



HAL
open science

Etude mathématique de la sensibilité POD (Proper orthogonal decomposition)

Nissrine Akkari

► **To cite this version:**

Nissrine Akkari. Etude mathématique de la sensibilité POD (Proper orthogonal decomposition). Autre. Université de La Rochelle, 2012. Français. NNT : 2012LAROS389 . tel-01066073

HAL Id: tel-01066073

<https://theses.hal.science/tel-01066073>

Submitted on 19 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique,
Énergétique et Aéronautique (SI-MMEA)

École Doctorale Sciences et Technologie (EDST)



Thèse en collaboration entre l'Université de La Rochelle et l'Université Libanaise

Pour l'obtention du grade de docteur de l'Université de La Rochelle et de l'Université
Libanaise

Discipline : **MÉCANIQUE**

Étude mathématique de la sensibilité de la méthode POD (Proper Orthogonal Decomposition)

Nissrine AKKARI

Soutenue le **20 Décembre 2012**

Dirigée par Aziz **HAMDOUNI** & Mustapha **JAZAR**

JURY :

Rapporteurs :

Antonio FALCO

Professeur à l'Universidad CEU Cardenal Herrera, Valencia

Anthony NOUY

Professeur à l'école centrale de Nantes

Examineurs :

Alain CIMETIÈRE

Professeur, ENSMA

Abdallah EL HAMIDI

Maître de conférence, HDR, Université de La Rochelle

Aziz HAMDOUNI

Professeur, Université de La Rochelle

Mustapha JAZAR

Professeur, Université Libanaise

Khalil KHOURY

Professeur, Université Libanaise

Franck PLOURABOUÉ

Directeur de recherche CNRS, IMFT, Toulouse

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur et de l'Environnement (LaSIE), de l'université de La Rochelle. Je remercie toute l'équipe du laboratoire représentée par son ancien directeur Francis Allard et son directeur actuel Karim Ait-Mokhtar, de m'avoir bien accueillie au cours de ces trois années.

Je tiens à remercier tout d'abord mes directeurs de thèse Aziz Hamdouni et Mustapha Jazar : Sans vous, ce travail n'aurait pas été fait.

Je remercie vivement Anthony Nouy et Antonio Falco d'avoir accepté de rapporter ce travail. C'était un grand honneur pour moi.

Je remercie également Alain Cimetière, Franck Plouraboué, Abdallah El Hamidi et Khalil Khoury d'avoir fait partie du jury de ma thèse.

Aziz t'étais vraiment plus qu'un directeur. Un vrai ami...J'oublierai jamais toutes nos discussions durant les réunions de travail et les sorties... Grâce à toi, j'avoue avoir avancée ds la manière de voir la recherche scientifique. J'espère avoir pu sortir un tout petit peu de mon comportement scolaire..Je te remercie pour tout.

Mustafa sans toi j'aurai pas pu continuer mon parcours ds la recherche scientifique...Grâce à tes recommandations, j'ai été acceptée en doctorat...J'oublierai jamais nos réunions de travail au Liban et à La Rochelle. Je te remercie beaucoup pour ton aide et ton support au cours de ces années.

Mes sentiments les plus sincères sont surtout à ma famille et à mes amis qui m'ont soutenue dans les moments les plus difficiles...

Ma grande-mère *Jamila*...J'ai voulu que tu sois là encore, pour partager avec moi ces moments les plus décisifs de ma vie...Tu attendais avec impatience la date de ma soutenance...Toi qui m'a tout le temps encouragée, dans mes périodes de faiblesse. Tu me manques fort...Je suis

sûre que t'es contente pour moi là où t'es maintenant...

Mes parents **Nafez** et **Sana**...Je vous remercie énormément pour votre patience et pour tout le support durant ces trois années...Sans vous, j'aurais pas pu avancer...

Mes deux sœurs les plus agréables du monde **Ghina** et **Hania**...Je vous remercie si fort pour votre soutien tout au long de ces années...Poooroooroo (Ghina) ma petite jumelle, mon petit oiseau, t'étais vraiment un refuge tt au long de ces années, malgré la distance qui ns sépare, mais je l'ai jamais remarquée, tellement t'es proche de moi, et tu resteras pour tte ma vie.

Nazir (François)...Je me souviens le premier jour à La Rochelle qd tu venais me chercher à la gare. Cé là ke commençait tte notre histoire..Depuis ce moment t'as pris soin de moi, tu étais ac moi étape par étape, ds les plus beaux moments et surtout ds les moments les plus difficiles. Sans toi, cette thèse aurait été différente. Je te remercie pour ton soutien tout au long de ces années. D'avance merci pour les années qui suivront...

Mireille la plus belle amie du monde... Merci pour tout. J'oublierai jamais ts les moments kon a passé ensemble... Malgré tes soucis, t'étais à côté de moi, à me soutenir et à m'encourager. J'oublierai jamais les sorties Sousiiii (sushi)..On aura plus le tps pr les faire après ma soutenance, j'espère...

Hassan-Marwan-Ahmad-Saad Les "Mawelis" du labo...Je vous remercie pour tout et je vous souhaite une bonne fin de thèse.

Finalement à tous mes amis du labo, Alexandra, Kevin, Malek, Lisa, Adrien Gros, Antoine Dumon, Kamilia...Je vous oublierai jamais, et vos mots de soutien en ce moment...

Table des matières

1	Introduction	6
1.1	La réduction de modèle	6
1.2	La décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)	8
1.2.1	Construction d'une base-POD	9
1.2.2	Précision de l'approximation POD-Galerkin	10
1.3	Etat de l'art sur les méthodes ROM-POD pour les problèmes d'évolution dépendant d'un paramètre	10
1.4	Problématique de la thèse	12
1.5	Organisation du manuscrit et principaux résultats	14
2	Un résultat de sensibilité des éléments propres de la POD pour un problème d'évolution linéaire	15
2.1	Evolution de \mathcal{R}_λ en fonction de λ	16
2.2	Etude paramétrique de la sensibilité des valeurs propres POD	18
2.3	Continuité des espaces propres POD en fonction du paramètre	18
2.4	Conclusion	20
3	Résultats préliminaires	21
3.1	Préliminaires	21
3.2	Existence et unicité de solutions globales	22
3.2.1	Existence et unicité de solutions globales pour l'équation de Burgers	22
3.2.2	Existence et unicité de solutions globales pour les équations de Navier-Stokes 2D	22
3.3	Sensibilité paramétrique des solutions de l'équation de Burgers	23
3.4	Sensibilité paramétrique des solutions des équations de Navier-Stokes 2D	29
3.5	Conclusion	34
4	Estimation de l'erreur de la méthode POD-Galerkin pour un paramètre fixé	35
4.1	Estimation de l'erreur POD-Galerkin pour l'équation de Burgers	36
4.2	Estimation de l'erreur du modèle ROM-POD associé aux équations de Navier-Stokes 2D	41

4.3	Conclusion	46
5	Sensibilité du ROM-POD pour l'équation de Burgers	48
5.1	Sensibilité du modèle réduit pour un nombre de modes fixé	49
5.2	Evolution de la sensibilité du modèle réduit en fonction du nombre de modes	51
5.3	Conclusion	59
6	Sensibilité du ROM-POD pour les équations de Navier-Stokes 2D	61
6.1	Sensibilité du modèle réduit pour un nombre de modes fixé	62
6.2	Evolution de la sensibilité du modèle réduit en fonction du nombre de modes	65
6.3	Conclusion	71
7	Validation numérique	72
7.1	Validation numérique de la sensibilité paramétrique du modèle réduit pour un nombre de modes fixé	72
7.2	Validation numérique de la sensibilité du modèle réduit en fonction du nombre de modes	80
7.3	Conclusion	81
	Conclusion et Perspectives	85
	Bibliographie	92

Chapitre 1

Introduction

1.1 La réduction de modèle

La simulation numérique sur ordinateur, est devenue un chemin incontournable surtout dans le cadre de l'étude de phénomènes complexes de la mécanique des fluides. Ces phénomènes sont représentés mathématiquement par des équations aux dérivées partielles : Les équations de Navier-Stokes, décrivant le champs de vitesse de l'écoulement fluide ainsi que le champs de sa pression. La résolution numérique de ces systèmes est très coûteuse en temps de calcul. Un des défis en mécanique des fluides est de pouvoir construire des modèles plus simples évitant la simulation complète des équations de Navier-Stokes, capables de bien représenter et reproduire le phénomène physique en cause, et surtout n'exigeant pas un temps de calcul énorme. Parmi les différentes techniques de modélisation en mécanique des fluides, nous nous intéressons à celles qui se basent sur la construction de modèles d'ordre réduit (ROM), dont le degré de liberté est négligeable comparée à celle d'une discrétisation classique des équations de la mécanique des fluides. L'idée en gros consiste à construire à partir du problème modèle initial, un système d'équations différentielles ordinaires (ODE) contenant un nombre de degrés de liberté modéré (moins d'une centaine). La résolution de ce système d'ODE est très rapide, elle se fait même en temps quasi-réel.

Pratiquement, étant donnée une équation aux dérivées partielles, la résolution numérique de cette équation se fait par les méthodes de discrétisation classiques (Galerkin, éléments finis, différences finis, volumes finis,...)[3] qui ramènent le problème initial à un système d'équations dans un espace de dimension M (qui peut être algébrique, linéaire, non linéaire ou d'équations différentielles). Les techniques de réduction par méthodes de projection, consiste à projeter ce système sur un espace de dimension N très petite devant M . Il est aussi possible d'obtenir un modèle réduit en projetant les équations de départ sur l'espace de dimension N par la méthode de Galerkin par exemple. Ceci nécessite la détermination d'une base de projection du modèle réduit. C'est la construction de cette base et d'espaces vectoriels qu'elle engendre, qui différencie

les différentes méthodes de réduction de modèles obtenues par la technique de projection. On distingue les méthodes dites a posteriori des méthodes dites a priori.

Pour les méthodes de réduction a posteriori la base est obtenue à partir de solutions du problème de départ. On peut citer la méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) [29], connue également comme l'analyse en composantes principales [62], la décomposition en valeurs singulières (SVD) [48, 19], la décomposition de Karhunen-Loève [64, 76]. Dans la catégorie des méthodes de réduction a posteriori on a aussi la méthode de la base réduite [89, 47, 12, 85, 93].

Pour les méthodes de réduction a priori, la base de projection est construite d'une manière itérative afin de minimiser une erreur associée de l'équation de départ (ou des erreurs construites sur d'autres critères). Dans ces dernières approches, la base est calculée en même temps que la solution. Dans cette catégorie, on peut citer la technique dite APR-POD [11, 94, 95] et la méthode basée sur la séparation de variables dite PGD (Proper Generalized decomposition) [13, 14, 15, 30, 37, 38, 39, 44, 45, 86, 87].

La méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres POD, présente l'avantage d'être optimale au sens énergétique. Cette méthode a été d'abord introduite par Lumley [78], dans le cadre de l'étude des structures cohérentes des écoulements fluides, à la fin des années soixante. Ensuite, elle a connu un regain d'intérêt important dans les années 1990 comme technique de construction des modèles réduits. Elle a été utilisée dans de nombreuses applications en mécanique des fluides, on peut citer [20, 36, 27, 9, 8, 100, 10, 11, 5, 6, 22].

La technique de réduction de modèles connue sous le nom de méthode de base réduite, est utilisée en général pour des équations aux dérivées partielles paramétriques, et le sous-espace de dimension réduite N est construit pratiquement en utilisant un algorithme de Greedy [93, 49], qui permet aussi de déterminer la dimension N en minimisant le mieux possible, les erreurs obtenues à posteriori par l'approximation Galerkin de la solution associée à chaque paramètre donné. D'une manière générale, on dit qu'il s'agit de la méthode de base réduite certifiée.

La méthode APR est basée sur la construction d'un enrichissement d'une base de départ (qui peut être une base POD initiale ou un vecteur aléatoire ou autres) afin de minimiser le résidu de l'équation. L'enrichissement, comme dans une approche de type Krylov, se fait par les vecteurs résidus. Une phase de réduction POD est ajoutée, afin d'éviter la redondance et de limiter la taille de la base [94, 95, 11]. L'application de l'APR-POD en mécanique des fluides n'a pas été concluante pour des écoulements fluides à grand nombre de Reynolds.

La PGD est basée sur la construction d'une approximation du problème de départ sous forme

de combinaisons linéaires de fonctions à variables séparables. La construction de ces fonctions et des coefficients associés se fait là aussi d’une manière itérative afin de minimiser l’erreur sur l’équation de départ ou sur la solution. A chaque étape, on obtient des problèmes couplés dans chaque direction de la séparation des variables. Cette méthode a été initialement développée par P. Ladvèze dans la méthode LATIN [70, 46], où il effectuait une séparation espace-temps. Ensuite, le principe a été généralisé par Ammar et Chinesta et al. pour les problèmes multidimensionnels [13, 14]. Une méthode similaire a été utilisée par Anthony Nouy, sous le vocable de décomposition spectrale généralisée [86, 87], pour la simulation d’équations aux dérivées partielles stochastiques (ici les paramètres sont les variables aléatoires). L’écriture d’un cadre abstrait de cette approche a été effectué par A. Falco et A. Nouy [44, 45].

La PGD a été adaptée et appliquée en mécanique des fluides par Dumon[37] et par Dumon et al. [38, 39]. Dans le cas des écoulements stationnaires et instationnaires (mais non turbulent) dans une cavité entraînée, ils obtiennent des réductions de temps de calcul pouvant aller à un rapport 10 dans des cas particuliers. Mais, en général on obtient un gain de temps avec un rapport de 2 par rapport à des méthodes de discrétisation classiques. Ce gain n’est pas suffisant pour que le problème construit par PGD puisse constituer un vrai modèle réduit. D’autres formulations doivent être utilisées pour rendre la PGD efficace pour des problèmes de la mécanique des fluides. Ces travaux sont en cours au sein du laboratoire LaSIE.

En mécanique des fluides, mais aussi dans bien d’autres disciplines, la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) est devenue la méthode de réduction de modèles la plus utilisée, grâce à sa capacité de reconstruire des données numériques, avec une très bonne fiabilité. Nous pouvons citer plusieurs applications de cette méthode en interaction fluide-structure (FSI) [75, 73, 42, 43, 74], en ingénierie [65], en biologie [99, 72, 97], en géophysique [79], des applications au traitement d’images [66], en analyse de signal [7], en compression de données [18], en contrôle optimal [61, 4] etc...

Du fait de l’efficacité et de l’usage important de la méthode ROM-POD en mécanique des fluides, c’est cette technique de réduction qui fera l’objet de notre étude. Plus particulièrement, dans cette thèse nous nous intéresserons à l’établissement de résultat de sensibilité de cette méthode pour des équations d’évolution non-linéaires dépendant d’un paramètre. Et plus précisément, il s’agira des équations de Burgers et de Navier-Stokes bidimensionnelles.

1.2 La décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

Vu que la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) est une technique d’approximation-Galerkin d’un problème modèle dans un espace de dimension réduite [20, 36], on est ramené à la détermination d’une base de référence, qu’on appelle aussi base de décomposition orthogonale

aux valeurs propres (base POD) ; C'est la manière de construire cette base POD, qui va distinguer l'approximation POD-Galerkin des autres techniques de réduction de modèles avec projection.

1.2.1 Construction d'une base-POD

Nous nous plaçons dans un cadre plus général que celui d'un écoulement fluide instationnaire. Nous considérons alors, X un espace de Hilbert et $g \in L^2(0, T; X)$ une fonction instationnaire sur un intervalle de temps $(0, T)$.

Pour simplifier l'exposé, nous nous placerons sans restriction de généralité, dans le cas où $X = L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d .

Par définition, une base POD associée à g , est une base orthonormale $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ de l'espace X , déterminée de manière à maximiser la moyenne temporelle de l'énergie cinétique contenue dans les projections de g sur le sous-espace engendré par les (Φ_n) . Le premier vecteur Φ de cette base est solution du problème :

$$\frac{\langle (g, \Phi)_X \rangle}{\|\Phi\|_X^2} = \max_{\varphi \in X^*} \frac{\langle (g, \varphi)_X \rangle}{\|\varphi\|_X^2}, \quad (1.1)$$

où $(\cdot, \cdot)_X$ désigne le produit scalaire de l'espace X et,

$\langle \cdot \rangle$ n'est autre que la moyenne temporelle sur l'intervalle $(0, T)$.

Le problème de maximisation (1.1) est équivalent à la recherche de la plus grande valeur propre du problème suivant :

$$\mathcal{R}\Phi = \mu\Phi \quad (1.2)$$

Où \mathcal{R} est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: X &\rightarrow X \\ \varphi &\mapsto \mathcal{R}\varphi = \frac{1}{T} \int_0^T (g(t), \varphi)_X g(t) dt. \end{aligned} \quad (1.3)$$

\mathcal{R} est un opérateur linéaire, compact, auto-adjoint et positif sur X . Alors grâce à la théorie spectrale [91, 33], les valeurs propres et les vecteurs propres solutions du problème (1.2) forment un ensemble dénombrable. Les valeurs propres sont positives et forment une suite décroissante tendant vers 0 et les vecteurs propres associés forment une base hilbertienne orthonormée de X .

Dans la pratique, la détermination des (Φ_n) et des (μ_n) se fait par la méthode classique des snapshots développée par Sirovich [69].

1.2.2 Précision de l'approximation POD-Galerkin

La base POD solution du problème (1.2) ou d'une manière équivalente (1.1) est optimale au sens énergétique. C'est à dire, pour toute base hilbertienne orthonormale $(\Psi_n)_{n \geq 1}$ de X , on a :

$$\|g - \Pi_N^\Phi g\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq \|g - \Pi_N^\Psi g\|_{L^2(0,T;X)}^2, \quad (1.4)$$

où Π_N^Φ et Π_N^Ψ désignent respectivement les projecteurs sur les sous-espaces de X engendrés par les deux familles orthonormales $\{\Phi_1, \dots, \Phi_N\}$ et $\{\Psi_1, \dots, \Psi_N\}$.

De plus, on peut vérifier que :

$$\frac{1}{T} \|g - \Pi_N^\Phi g\|_{L^2(0,T;X)}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu_n. \quad (1.5)$$

Dans beaucoup d'applications, les valeurs propres décroissent très rapidement vers 0. Aussi, le reste de la série donnant l'erreur de l'approximation POD grâce à (1.5) tends vers 0 pour N relativement petit. C'est ceci qui explique le succès de la POD dans de nombreuses situations.

Si u est solution d'une équation aux dérivées partielles d'évolution, on peut construire la base POD $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ associée à u . Alors, la projection de cette équation sur les N premiers vecteurs propres pour lesquels le reste de la série de l'équation (1.5) est petit devant une précision fixée, constitue le modèle réduit ROM-POD. Comme signalé plus haut, il est aussi possible d'obtenir le modèle réduit en projetant directement les équations discrétisées.

Dans cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement à la réduction de modèles pour des problèmes d'évolution dépendant d'un paramètre λ , qu'on peut écrire d'une manière formelle :

Trouver $u_\lambda(t) \in V \subset X$ (V est un espace d'Hilbert réel) telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} = A_\lambda(u_\lambda) \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

1.3 Etat de l'art sur les méthodes ROM-POD pour les problèmes d'évolution dépendant d'un paramètre

Dans le cadre général de la détermination d'un modèle réduit robuste par rapport à l'évolution paramétrique, beaucoup d'algorithmes ont été basés essentiellement sur la construction d'une base POD qui tient compte en plus, de la sensibilité de la solution par rapport à la variation du paramètre auquel on s'intéresse. Ceci permet d'élargir l'ensemble des dynamiques pour

lesquelles cette base POD pourrait être représentative. L'idée principale repose essentiellement sur la détermination, par différentes techniques, de la dérivée de l'écoulement solution par rapport au paramètre donné. Puis, les snapshots temporels associés à l'écoulement solution et à sa sensibilité paramétrique, seront utilisés une fois pour toutes, pour le calcul d'une base POD. En ce qui concerne le calcul de la dérivée d'un écoulement solution associé à un problème modèle, plusieurs techniques existent dans la littérature. Nous citons trois méthodes principales :

- La méthode des différences finies des écoulements solutions : Cette méthode consiste à déterminer la sensibilité par application de la méthode des différences finies pour calculer les solutions du problème modèle, pour deux ou plusieurs valeurs du paramètre caractéristique décrivant l'écoulement fluide [84, 82, 59]. Il est évident que cette méthode est très coûteuse en temps de calcul.
- La méthode de la variable complexe (complex variable method) : Elle consiste essentiellement à résoudre en une seule étape, un problème de différences finies qui calcule à la fois l'écoulement et sa sensibilité paramétrique pour un paramètre donné, en introduisant initialement dans le système numérique, le paramètre en tant qu'une variable de type complexe, sachant que sa partie imaginaire représente la perturbation paramétrique. Pour plus d'informations concernant cette méthode, nous pouvons citer les références suivantes [81, 17, 77].
- La méthode SEM (Sensitivity Equation Method) : Elle consiste essentiellement en la résolution numérique de l'équation résultant en dérivant celle du problème modèle du fluide, par rapport à un paramètre définissant l'écoulement fluide. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles linéaire, dont la résolution est très rapide par rapport à la résolution du problème de départ. Pour plus d'informations concernant cette méthode, nous pouvons citer les références suivantes [24, 88, 60]

A. Hay et al. ont appliqué cette dernière approche [53, 52], pour construire un modèle réduit POD robuste et efficace vis-à-vis la variation de la viscosité d'un écoulement fluide bidimensionnel autour d'un cylindre carré. Dans ce travail [53, 52], la base POD de référence est associée à des réalisations de l'écoulement fluide à nombre de Reynolds $Re = 100$, et aux réalisations de sa sensibilité au voisinage de cette valeur. Nous notons, que les auteurs ont utilisé la méthode SEM pour calculer cette sensibilité. Des tests numériques effectués pour des nombres de Reynolds variants entre les valeurs 60 et 150 pour vérifier la robustesse du modèle réduit ROM-POD obtenu par cette approche. Les auteurs se sont intéressés à la construction de modèles ROM robustes dans le cas de la variation des paramètres géométriques décrivant le domaine du fluide, pour les équations de Burgers et de Navier-Stokes bidimensionnel en écoulement incompressible [51]; Dans cet article, ils appliquent toujours la méthode SEM pour l'analyse de la sensibilité paramétrique. Les principaux résultats numériques de ce travail se résument par le fait que dans le cas du problème modèle de Burgers, le modèle réduit ROM calculé à partir de la solution elle-même et de sa sensibilité paramétrique, était robuste et pouvait prédire correctement différentes dynamiques. Par contre, les résultats numériques n'étaient pas satisfaisants

dans le cas des équations de Navier-Stokes pour un écoulement bidimensionnel et incompressible.

Des algorithmes numériques différents que ceux basés sur l'analyse et le calcul de la sensibilité paramétrique, existent aussi dans la littérature, avec des applications en mécanique des fluides et dans d'autres disciplines. Comme exemple lié à la dynamique des structures, on peut citer les algorithmes numériques d'interpolation de modèles réduits ROM [16]. Il s'agit, de l'interpolation dans l'espace tangent à la variété des matrices réduites, symétriques et définies positives, correspondant à différents ensembles des paramètres caractéristiques du problème complet. Des tests numériques ont montré que le modèle réduit obtenu, peut servir comme référence pour bien représenter des dynamiques associées à d'autres ensembles des paramètres. Cette méthode opère directement sur les modèles réduits et non pas sur les problèmes modèles initiaux de dimension très grande, d'où sa grande importance. Pour des références concernant l'interpolation dans un espace tangent à une variété, on peut citer [34, 35].

Parmi les algorithmes numériques de constructions d'une base évoluant avec des paramètres, nous citons aussi l'utilisation de l'algorithme de Greedy [93, 49]. D'une manière plus précise, étant donné une équation aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre caractéristique et une base POD calculée pour un paramètre fixe, l'algorithme itératif Greedy donnera normalement à chaque itération, les erreurs commises par approximation-POD directe de solutions correspondant à un ensemble formé par différentes valeurs du paramètre caractéristique. L'idée consiste alors à récupérer de cet ensemble de paramètres, ceux pour lesquels l'erreur est maximale. Alors, les réalisations temporelles qui ont servi initialement pour le calcul de la base POD, sont enrichies par celles correspondant aux paramètres récupérés par l'algorithme. Une nouvelle base POD est calculée cette fois à partir de la nouvelle base de données. Dans ce contexte, nous pouvons citer les travaux suivants [80, 83, 40, 71, 50, 90, 23].

