



HAL
open science

**Modèles mathématiques et calcul scientifique.
Modélisation et étude numérique d'un problème
géologique: La formation des skarns**

Bernard Valour

► **To cite this version:**

Bernard Valour. Modèles mathématiques et calcul scientifique. Modélisation et étude numérique d'un problème géologique: La formation des skarns. Géochimie. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 1983. Français. NNT: . tel-01066649

HAL Id: tel-01066649

<https://theses.hal.science/tel-01066649>

Submitted on 22 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE SAINT-ETIENNE

en vue de l'obtention

du

DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE

DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

"MODELES MATHEMATIQUES ET CALCUL SCIENTIFIQUE"

par

Bernard VALOUR

Modélisation et étude numérique d'un problème géologique :

la formation des skarns

soutenue le 8 Novembre 1983 devant le jury :

Président : Claude CARASSO

Examineurs : Francis CONRAD

Bernard GUY

René OUZILOU

Michel PERRIN

Denis SERRE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE SAINT-ETIENNE

en vue de l'obtention

du

DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE

DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

"MODELES MATHEMATIQUES ET CALCUL SCIENTIFIQUE"

par

Bernard VALOUR

Modélisation et étude numérique d'un problème géologique :

la formation des skarns

soutenue le 8 Novembre 1983 devant le jury :

Président : Claude CARASSO

Examineurs : Francis CONRAD

Bernard GUY

René OUZILOU

Michel PERRIN

Denis SERRE



-REMERCIEMENTS-

Je tiens à remercier, tout particulièrement pour les conseils qu'ils m'ont prodigués et le suivi de mon travail, Messieurs Claude CARASSO et Bernard GUY.

Mes remerciements vont encore aux membres de mon jury qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir y participer.

Enfin j'associe à cette liste pour la frappe, la mise en page et les divers tirages, Madame JOUFFRE, Madame et Monsieur LARGILLIER, Mademoiselle BENCHIMOL, Madame VALOUR, Monsieur BRENOUX et Monsieur LOUBET.

De plus cette étude a bénéficié d'un financement du C.N.R.S. (A.T.P. 8103, géochimie, B. GUY, E.M.S.E.):



S O M M A I R E

§.1	Présentation du problème	p. 1 - 19
§.2	Modélisation du problème géologique à un seul constituant chimique....	p.20 - 68
§.3	Modélisation du problème géologique à plusieurs constituants chimiques	p.69 - 86
§.4	Répartition du liquide et du solide dans la roche	p.87 - 94
§.5	Divers recoupements sur les espaces de fonctions à variation bornée..	p.95 - 104
§.6	Régularités de frontières et constructions de relèvements.....	p.105 - 129
§.7	Remarques et illustrations sur le type exact des équations à traiter..	p.130 - 152
§.8	Méthodes de transport-écroulement en dimension quelconque finie.....	p.153 - 181
§.9	Méthode Numérique générale et son adaptation à un problème aux limites général.....	p.188 - 202
§.10	Programmation du problème.....	p.202 - fin



INTRODUCTION GENERALE

Le présent travail porte sur le problème géologique de la formation de roches à configuration complexe, appelée Skarns. Un des intérêts de ces roches provient de ce qu'elles contiennent des composants ayant une valeur économique certaine.

Après avoir mis en place le langage à utiliser et donné une idée des échelles des phénomènes, nous fournirons un modèle qui espère représenter l'évolution des Skarns en prenant en considération plusieurs composants chimiques, plusieurs dimensions d'espace et des conditions limites variables en "lieu" et "temps". On aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles relativement complet dont on diminue la taille en évoquant des hypothèses géologiques simplificatrices.

Dans la mesure où l'on attendra des solutions faibles (avec "chocs") de ces systèmes, on essaiera de préciser la forme exacte des équations à traiter (liée aux quantités "effectivement conservées"), ce qui n'a pas toujours été évident par le passé.

Afin de nous donner les moyens d'un traitement numérique de notre problème, nous fournirons une méthode de transport-écroulement en dimension d'"espace" quelconque finie, un prolongement heuristique de cette méthode à des cas plus complexes, y compris aux multiples problèmes de conditions limites rencontrés.

Seront aussi présents divers paragraphes techniques utilisés systématiquement dans les autres parties. On fera enfin une programmation des diverses méthodes avancées avec, entre autres, des sorties graphiques couleur.

Nous voudrions préciser avant de nous engager dans cette étude, que le travail que nous avons pu effectuer ici n'était pas évident à mener à terme : il s'agit en effet là d'un travail de pionnier, avec au départ, du point de vue mathématique, très peu de formulations faites.

INTRODUCTION AU S-I

On présente dans ce paragraphe une synthèse et des schémas de principe sur les différentes étapes de la formation des Skarns ; pour cela on est amené à considérer l'évolution de systèmes de tailles diverses : microscopique, macroscopique, plurimétrique.

Cette présentation est assortie de remarques essentielles pour la modélisation, notamment sur :

- a) la répartition du fluide et du solide dans les roches considérées,
- b) les problèmes de conditions limites qui se posent,
- c) les échelles de temps à envisager.

On attribue aussi des valeurs (réalistes) aux principales variables que l'on utilisera par la suite.



PARAGRAPHE 1

Présentation du problème

On va s'intéresser ici à la génèse de formations géologiques appelées Skarns.

On trouve un exemple de ces entités, avec des affleurements particulièrement nets, sur le site de Costabonne (Pyrénées orientales, frontière franco-espagnole).

On consultera sur la question B. GUY [201].

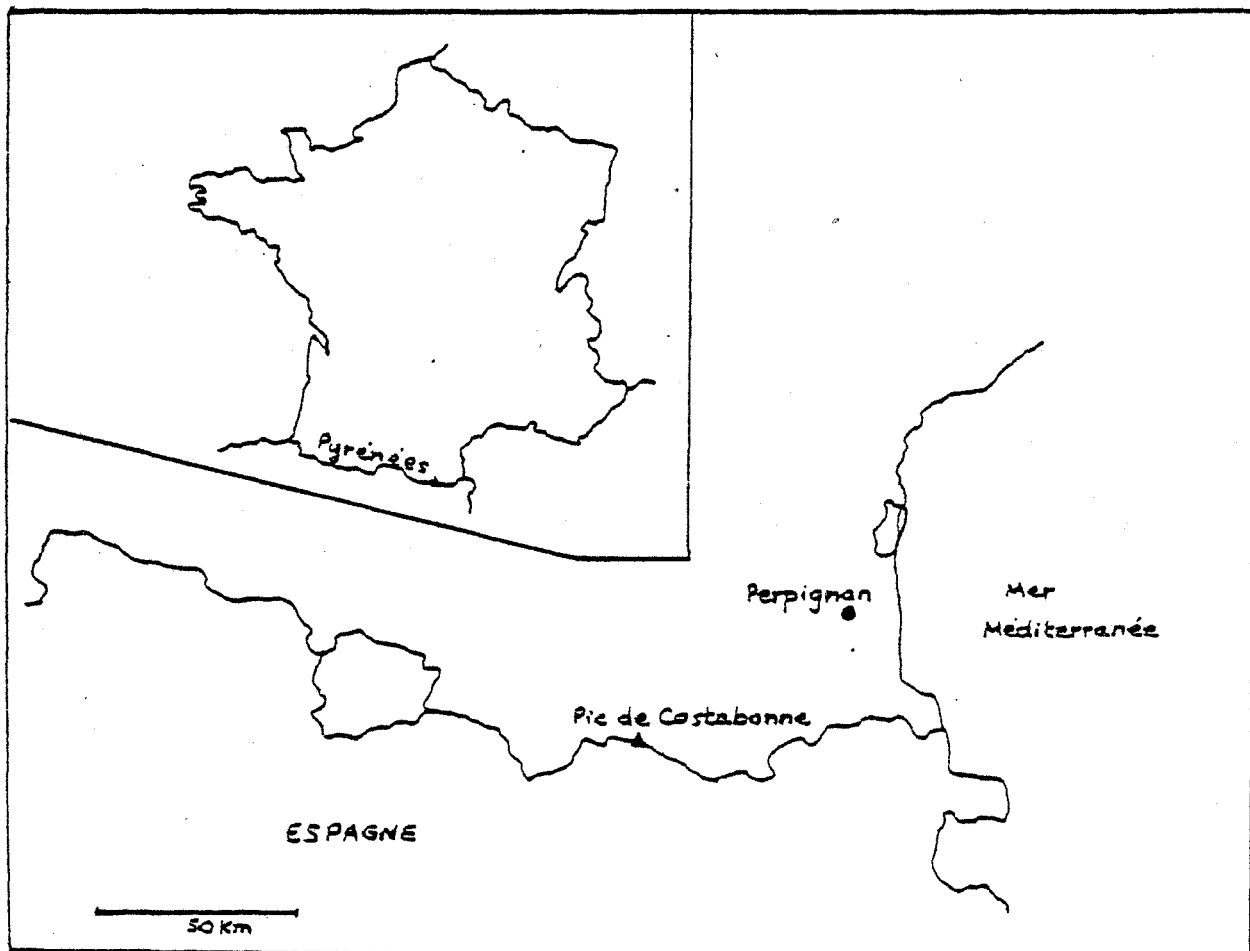


figure 1

De manière générale, en géologie, on entend:
roche = solide (constitué de grains plus ou moins jointifs) +
 ≠ ∅.
fluide (liquides, gaz) + vide.

Par la suite on travaillera sur des roches en cours d'évolution pour lesquelles chaque observation macroscopique "voit" du solide et du fluide. On parlera alors, avec un léger abus de langage pour le solide, de solide et de fluide interstitiels.

Un Skarn est une roche résultant de la transformation chimique de niveaux sédimentaires carbonatés (calcaires et dolomies) sous l'action de fluides aqueux (phénomène de métasomatose), le tout à haute température.

On consultera sur la question M. FONTEILLES [15], B. GUY [20-21-22], M. PERRIN et B. GUY [48].

Fluide aqueux: eau chargée de divers composants chimiques.

Formation des Skarns de Costabonne (par exemple):

La présentation suivante est élaborée, à partir de sources multiples, grâce à diverses discussions avec B. GUY et les équipes sur le terrain. Reprenons le problème au tout début:

On suppose que sur le fond d'une mer initiale (époque cambrienne, entre -570 et -500 Millions d'années environ) se sont sédimentées des particules calcaires d'origine chimique ou biologique (mollusques, en particulier coraux).

Leur déposition se fait en strates orientées, le fluide interstitiel étant essentiellement composé d'eau.

- étape qui sera représentée figure 2 -

Puis elles se sont peu à peu faites recouvrir par d'autres roches (grès et schistes par exemple) et enfouir jusqu'à des profondeurs de quelques kilomètres. A l'occasion de cet enfouissement, les roches ont pu se déformer.

- étape qui sera représentée figure 3 -

Cette déformation s'est ensuite accentuée lors de l'orogénèse hercynienne (début vers -280 Millions d'années environ).

- étape qui sera représentée figure 4 -

A un instant bien particulier de cette orogénèse, des fluides aqueux chauds ont pu percoler à travers les roches.

Cette circulation a pu être induite par diverses forces extérieures et par des gradients de pression d'origine interne ou externe au système (le système envisagé ici pourra être, par exemple, un massif rocheux de quelques dizaines ou centaines de mètres de dimension, situé en un lieu donné).

Les eaux en question peuvent être d'origines diverses:

- eaux de pluies infiltrées (eaux météoriques),
- eaux libérées par les roches lors de leur modification physique et chimique (eaux métamorphiques),
- eaux libérées par la cristallisation des magmas (eaux magmatiques).

En toute rigueur, le solide pouvant se déformer, on peut être amené à envisager, pour lui aussi, une "percolation" dans le système et à travers les limites de ce système.

Par hypothèse notre roche sera supposée à température absolue macroscopique T indépendante du lieu et du temps (ce qui est réaliste ici). L'introduction de T variable est sans difficulté d'écriture, mais **complexifié** beaucoup le modèle.

La phase de percolation s'étend sur une période de quelques centaines de Milliers d'années environ.

- étape qui sera représentée figure 5 -

Enfin les phénomènes de percolation se sont arrêtés dans un état où les gradients de pression et les forces extérieures s'exerçant sur la roche réalisent un équilibre. Cet arrêt peut se produire à la suite d'un tarissement des sources fluides, d'un bouchage des cavités de la roche.

Le bouchage de la roche résulte d'une augmentation locale de la proportion de solide (on peut estimer qu'en général, les modifications chimiques du solide ne sont pas suffisantes pour assurer le bouchage de cette roche, exception faite des phénomènes de précipitation).

Il y a donc eu fossilisation du système rocheux qui s'est maintenu par la suite dans un état dit métastable, c'est-à-dire qu'en particulier la diffusion n'a pas effacé les structures chimiques (Skarns) obtenues dans la phase de percolation.

- étape qui sera représentée figure 6 -

L'érosion et les soulèvements orogéniques (simultanés) ont finalement ramené, avec basculement éventuel, notre système rocheux au niveau de la surface.

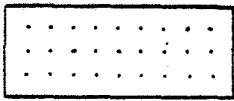
Ces phénomènes se sont produits à l'ère tertiaire (-45 Millions d'années environ), c'est-à-dire après un "repos" (étape précédente) de près de 235 Millions d'années.

- étape qui sera représentée figure 7 -

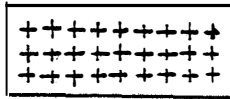
Ces estimations montrent que le temps de formation effectif du Skarn est très court relativement aux périodes d'évolution des ensembles géologiques;

ceci fournit un premier argument pour penser qu'il ne s'agit pas, contrairement à ce qui a été parfois envisagé, d'un problème dit de comportement asymptotique pour $t \rightarrow +\infty$ (question d'échelle).

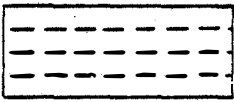
On résume graphiquement ces différentes étapes par les schèmes:



grès.



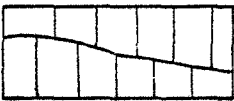
granites.



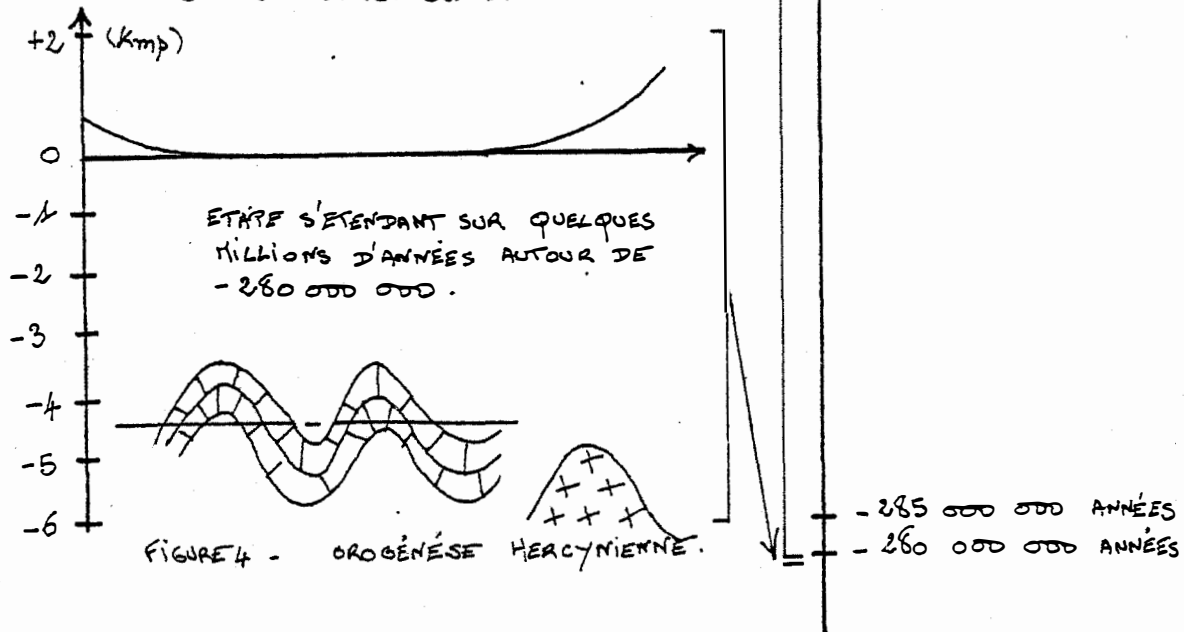
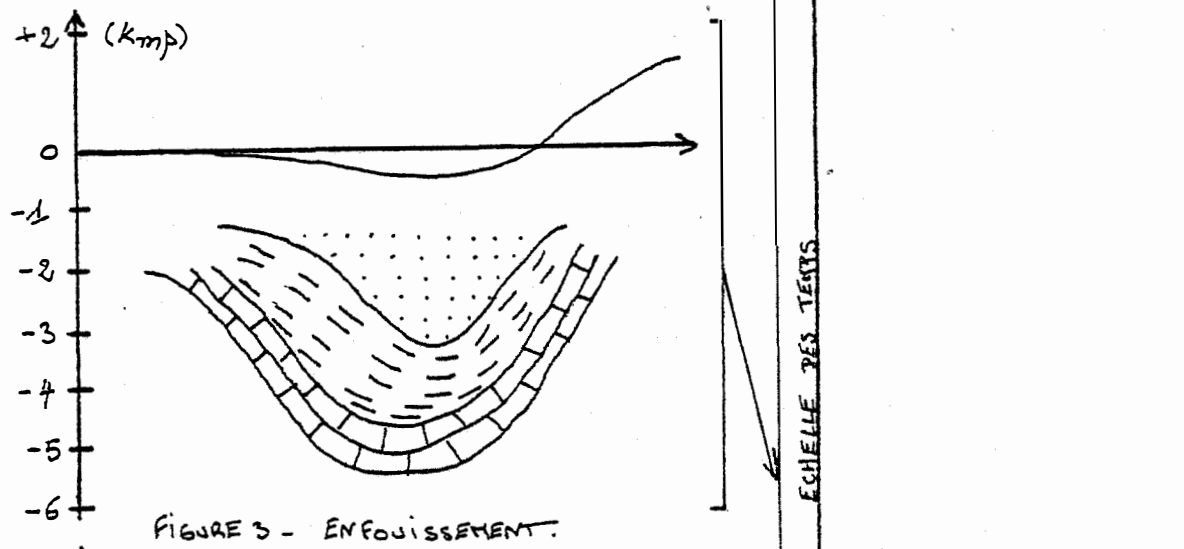
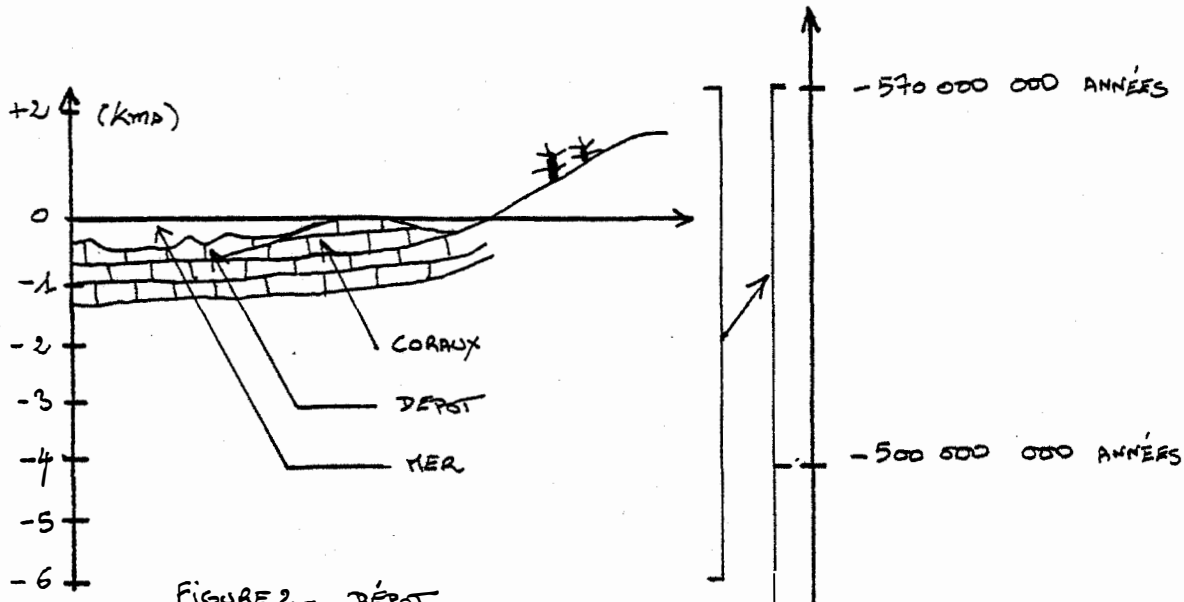
schistes.

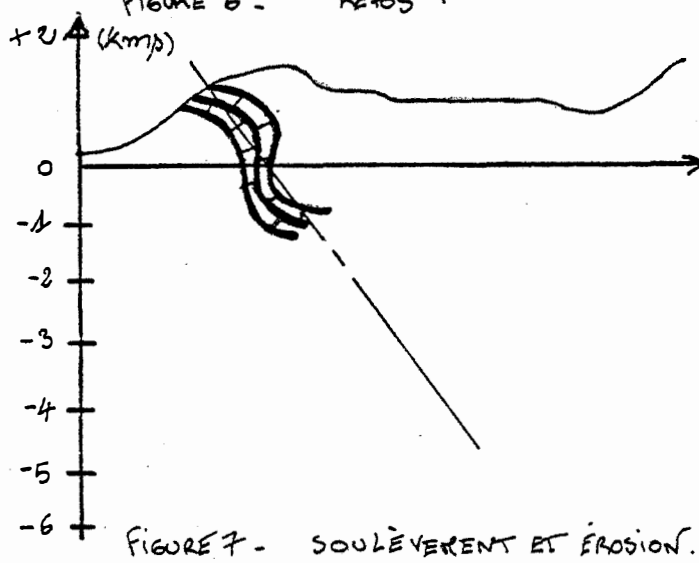
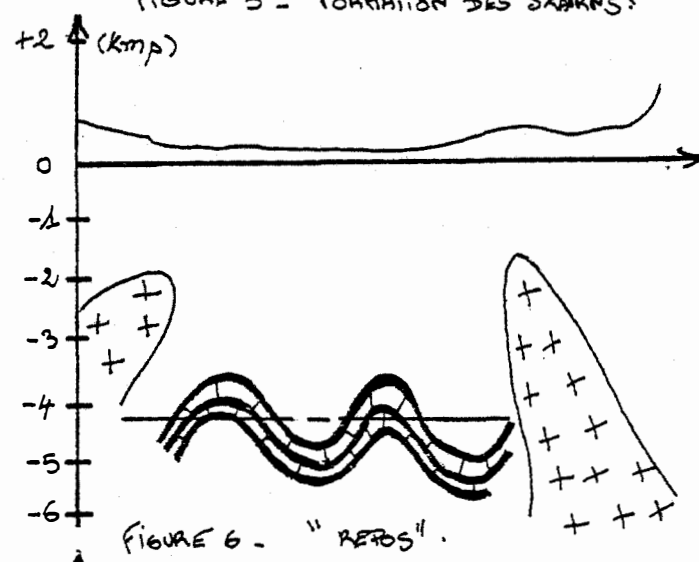
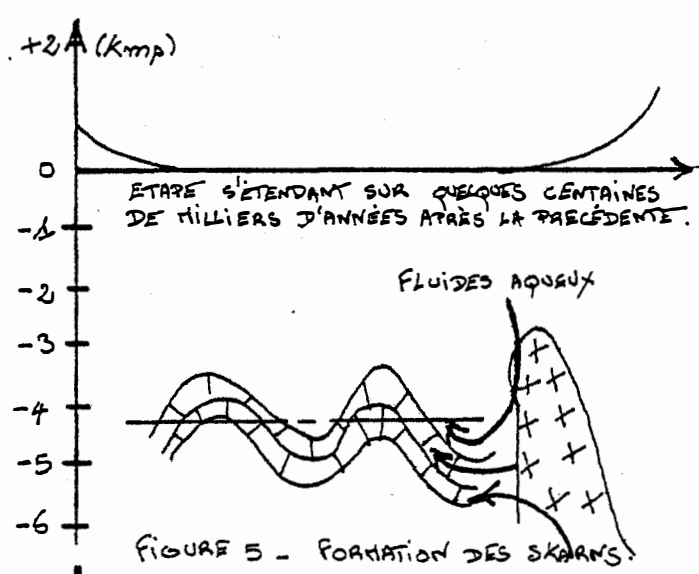


skarns.



calcaires.





