation, et il utilise les résultats présentés au chapitre 3 pour définir des algorithmes d'analyse et de synthèse multirésolution sur ces structures hiérarchiques. Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet des publications [2,3, 7].

Ce chapitre est consacré à des triangulations hiérarchiques définies sur des surfaces fixes, planaires ou sphériques. Le cas où la surface sous-jacente varie selon le niveau de profondeur dans la hiérarchie est en cours d'étude, et est brièvement évoqué au chapitre 6 concernant les perspectives.

Le point commun entre les diverses structures hiérarchiques sur les triangulations irrégulières ou régulières est qu'elles utilisent des décimations locales (pour les algorithmes "bottom-up") ou des insertions locales (pour les algorithmes "top-down") qui consistent à remplacer un ensemble de n triangles par un ensemble de m triangles ($n > m$ pour les décimations) couvrant le même domaine, comme illustré dans la figure 23.

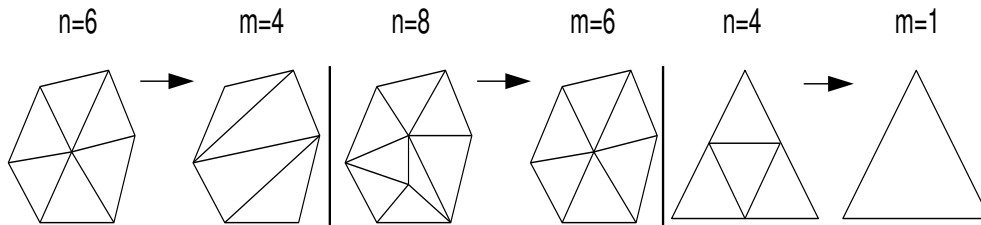


figure 23: décimation locale, (a) suppression de sommets, (b) suppression d'arêtes, (c) subdivision 4-1.

Lorsque des données sont associées à la triangulation la plus fine (la triangulation originale), trois types de questions se posent:

- comment calculer les données sur les triangulations simplifiées, de manière à assurer la meilleure approximation possible, ou au moins une bonne approximation des données originales?
- où doit être appliquée en priorité la décimation, si l'on veut atteindre un taux de compression maximale pour une erreur fixée?
- comment pouvoir retrouver les données originales à partir d'une approximation quelconque, sans pour cela stocker tous les niveaux de résolution?

Les ondelettes triangulaires permettent de répondre à ces questions pour les triangulations construites par subdivision 4-1 d'une triangulation de base. Les algorithmes d'analyse et de synthèse multirésolution présentés dans ce chapitre permettent de répondre à ces questions lorsque les triangulations sont irrégulières. Deux types de données seront abordées: des données constantes par morceaux (une donnée par face), et données linéaires par morceaux (une donnée par sommet).

La première partie de ce chapitre est consacrée aux aspects locaux des algorithmes de décomposition et de reconstruction, correspondant à la suppression ou à l'insertion d'un sommet dans la triangulation. La seconde partie porte sur les structures hiérarchiques et les algorithmes globaux. Des exemples de visualisation multirésolution d'ensembles de grande taille (de l'ordre du million de triangles) sont présentés dans la troisième partie.

5.1) Décomposition et reconstruction locale

5.1.1) Données constantes par morceaux

Le caractère T désigne un triangle (planaire ou sphérique), s désigne une donnée (un scalaire), et d un coefficient de détail. L'indice supérieur f (fin) désigne les quantités avant la décimation locale, g (grossier) après la décimation. Les caractères gras indiquent des vecteurs. La paire (\mathbf{T}, s) désigne la fonction constante par morceaux égale à s_k sur les triangles T_k . Si Q est une matrice, Q_k désigne la k -ième colonne de Q .

Les résultats présentés dans cette partie sont indépendants du type de décimation choisi. On considère ici une fonction constante par morceaux (\mathbf{T}^f, s^f) sur n triangles, et un ensemble \mathbf{T}^g de m triangles couvrant le même domaine, avec $m < n$.

Le lien avec l'analyse multirésolution non imbriquée présentée au chapitre 3 est obtenu en choisissant les fonctions échelles comme étant égales à 1 sur un des triangles et à 0 partout ailleurs. On distingue ainsi au niveau local deux résolutions: les résolutions fine et grossière, correspondants aux fonctions constantes par morceaux respectivement sur \mathbf{T}^f et sur \mathbf{T}^g . Les dimensions des espaces d'approximation sont n (avant la décimation) et m (après la décimation). L'espace de détail a donc la dimension $n - m$, ce qui signifie que $n - m$ coefficients de détails seront calculés lors de l'analyse.

Les matrices d'analyse et de synthèse locales sont choisies de telle manière que l'approximation obtenue sur la triangulation \mathbf{T}^g soit la meilleure possible. Comme nous l'avons vu au chapitre 2 (page 32), cela implique l'utilisation de la matrice A suivante pour le calcul des coefficients à la résolution grossière:

$$A = \left(G^g \right)^{-1} \left(\langle \varphi_k^g, \varphi_l^f \rangle \right),$$

où G^g est la matrice du produit scalaire dans l'espace d'approximation grossier:

$$G^g = \left(\langle \varphi_k^g, \varphi_l^g \rangle \right).$$

La matrice G^g est rapide à évaluer dans notre cas: elle est diagonale, et sa diagonale contient les aires des triangles \mathbf{T}^g . La matrice $\left(\langle \varphi_k^g, \varphi_l^f \rangle \right)$ est plus coûteuse à évaluer, car ses éléments sont égaux aux aires des intersections entre les triangles grossiers \mathbf{T}^g et les triangles fins \mathbf{T}^f .

A est donc la matrice rectangulaire $m \times n$ suivante:

$$A = \left(\frac{\text{aire}(T_k^g \cap T_l^f)}{\text{aire}(T_k^g)} \right)$$

A contient les aires relatives des intersections entre les triangles fins et les triangles grossiers. Le calcul de la matrice A est illustré figure 24.

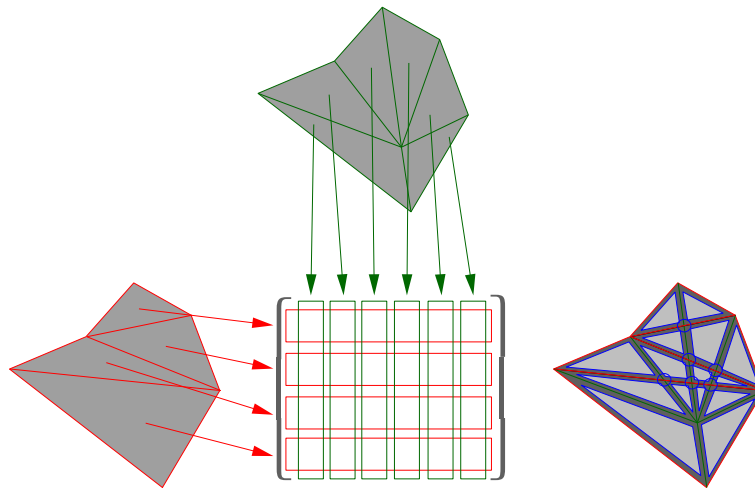


figure 24: calcul de la matrice d'analyse A

Il reste à évaluer la matrice B de taille $(n - m) \times n$ nécessaire au calcul des coefficients de détail. B doit satisfaire la condition de semi-orthogonalité (21), qui prend ici la forme suivante:

$$A \left(G^f \right)^{-1} B = 0. \quad (25)$$

Cela signifie que les $(n - m)$ lignes de B doivent être orthogonales aux m lignes de A pour le produit scalaire pondéré suivant:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \longrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{aire}(T_k^f)} \mathbf{v}_k \mathbf{w}_k.$$

La condition de semi-orthogonalité revient donc à résoudre un système linéaire homogène sous-contraint, de $m \times (n - m)$ équations à $n \times (n - m)$ inconnues. Pour le résoudre, une sous-matrice de B de taille $(n - m) \times (n - m)$ est fixée égale à l'identité, et le système est inversé. Cela aboutit à une première solution. La solution finale est obtenue par un procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (cf. [40], chap. 5.20) effectué sur les lignes de la première solution, relativement au produit scalaire pondéré (25). Le procédé d'orthonormalisation est connu pour être instable pour de grandes matrices. Mais dans le cas présent, les matrices sont de petites dimensions, majorée par le degré du sommet supprimé. De plus l'orthonormalisation est importante car elle assure que les coefficients de détail donneront une mesure de l'erreur d'approximation.

Pour résumer, le calcul des matrices d'analyse locale nécessite les points suivants:

- calcul des intersections entre les triangles fins et les triangles grossiers,
- calcul des aires relatives $\frac{\text{aire}(T_k^g \cap T_l^f)}{\text{aire}(T_k^g)}$,
- inversion d'une matrice $m \times n$,
- multiplication par une matrice $m \times (n - m)$,
- orthonormalisation de Gram-Schmidt d'une matrice $(n - m) \times n$.