1.4 Problématique de la thèse

Par rapport à tous les travaux qu'on vient de citer, dans le contexte des études numériques de la performance d'un modèle réduit POD vis-à-vis l'évolution paramétrique, nous regarderons le problème de la sensibilité d'une base POD de référence, d'un point de vue mathématique. Nous définissons le cadre formel de notre étude comme suit :

Soit V_h un sous-espace de V de dimension M . Notons $h = \frac{1}{M}$.

Considérons le problème semi-discret de dimension M , approximation du problème d'évolution (1.6).

Trouver $u_\lambda^h(t) \in V_h \subset V$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda^h}{dt} = A_\lambda(u_\lambda^h) \\ u_\lambda^h(0) = u_0^h \end{cases} \quad (1.7)$$

Pour une valeur λ_0 donnée, notons $(\mu_n^{\lambda_0})_{n=1,\dots,N}$ et $(\Phi_n^{\lambda_0})_{n=1,\dots,N}$ respectivement les N premières valeurs propres POD et leurs N vecteurs propres POD associés, qui forment les éléments propres de l'opérateur POD obtenu pour la solution $u_{\lambda_0}^h$.

Pour une valeur λ quelconque du paramètre, nous notons $\hat{u}_{\lambda,\lambda_0}$ la solution du modèle réduit obtenu par approximation Galerkin du problème (1.7) en u_λ^h , dans le sous-espace POD de dimension N associé à la base de référence Φ^{λ_0} .

La problématique principale de cette thèse, consiste à trouver sur un intervalle de temps donné $(0, T)$, une estimation du carré de la moyenne temporelle de l'erreur, entre la solution $\hat{u}_{\lambda,\lambda_0}$ du modèle ROM-POD de dimension N , et la solution u_λ^h du problème semi-discret de dimension M :

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda,\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \quad (1.8)$$

Le résultat que nous donnerons comme solution à cette problématique, est énoncé sans rigueur comme suit :

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda,\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq f_1(N) + f_2(N) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} \quad (1.9)$$

- $f_1(N) = Lf_0(N)$ où L est une constante associée à $u_{\lambda_0}^h$ et $f_0(N) = \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}$, est une suite qui décroît vers 0 très rapidement quand N augmente.
- $f_2(N)$ est une suite décroissante en fonction de N et qui tends vers 0 lorsque N devient grand.

Pratiquement, ce théorème permettra à des numériciens d'avoir un critère de dépendance de la dimension N d'un modèle ROM-POD pour un paramètre de référence, en fonction de l'écart entre λ et λ_0 , de manière à ne pas dépasser une erreur donnée. Nous donnerons une estimation de ce nombre en fonction de la précision choisie (voir chapitre 5).

Plus précisément, ce théorème sera établi pour les équations de Burgers et de Navier-Stokes sous des conditions qui seront précisées.

A la lumière de cette introduction, nous présentons dans ce qui suit, les principaux chapitres de ce manuscrit :

1.5 Organisation du manuscrit et principaux résultats

Outre cette introduction, le manuscrit contient six autres chapitres. Nous présentons leurs principales contributions.

Dans le chapitre 2, nous allons établir des résultats mathématiques sur la sensibilité des éléments propres POD, dans le cadre d'un problème d'évolution paramétrique et linéaire. Toutefois, ces résultats ne suffiront pas pour démontrer le résultat énoncé dans le théorème ci-dessus, même pour le cas simple d'un problème linéaire. Alors, pour pouvoir établir le résultat du théorème énoncé précédemment pour les deux problèmes de Burgers et Navier-Stokes 2D, nous répartirons les étapes de cette preuve tout au long des chapitres qui suivront.

Dans le chapitre 3, nous démontrerons des estimations a priori de la sensibilité des solutions exactes de l'équation de Burgers et du système de Navier-Stokes 2D, par rapport à la variation du paramètre de la viscosité cinématique. D'une manière précise, il s'agit de démontrer le caractère holdérien des deux problèmes modèles, en fonction de l'évolution paramétrique.

Le chapitre 4 sera consacré à établir, pour une viscosité fixe, une estimation de l'erreur POD-Galerkin pour les problèmes de Burgers et de Navier-Stokes.

Dans le chapitre 5, nous compléterons les éléments de la preuve de ce théorème uniquement pour l'équation de Burgers. En plus, nous déduirons à la fin de ce chapitre un résultat purement pratique pouvant servir à des numériciens pour la construction d'une région de confiance associée à une viscosité prise au départ, de sorte que la réduction de modèle ne perd pas son sens.

Dans le chapitre 6, nous démontrerons ce théorème en se basant sur les résultats des chapitres qui précèdent, en supposant de plus une hypothèse forte de régularité des solutions des équations de Navier-Stokes 2D.

Dans le chapitre 7, nous présenterons des tests numériques uniquement pour l'équation de Burgers. Nous vérifierons le résultat de ce théorème pour une solution numérique de l'équation de Burgers. Nous démontrerons d'une part la dépendance linéaire du carré de l'erreur du modèle réduit (1.8), en fonction de l'évolution du paramètre de la viscosité et en supposant un nombre de modes fixés. D'autre part, nous vérifierons numériquement l'estimation (1.9), en fonction de l'évolution du nombre de modes. Nous montrerons par différents tests, qu'une majoration (1.9) en fonction du nombre de modes, est plus fine en fonction de la régularité des solutions de l'équation de Burgers.

Chapitre 2

Un résultat de sensibilité des éléments propres de la POD pour un problème d'évolution linéaire

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une première étude portant sur la sensibilité du spectre et des espaces propres associés à la POD. Nous considérons la classe de problèmes d'évolution associés à un opérateur linéaire \mathcal{P} m -dissipatif à domaine dense de $D(\mathcal{P}) \subset X \rightarrow X$, où X est un espace d'Hilbert réel. Qui s'écrit :

Soit T un réel strictement positif, soit $f \in C([0, T]; X) \cap L^1(0, T; D(\mathcal{P}))$.

Trouver $u_\lambda \in C^1([0, T], X) \cap C([0, T], D(\mathcal{P}))$ vérifiant l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} = \lambda \mathcal{P} u_\lambda(t) + f(t) \\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(\mathcal{P}) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ est un paramètre quelconque.

Pour simplifier l'exposé, nous supposons ici que $X = L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^p , $p \in \mathbb{N}^*$.

L'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1) sont assurées par le théorème suivant [28] :

Théorème 1 *Pour toute condition initiale $u_0 \in D(\mathcal{P})$ et $f \in C([0, T]; X) \cap L^1(0, T; D(\mathcal{P}))$, il existe une unique solution $t \mapsto u_\lambda(t)$ du problème (2.1) dans $C^1([0, T], X) \cap C([0, T], D(\mathcal{P}))$.*

De plus cette solution peut s'écrire

$$u_\lambda(t, x) = \mathcal{S}_\lambda(t).u_0(x) + \int_0^t \mathcal{S}_\lambda(t-s).f(s)(x)ds$$

où $\mathcal{S}_\lambda(t) = e^{t\lambda\mathcal{P}}$, est le semi-groupe engendré par l'opérateur $\lambda\mathcal{P}$.

Grâce à ce théorème, nous pouvons définir l'opérateur \mathcal{R}_λ associé aux corrélations spatiales de la solution u_λ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda: X &\rightarrow X \\ \varphi &\mapsto \mathcal{R}_\lambda\varphi = \frac{1}{T} \int_0^T (u_\lambda(t), \varphi)_X u_\lambda(t) dt. \end{aligned}$$

On considère le problème aux valeurs propres permettant de construire la base POD :

$$\mathcal{R}_\lambda\Phi^\lambda = \mu^\lambda\Phi^\lambda \tag{2.2}$$

On sait classiquement que l'opérateur \mathcal{R}_λ est auto-adjoint et compact dans X , et s'en suit qu'il existe une famille dénombrable décroissante de valeurs propres positives $(\mu_n^\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ et une famille dénombrable de vecteurs propres associés $(\Phi_n^\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ formant une base hilbertienne ortho-normée de X .

Nous allons établir que l'opérateur \mathcal{R}_λ associé aux corrélations spatiales de la solution du problème (2.1) est lipschitzien par rapport à λ . Nous en déduisons que les valeurs propres de \mathcal{R}_λ ont aussi une dépendance lipschitzienne par rapport à λ . Par contre, on obtient seulement un résultat de continuité des sous-espaces propres associés au problème POD.

2.1 Evolution de \mathcal{R}_λ en fonction de λ

La dépendance de \mathcal{R}_λ en fonction du paramètre λ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2 *L'application,*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ \lambda &\mapsto \mathcal{R}_\lambda \end{aligned}$$

est localement lipschitzienne.

Preuve :

$$\forall \varphi \in X, \text{ et } \forall x \in \Omega,$$

$$\begin{aligned}
[(\mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_{\lambda_0}) \varphi](x) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_\Omega u_\lambda(t, y) \varphi(y) dy \right] u_\lambda(t, x) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_\Omega u_{\lambda_0}(t, y) \varphi(y) dy \right] u_{\lambda_0}(t, x) dt \\
&= \int_\Omega [C_\lambda(x, y) - C_{\lambda_0}(x, y)] \varphi(y) dy,
\end{aligned}$$

$$\text{où, } C_\lambda(x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T u_\lambda(t, x) u_\lambda(t, y) dt,$$

$$\text{et } C_{\lambda_0}(x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T u_{\lambda_0}(t, x) u_{\lambda_0}(t, y) dt.$$

Alors, $\forall \varphi \in X$,

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_{\lambda_0}) \varphi\|_X^2 &= \int_\Omega \left| \int_\Omega (C_\lambda - C_{\lambda_0})(x, y) \varphi(y) dy \right|^2 dx \\
&\leq \|C_\lambda - C_{\lambda_0}\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}^2 \|\varphi\|_X^2.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\|\mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_{\lambda_0}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|C_\lambda - C_{\lambda_0}\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}.$$

Nous sommes ramenés alors, à l'étude du terme $\|C_\lambda - C_{\lambda_0}\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\|C_\lambda - C_{\lambda_0}\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}^2 &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \|u_\lambda(t) \otimes u_\lambda(t) - u_{\lambda_0}(t) \otimes u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}^2 dt \\
&\leq \frac{2}{T} \left(\|u_\lambda\|_{L^\infty(0, T; X)}^2 + \|u_{\lambda_0}\|_{L^\infty(0, T; X)}^2 \right) \int_0^T \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_X^2 dt.
\end{aligned}$$

Or,

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(0, T; X)} \leq \sup_{\tau \in [0, T(\lambda_0 + r)]} \|e^{\tau \mathcal{P}}\|_{\mathcal{L}(X)} \left(\|u_0\|_X + \|f\|_{L^1(0, T; X)} \right).$$

D'autre part,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} u_\lambda(t) = t e^{t \lambda \mathcal{P}} \cdot (\mathcal{P} u_0) + \int_0^t (t-s) e^{(t-s) \lambda \mathcal{P}} \cdot (\mathcal{P} f(s)) ds.$$

Alors,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} u_\lambda(t) \right\|_{L^\infty(\mathcal{B}(\lambda_0, r), X)} \leq T \|\mathcal{P}\|_{\mathcal{L}(D(\mathcal{P}))} \sup_{\tau \in [0, T(\lambda_0 + r)]} \|e^{\tau \mathcal{P}}\|_{\mathcal{L}(X)} \left(\|u_0\|_{D(\mathcal{P})} + \|f\|_{L^1(0, T; D(\mathcal{P}))} \right).$$

Ce qui termine la preuve du théorème.

2.2 Etude paramétrique de la sensibilité des valeurs propres POD

Etant donné que l'application $\lambda \mapsto \mathcal{R}_\lambda$ définie sur $\mathcal{B}(\lambda_0, r)$ est lipschitzienne, alors en se basant sur les résultats de l'article [92], concernant la continuité et la différentiabilité des éléments propres associés à un opérateur paramétrique, compact et autoadjoint, nous pouvons déduire les deux résultats suivants :

Théorème 3 *Soit $\mu_n^{\lambda_0}$ une valeur propre de \mathcal{R}_{λ_0} de multiplicité géométrique k , alors $\forall j = 0, \dots, k-1$,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \mu_{n+j}^\lambda = \mu_n^{\lambda_0}$$

La preuve de ce théorème se trouve dans [92].

Ce théorème nous procure un résultat de continuité des valeurs propres POD en fonction du paramètre λ .

Comme \mathcal{R}_λ est lipschitzien, nous pouvons obtenir un résultat plus précis sur la dépendance des valeurs propres μ_n^λ en fonction de λ . Ce qui peut être résumé dans le théorème suivant :

Théorème 4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \mu_n^\lambda \end{array}$$

est lipschitzienne, avec la même constante que celle de l'application $\lambda \mapsto \mathcal{R}_\lambda$ définie sur le voisinage $\mathcal{B}(\lambda_0, r)$ de λ_0 .

On trouve la démonstration de ce théorème dans [92].

2.3 Continuité des espaces propres POD en fonction du paramètre

Contrairement aux résultats obtenus pour \mathcal{R}_λ et pour les valeurs propres $(\mu_n^\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$, il est difficile d'obtenir un résultat semblable pour les vecteurs propres. Nous pouvons établir un résultat

de continuité des espaces propres en fonction du paramètre, et dans le cas particulier où les valeurs propres sont simples, on peut en déduire un résultat semblable pour chaque vecteur propre.

Nous précisons d'abord quelques notations, ainsi que des définitions générales et conventionnelles :

- $E(\mu_n)$, est le sous-espace propre associé à la valeur propre μ_n .
- $E(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ est la somme directe des sous-espaces propres associés à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.
- $E_{nor}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \{v \in E(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n); \|v\| = 1\}$.
- $E_{nor}(\mu_n, \varepsilon) = \{v \in X; \|v\| = 1; d(v, E_{nor}(\mu_n)) < \varepsilon\}$.

Nous rappelons une définition assez classique de la continuité des sous-espaces propres POD, en fonction de l'évolution paramétrique.

Définition 1 Soit $\mu_n^{\lambda_0}$ une valeur propre POD de l'opérateur \mathcal{R}_{λ_0} , de multiplicité géométrique égale à k . Alors, on dit que $E(\mu_n^\lambda, \dots, \mu_{n+k-1}^\lambda) \rightarrow E(\mu_n^{\lambda_0})$ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, |\lambda - \lambda_0| \leq \delta(\varepsilon) \implies E_{nor}(\mu_n^\lambda, \dots, \mu_{n+k-1}^\lambda) \subset E_{nor}(\mu_n^{\lambda_0}, \varepsilon).$$

Etant donné que l'application $\lambda \mapsto \mathcal{R}_\lambda$ définie sur $\mathcal{B}(\lambda_0, r)$ est lipschitzienne, alors en se basant toujours sur les résultats de l'article [92], nous pouvons déduire le résultat suivant :

Théorème 5 Soit $\mu_n^{\lambda_0}$ une valeur propre POD de l'opérateur \mathcal{R}_{λ_0} , de multiplicité géométrique égale à k . Alors, lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$, $E(\mu_n^\lambda, \dots, \mu_{n+k-1}^\lambda) \rightarrow E(\mu_n^{\lambda_0})$, au sens de la définition 1.

Pour la preuve de ce théorème, nous référons à [92].

Dans le cas où les valeurs propres sont simples, nous déduisons un corollaire concernant la continuité des vecteurs propres POD :

Corollaire 1 Soit μ^{λ_0} une valeur propre de \mathcal{R}_{λ_0} de multiplicité égale à 1. Soit Φ^{λ_0} un vecteur propre POD normalisé, associé à μ^{λ_0} . Alors, $\Phi^{\lambda_0+\varepsilon} \rightarrow \Phi^{\lambda_0}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve :

La preuve de ce corollaire est simplement basée sur le fait qu'il existe une valeur propre simple POD $\mu^{\lambda_0+\varepsilon}$ associée à l'opérateur $\mathcal{R}_{\lambda_0+\varepsilon}$, qui converge vers μ^{λ_0} lorsque ε converge vers 0. Par continuité des sous-espaces propres, on peut choisir un vecteur propre POD normalisé $\Phi^{\lambda_0+\varepsilon}$ associé à $\mu^{\lambda_0+\varepsilon}$ variant de façon continue en fonction de l'évolution paramétrique. Alors dans ce cas particulier, on dit que les vecteurs propres varient d'une manière continue en fonction de l'évolution paramétrique.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi des résultats de sensibilité des éléments propres POD, par rapport à l'évolution paramétrique, dans le cadre d'un problème paramétrique et linéaire. A partir des propriétés du semi-groupe $(\mathcal{S}_\lambda(t))_t$ engendré par l'opérateur linéaire $\lambda\mathcal{P}$, nous avons démontré le caractère lipschitzien de \mathcal{R}_λ par rapport à λ . On en a déduit la dépendance lipschitzienne des valeurs propres en fonction du paramètre λ et de la continuité des espaces propres (au sens de la définition 1). Ces résultats peuvent s'étendre à des classes d'équations non-linéaires sous des hypothèses restrictives. Les résultats obtenus ici ne sont pas suffisants pour obtenir une estimation de l'erreur du modèle réduit en fonction du nombre de modes et de l'éloignement au paramètre de référence, telle qu'elle a été formulée dans l'introduction.

Dans les chapitres suivants, nous allons obtenir des estimations plus précises sur cette erreur.

Chapitre 3

Résultats préliminaires

Dans une première étape, nous rappelons quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions globales pour l'équation de Burgers mono-dimensionnelle et les équations de Navier-Stokes bi-dimensionnelles pour des écoulements incompressibles.

Ensuite, dans une deuxième étape, nous donnerons des résultats de sensibilité des solutions en fonction du paramètre, qui est ici le nombre de Reynolds. La variation de ce paramètre est complètement décrite par la variation de la viscosité quand on fixe la vitesse et la longueur de référence. Ce qui sera le cas dans notre étude.

3.1 Préliminaires

Dans cette section, nous nous contentons tout simplement de rappeler quelques injections de Sobolev, dont nous aurons besoin pour la suite :

Injection continue et inégalité d'interpolation

Nous considérons \mathcal{O}_d un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^d , $d \leq 3$.

Alors, nous rappelons les injections de Sobolev suivantes :

Lemme 1 – Pour $d = 1$, $H^1(\mathcal{O}_d) \subset L^\infty(\mathcal{O}_d)$, et $\exists C_\infty^1 \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\forall v \in H^1(\mathcal{O}_d)$,
 $\|v\|_{L^\infty(\mathcal{O}_d)} \leq C_\infty^1 \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{O}_d)}$.
– Pour $d = 2$ et $d = 3$, $H^1(\mathcal{O}_d) \subset L^4(\mathcal{O}_d)$, et $\exists C_4^1 \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\forall v \in H^1(\mathcal{O}_d)$, $\|v\|_{L^4(\mathcal{O}_d)} \leq C_4^1 \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{O}_d)}$.

De plus, nous rappelons l'inégalité d'interpolation suivante, valable seulement pour $d = 2$. Il existe une constante réelle strictement positive C_i telle que :

$$\|v\|_{L^4(\mathcal{O}_2)} \leq C_i \|v\|_{L^2(\mathcal{O}_2)}^{1/2} \|\nabla v\|_{[L^2(\mathcal{O}_2)]^2}^{1/2}, \forall v \in H^1(\mathcal{O}_2) \quad (3.1)$$

3.2 Existence et unicité de solutions globales

3.2.1 Existence et unicité de solutions globales pour l'équation de Burgers

Nous considérons l'équation de Burgers avec un terme source f :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + u_\lambda(t) \nabla u_\lambda(t) = \lambda \Delta u_\lambda(t) + f(t) \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, désigne le paramètre de la viscosité associé à la solution u_λ .

Soit Ω un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $X = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$.

Alors, nous rappelons le théorème suivant d'existence et d'unicité d'une solution globale pour l'équation (3.2) (voir [67]).

Théorème 6 *Soit u_0 dans V et $f \in L^2((0, T); X)$. Alors, il existe une unique solution u_λ du problème (3.2), définie sur \mathbb{R}^+ , et telle que pour tout $T > 0$, $u_\lambda \in C([0, T]; X) \cap L^2([0, T]; V)$.*

3.2.2 Existence et unicité de solutions globales pour les équations de Navier-Stokes 2D

Nous considérons le système de Navier-Stokes bidimensionnel avec un terme source f :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + \operatorname{div}(u_\lambda(t) \otimes u_\lambda(t)) = -\nabla p_\lambda(t) + \lambda \Delta u_\lambda(t) + f(t) \\ \operatorname{div} u_\lambda(t) = 0, \forall t > 0. \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

$p_\lambda(t)$, désigne la pression du fluide à un instant quelconque.

$\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, désigne la viscosité de l'écoulement fluide u_λ .

Soit Ω un ouvert borné, connexe et lipschitzien de \mathbb{R}^2 , $X = [L^2(\Omega)]^2 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $V = [H_0^1(\Omega)]^2$ et $H^0 = \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_\Omega q dx = 0 \right\}$.

Alors, nous rappelons le théorème suivant d'existence et d'unicité de solutions globales pour le système (3.3) (voir [26]).

Théorème 7 *Soit u_0 dans V et $f \in L^2_{loc}([0, +\infty[, [H^{-1}(\Omega)]^2)$. Alors, il existe une unique solution (u_λ, p_λ) du système (3.3), définie sur \mathbb{R}^+ , et telle que pour tout $T > 0$, $(u_\lambda, p_\lambda) \in C([0, T]; X) \cap L^2([0, T]; V) \times L^2([0, T]; H^0)$.*

3.3 Sensibilité paramétrique des solutions de l'équation de Burgers

Nous démontrons brièvement quelques estimations a priori relatives aux solutions de l'équation de Burgers (3.2) :

Lemme 2 *Pour tout $T > 0$, la famille $(u_\lambda)_\lambda$ est bornée dans l'espace $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.*

Preuve :

En multipliant l'équation de Burgers par $u_\lambda(t)$, et en intégrant sur Ω , nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_\lambda^2(t, x) dx = -\lambda \int_{\Omega} (\nabla u_\lambda)^2(t, x) dx + \int_{\Omega} f(x, t) u_\lambda(x, t) dx. \quad (3.4)$$

Alors,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_\lambda^2(t, x) dx \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_\lambda(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_\lambda^2(t, x) dx \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_\lambda(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Si nous intégrons sur l'intervalle $(0, t)$, alors nous obtenons :

$$\|u_\lambda(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t \|u_\lambda(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\|u_\lambda(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right) \exp(T).$$

Donc, $u_\lambda \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $\|u_\lambda\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right) \exp(T)$.

En particulier, comme $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega))$, alors $u_\lambda \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et,

$$\|u_\lambda\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right) T \exp(T).$$

Ce qui termine la preuve du lemme.

Lemme 3 Pour tout $T > 0$ et tout $\lambda > 0$ on a :

$$2\lambda \|\nabla u_\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) (1 + T \exp(T)).$$

Preuve :

D'après (3.4), nous avons l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_\lambda^2(t, x) dx + \lambda \int_{\Omega} (\nabla u_\lambda)^2(t, x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) u_\lambda(x, t) dx.$$

Alors,

$$\int_{\Omega} u_\lambda^2(T, x) dx - \int_{\Omega} u_0^2(x) dx + 2\lambda \int_0^T \left(\int_{\Omega} (\nabla u_\lambda)^2(t, x) dx \right) dt = 2 \int_0^T \left(\int_{\Omega} f(x, t) u_\lambda(x, t) dx \right) dt.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_0^T \|\nabla u_\lambda(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|u_\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u_\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) (1 + T \exp(T)). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du lemme.

Dans ce qui suit, nous discuterons l'évolution paramétrique des solutions de l'équation (3.2). Nous établirons une estimation de la différence entre deux solutions correspondantes à deux viscosités distinctes λ et λ_0 . Nous distinguerons les deux cas suivants : $\lambda < \lambda_0$ et $\lambda > \lambda_0$.

Proposition 1 *L'application*

$$\begin{array}{ccc} (0, +\infty) & \longrightarrow & L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ \lambda & \mapsto & u_\lambda \end{array}$$

est $\frac{1}{2}$ -holdérienne.

La preuve de cette proposition, est un résultat direct des deux lemmes intermédiaires suivants.