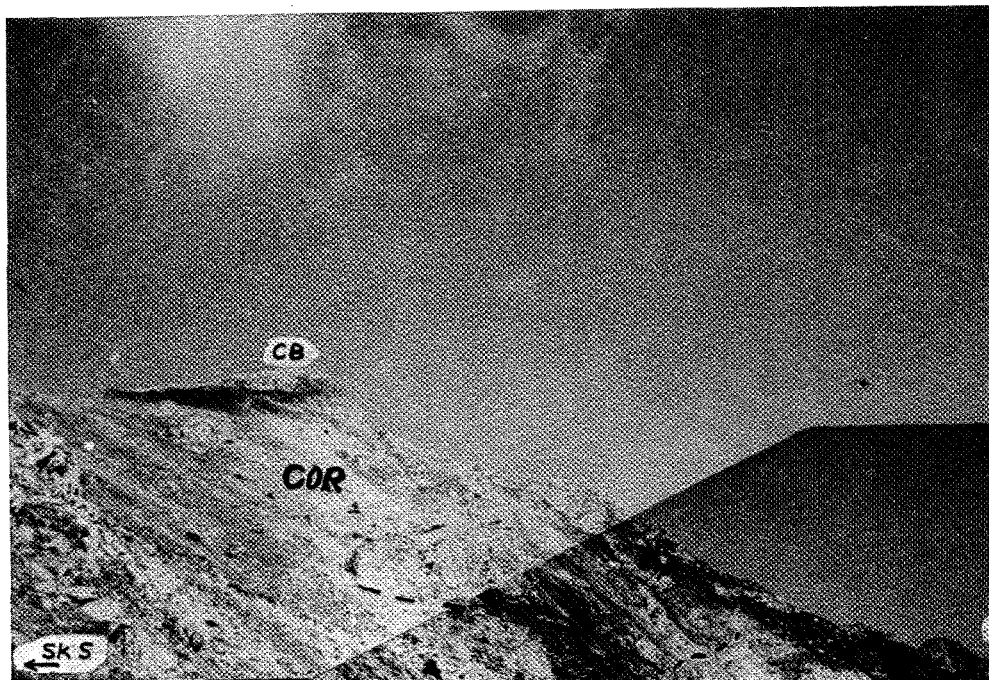
- 265 000 000 ANNÉES
 - 280 000 000 ANNÉES

POUR LE SYSTÈME ROCHÉUX FIGURE 4
 PROFONDEUR D'ENFOUISSEMENT DE L'ORDRE DE
 5 kmp
 PRESSION ÉQUIVALENTE AUTOUR DE
 1,5 Kbars
 TEMPÉRATURE T (SUPPOSÉE ÊTRE CONSTANTE) DE L'ORDRE
 DE
 600°C.

ÉCHELLE DES TEMPS

- 45 000 000 ANNÉES

0 ANNÉES



Vue d'une partie du massif
montagneux dominée par le
pic de Costabonne (CB) et
renfermant des skarns (SKN).

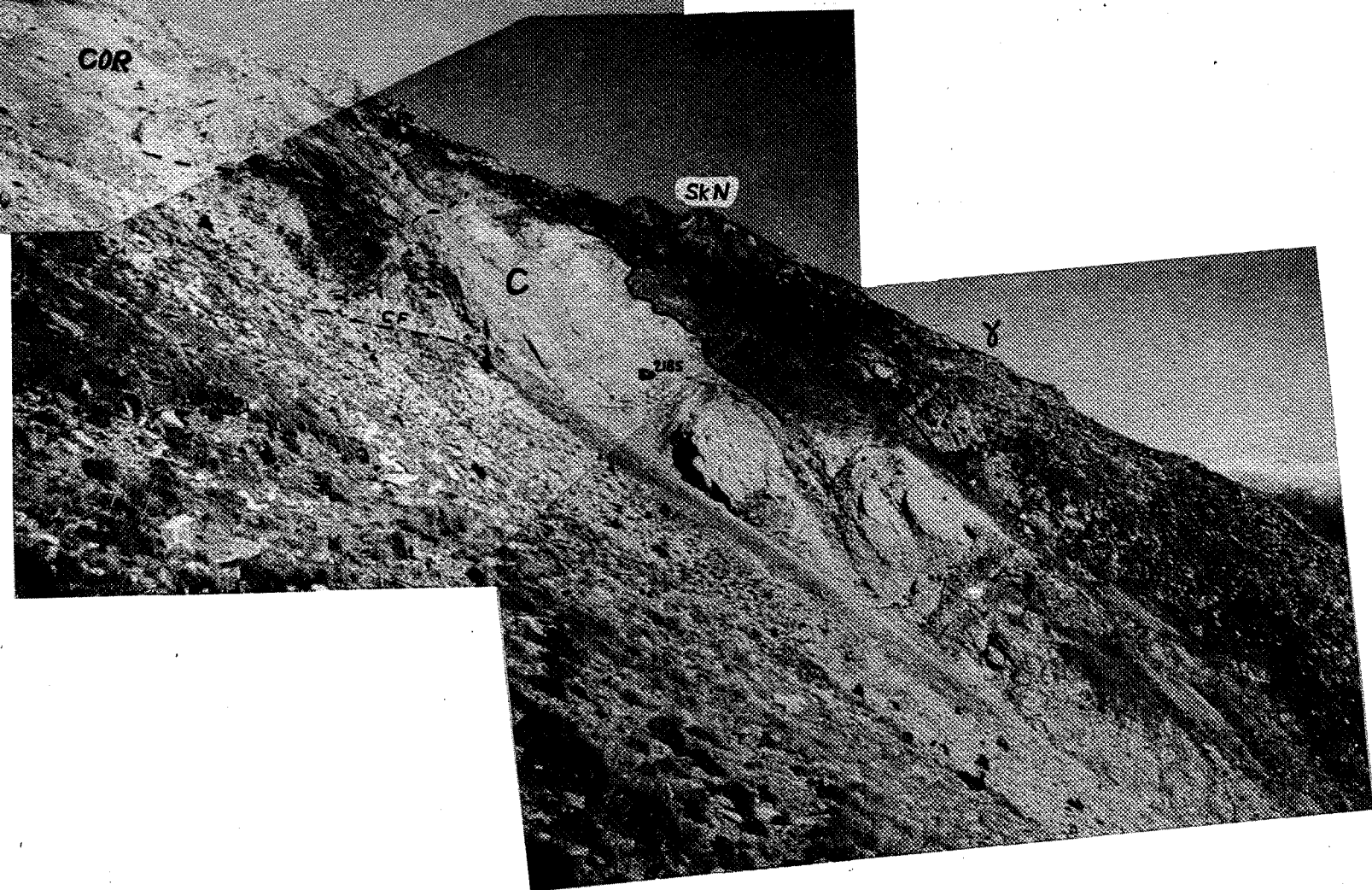
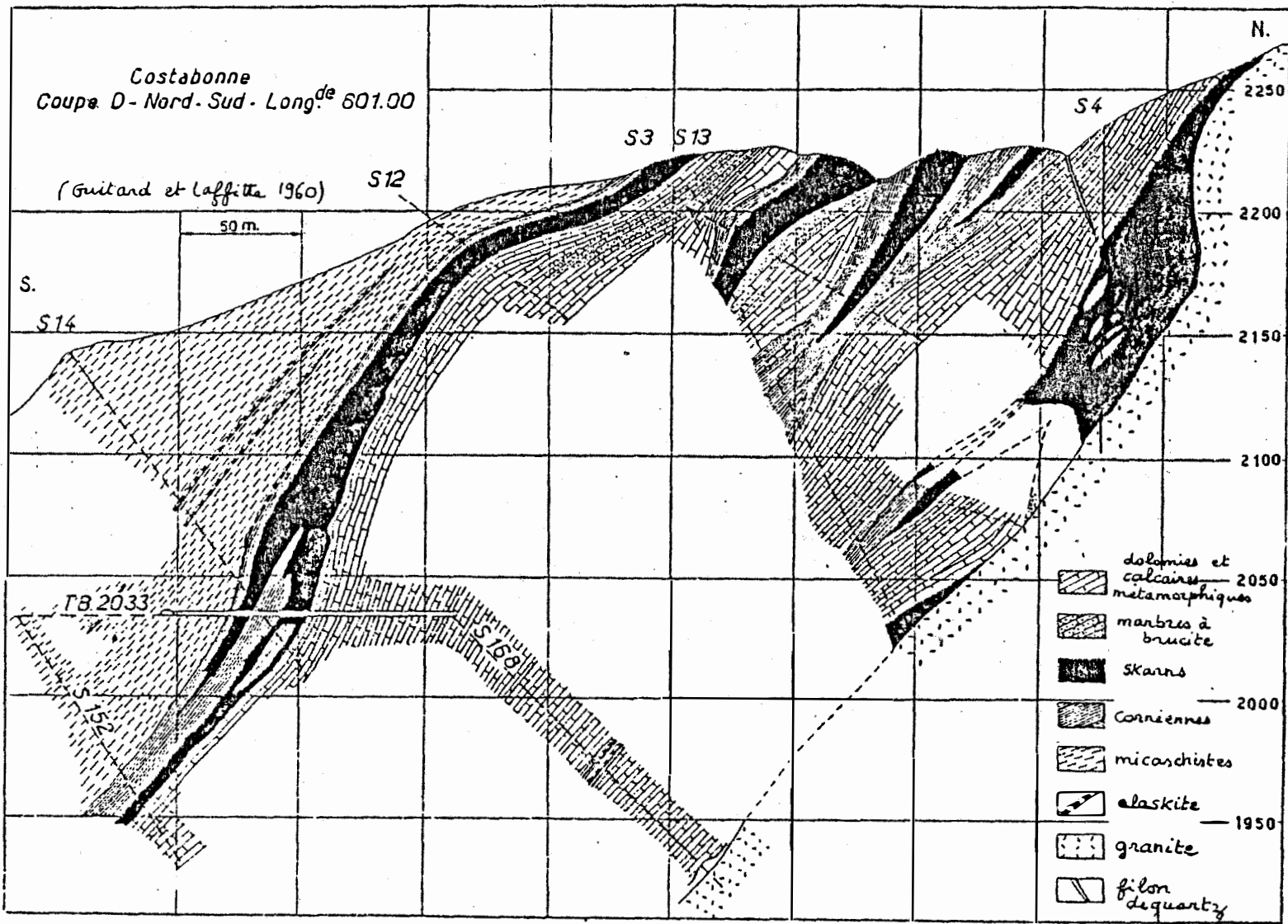


Figure 8.



Coupe correspondant à la figure 8.

Figure 9.

Présentation des résultats de la transformation de la roche pour la période de circulation des fluides aqueux:

Les roches observées présentent des bandes accolées, plus ou moins régulières et d'épaisseur variable, de composition chimique déterminée, séparées par des fronts nets (phénomène de zonation).

- on fournit une illustration de ce phénomène dans les figures 10 et 11 - On consultera sur la question B. GUY [20] .

Le fluide aqueux arrive par de grandes fractures dans le solide et pénètre à partir d'elles dans l'intimité de la roche. Il est intéressant de remarquer que la fracturation peut se faire au cours de l'avancée de ce fluide dans ces fractures, soit à cause d'une surpression de celui-ci, soit pour des raisons mécaniques externes. Le système rocheux considéré peut aussi se déformer en même temps qu'il se fracture. De plus, la composition même du fluide qui arrive, change vraisemblablement au cours du temps.

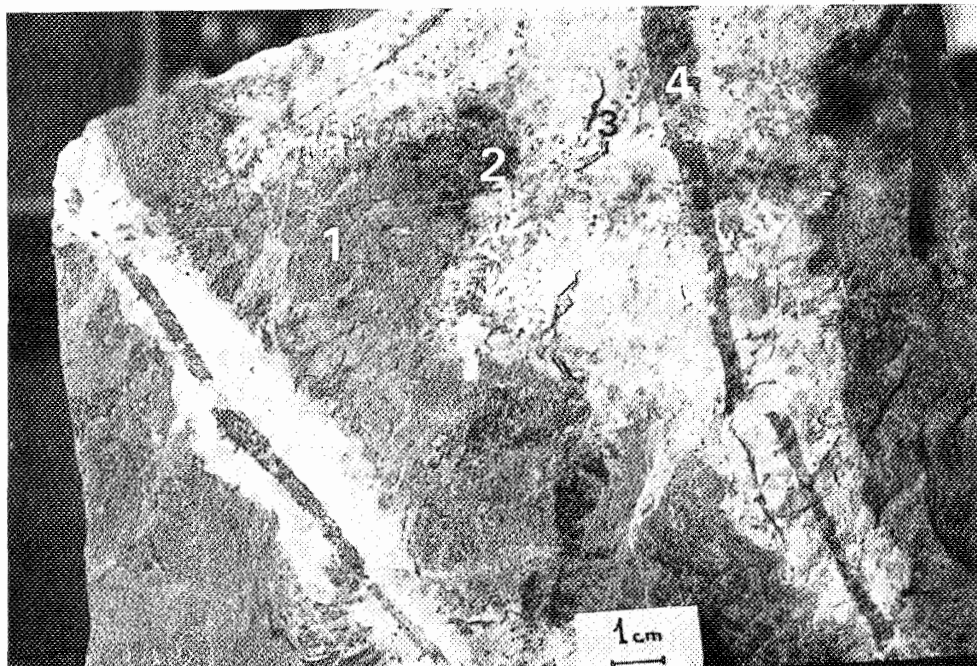
Tout ceci nous amène naturellement à considérer des conditions aux limites variables en espace et en temps (ce qui n'est pas habituel dans les modèles mathématiques, en particulier pour notre problème).

On illustre ces divers phénomènes par les schémas de principe de la figure 12, situés pendant l'étape de formation des Skarns représentée figure 5.

Dans les roches actuelles, il reste souvent, à l'intérieur de petites cavités, des bulles de fluide interstitiel désignées sous le nom d'inclusions fluides. Leur examen, ainsi que celui des grains solides, permet de penser que l'on trouve, pour l'étape de formation des Skarns représentée figure 5, du fluide et du solide dans tout rayon supérieur à un micron (voir quelques dizaines de microns suivant la roche) autour de tout point du système rocheux. Ceci indique une division à échelle microscopique de la roche entre fluide et solide.

Le mouvement relatif du fluide par rapport au solide provoque, en certaines régions du système rocheux où il est effectif, un déséquilibre chimique, occasionnant ainsi une transformation chimique de ces régions.

S'il est possible de se ramener à une seule dimension d'espace



Transformation d'un schiste (en sombre, 1) à Costabonne (Pyrénées Orientales), montrant différentes zones (2, 3, 4) séparées par des limites nettes.

Transformation d'une dolomie (en blanc, 1) à Costabonne. On voit aussi ici différentes zones (2, 3, 4).

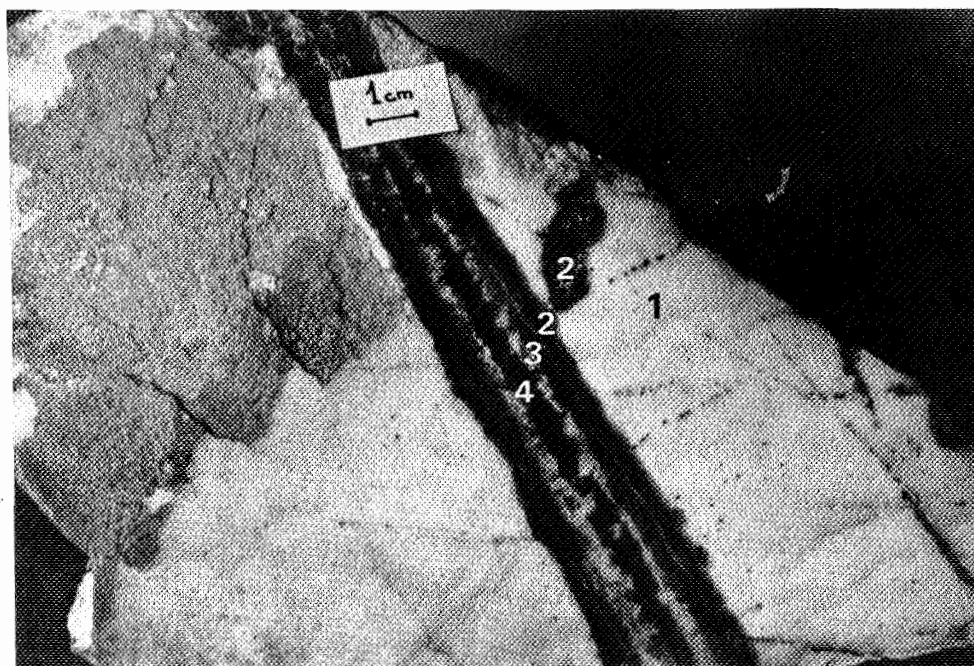


Figure 10.

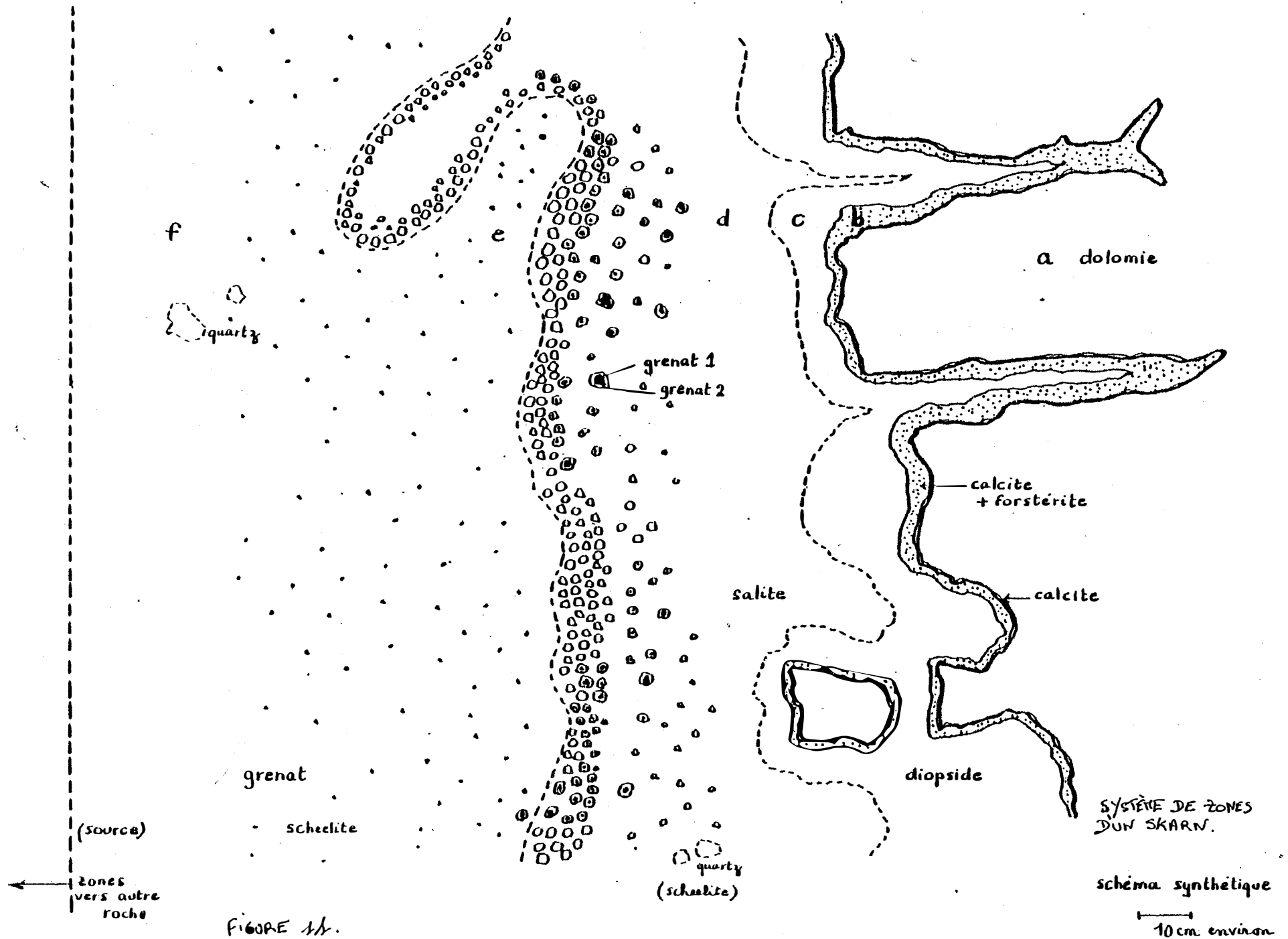
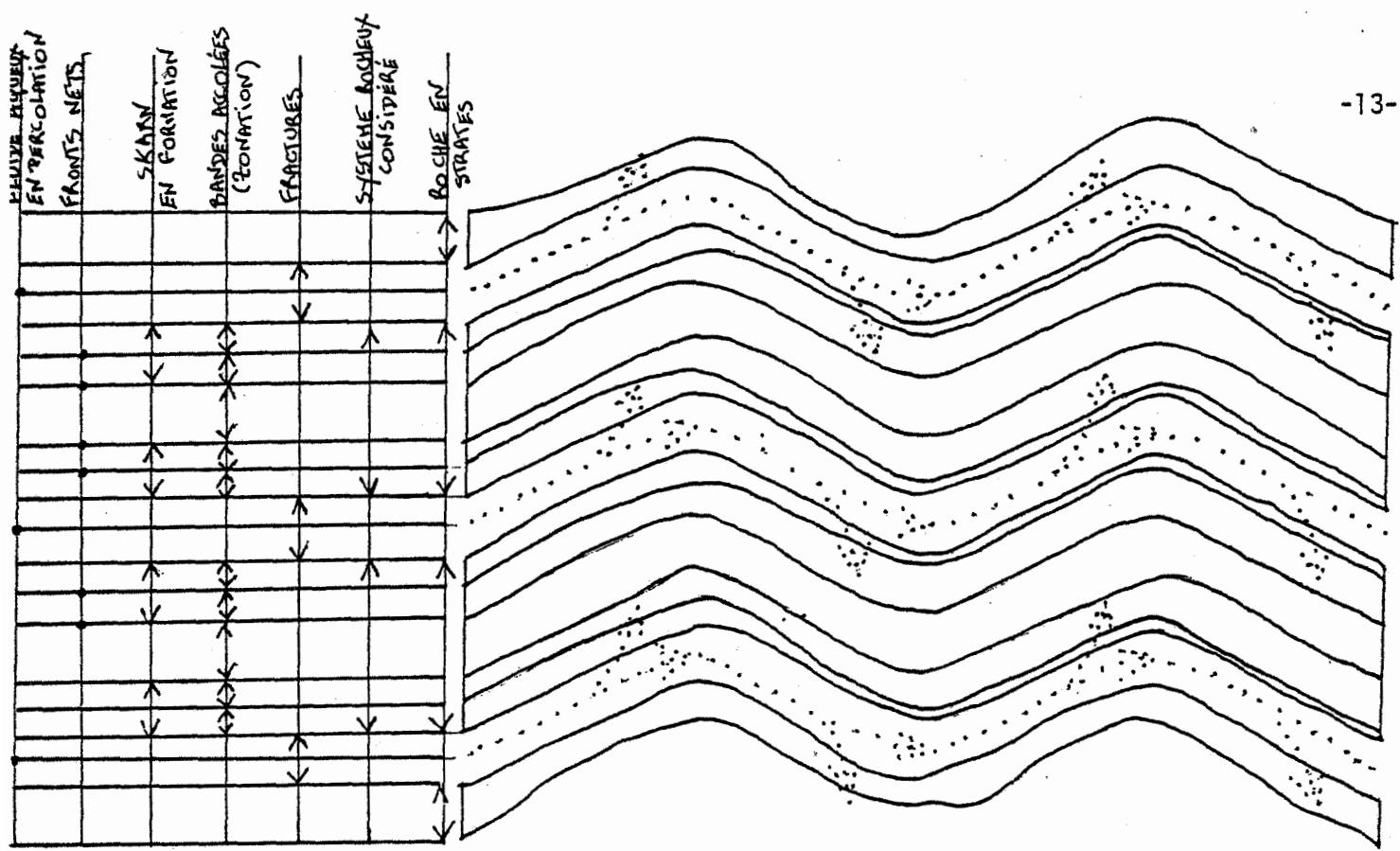
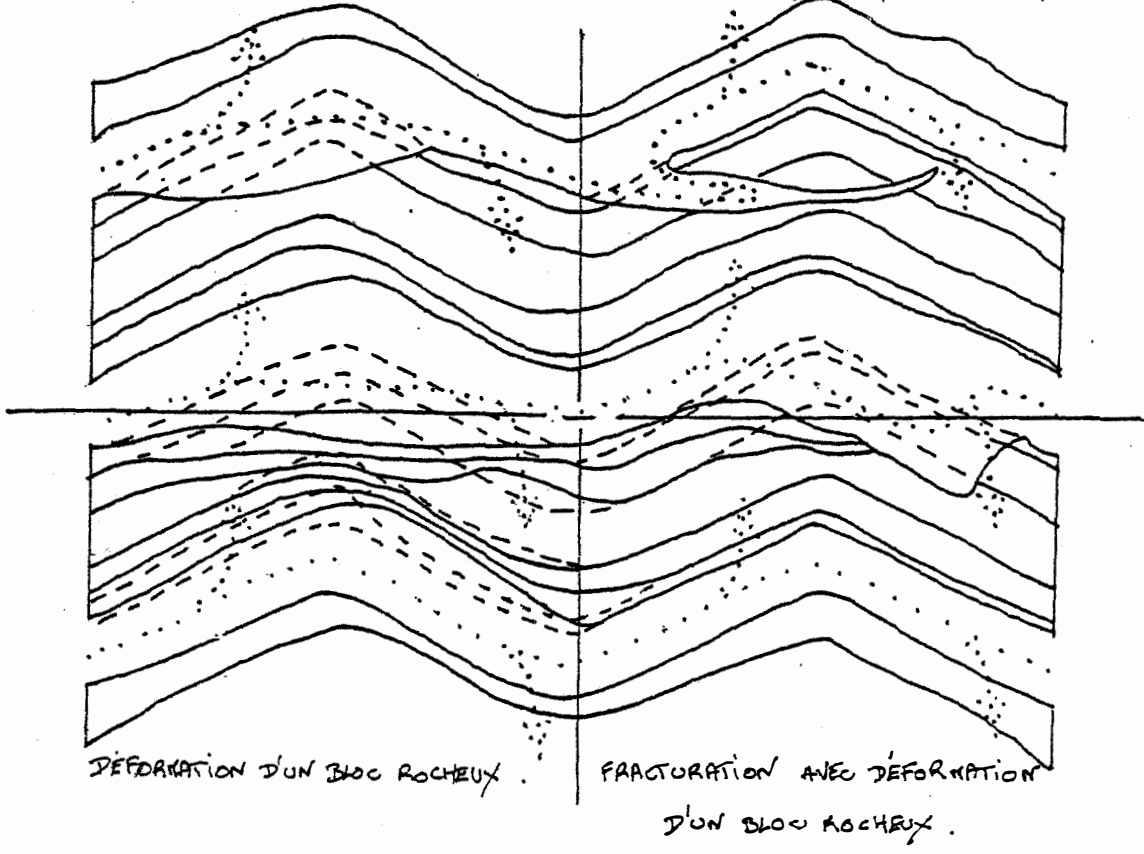


FIGURE 1A.