Ces matrices d'analyse permettent de calculer les nouvelles valeurs s^g sur les triangles grossiers, ainsi que les coefficients de détail, par les relations de décomposition suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{s}^g = A\mathbf{s}^f \\ \mathbf{d} = B\mathbf{s}^f. \end{cases}$$

Lors de la reconstruction, les données originales sont calculées par:

$$\mathbf{s}^f = P\mathbf{s}^g + Q\mathbf{d},$$

où les matrices de reconstruction sont données par la condition de reconstruction:

$$\begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^{-1}.$$

Intuitivement P agit comme un opérateur de sur-échantillonnage, et Q corrige les données sur-échantillonnées $P\mathbf{s}^g$ pour aboutir aux données originales. L'équivalent fonctionnel de la relation de reconstruction des coefficients est:

$$(\mathbf{T}^f, \mathbf{s}^f) = (\mathbf{T}^f, P\mathbf{s}^g) + \sum_{k=1}^{n-m} \mathbf{d}_k(\mathbf{T}^f, Q_k). \quad (26)$$

Les remarques suivantes peuvent être faites sur (26):

- (26) est une décomposition orthogonale, et $(\mathbf{T}^g, \mathbf{s}^g)$ (l'approximation finale) est la meilleure approximation de $(\mathbf{T}^f, \mathbf{s}^f)$ (la fonction originale) et de $(\mathbf{T}^f, P\mathbf{s}^g)$ (l'approximation intermédiaire). Ceci est dû au choix particulier des matrices d'analyses A et B ,
- si \mathbf{T}^f est une subdivision de \mathbf{T}^g (subdivision 4-1 par exemple) alors les approximations finales $(\mathbf{T}^g, \mathbf{s}^g)$ et intermédiaires $(\mathbf{T}^f, P\mathbf{s}^g)$ sont égales.

Les figures 25 et 26 montrent les fonctions originales $(\mathbf{T}^f, \mathbf{s}^f)$ (en haut à gauche), les approximations intermédiaires $(\mathbf{T}^f, P\mathbf{s}^g)$ (en haut au milieu) et finales $(\mathbf{T}^g, \mathbf{s}^g)$ (en haut à droite), ainsi que les produits des coefficients de détail par les ondelettes $\mathbf{d}_k(\mathbf{T}^f, Q_k)$ (en bas); dans le cas d'une subdivision 4-1 (figure 25) et d'une suppression de sommet (figure 26).

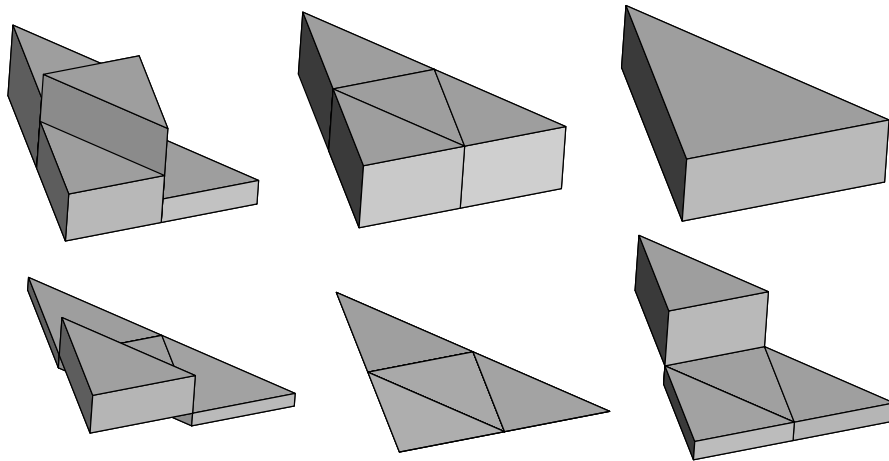


figure 25: décomposition locale pour une subdivision 4-1, en haut fonction originale, approximation intermédiaire et approximation finale, en bas ondelettes multipliées par les coefficients de détail. La relative grande magnitude des coefficients de détail montre que l'approximation finale est éloignée de la fonction originale.

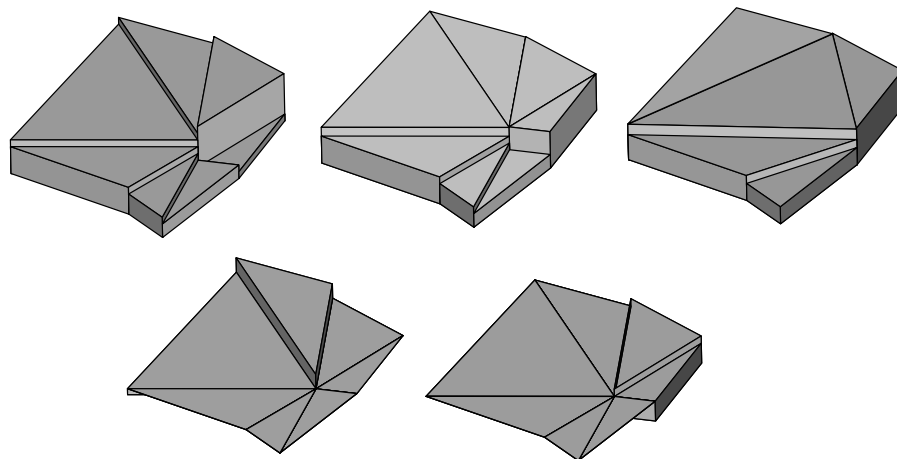


figure 26: décomposition locale lors de la suppression d'un sommet, en haut fonction originale, approximation intermédiaire et approximation finale, en bas ondelettes multipliées par les coefficients de détail. La relative faible magnitude des coefficients de détail montre que l'approximation finale est proche de la fonction originale.

5.1.2) Données linéaires par morceaux

Fonctions échelles et espaces d'approximation

Contrairement au cas des données constantes par morceaux, où seules les données relatives aux triangles supprimés par la décimation sont changées, ici les modifications apportées aux données dépassent le domaine couvert par les

triangles supprimés. Il est donc nécessaire d'adopter des notations globales à la triangulation. V^f et V^g désignent l'espace des fonctions continues et linéaires par morceaux respectivement avant et après la suppression d'un sommet M . Les bases des espaces V^f et V^g , i.e. les fonctions échelles, sont les fonctions chapeaux égales à 1 sur un des sommets, et décroissant linéairement vers 0 sur les sommets voisins. La dimension de ces espaces est donc égale au nombre de sommets dans les triangulations respectives. La figure 27 montre une fonction continue linéaire par morceaux et sa décomposition dans la base des fonctions échelles.

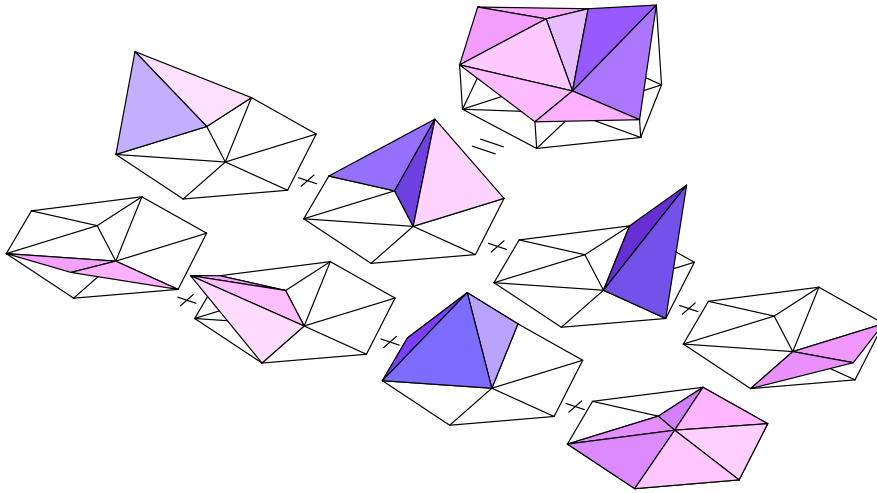


figure 28: une fonction continue linéaire par morceaux, et sa décomposition dans la base des fonctions échelles

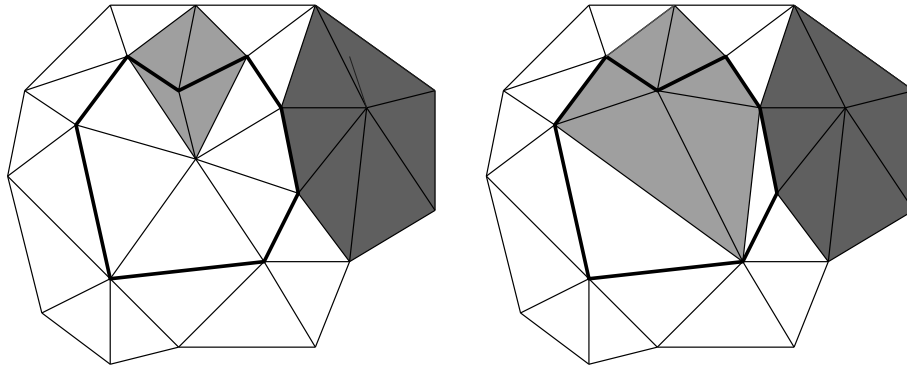
Avant de regarder le calcul des matrices d'analyse et de synthèse, il est utile de s'intéresser aux fonctions échelles de V^f et V^g . Après la suppression du sommet M , la fonction chapeau correspondant à ce sommet disparaît, et on a donc:

$$\dim(V^f) = \dim(V^g) + 1.$$

Cela signifie qu'un unique coefficient de détail sera calculé lors de l'analyse locale. Les fonctions chapeaux associées aux sommets voisins de M disparaissent également, puisque la suppression de ce sommet modifie le voisinage de ses sommets voisins, mais elles sont remplacées par les fonctions échelles correspondants aux nouveaux voisinages. Toutes les autres fonctions chapeaux restent inchangées. La figure 29 illustre les modifications des fonctions chapeaux dues à la suppression du sommet M .