Lemme 4 Pour tout $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$, nous avons :

$$\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \mathcal{B} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0},$$

$$\text{où } \mathcal{B} := \frac{T\lambda_0^2}{(C_\infty^1)^2} \left[\exp \left(\frac{(C_\infty^1)^2}{2\lambda_0} \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) - 1 \right].$$

Preuve : $(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + (u_\lambda(t)\nabla u_\lambda(t) - u_{\lambda_0}(t)\nabla u_{\lambda_0}(t)) &= \lambda\Delta u_\lambda(t) - \lambda_0\Delta u_{\lambda_0}(t) \\ &= \lambda\Delta(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + (\lambda - \lambda_0)\Delta u_{\lambda_0}(t). \end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + \frac{1}{2}\nabla u_\lambda^2(t) - \frac{1}{2}\nabla u_{\lambda_0}^2(t) = \lambda\Delta(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + (\lambda - \lambda_0)\Delta u_{\lambda_0}(t).$$

Par suite,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + \frac{1}{2}\nabla (u_\lambda^2(t) - u_{\lambda_0}^2(t)) = \lambda\Delta(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + (\lambda - \lambda_0)\Delta u_{\lambda_0}(t).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + \frac{1}{2}\nabla [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)(u_\lambda + u_{\lambda_0})(t)] &= \lambda\Delta(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \\ &\quad + (\lambda - \lambda_0)\Delta u_{\lambda_0}(t). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + \frac{1}{2}\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})^2(t) + \nabla [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)u_{\lambda_0}(t)] &= \lambda\Delta(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \\ &\quad + (\lambda - \lambda_0)\Delta u_{\lambda_0}(t). \end{aligned}$$

Nous multiplions cette équation par $(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)$, et nous intégrons sur Ω , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t, x) \nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})^2(t, x) dx &= \\ -\lambda \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t, x)u_{\lambda_0}(t, x)] \nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t, x) dx & \\ -(\lambda - \lambda_0) \int_{\Omega} \nabla u_\lambda(t, x) \nabla u_{\lambda_0}(t, x) dx + (\lambda - \lambda_0) \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. & \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{6} \int_{\Omega} \nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})^3(t, x) dx &= \\ -\lambda \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t, x)u_{\lambda_0}(t, x)] \nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t, x) dx & \\ -(\lambda - \lambda_0) \int_{\Omega} \nabla u_\lambda(t, x) \nabla u_{\lambda_0}(t, x) dx + (\lambda - \lambda_0) \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. & \end{aligned}$$

Grâce aux conditions de Dirichlet nulles au bord pour $(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)$, nous déduisons que :

$$\int_{\Omega} \nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})^3(t, x) dx = 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\lambda \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \int_{\Omega} [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t, x) u_{\lambda_0}(t, x)] \nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t, x) dx \\ &- (\lambda - \lambda_0) \int_{\Omega} \nabla u_\lambda(t, x) \nabla u_{\lambda_0}(t, x) dx + (\lambda - \lambda_0) \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, nous déduisons que $\forall \alpha > 0$ et $\forall \gamma > 0$,

$$\begin{aligned} [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t, x) u_{\lambda_0}(t, x)] \nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t, x) &\leq \frac{\alpha}{2} (u_\lambda - u_{\lambda_0})^2(t, x) u_{\lambda_0}^2(t, x) \\ &+ \frac{1}{2\alpha} [\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})]^2(t, x). \end{aligned}$$

Et,

$$\|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{2} \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left(-\lambda + \frac{1}{2\alpha} + \frac{\gamma |\lambda - \lambda_0|}{2} \right) \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (u_\lambda - u_{\lambda_0})^2(t, x) u_{\lambda_0}^2(t, x) dx \\ &+ \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Nous choisissons $\alpha > 0$, de sorte que $\frac{1}{\alpha} = 2\lambda - \gamma |\lambda - \lambda_0|$.

Une condition nécessaire, est de supposer que : $2\lambda - \gamma |\lambda - \lambda_0| > 0$.

Comme $\lambda > \lambda_0$, alors $2\lambda - \gamma \lambda + \gamma \lambda_0 > 0$.

Alors, $\gamma < \frac{2\lambda}{\lambda - \lambda_0}$. Nous choisissons, $\gamma = 2$.

Dans ce cas, $\frac{1}{\alpha} = 2\lambda - \gamma\lambda + \gamma\lambda_0 = 2\lambda_0$.

Alors, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (u_\lambda - u_{\lambda_0})^2(t, x) u_{\lambda_0}^2(t, x) dx \\ &+ \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \alpha \|u_{\lambda_0}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.5)$$

Nous notons,

$$v(t) = \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{L^2(\Omega)}^2;$$

Alors (3.5) et lemme 1 donnent :

$$\frac{d}{dt} v(t) \leq \alpha (C_\infty^1)^2 \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 v(t) + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Nous notons,

$$w(t) = v(t) \exp\left(-\alpha (C_\infty^1)^2 \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right).$$

Alors,

$$\frac{d}{dt} w(t) = \left(\frac{d}{dt} v(t) - \alpha (C_\infty^1)^2 \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 v(t) \right) \exp\left(-\alpha C \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right).$$

Donc,

$$\frac{d}{dt} w(t) \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \exp\left(-\alpha (C_\infty^1)^2 \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right).$$

Etant donné que $u_\lambda(0) = u_{\lambda_0}(0) = u_0$, alors $w(0) = 0$. Par suite, en intégrant sur l'intervalle $(0, t)$, nous obtenons :

$$w(t) \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma \alpha (C_\infty^1)^2} \left[1 - \exp\left(-\alpha (C_\infty^1)^2 \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right) \right].$$

Parsuite,

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma \alpha (C_\infty^1)^2} \left[\exp \left(\alpha (C_\infty^1)^2 \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) - 1 \right] \\ &\leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma \alpha (C_\infty^1)^2} \left[\exp \left(\alpha (C_\infty^1)^2 \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma \alpha (C_\infty^1)^2} \left[\exp \left(\alpha (C_\infty^1)^2 \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) - 1 \right].$$

Finalement, nous déduisons que :

$$\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{T|\lambda - \lambda_0|}{\gamma \alpha (C_\infty^1)^2} \left[\exp \left(\alpha (C_\infty^1)^2 \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) - 1 \right].$$

Ce qui termine la preuve du lemme pour $\lambda > \lambda_0$.

Lemme 5 Soit $\beta > 0$. Pour tout $\lambda \in \left(\frac{\beta \lambda_0}{2 + \beta}, \lambda_0 \right)$, nous avons :

$$\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \mathcal{B} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0},$$

$$\text{où } \mathcal{B} := \frac{2T\lambda_0^2}{\beta(C_\infty^1)^2} \left[\exp \left(\frac{(C_\infty^1)^2}{2\lambda - \beta(\lambda_0 - \lambda)} \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) - 1 \right].$$

Preuve :

La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme précédent 4. La seule différence, est au niveau de la discussion sur les constants α et γ introduites à cause de l'inégalité de Young :

Nous choisissons $\alpha > 0$, de sorte que $\frac{1}{\alpha} = 2\lambda - \gamma|\lambda - \lambda_0|$.

Une condition nécessaire, est de supposer que : $2\lambda - \gamma|\lambda - \lambda_0| > 0$.

Comme $\lambda < \lambda_0$, alors $2\lambda - \gamma\lambda_0 + \gamma\lambda > 0$.

Parsuite, $\lambda > \frac{\gamma\lambda_0}{2 + \gamma}$. Nous choisissons, $\gamma = \beta$.

Dans ce cas, $\frac{1}{\alpha} = 2\lambda - \beta\lambda_0 + \beta\lambda$.

3.4 Sensibilité paramétrique des solutions des équations de Navier-Stokes 2D

Nous démontrons brièvement quelques estimations a priori relatives aux solutions des équations (3.3) :

Lemme 6 *Pour tout $T > 0$, la famille $(u_\lambda)_\lambda$ est bornée dans l'espace $L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)$.*

Preuve Nous considérons, pour chacun des deux membres de l'équation de Navier-Stokes, le produit scalaire (de l'espace $[L^2(\Omega)]^2$) avec $u_\lambda(t)$. Nous obtenons alors :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq \|f(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|u_\lambda(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} - \lambda \|\nabla u_\lambda(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2. \quad (3.6)$$

En appliquant l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \|u_\lambda(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq \|f(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|u_\lambda(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2.$$

Si nous intégrons sur l'intervalle $(0, t)$, alors nous obtenons :

$$\|u_\lambda(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq \int_0^t \|u_\lambda(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds + \|u_0\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\|u_\lambda(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq \left(\|u_0\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 \right) \exp(T).$$

De plus, $u_\lambda \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^2)$ et $\|u_\lambda\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 \leq \left(\|u_0\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 \right) \exp(T)$.

En particulier, comme $L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^2) \subset L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)$, alors $u_\lambda \in L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)$ et,

$$\|u_\lambda\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 \leq \left(\|u_0\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 \right) T \exp(T).$$

Ce qui termine la preuve du lemme.

Lemme 7 *Pour tout $T > 0$, et tout $\lambda > 0$ on a*

$$\sqrt{2\lambda} \|\nabla u_\lambda\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^4)} \leq \|u_0\|_{[L^2(\Omega)]^2}. \quad (3.7)$$

Preuve :

D'après (3.6), nous avons :

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_0^T \|\nabla u_\lambda(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt &\leq \|u_0\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + 2 \|f\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)} \|u_\lambda\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)} \\ &\leq \|u_0\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 + \|u_\lambda\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 \\ &\leq \left(\|u_0\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 \right) (1 + T \exp(T)). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du lemme.

Dans ce qui suit, nous étudierons la sensibilité paramétrique des solutions de l'équation (3.3), selon le même procédé que pour l'équation de Burgers.

Proposition 2 *L'application*

$$\begin{array}{ccc} (0, +\infty) & \longrightarrow & L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2) \\ \lambda & \mapsto & u_\lambda \end{array}$$

est $\frac{1}{2}$ -holdérienne.

La preuve de cette proposition est un résultat direct des deux lemmes intermédiaires suivants :

Lemme 8 *Pour tout $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$, nous avons :*

$$\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 \leq \mathcal{B} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0},$$

$$\text{où } \mathcal{B} := \frac{T\lambda_0^2}{(C_i)^4} \left[\exp \left(\frac{(C_i)^4}{2\lambda_0} \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt \right) - 1 \right].$$

Preuve :

$(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + \operatorname{div}(u_\lambda(t) \otimes u_\lambda(t) - u_{\lambda_0}(t) \otimes u_{\lambda_0}(t)) &= -\nabla(P_\lambda - P_{\lambda_0})(t) \\ &+ (\lambda - \lambda_0) \Delta u_{\lambda_0}(t) + \lambda \Delta (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} u_\lambda(t) \otimes u_\lambda(t) - u_{\lambda_0}(t) \otimes u_{\lambda_0}(t) &= (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes (u_\lambda + u_{\lambda_0})(t) \\ &\quad - (u_\lambda(t) \otimes u_{\lambda_0}(t) - u_{\lambda_0}(t) \otimes u_\lambda(t)) \\ &= (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes (u_\lambda + u_{\lambda_0})(t) \\ &\quad - (u_\lambda(t) \otimes u_{\lambda_0}(t) - u_{\lambda_0}(t) \otimes u_{\lambda_0}(t) + u_{\lambda_0}(t) \otimes u_{\lambda_0}(t) - u_{\lambda_0}(t) \otimes u_\lambda(t)) \\ &= (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0} + 2u_{\lambda_0})(t) \\ &\quad - ((u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes u_{\lambda_0}(t) - u_{\lambda_0}(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)) \\ &= (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \\ &\quad + (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes u_{\lambda_0}(t) + u_{\lambda_0}(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + \operatorname{div} [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) + (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes u_{\lambda_0}(t) \\ + u_{\lambda_0}(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)] = \\ -\nabla(P_\lambda - P_{\lambda_0})(t) + (\lambda - \lambda_0) \Delta u_{\lambda_0}(t) + \lambda \Delta (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t). \end{aligned}$$

En considérant, pour chacun des deux membres de cette équation, le produit scalaire (de l'espace $[L^2(\Omega)]^2$) avec $(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &= -(\operatorname{div} [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)], (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t))_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad -(\operatorname{div} [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes u_{\lambda_0}(t)], (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t))_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad -(\operatorname{div} [u_{\lambda_0}(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)], (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t))_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad -\lambda \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\ &\quad -(\lambda - \lambda_0) (\nabla u_{\lambda_0}(t), \nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t))_{[L^2(\Omega)]^4}. \end{aligned}$$

Or,

$$(\operatorname{div} [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)], (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t))_{[L^2(\Omega)]^2} = 0,$$

et

$$(\operatorname{div} [u_{\lambda_0}(t) \otimes (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)], (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t))_{[L^2(\Omega)]^2} = 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &= -(\operatorname{div} [(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t) \otimes u_{\lambda_0}(t)], (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t))_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad -\lambda \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\ &\quad -(\lambda - \lambda_0) (\nabla u_{\lambda_0}(t), \nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t))_{[L^2(\Omega)]^4} \\ &\leq \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^4(\Omega)]^2}^2 \\ &\quad -\lambda \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\ &\quad + |\lambda - \lambda_0| \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} \\ &\leq \\ &\quad (C_i)^2 \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} \\ &\quad -\lambda \|\nabla (u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\ &\quad + |\lambda - \lambda_0| \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} \|D(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, nous déduisons que $\forall \alpha > 0$ et $\forall \gamma > 0$,

$$\begin{aligned}
(C_i)^2 \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\nabla(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} &\leq \\
\frac{(C_i)^4 \alpha}{2} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 & \\
+ \frac{1}{2\alpha} \|\nabla(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 & .
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} \|\nabla(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4} &\leq \\
\frac{\gamma}{2} \|\nabla(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 & .
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\leq \frac{(C_i)^4 \alpha}{2} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\
+ (-\lambda + \frac{1}{2\alpha} + \frac{\gamma|\lambda - \lambda_0|}{2}) \|\nabla(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 & \\
+ \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 & .
\end{aligned}$$

Nous choisissons $\alpha > 0$, de sorte que $\frac{1}{\alpha} = 2\lambda - \gamma|\lambda - \lambda_0|$.

Une condition nécessaire, est de supposer que : $2\lambda - \gamma|\lambda - \lambda_0| > 0$.

Comme $\lambda > \lambda_0$, alors $2\lambda - \gamma\lambda + \gamma\lambda_0 > 0$.

Alors, $\gamma < \frac{2\lambda}{\lambda - \lambda_0}$. Nous choisissons, $\gamma = 2$.

Dans ce cas, $\frac{1}{\alpha} = 2\lambda - \gamma\lambda + \gamma\lambda_0 = 2\lambda_0$.

Alors, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\leq \frac{(C_i)^4 \alpha}{2} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\
+ \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 & .
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\leq (C_i)^4 \alpha \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\ &\quad + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2. \end{aligned}$$

Nous notons,

$$v(t) = \|(u_\lambda - u_{\lambda_0})(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2;$$

Et,

$$w(t) = v(t) \exp\left(-\alpha(C_i)^4 \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 ds\right).$$

Alors,

$$\frac{d}{dt} w(t) = \left(\frac{d}{dt} v(t) - \alpha(C_i)^4 \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 v(t)\right) \exp\left(-\alpha(C_i)^4 \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 ds\right)$$

Donc,

$$\frac{d}{dt} w(t) \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma} \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \exp\left(-\alpha(C_i)^4 \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 ds\right)$$

Comme $w(0) = 0$, alors en intégrant sur l'intervalle $(0, t)$ nous obtenons :

$$w(t) \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma \alpha (C_i)^4} \left[1 - \exp\left(-\alpha(C_i)^4 \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 ds\right)\right]$$

Par suite,

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma \alpha (C_i)^4} \left[\exp\left(\alpha(C_i)^4 \int_0^t \|\nabla u_{\lambda_0}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 ds\right) - 1\right] \\ &\leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma \alpha (C_i)^4} \left[\exp\left(\alpha(C_i)^4 \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt\right) - 1\right] \end{aligned}$$

Alors,

$$\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^2)}^2 \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma \alpha (C_i)^4} \left[\exp\left(\alpha(C_i)^4 \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt\right) - 1\right]$$

Finalement, nous déduisons que :

$$\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^2)}^2 \leq \frac{T|\lambda - \lambda_0|}{\gamma\alpha(C_i)^4} \left[\exp\left(\alpha(C_i)^4 \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt\right) - 1 \right].$$

Ce qui termine la preuve du lemme.

Lemme 9 Soit $\beta > 0$. Pour tout $\lambda \in \left(\frac{\beta\lambda_0}{2+\beta}, \lambda_0\right)$, nous avons :

$$\|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^2)}^2 \leq \mathcal{B} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0},$$

$$\text{où } \mathcal{B} := \frac{2T\lambda_0^2}{\beta(C_i)^4} \left[\exp\left(\frac{(C_i)^4}{2\lambda - \beta(\lambda_0 - \lambda)} \int_0^T \|\nabla u_{\lambda_0}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 dt\right) - 1 \right].$$

Preuve :

La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme précédent 4. La seule différence, est au niveau de la discussion sur les constants α et γ introduites à cause de l'inégalité de Young :

Nous choisissons $\alpha > 0$, de sorte que $\frac{1}{\alpha} = 2\lambda - \gamma|\lambda - \lambda_0|$.

Une condition nécessaire, est de supposer que : $2\lambda - \gamma|\lambda - \lambda_0| > 0$.

Comme $\lambda < \lambda_0$, alors $2\lambda - \gamma\lambda_0 + \gamma\lambda > 0$.

Parsuite, $\lambda > \frac{\gamma\lambda_0}{2+\gamma}$. Nous choisissons, $\gamma = \beta$.

Dans ce cas, $\frac{1}{\alpha} = 2\lambda - \beta\lambda_0 + \beta\lambda$.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi deux résultats de sensibilité paramétrique pour les solutions des équations de Burgers (3.2) et Navier-Stokes 2D (3.3). Ces résultats ont été établis sous des conditions assurant existence et unicité globales pour des valeurs des paramètres fixées. Ces résultats assurent un comportement holdérien des solutions en fonction des paramètres. Ces estimations serviront de base pour obtenir des résultats de sensibilités pour les modèles réduits.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à la convergence des modèles réduits obtenus par approche POD-Galerkin pour des valeurs de paramètres fixées.

Chapitre 4

Estimation de l'erreur de la méthode POD-Galerkin pour un paramètre fixé

Nous commençons par citer quelques références bibliographiques antérieures concernant l'estimation des erreurs de type POD-Galerkin.

Dans [54], les auteurs ont établis pour un problème modèle continu, parabolique et linéaire, une estimation a priori de l'erreur commise en résolvant le modèle ROM-POD. Or, cette estimation présente deux exigences principales : La convergence est assurée en supposant que la base POD soit d'une part, hilbertienne et orthonormale au sens du produit scalaire de l'espace H^1 et d'une autre part, construite à partir des snapshots de la solution elle-même et des dérivées par rapport au temps.

Dans le cadre plus général de problèmes paraboliques, linéaires et non-linéaires, Kunisch et Volkwein dans leurs articles [67, 68], obtiennent des estimations a priori des erreurs POD-Galerkin, qui exigent seulement une construction de la POD à partir de snapshots de la solution elle-même et des termes de la dérivée temporelle. Plus précisément, ces erreurs sont obtenues par rapport à un problème initial discrétisé en temps, tout en supposant que la base POD est orthonormale au sens du produit scalaire de l'espace X .

Or la construction d'une POD à partir des snapshots de la dérivée temporelle n'apporte pas de minimisation de l'erreur commise par résolution du modèle ROM-POD. Les discrétisations temporelles peuvent être toujours vues comme des combinaisons linéaires des snapshots de la solution considérée.

Par rapport à ces travaux, nous établissons dans ce chapitre des estimations a priori de l'er-

reur obtenue par approximation POD-Galerkin des problèmes semi-discrets (continus en temps) associés à l'équation de Burgers et aux équations de Navier-Stokes 2D. Plus précisément, notre base POD est orthonormale au sens du produit scalaire de X et n'est pas construite à partir des snapshots des dérivées temporelles de la solution mais uniquement de la solution. Par ailleurs, en ce qui concerne l'estimation de l'erreur qui est due à la discrétisation spatiale de chacun de ces deux derniers problèmes, on peut se référer à l'étude de la convergence d'une méthode Galerkin non linéaire dans le cadre de l'équation de Burgers [63]. Alors que dans le cas des équations de Navier-Stokes 2D, la convergence de la méthode Galerkin a fait l'objet de nombreux travaux [31, 98, 55, 56, 57, 58]. Et, on peut démontrer la convergence de cette méthode sous des conditions restrictives sur la donnée initiale u_0 . Par exemple, dans les travaux de Heywood et Rannacher on suppose que $u_0 \in [H_0^2(\Omega)]^2$.

4.1 Estimation de l'erreur POD-Galerkin pour l'équation de Burgers

Formulation du problème

Considérons λ_0 une valeur fixe du paramètre de la viscosité. Nous nous intéressons à l'équation de Burgers pour λ_0 .

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\lambda_0}}{\partial t} + u_{\lambda_0}(t) \nabla u_{\lambda_0}(t) = \lambda_0 \Delta u_{\lambda_0}(t) + f(t) \\ u_{\lambda_0}(0) = u_0 \end{cases}$$

Nous rappelons que, étant donnée u_0 dans V ; Alors, il existe une unique solution u_{λ_0} de cette équation, définie sur \mathbb{R}^+ , et telle que pour tout $T > 0$, $u_{\lambda_0} \in C([0, T]; X) \cap L^2([0, T]; V)$.

Soit V_h un sous espace de V de dimension M . Nous notons $h = \frac{1}{M}$.

Pour tout $t \in [0, T] \subset T_m$ où T_m est un intervalle maximal d'existence d'une approximation $u_{\lambda_0}^h(t)$ de $u_{\lambda_0}(t)$ dans V_h , solution du système d'équations différentielles à valeurs dans V_h :

$$\begin{cases} \left(\frac{du_{\lambda_0}^h}{dt}, v \right)_X + \left(u_{\lambda_0}^h(t) \nabla u_{\lambda_0}^h(t), v \right)_X = -\lambda_0 \left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), \nabla v \right)_X + (f(t), v)_X \quad \forall v \in V_h \\ \left(u_{\lambda_0}^h(0), v \right)_X = \left(u_0^h, v \right)_X \quad \forall v \in V_h \end{cases} \quad (4.1)$$

Notons $\{\Phi_1^{\lambda_0}, \Phi_2^{\lambda_0}, \dots, \Phi_N^{\lambda_0}\}$ une base POD associée aux N premières valeurs propres $\{\mu_1^{\lambda_0}, \mu_2^{\lambda_0}, \dots, \mu_N^{\lambda_0}\}$ (avec $N \ll M$), solutions du problème :

$$\mathcal{R}_{\lambda_0} \Phi^{\lambda_0} = \mu^{\lambda_0} \Phi^{\lambda_0}$$

Où

$$\mathcal{R}_{\lambda_0} \Phi^{\lambda_0} = \frac{1}{T} \int_0^T (u_{\lambda_0}(t), \Phi^{\lambda_0})_X u_{\lambda_0}(t) dt$$

Comme $u_{\lambda_0} \in L^2(0, T; V)$, alors on peut montrer que $\Phi_n^{\lambda_0}$ sont dans V .

On cherche alors la solution du modèle réduit sous la forme :

$$\hat{u}_{\lambda_0}(t) = \sum_{n=1}^N a_{\lambda_0}^{h,n}(t) \Phi_n^{\lambda_0}$$

Où, les $a_{\lambda_0}^{h,n}$ sont solutions du système d'équations différentielles non linéaires :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_{\lambda_0}^{h,n} + (\hat{u}_{\lambda_0}(t) \nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \Phi_n^{\lambda_0})_X = -\lambda_0 (\nabla \hat{u}_{\lambda_0}, \nabla \Phi_n^{\lambda_0})_X + (f(t), \Phi_n^{\lambda_0})_X, \\ a_{\lambda_0}^{h,n}(0) = (u_0^h, \Phi_n^{\lambda_0})_X. \end{cases} \quad (4.2)$$

Dans la suite, nous nous intéressons à l'estimation a priori de l'erreur :

$$\|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2, \quad (4.3)$$

Commençons par un lemme intermédiaire.

Lemme 10 Soit S la matrice carrée de dimension M , définie par : $S_{ij} = (\Phi_i^{\lambda_0}, \Phi_j^{\lambda_0})_V$. Alors, $\forall v \in V_h$,

$$\|v\|_V \leq \sqrt{\|S\|} \|v\|_X,$$

où $\|S\|$ désigne la norme spectrale de la matrice S .

Pour la preuve de ce lemme, nous référons à [67].

