



HAL
open science

La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième années de l'école primaire.

François Conne

► To cite this version:

François Conne. La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième années de l'école primaire.. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. University of Geneva, 1981. Français. NNT: . tel-01066233

HAL Id: tel-01066233

<https://theses.hal.science/tel-01066233>

Submitted on 19 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE
A TRAVERS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
EN PREMIÈRE ET DEUXIÈME ANNÉE DE
L'ÉCOLE PRIMAIRE

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
DE L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

PAR

François CONNE

DE

CHEXBRES

LAUSANNE
CONNE / COUTURIER-NOVERRAZ
1986 (1981)

JURY DE THESE :

Président :

Pr. Laurent Pauli

Professeur honoraire de l'Université de Genève.

Pr. Manuel Ojanguren

Professeur ordinaire de mathématiques à l'Université
de Lausanne, Faculté des Sciences

Jean Brun

Chargé de Cours à la Faculté de Psychologie et
des Sciences de l'éducation, de l'Université de
Genève.

La Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, sur préavis du professeur

Monsieur Laurent PAULI, directeur de thèse

Monsieur Jean BRUN, Genève

Monsieur Manuel OJANGUREN, Lausanne

autorise l'impression de la présente thèse, sans prétendre par là émettre d'opinion sur les
propositions qui y sont énoncées.

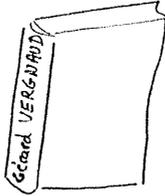
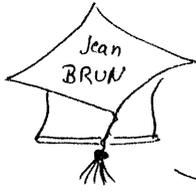
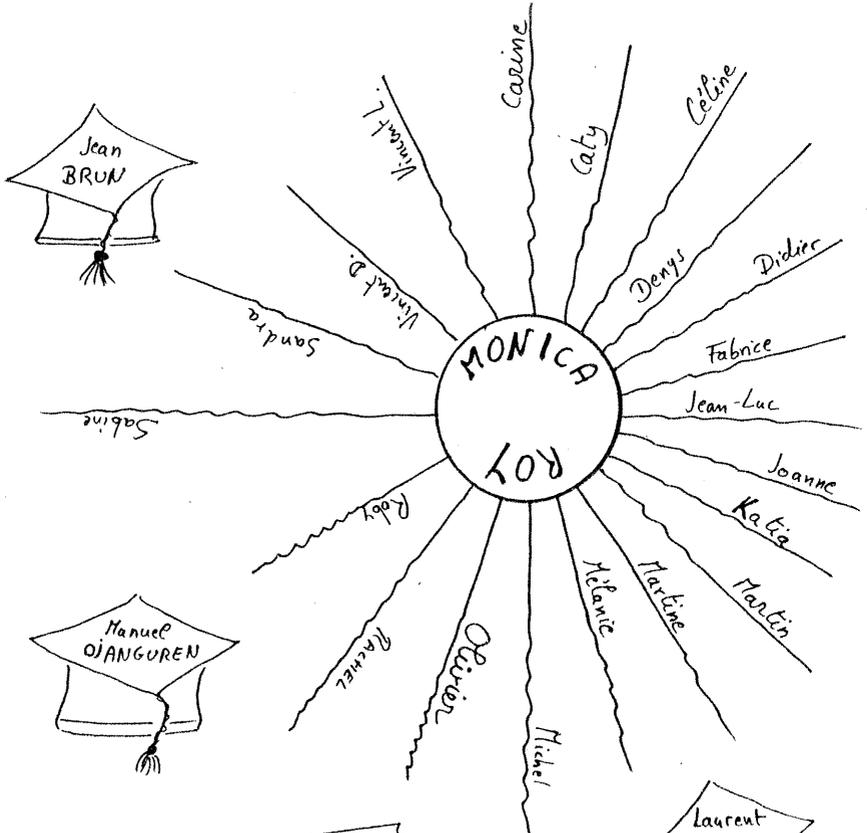
GENEVE, le 21 mai

1986

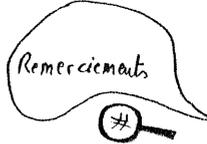
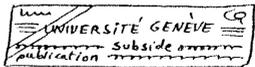
Le doyen :



Thèse No 109



P.S. 1986
IMPRIMERIE G
COUTURIER - MOYERAZ, LAUSANNE



Avis: DIP Lausanne fm.



CHAP. III (suite)	4.2. Première tâche : dessiner les cordes des ensembles	145
	4.3. Deuxième tâche : placer dans un diagramme des éléments donnés	146
	4.4. Troisième tâche : déterminer les éléments à placer dans un diagramme	152
	4.5. Premier exemple. Interprétation et analyse d'une production d'élève	157
	4.6. Autres exemples. Production de classe, discussions sur la signification	160
Annexes Chap. III	Progression des jeux de la méthodologie et résumé des commentaires. Jeux ER7 et ER11, 1ère année ; ER3, 2e année	165
CHAP. IV.	Interviews de certains élèves en fin de 2e année	177
	0. Avertissement	177
	1. Préambule	177
	2. Martine	179
	3. Michel	191
	4. Olivier	194
	5. Vincent D.	199
	6. Jean-Luc - Denys	201
	7. Sabine - Katia	208
	8. Conclusions	217
	8.1. Premières remarques	217
	8.2. Conclusions	219
CHAP. V.	Productions scolaires	223
	1. Productions écrites des élèves	224
	1.1. Premier travail écrit	225
	1.2. 15 jours plus tard	229
	1.3. Fin de 1ère année primaire	234
	1.4. Un travail écrit préparé pour cette étude	243
	1.5. Figures non données d'avance	254
	1.6. Ensembles de nombres entiers	261
	1.7. Conclusions de cette étude de production des élèves	266
	2. Le problème des oppositions vu sous un autre angle	268
	2.1. Présentation de l'exercice	269
	2.2. Signification de l'exercice	270
	2.3. Résultats	271
	2.4. Expérience de simulation	273
	2.5. Discussion	279
	3. De la description aux diagrammes : recherches de la bonne forme	285
	3.1. Jeu de devinette	285
	3.2. Constituer une intersection	289
	3.3. Passage d'une classification en arbre à un diagramme de Carroll	296
	3.4. Conclusion	302
	4. Conclusion des chapitres IV et V	303

CHAP. VI.	Nombres et opérations	304
	1. Introduction	304
	1.1. Le point	304
	1.2. Contexte : la situation des élèves à l'entrée en première année	306
	1.3. Contexte : débat didactique	308
	1.4. Double fonction du programme	309
	1.5. Transposition	318
	2. Analyse de la méthodologie : les jeux proposés	330
	2.0. Nouvelle édition de la méthodologie romande	330
	2.1. Avertissement	332
	2.2. Organisation des activités	333
	2.3. Introduction des nombres	337
	2.4. Introduction de l'addition	343
	2.5. Soustraction	351
	2.6. Multiplication	355
	2.7. Machines numériques	358
	2.8. Signification et représentation	365
	3. Des jeux aux exercices	374
	3.1. La charnière symbolique	374
	3.2. Survol des exercices	383
	3.3. Quelques exemples : discussion	389
	4. Passage à l'écrit. Exemple de multiplication	428
	4.1. Présentation du problème	428
	4.2. Illustrations	431
	4.3. Trois fois rien (conclusion)	437
	5. Conclusion du chapitre VI	446
	CONCLUSION	447
	BIBLIOGRAPHIE	457

INTRODUCTION

Pour ma thèse, j'ai décidé d'entreprendre une recherche pour connaître ce que les élèves de 1ère et 2ème primaire font en mathématiques. C'est-à-dire à quoi travaillent-ils, de quels objets traitent-ils, qu'apprennent-ils ? Les moyens d'y répondre consistent en :

- 1) L'analyse du contenu du programme et des moyens d'enseignement
- 2) L'étude suivie et régulière d'une même classe pendant 2 années scolaires consécutives, c'est-à-dire :

suivre le travail des élèves
les interroger sur ce qu'ils font
suivre le travail de l'enseignante
en discuter avec elle.

- 3) La mise en correspondance des 2 approches ci-dessus (ce qui constituera le gros du travail d'analyse).

L'objet de l'étude est ce qui se passe dans une classe et non pas ce qui devrait se passer, aurait pu ou dû se passer dans la classe. J'espère bien que ma tentative ne sera pas prise comme une espèce de "colonisation" du terrain pédagogique par un spécialiste dans sa bulle universitaire mais bien plutôt comme un essai de rendre compte d'un enseignement deux années durant. Et par là, je voudrais montrer en quoi la récolte et l'analyse d'observations que l'on peut faire en classe permettent d'acquérir une plus grande maîtrise du contenu à enseigner et des conditions de son appropriation par les élèves. Ma position pratique étant qu'une telle démarche de l'intérieur serait tout à fait adéquate pour la formation des enseignants étant donné qu'on travaille directement sur le matériau auquel est confronté le maître.

Cependant, cette thèse, présentant une première étape de la démarche et s'inscrivant dans un contexte académique, s'adressera plus particulièrement aux chercheurs en psycho-pédagogie et en didactique des mathématiques.

I. Cadre

A. Les mathématiques à l'école

Quand on étudie ce que sont les mathématiques à l'école et comment on les y pratique, on est amené à constater qu'il y a eu transposition du contenu d'une connaissance en un contenu scolaire. Quatre arguments vont me permettre de la cerner.

1er argument : transmission.

Objectivant la connaissance en savoirs, on propose aux élèves des modèles avec un assortiment d'exercices et de problèmes. Bien que la distinction soit très souvent malaisée on peut dire que les exercices permettent d'approcher le modèle (exercices qui s'appliquent et simplifient les modèles) et que les problèmes visent à l'application du modèle. Il n'en reste pas moins que le modèle n'émerge pas de la problématique, mais est légitimé par ses illustrations. A la nécessité s'est substituée une "valeur d'usage". (Kuntzmann citant Freudenthal appelle ça : inversion conceptuelle - J. Kuntzmann : évolution et étude critique des enseignements de mathématiques, p. 45). La plupart du temps en outre, on travaille avec des illustrations qui se trouvent en amont du domaine qui fonde la théorie (c'est bien pourquoi la distinction entre problèmes et exercices est malaisée). On en arrive souvent au paradoxe qu'on estime de première importance d'enseigner des choses qui nous paraissent banales.

Les deux exemples suivants (repris pour chacun des arguments) illustrent cette transformation de la connaissance en savoirs :

a) Exemple de la soustraction.

Les savoirs qui concernent la lère, 2ème primaire sont de 3 types :

- savoir numérique : La soustraction ne devient une opération numérique que dans la mesure où les quantités sur quoi elle porte sont conçues comme emboîtées les unes dans les autres.

- savoir compter, puis calculer : On enseigne à effectuer la soustraction sur des jetons, sur les doigts. Viendront se greffer ensuite le calcul oral et écrit. Il y a diverses soustractions : retrancher en bloc, retrancher un à un (compter à rebours), compléter.
- savoir écrire : On enseigne le symbolisme équationnel, et aussi celui des opérateurs (machines).

L'assortiment de problèmes/exercices consiste essentiellement en exercices lacunaires sur des écritures symboliques. Par cet intermédiaire, on vise trois choses : exercer le calcul, exercer le maniement du symbolisme, proposer à l'élève de véritables problèmes de soustraction (toute la gamme des situations soustractives sont introduites sur les écritures équation ou machines).

On se trouve donc devant la situation suivante : par l'intermédiaire des symbolismes, on introduit tous les aspects de la soustraction. Il y a donc substitution complète du modèle symbolique qui est enseigné pour lui-même. On se trouve en amont des situations soustractives dans la mesure où il n'est jamais question dans cet enseignement que d'une seule quantité : celle que l'on dénombre (jetons, boulier).

b) Exemples des ensembles.

On vise à enseigner la logique des attributs ainsi qu'à fonder le nombre.

Le savoir proposé, c'est l'ensemble "patate" avec son étiquette attribut ou numérique.

Les problèmes/exercices auxquels il s'applique, c'est les classifications d'objets (spécialement construits pour ...) selon un ou plusieurs attributs, les situations proposées aboutissant finalement au placement d'objets cumulant plusieurs attributs (intersection). Pour ce qui est du domaine numérique, les problèmes auxquels il s'applique sont avant tout ceux relatifs à la sériation des classes \Rightarrow décomposition du nombre, opérations ensemblistes.

Les ensembles fournissent, par l'intermédiaire du symbolisme, un support tangible à l'activité de rassemblement. Ils jouent donc le rôle de support pré-texte à la logique des attributs ou à l'inclusion des classes. Ceci n'a rien à voir avec ce qu'on appelle ensemble en mathématiques dans la mesure où en mathématiques l'idée clé de cette théorie est que l'ensemble est un objet, (tout comme un nombre, un triangle ...). Il y a même identité de terminologie entre ensemble et objet mathématique d'après Roger Godment (cours d'algèbre p. 42).

2e argument : construction cognitive

La visée pédagogique est que la connaissance de l'élève va se construire autour de ces savoirs. Mais ceux-ci, objets tout faits pour le maître et qui entrent dans un contexte bien précis, sont à construire pour l'élève. Or, ce dernier ne dispose, pour sa construction, que de ses savoirs antérieurs et des situations qu'on lui propose, contexte bien plus étroit que celui de l'enseignant. On doit alors se demander quelle construction ces savoirs permettent, sachant que ce ne sera pas forcément celle qu'on attend. Ceci d'autant plus qu'on sait très peu sur la façon dont se constituent ces savoirs.

a) exemple soustraction.

Pour ce qui est des problèmes en première, deuxième primaire, on peut dire que dans la mesure où un calcul est bien identifié par l'élève et que la mise en relation avec des quantités concrètes (jetons) ne lui apportera rien de plus, celui-ci se contentera de calculer. Les jetons, c'est pour ceux qui ne savent pas compter ! Le calcul est un moyen trop efficace pour le but que s'assigne l'élève, trouver la réponse. Ce registre d'action occultera tout le reste.

D'autre part, il n'y a aucune garantie pour que la présentation d'exercices à support symbolique amène les élèves à s'appropriier ce symbolisme. Il est notoire que les élèves ne recourent pas spontanément aux symbolismes enseignés pour résoudre leurs problèmes (ou les nouveaux problèmes) et qui oserait prétendre avoir appris à rédiger des problèmes d'arithmétique à force d'en avoir résolus ?

La soustraction enseignée en 1ère, 2ème consiste essentiellement en une soustraction numérique et symbolique fournissant à l'élève des indices lui soufflant l'emploi d'une soustraction. Il est clair que les élèves, pour traiter ces pro-

blèmes, effectuent un certain nombre de mises en relations, mais on ne sait rien là-dessus dans la mesure où on ne contrôle pas ces mises en relations. Pour ce faire il faudrait sortir de l'ornière numérique. La conclusion de tout cela est qu'il faut se garder d'attribuer aux élèves en cette matière des compétences qu'ils n'ont pas.

b) Exemples : ensembles.

1. Logique. En plaçant les élèves devant des situations où un même objet peut cumuler plusieurs attributs (en général 2), on motive la constitution spatiale d'une plage appelée "intersection" (petite chambre). Rien n'indique cependant qu'il y ait là véritable opération logique. Car cette plage est-elle elle-même un ensemble ? Est-elle définissable par un attribut ? Et inversement, un ensemble défini par un attribut complexe sera-t-il considéré comme l'intersection d'ensembles ? La principale difficulté est de se rendre compte que les objets de l'intersection doivent se placer là et qu'aucun autre ne peut y entrer ! Les objets de $A \cap B$ sont inclus doublement dans A et dans B .

2. Cardinal d'un ensemble. On introduit la somme ou la différence par l'intermédiaire du schéma ensembliste d'inclusion. Une première remarque : dans le programme, l'inclusion n'est pas abordée, chose curieuse quand on sait que ce programme fait référence à la psychologie génétique ! Il ne s'agit que d'une inclusion spatiale (que l'élève devrait voir dans les diagrammes de Venn). Une deuxième remarque : c'est qu'on voit la plupart des élèves raisonner à rebours ! Partant des symboles numériques, ils traitent le problème par un calcul (ou comparaison) puis complètent les schémas ensemblistes. Situation paradoxale puisque les ensembles sont là pour fonder le nombre !

Remarque : Il ne faudrait cependant pas croire que ces enseignements se réduisent à rien. Effectivement, l'élève fait un peu de logique avec les ensembles ; effectivement, il a une activité numérique. Simplement, il ne faut pas confondre structure de la connaissance avec l'objet de connaissance. Pour arriver à décrire ce qui se passe pour l'élève, on est obligé de voir comment il investit les tâches qu'on lui propose - c'est-à-dire, se situer du côté de l'élève et non pas seulement de celui du contenu enseigné (celui auquel on se réfère).

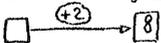
3ème argument : concrétisation.

Pour avoir une chance d'atteindre les élèves sur leur terrain, les notions abstraites sont habillées de concret. Ce qui peut prendre la forme d'une matérialisation (blocs logiques, matériel multibase, réglettes cuisenaires ...) une symbolisation (cartes, images, diagrammes divers ...) ou encore d'une mise en contexte (problèmes traditionnels, jeux réglés ...). Le contexte étant multiforme vu l'ambiguïté du mot "concret" : qui a trait au matériel, aux travaux manuels; qui a trait à la vie quotidienne, au monde papa-maman ; qui est parlant pour l'élève.

a) Exemple soustraction.

1.- La concrétisation commence par les chiffres et les signes d'opération. On remarque que, pour les élèves, la tentation est bien grande de considérer les nombres comme des entités séparées (problème lié au nombre figuratif, au comptage sur les doigts, à la comptine sue par coeur ...). Ainsi par exemple, quand on demande d'illustrer le calcul $6 - 4 = 2$ au moyen de jetons, ne voit-on pas beaucoup d'entre eux faire $\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} - \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} = \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix}$

ou encore l'écriture classique $6 - 4 = 6$ car après avoir "ôté le 4" il ne reste plus que le 6 !

2.- L'illustration des opérateurs par "machine" devrait amener les élèves à considérer les opérations pour elles-mêmes, et les introduire ainsi à l'algèbre. Mais pour cela, il faut que l'élève distingue bien ce qui a trait à leur propre opération et celles symbolisées par les machines. Ainsi par exemple, dans la situation  où la machine () ne peut pas effec-

tuer le travail, mais où seul l'élève peut déduire la donnée manquante ! En identifiant le calcul qu'on lui demande (8 moins 2); l'élève sera bien tenté de ne plus s'occuper de ces "machines" qui ne servent finalement qu'à poser une question.

b) Exemple ensembles.

1.- Logique. Il faut voir que le matériel pédagogique (objets, symboles) consiste à rendre concret non seulement "les objets" mais encore les attributs (étiquettes) et les classes (domaine limité par une corde). Ce sont tous des objets car la qualité d'attribut, de classe, étant relative à l'activité d'un

sujet n'est pas, elle, objectivable. Les activités que l'on va susciter, de type classification ou repérage d'attributs se fait effectivement sur tous ces objets (par exemple des discussions sur la forme de la corde !) Effectivement, l'élève va investir sa logique sur tous ces objets, fera des classes, etc... Il n'y a aucune raison de croire que ces activités portent sur les seuls objets à classer! On voit par exemple des élèves qui mélangent attributs et objets et qui dessinent



pour signifier : "garçon sans parapluie" quand l'attribut "sans parapluie" est symbolisé par  .

Au minimum, il suffira de faire "comprendre" à l'élève qu'il y a là 3 plans distincts d'objets , à savoir les "objets" que l'on classe, la corde qui marque l'activité de mettre ensemble et les étiquettes - attributs, pour qu'il réussisse les tâches proposées. Mais comment faire saisir l'articulation de ces plans ?

2.- Cardinal. Il en est exactement de même en ce qui concerne les activités numériques où le nombre remplace l'attribut. On voit d'ailleurs des enfants faire une classe de 8 éléments avec pour l'un d'eux le symbole 8 lui-même (mélange objet-attribut). Il y a bien derrière le nombre une idée de classe (ben tiens !) mais cette idée est relative aux activités des élèves et non pas au symbolisme utilisé.

4ème argument : position du maître.

La connaissance mathématique sert de point de référence, mais l'enseignant ne peut intervenir qu'en fonction de sa propre connaissance, une transposition est nécessaire pour qu'il puisse tenir son rôle de représentant de la connaissance. En outre, dans la pratique, l'enseignant est amené à adapter son enseignement, se guidant pour cela sur les réussites des élèves. Ceci constitue aussi un aspect de la transposition.

a) Exemple soustraction.

Je prendrai pour exemple celui de la maîtresse de la classe observée.

Elle sait (par expérience et par ouï-dire) que la soustraction "pose des problèmes". Mais elle n'arrive pas à anticiper les difficultés des élèves, ni surtout à savoir exactement à quoi les attribuer. Attitudes significatives :

- 1.- Si elle s'étonne de la réussite de certains, ce n'est jamais qu'en référence à l'échec d'autres, et non pas par anticipation des difficultés de la matière.
- 2.- Attribuant les difficultés des élèves à transcrire une soustraction avec des signes équationnels, elle n'introduit pas tout de suite le signe - mais l'écrit en toutes lettres (6 moins 4 pour 6 - 4).
- 3.- Ne contrôlant que la réussite des élèves (et non pas les modalités de cette réussite) elle n'a proposé des activités de mise en relation avec des jetons ou des petits problèmes qu'aux élèves ayant des difficultés.
- 4.- Ce décalage est bien perçu par la maîtresse mais elle ne réussit pas à avoir de prises sur celui-ci. Car pour cela il faudrait qu'elle examine de quelles représentations elle investit elle-même les problèmes soustractifs. Ce n'est en général pas la confrontation au champ trop restreint des activités proposées aux élèves qui est favorable à cet examen.

b) Exemple ensembles.

La connaissance des ensembles qu'aura la maîtresse sera celle qu'elle aura acquise soit en fin de scolarité, soit encore aux cours de recyclage. Dans ces cours, on s'appuie pour introduire les ensembles et leurs opérations sur la logique constituée des étudiants. Ensuite on a recours au calcul algébrique (algèbre littérale par ex.: $\int_E (A \cap B) = \int_E A \cup \int_E B$)

On remarque qu'ici les ensembles sont représentés par des lettres ce qui n'est jamais le cas dans l'enseignement élémentaire.

Alors deux remarques pour situer cette connaissance tant par rapport aux "ensembles" des maths qu'aux "ensembles" de l'enseignement élémentaire :

- 1.- Pour de nombreux étudiants, ces ensembles à vrai dire ne constituent pas des objets. C'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas raisonner sans recourir aux éléments de ces ensembles. A preuve la difficulté que représentent les notions d'ensemble vide, de Singleton ($\{a\} \neq a$) et finalement d'ensemble des parties d'un ensemble ($\mathcal{P}(E)$).
- 2.- Il y a un fort décalage entre la position du maître qui construit ses propres représentations d'ensembles sur une logique constituée et celle de l'élève de 2ème primaire dont la logique est en constitution. Ceci entre autres que

l'élève ne recourt pas forcément, ou du moins pas de la même façon aux opérations logiques (n'étant par exemple pas capable de combinatoire). Alors il faut poser la question suivante : comment le maître fait-il le lien entre ces 2 objets ? Il va de soi que ce lien n'est pas forcément explicité et que seule l'observation de sa pratique permet d'y répondre.

B. Un enseignement de mathématique (je précise mon projet)

Situer tout ceci dans le déroulement de la classe m'amène à le considérer comme résultant de la confrontation de 3 fonctionnements :

- 1.- Le dispositif que constituent les moyens d'enseignement et, dans la mesure où ceci aménage une progression, je le qualifierais volontiers d'engrenage.
- 2.- Le fonctionnement "idéal" que cela suscite chez le maître qui, lui, est au courant du projet pédagogique.
- 3.- Le fonctionnement que cela suscite chez les élèves vu, en particulier, à travers les productions qui en résultent.

La gestion de cette confrontation consiste pour le maître en de multiples décisions l'amenant à jouer sur les contraintes exercées sur ses élèves pour infléchir leur fonctionnement vers la production de réponses justes. Décisions prises par le maître sur la base d'appréciation des diverses productions (interprétation et tri).

La recherche vise bien à analyser ces 3 plans et je vais dire comment. Mais auparavant et pour bien faire ressortir mon objectif, je vais me situer par rapport aux 2 pôles de recherches en psychopédagogie des mathématiques que sont pour nous les travaux de Gérard Vergnaud et de Guy Brousseau et de leurs équipes.

C. Situation de ma recherche

Gérard Vergnaud tente d'élaborer une théorie de la complexité. Il a monté un certain nombre d'expériences se rapportant chaque fois à des notions et concepts précis (la multiplication en particulier) qui font ressortir que leurs acquisitions s'étalent sur une plus longue période qu'on ne le pense. Montrant

ainsi que les problèmes d'arithmétique ne se limitent pas à leur "Structure" mathématique mais que, par exemple, les grandeurs et types de relations qui les composent interviennent fortement comme facteur de complexité. L'analyse des résultats a permis de faire un certain nombre de distinctions entre les notions et ceci en relation avec les procédures de solution observées. Ces recherches mettent donc en évidence deux choses :

- d'une part des facteurs de complexité (dont on pourra tenir compte dans les programmes, et qui surtout nous rendent attentifs à ne pas attribuer aux élèves des compétences abusives),
- d'autre part des types de procédures et par là les représentations sous-jacentes et les mécanismes d'évolution de ces représentations.

Les recherches de Guy Brousseau vont dans le sens de décrire scientifiquement les conditions d'appropriation de la connaissance (définie et choisie par ailleurs). La méthode consiste à élucider un certain nombre de systèmes de contraintes correspondant aux divers moments de l'appropriation des connaissances mathématiques : action, formulation et validation. En ensuite à construire des activités organisées selon ces dialectiques, dans le cadre d'un enseignement de mathématique pris en charge par l'Institut de recherche lui-même. L'originalité de ce type de recherche consiste en 3 choses :

- 1) La considération de la dialectique comme spécifique à la matière enseignée (ici, mathématiques) .
- 2) L'analyse des conditions nécessaires à l'émergence d'un certain type de connaissance (sauf informationnel, création d'un "besoin" cognitif).
- 3) L'organisation des contraintes dans un modèle de fonctionnement d'un groupe (la classe), c'est-à-dire la considération de la connaissance comme un phénomène social.

Mon projet est de me situer sur le terrain même de la vie d'une classe et de chercher à faire fonctionner ces cadres de référence, en quelque sorte in vivo. Etant donné que je m'inscris en observateur d'un processus en cours, je n'ai eu le loisir ni de décider les tâches proposées aux élèves (je suis astreint au programme scolaire) ni de contrôler les modèles de fonctionnement des activités. Cette différence ne porte pas tant sur le fond que sur les préoccupations. Et

quoiqu'il soit très délicat de parler pour les autres, il me semble que la réflexion de Vergnaud porte avant tout sur l'organisation des tâches proposées aux élèves, organisation qui passe par la prise en compte de leur procédure de résolution. Brousseau quant à lui tente d'investiguer le processus didactique et, à en dégager des modalités générales permettant d'éclairer la pratique des enseignants. Tandis que mes préoccupations me portent à me demander quelles sont les chances d'une meilleure compréhension des procédures et productions des élèves dans la prise de décision didactique par l'enseignant. Ce qui m'amène tout bonnement à analyser le terrain de la confrontation décrite dans la partie B (p. 16-17).

II Méthode.

Tout d'abord un avertissement : mon travail est tout entier centré sur les mathématiques, c'est elles qui sont le fil conducteur de ma démarche.

La question générale que je me pose est celle de l'exploitation didactique des observations faites en classes (effet immédiat de l'enseignement). Il a fallu pour cela que, dans un premier temps, je fasse moi-même des relevés, des récoltes de données pour voir ce qui est livré par la vie de la classe et pour pouvoir les confronter à ceux de la maîtresse. Mais ensuite se pose la question de savoir ce que l'on peut faire à l'élève à partir de ses propres procédures. Bien sûr, cette question est déjà posée dans la pratique, malheureusement trop souvent seule la production de la réponse juste importe au pédagogue. C'est donc qu'il s'agit d'une question de reconnaissance tant de la part du didacticien qui doit alors essayer de comprendre et faire développer les productions de ses élèves que de la part de l'élève qui doit comprendre la tâche qu'on lui demande en fonction de sa propre connaissance et non pas seulement en fonction d'une intervention extérieure (orientation de l'action vers des procédés qu'il amènent à la réponse juste mais trop souvent comme sur une voie de garage).

Mais reprenons plus en détails la méthode. Une méthode pour moi, c'est une trajectoire. J'en viens à discuter méthodologiquement la trajectoire que j'ai suivie, cela se déroule comme un jeu où on doit avancer successivement plusieurs pions, le dernier de ces pions (point 5, p. 24) restant encore une ouverture.

Pion 1 Entrer dans une classe.

Il y a comme premier pion celui d'entrer dans une classe. Ceci se fait sur la base d'un contrat passé directement avec l'enseignante, ce contrat a été discuté, explicité et stipulait en gros :

- 1.- Je ne prendrai pas le rôle d'enseignant.
- 2.- Je laisserai la maîtresse libre de mener sa classe comme elle l'entend.

Sur sa demande, je pourrai :

- 3.- L'assister en lui fournissant les observations faites et en les discutant.
- 4.- Me pencher sur certains points du programme en lui fournissant quelques explications mathématiques, ce qui pouvait aller même jusqu'à suggérer quelques activités.

Je ne pouvais évidemment pas en faire moins et j'ai pris mon parti de contrôler mes interventions plutôt que de faire semblant de n'être pas là ! Cette base minimum montre déjà que l'observation est aussi active, c'est-à-dire qu'elle produit un certain nombre d'événements.

Durant 2 années scolaires, à raison d'une fois par semaine, je me suis rendu en classe. Je suis resté constamment à l'intérieur de la classe. Evidemment, je ne me suis intéressé qu'aux leçons de "mathématiques".

Pion 2 Récolte de données

Dans mon investigation, je ne suis pas parti d'une théorie de l'enfant ou d'une épistémologie qui m'aurait fourni à priori un certain nombre de tests clés à effectuer. Je n'ai par exemple pas cherché à déterminer les stades des élèves, estimant que ce n'est pas ainsi que la psychologie génétique me sera utile. Il ne fallait pas ressortir de la classe à peine j'y étais entré. Je me suis donc cantonné à l'investigation des sources d'informations qui sont disponibles à l'enseignant.

J'ai donc commencé par recueillir le plus d'observations possibles sur les productions d'élèves. J'appelle production tant les réponses des élèves que le raisonnement pour y aboutir. Ces productions peuvent très bien ne pas avoir de sens relativement aux mathématiques, peu importe. Dès le moment où on considère qu'il y a transposition, leur seul caractère de production dans des conditions bien définies face à une tâche identifiable justifie qu'on s'y intéresse. C'est

donc en tant que produit d'une activité réglée que je les considère pour les rendre dans un premier temps intelligibles, appréhendables. Ceci me renvoie à l'analyse des données :

- catalogues de procédures, tentative de les relier les unes aux autres
- analyse parallèle de la tâche demandée aux élèves (contenu, consigne, dispositif didactique mis en jeu dans le programme)
- mise en regard des 2 analyses ci-dessus.

Types de données recueillies :

La leçon de mathématiques consiste essentiellement en "jeux" collectifs ou de groupes sous la direction de l'enseignante, ainsi qu'un certain nombre d'exercices sur fiche.

- 1.- Selon le choix de jeux faits par la maîtresse, j'ai protocolé systématiquement les séances auxquelles j'assistais. Dans certains cas je suis intervenu sur le vif, soit pour vérifier une hypothèse d'interprétation, soit tout simplement pour relancer l'activité. Quelquefois, j'ai dirigé moi-même le jeu et, avec l'aide des notes de l'enseignante (devenue observatrice) j'ai établi après coup un protocole.
- 2.- Les fiches étaient introduites par une discussion collective de la consigne. Là aussi, j'ai protocolé les séances de discussion. L'élève faisait sa fiche tout seul, discute ou copie le voisin, pose des questions à la maîtresse, va lui rapporter son travail pour sanction. J'ai pris le parti de ne pas suivre dans le détail cette phase de l'exercice. Plusieurs raisons à cela : vis-à-vis des élèves, j'aurais très rapidement pris parti de les aider ce qui m'aurait vite conféré le rôle d'enseignant ou de répétiteur, il fallait aussi les laisser seuls devant ces exercices, beaucoup d'élèves voulaient faire leur exercice le plus vite possible pour passer à des activités plus amusantes pour eux, mon intervention risquait d'allonger la séance ; je ne voulais pas donner d'explications qui auraient pu aller à l'encontre de celles de la maîtresse ; le rôle même des exercices fait qu'ils ne sont pas toujours intéressants.

Cependant, dans certains cas intéressants, j'ai assisté à la discussion entre maître et élèves ou même ai discuté directement avec un élève de sa réponse. Les fiches pouvaient être prétexte à des entretiens avec l'élève.

Pion 3 Valeur des productions

Une production marque d'un événement qui a effectivement eu lieu n'est jamais totalement fortuite. Elle est susceptible de prendre un sens relativement à la tâche proposée : tout d'abord savoir si elle correspond à la réponse souhaitée, à une réponse attendue, se demander si elle nous éclaire sur une interprétation de la tâche à laquelle on n'avait pas pensé, déterminer finalement le champ que cette réponse recouvre (est-elle exclusive, coexiste-t-elle avec d'autres réponses qui nous paraissent contradictoires ?).

J'utilise pour cette investigation l'entretien clinique. Entretiens faits en général avec un seul élève à la fois (les confrontations, entre plusieurs élèves, bien entendu, se sont avérées difficiles en raison de l'âge des élèves autant que l'organisation de la classe) et organisés autour d'une tâche bien précise dans le souci général de faire développer à l'élève ses conceptions. Je rejoins ainsi le but général de ma recherche. J'insiste que la méthode veille à ce que l'élève soit constamment renvoyé à la tâche prétexte. En effet ceci doit palier l'inconvénient de l'entretien clinique qui fait que l'élève ne répondra pas de la même façon selon son caractère, la façon dont il se représente l'expérimentateur, et dont il se représente lui-même. J'essaie alors de faire que l'élève se prenne au jeu de l'activité proposée pour qu'il "oublie" un peu la situation dans laquelle il est.

L'entretien se compose de 3 éléments :

- 1.- Reproduction. Tenter de faire ressortir une même production de la part du sujet (ou d'un autre) placé dans des conditions analogues. Il s'agit de vérifier que la production n'était pas fortuite.
- 2.- Contre suggestion. Quelle est l'ampleur du champ recouvert par la réponse, subsiste-t-elle à côté de réponses qui nous paraissent contradictoires ? L'élève tient-il à sa propre production ?
- 3.- Explication. Quelle conscience l'élève a-t-il de sa réponse ? Pour cela lui demander de l'explicitier, voire de l'expliquer, ou de la justifier (3 choses qui sont en général confondues par les élèves de cet âge).

Il va de soi que ces 3 éléments ne renvoient pas aux mêmes situations didactiques, donc aux mêmes activités de la part des élèves. On y retrouve d'ailleurs en filigrane (et arrangées différemment) les distinctions de Brousseau : action, validation, formulation.

Pour les résultats les plus intéressants - par ex. le problème de l'intersection - ceci se double d'une étude interindividuelle : dans quelle mesure les conceptions d'un élève sont-elles partagées par les autres, dans quelle mesure s'éclairent-elles les unes les autres ? Ceci pose la question de certains élèves "marginaux", en avance ou en retard scolairement parlant. Mais mon expérience montre que les productions de tels élèves se retrouvent telles quelles dans d'autres classes. Pour cette étude interindividuelle, j'ai en général repris les entretiens cliniques. Mais je ne me suis pas limité à faire reproduire la même chose à d'autres élèves placés dans des conditions analogues. J'ai pris le parti plus global de tenter de mener l'élève "sur les traces" d'un autre. La possibilité (ou non) de l'entreprise nous renseigne plus sur la place à donner aux productions des élèves que la simple reproduction. De plus cette méthode a pour mérite de ne pas cacher que, dans tous les cas, l'activité de l'élève est induite par l'expérimentateur !

La méthode relie sans cesse les 2 pôles, objet et sujet, puisqu'il s'agit de voir le faisceau de production suscité par un même objet et aussi la façon dont les sujets embrassent les diverses productions qu'ils fournissent. Puis d'analyser les liens qu'il y a entre ces 2 points.

Pion 4 Confrontation à l'intervention du maître.

Ceci se passe au sein même d'une classe et en relation avec une question générale de la possibilité de tirer profit de cette démarche à la rencontre de la connaissance des élèves. Mon projet dépasse donc la simple récolte de renseignements sur les procédures des élèves. Et il entre dans le cadre de la pratique pédagogique.

La place de mon intervention est alors celle d'un "contrepoint" à celle du maître. Pour illustrer cela, reprenons. La méthode que j'utilise considère toute production comme la réponse de l'élève, qui par elle restitue quelque chose. J'essaie de savoir de quoi il s'agit et de déterminer la valeur de la production par rapport au contexte cognitif du sujet et à la logique du problème. La considération de la culture scolaire comme transposée me permet de me dégager à la fois de la qualification juste/faux et de la question de la compétence attribuée à l'élève.

Or ce sont là des questions que l'institution scolaire trouve primordiales. (A l'école on a également affaire à cette sorte de transposition). Ce qui se remarque très précisément dans tout l'effort de faire reproduire à l'élève des réponses justes, de les placer devant des tâches progressives les amenant à généraliser leurs réponses justes et finalement pour la sélection des meilleurs se fixant sur la production originale de réponses justes. Pour ce qui est de la réponse fautive, soit on la laisse dans l'ombre, soit, poussé par un esprit compensatoire, on essaie de l'analyser, de la comprendre. C'est comme si l'impossibilité d'interpréter une réponse comme juste amène à en chercher une valeur. A la réponse juste est attribuée une valeur "évidente" qui rend superflue toute compréhension - en même temps on gratifie son auteur d'une compétence -. La réponse fautive est "incompréhensible" et justifie qu'on essaie de l'aborder pour palier au mal-fonctionnement dont elle serait issue.

On peut donc dire en gros que l'action enseignante jette un défi à l'élève par rapport à la réponse juste, tandis que j'essaie de défier l'élève à sa propre réponse. Il s'instaure donc, de fait et dans la pratique un débat entre l'enseignant et moi. L'enseignant qui peut me reprocher de renforcer les réponses fautes, d'embrouiller l'élève ! Je lui renvoie la question en demandant si, tout en croyant renforcer la réponse juste chez l'élève il ne fait pas plutôt que de renforcer sa propre interprétation de la compétence de l'élève.

Ce contraste est bien une méthode pour faire ressortir la logique de l'organisation des tâches par l'enseignant. Ainsi il apparaît que bien souvent l'enseignant en reste à la dernière réponse juste de l'élève, trop heureux qu'elle soit sortie de sa bouche (la vérité sort de la bouche des enfants). Il apparaît aussi que l'optique de l'enseignant reste complètement parcellisée, découpage de notions sans liens apparents, découpage aussi de la classe en individus. Autre exemple, il n'a aucune prise sur les oublis des élèves. En fin de compte je dirai que l'enseignant est confiné à une alternance entre un optimisme outré (on attribue volontiers des compétences abusives aux élèves quand "ça marche") et d'un désespoir profond (quand "ça ne marche pas" on dit : "ils ne savent plus rien ...").

Pion 5. Situation de l'enseignant par rapport aux mathématiques.

Ce qui nous amène directement à la question de l'attitude de l'enseignant face à la connaissance dont il est le dépositaire. Ici la méthode est fort délicate ne serait-ce qu'à cause du poids que l'on attribue au spécialiste, mathématicien de surcroît. On ne tire pas grand'chose d'un seul questionnaire à l'enseignant (quant à sa pratique surtout) et il vaut mieux profiter du vif de sa pratique pour l'interroger. Et le débat décrit ci-dessus prend bien la forme d'une question. Il faut dire que celle-ci est complexe puisqu'il faut faire la part très nette entre ce qui tient aux directives données à l'enseignant, à la façon dont elles sont intériorisées par celui-ci, et ce qui a trait à l'expérience qu'il a de cette connaissance (tout à la fois expérience de cette connaissance elle-même et expérience de la communication de celle-ci). Or comment s'y retrouver soi-même ? Les événements de la vie scolaire doivent permettre à tout cela de se révéler petit à petit. Cela se révèle de la façon double. D'une part l'enseignant est amené à questionner l'observateur (spécialiste) à lui fournir quelques-unes de ses observations, à lui demander éventuellement conseil mais aussi à réagir contre lui et la "gratuité" de son observation. D'autre part, l'observateur fournit des observations, discute et propose des interprétations, vérifie que l'enseignant a bien vu les mêmes choses, que les protocoles sont "fidèles". Ceci a lieu, soit à propos d'événements scolaires, soit au sujet de la préparation en commun d'activités, soit enfin au cours d'exercices de simulation de réponses d'élèves. Cela aboutira même peut-être à l'établissement d'un "programme" de préparation aux examens de fin d'année ...

Remarque. Ce dernier pion est là à titre indicatif pour dire que la démarche reste ouverte et que cette partie sera objet de recherches ultérieures à cette thèse.

III. Envoi.

Le centre de la thèse consiste à considérer l'enseignement des mathématiques comme le résultat d'une transposition. J'ai opté pour un texte très descriptif (une description problématisée). Evoquer ainsi l'enseignement des mathématiques en première deuxième année de l'école primaire me permettra de défendre l'idée de la transposition et montrer en contrepartie comment sa considération permet de rendre compte de l'enseignement pratiqué et de tirer parti d'observations en classe qui cessent alors d'être des anecdotes.

Le cheminement de mon texte est en gros le suivant. Après avoir donné quelques exemples préliminaires pour mettre le lecteur "dans le bain", je vais aborder le thème de l'enseignement des ensembles et des diagrammes de Venn. Et ce sous trois angles différents.

- 1^o Evocation du (d'un) recours en mathématiques aux ensembles et en logique aux diagrammes de Venn . Ce préambule permettra de définir plus précisément le concept de transposition didactique. (Recours "savant").
- 2^o Ensuite je décrirai le recours fait par le programme romand et sa réalisation en classe (Recours didactique).
- 3^o Au travers d'interviews d'élèves et d'une étude diachronique des productions des élèves au cours d'exercices et de jeux faits en classe, j'essayerai de cerner ce que cela représente pour les élèves (leur recours à cet objet didactique).

Dans une seconde partie, j'aborderai la question du nombre et me fixerai plus particulièrement sur le "recours didactique". Je montrerai qu'on retrouve tous les aspects de la transposition décrits plus haut. Pour ce qui est des élèves, la question du nombre est bien plus vaste que celle "des ensembles" (ça travaille plus les élèves ! - ça, c'est-à-dire de l'intérieur comme de l'extérieur). Je me limiterai donc ici à montrer l'inconséquence d'une pédagogie qui aimerait amener ses élèves à la distance et l'observation mais qui, obnubilée par un souci d'efficacité immédiate et par une inquiétude devant l'incompréhension, n'arrive pas, elle-même, à observer les élèves. J'aurais alors montré que cela tient essentiellement au sens qu'elle donne aux activités proposées. De nouveau, la considération de la transposition s'impose. Et je conclurai là-dessus.

CONSTRUCTION DE LA THESE

Dans la thèse, l'option délibérément prise est celle d'une description. Le statut de la description n'est guère valorisé dans le travail de recherche et renvoie souvent à la représentation d'une démarche scientifique peu élaborée. Dans le cas présent, la description, détaillée même, se légitime par le fait que l'objet à étudier (trop souvent évité dans maintes recherches à but explicatif) est ce qui se passe réellement dans l'enseignement des mathématiques. Nous manquons de descriptions de cette réalité que tout le monde croit connaître à partir de ses souvenirs, de la lecture de manuels ou de quelques visites de classes. La première exigence pour l'étude didactique présente est d'avoir accès et de rendre compte des conditions et des produits effectifs des apprentissages faits en classe. Bien sûr, une telle description nécessite une interprétation qui soit fondée sur un cadre conceptuel et qui, en retour, la précise et l'enrichisse. En l'occurrence, c'est celui du phénomène de "transposition didactique", dû à Y. Chevallard après les analyses sociologiques de M. Verret, qui orientera mes interprétations et servira de schéma organisateur des observations et descriptions.

La thèse est construite en deux parties bien distinctes. La première consiste à une explicitation complète de tout le processus de transposition didactique et de ses répercussions dans l'échange maître-élève. Pour mener à bien ce travail, je me suis consacré à l'analyse de ce qu'on a appelé dans les années 60-70 : "la théorie des ensembles".

- I. Le premier chapitre, éminamment descriptif a pour but de montrer la méthode de récolte des faits. Qu'est-ce qui a retenu mon attention pour mes hypothèses de travail.
- II. Le second chapitre consiste à discuter de l'objet que l'on veut enseigner, que l'on a dénommé : théorie des ensembles, et qui recouvre une introduction à la logique des classes par le biais des diagrammes logiques.
- III. Le troisième chapitre suit la chaîne qui va de la désignation d'un contenu à enseigner aux échanges maître-élève auxquels cet enseignement donne lieu. Je donnerai quelques éléments de base pour l'interprétation des productions scolaires.
- IV. En continuité avec le chapitre précédent, je présenterai des interviews d'élèves pris en fin de 2e année primaire, où j'ai essayé de cerner ce que représentaient pour eux ensembles et diagrammes.
- V. Sur la base des analyses du chapitre III, je ferai l'analyse diachronique de données recueillies en classe. Partant de productions des élèves à un exercice sur fiche, j'élargirai le regard sur l'entier d'une tâche de classification faite en collectif.
- VI. Cette seconde partie de la thèse, consacrée à l'enseignement du nombre est essentiellement une analyse du projet. Il s'agit ici, de reprendre sur un autre domaine ce qui a été décrit dans tous ses détails pour la logique.

C H A P I T R E I

PREMIERS JEUX, PREMIERES OBSERVATIONS

1. Premier jeu et réaction des élèves

1.1.

Au départ, jeu de description d'objets ou de figures en utilisant un certain nombre d'attributs. Jeux de placement des éléments à l'intérieur ou à l'extérieur d'un domaine selon qu'ils possèdent ou non l'attribut. A l'inverse, recherche de la propriété commune à un ensemble donné. Cela prend tout d'abord la forme libre de création d'une étiquette qui qualifie les éléments rassemblés puis, très vite, la détermination dans un ensemble préalablement donné d'étiquettes de celle qui convient. Cette deuxième forme de tâche est considérée comme plus complexe dans la mesure où elle est soumise à une contrainte plus grande. On pourrait aussi penser qu'au contraire la présentation préalable des étiquettes aux élèves leur facilite la tâche. On remarquera en passant que les élèves sont mis devant deux ensembles de nature évidemment différente : des objets ou représentation d'objets et des étiquettes ou représentations de signes (traits) caractéristique des objets. Ceci soulève évidemment quelques questions quant à l'appréciation de l'activité exacte demandée aux élèves. De même, un implicite logique préside à ces jeux. C'est l'existence de caractères simples et évidents correspondant aux ensembles constitués. Cet implicite est tout naturel au niveau d'enseignement où on se place. Mais on appelle ici ensemble quelque chose qui n'a pas toute la généralité du concept mathématique, on aurait tout aussi bien pu

dire classe logique, famille d'objets, tas etc... D'autre part, cet implicite n'est nullement nécessaire puisque toute collection finie d'objets, donc énumérable est un ensemble.

En conclusion, on remarquera que dès ces premiers jeux l'enseignement est fortement dirigé vers la combinatoire d'attributs : ainsi en est marquée la définition et les exercices de constitution des ensembles, ainsi encore l'intersection est atteinte par un travail successif et indépendant sur un attribut puis sur un autre. Mais ce n'est pas à la production d'un seul ensemble ni à celle de deux ensembles croisés que se mesure la maîtrise de ces opérations.

1.2.

Dès les premiers exercices, les élèves observés en font trop. C'est-à-dire que pour eux, la tâche ne se limite pas à celle décrite plus haut. En fait, j'ai observé des mises en relation indifférenciées qui à mon point de vue se distribuent sur 4 niveaux :

- a) Le premier est celui qui correspond à la tâche explicite. Les élèves décrivent les objets et les placent en fonction de leurs attributs. Il apparaît que les élèves restent centrés sur les objets, émettant successivement à leur propos les jugements. Mais les ensembles restent ouverts, c'est-à-dire qu'à tout moment ils peuvent être complétés par de nouveaux éléments.
- b) Dès le départ, il y a eu mise en relation entre les objets eux-mêmes. Ces mises en relation sont de nouveau tributaires des objets successivement envisagés et consistent autant en différences qu'en ressemblances. De plus, interviennent des relations de placement : être ensemble, être au même endroit, être de chaque côté de la corde ... Enfin, partis dans des comparaisons entre éléments, les élèves ont de la peine à garder constamment la même relation en tête. Ils changent souvent de point de vue.
- c) Les mises en relation se font aussi entre les objets à placer et les cordes délimitant les ensembles - l'ensemble des rouges, c'est l'ensemble rouge, ça va dans la corde rouge.
- d) Enfin et bien évidemment, ont été exprimées des relations entre les attributs eux-mêmes. Relation d'opposition, partition etc... Ainsi, quand on leur a demandé de classer les objets rouges, les élèves ne s'y sont

pas limités, et ils ont d'emblée fait une classification complète par couleurs.

Remarques :

- 1^o D'une part la réaction des élèves est "tous azimuts..." (et ces réactions sont bien connues).
- 2^o L'objectif explicite de l'exercice est plus étroit, banal et simple que la tâche que les élèves y ont lue. Le maître essaie de mettre de l'ordre et tente de clarifier ce qu'il demande, en sanctionnant les réponses. Il ne peut le faire que progressivement.
- 3^o La question est alors de savoir quel impact de tels jeux peuvent avoir sur les élèves. Si c'est le maître qui a tout le long dirigé et contrôlé le travail du groupe classe, sera-ce vraiment profitable aux élèves ? Il importe donc de savoir comment le maître va procéder pour que ce travail de tri soit dévolu aux élèves. La standardisation des exercices le recours à des formes de matériel et symbolisme particuliers va jouer ce rôle.

2. Le matériel structuré s'impose comme moyen didactique.

Ainsi, les jeux proposés au départ et les premières fiches d'exercices sont trop riches. On va donc se limiter progressivement à l'emploi de ce qu'on appelle un matériel structuré (et dont les prototypes sont les célèbres blocs logiques de Dienes) ou sur des figures stylisées et géométriques. Ceci a pour conséquences :

- 1^o De bien fixer un univers d'attributs sur lequel l'on travaille (par exemple pour les blocs : forme, couleur, épaisseur, grandeur...). De mettre ainsi l'accent sur ces attributs et la combinatoire qui président à la construction du matériel.

2^o De proposer en général qu'un seul exemplaire de chaque objet. Les objets sont tous différents par un attribut au moins. D'autre part, les ressemblances et différences se font sur la base de ces critères attributifs.

3^o De permettre une présentation stylisée des attributs qui rappelle bien les objets ou les figures et qui donc supportent la mise en relation objet-attribut par une correspondance perceptive.

Voici en gros à quoi sert le matériel structuré. C'est donc un instrument didactique, en quelque sorte un mécano de la logique. Prenons comme exemple deux séquences d'utilisation de ce matériel.

2.1.

Monica présente 16 cartes d'écureuils :

- 4 couleurs : gris noir
roux brun
- 2 positions : debout/couché
- 2 caractères : avec ou sans
noisette

Monica étale les cartes et demande une description

y en a qu'un seul ?

Y'en a-t-il deux pareils ?

Y'en a deux comme ça ?

- y en a un roux

- non y en a 4, y en a 3

- y en a des qui sont debout - couchés

- Ils ne sont pas tous les mêmes

- y en a un noir avec une noisette

Un élève sort une deuxième carte d'écureuil noir avec une noisette.

- ah non y'en a un debout, l'autre couché. Il sort une troisième carte : debout avec noisette mais gris. Il s'en rend compte.

Monica met deux cartes de côté :
gris couché avec noisette
gris couché sans noisette

Est-ce un ensemble d'écureuils avec
noisette ?

Faites l'ensemble des écureuils
avec noisette.

oui !

- c'est des gris pis ils sont couchés

- non.

Ils piochent dans le tas de cartes,
les cartes correspondantes.

- toutes les noisettes ?

Dans cette courte séquence, on voit comment s'enchaîne de façon organisée les relations de ressemblance et de différence. Le matériel structuré permet de considérer que l'ensemble est constitué maintenant comme le domaine de variation sous un attribut donné. Et pour cela, il est bon que les cartes soient toutes différentes, c'est un point sur lequel Monica insiste (et le livre du maître aussi).

2.2.

Second exemple, introduction de l'étiquette.

Matériel : 18 cartes représentant des coccinelles.

3 couleurs : rouge orange jaune

3 nombres de points : 2 4 ou 6

2 dispositions des ailes : ouvertes /
fermées.

Séquence A. On passe de la constitution d'un ensemble à l'étiquette.

A₁ Monica forme un ensemble de
cartes en les entourant d'une
corde.

Quel ensemble est-ce ?

un ensemble d'oranges.

A₂ Monica fait un paquet de cartes et les retourne de façon qu'on ne voie plus les images.

Monica raconte une histoire de magasin : un monsieur vient dans le magasin et demande une carte orange, comment être sûr de retrouver le bon paquet

Monica précise que le paquet est emballé.

Mais si c'est pas le bon paquet

oui.

Monica tend une carte à l'élève.

Que pourrait-on faire au lieu d'écrire ?

On retourne le paquet

Le monsieur prend le paquet et le coupe puis il regarde la carte dedans.

- il faut un billet et écrire dessus.

- il écrit orange dessus.

- faire un dessin et on demandera le paquet orange.

A₃ un dessin de quoi ?

pourquoi pas ?

on les met ou pas ?

On met combien de points ?

Et si on prend dans le paquet une qui a 4 points ?

C'est drôlement compliqué si tu écris tout !

- de coccinelle

- et les points ?

- pas besoin de dessiner les points

- oui, il faut les points

- on les met

- 6

- on dit, on écrit 6 points puis 4 points et puis 2 points

- on écrit orange

- on achète un stylo orange et on dessine orange.

Séquence B : Etiquette → ensemble.

B₁ Monica présente l'étiquette non colorée suivante :



Combien y'en a ?

Qu'est-ce qu'il y a sur l'étiquette?

- c'est tous les rouges
- c'est toutes les coccinelles
- non à 4.

Un élève sort 6 cartes de coccinelles à 4 points.

- mais c'est les ailes fermées ..., non ouvertes

Il sépare en 2 tas de 3 cartes selon les ailes.

- Il n'y en a plus (de cartes de coccinelles à 4 points)

- 3 puisqu'il y a 3 couleurs, il peut pas y en avoir plus que 3.

- 4 ronds (points) et fermés.

Il vérifie qu'il y en a bien 3 qui ont les ailes fermées.

B₂ Monica présente l'étiquette



- c'est celle à 4 points, alors y en a encore

... discussion, d'autres sont pas d'accord.

- les ailes ouvertes ou fermées ?

on ne dit rien des ailes.

combien y'en a

4 - 5 , 6 .

3 et 3 ça fait 6

pourquoi 3 et 3 ?

- 3 plus 3 égale 6 ... non 5 non 6

pourquoi t'as compté 3 plus 3 ?

- j'ai compté comme ça : les ouvertes jaunes, rouges, oranges et les fermées.

c'est quoi comme ensemble ?

- l'ensemble des 4, le groupe des 4.

Analyse du protocole :

- A₁ rien à dire
- A₂ Monica motive le jeu, l'étiquette comme mnémotechnique.
- A₃ Monica n'est pas satisfaite de cette dénomination de l'ensemble (ensemble orange) c'est les cartes et pas les ensembles qui doivent être décrits par les attributs. Elle ramène donc les élèves sur les cartes. La réaction va être une description du matériel (coccinelles, à points... on ne parle pas de couleur puisque c'est fixé). Monica arrive à convaincre plus ou moins que l'attribut orange suffit (mais alors elle aurait pu s'en tenir à la dénomination ensemble orange). Les élèves n'ont pas compris à quoi Monica voulait en venir et elle doit les récupérer.
- B₁ On trouve l'ensemble par une sorte de crible : d'abord à 4 points, puis fermées. Il est possible que le second attribut n'ait pas été tout de suite vu par les élèves et que c'est la présence de cartes à ailes ouvertes qui leur a donné l'idée. De nouveau décalage entre Monica et les élèves. Monica aimerait qu'ils répondent : "il y a 3 cartes avec 4 points et des ailes fermées" - ils lui montreraient ainsi qu'ils font bien la liaison entre l'étiquette et l'ensemble constitué. Elle ne demande pas plus qu'une description plate. Mais un élève se lance dans la démonstration (juste !) du fait qu'il y a 3 cartes et sa réponse n'entre pas dans ce canevas. (Il y a 3 cartes parce qu'il y a 3 couleurs, donc il ne peut y en avoir plus, et effectivement chaque couleur est représentée).
- B₂ Le lien avec l'étiquette est diversement compris, d'où discussion, tranché finalement par Monica qui dit : on ne parle pas des ailes (c'est-à-dire elles ne sont pas présentées donc c'est libre. Mais les coccinelles ne sont pas représentées non plus donc ça pourrait aussi être des chameaux à 4 points...)
- Il y aura 6 cartes par réunion de 2 ensembles et variation selon la couleur

Le jeu du maître consiste à enseigner à ses élèves ce que représentent les étiquettes et les relations qu'elles entretiennent avec les éléments et les ensembles. Celles-ci sont des symboles des attributs considérés, mais, dans un souci de simplification elles sont aussi les symboles des différents traits constitutifs des objets ou des images.

Les élèves interprètent cela comme un jeu de description des éléments. Répéter que l'image représentée sur la carte possède ou non tel ou tel trait devient énumérer les constituants de l'image. Mais il n'y a pas de raison alors à s'en tenir à un seul trait, ni même de le reproduire. Le sujet dispose sous ses yeux de toutes les images. La maîtresse doit alors ruser en justifiant sa demande (créer l'équilibre) par une histoire, motif, extérieure au jeu. (Il s'agit de garder une mémoire).

Remarquons en outre que la description que font les élèves d'un ensemble de cartes revient à faire varier les caractéristiques complémentaires au trait considéré. Ex.: ailes fermées — variation de couleur ou du nombre de points.

Note : Où sont les ensembles dans ce jeu ? Si une image est un ensemble de traits, voir si elle possède ou non une propriété revient à examiner la présence ou l'absence du trait considéré. Ce qui signifie l'attribut vient donc à appartenir à ce qui signifie l'objet ! Lorsqu'il s'agit de penser un ensemble, la série des cartes à considérer représente la variation de certains traits sous la constance de certains autres. C'est alors cela qui réalise l'ensemble.

Nous retrouverons tout au long de cette étude la même contradiction entre le jeu tel qu'il se veut être et le travail effectif des élèves.

3. Exercices correspondants.

Tout ne se passe pas dans ces jeux, et pas en une fois. Monica s'est aussi appuyée sur du travail sur fiche.

Le travail sur fiche, c'est-à-dire sur feuille, est particulier dans la mesure où on présente aux élèves des figures. Comme les figures ne sont pas déplaçables, on tourne la difficulté en les faisant entourer par une corde. (L'auteur aura veillé à ne pas mettre les figures de façon trop mêlée, de sorte que les cordes ne se croisent pas trop). Une seconde façon consiste à indiquer au moyen de flèches l'endroit où il faudrait placer les figures dans un diagramme déjà constitué.

Selon les auteurs du programme, le travail sur fiche doit nécessairement renvoyer aux jeux faits en classe. Ce qui veut dire que le trait de crayon fait sur la feuille représente nécessairement la corde dont on a entouré les objets. Mais l'élève placé devant la fiche, va la prendre pour elle-même et ne s'occupera pas de faire le lien avec un jeu. De toutes façons, il faudrait qu'il arrive à se représenter ce jeu, et qu'il fasse la correspondance entre ce dernier et la tâche de l'exercice. Au contraire, il va trouver des procédés et des règles propres à cette nouvelle tâche (et il y arrivera plus vite que s'il essaie d'y représenter un jeu concret ...). Prenons deux exemples :

3.1.

Tout d'abord une des premières fiches du livre. Il s'agit de figures représentant des formes géométriques de différentes couleurs. Il n'y a pas de consigne explicite, on veut laisser l'élève libre du choix de ses ensembles.

Monica présente l'exercice par une petite discussion qui permette de centrer l'élève sur une tâche qui corresponde un tant soit peu aux ensembles. Tout d'abord elle dit : vous faites des ensembles que vous voyez.

Comment pourrait-on faire ?

- un élève propose le critère forme ce qui est compliqué vu la diversité des formes différentes et le fait qu'il ne peut pas leur donner un nom à toutes)
- tout de suite d'autres proposent la couleur (la fiche est d'ailleurs organisée pour cela : les élèves connaissent les noms de chacune des couleurs mais pas de toutes les formes).

Conclusion de Monica :

Bon, vous pouvez faire comme vous voulez mais :

- 1^o vous devez pouvoir m'expliquer pourquoi vous avez mis ensemble les objets
- 2^o vous devez me rendre des feuilles lisibles, pas de gribouillis comme pour les autres fiches (appliquez-vous).

Il faut comprendre ces exigences en fonction de la tâche attendue par la maîtresse, et les comparer aux réponses fournies.

1^o On aimerait bien que les élèves anticipent l'ensemble et tracent ensuite, autour des éléments, un trait de crayon. Cela revient à examiner globalement les objets selon un critère que l'on se donne et ensuite les entourer. Dans ce cas, pas de problèmes, ni pour justifier quel ensemble on a fait, ni pour obtenir un trait qui ne soit pas trop brouillon.

Or les élèves n'ont pas procédé ainsi. Très vite ils sont restés accrochés aux objets. On peut remarquer cela sur les traits dessinés : ils ne sont pas forcément fermés, ils entourent les objets :



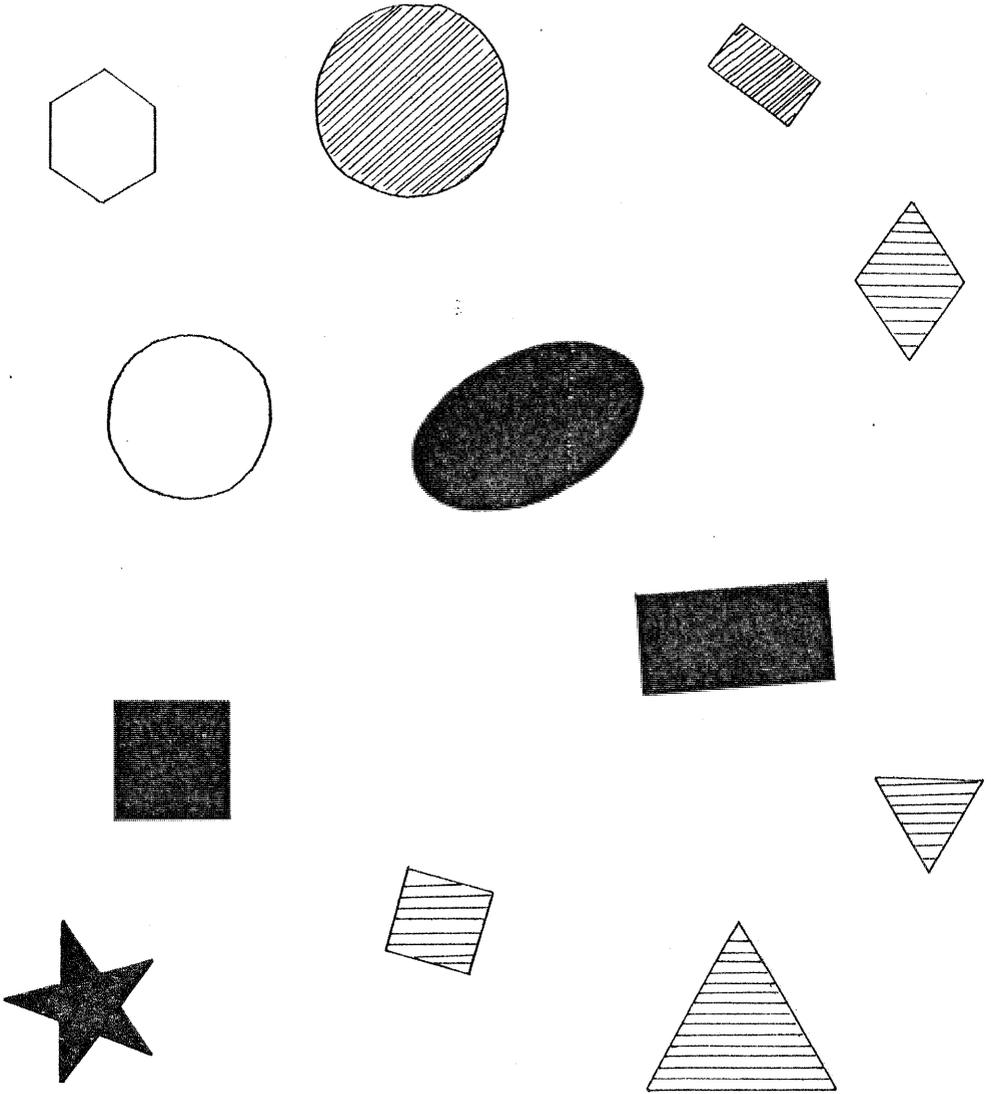
Ce trait exprime plutôt un cheminement d'un objet à un autre que la réunion de divers éléments. On peut aussi remarquer cela à la prédominance de couples entourés et par des objets entourés de façon non cohérente.



L'élève passe d'un objet à un autre objet ressemblant, puis à un autre objet ressemblant etc..., sans forcément garder toujours le même point de vue. C'est alors que les élèves ne savent en général plus pourquoi ils ont mis ensemble des objets (ou plutôt pourquoi ces objets se trouvent tout d'un coup ensemble). De plus, avec ce système, le hasard peut aussi faire qu'un objet ait été englobé par mégarde, il faut donc vérifier quels objets ont été réunis.

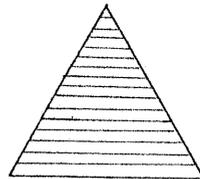
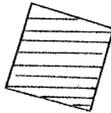
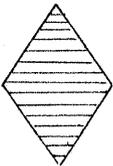
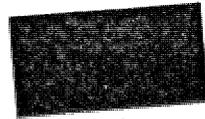
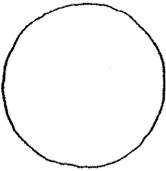
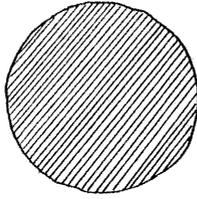
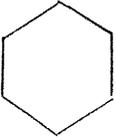
Ainsi, la demande de la maîtresse est différée sur la manifestation symbolique de l'activité souhaitée. "Pas de gribouillage" et "pouvoir dire quels ensembles on a fait" se substituent à "faire des ensembles". Ce sont les conditions minimum à un dialogue (elle veut que l'élève puisse se relire et comparer son résultat à ce qu'il a voulu faire). Il y a donc une sorte d'inversion, puisque ce qui était conséquence à l'activité souhaitée (cf. ci-dessus) devient critère de celle-ci, et contrainte pour amener l'élève à dépasser ses conduites spontanées.

2⁰ Mais l'ambiguïté tient avant tout à l'exercice lui-même où l'on croit proposer une activité libre de contraintes en demandant une réponse minimale. (Et les auteurs tendent la perche aux élèves en disposant les figures regroupées selon la couleur). On ne demande rien de plus aux élèves que de bien utiliser le symbolisme et de savoir lire le résultat d'un ou de deux entourages. Certains l'ont compris. Mais d'autres vont s'embarquer dans des classifications plus "casse-gueule", selon la forme ou encore un mixte de forme/couleur ou encore vont partir dans des comparaisons fonctionnelles : la lune, le soleil... et n'arriver pas à un résultat clair (entreprise trop complexe et mouvante). Bien sûr, Monica a bien compris cela mais, comme tout le monde, elle a été embarrassée par ces élèves qui cherchent midi à quatorze heures. Et elle a essayé de les recentrer sur la tâche simple qu'elle demande. C'est l'usage de l'ensemble qui l'intéresse et non pas les tentatives de classification de l'élève (qui d'ailleurs s'embrouille facilement).



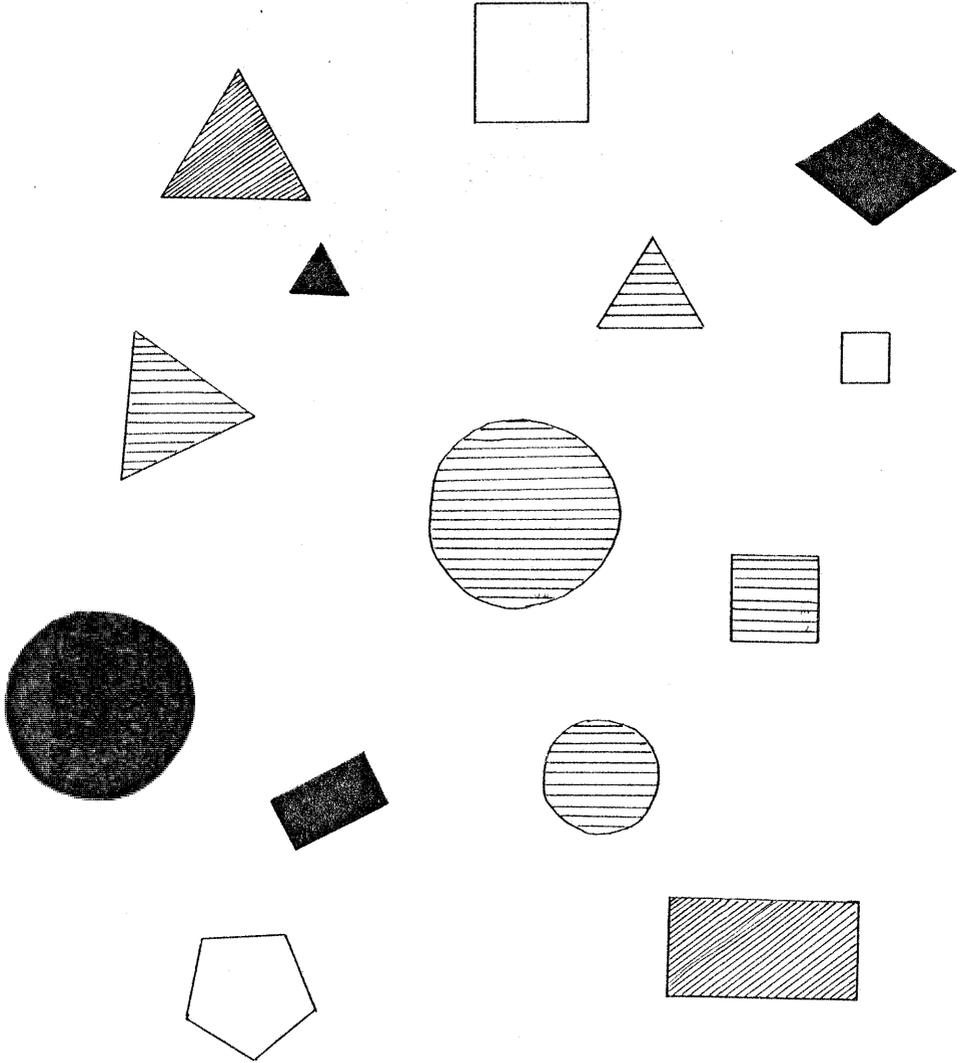
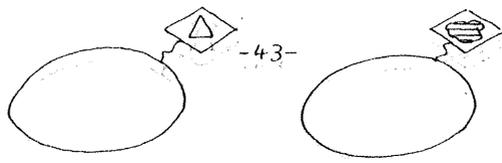
Rem: Le losange vert est isolé des autres formes vertes)

 rouge  vert  bleu  jaune.



(Rem: Correction de la 2e édition : les formes vertes sont regroupées vers le bas. Rocade entre le losange vert et l'étoile rouge.)

 vert  bleu  rouge  jaune



 rouge  vert  bleu  jaune

3.2.

Un second exemple de fiche, la fiche ER 10 (1ère édition) présente des figures géométriques colorées. On demande aux élèves d'entourer les formes triangulaires, et dans un second temps d'entourer les formes vertes. Les formes sont disposées sur la fiche, de sorte que les figures vertes et triangulaires soient centrales !

La tâche est simple pour autant qu'il suffise de faire faire deux entourages indépendamment l'un de l'autre. Par superposition, le lapin sortira du chapeau : les élèves pourront constater que l'on a fait ressortir une zone doublement entourée.

Voici les résultats :

1) 7 élèves ont effectivement fait deux ensembles.

a) Trois d'entre eux répondent de la manière attendue, et ce sans avoir fait de gommage.

b) Les quatre autres élèves évitent de croiser les "cordes".

- ensemble de verts englobant les deux triangles verts et ensemble de triangles non verts.

- ensemble de verts avec l'un des triangles verts, ensemble de triangles avec l'autre triangle vert.

- ensemble de triangles verts, ensemble de ronds verts.

- ensemble de triangles non verts, ensemble de ronds.

2) 8 autres élèves ont constitué plus que 2 ensembles. Certains ont même produit une partition exhaustive.

- ensemble de grands triangles, de petits triangles, ensemble de verts non triangles.

- ensemble de grands ronds, ensemble de verts non triangles
- partition selon rond, carré, triangle et 3 éléments isolés entourés
- ensemble de verts non triangles, le reste partitionné en triangles, carrés, ronds
- ensemble de triangles, et le reste partitionné en vert rouge jaune
- ensemble de triangles, ronds, verts non triangles et petits
- partition selon la forme.

Remarques :

- Ces résultats me font bien penser aux descriptions de Calpini et Droz (1976). Mais ici ces réponses ne sont pas forcément les réponses spontanées des élèves. Il y a eu consigne précise, et il y a eu des discussions avec la maîtresse ou des camarades. Et pourtant les élèves gardent bien leur point de vue.

- Le classement que je donne n'est que descriptif, l'opposition entre ceux qui ont fait 2 ensembles, et les autres n'est là qu'à titre démonstratif.

On note que :

a) beaucoup d'élèves abandonnent les objets déjà classés. Il y a partitions successives. On classe les triangles comme demandé, puis le reste selon la couleur, sans faire le croisement des critères.

b) La moitié des élèves ont entrepris une classification plus exhaustive que demandée. C'est donc que leur réponse témoigne d'une analyse des figures de la fiche. Ils ont de la peine à s'abstraire des objets proposés et à se contenter de les entourer.

c) Lié à cela, on se rend compte de pas mal de classifications mixtes : les élèves n'ont donc pas oublié totalement la consigne.

d) Certains choisissent une place pour les triangles verts. Un dans chaque ensemble par exemple, et évitent le recouvrement. (Cependant certains qui classent les triangles verts parmi les triangles ne se sont pas posé l'alternative : "triangles verts éléments de triangles" ou "triangles verts éléments de verts". Sur ces réponses, on ne peut pas trancher).

e) D'autre part, les premières fiches demandent d'éviter les croisements, peut-être que les élèves continuent sur cette lancée.

Je cite cet exemple de façon exhaustive parce qu'en classe on se heurte toujours à ce décalage entre réponses obtenues et réponses attendues. En considérant les attendus scolaires, on décidera qu'il y a échec. Mais quel échec et pour qui ? Les réponses des élèves sont pensées, et c'est le raisonnement même qui les soutient qui interfère avec la tâche demandée : entourer successivement et de manière indépendante deux collections. Pour l'élève, le marquage des ensembles (par le dessin de la "corde") n'est pas un outil de classification, et ne se supplante pas à un traitement spontané plus complexe (moins décanté, moins machinal donc moins fiable). La difficulté de penser les attributs de manière indépendante est plutôt réjouissante et montre que les élèves à ce niveau ne dissocient pas totalement la tâche scolaire de leurs traitements spontanés. Cependant pour le projet pédagogique tel qu'il est défini cela ne convient pas. Ainsi, la fiche ER 10, citée ci-dessus, semble avoir posé des problèmes dans plus d'une classe. Comment comprendre autrement le fait que, dans la seconde édition des manuels, elle porte désormais le numéro 22 ? Mais, qu'est-ce que ça change ?

4. Utilisation de l'arbre de classement.

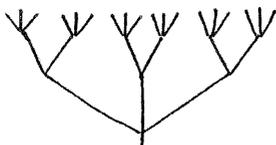
Pour finir cette description détaillée qui doit permettre au lecteur de se représenter les tâches scolaires, je vais encore parler des premières leçons sur l'arbre.

4.1.

Les jeux sur l'arbre auxquels j'ai assisté en ce début d'année portaient sur le matériel des coccinelles : rouges, oranges, jaunes, à 2, 4 ou 6 points, ailes ouvertes ou fermées. Les étiquettes avaient été précédemment introduites et exercées sur les jeux de portrait.

Je n'ai pas assisté au premier jeu sur l'arbre. Dans ce deuxième jeu les élèves ont tout de suite cherché à reproduire la réponse qu'ils avaient trouvé au premier.

Les élèves ont devant eux un arbre 3 - 2 - 3 :

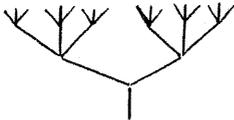


ils disposent de 18 cartes de coccinelles et d'un certain nombre d'étiquettes.

Le jeu proposé par la maîtresse est de faire monter les coccinelles sur les branches de l'arbre. Mais pour cela, il faut que la coccinelle sache où aller, c'est-à-dire qu'il faut lui indiquer clairement un chemin. Et ceci au moyen des étiquettes.

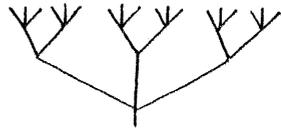
Donc on prévoit le déroulement suivant (programme de fonctionnement). Prendre une carte, la faire monter le long de l'arbre, et, au fur et à mesure qu'elle se trouve à un embranchement, placer des étiquettes pour (lui) indiquer

le chemin à prendre. C'est assez subtil puisque pour la première carte (qu'on peut mettre n'importe où) il faudra placer 3 + 2 + 3 étiquettes (on place toutes les étiquettes relatives à un embranchement), tandis que la seconde ne nécessitera au plus que 2 + 3 étiquettes (et la maîtresse fait en sorte que ce soit bien le cas). Ainsi les contraintes de placement des cartes deviennent de plus en plus fortes ; la tâche consiste à la fois à rendre explicite les règles de l'étiquetage sur l'arbre et à exercer le tri des coccinelles. Cette coordination est difficile pour les élèves, maître et élèves tâtonnent comme le montre l'exemple suivant. Ce jeu a été fait quelque temps auparavant sur un arbre 2 - 3 - 3



avec le même matériel.

Maintenant on a un arbre 3 - 2 - 3



Reconnaissez-vous l'arbre ?

ah ! vraiment ? vous regardez mal !

précisez ?

Chacun prend une carte, chacun à son tour va faire monter une pernette

Non, il faut monter petit à petit.
Comment va-t-elle savoir son chemin?

Il faut placer les étiquettes !

- oui
- non
- là (2e étage) c'est plus large
- là (2e étage) il y avait 3 tandis qu'en haut c'était la même chose.
- Une élève a la pernette orange, ouverte, 4. Elle mentionne les couleurs pour le premier étage (vaguement) puis elle fait monter sa carte jusqu'en haut.
- quelqu'un mentionne les étiquettes.
- l'élève qui a monté sa carte veut placer les étiquettes couleurs au 2e étage, il y a 2 branches mais 3 couleurs, elle place seulement 2 couleurs orange et

Et les jaunes ?

Mais comment la coccinelle peut-elle être là ? Quand tu vas dans une rue tu ne sautes pas des rues comme ça !

rouge . Elle place sa carte à la bifurcation du 2e étage.

- l'élève en question place les étiquettes couleurs le long des branches du 1er étage. Mais laisse sa carte au même endroit.

- l'élève redescend sa carte et redispose les étiquettes le long du 1er étage.

- une autre élève : là je ne comprends pas, il n'y a que 2 branches

- dans ces 2 branches c'est rouge (report de l'étiquette)

- il faut s'arrêter ici... il faut mettre des étiquettes

- c'est les points (2, 4 ou 6)

- non, il n'y a que 2 branches

- c'est les ailes ouvertes ou fermées.

- et en haut ?

- je n'y comprends rien ...

- c'est facile (...) il faut mettre 2, 4, 6 points et pis maintenant t'arrive à la fin de l'arbre.

Discussion pour savoir si la carte doit être mise en haut de l'arbre, en dehors ou rester sur la branche.

Finalement, l'arbre sera rempli correctement. Puis je prends la relève de Monica. J'enlève les étiquettes et place les cartes en haut de l'arbre mais avec quelques interventions.

Est-ce que c'est juste ?

- oui unanime

Monica. Vous dites sans regarder le tableau.

- ah non

(Je prends une pernette) Elle veut descendre, comment fera-t-elle ?

- elle n'a qu'à suivre

- elle se souvient du chemin

Comment elle fait pour pas se tromper (en descendant)

- elle a des yeux alors elle voit les autres

- elle a des yeux, elle descend, elle ne veut pas remonter (il ya qu'une possibilité de redescendre vu les embranchements de l'arbre)

Maintenant, elle veut remonter !

- elle se rappelle

Non car elle a mangé beaucoup pis elle s'est endormie, alors elle ne se rappelle plus.

- alors elle va au hasard. (l'élève fait monter la carte au bon endroit)

ah bon, elle va au hasard (je fais monter la carte au mauvais endroit)

- elle voit qu'elle s'est trompée, alors elle voit que les 2 branches sont prises alors elle va là où il n'y a personne.

(il faut se rappeler que seule 1 pernette est redescendue)

Bon, d'accord ...

Toutes les cartes sont de nouveau en haut de l'arbre.

Vous pensez que l'arbre est juste?

- non

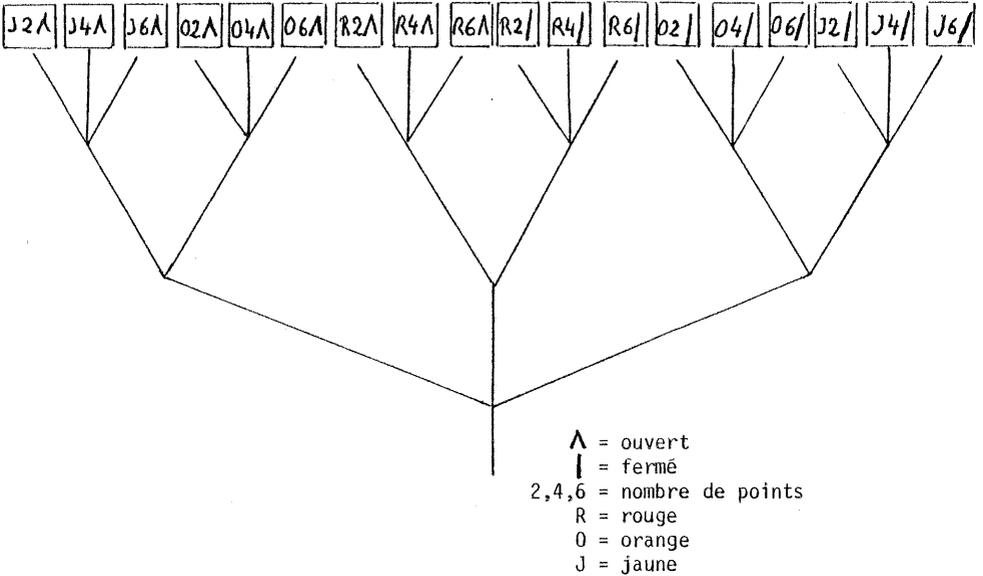
- il faut inverser les nombres (de points sur les ailes entre 2 cartes ...)

- une élève dit qu'elle ne comprend rien

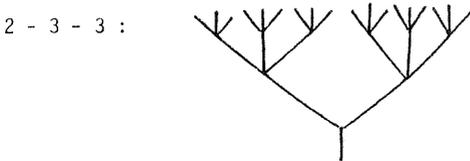
J'essaie de lui expliquer...

- un élève aimerait que tous les 2 points soient ensemble
- d'autres pensent qu'il faut mettre les ouvertes d'un côté, les fermées de l'autre

Ils se mettent à corriger et ça donne



ce qui ne correspond pas à l'arbre dessiné mais à un autre arbre



Peut-être les élèves ont-ils essayé de reproduire la distribution des cartes qu'ils avaient obtenues dans le 1er jeu sur l'arbre ...

Remarques :

1/ j'ai donné ce protocole dans le détail pour qu'on se rende compte du travail de cette époque. Et on remarque qu'avec mon histoire de

pernette qui descend, je n'arrive pas à leur faire comprendre qu'ils pourraient retrouver les étiquettes en faisant descendre quelques pernettes (ce qui d'ailleurs dans ce cas où les cartes sont mal placées est une très mauvaise idée !). On se prend au jeu des coccinelles (et heureusement, les élèves s'obstinent à ne pas comprendre).

2/ Il est intéressant de noter la vision globale de l'arbre : il n'est pas analysé.

3/ Ensuite cette tendance à regarder tout de suite en haut de l'arbre. Et ceci autant pour la description de l'arbre (en haut c'est la même chose que l'autre) que du point de vue des étiquettes (que mettra-t-on en haut), que de la carte (qui va droit à sa place). Donc les élèves comprennent la tâche comme : placer la carte en haut de l'arbre. Et si chacun trouve sa place, ça leur suffit. Se référer au début du protocole, à la discussion sur la coccinelle qui remonte, et aux tentatives de réarrangement des cartes, mais après qu'on leur ait dit que c'était faux.

4/ Le dernier arrangement est d'ailleurs frappant puisque les élèves ne s'occupent plus des étiquettes. Ils procèdent soit en s'appuyant sur les oppositions (perceptives) du matériel et en les signifiant, soit en essayant de retrouver une configuration obtenue lors du 1er jeu. De toutes façons, ils procèdent sur les cartes elles-mêmes, horizontalement et pas en référence avec un cheminement dans l'arbre ni des étiquettes placées.

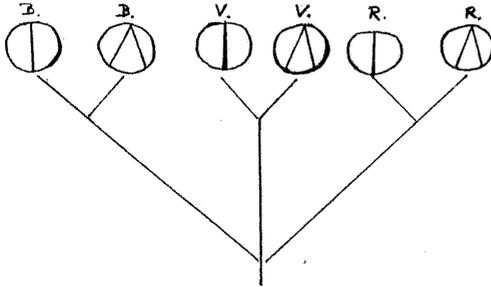
Cette dernière observation (coroborée par d'autres ultérieures) sont à rapprocher des résultats, de Mari Luisa Leoni dans son travail sur les classifications, travail effectué avec des élèves de 4e , 5e et 6e année ! (1976)

4.2.

La semaine suivante nous faisons une seconde expérience qui confirme cette interprétation.

Monica avait présenté au tableau noir 2 arbres remplis mais sans étiquettes.

Le jeu consiste à trouver les étiquettes et à comparer les arbres.



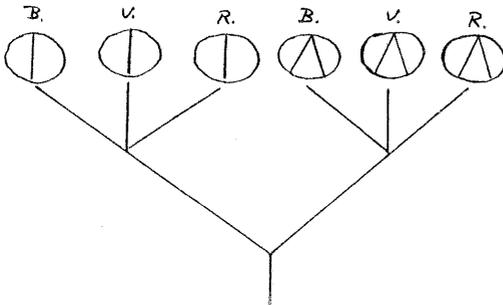
(je laisse au lecteur le soin de colorier selon les indications
B = bleu V = vert R = rouge)

que voyez-vous ?

- c'est chaque fois la même chose :
fermé/ouvert, fermé/ouvert, fermé/ouvert
- y a une bleue non 2 bleues, 2 vertes
2 rouges.

Monica reprend mon idée et propose comme méthode de travail, de faire descendre les pernettes une à une et de retrouver ainsi les étiquettes pour qu'elles puissent ainsi retourner au même endroit. Evidemment, aucun élève ne procédera ainsi.

Pendant que les élèves travaillent à leur place, elle a dessiné un autre arbre au tableau à côté du premier :



que voyez-vous ?

- là y a des bleues, vertes, rouges
fermées ensemble et des bleues vertes
rouges ouvertes ensemble

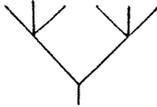
c'est comme pour l'autre arbre ?

- non unanime.

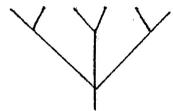
Ces descriptions montrent bien que les élèves se guident sur les oppositions et les variations répétées. Et ils se sont basés là-dessus pour mettre leurs étiquettes.

Mais un événement nous a surpris tous les deux. Je ne sais plus comment, dans la comparaison des arbres on en est venu à demander dans quel arbre il y avait le plus de coccinelles. La réponse unanime a été :

il y a 6 pernettes à

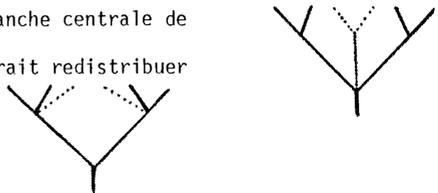


tandis qu'il y en a 8 à



Puis ils se sont mis à compter les coccinelles et ont été très surpris de voir qu'il y avait chaque fois 6 pernettes. Manifestement, ce n'était pas pour eux 2 classifications du même matériel (faut tout leur dire ...).