Si on associe l'indice 0 au sommet supprimé, les indices 1 à l à ses sommets voisins, et $l + 1$ à k à tous les autres sommets, et que l'on note M_i^f et M_i^g les fonctions chapeaux associées au sommet i respectivement avant et après la suppression, on a alors d'après ce qui précède:

$$M_i^f = M_i^g, \quad i = l + 1, \dots, k$$



Avant la suppression du sommet

Après la suppression

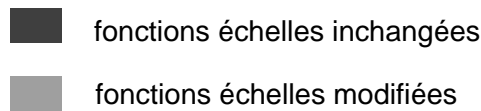


figure 29: modification des fonctions échelles dues à la suppression d'un sommet

Matrices d'analyse et de synthèse locales

D'après le chapitre 2 (page 32), pour que l'approximation d'une fonction de V^f dans V^g soit la meilleure possible, il faut que la matrice d'analyse A de dimension $k \times k + 1$ soit donnée par:

$$A = (G^g)^{-1} (U^{gf}),$$

où $G^g = (\langle M_i^g, M_j^g \rangle)$ est la matrice du produit scalaire dans V^g , et $U^{gf} = (\langle M_i^g, M_j^f \rangle)$.

La matrice d'analyse B servant à calculer le coefficient de détail n'a qu'une unique ligne de $k + 1$ éléments. La condition de semi-orthogonalité (21) implique que cette ligne doit être orthogonale aux k lignes de A pour le produit scalaire dans V^f :

$$A (G^f)^{-1} {}^t B = 0,$$

où $G^f = (\langle M_i^f, M_j^f \rangle)$. Ce système linéaire homogène de k équations à k inconnues peut être résolu de manière unique en imposant par ailleurs une condition de normalité: $B(G^f)^{-1} {}^t B = 1$. Cette condition de normalité joue le même rôle que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans le cas des fonctions constantes par morceaux: elle assure que le coefficient de détail donne une mesure de l'erreur d'approximation.

Les matrices de synthèses P, Q sont obtenues par la condition de reconstruction $(P Q) = (A)^{-1}$.

Localisation

La différence principale avec la partie précédente concernant les données constantes par morceaux, est qu'ici la meilleure approximation de la fonction à analyser diffère de celle-ci sur la totalité de la triangulation. En effet, avec les données constantes par morceaux la discontinuité des fonctions échelles permet d'isoler le polygone formé par les voisins du sommet supprimé, ceci n'est plus possible avec les fonctions chapeaux. Cela se traduit par le fait que les matrices d'analyse et de synthèse locales correspondants à la meilleure approximation ont une dimension égale au nombre total de sommets dans la triangulation. Pour la suppression d'un seul sommet, le coût de l'analyse ou de la synthèse pour la meilleure approximation est donc en $O(k^2)$. Il est donc nécessaire de relaxer la condition de meilleure approximation si l'on veut pouvoir utiliser les algorithmes multirésolution sur des grands ensembles de données.

Intuitivement, puisque la suppression d'un sommet ne change les fonctions échelles que sur le voisinage de ce sommet, la meilleure approximation d'une fonction donnée de V^f dans V^g ne doit pas différer beaucoup de celle-ci en dehors de ce voisinage. Plus précisément, l'analyse/synthèse est paramétrée par un entier $K \geq 0$ de la manière suivante: au lieu de considérer toutes les fonctions échelles, seules celles qui sont associées aux sommets situés à une distance topologique inférieure à K du sommet supprimé sont prises en compte (cf figure 30).

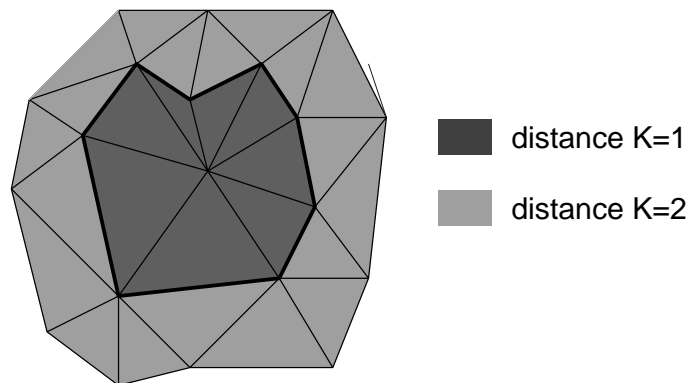


figure 30: pour localiser l'analyse/synthèse, seules les fonctions échelles situées à une distance topologique $\leq K$ sont prises en compte

Les matrices d'analyse et de synthèse sont donc ramenées à une dimension locale. L'approximation obtenue lors de l'analyse n'est plus la meilleure possible, mais elle en reste proche. Dans la pratique le choix $K = 2$ ou 3 a donné des résultats satisfaisants. On peut noter que le choix $K = 0$ revient à faire du sous-échantillonnage: aucune donnée n'est modifiée, et le coefficient de détail est égal à la donnée du sommet qui a été supprimé.

Calcul des produits scalaires

Le calcul des matrices d'analyse et de synthèse nécessite l'évaluation des produits scalaires entre les différentes fonctions échelles. Puisque $M_i^f = M_i^g$ pour $i > l$, les produits scalaires $\langle M_i^f, M_j^f \rangle$, $\langle M_i^g, M_j^g \rangle$ et $\langle M_i^f, M_j^g \rangle$ sont égaux dès que $i, j > l$. Par ailleurs dans un niveau de résolution donné, une fonction échelle d'un sommet n'a un produit scalaire non nul qu'avec les fonctions échelles des sommets voisins, et les supports de ces deux fonctions ne s'intersectent alors que sur deux triangles, comme illustré en figure 31.

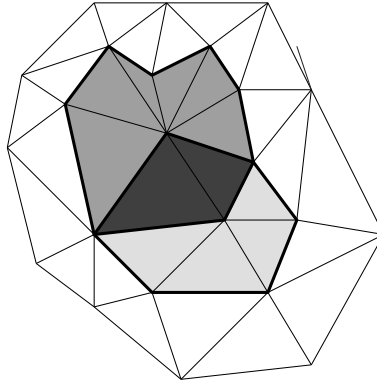


figure 31: les supports de deux fonctions échelles de même niveau ne s'intersectent que si les sommets associés sont voisins, et dans ce cas l'intersection est réduite à deux triangles.

La difficulté provient des produits scalaires du type $\langle M_i^f, M_j^g \rangle$, lorsque $i, j < l$, car il est alors nécessaire de calculer les intersections entre les triangles avant et après la suppression du sommet, comme dans le cas des fonctions constantes par morceaux. Une fois ces intersections connues, il reste à calculer l'intégrale de la fonction quadratique $\langle M_i^f, M_j^g \rangle$ sur les polygones résultant des intersections. Pour ce faire on utilise la formule de Stokes permettant de se ramener au calcul d'une intégrale sur le bord du polygone.

Illustration

La figure 32 illustre sur un exemple l'approximation obtenue lors de la suppression du sommet encerclé, pour le paramètre de localisation $K = 2$. La fonction originale est située en haut à gauche, l'approximation en haut à droite. En bas se trouvent deux vues de l'unique fonction ondelette, multipliée par le coefficient de détail. On peut constater sur cette illustration que la première rangée de sommets voisins est "montée" lors de la suppression du sommet encerclé, afin de mieux approximer les données originales. La deuxième rangée de sommets voisins, bien que prise en compte lors de l'approximation (puisque le paramètre de localisation K est égal à 2), ne change pourtant pratiquement pas, ce qui illustre le fait que l'approximation obtenue est proche de la meilleure approximation.

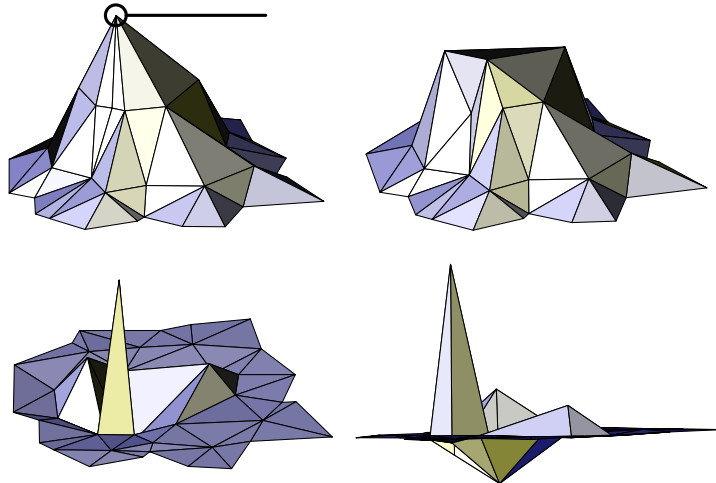


figure 32: analyse locale, en haut à gauche fonction originale, à droite approximation finale, en bas deux vues de l'unique fonction ondelette multipliée par le coefficient de détail.

5.2) Décomposition et reconstruction globale

Dans la partie précédente, nous avons vu qu'avec des données constantes par morceaux il est possible d'isoler le polygone formé par les voisins du sommet supprimé lors de la décomposition locale, alors qu'avec des données linéaires par morceaux, il est nécessaire de prendre en compte un voisinage plus large du sommet supprimé. Cette distinction explique pourquoi les structures hiérarchiques et les algorithmes d'analyse et de synthèse globale qui sont présentés dans cette partie diffèrent dans ces deux cas. Lorsque les données sont constantes par morceaux, on peut définir une structure hiérarchique avec un faible nombre de niveaux de résolution, correspondant chacun à la suppression simultanée d'un grand nombre de sommets (partie 5.2.1) alors qu'avec les données linéaires par morceaux on doit définir un niveau de résolution pour chaque suppression de sommet (partie 5.2.2).