Nous démontrons la proposition suivante :

Proposition 3 Nous notons $(\mu_n^{\lambda_0})_{n=1, \dots, M}$, la suite des valeurs propres POD associée à Φ^{λ_0} . Alors, nous avons l'estimation suivante :

$$\|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq 2T(1 + \mathcal{A}_1) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0},$$

où $\mathcal{A}_1 = T \left[(C_\infty^1)^2 \|S\| + 1 + \lambda_0 \|S\| \right] \exp \left(T \|S\| \left[2C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 \left(1 + (C_\infty^1)^2 \|S\| \right) \right] \right)$,

$\|u_{\lambda_0}^h\|_\infty = \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}$, et C_∞^1 est la constante correspondant à l'injection continue suivante :

$$V \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Preuve :

$$\left(u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) = \left(u_{\lambda_0}^h - \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h \right) (t) + \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t),$$

où

$$\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) = \sum_{n=1}^N \left(u_{\lambda_0}^h (t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \Phi_n^{\lambda_0} = \sum_{n=1}^N u_{\lambda_0}^{h,n} (t) \Phi_n^{\lambda_0}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 &\leq 2 \|u_{\lambda_0}^h - \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h\|_{L^2(0,T;X)}^2 + 2 \|\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \\ &\leq 2T \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n^{\lambda_0} + 2 \|\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \end{aligned}$$

Il reste à démontrer que $\|\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq T \mathcal{A}_1 \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}$.

Or,

$$\|\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 = \sum_{n=1}^N \|u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}^2.$$

En remplaçant v par $\Phi_n^{\lambda_0}$ dans le problème variationnel (4.1), nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_{\lambda_0}^{h,n} = - \left(u_{\lambda_0}^h (t) \nabla u_{\lambda_0}^h (t) \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \lambda_0 \left(\nabla u_{\lambda_0}^h (t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \left(f(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ u_{\lambda_0}^{h,n} (0) = \left(u_0^h, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \end{cases} \quad (4.4)$$

Alors, $\left(u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n} \right) (t)$ vérifie le système des équations différentielles ordinaires suivant, pour tout $n = 1, \dots, M$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n} \right) = - \left(u_{\lambda_0}^h (t) \nabla u_{\lambda_0}^h (t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \lambda_0 \left(\nabla u_{\lambda_0}^h (t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ \quad \quad \quad + \left(\hat{u}_{\lambda_0} (t) \nabla \hat{u}_{\lambda_0} (t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \lambda_0 \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0} (t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ \left(u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n} \right) (0) = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

Dans ce qui suit, nous notons $U_{\lambda_0}^h(t) = (u_{\lambda_0}^h - \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h)(t)$.

Nous multiplions l'équation (4.5) par $(u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(t)$; Alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n}|^2 &= - \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t) \nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t), (u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(t) \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \right. \\ &\quad - \lambda_0 \left(\nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t), (u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(t) \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\hat{u}_{\lambda_0}(t) \nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \lambda_0 \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), (u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(t) \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \right) \right) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &= - \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t) \nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t), (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \right. \\ &\quad - \lambda_0 \left(\nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t), \nabla (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\hat{u}_{\lambda_0}(t) \nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right) + \lambda_0 \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \right) \right) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &= - \frac{1}{2} \left(\nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)^2(t), (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \right. \\ &\quad - \lambda_0 \left(\nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t), \nabla (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\nabla (\hat{u}_{\lambda_0})^2(t), (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad \left. \left. + \lambda_0 \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \right) \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})^2(t, x) (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t, x) dx \right. \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla \left[\left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}) \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h \right) (t, x) \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t, x) dx \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \left(U_{\lambda_0}^h \right)^2(t, x) \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t, x) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla \left[U_{\lambda_0}^h \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h \right] (t, x) \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t, x) dx \\ &\quad \left. \left. - \lambda_0 \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 - \lambda_0 \int_{\Omega} \nabla U_{\lambda_0}^h(t, x) \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t, x) dx \right) \right) \end{aligned}$$

Or,

$$\int_{\Omega} \nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})^2(t, x) (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t, x) dx \right) = 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &= + \int_{\Omega} \left[\left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h \right] (t, x) \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t, x) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \left(U_{\lambda_0}^h \right)^2 (t, x) \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t, x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[U_{\lambda_0}^h \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h \right] (t, x) \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t, x) dx \\
&\quad - \lambda_0 \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 - \lambda_0 \int_{\Omega} \nabla U_{\lambda_0}^h (t, x) \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t, x) dx
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &\leq \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X \\
&\quad + \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \nabla U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X \\
&\quad + \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X \\
&\quad - \lambda_0 \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&\quad + \lambda_0 \left\| \nabla U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &\leq C_\infty^1 \|S\| \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} (C_\infty^1)^2 \|S\| \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \|S\| \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} (C_\infty^1)^2 \|S\|^2 \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&\quad - \frac{\lambda_0}{2} \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&\quad + \frac{\lambda_0}{2} \|S\| \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &\leq \|S\| \left[2C_\infty^1 \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_\infty + \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_\infty^2 \left(1 + (C_\infty^1)^2 \|S\| \right) \right] \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&\quad + \left[(C_\infty^1)^2 \|S\| + 1 + \lambda_0 \|S\| \right] \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2
\end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle $(0, t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 &\leq \\ &\int_0^t \|S\| \left[2C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 \left(1 + (C_\infty^1)^2 \|S\| \right) \right] \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (s) \right\|_X^2 ds \\ &\quad + \left[(C_\infty^1)^2 \|S\| + 1 + \lambda_0 \|S\| \right] \int_0^T \|U_{\lambda_0}^h(t)\|_X^2 dt \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 &\leq \mathcal{A}_1 \int_0^T \|U_{\lambda_0}^h(t)\|_X^2 dt \\ &\leq T \mathcal{A}_1 \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{A}_1 = T \left[(C_\infty^1)^2 \|S\| + 1 + \lambda_0 \|S\| \right] \exp \left(T \|S\| \left[2C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 \left(1 + (C_\infty^1)^2 \|S\| \right) \right] \right).$$

Ce qui termine la preuve de la proposition.

4.2 Estimation de l'erreur du modèle ROM-POD associé aux équations de Navier-Stokes 2D

Dans cette section, nous considérons les équations de Navier-Stokes 2D (3.3) associées à une valeur λ_0 fixée :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\lambda_0}}{\partial t} + \operatorname{div}(u_{\lambda_0}(t) \otimes u_{\lambda_0}(t)) = -\nabla p_{\lambda_0}(t) + \lambda_0 \Delta u_{\lambda_0}(t) + f(t) \\ \operatorname{div} u_{\lambda_0}(t) = 0, \forall t > 0. \\ u_{\lambda_0}(0) = u_0 \end{cases}$$

Nous rappelons que, étant donné u_0 dans V , il existe une unique solution $(u_{\lambda_0}, p_{\lambda_0})$ de ce système, définie sur \mathbb{R}^+ , et telle que pour tout $T > 0$, $(u_{\lambda_0}, p_{\lambda_0}) \in C([0, T[; X) \cap L^2(]0, T[; V) \times L^2(]0, T[; H^0)$.

Soit respectivement V_h et H_h^0 des sous-espaces de V et H^0 de dimension M . Nous notons $h = \frac{1}{M}$.

De la même manière que pour l'équation de Burgers, on considère pour tout $t \in [0, T] \subset T_m$ où T_m est intervalle maximal d'existence d'une approximation $(u_{\lambda_0}^h(t), p_{\lambda_0}^h(t))$ de $(u_{\lambda_0}(t), p_{\lambda_0}(t))$ dans $V_h \times H_h^0$, solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{du_{\lambda_0}^h}{dt}, v \right)_X + \left(\operatorname{div}(u_{\lambda_0}^h(t) \otimes u_{\lambda_0}^h(t)), v \right)_X = -\lambda_0 \left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), \nabla v \right)_{[L^2(\Omega)]^4} \\ \quad + \left(p_{\lambda_0}^h(t), \operatorname{div} v \right)_{H^0} + (f(t), v)_X \quad \forall v \in V_h \\ \\ \left(q, \operatorname{div} u_{\lambda_0}^h(t) \right)_{H^0} = 0 \quad \forall q \in H_h^0 \\ \\ \left(u_{\lambda_0}^h(0), v \right)_X = \left(u_0^h, v \right)_X \quad \forall v \in V_h \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Notons $\{\Phi_1^{\lambda_0}, \Phi_2^{\lambda_0}, \dots, \Phi_M^{\lambda_0}\}$ une base POD de dimension M associée à $u_{\lambda_0}^h$. Le premier vecteur Φ^{λ_0} de cette base est solution du problème :

$$\frac{\left\langle \left(u_{\lambda_0}^h, \Phi^{\lambda_0} \right)_X^2 \right\rangle}{\|\Phi^{\lambda_0}\|_X^2} = \max_{\varphi \in V_h^*} \frac{\left\langle \left(u_{\lambda_0}^h, \varphi \right)_X^2 \right\rangle}{\|\varphi\|_X^2}.$$

Nous signalons que Φ^{λ_0} telle qu'elle est définie, est une base Hilbertienne de l'espace V_h , orthonormale au sens du produit scalaire de X .

Nous fixons $N \ll M$. Alors, nous proposons d'établir une estimation a priori de l'erreur moyenne suivante :

$$\left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2, \quad (4.7)$$

où $\hat{u}_{\lambda_0}(t)$ est la solution du modèle réduit de dimension N , obtenu par la projection POD-Galerkin du problème (4.6) sur les N premiers modes POD.

Alors,

$$\hat{u}_{\lambda_0}(t) = \sum_{n=1}^N a_{\lambda_0}^{h,n}(t) \Phi_n^{\lambda_0},$$

où $\forall n = 1, \dots, N$, $a_{\lambda_0}^{h,n}(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire couplée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} a_{\lambda_0}^{h,n} + \left(\operatorname{div}(\hat{u}_{\lambda_0}(t) \otimes \hat{u}_{\lambda_0}(t)), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X = -\lambda_0 \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_{[L^2(\Omega)]^4} + \left(f(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X, \\ \\ a_{\lambda_0}^{h,n}(0) = \left(u_0^h, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Nous démontrons la proposition suivante :

Proposition 4 *Nous notons $(\mu_n^{\lambda_0})_{n=1,\dots,M}$, la suite des valeurs propres POD associée à Φ^{λ_0} . Alors, nous avons l'estimation suivante :*

$$\left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq 2T(1 + \mathcal{A}_2) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0},$$

où $\mathcal{A}_2 = T \|S\| \left[2(C_4^1)^2 + 1 + \lambda_0 \right] \exp \left(T \|S\|^{3/2} (C_4^1)^2 \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{\infty} \left[2 + 2 \|S\|^{1/2} \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{\infty} + \|S\|^{1/2} (C_4^1)^2 \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{\infty} \right] \right)$.

$\left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{\infty} = \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^{\infty}(0,T;X)}$, et C_4^1 est la constante correspondant à l'injection continue suivante :

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega).$$

Preuve :

$$\left(u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) = \left(u_{\lambda_0}^h - \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h \right) (t) + \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t),$$

où

$$\begin{aligned} \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) &= \sum_{n=1}^N \left(u_{\lambda_0}^h (t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \Phi_n^{\lambda_0} \\ &= \sum_{n=1}^N u_{\lambda_0}^{h,n} (t) \Phi_n^{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 &\leq 2 \left\| u_{\lambda_0}^h - \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 + 2 \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \\ &\leq 2T \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n^{\lambda_0} + 2 \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \end{aligned}$$

Il reste à démontrer que $\left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq T \mathcal{A}_2 \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}$.

Or,

$$\left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 = \sum_{n=1}^N \left\| u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n} \right\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}^2.$$

En remplaçant v par $\Phi_n^{\lambda_0}$ dans le problème variationnel (4.6), nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_{\lambda_0}^{h,n} + \left(\operatorname{div} (u_{\lambda_0}^h (t) \otimes u_{\lambda_0}^h (t)) = -\lambda_0 \Delta u_{\lambda_0}^h (t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ u_{\lambda_0}^{h,n} (0) = \left(u_0^h, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \end{cases} \quad (4.9)$$

Alors, $(u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(t)$ vérifie le système des équations différentielles ordinaires suivantes, pour tout $n = 1, \dots, M$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n}) = - \left(\operatorname{div}(u_{\lambda_0}^h(t) \otimes u_{\lambda_0}^h(t)), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \lambda_0 \left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ \quad + \left(\operatorname{div}(\hat{u}_{\lambda_0}(t) \otimes \hat{u}_{\lambda_0}(t)), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \lambda_0 \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ (u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(0) = 0 \end{cases}, \quad (4.10)$$

Dans ce qui suit, nous notons $U_{\lambda_0}^h(t) = (u_{\lambda_0}^h - \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h)(t)$.

Nous multiplions l'équation (4.10) par $(u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(t)$; Alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n} \right|^2 &= - \left(\operatorname{div} \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t) \otimes (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t) \right), (u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(t) \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ &\quad - \lambda_0 \left(\nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t) \right), (u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(t) \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ &\quad + \left(\operatorname{div}(\hat{u}_{\lambda_0}(t) \otimes \hat{u}_{\lambda_0}(t)), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \lambda_0 \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), (u_{\lambda_0}^{h,n} - a_{\lambda_0}^{h,n})(t) \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &= - \left(\operatorname{div} \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t) \otimes (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t) \right), (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad - \lambda_0 \left(\nabla \left((\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h + U_{\lambda_0}^h)(t) \right), \nabla (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad + \left(\operatorname{div}(\hat{u}_{\lambda_0}(t) \otimes \hat{u}_{\lambda_0}(t)), (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad + \lambda_0 \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &= \left(\operatorname{div} \left[(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \otimes (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right], (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad - \left(\operatorname{div} \left[(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \otimes \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h(t) \right], (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad + \left(\operatorname{div} \left[\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h(t) \otimes (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right], (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad - \left(\operatorname{div} \left[U_{\lambda_0}^h(t) \otimes U_{\lambda_0}^h(t) \right], (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad - \left(\operatorname{div} \left[U_{\lambda_0}^h(t) \otimes \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h(t) \right], (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad - \left(\operatorname{div} \left[\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h(t) \otimes U_{\lambda_0}^h(t) \right], (\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right)_X \\ &\quad - \lambda_0 \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 - \lambda_0 \left(\nabla U_{\lambda_0}^h(t), \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right)(t) \right)_X \end{aligned}$$

Or,

$$\left(\operatorname{div} \left[\left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \otimes \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right], \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right)_X = 0;$$

Et

$$\left(\operatorname{div} \left[\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \otimes \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right], \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right)_X = 0.$$

Par suite, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &\leq \left\| \nabla \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4} \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_{[L^4(\Omega)]^2}^2 \\ &\quad + \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{[L^4(\Omega)]^2} \left\| \nabla U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4} \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_{[L^4(\Omega)]^2} \\ &\quad + \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{[L^4(\Omega)]^2} \left\| \nabla \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4} \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_{[L^4(\Omega)]^2} \\ &\quad + \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{[L^4(\Omega)]^2} \left\| \nabla U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4} \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_{[L^4(\Omega)]^2} \\ &\quad - \lambda_0 \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\ &\quad + \lambda_0 \left\| \nabla U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4} \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &\leq (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\| \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\|^2 \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\| \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\|^2 \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|S\| \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\|^2 \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &\quad - \frac{\lambda_0}{2} \left\| \nabla \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda_0}{2} \|S\| \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_X^2 &\leq \\ &\quad \|S\|^{3/2} (C_4^1)^2 \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{\infty} \left[2 + 2 \|S\|^{1/2} \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{\infty} + \|S\|^{1/2} (C_4^1)^2 \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{\infty} \right] \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &\quad + \|S\| \left[2 (C_4^1)^2 + 1 + \lambda_0 \right] \left\| U_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2. \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle $(0, t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 &\leq \\ &\int_0^t \|S\|^{3/2} \left(C_4^1 \right)^2 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty \left[2 + 2 \|S\|^{1/2} \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + \|S\|^{1/2} \left(C_4^1 \right)^2 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty \right] \left\| \left(\Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (s) \right\|_X^2 ds \\ &\quad + \|S\| \left[2 \left(C_4^1 \right)^2 + 1 + \lambda_0 \right] \int_0^T \|U_{\lambda_0}^h(t)\|_X^2 dt \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\| \Pi_X^N u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 &\leq \mathcal{A}_2 \int_0^T \|U_{\lambda_0}^h(t)\|_X^2 dt \\ &\leq T \mathcal{A}_2 \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{A}_2 = T \|S\| \left[2 \left(C_4^1 \right)^2 + 1 + \lambda_0 \right] \exp \left(T \|S\|^{3/2} \left(C_4^1 \right)^2 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty \left[2 + 2 \|S\|^{1/2} \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + \|S\|^{1/2} \left(C_4^1 \right)^2 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty \right] \right).$$

Ce qui termine la preuve de la proposition.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons estimé l'erreur POD-Galerkin commise en résolvant le modèle ROM-POD pour un paramètre λ_0 fixé. Nous avons montré que l'erreur dans $L^2(0, T; X)$ entre la solution du modèle réduit et du modèle complet discretisé par une méthode de Galerkin qui assure la convergence vers la solution du problème continu, est contrôlée par la somme : $\sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}$ (l'énergie négligée) qui multiplie un autre terme qui s'exprime en fonction de T .

Un autre problème qui peut se poser et qui n'a pas été abordé ici, est le comportement de cette erreur quand T devient grand. Il s'agit de la question de stabilité en temps, qui est un problème délicat. On sait d'ailleurs que les modèles ROM-POD obtenus par la méthode Galerkin des problèmes linéaires ont besoin de techniques de stabilisation.

Nous pouvons mentionner le travail de Iollo et al. [2], qui consiste à améliorer la stabilité au cours du temps d'un modèle réduit associé aux équations de Navier-Stokes compressibles, par la construction d'une base POD orthonormale au sens de la norme H^1 . Parmi les techniques de stabilisation, nous pouvons citer aussi la méthode basée sur l'ajout d'une viscosité artificielle [96, 25], les méthodes de calibration et d'optimisation [32], les méthodes de stabilisation basées sur l'évaluation des résidus du modèle complet : Enrichissement de la base par ajout des résidus,

formulation SUPG (streamline upwind Petrov-Galerkin) du modèle réduit et formulation VMS (variational multiscale) du modèle réduit [21].

Pour la suite, on se place sur un intervalle de temps $(0, T)$ pour lequel l'erreur de l'approximation ROM-POD reste contrôlée, suivant les propositions 3 et 4. Et, nous nous intéressons à la fiabilité du modèle ROM-POD pour un paramètre λ quelconque, obtenu à partir d'une projection Galerkin sur une base POD $(\Phi_n^{\lambda_0})_{n=1, \dots, N}$ calculée à partir d'une solution approchée $u_{\lambda_0}^h$ fixée.

Chapitre 5

Sensibilité du ROM-POD pour l'équation de Burgers

Considérons l'approximation variationnelle (4.1) de dimension M , associée à l'équation de Burgers pour un paramètre λ quelconque :

$$\begin{cases} \left(\frac{du_\lambda^h}{dt}, v \right)_X + \left(u_\lambda^h(t) \nabla u_\lambda^h(t), v \right)_X = -\lambda \left(\nabla u_\lambda^h(t), \nabla v \right)_X + (f(t), v)_X \quad \forall v \in V_h \\ \left(u_\lambda^h(0), v \right)_X = \left(u_0^h, v \right)_X \quad \forall v \in V_h \end{cases}$$

Soit λ_0 une valeur fixe du paramètre de la viscosité, à laquelle nous associons la solution $u_{\lambda_0}^h$. Soit $\Phi_{\lambda_0} = \left(\Phi_n^{\lambda_0} \right)_{n=1, \dots, M}$ une base POD associée à $u_{\lambda_0}^h$.

Soit $\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}$ la solution du modèle réduit de dimension N , obtenu par la projection POD-Galerkin de ce problème sur les N premiers modes POD $\left\{ \Phi_1^{\lambda_0}, \Phi_2^{\lambda_0}, \dots, \Phi_N^{\lambda_0} \right\}$.

$$\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t) = \sum_{n=1}^N a_{\lambda, \lambda_0}^{h, n}(t) \Phi_n^{\lambda_0}$$

Où les $a_{\lambda, \lambda_0}^{h, n}(t)$ sont solutions du système d'équations différentielles non linéaires :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_{\lambda, \lambda_0}^{h, n} + \left(\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t) \nabla \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X = -\lambda \left(\nabla \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \left(f(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X, \\ a_{\lambda, \lambda_0}^{h, n}(0) = \left(u_0^h, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X. \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans un premier temps, nous fixons le nombre de modes $N \ll M$. On s'intéresse à l'évolution paramétrique de l'erreur dans $L^2(0, T; X)$ suivante :

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \quad (5.2)$$

Qui peut être qualifiée comme l'erreur entre la solution du modèle réduit et du modèle complet discretisé pour le paramètre λ .

Dans un deuxième temps on s'intéresse à étudier cette erreur en fonction de N , ce qui permettra à des numériciens de déduire le nombre de modes nécessaire pour maintenir une erreur donnée, quand le paramètre λ s'écarte de celui de référence.

5.1 Sensibilité du modèle réduit pour un nombre de modes fixé

Dans cette section, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 8 *Nous fixons β un réel strictement positif, très proche de zéro, et nous supposons que $\lambda > \frac{\beta \lambda_0}{2 + \beta}$. Alors, l'erreur théorique par rapport à u_λ^h , obtenue en résolvant le modèle réduit (5.1), vérifie :*

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq 4T (1 + \mathcal{A}_1) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0} + 2(\mathcal{B} + \mathcal{D}) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0}, \quad (5.3)$$

où \mathcal{A}_1 est la constante correspondant à la proposition 3 du chapitre 4.

$$\mathcal{B} := T \frac{\lambda_0}{\gamma} \|S\| \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^\infty(0, T; X)}^2 \exp \left(2TC_\infty^1 \|S\| \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^\infty(0, T; X)} \right),$$

$$\mathcal{D} := T \frac{\lambda_0}{\gamma} \|S\| \left\| \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^\infty(0, T; X)}^2 \exp \left(2TC_\infty^1 \|S\| \left\| \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^\infty(0, T; X)} \right),$$

γ est un réel strictement positif qui vérifie :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda > \lambda_0 & \text{alors } \gamma = 1, \\ \text{si } \lambda < \lambda_0 & \text{alors } \gamma = \beta. \end{cases}$$

C_∞^1 est la constante correspondant à l'injection continue $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty$.

Preuve :

$$\left(u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right) (t) = \left(u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) + \left(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h \right) (t) - \left(\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t)$$

Parsuite,

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq 2 \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 + 2 \left\| u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 + 2 \left\| \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2$$

Or, d'après la proposition 3 du chapitre 4, nous déduisons que $2 \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq 4T(1 + \mathcal{A}_1) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}$.

En ce qui concerne les deux termes $\left\| u_{\lambda}^h - u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^2(0,T;X)}^2$ et $\left\| \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2$, nous reprenons exactement le travail fait dans le chapitre 3 concernant l'étude du caractère holdérien des solutions de l'équation de Burgers.

Nous effectuons uniquement la preuve pour $\left\| u_{\lambda}^h - u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^2(0,T;X)}^2$.

Notons $w^h(t) = (u_{\lambda}^h - u_{\lambda_0}^h)(t)$, qui vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{dw^h(t)}{dt}, v \right)_X = -\frac{1}{2} \left(\nabla [w^h(t)]^2, v \right)_X - \left(\nabla [w^h(t)u_{\lambda_0}^h(t)], v \right)_X - \lambda \left(\nabla w^h(t), \nabla v \right)_X \\ \quad - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), \nabla v \right)_X \quad \forall v \in V_h \\ \left(w^h(0), v \right)_X = 0 \quad \forall v \in V_h \end{cases}$$

En remplaçant v par $w^h(t)$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| w^h(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^h(t, x) \nabla (w^h)^2(t, x) dx &= -\lambda \left\| \nabla w^h(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} [w^h(t, x)u_{\lambda_0}^h(t, x)] \nabla w^h(t, x) dx \\ &\quad - (\lambda - \lambda_0) \int_{\Omega} \nabla u_{\lambda_0}^h(t, x) \nabla w^h(t, x) dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_{\Omega} w^h(t, x) \nabla (w^h)^2(t, x) dx = 0.$$

D'une autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Young et le lemme 10 du chapitre 4, alors nous déduisons les inégalités suivantes :

$$\int_{\Omega} [w^h(t, x)u_{\lambda_0}^h(t, x)] \nabla w^h(t, x) dx \leq C_{\infty}^1 \|S\| \left\| u_{\lambda_0}^h(t) \right\|_X \left\| w^h(t) \right\|_X^2;$$

Et,

$$\left\| \nabla u_{\lambda_0}^h(t) \right\|_X \left\| \nabla w^h(t) \right\|_X \leq \frac{\gamma}{2} \left\| \nabla w^h(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2\gamma} \|S\| \left\| u_{\lambda_0}^h(t) \right\|_X^2.$$

Sous les conditions imposées sur γ dans l'énoncé du théorème, nous pouvons démontrer que

$$-\lambda + \frac{\gamma|\lambda - \lambda_0|}{2} < 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w^h(t)\|_X^2 &\leq C_\infty^1 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h(t)\|_X \|w^h(t)\|_X^2 \\ &\quad + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2\gamma} \|S\| \|u_{\lambda_0}^h(t)\|_X^2. \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle $(0, t)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|w^h(t)\|_X^2 &\leq 2C_\infty^1 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)} \int_0^t \|w^h(s)\|_X^2 ds \\ &\quad + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma} \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}^2. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\|w^h(t)\|_X^2 \leq \frac{\|S\|}{\gamma} \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}^2 \exp\left(2TC_\infty^1 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}\right) |\lambda - \lambda_0|.$$

Alors,

$$\|u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq \frac{T\lambda_0}{\gamma} \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}^2 \exp\left(2TC_\infty^1 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}\right) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0}.$$

De la même manière, nous démontrons que :

$$\|\hat{u}_{\lambda,\lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq \frac{T\lambda_0}{\gamma} \|S\| \|\hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^\infty(0,T;X)}^2 \exp\left(2TC_\infty^1 \|S\| \|\hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^\infty(0,T;X)}\right) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0}.$$

Ce qui termine la preuve du théorème.