FRACTURE AYANT ÉLIMINÉ UN BLOC
ROCHEUX RAPIDEMENT ÉVACUÉ.

FRACTURE EN CREUSEMENT
(DISSOLUTION, ATTAQUE MÉCANIQUE).



DÉFORMATION D'UN BLOC ROCHEUX.

FRACTURATION AVEC DÉFORMATION
D'UN BLOC ROCHEUX.

FIGURE 12: FRACTURATIONS ET RÉFORMATIONS DES ROCHES POUR LA PÉRIODE DE CIRCULATION DES FLUIDES AQUEUX.

occupée exclusivement par un solide immobile et par un fluide incompressible s'écoulant au travers de la roche, à partir d'une faille, ceci à vitesse constante notée U_L (cf. modélisation), on estime que, suivant les caractéristiques (porosités, viscosités) du système rocheux, U_L est comprise entre quelques centimètres par an et quelques mètres par an. La vitesse d'avancée du front de formation du Skarn est alors attendue très faible par rapport à U_L , c'est-à-dire, suivant les cas, de l'ordre de quelques centimètres pour 10^5 années à quelques mètres pour 10^5 années.

On consultera sur la question D.M. KERRICK [28] , B. GUY [20] . En comparant les quelques centaines de Milliers d'années de la période de formation des Skarns à la vitesse d'avancée de leur front de formation, on dispose, là aussi, d'un argument pour affirmer qu'il ne s'agit pas d'un problème dit de comportement asymptotique pour $t \rightarrow +\infty$.

Il existe dans le système rocheux des composants chimiques dont les proportions déterminent les zones du Skarn; par là suite, il pourra se faire que l'on se place dans le cas d'un seul composant chimique (soit par souci de simplification a priori, soit que, dans un cadre très général, les autres composants existant soient en bien plus faible proportion dans ce système). A chaque zone correspond un minéral déterminé.

En particulier lorsqu'il est réaliste de supposer le solide immobile, le fluide à concentrations déterminées et issu de fractures fixes, percolant à vitesse constante dans une direction privilégiée à travers le système rocheux, par l'observation directe ou au microscope, ou encore par des dosages chimiques, on détermine souvent qu'il s'établit le principe de création d'un minéral d'une zone amont au détriment d'une zone aval adjacente. Là encore, on voit qu'il ne s'agit pas d'un problème dit de comportement asymptotique pour $t \rightarrow +\infty$, puisque si t devenait très grand (en Millions d'années!), on peut penser qu'il n'y aurait plus qu'une seule zone minérale.

Les grandes alternances de failles provoquent, comme représenté figure 12, de grandes alternances des zones de Skarns (qui apparaissent aujourd'hui sous la forme fournie figure 7).

Il est présenté ici quelques réflexions sur un problème délicat du point de vue interprétation géologique. Nous allons cependant risquer

les explications qui vont suivre (qui certainement méritent encore des débats).

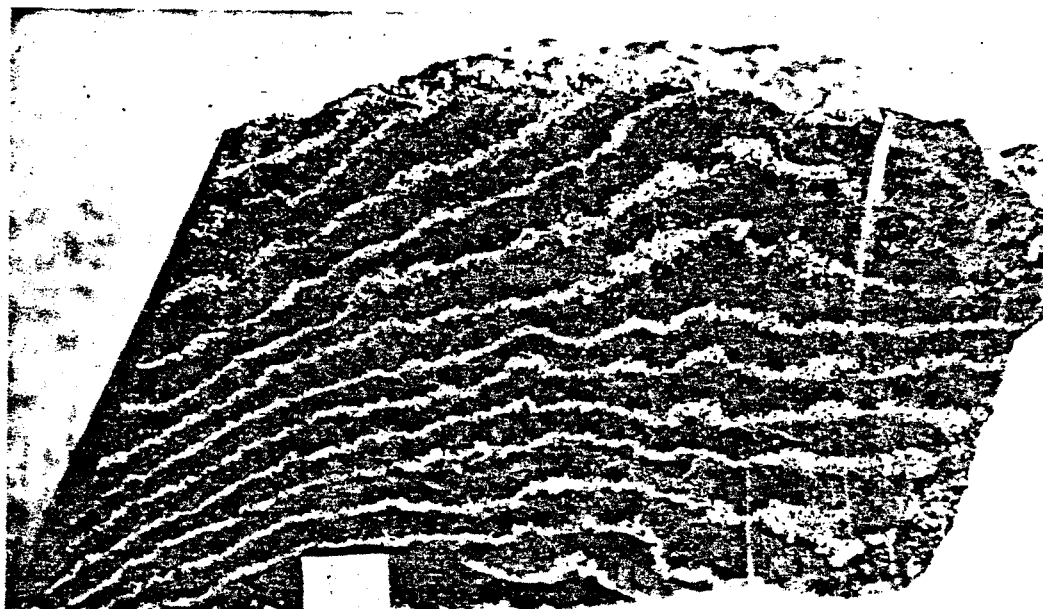
On trouve (par exemple à Costabonne), disséminées dans la montagne, à proximité de Skarns massifs, quelques roches de petite dimension (parfois quelques dizaines de centimètres de diamètre) contenant un Skarn formé d'un système de zones (bandes accolées) dont l'épaisseur est faible (quelques centimètres), chaque zone ayant elle-même une épaisseur très faible de quelques millimètres. Les minéraux de ce Skarn se répètent périodiquement sans que pour cela, pense-t-on, il y ait eu de failles entre ces zones; on parle alors d'alternances récurrentes dans le Skarn. On consultera sur la question B. GUY [23] .

On peut raisonnablement envisager que pendant les quelques centaines de Milliers d'années correspondant à la formation des Skarns, les conditions limites pour les concentrations en composants chimiques ont varié en temps suivant des cycles d'activité (ne serait-ce que du fait des eaux magmatiques), d'où le caractère périodique probable de ces conditions limites. En considérant l'épaisseur des zones minérales formées dans les alternances récurrentes, il est possible de penser que les vitesses de percolation mises en jeu y sont moins grandes que dans les Skarns massifs (raisons probables à invoquer: porosités plus faibles, situation hors du réseau des grandes failles, fluides plus visqueux, forces exercées sur ce système rocheux moins importantes).

On peut alors espérer, pour ces vitesses plus lentes, une "mise en mémoire", sans possibilité d'"effacement" et se traduisant par des alternances spatiales très courtes, de ces périodes très longues rencontrées dans les cycles de formation du Skarn (ce que l'on sait reproduire à partir de notre modèle sur des exemples immédiats).

Il est possible encore, que seules les roches à alternances récurrentes aient été exposées à ces conditions limites cycliques.

On peut aussi générer les alternances récurrentes grâce à des vitesses de percolation à caractère périodique en espace et en temps. On attend, pour chaque instant t fixé, à partir d'un certain moment, particulièrement lorsqu'il existe des "chocs" (c'est-à-dire dans le cas d'une répartition non régulière des concentrations), une période en



Skarn montrant des alternances centimétriques claires (grenat) et sombres (magnétite + quartz), à San Leone, Sardaigne.

Figure 13.

espace des alternances récurrentes inférieure à celles des vitesses de percolation mises en jeu jusqu'alors, avec peut-être un effet d'accroissement de cette infériorité lorsque t croît. Lorsque la diffusion intervient dans le système rocheux, on obtient une répartition régulière des concentrations; on peut alors se demander, lorsque cette diffusion devient très faible, s'il n'y a pas apparition d'alternances récurrentes, en particulier au voisinage des "chocs" éventuels qui se seraient formés dans cette roche si la diffusion y était nulle.

Peut-être aussi, dans le cadre des systèmes hyperboliques (plusieurs composants chimiques), est-il possible d'obtenir ces alternances avec des conditions initiales et limites constantes.

On désignera par échanges locaux les transferts de composants chimiques entre le solide et le fluide dans un certain volume macroscopique autour de chaque point du système rocheux, volume à chaque fois considéré comme complètement isolé du reste du système. On observe que chacun des échanges locaux diminue jusqu'à s'annuler pour atteindre un état dit d'équilibre local. A cause des hautes températures et des vitesses de percolation lentes qui interviennent dans le cas qui nous intéresse ici, on pourra considérer l'établissement de cet équilibre comme instantané. On n'introduira donc pas de terme de cinétique chimique dans la loi dite d'équilibre local régissant ces états d'équilibre.

On consultera sur la question D.S. KORZINSKII [30], FISHER et AL. [13], B. GUY [24-25].

Si l'on se ramène à une seule dimension d'espace occupée exclusivement par un solide immobile et par un fluide incompressible s'écoulant à vitesse constante, s'il n'y a qu'un seul composant chimique et si les phénomènes de diffusion sont inexistantes, alors on verra que l'on obtient la loi de conservation du composant chimique:

$$\frac{\partial(k_L f(C_S) + (1 - k_L) C_S)}{\partial t} + k_L V_L \frac{\partial f(C_S)}{\partial x} = 0$$

(équation qui, uniquement du point de vue formel, est semblable à celle du modèle de D.S. KORZINSKII qui, elle, nécessite deux dimensions spatiales fantômes pour un problème à une dimension d'espace; c.f. D.S. KORZINSKII [30], B. GUY [24])

où f est la loi d'équilibre local,

k_L la concentration du liquide

C_S la concentration du composant chimique dans le solide contenu

}] dans un certain volume macroscopique
 }> autour de x point du système rocheux
 } et au temps t ,

$k_L V_L$ est la quantité U_L présentée précédemment.

Afin de répondre à certaines questions sur la remise en cause des apparitions de chocs pour les vitesses de déplacement extrêmement faibles applicables à notre cas (ce qui, en effet, n'est pas courant dans les modèles conduisant à des problèmes de type hyperbolique comme le notre), il est immédiat de remarquer que:

En supposant les distances x exprimées en mètres (U.S.I.), si les temps T sont exprimés en années, d'après ce qui précède, on peut alors prendre, en notations évidentes, $U_L(T) = 1 \text{ mètre/An}$.

$$\left| \frac{\partial(k_L f(C_S) + (1 - k_L)C_S)}{\partial T} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f(C_S)}{\partial x} \right| \quad \text{sont aussi voisins de l'unité.}$$

Si maintenant les temps t sont exprimés en secondes (U.S.I.), on a alors $t = \gamma T$ avec $\gamma = 3,1536 \times 10^7$.

D'où

$$\frac{\partial(k_L f(C_S) + (1 - k_L)C_S)}{\partial T} + U_L(T) \frac{\partial f(C_S)}{\partial x} = \gamma \left(\frac{\partial(k_L f(C_S) + (1 - k_L)C_S)}{\partial t} + U_L(t) \frac{\partial f(C_S)}{\partial x} \right) = 0.$$

Dans l'équation

$$\frac{\partial(k_L f(C_S) + (1 - k_L)C_S)}{\partial t} + U_L(t) \frac{\partial f(C_S)}{\partial x} = 0,$$

$$U_L(t) \text{ est voisin de } \left| \frac{\partial(k_L f(C_S) + (1 - k_L)C_S)}{\partial t} \right| \ll 1.$$

On a donc intérêt ici à prendre une échelle des durées exprimée dans de grandes unités. Pour des temps exprimés en Milliers d'années on aura des chocs rapides.

Enfin il faut noter que les étapes présentées précédemment sont des reconstitutions d'évènements que l'on n'a pas vu et qu'il y a donc nécessité par des observations sur le terrain et au microscope, par divers procédés physico-chimiques d'analyse, de tout un travail de reconstitution rendu complexe du fait des altérations successives que subissent les roches.

INTRODUCTION AU S-2

On présente dans ce paragraphe une modélisation, avec des variantes, du problème de la formation des Skarns lorsqu'on approche l'évolution de la roche en ne considérant qu'un seul constituant chimique y figurant.

On envisage un liquide compressible et un solide déformable, le tout à des vitesses variables en espace et en temps.

On adaptera à notre cas les équations régissant les phénomènes :

- a) de diffusion,
- b) d'échange et d'équilibre local qui donneront lieu à des études de stabilité,
- c) de vitesse en milieu poreux.

On sera aussi amené à faire intervenir divers coefficients ou matrices variables, notamment de concentration des sites, de perméabilité, de compressibilité, de viscosité.

On obtiendra un système d'équations aux dérivées partielles.

PARAGRAPHE 2

Modélisation du problème géologique à un seul constituant chimique.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N \times [0, T]$, $T > 0$, de frontière $\partial\Omega$ de classe C^k , $k \in \{1, \dots, +\infty\}$, de dimension N , connexe, sans bord, telle qu'il existe $((x_1, 0), (x_2, T)) \in (\partial\Omega)^2$, $x_\Omega \in BV(\mathbb{R}^{N+1})$ (c.f. § 5).

Pour tout $t \in]0, T[$, on considère

$$\Omega_t = \Omega \cap \underbrace{\{(x, t) / x \in \mathbb{R}^N\}}_{\text{assimilé à } \mathbb{R}^N}, \quad \text{ouvert de } \mathbb{R}^N.$$

Soit $S_t = \{x \in \mathbb{R}^N / x \in \text{solide au temps } t\}$.

On suppose alors que:

(1) $L_t = \{x \in \mathbb{R}^N / x \in \text{liquide au temps } t\} = \complement_{\mathbb{R}^N} S_t$ (on prendra ici fluide=liquide, c.f. § 1).

On suppose de plus que:

(2) $\forall B(x, \varepsilon[\subset \Omega_t$, $\lambda_N(B(x, \varepsilon[\cap S_t) > 0$ et $\lambda_N(B(x, \varepsilon[\cap L_t) > 0$,
où $B(x, \varepsilon[$ représente une boule de \mathbb{R}^N de centre $x \in \mathbb{R}^N$ et de rayon $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, λ_N -mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^N .

On fournira au § 4 des constructions explicites de ces parties S_t et L_t λ_N -mesurables vérifiant (2).

Soit $C_t = \{x \in \mathbb{R}^N / x \in \text{composant chimique au temps } t\}$.

Pour $\varepsilon = \varepsilon^*$ fixé, $\forall t \in]0, T[$, $\forall x \in \Omega_t$ on définit les concentrations:

$$(3) \quad K_S(x, t, \varepsilon^*) = \frac{\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[\cap S_t)}{\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[)}$$

$$(4) \quad K_L(x, t, \varepsilon^*) = \frac{\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[\cap L_t)}{\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[)} = 1 - K_S(x, t, \varepsilon^*).$$

$K_L(x, t, \varepsilon^*)$ s'appelle la porosité de la roche en x au temps t relativement à ε^* .

$$(5) \quad C_S(x, t, \varepsilon^*) = \frac{\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[\cap S_t \cap C_t)}{\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[\cap S_t)}.$$

$$(6) \quad C_L(x, t, \varepsilon^*) = \frac{\lambda_N(B(x, \varepsilon^*] \cap L_t \cap C_t)}{\lambda_N(B(x, \varepsilon^*] \cap L_t)}$$

Pour une expression de (3), (4), (5), (6), en phrases c.f. 1.

remarque 1: On peut toujours supposer vérifiée une hypothèse du type (2) en remplaçant respectivement S_t et L_t par $S_t \cap C_t$ et $L_t \cap C_t$.

remarque 2: Bien que $\forall B(x, \varepsilon^*] \subset \Omega_t$ on ait

(2) $\vdash K_S(x, t, \varepsilon^*) > 0$ et $K_L(x, t, \varepsilon^*) > 0$, pour λ_N -presque tout x dans Ω_t on n'a pas

$$K_1 = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0_+} K_S(x, t, \varepsilon^*) \neq 0 \quad \text{et} \quad K_2 = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0_+} K_L(x, t, \varepsilon^*) \neq 0;$$

en fait $(K_1, K_2) \in \{(0,1), (1,0)\}^2$, i.e. que relativement à la mesure λ_N on a une raréfaction du liquide ou du solide au voisinage de x .

remarque 3: $\varepsilon^* \in \mathbb{R}_+^*$ peut représenter, par exemple, le diamètre d'une pipette d'expérimentation.

remarque 4: soit $\{C_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des composantes connexes de Ω_t . Pour que l'on puisse parler d'écoulement du fluide dans Ω_t , il paraît naturel d'exiger que:

(7) $\forall i \in I, L_t \cap C_i$ connexe (par arcs par exemple).

Remarquons que $\forall i \in I, C_i$ est un domaine de \mathbb{R}^N . En effet, soit $x \in C_{i_0}$.

$$\Omega_t \text{ ouvert} \vdash \exists B(x, \bar{\varepsilon}] \subset \Omega_t = \bigcup_{i \in I} C_i$$

Soit $J = \{i \in I / C_i \cap B(x, \bar{\varepsilon}] \neq \emptyset\}$.

Alors $B(x, \bar{\varepsilon}] \cup \left(\bigcup_{i \in J} C_i \right) = \bigcup_{i \in J} C_i$ est connexe, ce qui contredit C_{i_0} composante connexe de Ω_t .

D'où $J = \{i_0\} \vdash B(x, \bar{\varepsilon}] \subset C_{i_0}$, d'où le résultat.

Pour $N = 1$, il est immédiat que l'on ne peut avoir (2) + (7) (écoulement par sauts, effet tunnel).

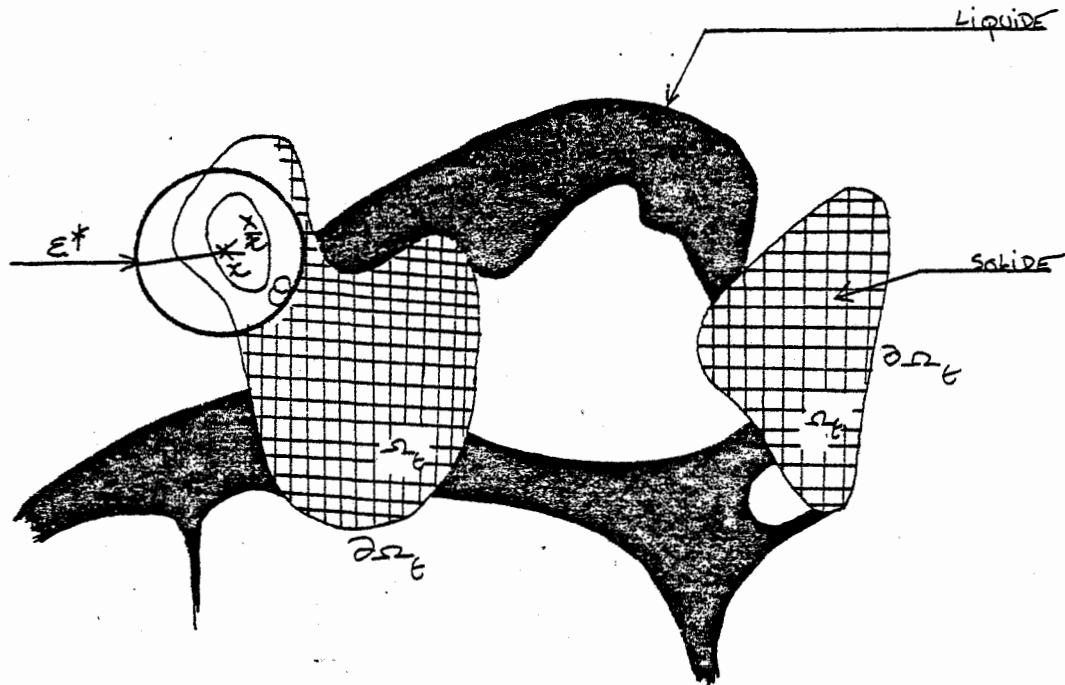
Pour $N > 1$, on fournira au § 4 des constructions explicites de ces parties S_t et L_t λ_N -mesurables vérifiant (2)+(7).

Remarque 5: Les applications $K_S(\cdot, t, \varepsilon^*)$ et $C_S(\cdot, t, \varepsilon^*)$ appartiennent

à $C^0(\mathbb{R}^N)$ et ne sont pas des applications générales (chocs) de $BV(\mathbb{R}^N)$ comme attendu dans les problèmes hyperboliques pour λ_1 -presque tout t .

Graphiquement:

à $t \in [0, T[$ fixé



Soit $\bar{x} \in \Omega_t$ fixé.

Considérons θ , un ouvert contenant \bar{x} , inclus dans Ω_t .

Immédiatement on obtient:

$$(8) \int_{\theta} [K_L C_L + K_S C_S](x, t, \epsilon^*) d\lambda_N = \int_{\theta} \frac{\lambda_N(B(x, \epsilon^*] \cap C_t)}{\lambda_N(B(x, \epsilon^*])} d\lambda_N.$$

D'après le théorème de Lebesgue et un théorème de relèvement de Lebesgue on a:

$$\lim_{\epsilon^* \rightarrow 0_+} \int_{\theta} \frac{\lambda_N(B(x, \epsilon^*] \cap C_t)}{\lambda_N(B(x, \epsilon^*])} d\lambda_N = \int_{\theta} \lim_{\epsilon^* \rightarrow 0_+} \frac{1}{\lambda_N(B(x, \epsilon^*])} \times \left(\int_{B(x, \epsilon^*]} x_{C_t} d\lambda_N \right) d\lambda_N = \int_{\theta} x_{C_t} d\lambda_N =$$

$\lambda_N(C_t \cap \theta)$, qui est le volume de composant chimique contenu dans θ .