5.2.1) Données constantes par morceaux

Structure hiérarchique

La structure hiérarchique utilisée pour les données constantes par morceaux a été introduite en géométrie algorithmique par Kirkpatrick dans [28], pour accélérer la localisation de points dans une triangulation. Le même type de structure a été utilisé plus tard dans le domaine de la modélisation de terrain [12,11]. Cette structure hiérarchique est construite du bas vers le haut (bottom-up), en partant de la triangulation planaire ou sphérique originale, de la manière suivante:

Tant que (# sommets sélectionnés > 0)

- i) sélectionner un ensemble d'au moins n/c sommets indépendants (non voisins), ayant moins de d voisins (n est le nombre actuel de sommets, c et d sont des constantes, $c=24$ et $d=11$ sont utilisés dans l'article [28]),
- ii) supprimer les sommets sélectionnés et les triangles adjacents \Rightarrow création de blocs (trous dans la triangulation),
- iii) retriangler les blocs en utilisant un critère de type Delaunay,
- iv) mettre à jour les liens entre les niveaux

Kirkpatrick a prouvé que la hiérarchie peut être construite en temps linéaire, et qu'elle a une profondeur logarithmique. Cet algorithme a été conçu pour des triangulations planes, mais peut être appliqué à des triangulations sphériques. La différence entre les deux se situe au niveau du critère utilisé pour la retriangulation des blocs. Dans l'implémentation actuelle ces blocs sont retriangulés par une méthode gloutonne qui fournit une première solution, suivi d'un échange de diagonale dans les paires de triangles créés, guidé par un critère de cercle circonscrit vide pour les triangulations planaires, et de convexité de la paire de triangles plats de même sommets pour les triangulations sphériques, comme l'illustre la figure 33. La figure 34 illustre une étape de la construction de la hiérarchie pour une triangulation plane.

Dans l'article original de Kirkpatrick, les liens entre les niveaux de la hiérarchie joignent les triangles qui ont une intersection non vide. On peut remarquer que chacun de ces liens correspond à un élément non nul dans la matrice d'analyse A , puisque celle-ci contient les aires relatives des intersections entre les anciens et les nouveaux triangles. Il est plus adapté dans notre cas d'utiliser des liens joignant les blocs ayant une intersection non vide, puisque c'est au niveau d'un bloc que s'appliquent les algorithmes d'analyse et de synthèse locales introduits dans les parties précédentes.

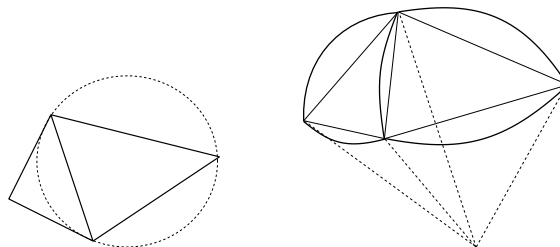


figure 33: critère d'échange de diagonale, à gauche test du cercle circonscrit vide dans le cas planaire, à droite test de la convexité des triangles plats de même sommet dans le cas sphérique.

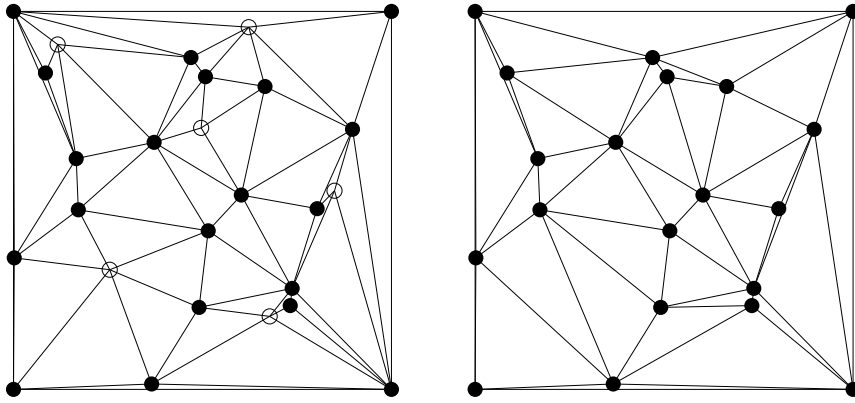


figure 34: une étape de la construction de la hiérarchie dans le cas planaire, les sommets encerclés à gauche sont supprimés dans la triangulation suivante à droite

Ces deux types de liens sont illustrés figure 35. La partie gauche de cette figure montre les niveaux de simplification de la triangulation, les cercles vides pointent les sommets supprimés entre chaque niveau. La partie du milieu montre les liens entre les triangles, chaque cercle plein correspond à un triangle, et les rectangles regroupent les triangles appartenant à un même bloc. La partie droite montre les blocs ainsi que les liens entre ces blocs. Pour chacun des blocs, les traits solides correspondent aux triangles avant suppression, et les traits hachés aux triangles après suppression du sommet.

Puisqu'un seul sommet est supprimé par bloc, la différence entre le nombre d'anciens et de nouveaux triangles, et donc le nombre de coefficients de détail calculés, est de deux par bloc. On peut de plus associer ces deux coefficients de détail au sommet qui a été supprimé.

Analyse globale

Les principales raisons qui ont conduit à choisir cette structure hiérarchique sont la simplicité de sa construction, et le temps linéaire de cette construction. De plus l'analyse des données peut être effectuée simultanément avec la construction de la hiérarchie, en insérant la tâche suivante entre les étapes iii) et iv) de la construction:

- appliquer l'analyse locale dans chacun des blocs, afin de calculer les valeurs sur les nouvelles faces, et les deux coefficients de détails associés au sommet supprimé.

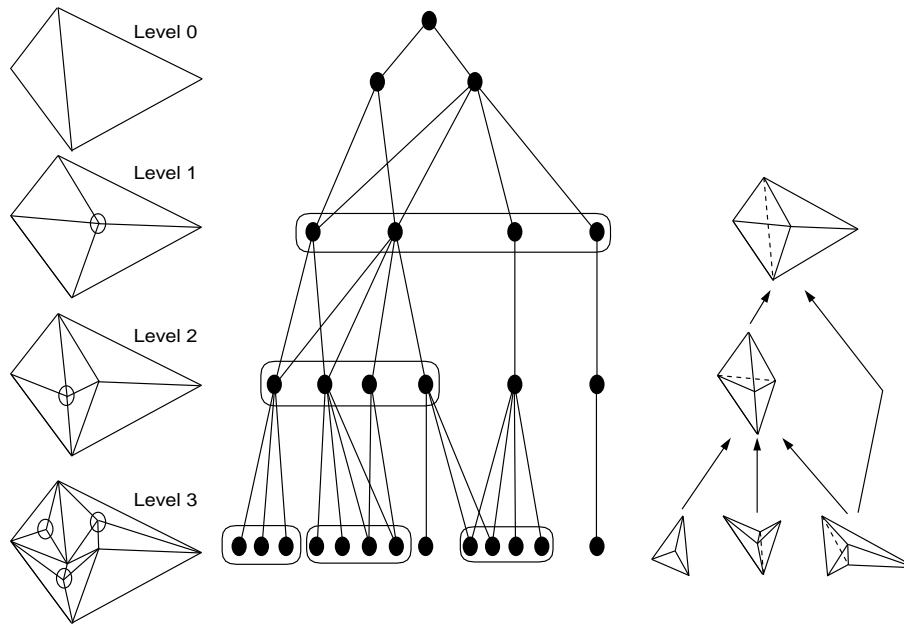


figure 35: structure hiérarchique, à gauche les triangulations simplifiées, au milieu la hiérarchie sur les triangles, à droite la hiérarchie sur les blocs créés par les suppressions des sommets.

Une fois que l'analyse est terminée, tous les sommets supprimés ont deux coefficients de détail associés, et les données calculées sur les triangles du niveau supérieur correspondent à l'approximation la plus grossière des données originales.

Synthèse par niveau

La synthèse par niveau résulte de l'application de la reconstruction locale dans chaque bloc de la hiérarchie, en partant de la racine, et en descendant jusqu'au niveau désiré de reconstruction. La synthèse par niveau ne nécessite pas la connaissance des liens entre les blocs. La seule information requise est une liste de blocs, ordonnée de la racine vers les niveaux plus profonds.

Synthèse par seuil

La synthèse par seuil en analyse multirésolution consiste à n'utiliser que les coefficients d'ondelettes supérieurs à un seuil lors de la reconstruction. L'insertion d'un coefficient d'ondelette nécessite évidemment également l'insertion des sommets du bloc correspondant à ce coefficient, mais elle nécessite également l'insertion des blocs situés dans les niveaux supérieurs de la hiérarchie, qui ont un lien direct ou indirect avec ce bloc. Ainsi il est nécessaire d'insérer des triangles qui n'ont pas d'intersection avec le support de la fonction ondelette correspondant au coefficient de détail inséré. Cette nécessité n'est pas propre à la structure hiérarchique utilisée, elle apparaît par exemple également pour des structures plus simples de quadtree utilisées avec les ondelettes triangulaires

constantes par morceaux [4,33,38]. La figure 36 illustre cette nécessité. La partie supérieure de cette figure montre les structures hiérarchiques. Le rectangle solide désigne le bloc correspondant au coefficient d'ondelette qui doit être inséré. Les rectangles hachés montrent les blocs qui doivent être insérés, bien qu'aucun de leurs coefficients de détail ne soit utilisé. La partie inférieure de cette figure montre la triangulation correspondante. Les triangles solides correspondent au support de l'ondelette insérée, les triangles hachés doivent être insérés bien que n'ayant pas d'intersection avec l'ondelette.

Ainsi il apparaît que la reconstruction par seuil nécessite la sélection de la sous-hiérarchie minimale contenant tous les blocs pour lesquelles un coefficient d'ondelette est supérieur au seuil fixé par l'utilisateur.