5.2 Evolution de la sensibilité du modèle réduit en fonction du nombre de modes

Commençons par un lemme général :

Lemme 11 Soit $(\Psi_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne et orthonormale dans X . Pour tout n , nous définissons la fonction f_n dans X comme suit :

$$f_n(x) = \int_0^x \Psi_n(y) dy, \forall x \in \Omega$$

Alors, $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2$ est sommable dans X .

Pour la preuve de ce lemme, on renvoie à [41].

En s'inspirant de la démonstration du lemme précédent [41], on peut prouver la proposition :

Proposition 5 *Soit $(\Phi_n)_{n=1,\dots,M}$ une base POD dans X . Pour tout $n = 1, \dots, M$, nous définissons la fonction f_n dans X comme suit :*

$$f_n(x) = \int_0^x \Phi_n(y) dy, \forall x \in \Omega$$

$$\text{Alors, } \sum_{n=1}^M \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_X^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^x \Phi_n(y) dy \right|^2 dx \\ &= \int_0^1 \left| (\Phi_n, 1_{[0,x]})_X \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_0^1 \sum_{n=1}^M \left((\Phi_n, 1_{[0,x]})_X \right)^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \|1_{[0,x]}\|_X^2 dx \\ &\leq \int_0^1 x dx \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Le reste de la somme :

$$\sum_{n=N+1}^M \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2$$

ne dépend que de N et il est décroissant et est égal à 0 quand $N = M$.

Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 9

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq 4T (1 + \mathcal{A}_1) (1 + \mathcal{G}) f_1^{\lambda_0}(N) + 2\mathcal{B} \|S\| (1 + \mathcal{F}) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} f_2^{\lambda_0}(N), \quad (5.4)$$

où \mathcal{A}_1 est la constante correspondant à la proposition 3 du chapitre 4,

$$f_1^{\lambda_0}(N) = \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0},$$

$$f_2^{\lambda_0}(N) = \sum_{n=N+1}^M \|f_n^{\lambda_0}\|_X^2.$$

$$\mathcal{B} := T \frac{\lambda_0}{\gamma} \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}^2 \exp\left(2TC_\infty^1 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}\right),$$

γ est un réel strictement positif qui vérifie :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda > \lambda_0 & \text{alors } \gamma = 1, \\ \text{si } \lambda < \lambda_0 & \text{alors } \gamma = \beta. \end{cases}$$

Les constantes \mathcal{G} et \mathcal{F} dépendent de $\|S\|$, $\|u_{\lambda_0}^h\|_\infty = \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}$ et C_∞^1 .

Preuve : Nous décomposons $(u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda,\lambda_0})(t)$ comme suit :

$$(u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda,\lambda_0})(t) = (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) + (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) - (\hat{u}_{\lambda,\lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0})(t)$$

Or,

$$\begin{aligned} (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) - (\hat{u}_{\lambda,\lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0})(t) &= (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) - \Pi_X^N(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) \\ &\quad + \Pi_X^N(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) - (\hat{u}_{\lambda,\lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda,\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 &\leq 2 \|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \\ &\quad + 2 \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_X^N(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \\ &\quad + 2 \left\| \Pi_X^N(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - (\hat{u}_{\lambda,\lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \end{aligned}$$

D'après la proposition 3 du chapitre 4, nous déduisons que $2 \|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq 4T(1 + \mathcal{A}_1) f_1^{\lambda_0}(N)$.

Alors, nous sommes ramenés à l'étude des deux termes $\left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_X^N(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2$
et $\left\| \Pi_X^N(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - (\hat{u}_{\lambda,\lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2$.

Etude du terme $\left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2$

$$\left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 = \sum_{n=N+1}^M \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0})_X \right\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}^2$$

Or,

$$\left((u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X = - \left(\nabla (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t), f_n^{\lambda_0} \right)_X$$

Alors,

$$\left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0})_X \right\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}^2 \leq \left\| \nabla (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \left\| f_n^{\lambda_0} \right\|_X^2.$$

Or, d'après le résultat du théorème 8 de la section précédente :

$$\left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0})_X \right\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}^2 \leq \mathcal{B} \|S\| \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} \left\| f_n^{\lambda_0} \right\|_X^2.$$

Etude du terme $\left\| \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - (\hat{u}_{\lambda,\lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2$

Ce qui revient à étudier la convergence POD-Galerkin pour le problème variationnel de dimension M , satisfait par $w^h(t) = (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t)$.

Notons,

$$\begin{aligned} \hat{w}(t) &= (\hat{u}_{\lambda,\lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \\ &= \sum_{n=1}^N a^{h,n}(t) \Phi_n^{\lambda_0} \end{aligned}$$

Où les $a^{h,n}(t)$ sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a^{h,n} = -\frac{1}{2} \left(\nabla [\hat{w}(t)]^2, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \left(\nabla [\hat{w}(t) \hat{u}_{\lambda_0}(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \lambda \left(\nabla \hat{w}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ a^{h,n}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi_X^N w^h(t) &= \sum_{n=1}^N \left(w^h(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \Phi_n^{\lambda_0} \\ &= \sum_{n=1}^N a^{h,n}(t) \Phi_n^{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Or,

$$\left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 = \sum_{n=1}^N \left\| w^{h,n} - a^{h,n} \right\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}^2.$$

Où les $(w^{h,n} - a^{h,n})(t)$ vérifient le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (w^{h,n} - a^{h,n}) = -\frac{1}{2} \left(\nabla [w^h(t)]^2, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \left(\nabla [w^h(t)u_{\lambda_0}^h(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \lambda \left(\nabla w^h(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ \quad - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \frac{1}{2} \left(\nabla [\hat{w}(t)]^2, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \left(\nabla [\hat{w}(t)\hat{u}_{\lambda_0}(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ \quad + \lambda \left(\nabla \hat{w}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ (w^{h,n} - a^{h,n})(0) = 0 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Dans ce qui suit, nous notons $W^h(t) = (w^h - \Pi_X^N w^h)(t)$.

Nous multiplions l'équation (5.6) par $(w^{h,n} - a^{h,n})(t)$; Alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w^{h,n} - a^{h,n}|^2 &= -\frac{1}{2} \left(\nabla \left(\Pi_X^N w^h + W^h \right)^2(t), (w^{h,n} - a^{h,n})(t) \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ &\quad - \left(\nabla \left[\left(\Pi_X^N w^h + W^h \right)(t) u_{\lambda_0}^h(t) \right], (w^{h,n} - a^{h,n})(t) \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ &\quad - \lambda \left(\nabla \left(\Pi_X^N w^h + W^h \right)(t), \nabla (w^{h,n} - a^{h,n})(t) \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ &\quad - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), (w^{h,n} - a^{h,n})(t) \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\nabla [\hat{w}(t)]^2, (w^{h,n} - a^{h,n})(t) \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ &\quad + \left(\nabla [\hat{w}(t)\hat{u}_{\lambda_0}(t)], (w^{h,n} - a^{h,n})(t) \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ &\quad + \lambda \left(\nabla \hat{w}(t), (w^{h,n} - a^{h,n})(t) \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ &\quad + (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), (w^{h,n} - a^{h,n})(t) \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_X^2 &= -\frac{1}{2} \left(\nabla \left(\Pi_X^N w^h + W^h \right)^2 (t), \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - \left(\nabla \left[\left(\Pi_X^N w^h + W^h \right) (t) u_{\lambda_0}^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - \lambda \left(\nabla \left(\Pi_X^N w^h + W^h \right) (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla u_{\lambda_0}^h (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\nabla [\hat{w}(t)]^2, \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad + \left(\nabla [\hat{w}(t) \hat{u}_{\lambda_0}(t)], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad + \lambda \left(\nabla \hat{w}(t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad + (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_X^2 &= \frac{1}{2} \left(\nabla \left[\left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right)^2 (t), \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right]_X \right. \\
&\quad - \left(\nabla \left[\left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \Pi_X^N w^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - \left(\nabla \left[\Pi_X^N w^h (t) (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}) (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - \left(\nabla \left[\left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \hat{u}_{\lambda_0} (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - \lambda \left(\nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}) (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\nabla \left[W^h (t) \right]^2, \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - \left(\nabla \left[\Pi_X^N w^h (t) W^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - \left(\nabla \left[W^h (t) u_{\lambda_0}^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&\quad - \lambda \left(\nabla W^h (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X.
\end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\left(\nabla \left[\left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right)^2 (t), \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right]_X = 0.
\right.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_X^2 &= + \left(\left[\left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \Pi_X^N w^h (t) \right], \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\left[\Pi_X^N w^h (t) (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}) (t) \right], \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\left[\left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \hat{u}_{\lambda_0} (t) \right], \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \lambda \left(\nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}) (t), \left(\nabla \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \frac{1}{2} \left(\nabla \left[W^h (t) \right]^2, \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\left[\Pi_X^N w^h (t) W^h (t) \right], \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\left[W^h (t) u_{\lambda_0}^h (t) \right], \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \lambda \left(\nabla W^h (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X.
\end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_X^2 &\leq C_\infty^1 \|S\| \left\| \Pi_X^N w^h (t) \right\|_X \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left\| (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}) (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \left(C_\infty^1 \right)^2 \|S\|^2 \left\| \Pi_X^N w^h (t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&+ C_\infty^1 \|S\| \left\| \hat{u}_{\lambda_0} (t) \right\|_X \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&- \lambda \left\| \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&+ \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \|S\| \left\| (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}) (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \|S\| \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left(C_\infty^1 \right)^2 \|S\| \left\| W^h (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \|S\| \left\| W^h (t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left\| W^h (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \left(C_\infty^1 \right)^2 \|S\|^2 \left\| \Pi_X^N w^h (t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left(C_\infty^1 \right)^2 \|S\| \left\| W^h (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \|S\| \left\| u_{\lambda_0}^h (t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\
&+ \frac{\lambda}{2} \|S\| \left\| W^h (t) \right\|_X^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2.
\end{aligned}$$

C_∞^1 est la constante correspondant à l'injection continue $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_X^2 &\leq \|S\| \left[6C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 8 (C_\infty^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 5 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \left\| (\Pi_X^N w^h - \hat{w})(t) \right\|_X^2 \\
&+ \left[1 + \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \|S\| \right] \left\| (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right\|_X^2 \\
&+ \left[2 (C_\infty^1)^2 \|S\| + \lambda \|S\| + 1 \right] \left\| W^h(t) \right\|_X^2.
\end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle $(0, t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left\| (\Pi_X^N w^h - \hat{w})(t) \right\|_X^2 &\leq \int_0^t \|S\| \left[6C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 8 (C_\infty^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 5 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \left\| (\Pi_X^N w^h - \hat{w})(s) \right\|_X^2 ds \\
&+ \left[1 + \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \|S\| \right] \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \\
&+ \left[2 (C_\infty^1)^2 \|S\| + \lambda \|S\| + 1 \right] \left\| W^h \right\|_{L^2(0,T;X)}^2.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\left\| (\Pi_X^N w^h - \hat{w})(t) \right\|_X^2 \leq \\
&\left[1 + \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \|S\| \right] \exp \left(T \|S\| \left[6C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 8 (C_\infty^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 5 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \right) \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \\
&+ \left[2 (C_\infty^1)^2 \|S\| + \lambda \|S\| + 1 \right] \exp \left(T \|S\| \left[6C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 8 (C_\infty^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 5 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \right) \left\| W^h \right\|_{L^2(0,T;X)}^2
\end{aligned}$$

Et finalement,

$$\begin{aligned}
&\left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq \\
&T \left[1 + \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \|S\| \right] \exp \left(T \|S\| \left[6C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 8 (C_\infty^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 5 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \right) \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \\
&+ T \left[2 (C_\infty^1)^2 \|S\| + \lambda \|S\| + 1 \right] \exp \left(T \|S\| \left[6C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 8 (C_\infty^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 5 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \right) \left\| W^h \right\|_{L^2(0,T;X)}^2
\end{aligned}$$

Or,

$$\left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq 2T (1 + \mathcal{A}_1) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}.$$

Et,

$$\begin{aligned}\|W^h\|_{L^2(0,T;X)}^2 &= \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_X^N(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \\ &\leq \mathcal{B} \|S\| \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} \sum_{n=N+1}^M \|f_n^{\lambda_0}\|_X^2.\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du théorème, en précisant que :

$$\mathcal{G} = T \left[1 + \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \|S\| \right] \exp \left(T \|S\| \left[6C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 8 (C_\infty^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 5 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \right).$$

Et,

$$\mathcal{F} = T \left[2 (C_\infty^1)^2 \|S\| + \lambda \|S\| + 1 \right] \exp \left(T \|S\| \left[6C_\infty^1 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 8 (C_\infty^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 5 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \right).$$

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi une estimation a priori de la sensibilité du modèle ROM-POD pour l'équation de Burgers, en fonction de la distance entre les paramètres et le nombre de modes conservés. Cette erreur porte sur la comparaison entre la solution du problème discret complet pour un paramètre λ quelconque u_λ^h et la solution $\hat{u}_{\lambda,\lambda_0}$ du modèle réduit obtenu par projection de l'équation de Burgers pour un paramètre λ quelconque sur une base POD associée à la solution $u_{\lambda_0}^h$ pour un paramètre λ_0 de référence. Ce résultat peut s'écrire formellement :

$$\|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda,\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq f_1(N) + f_2(N) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0}$$

Où

- $f_1(N) = Lf_0(N)$ où L est une contante associée à $u_{\lambda_0}^h$ et $f_0(N)$ est la somme des valeurs propres POD associées à $u_{\lambda_0}^h$ des modes négligés. Cette suite converge vers 0 très rapidement en fonction de N .
- $f_2(N)$ est une suite décroissante en fonction de N et tends vers 0 quand N est grand. Le taux de décroissance de $f_2(N)$ est lié à la régularité de la solution. Dans le cas où $u_\lambda^h \in L^2(0, T; H^m(\Omega))$, en s'appuyant sur l'article [41], on peut donner une estimation de cette suite en $O\left(\frac{1}{N^{2m-1}}\right)$.

Notons ε_0 l'erreur de l'approximation POD de $u_{\lambda_0}^h$ pour un nombre de mode N_0 . C'est à dire $f_0(N_0) = \varepsilon_0$. Le nombre de modes $N \geq N_0$ nécessaire pour que le modèle réduit $\hat{u}_{\lambda,\lambda_0}$ approxime u_λ^h à une précision ε ($\|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda,\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq \varepsilon$) peut être estimé :

$$N \approx \tilde{N} + \left[\frac{|\lambda - \lambda_0|}{K(\varepsilon + L\varepsilon_0)} \right] \frac{1}{2m - 1}$$

Où K est une constante liée à $u_{\lambda_0}^h$. Avec $\tilde{N} \approx N_0$ de telle sorte que quand $\lambda = \lambda_0$, on ait $N = N_0$.

Ainsi dans la pratique, à partir d'une simulation numérique de $u_{\lambda_0}^h$, on peut estimer les constantes K et L . Et, en ayant une idée sur la régularité de la solution u_{λ}^h on peut estimer l'exposant m et par suite le nombre de modes nécessaires pour espérer une approximation convenable $\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}$ de u_{λ}^h quand λ s'éloigne de λ_0 . En particulier, cette estimation peut donner des valeurs N très importantes par rapport à N_0 (proche de M) et dans ce cas là le modèle réduit obtenu à partir de la base de référence Φ^{λ_0} perd son intérêt. Ce qui nécessite le choix d'un nouveau paramètre de référence à partir duquel on recommence le calcul. Ainsi cette estimation permet aussi de déterminer des régions de confiance où le modèle réduit obtenu à partir de la solution de référence $u_{\lambda_0}^h$ est opérant.

Chapitre 6

Sensibilité du ROM-POD pour les équations de Navier-Stokes 2D

Considérons l'approximation variationnelle (4.6) associée aux équations de Navier-Stokes 2D pour un paramètre λ quelconque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{du_\lambda^h}{dt}, v \right)_X + \left(\operatorname{div}(u_{\lambda_0}^h(t) \otimes u_\lambda^h(t)), v \right)_X = -\lambda \left(\nabla u_\lambda^h(t), \nabla v \right)_{[L^2(\Omega)]^4} \\ \quad + \left(p_\lambda^h(t), \operatorname{div} v \right)_{H^0} + (f(t), v)_X \quad \forall v \in V_h \\ \left(q, \operatorname{div} u_\lambda^h(t) \right)_{H^0} = 0 \quad \forall q \in H_h^0 \\ \left(u_\lambda^h(0), v \right)_X = \left(u_0^h, v \right)_X \quad \forall v \in V_h \end{array} \right.$$

Soit λ_0 une valeur fixe du paramètre de la viscosité, à laquelle nous associons la solution $u_{\lambda_0}^h$. Soit $\Phi_{\lambda_0} = \left(\Phi_n^{\lambda_0} \right)_{n=1, \dots, M}$ une base POD associée à $u_{\lambda_0}^h$.

Soit $\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}$ la solution du modèle réduit de dimension N , obtenu par la projection POD-Galerkin de ce problème sur les N premiers modes POD $\left\{ \Phi_1^{\lambda_0}, \Phi_2^{\lambda_0}, \dots, \Phi_N^{\lambda_0} \right\}$.

$$\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t) = \sum_{n=1}^N a_{\lambda, \lambda_0}^{h, n}(t) \Phi_n^{\lambda_0}$$

Où les $a_{\lambda, \lambda_0}^{h, n}(t)$ sont solutions du système d'équations différentielles non linéaires :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_{\lambda, \lambda_0}^{h, n} + \left(\operatorname{div}(\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t) \otimes \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t)), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X = -\lambda \left(\nabla \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_{[L^2(\Omega)]^4} + \left(f(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ a_{\lambda, \lambda_0}^{h, n}(0) = \left(u_0^h, \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X. \end{cases} \quad (6.1)$$

Dans un premier temps, nous fixons le nombre de modes $N \ll M$. On s'intéresse à l'évolution paramétrique de l'erreur dans $L^2(0, T; X)$ suivante :

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \quad (6.2)$$

Dans un deuxième temps, sous une hypothèse de régularité des solutions des équations de Navier-Stokes de type $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on étudie cette erreur en fonction de N . Le fait qui permettra de déduire le nombre de modes nécessaire pour maintenir une erreur donnée, quand le paramètre λ s'écarte de celui de référence.

6.1 Sensibilité du modèle réduit pour un nombre de modes fixé

Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 10 *Nous fixons β un réel strictement positif, très proche de zéro, et nous supposons que $\lambda > \frac{\beta \lambda_0}{2 + \beta}$. Alors, l'erreur théorique par rapport à u_λ^h , obtenue en résolvant le modèle réduit (6.1), vérifie :*

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq 4T (1 + \mathcal{A}_2) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0} + 2(\mathcal{B} + \mathcal{D}) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0}, \quad (6.3)$$

où \mathcal{A}_2 est la constante correspondant à la proposition 4 du chapitre 4.

$$\mathcal{B} := T \frac{\lambda_0}{\gamma} \|S\| \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^\infty(0, T; X)}^2 \exp \left(2 (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \left\| u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^\infty(0, T; X)} \right),$$

$$\mathcal{D} := T \frac{\lambda_0}{\gamma} \|S\| \left\| \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^\infty(0, T; X)}^2 \exp \left(2 (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \left\| \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^\infty(0, T; X)} \right).$$

γ est un réel strictement positif qui vérifie :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda > \lambda_0 & \text{alors } \gamma = 1. \\ \text{si } \lambda < \lambda_0 & \text{alors } \gamma = \beta. \end{cases}$$

Preuve :

$$\left(u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right) (t) = \left(u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) + \left(u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h \right) (t) - \left(\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t)$$

Par suite,

$$\left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq 2 \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 + 2 \left\| u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 + 2 \left\| \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2$$

Or, d'après la proposition 4 du chapitre 4, nous déduisons que $2 \left\| u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq 4T(1 + \mathcal{A}_2) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}$.

En ce qui concerne les deux termes $\left\| u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^2(0, T; X)}^2$ et $\left\| \hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0, T; X)}^2$, nous reprenons exactement le travail fait dans le chapitre 3 concernant l'étude du caractère holdérien des solutions des équations de Navier-Stokes.

Nous montrons uniquement la preuve pour $\left\| u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h \right\|_{L^2(0, T; X)}^2$.

Notons $w^h(t) = (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t)$, qui vérifie le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dw^h(t)}{dt}, v \right)_X = - \left(\operatorname{div} [w^h(t) \otimes w^h(t)], v \right)_X - \left(\operatorname{div} [w^h(t) \otimes u_{\lambda_0}^h(t)], v \right)_X - \left(\operatorname{div} [u_{\lambda_0}^h(t) \otimes w^h(t)], v \right)_X \\ \quad - \lambda \left(\nabla w^h(t), \nabla v \right)_X - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), \nabla v \right)_{H^0} + \left((p_\lambda^h - p_{\lambda_0}^h)(t), \operatorname{div} v \right)_X \quad \forall v \in V_h \\ \left(q, \operatorname{div} w^h(t) \right)_{H^0} = 0 \quad \forall q \in H_h^0 \\ \left(w^h(0), v \right)_X = 0 \quad \forall v \in V_h \end{array} \right.$$

Alors, en remplaçant v par $w^h(t)$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| w^h(t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &= - \left(\operatorname{div} [w^h(t) \otimes w^h(t)], w^h(t) \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad - \left(\operatorname{div} [w^h(t) \otimes u_{\lambda_0}^h(t)], w^h(t) \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad - \left(\operatorname{div} [u_{\lambda_0}^h(t) \otimes w^h(t)], w^h(t) \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad - \lambda \left\| \nabla w^h(t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\ &\quad - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), \nabla w^h(t) \right)_{[L^2(\Omega)]^4}. \end{aligned}$$

Or,

$$\left(\operatorname{div} [w^h(t) \otimes w^h(t)], w^h(t) \right)_{[L^2(\Omega)]^2} = 0.$$

Et,

$$\left(\operatorname{div} \left[u_{\lambda_0}^h(t) \otimes w^h(t) \right], w^h(t) \right)_{[L^2(\Omega)]^2} = 0.$$

D'une autre part, en utilisant l'inégalité de Young, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 10 du chapitre 4, alors nous déduisons les inégalités suivantes :

$$\left(\operatorname{div} \left[w^h(t) \otimes u_{\lambda_0}^h(t) \right], w^h(t) \right)_{[L^2(\Omega)]^2} \leq (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \|u_{\lambda_0}^h(t)\|_X \|w^h(t)\|_X^2;$$

Et,

$$\left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), \nabla w^h(t) \right)_{[L^2(\Omega)]^4} \leq \frac{\gamma}{2} \|\nabla w^h(t)\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|S\| \|u_{\lambda_0}^h(t)\|_X^2.$$

Sous les conditions imposées sur γ dans l'énoncé du théorème, nous pouvons démontrer que $-\lambda + \frac{\gamma|\lambda - \lambda_0|}{2} < 0$.

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w^h(t)\|_X^2 &\leq (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \|u_{\lambda_0}^h(t)\|_X \|w^h(t)\|_X^2 \\ &\quad + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2\gamma} \|S\| \|u_{\lambda_0}^h(t)\|_X^2. \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle $(0, t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|w^h(t)\|_X^2 &\leq 2 (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)} \int_0^t \|w^h(s)\|_X^2 ds \\ &\quad + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\gamma} \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}^2. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\|w^h(t)\|_X^2 \leq \frac{\|S\|}{\gamma} \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}^2 \exp \left(2 (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)} \right) |\lambda - \lambda_0|.$$

Alors,

$$\|u_{\lambda}^h - u_{\lambda_0}^h\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq \frac{T\lambda_0}{\gamma} \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)}^2 \exp \left(2 (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0,T;X)} \right) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0}.$$

De la même manière, nous démontrons que :

$$\|\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq \frac{T\lambda_0}{\gamma} \|S\| \|\hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^\infty(0,T;X)}^2 \exp \left(2 (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \|\hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^\infty(0,T;X)} \right) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0}.$$

Ce qui termine la preuve du théorème.