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés, on omettra le ϵ^* .
 Soit $J_c = (J_1, \dots, J_N)$ le flux du composant chimique au temps t ,
 en $x \in \Omega_t$ (qui représente la quantité de ce composant issue de x suivant
 une certaine direction et par unité de temps, quantité dont le compor-
 tement en x est figuré (régularisé) par celui de la quantité de ce même
 composant dans la boule macroscopique $B(x, \epsilon^*)$).

$J_c = J^i + J^d$ où J^i et J^d sont respectivement des flux d'infiltration et de diffusion
 du composant chimique.

$J^i = J_L^i + J_S^i$ où J_L^i et J_S^i sont respectivement des flux d'infiltration du composant
 chimique contenu dans le liquide et dans le solide.

On prend:

$$(9) \quad J_{\frac{L}{S}}^i = K_{\frac{L}{S}} C_{\frac{L}{S}} V_{\frac{L}{S}}$$

où, en notations évidentes, $V_{\frac{L}{S}}(x, t) = (V_1^{\frac{L}{S}}(x, t), \dots, V_N^{\frac{L}{S}}(x, t)) =$

$$\frac{1}{\lambda_N(B(x, \epsilon^*) \cap S_t^L)} \times \int_{B(x, \epsilon^*) \cap S_t^L} V_{\frac{L}{S}}(\tilde{x}, t) = (V_1^{\frac{L}{S}}(\tilde{x}, t), \dots, V_N^{\frac{L}{S}}(\tilde{x}, t)) d\lambda_N$$

avec $V_{\frac{L}{S}}(\tilde{x}, t)$ vitesse du liquide solide en \tilde{x} au temps t .

On désignera par \cdot le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^N .

En désignant comme précédemment, on obtient (avec les notations du § 5):

$$\lim_{\epsilon^* \rightarrow 0_+} \int_{\partial\theta} [J^{i+} \cdot n](x, t) ds = \int_{\partial\theta} [(V_L \cdot x_{L_t} C_t + V_S \cdot x_{S_t} C_t) \cdot n](x, t) ds$$

où $\partial\theta \setminus (L_{t^*} \cup S_{t^*})$ est supposé négligeable au sens de la mesure de Lebes-
 que sur $\partial\theta$ et $V_{\frac{L}{S}}$ suffisamment régulière.

Si l'on suppose $J^d = 0$ alors la loi de conservation exacte s'écrit:

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \int_{\theta} x C_t d\lambda_N = \int_{\partial\theta} (V_L \cdot x_{L_t} \cap C_t + V_S \cdot x_{S_t} \cap C_t) \cdot n ds,$$

en général, pour $x_\theta \in \overline{BV}(\mathbb{R}^N)$, x_{C_t} et $x_{L_t \cap C_t}$ ne sont pas des applications de $BV(\mathbb{R}^N)$.

En particulier pour (10), on ne peut intervertir $\frac{d}{dt}$ et \int_θ dans le premier membre et l'on ne peut pas appliquer de formule de Green dans le second membre.

On observe (c.f G. de MARSILY [38]) que la diffusion est un problème physique lié au mouvement Brownien du milieu considéré; si, dans un voisinage d'un point de l'espace, un composant chimique est distribué de manière inhomogène dans un substrat de composition homogène, les zones de ce voisinage qui sont à concentration plus élevée en composant chimique envoient, en moyenne, plus de particules de ce composant dans toutes les directions que les zones à concentration plus faible. Le flux de diffusion entraîne donc une régularisation et une décroissance de la variation totale de des concentrations. Dans les phénomènes de diffusion à plusieurs composants chimiques, certains de ces composants peuvent, par des effets croisés, induire des diffusions d'autres composants et en modifier l'importance (c.f. M. FONTEILLES [15]).

Hypothèse 1: On supposera que la masse affectée à

$$(S_t \cup L_t) \cap B(x, \varepsilon^*) \text{ vaut } \gamma^* \lambda_N((S_t \cup L_t) \cap B(x, \varepsilon^*)),$$

ce qui entraîne que la masse volumique d'un point de $S_t \cup L_t$ soit γ^* (S_t et L_t pouvant ne pas vérifier (1)).

Remarque 6: Contrairement à l'hypothèse 1, les modèles classiques d'hydrogéologie, utilisent, par exemple pour un milieu composé uniquement d'eau (sans vides), dans leurs équations (c.f G. de MARSILY [38] -équations de continuité et de NAVIER-STOKES), une masse volumique ponctuelle (microscopique) $\rho(x,t)$ dépendant effectivement de x et de t , ce qui entraîne:

- a) La modification de la masse d'un point dans son déplacement
- b) La non-uniformité de la masse des points à un temps t fixé.

On a donc compressibilité de l'eau en un point!

Ceci entraîne des modifications considérables sur les équations macroscopiques, ($\varepsilon^* > 0$) en milieux poreux.

Considérons $L_t \setminus C_t$, C_t , $S_t \setminus C_t$. Ces trois quantités ne sont pas en équilibre chimique entre elles et forment un système multicomposé au sens de A.R. COOPER [9].

D'après l'hypothèse 1, la masse volumique moyenne est $\bar{\rho}(x,t) = \gamma \times (K_S(x,t) + K_L(x,t))$ où pour $\gamma \neq 0$, on posera $\rho(x,t) = \bar{\rho}(x,t) / \gamma$ (qui pour l'instant, vaut 1, d'après (1)).

On prend alors une équation d'état du fluide sous la forme classique (réaliste sur un grand domaine de \mathcal{P}_t^*):

$$(11) \quad \rho(x,t) = \rho_0 e^{\beta(P(x,t) - P_0)} \text{ avec } (\rho_0, P_0, \beta) \in \mathbb{R}_+^3 \text{ où } P(x,t) \text{ représente la pression moyenne dans la roche.}$$

$$(11) \quad \text{---} \quad P = P_0 + \frac{1}{\beta} \text{Log}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad \text{---} \quad \frac{\partial P}{\partial x^i} = \frac{1}{\beta \rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x^i}.$$

En se référant à A.R. COOPER [9], si l'on choisit dès le départ $S_t \setminus C_t$ comme constituant dépendant, on associe à P , $L_t \setminus C_t$, C_t , les flux diffusifs respectifs J_P^d , J_L^d , J_C^d .

$$\text{On pose } J(x,t) = \begin{pmatrix} J_P^d(x,t) \\ J_L^d(x,t) \\ J_C^d(x,t) \end{pmatrix}, \quad K(x,t) = \begin{pmatrix} K_P^d(x,t) \\ K_L^d(x,t) \\ K_C^d(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P + \frac{1}{\beta} \text{Log}\left(\frac{[K_S + K_L](x,t)}{\rho_0}\right) \\ [K_L(1 - C_L)](x,t) \\ [K_S C_S + K_L C_L](x,t) \end{pmatrix}$$

Pour $N = 1$, on a, d'après A.R. COOPER [9], la première loi de Fick généralisée:

$$(12) \quad J = -D \frac{\partial K}{\partial x} \text{ où } D \text{ est une matrice } 3 \times 3 \text{ appelée matrice de diffusion.}$$

En fait A.R. COOPER attend J sous la forme

$$J = -\rho \underset{2 \times 2}{D} \frac{\partial K/\rho}{\partial x} \text{ avec } \rho = \text{cte qui équivaut (12) et sous la forme}$$

$$J = -D \left[\begin{array}{l} \frac{\partial K_p^d}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial K_L^d / \rho}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial K_C^d / \rho}{\partial x} \end{array} \right] \quad \text{avec } \rho = \rho(x,t) \text{ qui, là encore, équivaut (12) car}$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \left[\begin{array}{l} \frac{\partial K_p^d}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial K_L^d / \rho}{\partial x} + \beta K_L^d \frac{\partial K_p^d}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial K_C^d / \rho}{\partial x} + \beta K_C^d \frac{\partial K_p^d}{\partial x} \end{array} \right]$$

Remarque 7: On observe, d'après (12), que si la répartition des constituants de la roche n'est pas isotrope, bien que l'on ait choisi $\rho = 1$ pour l'instant, le flux de diffusion associé à une matrice D quelconque n'est e.g. pas nul. Ceci est justifié par la comparaison des résultats expérimentaux sur les fluides aqueux et sur les milieux plus denses des alliages.

Remarque 8: Bien qu'il existe un équilibre local entre $L_t \cap C_t$ et $S_t \cap C_t$, la diffusion de C_t est supposée se produire indépendamment de cet équilibre local.

De plus, on sait (G. de MARSILY [38]) que pour $S_t = \phi, K_L = \text{cte}$ et pour N quelconque, en notations évidentes,

$J = (J_{C,x^1}^d, \dots, J_{C,x^N}^d) = -d_0 \overrightarrow{\text{grad}}(C_L)$ où $d_0 \geq 0$, appelé coefficient de diffusion moléculaire, est isotrope. Si l'on conserve cette isotropie par hypothèse, alors on obtient dans le cas général:

$$(13) \quad J = \begin{pmatrix} J_{P,x^1}^d, \dots, J_{P,x^N}^d \\ \vdots \\ J_{C,x^1}^d, \dots, J_{C,x^N}^d \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} \frac{\partial k_P^d}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial k_P^d}{\partial x^N} \\ \vdots \\ \frac{\partial k_C^d}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial k_C^d}{\partial x^N} \end{pmatrix}$$

Remarque 9: Pour $K_L + K_S = c^{te}$ ($\frac{\partial P}{\partial x} = 0$), dans de nombreux résultats expérimentaux sur les associations de silicates (Y. OISHI [43]; H. ENGELKE [1], A.K.VARSHNEYA [55]), on obtient D matrice constante. D'autre part on a toujours, lorsque les $\frac{\partial K}{\partial x^i}$ tendent vers zéro, l'existence d'une matrice D constante telle que les erreurs relatives sur les termes de J tendent vers zéro (F. SAUER [53]).

Remarque 10: Supposons $K_L + K_S = c^{te}$ ($\frac{\partial P}{\partial x} = 0$) et D constante avec $S_t \neq \emptyset$, $L_t \neq \emptyset$, $C_t \neq \emptyset$. Alors, d'après un résultat de S.R. DE GROOT et P. MAZUR [18], $D = LG$ avec L et G matrices 2x2 réelles symétriques définies positives, L matrice de mobilité et G matrice thermodynamique.

Hypothèse 2: On supposera par la suite D constante de terme général $d_{i,j}$.

Notons qu'il n'existe pas dans la littérature d'expériences de diffusivité pour les systèmes multicomposés avec $N > 1$ et qu'il n'y est pas envisagé de formule de type (13). De plus il est immédiat que, par exemple, dans le passage d'une base cartésienne à une autre les matrices de diffusion restent les mêmes.

On effectue alors le calcul pour $i \in \{1, \dots, N\}$:

$$J_{C,x}^d = - \sum_{j=1}^3 d_{3j} \frac{\partial K_{\mathcal{E}(j)}^d}{\partial x^i} \quad (\text{avec } \mathcal{E}(1) = P, \mathcal{E}(2) = L, \mathcal{E}(3) = C)$$

$$= -(d_{31} \times \frac{1}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + d_{32} \frac{\partial}{\partial x^i} (K_L(1-C_L)) + d_{33} \frac{\partial}{\partial x^i} (K_S C_S + K_L C_L));$$

On obtient:

terme indépendant de l'état du composant chimique

$$(14) \quad J_{C,x}^d = - \left[\frac{d_{31}}{\beta} \times \frac{1}{K_L + K_S} \frac{\partial K_S}{\partial x^i} + \left(\frac{d_{31}}{\beta} \times \frac{1}{K_L + K_S} + d_{32} \right) \frac{\partial K_L}{\partial x^i} + d_{33} \frac{\partial (K_S C_S)}{\partial x^i} + (d_{33} - d_{32}) \frac{\partial (K_L C_L)}{\partial x^i} \right].$$

On a $J^d(x,t) = (J_{C,x^1}^d(x,t), \dots, J_{C,x^N}^d(x,t))$.

On a alors la loi de conservation approchée:

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \int_{\theta} [K_L C_L + K_S C_S](x,t) d\lambda_N = - \int_{\partial\theta} [J_C^+ \cdot n](x,t) ds.$$

Si l'on a assez de régularité pour appliquer le théorème de la divergence et le principe de dérivation sous le signe d'intégration, on obtient:

$$(16) \quad \int_{\theta} \left[\frac{\partial}{\partial t} (K_L C_L + K_S C_S) + \text{div } J_C \right](x,t) d\lambda_N = 0.$$

Alors, d'après un corollaire du théorème de la moyenne, si en $(\bar{x}, t) \in \mathfrak{a}$ toutes les dérivées partielles figurant dans (16) sont continues, on a:

$$(17) \quad \lim_{\theta \rightarrow \bar{x}} \frac{1}{\lambda_N(\theta)} \int_{\theta} \left[\frac{\partial}{\partial t} (K_L C_L + K_S C_S) + \text{div } J_C \right](\bar{x}, t) d\lambda_N = \left[\frac{\partial}{\partial t} (K_L C_L + K_S C_S) + \text{div } J_C \right](\bar{x}, t) = 0$$

qui est la loi de conservation différentielle du problème.

Explicitons cette loi:

$$\text{div } \mathcal{J}_c = \text{div } \mathcal{J}^i + \text{div } \mathcal{J}^d.$$

$$\mathcal{J}^i = \mathcal{J}_L^i + \mathcal{J}_S^i = K_L C_L (V_1^L, \dots, V_N^L) + K_S C_S (V_1^S, \dots, V_N^S)$$

$$\text{div } \mathcal{J}^i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (K_L C_L V_i^L) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (K_S C_S V_i^S).$$

$$(14) \quad \text{div } \mathcal{J}^d = - \sum_{i=1}^N (d_{33} \frac{\partial^2 (K_S C_S)}{\partial x^i{}^2} + (d_{33} - d_{32}) \frac{\partial^2 (K_L C_L)}{\partial x^i{}^2} + \frac{d_{31}}{\beta} \times \frac{1}{K_L + K_S} \frac{\partial^2 K_S}{\partial x^i{}^2} + (\frac{d_{31}}{\beta} \times \frac{1}{K_L + K_S} + d_{32}) \frac{\partial^2 K_L}{\partial x^i{}^2} - \frac{d_{31}}{\beta} (\frac{1}{K_L + K_S} \frac{\partial (K_L + K_S)}{\partial x^i})^2).$$

Terme indépendant de l'état du composant chimique.

D'où au total (17) s'écrit:

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial t} (K_L C_L) + \frac{\partial}{\partial t} (K_S C_S) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (K_L C_L V_i^L) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (K_S C_S V_i^S) = -\text{div } \mathcal{J}^d.$$

Remarque 11: Le terme diffusif \mathcal{J}^d ayant été obtenu expérimentalement à partir de phases immobiles, il faudrait introduire dans la loi de conservation des notions de porosité cinématique, de fraction de phase immobile et mobile. Cependant on négligera ce phénomène car les vitesses V_i^L et V_i^S demeurent faibles, les phases étant alors supposées avoir une diffusion identique, dans chaque étape de leur déplacement, à celle d'une phase immobile.

Hypothèse 3: On supposera par la suite (2) et (7) vérifiées sans qu'obligatoirement (1) le soit et $C_t \subset S_t \cup L_t$.

Remarque 12: On obtient le tableau:

$K_L + K_S$	K_S	$-\text{div } \mathcal{J}^d$
C-constante	K_S -constante	$(C - K_S)(d_{33} - d_{32})\Delta C_L + K_S d_{33} \Delta C_S$
C-constante	$K_S(x, t)$	$d_{32} \Delta K_L + (d_{33} - d_{32}) \Delta(K_L C_L) + d_{33} \Delta(K_S C_S)$

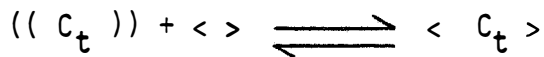
Lorsque K_L ou K_S ou $K_L + K_S$ ne sont plus constants, il y a dans $B(x, \varepsilon^*]$ et pour \bar{t} choisis, par rapport à un (x, t) fixé. compression-dépression respectivement du liquide, du solide, globale. En général dans les modèles d'hydrogéologie on a K_S constante et un liquide compressible.

On peut obtenir une relation supplémentaire du type $C_L = f(C_S)$ en supposant que $\forall (x, t) \in \Omega$, dans $B(x, \varepsilon^*]$, l'équilibre (dit local) est réalisé (c.f. D.S. KORZHINSKII [30], M. FONTEILLES [15], B. GUY [20-24-25]). On a alors la présentation d'après J.J. GRUFFAT [19] et M. PORTHAULT - Laboratoire de chromatographie Lyon I [communication orale]:

On suppose que le composant chimique est en solution idéale dans le fluide mais que, par contre, il constitue une solution régulière dans le solide.

Hypothèse 4: On supposera que l'équilibre local est atteint instantanément, ce qui se justifie si les vitesses V_i^L et V_i^S demeurent faibles.

On peut alors se placer formellement à t fixé pour lequel l'échange s'écrit dans $B(x, \varepsilon^*]$:



où $((C_t))$: élément de C_t en solution dans le fluide (fait partie du fluide),

où $\langle \rangle$: site cristallographique susceptible d'accueillir C_t (fait partie du solide),

où $\langle C_t \rangle$: site cristallographique occupé par C_t (fait partie du solide).

La concentration en (C_t) dans le fluide, notée C_L , est classiquement exprimée en moles/litre. Les volumes étant exprimés en litres,

soit:

$$M = \frac{1}{\text{volume molaire de } C_t}, \text{ alors on a } \tilde{C}_L = MC_L \text{ avec } 0 \leq \tilde{C}_L \leq M.$$

La concentration en $\langle C_t \rangle$ dans le solide, notée \tilde{C}_S , vaut classiquement

[nombre de moles de sites occupés ($\langle C_t \rangle$) dans $B(x, \epsilon^*[]$] / [nombre total de moles de sites ($\langle C_t \rangle + \langle \rangle$) dans $B(x, \epsilon^*[]$]. On a:

$$\lambda_N(B(x, \epsilon^*[S_t)) = \xi(x,t) \times \lambda_N(B(x, \epsilon^*[\wedge (\langle C_t \rangle + \langle \rangle)))$$

où

$1 < \xi(x,t) < + \infty$ est un coefficient de concentration des sites.

On a alors, si l'on suppose qu'un site a même volume que l'élément qu'il reçoit, $\tilde{C}_S = \xi C_S$. On a cependant $0 \leq \tilde{C}_S < 1$.

Remarque 13: Notons que la correspondance exacte entre C_L et \tilde{C}_L n'est

pas envisagée dans la littérature et que $\xi(x,t)$ variable apporte une modification significative des équations. $\xi(x,t)$ dépend de la structure chimique du solide et éventuellement (création de nouveaux sites) de $P(x,t)$. Remarquons encore que l'emploi formel de M ne contredit pas (2).

On considère les coefficients pondérateurs de l'équilibre dans le solide:

$$(19) \begin{cases} \gamma_{\langle C_t \rangle} = e^{\frac{\omega}{kT} (1 - \tilde{C}_S)^2} \\ \gamma_{\langle \rangle} = e^{\frac{\omega}{kT} \tilde{C}_S^2} \end{cases},$$

avec k constante de Boltzmann, T température absolue dans $B(x, \epsilon^*[$ (dont on rappelle qu'elle est choisie indépendante de (x,t)), ω énergie d'interchange supposée constante indépendante de (x,t) .

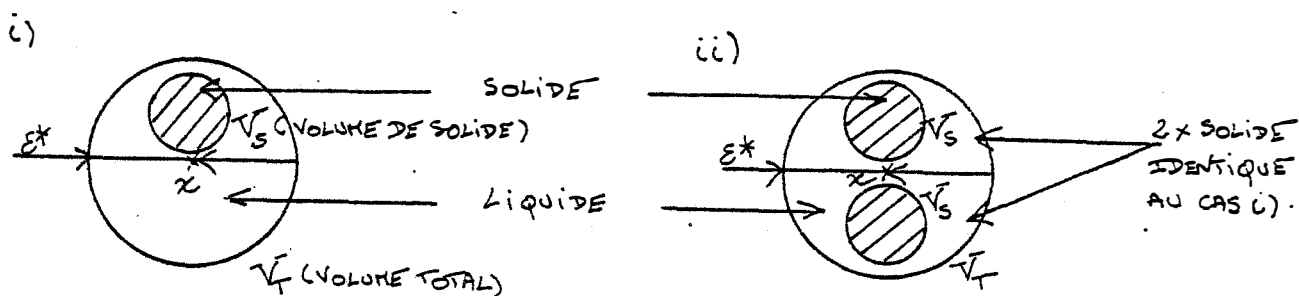
La constante d'équilibre K vaut alors:

$$\frac{\tilde{c}_S e^{\frac{\omega}{kT}(1-\tilde{c}_S)^2}}{\tilde{c}_L(1-\tilde{c}_S)e^{\frac{\omega}{kT}\tilde{c}_S^2}}$$

$$\tilde{c}_L = \frac{1}{K} \times \frac{\tilde{c}_S}{1-\tilde{c}_S} \times e^{\frac{\omega}{kT}(1-2\tilde{c}_S)}$$

$$(20) \quad c_L = \frac{1}{MK} \times \frac{\epsilon c_S}{1-\epsilon c_S} \times e^{\frac{\omega}{kT}(1-2\epsilon c_S)} = f(c_S).$$

Remarque 14: $\tilde{c}_L = \phi(\tilde{c}_S)$ avec ϕ fonction car, en notations évidentes, si l'on considère, par exemple, les deux expériences:



$$+ \begin{cases} \tilde{c}_S^1 \\ \tilde{c}_L^1 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \tilde{c}_S^2 \\ \tilde{c}_L^2 \end{cases}$$

OÙ L'ON A INTRODUIT
DU COMPOSANT CHIMIQUE
JUSQU'À CE QUE $\tilde{c}_S^2 = \tilde{c}_S^1$.

On obtient $\tilde{C}_L^1 = \tilde{C}_L^2 \implies \frac{n_1}{V_T - V_S} = \frac{n_2}{V_T - 2V_S}$; on dit alors classiquement

que ϕ est effectivement indépendante de l'extension des phases.

La loi, $C_L = f(C_S)$, de partage d'un composant chimique entre deux phases, dans $B(x, \epsilon^*)$ fixée où l'état du solide et la température sont fixés, s'appelle classiquement isotherme.

Etude de l'isotherme:

$$C_L = \frac{1}{M K} \times \frac{\epsilon C_S}{1 - \epsilon C_S} \times e^{\frac{\omega}{kT} (1 - 2\epsilon C_S)}$$

$$(21) \quad f'(C_S) = \frac{\epsilon}{M \cdot K} \times e^{\frac{\omega}{kT} (1 - 2\epsilon C_S)} \times \left(\frac{1}{(1 - \epsilon C_S)^2} - \frac{2\omega \epsilon C_S}{kT(1 - \epsilon C_S)} \right)$$

$$f'(C_S) = 0 \implies kT - 2\omega \epsilon C_S (1 - \epsilon C_S) = 0 \implies (\epsilon C_S)^2 - \epsilon C_S + \frac{kT}{\omega} = 0$$

$\tilde{C}_S < 1$ Pour $\omega \neq 0$

$$\Delta = 1 - \frac{2kT}{\omega} \implies f'(C_S) = 0 \text{ pour } C_S^\pm = \frac{1}{\epsilon} \times \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2kT}{\omega}}}{2}$$

Pour $\omega < 0$, $0 \leq C_S < 1 \implies f'(C_S) > 0$, isotherme strict. croissante.

_____ $\omega = 0$, _____

_____ $0 < \frac{\omega}{kT} < 2, C_S^\pm \notin \mathbb{R}$ _____ (signe de ϵ^2), _____

_____ $\frac{\omega}{kT} = 2, C_S^\pm = \frac{1}{2\epsilon}, f'(C_S^\pm) = 0, f'(C_S) \geq 0$ _____

_____ $\frac{kT}{\omega} > 2$, on a le tableau:

C_S	0	C_S^-	C_S^+	/ε	1
$f'(C_S)$	+	0	-	+	
C_L	0	C_L^-	C_L^+	$\rightarrow +\infty$	

$$(22) \quad f''(C_S) = \frac{2\xi^2}{MK} \times \frac{e^{\frac{\omega}{kT}(1-2\xi C_S)}}{(1-\xi C_S)^3} \times \left(1 - \frac{2}{kT}(1-\xi C_S) + \frac{2\omega^2}{k^2 T^2} \xi C_S (1-\xi C_S)^2\right).$$

Posons $X = 1 - \xi C_S$, $\frac{\omega}{kT} = a$.