Ensuite vinrent les tentatives d'explication : mais qui n'étaient pas en rapport avec la nature des objets. C'était soit $2 + 2 + 2 = 3 + 3$. Soit une compensation : si on partageait la branche centrale de en deux (sens de la longueur) on pourrait redistribuer les bouts de chaque côté et avoir :



Enfin, notons que certains élèves se sont embarqués dans le comptage des bouts de branches ..., passons.

Finalement, il faut retenir de cet exemple

- que les élèves peuvent monter les cartes le long de l'arbre sans trop de problèmes (tant qu'on reste à côté d'eux pas de problèmes)

- Qu'une certaine classification peut être lue dans les objets une fois placés (par comparaisons perceptives et prise en compte des répétitions).

Mais le lien entre les deux n'est absolument pas fait.

6 mois plus tard nous avons reposé la même question. Plus de la moitié des élèves se trompaient encore.

5. Conclusion du chapitre.

Tous ces exemples proviennent des leçons données au cours des deux premiers mois d'enseignement en première primaire. On remarque tout de suite un hiatus entre les traitements logiques spontanés (description des objets, comparaison ou opposition entre objets et attributs, classifications partitives et sériations) et la forme que l'enseignement voudrait donner à ces mêmes traitements (diagrammes divers de classification). En fin d'année, les élèves auront appris deux choses (au moins). Tout d'abord ils auront bien identifié les formes que le maître attend, dès lors ils chercheront à les reproduire. Ensuite ils auront progressé dans le travail de classification, et les descriptions (systématiques) prendront toujours place au début du jeu. Le hiatus sera alors moins apparent mais existera toujours.

Il n'empêche qu'au début de l'enseignement, le maître se trouve plutôt débordé par ces activités spontanées. La réponse pratique qu'il apporte à cela est de contenir les tâches dans un univers restreint, tout préparé à l'usage scolaire et on l'imagine, très artificiel. Ainsi quitte-t-on un univers très large, sémantiquement parlant, par exemple un enfant ses jouets de plage ainsi que des choses allant dans l'eau, pour un matériel standardisé, blocs logiques, multifamilles, images géométriques, ... bien plus pauvre. Sans jamais refaire le chemin en sens inverse.

Le maître se trouve au centre d'une contradiction. Si en regard de la généralité des notions visées (ensembles, relation d'appartenance, attribut, opéra-

tions ensemblistes élémentaires...) ce type d'illustrations ne sont pas contradictoires, l'aspect "standard" rappelant l'abstraction des concepts, cet habillage "concret" induit tout un contexte sémantique qui risque de tout embrouiller. Le contrôle de ceci est une chose très délicate. Comment donner du corps aux notions visées sans pour autant laisser les élèves diverger. Finalement, la solution adoptée est d'enseigner des formes critères, objectives, de bonnes figures de ces concepts et relations. De son côté l'élève comprendra vite que c'est ce qu'il doit reproduire.

C'est donc un enseignement des ensembles "en peinture" qui est pratiqué. Mais si la logique est quelque part, ce n'est pas dans ces figures mais bien dans l'activité induite. Activité qui se situe à divers plans symboliques. Et de ce point de vue, repérer dans une image donnée un trait caractéristique revient à repérer un élément dans un ensemble. Au niveau de l'illustration pédagogique et suite à une sorte d'aplatissement des concepts dans un dispositif matériel, on se trouve alors face à un noeud logique : les attributs sont finalement des éléments des objets, les objets sont des assemblages d'attributs, les objets sont les éléments des ensembles désignés par les attributs etc. etc... Ceci ne peut se *dénouer* qu'à un niveau supérieur d'abstraction, et l'exemple montre toutes ses limites.

Finalement, la métaphore ensembliste ne vaut pas plus que celle qui nomme les pièces d'un échiquier. La patate est un ensemble tout comme le roi de l'échiquier est un monarque. Cependant aux échecs personne n'a d'illusion. Il s'agit alors de considérer ces jeux sur les ensembles (diagrammes de Venn) comme un jeu d'échecs. Il y a un dispositif matériel : les patates sont ce qui correspond à l'échiquier, les objets "manipulés" sont les blocs, les cartes ou les dessins, ils correspondent aux pièces du jeu d'échecs. Les règles régissent les relations entre les positions des pièces et leur nature (valeur). Et le but ? Un diagramme

bien rempli correspond-t-il à une figure de mat ?

Et pourtant, cette analogie, pour objective qu'elle soit, ne rend pas compte de la réalité didactique. Le jeu scolaire entre dans le cadre d'un projet, et a une prétention conceptuelle claire. Dit autrement, ces jeux sont sensés avoir une signification mathématique claire, dont méthodologues et maîtres s'engagent à être les garants.

On en arrive donc sur le point suivant : les ensembles et les diagrammes qui les représentent sont des objets d'enseignement. Dans les deux chapitres qui suivent- je vais examiner de ce point de vue là le projet pédagogique. Il faut tout d'abord remonter en amont pour éclaircir l'origine de cet objet. Puis je passerai à l'examen du programme - en me centrant sur les ensembles. Ensuite, aux chapitres IV et V, j'analyserai les activités et productions observables en classe. On se centrera alors sur les traitements des élèves.

C H A P I T R E I I

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE A TRAVERS L'EXEMPLE DE LA

THEORIE DES ENSEMBLES

L'enseignement donné actuellement en première et deuxième primaire fait une large place à la notion d'ensemble. Avant d'analyser la façon dont ce projet est réalisé, je voudrais essayer de clarifier un certain nombre de points au sujet des ensembles et de la façon dont on en a fait un objet scolaire.

1. La Théorie des Ensembles à l'école

La fameuse théorie des ensembles aura été l'emblème par excellence du renouvellement de l'enseignement des mathématiques. A mon avis, elle a pu jouer ce rôle en raison de l'ambivalence du concept d'ensemble, élémentaire et fondamental à la fois. De plus, illusionnés sans doute par le fait de retrouver partout des ensembles, certains l'ont un peu hâtivement considéré comme un concept premier, abolissant du coup les différences de niveau d'abstraction. Un exemple, celui de la notion de cardinal d'un ensemble. Cette notion reste élémentaire tant qu'on se limite à illustrer au moyen de la correspondance terme à terme l'équipotence, et que l'on se restreint au cas des petits ensembles finis. Toute autre chose est de comprendre que ceci suffit à définir le nombre dans un aspect essentiel, et que celle-ci sera retenue par certaines généralisations ou constructives axiomatiques, alors que d'autres aspects des nombres tels que nous les connaissons seront délaissés. En particulier, je songe à la surprenante simplicité de la définition de l'infini (équipotence de l'ensemble avec une de ses parties propres).

Cette confusion entre élémentaire et fondamental aura nourri l'espoir toujours renaissant d'une progression naturelle et sans accrocs du cours de mathé-

matique tout au long de la scolarité, portant l'élève vers des niveaux d'abstraction toujours plus élevés. Pour ce qui est du cas des ensembles je discerne 3 niveaux au moins.

1⁰ Avec la notion d'application et d'élément générique, on dispose d'un système de notations désignant globalement les entités considérées.

2⁰ Avec la relation d'inclusion d'une part et les opérations ensemblistes de l'autre : \cap , \cup , et passage au complémentaire, les ensembles permettent de modéliser certaines propriétés structurelles (structures logiques, algébriques, topologiques, de probabilité etc. etc...).

3⁰ Enfin, les ensembles sont eux-mêmes objet d'une théorie propre.

Il paraissait souhaitable dans le courant des années 60, de réactualiser l'enseignement des mathématiques de sorte que l'élève soit aussitôt que possible familiarisé à leur présentation moderne. A priori cette entreprise pouvait paraître aisée et ne devait pas rencontrer d'obstacle pédagogique majeur. Finalement ne s'agissait-il pas d'une simple question de forme, de langage même (pour reprendre les termes de l'époque)? Le processus une fois engagé, la question du passage d'un degré d'abstraction à un autre restait ouverte. Pour sa part l'épistémologie génétique soutenait l'optimisme lorsqu'elle soulignait, avec insistance, la continuité structurelle dans le développement de la connaissance, depuis ses manifestations les plus humbles chez le petit enfant jusqu'à celle des concepts les plus élaborés de la science contemporaine. Le cas des mathématiques ressortait plus nettement encore parce que la psychologie de l'intelligence a toujours pris cette science comme référence privilégiée, jusqu'à identifier même, dans certains cas, intelligence à compétence en mathématiques. Mais cela va plus loin puisque l'étude psychologique, pour se donner des critères objectifs, a recours aux définitions abstraites des mathématiques. Le cas est très net en ce qui **concerne** la question du nombre et de son étude par **J. Piaget** Ce point de méthode (il en est de même par exemple pour l'étude de la vision chez

les bébés, où il a fallu donner au préalable une définition précise de la vision) a débordé de son contexte et certains pédagogues y ont vu un encouragement à l'adaptation des concepts mathématiques pour les enseigner à de jeunes élèves. De plus ils tiraient de la lecture des textes psychologiques certaines clés d'interprétation des conduites des élèves en termes de concepts mathématiques.

Gardons-nous cependant d'en rester à des explications trop simplistes. Le projet de réforme de l'enseignement des mathématiques a mobilisé les énergies de spécialistes venus d'horizons divers. De plus, à l'intérieur de l'école même, le terrain était favorable. Ainsi à l'identification entre compétence mathématique et intelligence, que j'évoquais ci-dessus, correspond une ambivalence fondamentale des objectifs de l'enseignement des mathématiques, pris entre l'acquisition par l'élève de compétences spécifiques et le développement harmonieux de ses capacités générales de raisonnement. La question de la compréhension se trouvant au centre de ce tiraillement.

Mais mon propos n'est pas ici de décrire la réforme des mathématiques à l'école. Je retiendrai qu'il y a eu, à un moment donné, une concordance suffisante entre différents avis pour l'imposer. Cette concordance s'est cristallisée sur certains termes, dont celui d'"ensemble" en particulier. On a cru, naïvement, que cette désignation d'un objet, en dehors de toute référence à des usages spécifiques, suffirait pour l'enseignement. C'était sans doute là la rançon de l'accord entre des experts, venus d'horizons divers, sortis momentanément de leurs laboratoires et gardant pour eux-mêmes leurs propres références.

Une idée ralliait tout le monde. Il s'agissait d'amener les élèves à considérer l'ensemble globalement, comme une entité en soi, un objet. Mais, si élémentaire que soit cette idée, il faut encore lui donner un contenu, ce rôle

fut attribué au pédagogue. Ce contenu peut être analysé de deux manières selon que l'on se réfère à l'ensemble de tâches particulières définissant les usages scolaires ou qu'on examine les images qui serviront à le désigner. Je vais montrer que dans les deux cas la réinscription du concept dans un contexte adapté à l'école réintroduit des différences spécifiques du type de celles qu'on avait pu gommer au niveau de la définition des objectifs. Et la question du lien entre les usages de type différent reste à nouveau posée.

1^o Dans le cas de l'enseignement des ensembles, de la relation d'inclusion, du passage au complémentaire ainsi que des opérations de réunion et d'intersection, le pédagogue a classiquement choisi de s'appuyer sur l'identification des ensembles et des classes logiques. Ce qui est bien sûr, à ce niveau, tout à fait licite. Mais ceci inscrit la présentation des notions sus-mentionnées dans le cadre des classifications logiques, c'est-à-dire dans des traitements des propriétés des éléments considérés. On se centre sur la nature des objets. Par contre, dans la présentation du nombre au travers de la notion de cardinal, il faudra faire comprendre que la nature des éléments n'est pas en jeu. Les ensembles se voient ainsi inscrits dans un domaine de traitements différents. Quel lien peut-il y avoir entre ces deux usages ?

2^o On retrouve cela à propos des représentations choisies pour les ensembles. L'échange pédagogique demande bien sûr que l'on fournisse des symboles - et pour les petits, des images - des objets étudiés. Il faut pouvoir les désigner aux élèves, il faut aussi pouvoir repérer dans leur travail la manière dont ils les traitent. Le choix a porté sur les diagrammes de Venn (que l'on nomme dans le jargon : "patate" ou "patatoïde"). A l'origine, ces diagrammes étaient destinés à l'enseignement de la logique propositionnelle. On en a élargi l'usage à l'école pour en faire l'image des ensembles, consacrant ainsi l'identification sus-mentionnée de l'ensemble et de la classe logique. Ainsi l'en-

semble pris comme totalité a son correspondant graphique. Ceci est particulièrement adapté au cas où les éléments sont des unités discrètes, dont la configuration globale n'importe pas. Cela va pour représenter des classes logiques, mais ne convient pas à la représentation de figures géométriques (je pense en particulier aux "lieux géométriques"), ni même pour la représentation des différents ensembles de nombres et leur distribution sur la droite numérique. Le diagramme de Venn convient à un usage précis. D'autre part, la même image (en tant que signifiant) peut signifier autre chose selon le domaine où elle intervient. Je pense ici à l'image que l'on donne des voisinages ou des ouverts en topologie, modélisés justement par les ensembles et les opérations \cup , \cap . Un néophyte peut les confondre avec des diagrammes de Venn.

Ainsi donc, on a mésestimé l'importance de cette recontextualisation didactique, et pourtant c'est elle qui fera la réalité des élèves. En résumé, les objets qui font le contenu de l'enseignement, ont été auparavant extraits de leur contexte d'origine pour être remis dans un cadre spécifiquement scolaire. Ceci altère la nature des concepts et des notations, de plus certaines associations nouvelles sont créées, mettant côte à côte des éléments d'origine fort diverse. Ils acquièrent donc un statut didactique propre, irréductible à celui qu'ils avaient dans leur discipline de référence. Ce processus a été désigné par le terme de transposition didactique.

2. Transposition didactique.

Parlons un petit peu de ce qu'on peut entendre par transposition. Et à ce propos, je vais reprendre les premiers chapitres d'un cours donné par Yves Chevallard de l'IREM d'Aix-Marseille à la première école d'été de didactique des mathématiques (Chamrousse juillet 1980).

Ce texte me paraît particulièrement clair, et si cela n'épuise pas les thèses de Chevallard, cela suffit pour aider le lecteur à faire ce qu'il appelle: "la rupture épistémologique qui permet au didacticien de se déprendre des évidences et de la transparence de l'univers d'enseignement (qu'il vit en tant qu'enseignant ou du moins en tant que l'élève qu'il a été)".

Les 2 parties suivantes seront consacrées à examiner la transposition didactique dans le cas des diagrammes de Venn.

2.1. La transposition didactique

Yves Chevallard la définit par la suite de propositions suivantes :

Citation :

1^o Qu'est-ce que la transposition didactique ?

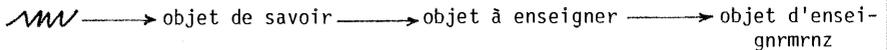
a) Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner.

b) Les contenus de savoir désignés (explicitement : dans les programmes ; implicitement par la tradition évolutive de l'interprétation des programmes) comme étant "à enseigner", en général préexistent au mouvement qui les marque comme tels. Quelquefois cependant, ce sont des créations ad hoc suscitées par les

"besoins de l'enseignement". (...)

c) Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui, d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique.

d) Le passage d'un contenu de savoir précis à une version didactique de cet objet de savoir peut être appelé plus justement transposition didactique stricto sensu. Mais l'étude scientifique de la "transposition didactique" (qui en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, est une dimension fondamentale de la didactique des mathématiques) suppose la prise en compte de la transposition didactique sensu lato, représentée par le schéma.



dans lequel le premier chaînon marque le passage de l'implicite à l'explicite, de la pratique à la théorie, du préconstruit au construit.

2^o La transposition didactique existe-t-elle ?

ou

La vigilance épistémologique.

a) La transposition didactique existe-t-elle ? L'objet d'enseignement est-il vraiment différent de l'objet de savoir auquel il répond ?

b) On peut saisir l'existence d'une transposition didactique aux situations de créations didactiques d'objets (de savoir et d'enseignement à la fois), rendus nécessaires par les contraintes du fonctionnement didactique du savoir.

c) Exemples de créations didactiques : (cos ., Sin ; les nombres complexes comme matrices carrées d'ordre 2 ; les notions "d'opérateur" et de "machine" à l'école élémentaire).

(...)

d) La "Réforme des mathématiques modernes" a produit une véritable substitution didactique d'objet : voir Y. Chevallard, Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante, in Recherches, No. 41 (septembre 1980) pp. 71 - 99.)

e) Cette substitution didactique a provoqué plusieurs créations didactiques d'objets. Par exemple, dans le passage de la théorie des ensembles des mathématiciens à la "théorie des ensembles" de l'école élémentaire, surgissent divers objets appelés par les "exigences" de la transposition didactique. Les diagrammes de Venn en sont un exemple frappant, sur lequel on lira l'appréciation développée dans le texte de Freudenthal. (cf. plus loin, nda).

f) Mais il est une autre manière de poser le problème de l'existence de la transposition didactique. Une manière de poser ce problème qui participe du principe de vigilance épistémologique que le didacticien doit constamment mettre en oeuvre.

g) L'enseignant dira : "Aujourd'hui, je leur ai fait $a^2 - b^2$ ". Le didacticien se demandera : "Qu'est-ce que cet objet d'enseignement que l'enseignant étiquette comme " $a^2 - b^2$ " ? Quel rapport entretient-il avec le (ou les) objet(s) mathématique(s) auxquels il est référé implicitement ?" Là où l'enseignant voit l'identité de la fin (l'objet de savoir désigné comme à enseigner) et des moyens (l'objet d'enseignement, tel que la transposition didactique l'a fait), le didacticien introduit la question de l'adéquation : n'y a-t-il pas substitution

d'objet, et laquelle ?

h) Le doute systématique à cet égard : "est-ce bien là l'objet dont l'enseignement était projeté ?" est la marque et le moyen de la rupture épistémologique qui permet au didacticien de se déprendre des évidences et de la transparence de l'univers d'enseignement qu'il vit en tant qu'enseignant (ou du moins en tant que l'élève qu'il a été, etc...) : il l'arrache à l'illusion de la transparence.

i) On découvre alors que, de l'objet de savoir à l'objet d'enseignement, la distance est - souvent - immense.

...)

(Fin de la citation)

L'enseignement des mathématiques en première et deuxième primaire accorde une place prépondérante aux diagrammes de Venn. J'ai choisi de clore ce chapitre par l'examen de cette question, et ce au travers de l'analyse de deux textes. Le premier, de Charles L. Dogson, où cet auteur compare trois types de diagrammes logiques. Ceci fixera pour nous l'origine de ces diagrammes. D'autre part, un texte de Hans Freudenthal à propos des ensembles et de leurs représentations.

3. Les diagrammes en logique.

On n'aurait sans doute jamais parlé d'ensemble dans les classes élémentaires s'il n'y avait pas eu les diagrammes. Mais au fait que sont ces fameux diagrammes ? Quelle différence entre un diagramme d'Euler, de Venn, de Carroll.

Il m'a paru intéressant de citer un article de Lewis Carroll (qui a servi de référence aux novateurs de l'enseignement des mathématiques.- la traduction est de Jean Gattegno) - qui discute ces trois types de diagrammes. Texte intéressant parce qu'il nous rappelle l'origine des diagrammes (logique des propositions) et les changements subtils de leur statut. Cette "relativisation" de l'objet de savoir lui-même introduira bien le lecteur à la transposition didactique.

3.1.

Texte de Lewis Carroll.

Tiré de Logique sans peine.

Traduction et présentation : Jean Gattegno, Ernest Coumet, Paris, Hermann, 1966.

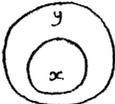
pg. 205 - 216.

Ce texte a été publié pour la première fois en 1896.

Citation :

Diagramme d'Euler

Il semble que les premiers diagrammes n'aient été utilisés que pour représenter des propositions. S'agissant des célèbres cercles d'Euler, chacun d'eux était censé contenir une classe et le diagramme se composait de deux cercles qui montraient les relations d'inclusion existant entre les deux classes.

- Ainsi le diagramme  nous montre les deux classes

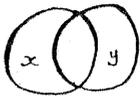
- qui ont pour attribut respectif x et y - placées dans une relation telle que toutes les propositions suivantes sont simultanément vraies : "Tout x est y". "Aucun x est non-y". "Quelques x sont y". "Quelques y sont non-x". "Quelques non-y sont non-x", ainsi bien entendu, que les converses des quatre dernières propositions.

(...)

- De même dans le cas du diagramme ci-contre :



sont vraies les propositions suivantes : "Tout x est non-y" "Tout y est non-x" "Aucun x est y" "Quelques x sont non-y" "Quelques y sont non-x" "Quelques non-x sont non-y", ainsi, bien entendu que les converses des 4 dernières propositions.

- De même, enfin, dans le cas du diagramme  sont vraies, les propositions suivantes : "Quelques x sont y" "Quelques x sont non-y" "Quelques non-x sont y" "Quelques non-x sont non-y", ainsi que leurs quatre converses.

- Il est à noter que tous les diagrammes d'Euler affirment que "quelques non-x sont non-y". Jamais, apparemment, il ne lui vint à l'esprit que peut-être parfois, cette règle se révélait fausse.

- Pour représenter "Tout x est y", le premier des diagrammes ci-dessus suffirait. De même pour représenter "Aucun est y" le 3e suffirait. Mais la représentation d'une proposition particulière, quelle qu'elle soit, exigerait pour le moins trois diagrammes pour inclure tous les possibles ; et celle de "Quelques non-x sont non-y" les exigerait tous les 4.

Diagramme de Venn

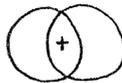
Représentons non-x par x' :

La méthode diagrammatique de Venn constitue un progrès considérable par rapport à la méthode précédente.

Venn emploie le dernier des diagrammes d'Euler pour représenter toute relation, quelle qu'elle soit, souhaitée entre x et y : pour cela, il lui suffit de teinter la partie qu'il sait être vide, et d'inscrire le signe + dans celle ou celles qu'il sait être occupées.

Voici comment il représenterait les 3 propositions :

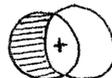
"Quelques x sont y "



"Aucun x est y"



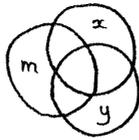
"Tout x est y "



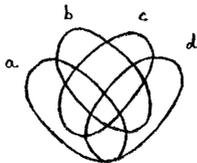
On s'aperçoit que sur les 4 classes qui possèdent comme attribut spécifique xy , xy' , $x'y$ et $x'y'$ seules trois ont droit à des cellules fermées, la quatrième se voyant attribuer pour domaine le reste du plan infini !

Une telle disposition ferait naître de très sérieuses difficultés si nous voulions représenter : "Aucun x' est y' ". M. Venn ne rencontre qu'une seule fois (p. 281) cette éventualité redoutable mais il l'éluide, avec une remarquable maîtrise, au moyen de cette simple note : "Nous n'avons pas pris la peine de teinter la zone extérieure du diagramme" !

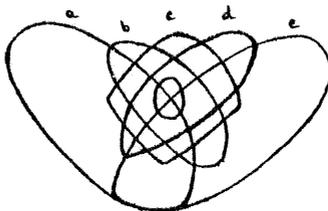
Pour représenter ensemble deux propositions ayant un terme en commun, il faut un diagramme tri-littéral. Voici, ci-contre, celui qu'utilise M. Venn. Nous nous trouvons une fois de plus en présence de sept cellules closes, dans lesquelles il faut loger les huit classes possédant pour attributs respectifs xym , xym' etc...



"Lorsque 4 termes nous sont donnés" déclare M. Venn "le diagramme le plus simple et le plus symétrique me paraît être celui que produit l'intersection de quatre ellipses, de la façon indiquée par le dessin ci-contre". Mais nous n'obtenons ainsi que quinze cellules closes.



Pour cinq lettres "le diagramme le plus simple que je puisse proposer", déclare M. Venn, "est un diagramme du genre ci-contre (la petite ellipse centrale doit être considérée comme faisant partie de la zone extérieure à c ; c'est-à-dire que ses quatre parties constituantes sont situées à l'intérieur de b et d sans faire partie de c). Je dois reconnaître que ce diagramme n'est pas aussi simple à dessiner qu'on aurait pu le souhaiter, mais il faut réfléchir à ce qui nous attendrait si, à défaut de cette solution, nous entreprenions de traiter cinq termes et toutes leurs combinaisons possibles : il s'agirait en somme - et ce serait fort désagréable - d'énumérer intégralement, ou de placer sous nos yeux, d'une manière ou d'une autre, les 32 combinaisons ainsi créées". Ce diagramme ne nous donne que trente-et-une cellules closes.



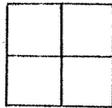
Pour six lettres, M. Venn propose d'utiliser deux diagrammes semblables au précédent, l'un pour la partie f , l'autre pour la partie non- f de toutes les autres combinaisons. "Ainsi...", déclare-t-il, "nous obtiendrons les soixante-quatre combinaisons requises". Cependant, nous n'aurions en fait obtenu que soixante-deux cellules fermées, et en outre une seule zone infinie à partager entre les classes $a'b'c'd'e'f$ et $a'b'c'd'e'f'$.

M. Venn ne va pas au-delà de 6 lettres.

Mes diagrammes.

Ma méthode diagrammatique ressemble à celle de M. Venn en ceci que j'attribue des cellules séparées aux diverses classes et que je signale ces cellules comme libres ou occupées ; mais elle en diffère dans la mesure où j'attribue à l'univers du discours une zone finie ; si bien que la classe qui, sous le régime libéral de M. Venn, parcourait à son gré l'infini spatial, a la désagréable surprise de se retrouver "assignée à résidence" dans une cellule limitée comme n'importe quelle autre classe ; d'autre part, j'emploie des figures rectilignes et non curvilignes ; enfin je signale les cellules occupées par 1, pour signifier qu'il s'y trouve au moins une chose, et les cellules libres par un 0, pour indiquer qu'il ne s'y trouve aucune chose. Pour deux lettres j'utilise le diagramme

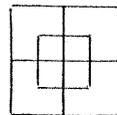
ci-contre
la moitié
à y et la
contient la



dans le quel la moitié nord est attribuée à x ,
sud à x' (c'est-à-dire à non-x), la moitié ouest
moitié est à y'. La cellule N-0, par exemple,
classe xy, la cellule N-E la classe xy', etc...

Pour 3 classes je subdivise ces 4 cellules en traçant un carré intérieur, que j'attribue à m , la zone extérieure de ce carré étant attribuée à m' . J'obtiens ainsi les huit cellules indispensables pour loger les huit classes possédant pour attributs respectifs xym , xym' etc...

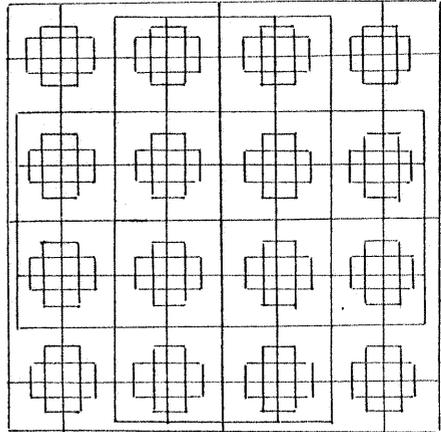
Ce diagramme est le plus complexe que j'aie utilisé dans cette partie élémentaire de ma logique symbolique.



Mais il me semble utile de décrire dès à présent les diagrammes plus complexes qui apparaîtront dans la deuxième partie".

(...)

Lewis Carroll présente alors des diagrammes jusqu'à dix lettres, montrant à l'évidence leur supériorité sur ceux de Venn. Exemple du diagramme à 8 lettres



Comment résoudre un syllogisme

Je crois que la meilleure façon de faire comprendre les différences existant entre ces diverses méthodes consiste à prendre un exemple concret et à le résoudre successivement selon chacune des méthodes mentionnées.

Prenons comme exemple le syllogisme No. 11 page 70 :

"Aucun philosophe n'est prétentieux

Quelques individus prétentieux n'aiment pas jouer à la roulette

Quelques individus n'aiment pas jouer à la roulette ne sont pas des philosophes".

(...)

Représentation symbolique :

Il nous faut avant de nous lancer dans ces méthodes transcrire notre syllogisme en termes abstraits. Prenons comme univers du discours "individus"

et supposons que x = philosophes , m = prétentieux , et y = individu aimant jouer à la roulette. Le syllogisme s'écrira :

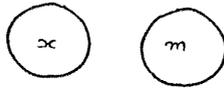
Aucun x n'est m

Quelques m sont y'

Quelques y' sont x' .

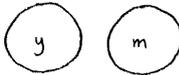
Méthode d'Euler

La majeure ne requiert que le diagramme ci-dessous :

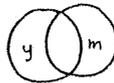


1.

La mineure exige les trois diagrammes ci-dessous :



2.

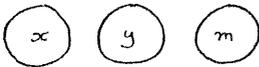


3.



4.

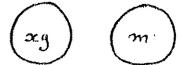
La combinaison de la majeure et de la mineure, si on veut représenter toutes les relations possibles, exige les neuf diagrammes ci-après. Les figures 1 et 2 donnent :



5.



6.



7.

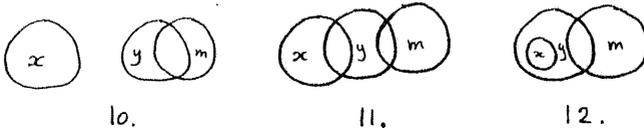


8.

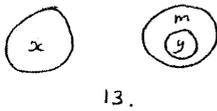


9.

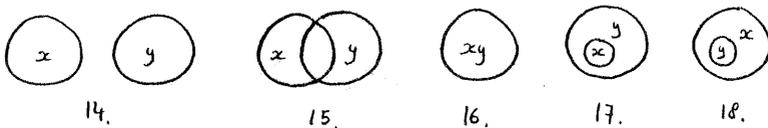
Les figures 1 et 3 donnent :



Les figures 1 et 4 donnent :



C'est à l'intérieur de ce groupe de diagrammes (fig. 5 à 13) qu'il nous faut trouver, sans nous occuper de m , la relation unissant x et y . Après cet examen, nous découvrons que les figures 5, 10, 13 expriment une relation d'exclusion totale ; que les figures 6 et 11 expriment une inclusion et une exclusion partielles ; que la figure 7 exprime la coïncidence ; que les figures 8 et 12 expriment l'inclusion totale de x dans y ; enfin que la figure 9 exprime l'inclusion totale de y dans x . Nous obtenons donc pour x et y les cinq diagrammes bi-littéraux ci-après :

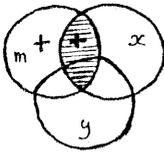


dans lesquels la seule proposition qu'ils s'accordent tous à représenter est : "Quelques non-y sont non-y" autrement dit : "Quelques individus qui n'aiment pas jouer à la roulette ne sont pas des philosophes", résultat qu'Euler aurait pu difficilement considérer comme intéressant, étant donné qu'il semble tenir pour acquis qu'une

proposition de ce type est toujours vraie !

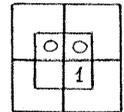
Méthode de Venn.

La solution ci-après m'a été aimablement communiquée par M. Venn lui-même. "La mineure affirme que quelques-unes des composantes de my' doivent être conservés, il faut donc les marquer d'une croix. La majeure affirme que tous les xm doivent être détruits ; il faut donc les teinter.



Par conséquent, si quelques my' doivent être conservés, il ne peut évidemment s'agir que des $mx'y'$. Autrement dit, il existe obligatoirement des $my'x'$ ou, si nous éliminons m , il existe obligatoirement des $y'x'$. En langage ordinaire : "Quelques y' sont x' " ou encore "Quelques individus n'aimant pas jouer à la roulette sont des non philosophes ...".

Ma méthode diagrammatique.



La première prémisse affirme qu'il n'existe aucun xm : Nous indiquons donc que la case xm est libre, en plaçant un 0 dans chacune des cellules qui la composent. La deuxième affirme que quelques my' existent ; nous indiquons donc que la case my' est occupée en plaçant un 1 dans la seule cellule disponible.

La seule information que nous obtenions ainsi concernant x et y est que la case $x'y'$ est occupée, autrement dit qu'il existe quelques $x'y'$.

Donc, "quelques x' sont y' " soit "Quelques individus qui ne sont pas des philosophes n'aiment pas jouer à la roulette".

Fin de la Citation.

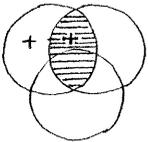
3.2.

Notes.

1. Entre la méthode d'Euler et celle de Venn, il y a un retournement.

Euler : Il part des classes (désignées comme domaines) il les combine selon les relations décrites par la proposition. Cette combinaison aboutit à l'énumération d'un éventail de formes compatibles (inclusion / exclusion), représentant tous les types de relations envisageables entre les classes données sous les propositions considérées. Le traitement consiste à réduire l'éventail ou, dans le cas des syllogismes, à en déduire un nouvel éventail (par oubli) auquel on pourra faire correspondre une nouvelle proposition.

Venn : Constatant l'existence d'une forme générale, il part des classes déjà combinées - en se fixant à cette forme générale. - Toutes les formes qu'énumère Euler sont en potentialité dans ce schéma général. On utilise l'information comme moyen d'exclure celles de ces potentialités qui sont contradictoires et de noter les existences possibles. Mais c'est l'exclusion qui a le dernier mot puisqu'il peut y avoir des indéterminations. (cf. l'exemple donné par Carroll, où dans le traitement fait par Venn lui-même, une + est recouverte d'une hachure

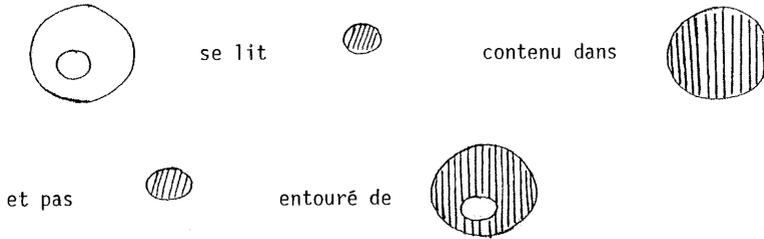


Carroll lui optera pour un chiffre 1 qui chevauche les zones indéterminées). Il se peut qu'en fin d'analyse, pour y voir clair, on dégage du diagramme de Venn une des formes d'Euler.

2. On voit d'autre part Venn proposer des ellipses pour faire un diagramme plus simple (voilà pourquoi les ensembles sont des ellipses !!). Mais encore être obligé (dans le cas de 5 ensembles) à recourir à un ensemble couronne. Ce qui est une transgression de la règle jusque là implicite qui veut que



représente l'inclusion de x dans y et pas la complémentarité de x et y :



Donc considérer une couronne est "assez gênant" et c'est ce que ne manque pas de faire remarquer Carroll, qui lui plaide pour la solution de cellules séparées (outre la simplification du schéma pour beaucoup de propositions).

3. Dans cette logique, Carroll a tout-à-fait raison d'insister sur la plage externe (s'inspirant en cela de De Morgan et Boole). Et si Venn ne l'envisage pas, c'est que sans doute il reste attaché à une logique énonciative, "positive". Dans ce sens, considérer les classes x et y , c'est avant tout les situer l'une par rapport à l'autre. Ça donne : les x qui sont y , les x qui ne sont pas y , les y qui ne sont pas x . Peu importe ceux qui ne sont pas x ni y (pour eux, il faudrait s'attacher aux couples de classes x et non y ou non x et y ou non x et non y). Et très certainement que pour Venn "être non- x " n'est pas tout-à-fait "ne pas être x " (cf. le début de l'article de Carroll).

Or tout le sens de l'article de Carroll est justement de plaider pour la considération combinée d'une classe et de sa complémentaire. C'est-à-dire : d'insister sur la séparation que provoque dans l'univers du discours toute considération d'une classe. Ainsi, il s'attache à montrer qu'il revient au même de dire : tous ceux qui sont non- x que tous ceux qui ne sont pas x .

Dans une telle conception, on traite tout d'un coup (et pas en deux coups comme le diagramme de Venn pour 6 ensembles). Et on en arrive à ne considérer que

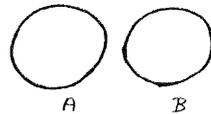
les "cellules" disjointes ainsi définies. D'où l'avantage de ces grilles qui en simplifient la lecture, et tant pis si on perd de vue les classes.

4. En résumé, il y a une décantation dans l'usage que l'on fait des diagrammes. On s'aperçoit petit à petit que ce qui importe dans le traitement de l'information n'est pas tant la représentation des classes elles-mêmes que le jeu des séparations en cellules disjointes "produites dans l'univers du discours" par la considération des diverses classes.

Euler propose l'image, du coup cette désignation désinvestit les classes et les relations logiques des considérations sémantiques. Une fois le principe clair, on traite machinalement des relations logiques traduites sur le papier. L'image devient tableau.

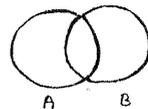
5. Ainsi on peut dégager plusieurs niveaux de lecture du diagramme. Et ils correspondent à des niveaux de pensée :

a) Si je pense 2 classes A et B, "dans le bleu" (et donc successivement) ce sera 2 ensembles. (Que je pourrai combiner ensuite).

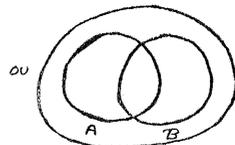
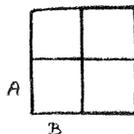


- Si je pense les relations possibles entre A et B, je tomberai sur les formes d'Euler.

- Si je pense, en termes généraux, à comparer les rapports possibles de A et B, ce sera le diagramme de Venn.



- Si finalement, je pense à "l'univers sous A et B" ce sera le diagramme de Carroll



Remarque :

Je dis simplement qu'Euler n'a pas inscrit ces considérations dans ses diagrammes. On a des niveaux logiques hiérarchisés mais non exclusifs. Un sujet peut adopter les divers points de vue.

4. Le point de vue d'un mathématicien pédagogue.

Hans Freudenthal dans un texte tiré de son livre : *Mathematics as an educational task* (D. Reidel Dordrecht 1973) évoque l'enseignement des ensembles et montre bien la transposition qu'on leur fait subir. Il débouche sur la proposition de garder les diagrammes de Venn comme moyen de présenter les ensembles aux élèves et donne un certain nombre de règles à respecter dans l'utilisation des diagrammes. Règles qui rendraient la transposition acceptable. Dans un livre tout récent, Freudenthal revient sur la question des ensembles (cf. bibliographie), mais il ne revient pas sur la question traitée ici à savoir la représentation des ensembles. C'est pourquoi je ne ferai pas mention ici de ce tout dernier livre.

4.1. Résumé du texte de H. Freudenthal (texte mis en annexe de ce chapitre).

Freudenthal discute de la théorie des ensembles. Il fait d'abord remar-

quer que les mathématiciens s'y sont mal pris pour en parler aux enseignants. Des ensembles ? On a dit beaucoup de choses aux enseignants mais on n'a pas dit ce qu'on en faisait en mathématiques. Il va donc examiner deux types de présentation de la théorie des ensembles, l'une axiomatique, et l'autre plus intuitive par l'intermédiaire des diagrammes de Venn.

1^o Axiomatique

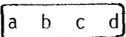
Freudenthal montre de façon élégante que chez les enseignants, le désir d'avoir une définition allait de pair avec l'illusion formaliste (axiomatiste). Or il faut dire que la présentation axiomatique est impossible à l'école. Les auteurs qui l'ont tentée n'ont finalement fait que de déguiser des banalités en axiomes tout en éludant les postulats les plus décisifs.

Freudenthal propose le raisonnement suivant pour écarter la solution axiomatique : L'axiomatique provient d'une analyse régressive. Celle-ci doit bien s'arrêter quelque part, à des données non définies (comme par exemple le point en géométrie), pour ensuite amorcer une reconstruction. Mais l'analyse n'aurait pas non plus pu se faire sans une connaissance antérieure de la matière. La familiarisation avec ces objets de base que l'on n'a même pas besoin de définir doit donc précéder toute étude formelle. Freudenthal prône donc une approche plus intuitive de la théorie des ensembles, tout comme on le fait finalement en géométrie ou en arithmétique élémentaire.

2^o Diagrammes de Venn.

Les manuels qui proposent cette approche intuitive utilisent tous les diagrammes de Venn. Il ressort de tous les manuels qu'on a même été jusqu'à identifier ensemble et diagramme de Venn ou ensemble et accolade. Freudenthal rejette

cette identification et essaie de définir la nature de ces symbolismes. Pour lui le diagramme de Venn est une image de l'ensemble tandis que les accolades sont une expression linguistique contenant des noms ou à la limite des idéogrammes . On ne peut pas confondre les deux.

Freudenthal donne deux exemples de cette confusion. Un enseignant lui a dit une fois comment il montrait à ses élèves que les accolades et les diagrammes de Venn étaient la même chose, je cite : "Joignez les accolades ({a, b, c, d}) par deux traits parallèles horizontaux et aplatissez les deux points (). Je lui ai demandé cè qu'il faisait des virgules. Il m'a répondu qu'en effet on pouvait en laisser une puisque tous les éléments d'un ensemble doivent être différents".

Le second exemple est celui d'auteurs qui se font une règle de ne présenter que des ensembles "hétérogènes" - c'est-à-dire dont les éléments n'ont pas d'autre point commun que d'appartenir au même ensemble. Je cite Freudenthal : "Il y a une raison au principe d'hétérogénéité qui repose sur une incompréhension. L'ensemble comme il apparaît dans le diagramme de Venn devrait consister en des éléments visiblement différents. Ainsi ont-ils conclu que deux triangles ne pouvaient trouver place dans un diagramme de Venn. Mais pourquoi ? Il y a bien deux et même plus de triangles dans le monde. Ils sont d'accord mais cela ne règle pas leur problème qui est de savoir comment indiquer que deux triangles dessinés dans un diagramme de Venn sont différents. Et effectivement, l'ensemble $\{ \triangle, \triangle \}$ ne comporte qu'un élément :  . Bien, mais les deux triangles, dans un diagramme de Venn, sont différents. Ils le sont évidemment puisqu'ils ne sont pas exactement au même endroit, tout comme deux oeufs, deux pièces de monnaie sont différents même s'ils sont dans le même panier, la même poche. Tandis que ce qu'on met entre les accolades ne sont pas des choses, ce

sont des noms de choses".

Donc $\{ \Delta, \Delta \}$ n'a qu'un seul élément, car ici le symbole Δ

est un diagramme qui veut dire triangle, tandis que Δ a deux éléments car le symbole Δ est l'image d'un triangle réel placé en cet endroit.



Freudenthal clot son exemple de la façon suivante " (...) La façon mathématique de dire cela serait d'écrire $\{ \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_n \}$

où $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_n$ sont les noms de triangles différents.

(En retour) un diagramme de Venn pourrait sans objection paraître comme la figure 1 mais certes pas comme la figure 2. Cela doit être un ensemble de triangles plutôt qu'un ensemble de noms de triangles.

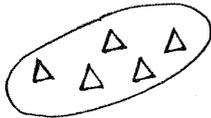


fig 1.

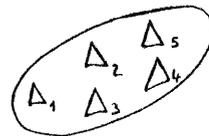


fig. 2.

3^o Transposition didactique. (Bien sûr, Freudenthal n'utilise pas ce terme).

Freudenthal fait remarquer qu'il y a deux usages des diagrammes de Venn.

Le premier, qu'il nomme naturel (et qui correspond à l'usage décrit par Lewis Carroll) consiste à représenter les relations entre les ensembles. Peu importe la forme que les ovales prennent pourvu qu'ils soient situés les uns par rapport aux autres de la manière voulue par l'exemple.

C'est de cette façon que Freudenthal se souvient avoir utilisé les diagrammes de Venn, alors qu'il était jeune étudiant. Une méthode utile. "Je n'ai jamais vu personne dessiner des diagrammes de Venn pour déterminer l'intersection de l'ensemble des adultes et de l'ensemble des personnes du sexe féminin", ajoute Freudenthal. Ici les diagrammes de Venn n'illustrent que des relations entre ensembles, ils ne disent rien quant à la nature des éléments de l'ensemble, ni la nature de l'ensemble lui-même, ni même s'il est fini ou infini.

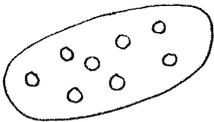
Cette façon de considérer les ensembles a pratiquement disparu dans les manuels scolaires d'aujourd'hui. Dans la majeure partie des cas, les diagrammes de Venn sont utilisés à figurer des ensembles et leurs éléments. Dans ce cas, Freudenthal ne sait plus ce que signifie la courbe fermée ovale qui devient un élément extérieur aux ensembles et à leurs éléments. Et d'ailleurs, se justifie-t-elle ? Si peut-être dans un cas, les ensembles d'objets hétéroclites. "Une collection d'objets sans signification particulière tels des croix, des étoiles, des cercles, est dessinée sur le papier et pour neutraliser cette hétérogénéité on trace tout autour une courbe".

Pour qu'on utilise les diagrammes de Venn pour représenter des ensembles avec leurs éléments, il convient de faire remarquer deux choses.

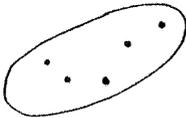
Premièrement, qu'il n'est pas obligatoire de présenter tous les ensembles de cette façon-là. Un mur fait avec des plots, ou encore une tour, convient tout-à-fait. De même, un ensemble d'élèves autour d'une table, ou le couvert du petit déjeuner. Pour tous ces ensembles, point n'est besoin d'élément extralogique (corde par exemple) pour les délimiter. Dans d'autres cas comme les jours de la semaine, ou des droites parallèles, la représentation par Venn ne se justifie tout bonnement pas.

Secondement, il faut se donner des principes clairs de l'utilisation des diagrammes : "Les détails des diagrammes de Venn ne peuvent être que des images, les expressions linguistiques ne pouvant être admises que comme des explications, la courbe fermée doit représenter quelque chose de pertinent (bord de table) " et évidemment l'image n'a pas besoin d'être un dessin parfaitement fidèle de l'ensemble mais reste schématique.

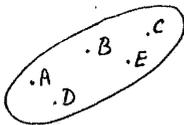
Il donne une série d'exemples qu'il discute en fonction de ces principes.



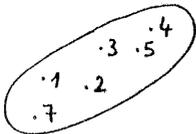
Ce diagramme est conforme car il suggère l'image de pièces de monnaie sur un mouchoir : La courbe extérieure représentant le bord du mouchoir.



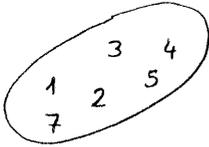
Celui-là est moins conforme puisqu'on ne sait pas si c'est 5 points du plan que la figure représente. Et que signifie l'ovale ?



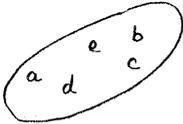
Ici les lettres ne sont manifestement pas des éléments de l'ensemble mais des noms des éléments (comme sur les cartes topographiques).



Là, la chose est moins claire car les nombres peuvent être ou ne pas être les noms des éléments de l'ensemble.



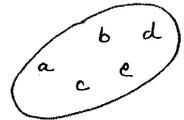
Là, la figure n'est pas fidèle. Certainement, l'auteur voulait représenter 1, 2, 3, 4, 5, 7 mais il n'y a aucune image des éléments. Et on ne sait pas pourquoi les nombres sont arrangés de cette façon.



ici de même.

A ne pas respecter ces règles et à vouloir utiliser les diagrammes de Venn à tout prix, on aboutit à des absurdités comme celle de considérer l'ensemble des polices montées et de se demander si les chevaux des polices montées sont dans l'ensemble ou encore l'exemple, véridique, suivant :

Dans une classe on attribue un nom à chaque élève. Mary sera a, John b etc... (remarquez la sophistication : l'enfant est Mary et se nomme a !) On dessine un diagramme de Venn des enfants de la classe et on demande si le nez de Mary se trouve dans le diagramme de Venn. Le nez doit être présenté hors du diagramme ! Et



Freudenthal d'ajouter : "Et Mary ? L'auteur ne va pas jusqu'à poser cette question. Alors que manifestement Mary est assise à son banc au lieu de se trouver dans le diagramme de Venn, dans un certain sens, elle devrait y être puisqu'elle se nomme a et que a est dans le diagramme de Venn !"

Fin du résumé.

4.2.

Critique.

Bien que ce texte remette un peu d'ordre dans le fouillis pédagogique, je ne m'associerais pas à cette façon de voir les choses. Voici donc ma critique.

1^o L'analyse de Freudenthal est avant tout une analyse de manuels. On comprend dès lors que l'accent soit mis avant tout sur le symbolisme et sur les bonnes règles à respecter pour se garantir une lecture non déformée. Les critères que donne Freudenthal sont tout à la fois une théorie des diagrammes, des règles à respecter pour ne pas accoucher de monstres, et des règles pour se garantir la transparence de ce langage.

Mais le point de vue me rappelle un peu trop celui de mathématiciens qui pensent que tout ira de soi si la présentation est irréprochable. Il y a trop peu de part faite à la psychologie. Deux questions à régler : d'où proviennent les monstres, sont-ils vraiment si monstrueux. C'est-à-dire, faut-il se crispier sur des règles qui nous éviteraient ces pièges. Si on reprend l'exemple du nez du président des Etats-Unis, qui ne fait pas partie de l'ensemble des présidents des Etats-Unis, cet exemple est absurde à partir du moment où cette question pertinente en soi est posée à propos d'une illustration particulière d'un ensemble, et que parler d'ensemble dans ce type d'univers n'a pas de sens. Pour les présidents des Etats-Unis, une vague notion de classe logique, non sophistiquée suffit. La représentation graphique par diagramme de Venn n'y est pour rien dans l'histoire. L'absurdité est donc sous-produit de la réduction, tout comme l'absurdité des problèmes de baignoire est un sous-produit d'une illustration ridicule des règles de proportionnalité.

Va-t-on alors étudier les règles qui permettent, sur ce terrain de la réduction, d'éviter les glissements de sens ? Ces règles seraient des béquilles tombant dans les oubliettes à peine dépassé le niveau auquel elles se justifiaient. Elles sont aussi un frein à un dépassement d'elles-mêmes, toute généralisation se plaçant d'emblée hors jeu. Et pourquoi ne pas un peu s'amuser à l'absurde ... somme toute de bon aloi si on ne prend pas (on ne se prend pas) cette matière trop au sérieux. Vouloir à tout prix éviter ces choses, c'est se tromper de cible.

Certes, il y a les abus de langage, qui ne rendent pas la communication facile, et qui devraient être évités au maximum dans les textes, mais avouons une bonne fois pour toutes que les abus de langage sont notre pain quotidien, et que même beaucoup de mathématiciens se font la coquetterie de jongler avec, déjouant les embûches qu'ils véhiculent et évitant ainsi de sombrer dans un pédantisme pointilleux. Le seul tort de ces mathématiciens serait de se croire originaux. Car en fait, ces abus de langage, nous sont dictés par l'usage.

2^o Le second point très frappant qui ressort du texte de Freudenthal, c'est l'absence de toutes références à une tâche quelconque. Or si on reprend pour exemple la question des abus de langage (et de symbolisme en général d'ailleurs) c'est justement la référence à une tâche précise qui permet dans la plupart des cas de les déjouer (c'est le fameux "vous voyez ce que je veux dire"). Le symbolisme est aussi et avant tout une formulation, formulation d'un acte ou d'une opération intellectuelle. Freudenthal passe complètement à côté de cela. Pour lui les ensembles existent, "apprenons à les peindre !". Car, dans ce texte, Freudenthal ne mentionne pas le point de vue du sujet (qui s'attache à la tâche avant tout). Et il croit qu'on fait des ensembles

avec des murs et des tours de plot.

3^o Le grand défaut de ce type de texte réside donc dans le fait que la réflexion se situe encore trop hors du contexte didactique.

Pour moi, il faut avant tout poser la question du statut de la connaissance enseignée. Ainsi par exemple, je suis d'accord avec l'idée d'un enseignement des notions intuitives, ce d'autant plus que à l'autre bout, dans l'axiomatique, ces notions seront données sans définition. Mais l'argument est un peu court : Il y a une différence de statut entre une idée intuitive qui doit se décanter, se préciser, un concept à définir, et un concept donné ponctuellement sans définition. Il faut préciser ce que pourrait être, à ce niveau, l'intuition. Les mathématiciens aiment bien appeler à la rescousse cette notion mais oublient souvent qu'elle doit être soutenue par une question que se pose le sujet.

Cette question du statut de la connaissance nous renvoie à celle des recours. Et là trois niveaux :

- a) Le recours qu'en font les mathématiciens eux-mêmes, et que j'ai tenté d'évoquer au début de ce chapitre. Freudenthal remarque avec raison qu'on n'en a pas parlé aux enseignants. Mais il passe à côté du paradoxe que cela présente: comment les maîtres ont-ils pu enseigner les ensembles malgré cette ignorance ?
- b) La réponse réside dans le fait que le recours fait en mathématiques n'est pas du tout le même que celui fait en didactique. A ce plan, la fonction des diagrammes de Venn n'est pas tant de représenter des ensembles qu'on trouverait dans la nature que de leur donner une consistance (une forme, un corps). C'est bien ce qui ressort de l'analyse des manuels. Pour plus de précision, je renvoie le lecteur au chapitre III (pg 107 et suivantes).

c) Enfin il y a la question du recours qu'en fera l'élève. Celui-ci ne saurait être spontané, et ne peut se produire que dans un contexte de tâches très précis. A quelles conditions cela dépassera-t-il ce contexte et pourra, par la suite être appliqué à des situations nouvelles, là réside toute la question. Je suis cependant persuadé avec Vergnaud que pour aborder celle-ci, il faille l'élargir au préalable à un ensemble structuré de notions (Vergnaud parle de champ conceptuel) et qu'il est illusoire de vouloir se borner à une seule notion, aussi générale soit-elle. On verra par la suite comment l'école organise le recours à ces notions et rappelle aux élèves que c'est d'ensembles qu'il s'agit.

Pour en revenir à ce premier recours j'insisterai encore une fois sur la nécessité, pour l'analyse, de bien vouloir le comprendre dans ce contexte de tâches évoqué, qui fait la réalité pour l'élève. Dans ce sens, l'insistance de Freudenthal sur des règles rigoureuses (et sensées) de représentations symboliques paraît déplacée. Pour ma part, je serai plus sensible à l'adéquation des règles que se donne le sujet pour traiter d'un problème, dans une situation donnée, que de leur rigueur absolue. Quitte à accepter des règles "fausses" mais signifiantes.

5. Conclusion du chapitre II.

Outre la mise en évidence et la définition de la transposition didactique, on retiendra de ce chapitre les choses suivantes :

1^o L'origine des fameux diagrammes de Venn qui sont une image des relations logiques et non pas des ensembles. Remplir un diagramme de Venn revient à distinguer les relations logiques générales des relations sémantiques particulières, véhiculées notamment par la langue naturelle. Ceci se fait au moyen de la transcription spatiale en relation d'inclusions et d'exclusions. Les différents cas de figures se révèlent au gré des marquages des plages vides non vides ou indéterminées.

2^o Ceci est relativement éloigné du concept d'ensemble qui s'est imposé dans des contextes mathématiques bien différents et remplit une toute autre fonction : traitement de propriétés globales liées à l'infini, formalisation de la notion de structure, problème des fondements des mathématiques.

3^o Dès leur conception, les diagrammes de Venn ont un caractère didactique. Des deux discussions présentées, celle de L. Carroll et de Hans Freudenthal, un point crucial se dégage, c'est celui du fil conducteur qui amène chacun de ces auteurs à la constitution de leur objet. Ces textes prennent position et indiquent avec détails quelle interprétation il convient de donner à cet objet. Ils en appellent à des principes rigoureux, tirés soit de la logique elle-même (L. Carroll) soit de la sémiologie (H. Freudenthal) visant à régler les ambiguïtés sémantiques. Ces considérations se situent bien entendu à un niveau différent de celui de leur dispositif. En logique, ce fait prend un relief particulier dans la mesure où on voudrait y traiter des relations les plus générales et que l'on se donne la règle de ne pas être contradictoire. Une fois

le point de vue de l'auteur adopté (cômpri), le chemin qui va à la constitution du dispositif est tout tracé, on est comme porté par l'objet. Ceci crée une illusion très forte qui consiste à axer le contrôle didactique sur celui de l'interprétation du dispositif. Le processus est alors naturalisé. Ceci sera encore renforcé par certains arguments psychologiques.

ANNEXE AU CHAPITRE II

SETS AND FUNCTIONS : VENN DIAGRAMS

Extrait de : Hans Freudenthal, Mathematics as an Educational Task.

D. Reidel, Dordrecht, 1973, pg. 332 - 335 et 341 - 350.

SETS AND FUNCTIONS

Thus by the gigantic cooperation of Frege, Dedekind, Cantor the infinite was raised to the throne and enjoyed an era of great triumph... From the paradise created by Cantor, nobody may be allowed to evict us.

D. Hilbert, *Über das Unendliche*, 1927

Set theory knows no barrier of principle between the finite and the infinite. Under this view the infinite is even simpler.

H. Weyl, *Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik*, 1925

The letter killeth but the spirit giveth life.

2 Cor. III, 6

I need hardly explain why I deal with sets after numbers. I hope I have made clear that both as regards content and as regards teaching, mathematics starts with number, with counting, and the greater part of mathematics that most people have to learn, centres around number. Set theory's voice in the last chapters was surprisingly soft, compared with the arrogant shouting of false set theory. It is good to start with the arrogant shouting of false set theory. It is good to start with the most important things; it is reassuring to know how much less important matter is needed to do the important ones right.

Should sets at least be second in line after numbers? I do not believe so. The second ought to be functions. How much did we not use them with the number concept? Functions pulled sets with them into the title of the chapter so it is not at all fair to concede first place in the title and in the chapter to sets, it is a concession rather than a principle.

WHAT IS A SET?

"Please tell us: what is a set?" That is what a group of teachers asked a university mathematician some years ago as they were frightened by the emergence of New Maths and the coming of the day when they should have to tell it to their students. I do not know what he told them

and whether they were happy with it. If you hear and read what a set is in the opinion of teachers and textbooks, it is rather obvious that the mathematicians who for a few years have been telling educators what a set is, committed didactical mistakes of great dimensions. We will soon see which ones they made. If afterwards one reads the lectures and reports of conferences, it often strikes one that teachers were told quite a lot about sets, except what you do with sets in mathematics. So teachers had to improvise. I like learning by re-invention if it is well-guided, but here it was far from being the case.

Explanations of set theory concepts move between two extremes which are approximately as follows. One is a formal definition of what a set is. People who give such a definition even define what an element is. It reminds me of Euclid's definition: "Unit is that after which things are called one". This, of course, was what the worried teachers of the above story asked the professor. To be sure, in mathematics lessons it is defined what a parallelogram is, and what a definition is. How can you start set theory at school, if the pupils are not supposed memorize sentences of the kind - "A set is...", "An element is...", "An element is said to belong to a set if...".

Axioms and axiomatics are taught and learned today, but quite clearly many people do not know where they come from. Certainly, axioms and axiomatics serve to organize globally a domain but this is not the origin of axiomatics. As we explained this in detail earlier we can now restrict ourselves to a brief explanation. It is at present generally accepted that explicit definitions finally fail because to avoid being confined in a deductive circle, you should stop analyzing somewhere in order to start synthesizing, with some undefined material. This is how an axiomatic system, say of geometry, is interpreted today - a system of sentences involving undefined concepts like "point", "line", "lying on", which should be operated on according to these axioms.

Concepts such as "set", "element of..." mark a threshold you cannot transgress with fresh questions - it is the same with the concept of natural number though some people mistakenly believe they can define it by pure set theory. This does not mean that set theory should be started by axioms. Set theory like any other field cannot be conceived axiomatically unless you know it, which in the case of set theory includes knowing its traps and ambushes. In my view there cannot be any doubt that this is

absolutely impossible at school. Examining the single axioms of the usual axiom systems of set theory, I cannot discover among these axioms one which I would be able to explain what purpose it serves to someone who knows so little mathematics as even a pupil of the higher grades at high school. There are, however, school texts for 11-12 year-olds that axiomatically introduce sets. Of course it is pseudo-axiomatics, like the traditional one of school geometry, with a few trivialities worded as axioms, while the decisive suppositions are not even mentioned, whether by axiomatic or any other means.

But if it is true that there is no way, explicitly or axiomatically, to tell what a set is, how can you start set theory? The answer is obvious - the same way as numbers and geometrical shapes are dealt with. Just as little as you need to explain to people what a number is and what the number two is, as little as you need a figure on the blackboard to explain what a point is, so is there just as little need to define what a set is. Are sets a different case because you can define numbers by sets as potencies? No, since this alleged reduction is wrong. Are sets a different case from points, because points are number pairs? No, because to identify points with number pairs you have first to learn quite a lot of geometry, which includes the knowledge of what is a point. Though nobody defines what breathing is, or walking, falling, and swimming, people learn doing or observing it, for example in order to live and to do physics. Presuming explicit definitions are a symptom of old-fashioned methodology and methodics.

This is one of the extremes of explaining set theory: the formal sham definition. The other is Venn-diagrams. Almost all textbooks are prone to make the readers believe that it is a set if a closed curve is drawn around a number of letters, figures or meaningless symbols. To be sure there are also sets between braces such as $\{a, b, c\}$ or $\{\$, \langle, \circ\}$. A teacher showed me on the blackboard how he explains to his pupils that Venn diagrams and braces are the same: by parallel lines below and above, the braces are joined and both points are smoothed away. I asked him what he did with the commas. Indeed, he answered, one comma can be missed since the elements of a set should be different.

To be sure there is another use of braces. The set of planets is written

$\{x \mid x \text{ is a planet}\}$.

It is a paradigm that pays a hundred-fold with pages of examples such

as -- note down... (or, more shrewdly, find another name for ...): The set of mounted policemen, the set of unfeathered bipeds, the set of all present Presidents of the United States, the set of children in the classroom with long hair and spectacles, and so on. If the parents of the present school generation or the television public are to be impressed with the great wisdom of New Maths, such examples serve very well. To reach even higher levels of amazement draw Venn diagrams of all those examples and stress that the horses of the mounted policemen stay outside the concerned Venn diagrams, as well as the spectacles and hair of the bespectacled long-haired children, that neither are Saturn's rings in the Venn diagram of the planets nor is the nose of the President of the United States in that of the presidents.

.....

VENN DIAGRAMS

We asked previously what can be put in

... is a set

in place of the dots. Though I have seen a great deal, I have never yet seen a Venn diagram in that place. It is true that people often behave as though a Venn diagram were a set (e.g. if they connect two Venn diagrams by a union symbol), but nobody dares to claim that it really is the name of a set. It is clear that the place of the three dots has to be filled by a linguistic something, which incidentally may be meaningless. $\{a, b, c\}$ is a linguistic something; this is shown at least by the commas. Animals between braces are no normal linguistic means of expression, but they are at least a linguistic surrogate, as are ideograms.

The Venn diagram is not a linguistic phenomenon; but what else can it be? Mathematical texts usually contain more than linguistic matter. You can meet there figures, pictures of an equilateral triangle, of the logarithmic function, of the Peano curve, and many more. A linguistic text *means* something, a picture *represents* an object. To be sure, a picture can be said to mean something. Or rather, if it is not clear enough, one can say that I do not understand what it means. Or the picture on a

traffic sign can mean "school", but then it is an ideogram, and thus of linguistic character.

Pictures are supposed to map something even if the thing mapped is pure fantasy. Mappings sometimes claim concrete, sometimes structural accuracy and faithfulness. An example of the first is a picture of St. Peter's in Rome, an example of the second is a ground-plan of this church; such pictures are also called diagrams. A picture can contain linguistic references, which are explained at the side, and sometimes even the names of some details. The streetnames on a map of a city can be considered as pictures of the street nameplates, but such an interpretation is hardly possible with the name of a river in the picture of the river.

A rather high degree of faithfulness is often attained with pictures of very abstract objects. A drawn triangle with the names A, B, C of the corners in it maps the intended image so faithfully that both of them are readily identified. A horizontal line with numbers at certain points excellently maps the set of real numbers. Graphic representations usually are good images of the function they are to represent. An open set is excellently pictured by an oval. A flow diagram may faithfully represent a particular process.

What should be didactically required of pictorial matter? I think first of all that it should map something. Secondly, that it easily and without long explanations shows what it intends to map. Thirdly, that the principle of mapping itself is clear and easy to grasp. I think that these are reasonable demands. I will now examine the usual Venn diagrams, to see how far they fulfill these requirements.

The easiest case is what I would call natural Venn diagrams. By these I mean the picture of the interior of a simple closed plane curve which is obtained by drawing the image of such a plane curve, and perhaps hatching what on paper looks like its interior. These pictures obviously satisfy our criteria to the same degree as do the usual pictures of triangles and functions. They are simple and beyond questioning. For not-so-young children the principle of such a representation is well known from geographical maps. In this way Venn diagrams were applied in old mathematics courses at least from my own university years onwards. Using such ovals it was pictured what the intersection and the union of sets mean and how complements behave. If such notions had been in-

troduced and one would check whether the listeners understood the definition, one would draw two intersecting ovals and ask: "If this were the set of adults and that the set of females, what would this be?" I never noticed in old mathematics that to ascertain what is the intersection of the sets of the adults and of the females, one drew Venn diagrams and meditated about their intersection. This, however, is how Venn diagrams are mostly applied today. In other words, formerly Venn diagrams did not serve to represent sets as they do now, but to represent inclusions and relations between sets and their unions and intersections, maybe also to represent analogous relations between logical statements, and this aim Venn diagrams can, indeed, serve very well. This use of Venn diagrams has been illustrated by the above example. Two ovals are drawn as images of two plane sets, but the idea to be illustrated is union and intersection of arbitrary sets, and in this context adults and females are only one example. It does not matter what the sets look like, if only they are situated to each other as it should be in the case under discussion, e.g. disjoint, non-disjoint, within each other, and so on. But relations such as one set being an element of another, or properties of a set of being finite or infinite or having a certain number of elements, were never represented by Venn diagrams simply because Venn diagrams cannot do it. Nor were Venn diagrams ever formerly used to represent what kind the elements of a set were.

What I have called natural Venn diagrams are hardly met with in school texts. I do not know what the reason is; maybe people are afraid of infinite sets and try to avoid them. In fact they cannot avoid the infinite set of natural numbers, which to intuition is much less a ready-made object than is the set of points in an oval held together by the oval.

Though natural Venn diagrams are lacking, there has been unanimity in preserving one of its features, namely the closed curve. It is so constant a part of the Venn diagram that it is identified by most users with the Venn diagram. The meaning and function of this curve are obscure; in particular, it is not clear what it is meant to map. I do not have the impression that anybody has really thought about it. It has simply been copied from old-style Venn diagrams where it really did mean a curve, and it is now continued by tradition. 10-20 year-old traditions can in many respects compete with thousand year-old ones.

I have the impression that the curve only serves to hold together

non-connected things. A collection of meaningless figures such as crosses, stars, circles are drawn on the paper, and to neutralize this heterogeneity, a curve is drawn around them. It is an obvious question to ask why such heterogeneous material should be collected in a set. No doubt the pupil should become acquainted with heterogeneous material, too, but why should sets be systematically or even exclusively heterogeneous? This is unnatural.

There is a reason for the heterogeneity principle, and this reason rests on a misunderstanding. The set as it appears in the Venn diagram should consist of visibly different elements, so they conclude, two triangles in one Venn diagram, are forbidden. But why? There are two and even more triangles in the world. They agree, but it does not solve their problem, which is how to indicate that two triangles drawn in the same Venn diagram, are different triangles. The set $\{\Delta, \Delta\}$, indeed, has only one element, namely Δ . Well, the two triangles in the Venn diagram are different. They are obviously different since they are lying in different places just as two eggs and two coins are different even if they are in the same basket or pocket. What are standing between braces are not things but if it is to be at all meaningful, *names* of things. If in order to reach those who are illiterate, I now write ' Δ ' instead of 'a triangle', it is unfortunate that by doing this I can indicate only one triangle. Everyday language is richer, it knows more names for triangles, such as "this triangle", "that triangle", "a third triangle", and so on. The usual mathematical device would be to say:

$$\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$$

where $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ are different triangles. A Venn diagram, however, could without objection look like Figure 17 though certainly not like Figure 18. It should, in fact, be a set of triangles rather than a set of names of triangles (even if it were a set of names, it would not be clear why such names should be arranged so irregularly).

Thus there is not the slightest reason why pictures of sets should have to show heterogeneous elements. The reason for the closed curve seems to be that it should collect the heterogeneous elements. Since heterogeneity has been eliminated as a necessary feature of Venn diagrams, there is no reason left for the Venn diagram curve. To be sure it is a symptom of a terrifying lack of imagination. It is worthwhile to

look at the earlier-mentioned Hungarian book series to see how natural and illustrative sets can be pictured. I am convinced that nobody who has once seen these books will understand any more why people are so keen on Venn diagrams. A set of blocks can be represented as a tower, or as a wall, or as a building. If this is done using coloured blocks, you

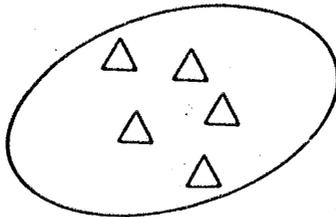


Fig. 17.

can consider the set of red blocks of the first floor as an intersection; you can have a tower leaning against a wall to compare their cardinalities. Is this not much more sensible than Venn diagrams? To post a set of children as points in a Venn diagram, is absurd and if there is anything even more absurd, it is asking where Mary's nose is and requiring it to

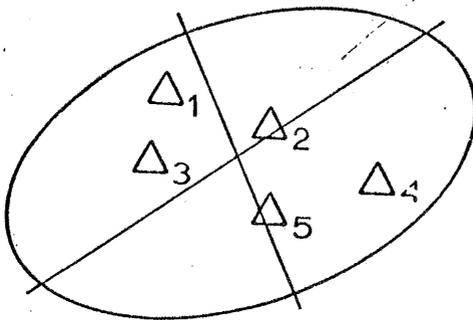


Fig. 18.

be indicated by a point outside the Venn diagram. A bench with children, or a table with children around it, is a self-evident picture of the set of children, from which all kinds of subsets and intersections can be formed. A set of books is represented on a shelf, where you can distinguish large and small ones, yellow and red ones, reading books and picture books, and so on.

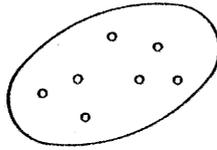


Fig. 19.

The pictures need not be photographically true to life; they should serve mathematics rather than design instruction. A set of apples can be represented as a pyramidal heap of circles, or like when apples are offered on a dish. If sketched, this indeed, leads to a Venn diagram, a circle with small circles in it, where the large circle represents the rim of the dish and the small circles the apples on it. That is entirely reasonable. Or, as an other example, take a breakfast table on which a set of breakfast utensils are exhibited, and where the subsets of all cups or of all objects at a certain place or of all edible objects can be formed. What I cannot understand, however, is delimiting a subset by laying a string on the table. I doubt whether an extra-logical delimitation of subsets can be recommended but if this should be done, it is more natural sawing the table, at least symbolically, apart.

I still understand a Venn diagram as in Figure 19, which suggests something like a set of counters on a table. If I look at Figures 20-21

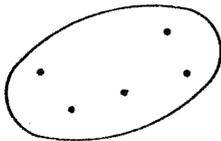


Fig. 20.

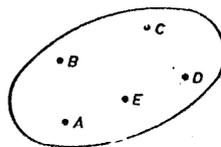


Fig. 21.

I am not sure if the designer meant five points in the plane though I am at a loss to explain the function of the closed curve picture. The letters in Figure 21 obviously do not belong to the picture but are the names of the points such as on a map the word "London" indicates the spot on the map where it is near. I am less sure what Figure 22 means

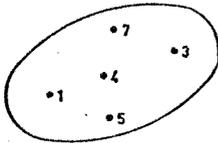


Fig. 22.

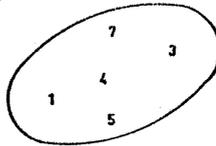


Fig. 23.

because of the strange numbers which may, or may not, be the names of the points.

Up till now, if a set is to be represented, the objects which were supposed to be its elements were still faithfully represented. In Figure 23 even this requirement ceases to be satisfied. Probably the author meant the set $\{1, 3, 4, 5, 7\}$. To indicate such a set it is correct to put the five figures into braces. But it is definitely wrong to put them in the picture of a closed curve. The components of a picture have to be pictures (of dishes, counters, points, etc.); names may be present as references or as verbal explanations of details. However, a curve surrounding names which are not references or verbal explanations suggests a set of names rather than the set $\{1, 3, 4, 5, 7\}$. Moreover, there is no indication about what brought the numbers, or in Figure 24 the letters, into the oval, and why they stand where they do rather than elsewhere. If one would ask the authors of the numerous Venn diagrams in school texts, I bet they could not tell it either. They probably never even thought about it. They simply copied it from each other*.

I related the story of a teacher reporting how he explained to his pupils that braces and Venn diagrams are the same. Of course, they are not the same. Braces are linguistic expressions whereas Venn diagrams

* I have been told that in some states of the German Federal Republic arithmetic textbooks are not officially approved unless they contain a large number of Venn diagrams. Thus authors have to comply with this.

are pictures. Inside the braces linguistic expressions are expected; pictures might be used therein as ideograms if this is done with a lucid understanding of the consequences. It should be clear whether an ideogram means a species or an individual, and if so which one; and it should be understood that this individualization can be a serious handicap if different individuals of the same species are to be named.

On the other hand, the details of a Venn diagram should be themselves pictures, linguistic expressions being only admitted as explanations. In particular, to be sensible, the closed curve should represent something. The pictorial representation may be schematic. If to represent a class of children the wall is indicated by a closed curve and the children inside by strokes, we have a rough but meaningful sketch. If the strokes are replaced with letters, it becomes meaningless. I cannot imagine which urgent circumstances should motivate a Venn diagram for the set of the present presidents of the United States or for the set of the days of the week. I do not understand either why in a talk on parallel and intersecting straight lines, the lines should be drawn as disjoint or intersecting ovals.

DIAGRAMMATIC VENNICA

Figure 25 is meant as a representation of the function that assigns to certain children their weight (in kg). The first closed curve contains

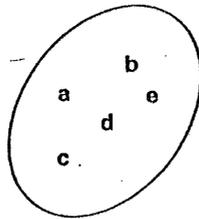


Fig. 24.

names rather than pictures of the children; the second contains numbers; the '29' has been doubled to make the mapping one-to-one (!). Of course a number line would have been much more natural if the author were

not possessed by the idea that everything should be put into Venn diagrams, the *diagrammatis Vennica*.

I stress once more that other pictorial representations of sets can be much more efficient than Venn diagrams. The meaningless curve can almost always be dispensed with; more often than not it only proves that the designer was too lazy to think about how the represented elements could be bundled into a set. If the aim is not union and intersection relations but picturing the sets themselves, one should first consider what has to be attained by the picture and how it can be most efficiently attained. A set of vases and one of flowers are compared by putting the flowers into the vases rather than by Venn diagrams which would be ridiculous.

A few examples may show what is trusted to Venn diagrams. A class is introduced: Mary, John, and so on. Let Mary be named *a*, John be named *b*, and so on. (Notice the sophisticated turn: the child is Mary, but it is named *a*!) A Venn diagram like Figure 24 is drawn. Then

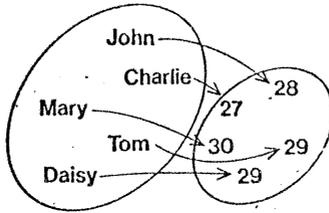


Fig. 25.

the question is asked whether Mary's nose is within the Venn diagram? Of course not. How could it, since Mary herself is not in the diagram! Mary's nose is to be represented by a dot outside the oval. And Mary herself? The author does not go as far as to ask this question. Though obviously Mary is sitting on her bench, rather than in the Venn diagram, she should in a sense stay in the Venn diagram, since she is named '*a*' and '*a*' is in the Venn diagram.

A set of potatoes - there the potatoes are inside the oval. To be sure, the potatoes are, but the set of potatoes is represented by a point outside, because it is not an element of itself.

I did not invent these examples, neither were they invented by someone who wishes to ridicule Venn diagrams. The author is rather a proponent of Venn diagrams who firmly believes that such expositions are suited to inculcate 11-12 year-olds with a lasting love for mathematics. Clearly Venn diagrams are used here for aims for which they are entirely unsuitable. Pushing a once useful method into all kinds of circumstances is simply dogmatic exaggeration, which is alas not unusual among mathematicians.

CHAPITRE III

L O G I Q U E E N S E M B L I S T E

0. Résumé de la démonstration qui va suivre.

Dans ce chapitre, je vais analyser en détails la façon dont les notions ensemblistes sont adaptées à fin d'enseignement en 1^{ère} et 2^{ème} années primaires. La démonstration sera longue et je vais en donner ici les grandes lignes.

1^o On présente des rudiments de logique au travers de ce qu'on a appelé les ensembles. Il s'agit d'une illustration de la logique des classes au travers des diagrammes de Venn, de Carroll et des arbres de classements utilisés chacun à des fins spécifiques.

2^o L'examen des manuels montre qu'en fin de 2^{ème} année primaire (en fait cela va jusqu'à la 4^e année), les ensembles ne sont pas encore des objets que l'on peut nommer, comparer et avec lesquels on opère. Ils se limitent à être des collections à constituer. De plus, comme l'indique le problème soulevé par le concept d'ensemble complémentaire, le statut des ensembles reste très restreint.

3^o Il en est de même de la logique que l'on propose de faire, très schématique, reposant sur des pseudo-objets, prototypes des attributs, définis de façon absolue et indépendante. L'élève n'est pas prié de prendre part à cette symbolisation ni même de la redécouvrir, mais on s'attend seulement à ce qu'il s'approprie certaines règles de combinaisons. Formellement le remplissage des ensembles par de tels éléments, tâche principale proposée aux élèves, correspond à un marquage alors que l'indépendance prédéterminée des caractères considérés surseoit à la neutralité des marques. Et la logique s'arrête là.

4⁰ L'enseignement part donc d'entités constituées pour les révéler aux élèves sous la forme imposée des diagrammes. Dans les dispositifs matériels sur lesquels on travaille, les entités ont une double fonction selon qu'on considère leur statut de représentant-des-entités-logiques ou qu'on les rapporte aux tâches proposées. Ainsi l'attribut est représenté sur une étiquette, espèce d'indicateur de la place des éléments. Ces deux fonctions sont liées par l'entremise des règles qui président à toute représentation. Dans les dispositifs, les entités logiques que sont éléments, attributs, ensembles ne sont pas distinguées par le plan matériel ou figural où elles se situeraient mais au contraire par les règles de placement inhérentes au modèle spatial. Celles-ci sont en partie implicites, et certaines ne sont pas destinées aux élèves. On les trouve dans tous les registres empruntés dans les exercices. C'est autour de tous les éléments de ce système : entités, règles, registre d'illustration que s'organise la progression de l'enseignement.

5⁰ Les conceptions que les élèves se forgent au travers de cet apprentissage se réfèrent en tout premier lieu aux tâches qui leur sont proposées. Celles-ci portent sur des objets de formulation (diagrammes) qui expriment, à ce niveau, les attributs par leur variation réciproque et désignent les ensembles par des dispositions en tas d'éléments plus ou moins éparés. C'est dans le cadre de cette activité de symbolisation qu'il s'agit d'analyser les tâches et d'interpréter les productions scolaires.

1. Le côté des concepts.

1.1. Intérêt de la notion d'ensemble.

Un des buts de l'enseignement des mathématiques est d'apprendre aux élèves à raisonner correctement. C'est dans cette perspective que l'on présente des rudiments de logique au travers de ce que l'on a dénommé "les ensembles". Il s'agit d'une illustration de la logique des classes centrée sur les images que sont les diagrammes de Venn (pour figurer les classes), les diagrammes de Carroll (pour figurer la combinatoire des attributs) et les arbres de classement (pour figurer le tris successifs et systématisés d'un classement). Cette référence abstraite vise la dissociation des opérations logiques élémentaires de l'aspect langagier (sémantique) jugé trop ambigu. Elle place au centre les règles des opérations logistiques. D'autre part, ces images permettent de montrer ces entités abstraites comme des objets naturels, présentables donc à ce niveau d'enseignement.

Je retiendrai des introductions des méthodologies deux choses.

1^o L'école tend à accompagner une maturation psychologique : "favoriser une bonne structuration mentale" et lui procurant "un outil intellectuel utilisable" (les expressions sont de moi).

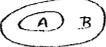
2^o Elle cherche, au delà des savoirs faire, à donner "une bonne connaissance intuitive des notions fondamentales : les ensembles, les relations, les opérations, les structures". On notera alors que ces notions sont présentées comme des entités existant depuis toujours.

1.2. Niveau auquel l'enseignement se place.

Je vais commencer par situer un peu mieux l'enseignement des ensembles en première primaire. Une des particularités de cet objet d'enseignement est qu'en très peu de temps, on a décidé de les enseigner à tous les niveaux du cursus scolaire : écoles primaires, secondaire, secondaire supérieure. C'est dire combien d'acceptations différentes à ce vocable et combien de changements de significations dans le cursus scolaire. Afin de préciser ce qu'il en est pour nous, je me référerai aux mathématiques. On y parle des ensembles de deux manières. Il y a la théorie des ensembles et il y a l'usage de ce vocabulaire pour présenter les notions mathématiques et leurs diverses théories. C'est ceci qui est visé dans l'enseignement. L'idée à faire passer est qu'il est possible de considérer une multitude en un seul acte de pensée, comme un objet manipulable et nommable. Il importe alors de considérer les relations qu'entretiennent ces objets avec leurs éléments constituants ou encore les relations qu'ils entretiennent entre eux : égalité, inclusion, exclusion. On peut alors définir des opérations ensemblistes et une structure d'ordre partiel entre ensembles. Ceci permet une certaine analogie entre les ensembles et les structures numériques. Avec en outre, les notions d'ensemble de partie, de produit cartésien et d'application, on dispose alors d'un vocabulaire suffisant pour l'usage qui en est fait en mathématiques.

Les programmes de première et deuxième primaire restent en amont de ce qui vient d'être exposé. En fin de deuxième primaire, les ensembles ne sont pas encore ces objets que l'on nomme, compare, et avec lesquels on opère, mais se limitent à être des collections d'objets. L'enseignement débute par la constitution des ensembles.

a) Les ensembles n'ont pas de nom. Ils ont bien une "étiquette" mais celle-ci se définit dans le cadre d'une tâche précise : "c'est le critère décidé ou choisi pour un classement donné". (Méthodologie Romande, 1^{ère} année, 1^{ère} éd., page 8). Il s'agit donc de classe logique dont la compréhension est figurée par l'étiquette-attribut, et l'extension par la plage et son contenu.

b) Il n'est pas fait mention de l'égalité ni des relations entre ensembles. On effleure l'exclusion dans certains exercices sur l'intersection vide. A ce niveau, l'inclusion est laissée au seul dessin. De là, au chapitre : Découverte de l'Espace, une série d'exercices sur les domaines et les positions relatives ainsi définies (intérieur/extérieur). Un des objectifs est de faire admettre que dans le diagramme  l'intérieur de la région A est compris dans celui de la région B. L'inclusion elle-même sera abordée en 3^e année sur l'exemple d'ensembles constitués de nombres entiers naturels. Deux raisons sans doute à cela : 1^o l'inclusion est retardée à cause des difficultés psychologiques des enfants de moins de 8-9 ans. 2^o l'inclusion a plus de sens pour des ensembles de nombres que pour ceux de type "blocs logiques" (ou bloc Dienes). Mais les ensembles de nombres ne sont pas d'un abord facile. En tout état de cause, il est difficilement concevable que l'on parle d'ensembles en omettant l'inclusion.

c) Enfin, il n'y a pas d'opération d'intersection proprement dite, malgré la foule d'exercices qui semblent s'y rapporter. Le manuel commence par présenter des éléments pouvant être doublement classés, et introduit le croisement des ensembles. Les activités se résument au remplissage correct des 4 zones délimitées par un diagramme de Venn et en la déduction des critères d'un classement déjà effectué. Ces deux tâches inverses représentent le premier palier de l'enseignement des ensembles.

Donc les opérations intersection et réunion ne sont pas encore de véritables opérations ensemblistes. Le résultat n'a pas encore le statut d'ensemble pour les

élèves (cf. chapitre IV). La seule façon de lui donner ce statut serait de considérer les relations d'inclusion entre les ensembles en présence. Ainsi, contrairement au domaine numérique où, d'emblée, le résultat du calcul est un nombre, à cause de la comptine, l'intersection se réduit ici au nom d'une plage et la réunion, moins bien servie par Venn, reste assez mystérieuse.

Ce n'est qu'à l'école primaire que l'on s'occupe de remplir des diagrammes de type Venn ou Carroll avec des éléments. Or pour ces auteurs ce n'est pas du tout de cela qu'il s'agit : les diagrammes sont des images de certaines relations propositionnelles. Par exemple, on associera à la proposition : "Tous les hommes sont mortels" le dessin  . Tandis qu'en première primaire on se demandera, à propos d'un diagramme déjà rempli : "Est-ce bien l'ensemble de tous les écureuils gris ?" (opposant ainsi : "Un ensemble d'écureuils gris" à "L'ensemble de tous les écureuils gris"). Ce pléonasme : "l'ensemble de tous les" est bien significatif.

Ces représentations diagrammatiques sont-elles utiles à l'acquisition du concept d'ensemble (entendez classe logique) ? Le présent programme donne une réponse affirmative. Et les méthodologues annoncent même le passage des ensembles que l'on remplit d'éléments à ceux illustrés par Euler, Venn, Carroll. Je cite : "Les cordes dessinées ont pour fonction de séparer les ensembles. A un premier stade les éléments sont représentés. A un stade supérieur, la "corde" désigne un ensemble et il n'est plus nécessaire de représenter les éléments". (Méth. romande pg. 37, 1^{ère} année primaire, 2^{ème} éd.)

Le passage est cependant forcé. "Former une collection d'objets, c'est-à-dire les grouper, est une activité naturelle qui apparaît très tôt dans le développement de l'enfant et qui se présente fréquemment dans la vie quotidienne (famille, groupe, tas, paquet, boîte, cortège etc...). Il s'agit donc de tirer parti de cette tendance afin de permettre à l'enfant de construire un raisonne-

ment logique et d'approfondir la notion de classement". (Méth. rom. ^{1^{er}} année , 2^{ème} édition, page 2.). L'idée qui va permettre de "tirer parti de cette tendance" est celle de ramener la relation d'appartenance à celle de contenance spatiale. L'ensemble est alors un contenant, dont on oubliera finalement le contenu. "Il n'est plus nécessaire de représenter les éléments". Au passage il y a généralisation puisque tout contenant, en tant que tel, pourra être considéré comme un ensemble. Exemple, la négation. Je reproduis en annexe à ce chapitre le jeu n° 7 (c.f. pg. 169) des méthodologies romandes pour que le lecteur se rende compte du "tour de passe-passe" que le maître doit faire. En particulier quand il s'agit de faire dire aux élèves que le point commun de tous les éléments de l'ensemble complémentaire est le fait de ne pouvoir être placés dans l'ensemble . Donc, les auteurs passent de la constitution d'ensembles définis par des attributs "positifs" à celle d'ensembles complémentaires et présentent l'attribut négatif comme un autre attribut, au moyen d'un jeu de mot et du préfixe "non" : ne pas être rouge \rightsquigarrow être non-rouge. Ceci est souligné par la tâche de remplissage. Mais quant à passer aux significations, c'est une autre chose. Il n'est pas question de demander aux élèves si l'attribut nié définit bel et bien un ensemble lui aussi. Nul doute en effet que former un tel ensemble n'est plus une activité naturelle ni qu'elle se présente fréquemment dans la vie quotidienne. Qu'on me dise ce qu'est la non-famille ou encore le non-contenu de ma poche. Les représentations concrètes momentanément mobilisées deviennent caduques.

Mais ceci couvre un point général. La négation d'une relation collectivisante est-elle, elle aussi, collectivisante ? Oui pour autant qu'un "univers" de référence soit défini au préalable. Mais alors les attributs se définissent entre eux et par rapport à leur totalité et non plus en relation directe et univoque, avec les éléments. De cette façon, ceci marque l'affranchissement des attributs. C'est un passage dans la généralisation de la notion d'ensemble, dépassant la distinction homogène-non homogène. D'un autre point de vue, l'enjeu est de reconnaître que le

complémentaire est aussi un ensemble, et de comprendre la dualité que cela implique. Ce qui comporte la double négation et les lois ^{de} De Morgan :

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{(A)} \cap \overline{(B)} \quad \text{et} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{(A)} \cup \overline{(B)} \quad (\text{où } \overline{(A)} = \text{complémentaire de } A).$$

Note : Le langage ensembliste se justifie par sa valeur générale. Or celle-ci ne peut pas transparaître d'une présentation d'exemples triviaux et finis. Et comme c'est le cas si souvent dans l'enseignement des mathématiques, cette généralisation est dévolue au symbolisme.

2. Une logiquette. (au sens de d'nette)

2.1. Matériels structurés.

Les ensembles devraient servir à un enseignement de la logique et la restriction rencontrée ci-dessus la concerne également. Avec les jeux sur les ensembles et les dispositifs matériels utilisés, on dispose d'une illustration élémentaire de la logique. On espère ainsi y introduire les élèves. Il s'agit, bien sûr, de ne pas confondre l'illustration et ce qu'elle recouvre. Rien n'indique à priori que les notions visées procèdent de la réalité présentée aux enfants. Pour l'observateur, il est bon cependant de s'arrêter un peu à cette réalité. Revenons donc aux matériels structurés qui, nous l'avons vu, font l'essentiel des dispositifs de l'enseignement en 1P, 2P. Par exemple, les blocs logique de Dienes. Ceux-ci sont une collection de formes en plastique dont la couleur, la taille, l'épaisseur et la forme varient. (4 formes, 3 couleurs, 2 tailles et 2 épaisseurs). Ces blocs sont construits tout exprès sur la combinaison de ces attributs et sont dans ce sens tout à fait artificiels. Dans un jeu de pièces, tous les blocs sont distincts. Dans la classe où j'ai mené mes observations divers matériels étaient construits sur ce modèle, il y avait aussi des blocs logiques.