6.2 Evolution de la sensibilité du modèle réduit en fonction du nombre de modes

Nous répéterons la même procédure que dans le cas de l'équation de Burgers dans le chapitre précédent. La seule différence à signaler, est que nous ajouterons une hypothèse de régularité des solutions du système de Navier-Stokes, du type $u_\lambda(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Nous commençons par un lemme intermédiaire :

Lemme 12 *Soit $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne et orthonormale dans X . On note $\Phi_n = (\Phi_n^1, \Phi_n^2)^T$. Nous définissons la fonction $f_n = (f_n^1, f_n^2)^T$:*

$$f_n^1(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^1(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Et

$$f_n^2(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \Phi_n^2(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Alors, $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X^2$ est sommable.

Pour la preuve de ce lemme, on renvoie à [41].

Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 11 *Etant donnée $u_\lambda(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq 4T(1 + \mathcal{A}_2)(1 + \mathcal{G})f_1^{\lambda_0}(N) + 2(1 + \mathcal{F}) \left\| \partial_{x_2} \partial_{x_1} (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 f_2^{\lambda_0}(N), \quad (6.4)$$

où \mathcal{A}_2 est la constante correspondant à la proposition 4 du chapitre 4,

$$f_1^{\lambda_0}(N) = \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0},$$

$$f_2^{\lambda_0}(N) = \sum_{n=N+1}^M \|f_n^{\lambda_0}\|_X^2,$$

Les constantes \mathcal{G} et \mathcal{F} dépendent de $\|S\|$, $\|u_{\lambda_0}^h\|_\infty = \|u_{\lambda_0}^h\|_{L^\infty(0, T; X)}$ et C_4^1 .

Preuve :

La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 9 du chapitre 5.

Nous décomposons $(u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0})(t)$ comme suit :

$$(u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0})(t) = (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) + (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) - (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0})(t)$$

Or,

$$\begin{aligned} (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) - (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0})(t) &= (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) - \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) \\ &\quad + \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t) - (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \|u_\lambda^h - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(0, T; X)}^2 &\leq 2 \|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0, T; X)}^2 \\ &\quad + 2 \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \\ &\quad + 2 \left\| \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}) \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \end{aligned}$$

D'après la proposition 4 du chapitre 4, nous déduisons que $2 \|u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0}\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq 4T (1 + \mathcal{A}_2) f_1^{\lambda_0}(N)$.

Alors, nous sommes ramenés à l'étude des deux termes $\left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0, T; X)}^2$

et $\left\| \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}) \right\|_{L^2(0, T; X)}^2$.

Notons,

Etude du terme $\left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0, T; X)}^2$

$$\left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 = \sum_{n=N+1}^M \left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0})_X \right\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})}^2$$

Or, il est clair que :

$$\left((u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X = - \left(\partial x_2 \partial x_1 (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t), f_n^{\lambda_0} \right)_X$$

Alors,

$$\left\| (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h, \Phi_n^{\lambda_0})_X \right\|_{L^2(0, T; \mathbb{R})}^2 \leq \left\| \partial x_2 \partial x_1 (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0, T; X)}^2 \left\| f_n^{\lambda_0} \right\|_X^2.$$

Etude du terme $\left\| \Pi_X^N (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) - (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0}) \right\|_{L^2(0, T; X)}^2$

Ce qui revient à étudier la convergence POD-Galerkin pour le problème variationnel de dimension M , satisfait par $w^h(t) = (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h)(t)$.

Notons,

$$\begin{aligned}
\hat{w}(t) &= (\hat{u}_{\lambda, \lambda_0} - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \\
&= \sum_{n=1}^N a^{h,n}(t) \Phi_n^{\lambda_0}.
\end{aligned}$$

Où les $a^{h,n}(t)$ sont solutions des équations différentielles non linéaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} a^{h,n} = - \left(\operatorname{div} [\hat{w}(t) \otimes \hat{w}(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \left(\operatorname{div} [\hat{w}(t) \otimes \hat{u}_{\lambda_0}(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \left(\operatorname{div} [\hat{u}_{\lambda_0}(t) \otimes \hat{w}(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ \quad - \lambda \left(\nabla \hat{w}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ a^{h,n}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_X^N w^h(t) &= \sum_{n=1}^N \left(w^h(t), \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \Phi_n^{\lambda_0} \\
&= \sum_{n=1}^N w^{h,n}(t) \Phi_n^{\lambda_0}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 = \sum_{n=1}^N \left\| w^{h,n} - a^{h,n} \right\|_{L^2(0,T;\mathbb{R})}^2.$$

Où les $(w^{h,n} - a^{h,n})(t)$ vérifient le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (w^{h,n} - a^{h,n}) = - \left(\operatorname{div} [w^h(t) \otimes w^h(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \left(\operatorname{div} [w^h(t) \otimes u_{\lambda_0}^h(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ \quad - \left(\operatorname{div} [u_{\lambda_0}^h(t) \otimes w^h(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - \lambda \left(\nabla w^h(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X - (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla u_{\lambda_0}^h(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ \quad + \left(\operatorname{div} [\hat{w}(t) \otimes \hat{w}(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \left(\operatorname{div} [\hat{w}(t) \otimes \hat{u}_{\lambda_0}(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + \left(\operatorname{div} [\hat{u}_{\lambda_0}(t) \otimes \hat{w}(t)], \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ \quad + \lambda \left(\nabla \hat{w}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X + (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla \Phi_n^{\lambda_0} \right)_X \\ (w^{h,n} - a^{h,n})(0) = 0 \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Dans ce qui suit, nous notons $W^h(t) = (w^h - \Pi_X^N w^h)(t)$.

Nous multiplions l'équation (6.6) par $(w^{h,n} - a^{h,n})(t)$; Alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_X^2 &= - \left(\operatorname{div} \left[\left(\Pi_X^N w^h + W^h \right) (t) \otimes \left(\Pi_X^N w^h + W^h \right) (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \left(\operatorname{div} \left[\left(\Pi_X^N w^h + W^h \right) (t) \otimes u_{\lambda_0}^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \left(\operatorname{div} \left[u_{\lambda_0}^h (t) \otimes \left(\Pi_X^N w^h + W^h \right) (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \lambda \left(\nabla \left(\Pi_X^N w^h + W^h \right) (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla u_{\lambda_0}^h (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\operatorname{div} [\hat{w}(t) \otimes \hat{w}(t)], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\operatorname{div} [\hat{w}(t) \otimes \hat{u}_{\lambda_0}(t)], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\operatorname{div} [\hat{u}_{\lambda_0}(t) \otimes \hat{w}(t)], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \lambda \left(\nabla \hat{w}(t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla \hat{u}_{\lambda_0}(t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_X^2 &= \left(\operatorname{div} \left[\left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \otimes \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \left(\operatorname{div} \left[\left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \otimes \Pi_X^N w^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\operatorname{div} \left[\Pi_X^N w^h (t) \otimes \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \left(\operatorname{div} \left[W^h (t) \otimes W^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \left(\operatorname{div} \left[W^h (t) \otimes \Pi_X^N w^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \left(\operatorname{div} \left[\Pi_X^N w^h (t) \otimes W^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\operatorname{div} [\hat{w}(t) \otimes \hat{u}_{\lambda_0}(t)], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&+ \left(\operatorname{div} [\hat{u}_{\lambda_0}(t) \otimes \hat{w}(t)], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \left(\operatorname{div} \left[\left(\Pi_X^N w^h + W^h \right) (t) \otimes u_{\lambda_0}^h (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \left(\operatorname{div} \left[u_{\lambda_0}^h (t) \otimes \left(\Pi_X^N w^h + W^h \right) (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- \lambda \left\| \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\
&- \lambda \left(\nabla W^h (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X \\
&- (\lambda - \lambda_0) \left(\nabla \left(u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t), \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X
\end{aligned}$$

Or, il est clair que :

$$\left(\operatorname{div} \left[\left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \otimes \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X = 0.$$

Et,

$$\left(\operatorname{div} \left[\Pi_X^N w^h(t) \otimes \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right], \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right)_X = 0.$$

Par suite, en appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_X^2 &\leq (C_4^1)^2 \|S\|^{3/2} \left\| \Pi_X^N w^h(t) \right\|_X \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\| \left\| W^h(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\|^2 \left\| W^h(t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\| \left\| W^h(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\|^2 \left\| \Pi_X^N w^h(t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|S\| \left\| W^h(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} (C_4^1)^4 \|S\|^2 \left\| \Pi_X^N w^h(t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|S\| \left\| \left(u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} (C_4^1)^4 \|S\|^2 \left\| \Pi_X^N w^h(t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \|S\|^{3/2} (C_4^1)^2 \left\| \hat{u}_{\lambda_0}(t) \right\|_X \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\| \left\| W^h(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \|S\|^2 (C_4^1)^2 \left\| u_{\lambda_0}^h(t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\| \left\| \left(u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} (C_4^1)^2 \|S\|^2 \left\| \Pi_X^N w^h(t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \|S\|^{3/2} (C_4^1)^2 \left\| \hat{u}_{\lambda_0}(t) \right\|_X \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|S\| \left\| W^h(t) \right\|_X^2 + \frac{1}{2} \|S\|^2 (C_4^1)^4 \left\| u_{\lambda_0}^h(t) \right\|_X^2 \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &- \frac{\lambda}{2} \left\| \nabla \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^4}^2 \\ &+ \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \|S\| \left\| \left(u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|S\| \left\| \left(\Pi_X^N w^h - \hat{w} \right) (t) \right\|_X^2 \\ &+ \frac{\lambda}{2} \|S\| \left\| W^h(t) \right\|_X^2. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_X^2 &\leq \\
&\|S\| \left[8 (C_4^1)^2 \|S\|^{1/2} \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 13 (C_4^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 9 (C_4^1)^4 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \left\| (\Pi_X^N w^h - \hat{w})(t) \right\|_X^2 \\
&\quad + \|S\| \left[3 (C_4^1)^2 + 2 + \lambda \right] \left\| W^h(t) \right\|_X^2 \\
&\quad + \|S\| \left[1 + (C_4^1)^2 + \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \right] \left\| (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right\|_X^2.
\end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle $(0, t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left\| (\Pi_X^N w^h - \hat{w})(t) \right\|_X^2 &\leq \\
&\int_0^t \|S\| \left[8 (C_4^1)^2 \|S\|^{1/2} \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 13 (C_4^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 9 (C_4^1)^4 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right] \left\| (\Pi_X^N w^h - \hat{w})(s) \right\|_X^2 ds \\
&\quad + \|S\| \left[3 (C_4^1)^2 + 2 + \lambda \right] \int_0^T \left\| W^h(t) \right\|_X^2 dt \\
&\quad + \|S\| \left[1 + (C_4^1)^2 + \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \right] \int_0^T \left\| (u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0})(t) \right\|_X^2 dt.
\end{aligned}$$

Nous notons,

$$A = \|S\| \left[8 (C_4^1)^2 \|S\|^{1/2} \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty + 13 (C_4^1)^2 \|S\| \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 9 (C_4^1)^4 \|u_{\lambda_0}^h\|_\infty^2 + 1 \right].$$

Alors, en appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left\| (\Pi_X^N w^h - \hat{w})(t) \right\|_X^2 &\leq \|S\| \left[3 (C_4^1)^2 + 2 + \lambda \right] \exp(TA) \left\| W^h \right\|^2 \\
&\quad + \|S\| \left[1 + (C_4^1)^2 + \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \right] \exp(TA) \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|^2.
\end{aligned}$$

Et finalement,

$$\begin{aligned}
\left\| \Pi_X^N w^h - \hat{w} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 &\leq T \|S\| \left[3 (C_4^1)^2 + 2 + \lambda \right] \exp(TA) \left\| W^h \right\|^2 \\
&\quad + T \|S\| \left[1 + (C_4^1)^2 + \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} \right] \exp(TA) \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|^2 \\
&\leq \mathcal{G} \left\| u_{\lambda_0}^h - \hat{u}_{\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 + \mathcal{F} \left\| W^h \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \\
&\leq \mathcal{G} 2T (1 + \mathcal{A}_2) \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0} + \mathcal{F} \left\| \partial_{x_2} \partial_{x_1} (u_\lambda^h - u_{\lambda_0}^h) \right\|_{L^2(0,T;X)}^2 \sum_{n=N+1}^M \left\| f_n^{\lambda_0} \right\|_X^2.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du théorème.

6.3 Conclusion

Pour un nombre de modes fixé, nous avons obtenu une estimation de la sensibilité des modèles réduits pour les équations de Navier-Stokes en fonction de la distance entre les paramètres. Plus précisément, il s'agit de l'estimation a priori de l'écart entre u_λ^h et $\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}$.

Par ailleurs comme dans le cas de l'équation de Burgers, nous avons donné un résultat 11 de sensibilité en fonction du nombre de modes N du modèle réduit. Ce résultat n'est démontré que si on suppose une condition forte de régularité des solutions $u_\lambda^h(t)$ (de type $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$). Une estimation "heuristique" des différents termes intervenant dans ce résultat est aussi possible, mais sous condition d'hypothèse très forte sur le comportement de la solution des équations de Navier-Stokes. Ce qui peut limiter sa portée pratique.

Chapitre 7

Validation numérique

Dans un premier temps, nous montrerons une validation numérique du résultat 8 du chapitre 5 sur la sensibilité du modèle réduit ROM-POD associé à l'équation de Burgers, pour un nombre de modes fixé.

Dans un deuxième temps, nous présenterons des tests numériques de l'évolution du carré de l'erreur du modèle réduit (5.2) associé à l'équation de Burgers, en fonction du nombre de modes N . Plus précisément, nous validerons numériquement le résultat 9 du chapitre 5. Qui s'écrit formellement comme suit :

$$\|u_\lambda - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq f_1^{\lambda_0}(N) + f_2^{\lambda_0}(N) \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} \quad (7.1)$$

$$f_1^{\lambda_0}(N) = L \sum_{n=N+1}^M \mu_n^{\lambda_0}, \text{ où } L \text{ est une constante associée à } u_{\lambda_0}^h, \text{ et } f_2^{\lambda_0}(N) = \sum_{n=N+1}^M \|f_n^{\lambda_0}\|_X^2.$$

En plus, nous validerons numériquement l'estimation formelle en fonction de l'évolution de la régularité des solutions de l'équation de Burgers ($u_\lambda^h \in H^m(\Omega)$) [41]. Qui s'écrit :

$$\|u_\lambda - \hat{u}_{\lambda, \lambda_0}\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq f_1^{\lambda_0}(N) + \frac{1}{N^{2m-1}} \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} \quad (7.2)$$

7.1 Validation numérique de la sensibilité paramétrique du modèle réduit pour un nombre de modes fixé

Solution numérique pour $\lambda = \lambda_0$.

Pour le calcul numérique, nous considérons les conditions initiale et au bord suivantes :

$$\begin{cases} u_\lambda^h(x, 0) = \sin(\pi x), 0 < x < 1 \\ u_\lambda^h(0, t) = u_\lambda^h(1, t) = 0, t \in [0, 1] \end{cases}$$

Nous supposons $f = 0$.

Nous discrétisons les domaines temporel et spatial en $M = 200$ nœuds.

Pour calculer les solutions de l'équation (3.2), associées à différentes valeurs de la viscosité, nous discrétisons cette équation en utilisant un schéma d'Euler implicite par rapport au temps. En ce qui concerne le terme non linéaire $u_\lambda(t)\nabla u_\lambda(t)$, nous utilisons un schéma semi-implicite.

Considérons $\lambda_0 = 10^{-2}$. La solution numérique de l'équation de Burgers, associée à cette viscosité, est représentée sur la figure (7.1). Plus précisément, nous montrons sur cette figure le profil de $u_{\lambda_0}^h(t_i)$ pour différents instants.

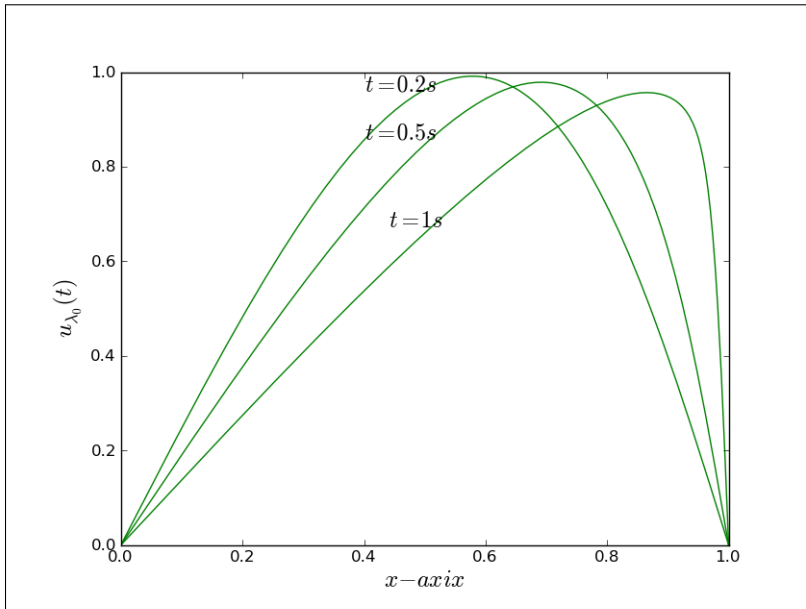


FIGURE 7.1 – La solution numérique $u_{\lambda_0}^h(t)$, pour $\lambda_0 = 10^{-2}$.

Base POD pour $u_{\lambda_0}^h$

Pour calculer la POD Φ^{λ_0} , nous utilisons la méthode des snapshots [69].

Alors, nous notons :

$$C_{\lambda_0} = \left(\frac{1}{M} \left(u_{\lambda_0}^h(t_i), u_{\lambda_0}^h(t_j) \right)_{\mathbb{R}^M} \right)_{1 \leq i, j \leq M},$$

où $(\cdot)_{\mathbb{R}^M}$ désigne le produit scalaire euclidien de l'espace \mathbb{R}^M .

Nous désignons par $v_n = (v_{i,n})_{1 \leq i \leq M}$ pour $n = 1, \dots, M$, un ensemble de vecteurs propres orthonormaux de la matrice C_{λ_0} . Alors, les vecteurs propres POD associés à $u_{\lambda_0}^h$, sont donnés par :

$$\Phi_n^{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M v_{i,n} u_{\lambda_0}^h(t_i).$$

Les dix premières valeurs de l'erreur due à l'approximation directe par la POD, de la solution $u_{\lambda_0}^h$ sont présentées dans le tableau (7.1). Nous remarquons que les cinq premiers modes POD capturent un grand pourcentage de l'énergie cinétique $\|u_{\lambda_0}^h\|_{L^2(0,T;X)}^2 \cong \sum_{n=1}^M \mu_n^{\lambda_0}$.

<i>modes – POD</i>	<i>erreur</i>
1	$3.58784914e - 01$
2	$1.55734895e - 02$
3	$6.39895831e - 04$
4	$3.81187212e - 05$
5	$3.68559574e - 06$
6	$2.56290577e - 08$
7	$2.08562743e - 09$
8	$1.93515109e - 10$
9	$1.79758134e - 11$
10	$2.09821738e - 13$

TABLE 7.1 – L'erreur de l'approximation par POD obtenue respectivement en projetant la solution $u_{\lambda_0}^h$ sur les N premiers modes POD, pour $N = 1, 2, \dots, 10$.

Dorénavant, nous fixons $N = 5$.

Les cinq premiers vecteurs propres POD sont représentés sur les figures (7.2), (7.3) and (7.4).

ROM-POD pour $\lambda = \lambda_0$

Les trois premiers coefficients du ROM-POD, $a_{\lambda_0}^{h,n}(t)$ pour $n = 1, 2, 3$, sont représentés en comparaison avec ceux de l'approximation directe de la solution numérique $u_{\lambda_0}^h, u_{\lambda_0}^{h,n}(t)$ pour $n = 1, 2, 3$, dans les figures (7.5) et (7.6).

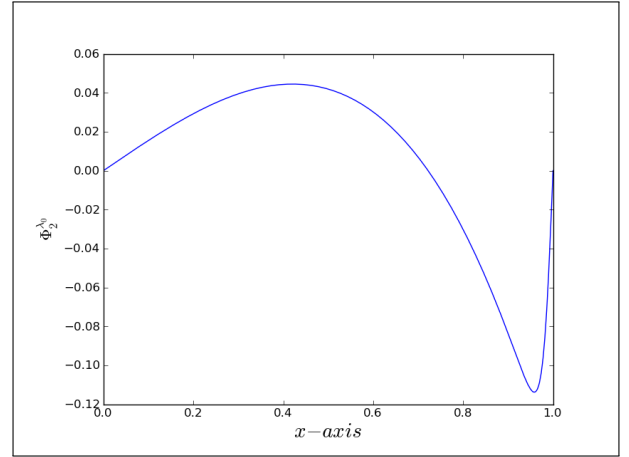
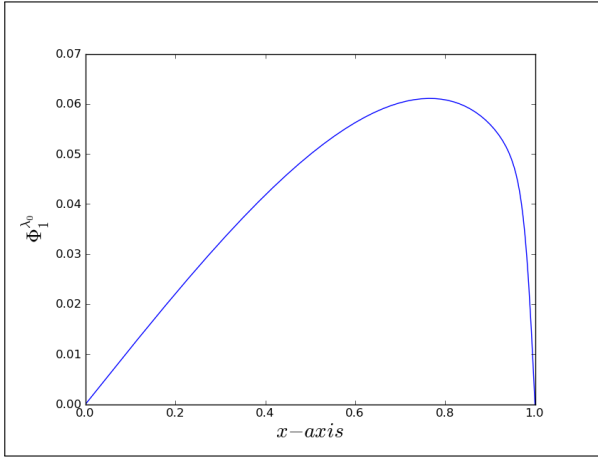


FIGURE 7.2 – Les modes-POD $\Phi_1^{\lambda_0}$ et $\Phi_2^{\lambda_0}$

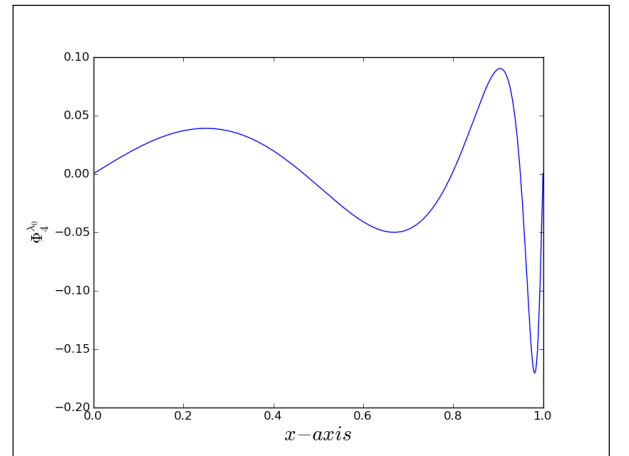
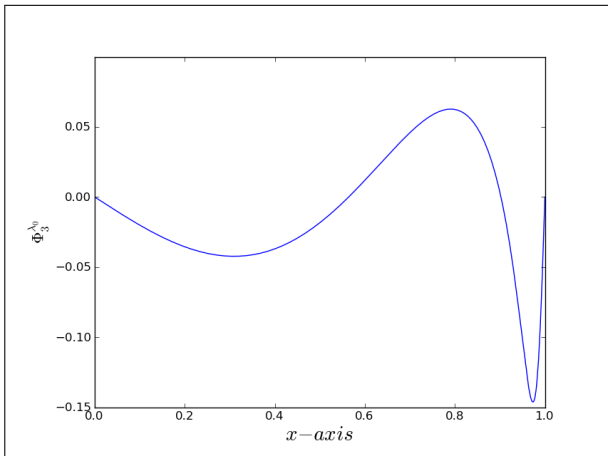


FIGURE 7.3 – Les modes-POD $\Phi_3^{\lambda_0}$ et $\Phi_4^{\lambda_0}$

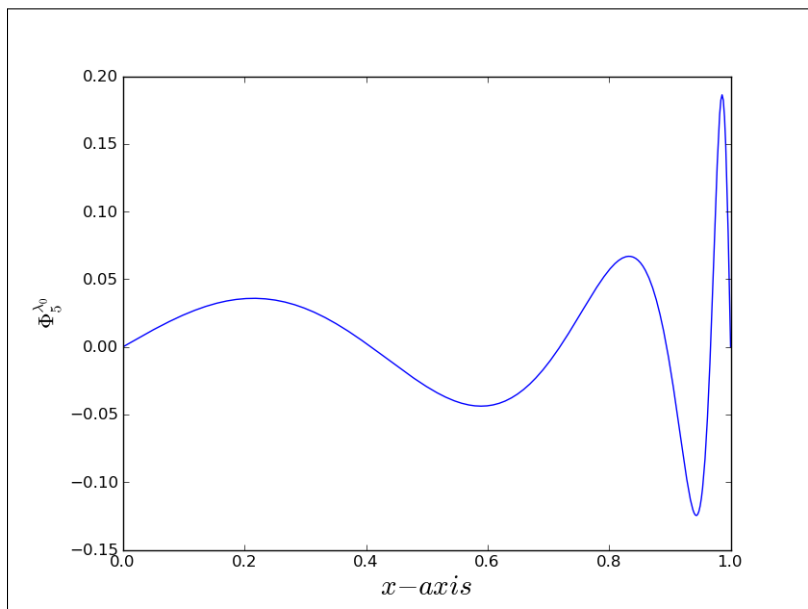
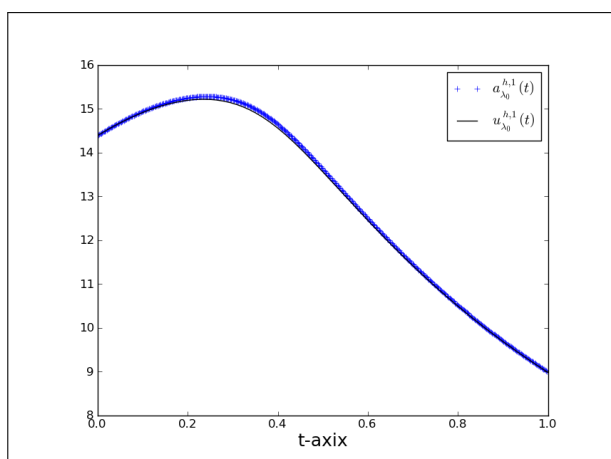
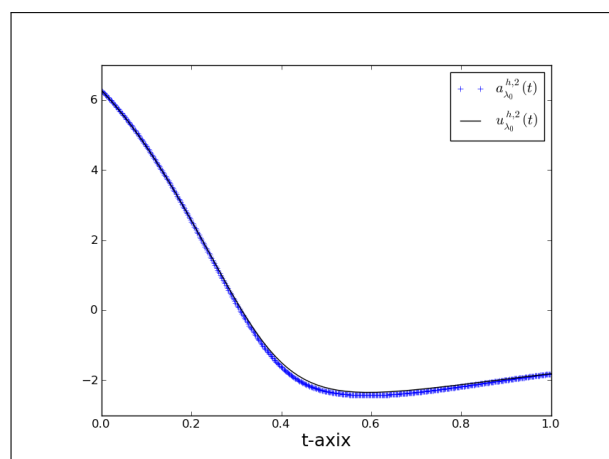


FIGURE 7.4 – Le mode-POD $\Phi_5^{\lambda_0}$



(a)



(b)

FIGURE 7.5 – (a) : $a_{\lambda_0}^{h,1}(t)$ (ligne bleue en pointillés) et $u_{\lambda_0}^{h,1}(t)$ (ligne noire). (b) : $a_{\lambda_0}^{h,2}(t)$ (ligne bleue en pointillés) et $u_{\lambda_0}^{h,2}(t)$ (ligne noire).