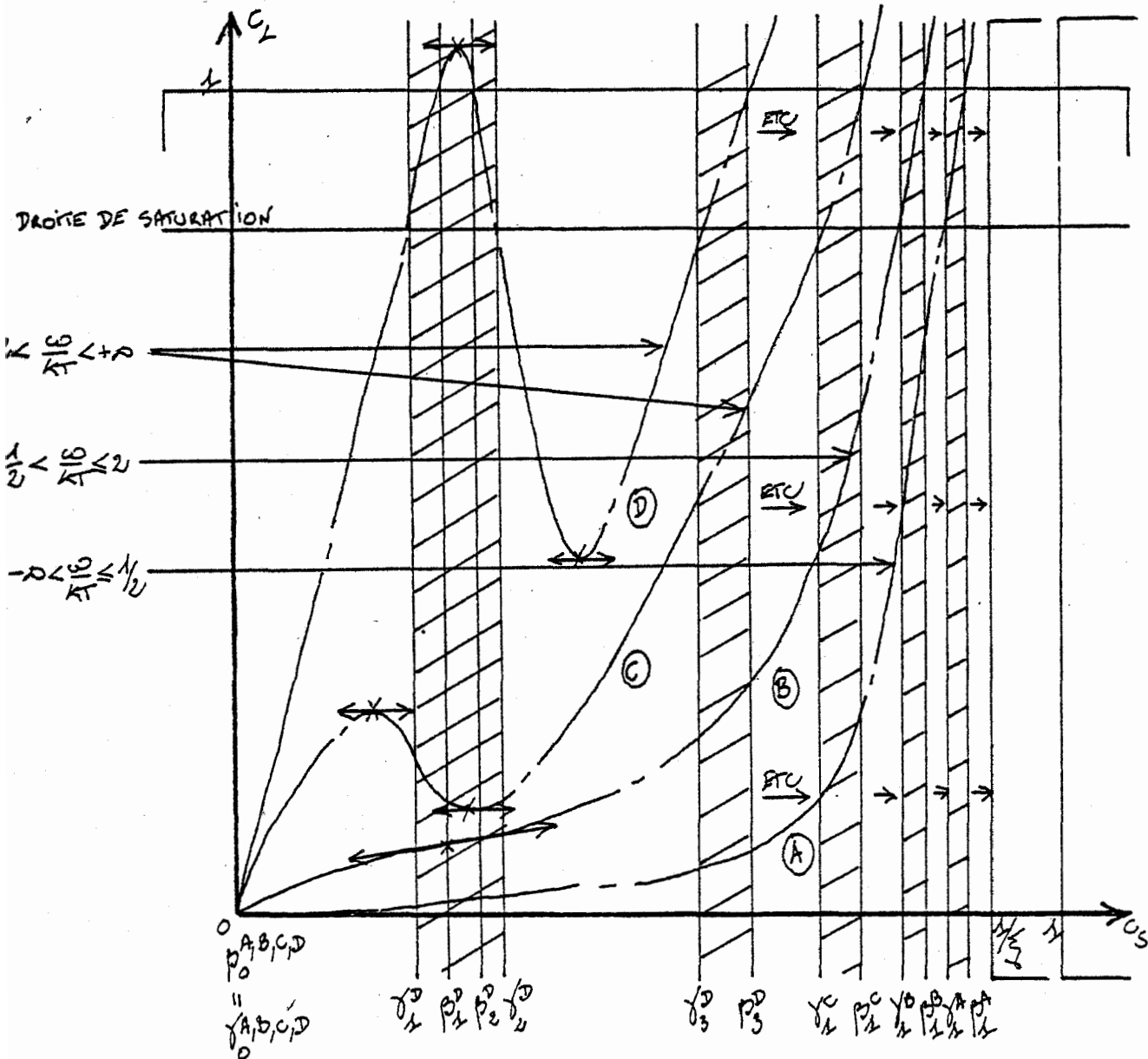
Le signe de $f''(C_S)$ dépend de $1 - 2aX + 2a^2(1 - X)X^2$, où $0 < X \leq 1$.

Pour $a \leq 0$, $f''(C_S) > 0$, f est strictement convexe.

— $a > 0$ et $1 - 2aX \geq 0$ ($\Leftrightarrow \frac{\omega}{kT} < \frac{1}{2}$), $f''(C_S) \geq 0$, —

$f(0) = 0$; e.g. $M \gg 1$ (aplatissement des courbes).

Graphiquement:



Remarque 15: On obtient, en notations évidentes:

$$\tilde{C}_S < 1 \iff C_S < \frac{1}{\xi} < 1,$$

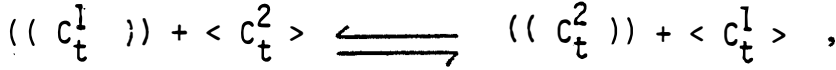
cependant $C_S = \frac{1}{\xi} - 0$ n'est pratiquement jamais atteint car, en général,

$$\frac{1}{\xi} - \beta_i \gg 0.$$

Bien que dans de nombreuses expériences chromatographiques on puisse vérifier $1 = f(\beta_i - 0)$, il y a souvent, lorsque le fluide est saturé en composant chimique, précipitation d'un minéral à partir de la phase fluide (c.f. M. FONTEILLES [15]). On supposera alors l'évolution du système se faire exclusivement dans un domaine de validité fixé $[\gamma_{2j}^*, \gamma_{2j+1}^*]$.

Toujours en notations évidentes:

s'il y a échange du composant chimique C_t^1 avec un autre composant chimique C_t^2 , ce qui s'écrit:



on obtient de même que précédemment:

$$\frac{\tilde{C}_L^1}{\tilde{C}_L^2} = \frac{1}{K} \times \frac{\tilde{C}_S^1}{1-\tilde{C}_S^1} \times e^{\frac{\omega}{kT}(1-2\tilde{C}_S^1)}$$

On a $\tilde{C}_L^2 = M_1 C_L^2$.

En utilisant les notations de D.M. KERRICK [28], on pose:

$$X_{\frac{1}{2}}^S = \frac{((\frac{1}{2}))}{\text{nombre de moles de } < C_t^2 > \text{ dans } B(x, \epsilon^* []} / \frac{((\frac{1}{2}))}{\text{nombre de moles de } < C_t^1 > + < C_t^2 > \text{ dans } B(x, \epsilon^* []} .$$

$$[\text{nombre de moles de } < C_t^2 > \text{ dans } B(x, \epsilon^* [] = M_2 \lambda_N(B(x, \epsilon^* [\cap S_t \cap C_t^2))$$

$$X_{\frac{1}{2}}^S(x, t) = \frac{M_2 \lambda_N(B(x, \epsilon^* [\cap S_t \cap C_t^2))}{M_1 \lambda_N(B(x, \epsilon^* [\cap S_t \cap C_t^1)) + M_2 \lambda_N(B(x, \epsilon^* [\cap S_t \cap C_t^2))} .$$

En divisant numérateur et dénominateur par $\lambda_N(B(x, \epsilon^* [\cap S_t))$

$$X_{\frac{1}{2}}^S = \frac{M_1 C_L^2}{M_1 C_L^1 + M_2 C_L^2} .$$

On a aussi:

$$\lambda_N(B(x, \epsilon^* [\cap S_t)) = \hat{\epsilon}(x, t) \times [\text{nombre de moles de } < C_t^1 > + < C_t^2 > \text{ dans } B(x, \epsilon^* [] .$$

D'où $\tilde{C}_S^2 = X_{\frac{1}{2}}^S = M_1 \hat{\epsilon} C_S^2 \equiv \epsilon_1 C_S^2$.

On a: $\frac{\tilde{C}_L^1}{\tilde{C}_L^2} = \frac{M_1 C_L^1}{M_2 C_L^2} = \frac{x_1^L}{1-x_1^L} = \frac{1}{K} \times \frac{x_1^S}{1-x_1^S} \times e^{\frac{\omega}{kT}(1-2x_1^S)}$

(23) $x_1^L = \frac{1}{1 + K \left(\frac{1}{x_1^S} - 1 \right) e^{\frac{-\omega}{kT}(1-2x_1^S)}}$

(23) est de la forme $y(x) = \frac{1}{1 + \hat{f}(x)}$ (on a aussi $\hat{f}(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{-y(x)}}$)

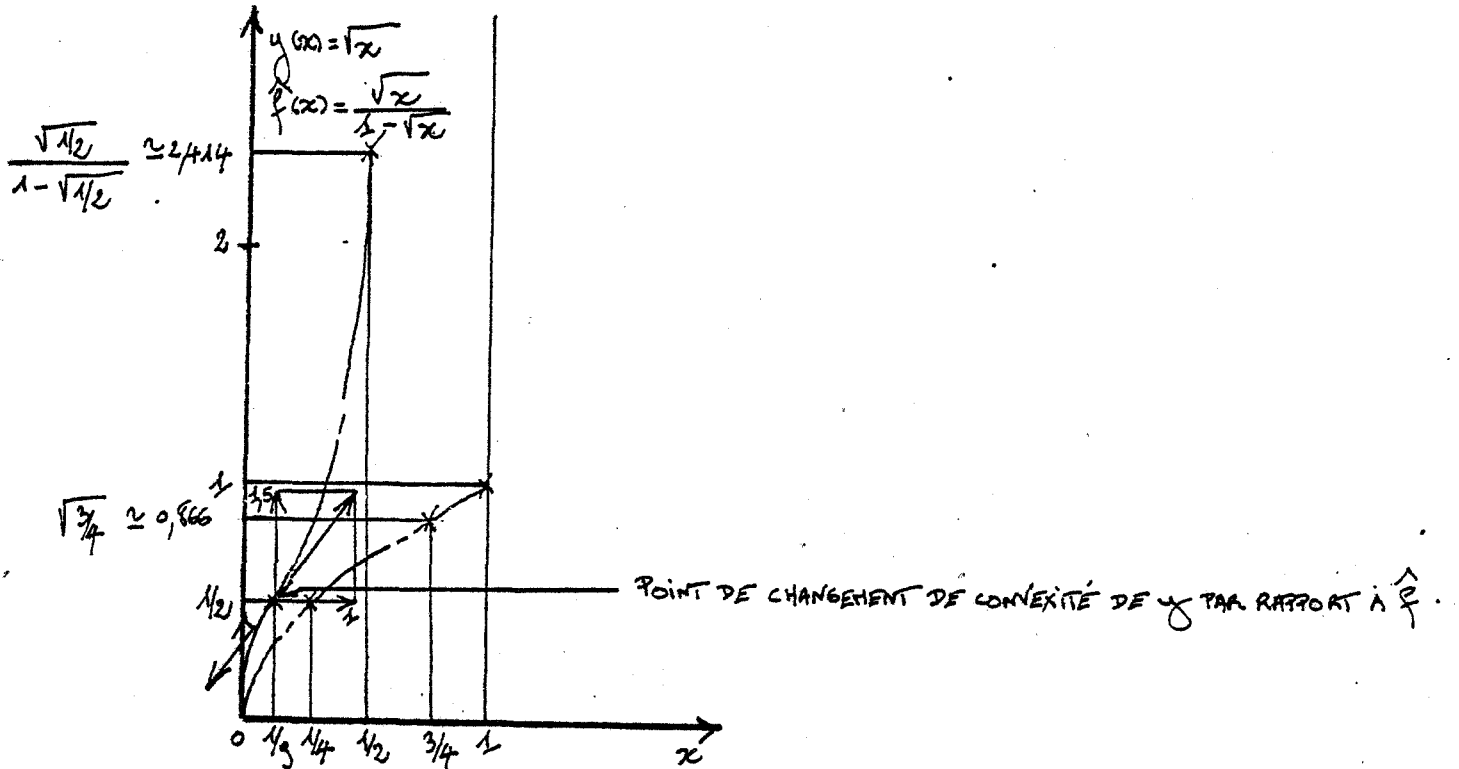
$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = \frac{\hat{f}'(x)}{(1+\hat{f}(x))^2} \\ \hat{f}'(x) = \frac{y'(x)}{(1-y(x))^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y''(x) = \frac{(1+\hat{f}(x))^2 \hat{f}''(x) - 2\hat{f}'^2(x)(1+\hat{f}(x))}{(1+\hat{f}(x))^4} \\ \hat{f}''(x) = \frac{(1-y(x))^2 y''(x) + 2y'^2(x)(1-y(x))}{(1-y(x))^4} \end{array} \right.$$

Les points extrémants de y et de \hat{f} sont les mêmes; ici

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+\hat{f}(x))\hat{f}''(x) - 2\hat{f}'^2(x) \\ (1-y(x))y''(x) + 2y'^2(x) \end{array} \right. \text{ est du signe de } \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}''(x) \\ y''(x) \end{array} \right. \text{ pour } \left\{ \begin{array}{l} \hat{f} \text{ concave} \\ y \text{ convexe} \end{array} \right. ,$$

ce qui peut ne pas être vérifié sinon, auquel cas on a changement de convexité de y par rapport à \hat{f} .

Graphiquement sur un exemple approché d'isotherme expérimentale:

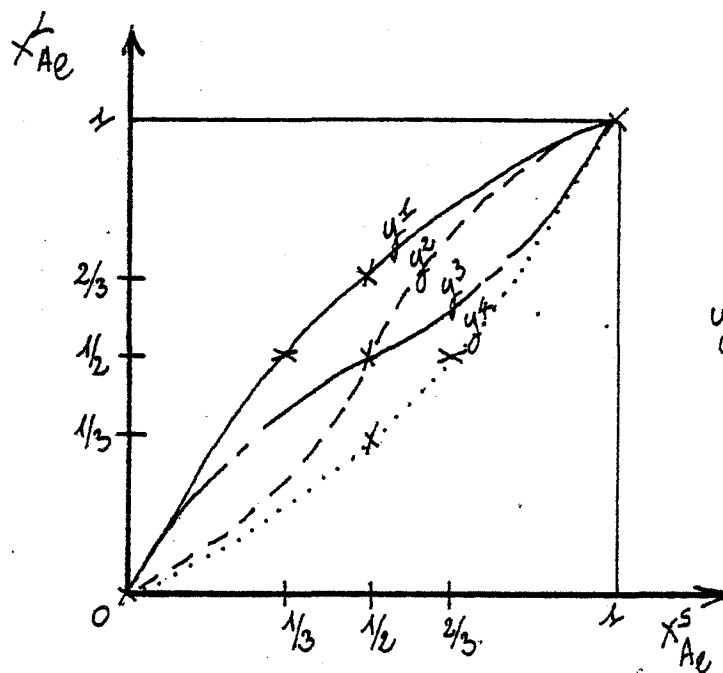


Dans la littérature, les isothermes expérimentales étant, en général, obtenues dans le cas d'un échange de composants chimiques et étant classiquement fournies graphiquement sous la forme (23), il est raisonnable de penser que $\hat{f}(\xi)/M$ -expérimentale représente l'isotherme f -expérimentale que l'on obtiendrait pour le même ω/kT dans le cas (20) d'insertion pure et simple d'un composant chimique, comme c'est le cas pour les équations théoriques.

Pour formellement $M = \xi = 1$ on a $\hat{f} = f$.

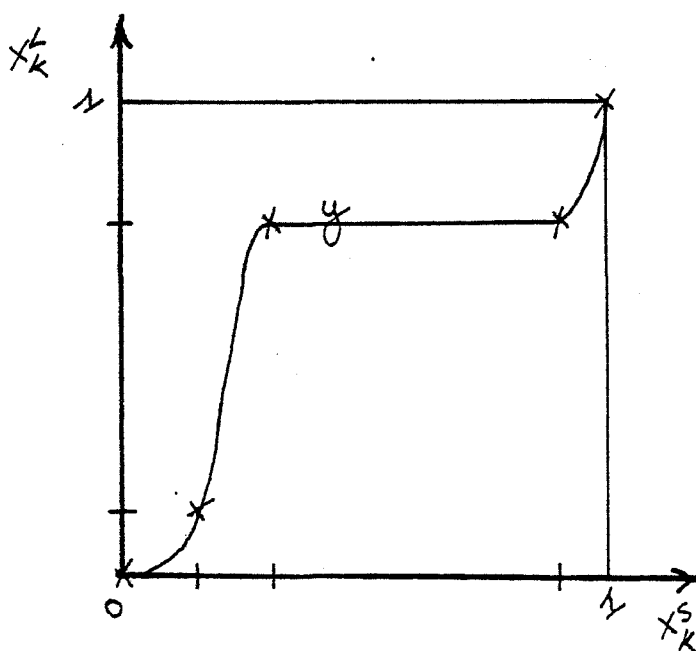
On fournit ici une sélection représentative des isothermes expérimentales: Dans D.M. KERRICK [28] (d'après A. HOFMANN [27]), pour l'échange de Fe et Al entre une phase aqueuse et du grenat, on obtient pour T et P respectivement voisins de 650°C et 2Kb.

a)



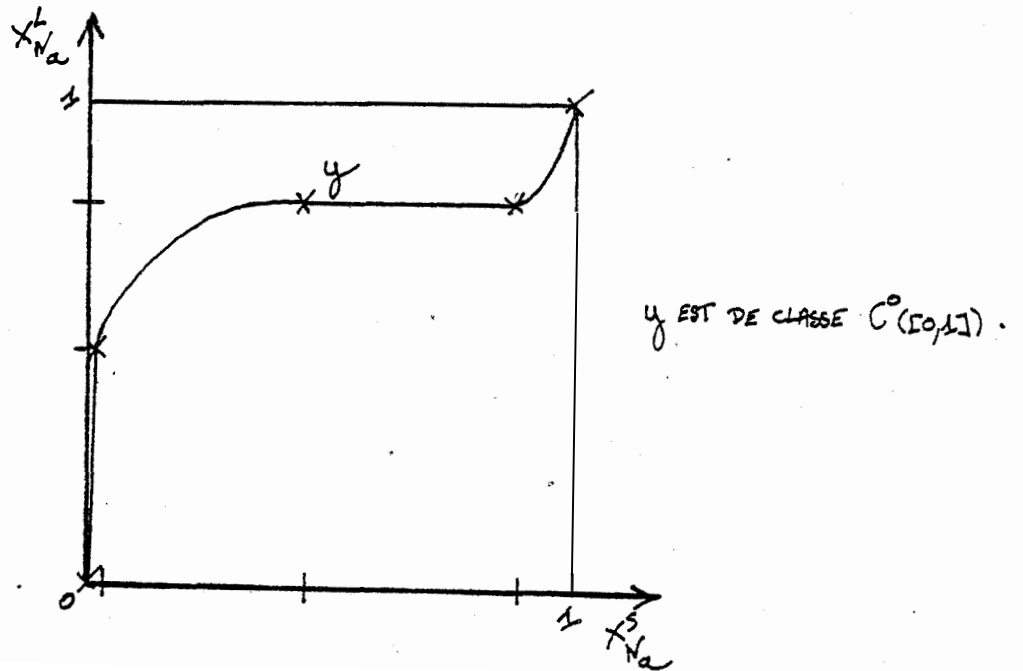
Dans B.GUY [24] on trouve les isothermes expérimentales avec plateau:
 D'après J. ROUX [52], pour l'échange de K et Na entre une solution de chlorure aqueux et un feldspathoïde, on obtient pour T et P respectivement valant 800°C et 2Kb:

b)



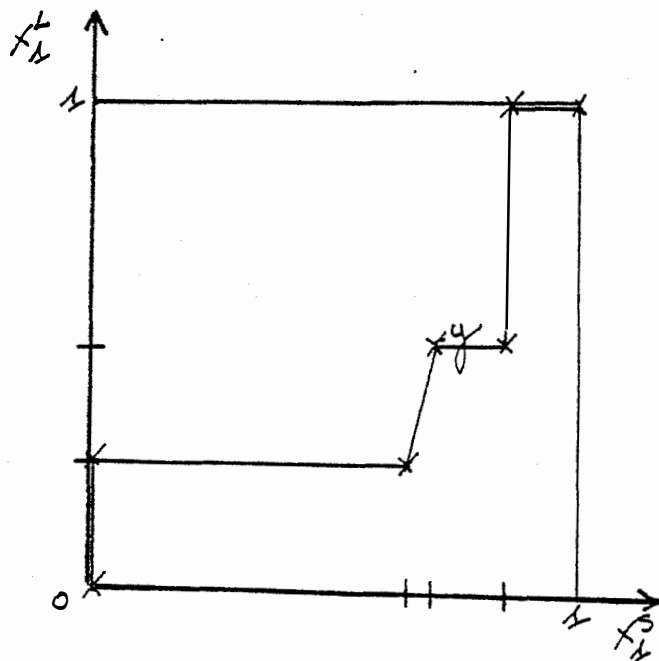
D'après LIYAMA [36], pour l'échange de Na et K entre une solution de chlorure aqueux et un feldspath alcalin, on obtient pour T et P respectivement valant 600°C et 1Kb.

c)



D'après RIST et BONNIVARD [50], on peut même espérer des isothermes du type:

d)



Etudions la stabilité des équilibres de type (20):

Soit τ la variable de temps (formellement différente de la variable t pour laquelle l'équilibre local peut être considéré comme atteint).