2.2. Objets prototypiques et logique restreinte.

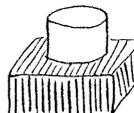
Ce qui donne la valeur analytique d'une classification tient aux mises en relations des propriétés considérées, à la façon dont elles se structurent sur les éléments considérés. La définition des propriétés que l'on voudra considérer n'est pas toujours aisée. Certaines relations insoupçonnées, certaines ambiguïtés ou indifférenciations conceptuelles apparaissent. Les classifications sont des outils d'analyse en ce sens qu'elles permettent d'examiner la façon dont les propriétés définies se combinent dans la réalité.

Avec les matériels structurés, ce mouvement est inversé. Dans de tels dispositifs, les attributs sont définis de manière absolue. Il y a une et une seule manière d'être rouge, carré, grand, mince. Ces caractères sont absolus, univoques et leurs mises en relation n'entre pas en ligne de compte. Bien sûr, l'intention didactique est de simplifier la tâche aux élèves, de leur faire faire une logique élémentaire. Mais ceci donne aux éléments (blocs) considérés un statut de prototypes de la combinaison des attributs. De sorte que ces derniers soient aisément identifiables dans les éléments. Ceci a quelques conséquences :

- 1) La relation de convenance liant l'élément à l'attribut se substitue aux comparaisons et équivalences entre les éléments.
- 2) Il y a alors une confusion (soulignée symboliquement) entre éléments et attributs.
- 3) Les éléments peuvent être considérés comme des figures composées d'une collection figurale de traits distinctifs, chacun représentant un attribut. (L'attribut "appartiendrait" alors à l'élément).
- 4) L'indépendance des caractères retenus pour la constitution du matériel est stipulée d'avance. Il ne s'agit pas de la découvrir. Pour ces raisons, les caractères forme et couleur de figures géométriques s'imposent particulièrement. Comme pour les "marquages" cela confirme une "neutralité" aux attributs (mais sans l'arbitraire des marques, ce qui permet un subtil contrôle des propriétés par le sens commun). On peut alors mettre en évidence les opérations de

combinaison d'attributs, pour elles-mêmes. Mais fait-on de la logique ?

L'élève a donc affaire à une logique très schématisée et pauvre. (Les enfants, heureusement, y mettent un peu de fantaisie en y attribuant leurs propres significations). Tout est prédéfini pensé d'avance et fermé. Prenons un exemple un petit peu provocateur.



Il serait très facile de monter la pièce suivante. Plus simple, une juxtaposition des deux pièces pourrait faire l'affaire. On se trouve alors devant un "monstre". Comment le classer, le définir ? Serait-il possible d'être à la fois bleu et rouge, rond et carré ? Mais le jeu des blocs logiques n'est pas un jeu de construction. Cette proposition est d'emblée hors-jeu, exclue, à ne pas concevoir. Et s'il le faut, les mots utilisés, sous leur apparence naturelle serviront de contrôle : "On ne peut pas être à la fois de deux couleurs". Et pourtant. Formellement, il est équivalent de dire "grand et mince" ou "épais (dans un sens) et mince (dans l'autre)". Pourquoi pas ?

2.3. Marquage des combinaisons logiques.

Mais l'analyse didactique peut expliquer comment, dans le but d'enseigner, on en vient à réduire autant le champ de la logique. Tout s'explique quand on considère la logique même de la mise en place de cet enseignement. Et c'est une logique de l'illustration, de la monstration. Les éléments du jeu de blocs logiques sont en fait non pas les éléments d'une classification mais ceux d'un marquage.

Deux plans sont en présence. Celui des opérations logiques, combinatoires, et celui des relations découlant des associations de ces combinaisons. Le diagramme d'Euler-Venn-Carroll, dans l'usage auquel ils le destinaient, établit la liaison entre ces deux plans. En tant que tableau "universel" le diagramme produit des cases (combinaisons des attributs) et montre, par l'intermédiaire du marquage

des cases vides ou pleines, les relations logiques (le marquage permet d'associer des cases). Dans un usage différent, mais tout de même très proche, les hachures (verticales, horizontales, etc...) ou les couleurs, peuvent révéler la façon dont les ensembles se combinent. Il suffit de lire le résultat d'un hachurage pour qu'automatiquement apparaissent différentes zones : non-hachurées, hachurées simplement, doublement ...



Le marquage revient à considérer la plage intersection, c'est-à-dire conjointe comme celle où se superposent deux hachurages. On peut ensuite jouer là-dessus pour illustrer par exemple les lois de de Morgan. Et cela est tout à fait clair, et se fait automatiquement, pour autant que le point suivant soit bien compris : le marquage est neutre par rapport aux relations logiques considérées. (Ainsi, il y aura toujours une plage doublement hachurée, même si cette plage pouvait s'avérer vide d'éléments).

Dans le programme de 1P, 2P on se propose de mener en parallèle deux choses : la constitution des ensembles en tant que collection d'éléments (à marquer par entourage ou par placement) et la combinatoire des attributs. On ne s'occupe pas, à ce niveau du cursus, des relations logiques. Les deux projets s'articulent dans le matériel structuré. Avec en conséquence une difficulté majeure dans la mesure où l'attribution aux éléments de cette fonction de marquage fait perdre à ce dernier sa neutralité. Et que celle-ci devra être assurée par un contrôle sémantique sévère (joué par les mots usuels). Si, du point de vue des marques un hachurage jaune peut se superposer à un hachurage rouge pour donner, par exemple, un hachurage rouge et jaune ou encore orange, du point de vue des éléments, l'intersection d'un ensemble d'objets jaunes avec un ensemble d'objets rouges n'est pas un ensemble d'objets rouges et jaunes ni d'objets oranges. On voit donc que les erreurs grossières, que l'on a vu apparaître dans l'enseignement des ensembles (et pas seulement chez les élèves

mais chez les maîtres aussi), ne sont pas fortuites. Elles ne sont pas attribuables à une incompétence de jugement mais plutôt à une incompréhension du statut des objets traités. Mais ceci vient à poser la question des relations logiques propres aux objets considérés dans une classification et en définitive aux définitions des propriétés que l'on va choisir comme attribut.

3. Moyens didactiques.

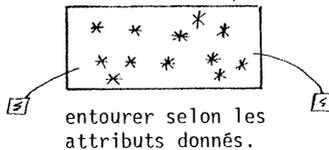
Interessons-nous à la façon dont les méthodologues entendent réaliser leur projet. Je passe donc à l'analyse des moyens didactiques mis en oeuvre. Je désignerai tout au long de ces pages, sous le nom de dispositif (boite, cordes, diagrammes puis notations algébriques), les réalisations symboliques diverses, plus ou moins élaborées auxquelles on a recours. Sur la base de ces dispositifs, les pédagogues et enseignants imaginent un certain nombre de tâches qui seront proposées aux élèves dans le double but d'apprentissage et d'évaluation. Dans l'effectuation de ces tâches, les élèves mettent en oeuvre diverses activités spécifiques, matérielles ou mentales et dont la liste exhaustive bien sûr ne peut être donnée (saisie d'objets, placement, déplacements, repérage d'éléments prédéfinis, combinaisons de propriétés, variation de ces combinaisons sous constance de certaines composantes, etc... etc...). Chaque activité a son ou ses supports propres, plus ou moins objectivables. Maîtres et élèves échangent par l'entremise de quelques-uns de ces supports qui permettent par exemple de définir les buts de la tâche, de donner les règles de consigne, de déterminer les indices d'aboutissement du travail ou des aspects sur lesquels seront jugés les élèves. Pour remplir cette fonction de médiateur didactique un support doit être identifiable par chaque protagoniste, c'est-à-dire objectivable (visible, représentable) et significatif en regard de l'objet d'enseignement lui-même. De sorte que, pour une tâche donnée, seules certaines activités sont prises en compte dans l'échange, et parmi elles, certaines pré-

dominant. Au niveau de 1P 2P, ce sont les activités de placement qui importent. Par contre d'autres activités comme celles de repérage d'éléments dans la liste des objets donnés sont secondaires, les activités perceptives de mise en correspondance entre images ne sont pas considérées, ni les activités de formulation ou de représentation symbolique.

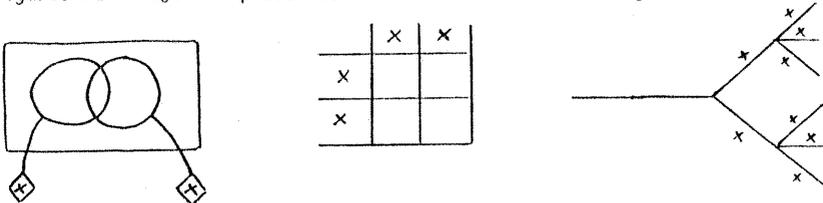
3.1. Tâches proposées.

Les principales tâches proposées dans cet enseignement sont :

1^o. On donne un dessin de figures éparées; il s'agit d'entourer des ensembles prescrits par la donnée de leur attribut. (cf. fiche ER 10 pg).



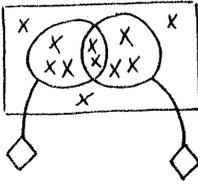
2^o Un diagramme est donné, vide, ainsi qu'à l'extérieur une série de figures ou d'objets à placer selon les indications du diagramme.



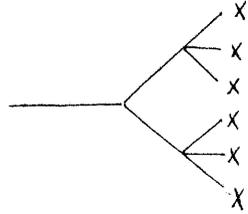
3^o Même tâche, mais la série d'éléments n'est pas donnée. Les élèves doivent dessiner les éléments selon les indications du diagramme.

4^o Un diagramme est donné, avec, placés les éléments. Mais les étiquettes sont vides. Il s'agit de retrouver les attributs qui ont présidé au classement

pour pouvoir compléter les étiquettes.



	X	X
	X	X



- 5⁰ Effectuer complètement un classement. Les éléments sont donnés.
- 6⁰ Comparer avec les diagrammes de types différents.

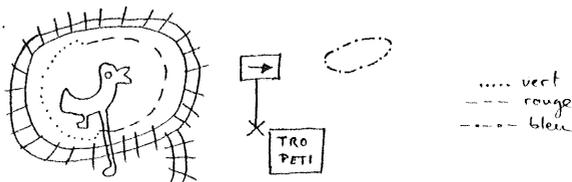
3.2. Multivocité et multiplicité symbolique des dispositifs.

Je considère 3 types d'entités dans les dispositifs : les éléments, les indicateurs et les tableaux. Sur le plan matériel ou figural celles-ci ne sont cependant pas distinguées: l'élève peut n'avoir affaire qu'à des objets ou enfin même qu'à des figures dessinées. Par exemple les éléments seront tour à tour et dans cet ordre de progression : objets matériels tout venant (les élèves eux-mêmes ou leurs jouets), objets unités (jetons à plusieurs exemplaires), objets prototypiques, cartes à jouer représentant des images d'objets, gommettes à coller, dessins à reproduire selon modèles ou selon l'imagination de l'élève. On remarque l'extrême finesse de variation, marque d'une adaptation certaine de cet enseignement. Les tableaux commencent à être des boîtes, des paquets de cartes, des tas de jetons, puis sont symbolisés par une portion de tapis, par des assemblages de cerceaux, de cordes à sauter nouées, tracés sur le sol avec du ruban adhésif, ou encore dessinés sur papier en diagrammes. Les diagrammes, matériels ou dessinés, comportent des indicateurs pour lesquels les méthodologues ont choisi le modèle des étiquettes attachées ou collées aux paquets. Sur l'étiquette, on représentera l'image ou le mot désignant l'attribut-critère-de-classement. Le lieu d'attache de l'étiquette est représenté par une ficelle réelle ou dessinée.

Le sens de chaque entité est multiple. Il y a une référence aux entités de la logique des classes (élément, attribut, ensemble). En second lieu, il y a une référence fonctionnelle aux tâches elles-mêmes. Enfin à la métaphore qui sert de prétexte. Tout cela se tient en un système. L'exemple que je vais donner à propos d'une métaphore : ensemble \rightarrow mare de canard montre que les élèves ont parfaitement compris ce qui est demandé. Et leur réponse n'est pas absurde. Même s'ils "oublent" momentanément que cela n'a pas de sens de superposer des mares de canard.

La consigne est de dessiner 3 mares, une rouge, une verte, une bleue, ainsi qu'un canard de sorte que ce dernier "nage en même temps dans les mares rouge et verte mais pas dans la bleue". Voici deux réponses d'élèves. On notera l'intégration sur le dessin de marques se référant à des niveaux de signification divers. Pour SABINE le traitement de l'intersection, la barrière, mais aussi l'écriteau explicatif (justificatif). Pour Vincent les deux flèches.

SABINE :



légende : la mare est bicolore vert-rouge. La barrière empêche le canard de sortir. Mais comme il arrive à glisser une patte hors de la barrière, SABINE en a rajouté une seconde.

DENYS :



légende : le canard est dans l'intersection mais les flèches montrent qu'il nage dans la mare rouge et dans la verte.

Réussir les tâches proposées suppose la maîtrise fonctionnelle et la juste évaluation du prétexte. Ceci est aisé pour celui qui dispose de la clé qu'est la logique des classes. Il lui est alors facile, au gré des circonstances, de se limiter à l'examen de tel point particulier, telle règle partielle, et d'admettre pour un instant de simplifier les choses. Ceci permet à l'enseignant de "parer au plus pressé" dans l'explication des règles du jeu, d'espérer assurer autant de préalables que possible et d'introduire progressivement les élèves. Mais un observateur, non au fait du projet d'enseignement, serait, lui, vite perdu, voire offusqué.

Toute cette analyse repose sur deux considérations centrales. D'une part la multiplicité des systèmes de signifiants d'autre part la multivocité des significations. Il convient d'insister sur la cohérence du système complexe évoqué ci-dessus. Je parlerai, selon les points de vue adoptés, de redondance, d'isomorphismes, de contrôles. C'est au regard de cette redondance que l'on peut analyser globalement la relation didactique qui se noue autour d'une tâche donnée. L'élève bien sûr, au sujet duquel il s'agira de repérer les relations qui tombent dans le champ de son traitement au cours des phases de son travail. Le maître aussi, quand on examine sa gestion du travail, ses formulations et reformulations de consigne, ses rappels échelonnés des règles à respecter, ses questions aux élèves pour les amener à rendre compte de leur travail ou à corriger leurs erreurs. Je considère que la signification, par définition, lie et structure le système. Mais chaque protagoniste a bien sûr un point de vue propre. D'une certaine manière le travail du maître consiste à gérer la signification au travers des conditions devant lesquelles il place les élèves. La signification évolue. Un certain nombre de constituants, activités ou supports, sur lesquels momentanément l'attention aura porté, au gré de tâches particulières, vont perdre du sens et ne plus être considérés pour eux-mêmes, ni servir de référence. La signification se manifeste donc à ces changements, par des options ou éventualités

délaissées ou rejetées. Ainsi, à un moment donné, les élèves acceptent de croiser des mares de canard (ou de résoudre des problèmes de baignoire). Mais, passé ces caps, certaines interprétations deviennent proprement inconcevables. Nous en verrons une dans l'exemple de double négation non non rouge, interprétée comme "tout est permis" plutôt que comme "la prescription de rouge". Autre exemple, la neutralité des marquages. C'est tout un travail pour l'adulte (enseignant, didacticien) de reconstituer des conceptions plus primitives que les siennes.

3.3. Règles sous-jacentes aux représentations.

Les analyses que je viens de faire s'inspirent des remarques de Guy Brousseau sur la signification et du modèle que Gérard Vergnaud propose pour les représentations. En particulier, pour cet auteur, aux représentations correspondent des règles d'action. Bien sûr cela concerne les représentations de tout sujet quel qu'il soit. Entre autres, celles du méthodologue qui imagine, pour illustrer la logique, les dispositifs et les tâches scolaires. Dans ceux qui nous occupent ici, il faut comprendre que les différences entre entités représentant éléments, attributs et classes ne sont pas rendues matériellement ou symboliquement. Nous pouvons trouver des dispositifs entièrement matériels ou au contraire entièrement dessinés. Une interprétation est nécessaire, et celle-ci suit automatiquement certaines règles. Ces règles ne sont pas forcément explicites. Elles peuvent être inhérentes à l'illustration choisie. Par exemple au langage courant ou encore aux relations spatiales du modèle. D'autre part, ces règles ne seront pas forcément explicitées au départ, dans les jeux introductifs mais se révéleront au cours d'apprentissage. Enfin, certaines de ces règles ne concerneront que les enseignants, pour la confection d'exercices. Je vais ici examiner quelques-uns d'entre elles, qui se rapportent à des plans divers.

1^o Les éléments sont, dans les jeux, les entités objectives par excellence. Cela se marque de diverses manières. Mieux sur les plans du langage ou sur celui des règles du modèle spatial que sur le plan de la représentation par dessin. Examinons les deux premiers cas.

a) Langue naturelle. La distinction entre le référentiel et les sous-classes qui seront considérées se traduit par la distinction : substantif - adjectif ou locution composée avec les mots "avec/sans". Ainsi par exemple, un élément sera un écureuil, un bonhomme de neige, une coccinelle, un bloc ou un objet ayant certaines propriétés. Ces propriétés concernent l'élément dans son entier. C'est ce que nous rappelle la note suivant de la méthodologie : "Il est impossible qu'un même objet soit à la fois entièrement rouge ou entièrement jaune" (Méth. Romande 1^{ère} année, 2^e éd., pg.22). Les attributs ne sont pas modulables ni opposables, il faut les considérer comme des entités neutres. Pour ce qui est des ensembles, sans nom, nous l'avons noté, ils n'ont pas de propriétés et surtout pas celles de leurs éléments.

b) Unicité de la place des éléments. La correspondance réaliste élément-objet, voulue par les méthodologues dans les jeux d'introduction, fait que les premiers empruntent aux seconds l'exclusivité de la position : en tant qu'objet, l'élément ne peut avoir qu'une seule et unique place. La plupart des tâches proposées demandent à l'élève de remplir un diagramme et de ce fait d'effectuer un classement. A l'élève donc de déterminer successivement la place de chaque élément donné. Les objets ne peuvent pas être superposés, ni se chevaucher ou encore ne seront pas accolés. Cette exclusivité de position est relative aux attributs considérés : deux répliques d'un même élément doivent être côte à côte comme des jumeaux dans un pousse-pousse. Donc la règle d'exclusivité est doublée d'une règle d'interchangeabilité des éléments équivalents. C'est difficile à exprimer avec des mots. Au contraire pour les étiquettes, les règles de placement

sont bien plus floues. (cf. plus loin). Notons qu'il n'y a pas de solution satisfaisante pour rendre compte à la fois de l'intersection et de la réunion. Les ensembles ne sont eux pas des objets indépendants, ce sont des objets-places. Ils peuvent (et dans certains cas doivent) se chevaucher, voire se superposer complètement. Dans ce dernier cas le marquage se fera par une double corde ou par deux étiquettes. Cette difficulté de représentation est exactement celle que l'on rencontre avec l'ensemble vide et l'idée que celui-ci est inclus dans tous les ensembles. (Ce n'est donc pas l'ensemble vide, en tant que tel qui pose problème).

c) Une seconde règle de placement concerne les ensembles. C'est celle de l'exhaustion du placement. Deux niveaux selon que l'on considère un ensemble seulement ou alors une classification complète. Pour ce qui est de l'ensemble, celui-ci ne saurait être constitué qu'au moment où il contient tous les éléments répondant au critère choisi et rien que des éléments de la sorte. Au niveau du langage on joue sur ces quantificateurs. Cette règle régit le placement bien sûr, mais aussi, en retour, l'interprétation du critère rassemblant les éléments. Pour la classification, au départ du jeu, les éléments sont donnés en vrac, en général hors du diagramme de sorte que leur position relative n'a encore aucune signification. En particulier l'ordre de placement de chaque élément est laissé libre. La tâche cependant ne s'achève que lorsque les éléments seront tous placés. Ce n'est qu'à ce moment que le diagramme pourra être interprété. (Ceci pourrait être une vérification). Il y a donc divers moments à la tâche. Deux d'entre eux examinés ici sont 1^o le placement des éléments, 2^o l'interprétation du résultat. Il est donc primordial que l'élève contrôle l'exhaustivité. Les maîtres sont amenés (pragmatiquement) à insister sur cette consigne et proposent de vérifier, soit au fur et à mesure du classement, soit en fin de course, que des éléments n'ont pas été oubliés. Habituellement on suggère des techniques de cochage. Celles-ci sont identifiées à des tâches annexes de type : discipline de travail, et leur

enjeu cognitif est sous-estimé. Celui qui est au fait de l'interprétation en termes de logique des classes n'aurait pas à se faire rappeler de telle règle.

Notes.

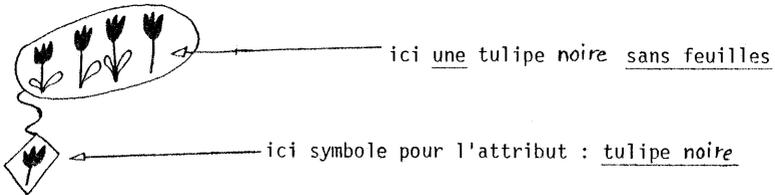
- La tâche est donc structurée en 2 moments. D'une part une tâche de placement, puis une fois terminée, l'examen de la classification produite. Cependant cet examen reste un constat et n'est en aucune façon nécessaire à la réussite du placement. Il en sera de même exactement pour les exercices numériques (cf. Chap. VI). L'activité de base sera le comptage, le résultat et son écriture sera alors interprété. Mais les comptages ont bien plus de sens que les activités de placement.

- Unicité de la place et règle d'exhaustion sont en fait solidaires et doivent être coordonnés dans un système intégré. En fait, leur rapport est l'exact correspondant de celui qu'entretiennent intersection et réunion, elles aussi solidaires (conjonction/disjonction). En cherchant une progression dissociée de l'intersection vers la réunion, il n'est pas surprenant qu'on fasse appel - à un niveau plus caché - à la même structuration.

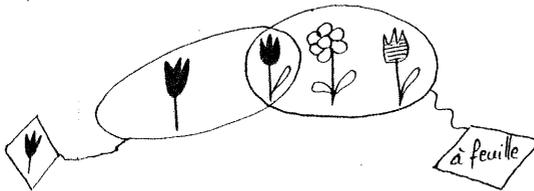
2⁰ Avec la représentation figurale des éléments et des attributs sur le dessin des diagrammes (cahier ou fiches d'exercices) on retrouve les ambiguïtés notées à propos des marquages. Avec en plus quelques ambiguïtés sémantiques propres aux préséances de la pensée naturelle.

Examinons à titre d'exemple ce qui en est des symboles représentés sur les étiquettes. Dans ce cas, un attribut est représenté par un mot ou une image. Ainsi un parapluie sera représenté pour signifier : "avec parapluie" et se réfère à un trait présent ou non sur une carte-élément du jeu, . Pour la couleur, ce sera plus abstrait, dans les manuels c'est le symbole d'une tache de couleur qui a été retenu :  signifie de couleur bleue. Dans la plupart des cas, le symbole

est un élément inachevé. Par exemple  veut dire tulipe, abstraction faite de sa couleur, de la présence ou non de feuilles sur la tige. Dans certains contextes cela pourra aussi vouloir dire fleur. Ainsi donc, l'idée que l'attribut est une propriété commune à divers éléments, est rendue par le motif commun aux images des cartes-éléments. Avec quelques ambiguïtés :



Et dans le cas des intersections comment ne pas oublier que l'étiquette concerne non seulement  mais encore  ?

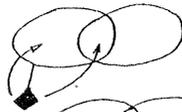


Des difficultés d'ordre sémantiques plus profondes puisque   seront considérées comme une paire de marguerites mais jamais   ne seront considérées comme une paire de tiges à feuilles. Il y a des préséances.

Les mêmes images sont donc utilisées à représenter les éléments et les attributs. Mais pas les mêmes règles d'utilisation. Ainsi  a une signification comme étiquette, à la rigueur  aussi (cela signifie : sans balais). Mais cette façon de marquer la négation n'est pas toujours exempte d'ambiguïté dans  sur quel attribut porte la négation (triangle, *hachure*, ou leur conjonction) ? On retrouve donc, au niveau des symbolismes utilisés exactement ce qui avait été explicité à propos des activités de placement. Je montre ainsi comment deux illustrations de la logique ensembliste sont mises en parallèles dans le modèle diagrammatique : le système des places (et des relations de position) le

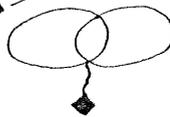
système des images et de la conjonction des motifs (traits) tout ceci contrôlé, entre autre, par la langue naturelle.

3⁰ Mais les étiquettes répondent elles aussi à des règles précises. Cela peut paraître surprenant. Mais il en est ainsi. Ce sont des règles de présentations destinées avant tout aux enseignants. Pour les concepteurs des jeux, les étiquettes, qui représentent les attributs, sont reliées aux "cordes" des ensembles par une attache. Une exception forcée : le complémentaire n'a malencontreusement pas de corde propre. Il y a même une tentative des méthodologues, mais peu suivie par les enseignants, de donner une signification à la forme de l'étiquette : losange pour les attributs, carrée pour le cardinal de l'ensemble et ronde pour le nom de l'ensemble. Le point d'attache de l'étiquette est quelconque. Du moins quand un ensemble est représenté "isolé". Dans ce cas, la plage qu'elle désigne est évidente. Mais quand il y a deux ensembles, chaque étiquette est censée désigner deux plages à la fois :

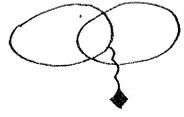


De plus, on n'atta-

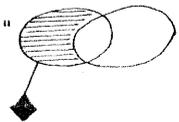
chera alors pas l'étiquette n'importe où :



et



sont considérés comme trop ambigu. La position pour laquelle on a opté semblait la moins mauvaise et dénote une préséance de l'ensemble sur l'intersection. Mais ceci fait que l'étiquette désigne avant tout "l'aile du papillon"



Quoi qu'il en soit, on notera que les éléments et les attributs sont traités différemment. Quand la tâche porte sur le placement des éléments, il s'agit de trouver la place de l'élément et cette dernière a une signification (et l'élève sera jugé sur les emplacements erronés). Quand la tâche porte sur la "découverte" de l'attribut, la place est indiquée (l'étiquette est donnée vide), il s'agit seulement de répéter le symbole adéquat, et de l'y dessiner.

4^o Pour ce qui est des ensembles il y a aussi bien sûr des règles. Entre autre la forme de la corde doit être quelconque. Et pour exprimer ceci, on peut avoir recours soit à une forme parfaite, lisse, soit au contraire "bosselée". Mais connexe bien sûr. On se souviendra de ce qui a motivé l'adoption de l'ovale par Venn (Chap. III). Notons que l'on joue aussi sur la forme des ensembles pour l'enseignement de la soustraction. Ex.  avec aussi peu d'espace que possible hors des deux composantes pour dissuader les élèves d'y dessiner des éléments (par exemple fiche OP1, 2^{ème} année).

5^o N'oublions pas comme règle de présentation, à ne pas omettre dans l'analyse tant elle est signifiante, la disposition des éléments. Si les éléments sont à classer, ceux-ci seront donnés "en vrac". Le mélange signifiant l'absence d'organisation, les éléments sont réunis sans considérations de leurs attributs. Dans d'autres cas, pour entourer les ensembles, les zones que l'on peut perceptivement repérer (couleur, forme, taille) sont considérées comme les ensembles.

Bien sûr, ces règles ne se révèlent qu'à l'analyse et ne sont pas données à priori. En fait l'enseignement a une durée, et une progression. Il s'agit d'introduire les élèves à la logique. Je décrirai cela par la mise en branle d'un processus, ayant sa dynamique propre. 3 aspects de celle-ci ont retenu mon attention. D'une part l'amorce, par un motif, petite histoire racontée aux enfants dans le but d'introduire le dispositif, de présenter les tâches à remplir

(but, consigne, règle du jeu). Mais les diagrammes sont des outils de représentation, et c'est un usage qu'on voudrait que les élèves s'approprient. On les y introduit alors par la symbolisation picturale des classifications. Le dessin laisse plus de champ à la pensée que les manipulations d'objets. Et les diagrammes sont bien sûr picturaux. Enfin, et comme pour tout enseignement, l'apprentissage doit se manifester chez l'élève par une augmentation de ces performances. J'examinerai donc la complexification progressive des tâches proposées aux élèves et montrerai comment elle procède des différentes facettes évoquées dans mon analyse.

3.4. Progression didactique. Amorce, le motif.

Le lecteur se souvient des motifs décrits au chapitre I, les coccinelles grimant le long d'un arbre de classement. Ces motifs sont bien superficiels et n'entrent en ligne de compte que momentanément. Le maître aura donc aussi tâche à ce que l'on ne s'appesantisse pas trop longtemps sur l'explication de ces histoires. De toutes manières, la difficulté principale tient toujours à la présentation des règles du jeu, et leur caractère contraignant. Il s'agit de s'y tenir, ce qui va en général "forcer" la réalité suggérée par le motif.

Finalement, la meilleure justification de ces règles est que l'on est en classe de mathématiques. Ceci signifie entre autre que l'attention de tous doit se centrer sur les activités en cours et le déroulement du jeu plutôt que sur les prétextes. Exemple, arbre dichotomique de tri (jeu ER 12 pg 14). On veut trier des cartes. Un premier tri est fait qui sépare la collection initiale en deux parties. Il s'agira ensuite d'itérer les tris dichotomiques sur chaque sous-collection avec, clause bien singulière pour un sujet naïf, la règle d'effectuer ces tris selon les mêmes critères. A un même "étage" toutes les sous-collections sont triées selon le même attribut. Ceci bien sûr afin de produire

un arbre dichotomique et avec pour condition l'indépendance des critères choisis. Ceci n'est justement pas le cas général des tris usuels.

Donc l'élève devra progressivement oublier cette histoire prétexte. Le maître procédera de façon diverse : questionnant les élèves sur ce qu'ils ont fait leur demandant de le dessiner ou encore mettant l'accent sur les performances de ceux-ci. Autre façon de procéder : varier les jeux et les histoires prétextes.

Les élèves de la classe étaient réunis dans la salle de gymnastique. Il y avait les garçons, les filles et certains élèves portaient un ballon. La maîtresse introduisait le diagramme de Carroll. Elle se proposait de considérer les attributs : garçon/fille, avec ballon/sans ballon. Elle motive les étiquettes par l'idée qu'il faudra se souvenir de la classification. Les étiquettes proposées ont été celles représentant garçon/fille. Puis leur sens s'est un peu modifié pour garçon sans ballon/fille sans ballon. Les élèves dessinèrent alors deux autres étiquettes garçon avec ballon/fille avec ballon. Donc 4 étiquettes qui représentaient 4 types d'élèves. Bien sûr la maîtresse aurait préféré qu'ils proposent : garçon/fille et avec ballon/sans ballon et que leurs croisement doivent être lus sur le diagramme. Mais comment leur dire ? Que cette façon est plus simple ? Ce n'est pas vrai. En recourant à un diagramme à 3 ou 4 critères (d'où 6 étiquettes ou 8 étiquettes pour 8 ou 16 éléments et donc une économie) ? Ou encore en disant que c'est plus vite dessiné ?... Mais une fois que, poussant le relais de la maîtresse, j'eusse introduit le second étiquetage G/F avec B/sans B, un élève dit : "Faudrait voir si on s'en souvient dans 100 ans ". Nous rappelant ainsi le prétexte évoqué par la maîtresse, et suggérant que de ce point de vue la solution que nous proposons n'était peut-être pas optimale (perte d'information).

3.5. Progression didactique. Le passage aux représentations picturales.

La méthodologie romande consacre un certain nombre de commentaires à la symbolisation. Examinons sa conception de la question.

1^o citation, page 1 1^{ère} éd. (pg. 2 dans la 2^{ème} édition)

Former une collection d'objets, c'est-à-dire les grouper, est une activité naturelle qui apparaît tôt dans le développement de l'enfant et qui se présente fréquemment dans la vie quotidienne (famille, groupe, tas, paquet, boîte, corbeille, etc.). Il s'agit donc de tirer parti de cette tendance afin de permettre à l'enfant de construire un raisonnement logique et d'approfondir la notion de classement.

Il va de soi que l'étape de manipulation d'objets est la plus importante à l'âge qui nous préoccupe. Cependant, afin de pouvoir communiquer entre eux, les enfants parviendront à sentir la nécessité de s'exprimer avec précision, de trouver des moyens de représentation adéquate, d'établir un certain symbolisme susceptible d'être compris par tout le monde. (...).

La maîtresse utilisera la terminologie correcte ("... est un élément de..." et "... n'est pas un élément de ...") mais ne l'imposera pas aux enfants. Il est en effet primordial que ceux-ci expriment leurs idées dans un langage qui leur est propre, pour autant qu'il n'y ait pas d'erreur mathématique. On dira : "l'ensemble des blocs rouges" et non : "l'ensemble rouge".

2^e citation, page 8 1^{ère} éd. (pas repris in extenso dans la 2^{ème} édition)

Aborder l'emploi de symboles avec de jeunes enfants est une opération délicate. Il ne convient en aucune façon d'imposer telle ou telle représentation symbolique : on laisse aux enfants la possibilité de créer ou de choisir ce qui est à leur portée. De cette manière, chaque nouvelle situation amène de nouveaux symboles.

D'autre part, on assiste à une évolution dans la représentation du symbole. D'un dessin ressemblant de très près à l'objet qu'il désigne, l'enfant passe à des notations de plus en plus dépouillées, et finit, beaucoup plus tard, par tracer un signe quelconque.

Dans des jeux de partition et de classement, le remplacement des boîtes ou des vraies cordes par des traits de crayon constitue une démarche vers l'abstraction que certains enfants assimilent difficilement.

Dans ce dernier cas, il est très important de ne pas perdre de vue que le symbole est là pour aider à mieux se représenter un ensemble d'objets réunis par décision ou par choix d'un critère

de classement. En aucun cas la corde ou la plage délimitée par le trait ne constitue l'ensemble, pas plus d'ailleurs que les dessins représentant les éléments.

Il faut également que l'enfant sente de lui-même la nécessité du recours au symbole. Cela signifie que les situations présentées lui permettent d'en faire la suggestion.

Fin de citation.

Ainsi donc, par l'entremise de la référence aux stades cognitifs, manipulation et représentation sont opposés. Les symboles servent à s'exprimer et à communiquer. Ils sont conventionnels et les échanges entre pairs (débats organisés par le maître) vont les amener à la précision. L'activité symbolique n'est pas réellement prise en compte comme constituante des activités logiques. Il n'est non plus fait mention de l'activité symbolique des enseignants qui sans cesse désignent, montrent et illustrent les notions qu'ils introduisent. Cette ambiguïté se retrouve telle quelle dans les jeux. Ainsi pour reprendre l'exemple de la méthodologie, les élèves jouent avec des objets qu'ils placent dans des boîtes. L'intéressant est que les éléments placés sont alors cachés aux yeux des élèves, mais que leur position est bien déterminée. L'étiquette est du coup motivée comme mémoire. Enfin les relations intérieur/extérieur sont clairement signifiées. Mais ces qualités ont leur revers. Les boîtes restent irrémédiablement opaques et ne conviennent pas à l'illustration des relations ensemblistes : inclusion, intersection, réunion. Cette limitation va être levée par le passage au modèle de Venn tandis que les élèves sont appelés à représenter par un dessin ce qu'ils ont fait sur les boîtes ou les cordes. Dans beaucoup de cas, l'enseignant identifiera purement et simplement ces dessins à des diagrammes. Il oublie alors que les diagrammes ne sauraient justement pas être la représentation d'entités concrètes. Sa conception est basée sur l'illusion consistant à ne pas se rendre compte que les boîtes (ou les cordes) sont elles-mêmes déjà des symboles représentant les classes logiques. Ce que l'élève doit saisir dans tout cela, c'est que les diagrammes contiennent des éléments comme des boîtes contiennent de vrais objets et que les activités de classement sont une sorte de rangement. Le dessin, là encore, n'a été qu'un prétexte pour introduire une forme particulière d'illustration. Puis on ne parlera plus des éléments, les tâches ne porteront plus sur le remplissage mais sur le coloriage (ou hachurage) des plages du

diagramme (4e primaire).

Ainsi, la forme des représentations des élèves sera-t-elle vite imposée. L'élève, lui, sera pris entre ses propres représentations et les représentations conventionnelles. Devant apprendre une image, il se ramènera à certains indices dont la présence déclenchera des activités spécifiques. De plus, le maître, dans ses explications s'appuyera sur les mêmes indices, ou en ajoutera d'autres au moyen de marques. Il pourra ainsi indiquer à l'élève l'ordre dans lequel celui-ci devra procéder, lui simplifiant la tâche en l'aidant à organiser son travail. Toutes les marques n'ont pas la même importance et certaines ne sont là que très temporairement ; ces marques, comme nous l'avons dit pour les systèmes de représentation, obéissent à des règles précises ; enfin toutes ne seront pas forcément lues par l'élève, car elles ne seront pas assimilées aux activités mobilisées chez lui.

3.6. Progression didactique. Complexification des tâches.

Je vais décrire maintenant les principales directions de la complexification des tâches suivies par le programme. Ce point est lié avec ce qui vient d'être dit car les enseignants jouent sur les multiples facettes décrites ci-dessus pour affiner la progression et adapter l'enseignement aux difficultés du moment. Notons cependant que le maître garde tout au long du processus la référence à l'interprétation d'origine, ce qui lui permet de ne pas perdre de vue son objectif. Cette signification est même en général si forte qu'elle occulte à ses yeux la nature de ses interventions. Il sait qu'il intervient et juge empiriquement du résultat, vérifiant souvent que ses intuitions étaient correctes, sans savoir exactement ce qu'il fait.

Je vais me baser sur la première édition des méthodologies romandes lère, 2ème année primaire pour la numérotation des jeux. La seconde édition n'a pas apporté de changements quant au contenu. La présentation par contre a subi un profond remaniement.

Les jeux sont de 2 types qui consacrent les deux symbolisations les plus importantes : langage et diagrammes. Au départ, jeux de description, jeux oraux de combinaisons des attributs, jeux de devinettes, descriptions structurées. En définitive les tâches descriptives et de placement seront associées dans un même exercice : description du matériel et découverte des attributs qui y pré-sident puis placement.

Je ne m'attarderai pas sur les jeux de description bien connus et qui sont du type jeux de famille ou jeu de portrait. La tâche est basée sur une correspondance perceptive - descriptive et la mémoire est fortement sollicitée. La systématique des combinaisons d'attribut devrait faciliter la tâche aux élèves et aboutir à des stratégies gagnantes, donc s'imposer facilement dans un contexte compétitif. Par contre celui-ci est, pour le maître, d'un contrôle peu aisé. Ainsi certains aléas interviennent et font entre autre que, passé un certain cap, la stratégie la plus efficace est la devinette, ou du moins apparaît-elle ainsi aux joueurs qui préfèrent risquer que jouer selon un plan. De plus, un risqueur entraîne d'autres. Il est même apparu qu'une élève, Céline, ait demandé à la maîtresse de pénaliser de tels "tricheurs".

Ceci étant dit, je passe à l'examen des divers modes de progression des tâches mis en oeuvre dans cet enseignement. Il y a progression pensée par les méthodologues et les enseignants. Ainsi par exemple, il paraît plus simple d'initier les élèves en leur demandant de se placer eux-mêmes selon un caractère qui leur est propre. Mais ceci a ses limites. De tels exercices ne nécessitent pas une vision globale du matériel. Pour l'interprétation de la classification il faut donc passer à des classements d'objets. J'ai déjà mentionné et analyserai

encore l'importance du dédoublement du sujet entre son activité et la signification du produit final. Voici maintenant une énumération de ces points de progression :

1^o Passage d'objets réels aux dessins, avec, comme intermédiaire, les cartes imagées ou les gommettes autocollantes.

2^o Passage de matériel de fortune au matériel structuré. Voir le chapitre I pour la promptitude de ce passage. Dans la méthodologie, on passe au matériel structuré dès le jeu 3. A la fin de la 2e année primaire, on commence à classer des nombres.

3^o Progression selon la position du sujet face au dispositif. Et ceci se dédouble.

a) Position face aux éléments. L'élève est lui-même un élément, il se place selon ses caractères propres, ou selon ceux d'objets qu'il porte, puis il dépose ces objets, puis place des objets en ayant devant lui l'ensemble de la collection. Objets familiers où il peut se projeter (image d'enfants, d'animaux domestiques, de jouets...) ou objets "mathématiques" (formes géométriques simples etc...). Enfin il doit produire lui-même les éléments à classer : soit en copiant une série de figures données, soit en dessinant sans modèle à partir des attributs proposés ou, s'il s'agit de nombres, selon les définitions de leurs propriétés.

b) Position face au diagramme. Le sujet complète un diagramme donné vide d'éléments, ou, au contraire, il place le diagramme sur des éléments donnés, ou encore plus difficile il doit retrouver les critères qui ont présidé à un classement donné. Ceci prend la forme, usuelle en pédagogie, d'exercices lacunaires.

Remarquons qu'il n'est en général pas demandé aux élèves de réaliser une classification en entier, selon leur idée (Ceci n'est jamais exigé en individuel).

4^o

a) Unicité de place. Au début cette règle est implicite, passe inaperçue car elle est sous-jacente aux conditions générales du jeu. L'élève doit se placer à l'endroit qui lui échoit. La progression va dans le sens d'une prise en charge de cette règle par le sujet avec les dessins de figures ou le classement des nombres. En effet si on hésite entre deux places, il est toujours possible, par dessin, de dédoubler un élément, un à chaque endroit. Cela est bien sûr interdit par la signification des diagrammes.

b) Exhaustion. Il en est de même avec cette règle. Celle-ci n'apparaît pas dans le jeu où les élèves se placent. Chacun s'occupe de lui seul, mais comme tous les élèves vont se placer, l'exhaustion s'en trouve réalisée, laissée à la gestion du maître ! A la fin de la 2e année primaire cependant une des exigences principales pour les tâches de classement est l'exhaustion.

c) Les jeux ER7 - présentation de la plage complémentaire - et le jeu ER18 - présentation du croisement des cordes pour l'intersection - exigent l'intégration de ces deux règles. Le maître essaye de mettre l'élève devant deux problèmes. 1^o Que faire des objets qui ne répondent pas à l'attribut considéré ? On joue ici sur l'exhaustion qui oblige à prendre en considération ces éléments. Puis un tour de passe passe au niveau du langage permet de déclarer : "Les éléments qui ne sont pas rouges sont des éléments non-rouges". 2^o Où mettre, quand on considère en même temps l'ensemble des carrés et l'ensemble des blocs rouges, un bloc carré et rouge ? On joue ici sur l'unicité de la place qui va obliger à croiser les ensembles.

5⁰ La progression porte aussi sur la nature des éléments classés, et de celle des attributs considérés. Dans les matériels structurés un élément est constitué d'une collection de traits. Jouer sur la présence ou l'absence d'un trait distinctif revient à assimiler la conjonction à une concaténation de traits, une énumération d'adjectifs la décrit. On passe à des caractéristiques à 2 valeurs, à la négation, puis à des caractères à plusieurs valeurs : couleur/ forme. Dès lors conjonction et concaténation ne correspondent plus. Pour un caractère donné, exemple la couleur, toutes les valeurs sont complémentaires et leur conjonction aboutit donc à une intersection vide. De plus, pour un diagramme de Carroll, les cases ne vont plus contenir un nombre fixe d'éléments (Par exemple, on aura 4 carrés bleus dans une case, 8 carrés dans une autre case, 12 blocs bleus dans la 3e case et enfin 24 blocs dans la dernière case). Ces difficultés sont notées par la méthodologie : "Le diagramme de Carroll est particulièrement difficile à utiliser par les enfants lorsque le caractère se présente sous 3 valeurs ou davantage, c'est-à-dire lorsqu'il implique nécessairement l'emploi de la négation d'une propriété". (Méth. Rom. 1ère année pg. 20). Sous-entendu : un diagramme de Carroll est un type particulier de tableau à double entrée, il ne possède que 4 cases. (ou 2^n cases si n = nombre de caractères considérés).

3.7. Conclusion sur le projet et sa mise en oeuvre.

Le lecteur se rappellera la position de Hans Freudenthal qui concevait les "patates" de Venn comme la peinture des ensembles. Malheureusement, le lien n'est pas aussi direct et naturel entre le concept abstrait et l'illustration que sont les diagrammes. Dans cet enseignement, l'activité symbolique n'est pas prise comme partie intégrante des traitements logiques. Cette critique est centrale. L'idée d'Euler, reprise par Venn et Carroll, est de transporter les trai-

tements logiques dans un modèle spatial. J'ai montré que l'enseignement des premières années primaires (en fait cela va jusqu'en 4e) se limitent à la présentation du modèle. Celui-ci se voit coupé des usages qui le justifient ultérieurement. Donc l'ensemble-diagramme n'est encore qu'une formulation (et non pas un outil). Par une sorte de retournement inhérent à la transposition didactique, cet aspect est mis à profit pour révéler la logique aux élèves. Un enseignement est mise en place. Ce qui au départ n'est qu'une image se justifiant par la simplification et la schématisation de certaines opérations devient toute la réalité proposée en classe et tour à tour méthodologues, enseignants puis élèves tombent dans une centration excessive sur les tâches scolaires. La sémantique revient au galop (par les histoires prétexte, puis le contrôle des descriptions en langue naturelle, puis par les marquages symboliques), alors que Lewis Carroll proposait l'usage de ses diagrammes dans l'enseignement de la logique pour l'évincer ! Malheureusement, il n'y a plus un seul sens mais de multiples, selon les références : l'activité elle-même, le contexte de l'échange didactique avec réussite-erreur, ou encore l'image conforme à l'illustration originale. On voulait révéler la logique, et voilà qu'on trouve partout des logiques. Il y a confusion entre action et formulation.

Je vais donner un exemple, amusant par le retournement qu'il présente. Je vais tout d'abord citer la présentation du jeu ER18 introduisant l'intersection des ensembles par le diagramme de Venn (pg. 28-30).

CONJONCTION D'ATTRIBUTS
 INTERSECTION D'ENSEMBLES
 DIAGRAMME DE VENN

- 140 -

JEU 18

Introduction de l'intersection d'ensembles à l'aide du diagramme de Venn.

Matériel: 24 surfaces découpées ou dessinées:

- grande, petite;
- ronde, carrée, triangulaire;
- rouge, jaune, bleue, verte.

Si l'on désire travailler collectivement et que la classe comprend plus de vingt-quatre enfants, on peut réaliser un matériel comportant 27 (3.3.3), 32 (4.4.2) ou 36 (4.3.3) éléments.

- a) La maîtresse dispose sur le sol deux longues cordes nouées et, comme dans le JEU 17, demande aux enfants de proposer une partition de tous les élèves de la classe.
- b) Les enfants qui possèdent un bloc carré se placent dans une corde; ceux qui possèdent un bloc rouge se placent dans l'autre.

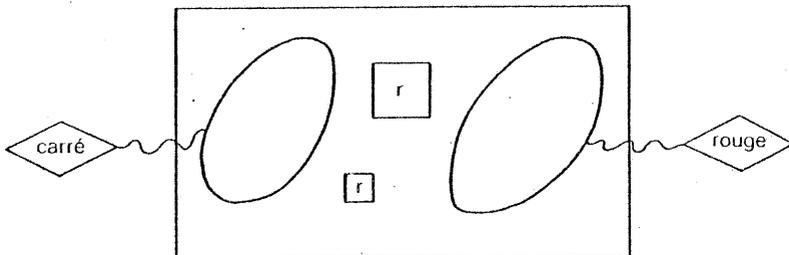
Il n'y a aucune difficulté pour les élèves qui ont:

- un bloc carré et non rouge;
- un bloc rouge et non carré;
- un bloc non carré et non rouge;

en revanche, les enfants qui possèdent un bloc **carré et rouge** sont embarrassés.

On observe souvent les réactions suivantes:

1. Les enfants font la navette d'une corde à l'autre puis se placent entre les deux:



CONJONCTION D'ATTRIBUTS
 INTERSECTION D'ENSEMBLES
 DIAGRAMME DE VENN

- 141 -

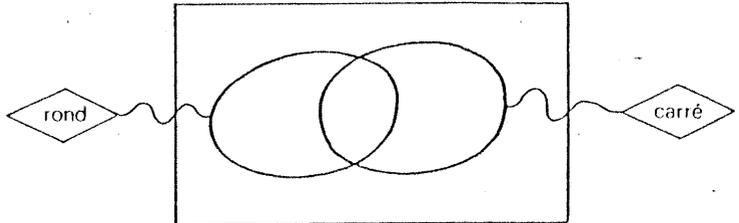
notes
 personnelles

L'exercice consistant à faire découvrir aux élèves le critère de classement choisi par la maîtresse et à placer les étiquettes est difficile et ne doit pas être exigé de tous les enfants.

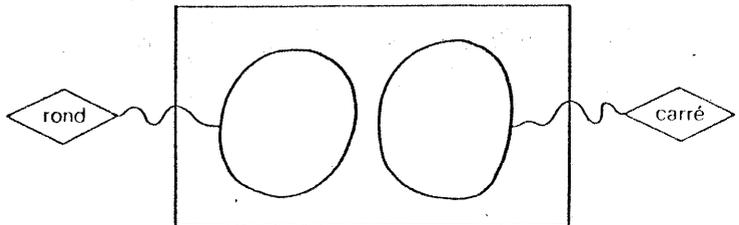


L'exercice suivant permet de contrôler dans quelle mesure l'enfant n'applique pas uniquement un mécanisme (celui qui consiste à croiser les cordes dans toutes les situations et à toujours placer des éléments dans toutes les plages) mais réfléchit à ce qu'il fait.

La maîtresse présente, par exemple, la situation suivante:



On constate généralement que les enfants veulent absolument placer des éléments dans l'intersection et que, même lorsqu'ils parviennent à raisonner correctement, ils sont gênés par la présence de la plage vide. Ce n'est qu'à un degré ultérieur qu'on parviendra à leur faire découvrir que la représentation ci-dessus peut être ramenée au diagramme suivant:

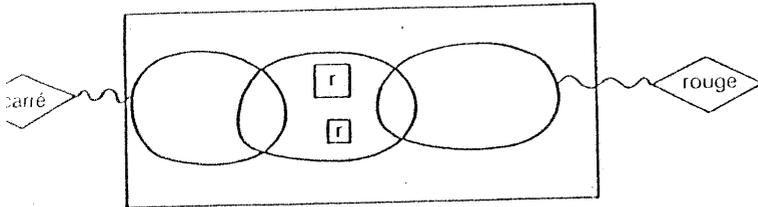


CONJONCTION D'ATTRIBUTS
 INTERSECTION D'ENSEMBLES
 DIAGRAMME DE VENN

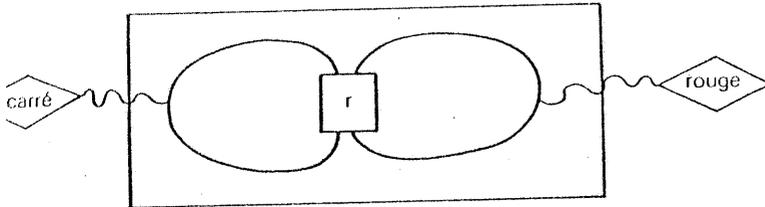
- 142 -

2. Ils proposent d'ajouter une nouvelle corde:

notes
 personnelles

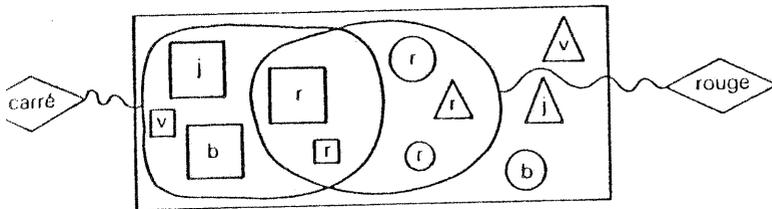


3. Ils rapprochent les cordes et mettent un pied dans un domaine et un pied dans l'autre:



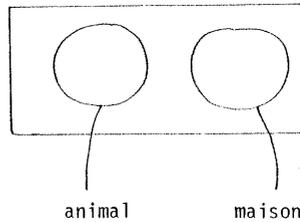
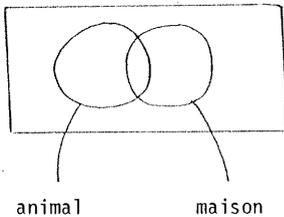
Dans chaque cas, on fait remarquer aux enfants qu'ils ne respectent pas toutes les consignes. On reprend la leçon une semaine voire quinze jours plus tard si cela est nécessaire, et aussi longtemps que la solution n'a pas été découverte.

Lorsque les élèves sont parvenus seuls à la situation ci-dessous:



on poursuit, comme cela a déjà été fait pour les représentations graphiques précédentes, c'est-à-dire en prenant garde à varier le matériel, ainsi que la forme et la nature des questions.

Comme déjà décrit, on joue sur l'unicité de la place des éléments pour introduire comme une nécessité naturelle, le croisement des cordes des ensembles. La plage intersection est ainsi désignée à l'attention de tous. Il faut ensuite corriger le tir, ce qui par rapport à la démarche correspond à une inversion (il s'agit de disjointre les ensembles). Une fiche d'exercice de 2e année (ER21 de la 1ère édition, cette fiche a été retirée dans la seconde édition) propose d'illustrer l'intersection vide. Il est proposé de remplir successivement les 2 diagrammes de Venn suivants, au moyen de gommettes autocollantes (2 fois la même collection d'éléments à classer).



Parmi les gommettes, l'une représente une tortue (était-ce voulu?). Tous les élèves de la classe observée placent la tortue dans l'intersection (1er diagramme). Comment procèdent-ils alors au 2e diagramme ? Un premier groupe d'élèves place la tortue avec les animaux, considérant sans doute que la tortue est avant tout un animal. Un second groupe a voulu exprimer à nouveau cette idée d'animal-maison, et s'adaptent. La plupart d'entre eux collent la gommette à cheval sur les 2 ensembles (c'est possible) : , un des élèves place la gommette bien au milieu des diagrammes . Le diagramme, et les relations spatiales, sont utilisés à fin expressive. C'est montre d'une compréhension certaine, il est tout à fait légitime de définir la tortue comme un animal-maison. Mais ce faisant, les élèves retrouvent chacune des réponses intermédiaires évoquées dans la description du jeu ER18. Sont-ils en train de désapprendre ? (Ils vont à rebours de la progression organisée par ER18).

4. Interprétation des tâches et des productions scolaires.

4.1. Des productions scolaires malgré tout.

Dans l'examen de la transposition didactique, j'ai montré la transformation de l'objet d'enseignement. Ce programme consiste en l'illustration de notions construites par les logiciens. Par des présentations adaptées aux élèves, il essaye de les introduire aux raisonnements logiques. Dans les commentaires et la présentation des jeux et exercices, tout découle d'une signification et de formes définies à priori. Cet enseignement veut révéler la logique aux élèves mais est en fait prédéterminé. Nulle part il n'est fait mention des activités que cela demande aux élèves, il n'y a pas d'analyse de tâche, les activités de placement, pourtant centrales, sont à peine mentionnées.

Dans un premier temps, je devais rendre compte de la provenance du contenu enseigné ; j'ai opté pour une description "descendante". Mais maintenant, je me trouve à un tournant. Il s'agit de rendre compte, au delà de l'impossibilité exprimée jusqu'ici, de ce qui est produit en classe. Pour cela je vais passer à l'analyse des tâches.

Les exercices proposés aux élèves sont des exercices lacunaires. Le sujet doit, par le placement des éléments, des cordes ou des attributs, reconstituer l'illustration diagrammatique. Je proposerai alors une première analyse adoptant le point de vue de l'élève qui effectue sa tâche, ce sur 3 exemples. Puis je passerai à une analyse de la représentation des éléments et des classes logiques. J'en viens alors à ma thèse qui consiste à considérer que la nature des diagrammes est d'être des formulations (à ce niveau du programme du moins) et qu'il s'agit de les considérer comme tels dans le travail avec les élèves. (Ce travail de formulation est, dans l'acceptation courante, réservé au seul maître, et, en tant que

tel, pas analysé. L'enseignant est supposé savoir faire cela).

Je concluerai en donnant ma réponse aux questions suivantes : Comment interpréter les productions des élèves et en tirer parti dans l'échange didactique ? Comment contrôler les significations attribuées par les élèves ? Bien entendu, je reste dans le cadre de l'enseignement tel qu'il est conçu ici. S'il s'agissait de prendre position sur la question de l'enseignement de la logique, je proposerais d'autres méthodes d'approches. Par exemple, celle de Guy Brousseau et Jacques Peres de l'IREM de Bordeaux. Mais ceci sort de mon sujet.

Dans le programme conçu par les méthodologues, les rapports entre éléments attributs et place ont été schématisés à l'extrême. L'idée directrice de mon analyse est que les attributs sont des invariants se manifestant par la variation des éléments et signifiés par la place qu'ils occupent. La place n'est qu'un signifiant, sans signification propre. Elle indique les ensembles que l'illustrateur a voulu mettre en évidence. L'acte qui consiste à penser une collection d'éléments n'est pas observable bien sûr, il s'exprime par un acte de regroupement dont l'élève pourra lire la trace (positions) sur le diagramme. Mais globalement, le diagramme exprime à la fois une réalité (un univers de référence) la définition de propriétés discriminantes que l'on a voulu mettre en évidence et éventuellement *faire* contraster (ainsi forme et couleur vont contraster). L'illustrateur a donc fait un tri parmi toutes les relations potentielles dans cet univers. Il va guider l'élève par la donnée d'indices d'une part, et par des indications sur l'ordre dans lequel il convient d'effectuer certaines opérations. Il y a donc indication d'algorithme.

4.2. Première tâche : dessiner les cordes des ensembles.

Des figures sont dessinées dans un cadre, il s'agit d'entourer deux ensembles non disjoints. Consigne : entourer d'un trait de crayon les éléments possédant un ou plusieurs attributs donnés.

La variation de l'attribut dans les différents éléments correspond, via l'illustration, à la variation de la position des éléments. La corde est un chemin reliant les éléments équivalents tout autant qu'elle sépare les éléments discriminés. Le sujet doit garder toujours le même point de vue, c'est-à-dire maîtriser cette variété d'éléments.

Quand il s'agit de reconstituer les cordes des deux ensembles non disjoints, il faut effectuer un premier tracé puis reprendre cette activité d'un autre point de vue en prenant garde de reconsidérer tous les éléments. Le mieux serait d'oublier momentanément la première tâche. (on pourrait faire réaliser cela à l'encre sympathique). Ceci ne correspond pas tout à fait à la réitération d'une classification sur les éléments non rassemblés par la première action. Pour ne pas confondre ce qui est demandé avec une classification partitive, il faut quasiment vouloir constituer deux ensembles non-disjoints. C'est-à-dire avoir une image, même vague, du résultat auquel on est censé aboutir. Or le schéma d'intersection est souvent montré aux élèves. De plus, pour des raisons pratiques de lisibilité, l'illustration présentera toujours les éléments de l'intersection en position médiane (sur le diagramme). Un algorithme s'impose alors facilement. Il s'agit de commencer les cordes par les éléments de l'intersection (en quelque sorte un mouvement centrifuge)



4.3. Deuxième tâche. Placer dans un diagramme des éléments donnés.

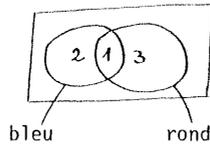
Le second type de tâche est de loin celui qui est le plus exercé en classe. Le diagramme de Venn est donné, vide d'éléments. Ces derniers sont présentés en liste, hors du diagramme. L'élève doit indiquer la place de chacun, soit par un déplacement de l'élément, soit par la reproduction de ce dernier dans la bonne position.

Règles implicites : unicité de la place et exhaustion du classement.

Je vais examiner les rapports entre élément, attributs et place. Les ensembles sont donc donnés par une "patate" délimitée par une "corde" à laquelle est attachée une "étiquette".

- 1^o Quand il n'y a qu'un ensemble, et une seule étiquette, il est facile de placer les éléments. On les prend un à un, on les examine par rapport à l'étiquette (mise en relation élément-attribut) et on les place. Quand il y a deux ensembles, l'étiquette n'indique pas tout, et chaque élément doit être mis en relation deux fois, avec chaque étiquette. Vu de cette façon le remplissage passe par la combinaison de relations de convenance et d'exclusion avec les attributs.

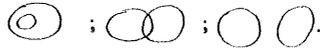
- 2^o Dans la mesure où les attributs sont des entités "absolues" (dont la définition n'est pas discutée), la mise en relation : élément \rightarrow attribut est univoque, positivisée. Elle se distingue en ce sens des relations de comparaison : élément \leftrightarrow élément. Du point de vue de ces relations, la lecture du diagramme en quatre cellules séparées (soulignée encore par la tâche de placement elle-même) ne simplifie pas les choses. Prenons l'exemple suivant :



Tous les ronds ne sont pas mis ensemble ; les ronds bleus sont mis à part, tandis que les rouges, verts, jaunes... restent ensemble. De même pour les formes bleues. Il y a donc un traitement dyssymétrique des éléments selon les attributs. Un rond bleu et un triangle bleu peuvent être exclus de la plage (3) pour la raison qu'ils sont bleus, mais, malgré cette équivalence, ils ne seront pas placés au même endroit. La différence tient à ce qu'il y a 2 raisons pour exclure le triangle bleu de la plage (3) (il est bleu et c'est un triangle) alors que seule sa couleur empêche de rond bleu de s'y trouver. Donc les mises en relation entre les éléments

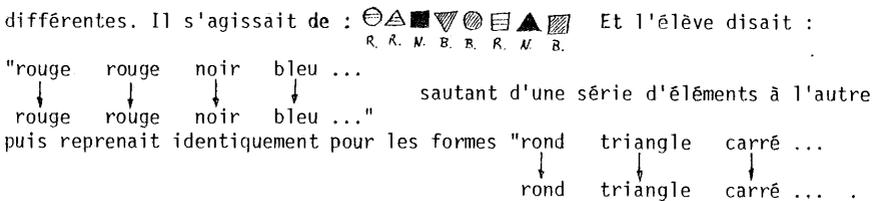
ne sont pas simples et se font en deux temps. Ce qui, dans un premier temps peut être considéré comme équivalent (par convenance ou inversement par exclusion) ne le sera plus dans un second temps. Vu au niveau des éléments, c'est assez "casse-tête". On retombe sur la négation. L'abstraction préalable (aux traitements) des attributs et leur mise en évidence positive dans le modèle de placement (étiquette) permet de contourner cette difficulté. Par ses consignes et ses explications l'enseignant aura donc tendance à dissuader les élèves de faire des comparaisons élément \leftrightarrow élément.

Remarques : a) Ces considérations sont incontournables. Bien sûr les enseignants - et méthodologues - font montre d'astuces inouïes pour enseigner. Par exemple, il y a un jeu où on fait cheminer des jetons dans un diagramme de Venn et où à chaque passage de "frontière" (corde) le jeton change une de ses propriétés. On retrouve une logique proche de celle décrite ici. Par exemple de la plage (3) à la plage (1) l'élément rond change de couleur puis de la plage (1) à la plage (2) il change de forme. Il n'y a pas de chemin direct entre la plage (3) et la plage (2).

b) Le choix, effectué dans cette tâche, de "rejeter" les relations élément \leftrightarrow éléments et de positiviser le rapport élément \leftrightarrow attribut n'est pas le seul possible pour l'interprétation du diagramme. Une lecture résolument "ensembliste" consistant à ne voir dans le diagramme  que deux ensembles (et pas 4 plages) fait mieux l'affaire. (C'est ce que Denys fait en ne concevant les 4 plages que comme produites par la considération des 2 ensembles. Cf. chap. IV, 6 pg. 204). Ceci nous amène alors à penser les diagrammes comme exprimant une relation entre deux ensembles, relation elle-même intermédiaire entre l'inclusion et l'exclusion : .

inclusion intersection exclusion

- 3⁰ Remontons cependant dans le déroulement de la tâche pour voir que les comparaisons éléments \leftrightarrow éléments y ont leur place. Dans la "lecture" des éléments hors diagramme, lors du repérage des attributs et dans l'interprétation même de ceux-ci (à quelle réalité ces définitions se réfèrent-elles ? Qu'entend-on par rond, rouge, mince, grand ? etc...) le sujet fait forcément des mises en relations entre les éléments donnés. Exemple : devant comparer deux séries de figures pour voir si elles étaient identiques, un élève faisait tout d'abord la correspondance des couleurs, puis, reprenant le tout, faisait la correspondance des formes. Ces deux séries étaient identiques mais disposées sur deux fiches différentes.



A priori, pour ces mises en relations, tout est possible. Il s'agit de trier celles qui seront pertinentes. Considérer les seuls caractères rond, bleu, amène à ne pas différencier rouge, vert, jaune ... ni carré triangle, ovale... Pour cela il est nécessaire de se baser sur des attributs non ambigus, absolus qui ne seront pas comparés entre eux. Mais il y a là un point délicat vu que ces attributs n'ont de sens qu'en référence à la réalité traitée. L'habitude, l'utilisation en classe de matériels standard aidera. Le maître y contribuera aussi en proposant aux élèves une tâche préliminaire de description des éléments. Ce qui est déjà une activité de classement.

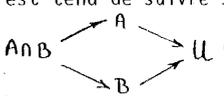
- 4⁰ C'est l'intégration de cette description avec la classification disjointe qui a toujours posé problème. Je considère la description orale comme une classification partitive. Un tel type de classement consiste à faire des tas et à réitérer l'opération sur les éléments restant ou encore sur les tas constitués pris comme totalité. Cela se termine lorsque l'on estime avoir mis assez "d'ordre"

dans la collection de départ. Il y a exclusion des tas entre eux, on se permet alors des classifications qui ne sont pas toujours symétriques ou "totalement ordonnées". On peut concevoir comme tas : les ronds, les carrés puis les bleus (du reste). La règle d'exhaustion qui veut que dans les tas il y ait tous les éléments d'un genre donné n'est pas obligatoire. On ne peut d'ailleurs plus la suivre si on constitue des sous-partitions. Les tas ne sont pas des ensembles. Il semble bien, au vu des productions, que beaucoup d'élèves appliquent de telles procédures partitives pour remplir leurs diagrammes.

Remarque : Le classement partitif est exercé en classe par les jeux de description orale. Chez les élèves, ce type de procédures progresse au cours des 2 premières années primaires, dans le sens d'une mobilité croissante: possibilité de faire les partitions dans un ordre quelconque, selon des dimensions variées, et réitéré en partitions successives de plus en plus fines pour aboutir aux classes singulières. On voudrait d'ailleurs que les élèves se basent pour cela sur les diagrammes en arbre de classement. Et montrer en particulier que, si on procède jusqu'aux classes singulières, l'ordre de partitions importe peu. Mais malheureusement, l'arbre n'est pas pour les élèves une machine à trier. On a vu au chapitre I que les élèves ne comprennent pas le classement final auquel on aboutit comme étant produit par l'ordre des étiquettes. L'enfant ne saisit pas le rapport entre le dispositif qu'on lui présente et le procédé qu'il met en oeuvre pour résoudre sa tâche. (Le même phénomène, exactement, se produit avec les machines numériques).

- 5⁰ Mais, procédures partitives et remplissage d'ensembles non-disjoints peuvent être intégrées. Ceci suppose que l'on procède dans l'ordre de l'inclusion des ensembles : $A \cap B$, A , B , et U (où U est l'univers référentiel). On commence par repérer les éléments de l'intersection que l'on place, puis on classe les éléments restant selon les attributs considérés (les ensembles sont maintenant dis-joints) puis le reste va à l'extérieur. Ça donne :



Mais celui qui désire aboutir à une réussite assurée est tenu de suivre strictement l'ordre du placement qui correspond à la maille $A \cap B$  (où U est l'univers de référence des éléments considérés).

Dans l'enseignement, la désignation répétée de la plage intersection et de la conjonction des attributs, fait que certains élèves appliquent spontanément cet algorithme. Dans d'autres cas il est enseigné par le maître.

- 6^o Résumé conclusif :

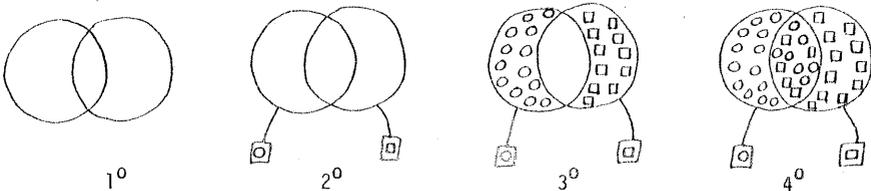
Ainsi donc, parmi les multiples mises en relation partielles d'élément à élément, la donnée des attributs-étiquettes en isole un petit nombre qui au besoin seront identifiées par un travail préliminaire de description des éléments du jeu. Dans ce contexte de placement, et par la fonction indicatrice de l'étiquette, on réduit la tâche à l'inclusion des éléments (un à un) dans les plages du diagramme. Ce qui ne revient pas au même que de traiter la réunion des éléments dans un endroit donné. Mais cette réunion est cependant lisible dans le résultat final du classement (quoique, pas forcément lue). Par contre, on ne traite pas l'exclusion des éléments, leur séparation. Esquivant ainsi, une fois de plus, les difficultés conceptuelles de la négation et la dualité ensemble/complémentaire. Les élèves peuvent alors adopter une conception du diagramme en classes disjointes et remplir leur tâche par des procédures partitives. De telles procédures sont, de plus, proches de celles qui sont mises en oeuvre dans une description orale des éléments. Ils sont en plus assurés de réussir leur exercice pour autant qu'ils procèdent dans l'ordre de l'inclusion de l'intersection $A \cap B$ dans les ensembles A et B. Tout ceci fait que même inexacts, les réponses des élèves sont très proches de la réponse correcte. (Il y a 4^n possibilités de placer n éléments dans 4 cases, mais l'éventail des productions des élèves ne représente qu'une fraction minime de ce nombre).

4.4. Troisième tâche. Déterminer les éléments à placer dans un diagramme.

Le dernier type de tâche dont je veux parler est le suivant : Le diagramme est donné, vide, avec les attributs-étiquettes. Les éléments à placer ne sont pas donnés. C'est à la charge de l'élève de les produire. Règles : unicité de la place bien sûr, mais aussi exhaustif : toutes les plages doivent être remplies, à moins d'une impossibilité logique.

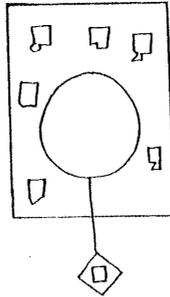
Ce dernier type de tâche est sous-estimé et rarement proposé aux élèves. De plus il est en général assimilé sans autres à la tâche décrite précédemment (la série des éléments est donnée). Et de fait, consigne, buts, dispositifs sont quasi identiques. Ce qui change cependant, c'est le rapport de l'élève avec la classification. Auparavant, la série d'éléments fournissait à l'élève une solide référence externe. Celui-ci comparait les éléments portés successivement à son regard. Ici, au contraire, le sujet doit se les représenter au préalable, ce qui suppose une opération de pensée avec ses règles. L'observateur va donc s'intéresser à la production des éléments. Comment l'élève procède-t-il pour multiplier les éléments ? A quel moment s'arrête-t-il dans cette production ?

La production se fera, par exemple, par la réplique de multiples exemplaires d'un même motif, ou encore par la variation des autres caractères. Pour un attribut positif, il s'agira de le maintenir constant au travers de la variation. Pour un attribut négatif, il s'agira d'éviter la qualité en question, de "broder" autour. Pratiquement, l'élève pourra remplir toute la plage du motif indiqué, comme dans l'exemple suivant, où un élève me montrait une intersection : Voici comment elle a procédé :



où les deux ensembles se mélangeaient dans l'intersection.

Autre exemple



Un élève, pour dessiner des non-carrés, faisait des figures presque carrées. Il commençait par dessiner 3 côtés \square , puis me regardait, et finissait par un détail qui les rendait non carrées : \square , par exemple.

Dans le premier cas, en outre, l'élève se base, pour arrêter sa production, sur un indice extérieur : l'ensemble est rempli jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de place pour les objets. (Ceux-ci sont tous identiques). Dans d'autres cas, ce qui peut arrêter la production est, par exemple, l'épuisement des crayons de couleurs (en général alors un exemplaire de chaque couleur).

Avec ce type de tâche le sujet a plus de choses à sa charge, mais aussi un pouvoir plus grand. Et cela peut le confronter à des difficultés nouvelles. Pour reprendre l'exemple de l'intersection : carré - rouge. La donnée d'un tel élément, à un seul exemplaire, oblige l'élève à le placer à un seul endroit, à choisir la plage qui convient le mieux. Bien sûr, l'élève peut, au cours de son travail, considérer celui-ci à différentes reprises, et de manière autre. Il peut aussi hésiter sur l'emplacement qui convient. Par contre, dans une tâche-dessin, il lui sera possible de produire (à son insu ou non), plusieurs copies du même élément. Il conviendra donc de faire comprendre à l'élève qu'il est nécessaire de contrôler son travail, pour que des éléments identiques ne se trouvent pas séparés.

4.5. La représentation des ensembles et des éléments.

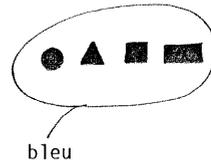
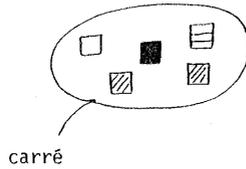
J'ai utilisé cette description comparative des tâches pour montrer l'importance, pour l'analyse, de la position du sujet face aux diagrammes et à la représentation des éléments. D'un côté, celui-ci se base sur les éléments qu'il

perçoit et qu'il décrit. Il se guide alors sur la variété présente. D'un autre côté, il pense les éléments et les ensembles, c'est-à-dire : il produit (ou reproduit) une variété d'éléments selon ses propres représentations. Il convient de ne pas trop s'attacher à vouloir opposer ces tâches mais de les considérer comme différents moments des traitements. N'oublions pas que ces derniers se déroulent dans une certaine durée au cours de laquelle le point de vue du sujet peut changer. Tout dépend aussi de la tournure que prend l'échange de l'élève avec le maître et des critères que chacun se donne.

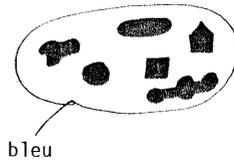
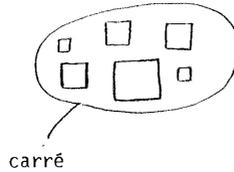
Mais il faut cependant rappeler l'importance essentielle de la représentation des éléments dans un diagramme. Car c'est bien là l'origine des tâches proposées aux élèves (les constructeurs de ces jeux, relayés par les maîtres, ont eux-mêmes pensé et illustré certains éléments et ensembles). C'est là aussi son aboutissement puisqu'on espère une appropriation des diagrammes par l'élève (comme outil de raisonnement); Il convient alors de noter les choses suivantes.

1⁰ Il est clair que jamais personne ne pourra énumérer tous les éléments d'une classe (p. ex. : les ronds) ni même les concevoir. Un caractère n'est de toutes façons pas absolu. Il s'inscrit dans un contexte donné comme propriété discriminante, se définit au travers d'une variation et s'oppose à d'autres caractères. Tout dépend bien sûr de l'intention de celui qui veut analyser ou illustrer. (Par exemple, dans les entretiens du chap. IV, je signifie aux élèves l'ensemble des ronds en faisant un tas de jetons ronds, toutes couleurs mélangées, puis je dispose autour les jetons non ronds en mélangeant formes et couleurs).

2⁰ S'il n'y a pas d'autres mises en relation que celles présidant à la production des figures, les attributs restent disjoints les uns des autres (temporellement). On peut donc produire plusieurs fois le même élément sans s'en rendre compte car il sera à chaque fois pensé différemment. On aura par exemple les deux ensembles :



3^o Mais, du simple fait d'être considérés ensembles, les attributs seront parfois "opposés" l'un à l'autre, par contraste. On aura ainsi par exemple

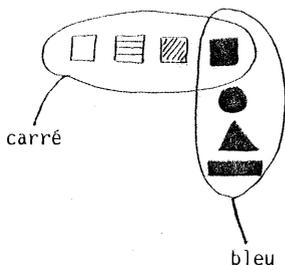


où le premier ensemble est compris comme un ensemble de formes abstraites, hors coloriage, tandis que le second est un ensemble de formes coloriées en bleu.

Dans ces derniers exemples, la reproduction d'une même forme (petit carré par ex.) en deux endroits distincts n'est pas contradictoire si on tient compte que le contexte de leur production n'est pas le même.

4^o C'est la coordination de ces contextes qui va amener à penser les ensembles non-disjoints. L'opposition des attributs est déjà un type peu élaboré de coordination. Un degré supérieur est atteint dès lors que l'on pense les attributs l'un par l'autre. Par exemple, l'attribut carré, sera signifié par une variation de couleur, tandis que l'attribut bleu, le sera par une variation réciproque de forme. Subsiste non pas une opposition entre les attributs, mais une opposition dans les actes.

Il n'y a alors pas de contradiction à ce que le carré bleu se trouve à la fois dans l'ensemble des carrés et dans celui des bleus car, ce n'est pas en oubliant sa forme que l'on a pensé sa couleur, ni en oubliant sa couleur que l'on a pensé sa forme (au contraire les attributs se supportent mutuellement).



5⁰ Lorsqu'un attribut est ainsi signifié au travers de la variation des autres, et que ceci est réciproque, la prise en compte d'attributs nouveaux complète et affine indéfiniment la classification. La classe n'est jamais tout à fait fermée.

6⁰ La place des éléments, elle, n'est qu'un signifiant, le diagramme s'arrête à la relation d'intériorité (inclusion). Peu importe alors la place de chaque élément, et on peut les regrouper dans un coin de la plage sans détruire pour autant l'ensemble.



Donc la question de savoir où on met les éléments ne se pose qu'au travers de celle consistant à savoir qui on met ensemble. Les diagrammes de Venn sont des moyens de réaliser l'illustration des ensembles non de les définir.

7⁰ Conclusion. J'ai montré comment, dans ce contexte de formulation, la structuration des relations ensemblistes va de pair avec celle des attributs, que l'on ne saurait considérer comme des entités isolées. (A moins de vider les exercices de logique de toute leur substance). C'est dans ce contexte qu'il s'agira d'interpréter les productions des élèves et de discuter de la signification attribuée à ce travail.

4.5. Premier exemple. Interprétation et analyse d'une production d'élève.

Les diagrammes ont donc statut de formulation. C'est de ce point de vue qu'il s'agit d'interpréter les productions des élèves, et de poursuivre l'échange au delà de l'examen de conformité de la réponse avec ce qu'on attendait. (Et le maître ne sait en général pas attendre autre chose qu'une réponse correcte).

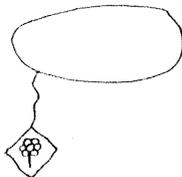
Exemple :

Les figures suivantes sont données :

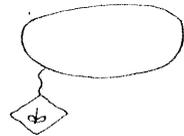


Il est demandé de classer ces fleurs dans les deux ensembles suivants (dessinés tels quels au tableau) :

marguerite

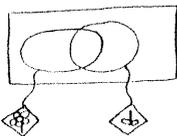


fleur à feuille



La maîtresse s'attend à ce que les élèves procèdent comme suit :

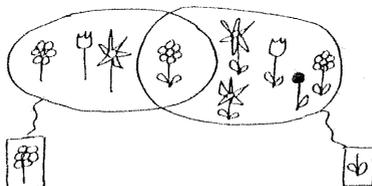
1° Reproduction du diagramme de Venn, vide sur leur cahier.



Les élèves n'ont pas tous compris qu'il fallait faire cela et la maîtresse a dû leur fournir cette indication

2° Y reporter les fleurs. (reproduire les dessins à la bonne place).

Voici une production d'une élève :



Les questions qui me préoccupent ici sont alors de deux types :

a) Que peut-on dire, à partir d'une telle production sur la compréhension de l'élève.

b) Comment l'enseignant peut-il échanger avec l'élève sur la base de cette production .

Commençons par la 2^e question. Bien sûr l'enseignant va estimer qu'il y a échec dans la tâche. Le diagramme n'est pas fidèlement reproduit (il n'y a pas d'ensemble total-cadre) et toutes les fleurs se trouvent dans 3 plages (alors qu'à son point de vue il y en a 4 sortes). Pour en parler avec l'élève, il peut ramener cet échec à une succession d'erreurs. Considérant même implicitement que l'élève a suivi un procédé de classement "naturel" qui consiste à passer en revue tour à tour les éléments et les placer dans le diagramme sans s'occuper d'autre chose que les attributs (sans s'occuper de comparer les éléments entre eux et de les appareiller selon ces comparaisons). On peut alors pointer 3 erreurs au moins ( n'est pas clair).

 devrait se trouver dans l'intersection et il n'y a qu'une figure de cette sorte dans la série à classer.

 et  ne sont pas des marguerites. Elles doivent être dans la plage extérieure aux deux "patates".

Mais d'autres lectures sont possibles : peut-être que le symbole  de l'étiquette a-t-il été lu : fleur (et non pas restrictivement marguerite).

Dès lors 5 éléments sont mal placés : les fleurs à feuilles. En regardant de plus près la production de l'élève, on voit que les fleurs à feuilles sont opposées aux fleurs sans feuilles avec au centre la composée des symboles . On remarquera alors que le symbole  a été lu de façon univoque tandis que  a été lu de deux façons. Pour une plage c'est l'aspect sans feuille qui a primé, en opposition avec l'autre attribut, tandis que pour l'intersection c'est l'aspect "marguerite" qui a été déterminant, en combinaison avec l'autre attribut.

Je n'ai pas les moyens de vérifier laquelle de ces interprétations est correcte. Cependant toutes sont plausibles. En particulier l'opposition des attributs caractérisant la 3^e, ainsi que la superposition de différents points de vues a été observée par ailleurs.

Il faut être conscient que de ces diverses interprétations vont découler différentes manières d'interagir avec l'élève. On pourra se contenter de corriger chacune des erreurs, et centrer la discussion sur l'activité de placement, prise pour elle-même. Mais ce faisant on aura un point de vue bien réducteur et on ne se demandera pas comment il se fait que l'élève se soit si grossièrement trompée.

Plus conséquent serait de prendre les choses autrement, et de demander à l'élève de rendre compte de sa production. Par exemple qu'elle nous explique pourquoi elle a mis   et  ensemble d'un côté, et pourquoi    et  sont-ils réunis. Même si cette question étonne l'élève - parce que ne correspondant pas tout à fait à la consigne donnée - elle a le mérite de se rapporter à l'objet même de l'enseignement (les ensembles).

4.6. Autres exemples. Production de classe, discussions sur la signification.

Le maître devra faire attention aux représentations des élèves et à leurs manifestations dans la vie de la classe. On peut ainsi discuter de significations avec les élèves. Il conviendra donc d'être attentif à certains événements répétitifs qui ne sont pas banals ni anecdotiques. Les exemples qui suivent caractérisent tout à fait les jeux de logique mais ne cadrent pas avec l'idée naïve que l'on pourrait se faire du travail scolaire. Leur importance, manifeste à leur répétition, échappe pourtant à l'enseignant à qui il manque des références théoriques pour l'interprétation. Le lecteur verra que, du point de vue sémantique, le maître n'a pas toujours la prérogative.

Exemple 1.

Les élèves prolongent très fréquemment le fil d'attache de l'étiquette jusque dans la plage de l'ensemble. La fréquence de ceci montre que certaines représentations les poussent à faire ainsi. Il y a un léger hiatus avec les règles des manuels qui veut que les étiquettes soient attachées aux cordes des ensembles. Ce n'est pas très important. Et dans beaucoup de tâches les représentations des élèves et celles des maîtres ne seront pas en contradiction. Mais cela n'est pas non plus insignifiant. L'élève interprète le diagramme en fonction du placement des éléments. Dans certains exercices, à première vue identiques aux autres, des contradictions vont apparaître. Je décrirai en détails au chapitre V deux exemples de ceci.

1⁰ Si on demande aux élèves de ne placer que des éléments non carrés dans le

diagramme suivant



(sans donner une série d'éléments définissant

l'univers des objets à classer, mais laissant la

production des éléments à la charge de l'élève), beaucoup d'entre eux y voient une impossibilité (contradiction). Ils ont par contre moins de difficulté à placer un

élément donné : un triangle par exemple. 2⁰ L'attribut nié est interprété

relativement à la tâche de remplissage comme une interdiction. Non-rouge, par exemple, sera considéré comme : "interdit de placer (dessiner) rouge". La double négation sera alors souvent comprise comme la levée de l'interdiction : non - non-rouge donne : "toutes les couleurs sont permises". Et non pas comme la prescription de la couleur rouge exclusivement. Pour celui qui se base sur l'interprétation prédéfinie des jeux scolaires, ceci est à proprement parlé inconcevable. Les enseignants ne sont pas préparés à de telles confrontations d'interprétation. La mauvaise gestion de celles-ci produit une parcellisation des savoirs scolaires chez les élèves.

Exemple 2.

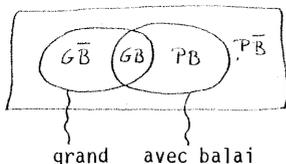
Les élèves dans leurs descriptions donnent tous les détails, et de façon désordonnée. Discussion sur les aspects discriminatoires des attributs : on ne retient que des attributs qui correspondent à des différences entre éléments. Cela ne se limite pas à la définition donnée dans la méthodologie romande (1^{ère} année, 2^è éd, p. 22) : "la maîtresse a toutes les images des écureuils devant elle et déclare qu'on peut en obtenir une si on sait la décrire, c'est-à-dire énumérer les propriétés qui permettent de distinguer cette image des quinze autres".

Par exemple dans le cas de bonhommes de neige, discussion pour savoir si ce sont les bonhommes de neige qui sont différents ou seulement leurs habits, un élève suggère qu'entre un grand bonhomme de neige et un petit, identiques par ailleurs, il y a plusieurs différences : "il y a tout plus grand" (tous les attributs du bonhomme de neige sont plus grands!).

Exemple 3.

Poursuivons l'exemple des bonhommes de neige. Les élèves devaient faire d'eux-mêmes la classification de bonhommes de neige (cartes) variant selon la couleur de chapeau (3 couleurs), la possession d'un balai (2 possibilités) et la

grandeur (2 modes). La consigne était de réaliser une intersection de 2 ensembles avec ce matériel. Les élèves n'arrivent pas (cf. chap. V pg. pour les réponses des élèves). La maîtresse donne alors la réponse. A ce moment certains élèves de dire : "Ah oui !" et l'un d'eux commente l'intersection dans les termes qui suivent.



G = grand P + petit

B = avec balai \bar{B} = sans balai.

Plusieurs cartes dans chaque plage (3).

Il prend une carte $G\bar{B}$ et la pose sur une carte GB. Il dit : "Le grand sans balai remplace le grand avec balai, et le petit (PB) lui donne son balai". Ce qui veut rendre compte que dans l'intersection il y a un attribut provenant de chaque ensemble. (Comme si le grand sans balai n'avait qu'un seul attribut : être grand). Des camarades ont alors objecté que le bonhomme de neige allait recevoir un petit balai et non un grand comme il convient. Parade du premier élève : "Le petit, il est petit parce qu'il est loin (éloigne la carte de la position de l'intersection) mais en fait c'est un même bonhomme de neige que le grand". Plus de problème pour la grandeur des balais. (Mais plus de différence de grandeur entre les bonhommes de neige non plus !). Cet exemple où l'élève cherche, par déduction, à concilier les divers points de vues qui ont marqué le jeu et à aboutir à l'image de la solution préconisée par la maîtresse est typique. Logiquement, c'est l'équivalence suivante qui est mise en évidence : "être identique sous le caractère bonhomme de neige". Avec une explication ad hoc (l'éloignement) pour rendre compte des différences. Ce raisonnement syncrétique n'étonne pas de la part d'élèves de 7-8 ans. Si ce n'est pas la logique dont il témoigne. Mais la différence de point de vue de la maîtresse et des élèves est manifeste. Y a pas de miracles !