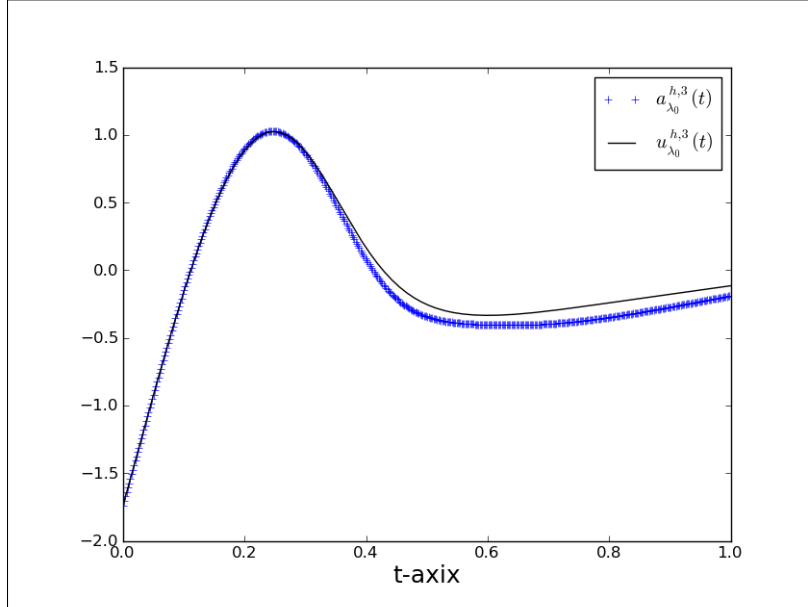


FIGURE 7.6 – $a_{\lambda_0}^{h,3}(t)$ (ligne bleue en pointillés) et $u_{\lambda_0}^{h,3}(t)$ (ligne noire).

Evolution paramétrique

Nous supposons $\lambda \in [5 \times 10^{-3}, 1.9 \times 10^{-2}]$.

Nous considérons d'abord pour plusieurs valeurs du paramètre λ , des tests de comparaison sur des instants donnés entre la solution numérique $u_{\lambda}^h(t)$ et la solution approchée du modèle réduit $\hat{u}_{\lambda,\lambda_0}(t)$. On suppose toujours le nombre de modes fixe et égal à 5. Nous prenons $\lambda = 9 \cdot 10^{-3}$, $7 \cdot 10^{-3}$ et $5 \cdot 10^{-3}$. Pour chacune de ces viscosités, nous traçons les courbes correspondant à la solution numérique et celle approchée sur les instants $0.2s$, $0.5s$ et $1s$. Nous obtenons les figures (7.7), (7.8) et (7.9). Nous remarquons que plus la viscosité λ s'éloigne de celle de référence, la solution approchée du modèle réduit est moins bonne par rapport à la solution numérique.

Nous traçons l'évolution du carré de l'erreur moyenne en temps (5.2) en fonction de la variation de λ . Qu'on note :

$$\mathcal{E}_{\lambda}^2 = \left\| u_{\lambda}^h - \hat{u}_{\lambda,\lambda_0} \right\|_{L^2(0,T;X)}^2.$$

Nous obtenons la figure (7.10). Nous retrouvons alors le résultat annoncé dans le théorème 8.

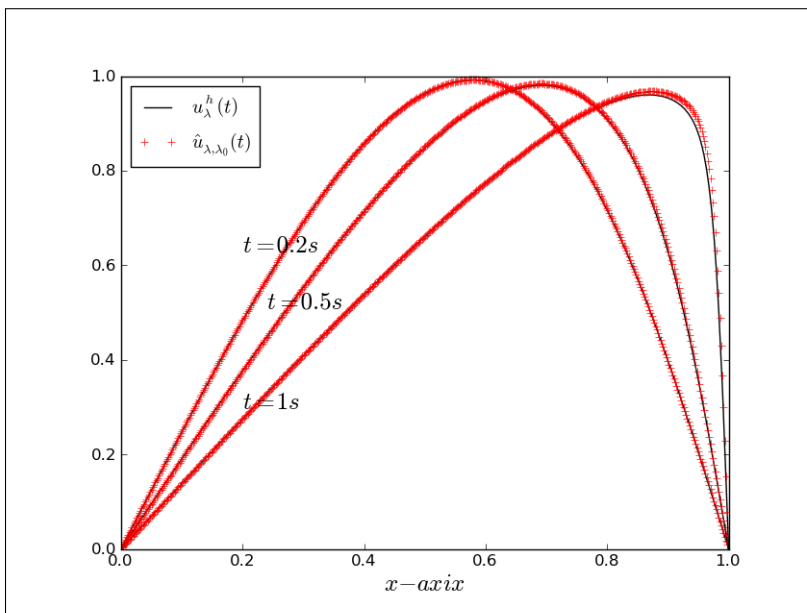


FIGURE 7.7 - $u_\lambda^h(t)$ et $\hat{u}_{\lambda,\lambda_0}(t)$ pour $\lambda = 9.10^{-3}$

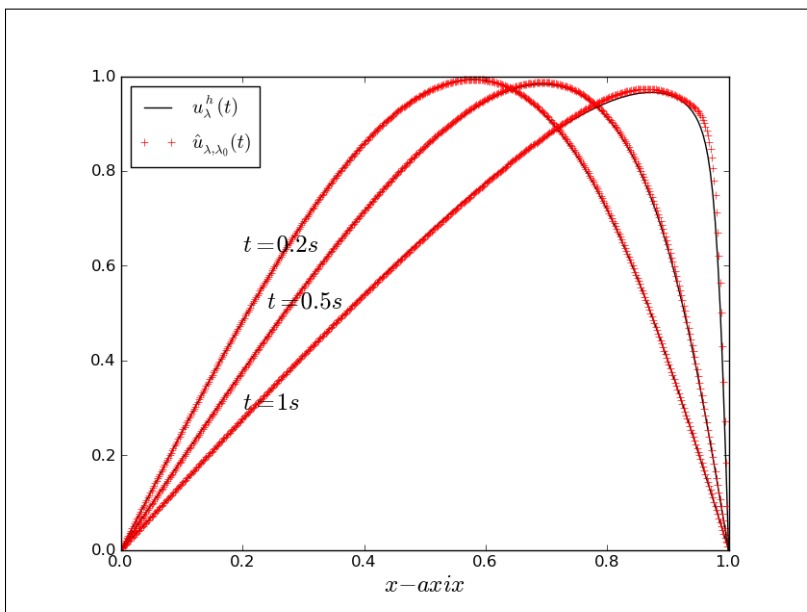


FIGURE 7.8 - $u_\lambda^h(t)$ et $\hat{u}_{\lambda,\lambda_0}(t)$ pour $\lambda = 7.10^{-3}$

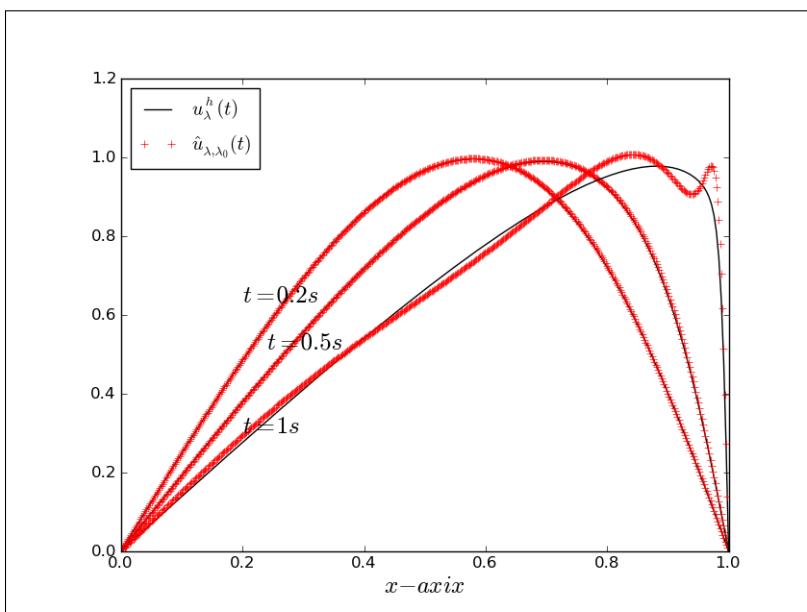


FIGURE 7.9 – $u_\lambda^h(t)$ et $\hat{u}_{\lambda, \lambda_0}(t)$ pour $\lambda = 5.10^{-3}$

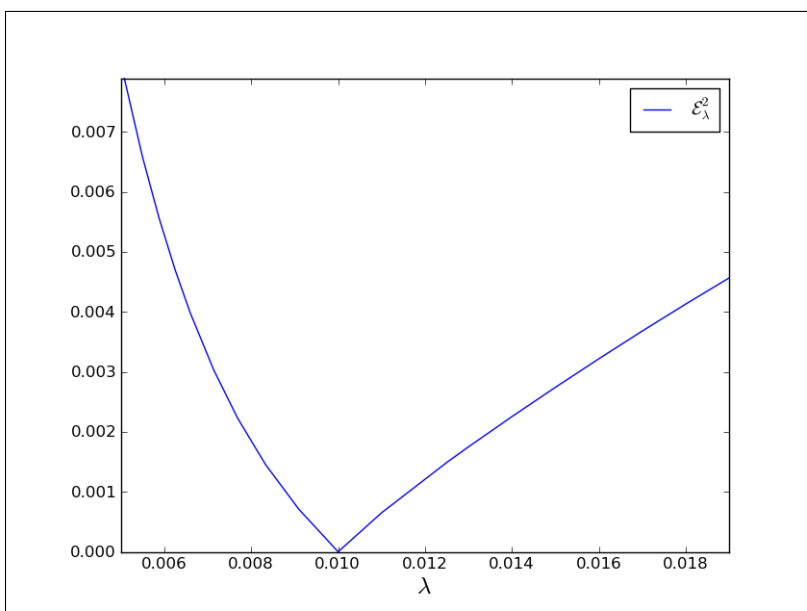


FIGURE 7.10 – Evolution de \mathcal{E}_λ^2 , pour $\lambda \in [5 \times 10^{-3}, 1.9 \times 10^{-2}]$.

7.2 Validation numérique de la sensibilité du modèle réduit en fonction du nombre de modes

Pour des valeurs λ et λ_0 données, nous illustrerons l'évolution en fonction de N , du carré de l'erreur du modèle réduit notée cette fois $\mathcal{E}_\lambda^2(N)$, le second membre de la majoration (7.1) et celui de l'estimation (7.2). Pour simplifier, nous noterons respectivement ces deux derniers par $f_2^{\lambda_0}(N)$ et $\frac{1}{N^{2m-1}}$.

Nous considérons des tests relatifs à la solution numérique de l'équation de Burgers avec les conditions initiale et au bord suivantes :

$$\begin{cases} u_\lambda^h(x, 0) = \sin(\pi x), 0 < x < 1 \\ u_\lambda^h(0, t) = u_\lambda^h(1, t) = 0, t \in [0, 1] \end{cases}$$

Où, le second membre f est supposé nul.

Evolution de la sensibilité du ROM-POD associé à la solution numérique en fonction du nombre de modes

Considérons $\lambda_0 = 0.1$ et $\lambda = 0.05$. Nous obtenons la figure (7.11).

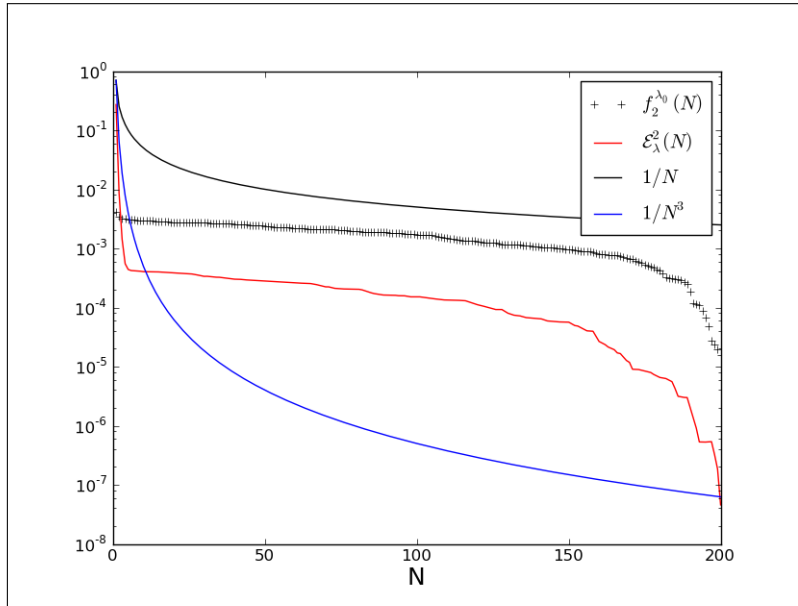


FIGURE 7.11 – $\mathcal{E}_\lambda^2(N)$ (ligne rouge), $f_2^{\lambda_0}(N)$ (ligne pointillée), $\frac{1}{N}$ (ligne noire) et $\frac{1}{N^3}$ (ligne bleue)

Pour $\lambda_0 = 0.01$ et $\lambda = 0.007$, nous obtenons la figure (7.12).

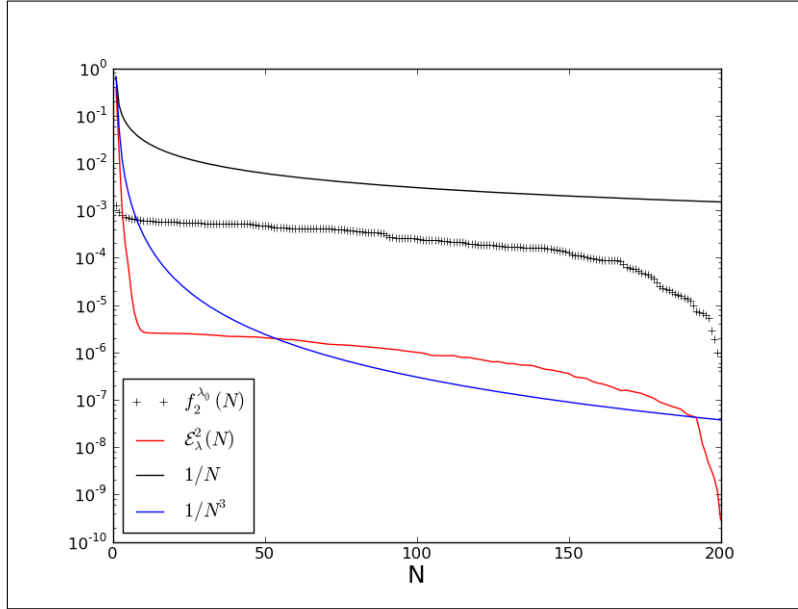


FIGURE 7.12 – $\mathcal{E}_\lambda^2(N)$ (ligne rouge), $f_2^{\lambda_0}(N)$ (ligne pointillée), $\frac{1}{N}$ (ligne noire) et $\frac{1}{N^3}$ (ligne bleue)

Pour $\lambda_0 = 0.01$ et $\lambda = 0.005$, nous obtenons le graphe (7.13).

A partir de ces résultats, nous retrouvons l'estimation (7.1) annoncé dans le résultat 9 du chapitre 5, et l'estimation (7.2) pour $m = 1$.

Considérons des valeurs de viscosités plus grandes : Soit $\lambda_0 = 1$ et $\lambda = 0.3$, alors nous obtenons la figure (7.14). Nous retrouvons l'estimation (7.1) et nous remarquons que l'estimation (7.2) est vérifiée pour $m = 1$ et même pour $m = 2$. Soit $\lambda = 1$ et $\lambda_0 = 0.5$, alors nous obtenons la figure (7.15). Nous retrouvons l'estimation (7.1) et la majoration (7.2) pour $m = 1$, $m = 2$ et $m = 3$. Ceci permet de retrouver l'estimation théorique (7.2) en fonction de la régularité de la solution numérique u_λ^h .

7.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vérifié numériquement les résultats mathématiques de la sensibilité du modèle ROM-POD pour l'équation de Burgers. D'une part, nous avons retrouvé pour un nombre de modes fixé, l'évolution linéaire du carré de l'erreur du modèle réduit, en fonction de la variation de la viscosité. D'une autre part, nous avons retrouvé numériquement l'estima-

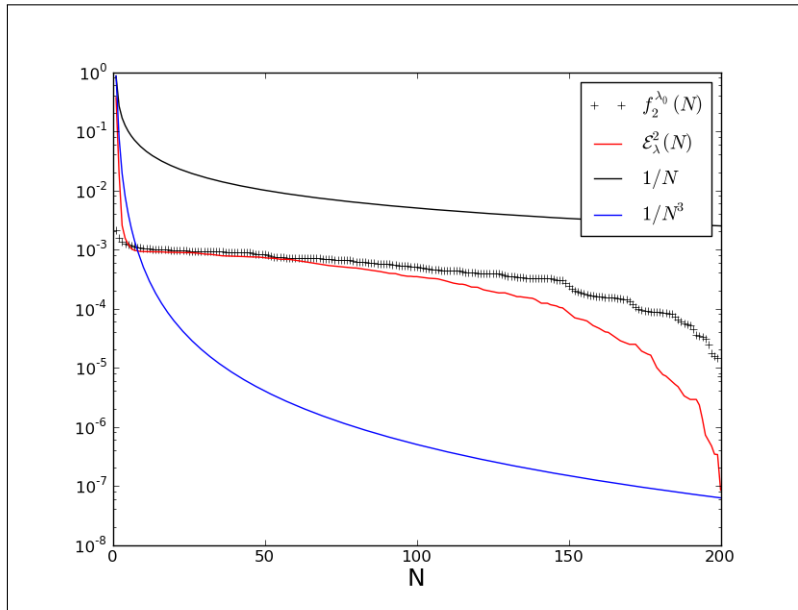


FIGURE 7.13 – $\mathcal{E}_\lambda^2(N)$ (ligne rouge), $f_2^{\lambda_0}(N)$ (ligne pointillée), $\frac{1}{N}$ (ligne noire) et $\frac{1}{N^3}$ (ligne bleue)

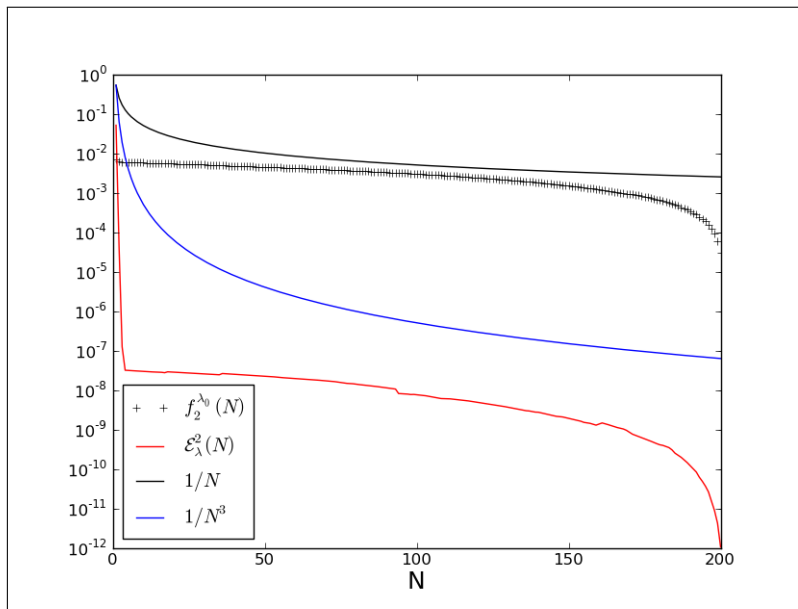


FIGURE 7.14 – $\mathcal{E}_\lambda^2(N)$ (ligne rouge), $f_2^{\lambda_0}(N)$ (ligne pointillée), $\frac{1}{N}$ (ligne noire) et $\frac{1}{N^3}$ (ligne bleue)

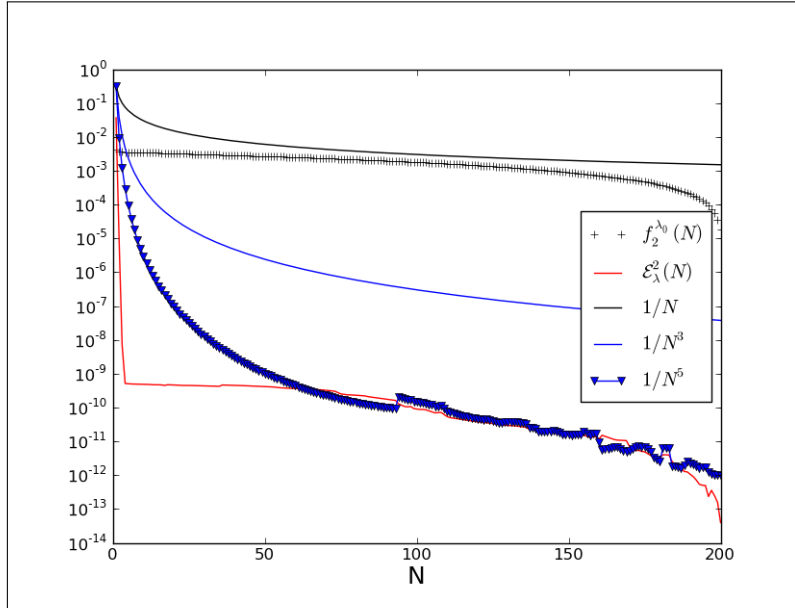


FIGURE 7.15 – $\mathcal{E}_\lambda^2(N)$ (ligne rouge), $f_2^{\lambda_0}(N)$ (ligne pointillée noire), $\frac{1}{N}$ (ligne noire), $\frac{1}{N^3}$ (ligne bleue) et $\frac{1}{N^5}$ (ligne pointillée bleue)

tion formelle (7.1) du carré de l’erreur du modèle réduit en fonction de l’évolution du nombre de modes. Des estimations plus raffinées (7.2) de la sensibilité du ROM-POD ont été obtenues par rapport à l’évolution de sa dimension : Ces majorations sont en $O\left(\frac{1}{N^{2m-1}}\right)$, selon l’évolution de la régularité des solutions de l’équation de Burgers ($u_\lambda \in H^m(\Omega)$).