On isole $B(x, \epsilon^* [$:

Dans $B(x, \epsilon^* [$ la concentration en composant chimique est constante valant:

$$C = [K_L C_L + K_S C_S](x, t).$$

On adopte alors les notations:

$$K_L \equiv K_L(x, t) ; \xi = \xi(x, t) ; C_L \equiv C_L(\tau) \text{ -formellement } C_L(x, \tau, \epsilon^*) ; \tilde{C}_L \equiv \frac{MC_L}{S}$$

On suppose que l'on a

$$C = K_L C_L + K_S C_S \quad \text{pour } K_L \neq 0 \quad \tilde{C}_L = a \tilde{C}_S + b$$

$$\text{avec } a = -\frac{MK_S}{K_L} \leq 0 \quad \text{et } b = \frac{MC}{K_L} \geq 0.$$

En tenant compte des coefficients pondérateurs $\gamma_{< C_t >}$ et $\gamma_{> C_t >}$:

Dans $((C_t)) + < > \longrightarrow < C_t >$ la vitesse de formation de $< C_t >$

$$\text{vaut } K_1 \tilde{C}_L (1 - \tilde{C}_S) e^{\frac{\omega \tilde{C}_S^2}{kT}}$$

Dans $((C_t)) + < > \longleftarrow < C_t >$ la vitesse de destruction de

$$< C_t > \text{ vaut } K_2 \tilde{C}_S e^{\frac{\omega (1 - \tilde{C}_S)^2}{kT}}$$

D'où

$$\frac{d\tilde{C}_S}{d\tau} = K_1 \tilde{C}_L (1 - \tilde{C}_S) e^{\frac{\omega \tilde{C}_S^2}{kT}} - K_2 \tilde{C}_S e^{\frac{\omega (1 - \tilde{C}_S)^2}{kT}} \equiv v(\tilde{C}_S).$$

Remarquons qu'à l'équilibre on a $\frac{d\tilde{C}_S}{d\tau} = 0$ noté par

$$\text{Pour } C_L(t) = C_L(x, t, \epsilon^*). \quad (20).$$

Si l'on pose:

$$A \equiv 1 - 2 \frac{\omega}{kT} \tilde{C}_S (1 - \tilde{C}_S),$$

$$B \equiv - (a\tilde{C}_S + b)K_1 e^{\frac{\omega}{kT} \tilde{C}_S^2} - K_2 e^{\frac{\omega}{kT} (1 - \tilde{C}_S)^2},$$

$$D \equiv aK_1 (1 - \tilde{C}_S) e^{\frac{\omega}{kT} \tilde{C}_S^2},$$

on obtient:

$$(24) \quad \frac{dV(\tilde{C}_S)}{d\tilde{C}_S} = AB + D.$$

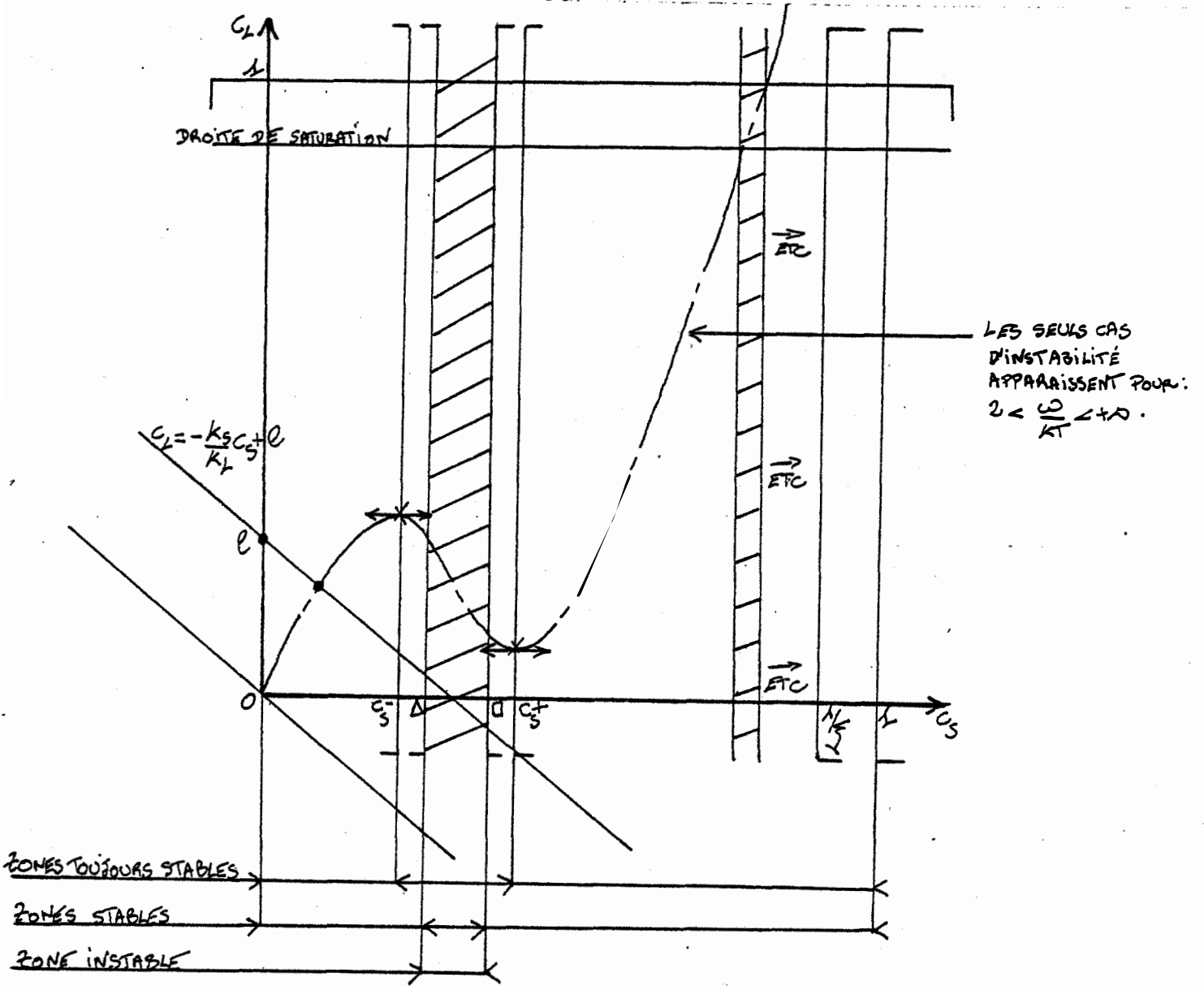
On a: $B \leq 0$; $D \leq 0$;

$$A \leq 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\omega}{kT} \geq 2 \quad \text{et} \quad \frac{1 - 1 - 2\frac{kT}{\omega}}{2} \leq \tilde{C}_S \leq \frac{1 + 1 - 2\frac{kT}{\omega}}{2}$$

seul cas où $AB \geq 0$, $A > 0$ sinon (c.f. étude de l'isotherme).

Si $AB > -D$ en un point de l'isotherme, il y a instabilité car, pour une petite variation de C_S autour de ce point d'équilibre dans le système fermé $B(x, \varepsilon^*]$, la vitesse tend à éloigner ce système de cet équilibre.

Graphiquement on résume la situation par:



Si l'on suppose qu'expérimentalement on est toujours à l'équilibre stable, il est impossible d'obtenir les valeurs expérimentales $\Delta < C_1 < \square$. On supposera alors l'évolution du système se faire dans $[0, \Delta]$ ou dans $[\square, 1]$ exclusif.

A titre d'exemple prenons:

$$\frac{\omega}{kT} = 4 ; K_1 = K_2 = 1 ; M = \xi = 1 ; K_S = K_L = \frac{1}{2} ; \tilde{C}_S = \frac{1+\sqrt{1/2}}{2} - \epsilon, 0 < \epsilon \ll 1.$$

formellement

$$\text{On a alors } a = -1 ; b = \tilde{C}_S + \frac{\tilde{C}_S}{1-\tilde{C}_S} e^{4(1-2\tilde{C}_S)} ;$$

$$\frac{dV(\tilde{C}_S)}{d\tilde{C}_S} = \left(\frac{-1}{1-\tilde{C}_S} + 8\tilde{C}_S \right) e^{4(1-\tilde{C}_S)^2} - (1-\tilde{C}_S) e^{4\tilde{C}_S^2}.$$

ϵ	A B	D	
0,100 000 000	1,970 753 119	- 2,388 727 858	stabilité en \tilde{C}_S
0,500 000 000	6,818 306 567	- 1,065 810 275	instabilité en \tilde{C}_S

→ qui est déjà très grand du point de vue géologique.

Remarque (importante) 16: Les $x \in C_t$ sont à voir comme des marqueurs désignant un point de S_t ou de L_t . Dans la diffusion il n'y a pas de passage des marqueurs de S_t à L_t contrairement au cas de l'équilibre local. Du point de vue de la forme des équations, la roche est supposée se comporter globalement comme un mélange chimique homogène (transport et diffusion) et localement comme un mélange chimique hétérogène (équilibre).

Soit la fonction \hat{f} : $u \mapsto \frac{1}{MK} \times \frac{u}{1-u} e^{\frac{\omega}{kT}(1-2u)}$, alors

(18) devient:

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}(\epsilon C_S) + K_S C_S) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (K_L \hat{f}(\epsilon C_S) V_i^L + K_S C_S V_i^S) = -\text{div } \mathcal{J}^d.$$

On peut disposer expérimentalement de K_L et V_S^L , cependant on peut aussi développer ces quantités.

$$\text{Posons } U_L = K_L V_L.$$

Supposons, par raison de symétrie et du point de vue de la forme des équations, que l'on puisse, aussi bien pour le solide que pour le liquide employer une loi de Darcy généralisée (c.f G. MATHERON [39] et G. de MARSILY [38]).

$$\text{Soit } F_L^S(x,t) = (F_1^S(x,t), \dots, F_N^S(x,t)) = \frac{1}{\lambda_N(B(x, \epsilon^* \cap \frac{L}{S_t}))} \times$$

$$\int_{B(x, \epsilon^* \cap \frac{L}{S_t})} f_L^S(\tilde{x}, t) = (f_1^S(\tilde{x}, t), \dots, f_N^S(\tilde{x}, t)) d\lambda_N$$

avec $f_L^S(\tilde{x}, t)$ force extérieure appliquée au liquide en \tilde{x} au temps t .

La loi de Darcy s'exprime alors par:

$$(26) \quad \begin{pmatrix} U_1^S(x,t) \\ \vdots \\ U_N^S(x,t) \end{pmatrix} = \frac{-Z_L(x,t)}{\mu_L^S} \left(\frac{1}{B_L^S K_L^S(x,t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial K_L^S(x,t)}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial K_L^S(x,t)}{\partial x^N} \end{pmatrix} - \gamma \frac{K_L^S(x,t)}{S} \right) \begin{pmatrix} F_1^S(x,t) \\ \vdots \\ F_N^S(x,t) \end{pmatrix}$$

où Z_L^S est une matrice $N \times N$ symétrique réelle appelée tenseur de perméa-

bilité, β_{LS} coefficient de compressibilité du liquide solide, μ_{LS} coefficient de viscosité du liquide solide.

Remarque 17: Z_{LS} étant une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthogonale β_{LS} de \mathbb{R}^N . On supposera $Z_{LS}(x,t)$ s'écrire sous la forme $\hat{z}_{LS}(x,t) \tilde{Z}_{LS}(x,t)$ où \hat{z}_{LS} vérifie une loi du type Kozeny - Carman soit

$$\hat{z}_{LS} = \frac{L}{(S_{0L}^L K_S)^2}$$

avec S_{0L}^L , surface exposée au fluide solide par volume unité de milieu solide fluide dans $B(x, \epsilon^* [$, qui peut être considérée comme constante, avec

$$S_{0L}^S = S_{0L}^L \equiv S_0,$$

d'après (2) et où $\tilde{Z}_{LS}(x,t)$ est une matrice $N \times N$ indépendante de $K_S(x,t)$ cependant que dépendante de la géométrie du solide liquide (disposition en couches orientées) dans $B(x, \epsilon^* [$. On supposera de plus $\tilde{Z}_{LS} \equiv \tilde{Z}_{LS}(x,t)$ matrice de terme général $\tilde{z}_{i,j}^L$ constante ainsi que $B_L = B_S$ bases que l'on fera coïncider avec les axes de coordonnées (hypothèses vérifiées par exemple pour une stratification fine de même orientation sur tout l'espace).

On désignera par D_{LS} la matrice de diffusion (toujours supposée approchée par une matrice constante) pour laquelle on choisit dès le départ $S_t \setminus C_t$ comme constituant dépendant. En procédant par des méthodes déjà utilisées on obtient explicitement, en notations évidentes, le système différentiel:

$$(27-1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (K_L(x,t) \hat{f}(\epsilon C_S(x,t)) + K_S(x,t) C_S(x,t)) + \sum_{i=1}^N \frac{a}{ax^i} \left(-\frac{(1-K_S(x,t))^3 \tilde{Z}_{ii}^L}{(S_0 K_S(x,t))^2 \mu_L} \right. \\ \left. \left(\frac{1}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t) \right) \hat{f}(\epsilon C_S(x,t)) - \frac{(1-K_L(x,t))^3 \tilde{Z}_{ii}^S}{(S_0 K_L(x,t))^2 \mu_S} \right. \\ \left. \left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) \right) C_S(x,t) \right) = \psi_{3,L}(x,t),$$

$$(27-2) \quad \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{a}{ax^i} \left(-\frac{(1-K_S(x,t))^3 \tilde{Z}_{ii}^L}{(S_0 K_S(x,t))^2 \mu_L} \left(\frac{1}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} - \right. \right. \\ \left. \left. \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t) \right) \right) = \psi_{2,L}(x,t) + \left[\frac{K_L \hat{f}(\epsilon C_S)}{K_L \hat{f}(\epsilon C_S) + K_S C_S} \times \psi_{3,L} \right] (x,t),$$

$$(27-3) \quad \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{a}{ax^i} \left(-\frac{(1-K_L(x,t))^3 \tilde{Z}_{ii}^S}{(S_0 K_L(x,t))^2 \mu_S} \left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \right. \right. \\ \left. \left. \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) \right) \right) = \psi_{2,S}(x,t) + \left[\frac{K_S C_S}{K_L \hat{f}(\epsilon C_S) + K_S C_S} \times \psi_{3,S} \right] (x,t), \text{ avec}$$

$$(27-4) \quad \psi_{K,\tilde{\epsilon}}(x,t) = \sum_{i=1}^N (d_{K3}^{\tilde{\epsilon}} \frac{\partial^2 (K_{\tilde{\epsilon}}(x,t) C_{\tilde{\epsilon}}(x,t))}{\partial x^{i2}} + (d_{K3}^{\tilde{\epsilon}} - d_{K2}^{\tilde{\epsilon}}) \times \\ \frac{\partial^2 (K_{\tilde{\epsilon}}(x,t) C_{\tilde{\epsilon}}(x,t))}{\partial x^{i2}} +$$

27)

$$\frac{d_{K1}^{\varepsilon}}{B} \frac{1}{K_{\varepsilon}(x,t)+K_{\bar{\varepsilon}}(x,t)} \frac{\partial^2 K_{\bar{\varepsilon}}(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{d_{K1}^{\varepsilon}}{B} \frac{1}{K_{\varepsilon}(x,t)+K_{\bar{\varepsilon}}(x,t)} + d_{K2}^{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 K_{\varepsilon}(x,t)}{\partial x^2}$$

$$- \frac{d_{K1}^{\varepsilon}}{B} \left(\frac{1}{K_{\varepsilon}(x,t)+K_{\bar{\varepsilon}}(x,t)} \frac{\partial (K_{\varepsilon}(x,t)+K_{\bar{\varepsilon}}(x,t))}{\partial x} \right)^2, \text{ sur } \Omega,$$

où $\frac{d_{K1}^{\varepsilon}}{B} = L$ et $\frac{d_{K2}^{\varepsilon}}{B} = S,$

où $C_L(x,t) = \frac{1}{MK} \times \frac{\varepsilon(x,t)C_S(x,t)}{1-\varepsilon(x,t)C_S(x,t)} e^{\frac{\omega}{KT}(1-2\varepsilon(x,t)C_S(x,t))} = \hat{f}(\varepsilon C_S(x,t)),$

où suivant les notations du § 9 on a les conditions "initiales"

$$C_S|_{\hat{\partial}\Omega} = C_S^*|_{\hat{\partial}\Omega}, \quad K_L|_{\hat{\partial}\Omega} = K_L^*|_{\hat{\partial}\Omega}$$

et les conditions limites

$$C_S|_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega} = a_S|_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega}, \quad K_L|_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega} = b_L|_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega}$$

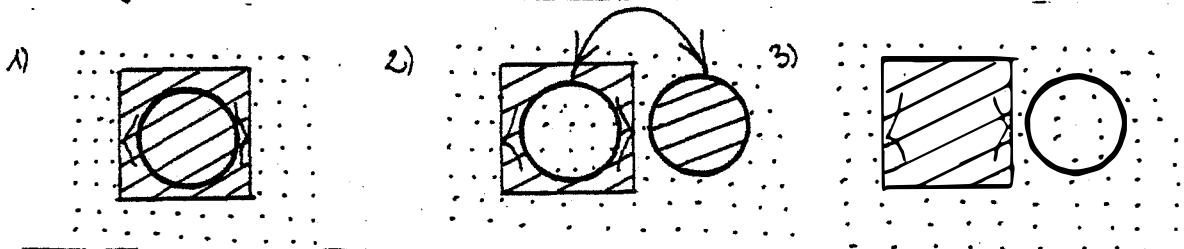
Remarques sur le système 27: On voit que β est en fait un coefficient de compressibilité moyenne de la roche, dépendant de β_L , β_S , K_L , K_S , qui doit être réaliste. Cependant β , que l'on détermine expérimentalement, peut être choisi constant dans les cas où l'on envisage classiquement les équations de diffusion, i.e. $\left| \frac{K_L - M_L}{S} \right| \ll \frac{M_L}{S} = \text{cte.}$

La non figuration de C_S dans les équations de comportement de K_S et K_L est exprimée essentiellement dans la remarque 16; cela signifie qu'il ne faut pas introduire le flux d'échange supplémentaire

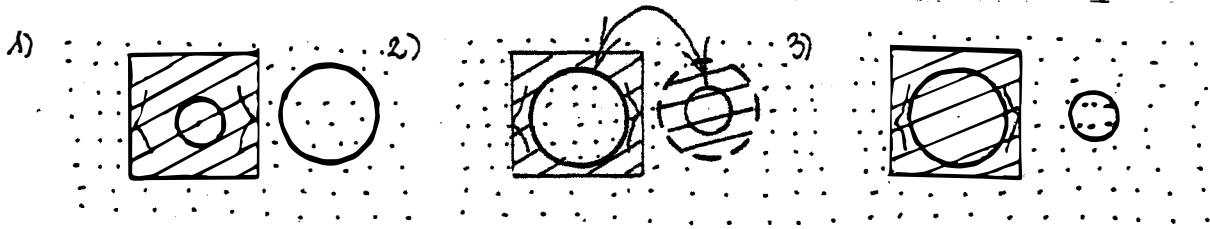
$$C_t \cap L_t \rightleftharpoons C_t \cap S_t$$

pour l'établissement de l'équilibre local après apport de roche dans $B(x, \epsilon^*]$, ce qui se justifie exactement si l'on peut appliquer le schéma de principe:

non échange



échange



- : comportement fluide,
- //// : comportement solide,
- : composant chimique,
- <> : site,

ce qui se justifie pour des concentrations en C_t faibles pour lesquelles, lors de l'établissement de cet équilibre, on peut considérer K_L et K_S (et donc U_L et U_S) constants à x fixé, ce qui se justifie encore si, comme présenté précédemment, il y a échange de composants chimiques pour lesquels on peut considérer $M_1 = M_2$. De $\tilde{C}_L^1 + \tilde{C}_L^2 = \lambda = \text{cte}$, on tire $\tilde{C}_L^1 = \lambda X_I^L$ qui avec (23) et $\tilde{C}_S^1 = X_I^S$ fournit la loi d'équilibre local:

$$\tilde{C}_L^1 = \frac{\lambda}{1 + K\left(\frac{1}{\tilde{C}_S^1} - 1\right)e^{-\frac{\omega}{kT}(1-2\tilde{C}_S^1)}}$$

λ dépendant en fait de l'apport de C_t^1 et C_t^2 , ce qui rend le modèle très complexe sauf si, par exemple, le fluide peut pratiquement être considéré comme représenté par $C_t^1 + C_t^2$ avec $M_1 = M_2 = \lambda \equiv M$, auquel cas \tilde{C}_L^1 a un comportement semblable au cas de non échange, avec les différences de convexité étudiées précédemment.

Pour le remplacement de C_L par $\phi(C_S)$, on écrit, en particulier, avec des notations simplifiées,

$$\phi(C_S(t+dt)) = C_L(t+dt) = -\frac{K_S(t+dt) (=K_S(\tau))}{K_L(t+dt) (=K_L(\tau))} C_S(t+dt) + \frac{\alpha(t+dt) (= \alpha(\tau))}{K_L(t+dt)}$$

et

$$\phi(C_S(t)) = C_L(t) = -\frac{K_S(t)}{K_L(t)} C_S(t) + \frac{\alpha(t)}{K_L(t)}$$

avec τ temps formel pour l'étape d'établissement de l'équilibre local à $t + dt$ après apport de roche dans $B(x, \varepsilon^*]$ entre t et $t + dt$, avec $\alpha = K_L C_L + K_S C_S$. En soustrayant les deux équations précédentes et en divisant par dt que l'on fait tendre vers zéro, on obtient:

$$\frac{\partial(K_L C_L + K_S C_S)}{\partial t} = \frac{\partial(K_L \phi(C_S) + K_S C_S)}{\partial t}$$

Remarque 18: Pour les phénomènes de diffusion, dans ce qui précède, de même que dans ce qui suivra, lorsque l'on considère $K_L + K_S = \text{cte}$, on pourra aussi voir $[K_L + K_S](x,t) = C(t)$. Si l'on ne fixe plus de constituant dépendant et si l'on a $K_L^d + K_C^d + K_S^d = K_L + K_S = \text{cte}$, alors d'après Y. OISHI [44-45] (13) peut s'écrire:

$$(28) \begin{vmatrix} \mathcal{J}_{L,x}^d \\ \mathcal{J}_{C,x}^d \\ \mathcal{J}_{S,x}^d \end{vmatrix} = -1 \begin{pmatrix} d_1 & \eta_1(d_1-d_2) & \eta_1(d_1-d_3) \\ \eta_2(d_2-d_1) & d_2 & \eta_2(d_2-d_3) \\ \eta_3(d_3-d_1) & \eta_3(d_3-d_2) & d_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial K_L^d}{\partial x^i} \\ \frac{\partial K_C^d}{\partial x^i} \\ \frac{\partial K_S^d}{\partial x^i} \end{vmatrix}$$

avec $\eta_1 = \frac{K_L(1-C_L)}{K_L+K_S}$, $\eta_2 = \frac{K_S C_S + K_L C_L}{K_L+K_S}$, $\eta_3 = \frac{K_S(1-C_S)}{K_L+K_S}$; d_1, d_2, d_3 sont appelés coefficients de diffusion intrinsèques et supposés ici constants.

En considérant que $\frac{\partial K_L^d}{\partial x^i} + \frac{\partial K_C^d}{\partial x^i} + \frac{\partial K_S^d}{\partial x^i} = 0$, on obtient par substitution et en prenant, par exemple, $\frac{S}{L_t} \setminus C_t$ comme constituant dépendant:

$$(29) \begin{vmatrix} \mathcal{J}_{L,S}^d \\ \mathcal{J}_{C,x}^d \end{vmatrix} = -1 \begin{pmatrix} d_1 + \eta_1 & d_3 - d_1 & \eta_1(d_3 - d_2) \\ 3 & 3 & 1 & 3 & \eta_1 & 3 & 1 & 2 \\ \eta_2(d_3 - d_1) & d_2 + \eta_2(d_3 - d_2) \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial K_L^d}{\partial x^i} \\ \frac{\partial K_C^d}{\partial x^i} \end{vmatrix}$$

où les coefficients de la matrice peuvent être considérés comme constants lorsque les $\frac{\partial K_i}{\partial x^i}$ ou $|d_1 - d_2| + |d_1 - d_3|$ tendent vers zéro. Le calcul permet de vérifier que l'on a effectivement $\mathcal{J}_{L,x}^d = \mathcal{J}_{C,x}^d + \mathcal{J}_{S,x}^d$. Sous cette forme on n'obtient la symétrie dans toutes les matrices figurant dans les équations possibles de type (29) que pour $d_1 = d_2 = d_3$.

Remarque 19: Si l'on fait intervenir des forces qui dérivent d'un potentiel comme les forces de pesanteur dans une direction z et des forces de poussée dont il est réaliste d'espérer qu'elles s'exercent dans une direction principale du tenseur de perméabilité, on obtient:

$$(30) \quad F_{\underset{S}{L}}(x,t) = (g \frac{\partial z(x)}{\partial x^1}, \dots, g \frac{\partial z(x)}{\partial x^{k-1}}, g \frac{\partial z(x)}{\partial x^k} + F_k^{\underset{S}{L}}(x,t), g \frac{\partial z(x)}{\partial x^{k+1}}, \dots, g \frac{\partial z(x)}{\partial x^N})$$

avec g scalaire accélération de la pesanteur et $F_k^{\underset{S}{L}}(x,t)$ non obligatoirement du signe de $F_k^{\underset{S}{L}}(x,t)$.

Remarque 20: Si l'on ne peut dépasser une pression limite $\bar{p} \leq p_0 - \frac{1}{\beta} \text{Log} \rho_0$ en posant

$$\bar{\rho} = \rho_0 e^{\beta(\bar{p} - p_0)},$$

il faut rajouter au système (27) l'inégalité

$$(31) \quad K_L + K_S \leq \bar{\rho} \leq 1.$$

Les équations (27) pouvant a priori, ceci même pour $K_L + K_S|_{\partial\Omega} \leq \bar{\rho}$, fournir des solutions vérifiant sur un ensemble λ_N non négligeable de Ω_t $K_L + K_S > \bar{\rho}$, il faut alors étudier le comportement du liquide et du solide lorsque $\bar{\rho}$ va être dépassé.

On peut par exemple imaginer qu'entre t pour lequel $K_L + K_S \leq \bar{\rho}$ et $t + dt$, pour x tel que $K_L + K_S(x,t+dt) > \bar{\rho}$, la concentration du liquide dans $B(x, \epsilon^*)$ devienne en fait

$$K_L^*(x, t+dt) = \bar{\rho} \left[\frac{K_L}{K_L + K_S} \right] (x, t+dt)$$

et celle du solide

$$K_S^*(x, t+dt) = \bar{\rho} \left[\frac{K_S}{K_L + K_S} \right] (x, t+dt),$$

ce qui revient à choisir l'état le plus probable, à $t + dt$, dans un tirage aléatoire équiprobabiliste de points de la roche dans $B(x, \epsilon^*)$ de façon à y obtenir une concentration $\bar{\rho}$ de cette roche. Il doit alors y avoir une répartition aléatoire, très difficile à apprécier, du surplus de liquide
de solide soit

$$\bar{\rho} - K_{\underset{S}{L}}^*(x, t+dt).$$

Cependant, du point de vue géologique, le liquide s'écoulant sur de grandes échelles dans une direction moyenne privilégiée et les déplacements du solide demeurant faibles, on peut penser que les conditions limites et initiales font qu'il n'y a pas concentration systématique des constituants de la roche sur un domaine susceptible de devenir critique. En pratique on peut espérer (31) vérifiée.