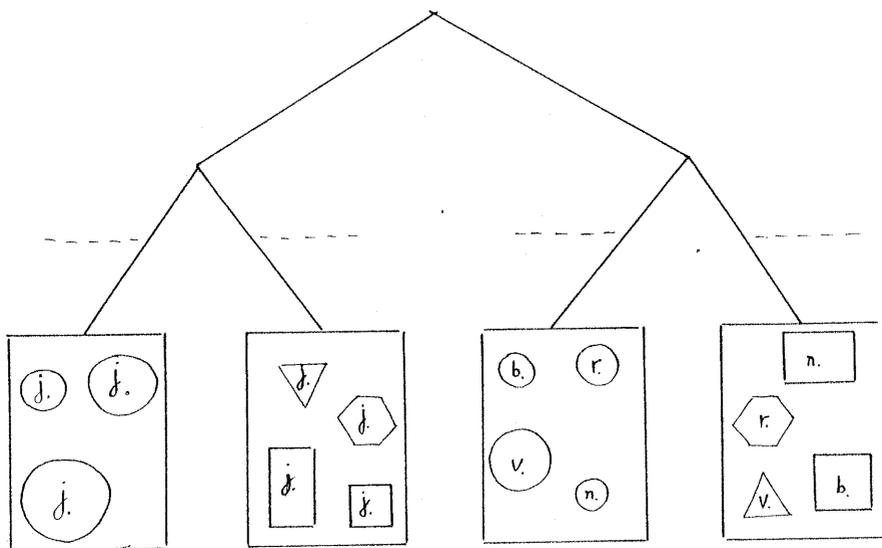
Conclusion : Voilà ce qui arrive avec les objets-prototypes.

Exemple 4. Il y a eu en fait beaucoup de discussions sur la signification (définition) des attributs. Cela nous a étonnés Monica et moi, mais c'est heureux. (Un peu de logique est sauve). Ces discussions dépendent bien sûr des éléments de référence. De plus Monica a fait la remarque que les étiquettes figurales amenaient à des confusions : ↷ désigne-t-elle une forme particulière, un type (pointu) ou une couleur (blanc) ; □ veut-il dire de forme carrée, carré non rempli (blanc) ou forme quadrangulaire. Finalement, elle a utilisé les mots pour désigner les attributs.

Même type de discussions à propos de certaines solutions.

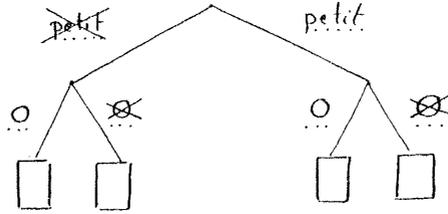
Ex. : Exercice ER 16 2e année (1^{ère} édition)

Trouve les étiquettes.



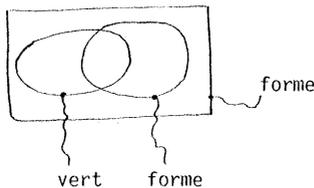
(j'ai indiqué les couleurs par leur abréviation : j.= jaune, b.= bleu, r.= rouge, v.= vert, n.= noir.

On remarquera que la case de gauche contient un rond plus grand que les autres figures (rondes ou non, jaunes ou d'une autre couleur). De plus, un effet optique non reproductible ici fait apparaître, par le jeu : jaune sur fond blanc, les figures jaunes plus grandes que leur homologue d'autres couleurs. Certains élèves ont été sensibles à ceci et ont proposé la solution suivante :

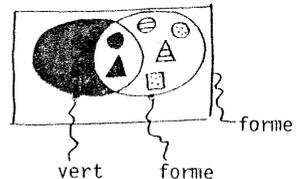


Cette production d'élève mérite toute notre attention car elle montre bien que les attributs ne peuvent être définis en absolu. Les conditions de l'exercice influent sur l'interprétation des termes. Ici la taille pose différents problèmes. Tout d'abord il y a plusieurs formes de types distincts ce qui rend difficile les comparaisons de tailles. Mais on retrouve des formes semblables d'une case à l'autre ce qui amène à des comparaisons partielles entre formes semblables. De plus il y a plusieurs tailles (et non pas que 2) où mettre la limite entre grands et petits. On peut ainsi penser que parmi les figures jaunes on rencontre plus souvent de grandes figures, ou encore qu'elles occupent, dans les cadres dessinés, relativement plus de place, et enfin que la plus grande de toutes les figures est jaune. De là la caractérisation de l'ensemble. Il apparaît alors que l'attribut taille dépend de l'attribut forme (puisque il y a comparaison préférentielle entre formes semblables). Les figures jaunes sont donc "non-petites" par rapport aux autres tout comme les Américains sont grands par rapport aux Japonais.

Exemple 5. Monica, par erreur avait proposé de remplir le diagramme suivant



les élèves proposent et discutent la solution suivante :



Le vert qui n'est pas une forme, c'est "du vert"

ANNEXE DU CHAPITRE III.

Progression des jeux de la méthodologie et
résumé des commentaires. Jeux ER7 et 11,
1^{ère} année ; ER3, 2^{ème} année.

INTRODUCTION :

Faire une collection est une activité naturelle dont on va tirer profit pour permettre à l'enfant de construire un raisonnement logique et d'approfondir la notion de classement. Les enfants manipulent puis s'expriment au moyen de représentations adéquates.

Jeu ER 1 Ensembles constitués d'enfants.

MATERIELS DIVERS Le matériel doit être suffisamment riche en possibilités afin que chaque enfant y trouve un intérêt à la mesure de ses moyens.

Jeu ER 2 Classement, dans des boîtes, de matériels de fortune.

Jeu ER 3 Matériels structurés. a) étude des propriétés des éléments
b) classements
c) exploitation de tableaux "bien arrangés"

Jeu ER 4 Classement d'ensembles (cartes représentant des collections d'objets combinés de façon systématique).

SYMBOLES. But : recours aux symboles. Faire sentir la nécessité d'un symbolisme compris de tous. a) pour les éléments et les attributs, laisser l'enfant créer ou choisir, puis mettre en commun les propositions, les discuter. On observera un dépouillement progressif des symboles.

b) pour les ensembles : boites → cordes → "patates" dessinées.

Remarques : Le symbole n'est pas identique à l'objet qu'il représente.

Jeu ER 5 Introduction des étiquettes, pour se souvenir du contenu des boîtes.

Jeu ER 6 A partir de la description des éléments d'un matériel structuré, constitution d'un jeu d'étiquettes. Portrait des éléments ou de sous-ensembles d'éléments par une série d'étiquettes.

Jeu ER 7 Ensemble complémentaire. Négation de l'attribut. Equivalence des formules : "Il n'est pas rouge" et "Il est non-rouge" au travers du placement. Etiquette négation.

NON CONTRADICTION ET TIERS EXCLU

Jeu ER 8 Jeu du portrait sur matériel structuré. Élément \leftrightarrow portrait et vice-versa.

Jeu ER 9 Jeu de familles.

Jeu ER 10 Pigeon vole.

INTERSECTION D'ENSEMBLES ET CONJONCTIONS D'ATTRIBUTS. La conjonction exprime en logique la possession simultanée de 2 attributs où l'appartenance d'un élément à 2 ensembles à la fois. Remarque sur l'intersection d'un ensemble d'objets rouges et d'un ensemble d'objets jaunes.

Jeu ER 11. Trois façons de trier des bonbons selon les attributs : grand et vert.

- a) attribut conjoint : grand et vert
- b) classification en 2 temps, grand et parmi eux verts. Et vice versa.
- c) les grands bonbons verts, obstacles à la séparation en 2 boîtes des bonbons grands et des bonbons verts.

ARBRE DE CLASSEMENT. Combinaison systématique des attributs.

Jeu ER 12. Arbre dichotomique. Les enfants circulent sur les embranchements. Familiarisation avec les conventions figuratives : présentation du diagramme et des attributs indicateurs.

Jeu ER 13. Arbre factoriel déjà construit. Faire circuler les éléments dans un arbre.

Jeu ER 14. Arbre servant de machine à trier. Possibilité de classer les éléments sans connaître d'avance la façon dont il est structuré.

DIAGRAMMES DE CARROLL. C'est un tableau à double entrée comportant autant de dimensions que de caractères envisagés. Un caractère peut prendre plusieurs valeurs selon les attributs considérée. Exemple le caractère couleur peut prendre diverses valeurs particulières : rouge, bleu, vert, etc...

Jeu ER 15. Jeux sur les tableaux pour familiariser les élèves avec les conventions figuratives.

Jeu ER 16. Constitution d'un diagramme de Carroll. Les enfants se placent selon les attributs d'objets qu'ils ont reçu. Représentation par dessin.

DIAGRAMMES DE VENN. Mention de 2 stades dans l'apprentissage. Celui où les éléments seront représentés et celui où les cordes désigneront à elles-seules un ensemble. Les diagrammes de Venn sont d'un emploi plus délicat que les autres à cause de la relation : ensemble, complémentaire, tout,

Jeu ER 17. Reprendre les exercices d'appartenance et de non-appartenance en utilisant la corde et les étiquettes symboliques et en faisant intervenir la négation. Partition d'un ensemble d'objets selon des attributs disjoints.

Jeu ER 18. Introduction de l'intersection d'ensembles à l'aide du diagramme de Venn. Les élèves reçoivent chacun un objet. La considération de 2 caractères, forme et couleur, oblige à croiser les cordes des ensembles. L'enfant au carré rouge doit trouver une place qui soit à la fois avec les carrés et avec les rouges. Ceci une fois établi, que se passe-t-il lorsque l'on considère deux attributs complémentaires, ou de même caractère ? La disjonction des patates représente l'intersection vide.

COMPARAISON DES 3 DIAGRAMMES DE CLASSEMENT.

Jeu ER 19. Passage d'un arbre dichotomique au diagramme de Carroll correspondant.

En deuxième année primaire, il est prévu de reprendre les notions vues et de pousser plus avant la comparaison des diagrammes. Enfin de faire une introduction à la réunion d'ensembles.

Jeu ER 1. Description d'un matériel structuré. Portrait. Négation. Deviner la carte complémentaire.

Jeu ER 2. Exercice sur les 3 modes de classement. Faire un classement. Lire un classement effectué. Traduire un classement donné d'un diagramme à un autre diagramme.

Jeu ER 3. Réunion d'ensembles par les diagrammes de Venn. Cas disjoint, puis non-disjoint. Correspondance des plages sur les autres diagrammes.

notes
personnelles

JEU 7

Matériel: - une série de jouets très divers.
- deux boîtes avec couvercle.

La maîtresse place deux jouets dans une boîte; les enfants découvrent une propriété (attribut) commune à ces deux objets (par ex. «rouge»); ils recherchent tous les jouets qui possèdent cette propriété et les mettent dans la boîte; la maîtresse demande:

- Pourquoi ne peut-on plus rien mettre dans la boîte?
- Parce qu'il n'y a plus de jouets rouges.

La maîtresse peut poursuivre en prenant deux objets de couleurs différentes (par ex. un objet jaune et un objet vert) et demander pourquoi il ne faut pas les mettre dans la boîte. La réponse devrait être:

- Parce qu'ils ne sont pas rouges.

Si les enfants répondent «parce qu'il y en a un jaune et un vert», on poursuit la leçon de la manière suivante:

Un enfant place les objets qui restent dans la deuxième boîte.

La maîtresse saisit un jouet rouge de la première boîte sans le montrer.

- Que peut-on dire de ce jouet pour être certain de la vérité?
- Il est rouge.

On peut alors coller une étiquette symbolique sur la boîte.

Même question pour un jouet de la deuxième boîte.

Si les enfants ont encore de la peine à trouver la réponse, on demande, toujours sans montrer l'objet:

- Puis-je mettre ce jouet dans la première boîte?
- Non, car **il n'est pas rouge.**

On peut alors coller une étiquette sur la deuxième boîte et présenter le terme de «non rouge» aux enfants sans toutefois en exiger l'emploi de la part de chacun d'eux.

Suggestion: reprendre les exercices présentés au chapitre SYMBOLES, JEU 6.

L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à l'un et à l'autre. C'est aussi l'opération ensembliste qui correspond à la conjonction logique «et».

Exemple: Dans le référentiel des berceaux, tout berceau avec barrière et roulettes appartient à la fois à l'ensemble des berceaux à barrières et à l'ensemble des berceaux à roulettes.

La conjonction **et** coordonne donc deux propriétés (attributs). Cette conjonction n'est d'ailleurs pas toujours exprimée; il faut alors que les enfants soient capables de reconnaître si l'objet considéré possède bien les deux attributs **simultanément**.

Exemple: un gros ballon rouge est un ballon qui est à la fois gros **et** rouge.



L'intersection d'un ensemble d'objets rouges et d'un ensemble d'objets jaunes n'est pas composée d'objets rouges et jaunes (ni d'objets oranges); dans ce cas l'intersection est l'ensemble vide. En effet, il n'est pas possible qu'un objet soit à la fois complètement rouge et complètement jaune.

JEU 11

Matériel: un lot de bonbons de deux tailles et de couleurs différentes, quelques cornets, des étiquettes.

On décide de mettre dans le premier cornet tous les bonbons grands et verts. Pour y parvenir on peut procéder de plusieurs façons:

a) On passe en revue chaque bonbon en posant les deux questions:

- Est-il grand?
- Est-il vert?

On met le bonbon dans le cornet si on a pu répondre affirmativement aux deux questions, puis on colle l'étiquette sur laquelle on a dessiné les symboles qui conviennent; ces symboles sont proposés par les élèves.

b) On cherche d'abord tous les bonbons qui ont la propriété d'être grands, puis, parmi eux, tous ceux qui sont verts. On essaie de voir si l'on obtient le même résultat en commençant par choisir les bonbons verts et ensuite parmi eux les grands. On termine l'exercice comme sous a).

c) Est-il possible de faire un tas avec tous les grands bonbons et simultanément, un autre tas avec tous les bonbons verts? Les enfants constatent qu'on ne sait pas où placer les bonbons qui sont à la fois grands et verts. Ce sont ceux-là qu'on décide de mettre dans le cornet.

notes
personnelles

Il faut être conscient du fait que la réunion d'ensembles non disjoints est une notion difficilement accessible aux enfants de cet âge.

notes
personnelles

JEU 3

Objectif: approcher la réunion de deux ensembles disjoints, puis non disjoints.

Matériel: tout matériel structuré (voir ci-dessus: ER, JEU 1, p. 1); par exemple:

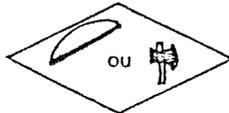
- un jeu de 36 cartes représentant des Indiens:
 - deux sortes de coiffures: une plume, plusieurs plumes;
 - trois couleurs de plumes: rouge, bleu, jaune;
 - trois armes: un arc, une hache, un poignard;
 - avec tente, sans tente;
- une boîte;
- trois cordes.

Les enfants prennent connaissance du matériel (cf. ER, JEU 1, p. 1).

a) Réunion d'ensembles disjoints

1. La maîtresse distribue une carte à chaque élève:
 - Les élèves qui ont un Indien avec une hache viennent déposer leur carte dans la boîte.
 - Les élèves qui ont un Indien avec un arc viennent déposer leur carte dans la boîte.
 - Quels Indiens avons-nous réunis dans cette boîte?
(Les Indiens qui ont un arc **ou** une hache).

La maîtresse prépare l'étiquette à placer sur la boîte:



Si les enfants répondent: «les Indiens qui ont un arc **et** une hache», on sort une carte après l'autre en disant:

- Cet Indien a-t-il un arc **et** une hache?

Les enfants constatent qu'il n'est pas correct d'utiliser le mot «et» de cette façon.

les
personnelles

Si les enfants répondent: «les Indiens qui ont un arc et les Indiens qui ont une hache», il est évident que cela est correct. (Cependant, pour obtenir le mot «ou» entre les deux attributs qui a un arc, qui a une hache), on poursuit ainsi:

- J'aimerais préparer une étiquette qui nous indique ce qu'on peut dire de chaque Indien.

La maîtresse prend une carte sans la montrer aux enfants:

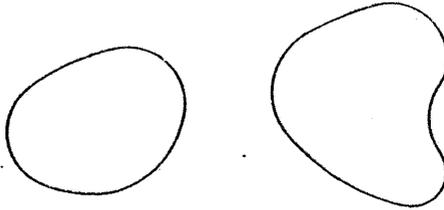
- Sans le regarder, que pouvez-vous dire de l'indien que j'ai pris? (Il a un arc ou une hache.)

L'étiquette étant prête, la maîtresse poursuit:

- Dans cette boîte chaque Indien a un arc ou une hache; voyons si cela est vrai.

Elle sort une carte après l'autre; les enfants répondent par «vrai» ou par «faux».

2. Les cartes sont redistribuées et deux cordes sont disposées sur le sol:



Sans rien dire aux élèves, la maîtresse place dans une corde les Indiens à plumes rouges, dans l'autre les Indiens à plumes jaunes.

Les enfants observent le classement et en découvrent les critères (la couleur des plumes).

Une troisième corde est placée sur le sol et on demande d'y mettre les Indiens à plumes rouges ou jaunes.

On constate alors que les Indiens situés dans les deux premières cordes se réunissent dans la troisième.

b) Réunion d'ensembles non disjoints

1. On reprend le même processus et le même type de questions que sous a) 1, mais en utilisant des attributs compatibles.

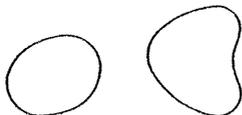
Exemple:

Vont dans la boîte:

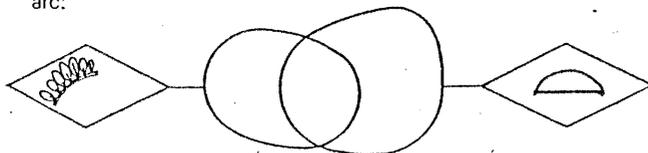
- les Indiens avec un poignard;
- les Indiens avec une tente.

Au moment de passer en revue toutes les cartes et de répondre par «vrai» ou par «faux» à la question «Chaque Indien a-t-il un poignard ou une tente?» on s'aperçoit que les Indiens qui ont à la fois un poignard et une tente sont aussi dans la boîte: «Ils ont deux raisons de s'y trouver»!

2. Deux cordes sont disposées sur le sol:



La maîtresse demande de placer dans une corde les Indiens qui ont plusieurs plumes et de placer dans l'autre corde ceux qui ont un arc. Les enfants constatent qu'il faut croiser les cordes pour pouvoir loger les Indiens qui ont à la fois plusieurs plumes et un arc:

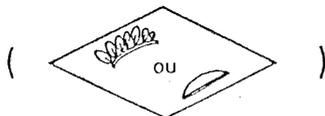


- Pourquoi certains Indiens ne sont-ils pas dans les cordes?
(Parce qu'ils n'ont ni plusieurs plumes ni un arc).

On dispose une troisième corde sur le sol et on demande tout d'abord que les Indiens qui ont plusieurs plumes soient placés dans cette corde; on demande ensuite la même chose pour les Indiens qui ont un arc.

On constate que les Indiens situés dans les deux premières cordes, y compris ceux de la plage commune, se réunissent dans la troisième.

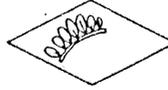
- Quelle étiquette peut-on attacher à cette corde?



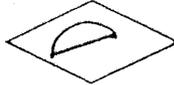
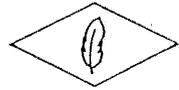
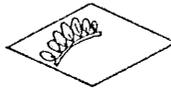
notes
personnelles

otes
ersonnelles

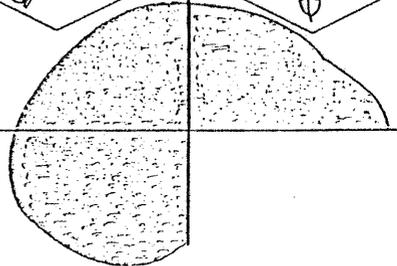
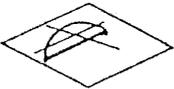
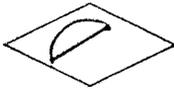
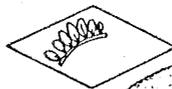
3. Une corde est placée sur le sol; elle sépare les Indiens qui ont plusieurs plumes des autres Indiens.



Lorsque les Indiens sont en place, on introduit dans le jeu une deuxième corde qui sépare les Indiens qui ont un arc, de ceux qui n'en ont pas, tout en maintenant la première subdivision:

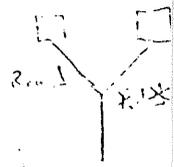
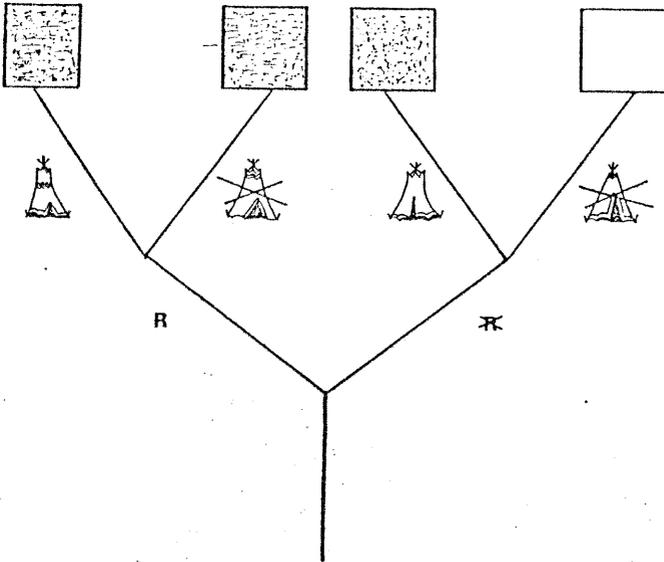


- Où sont les Indiens qui ont un arc?
- Où sont les Indiens qui ont plusieurs plumes?
- Où sont les Indiens qui ont à la fois un arc et plusieurs plumes?
- Où sont les Indiens qui ont un arc **ou** plusieurs plumes?



4. Le même travail que sous 3. doit être fait à l'aide de l'arbre de classement en utilisant, par exemple, la couleur de la coiffure et la présence, ou l'absence de tente. On aboutit à la représentation ci-dessous:

notes personnelles



On a teinté les cases dans lesquelles se trouvent des Indiens à coiffure rouge ou avec tente.

C H A P I T R E I V

INTERVIEW DE CERTAINS ELEVES EN FIN DE DEUXIEME ANNEE

0. Avertissement.

J'ai reproduit complètement 8 interviews faits en fin de 2e année.
J'ai choisi de présenter les données brutes, bien que cela paraisse demander au lecteur un effort certain de se représenter les situations. Quelques raisons à cela.

a) on pourra voir le "style" de ces interviews, ma façon de discuter avec les élèves.

b) cela illustre très bien ce que j'ai pu dire au chapitre III mais ça donne aussi assez clairement le type de représentations des élèves.

c) L'auteur, fatigué de paraphraser, commenter, souffle un peu, et surtout laisse parler les élèves.

1. Préambule.

1^o L'interview avait lieu en classe, au fond à une table à part.

Matériel : formes géométriques en carton, de couleurs différentes. Les formes (beaucoup) sont données. Mais les élèves savent qu'ils peuvent en trouver dans un petit coffre qui se trouve sur la table. Quelques fois ils insistent pour pouvoir puiser des formes. En plus, il y a des ronds en plastique vert

(jetons), il n'y a pas d'autres formes vertes (verts \subset ronds).

Selon les questions, je retire certaines formes et interdit d'aller pêcher des formes dans le coffre.

Spontanément, les élèves ont recours aux crayons de couleurs. Ceci leur permet quelquefois de tourner la difficulté due à l'absence de certaines formes (carré vert par exemple). L'emploi des crayons sera donc négocié avec moi.

2⁰ Les formes géométriques sont assez petites pour tenir sur une feuille A4. Les cordes des ensembles seront dessinées sur la feuille, soit au préalable, soit en entourant les groupes de formes. De même les étiquettes seront dessinées.

Ceci a l'avantage qu'on peut ôter toutes les formes géométriques et discuter du schéma en lui-même. D'autre part, la mobilité des éléments est un bon moyen pour poser certaines questions aux élèves.

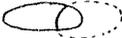
3⁰ On voit donc que l'expérience se veut globale et aussi simple que possible. Chacun de ces interviews constitue un tout. Les interviews sont longs et ont été stoppés soit par des événements extérieurs (cloche de l'école) soit par abandon d'un des partenaires (désintérêt de l'élève et désinvestissement ; tête vide de l'expérimentateur).

L'expérimentateur a veillé à ce que l'élève soit sans cesse ramené à la situation ou à une tâche bien précise. Mais sans pour autant mettre hors jeu certaines spéculations enfantines - à la manière douce si possible.

4⁰ La première situation présentait des formes sur une page A4, de telle sorte qu'il y ait un tas de formes rondes au centre et tout autour les autres formes. Une couronne vide séparait ces deux ensembles de façon très nette. Je commençais

toujours par demander aux élèves ce qu'ils voyaient.

Je voulais approcher la question de l'inclusion et du rapport inclusion-intersection. Ce qui allait avec la désignation des ensembles en présence, de savoir si l'intersection était un ensemble, ou encore de ce que devenait l'intersection dans le cas d'une inclusion. La question tournait autour des schémas de Venn : peut-on représenter une inclusion comme un demi diagramme de

Venn ? 

Une dernière remarque : les élèves étaient habitués à mettre une étiquette à l'ensemble référentiel. Dans le langage de la classe, c'est "l'ensemble de tout", désigné par l'étiquette  .

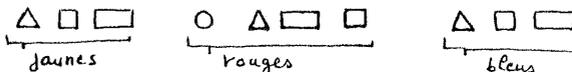
5⁰ Remarque sur la disposition. Il y a une séparation à gauche. Ce qui me concerne est écrit à partir de la gauche, ce qui concerne l'élève est écrit à partir de la marge. Je n'ai pas cru bon de faire 3 colonnes selon ce que l'expérimentateur dit et fait, ce que l'élève fait, ce que l'élève dit. Et ceci avant tout pour des questions de place et de fluidité du protocole qui, rappelés-le porte sur des interviews très souples donc n'est pas aussi schématique qu'un protocole de psychologie expérimentale. De plus, je voudrais bien que l'on se rappelle qu'il s'agit ici de pédagogie.

2. MARTINE

Je prends des petits jetons de formes différentes et de couleurs différentes dans le coffre. Je les lui donne à mesure. Je donne de tout sauf pour les ronds qui sont tous rouges (pas de ronds bleus ni jaunes).

Martine fait tout de suite des classes (tas) par couleur : jaune, rouge, bleu. (J ; R ; B). Elle me demande des formes que je devrais lui donner (qui manquent). Elle aimerait des ronds

bleus (OB) des OJ . Comme je refuse, elle s'aperçoit qu'il n'y a qu'une sorte de O . Elle a disposé ses formes de cette façon



Montre-moi l'ensemble des ronds.

Elle me montre et dit que les ronds sont tous rouges.

Montre-moi l'ensemble des rouges.

Elle montre les formes rouges y compris les ronds.

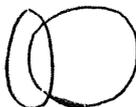
Et l'intersection de l'ensemble des rouges et des ronds.

Elle montre les OR du doigt, et les ensembles en présence.

"Les 3 ronds sont tous rouges et sont tous dans les ronds".

Bon maintenant tu vas me faire un dessin. Fais l'intersection des ronds et des rouges.

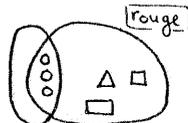
Elle dessine



"Y'a un ensemble qui est isolé !" "pourquoi y a qu'un grand ensemble ? on peut pas prendre un ensemble de triangles ? "

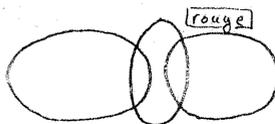
Je ne comprends pas ce que tu demandes.

Alors elle place les formes dans ses ensembles, elle met l'étiquette rouge . Les OR sont mis sur la plage commune .



puis elle rajoute

un ensemble :



C'est quoi ça ? (Je montre le petit ensemble où y a les ronds rouges).

"C'est la petite chambre. C'est l'intersection des rouges et des ronds. Et les ronds rouges ils sont là parce qu'ils sont ronds et puis rouges".

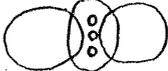
Elle continue à réfléchir pour placer ses autres formes.

"Pourquoi y a pas un autre rond, ... un pour les carrés".

Elle regarde les carrés rouges.

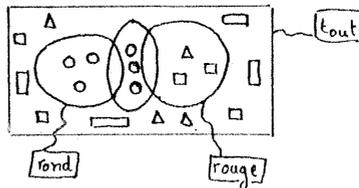
"Ah mais y avait encore ces carrés, puisqu'ils sont rouges ils pourraient pas être ici, ça ferait des histoires".

Elle dessine alors l'ensemble de tout et place ses formes à l'extérieur des trois ensembles.

Elle met une étiquette **rond** et explique qu'il y a les ronds, les ronds rouges, les rouges. Elle déplace ses ronds pour les mettre bien au milieu :  Elle dit qu'il n'y a que des ronds rouges,

c'est pourquoi y a rien dedans le troisième ensemble. Puis elle prend mes gommés (2 gommés assez ronds !) qu'elle place dans l'ensemble des ronds. Malheureusement une des gommés est rouge, alors elle doit aller dans le 2e ensemble.

Elle me demande alors la permission de prendre des formes ronds d'autres couleurs pour mettre dans son ensemble. Elle y met un tas de nouveaux jetons, ronds bleus, ronds jaunes et aussi ronds verts (tous les verts sont ronds rappelons-le). Elle répartit bien les formes sur toute la plage extérieure.



Est-ce que là (ensemble central) on met une étiquette ?

"Oui !" Elle fait une grande étiquette où elle écrit :



tout en expliquant qu'il y a des ronds rouges dedans.

Ça ressemble à ce que tu fais à l'école ?

non ... oui ... je ne sais pas.

Mais tu crois quoi ?

"On fait des choses comme ça à l'école"

Elle dessine le tableau de la somme en différentes bases, ce qu'ils sont en train d'étudier :

○	o	x

Je la ramène alors à son diagramme d'ensembles.

C'était comme ça les intersections ?

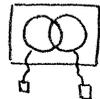
Oui.

J'enlève les jetons pour qu'elle voie bien le diagramme.

C'était comme ça les fiches ?

Oui.

Je vais chercher une fiche du classeur où il y a une intersection:



Y a une grande différence, trouves-la.

"Au milieu, y a l'étiquette intersection, pas là (pas dans la fiche)"

Encore une

"Ici, c'est qu'un dessin et la fiche c'est aussi écrit (la consigne est écrite en haut)."

On regarde que le dessin.

"Ils sont plus ronds (les ensembles) que les miens".

Non, ça c'est pas une grande différence.

"Je ne vois pas". "Là (le cadre extérieur de son dessin) c'est rond et là (fiche) c'est carré".

Mais non ...

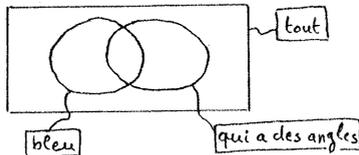
"Je ne vois pas !"

Combien y a d'ensembles à ton dessin ?

"Deux, ... eh 3 ! , mais c'est l'intersection ! je l'ai dessinée !"

Pose pour la récréation.

Sur une nouvelle feuille A4, j'ai dessiné



Je lui demande de remplir le diagramme avec des jetons.

Elle remplit en hésitant souvent. Par exemple à plusieurs reprises elle veut placer un rond non bleu dans la plage  puis se corrige. Finalement, c'est juste.

Combien tu as d'ensembles ?

"Deux".

Ça (l'intersection) c'est pas un ensemble ?

"Non".

Elle explique que c'est une plage formée par la superposition de deux ensembles mais que ce n'est pas un ensemble en lui-même.

Elle m'explique ça avec le dessin suivant

(l'intersection n'est pas délimitée par une corde propre)



Et si je fais ça :



Elle le trace et dit : "ça c'est interdit !"

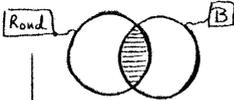
(remarquez que je n'ai jamais dit que c'était faux)

Oui, mais t'avais fait ça avant ! Et t'avais dit que ça (ensemble central) c'est l'intersection ! Je redessine



"Oui, j'avais fait ça, et ça (elle fait une corde qui entoure) c'est l'ensemble de tout".

Puis elle m'explique l'intersection en faisant un dessin :



et hachure le milieu en disant : "ça c'est l'intersection". Elle note INT.

"Ça  c'est la pire chose que tu peux faire".

Mais tu ne l'avais pas fait avant, et je me rappelle que c'est pas la première fois que tu le fais !

"Je te remercie" !

Bon, on va oublier un ensemble.

"Je sais lequel !, celui qui a tous ces trucs... (elle désigne celui des formes qui ont des angles).

Oui, tu as bien deviné, on oublie cet ensemble (geste circulaire de désignation de tout l'ensemble) qu'est-ce qui se passe ?

Elle prend mon plumier et le place sur "l'aile du papillon"



Je lui tends une feuille pour servir de cache.

Elle ne la prend pas.

Puis elle fait une étiquette : interdi de regarder et au-dessus, elle dessine un pendu.



Ils font quoi ceux-là (je désigne les jetons concernés)

"Ceux-là (les bleus), ils existent ; et ceux-là, j'ai mis un
pendu. Je les enlève ou pas ?"

Tu fais comme tu veux, mais tu me dis ce qui se passe si on oublie cet ensemble.

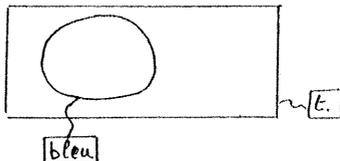
Elle prend les jetons en question et les cache sous un livre.

Tu fais quoi avec ces jetons ?

"Comme ils n'existent plus, on les cache".

"Puis ici (elle montre l'intérieur de l'ensemble), tu sais ce
qu'on met ?" Elle écrit interdit de rentrer chez soi

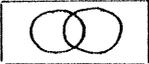
Je lui propose alors sur une autre feuille le diagramme suivant :

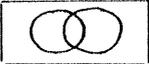


Elle remplit avec les éléments de l'exercice précédent. Et com-
me les bleus sont très serrés, elle dit "on dirait une mosaïque".

C'est la même chose là (maintenant) que quand tu avais oublié cet ensemble ? !

"Non. Si j'oublie cet ensemble (qui ont des angles), il n'existe
plus, c'est seulement ça (ensemble de bleus) et cette petite in-
tersection qui reste. (elle écrit dans l'intersection : reste)".

Bon, je prend une autre feuille et dessine  sans étiquettes

Je raconte "quelqu'un m'a dit que si on  oublie cet en-
semble (l'ensemble de droite), alors ces éléments (j'avais "rempli" les ensembles)
peuvent aller ailleurs".

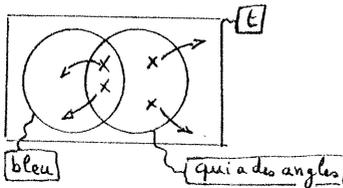
Ceci dit, je mélange les \square , \square , \triangle rouges et jaunes avec les ronds rouges
et jaunes ; je m'arrange pour recouvrir le trait de crayon (corde) avec des jetons

"Il est fou !" "Tu peux pas me dire que ça (un rectangle jaune, qui maintenant se trouve à côté d'un rond jaune) c'est comme un rond !" Elle écrit : "on ta dis cailque chose de stupide".

J'essaie encore de la convaincre.

Refus.

Je remet tout en ordre, je dis que puisqu'on a oublié cet ensemble (geste sur la corde) certains éléments peuvent aller ailleurs. Je déplace un carré rouge et un rectangle jaune vers l'extérieur ; j'échange un rectangle bleu et un rond bleu. Je répète "si on oublie cet ensemble (geste) alors ils peuvent aller là...



Ça ne veut pas dire qu'il peut partir, ou bien aller dans un autre groupement (elle désigne le rectangle bleu) ou bien aller dans l'ensemble de tout (carré jaune, rectangle rouge) ou bien aller dans l'intersection (rond bleu).

Elle prend un autre exemple pour m'expliquer : elle dessine un tas de maisons. "Si je fais semblant que j'oublie cette maison, alors il y a encore une maison, une maison, une maison ... Je ne peux pas me permettre d'aller là, là, là".

Elle fait des flèches vers les différentes maisons, elle entoure "sa" maison d'une barrière. "Ma maison, je dois la payer ! je peux pas me permettre de payer toutes ces maisons".

Je ramène Martine sur notre exemple.

Lesquelles formes sont fausses ?

Elle replace tout "à sa place".

"je peux même t'expliquer pourquoi ils sont faux !"

"Lui il doit rester chez lui, lui il doit rester chez lui, il peut pas aller là..." elle montre la corde de l'ensemble.

Oui, mais ça n'existe plus (cet ensemble)

Elle prend ma gomme, et fait des ouvertures dans tous les ensembles.

"Y a plus de barrières, alors je peux sortir".

Bon, fais-moi un ensemble de carrés.

Quelle couleur ?

Un ensemble de carrés.

Des carrés bleus ? Elle fait un ensemble de carrés.

Et un ensemble de tout.

Elle entoure d'un rond.

Puis elle place de façon espacée d'autres formes dans la couronne "ça (l'ensemble des carrés) c'est de ce côté, et alors les isolés c'est ici".

Lesquels sont l'ensemble et lesquels les isolés ?

Elle montre l'ensemble carré, et les autres.

Elle met les carrés dans un coin de la feuille, tire un trait fait un rond tire un trait et met les jaunes de l'autre côté de la feuille.

(carrés)



(jaunes)

carré

INTER

jaunes

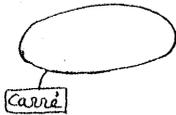
Lesquels c'est } les groupements lesquels les isolés ?

Jaunes c'est isolé, inter c'est isolé et c'est un groupement carré.

Elle a placé 4 carrés jaunes dans l'intersection.

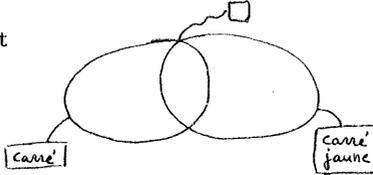
Elle explique qu'elle pourrait en mettre 2 dans l'ensemble des carrés et 2 dans l'ensemble des jaunes. Et que si y en avait 5, y en aurait encore un dans l'intersection.

Je dessine
les jetons,

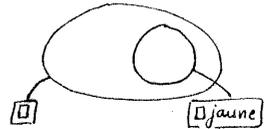


et lui demande de me représenter, sans utiliser
l'ensemble des carrés jaunes.

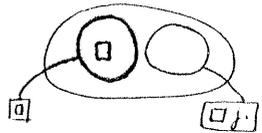
Elle fait



quelqu'un m'a dit que c'était ça :



Il est bête... je suis d'accord si c'était ça :

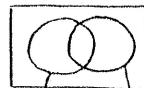


mais si c'était ça, alors ce serait (le rond extérieur) l'ensemble de tout (elle dessine l'étiquette) mais comme c'est l'ensemble des carrés ... je ne suis pas d'accord.

Reprise avec Martine une semaine après (résumé)

Martine devait faire le diagramme représentant l'ensemble des triangles et l'ensemble des triangles bleus. Elle aurait préféré l'ensemble des triangles et l'ensemble des bleus.

Elle fait :



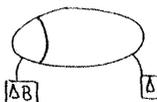
(voyez l'étiquette pour triangle).

Ensuite elle doit remplir son diagramme ce qu'elle fait correctement. Il s'avère au cours de la discussion qu'elle raisonne en termes de deux ensembles bien distincts : ΔB et Δ . Ainsi, elle aura toujours tendance à placer les ΔB dans la partie , puis ensuite de les mettre dans l'intersection. Elle l'exprime bien en disant : "Le groupement des ΔB c'est pour les ΔB , celui des Δ , c'est pour les Δ , et la petite chambre, c'est pour la visite" (intersection c'est pour les visites).

Elle formule ainsi : selon les étiquettes : "Là  c'est que Δ (et pas ΔB , ou Δ et une couleur), là  c'est ΔB mais comme là  c'est aussi Δ , ils vont là (ΔB vont dans \cap).

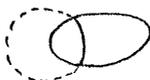
Martine ensuite complète son diagramme avec un "ensemble de tout" qui est pour tous ceux qui ne peuvent aller dans les deux ensembles considérés. Elle tient mordicus à ce que "l'ensemble de tout c'est pour les autres".

Martine refuse le diagramme



même quand je

Te relie à

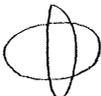


l'intersection

. Elle propose

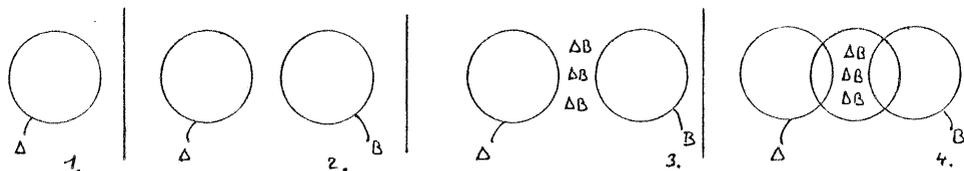
que l'intersection

de Δ et ΔB soit re-

présentée par  mais il s'avère que le rond mince, allongé, c'est l'intersection. Puis elle propose  pour Δ , ΔB , B

puis  pour Δ , ΔB , et tout (agrandi par rapport à B .)

Je lui demande de dessiner l'ensemble des Δ . Elle fait un rond, puis l'ensemble des B elle fait un autre rond en exclusion. Où placer les ΔB ? Elle les met entre deux et fait un rond intermédiaire :



Intérêts : 1^o La classification complète. Le lien entre celle-ci et le dessin de l'intersection :  et pas  !!!

2^o L'inclusion et l'inclusion relevante qui est très clairement dite sur la classification : "tous les ronds sont rouges"

3^o L'inclusion qui pose problème dans la représentation symbolique.

4^o Le rapport solidaire ensemble-éléments.

5^o L'opposition des deux critères avec comme premier endroit de placement les "ailes du papillon",  et l'intersection vue comme un endroit où les objets conjugués vont (petite chambre, pour les in-

vités).

6⁰ La bonne compréhension que la clé du remplissage, c'est la conjonction de deux attributs positifs.

" ΔR et ΔJ ne sont que triangles".

" ΔB il est les deux".

7⁰ Finalement la classification se fait toujours en cellules séparées : "ensemble de tout, c'est pour ceux qui vont dans aucun ensemble" qui n'est pas un ensemble en soi : "le groupement, le reste c'est : "des isolés" ."

3. MICHEL

J'ai mis les jetons mélangés, sauf au milieu un groupe où y a tous les ronds.

J'ai fait quoi ?

"Des trucs sur un papier". Il compte 43 jetons.

C'est quoi ça (le tas central)

"C'est un ensemble de \bigcirc "

Et ça (les autres) ?

"Un ensemble de tout"

"et ça c'est un ensemble de ronds de toutes les couleurs".

Fais l'ensemble des bleus.

Il prend les ronds bleus, les rassemble avec les autres jetons bleus, il fait une partition selon les couleurs.

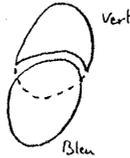
Je te demande de faire un ensemble de bleus, et voilà que l'ensemble des ronds n'existe plus ?

Il réfléchit, prend un crayon. Dessine deux patates et place les objets.

Maintenant, fais l'ensemble des verts (tous les verts sont ronds !)

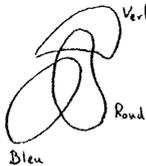
Il ôte les jetons ronds non-verts et avec le crayon change l'intersection.

Ce qui donne :

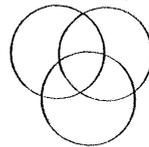


Alors l'ensemble des ronds n'existe plus ?

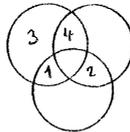
Il essaie de faire sur son dessin un troisième ensemble :



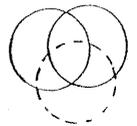
mais n'y arrivant pas, il tourne sa feuille et pose d'office trois cercles :



Puis il remplit :



"Là c'est les bleus, et là c'est aussi les ronds donc là (1) c'est les ronds bleus. Tous les autres ronds, jaunes, rouges, verts... non tous les verts ils sont là - dedans (2). Là c'est l'ensemble des ronds aussi". (ainsi il y aurait deux ensembles de ronds).



Y a deux ensembles de ronds ?

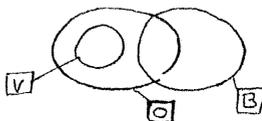
oui ! ... non ...

"Là, (3), c'est des ronds seulement rouges, jaunes, là (2) c'est les verts"

Et là (4) ?

"Là (4), il n'y a rien".

Quelqu'un m'a dit que c'était comme ça.



"Ça n'existe pas des trucs comme ça".

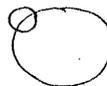
On ne s'occupe que de l'ensemble des ronds et celui des verts.

Ah ! Il fait alors

"Mais ça : , ça n'existe pas !"

Oui mais y a que des ronds verts !

"Attends", il dessine alors



et y a quoi là



"Y a rien, il noircit la plage, c'est les toilettes !"

Puisqu'y a rien, c'est comme si on faisait comme ça :



Non, ça n'existe pas ! Il faut le faire plus petit.

Il dessine , mais il faut l'attacher

1^o part sur une partition.

2^o comprend vite à quoi j'en veux venir

3^o comme tous les verts sont ronds, c'est l'ensemble des ronds qui est transformé en ensemble des verts.

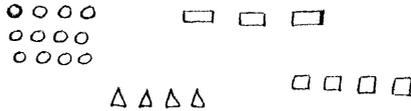
4^o Passage à trois ensembles qui se coupent.

Il se perd un petit peu.

5^o Refus du schéma inclusif. Y a deux ensembles il faut les représenter par deux ronds sécants. L'inclusion est avant tout traduite en rapport de taille.

4. OLIVIER

1^o Avec un même départ, Olivier part sur une description ce qui l'amène à dessiner "les ensembles qu'il voit" :



Dessin non coloré.

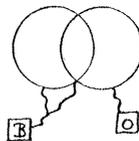
Remarquez que c'est là une réponse très sensée et plus juste que celle que j'attendais (ensemble de ronds).

2^o Il fait ensuite l'ensemble des bleus (sur demande) et déplace ses jetons.

Je lui demande de maintenir l'ensemble des ronds. Il regroupe ses jetons et fait des cordes d'ensembles en intersection :

"L'ensemble des ronds existe, y a une petite chambre qui fait dans celui là et dans celui là, comme ça y a aussi les bleus" (les  bleus dans l'ensemble des ronds).

Il met ensuite les étiquettes



puis

rajoute une 2e attache à l'étiquette : rond.

3^o Quand je lui demande de me montrer l'ensemble des verts, il entoure les ronds verts d'un trait de crayon.

Puis il parle d'intersections, mais pour toutes les plages présentes. Quand je lui demande ce que c'est que l'intersection, il me dit : "c'est ces traits" en montrant vaguement. Je lui demande de passer en rouge les traits qui sont des intersections. Il passe en rouge les traits entourant les 3 classes : ronds bleus,

ronds verts, ronds jaunes ou rouges. Et me dit :

"là c'est l'intersection des ronds et des bleus

là c'est l'intersection des ronds jaunes et des rouges

là c'est l'intersection des ronds verts

et là (un nouveau trait rouge) c'est pour que les
verts puissent aller vers les bleus".

4⁰ Pas de problèmes pour l'ensemble de tout. C'est un ensemble,
y a des tas de trucs dedans. Et les ronds verts, ou
les ronds, sont aussi dans l'ensemble de tout mais ils ont un
petit ensemble pour eux et comme des barrières qui les proté-
geraient.

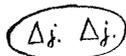
5⁰.

Je mets devant lui des formes \square \square \circ de toutes les couleurs et des
 Δ jaunes seulement. Je lui demande alors de faire l'ensemble des triangles.

C'est quoi triangle ? ... ah oui.

Il prend les deux triangles jaunes et les entoure d'une corde.

il a donc



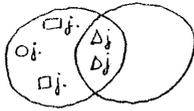
Maintenant fais l'ensemble des jaunes.

ah ... je ne peux pas ... il réfléchit ... ah oui je pourrais.
je peux pas !

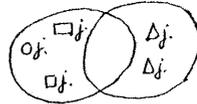
Il regarde ses triangles jaunes groupés, il veut mettre d'autres
triangles à leur place mais n'en trouve pas.

"Y a pas d'autres triangles"?

Il décide de rassembler les autres formes jaunes et les place
à côté de son premier ensemble. Il entoure d'un trait de crayon
les formes jaunes et obtient :



puis il
déplace les
et obtient



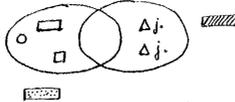
Il ne met pas d'étiquette.

Et puis celui-là ( rouge) tu le mets où ?

c'est rouge ! tu sais pas les couleurs ?

tu peux pas le mettre ?

Il place alors un  R et un  B comme suit

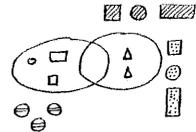


Je déplace le  R et le met à côté du bleu.

Il remet comme avant disant que c'est plus joli, mais comme j'ai fait ça va aussi.

"ah, pis tu veux faire un ensemble de bleus et un ensemble de rouges ! je crois bien que c'est ça".

Il fait des groupes de jetons :



et l'intersection des rouges et des bleus, est est où ?

attend ! Il prend un crayon et passe une corde autour de chacun de ses tas.

et l'intersection des rouges et des bleus ?

Il enlève tous ses jetons et me montre le dessin obtenu et le minuscule chevauchement des deux cordes qu'il vient de dessiner.



tu as vu ce que ça donne !

Quelqu'un m'a répondu que c'était comme ça :
je remplis avec les jetons.



Ça c'est l'ensemble des jaunes, et ça c'est l'ensemble des triangles. Tous les triangles sont jaunes. Qu'en penses-tu ?

c'est archi faux !

alors, corrige comme tu le penses.

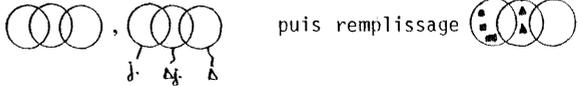
Il complète immédiatement le dessin et déplace un des triangles jaunes.



avant, tu avais mis tous les Δ jaunes là

j'ai changé d'avis.

Martine m'a dit ceci :



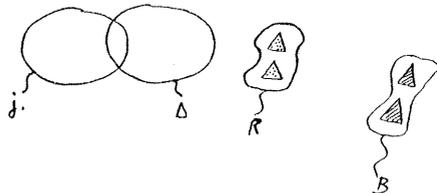
ça c'est l'ensemble des jaunes, ça c'est les triangles jaunes, et ça c'est les triangles.

Qu'en penses-tu ?

d'accord ... non je suis pas d'accord ... il trace le 3e ensemble à droite (ce qui ne change rien au classement).

Bon, maintenant, place ceux-là. (je lui donne $2 \Delta B$ et $2 \Delta R$)

il fait 2 autres ensembles :



je repose la question.

pas de changement

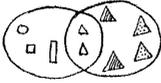
Montres-moi l'ensemble des triangles ?

Il me montre les 2 groupes faits des \triangle R et \triangle B .

Alors regardes ... Je complète le diagramme de Martine avec les triangles bleus et rouges. Martine avait raison ?

Non, il enlève les triangles rouges et bleus et trace le 3e ensemble.

Et ça ?



c'est juste !

C'est l'ensemble des triangles de n'importe quelle couleur.

Ça c'est juste.

Mais alors Martine ? Je remplis à nouveau son schéma.

ça va aussi.

Notes :

1⁰ Avec le départ on voit bien qu'il y a deux façons d'approcher la situation. Soit celle, réaliste, de classification utilisée par Olivier, soit celle, scolaire, de voir "l'ensemble" que j'ai réalisé sur le papier.

On voit aussi que pour Olivier, intersection a une signification très vague, de croisement des cordes, ou encore de sous-ensemble défini vaguement avec deux mots.

On retrouve ces deux points tout au long de l'entretien : tendance à faire un classement par partition, et fixation sur des "bonnes formes" scolaires et lecture déductive à partir de ce repérage. "C'est l'ensemble des triangles de n'importe quelle couleur". Comme si ça avait été autre chose que je demandais.

2^o On retrouve aussi cette idée de "sas" de chambre "inter-médiaire", attachée au mot intersection avec les jetons verts qui vont rendre visite aux jetons bleus.

3^o Et comme pour Martine, la préférence au remplissage des ailes de papillons  ce qui est une adaptation due aux étiquettes (qui désignent avant tout ces parties)

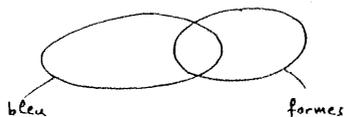
4^o La solution de Martine n'est pas acceptée tant qu'il s'agit de différencier les couleurs, jaune-rouge-bleu, pourquoi mettre rouge et bleu ensemble. Tandis que dès le décrochage fait (triangles de n'importe quelle couleur) elle devient acceptable.

5^o Enfin, il peut paraître surprenant qu'Olivier n'ait pas de problème avec l'inclusion. En fait il s'agit de l'inclusion des ensembles dans l'ensemble de tout (de leur immersion).

D'autre part, il se rappelle d'avoir beaucoup travaillé cette relation d'intérieur avec la maîtresse.

5. VINCENT D.

1^o Avec le même dispositif, Vincent décrit les jetons. Puis il fait des ensembles (à ma demande)

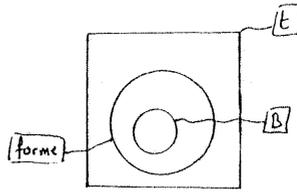


reprenant ce que la maîtresse

venait de faire ces jours avec eux. (Je ne le savais pas le jour de l'entretien). Il remplit de façon correcte ce diagramme.

Il explique pourquoi il y a une plage vide  : les bleus c'est de toutes façons des formes.

2^o Je propose le schéma



Il remplit juste et voit l'inclusion.

Je lui demande la différence. / Il ne trouve pas tellement de différence si ce n'est qu'il y a pas d'intersection ici, parce qu'il n'y a pas de croisement. Mais y a les mêmes choses ensemble, les mêmes étiquettes.

Revenant à son schéma il essaie d'expliquer (avec peine) que le carré bleu se trouve dans chacun des deux ensembles, car c'est aussi une forme, et c'est bleu.

3^o Le carré bleu est à l'intérieur de l'ensemble de tout, mais pas dans l'ensemble de tout.

Ça s'appelle ensemble de tout parce c'est pour tous ceux qu'on ne peut pas placer dans le tableau.

4^o L'intersection, c'est une espèce d'ensemble ... plutôt une chambre. C'est un truc croisé. 2 étiquettes qui se croisent pour mettre les autres trucs.

5^o Il accepte tout d'abord le truc de Martine "ça fait plus d'ordre"

mais n'accepte pas de mettre un Δ_j là (X)

Puis hésitant à le mettre là (X) parce que Δ ou là (•) parce que jaune, Δ_j

il en vient à refuser la solution comme "débile".

Notes :

1^o Laissé libre, Vincent a reproduit ici un exercice fait et discuté avec la maîtresse (sans que je le sache à ce moment (cf. pg. 164).

On a un bon exemple de ce qu'une relation logique : articulation de deux niveaux différents : forme - couleur est plus signifiante que des relations ad hoc du type : tous les verts sont ronds ou encore tous les triangles sont jaunes.

La difficulté d'explicitier la relation d'inclusion (qui est juste évoquée dans mon résumé). Avec cette distinction surprenante entre "être à l'intérieur" et "être dans". Adaptation des termes à une tâche qui est un peu contradictoire.

2^o La réaction à la solution de Martine est très intéressante. Relisez-la.

6. Confrontation JEAN-LUC / DENYS

Toujours le même matériel. Avec : (verts) \subset (ronds)

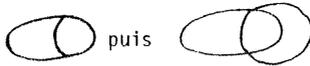
Jean-Luc

Denys

Au début, ils décrivent le matériel et proposent une partition couleur/forme .

Je leur demande de faire l'intersection des verts et des ronds.

Jean-Luc fait un dessin.

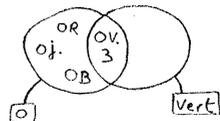


Il préférerait l'intersection des bleus et des ronds.

Il place les formes et dessine au feutre un carré vert dans la plage vide.

Denys ne dispose pas de jetons alors

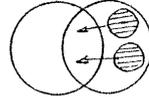
dessine : (3 ronds
verts)



Il cherche à voir s'il n'y a pas d'autres formes vertes.

(à Denys) non y a pas d'autres verts. Y a pas de carrés verts Jean-Luc !

Denys dessine alors 2 ronds verts dans la plage vide, et met une flèche à chacun :



"il va là-dedans (dans l'intersection) mais comme il n'y a pas d'autres verts, il va là t'es d'accord ?"



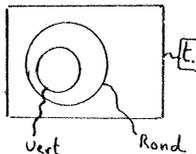
Vous n'avez pas tout placé :

J'ai déjà fini.

Denys fait un cadre (ensemble de tout) et dessine toutes sortes de formes non rondes, y compris des Δ , \square , \square verts !

On passe ensuite à une critique mutuelle et une correction. La faute de Denys Δ , \square , \square verts à l'extérieur n'est pas relevée par Jean-Luc.

Quelqu'un m'a proposé ça



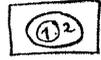
Jean-Luc : ça va pas...
le vert il est dans les
ronds... pis alors, les ronds
il est dans les verts !?

Denys : c'est juste, c'est quand même une intersection.

C'est quand même juste.

L'étiquette c'est "vert",
c'est pas rond vert !

quand même.

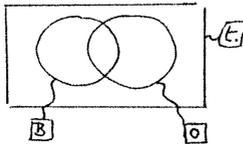


Là (1) c'est vert,
et c'est rond (2). C'est vert et
rond.

T'es d'accord avec Denys ?

C'est bizarre cet ensemble
qui est dans un autre en-
semble !

Je leur propose de remplir



et cela donne une discussion sur la signi-
fication des étiquettes:

("Remarque:
la discus-
sion avec
Monica
ressort,
comme
chez
Vincent).

Y a quelque chose qui joue
pas. Il montre les formes
bleues non rondes. C'est pas
marqué des formes, tu ne
dois par mettre des formes.

Mais c'est bleu !

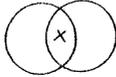
Mais y a pas mis d'étiquette
forme !

mais c'est bleu - pointant les
formes - ça c'est bleu, ça c'est
bleu , ça c'est bleu

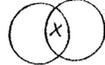
Bon, disons que c'est juste.

Où est l'intersection ?

Jean-Luc montre du doigt
un point dedans:



Je ne suis pas d'accord,
c'est là



J'explique ce que Denys a fait.

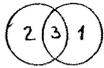
Je ne suis pas d'accord.

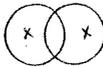
L'intersection est au milieu.

Est-ce que l'intersection est un ensemble ?

Non. L'intersection c'est une
chose qui s'est produite par
des groupements. Si il y
avait pas les groupements,
y aurait pas l'intersection.

Il est pas d'accord pour le Δ
et le \square (la forme) mais il
est d'accord pour le bleu !

Denys montre  succes-
sivement ces parties et dit :
des ronds, des bleus.

Ça  c'est les deux
ronds, c'est les deux qui font
l'intersection.

Je dis je suis d'accord avec Jean-
Luc. L'intersection il prend deux
choses, il fait deux choses une
couleur une forme. L'intersection
c'est bleu, c'est rond, c'est
deux choses !

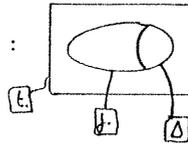
non c'est au milieu.
 Les ronds bleus ils sont où ?
 dans l'intersection.

Y a une étiquette pour l'intersection ?
 non

dans l'ensemble des bleus et dans
 l'ensemble des ronds. Il prend tou
 jours deux choses.

non

Je propose alors la situation suivante :
 (Pas de Δ non jaunes)



avec remplissage.

Il devrait faire une inter-
 section.

d'accord.

C'est des triangles jaunes,
 c'est plus des triangles !

Le triangle, il est là 
 mais le rond (jaune ?) il est pas
 là.

Non ! Ici (il montre l'éti-
 quette Δ qui n'a pas de
 couleur) c'est plus que des
 Δ sans le jaune ; Si
 c'était un Δ on aurait
 pu le mettre là !

Mais c'est triangle et jaune.
 C'est aussi des triangles jaunes.

Jean-Luc aimerait d'autres triangles.

Que dis-tu Denys ?

Pour Jean-Luc c'est une barre de séparation.

Jean-Luc met un triangle bleu et un triangle rouge là



Jean-Luc trace cette étiquette et rétablit une étiquette non colorée,

Y a déjà une intersection. Ils sont pas coupés en deux (l'ensemble des jaunes n'est pas coupé en 2)

C'est seulement une barre pour les triangles et les triangles jaunes.

Y a pas d'intersection.

L'ensemble, il est pas coupé en deux. Y a pas d'intersection, les ils sont aussi en jaune.

C'est un peu faux.

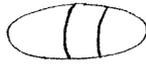
On n'a pas le droit de mettre du rouge ou du bleu. Il colorie l'étiquette Δ en jaune.

Trouvez donc un moyen pour vous mettre d'accord !

Jean-Luc on n'a pas le droit de mettre deux trucs (attributs) dans une étiquette.

Faut faire une intersection.

Faut faire une intersection,
faut mettre un 2e trait :



d'accord.

On aurait pu faire ça :



oui

oui

Même type de désaccord pour l'ensemble de tout : Pour Jean-Luc c'est seulement la couronne extérieure "c'est où on peut mettre les autres formes et où on peut pas mettre d'étiquettes". Pour Denys ça recouvre tout, même les ensembles à l'intérieur.

Pour Jean-Luc les ensembles sont "dedans l'ensemble de tout mais n'en font pas partie" ; et pour Denys "c'est dedans et ça en fait partie".

Pour ce qui concerne la solution de Martine, elle est tout d'abord admise, puis comme "il y a 2 intersections ?" elle est refusée. Le 3e ensemble est tracé comme n'existant pas. Les deux élèves sont d'accord.

Notes

1^o Confrontation qui se caractérise par le peu d'interaction entre les deux partenaires. Cela tient à leur attitude lors de l'interview.

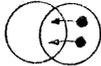
2^o Chacun réussit encore assez bien les tâches scolaires. Et pourtant, les points de vue sont complètement différents.

Jean-Luc ne se base que sur le diagramme, sur l'aspect spatial.

Il lit 3 cellules séparées, et les attributs sont aussi pris

comme exclus ( : ça veut dire que ce n'est plus que triangle, sans le jaune).

Denys lui a l'explication correcte. Il se base sur les relations logiques, qu'il "situe" très bien dans le diagramme. Ce qui ne l'empêche pas de proposer une dérogation dont le dessin est original :

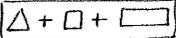


Le plus intéressant chez Denys c'est la faculté qu'il a d'expliquer toutes les subtilités du symbolisme (par exemple que "l'ensemble n'est pas coupé en deux") et ceci à partir de la compréhension de la notion qu'il a. Jean-Luc lui est beaucoup plus terre-à-terre et décrit ce qu'il voit.

7. SABINE - KATIA

1° Sabine et Katia partent sur l'idée de faire "des groupements", comme pour le calcul en différentes bases. Mais elles lient ça à la couleur ou la forme des pièces. Ce qui les amène à des groupements de base différent : 3 O V 4 Δ B 1 □ R ... Et n'est pas satisfaisant pour le codage. De plus peut-on faire un grand groupement avec un petit groupement de 2 ronds et un petit groupement de deux rectangles ... Finalement elles décident d'elles-mêmes d'abandonner cette idée et de "faire des intersections".

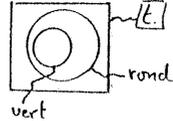
2° Elles décident de faire  après que tout ait été placé,

elles font une "corde" de l'ensemble de tout. Mais il y a une discussion pour l'étiquette : Sabine met :  . Katia met  puis à cause de ma question (et le Δ j ?) elle met  . Sabine ne comprend pas cela :  ça suffit. Katia explique qu'on peut

pas tout mettre puisque si on mettait à l'extérieur un \triangle jaune ou un \circ jaune, ça n'irait pas. Sabine rétorque que "pour ça" (\circ et jaune) il y a des étiquettes

3^o Je leur demande alors de faire l'intersection des ronds et des verts. Elles dessinent  , cherchent des formes vertes non rondes, n'en trouvent pas alors les dessinent. Je n'ai pas pu m'opposer à ce dessin.

4^o Je propose alors le diagramme suivant



Katia

ça ne marche pas.

Sabine

Elle prend un rond vert et dit qu'on ne peut pas le mettre dans l'ensemble de verts puisque c'est un rond.

Elle veut dessiner un carré vert dans l'ensemble des verts.

Non, on ne dessine pas cette fois.

Ah oui... mais c'est dedans !

Allez ça va.

Elle met tous les ronds verts dans le petit ensemble.

Elle place les autres.

Elle est d'accord.

Je prend un rond vert et je le place hors de l'ensemble des ronds en disant :

"c'est aussi de tout !"

On ne peut pas.

On ne peut pas mettre là :

(verts) parce que c'est vert,

mais là c'est rond ...

Oui on peut.

Ça (ext.) c'est tout. Des carrés,
des triangles, des rectangles
sauf des ronds

pis aussi des ronds.

L'ensemble de tout c'est un ensemble avec des formes qui sont pas dans l'ensemble de ronds et pas dans l'ensemble de verts.

Ici, y'a des ronds pis c'est un ensemble de ronds, pis là, c'est des ronds verts, c'est comme une intersection.

Sabine dit que c'est comme un intersection. T'es d'accord Katia ?

oui.

C'est comme une intersection?

Oui puisque ça c'est rond et ça c'est vert.

pis ça c'est "tout"

C'est l'intersection de "tout" de rond et de vert ?

Katia montre les trois plages
par pointage.

C'est pas tout à fait une intersection. L'ensemble de tout c'est pas une intersection.

C'est comme ça une intersection

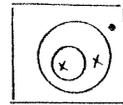


Ben oui ! c'est une intersection
 puisque c'est dedans !
 C'est comme ça une intersection

Tu as dit, y a une intersection là, alors expliques-toi.

à peu près ...
 l'ensemble de tout qui est dans
 un rond ... (corde)
 l'ensemble des ronds est dans l'e
 semble de tout, et l'ensemble des
 verts est dans l'ensemble de tout
 non dans l'ensemble des ronds et
 de tout.

elle est où l'intersection ?



ici (x) et ici (x)

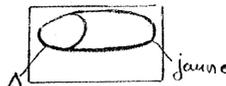
ici (x,x) et pas là (•) ... je
 ne sais pas.

T'es d'accord Katia ?

Je ne sais pas.

En fin d'entretien on reviendra sur cette question de l'ensemble de tout
 et Sabine et Katia défendront que l'ensemble de tout, c'est pour tout ce qui
 reste, tout ce qui ne va pas dans les ensembles. Comme je rappelais ce qu'elles
 disaient sur l'intersection (ci-dessus) elles ne savaient plus ...

5⁰ Je propose alors avec le matériel qui n'a comme triangles que des triang
 jaunes, de remplir ceci :



Katia voudrait faire "une"

intersection :



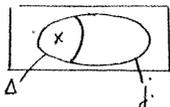
Je m'y oppose.

Elle place les triangles jaunes sur la ligne de séparation.

Katia fait même un trait de crayon qui partage le triangle jaune en deux.

Sabine qui est d'accord explique : ça doit être dans le centre de triangle et de jaune puisque c'est triangle jaune.

On pourrait le mettre là ?



Non, c'est triangle jaune et jaune

Elle colorie l'étiquette 

en jaune.

Sabine dit qu'on n'a pas le droit de mettre deux étiquettes jaunes.

Mais avant, les verts, vous n'aviez pas mis de trait dessus ?

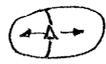
Mais non puisque c'est dedans.

puisque avant les verts sont dans l'ensemble des ronds.

Mais là les triangles sont dans l'ensemble des jaunes ?

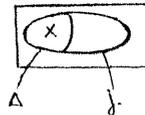
Ils ne sont pas dedans, ils sont à côté.

Katia met des flèches partant
de chaque côté des Δ_j .



Sans rien faire avec le crayon, vous placez ça : ΔB et ça ΔR .

elle les place à leur place dans
l'ensemble des triangles.



Et ceux là, Δ_j , ils sont à deux endroits
oui.

Bon maintenant vous pouvez prendre un crayon !

ouf !

Elle fait alors le trait qu'elle
voulait faire au tout début :



et trace les
flèches qui

allaient dans les 2 parties.



Y a plus de flèche ?

Pisque c'est dans une intersec-
tion avant y'avait pas d'inter-
section.

Est-ce que l'intersection est un ensemble ?

Ben ouais. parce qu'on peut mettr
des formes dedans. Partout où
on peut mettre des formes dedans,
c'est une intersection.

Katia dessine :

 c'est une intersection
 et c'est l'intersection de deux
 ensembles.  c'est l'inter-
 section de 

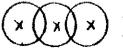
Mais Sabine et Katia sont contre le fait de mettre une étiquette à l'intersection.
"Car c'est déjà deux choses, alors ça peut pas être une troisième. Si c'est rond et jaune, ça ne peut pas encore être triangle".

6⁰ Martine a fait comme ça : 
 et là on peut mettre une étiquette triangle, jaune et triangle
 jaune.

Mais y a 2 intersections ?

et là on peut mettre une étiquette triangle, jaune et triangle jaune.

Y a déjà une étiquette triangle et déjà jaune, ça ne sert à rien triangle jaune.

Martine a mis les objets comme ça (je remplis comme Martine les pages: )

ça c'est juste.

et là on met quoi ? 

Y a que l'étiquette qui est fausse alors ?

(Remarque :
 j'avais
 fait bien
 3 ronds 
 son dessin
 est donc
 faux !)

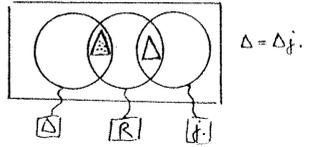
ça (elle montre l'ensemble du centre) c'est pas une intersection.
 C'est un groupement.

Elle dessine à côté 

Cette espèce de parenthèse c'est un groupement, y a droit à une étiquette mais ni jaune, ni

triangle. Rouge par exemple.

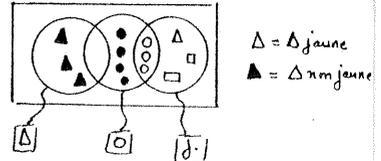
Ensuite elle dessine 2 triangles:



Bon mais faut bien mettre les jetons.

Sabine se trompe avec son étiquette \boxed{R} qu'elle lit maintenant : rond.

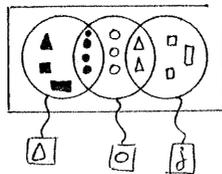
A partir de là ce sera Δ, \circ, δ .



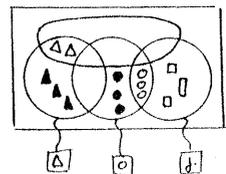
Je montre que les triangles jaunes peuvent aussi aller dans l'ensemble des triangles

Katia réarrange et rajoute

des formes \blacksquare et \blacksquare (non jaunes)



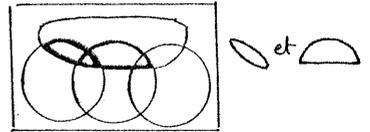
Je ne suis pas d'accord avec les triangles jaunes on doit faire un petit rond :



C'est quoi ce nouvel ensemble ?

C'est les triangles jaunes
(elle fait une étiquette).

C'est une intersection. Elle
montre les deux parties (qui
ressemblent à une intersection)



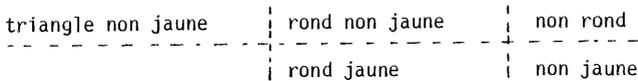
Notes :

1^o Ce qui prime encore une fois, ce sont les relations spatiales avec cette représentation de l'intersection comme le milieu du dessin. Quant il n'y a plus qu'un trait, on met l'objet de façon à ce qu'il chevauche la séparation, on coupe même l'objet en deux, on met des flèches pour indiquer la double appartenance.

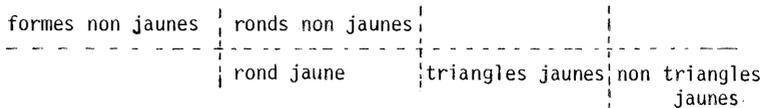
L'intersection est bien un lieu à part pour les objets doublement plaçables. L'idée du diagramme est donc comprise mais de façon très approximative.

2^o Les derniers diagrammes sont intéressants dans la mesure où apparaissent des cellules bien disjointes.

a) première classification :



b) deuxième classification :



c) Puis cet ensemble horizontal devant faire la liaison directe entre l'ensemble des triangles et celui des jaunes, pour placer les triangles jaunes.

8. Conclusions.

8.1.

Premières remarques

1⁰ Donc il n'est pas totalement illusoire de demander leur avis aux élèves, fussent-ils jeunes. Evidemment, c'est un exercice académique (dans un certain sens), mais pas plus que bien des choses faites en classe.

En général on ne pense pas faire de tels entretiens car on ne vise, dans les leçons des mathématiques surtout, qu'un fonctionnement. Et les attitudes se partagent entre un gonflement exagéré ("voyez ce que ces braves petits font actuellement") et un dénigrement total ("qu'est-ce que ça peut bien signifier pour ces braves petits"). Oscillation qui peut durer longtemps tant qu'on ne considère pas comme un fait objectif la transposition.

2⁰ Les entretiens présentent des faits particuliers, je dirais plutôt, contextuels. D'où la nécessité de les présenter en détails (dit en passant, j'espère que l'ensemble des lecteurs qui se sont ennuyés à la lecture des protocoles est inclus dans celui des lecteurs qui se sont ennuyés aux parties II et III). D'où le regret aussi de n'avoir pas pu faire de tels entretiens avec tous les élèves de la classe.

Avec de tels entretiens, il y a deux points très positifs. D'une part, on touche à une certaine appropriation par l'élève de la connaissance enseignée. D'autre part, pour ce qui nous concerne nous adultes, c'est la possibilité de comprendre et d'interpréter les productions des élèves.

3⁰ La méthode utilisée pour ces entretiens où on confronte sans cesse l'avis de l'élève à une situation problème qu'il doit résoudre fait qu'il est bien

question de ce que les élèves ont appris en classe et évite que l'on ne se disperse trop (et c'est pas l'envie qui manque quelquefois).

4⁰ Enfin, revenons-en à la transposition, les protocoles illustrent parfaitement tout ce que j'ai dit sur la transposition. Les principaux points démontrés étant :

a) On ne peut pas objectiver un fonctionnement (souhaité chez l'élève) en un objet didactique, fût-il un objet de la logique. (Entendez par objet didactique, un savoir faire comme : remplir correctement un diagramme de Venn, par exemple).

b) On voit aussi l'obstacle que le matériel et les relations proposées opposent à l'objet de l'enseignement. Que l'on compare la façon d'aborder le problème : "verts" inclus dans "ronds" et "bleus" inclus dans "formes".

c) Les représentations des élèves se rapportent à la tâche qui, vue globalement, embrasse beaucoup d'aspects diversement compris selon les élèves et selon le moment de l'entretien. Désignation d'ensembles ; ensembles, étiquettes et objets à différencier ; nature de l'intersection et problème de symbolisme ( ou ) ; interprétation des relations spatiales dessinées dans un diagramme ; utilisation du diagramme pour représenter les ensembles. (Ainsi le diagramme  représente d'office l'intersection, même si, de fait, les ensembles sont inclus).

d) Se mêlent aussi de continuel glissements de sens et une liaison synchrétique avec des préoccupations enfantines (Histoire de maison, de chambre d'invités, interdictions diverses etc...). Mais une préoccupation enfantine peut être aussi scolaire. (Le rattachement à un exercice fait précédemment en classe, ou le rattachement à d'autres chapitres).

e) Le rapport de la production de l'élève avec les conditions et les contraintes. Ainsi que l'aspect contextuel de certaines réponses qui un moment paraissent des solutions puis qui s'estompent quitte à réapparaître à nouveau.

8.2.

Conclusions.

Dans l'esprit du programme, les ensembles devraient être un modèle aidant les élèves à effectuer des classifications. Or on voit dans tous ces protocoles les élèves faire une classification description du matériel en regroupant les jetons par formes et par couleur. Ensuite quand cela est clair pour eux, ils passent aux activités de remplissage proposées (ou qu'ils se proposent). Activités d'ailleurs bien plus valorisées que le classement.

Ce n'est donc pas directement que "les ensembles" sont utiles aux élèves. Et ces tâches ne sont en définitive que l'occasion pour eux de faire de la logique mais ça n'est pas encore un moyen de faire de la logique. J'ai donc mis le mot "ensemble" entre guillemets car il convient de bien distinguer ces objets scolaires, que l'on représente par des diagrammes, des classes que les élèves font quand ils décrivent leur matériel.

Pour preuves :

- Le protocole d'Olivier : Tout d'abord, je réalise la figure d'un ensemble de ronds en arrangeant les jetons de sorte que les ronds soient tous en un tas central et que les autres formes l'entourent tout en étant mélangées. J'aimerais qu'Olivier y voie l'image de l'ensemble des ronds. Mais Olivier me répond très justement qu'il voit comme ensembles : les ronds, les triangles, les carrés, etc... D'une part Olivier a raison. Mais d'autre part il a "scolairement" tort de ne pas pouvoir situer ma question. Et cette difficulté n'est pas un hasard

Dans la suite du protocole, Olivier a beaucoup de peine avec les diagrammes de Venn, il a une conception très sommaire de l'intersection ; et il diverge sans cesse du diagramme de Venn aux tas (classes) qu'il ferait pour décrire le matériel : il reste accroché à sa lecture des objets.

- Le protocole de Michel. Quand Michel va faire l'ensemble des verts, il se contente de corriger sa corde (plus d'intersection) et d'écarter les jetons ronds qui ne sont pas verts. Il a donc bien noté que les verts sont tous ronds. Mais il ne peut réaliser la figure ensembliste de cette inclusion. Il la refuse même. Considérer trois ensembles c'est considérer trois "cordes" et il dessine trois "patates". Ensuite, il essaie de les remplir et de s'y adapter. Il se trompe, va même jusqu'à dire qu'il y a deux ensembles de ronds ! Plus tard, il refuse de considérer l'inclusion qui, pour lui, se limite à un rapport de taille, un grand ensemble et un petit : . Constituant ainsi une plage qui reste vide, faute d'occupant (mais pas l'ensemble vide) qu'il nomme même : "les toilettes !"

- Et tous les élèves font de même. Considérer un ensemble, c'est lui attribuer un diagramme. Voyez comment, en fin d'interviews Martine est ramenée sur son schéma  (et je montre par là que même si elle se l'interdit, elle y revient car ce schéma est réellement fonctionnel pour elle). De même, pour faire l'intersection des triangles et des jaunes, tous font  alors qu'il n'y a pas d'autres triangles que jaunes.

Ce qui frappe ce n'est pas tant la production de ces figures mais la rigidité des élèves sur ces figures ce qui montre à quel point l'ensemble est un objet figural pour eux.

- Ou encore Sabine et Katia qui se trompant d'objet scolaire partent sur les groupements (partie non donnée en protocole mais évoquée). Or les groupements qu'elles feront, ressemblent fort à des tas, elles ne mettent pas n'importe quoi ensemble. Puis, constatant l'impossibilité de concilier groupements et ensembles, elles se "branchent" sur l'intersection.

etc...

Donc, même dans ce cas où l'objet enseigné se veut proche des activités mentales de raisonnement et de pensée, on n'échappe pas à ce que l'objet enseigné soit un objet formel. Il s'établit une distance entre le tas, la classe de la partition, et l'ensemble du diagramme. Tout l'intérêt de ces protocoles est de voir les élèves essayer de nouer les deux bouts sans y arriver vraiment.

En résumé il ressort des protocoles les points suivants :

1^o Il y a deux moments à l'exercice. L'un qui est celui de la description des objets par une activité de mise en tas (classes) successifs et exclusifs (partition).

2^o Dès qu'il est question de "faire une intersection", l'élève se place dans un autre type de tâche qui est le remplissage du diagramme de Venn. Tout d'abord il y a le dessin du diagramme  ; puis des étiquettes, espèce de poteau indicateur pour les ensembles, mais désignant prioritairement les "ailes du papillon" :  . Ou, dit autrement, les "ailes du papillon" sont l'endroit pour les attributs "purs" (comme dit Denys : "Ils ne sont que triangle"). La logique du remplissage, c'est une logique de l'exclusion : il s'agit de trouver la place de chaque élément.

Cependant, l'élève peut ensuite en revenir à sa façon spontanée de classer en analysant le diagramme une fois rempli (ex.: Olivier, Katia, Sabine).

3^o Mais le schéma  sert prioritairement à mettre l'intersection en évidence, avant qu'il ne soit question de remplissage où l'intersection ne sera plus qu'un élément parmi d'autres. (Que l'on songe que ce schéma ne représente pas pour la plupart des gens la réunion).

On voit alors les élèves insister sur deux choses (qui peuvent être contradictoires pour eux). Soit sur la position de l'intersection : au milieu, entre les deux ensembles, soit sur la production de l'intersection par combinaison de deux attributs bien différenciés par les ailes du papillon (et la position des étiquettes), (comme Jean-Luc, Denys).

Les exemples en outre c'est l'intérêt que portent les élèves à la solution de Martine , c'est aussi les termes de petite chambre (bien que ce terme ait été encouragé par la maîtresse) qui prend rapidement le sens de chambre de passage, chambre des invités etc...

Or ceci est une façon de voir l'intersection qui est tout à fait cohérente avec la façon dont l'intersection est présentée à travers ce programme. On aurait pu aussi concevoir l'intersection d'une autre façon :

entre l'exclusion  et l'inclusion , une situation intermédiaire, une sorte d'inclusion plus générale . C'est privilégier ici un aspect "relation" de la notion, alors que l'autre interprétation insiste sur l'aspect opération (mathématique s'entend).

CHAPITRE V

PRODUCTIONS SCOLAIRES

Que produit-on en classe ? Nous sommes assurés de ne pas trouver la belle ordonnance d'une illustration particulièrement simple de la logique des classes. Au contraire, voilà, devant nous, un enchevêtrement d'éléments divers, disparates mêmes, dû aux multiples adaptations réciproques de l'enseignement et de l'apprentissage.

Malgré tout, la restitution analytique des conditions dans lesquelles s'est effectué le travail ainsi que la caractérisation logique de la classification telle que l'élève l'a complétée (sans doute ne peut-il pas la lire ainsi), va permettre de dégager un certain nombre d'observations qui se répètent et éprouver les hypothèses interprétatives présentées au chapitre III. Principalement se dégagera l'intégration de classifications partitives, avec opposition par les élèves des caractères considérés, et de l'image diagrammatique qu'ils essaient de restituer. Ce qui fait penser que les élèves n'ont comme repère que la logique particulière des tâches qu'on leur demande et une image, reconnaissable, de la forme de la réponse correcte.

Ce chapitre est construit en 3 parties. La première consiste en l'analyse diachronique des productions des élèves à des exercices écrits. Ceux-ci ont été tous proposés par Monica, sauf un. On suivra ainsi le travail des élèves leur progression et l'apprentissage de leur tâche. Mais on verra ainsi, qu'à la faveur de changements dans les conditions de travail, figures non données, ou encore plus nettement, nombres à classer, les mêmes types de traitements erronés apparaissent, montrant qu'ils sont bien ancrés dans les représentations des élèves. La

seconde partie consiste en la présentation et l'analyse d'un exercice scolaire qui a pris un cours inattendu, inconcevable même aux yeux de celui qui ne saurait se décentrer de la signification attribuée par les adultes aux tâches scolaires. En interviewant Monica, j'ai tenté de montrer comment tirer parti de ces confrontations involontaires de conception entre maîtres et élèves, et combien le savoir du maître était directement en cause dans l'échange didactique. La troisième partie montre quelques exemples de productions collectives, et en particulier, la production finale par les élèves de l'image diagrammatique voulue par le maître.

1. Productions écrites des élèves.

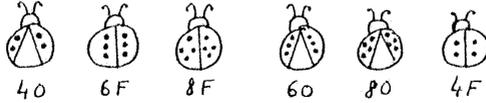
Je propose de lire les réponses des élèves de façon globale, comme je l'ai montré au chapitre III. Il faut se demander : qui est avec qui ? qui est séparé de qui ? C'est-à-dire de se centrer sur le résultat du placement comme sur une classification. Il ne faut pas se contenter de répéter les fautes de placement des élèves (ce qui consiste à se demander seulement : qui est où ?) évaluation qui ne peut se faire qu'en référence à une solution exacte, attendue par le maître mais à laquelle justement il est le seul à avoir accès. Bien sûr, si on demande à l'élève quelle classification il a fait, il aura difficulté à répondre, et de toutes manières ne fera que rarement le lien entre cette question et la tâche qu'il vient d'effectuer. Il n'empêche que la façon dont l'élève organise, par sa lecture, ses données, doit forcément se traduire au niveau de ses placements, et c'est ceci que j'essaie de repérer. Pour ce faire je dispose des hypothèses analytiques exposées au chapitre III. La technique est donc d'examiner en détail la production des élèves et de tenter d'en donner une caractérisation logique globale, qui ne sera pas attribuée en tant que telle à l'élève (c'est une lecture de l'analyste) mais aura pour fonction de caractériser et de permettre la comparaison des productions et de leur structure.

1.1. Premier travail écrit (24.11.78 1^{ère} année)

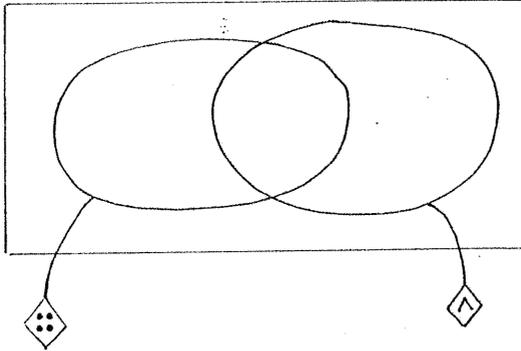
Au cours de l'année, les problèmes relatifs à la tâche ne se posent pas tous en même temps. Apparaissent au fil des leçons des points que la maîtresse juge urgent de corriger : par exemple, le double placement des éléments, ou le remplissage de toutes les plages (unicité, exhaustion). D'autres problèmes sont laissés à plus tard.

A travers l'analyse de deux fiches de contrôle proposées par Monica à 15 jours d'intervalle, on voit comment cela se passe.

abréviations



ailes ouvertes (O.)
 ailes fermées (F.)



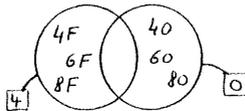
Consigne : indiquer la place de chaque coccinelle par une flèche.

a) une seule réponse tout à fait correcte (Martin).

b) parmi les réponses fausses, deux élèves placent toutes les coccinelles dans la plage (Joanne, Sophie). Et un élève fait des flèches verticales plaçant les deux premières pernettes à gauche et les 4 autres à droite .

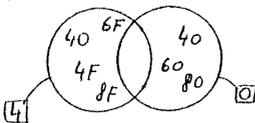
c) 4 réponses d'opposition simple, fermé/ouvert. (Olivier, Michel, Vincent D.

Jean-Luc) 4 élèves

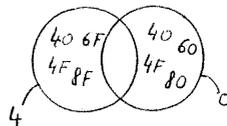


d) oppositions simples avec un dédoublement des coccinelles à 4 points (adaptation aux étiquettes) 2 élèves

d_1 (Rachel)

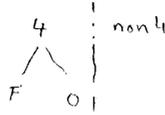
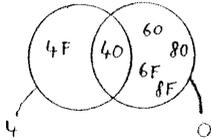


d_2 (Fabrice)

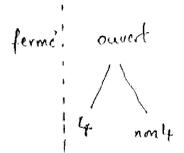
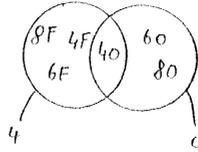


e) "Dichotomies en deux temps" 4 élèves

e_1 (Céline, Martine, Mélanie)



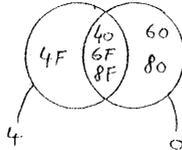
e_2 (Denys)



Remarque : Ceci ne représente pas forcément la procédure des élèves.

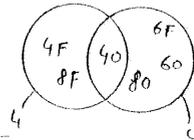
f) Placement "problématique" de 6 F et 8 F 3 élèves

f_1 (Cathy, Sabine)



éventuellement deux dichotomies qui se chevauchent :

f_2 encore moins claire (Vincent L.)



Remarques analytiques.

1^o Toutes les coccinelles qui sont placées en 2 endroits différents sont à l'origine de deux flèches distinctes.

2^o Presqu'aucun élève n'utilise la plage externe. Ceci est typique du début du travail sur les diagrammes de Venn. Les patates sont vues comme les enclos où il faut placer tous les éléments.

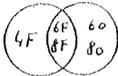
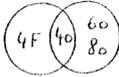
3^o Toutes les réponses (sauf 3) offrent un placement correct de 4 F, 8 O et 6O. Ce qui montre que les étiquettes ont été prises en compte.

D'autre part, tant le dédoublement de 4 F ou de 4 O que le fait que 6 F et 8 F sont placés au même endroit (sauf f_2), montre que les élèves tiennent compte des comparaisons entre éléments.

Ainsi 4 F est mis avec 4 O parce que toutes deux sont des coccinelles à 4 points (Rachel, Fabrice) mais 4 F est aussi mise avec les autres fermées (et 4 O avec les autres ouvertes).

Les élèves doivent décider où placer les coccinelles 8 F et 6 F, et comme les étiquettes n'indiquent pas directement leur place, ils sont obligés de recourir à d'autres mises en relation. Ça donne tout autant : les mettre avec 4 F (du côté de l'étiquette $\begin{pmatrix} 4 \\ \end{pmatrix}$), parce que "fermées", ou les mettre avec 8 O et 6 O (du côté de 8 O et 6 O) parce que "non 4". Il est à remarquer que les élèves n'ont pas tellement penché pour cette dernière solution, malgré la répétition $\begin{matrix} 6 F & 8 F \\ 6 O & 8 O \end{matrix}$. Ceci est soit dû à l'aspect figuratif qui a fait prendre en compte plus fortement le caractère ouvert/fermé $\begin{matrix} \text{O} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{O} \end{matrix}$. Soit parce que ce dernier caractère est plus véritablement dichotomique. (0/F contre 4/6/8).