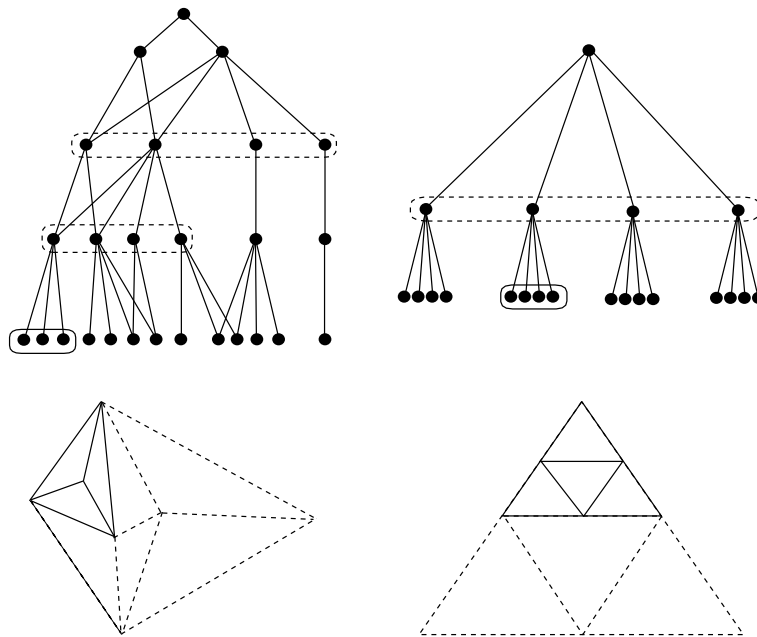


figure 36: L'insertion d'un coefficient de détail nécessite l'insertion de triangles en dehors du support de l'ondelette associée.

La figure 37 compare les reconstructions par niveau et par seuil sur un ensemble de données construit dans le but de tester la stabilité des algorithmes. La triangulation a été obtenue en insérant au hasard 25000 points dans un carré, et en construisant leur triangulation de Delaunay. Les données originales proviennent du plaquage d'une image sur cette triangulation. La structure hiérarchique a 32 niveaux de résolution. La figure 37 montre que les reconstructions par seuil sont meilleures que les reconstructions par niveau pour un même nombre de triangles, ce qui illustre la validité du choix des ondelettes. Les reconstructions par niveau et par seuil sont également comparées figure 38. La partie supérieure montre la reconstruction du niveau 21, consistant en 2326 triangles. La partie inférieure montre la reconstruction par seuil utilisant à peu près le même nombre de triangles (2388 exactement). Cette figure illustre comment

la sélection des plus grands coefficients de détails change la triangulation, en ajoutant plus de triangles dans les zones de fortes variations des données.

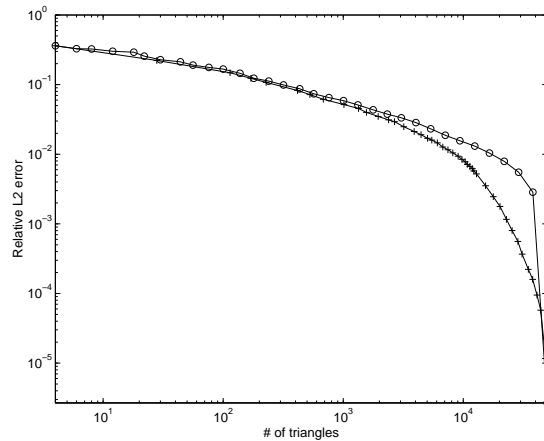


figure 37: erreur relative L^2 pour les reconstructions par niveau ('o') et par seuil ('+') en fonction du nombre de triangles.

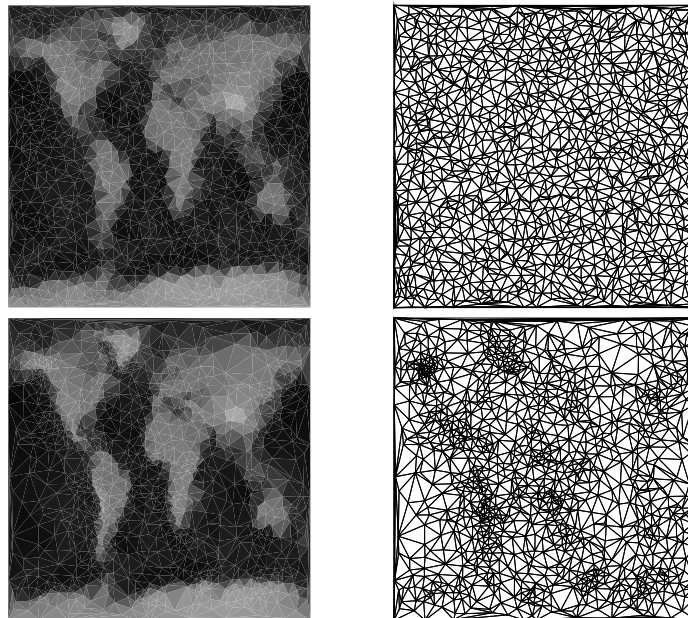


figure 38: en haut reconstruction par niveau avec 2326 triangles, en bas reconstruction par seuil avec 2388 triangles (à gauche données, à droite triangulation sous-jacente).

Préservation des caractéristiques importantes

Les coefficients de détail mesurent une erreur intégrale entre les approximations successives. L'utilisation d'une norme d'erreur de ce type peut parfois résulter dans la perte de caractéristiques importantes de l'ensemble des données. C'est le cas par exemple pour les côtes des continents dans l'ensemble de données topographiques utilisé en partie 3 dans les illustrations: si la côte correspond à une forte pente, elle est préservée, mais si la pente est faible, comme par

exemple entre la France et l'Angleterre, la côte peut être déplacée, ou même être supprimée par l'approximation, et ce même pour une faible marge d'erreur.

Une manière simple de préserver ces caractéristiques est de marquer les sommets correspondants afin d'interdire leur suppression pendant la construction de la hiérarchie. La figure 39 illustre ce procédé pour la conservation des côtes des continents: deux visualisations utilisant le même nombre de triangles (120000 sur un total de 1.3M) sont présentées, à gauche avec préservation des côtes, à droite sans préservation. Bien que l'erreur intégrale soit moins élevée à droite, le résultat est clairement inacceptable pour cet ensemble de données.

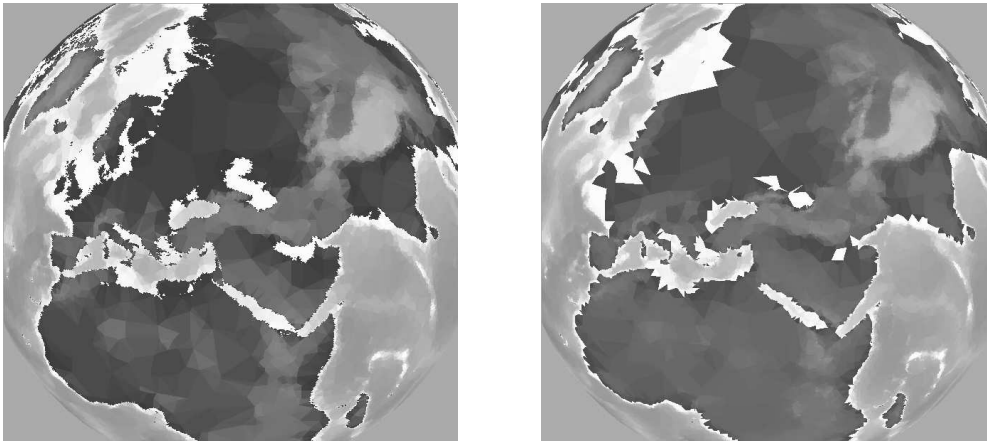


figure 39: à gauche préservation des côtes, à droite pas de préservation.

Amélioration des approximations

Un des avantages de la structure hiérarchique choisie est qu'elle permet d'obtenir facilement des reconstructions localisées. C'est d'ailleurs pour la localisation qu'elle avait été introduite par Kirkpatrick. Un inconvénient est que les sommets les plus significatifs, i.e. ceux dont les coefficients de détail associés sont les plus élevés, ne se trouvent pas forcément dans les niveaux supérieurs de la hiérarchie. Cela implique, comme nous venons de le voir à propos des reconstructions par seuil, qu'un certain nombre de sommets doivent être insérés, bien qu'ayant des coefficients de détail faibles. Si l'on n'est intéressé que par une visualisation progressive et globale de l'ensemble de données, il est possible d'obtenir de meilleures approximations en linéarisant la structure hiérarchique de la manière suivante:

- effectuer une première analyse globale avec la structure hiérarchique initiale,
- trier les sommets en fonction de la somme des carrés des deux coefficients de détail associés,
- construire une nouvelle séquence d'approximation à partir de données originales, en supprimant les sommets dans l'ordre déterminé par l'étape précédente. Deux nouveaux coefficients de détail sont calculés pour chaque sommet.

Les figures 40 et 41 comparent, pour un même nombre de triangles, les résultats obtenus avec la reconstruction par seuil, et ceux provenant du tri des sommets. La courbe de l'erreur relative (figure 40) montre l'amélioration de la qualité des approximations. La figure 41 est à comparer avec la figure 38: elle comporte le même nombre de triangles. La conséquence du tri des sommets est clairement visible: beaucoup plus de sommets sont insérés dans les zones de forte variation, et beaucoup moins dans les zones régulières.