Si la chimie du système permet de négliger les phénomènes de diffusion, en notations simplifiées on obtient, en posant

$$\phi_{i,\xi}(x,t) = - \frac{(1-K_{\xi})^3}{(S_0 K_{\xi})^2} \frac{\hat{z}_{ji}^{\xi}}{\mu_{\xi}} \left(\frac{1}{\beta_{\xi} K_{\xi}} \frac{\partial K_{\xi}}{\partial x^i} - \gamma K_{\xi} F_i^{\xi} \right),$$

le système:

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K_S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,S}}{\partial x^i} = 0, \\ \frac{\partial K_L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,L}}{\partial x^i} = 0, \end{array} \right. \\ \text{b) } \frac{\partial (K_L \hat{f}(\xi C_S) + K_S C_S)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,L} \hat{f}(\xi C_S) + \phi_{i,S} C_S) = 0, \text{ sur } \Omega, \\ \phi_{i,L} \text{ et } \phi_{i,S} \text{ dépendant de } K_L \text{ et } K_S, \text{ les fonctions inconnues} \\ \text{étant } K_L, K_S, C_S, \text{ les conditions sur } \partial \Omega \text{ étant celles de (27).} \end{array} \right.$$

Remarque 21: Si K_L, K_S, C_S sont suffisamment réguliers sur Ω pour que (32) soit vérifié au sens fort, alors, en reportant (32)-a) dans (32)-b), on obtient: (32)-b) =

$$(33) \quad K_L \frac{\partial \hat{f}(\xi C_S)}{\partial t} + K_S \frac{\partial C_S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\phi_{i,L} \frac{\partial \hat{f}(\xi C_S)}{\partial x^i} + \phi_{i,S} \frac{\partial C_S}{\partial x^i} \right) = 0 =$$

$$(\xi K_L \hat{f}'(\xi C_S) + K_S) \frac{\partial C_S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N (\xi \phi_{i,L} \hat{f}'(\xi C_S) + \phi_{i,S}) \frac{\partial C_S}{\partial x^i} + \hat{f}'(\xi C_S) C_S \left(K_L \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \phi_{i,L} \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \right).$$

pour $\xi K_L \hat{f}'(\xi C_S) + K_S \neq 0$.

$$(33') \quad \frac{\partial C_S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{(\xi \phi_{i,L} \hat{f}'(\xi C_S) + \phi_{i,S})}{(\xi K_L \hat{f}'(\xi C_S) + K_S)} \frac{\partial C_S}{\partial x^i} + \frac{\hat{f}'(\xi C_S) C_S}{(\xi K_L \hat{f}'(\xi C_S) + K_S)} \left(K_L \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \phi_{i,L} \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \right) = 0.$$

Remarque 22: Si $K_L = cte$ (respectivement $K_S = cte$), il peut y avoir déplacement du solide ou du liquide à la vitesse de filtration donnée par

$$\phi_{i,\xi} = \frac{\bar{z}_{ii} \gamma K_{\xi} (1-K_{\xi})^3}{\mu (S_0 K_{\xi})^2} F_i^{\xi} \quad \text{pour } \xi = L \text{ (resp. pour } \xi = S).$$

Un cas fréquent en géologie est celui où le solide est immobile et le liquide s'écoulant compressible. On peut avoir $K_S = cte$ et $F_i^S = 0$; on rappelle que classiquement on divise les forces extérieures en deux classes qui sont les forces (du type de celles) créées par des champs et les forces de liaison; d'où choisir ici $F_i^S = 0$ c'est supposer l'existence sur le solide de forces de liaison qui équilibrent celles des champs éventuels (enchâssement d'une très mince lame de roche). Il se peut aussi que l'on puisse considérer μ_S comme tendant vers $+\infty$.

(32) se transforme alors en:

$$\frac{\partial K_L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,L}}{\partial x^i} = 0 ,$$

$$\frac{\partial (K_L \bar{f}(\xi C_S) + K_S C_S)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial (\phi_{i,L} \bar{f}(\xi C_S))}{\partial x^i} = 0 , \text{ sur } \Omega ,$$

(34) $\phi_{i,L}$ dépendant de K_L , les fonctions inconnues étant K_L, C_S , les conditions sur $\partial\Omega$ étant prises dans (27).

Si l'on ajoute aux hypothèses de (34) l'assertion $K_L = \text{cte}$, il reste uniquement:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,L}}{\partial x^i} = 0 ,$$

$$\frac{\partial (K_L \bar{f}(\xi C_S) + K_S C_S)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial (\phi_{i,L} \bar{f}(\xi C_S))}{\partial x^i} = 0 , \text{ sur } \Omega ,$$

(35) la fonction inconnue étant C_S , les conditions sur $\partial\Omega$ étant prises dans (27).

Si de plus on a $K_S = 1 - K_L = \text{cte}$ pour un solide immobile avec $\xi = \text{cte}$ et un liquide mobile avec $\phi_{i,L} = \text{cte}$ et si $N = 1$, on retrouve l'équation du modèle de D.S. KORZHINSKII [30] présentée par B. GUY [24]:

$$(36) \quad \frac{\partial (K_L f(C_S) + (1 - K_L) C_S)}{\partial t} + K_L V_L \frac{\partial f(C_S)}{\partial x} = 0 \quad \text{où } f(\cdot) \equiv \bar{f}(\xi \cdot) .$$

Remarque 23: On verra au § 7 qu'en général les solutions dites faibles du cas (36) diffèrent de celles du cas (33') écrit, pour

$$f'(C_S) + \frac{K_S}{K_L} \neq 0, \text{ sous la forme}$$

$$(37) \quad \frac{\partial C_S}{\partial t} + \frac{\partial g(C_S)}{\partial x} = 0 \text{ où } g \text{ est une primitive (qui existe ici) au}$$

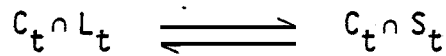
sens classique de $V_L f'(C_S) / (f'(C_S) + K_S/K_L)$. Dans la littérature on trouve des exemples où ce problème est traité sous la forme (37) qui ne fournit pas les bonnes solutions faibles car la quantité conservée est $K_L f(C_S) + (1 - K_L)C_S$ et c'est la forme (36) qui convient.

De plus on a déjà vu que f n'est pas forcément bijective (pour $\frac{\omega}{kT} > 2$)

et l'on verra au § 7 qu'alors, en général, il n'y a pas existence d'une solution faible du cas (36) vérifiant une formule d'entropie de type Orsteinik et que s'il y a existence, la sélection par cette formule ne se fait pas avec unicité.

D'une manière générale c'est sous la forme (32) qu'il faut attendre les solutions faibles de notre problème et, a priori, non pas sous la forme (32)-a)-b)+(33) ou (33').

Si maintenant l'on veut tenir compte du flux d'échange



pour l'établissement de l'équilibre local, on considère qu'un site cristallographique occupé par C_t ne fait pas partie du solide, on va voir que l'on obtient un modèle sensiblement plus complexe.

Reprenons, en les adaptant, les grandes lignes du modèle précédent avec des notations semblables.

On pose $\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[\cap S_t])) = \bar{\xi}(x, t) \times [\text{nombre total de moles de sites } (< C_t > + < >) \text{ dans } B(x, \varepsilon^* []]$

où $0 < \bar{\xi}(x, t) < +\infty$

et $\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[\cap (S_t \setminus C_t)])) = \hat{\xi}(x, t) \times [\text{nombre total de moles de sites } (< C_t > + < >) \text{ dans } B(x, \varepsilon^* []]$

où $0 < \hat{\xi}(x, t) < +\infty$.

$\bar{\xi}$ et $\hat{\xi}$ sont des fonctions que l'on peut qualifier de concentration des sites (contrairement au cas précédent, c'est à $\hat{\xi}$ et non pas à $\bar{\xi}$ que l'on accède).

En faisant le rapport des deux équations précédentes, on obtient

$$\frac{\hat{\xi}(x, t)}{1 - C_S(x, t)} = \bar{\xi}(x, t).$$

On a alors:

$$\tilde{C}_S = \bar{\xi} M C_S = \frac{\hat{\xi} M C_S}{1 - C_S} \equiv \xi \frac{C_S}{1 - C_S}$$

où cependant $0 \leq \tilde{C}_S < 1$.

$$C_L = \frac{1}{MK} \times \frac{\tilde{C}_S}{1 - \tilde{C}_S} \times e^{\frac{\omega}{kT}(1 - 2\tilde{C}_S)} \equiv f(\tilde{C}_S)$$

$$(38) \quad C_L = \frac{1}{MK} \frac{\xi C_S}{1 - (1 + \xi)C_S} \times e^{\frac{\omega}{kT}(1 - 2\frac{\xi C_S}{1 - C_S})} = f\left(\frac{\xi C_S}{1 - C_S}\right) \text{ notée, à } \xi \text{ constant, } f(C_S).$$

On obtient:

$$(39) \quad f'(C_S) = \hat{f}'\left(\frac{\xi C_S}{1-C_S}\right) \times \frac{\xi}{(1-C_S)^2}$$

$$\text{où } \hat{f}'(\tilde{C}_S) = \frac{1}{MK} \times e^{\frac{\omega}{kT}(1-2\tilde{C}_S)} \times \left(\frac{1}{(1-\tilde{C}_S)^2} - \frac{2\omega\tilde{C}_S}{kT(1-\tilde{C}_S)} \right) \quad \text{avec } \tilde{C}_S = \frac{\xi C_S}{1-C_S}.$$

Le comportement de l'isotherme est alors le même que précédemment si l'on

$$\text{pose } C_S^\pm = \frac{\tilde{C}_S^\pm}{\tilde{C}_S^\pm + \xi} \quad \text{avec } \tilde{C}_S^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2kT}{\omega}}}{2} \quad \text{et si l'on remplace la quan-}$$

tité $1/\xi$ de la remarque 15 par $1/(1 + \xi)$.

On obtient aussi:

$$(40) \quad f''(C_S) = \hat{f}''\left(\frac{\xi C_S}{1-C_S}\right) \times \frac{\xi^2}{(1-C_S)^4} + \hat{f}'\left(\frac{\xi C_S}{1-C_S}\right) \times \frac{2\xi(1-C_S)}{(1-C_S)^4}$$

$$\text{où } \hat{f}''(\tilde{C}_S) = \frac{2}{MK} \times \frac{e^{\frac{\omega}{kT}(1-2\tilde{C}_S)}}{(1-\tilde{C}_S)^3} \times \left(1 - \frac{2}{kT}(1-\tilde{C}_S) + \frac{2\omega^2}{kT^2} \tilde{C}_S(1-\tilde{C}_S)^2 \right).$$

Le calcul fournit:

$$f''(C_S) = \frac{2\xi}{MK} \frac{e^{\frac{\omega}{kT}(1-2\tilde{C}_S)}}{(1-C_S)^4(1-\tilde{C}_S)^3} \times \left(\xi(1-2\frac{\omega}{kT}(1-\tilde{C}_S) + \frac{2\omega^2}{kT^2} \tilde{C}_S(1-\tilde{C}_S)^2) \right. \\ \left. + (1-C_S)((1-\tilde{C}_S) - \frac{2\omega}{kT} \tilde{C}_S(1-\tilde{C}_S)^2) \right)$$

$$\text{où } 1-C_S = \frac{\xi}{\xi + \tilde{C}_S}.$$

Posons $X = 1 - \tilde{C}_S$, $\frac{u}{kT} = a$.

Le signe de $f''(C_S)$ est le même que celui de

$$1 - 2aX + 2a^2(1-X)X^2 + \frac{X}{\xi+(1-X)} (1 - 2a(1-X)X), \text{ où } 0 < X \leq 1;$$

on a donc les mêmes résultats que précédemment.

Pour ce qui est de l'échange du composant chimique C_t^1 avec un autre composant chimique C_t^2 , on pose:

$$\lambda_N(B(x, \epsilon^*[S_t]) = \bar{\xi}(x, t) \times [\text{nombre de moles de } < C_t^1 > + < C_t^2 > \text{ dans } B(x, \epsilon^*[]]$$

et

$$\lambda_N(B(x, \epsilon^*[(S_t \setminus (C_t^1 + C_t^2))]) = \hat{\xi}(x, t) \times [\text{nombre de moles de } < C_t^1 > + < C_t^2 > \text{ dans } B(x, \epsilon^*[]].$$

En faisant le rapport des deux équations précédentes, on obtient

$$\frac{\hat{\xi}(x, t)}{1 - (C_S^1(x, t) + C_S^2(x, t))} = \bar{\xi}(x, t).$$

$$\text{D'où: } \frac{1}{C_S^2} = X_1^S = \frac{1}{\xi M_1 C_S^2} = \frac{1}{\xi M_1} \frac{C_S^2}{1 - (C_S^1 + C_S^2)} \equiv \xi_1 \frac{C_S^2}{1 - (C_S^1 + C_S^2)}.$$

On a de plus:

$$\frac{X_1^S}{M_1 C_S^2} (1 - (C_S^1 + C_S^2)) = \frac{1 - (C_S^1 + C_S^2)}{M_1 C_S^1 + M_2 C_S^2} = \hat{\xi},$$

d'où

$$(\hat{\epsilon}M_1 + 1)C_S^1 + (\hat{\epsilon}M_2 + 1)C_S^2 = 1 \quad \text{---} \quad C_S^2 = \frac{1 - (\hat{\epsilon}M_1 + 1)C_S^1}{(\hat{\epsilon}M_2 + 1)}$$

$$\text{---} \quad \tilde{C}_S^1 = \frac{M_1 C_S^1}{M_1 C_S^1 + M_2 C_S^2} = \frac{M_1 C_S^1 (\hat{\epsilon}M_2 + 1)}{M_2 + (M_1 - M_2) C_S^1} \quad \text{---} \quad \frac{\tilde{C}_S^1}{\tilde{C}_S^2} = \frac{\tilde{C}_S^1}{1 - \tilde{C}_S^1} = \frac{M_1}{M_2} \times \frac{C_S^1 (1 + \hat{\epsilon}M_2)}{1 - C_S^1 (1 + \hat{\epsilon}M_1)}$$

En tenant compte de

$$\frac{\tilde{C}_L^1}{\tilde{C}_L^2} = \frac{M_1}{M_2} \times \frac{C_L^1}{C_L^2}, \quad \text{l'équation d'équilibre local s'écrit:}$$

$$(41) \quad \frac{C_L^1}{C_L^2} = \frac{1}{K} \times \frac{C_S^1 (1 + \hat{\epsilon}M_2)}{1 - C_S^1 (1 + \hat{\epsilon}M_1)} \times e^{\frac{\omega}{kT} (1 - 2 \left(\frac{M_1 C_S^1 (\hat{\epsilon}M_2 + 1)}{M_2 + (M_1 - M_2) C_S^1} \right))}$$

où $\hat{\epsilon}$ peut être constante.

Remarquons aussi que si l'on a $\tilde{C}_L^1 + \tilde{C}_L^2 = \lambda = \text{cte}$, on en tire $C_L^1 = \lambda X_L^1$ qui, avec (23) et $\tilde{C}_S^1 = X_S^1$, fournit la loi d'équilibre local:

$$C_L^1 = \frac{\lambda}{M_1 (1 + K \left(\frac{M_2}{M_1} \times \frac{1 - C_S^1 (1 + \hat{\epsilon}M_1)}{C_S^1 (1 + \hat{\epsilon}M_2)} \right) \times e^{-\frac{\omega}{kT} (1 - 2 \left(\frac{M_1 C_S^1 (\hat{\epsilon}M_2 + 1)}{M_2 + (M_1 - M_2) C_S^1} \right))}}; \quad \text{---}$$

λ dépend en fait de l'apport de C_t^1 et C_t^2 , ce qui rend le modèle très complexe.

Pour l'étude de la stabilité des équilibres de type (38), on considère ici, pour $B(x, \epsilon^* [$ isolée, $\epsilon_L + S$ volume de liquide que l'on transforme arbitrairement en solide à partir de t jusqu'au temps formel τ .

$\epsilon_S + L$

Posons: $\epsilon = \epsilon_L + S - \epsilon_S + L$,
 $a = \lambda_N(L_t \cap B(x, \epsilon^*))$,
 $b = \lambda_N(B(x, \epsilon^*))$,
 $c = \lambda_N(S_t \cap B(x, \epsilon^*))$,
 $d = \lambda_N(C_t \cap L_t \cap B(x, \epsilon^*))$,
 $e = \lambda_N(C_t \cap S_t \cap B(x, \epsilon^*))$.

Alors: $K_L(x, \tau) = (a - \epsilon)/b$,
 $K_S(x, \tau) = (c + \epsilon)/b$,
 $C_L(x, \tau) = (d - \epsilon)/(a - \epsilon)$,
 $C_S(x, \tau) = (e + \epsilon)/(c + \epsilon)$.

En introduisant $C_L(x, \tau)$ et $C_S(x, \tau)$ dans $\frac{d\tilde{C}_S}{d\tau}$, cette dernière quantité devient une fonction de ϵ que l'on notera $v(\epsilon)$;
 Si l'on pose:-

$$A(\epsilon) \equiv \tilde{C}'_L(\epsilon) - \frac{2\omega}{kT} \tilde{C}_S(\epsilon)(1 - \tilde{C}_S(\epsilon))\tilde{C}'_S(\epsilon) ,$$

$$B(\epsilon) \equiv -K_1 \tilde{C}_L(\epsilon) e^{\frac{\omega}{kT} \tilde{C}_S^2(\epsilon)} - K_2 e^{\frac{\omega}{kT} (1 - \tilde{C}_S(\epsilon))^2} ,$$

$$D(\epsilon) \equiv \tilde{C}'_L(\epsilon)(1 - \tilde{C}_S(\epsilon))K_1 e^{\frac{\omega}{kT} \tilde{C}_S^2(\epsilon)} ,$$

avec $\tilde{C}_L(\epsilon) = M \left(\frac{d - \epsilon}{a - \epsilon} \right)$, $\tilde{C}'_L(\epsilon) = M \frac{(d - a)}{(a - \epsilon)^2}$
 et $\tilde{C}_S(\epsilon) = \xi \left(\frac{e + \epsilon}{c - \epsilon} \right)$, $\tilde{C}'_S(\epsilon) = \frac{\xi}{(c - \epsilon)^2}$,

on a alors le calcul:

$$(42) \quad \left. \frac{dv(0)}{d\epsilon} = [A(\epsilon) \times B(\epsilon) + D(\epsilon)] \right|_{\epsilon = 0} .$$

On a : $B(0) \leq 0$; $\tilde{C}'_L(0) = M \frac{(d-a)}{a^2} \leq 0$ ————— $D(0) \leq 0$;

$\tilde{C}'_S(0) = \frac{\xi}{(c-e)} \geq 0$ ————— $A(0) \leq 0$ pour $\frac{\omega}{kT} \geq 2$ et

$\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2kT}{\omega}}}{2} \leq \tilde{C}_S \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2kT}{\omega}}}{2}$ seul cas où $A(0) B(0) \geq 0$,

$A(0) > 0$ sinon (c.f. étude de l'isotherme).

Si $A(0) B(0) > -D(0)$ en un point de l'isotherme, il y a instabilité car, pour une petite variation de \tilde{C}_S autour de ce point d'équilibre dans le système fermé $B(x, \epsilon^*]$, la vitesse tend à éloigner ce système de cet équilibre.

A titre d'exemple prenons:

$\frac{\omega}{kT} = 4$; $K_1 = K_2 = 1$; $M = \xi = 1$; $K_S = K_L = \frac{1}{2}$; $\tilde{C}_S(0) = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} - \epsilon$,
 C'est un \tilde{C}_S^+ .
 $0 < \epsilon \ll 1$.

On a alors: $\tilde{C}_L(0) = d/a$, $\tilde{C}'_L(0) = (d-a)/a^2$,
 $\tilde{C}_S(0) = e/(c-e)$, $\tilde{C}'_S(0) = 1/(c-e)$.

$\tilde{C}_L(0) = \frac{\tilde{C}_S(0)}{1 - \tilde{C}_S(0)} e^{4(1 - 2\tilde{C}_S(0))} \equiv \alpha$,

$\tilde{C}_S(0) = \frac{1}{\frac{c}{e} - 1}$ où $\frac{c}{e} = 1 + \frac{1}{\tilde{C}_S(0)} \equiv \beta$.

Posons $a = \mu_1 b$, $d = \mu_2 b$, $c = \mu_3 b$, $e = \mu_4 b$

où $1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $1 \geq \mu_3 \geq \mu_4 \geq 0$, $1 \geq \mu_1 + \mu_3$.

On a encore: $\mu_1 = \mu_3 = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{d}{a} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ ————— $\mu_2 = \alpha/2$;
 $\beta = \frac{c}{e} = \frac{\mu_3}{\mu_4}$ ————— $\mu_4 = 1/2\beta$.

$$\text{D'où } \tilde{C}_L(0) = \frac{2(\alpha-1)}{b} = \frac{2(\tilde{C}_L(0)-1)}{b}$$

et

$$\tilde{C}_S(0) = \frac{2}{b(1-\frac{1}{\beta})} = \frac{2(\tilde{C}_S(0)-1)}{b}$$

On évalue alors le signe de $b \frac{d\tau(0)}{d\varepsilon} = b(A(0) B(0) + D(0))$.

$$bA(0) = 2(\tilde{C}_S(0)+1)(1-8\tilde{C}_S(0)(1-\tilde{C}_S(0))) ;$$

$$B(0) = -\tilde{C}_L(0) e^{4\tilde{C}_S^2(0)} - e^{4(1-\tilde{C}_S(0))^2} ;$$

$$bD(0) = 2(\tilde{C}_L(0)-1)(1-\tilde{C}_S(0)) e^{4\tilde{C}_S^2(0)} ; \text{ qui fournit le tableau:}$$

ε	\tilde{C}_S	\tilde{C}_L	$bA(0) B(0)$	$bD(0)$	
0,010 000 000	0,843 553 391	0,345 238 870	1,449 530 057	-3,528 776 444	stabilité en \tilde{C}_S
0,100 000 000	0,753 553 391	0,402 213 343	8,812 321 468	-1,177 387 762	instabilité en \tilde{C}_S

→ qui est déjà grand du point de vue géologique.

De même que pour (27), on obtient le système différentiel:

$$(43-1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(K_L(x,t) f\left(\frac{\xi(x,t)C_S(x,t)}{1-C_S(x,t)}\right) + K_S(x,t)C_S(x,t) \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{(1-K_S(x,t))^3}{(S_0 K_S(x,t))^2} \frac{z_{ii}^L}{\mu_L} \left(\frac{1}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t) \right) f\left(\frac{\xi(x,t)C_S(x,t)}{1-C_S(x,t)}\right) \right. \\ \left. - \frac{(1-K_L(x,t))^3}{(S_0 K_L(x,t))^2} \frac{z_{ii}^S}{\mu_S} \left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) \right) C_S(x,t) \right) = \\ = \psi_{3,L}(x,t),$$

$$(43-2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(K_L(x,t) \left(1 - f\left(\frac{\xi(x,t)C_S(x,t)}{1-C_S(x,t)}\right) \right) \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_S(x,t))^3}{(S_0 K_S(x,t))^2} \frac{z_{ii}^L}{\mu_L} \left(\frac{1}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t) \right) \left(1 - f\left(\frac{\xi(x,t)C_S(x,t)}{1-C_S(x,t)}\right) \right) \right) = \psi_{2,L}(x,t),$$

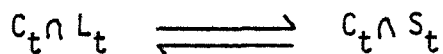
$$(43-3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(K_S(x,t) (1-C_S(x,t)) \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_L(x,t))^3}{(S_0 K_L(x,t))^2} \frac{z_{ii}^S}{\mu_S} \left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) \right) (1-C_S(x,t)) \right) = \psi_{2,S}(x,t),$$

avec (27-4), sur Ω ,

$$\text{où } C_L(x,t) = \frac{1}{MK} \frac{\xi(x,t)C_S(x,t)}{1-(1+\xi(x,t))C_S(x,t)} e^{\frac{\omega}{KT} \left(1 - 2 \frac{\xi(x,t)C_S(x,t)}{1-C_S(x,t)} \right)} = \\ = f\left(\frac{\xi(x,t)C_S(x,t)}{1-C_S(x,t)}\right), \text{ les conditions sur } \partial\Omega \text{ étant celles}$$

de (27).