Par ailleurs, en ce qui concerne les équations de Navier-Stokes, une validation pratique du résultat 10 du chapitre 6 peut être illustrée dans le travail de A. Hay, J. Borggaard et D. Pelletier [1, 53, 52], dans le cadre de l’utilisation de la méthode de l’analyse de la sensibilité paramétrique SEM, pour le calcul d’un modèle réduit performant par rapport à l’évolution du nombre de Reynolds d’un écoulement fluide bidimensionnel sur un cylindre carré. Des tests numériques montrant l’évolution du carré de l’erreur (expression (6.2)) par rapport à une gamme de Reynolds variant entre les valeurs 60 et 150, indiquent qu’elle croît avec la distance entre deux différents Reynolds, et varie d’une manière presque linéaire par rapport à la variation du nombre de Reynolds.

Conclusion et Perspectives

Cette thèse a porté essentiellement sur la démonstration de résultats mathématiques de sensibilité de la méthode de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) appliquée aux problèmes de type Burgers et Navier-Stokes en 2D. L'objectif principal était de trouver des critères pratiques qui permettent de décider de l'efficacité d'un modèle ROM-POD obtenu à partir d'une viscosité de référence. Pour cela, on a étudié des erreurs de type POD-Galerkin, en fonction de la variation du paramètre de la viscosité cinématique et le nombre de modes retenus pour cette approximation. Ces démonstrations se basaient sur des techniques d'estimations a priori en utilisant les méthodes énergétiques classiques.

Dans le chapitre 2, nous avons établis des résultats mathématiques de sensibilité des éléments propres POD, dans le cadre d'un problème d'évolution linéaire. Nous avons démontré le caractère lipschitzien de l'opérateur POD et de son spectre en fonction de l'évolution paramétrique. Par contre, nous n'avons pu démontrer qu'un résultat de continuité des espaces propres POD, en fonction de l'évolution paramétrique. Ce qui nous a obligé de chercher d'autres estimations a priori liées directement au comportement paramétrique des solutions exactes des problèmes, pour pouvoir démontrer un résultat sur la sensibilité de la méthode ROM-POD. Ceci a été fait dans le chapitre 3, où plus précisément on a démontré le caractère holdérien des solutions exactes de ces problèmes en fonction de la variation de la viscosité cinématique. Dans le chapitre 4, nous avons établis pour une viscosité fixe, des estimations a priori de l'erreur commise par approximation POD-Galerkin des problèmes semi-discrets en espace associés à chacun des problèmes de Burgers et de Navier-Stokes 2D. C'est dans le chapitre 5 que nous avons considéré l'étude de la sensibilité de la méthode ROM-POD, pour le cas de l'équation de Burgers. Nous avons démontré un résultat mathématique permettant d'aboutir à un critère pratique sur la dépendance de la dimension N d'un modèle ROM-POD pour un paramètre de référence, en fonction de l'écart paramétrique de telle sorte de ne pas dépasser une erreur donnée. L'intérêt pratique de ce résultat, est qu'il permettra à des numériciens de définir pour un paramètre de référence, une région de fiabilité maximale du modèle ROM-POD associé, pour laquelle la réduction de modèle reste raisonnable. Dans le chapitre 6 nous retrouvons le même résultat mathématique dans le cas des équations de Navier-Stokes, à condition de supposer une condition supplémentaire sur la régularité des solutions (de type $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$). Dans le chapitre 7 nous avons

présenté des tests numériques qui valident les résultats mathématiques du chapitre 5. Pour un nombre de modes fixé, nous avons montré le comportement linéaire du carré de l'écart entre la solution numérique et celle du modèle réduit en fonction de la variation de la viscosité. En plus, nous avons validé numériquement la majoration mathématique en fonction de l'évolution du nombre de modes. Nous avons retrouvé des majorations du carré de l'erreur du modèle réduit en $O\left(\frac{1}{N^{2m-1}}\right)$ par rapport à l'évolution du nombre de modes, selon la régularité des solutions de l'équation de Burgers ($u_\lambda^h \in H^m(\Omega)$).

Pour la suite du travail, il est nécessaire dans un premier temps d'obtenir des estimations plus raffinées des termes du théorème 11, qui exigent des hypothèses de régularité moins fortes. Parmi les intérêts importants de l'étude paramétrique du modèle réduit, on peut évoquer la prédiction des bifurcations dans les écoulements. Nous serons alors en présence de conditions portant sur des écoulements où le résultat d'unicité n'est plus valable. Une partie des démonstrations ici devrait être réadaptée pour ces situations. Il est aussi nécessaire d'utiliser des techniques d'interpolation de modèles réduits valables chacun dans une région de confiance autour d'un paramètre de référence, pour construire un modèle réduit global capable de reproduire les bifurcations du problème complet. Une des techniques d'interpolation envisagée peut être celle qui utilise les variétés Grasmaniennes, développée dans [16]. L'estimation de l'erreur du modèle ROM-POD global, reste à effectuer. Enfin, nous envisageons à court terme de s'appuyer sur ces critères mathématiques pour le développement de simulations numériques POD-ROM pour des écoulements instationnaires autour d'un cylindre en vibration. Ce travail se fait en collaboration avec Marie Pomarède et Erwan Liberge [74, 42, 73], qui travaillent sur le développement de modèles réduits pour des problèmes d'interaction fluide-structure.

Bibliographie

- [1] Hay A., Borggaard JT., and Pelletier D. Local improvements to reduced-order models using sensitivity analysis of the proper orthogonal decomposition. *Journal of Fluid Mechanics*, 629 :41–72, 2009.
- [2] Iollo A., Lanteri S., and Désérié JA. Stability properties of POD-Galerkin approximations for the compressible navier-stokes equations. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 13 :377–396, 2000.
- [3] Le Pourhiet A. Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : une première approche. *Cepadues Editions, Toulouse, ISBN*, pages 2–85428–174–6, 1988.
- [4] K. Afanasiev and M. Hinze. Adaptive control of a wake flow using Proper Orthogonal Decomposition. *Shape Optimization and Optimal Design, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 216, 2001.
- [5] S. Ahuja and C.W. Rowley. Feedback control of unstable steady states of flow past a flat plate using reduced-order estimators. *Journal of fluid mechanics*, 645 :447–478, 2010.
- [6] I. Akhtar. Parallel simulations, reduced order modeling, and feedback control of vortex shedding using fluidic actuators. *PhD thesis, Virginia Tech*, 2008.
- [7] V.R. Algazi and D.J. Sakrison. On the optimality of the Karhunen-Loève expansion. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 15, 1969.
- [8] C. Allery, C. Béghein, and A. hamdouni. Applying Proper Orthogonal Decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10(8) :907–920, 2005.
- [9] C. Allery, S. Guerin, A. Hamdouni, and A. Sakout. Experimental and numerical POD study of the Coanda effect used to reduce self-sustained tones. *Mechanics Research Communications*, 31(1) :105–120, 2004.
- [10] C. Alley, C. Béghein, and A. Hamdouni. Investigation of particle dispersion by a ROM POD approach. *International Applied Mechanics*, 44(1) :133–142, 2008.
- [11] C. Alley, A. Hamdouni, D. Ryckelynck, and N. Verdon. A Priori Reduction Method for solving the two-dimensional Burgers’ equations. *Applied Mathematics and Computation*, 217(15) :6671–6679, 2011.

- [12] B.O. Almroth, P. Stern, and F.A. Brogan. Automatic choice of global shape functions in structural analysis. *AIAA J.*, 16 :525–528, 1978.
- [13] A. Ammar, F. Chinesta, P. Diez, and A. Huerta. An error estimate for separated representation of highly multidimensional models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1872–1880, 2010.
- [14] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensionnal partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *J. of Non Newtonian Fluid Mechanics*, 139 :153–176, 2006.
- [15] A. Ammar, M. Normandin, and F. Chinesta. Solving parametric complex fluids models in rheometric fows. *J. of Non Newtonian Fluid Mechanics*, 165(23-24) :1588–1601, 2010.
- [16] David Amsallem, Julien Cortial, Kevin Carlberg, and Charbel Farhat. A method for interpolation on manifolds structural dynamics reduced-order models. *International journal for numerical methods in engineering*, 80 :1241–1258, 2009.
- [17] W.K. Anderson, J.C. Newman, D.L. Whitfield, and E.J. Nielsen. Sensitivity analysis of navier-stokes equations on unstructured meshes using complex variables. *AIAA J.*, 39(1) :56–63, 2001.
- [18] C.A. Andrews, J.M. Davies, and G.R. Schwartz. Adaptative data compression. *Proc. IEEE*, 55, 1967.
- [19] A.C. Antoulas. Approximation of large-scale dynamical systems. *Advances in Design and Control. SIAM*, 2005.
- [20] N. Aubry, P. Holmes, J.L. Lumley, and E. Stone. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 192 :115–173, 1988.
- [21] M. Bergmann, C.-H. Bruneau, and A. Iollo. Enablers for robust POD models. *Journal of Computational Physics*, 228(2) :516–538, 2009.
- [22] M. Bergmann, L. Cordier, and J.P. Brancher. Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model. *Physics of Fluids*, 17 :097101, 2005.
- [23] M. BERGMANN, E. LOMBARDI, and A. IOLLO. Amélioration de la robustesse des bases pod. *19ème Congrès Français de Mécanique*, 2009.
- [24] J. borggaard and J. Burns. A pde sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. *J. Comput. Phys.*, 136(2) :367–384, 1997.
- [25] Jeff Borggaard, Traian Iliescu, and Zhu Wang. Artificial viscosity proper orthogonal decomposition. *Mathematical and Computer Modelling*, 53 :269–279, 2011.
- [26] Franck Boyer and Pierre Fabrie. Eléments d’analyse pour l’étude de quelques modèles d’écoulements de fluides visqueux incompressibles. *Mathématiques et Applications, Springer*, 52.

- [27] T. Braconnier, M. Ferrier, J.-C. Jouhaud, M. Montagnac, and P. Sagaut. Towards an adaptive POD-SVD surrogate model for aeronautic design. *Computer and Fluids*, (40) :195–209, 2011.
- [28] T. Cazenave and A. Haraux. Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires. *Ellipses*, 1990.
- [29] A. Chatterjee. An introduction to the Proper Orthogonal Decomposition. *Current Science*, 78(7) :808–817, 2000.
- [30] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational methods in Engineering*, 17(4), 2010.
- [31] P. G. Ciarlet. The finite element methods for elliptic problems. *North-holland, Amsterdam*, 1978.
- [32] Mathieu COUPLET, Claude BASDEVANT, and Pierre SAGAUT. Modélisation d'un écoulement turbulent par un système dynamique de dimension réduite. *Canum 2003*.
- [33] R. Courant and D. Hilbert. Methods of mathematical physics. *John Wiley and Sons, New-York*, 1, 1953.
- [34] Amsallem D. and Farhat C. An interpolation method for adapting reduced order models and application to aeroelasticity. *American Institute of Aeronautic and Astronautics*, 46(7) :1803–1813, 2008.
- [35] Amsallem D., Cortial J., and Farhat C. On-demand cfd-based aeroelastic predictions using a database of reduced-order bases and models. *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Orlando, Florida, 5-8 January 2009. AIAA Paper 2009-800*.
- [36] J. Delville, L. Ukeiley, L. Cordier, J.-P. Bonnet, and M. Glauser. Examination of large-scale structures in a turbulent mixing layer. Part 1. Proper Orthogonal Decomposition. *J. Fluid Mech.*, 391 :91–122, 1999.
- [37] A. Dumon. Réduction de type pgd pour la résolution des écoulements incompressibles. *Thèse, Université de La Rochelle, France, 2011*.
- [38] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar. Proper general decomposition (pgd) for the resolution of navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 230(4) :1387–1407, 2011.
- [39] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar. Proper generalized decomposition method for incompressible flows in stream-vorticity formulation. *European Journal of Computational Mechanics*, 19(5-7) :591–617, 2011.
- [40] J. Eftang, A. Patera, and E. Ronquist. An hp certified reduced basis method for parametrized elliptic partial differential equations. *SIAM J. Sci. Comput*, 32(6) :3170–3200, 2010.

- [41] A. Elhamidi and A. Hamdouni. On the decay rate of pod coefficients and the Meyer's norm. *Submitted in Journal of Mathematical Analysis and Applications*.
- [42] E.Liberge, M.Benaouicha, and A.Hamdouni. Proper Orthogonal Decomposition (POD) investigation in Fluid Structure Interaction. *European Journal of Computational Mechanics*, 16 :401–418, 2007.
- [43] E.Liberge, M.Benaouicha, and A.Hamdouni. Low order dynamical system for fluid rigid body interaction problem using POD method. *International Journal of Multiphysics*, 2 :59–81, 2008.
- [44] A. Falco et A. Nouy. A proper generalized decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional eckart-young approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376(2) :469–480, 2011.
- [45] A. Falco et A. Nouy. Proper generalized decomposition for nonlinear convex problems in tensor banach spaces. *Numerische Mathematik*, 121(3) :503–530, 2012.
- [46] P. Ladeveze et A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30) :3061–3087, 2003.
- [47] J.P. Fink and W.C. Rheinboldt. On the error behavior of the reduced basis technique for nonlinear finite element approximations. *Z. Angew. Math. Mech.*, 63(1) :21–28, 1983.
- [48] G.H. Golub and C.F. Van Loan. Matrix computations. *The Johns Hopkins University Press, Baltimore*, 1990.
- [49] M.A. Grepl and A.T. Patera. A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations. *Math. Model. Numer. Anal.*, 39(1) :157–181, 2005.
- [50] B. Haasdonk. Convergence rates of the pod-greedy method. *SimTech Preprint, University of Stuttgart, Submitted to M2AN*, (2011-23), 2011.
- [51] A. Hay, J. Borggaard, I. Akhtar, and D. Pelletier. Reduced order models for parameter dependent geometries based on shape sensitivity analysis. *Journal of computational Physics*, 229 :1327–1352, 2010.
- [52] A. Hay., J. Borggaard, and D. Pelletier. Improved low-order modelling from sensitivity analysis of the proper orthogonal decomposition. *J. Fluid Mech.*, 629 :41–72, 2009.
- [53] Alexander Hay, Imran Akhtar, and Jeff T. Borggaard. On the use of sensitivity analysis in model reduction to predict flows for varying inflow conditions. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 68 :122–134, 2012.
- [54] Thibault Henri and Jean-Pierre Yvon. Convergence estimates of POD-Galerkin methods for parabolic problems. *System modeling and optimisation, IFIP International Federation for Information Processing*, 166 :295–306, 2005.

- [55] J. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part i : Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19 :275–311, 1982.
- [56] J. G. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part ii : Stability of solutions and error estimates uniform in time. *SIAM J. Numer. Anal.*, 23 :750–777, 1986.
- [57] J. G. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part iii : Smoothing property and higher-order error estimates for spatial discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25 :489–512, 1988.
- [58] J. G. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part iv : Error analysis for second-order time discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27 :353–384, 1990.
- [59] F. Ilinca and D. Pelletier. A continuous shape sensitivity equation method for unsteady laminar flows. *Int. J. Comput. Fluid dyn.*, 21(7-8) :255–266, 2007.
- [60] F. Ilinca, D. Pelletier, and A. Hay. First and second order sensitivity equation methods for value and shape parameters. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 57(9) :1349–1370, 2008.
- [61] K. Ito and S.S Ravindran. A reduced-order method for simulation and control of fluid flows. *J. Comp. Phys.*, 143 :403–425, 1998.
- [62] I.T. Joliffe. Principal component analysis. *Springer-Verlag*, 1986.
- [63] Sungkwon Kang and Yong Hoon Kwon. A nonlinear Galerkin method for the Burgers equation. *Comm. Korean Math. Soc.*, 17(2) :467–478, 1997.
- [64] K. Karhunen. Zur spektral theorie stochastischer prozesse. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser, A1*(34), 1946.
- [65] Hirotochi Kikuchi, Yukio Tamura, Hiroshi Ueda, and Kazuki Hibi. Dynamic wind pressures acting on a tall building model-proper orthogonal decomposition. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 69-71 :631–646, 1997.
- [66] M. Kirby and L. Sirovich. Application of the Karhunen-Loève procedure for the characterization of human faces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(1) :103–108, 1990.
- [67] K. Kunisch and S. Volkwein. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. *Numer. Math.*, 90 :117–148, 2001.
- [68] K. Kunisch and S. Volkwein. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40 :492–515, 2002.
- [69] Sirovitch L. Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I : Coherent structures, Part II : Symmetries and transformations, Part III : Dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3) :561–590, 1987.

- [70] P. Ladeveze. New approaches and non-incremental methods of calculation. nonlinear computational structural mechanics. *Springer Verlag*, 1999.
- [71] T. Lassila and G. Rozza. Parametric free-form shape design with PDE models and reduced basis method. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 199 :1583–1592, 2010.
- [72] Aiqun Li and Earl H. Dowell. Modal reduction of mathematical models of biological molecules. *Journal of Computational Physics*, 211 :262–288, 2006.
- [73] E. Liberge and A. Hamdouni. Reducer order modeling method via proper orthogonal decomposition (POD) for flow around an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, 26(2) :292–311, 2010.
- [74] E. Liberge, M. Pomarède, and A. Hamdouni. Reduced-order modeling by POD multiphase approach for fluid-structure interaction. *European Journal of Computational Mechanics*, 19 :41–52, 2010.
- [75] T. Lieu, C. Farhat, and M. Lesoinne. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (195) :5730–5742, 2006.
- [76] M. Loève. Probability theory. *Van Nostrand*, 1955.
- [77] S.-Y. Lu and P. Sagaut. Direct sensitivity analysis for smooth unsteady compressible flows using complex differentiation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 53(12) :1863–1886, 2007.
- [78] J. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation vol. In A.M. Yaglom and Tararsky*, pages 166–178, 1967.
- [79] Zhendong Luo, Jiang Zhu, Ruiwen Wang, and I.M. Navon. Proper orthogonal decomposition approach and error estimation of mixed finite element methods for the tropical Pacific Ocean reduced gravity model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 :4184–4195, 2007.
- [80] Andrea Manzoni, Alfio Quarteroni, and Gianluigi Rozza. Computational reduction for parametrized PDEs : strategies and applications. *Mathematics Institute of Computational Science and Engineering*, (15), 2012.
- [81] J.R.R.A. Martins, P. Stradza, and J.J. Alonso. The complex-step derivative approximation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids-TOMS*, 29(3) :245–262, 2003.
- [82] M. Nemeč, D.W. Zingg, and T.H. Pulliam. Multi-point and multi-objective aerodynamic shape optimization. *AIAA J.*, 42(6) :1057–1065, 2004.
- [83] N. Nguyen, G. Rozza, P. Huynh, and A. Patera. Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for parametrized parabolic PDEs ; application to real-time bayesian parameter estimation. *Large-Scale Inverse Problems and Quantification of Uncertainty*, 8 :151–178, 2010.
- [84] E.J. Nielson and W.K. Anderson. Aerodynamic design optimisation on unstructured meshes using the navier-stokes equations. *AIAA J.*, 37(11) :1411–1419, 1999.
- [85] A.K. Noor. Recent advances in reduction methods for nonlinear problems. *Comput. Struct.*, 13 :31–44, 1981.

- [86] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48) :4521–4537, 2007.
- [87] A. Nouy. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg*, 197 :4718–4736, 2008.
- [88] D. Pelletier, A. Hay, and S. Etienne. The sensitivity equation method in fluid mechanics. *Eur. J. Comput. Mech.*, 17(1-2) :31–61, 2008.
- [89] T.A. Porsching and M.Y.L. Lee. The reduced-basis method for initial value problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24 :1277–1287, 1987.
- [90] A. Quarteroni, G. Rozza, and A. Manzoni. Certified reduced basis approximation for parametrized partial differential equations in industrial applications. *J. Math. Ind.*, 1(3), 2011.
- [91] F. Riesz and B.S. Nagy. Functionnal analysis. *Ungar, N.Y.*, 1955.
- [92] Bernard Rousselet and Denise Chenais. Continuité et différentiabilité d’éléments propres : Application à l’optimisation de structures. *Applied Mathematics and Optimisation*, 734 :20–25, 1987.
- [93] G. Rozza, D.B.P. Huynh, and A.T. Patera. Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations. *Arch. Comput. Meth. Engrg.*, 15(3) :229–275, 2008.
- [94] D. Ryckelynck. Reduction a priori de modèles thermomécaniques. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(7) :499–505, 2002.
- [95] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *J. of Computational Physics*, 202 :346–366, 2005.
- [96] S. Sirisup and G.E. Karniadakis. A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of POD models. *Journal of Computational Physics*, 194(1) :92–116, 2004.
- [97] A. Sornborger, C. Sailstad, E. Kaplan, and L. Sirovich. Spatiotemporal analysis of optical imaging data. *NeuroImage*, 18 :610–621, 2003.
- [98] V. Thomée. Galerkin finite element methods for parabolic problems. *Springer, Berlin-Heidelberg-New York*, 1997.
- [99] P. Veltri, A. Vecchio, and V. Carbone. Proper orthogonal decomposition analysis of spatio-temporal behavior of renal scintigraphies. *Physica Medica*, 26 :57–70, 2010.
- [100] N. Verdon, C. Allery, D. Ryckelynck, and A. Hamdouni. An adaptive ROM approach for solving transfer equations. *European Journal of Computational Mechanics*, 5(5) :589–605, 2006.

Etude mathématique de la sensibilité de la méthode POD (proper orthogonal decomposition)

Mots-clés : Méthodes ROM, POD, évolution paramétrique, sensibilité, estimation d'erreurs

Résumé :

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude mathématique de la sensibilité paramétrique de la méthode de réduction de modèles par projection connue sous le nom de POD pour Proper Orthogonal Decomposition. Dans beaucoup d'applications de la mécanique des fluides, la base de projection (base POD) calculée à un paramètre caractéristique fixe du problème de Navier-Stokes, est utilisée à la suite pour construire des modèles d'ordre réduit ROM-POD pour d'autres valeurs du paramètre caractéristique. Alors, la prédiction du comportement de ce ROM-POD vis-à-vis le problème initial est devenue cruciale. Pour cela, nous avons discuté cette problématique d'un point de vue mathématique. Nous avons établis des résultats mathématiques de sensibilité paramétrique des erreurs induites par application de la méthode ROM-POD. Plus précisément, notre approche est basée sur l'établissement d'estimations a priori de ces erreurs paramétriques, en utilisant les méthodes énergétiques classiques. Nos résultats sont démontrés pour les deux problèmes de type Burgers et Navier-Stokes. Des validations numériques de ces résultats mathématiques ont été faites uniquement pour le problème de type Burgers.

Mathematical study of the sensitivity of the POD method (proper orthogonal decomposition)

Key-words : ROM methods, POD, parametric evolution, sensitivity, errors estimation

Abstract :

In this thesis, we are interested in the mathematical study of the parametric sensitivity of the reduced order model method known as the POD method (proper orthogonal decomposition). In several works applied to fluid mechanics, the POD modes are computed once and for all, in association with a fixed parameter that characterizes the equations of the fluid mechanics : Navier-Stokes system. Then, these modes are used in order to compute reduced order models (ROM) associated to these equations, for different parameter values. So, one needs a tool for predicting the behavior of the reduced order model with respect to the complete problem, when the parameter's value is changing. We have discussed this problem from a mathematical point of view. In fact, we have established mathematical results on the parametric sensitivity of the errors induced by applying the ROM-POD method. More precisely, our work is based on developing a priori estimations of these parametric errors, by using classical techniques of energy estimation. Our results are proved for the two problems of Burgers and Navier-Stokes. Numerical validations are established only in the case of the Burgers equation.