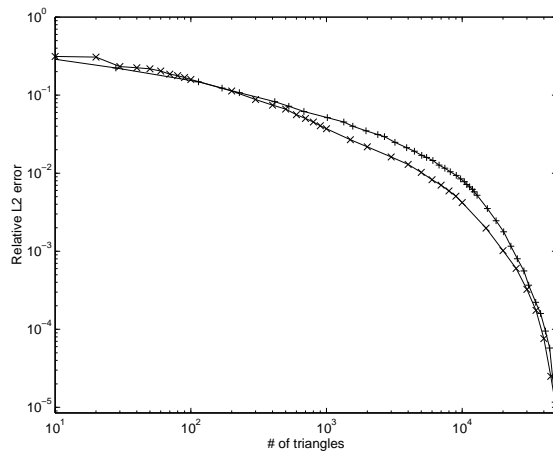


figure 40: erreurs L^2 relative pour la reconstruction par seuil ('+') et la reconstruction améliorée ('x')

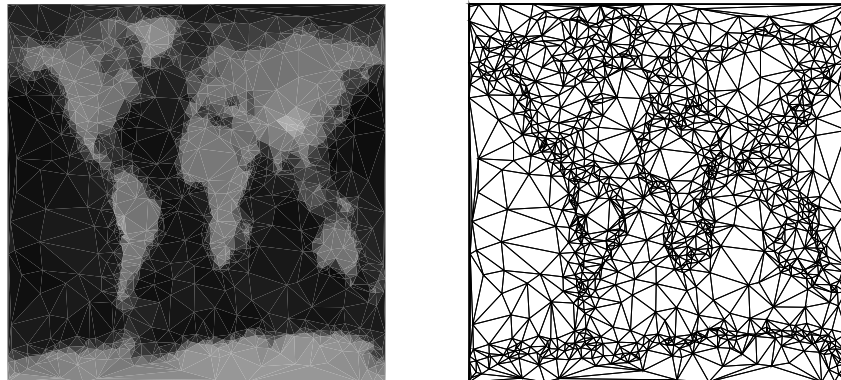


figure 41: reconstruction améliorée avec 2388 triangles, à comparer avec la figure 38

5.2.2) Données linéaires par morceaux

Avec les données linéaires par morceaux, il n'est plus possible de procéder dans un même niveau de résolution à la suppression de sommets, même non voisins, indépendamment les uns des autres, comme c'est le cas avec les données constantes par morceaux. Au lieu d'une structure hiérarchique de type pyramidale, avec un petit nombre de niveaux de résolution et un grand nombre de sommets à chacun de ces niveaux, une structure linéaire a été choisie, du type de celle présentée dans la partie précédente (cf Amélioration des approximations, partie 5.2.1), où chaque suppression de sommet correspond à un niveau.

L'ordre de suppression des sommets est choisi par un algorithme glouton basé sur une fonction de coût de suppression. Idéalement, ce coût de suppression est donné par la norme du coefficient de détail associé au sommet. Mais cette fonction coût requiert trop de temps de calcul. Dans l'implémentation actuelle la fonction coût suivante a été associée à un sommet M de valeur α , ayant pour voisins les sommets M_i de valeur α_i :

$$\text{coût de suppression} = \left| \frac{\sum_i 1 + \text{distmax} - d(M, M_i)\alpha_i}{\sum_j 1 + \text{distmax} - d(M, M_j)} - \alpha \right|,$$

où $d(M, M_i)$ est la distance géodésique entre M et M_i , et $\text{distmax} = \max_i d(M, M_i)$.

Comme pour les données constantes par morceaux, il est possible d'interdire la suppression de certains sommets afin de préserver des caractéristiques importantes de l'ensemble de données.

5.3) Résultats

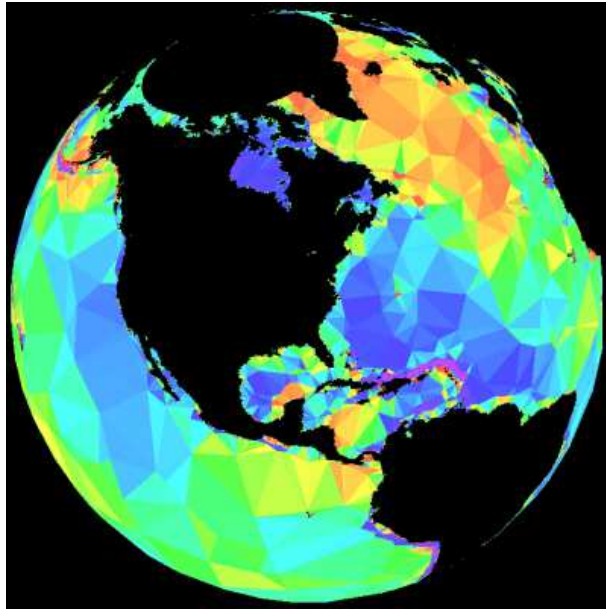
Données constantes par morceaux

La figure 42 montre l'anomalie gravimétrique, qui est la différence entre la gravité réelle et la gravité calculée pour une surface ellipsoïdale parfaite. Cet ensemble de données provient de télédétections satellitaires. Pour des raisons techniques, les mesures ne sont possibles que sur les surfaces liquides, et qu'entre -72 et $+72$ degrés de latitude. Des informations complémentaires sur cet ensemble de données, ainsi que les données elles-mêmes, sont disponibles à l'URL http://topex.ucsd.edu/marine_grav/mar_grav.html. Les données originales consistent en une grille de taille 10800×6336 d'entiers courts. Nos méthodes, basées sur des triangulations irrégulières, peuvent être appliquées sur de tels domaines complexes. En partant d'une triangulation régulière obtenue par subdivision 4-1 d'un icosaèdre sphérique à la profondeur 8, on a éliminé presque tous les sommets situés sur les continents, et au dessus de $+72$ ou en dessous de -72 degrés de latitude. La triangulation irrégulière résultante a 920250 triangles, très fins là où des données sont disponibles, et très gros en dehors du domaine. La grille des données originales a été plaquée sur cette triangulation. Les contours du domaine (i.e. les côtes des continents et les parallèles à -72 et $+72$ degrés) ont été préservés lors de l'analyse, grâce à la méthode présentée dans la partie 5.2.1. Les figures 42 (a),(b) et (c) montrent 4 étapes lors de la reconstruction utilisant la structure linéarisée (cf partie 5.2.1). Les figures 42 (e), (f), (g) et (h) montrent des zooms au-dessus de l'océan pacifique, dans une zone où les données sont particulièrement irrégulières ((e) et (h) montrent les arêtes de la triangulation).

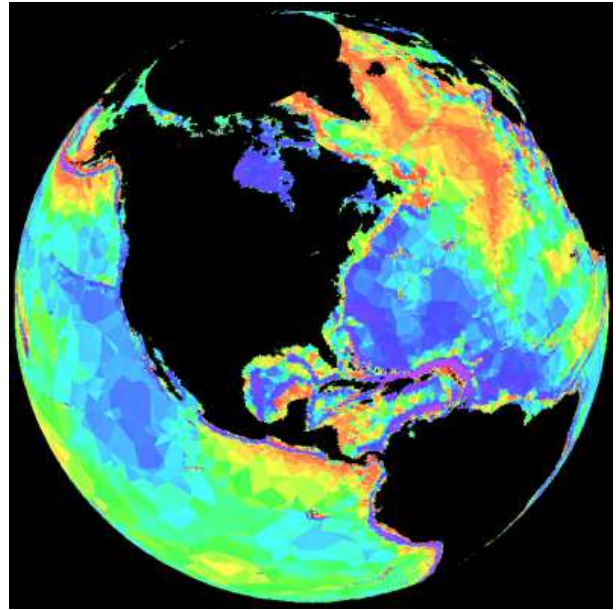
Données linéaires par morceaux

La figure 43 illustre les résultats concernant les données linéaires par morceaux sur un ensemble comportant 1.3M de triangles. Les données originales sont définies sur une triangulation régulière (subdivision 4-1 au niveau 8 d'un icosaèdre sphérique), et sont obtenues par échantillonnage de l'ensemble de données topographiques ETOPO5 [†] (qui est constitué par une grille de taille 2160×4320). L'analyse a été faite avec le paramètre de localisation $K = 2$ (cf partie 5.2.2), et avec préservation des côtes des continents. La partie supérieure de la figure 43 compare le résultat obtenu avec notre algorithme en (a) et celui obtenu par simple sous-échantillonnage des données pour la même séquence de sommets supprimés en (c). (b) montre la triangulation correspondante. La partie inférieure montre différentes reconstructions partielles calculées par l'algorithme: (g), (h) et (i) montrent les triangulations correspondants aux reconstructions (d) (100000 sommets), (e) (200000 sommets) et (f) (300000 sommets).

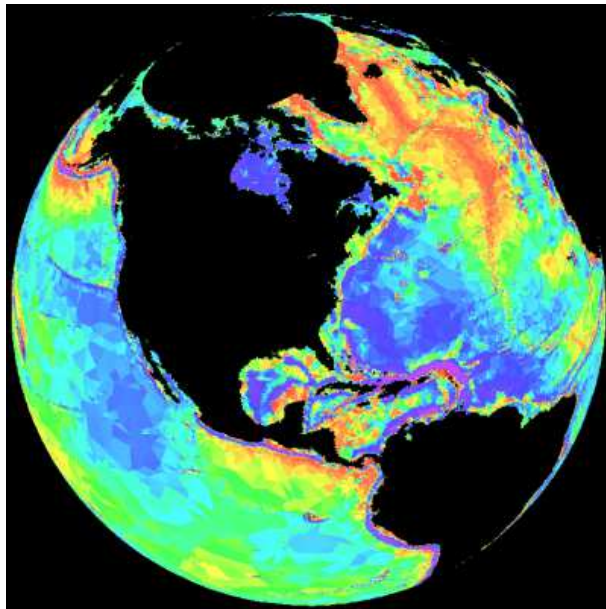
[†] ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/Solid_Earth/Topography/tbase_5min/