4⁰ Un certain nombre d'élèves savent déjà où placer 4O dans l'intersection.

Le placement des élèves f_1 est intéressant, et a été rencontré plus tard très fréquemment. Il peut provenir soit d'une considération de l'intersection comme un lieu à part, où on met les éléments spéciaux (4 O, ou 8 F, 6 F), soit (et c'est plus probable) du fait que l'élève considère l'intersection comme combinaison de 2 caractères sans autre préjugé. Le schéma serait alors la superposition de  et de . Les éléments de l'intersection prennent un caractère à gauche et un à droite. (c.f. Denys chap. IV, al. 6 p. 204).

Conclusion :

Les réponses les plus élémentaires sont figuratives (disposition des coccinelles selon leur place par rapport au diagramme). Ensuite, il y a constitution

de deux classes bien séparées avec même reprise deux fois d'une figure. Puis il y a des essais de combiner deux dichotomies. Soit selon une première coupure



puis une seconde



, soit par "superposition".

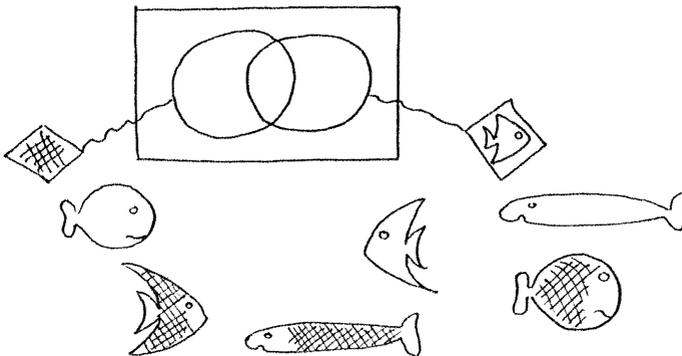
Ceci montre que les élèves recourent à la comparaison de leurs figures pour faire le remplissage, et qu'ils ne considèrent pas les deux attributs de façon absolue. Ou, dit autrement, que l'élève quand il veut placer une figure ne s'occupe pas seulement des étiquettes (ou attributs) mais qu'il regarde aussi en fonction de la place attribuée aux autres figures.

1.2.

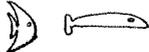
Quinze jours plus tard. (8.12.78)

Imaginons ce que Monica a dû expliquer : tout d'abord qu'il faut s'en tenir aux étiquettes (c'est comme ça qu'elle compte faux le placement de 8 F et 6 F), ensuite que si un élément ne répond à aucune étiquette, il faut la mettre dans la page externe. Enfin que les doubles flèches sont interdites.

Voici le résultat d'un travail donné 15 jours plus tard.



Consigne : indiquer la place des éléments par une flèche.

Note : Monica, pour éviter que les étiquettes soient lues en opposition : quadrillé/blanc leur a dit : "faites attention à la forme!" En conséquence de quoi certains élèves ont interprété la forme-au-sens-strict :  (je dirai: triangulaire) d'autres la forme-au-sens-large :  (je dirai: pointu)

Abréviations : Q = quadrillé B = blanc
R = rond L = long T = triangulaire
P = pointu.

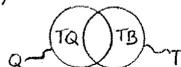
Résultats :

- a) réponses exactes (Fabrice, Martin, Sabine, Vincent L.) (4 élèves)
- b) oppositions simples (4 élèves)

b₁ (Carine Joanne Sophie)

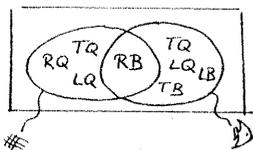


b₂ (Céline)



- c) opposition des deux ensembles : quadrillé/pointu 1 élève

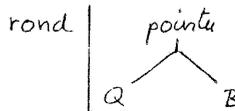
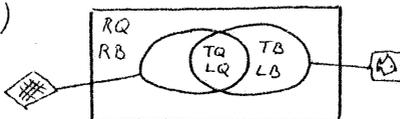
L'élément "autre" par rapport à cette opposition ; le poisson blanc et rond est mis à l'intersection.



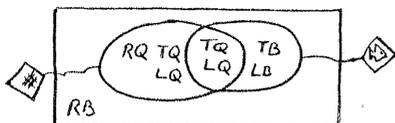
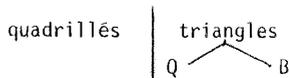
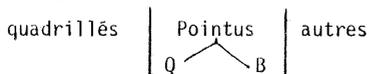
il y a recours au dédoublement des flèches pour placer un poisson en deux endroits différents.

- d) dichotomie en deux temps 3 élèves

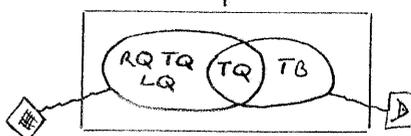
d₁ (Michel)



- d₂) et d₃) avec le même type d'opposition que vue en c).



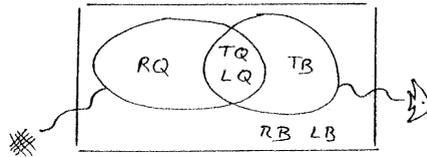
d₂ (Jean-Luc)



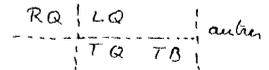
des poissons ne sont pas mis.

e) autres 3 élèves

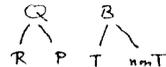
e₁) 2 réponses (Denys Martine)



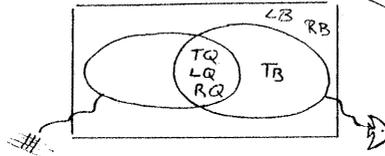
Soit il y a deux oppositions qui se recouvrent.



Soit deux dichotomies



e₂) (Rachel)



Le placement des quadrillés dans l'intersection est bizarre. Il ressort 3 classes disjointes : quadrillé / la classe singulière \rightarrow / autres.

Remarques analytiques :

1. Malgré la "petite phrase" de Monica, 3 élèves font encore une seule opposition : quadrillé/blanc, et une élève surmonte la remarque en opposant \rightarrow blanc à \rightarrow quadrillé.

2. Cependant pour tous les autres, il y a progrès dans la prise en compte des étiquettes et au placement qui les respecte. Ainsi \rightarrow a) il n'y a pas de formes non quadrillées dans ni de formes rondes dans b) il ressort de la plupart des réponses trois classes :

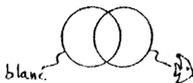
quadrillé / triangles (ou pointus) / autres.

c) Tout le monde a placé TB au bon endroit (TB correspond à l'étiquette). Et quand la plage externe est utilisée, on y trouve toujours RB (Et Vincent D. le met à part, dans l'intersection).

3. L'ambiguïté de l'étiquette \rightarrow et la façon dont les élèves ont procédé

est intéressante. Le poisson :  va où l'étiquette lui dit d'aller  .
Et les élèves recourent à la forme pour opposer  à  et  .

Il aurait été intéressant de voir ce qu'ils auraient fait pour le diagramme



De même, les réponses d_2 et d_3 nous le montrent, l'étiquette  est lue pour placer des figures dans  mais est reprise dans la comparaison des poissons longs (ou triangulaires, selon l'interprétation de la forme) entre eux.

Donc les attributs sont pris en compte à la fois dans la comparaison étiquette - figure et dans la comparaison figures - figures. Il en résulte que la paire TQ - LQ est partout présente dans une plage au moins.

4. La réponse c) est intéressante et assez typique. Elle montre que l'élève a réalisé séparément les ensembles de tous les quadrillés, et de toutes les formes longues. La forme ronde et blanche se trouve toute seule et a sa place à part, dans l'intersection.

5. Les élèves ont utilisé la plage externe et l'intersection. Il y a malgré tout encore des doubles flèches. Tout n'est pas réglé.

Remarque : Une analyse de ce type essaie de déceler derrière l'apparence des réponses des élèves les critères sur lesquels ils se sont le plus basés. Il faut comprendre que l'élève fait une classification dans un diagramme, et essaie de se plier à certaines règles qu'on lui dit (et redit) de respecter.

Didactiquement il est important de pouvoir lire le résultat de l'élève comme significatif d'une façon de penser, plus que de pointer séparément ses erreurs et signifier par là qu'il a mal fait ce qu'on lui demande.

Conclusion :

Il y a progrès dans la mesure où les élèves respectent plus les attributs.

Ceci tient sans doute aux explications de Monica.

Il y a aussi progrès dans la mesure où les élèves semblent essayer de combiner deux dichotomies.

Les résultats sont donc assez proches de ceux du premier travail.

Le recours au double classement est encore fréquent et montre que la place d'un élément est nullement exclusive pour les élèves.

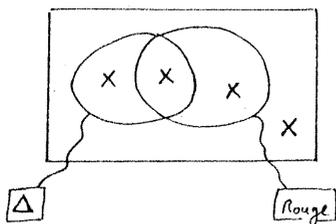
On remarque la difficulté soulevée par une étiquette qui est identique à un des éléments.

1.3.

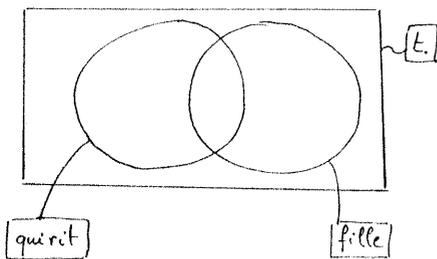
Travail de fin de première primaire.

Je vais citer maintenant un travail écrit fait en mai par Monica, et qui permettra de bien voir la distinction des tâches. Malgré tout, les réponses restent du même type que celles décrites auparavant.

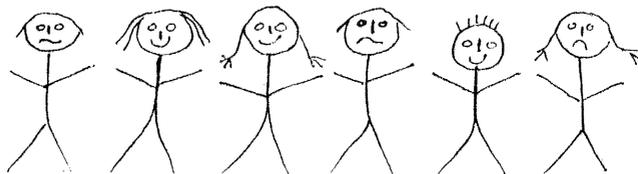
Il y avait trois questions concernant les diagrammes de Venn :



Consigne :
dessine à la place des croix

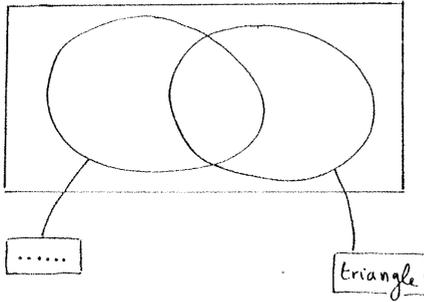


Consigne :
met des flèches



(abréviations : \overline{GR} FR FR \overline{GR} GR \overline{FR})

F = fille / G = garçon ; R = qui rit / \overline{R} = qui ne rit pas.



Consigne :

dessines et places ces formes dans ton dessin pour qu'il y en ait aussi dans la petite chambre.

(il y a une étiquette à remplir)

Remarques préliminaires :

1. Il est clair que ces questions qui figurent sur la fiche textuellement, ont nécessité des explications.

A la question 2. par exemple, ils ont décrit les figures et se sont mis d'accord sur le fait que la première figure représentait "un garçon qui ne rit pas".

A la question 3., ils n'ont pas reproduit les formes mais ont tracé des flèches de la figure à la place qu'elle doit occuper. On verra que beaucoup d'élèves ont mis l'attribut "gris". Ce qui provient sans doute de la discussion qu'ils ont eue avec Monica à propos de ce qu'elle leur demandait. Mettre la bonne étiquette puis remplir le diagramme. On verra aussi que beaucoup des réponses ne tiennent pas compte de l'attribut gris qu'ils ont eux-mêmes mis en étiquette.

2. On remarque que Monica a recours à des étiquettes - mot. Ceci pour éviter les ambiguïtés rencontrées avec le poisson  ou encore avec les marguerites . Monica s'est fait un principe de recourir au mot pour mieux représenter l'idée. Malheureusement tous les élèves ne lisent pas très bien (et pas volontiers). Ainsi, les élèves qui n'ont pas mis de fille dans  sont tous des élèves qui avaient de la peine à lire ! (De même pour ceux qui ne s'en

tiennent pas aux étiquettes dans les questions 2. et 3.).

Résultats :

a) 4 élèves ont fait tout juste (Jean-Luc, Martin, Mélanie, Sabine).

Carine	<p>pas de coloriage</p>	<p>R/\bar{R}, opposition, ne correspond pas aux étiquettes</p>	<p>partition selon la forme</p>
Cati	<p>juste</p>	<p>3 classes $\bar{R}/R/F$ 2 flèchent partout de \bar{FR}</p>	<p>solution juste mais ne répond pas à la consigne.</p>
Céline	<p>juste</p>	<p>opposition FR/\bar{FR}</p>	<p>juste</p>
Didier		<p>opposition G/F</p>	<p>ne remplit pas là où il n'y a pas d'étiquette.</p>

Fabrice	<p>non triangle triangle rouge non rouge</p>		<p>juste</p>
Joanne	<p>3 couleurs différentes.</p>	<p>qui rit / fille qui rit / fille un des FR, origine de 2 flèches.</p>	<p>gris triangle opposition gris - triangle 2 flèches pour triangle</p>
Martine	<p>juste</p>	<p>juste</p>	<p>gris triangle</p>
Michel	<p>juste</p>	<p>en deux temps R F G</p>	<p>juste</p>
Olivier	<p>opposition des deux attributs</p>	<p>opposition, G/F avec FR comme moyen terme</p>	<p>gris triangle malgré l'étiquette classement par forme</p>

Rachel	<p>fait un groupe de Δ</p>		<p>elle oppose carré noir à carré non colorié. Elle invente le \square.</p>
Roby	<p>opposition sur les 2 attributs.</p>	<p>opposition R/\bar{R} doublée de G/F.</p>	<p>selon la forme</p>
Sophie	<p>Variation des formes des figures rouges.</p>		<p>intersection mélange un de chaque, mais gris!</p>
Vincent D.	<p>juste</p>		<p>gris Δ non gris.</p>

Remarques préliminaires.

1. Les dessins rendent compte du placement des figures dans les plages. Mais ne reproduisent pas les positions exactes que les élèves ont attribuées aux figures. Par exemple : Fabrice à la question 2. n'a pas forcément placé \overline{GR} à droite, du côté de \overline{FR} , et Vincent D n'a pas forcément fait des couples dans la plage externe.

2. La question 1. est absurde. Et pourtant Monica ne l'a pas inventée, elle s'est inspirée d'une question d'examen de fin de 2e année. C'est absurde car ça n'a pas de sens de faire un schéma représentant des ensembles si on n'y met qu'une forme ! Comment se baser sur une représentation en terme d'ensemble?

En fait le diagramme de Venn est devenu l'objet à enseigner (et même plus, le remplissage du diagramme de Venn est l'objet visé). On s'éloigne de plus en plus du but visé qui est de parler d'ensembles aux élèves. Déjà les tâches proposées par Monica sont à la limite, car il y a bien trop peu d'éléments et on ne sait pas si l'élève fait des paires ou des collections plus grandes. Mais là, on a le sommet du ridicule.

Je propose d'examiner quand même les réponses des élèves, puisque c'est ce type de tâches auxquelles ils ont eu à faire.

Analyse des résultats.

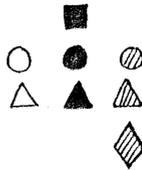
1. La comparaison des 3 épreuves est intéressante car elle fait apparaître des différences dues au type de tâche, et au type de figures données. Ainsi les réponses des élèves sont encore fortement tributaires du matériel à disposition ce qui fait conclure à un apprentissage de la tâche et pas encore de la logique.

2. Question 1. Je vois parmi les réponses fausses deux groupes :

- Carine et Didier répètent 3 fois le même motif. Je rapproche ce type de traitement de celui de Joanne et Sophie qui font une variation de couleur ou de forme seulement. Ils raisonnent une dimension seulement.

- Les autres élèves raisonnent en terme d'opposition de paires. (Rachel fait un ensemble-paire). On peut dire que, sauf pour Fabrice, la donnée de deux attributs amène l'élève à raisonner en terme de paires.

3. Question 3. Je propose d'analyser cette question parce que très contrastée avec la première. Il y a 8 figures à placer toutes différentes. Les figures sont construites de la manière suivante :



ressortent un triplet

de couleurs et un de formes.

a) On note le nombre de réponses partitives selon la forme, et qui opposent le plus souvent les ronds et les triangles, là où il y a 3 couleurs (triplets répétés de blanc, noir, gris). Ces élèves ne mettent pourtant pas forcément l'étiquette  à la place vacante. Et quelques-uns remplissent l'intersection malgré tout, avec souvent une forme grise. Comme toutes les réponses (les justes y comprises) portent cette étiquette, j'en déduis qu'ils ont dû en discuter avec la maîtresse avant le travail écrit (cf. pg. 235 rem. 1.).

Exemple : Sophie.

b) Joanne fait deux classes disjointes en répétant le triangle gris : elle dit les gris, puis dit les triangles. Elle ne s'occupe pas du reste et son intersection est vide.

c) Martine, réponse quasi juste. Erreur qui tient peut-être au fait que le rond blanc ne lui paraissait pas devoir aller avec les formes noires (couple ●■)

d) Les deux dernières réponses (Vincent et Rachel) sont des réponses d'oppo-

sition. Vincent trie les gris et les non-gris, puis parmi les gris les triangles et les non-triangles (et parce que triangle gris est désigné par la combinaison des étiquettes). La réponse de Rachel est bien plus simple.

4. La question 2.

Elle a été moins bien réussie que la question 3 et pourtant, il n'y avait que 6 figures à placer et non pas 8. D'autre part, les étiquettes sont données d'avance et les caractères dichotomiques.

Cette question a deux caractéristiques. D'une part il y a deux exemplaires des images représentant d'une part : "fille qui rit" et d'autre part "garçon qui ne rit pas". Ensuite les caractères dichotomiques amènent à constituer des paires d'éléments.

a) Tout d'abord les paires :

On remarquera que les élèves font des paires de figures identiques sous un attribut au moins. Certains le font sur un seul attribut identique (FR $\overline{\text{FR}}$ ou FR GR etc...), Carine, Cati, Rachel, Vincent D. . Olivier les fait sur les deux attributs identiques et Joanne fait les deux (GR FR, FR $\overline{\text{FR}}$, $\overline{\text{GR}}$ $\overline{\text{GR}}$).

Les paires faites par les élèves ne sont pas celles qui résultent de l'ordre de la donnée. Les données sont traitées.

La paire FR FR apparaît plus souvent que $\overline{\text{GR}}$ $\overline{\text{GR}}$ deux explications possibles : FR FR se suivent dans la donnée tandis que par $\overline{\text{GR}}$ et $\overline{\text{GR}}$, FR est désigné comme la combinaison des attributs.

b) La donnée de figures identiques a été diversement prise en compte : Carine, Didier, Roby n'ont pas repris les éléments identiques (oubli du 2e FR et du 2e $\overline{\text{GR}}$). Cati, Joanne ont quand même eu recours aux doubles flèches, et ont

eu tendance à les dissocier (paires non "identiques"). Michel et Olivier, comme déjà noté, les ont mises ensemble tandis que les autres associent une paire d'éléments identiques et dissocient l'autre laissant supposer qu'ils sont indifférents à la question.

c) Enfin, on peut voir deux groupes, ceux qui ont respecté les étiquettes: Cati, Céline, Fabrice, Joanne, Michel, Vincent D. et les autres : Carine, Didier, Olivier, Rachel, Roby, Sophie. Cette distinction est peut-être la plus importante, car elle montre ceux qui organisent les figures comme ils l'entendent, sans rapport avec le diagramme (mais selon les attributs donnés, car comment les comparer autrement ces figures que par le sexe et par le sourire) et ceux qui essaient de répondre à la consigne, et qui raisonnent partitivement (Cati, Joanne) ou par dichotomies successives (Michel, Vincent D.).

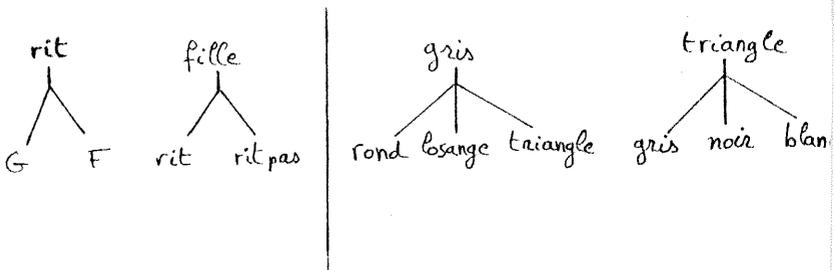
5. Dans la comparaison des réponses d'un même élève, on notera quelques indications intéressantes :

Carine ne peut raisonner que sur une dimension, mais elle s'appuie sur la variation des figures données. De là sa réponse à la question 3 , qui est sa meilleure réponse.

Cati fait des classes disjointes et s'appuie aussi sur la variation.

Didier ne raisonne que sur une dimension.

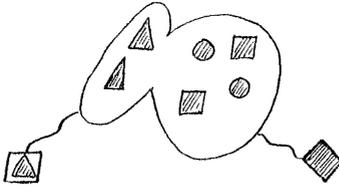
Joanne fait chaque fois le même procédé :



-(Carine) l'ensemble des triangles rouges ou bleus avec comme étiquette un triangle colorié en bleu.

-(Rachel) l'ensemble des figures rouges, l'ensemble des figures bleues partitionné selon les différentes formes.

-(Fabrice) une sorte d'inclusion - demi-intersection.



-(Sophie) réponse peu claire.

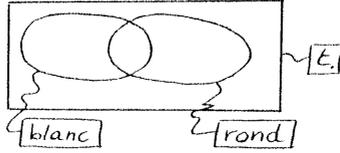
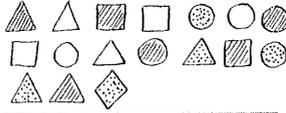
Remarque. 1. par rapport à ER 10 (chapitre I pg. 43) une nette évolution qui montre une plus grande maîtrise des élèves à décrire le matériel sur deux attributs donnés.

Deuxième partie.

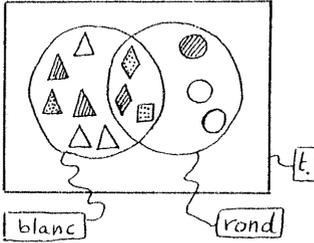
J'ai reproduit les réponses des élèves, en faisant attention à bien situer les figures comme ils l'avaient fait.

Monica a insisté pour qu'ils se tiennent aux figures données et propose (procédé déjà enseigné ailleurs) qu'après avoir effectué leur placement, ils cochent les figures pour vérification.

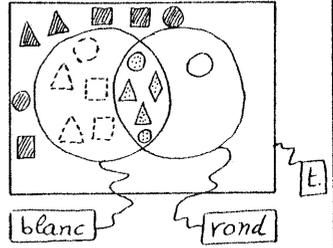
donnée:



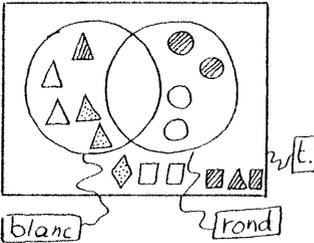
Carine



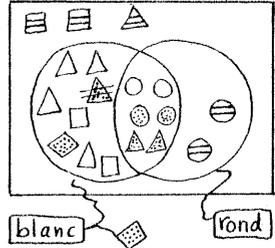
Didier
(explication pg. 249.)



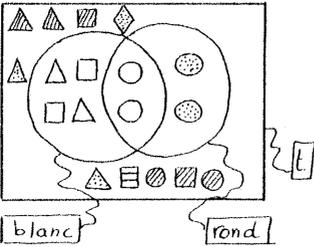
Céline



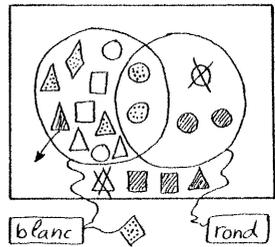
Fabrice 1°
(explication pg 250.)



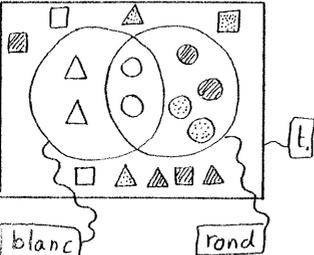
Cathy



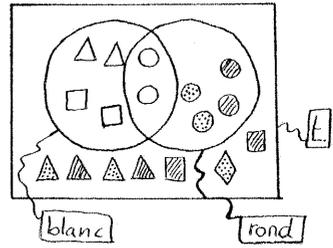
Fabrice 2°
(explication pg 250.)



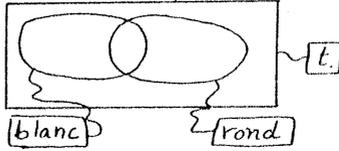
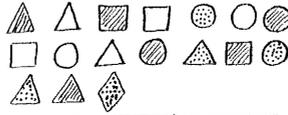
Denys



dean - Luc

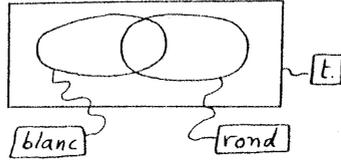
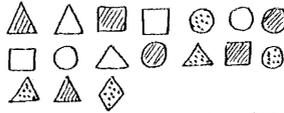


donnée:

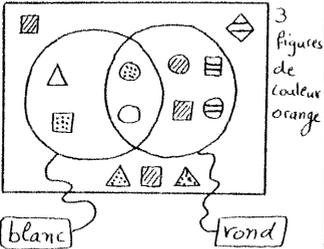


<p>Joanne</p>	<p>Olivier</p>
<p>Maëline</p>	<p>Rachel</p>
<p>Mélanie</p>	<p>Roby</p>
<p>Michel</p>	<p>Sabine</p>

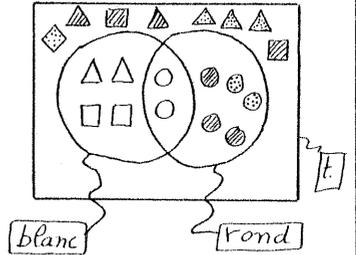
donnée:



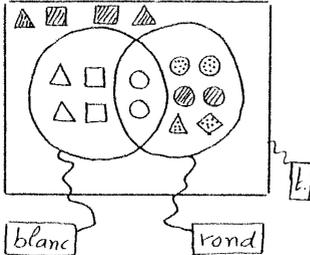
Sophie



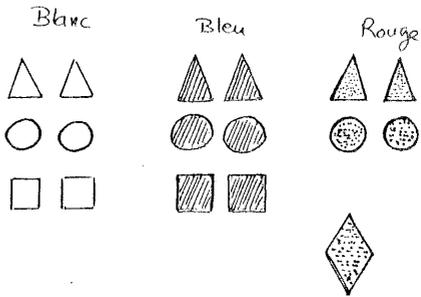
Vincent L.



Vincent D.



Rappelons les 17 figures



Premières remarques :

1^o Les élèves ont placé les paires de figures identiques ensemble. Et quand c'était dans l'un des ensembles, ils les mettaient généralement côte à côte.

3 exceptions cependant. Céline considère une série de triangles avec un triangle bleu (puis se corrige) et considère une série de bleus avec l'autre triangle bleu. Olivier et Roby placent dans l'intersection un rond blanc (combinaison des 2 attributs) parce qu'ils savent qu'il faut le faire.

2^o Tous les élèves n'arrivent pas à s'en tenir à leurs figures, ce qui est la marque que leur pensée prend le dessus. Carine : Δ blanc en trop, manquent Δ rouge, \circ bleu, tous les carrés sont faux.

Cathy : un carré de plus.

Didier : un carré bleu en plus.

Fabrice 1^o : 2 triangles blancs en plus.

Joanne : reproduit deux fois les paires de ronds rouge et bleu.

Mélanie : manque un triangle bleu.

Rachel : manquent toutes les formes blanches, et y a 3 ronds verts en plus.

Sophie : 4 ronds blanc, bleu, rouge, orange.

3 carrés, bleus un rouge et un orange.

3 triangles rouges et un blanc

1 losange orange.

Vincent D. : manque un triangle rouge.

Vincent L. : 3 ronds bleus, 3 triangles rouges.

3⁰ On peut dire que tous les élèves s'en sont tenus aux étiquettes. (Les cas de Rachel et Vincent D. sont discutés plus loin).

Analyse des réponses erronées.

Il y a 12 réponses de ce type (6 réponses justes).

1⁰ Un premier groupe de réponses sont des réponses partitives.

Il y a 4 réponses de ce type. Ce qui frappe c'est que pour de telles réponses l'élève doit ne pas tenir compte d'une des étiquettes au moins. Ce qui peut lui poser problème.

Didier s'en tire de la façon suivante : les formes étant dessinées sur un stencil à alcool, les bords des formes blanches sont donc en bleu. Il met dans l'ensemble des blancs, des figures à bord bleu tandis qu'il met dans l'ensemble des ronds (plutôt dans ) une forme ronde à bord gris (crayon) signifiant la forme ronde par opposition à la figure ronde blanche.

Rachel lisant aussi l'étiquette se contente de changer de classification, passant d'une classification par couleur à un tas de 3 ronds. (Ou bien elle lit blanc par bleu, ou bien elle confond avec la consigne du premier exercice).

2⁰ Le second groupe de réponses sont des réponses d'opposition.

Joanne oppose nettement blanc à coloré (placement des formes de l'extérieur tout à droite), puis parmi les colorés les ronds et les autres. La répétition dans l'intersection est étonnante. Non pas qu'il y ait répétition, ça Joanne le faisait avant, mais que ce soient pas les ronds blancs qui sont répétés. Peut-être qu'elle a fait "l'intersection des ronds rouges et bleus" comme dirait Olivier. Justement, Olivier et Roby placent les ronds blancs en deux endroits distincts, c'est certainement en considérant l'intersection comme lieu à part où il faut

Je lui ai demandé de me justifier la place des ronds blancs dans la plage (E) il m'a répondu : "parce qu'ils sont blancs" ("oubli" d'un des attributs en présence de l'autre).

On remarque alors que l'élève hésite entre faire porter l'opposition sur l'un ou l'autre des critères (non-ronds partagés en 3 couleurs, ronds séparés en deux classes, et, dans la seconde réponse, ronds partagés en 3 couleurs, non-ronds séparés en deux classes).

d) (Vincent D.) une réponse encore du même type :

non-rond blanc		non rond rouge	non-rond bleu
	rond blanc	rond non-blanc	

(n'a pas placé le losange rouge)

4⁰ Une réponse ininterprétable (Sophie).

Remarques :

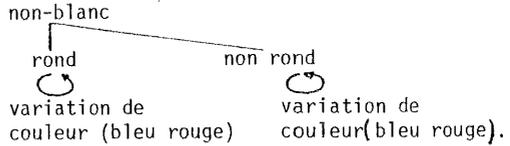
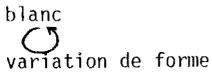
1. Malgré le progrès fait depuis la tâche ER 10, on retrouve pour la deuxième partie de l'exercice les mêmes problèmes vis-à-vis de la partition. Et ce ne sera pas encore réglé en fin de deuxième année ! (voir les protocoles déjà cités chap. IV et encore d'autres épreuves citées plus loin).

On voit donc le fossé qui existe entre ces réponses et celles qu'on espérait avoir.

2. En parlant de variations on pouvait caractériser les trois groupes de la façon suivante :

Groupe 1⁰ variation selon une seule dimension

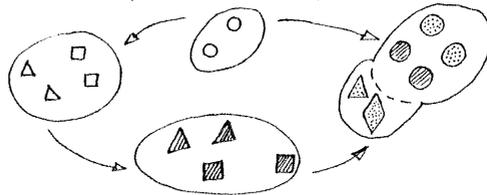
Groupe 2⁰ deux variations spécifiques avec domaines disjoints.



Groupe 3⁰

Toutes ces réponses se caractérisent par un regroupement dans une des plages. Des éléments se retrouvent ainsi ensemble soit parce que mis directement en relation, soit parce qu'exclus de toutes les autres plages.

A la différence du groupe précédent, l'intersection est ici remplie correctement et il n'y a pas de formes identiques placées dans des plages différentes. Il y a donc prise en compte de l'intersection comme lieu entre deux parties opposées. Mais en même temps, cette prise en compte soulève des problèmes d'exclusion: "rond blanc étant ainsi signifié par l'intersection, cela conduit l'élève à discriminer les objets blancs selon la forme (Denys) ou les objets ronds selon la couleur (Cathy). Avec ces réponses on est assuré que les élèves ne raisonnent pas seulement en termes de convenance, mais aussi en termes d'exclusion (Les carrés blancs de Denys sont près de l'ensemble "blanc", les ronds bleus de Cathy sont près de l'ensemble "rond", dans une série de formes bleues). On pourrait même faire le schéma suivant pour Vincent D. (par exemple):



Il serait intéressant de savoir si l'élève aurait été aidé par un dessin qui aurait comporté une cellule de plus.

Conclusions :

a) C'est de tous les exercices donnés le plus intéressant. Tout d'abord une remarque sur les diagrammes de Venn. Si tant est qu'une tâche de remplissage ait un sens - ce dont on peut douter à cause du fait que  donne 4 cellules et qu'il faudrait restituer le temps, c'est-à-dire faire faire  puis  - alors il faut au moins donner assez d'éléments à placer avec : des figures à plusieurs exemplaires, des figures manquantes (comme le carré rouge) et des caractères non dichotomiques.

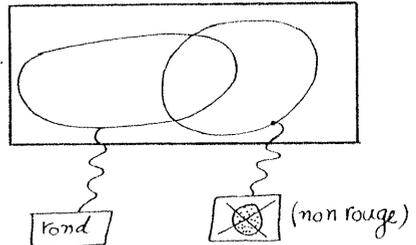
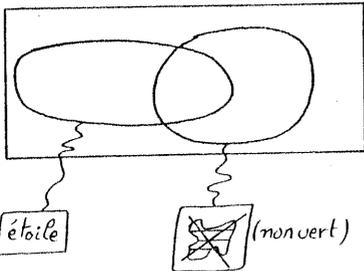
b) Bien entendu, il y a la difficulté de raisonner en termes dichotomiques: rond/non-rond, blanc/non-blanc, sur un matériel fait de 3 formes et 3 couleurs. Il est intéressant dans ces réponses de voir : des réponses positives selon la lecture du matériel donné, des réponses dichotomiques, mais où l'élève fait plus des coupures que des classes :  puis,  , et des réponses schématisables par  puis  avec superposition de 2 des classes.

2.5.

Figures non données d'avance.

Pour montrer maintenant une tâche où les élèves devaient inventer leurs figures, je présenterai maintenant un exercice fait à cette même période de la première année (fin de l'année scolaire mai 1978).

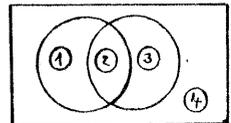
Monica a dessiné au tableau noir les diagrammes suivants :



Le premier diagramme a été fait en classe au tableau noir. Un jour plus tard les élèves devaient le remplir sur une feuille en se rappelant la séance de classe, ils devaient ensuite passer au second diagramme.

Voici de façon descriptive les productions obtenues.

Convention



Le premier avait été discuté en classe. Les élèves devaient essayer de le refaire, puis de faire le second.

	étoile - non vert	rond - non rouge
Carine	1.) 6 ★ jaunes	1.) } à beaucoup d'exemplaires :
	2.) 4 ★ jaunes	2.) } ronds oranges et ronds bleus
	3.) ○ bleu, violet, orange,jaune	3.) }
	4.) rien	4.) rien
	★ jaune - ronds de toutes les couleurs vert interdit	partout ronds non-rouge conjonction des attributs

Le premier avait été fait et discuté en classe. Les élèves devaient essayer de le refaire, puis de faire le second.

	étoile - non-vert	rond - non-rouge
Cati	<p>1.) ★ vertes</p> <p>2.) ★ non-vertes</p> <p>3.) formes non ★ non-vertes } beaucoup</p> <p>4.) du côté gauche, un rond vert</p> <p>du côté droite, une ★ rouge et des ronds bleus</p> <p>ici, une opposition latérale des couleurs</p>	<p>pas fait</p>
Céline	<p>1.) ★ verte, rouge, bleue, grise</p> <p>2.) ★ jaune</p> <p>3.) fille et tulipe non-vertes</p> <p>4.) fille rouge - tulipe verte.</p> <p style="text-align: center;"> ★ / \ tout jaune fille - tulipe (non-vert) non-vert tout (?) </p> <p>non - non-vert = vert possible = tout</p>	<p>1.) ○ : 2 verts, un rouge</p> <p>2.) ○ orange</p> <p>3.) ★ verte.</p> <p>4.) rien.</p> <p>idem.</p>
Didier	<p>1.) 3 ★ non-coloriées</p> <p>2.) 5 ★ non-coloriées</p> <p>3.) figures jaunes (non-★)</p> <p>4.) rien</p> <p>En prenant les caractères comme motifs, et en se fixant sur une couleur, il oppose (et dissocie) 2 types d'objets :</p> <p style="text-align: center;"> ★ (non coloriées) / figures jaunes (non-★) </p>	<p>1.) ○ rouges</p> <p>2.) ○ bruns</p> <p>3.) ○ roses</p> <p>4.) rien</p> <p>classement selon la couleur.</p>

Le premier exercice avait été fait en classe au tableau noir. Les élèves devaient essayer de le refaire, puis faire le second

	étoile - non-vert	rond - non-rouge
Fabrice.	1.) 4  non coloriées 2.)  noir 3.)  jaune,bleu,orange,rouge 4.) rien form d'  -  non-vert attributs pris séparés	1.) 5  non coloriés 2.) 1  non colorié 3.) 1  jaune, 1  bleu 4.) rien forme  - non rouge
Jean-Luc.	1.) 2  vertes 2.)  orange et jaune 3.)  bleu,brun,jaune,orange,rouge, noir 4.) rien	1.)  rouge, jaune,noir bleu 2.)  bleu, noir 3.) figures (non- ) non-rouges 4.) rien  non- rond non-rouge tout non-rouges
Joanne.	1.)  vertes (beaucoup) 2.)  rouges, oranges, jaunes, 2 vertes (beaucoup) 3.)  rouges, oranges, jaunes (beaucoup) 4.) groupe de figures rouges, oranges, vertes. intersection mélange des étoiles vertes et non-vertes. A l'extérieur de tout.	Pas fait.
Martin	1.)  vertes 2.)  2 brunes, 1 rose 3.) formes rouges et roses 4.) un rond vert tout à l'extérieur du cadre : 2 ronds roses	1.)  rouges } beaucoup 2.)  bruns } 3.) formes roses (non rond) 4.) rien tout à l'extérieur : 2 rectangles rouges

	étoile - non-vert	rond - non rouge
Martine	<p>1.) ☆ vertes, une orange</p> <p>2.) ☆ brunes, rouges, oranges } beaucoup</p> <p>3.) objets oranges dont une ☆</p> <p>4.) fleurs multicolores</p> <p>Martine oppose vert à orange et ☆ à autres objets. Mais elle glisse une orange parmi les vertes et une ☆ orange parmi les autres figures oranges.</p>	<p>1.) ○ rouges (beaucoup)</p> <p>2.) 2 ○ bleus</p> <p>3.) ☆ 3 brunes et 2 vertes</p> <p>4.) ☐ (champignon) orange</p>
Mélanie	<p>1.) ☆ verte</p> <p>2.) ☆ violette, brune, jaune beaucoup</p> <p>3.) ○ violet, brun, jaune</p> <p>4.) champignon brun</p> <p>Répétition de (violet, brun, jaune) = non vert.</p>	<p>1.) ○ rouge</p> <p>2.) ○ vert, violet } beaucoup</p> <p>3.) ○ vert, violet }</p> <p>4.) champignons rouges</p> <p>glissement de sens sur l'étiquette : <input checked="" type="checkbox"/> dit globalement rond - non-rouge</p> <p>ça explique sans doute la répétition.</p>
Michele	<p>1.) ☆ verte, 2 noires</p> <p>2.) ☆ jaune</p> <p>3.) △ bleus, jaunes, un □ noir</p> <p>4.) rien</p> <p>☆ , non-vert</p> <p>☆ / non- ☆</p> <p>non - non-vert = vert permis</p>	<p>1.) 2 ○ verts, un rouge.</p> <p>2.) rien</p> <p>3.) ○ non colorié, un □ jaune</p> <p>4.) rien</p> <p>idem</p>

	étoile - non-vert	rond - non-rouge
Sophie	<p>1.) ☆ 3 vertes, 2 bleues, 1 orange</p> <p>2.) ☆ 3 jaunes, 1 orange.</p> <p>3.) ○ □ △ bleus, oranges</p> <p>4.) △ et □ verts</p> <p>1.) toutes les couleurs:vert permis</p> <p>4.) à l'extérieur du vert</p>	<p>1.) ○ oranges et bleus</p> <p>2.) ○ 3 bleus</p> <p>3.) traits de couleur : /// non rouges</p> <p>4.) rectangle rouge.</p> <p>évite le rouge, sauf à l'extérieur.</p>
Vincent D.	<p>1.) ☆ rouge, bleu.</p> <p>2.) ☆ non coloriée</p> <p>3.) □ non colorié</p> <p>4.) ☆ vertes, □ bleu</p> <p>glissement: non vert → non coloré</p> <p>domaine de variation: { rouge bleu vert □ ☆</p> <p>dans 4.) spécial.</p>	<p>1.) ○ bleu, noir</p> <p>2.) ○ bleu</p> <p>3.) ○ bleu vert</p> <p>4.) □ bleu</p> <p>glissement: ○ est pris comme <u>rond</u></p> <p>non-rouge, au lieu de non-rouge</p>

Note: Ces résultats ne sont pas toujours très clairs. Mais ils montrent bien que c'est une logique de la tâche (d'action) qui prévaut à ces exercices qui se veulent des exercices de logique. Et à preuve de ceci, les 3 éléments :

- variation de couleur (et de formes)
Mais en général, il n'y a que 2 formes ...)
- opposition : forme coloriée/forme pure (non colorié)
- "non - non-a" ⇒ a est permis

Remarques analytiques.

1^o A noter le fait que les diagrammes sont remplis de figures. Soit il y a répétition d'une même figure-motif, soit il y a une même figure mais dont la couleur varie, ou moins souvent des figures différentes d'une même couleur.

On voit des élèves reprendre des séquences de coloriages, Mélanie par exemple, ou d'autres faisant des séquences disjointes, Martin par exemple.

2^o La question de la négation de la négation : non non vert. Céline (q. 1 et 2), Jean-Luc (q. 2), Michel (q. 1 et 2), Olivier (q. 1), Roby (q. 1 et 2), Sabine (q. 1), et Sophie (q. 1) ont tous interprété non non-vert = toutes les couleurs. Ceci est à interpréter dans un contexte de tâche : "non non-vert = le vert n'est plus interdit ; on peut aussi en mettre". On verra au paragraphe suivant, cette "logique de la tâche" à l'oeuvre.

3^o On voit aussi des réponses où les élèves ont opposé les deux attributs. Prenant étoile vide  contre figure coloriée (figure géométrique comme un rond, ou figure dessin d'un objet). Dans un même diagramme il n'y a en général pas en même temps des étoiles coloriées et non coloriées.

4^o En passant, on remarquera que les réponses peuvent être caractérisées de la même façon que je l'ai fait auparavant. On retrouve la constitution de partitions (selon la couleur, ex. Didier q.2) des dichotomies en 2 temps aboutissant à la formation de 3 ou 4 classes (ex. Céline, Olivier, Roby) et des réponses justes quand même (Martin, Mélanie).

Conclusions :

a) Au travers de toutes ces tâches, le maître tourne toujours autour d'un certain objectif : faire accéder l'élève à la considération d'ensembles non-dis-

joint. Les élèves qui n'y arrivent pas d'emblée sont donc livrés aux conditions de l'exercice - consigne, schémas, figures données et essaient de s'adapter. J'essaie de lire à travers cette adaptation la façon dont les élèves "conçoivent" la chose.

b) Le plus intéressant dans l'exemple est ceci. Les élèves abordent l'exercice dans une logique d'exécution d'une tâche : l'étiquette donne l'ordre de produire des étoiles dans une plage particulière, la donnée de couleur indique qu'il faut colorier. Non vert indique qu'il faut éviter le vert: "ne pas faire vert", et "non non-vert" ne revient pas à "vert" comme la logique le voudrait, mais retire l'interdit: "il est permis de faire vert". Et dans cette logique-là, forme peut être le "contraire" de couleur (cf. Chap. III par. 4.5 pg 155). A la logique formelle que l'on veut enseigner à travers ces exercices s'est substituée la logique de l'effectuation d'une tâche. C'est le thème du par. 2 (pg. 268)

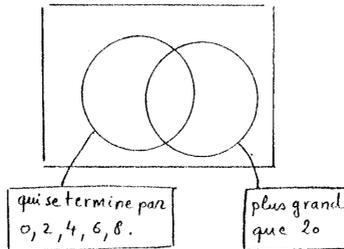
1.6

Ensembles de nombres entiers.

Toutes ces réponses sont ce qu'on pourrait appeler en psychologie des réponses intermédiaires, et témoignent d'une adaptation des élèves, elles sont souvent très particulières. Cependant on en retrouve des traces longtemps. Ainsi, en fin de deuxième année primaire, les classifications par forme/couleur étaient faciles pour les élèves. Mais le programme commençait à aborder les ensembles de nombres et là on retrouvait les mêmes types de réponses que celles observées en première.

Voici deux exemples (mai 1980).

A) 15, 16, 17, 18, 19, ... 30.

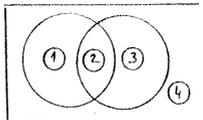


écris les nombres proposés dans le diagramme.

- Monica a insisté sur :
- la consigne
 - qu'il fallait d'abord écrire en ligne hors du cadre tous les nombres
 - explication de la signification des étiquettes
 - qu'il fallait placer les nombres un à un.

Je n'ai eu accès qu'aux fiches de 9 élèves.

Convention :

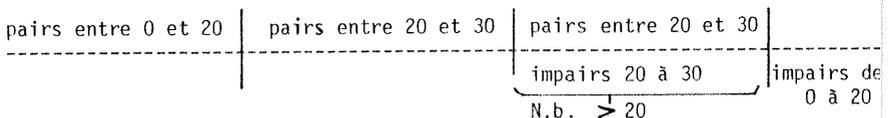


- 1 seule élève a fait tout juste et ce au second essai seulement.

Martine :

1^o essai : Elle ne s'en tient pas aux nombres donnés mais prend les nombres entre 0 et 30

De plus elle répète les nombres pairs entre 20 et 30.



2e essai juste.

-(Jean-Luc) interprète "pair" intersecté à plus petit que 20". Il ne remplit pas la plage extérieure.

- 2 élèves répondent juste (Martine, Mélanie)

- 4 oppositions simples.

3 pair/impair (Olivier, Fabrice, Katia)

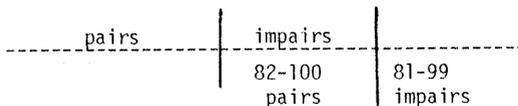
1 pair/impair avec le nombre 100 dans l'intersection (bonne)

- 3 dichotomies doubles

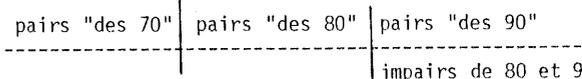
2 en deux temps : (Michel, Vincent D.)



1 en "chevauchement" (Joanne)

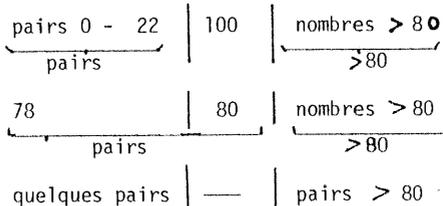


- traitement par dizaine (Roby)

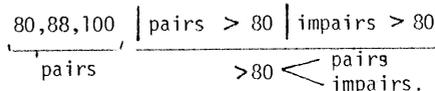


- 4 adaptations aux étiquettes (Didier, Fabrice, Sandra, Vincent L.)

au pied de la lettre :



double considération :



Remarques : 1^o

En discutant avec Monica, certains élèves ont facilement réussi à se corriger, d'autres pas. Ce sont donc ici des réponses brutes. (se sont corrigés : Fabrice, Jean-Luc, Katia, Vincent L.).

2^o

La tâche ressemble à une tâche où on doit inventer les éléments du classement dans le sens où pour les élèves, pair a une signification en terme de série numérique, et non pas encore en terme de propriété numérique (divisible par 2).

1.7.

Conclusions de cette étude des productions d'élèves.

Peut-on voir la logique des élèves en oeuvre derrière leurs réponses aux diagrammes de Venn ? La description qui précède avec le regroupement de réponses selon des catégories plus ou moins hiérarchisées entre l'opposition simple et la constitution de classes emboîtées permet de répondre affirmativement. Ainsi, par exemple, j'ai pu retrouver dans les productions des élèves - opposition, constitution de couples, variation - des choses bien connues des psychologues et dont ils ont mieux rendu compte. Pour moi, j'étais assez heureux de pouvoir en déceler la trace sur des réponses écrites (je n'ai pas observé les élèves à l'oeuvre sur ces exercices) et malgré "tous les bruits" dus aux adaptations particulières aux explications et corrections du maître et à l'apprentissage des tâches. On peut être assuré que les élèves font "un peu de logique" en travaillant sur les diagrammes de Venn, mais ceci se passe comme "clandestinement". J'ai déjà montré comment (chap. III), l'idée que le maître se fait de la tâche peut amener une intervention inadéquate ; j'espère que le lecteur sera convaincu après mes analyses qu'il est faux de corriger les erreurs des élèves une à une, comme de simples fautes d'application, mais que la réponse résulte d'une façon de raisonner. Cela ne règle cependant pas le problème de la relance des élèves, car il est certain qu'ils n'arriveront pas à une lecture de leur résultat. Et c'est bien là le drame de ce type d'exercice. L'élève peut éventuellement vérifier si chacune des figures est bien placée, mais c'est seulement la réponse juste qui aura dans l'échange avec le maître une signification. Dit autrement, le diagramme de Venn, donné tout fait, à remplir, ne laisse aucune place aux réponses intermédiaires, pire les rend incompréhensibles tant à leur producteur qu'à l'enseignant. Fatalement elles seront rejetées.

D'ici à ce qu'on ait trouvé d'autres exercices pour les élèves, il me

paraissait important d'indiquer une façon de la lire qui permette de retrouver dans les réponses des élèves ce qui importe, c'est-à-dire ses procédures, sa façon de raisonner. (Faire des paires, identiques ou contrastées, faire des classes disjointes, des dichotomies en deux temps ou qui se "chevauchent"). A chercher encore des moyens de relance qui soient dans sa logique.

(Note : on verra au par. 3.2. du même chapitre (p. 291) les élèves produire une de ces réponses typiques, ce qui confirme la légitimité d'une telle lecture).

2. Le problème des oppositions vu sous un autre angle.

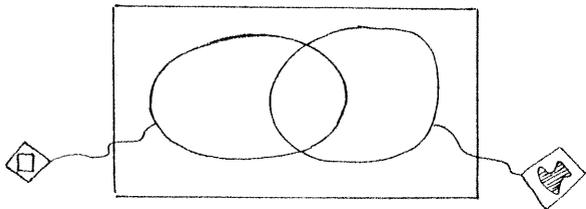
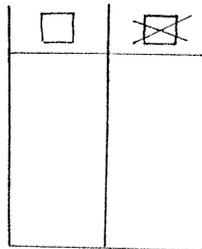
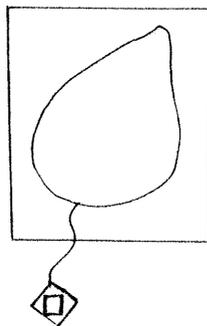
(où ça redevient un peu plus rigolo). (21.3.80)

En deuxième année les élèves eurent moins de peine à traiter les fiches. Ce qui dénote une certaine habitude des élèves envers le matériel scolaire, les formes géométriques, les couleurs et la tâche de remplissage des différents diagrammes.

Cependant, il y a une fiche qui a posé pas mal de problèmes à Monica alors qu'elle ne s'y attendait pas. Cette fiche permet de confirmer un certain nombre de points évoqués précédemment.

Il s'agit de la fiche ER 29 (1ère édition !) (et plus accessoirement de ER 30). Voici de quoi il était question :

Dans chaque diagramme, ne dessine que des formes non carrées.



2.1.

Présentation en classe.

Monica a noté les commentaires suivants dans sa fiche de préparation :

- 1 faire répéter la consigne
- 2 insister sur non carrées
- 3 à mettre au plus grand nombre d'endroits possibles.

Discussion de Monica avec la classe :

Monica

qui répète la consigne ?

qui peut expliquer ?

Là sur la fiche il y a 3 diagrammes (elle montre les 3 parties de la fiche).

Dans chacun de ces tableaux ne dessine que des formes non carrées.

c'est des carrés ou des étiquettes ?

vous devez réfléchir et faire quand même quelque chose.

Les élèves

Didier : dans chaque diagramme ne dessine que des formes non-carrées.

Sabine : c'est quoi un diagramme ?

Fabrice : alors ça veut rien dire !

Martine : mais y a aussi des carrés !

Michel : des étiquettes carrées, alors c'est pas possible !

Sabine : si c'est pas possible, alors on ne fait pas ...

Céline : Là on est obligé de faire des formes carrées, et là (2e diagramme où y a l'étiquette ~~(X)~~) on peut mettre des cercles, des triangles...

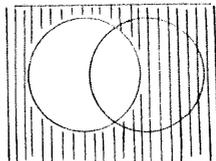
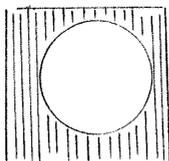
Vous dessinez des formes pas carrées. Je n'en dirai pas plus... si je dirai encore, vous devez mettre des formes pas carrées dans le plus d'endroits possibles.

(Monica conclut en représentant le tout).

2.2.

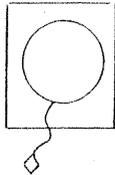
Signification de l'exercice.

Cette fiche a pour but de porter l'attention des élèves sur l'ensemble complémentaire - en tant qu'ensemble propre et pas en tant que reste - et de la plage qui lui est dévolue dans un diagramme de Venn.

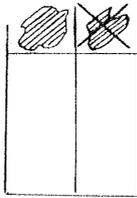


(Remarque : ces plages ne sont pas entourables aisément).

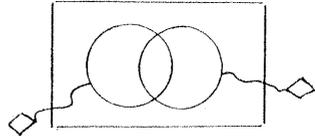
Une première correction apportée à cette fiche dans la seconde édition du cahier d'exercice confirme d'ailleurs ceci. Elle propose comme diagrammes :



idem 1^{er} édition



bleu - non bleu
1^{er} édition : carré / non carré



idem 1^{er} édition

On situe les non carrés par rapport aux carrés puis par rapport aux bleus, et finalement, on combine dans le diagramme de Venn (on voit ça combiné).
Il s'agit bien de situer l'ensemble des non-carrés dans un diagramme de Venn.

2.3.

Résultats.

Il y a une façon de faire sans se tromper, c'est de dessiner des formes comme pour remplir le diagramme, puis en un deuxième moment, effacer les carrés. On en arrive ainsi à la réponse juste. Mais cette façon de faire n'est pas suffisante, puisqu'on aboutit à l'ensemble des non-carrés et - si on le veut bien - on ne fait que constater sa position. Alors qu'on aimerait obtenir de l'élève qu'il pense l'ensemble des non-carrés et le situe directement.

Monica n'a pas proposé cette "recette", soit qu'elle ait voulu l'éviter, soit qu'elle n'y ait de toutes façons pas pensé (sous-estimant la difficulté de l'exercice). Malgré tout, si on analyse le produit global, tâtonnements de l'élève et relance de Monica compris, c'est bien ce déroulement qui a eu lieu.

1^o Pour beaucoup d'élèves, le premier diagramme présentait une contradiction entre la consigne : ne pas faire de carrés et l'étiquette qui disait d'en faire. Et ils l'on bien exprimé : "c'est pas possible, alors on ne fait pas". Monica a insisté pour qu'ils fassent.

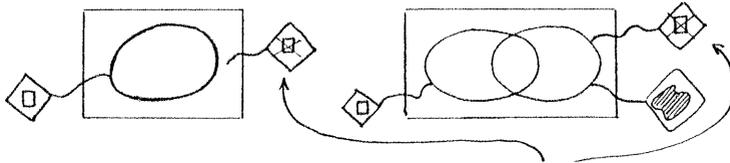
J'ai pu alors assister à plusieurs séquences de ce type: l'élève commence par dessiner des carrés dans l'ensemble (comme l'indique l'étiquette), présente sa solution à Monica qui lui rappelle la consigne (ne pas dessiner des carrés). Il se corrige et met des formes pas carrées dans l'ensemble désigné (sans changer l'étiquette). Rediscussion avec Monica. Ensuite il se corrige à nouveau et dessine dans la plage externe des formes, en général de tous genres, avec quelques carrés parmi elles. Discussion avec Monica, il efface finalement les carrés.

La stratégie n'est pas celle souhaitée, et supprime tout intérêt à l'exercice. La maîtresse répond au coup par coup, un peu dépassée par les réponses que lui proposent les élèves.

2⁰ Sur le 3e diagramme (le second n'a pas posé de problème vu l'étiquette  très explicite). J'ai moins de renseignements. Je puis quand même dire qu'il y a eu aussi une envie de mettre des carrés, l'élève se permettant de mettre un carré bleu dans l'intersection, parce que forme bleue (opposition bleu-forme carrée). Opposition qui est ressortie de la plupart des productions qui ne présentent que des formes carrées vides ou des figures géométriques bleues (ou encore des figures bleues comme l'étiquette : ). Cette distinction qui traduit une interprétation de l'étiquette-attribut en termes d'opposition, est renforcée encore par l'interdiction de colorier les étiquettes, règle sur laquelle Monica a dû insister beaucoup en première année ; on a déjà vu cette question.

D'autres élèves ont rempli le diagramme en entier, puis ont effacé tous leurs carrés ou encore transformé les carrés en une autre figure géométrique voisine (camouflage en rectangle par exemple). Cette correction a quelquefois aussi été partielle, laissant les carrés bleus de l'intersection (parce que "quand même" bleus). Ces corrections étaient soit spontanées, soit faites après la discussion avec Monica.

Remarquons enfin qu'un élève, Martin, a mis des étiquettes supplémentaires à son diagramme, et que ça aurait mérité discussion :



(une fois l'étiquette supplémentaire est attachée, une fois pas !)

2.4.

Expérience de simulation avec Monica.

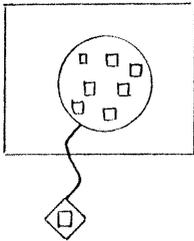
J'ai alors proposé à Monica de faire une simulation. Je lui montrais diverses façons de remplir le diagramme (certaines de ces façons étaient des réponses d'élèves). Monica devait me dire ce qu'elle aurait dit à un élève lui proposant une telle réponse. Evidemment il faut prendre ces réponses à titre indicatif, ce n'est peut-être pas ce qu'elle aurait dit aux élèves. De plus, toutes les réponses présentées les unes après les autres ont induit un effet cumulatif évident.

Cependant le jeu a un intérêt pour montrer un éventail de réponses plausibles. Permettant ainsi une décentration par rapport à la réponse "juste". Et de mieux comprendre les réactions des élèves.

Mais pour moi, l'intérêt était le suivant. A l'école, les élèves en viennent à apprendre des stratégies face aux réactions du maître. Ainsi, quand il y a correction et discussion avec le maître, ce ne sont pas les élèves seulement qui arrivent à la réponse "correcte" mais ce sont tout autant les maîtres. Il est important alors de noter comment, en l'occurrence, Monica aura pris le problème. Car en fait cette "impossibilité" ressentie par les élèves vis-à-vis de leur

tâche révèle aussi une "impossibilité" du maître (ou de l'exercice) à leur dire de quoi il s'agit (sans leur dire la réponse pour autant). Monica n'arrivait pas à leur communiquer : "ne pensez qu'à l'ensemble des non carrés" (ou quelque chose du genre) et à leur montrer que c'était la clé du problème.

Voici les réponses. A gauche le diagramme que je propose, avec pour le lecteur le nom de l'élève qui a donné cette réponse (quand y en a) ; à droite les réactions de la maîtresse numérotées selon l'ordre des arguments qu'elle imagine donner.



1^o On te demande de faire quoi ?

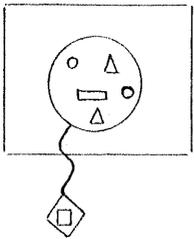
2^o Tu ne dois pas mettre de carrés.

3^o Tu dois mettre des formes non-carrées là où tu peux.

Elle indique qu'elle interviendrait d'abord avec

1^o, puis selon la réponse avec 2^o, et de même ensuite

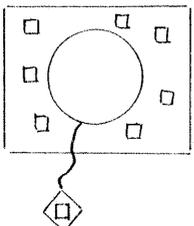
(Solution présentée effectivement) avec 3^o.



1^o mais l'étiquette dit quoi ?

2^o tu as mis quoi ? (des pas carrés). Tu dois les mettre là où tu peux.

(Solution effectivement présentée)

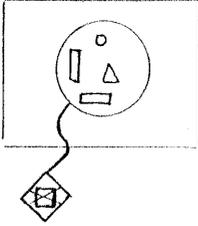


1^o On ne doit pas mettre de carrés ...

2^o (Comme je ne réagis pas pendant un long moment, Monica rajoute)

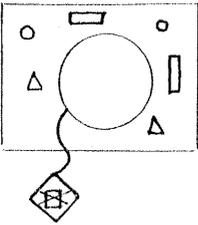
Si on devait les mettre, on les mettrait où ?

(Je ne pense pas qu'on trouve jamais cette réponse.)



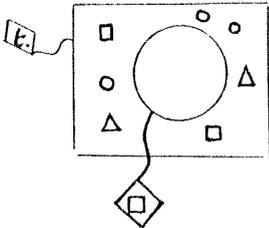
y aurait-il des élèves
si malins ?

1^o Tu ne devrais rien changer à l'étiquette. Ça
va mais tu ne dois pas tracer l'étiquette.
(sous-entendu : maintenant donne une réponse
sérieuse.



1^o Pourquoi t'as biffé le carré ?

Monica trouve qu'il faut écrire les étiquettes avec
des mots .

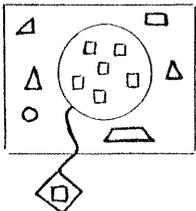


1^o C'est quoi cet ensemble ? ()

Tu dois mettre où les carrés ?

2^o (Je lui pose alors la question suivante : Mais
dans l'ensemble de tout , on peut tout mettre !)
Dans tout, y a plusieurs ensembles. Là (plage ex-
terne) tu ne dois pas y mettre des carrés.

(Solution effectivement présentée)



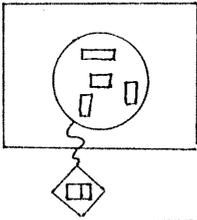
1^o Tu ne devais dessiner que des formes non carrées.

(et s'il n'y a pas de réponse)

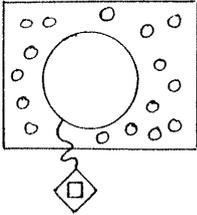
2^o Alors efface les carrés.

(ah ! si il avait pu ne pas mettre de carrés !)

(Solution présentée)



1⁰ On ne peut pas changer les étiquettes.

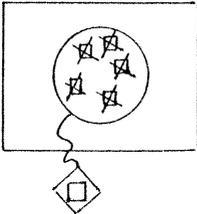


1⁰ Je n'avais rien dit sur les formes ! (sous-entendu, ça va).

Je lui dis : mais c'est tous des ronds ?

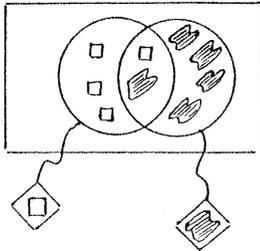
2⁰ Je lui aurais demandé si il peut mettre autre chose que des ronds.

(Solution effectivement donnée.)



Là, je ne dis plus rien !

On a bien eu dans un diagramme de Carroll  pour signifier "garçon sans parapluie."



1⁰ j'aurais dit que y a eu les mêmes trucs pour l'ensemble des maisons et animaux, ils voulaient mettre une maison et un animal dans l'intersection... c'est Céline peut-être (eh non ! c'est Sandra !)

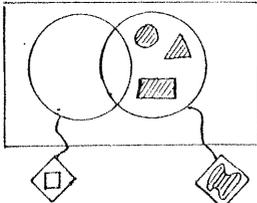
(Solution donnée par une élève mais déjà vue ailleurs, tant pour ce qui concerne le motif bleu que pour l'intersection - mélange.

Sur une même image, il faut que ce soit les deux (attributs) en même temps.

2⁰ (Je lui dis : et puis pour  tu ne dis rien ?)

Si, je dirais quelque chose : Qu'est-ce que ça veut

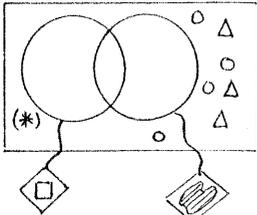
dire ça (l'étiquette ) ? Puis elle me dirait : "bleu". Ça veut dire que c'est la couleur, c'est des choses qui sont bleues!



(Solution présentée)

1^o Est-ce qu'on ne peut pas en mettre ailleurs encore ?

(Monica dans sa consigne avait insisté : dans le plus d'endroits possibles).

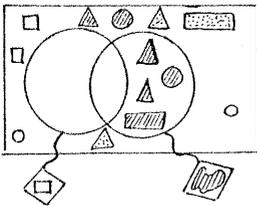


Les formes toutes à droite ont été effectivement mises)

1^o Même réaction.

C'est rigolo, tout à droite !

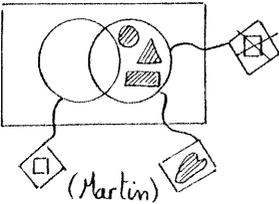
J'aurais dit : là (*), tu aurais pu mettre un triangle ?



(Solution présentée)

1^o On doit dessiner quoi ? ... alors t'as fait quoi ?

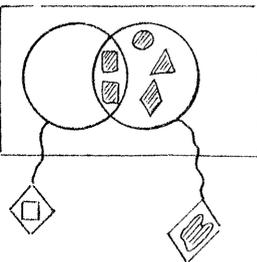
C'est lesquelles que tu vas enlever ?



(Martin)

1^o Qui a fait ça ? ... là je ne sais pas quoi

dire ... On doit pas mettre 2 étiquettes ! ?



(Jean-luc)

C'est comme Jean-Luc ! Je t'ai déjà dit. (elle m'avait dit qu'elle pensait que Jean-Luc faisait une distinction : forme carrée - carré objet (colorié) et se demandait si il n'y avait pas là problème dû au symbolisme et qu'il aurait mieux valu écrire : carré.)

(Jean-Luc)
suite

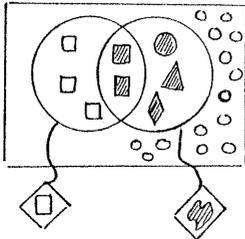
1^o Tu dois dessiner des formes pas carrées.

2^o Pourquoi t'as dessiné des carrés ?

3^o (Je rétorque :

c'est pas des carrés, c'est des carrés et bleus)

Et pis alors ? c'est pas des carrés ?



(Joanne)

1^o (C'est pas croyable !)

Où sont les carrés ?

Tu ne dois pas dessiner de carrés !

2^o Et dans l'ensemble de tout, tu mets tout le reste
tout ce qui ne va pas là.

Note : Je n'ai pas dit à Monica si la solution avait été produite par un élève ou pas. Les noms mis sous les diagrammes sont là pour indiquer lesquelles ont été observées.

En outre, je demandais si elle avait remarqué que les élèves avaient souvent opposé forme bleue à forme vide.

Réponse : "Au début, je faisais des remarques, demandant si ils pouvaient colorier. Ils prenaient ça alors comme une nouvelle consigne et disaient qu'on pourrait colorier. Je n'ai donc pas insisté".

Effectivement, il paraît bien difficile de faire ce type de remarque à un enfant de 8 ans.

Conclusion de cet interview :

Les représentations sur lesquelles se basent l'enseignant pour aider et corriger l'élève sont des représentations de tâche (réussite ou non de l'exercice) et trahissent un peu l'objectif (irréaliste et peu explicite) de l'exercice. Monica remarque bien quelques particularités des réponses, elle est capable de

reconnaître les réponses de certains élèves, mais, faute de recul (ou de repères), elle ne confronte pas la signification que pourrait prendre leur réponse à la signification de l'exercice. (cf. III).

2.5.

Discussion.

Le problème n'est pas de reconnaître des figures non carrées, ni même d'en produire. Les réactions des élèves le prouvent (Céline : "Là, on est obligé de faire des formes carrées et là (où y a l'étiquette ) on peut mettre des cercles, des triangles...")

La question est de savoir où les placer. Ainsi l'impossibilité décrétée au premier diagramme tient à ce que l'endroit désigné pour placer les figures (non-carrées) porte l'étiquette : carré. Il n'y aurait pas eu de problèmes avec l'étiquette: non carré à sa place (mais aucun élève n'a songé à la transformation). Les élèves ne pensaient à la plage externe qu'en dernier lieu. Et il est aussi très surprenant de voir qu'ils y ont souvent mis de tout, carrés compris. Enfin, dans le troisième diagramme, l'endroit désigné semblait être avant tout la plage , et dans ce même ordre d'idée, les attributs étaient lus en opposition. (carré/forme non carrée, *colorié* /non *colorié*).

La façon de lever l'impossibilité - à cause de l'insistance de l'enseignante - était soit de ne pas tenir compte de l'étiquette, soit de ne plus tenir compte de la consigne.

Il est intéressant de noter combien tout ceci est lié. Faire des ensembles, c'est avant tout mettre des figures (ensemble) dans un même endroit ; on ne dit

pas : "là, l'étiquette  désigne l'ensemble des carrés" mais "là, il faut mettre des carrés". Et la plage extérieure n'est pas prise comme un endroit en lui-même mais plutôt un endroit pour les autres , pour le reste.

On peut voir cette interdépendance - et par là, la limitation de la connaissance de l'élève à une tâche spécifique et étroite avec les deux comparaisons suivantes :

1^o Cette fiche a été corrigée dans la seconde édition du manuel d'exercice. Ce qui - dit en passant - laisse entendre qu'elle posait des problèmes aux enseignants. La correction consiste en la donnée d'une série de figures de couleur, et la consigne devient :



dans chaque diagramme, ne dessines que les formes non carrées.

L'explication au maître est ainsi reformulée : "ER 35 : parmi les formes données il s'agit de reconnaître celles qui ne sont pas carrées et de les dessiner dans chaque diagramme".

La question est-elle vraiment de reconnaître les non carrés ?

Que peut amener une telle correction ? D'une part éviter que l'élève lise les attributs en opposition bleu/non coloré, et proposer des figures à placer dans la zone externe du 3e diagramme. D'autre part - et ça trahit un peu l'exercice - cela donne à l'élève des références, la qualité "non-carré" est pensée à travers la comparaison des éléments et non pas comme génératrice d'un ensemble.

Il faudra étudier la réaction des élèves à cette fiche et la comparer à celles obtenues sur l'ancienne - ou sur une autre version encore qui consisterait à ne donner que des figures non-carrées à placer dans chaque diagramme. Pour le moment, je n'ai pas eu le loisir de faire ces comparaisons. J'ai néanmoins pu in-

terroquer deux élèves de première année (fréquentant la même classe; mais je ne connais pas leur institutrice). J'ai mené un entretien clinique avec eux pour comparer les fiches. Les résultats de ceux-ci ont confirmé que la question qu'ils cherchent à résoudre est celle de l'endroit où placer les figures, et cela passe avant tout (ils choisissent un endroit puis interprètent les étiquettes en conséquence).

a) Le premier élève a fait ER 29 (ancienne) puis ER 35 (nouvelle).

ER 29 : Au premier diagramme il a déclaré "impossible" et a passé au 3e diagramme, où il n'a rempli que la plage  de formes non carrées non coloriées. Ce n'est que plus tard, après avoir dit quelque chose sur l'intersection qu'il a tenu compte de l'autre attribut. (C'est comme si le diagramme représentait ).

ER 35 : Premier diagramme, il remplit l'ensemble avec les formes non carrées. Je lui demande de lire l'étiquette, il les place alors à l'extérieur. Ensuite, il remplit juste le 3e diagramme..

Confrontation des 2 fiches : il corrige ses réponses à ER 29 dans le sens de ER 35.

b) Le second élève a passé ER 35 (nouvelle) puis ER 29 (ancienne). Deux mois plus tard, alors qu'il disait ne pas se souvenir de l'exercice, il a passé l'épreuve dans l'ordre inverse.

ER 35 : Au premier diagramme, il a réfléchi un peu et a dit : "C'est là" ! (page externe) et a rempli juste. Il n'a pas fait le 3e diagramme.

ER 29: Il a mis des formes non carrées tout autour de la corde de l'ensemble. Il s'est plusieurs fois trompé mais en se corrigeant sitôt après.

Deux mois plus tard : il a proposé que l'étiquette  signifie "rond" et malgré mon désaccord, s'y est tenu. Comme si : l'interdiction de placer un carré — l'interdiction de "penser" un carré. Il n'a alors plus tenu compte des

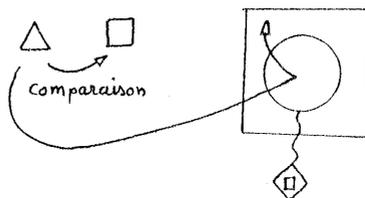
étiquettes. Confronté à sa solution première (2 mois auparavant) il a préféré l'actuelle.

Tout ceci n'est pas très simple. Il faudra d'autres recherches. Mais la logique est confirmée, l'emplacement prime. D'ailleurs, quand j'ai demandé : "et puis là, tu mets quoi ?" les deux élèves ont absolument voulu dessiner des carrés malgré la consigne.

On peut aussi dire que la donnée des figures semble aider l'élève en lui donnant un point de repère. La distinction semble être la suivante :

quand il n'y a pas de figures, la production des figures est soumise à la détermination de l'endroit (comme si l'espace aidait la variation).

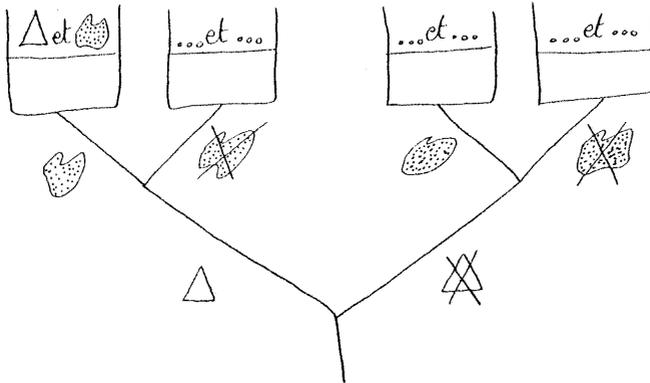
quand les formes sont données, elles n'ont pas à être produites d'une part, et de l'autre, l'élève raisonne indirectement en passant par la comparaison avec le carré.



L'élève sort le triangle de l'ensemble, via sa comparaison avec le carré. (Tandis qu'en pensant une série de formes non carrées, les formes sont mises en relation entre elles).

2° C'est la comparaison avec la fiche ER 30 (celle qui suit ER 29). Remarquons tout d'abord que cette fiche n'a pas subi de corrections (à part un petit détail). Pourtant il s'agit du même type d'exercice mais avec les diagrammes de Carroll et d'arbre.

ER 30 Dans chaque diagramme, complète les étiquettes et dessine des formes non rouges.



	Δ	...
☘		
...		

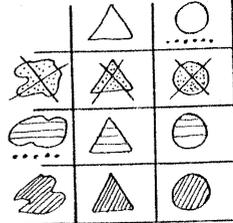
L'exercice a été fait le même jour que le précédent.

Or cette fiche n'a pas posé les problèmes vus plus haut. Fait intéressant, les élèves ont recouru au traçage des étiquettes : ☘ corrigé par l'élève en ~~☘~~. Pour l'arbre, ils n'ont pas tenu compte des étiquettes le long des branches mais ont tenu compte avant tout des cadres. Mettant par exemple ☐ et noir au-dessus d'une figure de carré noir.

On peut dire que : ou bien les étiquettes y sont et les objets aussi
ou bien l'étiquette est corrigée de façon à pouvoir
mettre une figure.

Dans le premier cas, l'élève ne tient pas compte de la consigne, mais ne s'occupe que du diagramme, et dans le second, l'élève adapte le diagramme pour placer un objet permis.

On remarque que les formes non coloriées réapparaissent (par exemple dans l'arbre, la case 1⁰ est remplie d'un \triangle non colorié et l'attribut rouge est tracé). Enfin il y a des figures tracées.



D'autres fois, ce sont les cases toutes entières qui sont tracées.

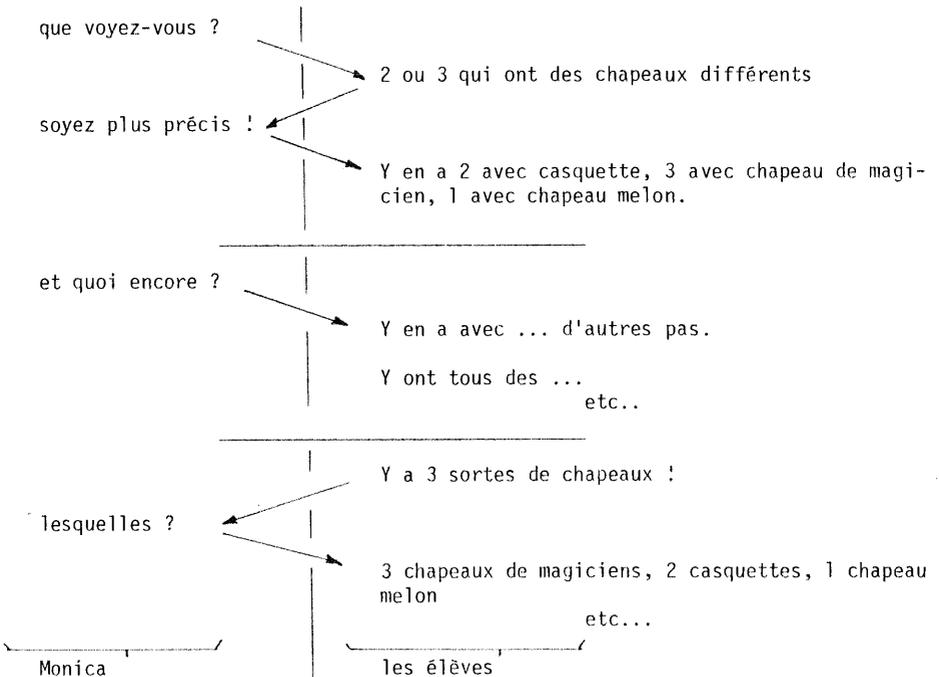
a) Donc les élèves ont été plus cohérents entre le placement de l'étiquette et celui de la figure. Cela tient sans doute au type de tâche. Dans les "arbres de classements ou diagramme de Carroll", la tâche insiste avant tout sur la combinaison des attributs, ce qui fait que le rapport élément-attribut (étiquette) est très direct. L'attribut tracé est interprété symboliquement et prend même une existence comme élément. Ce qui n'est pas le cas avec les diagrammes de Venn.

b) De plus, on voit de nouveau combien les diagrammes eux-mêmes sont interprétés de façon impérative, comme une consigne à part entière !!

a) Phase de description :

Les élèves décrivent le matériel, ils donnent beaucoup de détails, commençant par les détails nettement différenciateurs. Ils discutent ensuite d'autres détails ambigus, ou communs à toutes les cartes. Leurs formulations sont : "Il y en a des avec... (manteau rouge, trompette par ex.), pas d'autres". "Ils ont tous des ... (souliers bruns)" Selon que l'attribut est différenciateur ou commun. Ils se piquent au jeu de décrire ainsi.

Monica comme vu en première année tente de les renvoyer sur les attributs. (cf. chap. I) ce qui les amène à décrire plus complètement le matériel. Ça donne schématiquement :



b) Phase de jeu proprement dite :

Consigne : Un élève va au tableau et réarrange les cartes de manière à

faire des ensembles. Il fait comme il l'entend. Pendant ce temps, ses camarades ferment les yeux (cachent la tête entre les bras). Quand l'élève a terminé, il dit aux autres de regarder. Ceux-ci doivent essayer de deviner (déduire) quels ensembles il a faits.

Evidemment, les regroupements ne sont pas toujours univoques et il reste une part de devinette pour les élèves. (Les élèves ne font pas de frontières à leurs ensembles). De plus les élèves compliquent de plus en plus, et comme par hasard, aboutissent à une intersection. Voyons ceci :

1 ^o	<u>Olivier</u> propose			HB
			CRT	HRT
		MRT	CO	HR

Une élève trouve tout de suite : "les chapeaux de magiciens, les 2 avec casquette et tu as laissé tout seul celui qui a un chapeau melon".

Monica interprète et demande à Olivier si c'est bien une classification selon le type de chapeau.

Olivier acquiesce.

2 ^o	<u>Vincent D.</u> propose		COT	HB
		MRT	CRT	HR HRT

Caty va au tableau et du doigt montre une droite horizontale séparant les clowns à veste rouge des autres.

V.D. "Oui, mais y a aussi ça" (il fait du doigt 2 séparations verticales pour montrer qu'il a fait par type de chapeau.

Fabrice : "moi je croyais que c'était ça " (il montre une séparation verticale en chapeaux bas et chapeaux hauts).

3^o Martin propose

HR HB
HRT

COT CRT MRT

Joanne propose chapeau bas, chapeau haut.

Martin: "oui mais y a autre chose".

Roby: "rouge et pas rouge".

Martin : "non, y a orange" (COT)

Olivier : "y a aussi les trompettes"

Martin fait avec la main :

"y a une petite séparation" !

HR HB
----- (petite séparation)
HRT

(grande séparation)

COT CRT MRT

"mais c'est en même temps une intersection".

où
çâ?

Martin montre le pourtour des cartes avec chapeau hauteforme.

Fabrice: "faut une craie"

Martin fait :



mets les étiquettes.

Martin dit :

"c'est tous ceux avec trompette et tous ceux sans trompette et avec chapeau hauteforme" (ce qui n'est pas une intersection).

etc...

A noter tout particulièrement :

- a) la complication qui va dans le sens de tenir compte de 2 distinctions
- b) ensuite les élèves qui raisonnent en terme d'espace (séparation) entre les cartes, par où passent les frontières (cordes).
- c) Le dessin "pour que ça soit clair" , demandé par Fabrice, et la description, avec peut-être une opposition : "sans trompette" "avec chapeau haute-forme".

3.2.

Constituer une intersection (21.3.80 2e trimestre, deuxième année)

Matériel :

- 12 cartes représentant des bonhommes de neige.
- 3 couleurs de chapeau : Rouge (R), Noir (N), Vert (V)
- 2 tailles : grand (G) petit (P)
- Avec ou sans balai (B avec balai, \overline{B} sans balai).

a) Description :

1⁰ - Ils énumèrent les caractères distinctifs :

- les 3 couleurs de chapeau
- les grands, les petits
- avec ou sans balais.

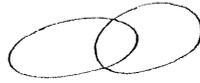
2⁰ - Ils aiment bien faire des paires avec une seule différence et parler en termes de ressemblance.

Ex. : "ils ont le même chapeau".

Ça apparaît plusieurs fois.

- 3⁰ - Ils groupent les cartes par famille selon la couleur du chapeau. C'est papa, maman, le garçon et la fille. Les femmes ont les balais.
- 4⁰ - Ils veulent alors faire des "groupements" et demandent des fils (cordes).
Monica leur dit d'attendre avant de faire ça.
- 5⁰ - Discussion pour savoir si y en a 2 les mêmes.
Y en a aucun des mêmes.
Ils font des paires à une différence et disent : "Si on enlevait la couleur (la grandeur, le balai), ils seraient les mêmes". Ils répètent souvent cette façon de comparer.
Finalement un élève dit : "ils ne sont pas les mêmes, ils se ressemblent", ce qui vaut une félicitation de la maîtresse.
- 6⁰ - Alors une élève dit qu'entre une carte de grand bonhomme de neige, et de petit bonhomme de neige, il n'y a pas une seule différence, mais beaucoup puisque tout est plus petit".
- 7⁰ - Comme ils continuent à dire : "ces deux sont les mêmes mais... (ils ont pas le même chapeau, par ex.)". Je fais remarquer que c'est pas les bonhommes de neige qui sont différents mais leurs attributs (balai, chapeau).
Une élève prend la balle au bond et dit que c'est vrai "un bonhomme de neige c'est pas les habits qui comptent" puis "si on comptait pas les habits, ils seraient les mêmes, un bonhomme de neige, c'est un bonhomme de neige".
Les autres élèves sont pas d'accord, mais Monica veut passer à autre chose, alors on arrête.
- b) Consigne donnée par Monica :
par groupes, vous travaillez.

Monica trace sur une grande feuille



Martin vous faites autant d'intersections que de cartes ?

C'est quoi une intersection ?

Ils montrent tous la place centrale.

Il faut classer les cartes, il faut qu'il y ait aucune plage, aucun domaine de vide (elle désigne les domaines du doigt). Vous noterez tout ce que vous trouverez important pour que, après, quand vous montrerez la feuille aux autres, ils doivent pouvoir dessiner les bonhommes de neige comme vous avez fait.

Elèves : aïe aïe, hein ...

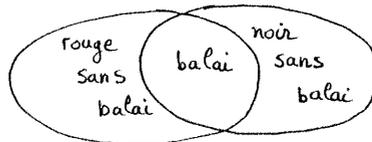
pas moi maîtresse, moi je regarde, etc...

J'ai pu observer deux groupes au travail (grossièrement)

c) 1er groupe : Vincent D. Vincent L. Mélanie.

Ils ont de la peine car ils veulent tenir compte de tous les attributs en présence.

V.D. met les 3 cartes GRB GVB et GNB (grand avec balai des 3 couleurs) dans l'intersection, puis il met les autres rouges et les autres noirs dans les "ailes du papillon". Puis il met toutes les formes avec balais dans l'intersection.



Mélanie : et les verts !

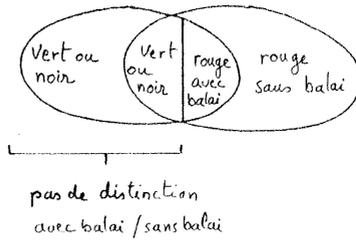
Vincent D. : on s'en fout ! (ils restent dehors).

Discussions car ni V.L., ni Mélanie ne sont d'accord. Finalement, ils disent que ce n'est pas possible. Mélanie dit que c'est possible. Ils vont voir la maîtresse qui les renvoie à leur travail puisque Mélanie dit que c'est possible.

Mélanie propose de "couper l'intersection par une frontière", et de

"mettre les noirs et les verts ensemble".

Ce qui donne :



Vincent D. dit "ça ne va pas, tu dois mettre toutes les couleurs, tous les petits et tous les sans balai..." (classifier à la fois selon tous ces critères).

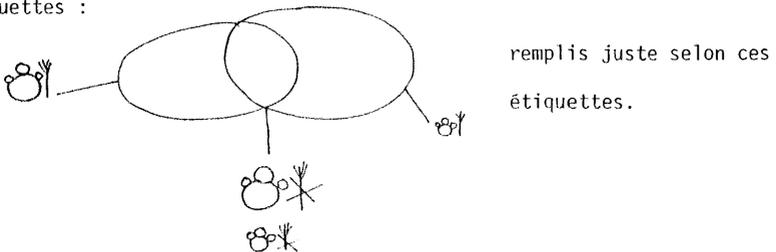
Mélanie : alors je ne sais pas.

Vincent D. propose alors ceci :

il met 3 grands sans balai dans l'intersection, puis dans les ailes, 3 petits avec balais, 3 grands avec balais, les 3 cartes restantes (3 petits sans balai) rejoignent l'intersection.

Vincent L. n'est pas d'accord à cause des couleurs mélangées.

Vincent D. et Mélanie se mettent d'accord sur cette solution et font des étiquettes :



Vincent L. propose de faire par couleur.

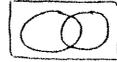


mais les autres ne sont pas d'accord.

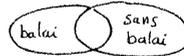
Mélanie dit que le sien est mieux parce qu'ils ont séparé les balais et les sans balai (y a pas de balais et sans balai ensemble).

d) Un second groupe (Martine, Michel, Fabrice)

Ils font le dessin sur une feuille :



Martine propose de faire l'opposition balais/sans balai dans les ailes

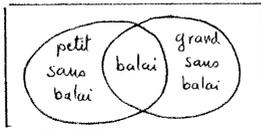


Michel et Fabrice ne sont pas d'accord.

Michel propose de faire



Fabrice est d'accord, il commence par remplir la plage des cartes du petit bonhomme de neige. Puis il décide de mettre "tous les balais dans l'intersection!" Puis il met les grands (sans balai) dans l'autre partie.



Ils sont tous d'accord et mettent les étiquettes.

e) Quelques jours plus tard, Monica fait une discussion en groupe des solutions présentées. Voici les notes que Monica a prises.

"Mon problème est que j'aimerais bien qu'ils "avancent" dans la compréhension de l'intersection. Comment faire ?

Les deux équipes (ci-dessus) présentent leur production. Les élèves sont d'accord avec ces classifications. Plusieurs élèves disent que c'est "les 2 choses les mêmes" et montrent que le principe de classement est identique.

Pour montrer que c'est la même chose, ils arrangent leurs cartes. Je m'aperçois qu'ils tiennent compte de la couleur (rapprochent les cartes de même

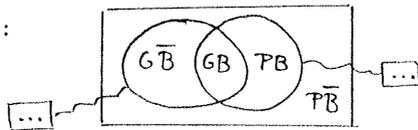
couleur). Mais Sabine dit qu'on ne s'occupe pas de ce critère. Je lui dis qu'on n'est pas obligé de s'occuper de tous les critères.

Ensuite je demande : les grands avec balais (qui sont dans l'intersection), si ils pouvaient sortir, ils iraient où ? Denys jubile et met les grands avec les autres grands et les petits avec les autres petits.

Ensuite je fais remarquer que la réponse des équipes n'est pas tout à fait encore ce qu'on appelle une intersection. Et que l'intersection est en même temps dans un ensemble et dans l'autre ; et qu'on ne doit pas mettre d'étiquette à l'intersection.

Ils sont d'accord ! (avec l'étiquette, et le geste  .)

Je propose alors :



et leur demande

de trouver les étiquettes. Ils sont d'accord avec cette disposition.

Discussion au sujet des étiquettes, car ils hésitent entre les 2 attributs possibles des "ailes de papillon": $G \text{ ou } \bar{B}$ et respectivement $B \text{ ou } P$?

Quand les étiquettes sont mises je leur demande de justifier la place de chacun. (une carte après l'autre).

Ensuite Denys veut expliquer . Il prend une carte de bonhomme de neige grand, vert, sans balai. Il pose la carte sur le bonhomme de neige grand, vert, avec balai. "Le grand sans balai remplace le grand avec balai, et le petit avec balai lui donne son balai". Il rapproche les 3 cartes au milieu. "Les grands avec balais sont les mêmes que les grands sans balai, enfin pas les mêmes mais de même grandeur, et avec le même balai (que le petit avec balai)."

Olivier et Sandra disent "les petits avec balais sont les mêmes que les grands avec balais, sauf qu'ils sont plus loin. Mais pour eux, les grands avec balais sont différents des grands sans balai".

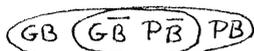
f) Long protocole mais fort intéressant.

1^o On remarque que les élèves classent leurs cartes, puis discutent des comparaisons par paires et de façon subtile. On remarque aussi à la discussion finale qu'ils reviennent sur le même type de mises en relations.

2^o Les élèves à cette époque n'ont plus de problèmes à faire des fiches de remplissage avec figures données d'avance. Et pourtant, ici, où il faut organiser soi-même sa classification on retrouve exactement le même type de réponse que sur fiches en première année ... Avec les oppositions ! On voit en outre que les élèves procèdent bien plage par plage. On voit aussi que certains (comme V.D.) commencent par l'intersection.

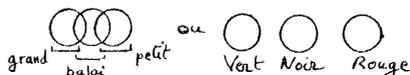
3^o Ce qui déroute les élèves c'est qu'ils ont identifié 3 types d'attributs, et ça les gêne pour un classement selon deux ensembles. On voit aussi une préférence pour les caractères dichotomiques, certainement à cause de la dissymétrie de la négation (Mélanie : Rouge - Vert et Noir).

Ça donne soit 3 familles (cartes en carré) soit ces classifications (et j'ai oublié de dire qu'ils arrangeaient les formes de l'intersection en gauche/droite).



2 façons de procéder sans lien entre elles.

(Remarque : on retrouve



4^o Ils reconnaissent qu'il n'y a pas d'étiquette aux intersections, et reconnaissent la proposition de Monica comme étant la solution cherchée. Denys essaie

d'expliquer que l'intersection prend un attribut dans chacun des ensembles (ce qu'il reprendra dans sa confrontation avec Jean-Luc). Mais c'est un raisonnement déductif à partir de la solution.

5⁰ En fait il y a une difficulté pour expliquer qui tient à l'antinomie suivante :

pour expliquer l'intersection, il faut montrer comment elle est produite par le croisement de deux ensembles.

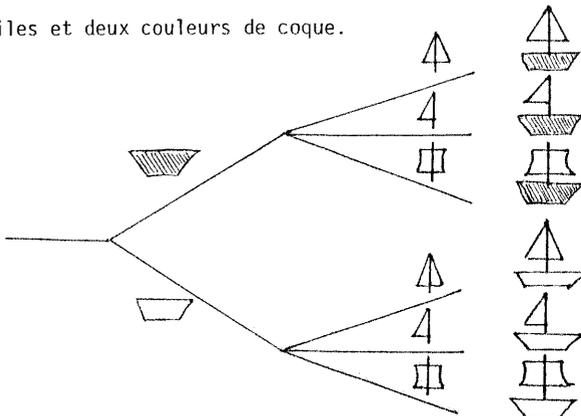
-quand on veut faire une intersection, on part du schéma tout fait, on part de la plage intersection et on arrange le reste autour. C'est comme si c'était l'intersection qui produisait le reste.

3.3.

Passage d'une classification en arbre à un tableau de Carroll.

(28.1.80) (2e trimestre, deuxième année)

Les élèves avaient dû faire un arbre pour trouver combien on peut dessiner de bateaux avec 3 types de voiles et deux couleurs de coque.



Y a-t-il un autre moyen de les classer ?

On a déjà fait ça.

Dans des cercles.

Dans un tableau avec des cases.

Oui c'est ce que j'aimerais que vous fassiez.

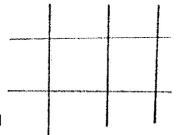
Faut faire un tableau à double entrée.

Je ne comprends pas, à double entrée, c'est quoi?

Monica fait un dessin sur sa feuille



Sandra fait avec des baguettes



Elle met dans chaque case 1 bateau

à voile:

Michel : faut mettre les étiquettes !

mais il ne sait pas comment faire.

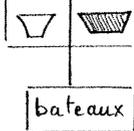
Olivier : elle a oublié aussi une grosse chose,

il faut mettre plus de branches (baguettes)

Olivier propose de faire le tableau suivant :

(*)						

dans chaque case, il peut y avoir plusieurs cartes.



Sabine : il faut mettre l'étiquette **bateau** / là-haut (case en haut à gauche). (*)

Fabrice : il faut mettre le **bateau** en bas.

Tu veux faire un mélange avec l'arbre.

Martin : mais dans les tableaux y a aussi des étages comme ça (il fait une deuxième ligne) y a pas une seulement alignée.

Qui veut faire comme Olivier ?

Tous sauf Martin.

Martin propose : un étage comme ça

					
x	x	x	x	x	x

Martin: puis il faudrait le remplir. Il propose de mettre un bateau bleu  parce que les voiles sont un peu incurvées.

Vincent L. : mais c'est les mêmes ! on voit que c'est pas important.

Martin : oui, mais un tableau comme ça c'est long, c'est de la fantaisie. (Il abandonne).
- c'est drôle, c'est le seul qui veut faire autrement et il s'arrête.

Mélanie veut quand même faire les étages seulement à certaines places.

Sabine : je sais à quoi ça sert

C'est la même chose de mettre (les cartes des images de bateau) en tas ou bien en ligne. C'est exactement ce que fait Mélanie, autant de cases qu'il y a de cartes :

x	x	x	x	x	x
x	x	x		x	x
x		x		x	x
		x			x

une carte par case
des cases vides.

Puis Mélanie aimerait changer la place des étiquettes des coques et les mettre en ligne.



Martin : c'est justement ça les étages !

Mais la tentative n'aboutit pas (à cause du fait qu'il y a plus de 2 lignes).

Mais pourquoi y en a plus de bateaux bleus que de bateaux rouges ?

V.L. on a pas décidé de faire le même nombre de chaque.

Oui tous les enfants ont fait ceux qu'ils voulaient.

J'enlève 3 étiquettes il faut que vous fassiez un autre tableau.

Elle enlève en plus les bateaux en trop, y en a plus que 6. (un de chaque).

Vincent D. a une idée.

- c'est pas possible

- tu fais le même qu'avant

Katia c'est un code (tableau bien arrangé)

Vincent D. trace un tableau de 2 lignes et 3 colonnes. Puis fait un tableau 3x3.

puis il place les bateaux:
et finalement les étiquettes

grande excitation, tous tout à fait d'accord.

Je propose le tableau usuel :

ne sont pas d'accord avec la disposition des étiquettes de voile, et les remettent en une colonne centrale.

Remarques analytiques.

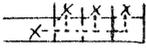
1^o Il y a un certain mélange dans le traitement des cartes qu'elles représentent des éléments, des étiquettes. Avec un traitement selon 2 manières : soit on fait une pile de cartes pour signifier un ensemble (et on pose quelquefois même l'étiquette au-dessus de la pile) soit on les met chacune dans une case spécifique. Les étiquettes ont droit à leur propre case, mais on place toutes les étiquettes à disposition même si il y a répétition (ce qui arrange d'ailleurs les élèves).

2⁰ Ainsi Olivier fait un arbre mais avec des cases. Puis, glissement à cause des cases, on discute de savoir où il faut mettre l'étiquette, bateaux, en bas comme pour l'arbre ou dans le coin supérieur gauche comme le tableau ? (utilisée pour les relations). Puis des glissements successifs pour obtenir "plusieurs étages..." et mettre les étiquettes de côté.

3⁰ Monica décide de restreindre le matériel à une carte par élément et une carte par étiquette. Ce qui relance la discussion et permet de trouver la solution.

Mais l'étiquetage central a un avantage sur la disposition usuelle : il permet en effet une mise en relation directe des éléments aux étiquettes. Et ceci gêne les enfants. Ainsi la solution trouvée est, pour les enfants, une véritable trouvaille.

D'un autre point de vue, Monica en supprimant la deuxième série de cartes a mis une contrainte de plus dans le jeu, la question était alors : comment utiliser deux fois la même série d'étiquettes, la disposition trouvée en est la réponse. Il y a donc continuité entre les schémas produits en différents moments.

4⁰ C'est avant tout la disposition figurale du tableau qu'il cherchent à retrouver, et cela sert de critère qu'ils sont sur la bonne voie, qu'ils ont trouvé. Ils ont déjà fait de tels tableaux à double entrée, et ils savent que les étiquettes se rapportent à plusieurs cases, qu'on reprend une même étiquette plusieurs fois.  . On voit bien que cela est encore pour eux un fonctionnement sur le diagramme plus qu'une règle qui le construit (constitue).

3.4. Conclusion.

Voici donc comment cela fonctionne en classe. Ces 3 exemples sont intéressants à plus d'un titre et j'encourage le lecteur à les comparer, surtout à penser à la situation dans laquelle ils s'inscrivent. Tout d'abord, les diagrammes sont des objets bien identifiés par les élèves. Ils ont de la valeur car le maître attend leur production. Ils sont difficiles car les élèves ont de la peine à les assimiler, ils ne retrouvent pas la forme exacte, ne se souviennent pas d'une fois à l'autre. Secondement les jeux auxquels on joue ici sont des jeux de formulation et, plus nettement encore dans le dernier cas, les élèves sont capables de se juger et de chercher à améliorer leur production, pour qu'elle soit plus explicite, ou qu'elle ait moins de défauts. Ce mouvement d'assimilation de recherche est intéressant car les élèves ne reproduisent que ce qu'ils ont pu assimiler, ne peuvent partir que de leur pensée. Celle-ci a des limitations certes mais est aussi capable d'astuces.

On retombe bien sûr sur mes conclusions du chapitre III où j'appelais à prendre en compte le statut même des diagrammes comme objet de formulation et à considérer sous cet angle les activités des élèves. De plus, cette description montre ce que les élèves identifient derrière les exercices qu'on leur fait faire (à la fois ils prennent au sérieux la tâche de classification, à la fois ils cherchent à retrouver les formes enseignées), comment ils intériorisent et s'approprient les objets scolaires. Car c'est bien aux objets qu'ils ont affaire et non pas directement aux opérations logiques que ceux-ci sont censés représenter.

4. Conclusion des chapitres IV et V.

Les points décrits en détail au chapitre III ont été éprouvés à ces analyses des productions scolaires. On pourra encore affiner les interprétations, recueillir d'autres données, je n'ai pas non plus présenté tous les événements intéressants qui se sont produits en classe à propos de la logique. Cependant, l'essentiel de mon projet a abouti. Il s'agissait de montrer comment interpréter les productions scolaires, dans leur ensemble, c'est-à-dire celle des élèves, des groupes d'élèves, ou encore des maîtres dans leurs interactions.

Pour cela, il aura d'abord fallu démontrer, par la description pas à pas de la transposition didactique, et l'examen des rouages de ce processus inéluctable, que l'objet enseigné a une spécificité scolaire, dont la didactique est l'étude privilégiée. Puis, ne pas en rester à ce constat et entrer dans les mécanismes psychologiques et sociaux de l'échange maître élève pour caractériser le produit du travail scolaire.

Les éléments théoriques, et les descriptions données ici ne sont pas non plus que des regards "après coup" mais donnent véritablement prise sur les processus en jeu dans la classe.

Je vais maintenant reprendre le tout sur l'enseignement du nombre.

C H A P I T R E V I

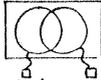
NOMBRES ET OPERATIONS

1.1.

Le point .

J'ai illustré la transposition à travers l'exemple des ensembles et des diagrammes de Venn. J'ai essayé de décrire en détails les aspects les plus importants de l'enseignement de la logique en première et deuxième année primaire. Tout d'abord la définition générale du projet didactique (chap. III al. 1.1. ensuite le fait que la théorie ne concerne pas seulement la matière proposée mais aussi fournit une théorie des situations et des expériences qu'on va faire faire aux élèves. Viennent ensuite les aspects de la réalisation proprement dite. Les objets scolaires sur lesquels on va travailler, le matériel et les principes de sa construction . Si on veut comprendre la façon dont les élèves vont travailler, on est amené à questionner très précisément ce matériel, on ne peut pas s'en tenir à la description donnée par le manuel et à la liste des objectifs ou remarques quant à sa signification. Il est important de pouvoir se rendre compte de l'activité que les élèves vont être amenés à avoir sur ce matériel, il ne suffit pas de jouer avec (comme on le fait dans les recyclages) car la situation est faussée dans le sens qu'on sait "où on veut aller". L'analyse est de ce point de vue tendancieuse. Comme points importants, je citais l'analyse du fonctionnement suscité chez l'élève (et on a vu au chap. ^{III} §4. et (chap. V § 4.) comment une logique de l'exécution des tâches s'était substituée à la logique qu'on voulait enseigner) et l'analyse des limitations dues au matériel. Il convient alors de poser la question essen-

tielle du dépassement de ces limitations. Est-ce possible ? Comment ? (Quand nous adultes faisons les jeux proposés, ces limitations sont déjà, au départ dépassées par l'intention que nous prêtons au jeu). Etudier cette question renvoie forcément à celle de la façon dont les élèves travaillent.

Les jeux, les exercices, les problèmes sont avant tout des artifices inventés par les pédagogues pour susciter, diriger, endiguer la pensée des élèves. L'instrument de ce guidage sont les tâches proposées. Un des aspects de ces tâches est le système utilisé pour communiquer et induire une certaine activité. Ainsi avec le diagramme de Venn à remplir  on communique un ordre (remplir le diagramme) et on lui fournit un certain nombre d'indices à cette action (étiquettes par exemple). Mais la signification que prendra le résultat (classification) se trouve "ailleurs". Il en est de même avec l'exercice $7 = 2 + \dots$ on communique l'ordre de compléter "l'équation" et on donne un certain nombre d'indices pour le faire. Mais la signification du résultat ($7 = 2 + 5$ égalité) est une autre affaire. On verra plus loin des élèves qui ne se trompent pas dans l'écriture de calculs qu'ils se sont proposés à eux-mêmes, mais qui pour une tâche comme $7 = 2 + \dots$ se trompent. J'utilise donc le mot indice pour signaler la différence du statut que prend le symbole quand c'est l'acteur qui se le propose ou quand c'est utilisé à des fins d'exercices. A l'école, les élèves apprennent tout autant un contenu mathématique qu'un code pour déduire des activités dans un cadre symbolique donné. (on aimerait que l'élève s'approprie ce cadre symbolique). Mais ce symbolisme est au départ lié totalement à la tâche qui l'accompagne. Et ne prend de signification qu'à travers elle. Il est donc illusoire de vouloir définir une signification intrinsèque (hors tâche) du symbolisme et croire atteindre ainsi des concepts mathématiques (nombre, égalité, opération ...). Il est vain de croire que l'utilisation d'un symbolisme pour faire certains exercices va permettre à l'élève, par lecture du résultat de se dégager de la tâche et accéder à un niveau d'abstraction plus haut.

1.2.

Contexte : situation des élèves à l'entrée en première année.

La question du nombre que je voudrais aborder est très vaste, ne serait-ce que par son omniprésence. Les élèves à leur entrée à l'école ne sont pas du tout naïfs sur cette question. Que savent-ils ? Ils savent tous réciter un bout de la comptine, connaissent en vrac pas mal de nombres (leur nom). Ils savent reconnaître des situations numériques liées à tout ce que l'on mesure, les dimensions physiques, l'argent etc... Ils sont intrigués par les grands nombres, les cents, les mille. En fin de première année, leur répertoire s'est considérablement agrandi et l'école n'y est peut-être pas pour grand'chose. Exemples : En achetant des chewing-gums les enfants reçoivent toutes sortes d'images : joueu de football, hockeyeurs. Une série de ces cartes représentait des bolides. Une image de la voiture et dessous des spécifications techniques : moto ou voiture (2 ou 3 ou 4 roues) type de moteur et cylindrée, vitesse en kilomètres/heure, dat du record de vitesse etc... Beaucoup de grands nombres. J'ai vu les élèves jouer avec ces cartes (en première année) une sorte de bataille. Ils tiraient chacun une carte de leur lot et comparaient un des nombres inscrits dessus (au début c'était un peu "folklorique"). Ils s'accordaient pour savoir quel nombre l'emportait et qui gagnait la plie. Le jeu s'est perfectionné avec les mois. Ce type de cartes sont d'ailleurs toujours comparées : combien on a de cartes, quelle cartes on a, les nombres inscrits sur les cartes, etc... Ce qui donne des évaluations sur la quantité de cartes et sur la valeur des cartes. Il y a évidemment des trocs. Il y aurait une foule d'autres exemples à donner. J'en donnerai encore un qui m'a frappé. Au milieu de la première année, Martin a écrit la comparaison suivante : $\% > 10000$. On lui a demandé de nous expliquer. Il a répondu que % était un très très grand nombre. Puis qu'il avait vu ce signe à la télévision lors de votations et que cela voulait dire que beaucoup de gens avaien

voté (un comble en Suisse !) . Plusieurs autres élèves avaient déjà vu ce signe, certains savaient que cela se lisait : pour cent. Aucun évidemment ne savait ce qu'il signifie.

On ne me contredira pas si je dis que les enfants sont très intrigués par les nombres. Conséquences :

- les pédagogues (et psychologues) semblant sous-estimer la familiarisation des élèves avec les nombres.

- il n'y a pas que la comptine.

- Au cours des deux premières années scolaires, ce fossé entre ce que je qualifierai de "connaissance sociale" (selon les termes piagetiens) et la connaissance mathématique n'a pas l'air de se combler, au contraire, il y a assimilation incessante de nouveaux éléments par l'élève (caractéristique de cet âge).

Remarque. Bien sûr cela varie énormément d'un élève à un autre, d'une classe à l'autre. On ne peut pas baser sans autres d'enseignements là-dessus. Bien sûr les enseignants sont les mieux placés pour voir cela, et en discutent peut-être avec les élèves. Mais c'est un à-côté. Je ne comprends pas qu'on puisse parler de "construction du nombre", de "découverte du nombre" ou encore de "découverte de la sériation des nombres" comme le fait la Méthodologie Romande.

Pour en revenir aux enseignants, il faut noter une chose. Ils sont assez désarçonnés de voir leurs élèves avoir de la difficulté pour des tâches numériques simples, de base alors que par ailleurs les élèves semblent s'en tirer dans des situations autrement plus complexes. J'ai déjà donné un exemple de ce phénomène dans le chapitre I où je montrais que les élèves cherchaient des choses qui à première vue paraissaient plus complexes que celles demandées.

1.3.

Débat didactique.

L'enseignement du calcul en classe élémentaire, c'est le terrain pour une multitude d'activités, de jeux, de matériels d'enseignement. De sorte que si les élèves baignent dans un monde plein de chiffres et de nombres, les enseignants eux, sont au milieu d'une jungle de méthodes, c'est-à-dire de matériel, jeux, activités exercices, etc.

Une étude serait intéressante pour voir quel impact cela a sur la façon dont les mathématiques sont enseignées à l'école. A ce titre, il n'est pas indifférent de noter que Monica est une jeune institutrice (l'ai-je dit ?) et qu'elle a été formée aux "mathématiques modernes". Elle n'a pas travaillé en classe des méthodes comme Montessori ou Cuisenaire. Point important à noter. De même que le fait suivant : la calculatrice n'est pas entrée dans sa classe.

Il est aussi intéressant de noter que certains enseignants actuellement, ne suivent que très vaguement (à leurs dires) la méthodologie romande et préfèrent opter pour telle ou telle autre méthode. Que d'autres (plus nombreux sans doute) suivent parallèlement au programme officiel une méthode différente, pour le calcul en particulier Monica ne le faisait pas, mais il lui arrivait d'emprunter quelques exercices à une collègue qui, elle, pratiquait parallèlement un cours traditionnel de calcul.

Pour en revenir au contexte dans lequel se place un enseignement du calcul, il est à noter que les enseignants sont certainement (subjectivement) plus à l'aise que pour les ensembles ou la logique. Ils connaissent bien ce chapitre et surtout ils peuvent identifier les difficultés des élèves soit aux difficultés qu'ils se rappellent avoir eu (croient se rappeler) soit à des points précis, des "passages

délicats" bien identifiés et traditionnellement désigné. Par exemple, le passage à la dizaine, le problème des bornes et des intervalles etc... Il y a là d'ailleurs une espèce de pondération psychologique à une analyse des méthodes de calcul.

Finalement on peut en conclure deux choses. Le livre du maître et le programme ne sont qu'une des sources qui influence le pédagogue. Et secondement, il y a en toile de fond un véritable débat didactique, qui, dans la pratique, porte sur ce qu'il est possible de faire avec les élèves (sur ce qui est impossible), sur le rythme à adopter dans l'enseignement, sur l'origine des difficultés des élèves et les moyens d'y remédier, etc... Voilà une chose importante à se rappeler dans la lecture et l'analyse d'un manuel scolaire, ce d'autant plus qu'il est officiel.

1.4.

Double fonction du programme.

Le manuel scolaire prend effectivement position. Je vais citer deux passages de la méthodologie de 1ère année - l'argument est repris dans le même sens en 2e année (Méthodologie romande, 1ère année, 2e édition pg. 131 et 133).

Citations :

a) "Un enfant peut mémoriser ses tables d'addition et de soustraction à l'âge de six ou sept ans ; il faut toutefois être conscient que ce résultat ne s'obtient qu'à force de drill et d'entraînement. Une connaissance aussi superficielle fait appel à la mémoire et non au raisonnement ; elle n'est donc pas transférable à d'autres situations. L'enfant qui se contente de répéter quelque chose qu'il n'a pas compris, risque d'adopter la même attitude plus tard et de se révéler alors inapte à chercher et à découvrir. Il y a par conséquent un danger évident à ne

pas respecter, dans les opérations, les stades du développement de l'enfant".

b) " Bien que les objectifs à atteindre en fin de première année soient clairement définis et que les remarques d'ordre méthodologique qui précèdent chaque activité soient abondantes, il est toutefois indispensable de rappeler quelques principes généraux propres à l'avenue OP.

- La compréhension des opérations numériques et la maîtrise des techniques correspondantes ne sont pas concevables par le moyen d'exercices nombreux et "répétitifs" ; ces derniers ne conduisent qu'à des automatismes, et, bien souvent, à des blocages parfois irrémédiables. Avant d'être exercées, les opérations numériques doivent avoir été véritablement comprises ; il en découle que celles-ci doivent être approchées dans des jeux et par des manipulations avant de faire l'objet d'exercices écrits.

- Il est utile, pour commencer, d'encourager l'enfant à recourir à du matériel (objets, diagrammes). Ceci évitera qu'il cherche à deviner la réponse, c'est-à-dire à éluder l'effort nécessaire à opérer. Inversement, lorsqu'un enfant manifeste qu'il est capable d'opérer correctement, et qu'il cherche à se passer de matériel, il serait faux de l'obliger à rester à une étape que son développement le pousse à dépasser.

- Il est difficile de distinguer l'intériorisation d'une opération et la connaissance "par coeur" de son résultat. Il faut donc être attentif à ne pas les confondre. Si une opération est intériorisée, et si elle a été souvent exercée sur les mêmes termes, le résultat s'inscrit dans la mémoire. Cette mémorisation est utile (un adulte n'opère pas pour trouver la somme de 7 et 5), mais elle doit être comme un sous-produit de l'intériorisation.

- On veille surtout à ce que le rythme des exercices soit assez lent pour que chaque enfant puisse s'appuyer sur la réflexion aussi longtemps que la mémorisation n'est pas acquise. Il est également important que les exigences soient

adaptées aux possibilités de chaque enfant et que l'élève en difficulté soit mis en mesure de recourir à la manipulation pour trouver le nombre qui lui fait défaut. Si le calcul mental ne fait plus l'objet d'une leçon spéciale, chaque leçon de mathématique doit comporter un moment où, à partir du support concret qui a servi de thème à la leçon, les élèves ont l'occasion de manipuler les nombres, de construire, d'assimiler puis de mémoriser.

- On ne négligera pas de faire très largement appel à l'invention de situations par les élèves eux-mêmes, puisque c'est par sa propre pratique et sa propre exploration que l'enfant comprend une situation nouvelle et non par des références à l'expérience d'autrui".

Fin de citation.

Cette prise de position se prolonge dans le manuel et on note un profond souci de bien situer l'enseignement par rapport à une théorie du nombre. Théorie qui fait référence tant aux mathématiques qu'à la psychologie génétique.

Mathématiquement : On introduit le nombre comme cardinal d'ensembles, et on fait appel à la correspondance terme à terme pour l'introduire. (correspondance terme à terme = bijection entre ensembles finis). L'addition est introduite comme une décomposition du nombre ou encore un moyen de "construire" de nouvelles quantités. On rappelle qu'à la réunion d'ensembles disjoints correspond l'addition de leurs cardinaux. On introduit les symboles des nombres, ainsi que les expressions comme $2 + 3$, qui sont l'expression d'une quantité (5) plus que d'un calcul . Ce point de vue aimerait amener les élèves à considérer tout de suite l'écriture $2 + 3 = 5$ comme une équation et non pas comme un calcul : $2 + 3$, 5 désignent la même quantité, on met donc entre ces expressions le signe = . Avec ce point de vue on aimerait que des écritures comme $5 = 3 + 2$, ou $2 + 3 = 4 + 1$ soient d'emblée familières aux élèves (ce qui n'est pas le cas si on considèrerait ces écritures comme des calculs). On travaille des écritures lacunaires :

$2 + \dots = 8$. Qualifiées du nom d'équation. Le manuel voudrait que les élèves sachent reconnaître l'équivalence des "équations" $2 + \dots = 8$ et $8 - 2 = \dots$.

On aborde l'idée d'opérateur numérique , grâce à un symbolisme particulier - machines numériques : $\boxed{4} \xrightarrow{+5} \boxed{9}$. On aimerait par là amener l'élève à considérer les propriétés des opérations numériques (par l'étude de la composition des machines et de ses propriétés). Ceci devrait déboucher sur l'introduction des nombres relatifs (dans les années suivantes).

Le produit est introduit comme produit cartésien de deux ensembles (listage des couples, étude de la variation des couples en fonction de la variation des ensembles donnés) ou la réunion d'ensembles disjoints d'ensembles de même cardinal.

Remarque : Tout ce que je cite là est effectivement réalisé dans des jeux, même si les termes (cardinal, équipotent, produit cartésien...) ainsi que certaines remarques s'adressent aux enseignants exclusivement.

Psychologiquement :

On introduit la correspondance terme à terme, et on exerce la transitivité de l'égalité numérique. (si il y a autant de tasses que de sous-tasses et si il y a autant de cuillères que de sous-tasses, il y a autant de tasses que de cuillères.) On parle sans cesse de "construction du nombre". C'est comme si le programme voulait accompagner la construction du nombre chez l'élève, et cela en remontant aussi loin que la conservation du nombre. Autre exemple, la soustraction On parle de la représentation dynamique que les élèves se font des opérations numériques. Reprenant par là les remarques des psychologues. Ou encore la multiplication où on insiste de son double aspect, aspect multiplication d'ensembles, aspect somme itérée.

De plus on insiste beaucoup sur l'aspect manipulation des premières activités et sur le fait que les notions mathématiques doivent s'ancrer sur du matériel concret.

Mais en définitive, cela concerne-t-il les élèves ? La prise de position elle-même ne s'adresse pas à eux. Mais comme déjà dit, le manuel a cherché à réaliser ces options dans les jeux qu'il va proposer aux élèves. On ne propose pas tant une "construction" qu'une "reconstruction" scolaire des notions, de façon à mettre tout le monde à niveau, de façon aussi à introduire les élèves à une sorte de code scolaire dans lequel s'inscrira tout le travail. On veut ainsi "donner de bonnes bases" aux élèves, et les préparer à ce qu'on va étudier plus tard. (aux équations, aux propriétés des opérations, etc...).

Il y a donc deux fonctions du programme :

a) une prise de position dans le débat cité plus haut. Justification des choix faits. Cela ne concerne pas directement les élèves. Cela concerne les enseignants mais il est une autre façon de leur dire les choses, sans doute plus retenue par eux, c'est la désignation de ce que les élèves devront savoir faire en fin de 1ère ou de 2ème année. (Méthodologie pages 131-132 (1ère année) et 102-103 (2e année)).

b) Il y a la réalisation d'un programme, la proposition de situations diverses organisées et bien articulées. La mise en place d'un symbolisme qui sert de lien aux activités, qui réalise la cohérence entre elles et qui permet d'introduire aux exercices.

Un enfant peut mémoriser ses tables d'addition et de soustraction à l'âge de six ou sept ans; il faut toutefois être conscient que ce résultat ne s'obtient qu'à force de drill et d'entraînement. Une connaissance aussi superficielle fait appel à la mémoire et non au raisonnement; elle n'est donc pas transférable à d'autres situations. L'enfant qui se contente de répéter quelque chose qu'il n'a pas compris, risque d'adopter la même attitude plus tard et de se révéler alors inapte à chercher et à découvrir. Il y a par conséquent un danger évident à ne pas respecter, dans les opérations, les stades du développement de l'enfant.

Voici les objectifs à atteindre en fin de première année, pour la grande majorité des élèves:

1. Addition (compréhension de l'opération)

- Résolutions de problèmes additifs simples (les termes sont donnés explicitement, il faut en déterminer la somme) portant sur des objets concrets dont le nombre est inférieur à 20. Pour résoudre ces problèmes les élèves doivent avoir du matériel à leur disposition (leurs doigts y compris) et sont autorisés à utiliser des schémas et des diagrammes.

2. Ecriture additive

- Correspondance entre une situation additive concrète ou un diagramme de la réunion d'ensembles disjoints, et les équations $a + b = .$ et $. = a + b$
- Connaissance des différentes décompositions en sommes de deux termes des nombres de 1 à 10.
- Sériation ou comparaison d'écritures additives.

3. Table d'addition

- Mémorisation consciente de la table d'addition jusqu'à dix (en liaison avec les décompositions du nombre).
- Intériorisation de 10 à 15 (l'enfant doit être capable de reconstituer mentalement l'opération, avec passage de la dizaine, sans utiliser de matériel).
- Exploration de 15 à 20 (avec matériel à disposition aussi longtemps que le besoin s'en fait sentir).

Ces deux derniers points ne seront atteints qu'en deuxième année pour certains élèves.

4. Additions lacunaires

- Les équations $a + . = b$ $b = a + .$
 $. + a = b$ $b = . + a$

Tant que l'élève en exprime le besoin, il faut lui laisser du matériel pour résoudre ces équations.

5. Soustraction (compréhension de l'opération)

- Résolutions de problèmes soustractifs, directement réalisables à l'aide de manipulations (enlever des jetons, séparer une partie d'un tout). Le nombre des objets ne doit pas dépasser dix à quinze.

Notes personnelles

6. Ecriture soustractive

- Correspondance entre une situation soustractive présentée dans un ordre chronologique et l'écriture $a - b = \dots$ (a représente l'état initial, b un opérateur soustractif).

L'essentiel du travail pour le passage de la situation ou du diagramme à l'écriture symbolique se fera en deuxième année; en particulier, l'équation $\dots = a - b$ n'est pas à la portée des élèves de première année.

7. Table de soustraction

Elle peut être abordée, éventuellement, à condition que l'enfant ait du matériel à sa disposition; aucun entraînement et aucune mémorisation ne doivent intervenir.

Notes personnelles

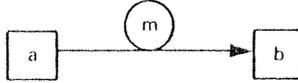
L'élève devrait être capable de:

- trouver les décompositions d'un nombre inférieur à 20 en toutes les sommes possibles de deux termes;
- additionner en colonnes deux ou trois nombres de deux chiffres et expliquer sa démarche;
- résoudre des additions lacunaires dont la somme est inférieure à 50, sans échange, ou dont un des deux termes est un nombre d'un chiffre (ou un multiple de 10);
exemples: $14 + \dots = 36$ $35 = \dots + 8$ $41 = 11 + \dots$
- effectuer les soustractions correspondant aux additions lacunaires ci-dessus:
exemples: $36 - 14 = \dots$ $35 - 8 = \dots$ $41 - 11 = \dots$

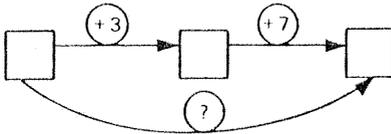
De plus, les niveaux de maîtrise suivants sont souhaités:

- sans être exprimées, les propriétés de l'addition (associativité, élément neutre, commutativité) devraient être utilisables, en particulier pour le passage à la dizaine supérieure, la comparaison d'écritures additives, la découverte de procédures personnelles de calcul, etc.;
- exemples: • pour effectuer les additions $27 + 8$ et $8 + 9$, l'enfant devrait penser à utiliser des procédés tels que $27 + 8 = (27 + 3) + 5 = 30 + 5$ et $8 + 9 = (8 + 8) + 1 = 16 + 1$;
- au lieu d'effectuer mécaniquement l'addition $15 + 9 + 15$ de gauche à droite $(15 + 9) + 15 = 24 + 15 = 39$, il devrait penser à additionner les deux termes 15;
- en complétant une table d'addition, il devrait être capable de se simplifier la tâche en travaillant par symétrie;
- pour comparer $34 + 8$ et $34 + 9$, il ne devrait pas avoir besoin d'effectuer les deux additions; certains élèves devraient même être capables de découvrir sans calcul l'équivalence de deux écritures comme $21 + 18$ et $22 + 17$;
- l'élève devrait employer correctement les signes $<$, $>$, $=$, \neq ;
- exemples: • l'enfant devrait être capable d'envisager globalement des écritures additives et de placer un signe correct entre elles: $19 + 4 > 7 + 11$;
- il devrait pouvoir utiliser correctement le signe $=$ dans une chaîne et éviter des écritures telles que: $29 + 14 = 29 + 10 = 39 + 4 = 43$;
- il devrait reconnaître l'équivalence des équations: $\dots = 17 - 3$ et $17 - 3 = \dots$
- il devrait être capable de coder une situation additive ou une situation soustractive par une écriture mathématique;
- exemples: • «A met treize crayons dans cette boîte, B en met douze». L'élève devrait pouvoir coder cette situation par $13 + 12 = 25$;
- «Maman rapporte dix-huit œufs du marché. Elle peut en placer douze dans le casier spécial du frigo. Combien d'œufs devront être placés ailleurs?» Outre la réponse 6, l'élève devrait pouvoir «écrire son calcul» sous une des formes $12 + 6 = 18$ ou $18 - 12 = 6$;

- il devrait pouvoir utiliser les machines additives, les machines soustractives et composer deux machines additives;
- exemples: • l'enfant devrait pouvoir compléter des schémas du type ci-dessous dans lesquels soit a, soit b, soit m, est inconnu:



- il devrait pouvoir trouver la composée de $(+3)$ et $(+7)$ indépendamment de la disposition ou de la couleur des flèches:



- il devrait être capable de découvrir le cardinal d'un ensemble produit, à l'aide d'un support matériel et le représenter par des écritures multiplicatives (pour des nombres jusqu'à 30);
- exemple: • l'enfant devrait être capable de trouver qu'avec cinq couleurs et quatre formes, on peut créer vingt blocs différents et le noter par $4 \times 5 = 20$ ou par $5 \times 4 = 20$.

La multiplication reste au stade de la découverte; il n'y a donc pas lieu de définir des objectifs de maîtrise pour cette opération.

PRÉSENTATION DES ACTIVITÉS

Activité 1 Cette activité est destinée à consolider la construction du nombre et à faire en quelque sorte la synthèse des notions acquises en première année dans l'avenue OP: **comparaison** et **sérialisation** de collections ainsi que des **cardinaux** correspondants, utilisation des signes $<$, $>$, $=$, \neq , recherche des différentes écritures additives correspondant à un nombre naturel, approfondissement de la notion d'addition, etc.

Fiches proposées: OP-1 à OP-8.

Notes personnelles

1.5. Transposition

Dans le cas des ensembles, j'ai dégagé, au chapitre III, une structuration en deux plans des jeux et exercices. D'un côté des tâches qui consistent essentiellement en placement d'éléments, de l'autre une signification en termes d'ensembles, les relations ensemblistes étant rendues par les relations spatiales. Il en est de même ici. Les jeux proposés par la méthodologie illustrent une théorie du nombre. C'est là l'objet d'étude : le nombre et les opérations numériques pour eux-mêmes. Il ne s'agit - au niveau explicite des méthodologies - pas de l'apprentissage des dénombrements, comptages et calculs. Bien sûr, ces derniers ne sont pas absents de la classe. Plus, c'est bien dénombrements, comptages et calculs qui feront le noyau des tâches scolaires. Que le lecteur se rassure. Cela va même de soi, tellement de soi qu'il n'en est que très peu fait mention. On n'en parle pas dans la présentation des activités (jeux) de la méthodologie. Ils sont bien sûr indispensables, pour les jeux, et plus encore pour les exercices. Mais là non plus, pas de commentaires. Les rares fois qu'il y est fait allusion, sont celles d'avertissements, comme par exemple dans la citation que j'ai fait à la page 309. Donc, dénombrements, comptages et calculs passent presque aussi inaperçus que les actions de repérage, comparaisons d'éléments à éléments et placements, dans l'enseignement des ensembles. Une différence de taille cependant. Les activités numériques (dénombrements, etc...) ont un statut mathématique et sont traditionnellement enseignées. Donc, dans le cas qui nous occupe maintenant, le rapport d'importance entre activité et signification est l'inverse de celui qui caractérise l'enseignement des ensembles. Personne n'est dupe et les élèves apprendront avant tout à compter. Le caractère formel et abstrait des leçons (activités, ou jeux) consacrées par la méthodologie au nombre apparaît d'autant plus frappant. Je vais pourtant centrer mon analyse

sur eux. Car derrière se profile une conception du nombre qui dirige (interprétation prédéterminée) tout l'enseignement. Son contenu, sa progression et l'interprétation des difficultés des élèves. Ce programme se veut être un enseignement de mathématiques (on a beaucoup glosé sur le singulier ou le pluriel à mettre à mathématique); Et ceci nous amène à expliquer l'absence de référence aux activités numériques : une conception théorique des opérations de calcul et de leur apprentissage fait cruellement défaut. Sur ce point, les enseignants sont laissés à l'empirisme.

Remarques : 1^o La même explication rend compte des cas des ensembles, ce qui s'explique ici aisément : l'activité sous-jacente n'est même pas identifiée comme signifiante en regard du projet pédagogique.

2^o Actuellement, cette théorie est en passe de se constituer. La situation est donc appelée à changer bientôt.

3^o On aurait tort de comprendre ceci selon une analyse - traditionnelle - trop schématique qui oppose savoirs faire à savoirs (mécanisme et compréhension, instruments et concepts etc...).

A titre d'exemple, rien de tel qu'une comparaison entre un manuel d'arithmétique ancien et du nouveau programme. Je prendrai alors la soustraction dans un ancien manuel de 4e primaire encore en usage en 1970-71 (à Genève) et le manuel actuel du 2e primaire (le décalage des degrés n'importe pas dans cette comparaison).

Manuel d'arithmétique 4e année (Maurice Béguin, Denise Jeanguenin, Jean Frei, DIP Genève 1962) pg 39, 40, 42, 45, 46, 84, 88, 93, 97 et 101.

Methodologie romande 2e année (2e édition 1980) pages 115 - 117.

Conception ancienne.

1. On remarque dans l'ancien manuel la définition de la soustraction :
"La soustraction permet de calculer ce qui reste, ce qui manque, la différence.

2. On remarque le cheminement dans le travail sur le bénéfice, prix de vente.

No. 347 Situation où il y a bénéfice : $P.V. > P.A.$

No. 357 Définition du bénéfice : $B = P.V. - P.A.$ (différence)

No. 377-8 Situation où il y a perte : $P.V. < P.A.$

No. 392 Comment faire pour avoir un bénéfice : faire que $P.V. > P.A.$

No. 402 Relation fondamentale : $P.A. + B. = P.V.$

La notion mathématique que l'on vise et qui est l'équivalence relationnelle entre $P.A. + B. = P.V.$; $P.V. - P.A. = B$; $P.V. - B = P.A.$ reste sous-jacente. On ne le mentionne pas directement. Elle est pourtant bien la clé de tous les

150. **LA SOUSTRACTION**
SENS DE L'OPÉRATION

La **soustraction** permet de calculer:
ce qui **reste** ce qui **manque** la **différence**

Pelote de 28 mètres Contenance 120 litres

21 mètres

95 l

25 kilos

28 m 120 l 32 Kg

21 m 95 l 25 Kg

?

?

?

151. Contenance 150 litres

Contenances

90 l ? 90 l ? 150 l ?

je soustrais ?

j'ôte ?

j'enlève ?

je retranche ?

90 de 150

150

- 90

60

Le résultat **60** peut représenter:
le **reste** ou le **manque**
le **complément** ou encore la **différence**

152. **LE RESTE**

Si je n'ai **pas tout** pris, utilisé, dépensé, perdu, il doit **rester** quelque chose.

J'en ai perdu 124

J'en ai utilisé 124

J'en ai dépensé 124

300 billes

380 litres

100 100 100 20 50 70

Que **reste-t-il** ?

Preuve:

380 ce que j'avais.

-124 ce que j'ai perdu.

256 ce qui reste.

256 ce qui reste

+124 ce que j'ai perdu

380 ce que j'avais.

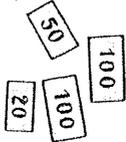
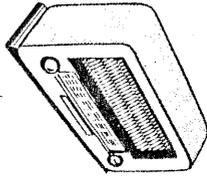
LE MANQUE

LE COMPLÉMENT

164.

Mon désir

Mes économies



valeur:
325 francs

Je n'ai **pas assez** d'argent.
Il **manque** une certaine somme.
Il faut **compléter**.

QUE ME MANQUE-T-IL ?

Preuve:

$$\begin{array}{r} 325 \\ -270 \\ \hline 55 \end{array}$$

ce qu'il me faut.
ce que j'ai déjà.
ce qui me manque.

$$\begin{array}{r} 270 \\ + 55 \\ \hline 325 \end{array}$$

ce que j'ai déjà.
ce qui me manque.
ce qu'il me faut.

LA DIFFÉRENCE

181.



Il y a plus de billes rouges.
Il y a moins de billes noires.
Il y a une **différence** de nombre.

12



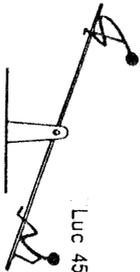
différence

12 billes
- 8 billes
4 billes

Il y a 4 billes rouges de plus que de noires.
Il y a 4 billes noires de moins que de rouges.
Il y a une **différence** de 4 billes.
La **différence** peut être en plus ou en moins.

184.

Jean 36 kg



Luc pèse plus que Jean.
Luc 45 kg Jean pèse moins que Luc.

Il y a une **différence** de poids.

$$\begin{array}{r} 45 \text{ kg} \\ -36 \text{ kg} \\ \hline 9 \text{ kg} \end{array}$$

Luc pèse 9 kg de plus que Jean.
Jean pèse 9 kg de moins que Luc.
Leurs poids ont une **différence** de 9 kg.
9 kg de plus ou 9 kg de moins.
36 kg + 9 kg = 45 kg 45 kg - 9 kg = 36 kg

LE BÉNÉFICE

J'achète à un certain prix. Je donne: 20c	Je revends plus cher. 20c	Je fais un bénéfice. 5c
1f	1f	20c
5f	5f	1f
20f	20f	5f
100f	100f	20f

Je revends plus cher que j'ai acheté: je fais un bénéfice.

J'achète et je paie avec cette pile d'eucus.

Je revends et je reçois celle-ci.

Ceci est mon bénéfice

mon prix d'achat mon prix de vente mon bénéfice

la différence

Le bénéfice est la différence entre mon prix de vente et mon prix d'achat.

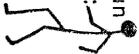
LA PERTE

J'achète à un certain prix. Je donne: 20c	Je revends au même prix. Je reçois 20c	Ai-je fait un bénéfice? ?
1f	1f	?
5f	5f	?
20f	20f	?

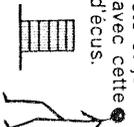
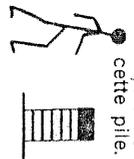
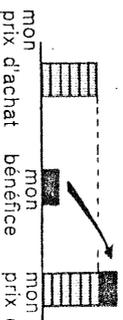
J'achète à un certain prix. 20c	Je revends moins cher. 10c	Je fais une perte. 10c
1f	50c	50c
5f	2f	1f
70f	5f	2f
100f	50f	70f

Je revends moins cher que j'ai acheté: je fais une perte.

LE PRIX DE VENTE

<p>J'achète à un certain prix:</p> <p>20c</p> 	<p>Je veux faire un bénéfice de:</p> <p>5c</p> 	<p>Je dois revendre à ce prix:</p> <p>20c</p> <p>5c</p> 
<p>1f</p> <p>5f</p> <p>20f</p> <p>100f</p>	<p>20c</p> <p>1f</p> <p>5f</p> <p>20f</p> <p>100f</p>	<p>1f</p> <p>5f</p> <p>20f</p> <p>100f</p> <p>20c</p> <p>1f</p> <p>5f</p> <p>20f</p> <p>100f</p> <p>20c</p> <p>1f</p> <p>5f</p> <p>20f</p> <p>100f</p>

Pour faire un bénéfice, je revends plus cher que j'ai acheté

<p>J'achète et je paie avec cette pile d'écus.</p> 	<p>Celui-ci sera mon bénéfice.</p> 	<p>Je revends et reçois donc cette pile.</p> 
		
<p>Prix d'achat et bénéfice donnent prix de vente.</p>		

ACTIVITÉ 2

Notes personnelles

Références antérieures

Activités OP-2, OP-3, OP-4 et OP-5 de première année.

SOUSTRACTION:

- réunion de collections disjointes, partition;
- addition lacunaire;
- actions d'ajouter et d'enlever;
- écritures soustractives, égalités.

Buts:

- coder une situation additive ou une situation soustractive par une écriture mathématique adéquate:
 $a + \dots = b$ $\dots + a = b$ $b - a = \dots$;
- résoudre des équations de la forme:
 $b - a = \dots$ $\dots = b - a$ $b - \dots = a$ $a = b - \dots$

Activité préalable: OP-1.

Plan: a) Liaison entre addition et soustraction

1. Écritures additives et écritures soustractives obtenues à partir d'actions de réunion et de séparation
2. Écritures additives et écritures soustractives obtenues à partir de partitions en deux sous-ensembles
3. Équations équivalentes

Suggestions

Remarques: — La soustraction n'est pas une véritable opération; il ne s'agit que d'une écriture équivalente (c'est-à-dire donnant les mêmes indications) à celle de l'addition. Dans les problèmes de la vie courante, on rencontre deux types de situations soustractives: celles dans lesquelles intervient l'aspect «différence» et celles dans lesquelles apparaît l'aspect «reste»⁽¹⁾. Cette distinction disparaît toutefois au niveau de l'écriture, puisque la notation $a - b = \dots$ peut aussi bien traduire l'idée de reste que celle de différence.

— En classe, la soustraction peut aussi être envisagée sous différents aspects:

1. L'addition lacunaire: on décrit une situation soustractive en faisant appel à l'addition. Toutes les activités portant sur l'addition permettent d'aborder la soustraction; en effet, les équations

$$5 + \dots = 8 \quad \dots + 5 = 8 \quad 8 = 5 + \dots \quad 8 = \dots + 5$$

sont équivalentes à l'équation $8 - 5 = \dots$

2. La «soustraction-reste»: on fait correspondre une écriture soustractive à une succession d'états et d'actions apparaissant dans un ordre chronologique déterminé, par exemple:

- Pierre possède neuf images, 9
- il en donne deux à Sylvie, 9 - 2
- il lui en reste sept. 9 - 2 = 7

(1) Dans les problèmes de la vie courante, la division présente elle aussi deux aspects: le partage et la contenance.

3. La «soustraction-différence»: on recherche le nombre d'objets que représente l'«excédent» ou le «manque» d'une collection par rapport à une autre; cet aspect peut être mis en évidence par un schéma de correspondance terme à terme; par exemple:

Marc possède neuf billes,
David en possède douze,
la différence est de trois billes.

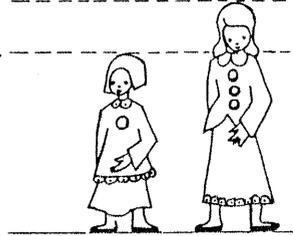


La différence peut aussi être perçue au moyen de la comparaison de deux longueurs; par exemple:

Ariane mesure 147 cm. —

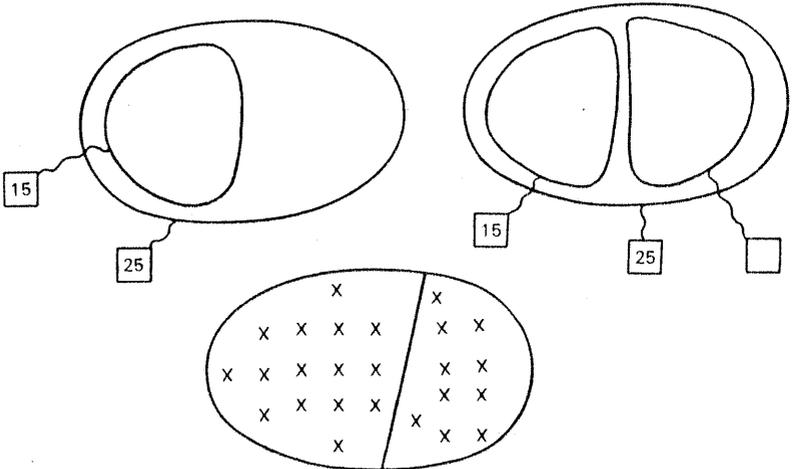
Sabine mesure 135 cm. —

la différence de taille
entre les deux fillettes
est de 12 cm.



Selon le type de situation présentée, la recherche du cardinal du complémentaire d'un ensemble inclus dans un autre ensemble peut être associée à l'un ou à l'autre des trois aspects ci-dessus. Pour l'étude de la soustraction envisagée ici, seuls les deux premiers aspects ont été retenus.

— Pour illustrer une situation soustractive, on peut utiliser diverses représentations:



- Les schémas présentés dans cette activité ne doivent pas être dissociés de la manipulation; ils illustrent les états successifs de la démarche des enfants, mais ils ne doivent pas être travaillés pour eux-mêmes.
- On observe fréquemment qu'un enfant qui sait additionner deux nombres est incapable de décrire la démarche inverse à l'aide d'une écriture soustractive. Il serait faux de lui imposer le choix d'une écriture, car toute situation soustractive peut également se traduire par une addition.
 - Lorsque l'écriture $a - b = c$ apparaît comme symbolisation d'une situation, elle n'atteint pas encore le niveau d'une opération. Dans la maîtrise de l'opération de soustraction on distingue trois niveaux:
 1. l'enfant est capable de résoudre un problème concret; par exemple, partant de quinze jetons, il peut en retirer huit et compter ceux qui restent. Il ne s'agit pas de soustraction véritable puisque l'enfant ne travaille pas avec des nombres, mais avec des objets qu'il dénombre.
 2. L'enfant peut se représenter l'opération, indépendamment d'un support matériel. Au début, il procède toutefois encore par comptage; il s'agit donc d'une transcription mentale de l'action matérielle. La compréhension de la soustraction s'approfondit quand l'enfant est capable d'exploiter ce qu'il a acquis antérieurement à propos de l'addition et transfère cet apprentissage dans sa façon d'aborder la soustraction. Cependant, si on demande à l'enfant d'écrire l'opération qu'il vient d'effectuer, il note généralement une addition du type $8 + 7 = 15$, alors que l'enseignant attendait probablement $15 - 8 = 7$.
Il est difficile de trancher entre plusieurs hypothèses explicatives: est-ce le fait que le premier apprentissage est celui de l'addition et que l'enfant y revient naturellement? Est-ce une réponse induite par l'obligation que l'on fait à l'enfant de justifier sa réponse? Est-ce parce que la soustraction n'est pas une véritable opération?
 3. L'enfant maîtrise enfin non seulement la notion, mais aussi les symboles qui s'y rattachent, c'est-à-dire les signes mathématiques $-$ et $=$, ainsi que la disposition des nombres les uns par rapport aux autres. Il est alors capable, par déduction logique, de proposer les écritures $7 + 8 = 15$ $8 + 7 = 15$ $15 = 7 + 8$ $15 = 8 + 7$
et aussi les écritures $15 - 8 = 7$ $15 - 7 = 8$.

La majeure partie de la matière proposée dans cette activité correspond aux deux premiers niveaux décrits ci-dessus.

- Le travail sur les écritures soustractives fait partie des activités de construction du nombre (décompositions, comparaisons avec les nombres voisins, etc.). L'essentiel des activités sur la soustraction doit donc se faire en liaison avec l'addition. En particulier, il semble important de mettre en évidence l'équivalence des écritures additives et soustractives le plus souvent possible.

problèmes qui sont posés dans ce chapitre. On a plus l'impression d'avoir ici une leçon de chose qu'une leçon de mathématiques.

3. Dans cette conception, les notions mathématiques seront abstraites de ce fond de problèmes. De là le "choix" de présenter à la file toute une série de problèmes quasi identiques.

On identifie une notion mathématique à une situation précise, "concrète". L'écriture proposée est une sorte d'écriture comptable qui permet de vérifier et de corriger l'opération mais n'a pas d'autre statut que la notation d'un calcul. La transposition est évidente puisqu'elle propose (c'est-à-dire en définitive construit) une réalité (marchande, artisanale) d'où émergent, au travers des problèmes, les notions mathématiques. On définit ainsi la soustraction comme une technique utile à résoudre des problèmes (ceux qui viendront) qui sont supposés être la réalité. Dans le problème l'élève est tantôt mis à l'intérieur du problème, à la place de l'acteur (marchand, artisan etc...) et on calcule pour réaliser quelque chose (un bénéfice...), tantôt mis à l'extérieur, en position de déduire des données manquantes (quel est le bénéfice ?).

Mais le plus frappant est que l'on ne dévoile finalement pas ce qu'il y a derrière ces situations. On ne généralise pas non plus. Les mathématiques ne constituent le contenu du cours qu'indirectement. Les mathématiques sont bien sûr la théorie des problèmes proposés (et voilà pourquoi les réponses sont toujours des nombres entiers, ronds), mais on n'y accédera que par le fonctionnement sur ces problèmes.

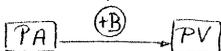
Conception actuelle.

La conception actuelle, on le sent bien, est tout autre. Tout d'abord, l'objectif avoué est que les relations mathématiques se dégagent des situations proposées, ainsi, comme déjà dit au chapitre III, les situations sont autant

d'expériences que l'on fait faire aux élèves (faire découvrir dit-on !).

On attache une grande importance au codage numérique d'une situation, c'est d'ailleurs là que se fait le passage entre un "jeu" et un exercice mathématique. C'est le symbolisme qui devient, au travers des fiches d'exercices, l'objet sur lequel l'élève va travailler (on passe du monde des objets, des images, des jetons à celui des chiffres, des symboles + , - , = , des étiquettes). Le travail sur fiche reprend et prolonge l'activité et amène l'élève sur de nouvelles expériences (dit-on) lisibles dans le résultat codé qu'il aura écrit dans sa fiche. Ainsi par exemple, le symbolisme des machines (cf. plus loin pg. 368) devrait amener à faire porter l'attention de l'élève sur les opérations et leurs propriétés. Pg. 129 de la méthodologie 2e année (2e édition) : "On ne saurait assez insister sur le fait que cette activité met l'accent sur la découverte de propriétés et non pas sur l'habileté à calculer. (...) . La pratique du calcul sera reprise dans d'autres activités concernant les opérations. Au travers d'un symbolisme cohérent, on assure la liaison et la cohérence des situations proposées. Et on veut exercer l'élève à faire de multiples mises en relations entre diverses situations et ainsi à englober les différentes connaissances dans un tout solide."

Les situations sont donc construites dans l'esprit de faire découvrir les mathématiques à l'élève. Les illustrations sont propres à faire faire l'expérience directe aux élèves de certaines notions. On réalise une notion dans un jeu particulier. La réalité est celle des enfants, et non plus celle - à priori - des épiciers marchands et artisans. Mais de plus on n'en reste pas à cette "réalité" et on passe au plan mathématique. Ainsi, imaginons qu'on reprenne le prix de vente, prix d'achat, bénéfice. On pourra l'introduire avec les machines :



Mais alors la situation n'en resterait pas là et

l'activité débouchera sur un exercice pour faire voir que les expressions

$PA + \dots = PV$ et $PV - PA = \dots$ sont équivalentes et traduisent la même situation :

$\boxed{PA} \xrightarrow{+} \boxed{PV}$ (et par là, aboutir à l'équivalence des équations
 $a+b=c$ $c-b=a$ $c-a=b$).

La transposition est définie de façon à faire émerger les notions mathématiques ainsi que de mettre en place des notations adéquates permettant de travailler directement au niveau d'abstraction voulu, et de réaliser une certaine cohésion entre les différentes notions abordées.

Donc on veut un véritable cours de mathématiques. Peu importe que l'on reprenne des choses connues des élèves puisqu'ici on leur propose non seulement des éléments de connaissance mais encore une organisation de celle-ci. On essaie de répondre à la situation où se trouve l'élève, riche mais embrouillée, par un cours de base aussi cohérent que possible.

2. Analyse de la méthodologie, les jeux proposés.

2.0.

Nouvelle édition de la méthodologie romande.

En 1979, respectivement 1980, sont parues les nouvelles éditions des manuels d'enseignement. Méthodologies (livre du maître) et cahier de fiches ont été remaniés.

Comparons rapidement les deux éditions.

a) Méthodologies : En fait les jeux en eux-mêmes ont peu été remaniés. Pour le chapitre OP - opérations - les seuls changements de jeux concernent la soustraction et le jeu sur les machines numériques. Le premier a été revu totalement, le second a été réorganisé mais sans changement d'option avec la première édition.

Le changement du livre du maître consiste en le regroupement de plusieurs jeux en des unités plus vastes : les activités. Ce qui devrait permettre aux enseignants de mieux voir et comprendre les articulations entre les différents jeux. Quelques nouveaux jeux ont été adjoints, souvent ils ont été imaginés autour de fiches d'exercice de la première édition qui se sont avérées plus difficiles que prévu. On a ouvert une rubrique des suggestions pour les maîtres.

Un second type de changement aura été fait dans la présentation. Pour chaque activité, il y a la donnée des buts à atteindre, le plan de l'activité, quelques remarques d'ordre mathématique, psychologique ou pédagogique. (On en aura vu un exemple avec la soustraction citée auparavant). Cet effort louable des auteurs permet de mieux analyser le manuel. Je me baserai donc sur cette nouvelle édition. Mais je me bornerai à l'analyse des jeux présentés en première édition et repris dans cette deuxième édition. Exception : le jeu de soustraction (L'analyse de l'ancienne version a été faite par J. Brun et moi-même dans la revue Maths Ecole 1980).

b) Cahier des fiches d'exercices.

Contrairement au livre du maître, ce cahier a été pas mal remanié. Surtout en ce qui concerne "l'avenue OP" (opérations qui nous occupe ici. En fait, on a supprimé pas mal d'exercices des autres avenues (ensembles, numération, découverte de l'espace) et on a augmenté le nombre d'exercices concernant les opérations. Ce qui indique le changement de point de vue qui s'est opéré depuis 1973 et l'insistance plus grande accordée au calcul. Les exercices de "l'avenue OP" ont subi pas mal de coupes, mais on en a ajouté encore plus de nouveaux.

Il est clair que je ne me baserai en principe que sur ceux de la première édition. Quelques très rares exemples pourront être pris çà et là dans les exercices de la seconde édition.

c) Pour ceux qui veulent se référer aux manuels scolaires, la référence aux nouvelles éditions est amplement suffisante (de même en ce qui concerne le chapitre III).

Les jeux que je mentionnerai dans la suite sont :

1ère édition.

1ère année : jeu ER 30 à 34
 jeu de OP : OP 1, 2, 3, 5.
2ème année : activité de OP : OP 1 à 5, 8 à 10.

Je ne m'occuperai pas de l'addition en colonne (jeu OP 11) ni des "Machines non numériques" (jeux OP 6 et 7).

2ème édition.

Cela correspond à :

1ère année : activité ER 8
 activité OP 2 et OP 5
2e année : activités OP 1 à 6 excepté OP 4 qui correspond
 à l'addition en colonne.

2.1.

Avertissement.

Tout programme d'enseignement s'appuie sur une théorie qui définit les notions à aborder et les relations qu'elles entretiennent. L'auteur d'un manuel a son point de vue sur les objets qu'il veut enseigner et il réalise des activités, exercices qui découlent de ce point de vue. D'autre part, il propose une méthode, c'est à dire un moyen pour faire accéder les élèves à une certaine connaissance

et pour leur faciliter l'abord de notions abstraites, ainsi que leur éviter certains problèmes qui pourraient les gêner dans leur apprentissage.

C'est cette théorie du manuel que je vais étudier en décrivant les jeux et en essayant de rendre compte de leur organisation.

Il n'est pas question de savoir ici si c'est cela qu'on fait apprendre ni si c'est cela que les élèves vont retenir. Ceci est une autre question.

La discussion pourra paraître théorique et abstraite, mais il importe d'analyser cette première transposition qui consiste à passer de "l'objet de savoir" à "l'objet à enseigner" (cf. chap. II pg. 64).

2.2.

Organisation des activités.

On peut regrouper les activités selon qu'elles présentent une unité du point théorique, le type de jeux proposés (qui peuvent être repris d'une activité à l'autre) et le symbolisme utilisé.

1. Il y a un noyau principal regroupant :

ER Ier 8 : cardinal d'un ensemble
construction du nombre.

OP Ier 2 : addition, nombres inférieurs à 10.

A cela, on peut rattacher directement les activités suivantes qui reprennent exercent et développent ce qui a été introduit. Soit :

OP Ier 1 et OP IIe 1 qui sont des activités de comparaison numériques ;
OP Ier 3 et 4 : addition - nombre 10 et addition - nombres supérieurs à 10 ;

OP Iie 6 : réunion d'ensembles disjoints de même cardinal, multiplication.

2. Un deuxième pôle, présentant un autre point de vue sur les opérations et qui est constitué par :

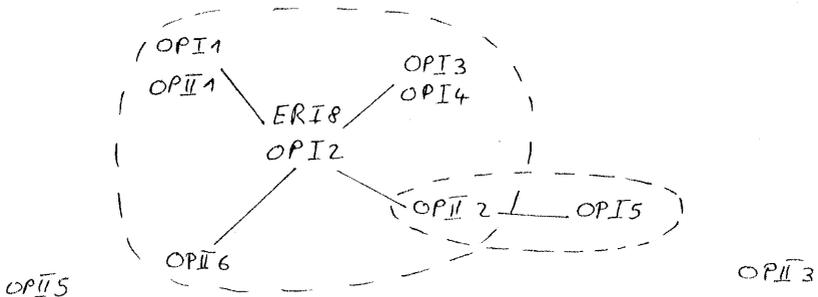
OP Ier 5 soustraction

OP Iie 2 soustraction. Cette dernière fait le "pont" entre

la soustraction telle qu'introduite et l'addition. Ceci étant en place, on commence à travailler plus directement sur les propriétés numériques. Cela donne à ce niveau deux activités :

3. OP Iie 3. Machines numériques - opérateurs additifs et opérateurs soustractifs. L'aspect "dynamique" entrevu dans l'introduction de la soustraction est ici le centre de l'activité.

4. OP Iie 5. Multiplication - produit cartésien. Cette activité est une étude de l'aspect numérique du produit cartésien est conçue comme une étude de fonction: on fait varier un paramètre, l'autre, puis les deux. On regarde le nombre de couples produits. On compare les résultats notés dans un tableau.



Je vais décrire le point de vue théorique du manuel à travers les jeux clés ER I8, OP I2, OP II2, OP II5, OP II3. Ceci ne constitue qu'un type de lecture et ne préjuge pas de ce que les élèves en retirent.

ACTIVITÉ 8

Notes personnelles

- Buts:
- favoriser la construction du nombre;
 - contribuer à l'acquisition de la conservation du nombre;
 - comparer des collections d'objets au moyen d'une correspondance terme à terme;
 - constater que le nombre est une propriété commune à plusieurs ensembles;
 - découvrir la succession des nombres naturels;
 - noter le cardinal d'une collection;
 - introduire et utiliser les signes $>$, $<$, $=$ et \neq .

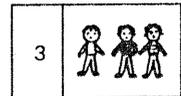
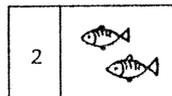
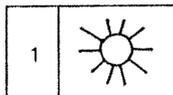
Activité préalable: ER-6.

- Plan:
- a) Correspondance terme à terme
 1. Construction de collections équipotentes
 2. Comparaisons de collections
 - b) Notation du cardinal
 1. Comparaison de collections équipotentes
 2. Représentation
 3. Comparaison de collections non équipotentes
 - c) Succession des nombres naturels
 1. Additions successives d'unités
 2. Sériation à partir des collections
 3. Sériation à partir des étiquettes
 4. Prédécesseur et successeur d'un nombre
 - d) Classification d'ensembles
 1. Notation du cardinal
 2. Comparaison à l'aide des jetons.
 3. Sériation
 4. Construction de la suite des nombres naturels
 - e) Présentation des signes $>$, $<$, $=$ et \neq
- Suggestions

D'autres indications concernant le thème de cette activité sont contenues dans les monographies intitulées «Construction de la suite des nombres naturels» (IRD/R 76.26) et «Quelques remarques à propos de la correspondance terme à terme» (IRD/R 76.27).

- Remarques:
- Le nombre cardinal est une propriété d'un ensemble et non un attribut de ses éléments. (Il va sans dire que le terme «cardinal» n'est pas à utiliser en classe). Les activités qui suivent portent sur la comparaison des cardinaux de deux ensembles et permettent d'exercer des expressions telles que:
 - «...a autant d'éléments que...»;
 - «...a plus d'éléments que...»;
 - «...a moins d'éléments que...».

- Par l'utilisation de moyens concrets, il s'agit d'amener l'enfant à un certain degré d'abstraction. Cette étape est indispensable et, à vouloir l'escamoter ou la franchir trop rapidement, on court le risque de se heurter à de sérieuses difficultés lorsqu'on aborde les opérations numériques.
- Lorsqu'un enfant est en mesure de dénombrer un ensemble en posant le doigt sur chacun de ses éléments, il effectue déjà une correspondance terme à terme entre la suite ordonnée des mots « un », « deux », « trois », ... et les objets qu'il compte. Cependant, le fait qu'il soit capable d'effectuer cette démarche ne signifie pas pour autant qu'il possède la notion de nombre.
- L'activité qui suit ne prétend pas « apprendre » à l'enfant ce qu'est le nombre; elle lui présente des situations qui lui permettent de créer des relations parmi les objets et de construire, peu à peu, le concept de nombre. La correspondance terme à terme, liée à la conservation du nombre, est très importante dans cette construction. Elle ne constitue pas un objectif en soi mais elle est un moyen utilisé dans l'élaboration de la notion de nombre et se trouve à la base de nombreuses activités de l'enfant.
- Les travaux de Piaget ont mis en évidence plusieurs stades dans l'acquisition de la conservation du nombre; il s'agit de détecter le degré d'acquisition de cette conservation et de mettre certains enfants au bénéfice des procédures d'apprentissage qui la favorisent.
- Pour aider les enfants qui n'ont pas acquis la conservation du nombre, il semble judicieux de travailler avec un petit nombre d'objets et d'augmenter ce nombre au fur et à mesure que les enfants admettent l'équipotence.
- Dès les premiers jours de la vie scolaire, il est judicieux de proposer aux enfants des situations qui les obligent (par exemple en raison du nombre élevé d'objets) à choisir une stratégie autre que le comptage et à utiliser aussi souvent que possible la correspondance terme à terme pour comparer des collections. La distribution ou le ramassage du matériel, les observations faites lors de la connaissance de l'environnement, etc. sont autant d'occasions d'établir des relations et d'utiliser correctement les expressions « autant de... que... », « ...a autant de... que... », « ...a plus de... que... », « ...a moins de... que... ».
- Lorsqu'un nombre a été construit, il faut lui associer le mot et le symbole correspondants. On peut afficher les symboles afin que les enfants puissent s'y référer et les intérioriser, par exemple:



2.3.

Introduction du nombre.

1° On fait un jeu s'inspirant de l'épreuve de la conservation du nombre de Piaget. Collection de tasses, de sous-tasses, cuillères en nombre suffisant pour rendre difficile le comptage et motiver la correspondance terme à terme. Le jeu se termine sur l'exercice de la transitivité : de la comparaison du nombre de tasses et de sous-tasses (autant, plus, moins) et de la comparaison des nombres de sous-tasses et de cuillères, on essaie de trouver le rapport qu'il y a entre le nombre de tasses et de cuillères. (On ne montre évidemment pas les tasses et les cuillères ensemble !)

Remarques :

- a) On veut regarder où les élèves en sont avec le nombre.
- b) On introduit la correspondance terme à terme comme moyen alternatif au comptage.
- c) Outre que la transitivité est importante pour la notion du nombre, elle introduit à la représentation d'une quantité par une autre (nombre de jetons ou de croix pour le nombre de jouets ou d'élèves).

2.3.

Introduction du nombre.

1° On fait un jeu s'inspirant de l'épreuve de la conservation du nombre de Piaget. Collection de tasses, de sous-tasses, cuillères en nombre suffisant pour rendre difficile le comptage et motiver la correspondance terme à terme. Le jeu se termine sur l'exercice de la transitivité : de la comparaison du nombre de

tasses et de sous-tasses (autant, plus, moins) et de la comparaison des nombres de sous-tasses et de cuillères, on essaie de trouver le rapport qu'il y a entre le nombre de tasses et de cuillères. (On ne montre évidemment pas les tasses et les cuillères ensemble !).

Remarques :

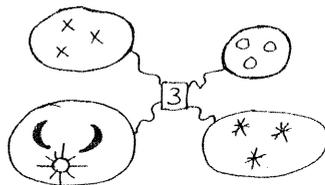
- a) On veut regarder où les élèves en sont avec le nombre.
- b) On introduit la correspondance terme à terme comme moyen alternatif au comptage.
- c) Outre que la transitivité est importante pour la notion du nombre, elle introduit à la représentation d'une quantité par une autre (nombre de jetons ou de croix pour le nombre de jouets ou d'élèves).

2⁰ On introduit les nombres et les chiffres en tant que nombre d'éléments d'un ensemble. Le jeu se passe sur de petites quantités (on donne l'exemple de 5) Il part de la correspondance terme à terme et illustre l'idée que des ensembles différents - d'objets bien distincts - peuvent être comparés par le nombre de leurs éléments. L'étiquette numérique est introduite (et le chiffre avec) et on insiste pour montrer qu'elle peut

s'attacher à plusieurs ensembles à la fois :

(Ceci devrait amener à l'équivalence

de la décomposition des nombres, par l'image de partition de l'ensemble).



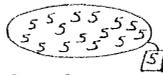
Remarques : a) Ce jeu se fait sur un trop petit nombre d'objets. Et il n'y a pas même besoin de compter, cela se voit - et pourquoi la correspondance terme à terme ?

b) Ça correspond dans l'ancienne méthode à la présentation des

chiffres par dessin puis ligne de chiffres que l'on apprenait à écrire.

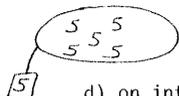
c) Plus que le nombre, est introduite une première activité numérique sur les ensembles avec les notations utilisées. On joue et c'est situation \longrightarrow notation. Puis on présente des ensembles à remplir 

Mais là qui pourrait dire si



(un ensemble de 5) ou

encore



sont faux ?

(Réponse : la forme de l'étiquette)

d) on introduit l'étiquette numérique qui apparaît dans beaucoup d'exercices.

3^0 On travaille sur des quantités de jetons (cailloux, marrons ou autres), qui sont ici autant d'unités (identiques, interchangeables). On réalise dans l'ordre les quantités 0, 1, 2, 3... au moyen de :

- ensembles et étiquettes
- alignement régulier dans une grille de façon à obtenir l'image globale d'un escalier.

On s'attache plus particulièrement à l'escalier, on compare les quantités entre elles, on les situe. On voit qu'on peut les situer exactement. C'est la comparaison ordinal-cardinal, dans la situation la plus simple.

Remarques : a) Avec l'épreuve de conservation du nombre au jeu 1^0 , il s'agit de voir si l'élève peut s'affranchir des indices perceptifs - place occupée - pour ne considérer que les quantités de façon stable. A gagner le fait que la correspondance terme à terme soit indépendante des conditions matérielles de sa réalisation. Dans ce jeu de sériation on s'appuie sur ces indices perceptifs. A l'affranchissement succède le contrôle des indices pour qu'ils soient fiables.

L'utilisation d'une grille a pour but d'aider les élèves à maintenir un écart constant entre les jetons, et à faire commencer les lignes de jetons au

même endroit. Ainsi les comparaisons seront possibles, on "verra" la sériation des nombres, on se rendra compte du rapport ordinal-cardinal.

Oui. Mais quelqu'un qui aurait besoin de la grille pour comprendre cela ne retirera pas du jeu une connaissance bien stable. Car si il a besoin de la grille, c'est qu'il ne maîtrise justement pas les relations numériques. Le jeu pourrait-il donner le "coup de pouce" permettant à l'élève de mieux comprendre la notion ? Oui peut-être mais surtout si on mène avec l'élève une réflexion et un travail pour retrouver ce qu'il aurait pu voir dans la grille : qu'il y ait une véritable appropriation de sa part.

Donc le jeu tel qu'il est donné ne peut suffire pour des élèves qui n'auraient pas déjà compris à l'avance.

Dans la classe de Monica, ce jeu n'était pas facile pour certains élèves. Et il ne nous était pas aisé de savoir ce que cet escalier représentait pour eux. A un moment donné il était clair qu'ils raisonnaient en terme d'escalier seulement et qu'alors il n'était question de nombre. Par exemple, comment comprendre cette remarque d'un élève à un autre : "il faut faire espacé la même chose, sinon - à ce moment l'élève enlève des jetons à certaines colonnes - le monsieur qui veut monter chez lui, tout d'un coup il redescend et ça ne va pas" (c'est plus un escalier)?

b) On aimerait aussi dans cet exercice que le rapport entre les quantités et le chiffre qui les représente soient directement compris. On s'appuie pour le faire sur les jetons arrangés. C'est un détour par la signification du nombre. Une autre façon de procéder, implicite dans toutes les situations bien évidemment, c'est la comptine. Mais ici on n'en parle pas. (Bien qu'on peut s'attendre entendre les enfants la réciter dans toutes ces activités).

4⁰ On utilise des cartes sur lesquelles sont dessinées plusieurs images (cartes avec 0, 1, 2, 3, etc..., images, plusieurs cartes de chaque). On fait classer les cartes par le nombre d'images (le manuel appelle ça classification d'ensembles, sous-entendant que les cartes sont des ensembles). On fait donc des tas avec les cartes ayant un même nombre d'images, on met chaque tas dans une enveloppe. Etiquette sur l'enveloppe pour se rappeler. On se garantit que la quantité inscrite signifie bien quelque chose pour l'élève en lui demandant de deviner le type de carte, ou de prendre un tas de jetons correspondants. tas de jetons ?  type de carte ? On fait ranger les enveloppes dans l'ordre, puis on reprend le jeu No. 3.

Remarque : On passe de la quantité exprimée sur les cartes à la quantité d'unités équivalente (jetons) que l'on met en relation avec les chiffres.

5⁰ On introduit les symboles $>$, $<$, $=$ et \neq . Ces signes sont introduits comme des abréviations de : "est plus grand que" etc... Je cite : "Les comparaisons sont notées et on fait constater aux enfants que l'écriture de telles phrases nécessite beaucoup de temps ; on leur propose alors une écriture agrégée ; sous les phrases écrites par les élèves, la maîtresse note les informations symboliques correspondantes".

6⁰ Remarques finales.

a) Le nombre est introduit par :

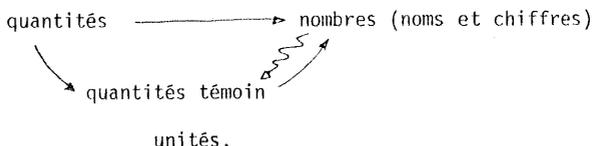
- la propriété commune à différents ensembles qui peuvent être mis en correspondance terme à terme.

- on passe d'une comparaison des nombres globale (avec l'épreuve de la conservation) et on raffine les comparaisons (avec l'escalier).

b) On introduit les activités numériques et le codage sur :

- un matériel d'objets
- un système d'unités qui peut jouer le rôle de groupe témoin.

c) On peut alors faire le schéma suivant :



 signifie que les quantités témoin (ou la forme obtenue sur la grille) sont des symboles des nombres. Tout comme les arrangements classiques :



d) Ordre des jeux :

1⁰ comparaison globale de quantités par l'intermédiaire de la relation d'équivalence.

2⁰ Nombre comme correspondance terme à terme et exprimant cette équivalence.
Notation du nombre.

3⁰ Comparaison des nombres au travers d'un système de quantités - jetons bien arrangés en escalier. Comparaison fine.

4⁰ Comparaison des quantités ramenée à la comparaison des nombres (voilà comment je m'explique que 3⁰ est reprise)

5⁰ Notation de la comparaison des nombres.

e) Remarques finales.

- on ne fait pas référence au comptage, ni aux savoirs des élèves, même si il est clair qu'il en sera question dans ces jeux. Mais on

aimerait faire faire ces jeux hors comptine.

- on ne fait pas de référence aux difficultés que chaque jeu pourrait présenter (ex. l'escalier)

- on réalise le nombre et sa signification (cardinal) mais de là à ce que cette signification soit reconnue et adoptée par les élèves, il y a un pas. Silence de la méthodologie là-dessus.

2.4.

Introduction de l'addition.

1^o On reprend le jeu No. 4^o précédent - cartes en enveloppes.

On propose de réunir deux cartes et de les compter ensemble (compter toutes les images) de glisser les couples ainsi obtenus (et liés avec du papier collant ou un élastique) dans l'enveloppe correspondante. On cherche les couples qui pourraient aller dans l'enveloppe 7, par exemple. Quand on a trouvé tous les couples et qu'on les y a mis, on sort de l'enveloppe 7 un couple, dont on cache l'une des cartes constituantes. Il s'agit de trouver combien elle comporte d'images.

Sur des billets, les élèves sont priés d'écrire "ce qui a été mis ensemble". On introduit ainsi l'écriture additive $\boxed{4+3}$, $\boxed{2+5}$ etc. On discute de la signification du signe + qui est défini ici par : 4 et encore 3, 4 avec 3, 4 mis avec 3. On compare les étiquettes correspondant aux cartes qui vont dans l'enveloppe 7.

Pour la suite, citation :

"En vue d'amener des égalités telles que :

$$4 + 3 = 7$$

$$5 + 2 = 1 + 6$$

$$7 = 0 + 7$$

ACTIVITÉ 2

Notes personnelles

- Buts:
- décomposer un nombre en sommes de deux termes;
 - faire correspondre des écritures additives à des collections ou à des schémas;
 - chercher différentes écritures additives pour un nombre donné;
 - utiliser l'idée de compensation pour sérier des collections équipotentes et des écritures additives équivalentes;
 - résoudre des équations telles que:
 $2 + 3 = .$ et $. = 2 + 3$

Activité préalable: OP-1.

- Plan:
- a) Introduction de l'addition: cartes et enveloppes
 1. Réunion de collections
 2. Écritures additives
 3. Egalités
 - b) Introduction de l'addition: dominos
 1. Écritures additives
 2. Egalités
 - c) Addition et sériation
 1. Sériation et compensation
 2. Décomposition et égalité
 - d) Addition: partition
 1. Diagrammes
 2. Écritures additives et égalités
 3. Sériations

Suggestions

- Remarques:
- Les activités ci-après s'appuient sur la décomposition du nombre et débouchent sur l'addition. Rappelons à ce propos qu'à la réunion d'ensembles disjoints correspond l'addition de leurs cardinaux.
 - Dans l'avenue ER, certains enfants éprouvent des difficultés au niveau du vocabulaire, en particulier avec des expressions telles que «...plus... que...» et «...moins... que...». Ces difficultés se retrouvent dans l'avenue OP où les expressions «plus» et «moins», qui correspondent au signe + et -, n'ont pas la même signification que précédemment. Quant au signe =, il ne correspond pas automatiquement, pour l'enfant, à l'expression «...autant... que...». Chaque fois que le signe + est utilisé dans une représentation, sa signification doit être précisée par rapport à une action ou à un schéma.

la maîtresse demande :

- Pourquoi aviez-vous mis ensemble une carte de six éléments et une carte d'un élément ? (pour pouvoir les glisser ensemble dans l'enveloppe 7).

Prenant cette enveloppe, la maîtresse poursuit :

- Pouvez-vous donner d'autres noms* à cette enveloppe ? (l'enveloppe 6 + 1, l'enveloppe 2 + 5 etc.).

On amène alors les élèves à constater* que l'on aurait tout aussi bien pu écrire sur l'enveloppe 6 + 1 ou 2 + 5 que 7.

Par conséquent, 7, 6 + 1, 2 + 5 etc. sont des écritures* différentes du même nombre.

Etant donné qu'ils ont déjà rencontré le signe = (cf. ER activité 8 pg 98), les élèves sont alors mis en présence des égalités suivantes :

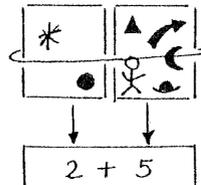
$$4 + 3 = 7 \qquad 5 + 2 = 6 + 1 \qquad 7 + 0 = 7$$

Ces égalités font l'objet d'une discussion.^{ll}

Fin de la citation.

* souligné par moi.

Remarques. a) L'écriture est descriptive d'un état de fait. 2 + 5, c'est 2 mis avec 5 et + est un lien le symbole correspondant à l'élastique



b) les élèves écrivent "ce qui a été mis ensemble" sur des bouts de carton, sur des étiquettes. Ça n'a pas le même statut que d'écrire sur une fiche ou sur une feuille de papier (selon la méthodologie).

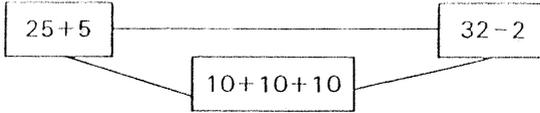
c) Le point de mire, ce sont les équations. Dans cette optique $2 + 5$ est l'écriture d'une quantité, tout comme 7. En disant que $2 + 5$ est un autre nom possible pour l'enveloppe 7, on veut dire que les deux écritures sont équivalentes, substituables. $2 + 5$ n'est pas l'expression d'un calcul si on s'en tient à la définition donnée dans l'activité. On peut écrire $2 + 5 = 7$ parce que $2 + 5$, 7 expriment la même quantité. De sorte que $2 + 5 = 7$, $7 = 2 + 5$, $2 + 5 = 1 + 6$ sont tout à fait équivalentes et ne devraient pas poser de problèmes aux élèves.

d) Les petites étiquettes en carton que l'on introduit et dont l'image $\boxed{2 + 5}$ est si souvent présente dans le livre du maître et dans les exercices, indiquent qu'on isole une expression numérique, qu'on "suspend" le calcul. Dans les fiches, on aimerait que les élèves fassent les comparaisons des expressions sans forcément passer par le comptage ou le calcul. (cf. la fiche OP 38 2e année - No OP 32 dans l'ancienne édition). Par la création de ces objets étiquettes, dont l'image $\boxed{2 + 5}$ est totalement équivalente à une expression entre parenthèses $(2 + 5)$, on veut rendre "concrètes" les parenthèses.

Bien entendu, les élèves ne s'en occupent pas et pour eux $\boxed{2 + 5}$, $2 + 5$, ou encore $2 + 5 = 7$ sont des expressions d'un calcul (à faire ou déjà fait).

e) On fait écrire sur cahier ou sur fiche (mais pas sur étiquettes) les égalités $2 + 5 = 7$, $4 + 3 = 1 + 6$ etc. L'égalité, qui n'est pas l'écriture d'un calcul, ne conviendrait pas comme étiquette, car ce n'est pas le nom d'un assemblage de cartes ni une partition d'ensembles. L'égalité est l'écriture d'un jugement sur les expressions qui sont de part et d'autre du signe égale.

f) Toutes ces remarques prennent à la lettre ce que dit le manuel. C'est pour analyser la théorie de référence, et je suis conscient que



- 347 -

$20+9+3$

$29+4$

$40-8$

$40-7$

$26+5+4$

$39-7$

$40-5$

$25+5+$

$30+4$

$25+5+5$

$26+4+$

$34+2$

$40-3$

$26+4+$

$20+ +$

$40-$

$20+ +6$

dans la pratique, on prend ses aises vis-à-vis de ces remarques. Mais notez que si on ne prend pas à la lettre cette signification, les jeux et la façon de les agencer ne se justifient tout bonnement plus.

Elles peuvent être reprises telles quelles pour la suite des jeux. Et cela définit l'univers commun d'un premier groupe d'activités (OP I, 3 et 4, OP II 1, 2, 5).

2⁰ A l'occasion de l'étude d'un autre nombre, ici l'exemple est 5, on fait la même activité mais avec des dominos :  . Puis introduction des étiquettes pour désigner les dominos, mise en boîte des dominos, nom de la boîte. Puis comparaison des étiquettes.

Remarques a) On repart comme au jeu 1⁰ mais "l'action" est déjà faite avec les dominos (pas d'élastique). C'est la décomposition de 5.

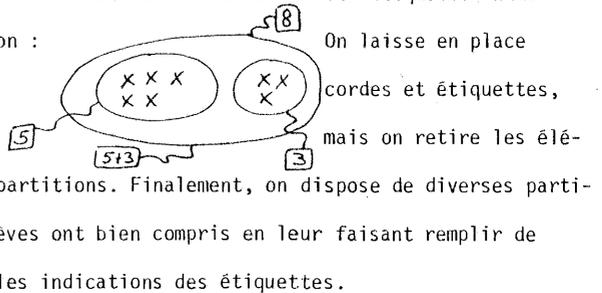
b) Les dominos sont un matériel schématique - nombres perceptifs - et plus des images comme au jeu 1⁰.

3⁰ A l'occasion de l'étude d'un autre nombre, par exemple 6 , on fait comparer des cartes représentant chacune un bouquet de 6 fleurs rouges et blanches. Comparaison des cartes (toutes les cartes de 6 fleurs, mais ce ne sont pas toutes les mêmes). Sériation des cartes. Puis exercice de représenter les cartes à l'aide d'une collection de jetons (tous identiques). Amenant à séparer la quantité 6 en deux tas (arrangement perceptif). Collage numérique des tas, on retrouve les étiquettes, nouvelle comparaison.

Remarque : a) Ici aussi, le matériel de base fait la mise ensemble - les bouquets sont constitués. Mais avec les jetons, on fait refaire à l'élève la

décomposition de 6. Les jetons sont aussi un matériel schématisé et permettant de retrouver les nombres figuratifs vus sur les dominos.

4⁰ A l'occasion de l'étude 'un autre nombre, ici 8, on fait comparer différentes partitions du même ensemble. Un ensemble de 8 arbres. On constitue un ensemble témoin de 8 jetons. On fait mettre les cordes et les étiquettes numériques. Exemple d'une partition :



On demande ensuite aux élèves de donner toutes les étiquettes "qui indiquent 8" et on finit comme pour 1⁰ par les équations. Puis on fait sérier les cartes.