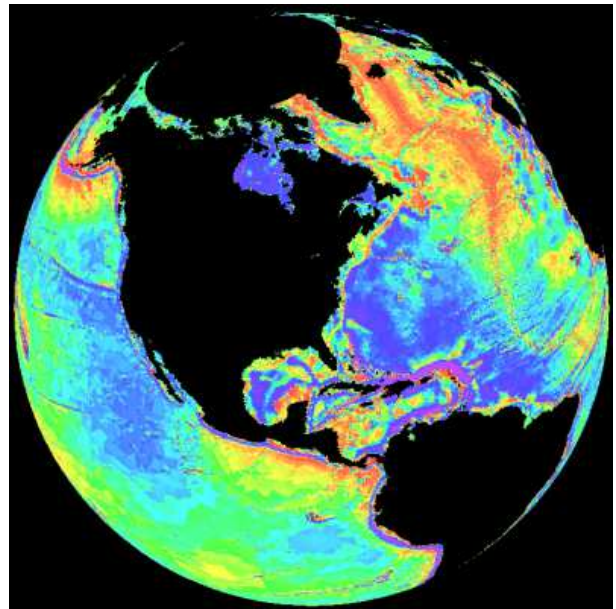
(a) 25000 sommets



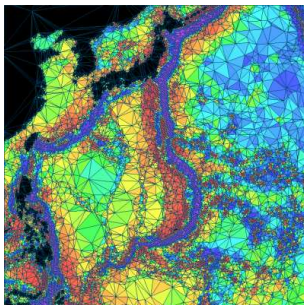
(b) 70000 sommets



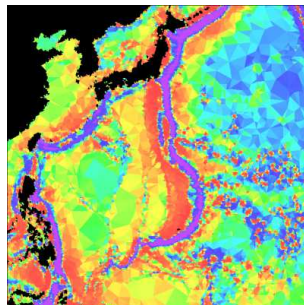
(c) 100000 sommets



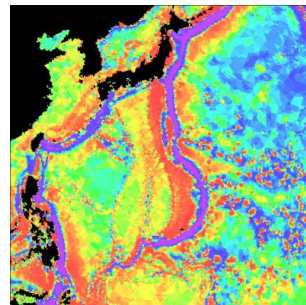
(d) 200000 sommets



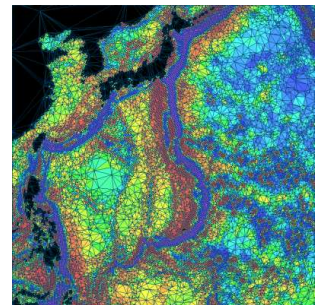
(e) 100000 s.



(f) 100000 s.



(g) 200000 s.



(h) 200000 s.

figure 42: anomalie gravimétrique, ondelettes constantes par morceaux

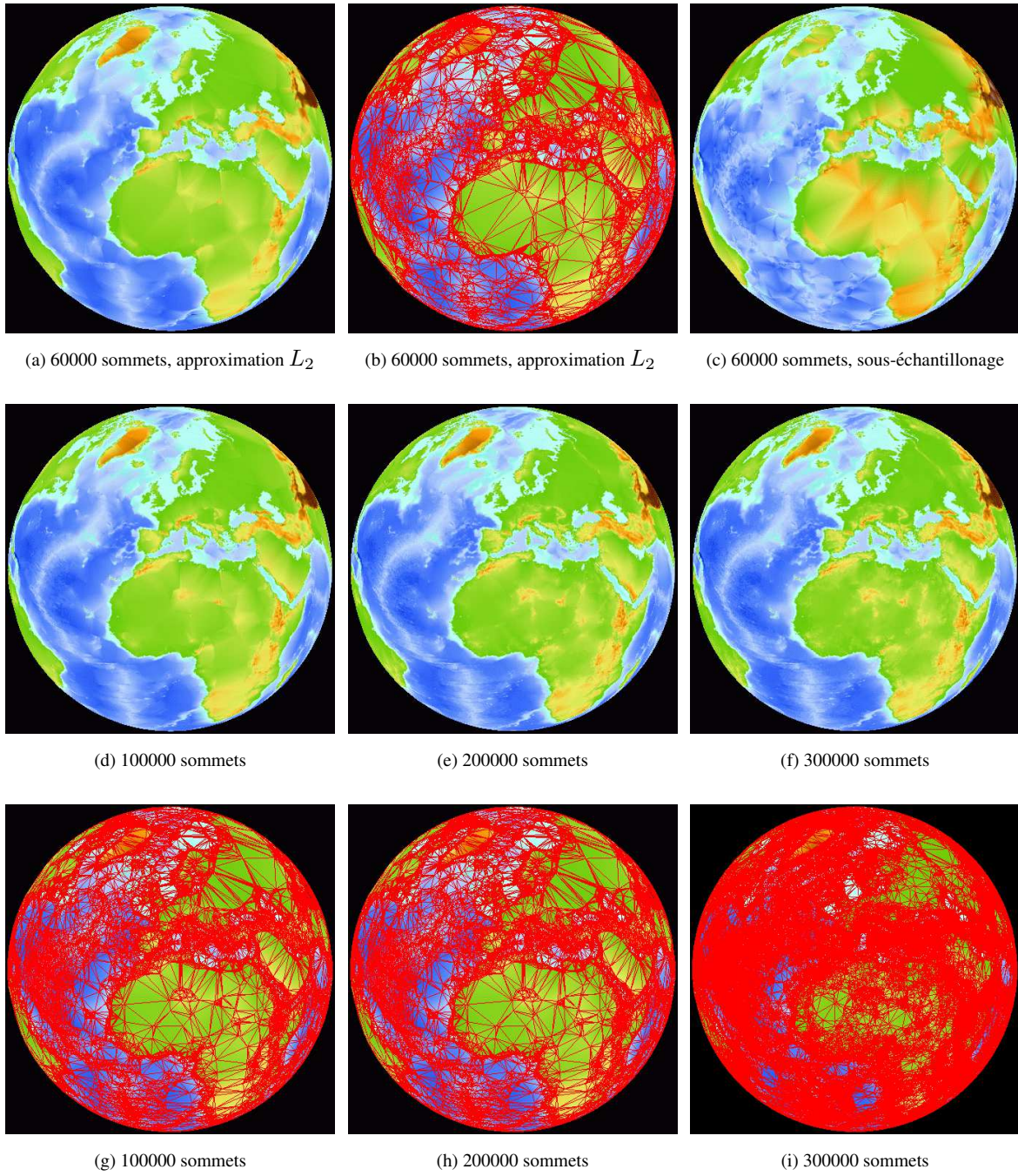


figure 43: topographie globale, ondelettes linéaires par morceaux

Chapitre 6

Bilan et perspectives

Les très grands ensembles de données sont de plus en plus courants. Cette évolution est due non seulement à l'accroissement des capacités de calcul, mais aussi au développement des moyens d'acquisition. Les grilles utilisées lors de simulations numériques s'affinent, les pas de temps se réduisent. Les scanners 3D permettent d'acquérir en quelques minutes des millions de points sur un objet physique. Les observations satellitaires se multiplient, notamment pour améliorer la gestion des ressources naturelles ou la prévention des catastrophes naturelles.

Parallèlement à cette évolution, on assiste à une généralisation de la distribution des données par les réseaux d'informations. Les organismes gouvernementaux mettent à disposition des chercheurs, sur des réseaux à accès libre, des données climatiques, topographiques, géologiques. Les entreprises partagent des données entre leurs départements par l'intermédiaire de réseaux locaux (intranet) à accès protégé.

Ainsi la visualisation des données, soutien indispensable à leur compréhension, et donc à leur exploitation, doit permettre de traiter des grandes masses de données, éventuellement disponibles de manière progressive par les réseaux.

Ces contraintes expliquent le développement de méthodes de visualisation basées sur une décomposition hiérarchique des données. Si l'analyse multirésolution par transformée en ondelette a pu être appliquée pour certains types de visualisation à des données définies sur des grilles de structure uniforme, ce mémoire a mis en évidence l'inapplicabilité de cette théorie dans certains cas, et notamment dès que les données sont définies sur des grilles irrégulières.

La principale contribution de ce mémoire a été de proposer un cadre généralisé d'analyse multirésolution, et de développer deux applications de visualisation scientifique basées sur ce cadre. Ce mémoire a privilégié la visualisation de données scalaires. L'application de visualisation de données volumiques

décrite au chapitre 4 a porté sur des densités acquises par scanner IRM. Les applications présentées au chapitre 5 ont porté sur des données topographiques ou gravitationnelles, définies sur des grilles triangulaires irrégulières, planaires ou sphériques.

Le traitement de données géométriques par des méthodes semblables à celles développées dans ce mémoire paraît envisageable. Dans cet optique, deux projets de recherche ont commencé récemment.

Concernant la visualisation de données sur des triangulations irrégulières, seules des triangulations sur des surfaces fixes, planaires ou sphériques, ont été abordées dans cette synthèse. Une collaboration est en cours avec J.C. Léon, professeur au laboratoire Sols, Solides, Structures à Grenoble, afin de permettre la visualisation de données définies sur des surfaces polyédriques triangulées quelconques. Au problème de la représentation multirésolution des données s'ajoute celui de la simplification géométrique de la surface sur laquelle sont définies les données. L'équipe de J.C. Léon a développé des algorithmes de simplification de données géométriques [41]. Notre travail consiste à utiliser des projections planaires locales pour appliquer les résultats du chapitre 5 au transport des données originales sur la succession de polyèdre simplifiés fournis par les algorithmes du laboratoire 3S [17,6].