Remarques : a) On fait les partitions qui ne sont pas données par le matériel. (mais on s'aide des caractères logiques). On fait faire directement ce qu'on avait dans le jeu 3⁰ avec les bouquets.

b) $4 + 4 = 8$ ne pourrait pas être une étiquette.

5⁰ Remarques finales:

a) Deux lectures de ce type d'activité. Quand il s'agit de signification, il n'est pas question de calcul. Le manuel se place comme si l'élève avait déjà "intériorisé" le calcul (pour utiliser les termes du manuel). Mais évidemment que pour faire l'exercice le comptage est nécessaire. Et peut-être même que le recours aux jetons aide certains (mais c'est quand même de très

La tâche d'ailleurs peut être faite et réussie que sur la base du comptage (ou calcul). Et de toutes façons c'est ce point de vue qui l'emportera dans les exercices. Le jeu paraît donc être un détour pointilleux et ne se justifie que par les élèves qui ne peuvent pas encore bien compter sans le support de jetons ou d'images à pointer.

Le recours au matériel est donc différent pour la signification que l'exécution de la tâche. Où est la rigueur ?

b) On remarque aussi la grande part faite au symbolisme numérique. On introduit dans cette activité tout le langage des exercices (langage qui se veut univoque).

c) Schéma général :

- 1⁰ Action de mettre ensemble deux cartes ayant plusieurs images. Faire un tout. Quantités images à composer. Sortir toutes les décompositions et comparer. Codage : étiquettes, égalité des expressions.
 - 2⁰ Lecture d'un tout comme composé. Quantités composées stylisées par le nombre figuratif. Sortir les décompositions et les comparer. Codage : étiquettes, puis égalité des expressions.
 - 3⁰ Lecture d'un tout comme composé. Quantité images composées. Codage par l'utilisation d'une quantité de jetons scindée en deux parties pour représenter les cartes. Comparer les décompositions par comparaison des images et des groupes de jetons.
 - 4⁰ Effectuation directe d'une décomposition sur un ensemble d'objets. Représentation par des jetons. Dessin des partitions, codage numérique, étiquettes et puis égalité des expressions.
-

2.5.

Soustraction.

Citation, cf. pg. 115-117 citée au début du chapitre (pg.325 et s.). Avec la soustraction, on offre un autre point de vue sur les opérations numériques. Puis on essaie de faire le lien avec ce qui a été développé à propos de l'addition.

Notes : 1) Le jeu sur la soustraction n'est plus le même que dans la première édition. J'ai choisi de présenter cette deuxième version pour plusieurs raisons :

a) Sur l'ancien jeu l'essentiel a déjà été dit, par ex. J. Brun et F. Conne.

b) Le jeu actuel est meilleur. Mais l'esprit est le même.

c) Le jeu amène un certain nombre de clarifications sur le point de vue des auteurs.

d) Il faut noter que Monica n'a pas connu cette version du jeu. Cependant elle a procédé d'une façon intuitive, qui finalement se rapproche de ce jeu.

2) La soustraction a été introduire en première année sous la forme d'un jeu de messages. On mettait ou enlevait des jetons dans une boîte, on transcrivait ensuite l'action et son résultat. Le statut de l'opération a changé puisqu'ici + et - symbolise une action. Ainsi dans l'écriture $5 - 2 = 3$, 3 a le statut de résultat, ce qu'il n'avait pas dans la conception des activités précédentes.

3) Il est clair à ce propos que les auteurs du manuel pensent donner à l'addition une signification plus vaste (donc plus abstraite) qui englobe cet aspect d'action. L'addition est, selon eux, une véritable opération,

une loi de composition. Tandis que la soustraction elle n'a pas de nature propre, citons :

pg. 115 "La soustraction n'est pas une véritable opération ; il ne s'agit que d'une écriture équivalente (c'est-à-dire donnant les mêmes indications) à celle de l'addition".

pg. 115 "L'addition lacunaire : on décrit une situation soustractive en faisant appel à l'addition. Toutes les activités portant sur l'addition permettent d'aborder la soustraction ; en effet, les équations :

$5 + \dots = 8$ $\dots + 5 = 8$ $8 = 5 + \dots$ $8 = \dots + 5$ sont équivalentes à l'équation $8 - 5 = \dots$."

Donc la soustraction n'étant pas une véritable opération, on peut en rester, pour la soustraction, à la définition du code d'une action.

1⁰ Jeu de boîte où on met des jetons. Ecritures additives. Puis on enlève quelques jetons de la boîte, écrire ce qui s'est passé, puis écrire combien d'animaux restent (sans ouvrir la boîte) donc calcul puis écriture du résultat. Les animaux reviennent, écrivez ce qui se passe.

Remarque : Donc ici, dans $a - b = c$, c a le statut de résultat.

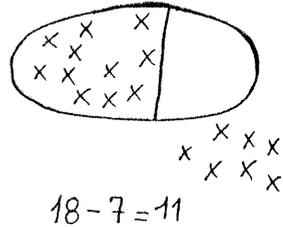
2⁰ Un ensemble de 18 éléments. Faire toutes les partitions auxquelles on pense et trouver les étiquettes correspondantes. Comparaison. Trouver une nouvelle partition sans le support des objets, et l'écrire (directement sur une étiquette). Vérification avec les ensembles.

A partir d'une partition, on enlève les éléments d'un des sous-ensembles (comme au jeu 1⁰). Je cite la suite :

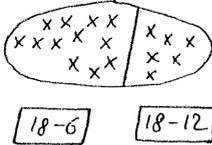
"- Combien d'animaux y a-t-il dans cette collection ?

- Retirez les animaux de l'une des deux parties et indiquez ce que vous avez fait en écrivant une opération.

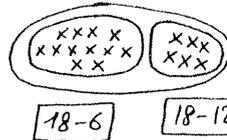
Les enfants obtiennent par exemple :



L'enseignant demande ensuite de confectionner des étiquettes portant des écritures soustractives afin d'indiquer que l'on sépare la collection d'animaux en deux parties et que l'on peut retirer l'une d'elles.



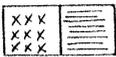
Remarque : Ces étiquettes ne peuvent pas être attachées à l'ensemble. Car les sous-ensembles n'ont pas de corde propre.



Remarque : Ces étiquettes pourraient être attachées aux ensembles. *"Fin de citation"*

On fait chercher toutes les étiquettes correspondant aux diverses partitions, comparaison.

Remarque : On remonte en quelque sorte de l'opération action, à quelque chose de plus statique analogue à la situation présentée dans OP I 2. On passe ainsi de l'égalité $18 - 7 = 11$ à l'étiquette $18 - 7$ qui est présentée ici comme signifiant une action que l'on veut faire (tandis que $2 + 6$ codait une action déjà faite).

3^o On reprend les cartes et les enveloppes. On constitue les paires qui donnent 12. On en sort une paire de cartes dont on ne montre qu'une carte. Par exemple . Le maître écrit au tableau $9 + \dots = 12$ et on fait montrer à quoi correspondent les nombres 9 (la carte) et 12 (la paire de cartes). On cherche la valeur de la carte retournée, et on complète l'équation. On propose ensuite $12 - 9 = \dots$ et on demande aux élèves de montrer à quoi correspondent les nombres 12 et 9 (successivement !). On complète avec la réponse.

Le jeu se poursuit par groupes de 3 élèves. L'un propose une paire de cartes, l'autre transcrit sous forme d'équation lacunaire, et le troisième répond.

Remarques : a) On continue à remonter aux sources. Reprise du jeu des enveloppes où on avait introduit l'addition.

b) Exercice purement formel. On voit bien comment le comptage ou calcul permet de faire l'exercice, mais n'en constitue pas l'objet (pour les auteurs). On propose une "équation" lacunaire comme écriture d'une question : il est équivalent de demander quelle est la valeur de la carte retournée ou combien il faut rajouter à 9 pour avoir 12. A travers l'identité des situations - et le fait qu'on reprend le même matériel - on pense avoir fait comprendre l'équivalence entre les écritures $12 - 9 = \dots$ $9 + \dots = 12$.

c) Les élèves savent calculer, ils ont déjà vu des équations lacunaires en première année, et surtout, ils auront déjà trouvé la réponse avant que le maître ait fini d'écrire sa première équation. Ensuite "le blanc" désigne la place de la réponse, alors pas besoin de lire les équations.

4⁰ Remarque finale :

Schéma de l'activité :

1⁰ Jeu avec la boîte. + et - signifient des modifications du contenu de la boîte. Soustraction action, cordage.

2⁰ Liaison avec une partition . Lien avec la situation, puis avec le schéma ensembliste et enfin avec les étiquettes. Ecriture soustractive des décompositions d'un nombre.

3⁰ La soustraction (calcul) en tant que déduction d'une relation additive.

2.6.

Multiplication.

On introduit dans cette activité la multiplication comme somme itérée. Je vais analyser très rapidement cette activité, juste comme confirmation de l'analyse faite jusqu'ici :

1⁰. On propose une histoire où on fait mettre 12 chevaux dans 4 enclos. Puis devant la situation où il y a 3 chevaux par enclos, on demande aux élèves de décrire ce qu'ils voient ("4 ensembles de 3 chevaux, 3 chevaux par ensemble et 4 ensembles, 4 groupes de 3 chevaux, 4 fois 3 chevaux"). Et on passe bien sûr à l'écriture d'étiquettes (purement numériques) pour le décrire. Si on tombe sur $\boxed{4 \times 3}$ et $\boxed{3 \times 4}$ en même temps, il faut demander dans chaque cas à quoi correspondent les chiffres.

ACTIVITÉ 6

Notes personnelles

Références antérieures

Activités ER-8 et OP-4 de première année.

CARDINAL D'UNE COLLECTION:

- réunion de collections disjointes;
- écritures additives, égalités.

- Buts:
- aborder la multiplication au moyen de l'addition itérée;
 - établir un lien entre la réunion d'ensembles disjoints de même cardinal et le produit cartésien;
 - contribuer à la construction de la table de multiplication;
 - faciliter l'approche de la table de multiplication.

Activité préalable: OP-5.

- Plan:
- a) Réunion d'ensembles disjoints de même cardinal
 1. Partitions en sous-ensembles de même cardinal
 2. Modifications de facteurs
 - b) Lien avec le produit cartésien
- Suggestions

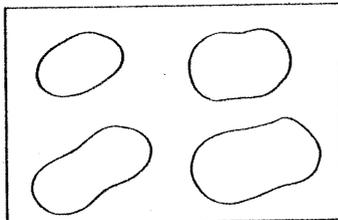
Remarque: — La réunion d'ensembles disjoints de même cardinal peut être liée au produit cartésien lorsqu'on la représente à l'aide de grilles. Inversement, un tableau à double entrée représentant un produit cartésien peut être interprété ligne par ligne ou colonne par colonne: le produit cartésien est alors assimilé à une réunion d'ensembles disjoints de même cardinal.

a) Réunion d'ensembles disjoints de même cardinal

- Matériel: — des grandes feuilles de papier;
- des cordes;
 - des animaux semblables, par exemple, des chevaux;
 - des jetons;
 - des étiquettes vides.

1. Partitions en sous-ensembles de même cardinal

L'enseignant dispose quatre cordes ferrées sur la feuille:



X

Puis une situation où on introduit 3 ensembles de 4 chevaux. Comparaison des étiquettes

$$\begin{array}{ccc} \boxed{4 + 4 + 4} & \boxed{3 \times 4} & \boxed{12} \\ \boxed{3 + 3 + 3 + 3} & \boxed{4 \times 3} & \end{array}$$

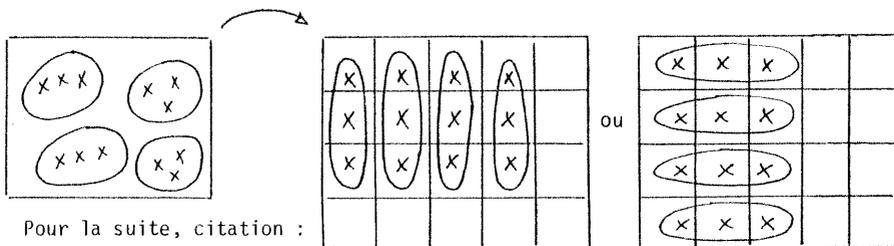
Recherche d'autres étiquettes.

Remarques : a) Exactement le même point de vue que pour l'addition. Ecriture de la situation, et utilisation des étiquettes.

b) Comme on a représenté une quantité totale (c'est une écriture multiplicative de 12) et qu'on n'a pas mis d'unités, 4×3 et 3×4 peuvent se lire de la même façon : 4 fois 3 chevaux ou 3 chevaux 4 fois. C'est un pur jeu de mots : pour l'inversion, mais déjà pour le mot fois.

2⁰ Lien avec le produit cartésien.

On représente les situations de 4 enclos et de 3 enclos. On donne deux grilles. Mettre les chevaux dans les cases de façon à avoir la même répartition que dans les enclos. On fait mettre des cordes pour que les élèves voient bien :



Pour la suite, citation :

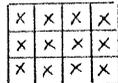
"On propose à chaque groupe de choisir parmi les écritures 3×4 et 4×3 celle qui convient à son rectangle (sa grille) et de la noter au verso.

Les deux éventualités ci-dessous peuvent se présenter :

- les deux équipes (4 enclos de 3 chevaux et 3 enclos de 4 chevaux) ont choisi la même écriture et admettent donc que $4 \times 3 = 3 \times 4$. (Note : dans ce cas les élèves admettent intuitivement la commutativité de la multiplication).

- une équipe tient à 4×3 et l'autre à 3×4 .

(Dans ce cas.) Après avoir découpé les grilles, l'enseignant les brouille derrière son dos puis les dépose ainsi devant ses élèves :



- Laquelle est la grille 3×4 , laquelle est la grille 4×3 ? On ne peut pas répondre à la question car les grilles peuvent être superposées, ce qui prouve bien que $4 \times 3 = 3 \times 4$. " Fin de citation.

Remarque : 0

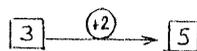
* Surligné par moi

2.7.

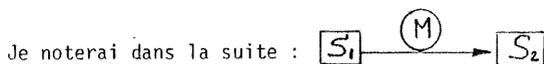
Machines numériques.

1^o pg. 130 pour le début de l'activité.

On introduit ensuite une notation numérique :



.....



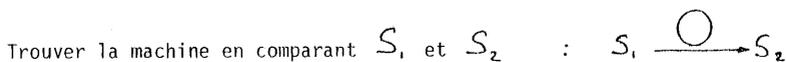
M = machine.

S_1 = série de nombres 1.

S_2 = série de nombres 2.

A_1 = un nombre de S_1 .

On fait comparer les éléments de l'entrée aux éléments de sortie (c'est toujours la même relation entre S_1 et S_2 ; si S_1 est croissante, alors S_2 aussi, etc...).



Remarques : a) La conception des opérations est dynamique. Et on sous-entend les calculs à faire.

ACTIVITÉ 3

Notes personnelles

Références antérieures

Activités ER-7, OP-2, OP-3, OP-4 et OP-5 de première année.

ADDITION ET SOUSTRUCTION:

- relation d'un ensemble A vers un ensemble B;
- actions d'ajouter et d'enlever;
- écritures additives, écritures soustractives.

Buts:

- approcher la notion d'application;
- utiliser des machines additives et des machines soustractives;
- composer deux machines;
- découvrir et utiliser quelques propriétés de la composition des machines.

Activités préalables: OP-2, DE-2.

Plan:

a) Machines additives

1. Recherche de l'ensemble d'arrivée.
2. Recherche de la machine

b) Machines inverses

c) Composition de machines

1. Quelques propriétés de la composition des machines additives
2. Machines inverses

Suggestions

Remarques:

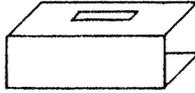
- Pour aborder l'idée de fonction ou d'application avec les élèves de cet âge, on remplace le terme d'«opérateur» par celui de «machine»; les machines ont un aspect dynamique qui aide à faire percevoir la notion sous-jacente.
- La définition de l'ensemble sur lequel agit l'opérateur doit être précise. L'activité décrite ici se situe dans l'ensemble M ; au début du travail avec les machines soustractives, l'enseignant choisit les collections ou les nombres de l'ensemble de départ; les enfants découvrent peu à peu qu'il n'est pas toujours possible de faire fonctionner la machine.
- Alors que, pour les machines non numériques, on a toujours gardé visible l'ensemble de départ en utilisant deux exemplaires de la collection d'objets considérée, on change de procédé pour les machines numériques en n'utilisant qu'un seul exemplaire de la collection d'objets. De cette manière, conjointement à la manipulation, l'enfant est amené à utiliser l'écriture pour garder une trace de ce qui se passe.
- On ne saurait assez insister sur le fait que cette activité met l'accent sur la découverte de propriétés et non pas sur l'habileté à calculer. C'est la raison pour laquelle on se limite, dans la phase de manipulation, à des collections comportant peu d'éléments. La pratique du calcul sera reprise dans d'autres activités concernant les opérations.

et non dans les exercices?

Notes personnelles

a) Machines additives

- Matériel: — dix petites assiettes;
- des jetons;
- une grande boîte ouverte aux deux extrémités et ayant une fente ménagée dans la face supérieure:



- une étiquette entrée et une étiquette sortie ;
- des étiquettes rondes.

1. Recherche de l'ensemble d'arrivée

Les enfants préparent des collections de jetons (de zéro à neuf) qu'ils placent dans les assiettes. Après discussion, on décide de faire passer les assiettes dans la machine (la grande boîte) et de donner l'ordre à cette dernière d'ajouter, par exemple, deux jetons à chaque assiette. On prépare une étiquette ronde qui indique le travail effectué par la machine «ajoute deux».

On place également les étiquettes «entrée» et «sortie».

Un premier élève choisit une assiette et la fait entrer dans la machine.

Un deuxième élève fait fonctionner la machine en introduisant dans la fente deux jetons qui tombent dans l'assiette.

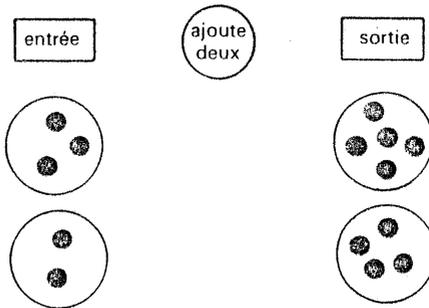
Un troisième élève fait sortir l'assiette de la machine et indique le nouveau nombre de jetons.

Après le passage de toutes les collections, l'enseignant demande:

- Comment représenter tout ce qui s'est passé?

Les enfants peuvent proposer:

- le dessin des collections:



b) On propose les jetons et la boîte pour présenter l'idée mais on passe vite aux situations numériques. Avec cette nuance que "ajouter 2" qui est un ordre donné à la machine devient $(+2)$ qui est la machine. Il y a un glissement de sens.

c) On passe par divers niveaux :

- agir avec la machine (jetons) , calculer directement. Mais c'est sur une seule donnée à la fois.

- comparer globalement S_1 à S_2 , horizontalement et verticalement. Le but est de faire comprendre que $(+1)$ concerne tout S_1 et tout S_2 , et que ce ne sont pas des situations indépendantes $s_1 \xrightarrow{(+1)} s_2$, $s'_1 \xrightarrow{(+1)} s'_2$.

2^o Machines inverses.

On propose $S_1 \xrightarrow{\bigcirc} S_2$ trouver M. Puis $S_2 \xrightarrow{\bigcirc} S_1$ ainsi que $S_1 \xleftarrow{\bigcirc} S_2$. Comparer les situations (inversion de S_1 et S_2 , inversion du sens de la flèche). Trouver les machines et les comparer.

On propose ensuite $\square \xrightarrow{(+1)} S_2$, trouver S_1 . On espère que certains utilisent la machine inverse - M.

Remarque : a) Ici, passage à un niveau encore autre, puisqu'on compare les situations entières entre elles. Ensuite on associe la relation entre les situations (inversion des séries, inversion de la flèche) à celle de la machine et de la machine inverse.

b) Pour comprendre que $\square \xrightarrow{(+1)} S_1$ puisse être réalisé par la machine $\square \xleftarrow{(-1)} S_2$, c'est déjà associer son propre calcul à celui de la machine !

c) On présente toutes les situations possibles :

$a \xrightarrow{+M} x$, $a \xrightarrow{x} b$, $x \xrightarrow{+M} b$. Mais seulement dans la première, l'action de la machine correspond au calcul de l'élève. Dans les deux autres, il y a déduction du calcul à faire.

d) En fait il y a un petit problème entre le passage du calcul sur la machine à celui de considérer réellement la machine comme un opérateur au sens plein. Et cela ne tient pas seulement à la comparaison globale des séries de nombres (ou faisceau de situations). Il y a là une idée très abstraite.

Exemples : $a + m = b$, $a' + m = b'$, etc... ne donnent pas les mêmes résultats alors pourquoi comparer ?

- le jeu essaie de se sortir de cette question en faisant chercher les machines. Mais pour trouver M , il faut faire $b - a = m$, $b' - a' = m$, $b'' - a'' = m$ etc... Et même, à supposer qu'on sache d'avance qu'il s'agit d'une machine additive (soustractive), il faut faire $b - a = m$ et anticiper $b' - a'$; $b'' - a''$ comme étant toujours m .

Il y a très peu de chances que les élèves de 2e année primaire fassent autre chose qu'une série de calculs distincts les uns des autres. On peut d'ailleurs dire la chose autrement : il faut pouvoir déduire que du calcul $b - a = m$, on obtient pas seulement un nombre, mais la machine ! (+ m ou - m).

Les élèves que j'ai vu faire oubliaient justement très souvent de mettre le signe de la machine.

3°. On compose la machine. Reprise des jetons, boîtes et assiettes. Puis symbolisation numérique. On fait $S_1 \xrightarrow{+M} S_2 \xrightarrow{+N} S_3$ puis on isole S_1 et S_3 , et on fait chercher la machine $S_1 \xrightarrow{O} S_3$.

"Les enfants constatent que les deux machines ajoute deux et ajoute 4, peuvent être remplacées* par la machine ajoute six".

* moi qui souligne

Par des jeux de groupes, on fait remarquer la commutativité, l'associativité, l'inverse. On fait les différentes manoeuvres par des groupes différents, puis on compare les résultats, et les machines résultantes.

Evidemment, constater qu'on aboutit au même résultat n'a pas encore force de loi.

Remarques : a) Deux machines successives peuvent être remplacées par une même troisième ! Et alors ? Comme constatation c'est pas très intéressant.

b) Le lien (addition) entre deux machines et leur résultante n'est pas évident. Pourquoi une addition ? Alors que la composition des machines n'est pas la même chose que l'action de la machine. Toutes deux cependant correspondent à l'addition.

c) Pour ce qui est de la commutativité, les élèves savent déjà que faire le calcul $a + b$ revient au même que faire $b + a$, et cela sur pas mal de nombres (si ce n'est tous). Ils n'en sauront pas plus avec les machines.

d) Pour ce qui est de l'associativité, on peut dire qu'elle est déjà à l'oeuvre dans la composition des machines. Justement, si on peut composer les machines c'est que l'addition est associative :

$$a \xrightarrow{+m} b \xrightarrow{+m'} c$$

$$a \xrightarrow{+(m+m')} c$$

$$\underbrace{(a+m)}_b + m' = c$$

$$a + \underbrace{(m+m')}_{\text{composée}} = c$$

4⁰ Remarque générale :

a) Les machines représentent l'aspect dynamique des opérations. Et c'est ça qui fait que les élèves n'ont aucune peine à opérer dessus. (Quoiqu'ils ne comprennent pas ce qu'on voudrait, ainsi qu'ils ne peuvent pas comprendre la composition !).

On a d'ailleurs récupéré l'enchaînement des calculs qu'on avait banni des équations :

$2 + 3 = 5 + 4 = 9 + 8 = 17 - 11 = 6$ est une écriture bannie mais

$$2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{+8} 17 \xrightarrow{-11} 6 \quad \text{est possible.}$$

b) A ce niveau-là, on peut difficilement soutenir que les machines ne sont pas support au calcul. C'est de toutes façons ce que les élèves y voient.

On présente par les "Machines lacunaires" toutes les situations déjà proposées avec les "équations lacunaires". Peut-être évite-t-on ainsi certaines difficultés dans la lecture des équations (parce que $c = a + b$ est lisible de droite à gauche, mais pas $c = a - b$). tandis que ça ne se pose pas pour $a \xrightarrow{+b} c$ ou $a \xrightarrow{-b} c$).

Donc, si on peut douter de la possibilité des élèves à arriver au degré d'abstraction voulu pour étudier les opérations numériques par le biais des machines, cela ne veut pas dire que les exercices soient totalement inutiles. C'est un support à certains problèmes, cela peut être aussi utilisé comme codage alternatif du calcul.

c) Schéma :

Au centre de l'activité, la recherche de la machine manquante :

$$S_1 \xrightarrow{\bigcirc} S_2 \quad \text{qui permet de tout faire.}$$

- 1^o Introduction. Raisonner sur des ensembles de nombres qui seront transformés. La machine est définitive comme ce qui est constant dans les divers calculs horizontaux.
- 2^o Comparaison des machines entre elles, les machines soustractives.
- 3^o Composition des machines. Situations de jeux où on fait des compositions (situation d'associativité, de commutativité, de machines inverse et de machines nulles) constats.

2.8.

Signification et représentation.

J'ai montré au travers de l'analyse des diverses activités comment il y avait transposition de définitions théoriques, à propos du nombre et des opérations en des exercices qui essaient de réaliser ces définitions théoriques.

Ainsi, on réalise les classes d'ensembles équipotents (d'où émerge la notion de cardinal) en ces enveloppes où on glisse des cartes. On réalise l'équivalence des expressions numériques additives en faisant remarquer qu'on peut les substituer les uns aux autres en tant que nom de l'enveloppe-classe. On réalise l'équivalence relationnelle d'équations additives ou soustractives en rattachant petit à petit la soustraction aux mêmes situations que l'addition - et on se rappellera le jeu d'équivalence des équations : $2 + \dots = 12$ et $12 - 9 = \dots$. On réalise le lien entre la multiplication, somme itérée, et le produit cartésien par l'emploi de grilles. On réalise la commutativité de la multiplication par le jeu sur les grilles. Les machines sont une façon de réaliser les opérateurs mathématiques et par l'étude de leur structure, on fait l'expérience des propriétés numériques.

Une chose étonnante dans ce programme, les jeux et exercices commentés dans la méthodologie, ne donnent que très peu de renseignements sur les tâches elles-mêmes. Dénombrements, comptages, calculs restent implicites (tout comme en logique, les placements). Et cela contraste fortement avec le soin amené dans la méthodologie pour indiquer la signification des notions mathématiques que l'on fait "découvrir" aux élèves. Les auteurs proposent aux enseignants un cheminement possible pour la réalisation de ces définitions de base, donnent la signification des notions par lesquelles sont bâtis les jeux, suggèrent *quelles* questions poser, à quel moment, quelles réponses il faut attendre et surtout entendre, comment enchaîner. Mais ils ne disent rien par contre de ce que ces jeux vont susciter chez l'élève, quel travail il devra faire pour répondre, quelle représentation il va se faire de la tâche, ni non plus sur les difficultés de l'exercice, quels conflits peuvent surgir, à quelles erreurs le maître peut s'attendre, etc. Tout ceci est laissé à la pratique.

L'analyse des jeux et exercices fait apparaître clairement que les élèves sont amenés à faire un certain nombre de calculs et comptages. Cela d'ailleurs suffit dans bien des cas pour trouver la réponse. Il est clair aussi que les représentations des élèves de cet âge sont tout à fait liées au comptage et au calcul. Je dirais même plus, les élèves voient difficilement autre chose dans ce que l'on cherche à leur faire faire.

Cependant comme je l'ai montré, le manuel propose une signification qui ne renvoie pas au calcul, et espère ainsi assurer une bonne compréhension de la part des élèves (cf. pg. 349). Reprenons les différents points.

1^o Introduction du nombre.

Ce qui fait le nombre c'est la correspondance terme à terme, il est suggéré aux élèves de la faire plutôt que de faire un comptage. Le comptage est certes une forme de correspondance terme à terme, mais on le déconseille car lié

à la comptine "qui n'est souvent qu'une mélodie sue par coeur". De même, la relation cardinal-ordinal ne se fait pas sur la comptine.

2^o Addition et soustraction.

J'ai déjà pas mal commenté la façon dont l'addition et l'écriture additive sont introduites. Je rappellerai la conception "équations" que les auteurs entendent faire passer (sans cela on ne ferait pas faire ces jeux). Je rajouterai que l'addition est considérée de façon abstraite, comme une loi-de-composition-interne (les opérations vues comme une correspondance entre nombres). C'est la théorie d'une opération déjà "intériorisée". Et cette présentation ne s'occupe pas de la façon de calculer (compter) l'addition.

Avec ce point de vue, il est possible de déclarer que la soustraction n'est pas une véritable opération. Car elle procède alors totalement de l'addition et se définit comme addition de l'inverse.

Mais en considérant l'addition par la façon dont on la calcule (la compte) on réintroduit un aspect qui avait été mis de côté dans la définition abstraite : les nombres sont des entités ordonnées, et l'addition peut être définie à partir de cet ordre. Additionner c'est faire une opération se basant sur l'ordre des nombres ($3 + 4 = 7$, $3, 4, 5, 6, 7$). De même soustraire, c'est effectuer une autre opération (compter en sens inverse). Les deux actions se ressemblent mais ne sont pas identiques. Et il y a un troisième type d'action qui est la complémentation. Pour les élèves de 2e année primaire (à la fin de la 2e) il n'était pas évident que la soustraction et la complémentation reviennent au même toujours :

En partant donc d'une conception du comptage et du calcul, alors l'addition, la soustraction sont des opérations véritables et la conclusion "que la soustraction n'est pas une

véritable opération" se situe à un tout autre niveau de préoccupation.

3^o Machines numériques.

Avec les machines, une même opération de calcul est susceptible de recouvrir deux réalités distinctes. Soit il s'agit d'effectuer le travail de la machine : $\boxed{2} \xrightarrow{+3} \boxed{?}$; $\boxed{4} \xrightarrow{-1} \boxed{?}$, par exemple. Soit il s'agit

de composer deux machines entre elles : $\boxed{\text{///}} \xrightarrow{+2} \boxed{\text{///}} \xrightarrow{+3} \boxed{\text{///}}$;
 $\boxed{\text{///}} \xrightarrow{+4} \boxed{\text{///}} \xrightarrow{-1} \boxed{\text{///}}$, pour reprendre les mêmes exemples. Dans ce dernier cas, il n'y a effectivement qu'une seule opération : la composition de deux machines.

Qui se calcule soit par une addition, soit par une soustraction. En outre, il y a un opérateur inversion, qui change le signe des machines. Cet aspect des machines numériques fournit un bon support pour illustrer une conception "algébriste" des opérations. De plus, les machines ne sont pas construites par itération : $\textcircled{+6}$ n'est pas, par nature, $\textcircled{+1}$ itérée 6 fois !

On a donc emprunté l'idée de machine pour objectiver les opérations numériques. Le symbolisme est là pour créer une distanciation chez l'élève. Ceci ne peut cependant avoir lieu qu'à la condition expresse d'un calcul direct avec les machines, indépendamment des nombres d'entrée et de sortie. Car ce sont les machines qu'on "mathématise" ici. Dans les exercices proposés, l'élève peut trouver la machine par comparaison des nombres d'entrée et de sortie. Il est encouragé à le faire. Et le critère de réussite se satisfait de ce traitement. Le maître doit alors être attentif directement au point suivant : tant qu'on n'aura pas observé l'élève composer directement les machines, on ne peut être assuré de sa compréhension. Si en tant que tel, l'objet d'étude proposé à l'élève peut s'interpréter comme illustration des règles algébriques, rien ne dit qu'on puisse reporter cette interprétation sur les procédures des élèves résolvant ces exercices. Le lecteur qui aimerait en savoir plus sur ce sujet se rapportera à mes articles sur les problèmes

additifs (F. Conne 1979, F. Conne 1985).

Les élèves que j'ai observés et interrogés aimaient bien les machines. Rares sont ceux qui ont saisi la composition des machines. Etude faite, il s'est avéré que ces exercices n'avaient pour eux pas d'autre statut que du calcul. Le symbolisme "machine" est bien compris par les élèves qui sont sensibles à l'aspect dynamique, séquencé du calcul. Les flèches imprimant une vocation ; et cette écriture est moins ambiguë que l'écriture en ligne d'égalités : certains problèmes liés aux calculs lacunaires ne se posent pas (F. Conne 1980, 1984).

En fait, avec les machines, la partie la plus intéressante à observer en classe est, sans aucun doute, la partie initiale de leur enseignement, avant que les élèves aient une idée précise de ce que l'on attend d'eux. Je regrette, pour ma part, de n'avoir pas pu assister à ce moment là de l'apprentissage.

Remarque : Avec les machines, on peut enchaîner les opérations sans que cela soit défendu : $\boxed{2} \xrightarrow{+4} \boxed{6} \xrightarrow{+8} \boxed{14} \xrightarrow{-11} \boxed{3} \xrightarrow{-1} \boxed{2}$
alors que $2 + 4 = 6 + 8 = 14 - 11 = 3 - 1 = 2$ est en principe erroné).

Il y a donc un certain hiatus. D'un côté, les activités que l'on fait faire aux élèves ou finalement, il suffit de compter ou calculer, et les représentations que les élèves ont des opérations numériques (une signification calcul) ; de l'autre côté, les définitions théoriques et le sens des notions et notations que la méthodologie entend réaliser dans les jeux, et faire découvrir aux élèves (une signification intrinsèque hors calcul).

L'introduction de ces jeux est justifiée de la manière suivante : (déjà cité, pg 8) "Avant d'être exercées, les opérations numériques doivent avoir été véritablement comprises. Il en découle que celles-ci doivent être approchées dans les jeux et par les manipulations avant de faire l'objet d'exercices écrits".

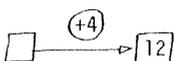
Tout d'abord, remarquons que les élèves s'exercent déjà tout seuls aux comptages et calcul et que j'ai vu ceux-ci le faire de façon assez variée. Ensuite, on a vu combien formelles étaient les significations proposées pour amener l'élève à la compréhension. Elles sont de plus trop abstraites et générales, et je doute qu'il soit ainsi possible "d'aspirer" les enfants vers les sphères mathématiques. Du point de vue des élèves, ce sont des activités numériques exercées dans des différents cadres matériels : jetons, objets, doigts, chiffres etc... Ces supports ne jouent pas un rôle amorphe ni similaire. Certains se prêtent à tel type de raccourcis, d'autres pas ; et c'est au cours de la confrontation de ces expériences variées, de la régulation du comptage sur chacun de ces supports, des erreurs, des fausses anticipations, de l'application de raccourcis ou de règles abusivement transposées ou généralisées, que la connaissance se construit. Le statut des objets se précise par différenciation, et le sujet progresse, il ne procède pas déductivement à partir d'une définition : le nombre c'est .., le signe égale signifie ... etc. Il y a tout d'abord un fonctionnement avec ces entités. Avant de dire : "le nombre c'est" (si même on le dit une fois), "le signe égale c'est", "les équations sont..." le sujet dira : "le nombre, le signe égal, les équations, c'est quand ...".

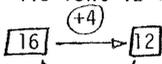
Notes : 1. Il en sera de même à tous les niveaux. La théorie mathématique ne précède pas le "fonctionnement" dans un champ de problèmes donnés, au contraire, elle en est le produit. De plus, on ne peut pas identifier les théories des mathématiciens, faites pour communiquer, convaincre, proposer des concepts

et le fonctionnement qui les sous-tendent.

2. Se donner des objectifs d'enseignement, examiner ce que les élèves ne comprennent pas, suppose une analyse des notions mathématiques en jeu. Mais le danger est qu'au travers de l'explication donnée aux élèves, on substitue à la matière enseignée son analyse. Et malheureusement, il semble que cela se passe souvent.

Un exemple du travail des élèves.

Monica propose à un moment donné le problème :  .

'Discussion. Tout d'abord des élèves refusent de faire cet exercice à cause du sens de la flèche. Ils le disent ainsi : "on ne peut pas entrer dans la flèche par le bout". D'autres proposent 16 comme réponse, ils font $12 + 4$. D'autres accompagnent cette réponse d'une flèche inversée :  . Un élève, reprenant des jetons, fait la manipulation suivante : il prend les 12 jetons, les passe à reculons dans la machine (boîte), et celle-ci, au passage, bloque 4 jetons. (Ce sont ses propres termes) et il obtient comme réponse, 8 jetons. Mais il refuse de procéder de cette manière sur des nombres seulement (c'est-à-dire sans le support des jetons). Puis entrera un peu plus tard en matière. Un autre élève considère, elle, que la machine va dans les deux sens, c'est tout aussi bien $+4$ que -4 ; un autre enfin, qui a une conception un peu semblable, fait "circuler" les nombres, c'est-à-dire compte 8 ; puis fait $8 + 4$, 12 ; puis refait $12 - 4$, 8 ou $12 - 8$, 4 ; la machine, c'est la circulation de tous ces nombres. C'est en termes agis la relation qui lie 8, 4, 12.

On voit donc une première chose qui est la variété d'appréciations du problème. Avec chaque fois une solution. (Trouver 16 est une solution même si

ce n'est pas celle du problème qu'on voulait communiquer). D'autre part, pour les derniers exemples, il y a intuitivement, dans l'action, la compréhension de ce qu'est l'inverse. Par inversion de flèche, par passage à reculons comme s'il s'agissait d'un film (les élèves ont certainement vu ça déjà) puis par le fait qu'ils savent qu'on leur demande des calculs, susceptibles d'être variés. Et voilà qu'ils en font et en refont.

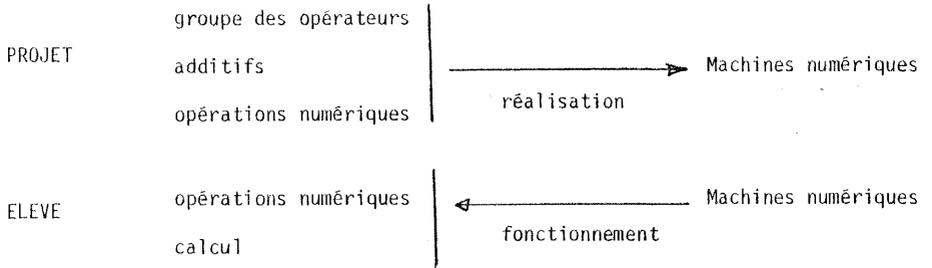
Evidemment, cela reste très intuitif. Les élèves éprouvent de la difficulté à formuler leur pensée et à dégager de leurs conceptions une signification précise (et univoque) pour les machines et les calculs qu'elles provoquent. Par exemple, cette indissociation manifeste de la machine avec son inverse, sur laquelle vient butter le projet algébriste de cet enseignement. (Il en va de même avec les adultes sur d'autres contenus peu familiers. Par exemple le Cube Rubik). Pour ma part, je pense que ces élèves ont compris tout ce qu'il y avait à comprendre dans les machines. Je veux dire qu'ils n'arriveront pas plus loin. Et les jeux comme : $S_1 \xrightarrow{O} S_2$ puis $S_2 \xrightarrow{O} S_1$ et $S_1 \xleftarrow{O} S_2$ tels qu'ils sont pratiqués c'est-à-dire où il est demandé aux élèves 1^o de comparer les données globalement (jeu de disposition des tableaux) 2^o de chercher les machines numériques. 3^o de conclure par la mise en relation des résultats obtenus en 1^o et 2^o, ou encore les jeux de composition : $S_1 \xrightarrow{(+)} S_2 \xrightarrow{(-)} S_1$, n'amèneront rien de plus.

Un dépassement de ces conceptions nécessiterait une bien plus grande décentration de la part de l'élève. En particulier, que celui-ci se penche sur les opérations qu'il effectue et comprenne que les machines en sont une illustration (un codage). On ne peut bien sûr pas en attendre autant d'élèves de 7 à 8 ans.

Je conclurai en faisant 2 remarques :

1⁰ Les machines numériques ont plu aux pédagogues et aux élèves. Mais pas pour les mêmes raisons.

2⁰ On retrouve, avec le schéma ci-dessous, la transposition didactique :



3^o Des jeux aux exercices.

3.1.

La charnière symbolique.

Rappelons succinctement le schéma d'une "activité" faite en classe :

- jeu sur des objets (plus ou moins schématiques) impliquant des activités de comptage et de calcul.
- liaison de cette activité avec des indicateurs numériques (étiquettes) et codage sous forme d'écriture équationnelle.
- représentation par dessin puis diagramme des situations jouées. Report des indicateurs numériques et association des écritures équationnelles.
- travail "en sens inverse". (Codage \longrightarrow objet ou dessin) de manière à s'assurer de la bonne compréhension des diagrammes et de la signification "adéquate, juste" attribuée au code.
- comparaison des écritures équationnelles entre elles.

(Remarque : pas de mention directe sur les règles d'écriture qui devraient découler naturellement des significations proposées).

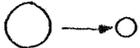
Le symbolisme joue un rôle très important. Car c'est lui qui exprime les véritables objets mathématiques que l'on veut étudier. D'autre part, comme beaucoup d'exercices sont écrits, sur fiche, le symbolisme est la cheville entre les jeux d'introduction des notions et les exercices.

Cependant, il y a à mon avis une rupture entre les "activités" et les exercices. Elle marque le changement du statut du symbolisme. Je vais donner quelques exemples au sujet des symboles $>$, $<$ et $=$.

3.1.1. $>$ (et $<$)

Le signe $>$ est introduit de façon suivante : on compare deux nombres, 3 et 5 par exemple. On s'arrête à la phrase "5 est plus grand que 3", et on convainc facilement les élèves (ils savent à peine écrire) que c'est un peu long à écrire. On introduit alors le signe $>$ comme abréviation de "est plus grand que". On le fait lire dans certaines écritures, le fait mettre à certains endroits. Remarquez que la maîtresse est toujours là pour trier dans les déclarations des élèves la relation voulue : "est plus grand" (et pas le "est plus petit" de "3 est plus petit que 5").

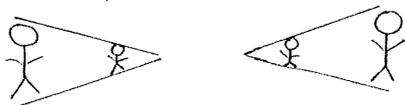
Remarque : Monica avait fait les choses plus intelligemment. Tout d'abord les élèves avaient proposé des signes qui signifient plus grand, plus petit. Ont été proposés (début première année).

	plus petit	plus grand
Martine:		
Martin:		
Sabine:		
α :		
J. Luc Céline }		

On remarquera que ces symbolismes portent l'ambiguïté de la notation. Soit on note le résultat d'une comparaison (Martine, Martin) soit on note l'action: faire plus grand, faire plus petit (Sabine). Les réponses de (α) sont intéressantes car elles essaient de régler la question. Jean-Luc et Céline eux ont une signification plus absolue.

On remarque que les élèves recourent aux flèches, symboles qu'ils ont utilisé dans les jeux sur les relations.

Monica pour finir introduit les signes $>$ et $<$ en faisant recours à un petit dessin mnemotechnique :



Au cours de l'année, devant les difficultés de certains (Sabine par exemple) elle a proposé différents trucs :



A la fin de la deuxième année, elle a trouvé "un truc" pour aider les élèves. La solution aura consisté en la proposition d'un codage qui se déroule en différents temps :

principe : $\bigcirc > \smallcirc$

12 26 mettre le grand rond près du grand nombre et le petit près du petit nombre $12 \bigcirc \dots \smallcirc 26$. Placer le signe de sorte que l'ouverture soit près du grand rond. $12 \bigcirc \leq \smallcirc 26$

$12 < \dots$

$26 > \dots$

$12 \bigcirc < \smallcirc \dots$ et $26 \smallcirc > \bigcirc \dots$

placer le grand rond vers l'ouverture du signe et le petit vers la pointe.

Ensuite le rond indique quel type de nombre cherché.

Il semble que cela marchait, et que les élèves en prenant des raccourcis (ne pas mettre les deux ronds) ne se trompaient plus. On notera cependant ce qu'il a fallu faire pour enseigner un signe conventionnel. La difficulté à s'y retrouver avec le signe est-elle importante pour la compréhension mathématique ? J'en doute. De plus, les élèves ne feront absolument rien avec ce signe en 1ère, 2e primaire.

Mais revenons en au programme :

Quand on estime que ce signe est compris, on propose une série de tâches où l'élève devra soit comparer deux nombres et mettre le bon signe ($8 \dots 7$), soit trouver le bon nombre ($\dots > 14$) ou le bon calcul ($3 + 5 > \dots + 6$). On observe alors des difficultés des élèves à manier le signe (comme suggéré plus haut). Les élèves savent très bien quel est le plus grand de deux nombres, ou trouver un nombre qui soit plus grand (ou plus petit). Mais ils semblent avoir malgré tout de la peine.

Quand un élève se trompe et fait : $\overset{6}{\dots} > 7$ ou $4 \overset{8}{\dots} <$ on peut croire que l'élève fait une confusion de signe. Mais cela n'avance à rien. Car de toutes façons il n'y a qu'un seul moyen de se tromper, ou, dit autrement, l'erreur apparaîtra toujours comme une inversion du signe. On dira : "il confond les deux signes" ou bien "il n'arrive pas à les mémoriser correctement". Mais si on regarde les réponses des élèves on voit qu'il n'y a jamais erreur systématique ($>$ pour $<$ et vice-versa). Il doit donc y avoir autre chose. Et c'est ce que confirment les réexplications répétées en vain des maîtresses, les trucs mnémotechniques qui ne marchent pas etc...

Le signe est ambigu. Ainsi il est réversible, et change de signification si on le lit de droite à gauche. Il n'y a pas beaucoup de symboles qui ont cette particularité : a reste a dans les deux sens, et 21 reste 21. Mais cela ne suffit pas.

Il y a un fonglit de tâche. La recette immédiate pour résoudre $3 > \dots$ c'est de faire un nombre plus petit. De là la confusion sur le signe. Ou bien on lit "est plus grand" et on fait un plus grand. Et on se trompe. Ou bien on fait plus petit et on associe cette signification au signe $>$ qui devient "est plus petit". De même dans $8 \dots 4$, la comparaison de gauche à droite (sens de lecture) dit : 8, 4 plus petit. Alors qu'il faut faire un retour en arrière (chose

que les élèves de 7 à 8 ans ne font pas volontiers) pour dire : 8, 4 8 est plus grand et mettre le signe. C'est-à-dire qu'il faut lire le trou : 8 est quoi que 4 ? plus grand. Et on remplit. Les élèves savent pourtant tous répondre aux questions comme : "3 est plus grand que quoi ?" , compare 8 et 4 !" ou encore "qu'est-ce qui plus petit que 16 ?" Ils sont aussi capables de noter de façon abrégée ou par un petit dessin la relation. Cependant leur difficulté à traiter ces "inégalités lacunaires", vient de ce qu'elles signifient pour eux un ordre - chercher ce qui manque. Et le premier mouvement est d'attribuer aux signes utilisés, $>$ (comme + d'ailleurs), l'action à faire. Ce n'est pas pour eux l'écriture incomplète d'une relation. Est-ce avec de tels exercices qu'on arrivera à les y faire parvenir ? Je ne sais pas.

Mais qu'importe. La chose que je voulais montrer ici, est que le signe doit être redéfini de façon à ce que sa signification corresponde aux séries de tâches où il est impliqué et pour cela l'élève se base sur les sanctions du maître. On voit ainsi que le problème ne correspond plus à une question numérique, ni même une question de compréhension de la relation d'ordre entre les nombres.

On est loin de la signification : abréviation ; et au seuil des exercices tout reste à faire.

3.1.2. Signe =

Il en est exactement de même avec le signe égale. Tout d'abord le même type d'introduction en classe (qui n'est qu'une désignation). Tel qu'il est introduit le égale indique que deux expressions numériques désignent le même nombre. De sorte que sa position relativement aux deux expressions importe peu. $7 = 2 + 5$ ne devrait pas poser plus de problèmes que $2 + 5 = 7$, ni non plus $2 + 5 = 3 + 4$. Or dans mes observations en classe confirmées par une recherche

dans 5 classes de 1ère année (1979) j'ai pu remarquer que les élèves avaient tendance à ne pas lire le signe égale surtout s'il est placé au début ($7 = 2 + 5$). Jusqu'au moment où ils trouvent qu'on peut lire l'équation de droite à gauche (S'ils doivent juger $7 = 2 + 9$. Les élèves qui la refusent disent $2 + 9$ ça fait pas 7, ça fait 11). De même des équations comme $2 + 5 = 3 + 4$ les désarçonnent. Et les maîtresses proposent souvent à leurs élèves l'image d'une balance (qui n'est qu'une image perceptive) et font écrire le résultat au-dessus de chaque expression $2+5 = 3+4$. Pour les élèves, le signe = est associé avant tout à une situation globale de comptage. Et j'ai souvent vu des élèves écrire $4 = 5 = 6$ ou $7 + 8 = 9$, ou accepter $4 = 5$ mais pas $5 = 4$. La signification privilégiée du signe = est : "ça fait", vient éventuellement ensuite : "c'est la même chose".

Toutes ces observations signifient la même chose: l'élève assimile le signe à une situation globale et en particulier à une action qu'il effectue. La signification du signe adhère à l'activité toute entière. La définition donnée et qui semble acceptée par l'élève n'a aucune signification en dehors du contexte dans lequel il se trouve. Il ne prend pas les définitions à la lettre loin de là.

Les élèves de 7 à 8 ans peuvent être très mobiles. C'est-à-dire que la signification est susceptible de changer selon ce à quoi l'élève est en train de penser. Exemple :

Mélanie (mi-première année).

Tous ces jours, j'ai fait des calculs avec Céline. Je lui ai demandé de répondre à $5 + 1 = 3 + \dots$. Et elle a mis 9. $5 + 1 = 3 + 9$.

Es-tu d'accord ?

5 plus 1 égale 3 plus 9 ? j'y comprends rien !
Ça ne va pas !

T'aurais écrit comment ? Tu aurais fait quoi ?

5 plus 1 égale 6. Mais j'aurais pas fait comme ça.
(comme Céline).

Tu sais le calcul qu'on faisait c'était $5 + 1 = 3 \dots$

et elle a mis 9 ?

Tu es d'accord ?

non.

Tu aurais mis quoi ?

Elle compte puis dit : j'aurais mis 3.

Elle écrit $5 + 1 = 3 + 3$.

Et puis, tu sais, je lui ai demandé un autre calcul : $6 = 2 + \dots$ Tu crois qu'elle a mis quoi ?

9, ... 6 ?

Non, elle a mis 8, Je complète $6 + 2 + \dots$

Tu es d'accord ?

Non, j'aurais mis 2.

Ecris tout.

Elle met : $6 = 2 + 2$.

Comme ça ? 6 égale 2 plus 2 ?

oui. Autrement j'aurais mis $5 + 1 = 3 + 3$ (elle l'écrit).

Qu'est-ce que ça veut dire égale ?

la même chose.

d'autres m'ont dit , ça veut dire : ça fait !

Alors faudrait effacer les deux 3 et mettre ...

Elle efface $3 + 3$ et met $4 + 2$ ce qui donne :

$5 + 1 = 4 + 2$.

Et tu es d'accord avec ça ? ($6 = 2 + 2$).

oui ... non non.

Lis ce qui est écrit ?

six ... deux plus deux ça fait quatre

2 plus 2 égale 4.

Mais tu m'avais dit 6 égale 2 plus 2 ! Ça ne fait pas égale ?

Y a pas de 4 dans ces calculs. On bifferait celui-là (6) et on met 4.

Elle corrige : $\cancel{6} = 2 + 2 = 4$
 trace *rajouté*

Glissement de sens à propos d'un jeu de mots. Tout d'abord entre la même chose et faire la même chose ($5 + 1 = 3 + 3$ donne $6 = 2 + 2$ pour "faire la même chose"). Puis changement à la faveur de "ça fait". Et correction, mais avec signe égal final. Elle ne corrige pas le 2 qu'elle a répondu mais le 6 de la donnée.

On retrouve le phénomène décrit pour $>$, de la confrontation du signe avec une tâche donnée. La signification des symboles est associée à ce que l'élève fait et en retour, les symboles sont inducteurs d'une action.

3.1.3. Encore un exemple avec plus.

Il est connu que les élèves peuvent mélanger la signification du signe plus avec les diverses acceptations du mot plus. Plus que, plus de etc. Je vais donner un exemple pour montrer que s'il y a jeu sur le mot, il n'y a pourtant pas confusion, ou dit autrement, qu'il peut y avoir plusieurs significations à la fois.

Un groupe d'élèves (début première année)

Jeu de groupe, ils ont écrit leur équation pour dire ce qui s'est passé avec l'adjonction des cartes



Tu as mis quoi Martine ?

Ma : $5 + 2 = 7$

Ça veut dire quoi plus ?

Ma : ça veut dire plus que, elle montre alors son équation $5 + 2 = 7$, 5 c'est plus que 2.

Qui a compris ?

Fa : (qui a écrit $2 + 5 = 7$) je ne comprends pas !

Ma : Ben ouais ! 5 c'est plus que 2, alors c'est écrit 5 plus 2 égale 7.

Ol : je ne comprends pas.

Ma : Tu vois, 5 c'est plus que 2 parce qu'il y a encore 3.

Regardez ça (le $2 + 5 = 7$ de Fabrice)

Fa : c'est moi qui ai écrit ça !

Ma : c'est pas comme ça !

Fa : Mais oui, ça fait la même chose $2 + 5$ et $5 + 2$.

Ma : Oui mais 5 c'est plus que 2.

Fa : Mais c'est la même chose, $2 + 5$ ça fait 7, plus c'est comme on veut. C'est le 5 qui est plus.

Ma : 2 c'est moins que 5.

Fa : corrige son équation : $5 + 2 = 7$.

Il dit : "c'est la même chose".

Bon, 5 c'est plus que 2 et tu as mis $5 + 2$. Mais c'est quoi ce 7 ?

Ma : Ben oui ! $5 + 2$ ça fait 7. 5 c'est plus que 2 mais 5 plus 2 ça fait 7.

Fa : 5 plus 2 ça fait 7, 2 plus 5 ça fait 7. J'avais raison.

C'est une discussion stérile car finalement Martine et Fabrice sont bien d'accord sur le fond. Mais il est quand même amusant de voir Martine englober ces deux lectures de son calcul, avec une lecture de ce qui exprime 5 plus 2 ($5 > 2$) et une lecture du calcul que ça donne.

Conclusion :

Il y a donc bel et bien rupture entre le moment du jeu et les exercices. Dans le jeu, et du point de vue de l'élève, le signe est introduit comme une notation abrégée, associée à une situation donnée, tandis que du point de vue du maître le signe est défini au travers d'un exemple particulier. Dans les exercices, du point de vue de l'élève, le symbole est un indice de la tâche qui lui incombe, tandis que le maître s'attend à ce que l'élève se base sur la signification de l'expression symbolique pour déterminer le calcul convenable.

3.2.

Survol des exercices.

Pour ce qui est des exercices, je me limiterai à la question de la transposition, et ce en examinant le lien : tâche \longrightarrow symbolisme. Apparemment, un bref survol des exercices.

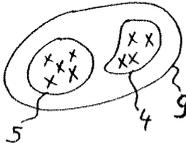
(Je me réfère ici aux exercices de la première édition).

3.2.1. Trajectoire.

Les exercices des activités de correspondance terme à terme. Chose maladroite car peu faisable sur des dessins : il faut tirer des traits

d'éléments à élément ce qui est fastidieux à faire. Et ça oblige à faire les exercices sur trop peu d'éléments : les élèves comptent leurs éléments, puis font les traits si la maîtresse insiste.

Puis on propose le schéma ensembliste pour l'addition et la soustraction.



Sont ensuite traitées principalement les décompositions des nombres jusqu'à vingt. Plusieurs supports sont utilisés : diagrammes de Venn, image de jetons ou de dominos, les étiquettes $\boxed{2+6}$ $\boxed{4+4}$ et les "équations". Petit à petit on n'a plus recours qu'aux "équations".

On retrouve cependant ces supports dans des exercices de rappel (début de 2e année) et dans l'illustration de certaines "règles de calcul" : passage à la dizaine ($14 + 8 = 14 + 6 + 2 = 20 + 2 = 22$) recours au double ($7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 14 + 1$) et calcul avec des nombres de deux chiffres.

En fin de 2e année, on travaille essentiellement sur des "équations" et sur les machines numériques qui rappelons-le essaient de faire lever le nez des élèves hors du calcul. (J'assimilerai les machines à un diagramme).

En outre, le but des séries de calcul est d'illustrer certaines propriétés du calcul (des opérations numériques) et de considérer la comparaison d'écriture comme $\boxed{13+15}$ et $\boxed{14+14}$, $\boxed{22+9}$ et $\boxed{27+2}$ (cf. la fiche OP 38 citée pg. 347) ou pour anticiper le résultat puis calculer ensuite, ou encore pour calculer puis observer (aidant à vérifier).

Remarque : Dans la 2e édition, moins de diagrammes et plus d'équations. Certains exercices de la méthodologie ont été développés : introduction plus progressive, exemples plus nombreux etc. Plus d'importance donc accordée au calcul. Mais le schématisme reste le même et le recours aux diagrammes a la même fonction. Il en est seulement fait moins cas.

3.2.2. Problèmes.

Evidemment, toutes les tâches sont centrées sur le calcul. Mais cela ne présente qu'un premier niveau de l'exercice. Les auteurs aimeraient bien que les élèves observent, se rendent compte des régularités qu'ils y ont introduites, anticipent et vérifient leurs résultats. Ceci fait donc partie d'un deuxième aspect des tâches. Un troisième aspect tient en la mise en relation du calcul et de son écriture avec des situations "concrètes" de comptage auquel il peut correspondre. Ce dernier aspect joue un rôle multiple : tout d'abord, rappeler aux élèves la "signification" des nombres et des symbolismes numériques. Ensuite soutenir l'élève dans sa tâche (lui offrant la possibilité de recours au comptage, qui en outre peut aider à vérifier). Aider à faire comprendre certaines propriétés, en les rendant "visibles". Enfin, suggérer à l'élève l'emploi de diagrammes pour schématiser des situations précises.

Outre le rôle de lien entre ce qui a été dit dans "les activités" de la méthodologie, et d'intermédiaire entre le traitement matériel avec des jetons et le traitement purement numérique, ces situations jouent un rôle analogue à celui des problèmes d'arithmétique classiques! En effet, la tâche est conçue de telle manière que l'élève soit amené à lire dans le diagramme proposé le calcul et les données du calcul à faire; tout comme il devait, dans les problèmes traditionnels, tirer ces informations d'un texte et d'une histoire. Aux données du texte se sont substituées celles des diagrammes. Cela pose évidemment la question de la signification des diagrammes et on se rappellera qu'on s'assurait de cela dans les "activités".

Ainsi la comparaison esquissée au début de ce chapitre entre les manuels anciens et l'actuelle méthodologie peut être reprise. On a substitué aux problèmes de la vie courante les problèmes sur les diagrammes. De plus, on s'occupe avant tout du nombre. En fait si on regarde la nature des quantités traitées aujourd'hui en première deuxième année, on a : les quantités de jetons ou d'unités, prises

sous forme de collections puis symbolisées par les chiffres et les nombres. Les quantités "opérateur" avec les machines, et aussi les quantités "valeurs" avec l'introduction d'échanges (si \square vaut $3 \triangle$ alors changer \square \triangle \triangle en triangles, en carrés).

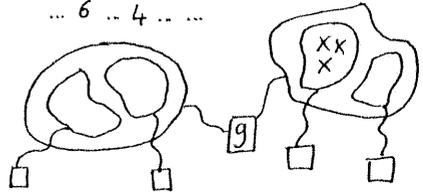
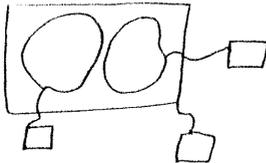
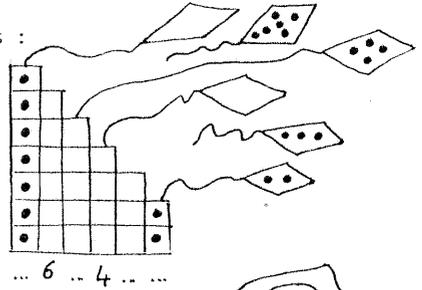
Remarque : La seconde édition, quoique plus portée sur le calcul, n'abandonne pas ce point de vue. Les fiches supprimées sont celles qui s'avéraient inutiles soit parce que trop difficiles, soit parce que proposant des activités artificielles telles que : sur le dessin d'ensembles de peu d'éléments, le mar-
quage de la correspondance terme à terme.

3.2.3.

Principe des exercices.

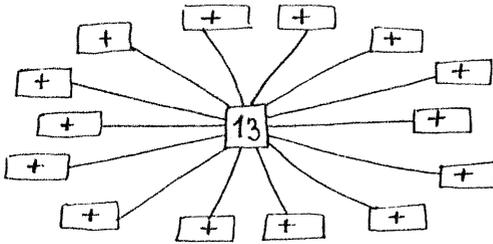
Les exercices ne demandent donc pas de faire du calcul seulement, mais une grande part est faite à la recherche de la tâche (consignes pas données, ou données sous forme schématisées) et des données pour l'effectuer, ainsi qu'au codage du résultat. Evidemment il y a des questions, des inconnues à trouver, et cela prend sous cet aspect symbolique la forme de schémas à lacunes - pas complètement remplis (tout comme les diagrammes de Venn du reste) ou d'"équations lacunaires". On ne met d'ailleurs pas tant l'accent sur le caractère expressif de ce schéma - et des équations en particulier - que sur l'aspect "pictural". Signes, place des signes, lacunes etc.

Je vais donner quelques dessins-exemples :



... + 5 = 12

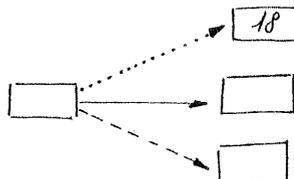
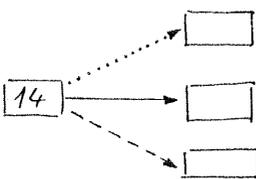
... = 1 + ... 9 = ... + 3



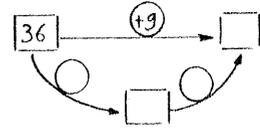
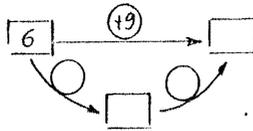
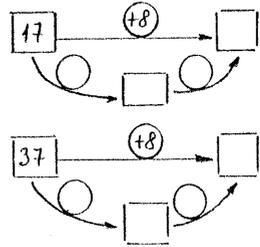
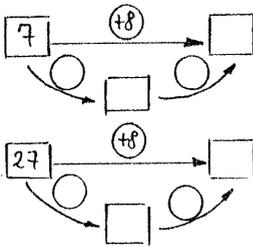
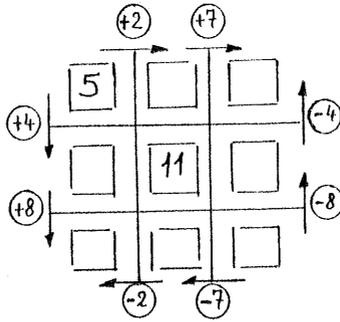
$23 + 7 + 6$
 $40 - 5$ $42 - 5$
 $8 + 6 + 24$

$8 + 6 + 24 > \dots - \dots$
 $\dots - \dots > \dots - \dots$
 $\dots + \dots + \dots > \dots + \dots + \dots$

trace la flèche: est plus grand que →



$+3$ → -5 → $+4$ →



etc..

etc..

$ \begin{array}{c} 7 + 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 7 + 3 + 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 10 + 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 11 \end{array} $	$ \begin{array}{c} 17 + 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dots + \dots + \dots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dots + \dots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dots \end{array} $	$ \begin{array}{c} 47 + 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dots + \dots + \dots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dots + \dots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dots \end{array} $
$ \begin{array}{c} 8 + 5 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dots + 2 + \dots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dots + \dots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \dots \end{array} $	<p>etc</p>	<p>etc .</p>

3.3.

Quelques exemples. Discussion.

3.3.1. Préambule.

En première deuxième année, on aimerait réaliser le passage du comptage au calcul par mémorisation de certaines additions et règles d'écriture (en base dix) et le passage de la conception calcul à une ébauche de conception "équations" (par l'expérience des "équations lacunaires") où l'égalité n'annonce pas un résultat mais une relation. Les deux sont liés.

D'autre part, les diagrammes sont censés renvoyer les élèves sur les significations introduites dans les "activités". Par exemple, le recours aux ensembles et le codage de situations ensemblistes vise à aider les élèves à considérer l'expression $a + b = c$ comme une relation.

Le problème que ça pose est exprimable de deux façons :

a) Lors du jeu et du traitement numérique, la schématisation n'est pas que l'image de la situation. Cette schématisation prend place dans le contexte d'une certaine action, mais le schéma ne restitue pas cette action. C'est au lecteur à reconstituer ce contexte (ou à en constituer un autre).

b) Le schéma est figé et ne restitue pas les différents moments de l'action.

Cela implique que le schéma, qui se veut intermédiaire entre la situation réelle et le code mathématique, ne joue pas ce rôle car trop coupé du contexte. Et même plus, le contexte dans l'exercice, c'est la tâche exprimée par la consigne. On retrouve ainsi la rupture que j'avais décrite à l'aide des exemples sur $2 + 3 = 5$, $2 + 3 = 6$ et $2 + 3 = 4$.

Je vais donner quelques exemples qui vont montrer un certain décalage entre

ce que l'élève serait censé faire et ce qu'il fait effectivement. Constatant cela, on peut supprimer les exercices et en chercher de "meilleurs". C'est-à-dire essayer de limiter encore plus les possibilités d'interprétations divergentes de la part des élèves. Tel n'est pas ma conception de la chose. Mon critère serait plutôt de juger les exercices selon leur "pouvoir suggestif". C'est-à-dire ceux qui donnent comme résultat des réponses où on voit l'élève avoir une idée et essayer de s'y régler. Je jugerai donc les exercices au type de productions suscitées plus qu'à l'adéquation du travail de l'élève au projet. Evidemment, cette conception suppose un changement d'attitude vis-à-vis de ce qui est juste, de ce qui a du sens, et implique qu'on s'intéresse plus au travail fait par l'élève qu'au résultat bien propre auquel on aurait voulu le voir aboutir.

3.3.2.

Schéma ensembliste et calculs lacunaires.

1⁰ On peut se demander pourquoi les fiches veulent à tout prix proposer des images d'ensembles toutes faites. Car les élèves ont recours spontanément à de petits dessins pour effectuer leurs calculs (petites croix, petits ronds, petits bâtonnets). Spontanément aussi ils adoptent le marquage de ronds soit pour isoler certaines croix, soit pour les rassembler. L'ennui est, semble-t-il, que ces dessins sont ambigus. Le manuel aimerait proposer la conception "ensembliste" à ses élèves ... C'est-à-dire une signification plus dégagée de l'action. Le diagramme ensembliste, tout en recouvrant totalement la signification des croix (ronds ou bâtonnets), va au-delà d'un simple marquage de l'action.

Pour ce qui est de l'élève, la question est évidemment de savoir quel statut est accordé au diagramme ensembliste, et en particulier si : a) le diagramme est rattaché au calcul, b) le diagramme a une signification plus grande que les petites croix ou traits.

Quoi qu'il en soit, il est une règle d'interprétation à respecter, c'est de lire le schéma comme la réunion de deux ensembles disjoints. De sorte qu'il ne faut surtout pas mettre d'éléments dans la plage extérieure.



La corde extérieure signifie qu'on rassemble les deux quantités qui sont isolées par les cordes intérieures. L'interprétation demande à considérer que le schéma  est la résultante d'une action dont les étapes sont:  , considération d'une quantité \longrightarrow   , adjonction d'une autre quantité \longrightarrow  , considération de la quantité totale obtenue. On peut écrire ça analogiquement : $\bigcirc + \bigcirc = \bigcirc \bigcirc$.

2^o Conversement, on peut se demander pourquoi la méthode tient tellement à proposer des calculs écrits (en ligne) aux élèves. Et par exemple, pourquoi ne laisserions-nous pas écrire eux-mêmes leurs calculs. Ensuite pourquoi tant tenir à ces calculs avec signe égal initial ? Enfin pourquoi ces calculs lacunaires ?

Il se peut que les auteurs, se basant sur leur interprétation "équationnelle" de l'écriture de ces calculs, aient sous-estimé la difficulté de manier des équations avec signe égal initial (difficulté passagère il faut le dire pour l'addition. Pour la soustraction, je ne sais pas). Il se peut aussi que les auteurs estiment que la maîtrise de toutes les formes d'écriture est nécessaire pour que l'on soit assuré d'une signification conforme de ce symbolisme.

- On aimerait passer du calcul à la relation, c'est-à-dire à l'équation. Si je considère l'écriture $a + b = c$ comme l'expression d'une relation, je pourrais traiter aisément les écritures lacunaires $a + \dots = c$; $a + b + \dots$; $\dots + b = c$, car je saurais déduire de la relation le calcul à effectuer pour trouver la donnée manquante. Cela ne dit pas que, conversement, l'apprentissage de la résolution de calculs lacunaires aide à considérer l'écriture $a + b = c$ comme une relation. Du moins pas logiquement !

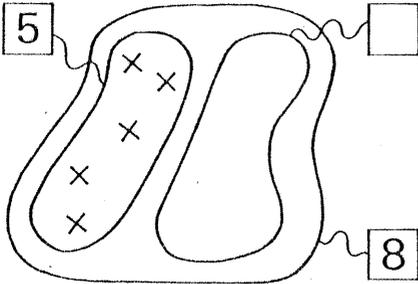
(Ceci est une question générale et fondamentale pour la didactique des mathématiques).

- Evidemment, la donnée de calculs lacunaires va mobiliser chez l'élève une représentation dont il devra déduire le calcul à faire. A ce titre, cela a déjà le statut des problèmes (dans le sens problèmes d'arithmétique). L'écriture $a+b = c$ représente alors dans le cours de mathématiques deux objets bien distinctes selon celui qui l'écrit : l'élève pour qui c'est l'expression d'un calcul qu'il a fait - l'auteur de la fiche pour qui c'est le texte d'un problème (surtout si l'équation est lacunaire).

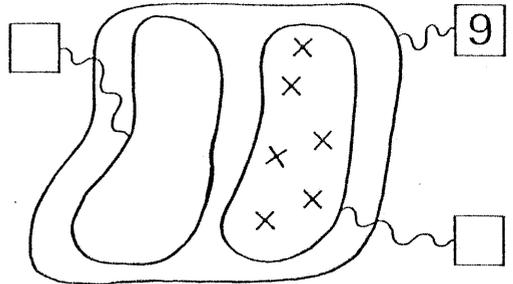
Deux objets qui ont la même forme extérieure mais qui pourtant sont bien distincts. Le recours à l'écriture calcul par l'élève sera en retard sur l'introduction des exercices lacunaires et marquera la préférence pour la restitution d'une temporalité (qui n'est que l'identité entre le temps de l'action et le temps de l'écriture). Signe égale, annonçant le résultat et donc mis à la fin : $a + b = c$ ou $x - y = z$. (Ces deux dernières écritures peuvent être partiellement confondues avec les cas les plus simples - pour cause - d'écritures lacunaires : $a + b = \dots$ et $x - y = \dots$).

3⁰ Conclusion.

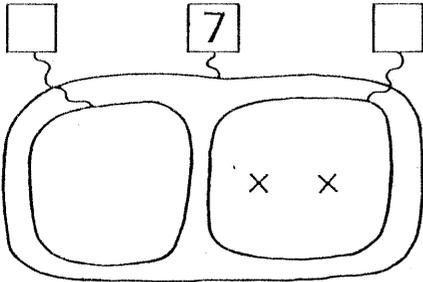
Ces glissements de signification d'un schéma lié à l'action à un schéma de relation, avec confusion sur la forme symbolique fait partie de la transposition didactique dans la mesure où ils invitent à interpréter les travaux des élèves pour autre chose qu'ils ne sont. Il me semble personnellement que la connaissance se développe sur ce type de décalage mais quand il est interne, c'est-à-dire quand la lecture de ce que j'aurais pu écrire dépasse l'activité qui l'a produite. Je ne pense donc pas qu'on puisse éliminer tout décalage, mais l'action du pédagogue devrait être révélatrice des décalages internes chez l'élève



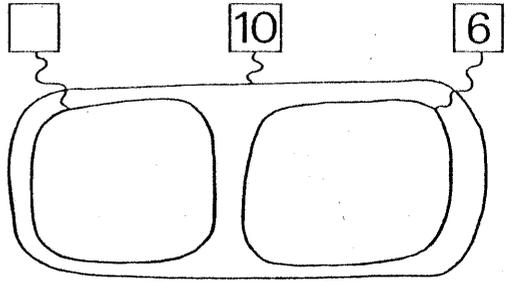
$$5 + \text{---} = 8$$



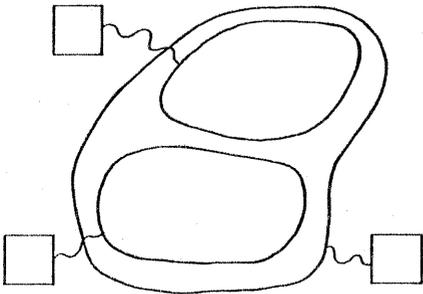
$$\text{---} + 6 = 9$$



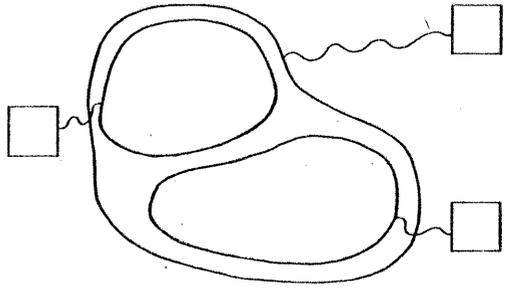
$$7 = \text{---} + 2$$



$$10 = 6 + \text{---}$$



$$\text{---} + 1 = 6$$

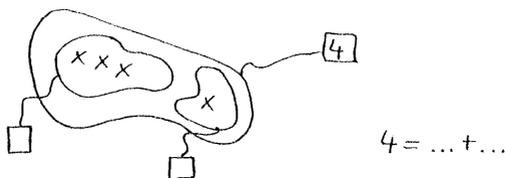


$$3 + \text{---} = 10$$

plus qu'interprète tantôt illusionné tantôt profondément déçu des productions de ses élèves.

4⁰ Exemples d'utilisation des diagrammes ensemblistes et de l'écriture lacunaire.

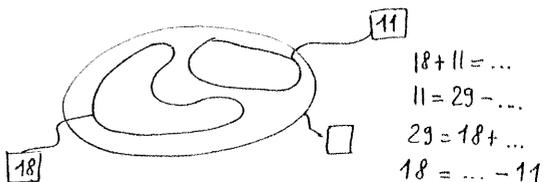
a) OP I 3 (2e éd. 5) présente 4 diagrammes qui symbolisent les décompositions du nombre 4.



Le diagramme aide à fixer la signification ensembliste de l'addition et fournit une image des décompositions de 4.

b) OP I - (2e éd. 23) citée. Présente 6 diagrammes qui visent à introduire les calculs lacunaires et à bien saisir la tâche demandée par la référence à la "signification" ensembliste.

c) OP I 25 (supprimée)



On aimerait que l'élève "expérimente" les diverses façons d'exprimer la relation additive entre les nombres 11, 18 et 29. Pour ce, on propose les égalités lacunaires qui peuvent se rapporter au diagramme (quand il sera complété).

Remarques : 1) Qui symbolise quoi ?

Le recours au diagramme vise à fonder l'écriture du calcul par rapport à une situation concrète : des croix - qui pourraient être le dessin d'objets - que l'on peut compter. Dans ce sens, il y a antériorité du diagramme par rapport à l'écriture du calcul.

Mais en retour, le diagramme est l'image concrète du calcul. Finalement, le diagramme procède tout autant du calcul que le calcul du diagramme.

2) Si l'élève voit dans le diagramme l'expression de ce qu'il a compris dans l'équation, et vice-versa, c'est parfait. Il ne faut pas en attendre plus. S'il peut y avoir plusieurs lectures de l'équation, de même il peut y avoir plusieurs lectures du diagramme.

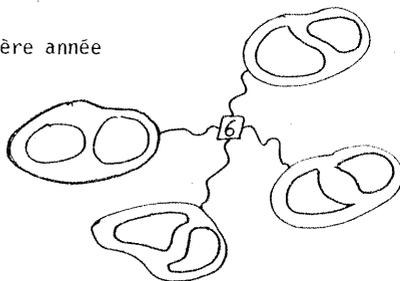
5^o Elèves.

Premier exemple : Michel début première année

Moi-même

Michel

Sur la fiche il y a 4 ensembles :



C'est du groupe des 6.

Il remplit un des diagrammes  puis 
3 plus 3 ça donne ...

3 plus 3 ? je ne vois pas ça !

Mais oui ! il pointe les croix 3, 1 2 3. 3 + 3.

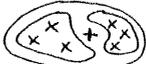
Mais je ne vois que des croix ! Il faut mettre des étiquettes pour dire qu'il y a 3 croix là et 3 croix là.

Il met les étiquettes et les remplit.

3 plus 3.

Et le plus ? je ne le vois pas.

Mais oui 3 plus 3

puis il dessine  . Il met un plus entre les deux ensembles

Ah, ah, mais je vois 7 croix !

non y a pas 7 croix, c'est pas une croix, c'est le plus

Mais je vois une croix.

On peut montrer que c'est un plus.

Il faut mettre un plus, d'ailleurs y a même une petite place pour.



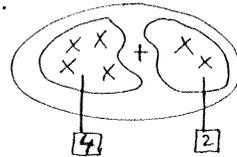
Mais j'ai jamais vu de plus avec des croix !

Mais oui, il faut mettre le plus.

Tu as déjà vu ça sur d'autres fiches ? (je lui montre d'autres fiches).

Non. On doit mettre + , là, ça fait rien, c'est une autre fiche.

Il remplit un 2e ensemble. Met des croix, un plus et des étiquettes.



(Remarque : les étiquettes vont dans les sous-ensembles. Les élèves y tenaient beaucoup).

1 2 3 4 plus 2, 1 2 3 4 5 6, t'as vu !

J'arrête de "charrier" et lui explique qu'on ne met pas de signe plus dans les diagrammes de Venn. Je lui montre que c'est la corde extérieure qui dit qu'on met ensemble les deux collections. Je lui dis que le signe + va avec les chiffres. Fais-en encore un.

Il fait le 3e ensemble en remplissant les étiquettes puis en mettant les croix (0 et 6)

Et le dernier, tu dois en faire un avec des chiffres différents.

On ne peut pas.

Oui.

Non.

Regardes bien, tu as fait 3 et 3 , 2 et 4 , 6 et 0.

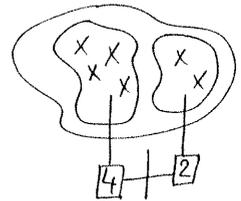
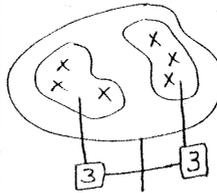
Oui.

Fais des croix !

Il réfléchit ... 5 plus , 5 plus 1 ?

Il procède de même. Sans mettre les petites croix

Il fait des croix puis me regarde et met des plus entre toutes les étiquettes de sorte qu'il touche bien celles-ci :

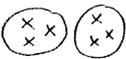


Remarques :

- Tout d'abord le contexte, Michel et moi on s'amusait. (comme des gamins)
- Ce qui m'intéresse c'est le jeu avec les symboles car il implique une certaine appropriation, même si c'est à des fins farfelues et pour des solutions temporaires. (Michel n'a pas repris le + entre les étiquettes). De plus c'est un contrepoint aux remarques pédantes de la méthodologie comme quoi $4+4=8$ ne convient pas comme étiquette etc. Qui finalement ne sont justifiées que parcequ'on veut faire jouer aux étiquettes un rôle qui dépasse celui de simple indicateur sur un dessin.

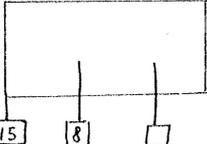
- L'exemple montre que Michel ne lisait pas la corde extérieure (comme signifiant la mise ensemble) et qu'il répond très ponctuellement à ma remarque : je ne vois pas le plus. Ensuite une fois posé, que ce + soit totalement confondable avec une croix ne le gêne pas, il va même jusqu'à dire que c'est bien ça qu'on lui demande de faire, que le dessin laisse une place exprès pour le +. Alors que jamais Monica ne lui a dit une chose pareille et que s'il y a une petite place entre les sous-ensembles, c'est que les auteurs des fiches veulent faire des cordes pas rondes pour rendre le dessin plus réaliste et suggérer une vraie corde (eh oui !).

- La surprise finale que prépare Michel en mettant son plus entre les étiquettes . Chose que Michel imagine mais que Monica ne lui a pas dite. Avec cette insistance à lier les deux chiffres avec le + (ça touche). J'ai observé maintes fois une telle utilisation du trait pour lier les expressions avec cette interprétation dynamique.

- Enfin, ce n'est pas le diagramme qui renvoie l'élève à la situation concrète puisqu'il est obligé d'utiliser un signe pour indiquer ce qu'on fait, pour remplacer ce qui s'est évanoui dans le dessin (car dans le dessin on a soit séparation  soit mélange  mais disparition des données de départ).

Deuxième exemple.

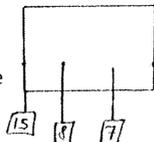
Pour montrer ce que j'ai pu dire sur les "indices" de la tâche, et de la position du sujet vis-à-vis des données, voici un protocole instructif.

J'ai proposé à Martin et Michel (chacun avait sa feuille) de me remplir le dessin suivant :  (c'est le dessin utilisé dans le manuel, sauf que je l'ai amputé des deux cordes internes).

Pour Michel, je

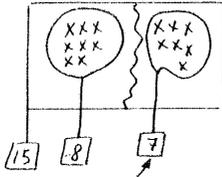
Je dessinaï les diagrammes "sur le vif", un pour Martin et un pour Michel, séparément. En dessinant le diagramme pour Michel, je me suis trompé et avais commencé par dessiner :

Bien que la manoeuvre



; puis, furtivement, j'avais effacé le 7. ait été très rapide, Michel a entrevu ce 7.

Martin

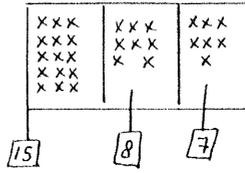


il raccorde aux étiquettes deux ronds, et fait encore une séparation verticale.

Il complète l'étiquette puis met les croix.

Il faut faire 15, On fait des ronds et puis après on met là.

Michel



(on verra plus loin, qu'il a recopié le 7 entrevu mais qu'il ne voit pas à ce moment précis la relation entre 8, 7 et 15).

Vous n'avez pas fait la même chose, laquelle des réponses vous préférez ?

Non ! là (il désigne l'étiquette 15, du dessin de Michel) il ne faut rien faire.

Non... 15 c'est le numéro de la case (étiquette) ça veut dire : "en tout, 15".

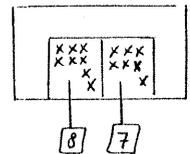
oh oh, tu as oublié 15 ! après tu comptes.

Martin m'explique :
Moi j'ai vu que le cadre 15
il allait seulement jusque là

Les deux.

Les deux sont justes !

Michel décide qu'il a fait faux et il refait un dessin.

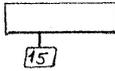


7 et 8 ça fait combien ?

Michel rajoute l'étiquette 15. Puis il compte et découvre que $8 + 7 = 15$.

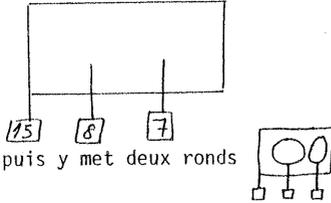
Michel m'explique que son autre dessin était faux.
Il rajoute des explications à son dessin.

(l'étiquette 15 s'arrête au bord du cadre extérieur



tandis que le 8 il allait un peu plus dedans, le 7 aussi.

Il dessine un ensemble cadre



puis y met deux ronds

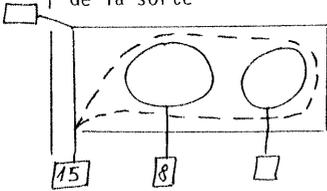
Tui (Michel) il avait cru que le cadre, c'était aussi un ensemble. (avec 15 croix).

Le cadre, c'est pas un ensemble ?

Non, ça ne veut rien dire.

C'est tout, en tout, c'est 15 en tout.

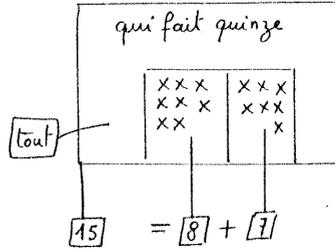
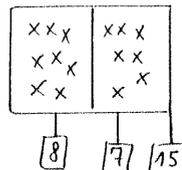
Martin complète alors son dessin de la sorte



une étiquette pour désigner le tout, et une "corde" pour désigner : "en tout ça fait 15".

Est-ce qu'on pourrait faire comme ça ?

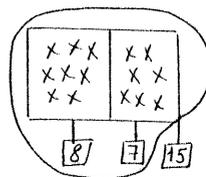
Je propose alors le dessin :



à ce moment Michel est en train de mettre son étiquette tout et de rajouter ses explications à son dessin. (cf. ci-dessus).

Oui c'est d'un seul côté.

Michel, lui veut qu'on rajoute une corde:



Michel pourquoi t'avais fait autrement avant ?

Ben je me suis pas dit pourquoi c'est ça ?
Alors j'ai mis 7. Je savais pas 15, je m'apercevais que ça fait 15, mais je ne savais pas que 8 + 7 font 15.

Remarques : Ce qui m'a le plus frappé, c'est que les élèves ne lisent pas la corde extérieure comme signifiant la réunion. Mais quand il s'agit de la marquer, de l'indiquer, ils recourent à une corde entourante qui fait double usage avec celle qui est dessinée. Donc une appréhension totalement différente du même symbole selon la position du sujet. Le symbole reste lié à une action, et sa signification en dépend.

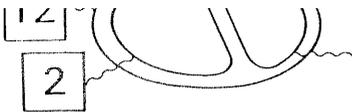
Ensuite, c'est la découverte par Michel de la relation entre 15, 8 et 7 qu'il n'a pas vue : il s'était contenté de recopier.

Troisième exemple :

Fiche OP II 25 (pas reprise dans le 2e édition). Faite en fin de 2e année (avril-mai 1980).

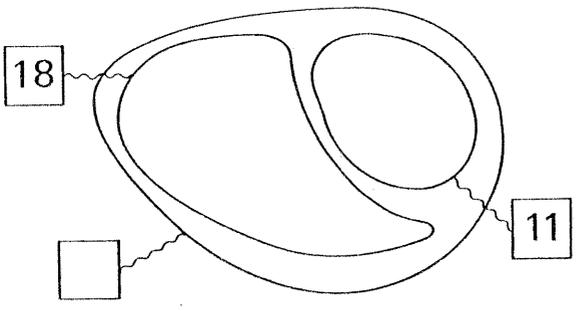
Remarques de Monica :

- ils n'ont pas tenu compte du dessin
- ils n'ont pas vu que c'était chaque fois le même calcul (et ils ont recalculé chaque fois).



$$10 = 12 - 2$$

$$12 - 10 = 2$$

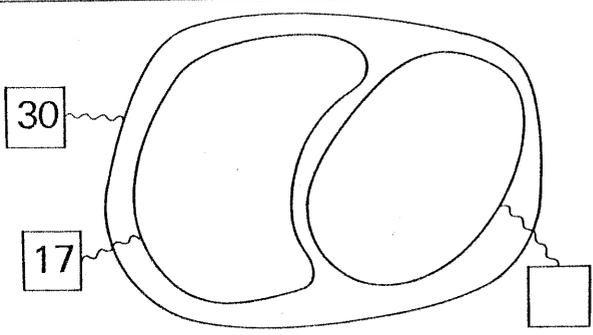


$$18 + 11 = \underline{\quad}$$

$$11 = 29 - \underline{\quad}$$

$$29 = 18 + \underline{\quad}$$

$$18 = \underline{\quad} - 11$$



$$30 = 17 + \underline{\quad}$$

$$30 - \underline{\quad} = 17$$

$$13 = 30 - \underline{\quad}$$

$$13 + \underline{\quad} = 30$$

$$\underline{\quad} - 17 = 13$$

Invente.

Céline :

Elle met les croix dans les sous-ensembles. C'est tout.

$$18 + 11 = \dots$$

$$11 = 29 - \dots$$

$$29 = 18 + \dots$$

$$18 = \dots - 11$$

Elle met les croix dans les sous-ensembles. Etiquettes remplies

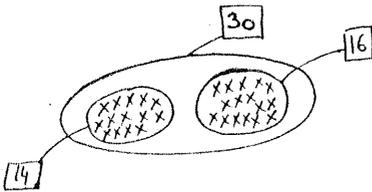
$$30 = 17 + \dots$$

$$30 - \dots = 17$$

$$13 = 30 - \dots$$

$$13 + \dots = 30$$

$$\dots - 17 = 13$$



$$30 + 14 = 44$$

$$14 + 30 = 44$$

$$30 + 16 = 46$$

$$16 + 30 = 46$$

$$16 + 14 = 30$$

Didier :

Rempli juste

$$18 + 11 = \dots$$

$$11 = 29 - \dots$$

$$29 = 18 + \dots$$

$$18 = \dots - 11 \quad \text{puis } 18 = 29 - 11$$

Rempli juste

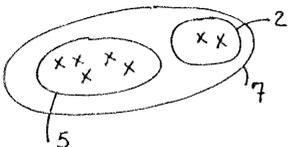
$$30 = 17 + \dots$$

$$30 - \dots = 17$$

$$13 = 30 - \dots$$

$$13 + \dots = 30$$

$$30 - 17 = 13$$



beaucoup de choses effacées

$$5 + 2 = 7 \quad - \quad 50 + 10 = 60$$

$$5 + 5 = 10 \quad 2 = 9 - 7$$

$$7 - 6 = 1 \quad 5 + 2 = 7$$

$$2 + 5 = 7$$

Fabrice :

Rempli juste

$$18 + 11 = \underline{29}$$

$$11 = 29 - \underline{18} \quad \text{puis } 11 = 29 - \underline{18} = 11$$

$$29 = 18 + \underline{11}$$

$$18 = \underline{7} - 11$$

Rempli juste

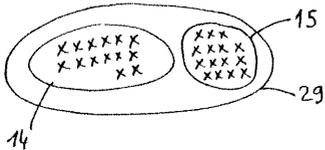
$$30 = 17 + \underline{13}$$

$$30 - \underline{13} = 17$$

$$13 = 30 - \underline{17}$$

$$13 + \underline{17} = 30$$

$$\underline{4} - 17 = 13$$



beaucoup de choses effacées

$$14 + 15 = 29$$

$$29 = 29$$

$$15 + 14 = 29$$

$$29 - 14 = 15$$

$$15 + 14 = 29$$

$$29 - 15 = 14$$

$$29 - 14 = 15 = 29 - 14$$

Jean-Luc :

18 croix

$$18 + 11 = \underline{29}$$

12 croix

$$11 = 29 - \underline{18}$$

étiquette 29

$$29 = 18 + \underline{11}$$

$$18 = \underline{7} - 11$$

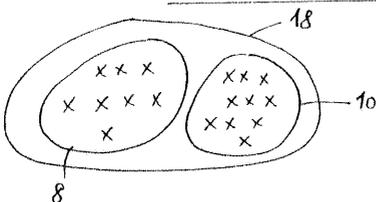
ok.

$$30 = 17 + \underline{13}$$

$$30 - \underline{13} = 17$$

$$13 + \underline{17} = 30$$

$$\underline{40} - 17 + 13$$



$$10 = 18 + 8$$

$$10 + 8 = 18$$

$$8 + 10 = 18$$

$$8 = 18 + 10$$

$$18 - 10 = 8$$

Joanne :

Juste.

$$18 + 11 = 29$$

$$11 = 29 - 18$$

$$25 = 18 + 7$$

$$18 = 25 - 7$$

Juste.

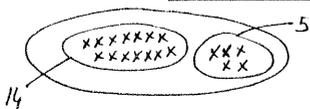
$$30 = 17 + 13$$

$$30 - 13 = 17$$

$$13 = 30 - 17$$

$$13 + 17 = 30$$

$$4 - 17 = 13$$



$$14 + 5 = 19$$

$$5 + 14 = 19$$

$$19 + 20 = 39$$

$$39 - 0 = 39$$

$$0 \times 0 = 0$$

Katia :

Juste.

$$18 + 11 = 29$$

$$11 = 29 - 18$$

$$29 = 18 + 11$$

$$18 = 29 - 11$$

15 croix au lieu de 17

mais 13 croix quand même

donc compte $30 - 17$ et

met les croix "pour beurre".

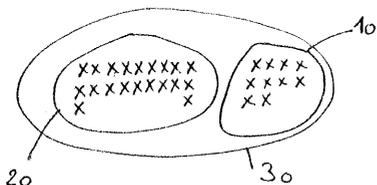
$$30 = 17 + 13$$

$$30 - 13 = 17$$

$$13 = 30 - 17 \text{ puis } 13 = 30 - 17 !$$

$$13 + 17 = 30$$

$$13 - 17 = 13$$



$$30 + 10 = 20$$

$$10 + 20 = 30$$

$$30 - 20 = 10$$

$$30 - 0 = 0$$

$$20 + 10 = 30$$

Martine

juste

$$18 + 11 = 29$$

$$11 = 29 - 18$$

$$29 = 18 + 11$$

$$18 = 29 - 11$$

juste

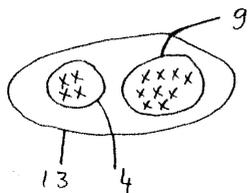
$$30 = 17 + 13$$

$$30 - 13 = 17$$

$$13 = 30 - 17$$

$$13 + 17 = 30$$

$$30 - 17 = 13$$



$$4 + 9 = 13$$

$$9 - 5 = 4$$

$$11 + 13 = 24$$

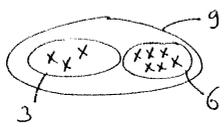
$$9 = 13 - 4$$

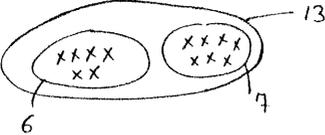
$$13 = 9 + 4$$

$$4 = 13 - 9$$

$$9 = 13 - 4$$

$$13 = 9 + 4$$

Mélanie :	
Juste	$18 + 11 = 29$ $11 = 29 - 40$ puis $11 = 29 - 18 = 11$ $29 = 18 + 47$ $18 = 29 - 11$
Juste	$30 = 17 + 47$ $30 - 13 = 17$ $13 = 30 - 43$ $13 + 43 = 30$ $30 - 17 = 13$
	$3 + 6 = 9$ $9 = 3 + 6$ $9 - 3 = 6$ $9 = 6 + 3$ $9 - 6 = 3$
Michel :	
Juste.	$18 + 11 = 29$ $11 = 29 - 18$ $29 = 18 + 11$ $18 = 29 - 11$
Juste.	Juste. $8 + 9 = 17$ $17 - 8 = 9$ $9 + 8 = 17$ $17 - 9 = 8$ $17 - 9 = 8$ puis $8 = 17 - 9$
Olivier :	
pas rempli l'étiquette 18 croix et <u>12</u> croix	$18 + 11 = 29$ $11 = 29 - 18 = 11$ $29 = 18 + 11 = 29$ $18 = 29 - 11$

Monica lui explique	Juste
	$5 + 3 = 8$
Sabine :	
Juste.	$18 + 11 = 29$ $11 = 29 - 40$ $29 = 18 + 47$ $18 = 29 - 11$
Juste.	$30 = 17 + 13$ $30 - 43 = 17$ $13 = 30 - 43$ $13 + 43 = 30$ $30 - 17 = 13$
	Avait d'abord écrit $30 = \dots$, $20 = \dots$ (illisible) puis $6 + 7 = 13$ $13 - 7 = 7$ $7 + 6 = 13$ $13 - 6 = 6$ $7 - 6 = 1$
Sandra :	
9 croix au lieu de 11 avait mis 10 croix à l'extérieur. Monica explique le calcul de nombres à deux chiffres	$18 + 11 = 29$ $11 = 29 - 18$ $29 = 18 + 11$ $18 = 18 - 11$
avait mis 30 croix à l'extérieur !	$30 = 17 + 13$ $30 - 13 = 17$ $13 = 30 - 17$ $13 + 17 = 30$ $30 - 17 = 13$

pas de dessin!

jeux de calculs avec des nombres à

2 chiffres !

$$\begin{array}{ll} 20 + 8 = 28 & 50 + 9 = 59 \\ 30 + 8 = 38 & 60 + 4 = 64 \\ 40 + 7 = 47 & \end{array}$$

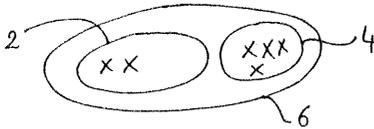
Vincent D.:

Juste.

$$\begin{array}{l} 18 + 11 = \underline{29} \\ 11 = 29 - \underline{18} \\ 29 = 18 + \underline{11} \\ 18 = \underline{7} - 11 \end{array}$$

Juste.

$$\begin{array}{l} 30 = 17 + \underline{13} \\ 30 - \underline{23} = 17 \\ 13 = 30 - \underline{17} \\ 13 + \underline{27} = 30 \\ \underline{30} - 17 = 13 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} 2 + 4 = 6 & 3 \times 2 = 6 \\ 4 + 2 = 6 & 4 - 6 = 4 \\ 6 - 0 = 6 & 6 - 4 = 6 \\ 2 \times 3 = 6 & \end{array}$$

Vincent L.

Juste.

$$\begin{array}{l} 18 + 11 = \underline{29} \\ 11 = 29 - \underline{18} \\ 29 = 18 + \underline{11} \\ 18 = \underline{7} - 11 \end{array}$$

Juste.

$$\begin{array}{l} 30 = 17 + \underline{13} \\ 30 - \underline{47} = 17 \\ 13 = 30 - \underline{43} \\ 13 + \underline{17} = 30 \\ \underline{4} - 17 = 13 \end{array}$$

$7 + 9 = 16$	$22 - 6 = 16$
$9 + 7 = 16$	$16 - 7 = 9$
$19 - 3 = 16$	Monica l'aide :
$20 - 4 = 16$	$16 - \dots = 9$
	$16 - \dots = 7$

Remarques :

1^o Ce n'est pas tout à fait exact de dire : "ils n'ont pas fait référence au schéma. Pour bien regarder ce qui s'est passé, je propose de commencer par la 3e partie de l'exercice, où l'élève doit "inventer" un diagramme et des calculs qui vont avec.

a) Tout d'abord les nombres qui sont sur le diagramme sont repris dans les calculs. Les équations des élèves sont des calculs que l'on peut faire avec ces nombres (les 3 ou seulement 2 d'entre eux). Mais ces calculs n'ont pas de rapport avec la relation exprimée par le schéma.

b) Chaque élève a compris la donnée comme : produire des calculs. Le moyen de variation utilisé différencie les individus. On peut subdiviser la classe en deux groupes : ceux qui se sont basés sur les nombres en présence et ont "joué" avec et ceux qui, semble-t-il, ont eu un souci plus grand de liaison avec le dessin. Ces derniers (Fabrice, Jean-Luc, Katia, Mélanie, Michel) se sont plus limités dans leur variation et ont manifestement répété la même chose.

Pour les autres il est intéressant de voir ce qui les a guidés dans leurs variations. Ainsi les deux Vincent se sont fixés sur un résultat qui correspond à l'étiquette du tout. Céline et Sabine ont combiné les nombres deux à deux. Céline n'a proposé que des additions, tandis que Sabine a fait aussi des soustractions. Sandra, elle, s'amuse avec le calcul de nombres à deux chiffres. Mais si on regarde bien la fiche on s'aperçoit qu'elle en a discuté avec Monica

(explication), elle continue donc sur cette voie et on comprend qu'elle ne fasse pas de dessin.

c) La majeure partie de ces équations ont un signe égal final (quand y a une équation à signe égal initial, c'est en fin de série).

2⁰ Si on regarde maintenant les "figures imposées".

a) On remarque que les élèves ont chaque fois (ou presque) calculé. Aucun n'a pris machinalement les nombres donnés par le diagramme, ou les nombres donnés par les équations écrites au-dessus (les erreurs de calcul l'attestent).

b) Bien que depuis la fin de la première année, des réponses fausses à des calculs lacunaires du type : $7 = 2 + \dots$ ou $10 + \dots = 21$ avaient disparu, on en retrouve ici. Dans les "équations" soustractives mais aussi dans des additions. Et ceci même chez des élèves qui n'avaient jamais commis (en première) de telles erreurs. Ceci est assez intrigant et je ne vois que deux interprétations :

- Les élèves sont perturbés par la donnée de la soustraction qui "chamboule" les indices sur lesquels ils ont l'habitude de se baser. Ainsi par exemple, à la donnée d'une équation avec signe égal initial, les élèves réagissent en lisant le calcul dans le sens droite/gauche $a = b + c$. Et ce n'est plus faisable avec la soustraction. (Ceci n'est qu'un indice parmi ceux que les élèves se donnaient, et n'explique pas les réponses : $18 = 7 - 11$).

- Les élèves, à l'époque où ils ont fait cet exercice, sont en train de s'apercevoir de certains trucs de calcul, comme $30 + 13$ peut être trouvé facilement par calcul séparé sur les chiffres ou $40 - 13$ finira par 7. De sorte qu'il se peut aussi que centrés sur ces "trucs" dont ils abusent, ils en oublient d'observer le type de réponses à donner.

(On peut évidemment toujours faire appel à l'inattention des élèves qui au-

raient "bâclé" leur boulot. Cependant, pourquoi des élèves qui n'avaient jamais commis de telles erreurs les ont-ils commises ?)

c) Autre remarque : dans les calculs "inventés" les élèves ne commettent pas ces erreurs d'écriture ! On voit confirmé le fait que le calcul lacunaire n'a pas le même statut que le calcul écrit par l'élève lui-même. Dans ces derniers, l'élève restitue le déroulement du calcul (Sabine par ex.) ou insiste sur le résultat (les Vincent). De sorte que le = annonce le résultat et se trouve en général à la fin.

Ainsi donc se voit confirmé l'intérêt à bien regarder les réponses des élèves et à observer le type de variation proposée. Evidemment cela suppose un changement d'attitude du maître pour qu'il prenne l'exercice comme un prétexte et non pas comme un objectif !

Note :

Pour ceux qui en restent aux exercices - objectif , la décision qui s'imposait était de supprimer cette fiche. C'est ce qu'on a fait dans la deuxième édition.

3.3.3. Fiches portant sur des propriétés numériques.

Je vais analyser ces fiches de deux points de vue. D'une part continuer de donner des exemples sur la méthode utilisée pour illustrer, accompagner des calculs Je monterai comme précédemment

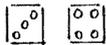
qu'une représentation par dessin n'est pas forcément plus "primitive" qu'un code écrit. La conséquence en est que les deux interprétations données par l'élève aux deux systèmes symboliques s'épaulent mutuellement. Le second point de vue est relatif à la lecture des productions des élèves. Pour moi la transposi-

tion devrait consister en le choix, parmi tous ceux que l'on peut imaginer, d'exercices prétextes (et pas objectifs). A vérifier que ce sont de bons prétextes, c'est-à-dire à examiner de près ce que ces exercices suggèrent aux différents élèves (à différents niveaux, différentes suggestions). Pour cela il faut aussi que le maître y trouve un intérêt - que ça lui donne la curiosité de savoir comment ses élèves réagissent plus que l'inquiétude qu'ils ne vont pas arriver à répondre et qu'il faudra se lancer dans de laborieuses explications.

Premier exemple.

Fiche OP I 17 (25 - 28 et 29 dans la 2e édition)

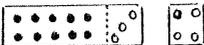
Deux systèmes symboliques sont mis en parallèle. Le calcul $13 + 4 = \dots$ et les dominos   qui correspondent à $(10 + 3) + 4$. Le recours aux dominos est une façon de montrer perceptivement le calcul de nombres à deux chiffres. L'auteur pense que la comparaison des dominos



$$3 + 4 = 7$$

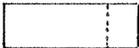
soutient efficacement

la comparaison de



$$13 + 4 = 17$$

L'image est concrète : ce sont des dominos, des points que l'on peut compter, on a fait le groupement de 10 etc...

Evidemment, il faut interpréter la chose. Il faut penser que le calcul proposé, c'est $13 + 4$ et pas $10 + 3$ ni $10 + 3 + 4$. On peut le dire à l'élève, lui montrer l'indice . Cela n'empêche pas que ce n'est là qu'une interprétation (et d'ailleurs dans le jeu OP I 2, il fallait coder



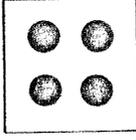
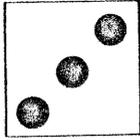
par

$$4 + 1$$

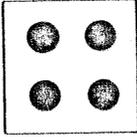
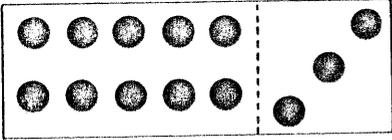
. Ce qui est une autre interprétation du même schématisme !)

La fiche veut donc expliquer à l'élève en le renvoyant sur un symbolisme plus concret. On aimerait faire une explication sans explicateur (il reste sous-

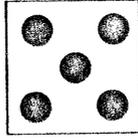
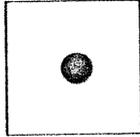
OP - 18



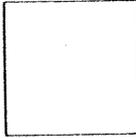
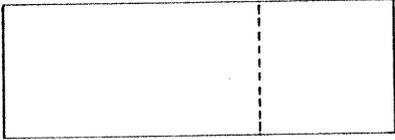
$3 + 4 = \underline{\quad}$



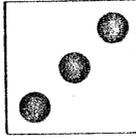
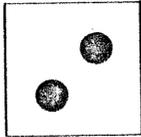
$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$



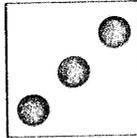
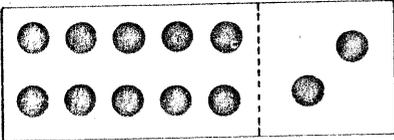
$1 + 5 = \underline{\quad}$



$11 + 5 = \underline{\quad}$



$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

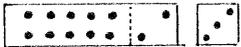
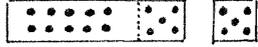
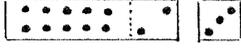
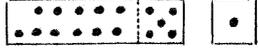
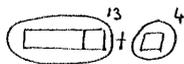
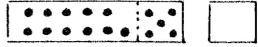


$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

jaçant). L'explication tient au traitement de la quantité 13 en $10 + 3$ et on se réfère à l'image pour cela.

De plus, pour bien cerner la chose, on joue sur le type d'informations données, espérant faire passer l'élève du dessin au calcul et vice-versa. (C'est d'ailleurs l'ensemble des situations proposées qu'il faut considérer pour être sûr que l'interprétation voulue est $3 + 4 = \dots$ $13 + 4 = \dots$ ainsi que du rapport avec le dessin).

Résultats : (milieu de la première année primaire).

dominos dessinés par la fiche	dominos complétés par l'élève
<p>Carine :</p>  $12 + 2 = 15$ $\dots + \dots = \dots$	 $11 + 5 = \dots$
<p>Céline :</p>  $10 + 3 = 17$ $\dots + \dots = \dots$  $\dots + \dots = \dots$	 $11 + 5 = 17$
<p>Denys :</p>  $10 + 4 = 17$ $\dots + \dots = \dots$ <p>Monica corrige en montrant :</p>  <p>il écrit :</p> $10 + 4 = 13$ $\dots + \dots = \dots$  $13 + 2 = 15$ $\dots + \dots = \dots$	 $11 + 5 = 16$ <p>Monica corrige en montrant</p> $\textcircled{11} + \textcircled{5} = 16$

Fabrice : avait déjà compris l'écriture $10 + 5 = 15$ et c'est le seul qui a pu répondre correctement du 1er coup à cette fiche.

dominos dessinés par la fiche

dominos complétés par l'élève.

Jean-Luc :

 $11 + 5 = \dots$

Joanne :

Monica corrige comme avec Denys

 $11 + 5 = 7$
 $11 + 5 = 17$

Martin :

 $10 + 3 = 13$
 $\dots + \dots = \dots$
 $11 + 5 = 16$
 $10 + 2 = 12$
 $\dots + \dots = \dots$

Martine :

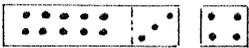
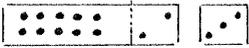
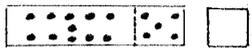
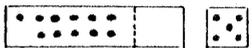
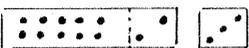
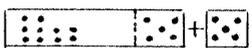
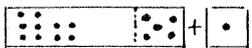
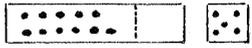
 $10 + 3 = 12$
 $\dots + \dots = \dots$
 $11 + 5 = \dots$
 $2 + 3 = 5$
 $\dots + \dots = \dots$
 $11 + 2 = 9$

Mélanie :

 $13 + 3 = 16$
 $\dots + \dots = \dots$
 $11 + 5 = 17$

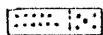
Michel :

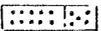
 $11 + 5 = 16$

dominos dessinés sur la fiche	dominos complétés par l'élève
<p>Rachel :</p>  $10 + 3 = 4$ $\dots + \dots = \dots$  $10 + 3 = 13$ $\dots + \dots = \dots$	 $11 + 5 = 5$ $11 + 5 = 16$
<p>Sabine :</p> <p>numérote les points de la dizaine</p>	 $11 + 5 = 16$
<p>Sophie :</p>  $10 + 2 = 3$ $\dots + \dots = \dots$	 $11 + 5 = 16$ 
<p>Vincent D. :</p>  $10 + 3 = 13$ $\dots + \dots = \dots$	 $11 + 5 = 16$

Les élèves ont donc travaillé sur les dominos et sur les équations en y faisant la relation qu'ils estimaient juste.

a) Ainsi, à l'équation $11 + 5 = \dots$ ils ont fait correspondre un dessin



ou encore  ne respectant pas la disposition des nombres.

Ils font $11 + 5 = 16$ ou $15 + 1 = 16$. Tous ces traitements montrent que les élèves ont calculé le résultat, et qu'ils déduisent les dominos. Mais avec ces inversions, la comparaison avec la ligne du dessus n'est plus possible, et l'effet figuratif escompté tombe. (Voyez Jean-Luc).

b) Il y a pas mal tendance à mettre $10 + 3 = 13$, on voit aussi $10 + 3 = 4$, ou $10 + 3 = 17$ ou $10 + 4 = 17$. De plus, les nombres peuvent correspondre grosso

modo au dessin mais pas les calculs. (Carine, Céline), ou encore le calcul est faux mais correspond au nombre de points (Mélanie).

c) Enfin à voir les deux explications de Monica, on se rend compte qu'elle explique comme si elle traitait des calculs seulement. Les dominos ne servent même pas de support à l'explication.

Remarque :

On peut donc douter de l'aide automatique du dessin. Et de nouveau, on voit que l'interprétation de l'élève est relative à son action et non pas à cette "réalité" que voudrait être le dessin. Il est d'ailleurs bien clair que si l'élève a mis $10 + 3 = 4$ pour  ce n'est pas le dessin qui va l'aider à changer de point de vue. D'autant plus qu'avec $10 + 3 = 4$, il a toutes les informations pour pouvoir reproduire le schéma.

Donc, la seule chose à espérer c'est que l'interprétation du dessin renvoie à celle de l'écriture. Ensuite on pourra par exemple faire compter $10 + 3$ à l'élève, qui verra que ça ne donne pas 4. Et espérer qu'il tiendra à réviser son interprétation du dessin, ce qui l'amènera peut-être à mieux comprendre l'intention du maître.

Remarque : Les deux symbolisations (écriture-dominos) codent la même chose et c'est ce qui les lie. On ne peut pas dire que l'un est l'écriture de l'autre, ou vice versa, que l'un est le dessin de l'autre. Ceci a été discuté en détail au chapitre III : multiplicité et multivocités symboliques. La démonstration peut être reprise ici telle quelle.

Deuxième exemple

OP II 19 (7-8) (fin de 2^e année primaire).

Ici on donne une règle de traitement de cette série de calculs : repérer parmi les 3 nombres donnés ceux dont la somme fait un chiffre rond et faire le calcul intermédiaire.

Note : voici les commentaires de la méthodologie de 2^e année. Première édition

$$(9 + 1) + 7 = 10 + 7 = 17$$

$$(18 + 4) + 2 = 20 + 4 = 24$$

- 419 -

OP - 19

$$(7 + 3) + 6 = \underline{\quad} + 6 = \underline{\quad}$$

$$(5 + 9) + 5 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$8 + 9 + 2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$15 + 5 + 9 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$7 + 4 + 6 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$7 + 14 + 6 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$21 + 9 + 8 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Invente $(\underline{\quad} + \underline{\quad}) + \underline{\quad} = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

$$(\underline{\quad} + \underline{\quad}) + \underline{\quad} = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

OP 19. La commutativité et l'associativité de l'addition sont illustrées ici par un groupement de termes faisant apparaître 10 ou un multiple de 10.

Deuxième édition:

OP 7-8. Utilisation de l'associativité et de la commutativité de l'addition. Dans les sommes de trois termes en grouper deux de façon à obtenir dix ou un multiple de dix. Exploiter ces fiches en faisant découvrir les avantages de ce procédé pour calculer rapidement. " *Fin de citation.*

Ici se résume tout le point de vue du manuel, ainsi que le changement d'optique intervenu dans la nouvelle édition.

L'intérêt de voir quel impact vont avoir les entourages. Car on peut interpréter la règle de la fiche de deux façons : regrouper pour arrondir à la dizaine supérieure ou regrouper comme l'indiquent les entourages (que l'on ferait alterner). Dans les deux cas, il y a "utilisation de la commutativité et de l'associativité". (Comme Jourdain faisait de la prose - "l'homme qu'a vu l'homme qu'a vu l'ours" = "moi qui cite Brousseau qui cite Molière").

Les élèves de la classe se distribuent en 3 groupes.

1^o 6 élèves : Ceux qui ont répondu de façon conforme. Les "inventions" le sont aussi. Ils ont fait comme attendu.

2^o 8 élèves : Ceux-ci ont fait des regroupements de deux termes mais de façon indifférente : pas de complémentation à la dizaine supérieure. Ils se sont en général basés sur la configuration des entourages, soit en répétant l'un des deux donnés, soit en alternant les 2 ou 3 entourages possibles ($(\textcircled{+} \textcircled{+} + \bullet , \textcircled{\bullet + \bullet} + \bullet) , \bullet + \textcircled{\bullet + \bullet})$) les calculs sont cependant exacts. Les "inventions" sont du même type.

3^o 3 élèves : Ceux qui n'ont pas traité comme il faut. Ils font des entourages qu'ils ne respectent pas. Mais est-ce qu'ils ont appliqué la commutativité et l'associativité de l'addition ?

$a + b + c = d + e = f$ où $d = (a + b + c)$ et e est un nombre choisi au bon plaisir de l'élève. Ex. $(15 + 5 + 9) = 29 + 5 = 34$. Dans le modèle de l'exercice : $7 + 3 + 6 = \dots + 6 = \dots$, le 6 est répété et cela a une signification. Mais l'élève ne fait pas cette relation et il ne procède pas à ce report.

4^o l'élève, lui fait quelque chose de bien plus mystérieux. Les entourages et le passage à la dizaine supérieure sont faits correctement, mais le nombre restant n'est pas reporté. Céline en invente un autre :

$$\begin{array}{l} (8 + 9 + 2) = 10 + 7 = 17 \qquad (21 + 9) + 8 = 30 + 10 = 40 \\ (43 + 14 + 7) = 50 + 6 = 56 \qquad (9 + 3 + 1) = 10 + 2 = 12 \end{array}$$

Voilà de quoi aiguïser la curiosité du "détective". On notera que pour trois des calculs on a :

$$8 + 9 = 17 (1^{\circ}), 43 + 14 = 57 (2^{\circ}), \text{ et } 9 + 3 = 12 (4^{\circ})$$

Ces trois interprétations sont :

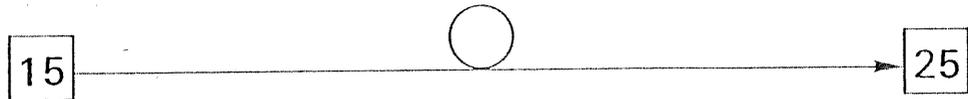
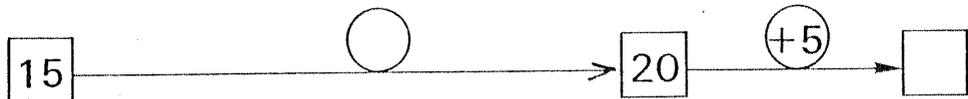
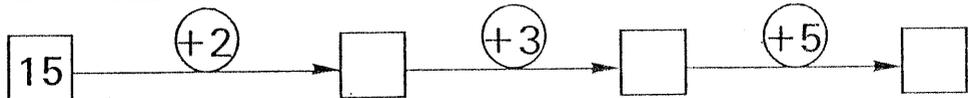
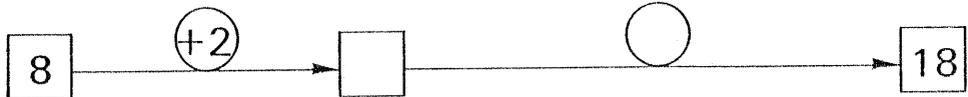
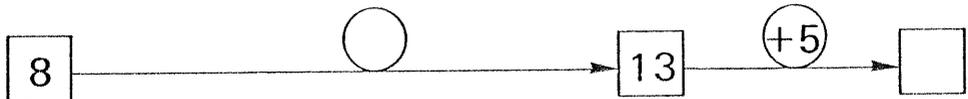
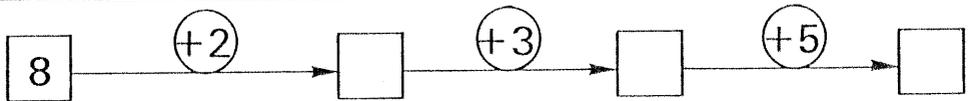
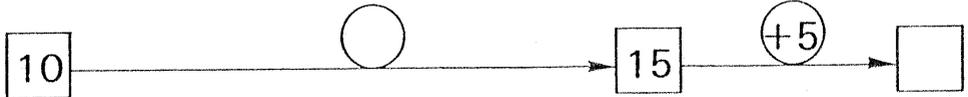
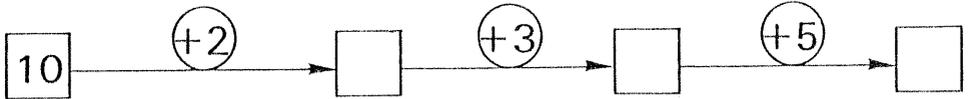
- faire le complément à la dizaine supérieure
- faire des formes d'entourage

}	identiques
	alternées
- faire un long calcul.

Troisième exemple :

OP II 12 (22, 2e édition).

J'ai déjà parlé des "machines numériques". Encore un exemple qui illustre



exactement la façon dont les élèves ont compris l'exercice. Martin a fait sa fiche sans problèmes. (Il n'a pas mis de + dans les cercles !). Mais il n'a rien vu de ce qu'on veut lui montrer. Et il ne voit rien car il compare colonnes à colonnes indifféremment les nombres qui sont dans un carré ou dans un rond ! Je passe à l'écriture usuelle, et là, il comprend l'explication, mais ça ne va vraiment pas tout seul : "il faut vraiment tout lui montrer !

Protocole MARTIN.

As-tu remarqué quelque chose ?
vraiment ?

non

là, ça fait toujours 25.

Et là, et là ? (autres parties horizontales).

ça ne fait pas 25

ça fait toujours la même chose à la fin.

As-tu remarqué autre chose ?

(il compare la 5e colonne
et les nombres indépendamment du
fait qu'ils sont dans un \square ou
dans un \bigcirc .)

là ça fait 15, 15, mais 8

13, 13, mais 8

20, 20, 8 et 20

Et là, au début ?

?

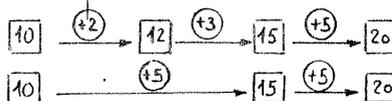
ben c'est aussi toujours la même chose !

Eh Sabine ! y a le détective qui nous pose
une question. Pourquoi c'est toujours la
même chose ? (ça n'intéresse pas Sabine).

T'en penses quoi ?

??

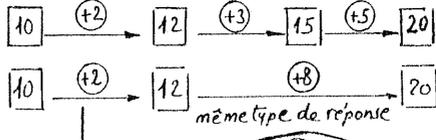
Tu peux comparer ça et ça :



Ben là, et là (fin) c'est la même chose.

Et là (début) c'est pas la même chose.

Tu peux comparer ça et ça :



Et si je fais cette flèche, tu mettrais quoi ?



Il regarde attentivement sa fiche ...

Bon alors regarde ce calcul. $8 + 2 + 3 + 5 = \dots$

Il compte et met 18.



Il fait les calculs et remplit les carrés.

Il compare : ça fait la même chose 18, ... c'est la même chose.

Oui, c'est le même calcul. Fais ça :



Il fait.

Ecris le calcul, dessous.

$$8 + 2 + 8 = 18$$

c'est bizarre ces calculs c'est la même chose ?

Je montre $8 + 2 + 3 + 5 = 18$ et $8 + 2 + 8 = 18$.

Ça fait la même chose $8 + 2 + 3 + 5$, ça fait 18 et $8 + 2 + 8$, ça fait aussi 18.

Mais c'est bizarre ! Là y a 3 calculs et là y en a 2 !

oui mais 8 c'est plus ! Il réfléchit...

3 plus 5 ça fait 8 !

Oui regarde : $8 + 2 + \underbrace{3 + 5}_{= 8} = 18$

parce que $3 + 5$, c'est 8

$$8 + 2 + 8 = 18$$

et là ? ($8 + 5 + 5 = \dots$ comparé à $8 + 2 + 3 + 5 = 18.$)

Il complète.

$8 + 5$ c'est 13 et $13 + 5$ c'est 18.

Oui, mais pourquoi c'est la même chose que $8 + 2 + 3 + 5$?

$8 + 2 + 3 + 5$? ...

$2 + 3$ ça fait 5 !

Oui, montre-moi sur les calculs.

Il entoure $8 + (5 + 5) = 18$

$8 + (2 + 3) + 5 = 18$

Mets des flèches pour qu'on voit ?

Il met les flèches (sur le dessin).

Conclusion : Ça ne va pas tout seul ! Et c'est pas encore dit que les expressions soient substituables (Martin est un élève fort !).

Conclusion.

En fait, pour les élèves ces règles tombent du ciel. Car présentées comme elles le sont, elles ne concernent que notre connaissance (et la leur future peut-être) mais pas leur connaissance actuelle. On réagit souvent à ces exercices en se disant : "il faudrait déjà avoir compris le truc avant de faire l'exercice". Constatation qui aux exemples montrés semble juste, mais qui reste très problématique. Comment faire autrement ? Où se passe le développement ?

On retombe donc sur le fonctionnement ! J'ai essayé de montrer comment cela se passe pour chaque élève, un peu clandestinement, un peu à côté du programme.

Et il faut se rendre compte que le véritable "laboratoire" des élèves, c'est les activités de comptage et de calcul. Non pas, loin de là, que je sois un fervent défenseur de l'exercice au calcul et au dressage du calcul mental. Ni que j'estime qu'il faudrait se limiter à ces activités; mais simplement que les représentations des élèves développent à partir de là, et que je les ai vus très actifs sur ce chapitre - en partie spontanément ! J'ai déjà dit comment c'est à la faveur de jeux sur des supports matériels variés, d'anticipation, en partie erronées, de raccourcis, de règles abusives qu'ils progressent. En conséquence la seule chose à éviter, ce sont ces élèves qui, dès que l'adulte ouvre la bouche sont sûrs qu'ils ont fait tout faux, proposent déjà de faire autrement, effacent ou tracent tout ce qu'ils ont fait, camouflant à jamais leur réponses antérieures. Et dans cette confusion étant incapable de penser à leur tâche ni à la façon dont ils procèdent.

D'autre part, il est vraiment étonnant qu'une pédagogie qui se donne tant de peine à trouver les moyens picturaux pour aider les élèves à observer, comparer les résultats auxquels ils sont parvenus, ne reprend pas ce mot d'ordre pour elle-même et ne se donne pas les moyens d'observer, comparer, comprendre les réponses des élèves. Et ce n'est pas si difficile que cela. Evidemment, c'est au prime abord gênant et paraît négatif. Mais qu'importe les constats négatifs pourvu qu'ils s'accompagnent d'une pratique positive : demander aux élèves ce qu'ils ont fait, comment ils ont fait, et ce qu'ils pensent de tout cela.

Dessine les fleurs.

OP-47

Complète :

J'ai dessiné ___ fleurs rouges,
___ fleurs jaunes,
et ___ fleurs bleues,
donc ___ fleurs.

J'ai dessiné ___ tulipes,
et ___ campanules,
donc ___ fleurs.

J'ai employé ___ couleurs.

J'ai employé ___ formes de fleurs.

Donc ___ x ___ = ___

ou bien ___ x ___ = ___

4. Passage à l'écrit. Exemple de la multiplication.

Il sera intéressant pour conclure d'étudier la façon dont les élèves de la classe de Monica représentaient la multiplication, et les discussions qu'ont donné le codage d'un petit problème de multiplication. Cette discussion montre très clairement le conflit qu'il y avait pour les élèves entre le codage des informations et l'écriture d'un calcul dont ils connaissaient les résultats. De plus, dans ces protocoles, on voit Monica fortement impliquée et face à un vérifiable problème didactique. J'ai beaucoup apprécié cette période de la vie de la classe et j'espère que le compte rendu sera assez parlant.

4.1.

Présentation du problème (Milieu de la 2e année primaire).

Monica a fait faire la fiche OP II 47 (59). Aucun problème jusqu'aux équations. ... \times ... = Comment expliquer ? Les élèves utilisent déjà le mot fois dans des expressions comme : "3 fois 2 c'est", ou "4, 5 fois c'est". Ils connaissent tous cela et l'utilisent déjà quand il le faut. Seuls certains élèves connaissent le signe \times et savent que ça se lit : fois.

Monica demande aux élèves s'ils peuvent expliquer. Aucun d'eux ne répond, même pas Jean-Luc pour qui la notion est familière depuis le début de la première année primaire. (Jean-Luc est un champion de calcul et il savait déjà au milieu de la première année faire $150 + 150$ en faisant $100 + 100 + 50 + 50$!).

Monica discute alors du tableau avec les élèves : combien de campanules, combien de tulipes, combien de fleurs. Puis essaie de relier l'expression 3×2 avec le tableau. Evidemment les élèves interprètent additivement.

- Un élève écrit au tableau $3 + 3 = 6$.

- Un élève lit ... x ... =

C'est quelque chose fois quelque chose pour faire 6 ?

V.D. tente une explication .

J'ai compris ! J'ai employé 3 couleurs et 2 formes. On prend le 3, et le 2, et on calcule ensemble. Mais le signe, on ne sait pas l'utiliser.

Sabine, qu'en penses-tu ?

Sabine. Si on prend les 3 et les 2 ensemble, ça fait 5. Puisque $3 + 3$ ça fait 6 (elle se réfère au tableau), c'est 6.

(Elle lit donc $3 \times 2 = 6$ de façon négative : c'est pas $3 + 2$ car $3 + 5 = 5$, alors c'est $3 + 3$).

Vincent D. reprend :

2 fois 3 égale ...

Si on fait 2 fois 3, le 2, c'est pour les deux 3 et on a mis 3 pour montrer que c'est 3.

Il montre $3 + 3$.

Ça, ça ne fait pas 9, ça c'est $3 + 3$, pas 3×3 . (il se réfère à OP 48 où il y a le même problème mais avec 3 tasses et 3 sous-tasses. Même interprétation négative du fois).

(La classe ne comprend plus rien).

Vincent L. explique :

On peut regarder les étiquettes, 3 couleurs et 2 formes, 3 fois 2.

Fabrice : ah ouais ...

Sabine : ne comprend pas.

Monica note ce commentaire :

"Je me demande comment expliquer, je les aide en leur faisant écrire $3 + 3$ ou

$2 + 2 + 2$ et ensuite en demandant : combien de fois 3 ? , combien de fois 2 ?
Ou encore, sur le tableau : combien de colonnes de 2, combien de lignes de 3 ?
Mais je ne suis pas très satisfaite, je suis incapable d'expliquer ce signe x ."

"J'ai l'impression qu'ils ne comprennent pas que c'est un autre signe que le plus (+) malgré la phrase magique : $3 + 3 + 3 + 3$, combien de fois 3 ? qui marche peut-être un peu trop bien".

Remarques :

1) Effectivement, les élèves mélangeaient sans cesse. Par exemple 8×0 donnait inmanquablement 8. De plus, on le voit à une chose : le signe x écrit par les élèves ressemble à une étoile ✱ , on a pu voir partout ce signe, qui indique que l'élève commence par écrire + puis se corrige. C'est étonnant de voir les élèves hésiter autant sur un signe et ne pas retenir une chose qui paraît si simple que l'écriture d'une croix pour le mot fois. De nouveau, la confusion naît du fait qu'ils sont portés par ce à quoi ils pensent (et l'action calcul qu'ils font) c'est-à-dire l'addition.

2) Monica exprime ici un phénomène très courant en pédagogie qui est le désarroi de l'adulte face à l'incompréhension des enfants. On ne sait que faire, et pour peu qu'on ait horreur du vide, on s'angoissera ou on fera faire toutes sortes d'exercices aux élèves. En fait, on est obligé au départ de concéder à la pratique que les élèves vont utiliser des notions pas comprises, et cela ouvre la porte à toutes les fausses interprétations. Gare au bon départ ! Et comment éviter que plus tard ils fassent ces erreurs dont on a tant de peine à les sortir? Une seule solution, perdre son temps à discuter et confronter les diverses interprétations.

3) On remarque combien les élèves sont soucieux de faire correspondre le code et sa signification au calcul qu'il faut faire, et non pas à la situation.

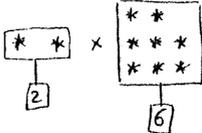
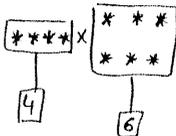
Vincent L. semble sauver les meubles. Mais, son explication n'est peut-être qu'un moyen mnemotechnique. Du moins c'est ainsi que Fabrice le prend.

4.2.

Illustrations.

Juste après avoir fait ces fiches (et quelques autres relatives à la multiplication, Monica a eu la bonne idée de leur demander d'illustrer à leur façon $2 \times 8 = 16$, $4 \times 6 = 24$. Puis après quelques mois d'intervalle, $2 \times 5 = 10$ et $3 \times 4 = 12$. (je ne dispose que de peu de dessins de ce dernier exercice).

(A)

Céline: $2 \times 8 = 16$  $4 \times 6 = 24$ 

EQ

Denys: $2 \times 8 = 16$  $4 \times 6 = 24$ 

SI

Didier: $2 \times 8 = 16$

EQ $2 \times) \text{xxxxxxxx} = \text{xxxxxxxxxxxxxxxx}^{\times 2}$

$4 \times 6 = 24$

$4 \times) \text{xxx xxx} = \begin{array}{l} \text{xxxxxxxxxxx} \\ \text{xxxxx} \\ \text{xxxxxxxxxxx} \end{array}$

Jean-Luc:
?



?

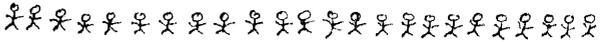
Joanne:

$2 \times 8 = 16$



R

$4 \times 6 = 24$



Katia:

!

$$\begin{array}{r} 8 \times \\ 8 \\ \hline 16 \end{array}$$

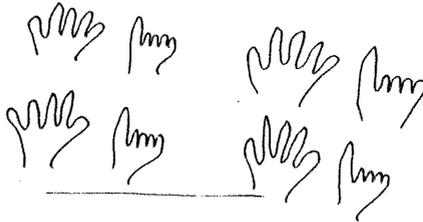


$$\begin{array}{r} 4 \times \\ 6 \\ \hline 29 \end{array}$$



Rem: Katia fait souvent ce type d'erreur $4 \times 6 = 29$ (30). En fait elle compte par tas de 6 mais ne sait pas très bien quand s'arrêter. J'ai élucidé la chose en lui demandant de faire 3×8 , elle disait 8, puis commençait à compter 3 tas de 8, ce qui l'amènerait à 32!

Martin:
SI

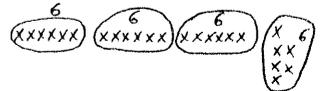
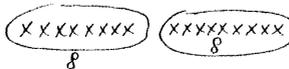


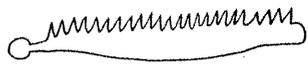
Martine:

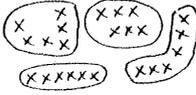
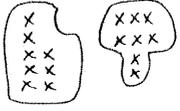
$2 \times 8 = 15$

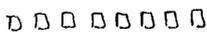
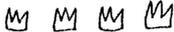
$4 \times 6 = 24$

SI

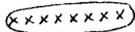
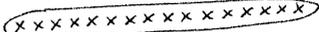
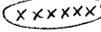
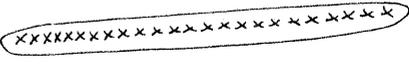


Michel: $2 \times 8 =$  $4 \times 6 =$ 

Mélanie: $2 \times 8 = 16$  | 
SI $4 \times 6 = 24$

Olivier: $2 \times 8 = 16$  $10 \square < 2$
 4×6  8
 $2 \times 8 = 16$ 
 $4 \times 6 =$ 

 10 "peignes" (?)
 $\text{et } 37 \text{ ou } 38 \text{ points}$
 $(24 + 16 = 40 ?)$

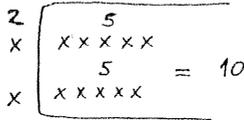
Roby:   
EQ   = 

Sabine:   |  
EQ   |  

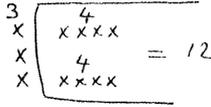
V.D. $2 \times 8 = 16$  $\leftarrow 2 \rightarrow$  $\times 8 = 16$
 $4 \times 6 = 24$  $\leftarrow 4 \rightarrow$ 
 

(B)

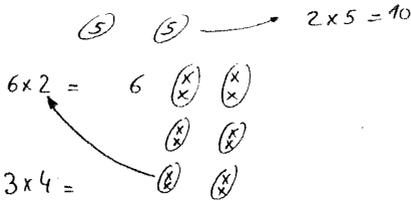
Douys $2 \times 5 = 10$



$3 \times 4 = 12$



Fabrice :



Jean-Luc :

$6 \times 2 \neq 12$ (suppression de l'égalité)

000000 x 00 = 00 0000000000

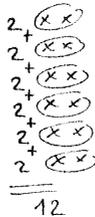
2x $\begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \end{array} = \times \times \times \times \times \times \times \times$

2 ~~(m)~~ ~~(m)~~ x 000000 = $\begin{array}{c} \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \end{array}$ ~~(m)~~ ~~(m)~~

Jeanne :

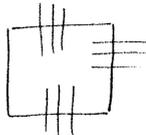
$6 \times 2 = 12$

6×2



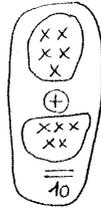
Mélanie :

$3 \times 4 = 12$



Martine:

$2 \times 5 = 10$

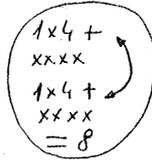


$3 \times 4 = 12$

$x \times x \times x + x \times x \times x + x \times x \times x = 12$

$x \times x \times x + x \times x \times x = 8 \neq 8 + x \times x \times x = 12$

$2 \times 4 = 8$



2×3



Olivier:

$2 \times 5 = 10$

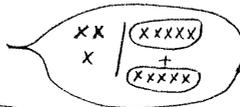


$3 \times 4 = 12$

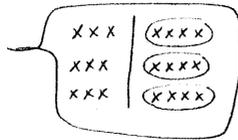


Sabine:

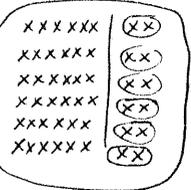
$2 \times 5 = 10$



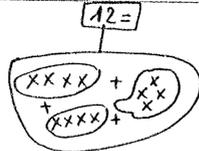
$3 \times 4 = 12$



$6 \times 2 =$



V.L.



$1 \times 5 +$

$x \times x \quad x \times x$
 $x \times x \quad x \times x$
 $1 \times 5 =$
 10

Caractères :

1) Il y a 3 types de dessins :

- soit l'élève représente le résultat avec le dessin (R, résultat)
- soit il dessine l'équation (Eq., équation)
- soit il fait des tas ou des groupes indiquant le moyen de calculer (SI, somme itérée).

2) Les dessins de Jean-Luc et Olivier ne sont pas très compréhensibles, mais il est certain que ni les 16 pétales de Jean-Luc, ni les dix objets (pris 2 fois) d'Olivier sont dus au hasard.

Didier et Vincent D. marquent une différenciation dans les nombres. Vincent D. explique.

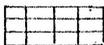
3) On voit dans les dessins du mois de mai que les élèves font plus référence au calcul à faire. Et qu'il y a différenciation des deux nombres.

Ils représentent les deux nombres avec des croix ! Et c'est ça le plus intéressant, car cela les oblige à signifier la différenciation des deux nombres pourqu'on ne les compte pas ensemble.

La réponse de Sabine est particulièrement frappante avec l'itération des deux facteurs $a \times b \rightarrow a \times a$ et $a \times b$. Elle entoure cependant ce qu'il faut compter.

Comment mieux illustrer qu'il n'y a pas réversibilité du diagramme au code et du code au dessin.

diagramme
situation

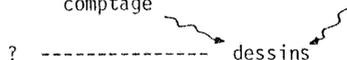


traitement numérique
comptage

?

association d'un code
 $3 \times 4 = 12$

dessins



4.3.

Trois fois rien.

Contexte. Mars 1980 (milieu de l'année, fin de la première séquence de leçons consacrées à la multiplication).

Après avoir fait quelques fiches, les élèves se trompaient beaucoup entre multiplication et addition. Et entre autres, ils avaient tous répondu $8 \times 0 = 8$. Pour essayer de leur faire comprendre, Monica propose un "problème". Il s'agit de trouver le calcul qui va bien avec ce problème.

Problème : Denys va à la boulangerie. Il veut acheter un pain paysan. Il n'y en a pas. Il retourne à la maison. Sa maman lui dit de retourner à la boulangerie acheter un pain milan. La boulangère dit qu'il n'y en a pas non plus. Alors Denys doit retourner une troisième fois à la boulangerie pour acheter des petits pains. Il n'y a rien. Tant pis !

Consigne : Voici un problème, vous devez trouver un calcul qui aille bien avec.

Puis Monica entend des élèves murmurer : "Mais quoi ? que cherche-t-on ? Mais c'est pas un problème, y a pas de chiffres ? etc..." Elle rajoute, alors, entre parenthèses : (combien Denys a-t-il eu de pains ?)

Les élèves font leurs problèmes par petits groupes de deux ou trois. Ecrivent sur une feuille et iront ensuite les présenter.

Commence alors une grande discussion, très vivante (donc dure à protocoler). N'oublions pas que Monica a un objectif très précis ce qui explique ses questions assez orientées. Au cours de la discussion, l'objectif change et elle essaie qu'il ressorte de la discussion au moins quelque chose de clair.

Un premier groupe propose $3 \times 0 = 0$. Et il l'écrit au tableau.
Quelqu'un a-t-il autre chose à proposer ?

Fabrice et Vincent D. proposent $3 - 0 = 0$.

Ils expliquent.

Il va trois fois à la boulangerie puis il demande 3 fois ça fait moins il n'a rien eu (ça fait le 0).

(Note : il demande; c'est une soustraction !)

X.: Ça devrait être 3 moins 3 pour faire 0 !

Didier : 3 moins 0 ça fait 3.

Vincent L.: on doit enlever le 0.

(Au tableau : Fabrice : j'ai inventé le début : $3 - 0$, et puis V.D. il a dit que ça faisait 0 parce qu'il a rien eu. C'est lui qui a mis $= 0$.

$$3 \times 0 = 0$$

V.D. on doit mettre $3 - 3 = 0$ (il l'écrit en-dessous)

$$3 - 0 = 0$$

V.L. c'est pas ça le problème !

$$3 - 3 = 0$$

Olivier et Didier : c'est ce qu'on avait écrit ($3 - 3 = 0$)

mais on l'a tracé.

Vous êtes d'accord ?

Sabine : J'ai quelque chose à leur expliquer : 3 moins 0 c'est comme 1 plus 0 ça fait combien ? 1 plus 0 ça fait 1. (sous-entendu $3 - 0$ fait donc 3).

Céline : 3 et on enlève 0, ça fait pas 0.

V.L. ça n'explique pas l'histoire.

On en a 3. Comme il a été 3 fois à la boulangerie, si on enlève les 3 fois ...

Les 3 fois ils ont rien eu donc 0 milan, 0 paysan 0 petit pain.

Vous êtes d'accord.

Sabine : c'est juste.

Mélanie : je suis avec Céline : 3 moins 0 reste 3.

3 moins 3 reste 0.

C'est juste ce qu'ils ont dit : ils ont été 3 fois, et c'est
3 fois rien !

alors ça va !

Sabine : ça va peut-être pas.

Si vous lisez $3 - 3$ vous retrouvez le problème ? C'est 3 boulangeries moins
3 petits pains ?

- non.

J'interviens : Et 3×0 , vous retrouvez le problème ?

- non.

V.L. : Ah non. Mais c'est pas important, c'est peut-être la bou-
cherie. Mais $3 \times 0 = 0$ va bien avec le problème.

Didier : il ne va pas puisqu'on ne peut pas inventer le problème.

V.D. : Ce qui me gêne, c'est que vers 3×0 , c'est 3 fois le
numéro zéro. Alors je ne comprends pas très bien !

Vous pouvez lui expliquer ?

X. : ça fait 0.

Martin : On fait 3 fois 0. Il va à la boulangerie, il a rien, il
reva à la boulangerie, il a rien, il reva il a encore rien.

Quelqu'un a-t-il noté autre chose ?

Sabine : Moi, j'avais mis $3 + 0$. Il va 3 fois à la boulangerie,
et il prend 0 pain.

(Note : il prend, alors +. Mais on n'effectue pas).

Martin : $3 + 0$, ça reste 3.

Sabine : ouf mais trois fois il a été et pis il a rien gagné.

Alors, il a rien gagné, ou il a trois.

Sabine : ah ... non. (elle veut effacer son $3 + 0$).

V.L. : Vous devez d'abord calculer. Mais on a vu ce que ça fait : 3×0 ça fait $0 + 0 + 0$ mais 3×0 c'est plus court.

(Note: beaucoup sont d'accord. 3×0 c'est mieux parce que c'est plus court.

-que $0+0+0$)

V.D. : c'est peut-être même juste ($0 + 0 + 0 = 0$)

3 fois le nombre 0, ben alors ça fait les 3 fois qu'ils sont été pis ça fait 0.

Joanne : C'est ce que j'avais écrit .

Martine à Joanne : Mais noon, on a tracé !

Dis voir ce que vous avez fait.

Joanne écrit au tableau $0 + 0 + 0 = 0$.

Martin : ouais, mais ça ($3 \times 0 = 0$) c'est plus court.

qui veut expliquer ?

Fabrice : $0 + 0$, on pourrait faire qu'une fois $0 + 0 = 0$ parce que c'est bête.

V.L. : C'est le même que nous ! ($3 \times 0 = 0$). Y a une deux trois fois 0 et pis là y a 3×0 , c'est simplement ...

Fabrice : là (3×0) y a des fois.

là ($0 + 0 + 0$) ils ont mis 0 en personne.

qu'est-ce que ça veut dire ?

Fabrice : 3 fois le ... "à zéro".

J'interviens : Moi j'aime bien quand tu dis : c'est 3 fois le zéro en personne.

Fabrice : ? !

Céline : le plus court c'est 3×0 .

Bon. Lesquels de tous ces calculs vont avec le problème

$$3 \times 0 = 0$$

$$3 - 0 = 0$$

$$3 + 0 = 0$$

$$3 - 3 = 0$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

Denys : $3 \times 0 = 0$

y en a pas d'autre ?

X. : $0 + 0 + 0 = 0$

pis c'est tout ?

Jean-Luc : y a 3 moins 3, ça fait aussi 0.

ça va avec le problème ?

Jean-Luc : oui, puisqu'il a ramené 0 petit pain. Il en a eu 0
alors 3 moins 3, ça fait 0.

Tu peux m'expliquer ? Le premier 3, c'est quoi ?

Jean-Luc : je ne sais pas moi ... 3 moins 3

Essayez de dire ce que veut dire ce 3.

V.D. : Il a été 3 fois à la boulangerie, et 3 fois il a rien
trouvé ! Moi je crois que c'est 3×0 et $3 - 3$ qui sont justes.

V.L. : Non. Ça veut dire quoi le premier 3 ?

V.D. : 3 fois à la boulangerie, et pendant 3 fois il a rien eu.

V.L. : d'accord pour le premier, mais le deuxième ? Parce que
 $3 - 3$ c'est il a été 3 fois à la boulangerie et il a retiré
3 fois du pain.

Il a retiré du pain ?

V.L. : Mais non ! Il en a pas eu !

Vous dites 3 moins 3, il en a retiré ?

V.L. : Il a été 3 fois à la boulangerie, puis il a reçu 0 !

Alors c'est 3 fois 0 qui est juste.

V.D. : Mais 3 fois 0, c'est 3 fois le nombre 0 ?

3 fois, il ne reçoit rien. Le zéro c'est quoi ?

V.D. : 3 fois le nombre zéro, alors y a rien ?

Moi je comprends comme ça $0 + 0 + 0$. Y a un, deux, trois zéros.

Alors 3 fois le nombre zéro, ça fait zéro.

Ça devrait faire autre chose que 0 ?

V.D.: Il devrait faire $0 + 0 + 0$, 3 plus trois zéros pas 3 fois zéro.

X.: Parce qu'on peut expliquer avec le premier (3×0) il a été 0 fois à la boulangerie, alors c'est sûr qu'il a retiré 0 pain.

Katia : $0 + 0 + 0 = 0$ ça va pas.

Jean-Luc : mais oui, la première fois qu'il a été, il a eu 0 pain....

Katia : il n'a pas été puisque c'est marqué 0 !

Jean-Luc : 0 pain !

Katia : répète

Jean-Luc : mais, 0, c'est le nombre de pains.

V.L.: C'est 3×0 qui est juste, il a été 3 fois à la boulangerie, il a pas eu de pain.

dans $0 + 0 + 0$, on parle de quoi ? De pain ou de boulangerie ?

Denys : on parle de pain.

Céline : 0 pain

0 paysan, 0 milan et pis il a pas eu de petits pains.

On peut pas mettre 3 puisqu'il a eu 0 pain ...

ah non ! c'est la boulangerie !

V.L.: si il va 0 fois à la boulangerie, c'est qu'il a 0 pain.

Jean-Luc : c'est ce qui est à la fin de $3 - 3$, il a eu 0 pain !

Il a été 3 fois à la boulangerie, il en a pas pris, il a été 3 fois.

Katia : Je ne comprends plus rien. Y a zéro, il va 3 fois à la boulangerie et pas 0 fois. ($0 + 0 + 0 = 0$ ne va pas parce que ce ne sont que des 0 !)

Si il va 0 fois à la boulangerie, ben il ne reçoit rien.

Evidemment !

V.D.: C'est ça que j'essaie d'expliquer.

(Note : c'est vrai).

(Monica dit quelque chose ?)

V.D.: avec $3 - 3$, y a pas ce problème.

Bon. Qui pense que c'est 3×0 qui va le mieux ?

Tous.

que c'est $0 + 0 + 0 = 0$

Personne.

que c'est les deux ?

V.L.: ("C'est la même chose")

qui préfère $3 - 3$?

Martine, V.D.

V.D.: moi je suis pour les 2 ($3 - 3$ et 3×0)

Moi je dis que 3×0 va bien.

- wouaais, wouaais.

$0 + 0 + 0 = 0$ va aussi bien.

-

Katia ! Ce qu'on compte c'est les pains.

Katia va au tableau et pour se rappeler montre du doigt le

calcul $0 + 0 + 0 = 0$

0 il en a pas eu en premier, il en a pas eu au 2e (+ 0) il en a pas eu au 3e (+ 0) alors ça fait qu'il n'a rien eu (= 0)

Impressions de Monica :

Il est intéressant de voir quelle impression Monica en a retiré. N'oublions pas qu'elle était dans le feu de l'action, et que c'est très difficile de saisir toutes les subtilités de ce que disent les élèves quand il faut en plus : penser

à son intervention, ne pas laisser tout le monde parler en même temps, veiller à ce que tous suivent, ou encore que personne ne perturbe le groupe.

Tu as vu que Katia et V.D. avaient la même idée sur $0 + 0 + 0 = 0$?

| Non.

Tu voulais dire quoi avec : "Vous - dites 3 moins 3, il en a retiré ?"

| Il a retiré aucun pain.

| (La question était donc : "il en a vraiment retiré"?)

Retirer, c'est plus ou moins.

| Quand ils expliquaient $3 - 3$, ils expliquaient 3 fois 0 !

| C'est pour ça que j'étais pas d'accord (et qu'elle essayait de leur dire).

C'est $3 + 0$ ou $3 - 0$?

| $3 + 0$, ça n'a rien à voir, on ne sait pas de quoi on parle.

Et 3×0 ? on sait de quoi on parle ?

| Oui.

et

$0 + 0 + 0 = 0$, pourquoi t'es pas d'accord avec Katia ?

| Parce qu'on ne parle que de pain, c'est parce qu'il y a 3 zéros qu'on voit qu'il a été 3 fois. Si on écrit 0, c'est parce que c'est en pains (que l'on compte).

Mais certains ont pu dire 3×0 , parce qu'il va 3 fois à la boulangerie ou encore parce que 3 fois, il n'a pas de pain. C'est que verbal !

| Pis alors ? Je ne comprends pas :

Ils ne font peut-être pas une multiplication ! Ils mettent \times , parce que c'est l'abréviation du fois qu'il y a dans le texte.

| ah ! c'est pas ce que je voulais avec ce problème.

| ...

Alors j'étais paumée. Ils disaient des trucs, je ne savais plus ce qui pouvait être juste.

Tu savais puisque tu insistais pour qu'ils acceptent 3×0 et $0 + 0 + 0$.

Moins je savais, plus j'appuyais là-dessus.

Tu crois que le problème se situe où ?

Ça parle de pain, du nombre de pains à la boulangerie, pis c'est là le problème.

(Note : J'essayais de voir si Monica me parlerait des opérations, de la signification des opérations. Mais elle n'a pas encore assez de recul. Elle en reste à ce qu'elle a voulu dire aux élèves : c'est un problème d'unités.

Car c'est un peu ennuyeux que les élèves se fixent ainsi sur 3×0 et en viennent à refuser $0 + 0 + 0 = 0$).

Commentaires : Relisez attentivement le protocole.

Il y a 3 fils difficiles à nouer (pour les élèves).

1⁰ L'expression du calcul, en "remontant" à partir du résultat dont ils sont sûrs (0).

2⁰ La représentation très concrète du nombre que se font les élèves et le problème des unités. " 3×0 , c'est rien", dit V.D. Et Katia refuse pour la même raison $0 + 0 + 0$.

3⁰ Le problème du codage de l'histoire. Il va 3 fois à la boulangerie et il a 3 fois 0 pain. Il reçoit 3 fois 0 pain. Il retire 3 fois 0 pain. Il demande 3 fois du pain et il a rien . Etc...

Le protocole c'est un peu les noeuds que font les élèves avec tout ça.

5. Conclusion du chapitre VI

La question de l'apprentissage numérique est vaste, intéressante, les productions scolaires sont riches et variées. Il y aurait donc encore beaucoup à en dire, de multiples faits à reporter. Je renvoie cela à des études plus spécifiques. Je tiens encore à souligner le parallélisme qu'il y a dans les analyses proposées ici de l'enseignement de la logique et de celui du nombre. En particulier, le lecteur peut reprendre entièrement le chapitre III, qui a été redit ici, au chapitre VI, dans un autre langage, il est vrai. Mais dans les deux cas j'ai procédé de même, partant de la théorie mathématique de référence, déterminant l'interprétation à donner aux jeux et exercices. Dans les deux cas, la même contradiction a été identifiée, entre des objets d'enseignement qui sont par nature de formulations, imposées aux élèves et même plus, à leur appropriation, et un travail où l'activité symbolique, formatrice des élèves n'est pas prise en compte, pas reconnue. Dans les deux cas on espère révéler une connaissance aux enfants, sous le travers de formes imposées d'avance et extérieurement. Mes propositions didactiques seront donc les mêmes ici qu'aux chapitres III, IV, V. Je ne les répète pas, le lecteur les trouve très explicites dans tous les exemples et protocoles reproduits ici.

CONCLUSION

Pour conclure, commençons par une citation. En fait, la suite de la citation du cours d'Yves Chevallard à la première école d'été de didactique des mathématiques (Juillet 1980), que j'avais donné au chapitre II (page 87).

Citation :

La transposition didactique :

est-elle bonne ? est-elle mauvaise ?

1. L'exercice du principe de vigilance à la transposition didactique est l'une des conditions qui commandent la possibilité d'une analyse scientifique du système didactique.
2. Mais en même temps ce principe porte en lui les limites de la recevabilité, par le système didactique et ses agents (les enseignants, surtout), des analyses qu'il permet de produire.
3. En effet, son efficace particulière est de mettre en lumière la différence là où elle est, par l'enseignant, niée ; de questionner l'identité spontanément supposée, pour faire apparaître l'inadéquation qu'elle masque de son évidence.
4. L'enseignant ne perçoit pas spontanément la transposition : ou du moins il ne lui accorde pas d'attentions spéciales. "L'enseignant dans sa classe, le rédacteur de programmes, le faiseur de manuels, chacun dans leur registre, sont les instituteurs d'une norme didactique qui tend à constituer un objet d'enseignement distinct de l'objet à enseigner qui le motive. Par là, ils exercent leur normativité, sans toujours assumer la responsabilité - épistémologique - de cette puissance créatrice de normes. S'ils attendent du spécialiste - quelquefois - approbation ou déni, ils situent cette appréciation comme extérieure à leur projet

et étrangère à sa logique interne. Elle vient après-coup, ou elle l'accompagne, mais elle ne s'y intègre que rarement, par impuissance de la prendre en compte en ses implications épistémologiques. Elle a valeur esthétique ou morale, elle intervient dans la réception sociale du projet. Elle n'en informe pas la structure ni les contenus, sinon par une manière de mimétisme et dans le souci d'accréditation auprès des puissances d'investiture institutionnelle". (Y. Chevallard, Problèmes de surdétermination en didactique : la notion de moyenne en statistique, pp. 4-5).

5. Qu'il reconnaisse la transposition didactique, création ou substitution d'objets, l'enseignant aura le sentiment pesant d'être pris sur le fait, la main dans le sac. L'analyse de la transposition didactique est reçue comme le dévoilement de ce qui est caché, et de ce qui est demeuré caché parce que coupable. Coupable, en l'espèce, au regard de la "Vérité mathématique", fautif à l'oeil du Maître (le mathématicien).

6. De là que s'observe une véritable résistance à l'analyse didactique, analogue à la résistance à la psychanalyse dont parle Freud sorte de "vexation psychologique" (l'expression est de Freud), qui prend souvent la forme d'un refus ou d'une reconnaissance culpabilisée.

7. Il est vrai que le didacticien peut mettre, à débusquer et dévoiler, une ardeur sadique ; porter avec suspicion un regard policier ; scandaliser et tirer quelque plaisir de le faire. Il est une manière d'user de l'analyse didactique, qui est stérile et négative : on y joue à faire peur, et à se faire peur. C'est une des mille façons, pour le didacticien, de ne pas accomplir la rupture nécessaire. De s'épargner le travail d'arrachement qui devrait le conduire "au delà du bien et du mal".

8. Cet usage négatif de l'analyse didactique se légitimerait de se dire critique : son usager s'installe alors dans une position de facile contestation, ennobli des lumières qui sont son apanage, mais dont il ne fait rien, sinon aveugler sa "victime" (l'enseignant).

9. L'usage purement "critique" de l'analyse de la transposition didactique est une première réaction à la reconnaissance de l'existence de la transposition didactique.

10. Selon cette première réaction, la transposition didactique est "mauvaise": péché irrémissible de l'acte d'enseignement ou, au mieux, mal nécessaire.

11. Dans cette perspective, la valeur d'une transposition didactique se mesurerait à l'aune de la construction historique (dans la "cité mathématicienne") du savoir dont l'enseignement est visé. La construction ou la présentation didactique des savoirs serait une version plus ou moins dégradée de sa genèse historique et de son statut actuel (sans que l'on entende ici la nécessité d'un isomorphisme des genèses historiques et didactique : c'est là une autre thèse, plus précise du moins). Face à l'épistémologie "naturelle" l'enseignement proposerait de facto une épistémologie "artificielle", inférieure.

12. L'explicitation qui précède peut permettre de presser le passage d'une réaction pessimiste à l'existence de la transposition didactique (conçue comme mal nécessaire) à un second type de réaction, optimiste et dynamique : la recherche d'une "bonne" transposition didactique.

13. Cette conception impose d'abord à l'enseignement une réserve déontologique, en vertu de son optimisme même : puisqu'il peut exister, pour tel objet de savoir, une bonne transposition didactique, on doit en principe s'abstenir d'enseigner des sujets, même "intéressants" (du point de vue de l'enseignant), pour

lesquels on ne disposerait pas (pas encore, du moins) d'une transposition didactique satisfaisante.

14. Cette attitude de modestie est bien exprimée dans la fine notation suivante :

"The good schoolmaster is known by the number of valuable subjects that he declines to teach". (Sir Richard Livingstone, The future of education, Cambridge, 1941).

(«Le bon maître d'école est reconnaissable au nombre de sujets intéressants qu'il décline d'enseigner».)

15. En sens inverse et corrélativement, de la même conception découle l'exigence de rechercher de bonnes transpositions des savoirs correspondant aux demandes didactiques de la société.

16. Une direction de recherche, qui à mon avis a surtout la vertu d'être un "modèle mental" contre lequel se définir, consisterait à démarquer avantageusement (grâce à quelques économies rétrospectives) la genèse socio-historique du savoir: tenant compte des acquis actuels, il serait possible de constituer une épistémologie artificielle comme résumé amélioré (laissant de côté les impasses, les échecs, mais redéployant toute la richesse de développements féconds et oubliés) de la construction naturelle du savoir en jeu.

17. Une autre direction de recherche consiste à prendre acte de la spécificité du projet de construction didactique des savoirs, de son hétérogénéité a priori avec les pratiques "savantes" des savoirs, de son irréductibilité immédiate aux genèses socio-historiques correspondantes.

18. Dans cette hypothèse, qui fonde la nécessité et la légitimité de la didactique des mathématiques comme étude scientifique du système didactique en sa spécificité, l'étude de la transposition didactique suppose l'analyse des conditions et des cadres dans lesquelles elle s'opère. Existencialement, notre hypothèse fonde un optimisme tempéré

Fin de la citation.

J'estime que Chevallard dit assez bien dans son texte tout ce qui me restait à préciser à propos de la transposition didactique, sauf sur un point, que j'espère avoir mis en évidence dans cette recherche : dans le travail de transposition, les élèves ont une part active. Les nombreuses descriptions fournies montrant comment le savoir est constamment négocié dans le cadre des tâches proposées, avec deux pôles opposés : l'un où l'on voit se réduire le savoir à la nécessité de la tâche, l'autre où l'on voit la tâche transformée (Subvertie ?) par les connaissances qu'investit l'élève à son propos. Il resterait à montrer la part du maître dans cette négociation, et comment il se situe entre le curriculum officiel et les conduites des élèves (on en a un aperçu çà et là, par exemple pg.428 et sqs.)

Je propose pour conclure de dire quelques faits qui m'ont le plus frappé dans cette "expérience" de la classe qui m'a pris 2 ans.

Tout d'abord quelques remarques pour la grande histoire. Il faut se représenter que bien des choses se sont passées au cours de ces deux ans, et que c'est "sur le terrain" qu'elles se sont pleinement révélées. Ainsi par exemple, l'importance primordiale à centrer l'analyse sur les décalages entre le projet didactique et l'enseignement pratiqué. De là, la formulation du concept de transposition. Puis, plus tard, la rencontre avec Yves Chevallard, qui étudiait le même phénomène, avec le même vocable ...

J'étais parti dans l'idée que je désirais avant tout voir et savoir quelles mathématiques les élèves faisaient, ou, plus justement, étaient amenés à faire dans le cadre scolaire. La méthode prise pour aborder ceci (et c'est là que se faisait la "rupture" épistémologique) était de m'intéresser aux productions des élèves. Je stipulais qu'était mathématique le travail des élèves, dont la partie la plus visible (ainsi que l'objet de transaction en classe) sont leurs productions.

Oui mais quelles mathématiques ? Une mathématique des élèves, forcément, et qui pourra paraître vague, molle, tant elle ne se laisse pas formaliser, tant elle peut être contradictoire. Je pense que si on ne demande pas aux élèves de se déterminer sur les objets qu'ils sont en train d'étudier (et ce à tous les niveaux !) c'est de peur de voir apparaître une mathématique approximative, dévergondée, insaisissable. Et ce de par le simple fait que l'on sera obligé de tenir compte de difficultés, de conceptions peu claires et fausses, que justement la mathématisation nous avait permis d'éliminer. C'est du moins une chose que j'ai beaucoup ressentie chez les mathématiciens, surtout ceux qui sont investis de responsabilités pédagogiques. que cette attitude de défiance vis-à-vis de quelque chose qu'ils estiment fausse. Mais il est clair que sans cette prise en compte de l'objet sur lequel on travaille. comment parler de connaissance ?

Donc le premier souci était celui de voir les mathématiques pratiquées par les élèves, et surtout de se demander si elle est visible au travers de leurs productions. Ceci est important car ici je me démarque de la psychologie, ne m'intéressant pas tant à la pensée (logico-mathématique) ni à ses mécanismes, qu'au produit de celle-ci, sur des objets fournis socialement dans un processus de transmission. On est en pédagogie.

Dans la masse des productions des élèves qui nous permettent de voir quelque chose, il était clair qu'il n'y avait pas à différencier les productions

selon qu'elles étaient justes ou fausses, mais qu'il devait y avoir un lien entre toutes celles-ci. Il s'agissait donc, dans un premier temps, de trouver ce lien caractéristique et, dans un second temps seulement, chercher à le différencier. C'est alors considérer l'ensemble de réponses possibles, concevables. Et voilà un premier moyen d'analyse dans la confrontation de ce qui s'est produit par rapport à ce qu'on aurait pu (raisonnablement) attendre. Etc.

Je vais maintenant évoquer les points qui m'ont le plus frappé.

Le premier de ceux-ci, c'est que la démarche était possible sur le terrain : "cela marchait !" Dans mes entretiens (où je les relançais sans cesse sur leur réponse et sa signification, où je ne sanctionnais jamais, ne corrigais pas, donnais un minimum d'explications, acceptais les explications erronées des élèves les faisant travailler à partir de ça etc...). Les élèves ne faisaient pas moins de mathématiques qu'en classe dans les jeux de groupe, ou sur leurs fiches. D'autre part, les résultats obtenus par cette méthode étaient directement utilisables pour l'enseignement, c'est-à-dire que s'il y avait bien rupture avec une certaine idée sur les mathématiques et les objets d'enseignement (à enseigner, de savoir) - rupture de ma part s'entend - cela ne dénaturait pas pour autant les productions des élèves. (Cette rupture avait quand même une répercussion sur le type de contrat didactique qui se révélait dans ma façon de questionner les élèves, à preuve, mon identification par les élèves à un personnage très démarqué par rapport à la maîtresse, tenant un rôle tout différent dans la dynamique de la classe). Sans doute ce phénomène était facilité par le fait que je m'étais centré sur l'étude de ce qu'ils travaillent en classe de mathématique, et que je coopérais, de ce point de vue, avec Monica. (J'acceptais l'univers scolaire propre au cours de mathématique et parlais d'ensembles, de groupements, d'intersections, etc... et proposais des exercices bien perçus par les élèves comme "des mathématiques".)

Le second point qui m'a beaucoup frappé, c'est combien les élèves "n'en faisaient qu'à leur tête". Cela est très net dans les productions. Et finalement, les moments d'incompréhension mutuelle entre maîtresse et élève (je veux dire les moments de vide qui sont bien identifiés par les deux protagonistes comme des moments d'incompréhension) étaient rares. Il y avait un réglage spontané assez net des comportements de l'un sur les comportements de l'autre (ça va dans les 2 sens). Sans pour autant qu'ils perdent chacun leur point de vue propre. Ceci montre au moins une chose, c'est qu'on ne pourra donc pas éviter que les élèves produisent ces "monstres" qui font si horreur aux maîtres (comme l'écriture : $6 + 7 = 8$ ou encore $3 + 4 = 7 - 2 = 5$ etc.) On peut avoir confiance : ils apparaîtront une fois ou l'autre, en général de manière décalée selon les élèves (ce qui exaspère encore plus). Ici donc , on demande un changement de point de vue sur les erreurs, en commençant par celles qui sont classiques. (18 = 11 - 11 par exemple). Le seul moyen d'y faire face, c'est d'en discuter avec les élèves, de faire que cela soit par souci d'appropriation qu'ils en arrivent à faire attention aux règles à respecter (aux places des signes par exemple). Ce n'est pas démissionner du rôle d'enseignant que de renvoyer l'élève à la signification de sa propre réponse (qui est véritablement une réponse !) plutôt qu'à la devinette de la réponse qui fera acquiescer le maître.

Le troisième point qui m'a frappé, c'est combien les élèves de 7-8 ans aiment agir et agir, sans être capables de revenir (par la pensée) sur leurs pas. Je dois solennellement déclarer ceci : "c'est là que j'ai fait l'expérience de la "mobilité rétroactive" chez les élèves.

Deux conséquences : d'une part combien les élèves "en faisaient trop", ne s'arrêtaient jamais et changeaient de point de vue très facilement et rapidement. Ce qui ouvre la porte à tous les effets type "jeux de mots" (j'en ai donné quelques exemples).

D'autre part, combien les élèves travaillent. Par exemple le calcul, le comptage. Ils aiment ça, tous en faisaient pour eux, si ce n'est qu'il en proposaient aux camarades. Et ils s'exerçaient, essayant pas mal de "trucs nouveaux", de "combines de calculs". En contrepartie, cette incapacité - qui apparaît quelquefois comme mauvaise volonté - à se reposer un moment sur le résultat et examiner le tout (suspendre l'action).

La pédagogie s'est assez bien adaptée à ce fait qu'elle connaît bien depuis très longtemps. Ainsi j'ai montré comment on essayait de canaliser les élèves sur le matériel structuré, schématisé à l'extrême, pour empêcher les élèves de diverger. D'autre part, il apparaît que le fameux "drill" au calcul contre lequel les méthodes modernes s'érigent (à juste titre) n'est peut-être pas tant voulu par une conception des mathématiques (ça c'est une rationalisation) qu'une solution de facilité. Voilà une tâche sur laquelle maître et élèves s'accordent... et quand en plus on a une classe nombreuse, ... avec encore différents niveaux... (La transposition didactique pointe son nez à nouveau).

Et cela nous amène à l'avant-dernier point que je veux évoquer : c'est celui de "l'ailleurs". En effet, on est déjà frappé par le fait que les élèves - surtout les meilleurs - savaient beaucoup de choses, avant même qu'on en ait parlé en classe. Autre fait, ils paraissaient familiarisés avec les problèmes d'arithmétique (dès la première) alors qu'ils n'en avaient jamais fait auparavant en classe. Donc, il existe quelque part un lieu, hors école, où l'élève fait des mathématiques. C'est l'ampleur de cet ailleurs qui m'a surpris. D'ailleurs, la frontière n'est pas claire, et dépend du caractère de l'élève, mais si on étudie attentivement les productions des élèves, on voit que les élèves font des "trucs", des "combines" presque clandestinement, sans être vus.

J'ai même eu affaire à une élève (Joanne) championne du camouflage. Quand elle essayait quelque chose, en ma présence, elle s'arrangeait toujours pour me distraire et, chaque fois, en examinant ses réponses, chez moi, je m'apercevais que je m'étais laissé distraire.

Enfin, le dernier fait qui m'a frappé aura été de voir combien la connaissance des élèves et celle de Monica sont solidaires (même si Monica ne maîtrisait pas tous les jeux de la méthodologie, ou des exercices des fiches). (Ex.: de son analyse à chaud de la difficulté des élèves, au chapitre VI, par.4). Il y a une cohérence certaine entre le point de vue des élèves et celui de Monica. Ce qui faisait que bien des fois la conception de Monica était plus proche de celle des élèves que la mienne, même si j'en avait parlé avec eux directement. Monica, comme tous les maîtres est amenée dans la pratique à s'adapter, à aménager son propre point de vue sur la connaissance, à changer d'éclairage par rapport à celui mis dans la préparation de ses leçons, et ceci, à chaud. Et sans que cela soit toujours conscient.

La transposition est donc un processus qui se passe dans un temps donné, continu (et non pas ponctuel ni déterminable totalement), Comme dit Chevallard : "la transposition didactique se définit par le croisement d'un texte et d'une durée".

Pour finir , je dois dire combien je me suis amusé à faire cette recherche en classe, combien j'en ai éprouvé un bonheur joyeux. Malheureusement, la rédaction de ce trop long texte (plus de 400 pages, bigre !) bousculée par les délais et par mon sur-moi de scientifique aura été moins drôle. Et je crains que le produit que je livre (c'est le cas de dire) aujourd'hui ne soit pas facilement lisible ni assez suggestif.

F. Conne
Communauté 35
Bussigny



le 14 mai 1981.

BIBLIOGRAPHIE

- BOUVIER A., GEORGE M., Dictionnaire des mathématiques. Sous la direction de F. Le Lionnais. P.U.F., Paris, 1975.
- BRESSON F., Réflexion sur les systèmes de représentation. Sémiologie graphique, 1975, 73-74, pp 7-13.
- BROUSSEAU G., Processus de mathématisation. Bulletin de l'A.P.M.E.P., 1972, No. spécial, pp 428-457.
- BROUSSEAU G., Les Obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique. Proceeding of the 28th C.I.A.E.M. meeting Louvain, 1976, pp 154-166.
Article repris dans : Recherches en didactique des mathématiques, 1983, No. 4-2, pp 165-198.
- BROUSSEAU G., L'Observation des activités didactiques. Revue Française de Pédagogie, 1978, No. 45, pp 130-140.
- BROUSSEAU G., Etude locale des processus d'acquisition en situation scolaire. Cahiers de l'IREM de Bordeaux, 1978, No.18, pp 7-21.
- BROUSSEAU G., Quelques phénomènes qui ont causé des échecs de la réforme des mathématiques modernes. Actes du Congrès international des mathématiciens Varsovie, 1983.
- BRUN J., Education mathématique et développement intellectuel. Thèse de 3e cycle. Université de Lyon II, 1975.
- BRUN J., La représentation symbolique d'opérations additives en situation d'interaction et de communication. Actes du Ve colloque PME. Grenoble 1981.
- BRUN J., A propos de la didactique des mathématiques. Math Ecole, 1982, No. 100-101.

- BRUN J., GUIGNARD N., Mathématique et raisonnement. Service de la recherche pédagogique, Genève, 1976, 10.
- BRUN J., CONNE F., Approches en psychopédagogie des mathématiques. Pratiques et théorie, cahiers de la section des Sciences de l'éducation, Genève, 1979, 12.
- BRUN J., CONNE F., Brèves remarques à propos de schématisation ensembliste lors de l'introduction de la soustraction. Math Ecole, 1980, No. 91, pp 15-18.
- CALPINI J.CI., DROZ R., Intersection de classes : conduites spontanées. Revue européenne des Sciences sociales, 1976, No spécial, pp 29-45.
- CARROLL L., Logique sans peine. Traduction et présentation de J. Gattegno et E. Coumet. Hermann, Paris, 1966.
- CHARLOT B., La mystification pédagogique. Payot-Traces, Paris, 1977.
- CHEVALLARD Y., La réforme des années soixante. Recherches, 1980, No. 41, pp 71-99.
- CHEVALLARD Y., La Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985.
- CHEVALLARD Y., JOHNSON M.A., Un exemple d'analyse de la transposition didactique. Recherches en didactique des mathématiques, 1982, No. 3, pp 159-239.
- CHEVALLARD Y., CONNE F., Jalons à propos d'algèbre. Interactions didactiques, 1984, No. 3. Université de Genève.
- CONNE F., Une Epreuve de Calcul en première primaire. Analyses détaillées de productions d'élèves. Interactions didactiques, 1985, No. 6. Université de Genève.

- CONNÉ F., Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. Recherches en didactique des mathématiques, 1984, No. 5-3, pp 269-332.
- CONNÉ F., Analyse de manuels. Papier interne, Université de Genève, 1976.
- CONNÉ F., Un Canard dans les mares.
à paraître dans Recherche en didactique des mathématiques.
- DUGAC P., Richard Dedekind et les fondements des mathématiques. Vrin, Paris, 1976.
- DUGAC P., Développement des fondements de l'analyse du XIXe siècle. Cours pour les professeurs de mathématique organisé par la commission romande de mathématiques. Zinal 4-7 octobre 1978.
- EL BOUAZZAOUI H., Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Thèse de 3e cycle. Université de Bordeaux I, 1982.
- FREUDENTHAL H., Mathematics as an Educational Task. D. Reidel, Dordrecht, 1973.
- FREUDENTHAL H., Didactical Phenomenology of Mathematical structures, D. Reidel, Dordrecht, 1983.
- GARDNER M., L'étonnante histoire des machines logiques. Dunod, Paris, 1964.
- GOMBROVICZ W., Ferdydurke, 10-18, Paris, 1973.
- KAMII C., Addition is not just a skill : some principles of teaching derived from Piaget's theory. texte photocopié.
- KAMII C., Young children reinvent arithmetic. Teachers College Press, Columbia University, N.Y. and London, 1985.

- KUNTZ MANN J., Evolution et étude critique de l'enseignement des mathématiques. Cedic, Paris, 1976.
- LEONI M.L., Les activités de classement. Service de la Recherche Pédagogique, Genève, 1976, No. 12.
- LERESCHE G., Introduction mathématique à la logique, SPES DUNOD, Lausanne, 1976.
- MAUDET C., Les situations et les processus de l'apprentissage d'une fonction logique, Thèse de 3^e cycle, Université de Bordeaux I, 1982.
- MOSCOVICI S., Le jour de fête du cordonnier. Pourquoi la mathématique 10-18, Paris, 1974, pp 279-313.
- OVAERT J.L., Quelle philosophie et quelle vision des mathématiques transmet-on aux futurs enseignants ? Bulletin de l'A.P.M.E.P., 1979, No. 317, pp. 96-106.
- PERES J., Utilisation d'une théorie didactique en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire. Création d'un code de désignation d'objet à l'école maternelle. Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux I, 1984.
- PICARD N., Agir pour abstraire. O.C.D.L., Paris, 1976.
- POMES J.CI., MONTPIED R., Nombres en forme et forme des nombres. Contact. Bulletin de pédagogie Freinet, No. 63.
- PIAGET J., Psychologie et pédagogie. Denoël, Paris, 1969.
- PIAGET J., SZEMINSKA A., La Genèse du nombre chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1941.
- PIAJET J., INHELDER B., L'image mentale chez l'enfant. P.U.F., Paris, 1966.

- PIAGET J., GRECO P., GRIZE J.B., PAPPERT S., Problèmes de la construction du nombre, P.J.F., Paris, 1966.
- SAADA E.H., BRUN J., L'élaboration des formulations dans un jeu en arithmétique. Recherches en didactique des mathématiques, 1984, No. 5-2, pp 141-185.
- SCHUBAUER-LEONI M.L., PERRET CLERMONT A.N., Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. Recherches en didactique des mathématiques, 1980, No 1-3, pp 229-350.
- VERGNAUD G., Activité et connaissance opératoire. Bulletin de l'A.P.M.E.P. 1977 No. 307, pp 52-65.
- VERGNAUD G., DURAND C., Structures additives et complexité psychogénétique. La Revue Française de Pédagogie, 1976, No. 36, pp 28-43.
- VERGNAUD G., L'enfant la mathématique et la réalité. P. Lang, Berne, 1981.
- VERGNAUD G., A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. dans : CARPENTER T.P., MOSER J.M., ROMBERG T.A., Eds, Addition and Subtraction : a developmental perspective. Hillsdale Lawrence Erlbaum Ars, 1981, pp 39-59.
- VERGNAUD G., Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. Actes du Ve colloque P.M.E. Grenoble, 1981, pp 7-17.

MANUELS SCOLAIRES

GROSGURIN L., Enseignement de l'arithmétique. Méthodologie. Payot,
Lausanne, 1972.

LECOULTRE G., CHAPPUIS A., ROSSET R., Arithmétique deuxième année.
Département de l'Instruction Publique, Genève, 1955.

BEGUIN M., JEANGUENIN D., FREI J., Arithmétique 4e année. Département
de l'Instruction Publique, Genève, 1962.

Manuels de mathématiques C I R C E I édités par l'Office romand des
services cantonaux des éditions et du matériel scolaire.

1^o Mathématiques 1ère année : Méthodologie et commentaires
Fiches d'exercices.

1ère édition 1972

2ème édition corrigée 1979

2^o Mathématiques 2e année : Méthodologie et commentaires
Fiches d'exercices.

1ère édition 1973

2ème édition corrigée 1980.

4^{ème} de couverture .

En classe comme ailleurs, les mathématiques que chacun pratique ne parlent pas d'elles-mêmes. L'échange scolaire exige donc des formes qui permettent non seulement au maître de désigner et à l'élève d'identifier ce qu'il faut apprendre, mais encore au premier de vérifier et au second de faire voir ce qui a été appris.

Ces formes indiquent qu'on fait des mathématiques; elles ne garantissent pas pour autant l'authenticité du travail. Les représentations mathématiques ne sont pour les élèves que des supports à leurs activités d'écoliers et les termes restent liés au contexte. Identifier les mathématiques pratiquées revient à confronter ces illustrations aux activités effectives. En décrivant la chaîne qui va de la constitution d'un contenu (ensembles, nombre) jusqu'à la leçon, cette thèse montre comment le concept de transposition didactique permet la restitution de la réalité de la classe.