D'autre part, l'application des méthodes développées dans ce mémoire à des données géométriques sera l'objectif principal de notre participation au projet européen "MINGLE: Multiresolution for Geometric Modeling". MINGLE est un réseau de formation par la recherche (Research Training Network) qui a débuté en janvier 2000, pour une durée de 4 ans, et qui permettra d'accueillir des pré- ou post-doctorants, d'organiser des écoles d'été de formation aux techniques de la multirésolution en modélisation géométrique et en visualisation scientifique, ainsi que des séminaires de travail (Workshop) regroupant les spécialistes du domaine. Les équipes participantes à ce projet couvrent le spectre des compétences nécessaires à la réalisation des objectifs visés. Ces compétences incluent:

- l'informatique graphique (H.P. Seidel, Max Planck Institut für Informatik, Saarbrücken, Allemagne),
- l'analyse numérique, les ondelettes (M.J. Floater, SINTEF, Norvège, coordinateur du projet; et A. Iske, université de Munich, Allemagne),
- la subdivision en modélisation géométrique (N. Dyn, université de Tel-Aviv, Israël, M. Sabin, université de Cambridge, Angleterre),
- la multirésolution non imbriquée (G.P. Bonneau, S. Hahmann, Université Joseph Fourier, Grenoble),
- la géométrie algorithmique (L. De Floriani, université de Gênes, Italie),
- l'intégration, validation et tests (Systems in Motion, société privée de logiciels graphiques, Oslo, Norvège).

Références

1. J.-D. Boissonnat, M. Teillaud, "A Hierarchical Representation of Objects: the Delaunay Tree", Second ACM Symposium on Computational Geometry in Yorktown Heights, June 1986.
2. G.P. Bonneau, "Multiresolution Analysis on Irregular Surface Meshes", IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 4, no. 4, pp. 365-378, 1998.
3. G.P. Bonneau, A. Gerussi, "Level of Detail Visualization of Scalar Data Sets on Irregular Surface Meshes", IEEE Visualization'98, pp. 73-77, Oct. 1998.
4. G.P. Bonneau, "Optimal Triangular Haar Bases for Spherical Data", IEEE Visualization'99, pp. 279-284, Oct. 1999.
5. G.P. Bonneau, S. Hahmann, G.M. Nielson, "BLaC Wavelets: a Multiresolution Analysis with Non-Nested Spaces", IEEE Visualization'96, pp. 43-48, Oct. 1996.
6. G.P. Bonneau, L. Fine, A. Gerussi, J.-C. Léon, F. Noël, "Approche multicritères pour la constitution de modèles scientifiques multi-résolution", Comptes-rendus des Journées Courbes, Surfaces et Algorithmes, Grenoble, Sep. 1999.
7. G.P. Bonneau, A. Gerussi, "Hierarchical decomposition of datasets on irregular surface meshes", CGI'98, pp. 59-63, Jun. 1998.
8. G.P. Bonneau, "Multiresolution Analysis with Non-Nested Spaces", Computing 13, pp. 51-66, 1998.
9. G.P. Bonneau, "An Introduction to Wavelets for Scientific Visualization", à paraître dans *Scientific Visualization*, Hagen, Nielson, Müller eds., IEEE CS Press.
10. S. Bryson, C. Levitt, "The Virtual Windtunnel: An Environment for the Exploration of Three-Dimensional Unsteady Flows", IEEE Visualization'91, pp. 17-24, Oct. 1991.

11. M. de Berg, K.T.G. Dobrindt, "On Levels of Detail in Terrains", Technical report UU-CS-1995-12, Utrecht Univ. 1995.
12. L. De Floriani, "A Pyramidal Structure for Triangle-Based Surface Description", *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 9, no. 2, pp. 67-78, Mar. 1989.
13. Distributed Oceanographic Data System
<http://www.unidata.ucar.edu/packages/dods/>
14. Domik G., A Tutorial on Scientific Visualization, Technical Report University of Colorado, Department of Computer Science, 1993
<http://www.education.siggraph.org/materials/HyperVis/domik/>
15. Eck M., DeRose T., Duchamp T., Hoppe H., Lounsbery M., Stuetzle W., "Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes", *Siggraph'95*, pp.173-182, Aug. 1995.
16. A. Finkelstein, D.H. Salesin, "Multiresolution Curves", *Siggraph'94*, pp. 261-268, Aug. 94.
17. A. Gerussi, G.P. Bonneau, "Analysis of Scalar Data on Multiresolution Geometric Models", to be published in *Proceedings of the Fourth International Conference on Curves and Surfaces*, St Malo, Jul. 99.
18. T. Gieng, B. Hamann, K. Joy, G. Schussman, I. Trotts, "Constructing Hierarchies for Triangle Meshes", *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 4, no. 2, pp. 145-161, 1998.
19. S.J. Gortler, P. Schröder, M.F. Cohen, P. Hanrahan, "Wavelet Radiosity", *Siggraph'93*, pp. 221-230, 1993.
20. M.H. Gross, L. Lippert, R. Dittrich, S. Häring, "Two Methods for Wavelet-Based Volume Rendering", *Computers & Graphics*, vol. 21, no. 2, pp.237-252, 1997.
21. T. Günther, C. Poliwoda, C. Reinhart, J. Hesser, R. Männer, H.-J. Baur, "VIRIM: A Massively Parallel Processor for Real-Time Volume Visualization in Medicine", *Ninth Eurographics Hardware Workshop*, vol. 19, no. 5, pp. 705-710, 1995.
22. A. Haar, "Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme", *Mathematische Annalen*, 69, pp. 331-371, 1910.
23. Hamann B., "A Data Reduction Scheme for Triangulated-Surfaces", *Computer Aided Geometric Design*, 11 (2), pp.197-214, Apr. 1994.
24. J.L. Helman, L. Hesselink, "Visualizing Vector Field Topology in Fluid Flows", *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 11, no. 3, pp. 36-46, 1991.
25. H. Hoppe, "Progressive Meshes", *Siggraph'96*, pp. 99-108, Aug. 1996.
26. H. Hoppe, "View-Dependent Refinement of Progressive Meshes", *Siggraph'97*, pp. 189-198, Aug. 1997.

27. Juston M., Développement d'un Outil de Visualisation 3D pour la Radiothérapie de Conformation, Rapport de stage de fin d'études ENSIMAG, 1999
28. D. Kirkpatrick, "Optimal Search in Planar Subdivisions", *SIAM J. Computing*, vol. 12, no. 1, pp. 28-35, Feb. 1983.
29. G. Knittel, "VERVE: Voxel Engine for Real-Time Visualization and Examination", *Computer Graphics Forum*, vol. 19, no. 3, pp. 37-48, Sep. 1993.
30. W. Lorensen, H.E. Cline, "Marching Cubes: a High Resolution 3D Surface Construction Algorithm", *Siggraph'87*, pp. 163-169, July 1987.
31. M. Lounsberry, T.D. DeRose, J. Warren, "Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type", *ACM Transactions on Graphics*, vo. 16, no. 1, pp. 34-73, Jan. 1997.
32. S.G. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674-693, 1989.
33. G.M. Nielson, I.-H. Jung, J. Sung, "Haar-Wavelets Over Triangular Domains with Applications to Multiresolution Models for Flow Over a Sphere", *IEEE Visualisation'97*, pp. 143-150, Nov. 1997.
34. G.M. Nielson, "On the Topic of Interactive Scientific Visualization", in D. Thalmann, N.M. Thalmann eds., *New Trends in Animation and Visualization*, Wiley, pp. 135-150.
35. H. Pfister, A. Kaufman, "Cube-4: a Scalable Architecture for Real-Time Volume Rendering", *Volume Visualization Symposium*, pp. 47-54, Oct. 1996.
36. Real Time Visualization
<http://www.rtviz.com>
37. G. Scheuermann, X. Tricoche, H. Hagen, "C1-Interpolation for Vector Field Topology Visualization", *IEEE Visualization'99*, pp. 271-278, Oct. 99.
38. P. Schröder, W. Sweldens, "Spherical Wavelets: Efficiently Representing Functions on the Sphere", *Siggraph'95*, pp.161-172, Aug. 1995.
39. E.J. Stollnitz, T.D. DeRose, D.H. Salesin, "*Wavelets for Computer Graphics, Theory and Applications*", Morgan Kaufmann, 1996.
40. G. Strang, "*Introduction to Applied Mathematics*", Wellesley-Cambridge Press, 1986.
41. P. Véron, J.C. Léon, "Static polyhedron simplification using an error measurement criterion", *Computer Aided Design*, Vol. 29, Num. 4, pp 287-298, 1997

42. Z. Zhu, R. Machiraju, B. Fry, R. Moorhead, "Wavelet-based Multiresolution Representation of Computational Filed Simulation Datasets", IEEE Visualization '97, Oct. 1997, pp. 151-158.

Deuxième partie

**Articles et Publications
de 1996 à 1999**

G.P. Bonneau, S. Hahmann, G.M. Nielson, "BLaC Wavelets: a Multiresolution Analysis with Non-Nested Spaces", IEEE Visualization'96, pp. 43-48, Oct. 1996.

G.P. Bonneau, "Multiresolution Analysis with Non-Nested Spaces",
Computing 13, pp. 51-66, 1998.

G.P. Bonneau, A. Gerussi, "Hierarchical decomposition of datasets on irregular surface meshes", CGI'98, pp. 59-63, Jun. 1998.

G.P. Bonneau, "Multiresolution Analysis on Irregular Surface Meshes", IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 4, no. 4, pp. 365-378, 1998.

G.P. Bonneau, A. Gerussi, "Level of Detail Visualization of Scalar Data Sets on Irregular Surface Meshes", IEEE Visualization'98, pp. 73-77, Oct. 1998.

G.P. Bonneau, "Optimal Triangular Haar Bases for Spherical Data",
IEEE Visualization'99, pp. 279-284, Oct. 1999.

G.P. Bonneau, "An Introduction to Wavelets for Scientific Visualization", à paraître dans *Scientific Visualization*, Hagen, Nielson, Müller eds., IEEE CS Press.

G.P. Bonneau, L. Fine, A. Gerussi, J.-C. Léon, F. Noël, "Approche multi-critères pour la constitution de modèles scientifiques multi-résolution", Comptes-rendus des Journées Courbes, Surfaces et Algorithmes, Grenoble, Sep. 1999.