Remarques sur le système (43): (43-2) (respectivement (43-3)) est l'équation de conservation de $L_t \setminus C_t$ (respectivement $S_t \setminus C_t$). Par contre S_t et L_t sont des quantités qui ne se conservent pas à cause du flux d'échange



pour l'établissement de l'équilibre local après apport de roche dans $B(x, \epsilon^*]$. En ajoutant (43-2) à (43-3) et en tenant compte de (43-1), on trouve l'équation de conservation de $L_t + S_t$.

Si la chimie du système permet de négliger les phénomènes de diffusion, (32) devient:

$$(44) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{\partial}{\partial t} (K_S (1 - C_S)) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,S} (1 - C_S)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (K_L (1 - \hat{f}(\frac{\xi C_S}{1 - C_S}))) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,L} (1 - \hat{f}(\frac{\xi C_S}{1 - C_S}))) = 0, \\ \text{b) } \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}(\frac{\xi C_S}{1 - C_S}) + K_S C_S) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,L} \hat{f}(\frac{\xi C_S}{1 - C_S}) + \phi_{i,S} C_S) = 0, \end{array} \right.$$

sur Ω , $\phi_{i,L}$ et $\phi_{i,S}$ dépendant de K_L et K_S , les fonctions inconnues étant K_L , K_S , C_S , les conditions sur $\partial\Omega$ étant celles de (27).

Un cas fréquent en géologie est celui où le solide est immobile en dehors des phases d'équilibre local et le fluide s'écoulant compressible.

D'où $\frac{\partial}{\partial t} (K_S (1 - C_S)) = 0$, ce qui entraîne $\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,S} (1 - C_S)) = 0$

qui sera supposé réalisé par le fait que l'on puisse considérer μ_S comme tendant vers $+\infty$.

(44) se transforme alors en:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial K_S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (K_S C_S) , \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(K_L \left(1 - \hat{f} \left(\frac{\xi C_S}{1 - C_S} \right) \right) \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\phi_{i,L} \left(1 - \hat{f} \left(\frac{\xi C_S}{1 - C_S} \right) \right) \right) = 0 , \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(K_L \hat{f} \left(\frac{\xi C_S}{1 - C_S} \right) + K_S \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\phi_{i,L} \hat{f} \left(\frac{\xi C_S}{1 - C_S} \right) \right) = 0 ,
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

avec les conditions de (44).

Si l'on ajoute aux hypothèses de (45) l'assertion

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(K_L \left(1 - \hat{f} \left(\frac{\xi C_S}{1 - C_S} \right) \right) \right) = 0 ,$$

il reste uniquement:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} K_S = \frac{\partial}{\partial t} (K_S C_S) , \\
 & \frac{\partial}{\partial t} K_L = \frac{\partial}{\partial t} \left(K_L \hat{f} \left(\frac{\xi C_S}{1 - C_S} \right) \right) , \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,L}}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\phi_{i,L} \hat{f} \left(\frac{\xi C_S}{1 - C_S} \right) \right) , \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (K_L + K_S) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,L}}{\partial x^i} = 0 ,
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

avec les conditions de (44).



INTRODUCTION AU §-3

On présente dans ce paragraphe une modélisation, avec des variantes, du problème de la formation des Skarns lorsqu'on considère plusieurs constituants chimiques figurant dans la roche.

On reprendra, en les adaptant, les grandes lignes du paragraphe précédent. Cependant, on sera amené à introduire des fonctions de couplage qui permettent de définir des classes d'équivalence correspondant à des ensembles de constituants chimiques interactifs.

On obtiendra un système d'équations aux dérivées partielles.



PARAGRAPHE 3Modélisation du problème géologique à plusieurs constituants

On utilisera ici, pour simplifier, des notations clairement semblables à celles utilisées pour le problème à un seul composant chimique.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ le nombre de composants chimiques ; on définit ainsi clairement pour $j \in \{1, \dots, p\}$ les $C_{j,t}$ et les $C_{j,L}$.

De même on peut considérer, en notations évidentes, le flux J_j du j -ième composant chimique au temps t en $x \in \Omega_t$ (relativement à ε^*) soit :

$J_j = J_j^i + J_j^d$ où J_j^i et J_j^d sont respectivement des flux d'infiltration et de diffusion du j -ième composant chimique.

$J_j^i = J_{j,L}^i + J_{j,S}^i$ où $J_{j,L}^i$ et $J_{j,S}^i$ sont respectivement des flux d'infiltration du j -ième composant contenu dans le liquide et dans le solide.

On prend :

$$(1) \quad J_{j,L}^i = K_{L,S}^i C_{j,L} V_{L,S}.$$

Considérons $L_t \setminus \left(\bigoplus_{j=1}^p C_{j,t} \right)$, $C_{1,t}, \dots, C_{p,t}, S_t \setminus \left(\bigoplus_{j=1}^p C_{j,t} \right)$.

On supposera que, bien qu'il existe des équilibres (chimiques) locaux entre tous les $L_t \cap C_{j,t}$ et $S_t \cap C_{j,t}$, la diffusion des $C_{j,t}$ se produit indépendamment de ces équilibres locaux. Cela revient, là encore, à supposer que les $p + 2$ composants chimiques précédents forment un système complètement multi-composé au sens de A.R. COOPER [9].

Si l'on choisit dès le départ $S_t \setminus \left(\bigoplus_{j=1}^p C_{j,t} \right)$ comme constituant dépendant, on associe à $P, L_t \setminus \left(\bigoplus_{j=1}^p C_{j,t} \right), C_{1,t}, \dots, C_{p,t}$, les flux diffusifs respectifs

$$J_p^d, J_L^d, J_{C_1}^d, \dots, J_{C_p}^d$$

On pose $J(x,t) = \begin{pmatrix} J_P^d(x,t) \\ J_L^d(x,t) \\ J_{C_1}^d(x,t) \\ \vdots \\ J_{C_p}^d(x,t) \end{pmatrix}$, $K(x,t) = \begin{pmatrix} K_P^d(x,t) \\ K_L^d(x,t) \\ K_{C_1}^d(x,t) \\ \vdots \\ K_{C_p}^d(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 + \frac{1}{\beta} \text{Log} \left(\frac{[K_S + K_L](x,t)}{P_0} \right) \\ [K_L (1 - \sum_{j=1}^p C_{j,L})](x,t) \\ [K_S C_{1,S} + K_L C_{1,L}](x,t) \\ \vdots \\ [K_S C_{p,S} + K_L C_{p,L}](x,t) \end{pmatrix}$.

Pour $N=1$, on a, d'après A.R. COOPER [9], la première loi de Fick généralisée :

(2) $J = -D \frac{\partial K}{\partial x}$ où D est une matrice $(p+2) \times (p+2)$ appelée matrice de diffusion. De la même façon qu'avec un seul composant chimique, pour des raisons d'isotropie, on obtient dans le cas général :

$$(3) J = \begin{pmatrix} J_{P,x^1}^d, \dots, J_{P,x^N}^d \\ \vdots \\ J_{C_p,x^1}^d, \dots, J_{C_p,x^N}^d \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} \frac{\partial K_P^d}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial K_P^d}{\partial x^N} \\ \vdots \\ \frac{\partial K_{C_p}^d}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial K_{C_p}^d}{\partial x^N} \end{pmatrix}$$

Là encore on supposera par la suite D constante de terme général $d_{m,k}$. On effectue alors le calcul pour $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$ et $\hat{j} = j + 2$.

$$J_{C_j,x^i}^d = - \sum_{k=1}^{p+2} d_{j,k}^{\hat{j}} \frac{\partial K_{\epsilon}^d}{\partial x^i} (K) \text{ (avec } \epsilon(1) = P, \epsilon(2) = L, \epsilon(3) = C_1, \dots, \epsilon(p+2) = C_p)$$

$$= - (d_{j,1}^{\hat{j}} \times \frac{1}{\beta P} \frac{\partial P}{\partial x^i} + d_{j,2}^{\hat{j}} \frac{\partial}{\partial x^i} (K_L (1 - \sum_{\ell=1}^p C_{\ell,L})) + d_{j,3}^{\hat{j}} \frac{\partial}{\partial x^i} (K_S C_{1,S} + K_L C_{1,L})$$

$$+ \dots + d_{j,p+2}^{\hat{j}} \frac{\partial}{\partial x^i} (K_S C_{p,S} + K_L C_{p,L})) ; \text{ on obtient :}$$

terme indépendant de l'état des composants chimiques.

$$(4) J_{C_{j,x}^d}^d = - \left[\frac{\hat{d}_{j,1}}{\beta} \times \frac{1}{K_L + K_S} \frac{\partial K_S}{\partial x^i} + \left(\frac{\hat{d}_{j,1}}{\beta} \times \frac{1}{K_L + K_S} + \hat{d}_{j,2} \right) \frac{\partial K_L}{\partial x^i} + \right. \\ \left. \hat{d}_{j,3} \frac{\partial K_S C_{1,S}}{\partial x^i} + \dots + \hat{d}_{j,p+2} \frac{\partial K_S C_{p,S}}{\partial x^i} + (\hat{d}_{j,3} - \hat{d}_{j,2}) \frac{\partial K_L C_{1,L}}{\partial x^i} + \dots + \right. \\ \left. (\hat{d}_{j,p+2} - \hat{d}_{j,2}) \frac{\partial K_L C_{p,L}}{\partial x^i} \right].$$

On a $J_j^d(x,t) = (J_{C_{j,x}^d}^d(x,t), \dots, J_{C_{j,x}^d}^d(x,t))$.

On obtient comme précédemment les lois de conservation différentielles des p composants chimiques ; pour $j \in \{1, \dots, p\}$ on a :

$$(5) \left[\frac{\partial}{\partial t} (K_L C_{j,L} + K_S C_{j,S}) + \text{div } J_j \right] (\bar{x}, t) = 0.$$

explicitons cette loi :

$$\text{div } J_j = \text{div } J_j^i + \text{div } J_j^d.$$

$$J_j^i = J_{j,L}^i + J_{j,S}^i = K_L C_{j,L} (V_1^L, \dots, V_N^L) + K_S C_{j,S} (V_1^S, \dots, V_N^S)$$

$$\text{div } J_j^i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (K_L C_{j,L} V_i^L) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (K_S C_{j,S} V_i^S).$$

$$(4) \text{---} \text{div } J_j^d = - \sum_{i=1}^N (\hat{d}_{j,3} \frac{\partial^2 K_S C_{1,S}}{\partial x^i{}^2} + \dots + \hat{d}_{j,p+2} \frac{\partial^2 K_S C_{p,S}}{\partial x^i{}^2} +$$

$$(\hat{d}_{j,3} - \hat{d}_{j,2}) \frac{\partial^2 K_L C_{1,L}}{\partial x^i{}^2} + \dots + (\hat{d}_{j,p+2} - \hat{d}_{j,2}) \frac{\partial^2 K_L C_{p,L}}{\partial x^i{}^2} +$$

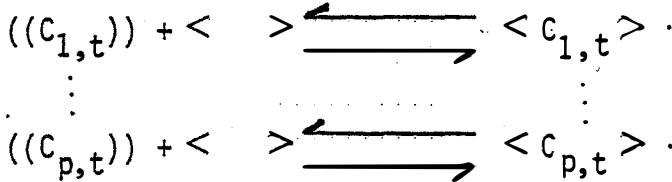
$$\underbrace{\left[\frac{\hat{d}_{j,1}}{\beta} \times \frac{1}{K_L + K_S} \frac{\partial^2 K_S}{\partial x^i{}^2} + \left(\frac{\hat{d}_{j,1}}{\beta} \times \frac{1}{K_L + K_S} + \hat{d}_{j,2} \right) \frac{\partial^2 K_L}{\partial x^i{}^2} - \frac{\hat{d}_{j,1}}{\beta} \left(\frac{1}{K_L + K_S} \frac{\partial (K_L + K_S)}{\partial x^i} \right)^2 \right]}_{\text{terme indépendant de l'état des composants chimiques}}.$$

terme indépendant de l'état des composants chimiques.

De même que précédemment on peut obtenir des relations supplémentaires du type $C_{j,L} = f(C_{1,S}, \dots, C_{p,S})$, $j \in \{1, \dots, p\}$ en supposant que $\forall (x,t) \in \Omega$, dans $B(x, \varepsilon^* [$, l'équilibre (dit local) est réalisé.

On suppose, là encore, que les composants chimiques sont en solution idéale dans le fluide mais que, par contre, ils constituent des solutions régulières dans le solide. On rappelle aussi que l'hypothèse 4 demeure.

On peut alors se placer formellement à t fixé pour lequel l'échange s'écrit très généralement dans $B(x, \varepsilon^* [$:



Toujours avec les notations précédentes, pour $j \in \{1, \dots, p\}$, on définit clairement :

$$\tilde{C}_{j,L} = M_j C_{j,L}$$

$$\lambda_N(B(x, \varepsilon^* [\cap S_t) = \hat{\xi}_j(x,t) \times [\text{nombre de moles de } \langle \quad \rangle \text{ susceptibles d'être occupés ou étant occupés par } C_{j,t}]$$

On a ici : $\tilde{C}_{j,S} = [\text{nombre de moles de sites occupés } \langle C_{j,t} \rangle \text{ dans } B(x, \varepsilon^* [] / [\text{nombre de moles de } \langle \quad \rangle \text{ susceptibles d'être occupés ou étant occupés par } C_{j,t} \text{ dans } B(x, \varepsilon^* []]$.

On a aussi : $\lambda_N(B(x, \varepsilon^* [\cap S_t) = \hat{\xi}_j(x,t) \times [\text{nombre de moles de } \langle \quad \rangle \text{ susceptibles d'être occupés ou étant occupés par } C_{j,t} \text{ dans } B(x, \varepsilon^* []]$.

$$\text{D'où } \tilde{C}_{j,S} = M_j \hat{\xi}_j C_{j,S} \equiv \xi_j C_{j,S}$$

Posons, pour $(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$, $\nu_{i,j}(x,t) = [\text{nombre de moles de sites occupés } \langle C_{i,t} \rangle \text{ qui sont susceptibles d'être occupés par } C_{j,t} \text{ dans } B(x, \varepsilon^* [] / [\text{nombre de moles de } \langle \quad \rangle \text{ susceptibles d'être occupés ou étant occupés par } C_{j,t} \text{ dans } B(x, \varepsilon^* []]$.

Remarquons qu'en général $\nu_{i,j}(x,t) \neq \nu_{j,i}(x,t)$.

On posera
$$v_j(x,t) = \sum_{i=1}^p v_{i,j}(x,t).$$

Les $v_{i,j}$ sont des fonctions de couplage des p équations de type (5). Lorsqu'aucun site susceptible d'être occupé ou étant occupé par le j -ième constituant chimique ne peut être occupé par le i -ième on a $v_{i,j} = 0$ et lorsque chaque site susceptible d'être occupé ou étant occupé par le i ou j -ième constituant chimique peut être occupé indifféremment par chacun des deux on obtient $v_{i,j} = \tilde{C}_{i,S}$. Par ailleurs, il semble que ces deux cas soient les seuls qui puissent être rattachés à des expériences (par exemple en chromatographie).

Hypothèse 1 : En relation évidente avec ce qui précède on prendra :

$$v_{i,j} = \epsilon_{i,j} \tilde{C}_{i,S} \text{ avec } \epsilon_{i,j} = 0 \text{ ou } 1.$$

Soit la relation R définie par $j R K \iff \epsilon_{j,K} = 1$. Il est immédiat que R est une relation d'équivalence. Alors, si la chimie du système permet de négliger les phénomènes de diffusion, on verra que chaque classe d'équivalence de R fournit un système autonome ; en particulier si $\forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$ avec $i \neq j$ on a $\epsilon_{i,j} = 0$ alors les p équations de type (5) sont toutes $\begin{matrix} \text{découplées} \\ \text{fortement couplées} \end{matrix}$.

Comme précédemment on considère les coefficients pondérateurs de l'équilibre dans le solide :

Soit q le nombre de classes d'équivalence de R caractérisées après rangement par :

$$\begin{matrix} \tilde{C}_{1,S} & \dots & \tilde{C}_{n_1,S} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} 1-v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & = \dots = 1 - v_{n_1} \\ \tilde{C}_{n_{p+1},S} & \dots & \tilde{C}_{n_{p+1},S} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} 1-v_{n_{p+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & = \dots = 1 - v_{n_{p+1}} \\ \tilde{C}_{n_{q-1+1},S} & \dots & \tilde{C}_{n_q,S} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} 1-v_{n_{q-1+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & = \dots = 1 - v_{n_q} \end{matrix}$$

avec $1 \leq n_1 < \dots < n_p < \dots < n_q = p.$

On définit les coefficients pondérateurs de l'équilibre dans le solide pour $j \in \{n_{p+1}, \dots, n_{p+1}\}$,

$$(6) \begin{cases} \gamma_{\langle C_j, t \rangle} &= e^{\frac{1}{kT}} \times ((1-C_{j,S}) \left(\sum_{\substack{i=n_{p+1} \\ i \neq j}}^{n_{p+1}} \omega_{j,i}^{p+1} C_{i,S} + \omega_{j,n_{p+1}+1}^{p+1} (1-\nu_{n_{p+1}}) \right)), \\ \gamma_{\langle \rangle_{p+1}} &= e^{\frac{1}{kT}} \times \nu_{n_{p+1}} \left(\sum_{i=n_{p+1}}^{n_{p+1}} \omega_{n_{p+1}+1,i}^{p+1} C_{i,S} \right) \text{ où} \end{cases}$$

$$\omega_{i,j}^{p+1} = \omega_{j,i}^{p+1}, \forall (i,j) \in \{n_{p+1}, \dots, n_{p+1}+1\}^2, \text{ avec}$$

k constante de Boltzmann, T température absolue dans $B(x, \epsilon^*)$ (dont on rappelle qu'elle est choisie indépendante de (x,t)), ω^{p+1} matrice $(1+n_{p+1}-n_p) \times (1+n_{p+1}-n_p)$ symétrique de terme général $\omega_{i,j}$ dite matrice d'énergie d'interchange supposée constante indépendante de (x,t) . On définit alors pour une même classe d'équivalence (ici $p+1$) les $n_{p+1}-n_p$ constantes d'équilibre des équations d'échanges des constituants chimiques rangés $C_{n_{p+1},t}, \dots, C_{n_{p+1},t}$:

$$\text{Pour } j \in \{n_{p+1}, \dots, n_{p+1}\}, K_j = \frac{\gamma_{\langle C_j, t \rangle} C_{j,S}}{C_{j,L} \gamma_{\langle \rangle_{p+1}} (1-\nu_{n_{p+1}})}$$

$$(7) C_{j,L} = \frac{1}{M_j K_j} \times \frac{C_{j,S}}{1 - \sum_{\substack{j=n_{p+1} \\ j \neq j}}^{n_{p+1}} C_{j,S}} \times e^{\frac{1}{kT}} \times ((1-C_{j,S}) \left(\sum_{\substack{i=n_{p+1} \\ i \neq j}}^{n_{p+1}} \omega_{j,i}^{p+1} C_{i,S} + \omega_{j,n_{p+1}+1}^{p+1} (1-\nu_{n_{p+1}}) \right) - \left(\sum_{i=n_{p+1}}^{n_{p+1}} C_{i,S} \right) \left(\sum_{i=n_{p+1}}^{n_{p+1}} \omega_{n_{p+1}+1,i}^{p+1} C_{i,S} \right)) \equiv$$

$\hat{f}_j(C_{1,S}, \dots, C_{p,S})$ où, en fait, \hat{f}_j ne dépend que des variables dont l'indice fait partie de la classe d'équivalence de j .

La loi d'équilibre local attendue est donc pour $j \in \{1, \dots, p\}$:

$$(8) C_{j,L} = \hat{f}_j(\epsilon_1 C_{1,S}, \dots, \epsilon_p C_{p,S}).$$

Au total (5) s'écrit :

$$(9) \frac{\partial}{\partial t} (k_L C_{j,L}) + \frac{\partial}{\partial t} (k_S C_{j,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (k_L C_{j,L} V_i^L) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (k_S C_{j,S} V_i^S) =$$

- div J_j^d , qui devient :

$$(10) \frac{\partial}{\partial t} (k_L \hat{f}_j(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S}) + k_S C_{j,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (k_L \hat{f}_j(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S}) V_i^L + k_S C_{j,S} V_i^S) = - \text{div } J_j^d.$$

Si, comme précédemment, on utilise la loi de Darcy avec les mêmes notations, on obtient explicitement le système différentiel :

$$(11-1) \left[\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (K_L(x,t) \hat{f}_1(\varepsilon_1 C_{1,S}(x,t), \dots, \varepsilon_p C_{p,S}(x,t)) + K_S(x,t) C_{1,S}(x,t)) + \\ & \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_S(x,t))^3}{(S_0 K_S(x,t))^2} \frac{\hat{Z}_{ii}^L}{\mu_L} \left(\frac{1}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t) \right) \right. \\ & \left. \hat{f}_1(\varepsilon_1 C_{1,S}(x,t), \dots, \varepsilon_p C_{p,S}(x,t)) - \frac{(1-K_L(x,t))^3}{(S_0 K_L(x,t))^2} \frac{\hat{Z}_{ii}^S}{\mu_S} \left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) \right) C_{1,S}(x,t) \right) = \psi_{3,L}(x,t), \\ & \vdots \end{aligned} \right.$$

$$(11-p) \left[\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (K_L(x,t) \hat{f}_p(\varepsilon_1 C_{1,S}(x,t), \dots, \varepsilon_p C_{p,S}(x,t)) + K_S(x,t) C_{p,S}(x,t)) + \\ & \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_S(x,t))^3}{(S_0 K_S(x,t))^2} \frac{\hat{Z}_{ii}^L}{\mu_L} \left(\frac{1}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t) \right) \right. \\ & \left. \hat{f}_p(\varepsilon_1 C_{1,S}(x,t), \dots, \varepsilon_p C_{p,S}(x,t)) - \frac{(1-K_L(x,t))^3}{(S_0 K_L(x,t))^2} \frac{\hat{Z}_{ii}^S}{\mu_S} \left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) \right) C_{p,S}(x,t) \right) = \psi_{p+2,L}(x,t), \end{aligned} \right.$$

$$(11-p+1) \left[\begin{aligned} & \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_S(x,t))^3}{(S_0 K_S(x,t))^2} \frac{\hat{Z}_{ii}^L}{\mu_L} \left(\frac{1}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} \right. \right. \end{aligned} \right.$$

$$- \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t)) = [\psi_{2,L} + \sum_{j=1}^p \frac{K_L \hat{f}_j(\xi_1 C_{1,S}, \dots, \xi_p C_{p,S})}{K_L \hat{f}_j(\xi_1 C_{1,S}, \dots, \xi_p C_{p,S}) + K_S C_{j,S}} \psi_{j,L}^I(x,t),$$

(11-p+2) $\frac{\partial K_S(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_L(x,t))^3}{(S_0 K_L(x,t))^2} \frac{\hat{Z}_i^S}{\mu_S} \left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} \right. \right.$

$$\left. \left. - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) \right) = [\psi_{2,S} + \sum_{j=1}^p \frac{K_S C_{j,S}}{K_L \hat{f}_j(\xi_1 C_{1,S}, \dots, \xi_p C_{p,S}) + K_S C_{j,S}} \psi_{j,S}^I(x,t), \text{ avec}$$

(11-p+3) $\psi_{k,\varepsilon}(x,t) = \sum_{i=1}^N (d_{k,3}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 K_{\varepsilon}^C C_{1,\varepsilon}}{\partial x^i} + \dots + d_{k,p+2}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 K_{\varepsilon}^C C_{p,\varepsilon}}{\partial x^i} +$

(11) $(d_{k,3}^{\varepsilon} - d_{k,2}^{\varepsilon}) \frac{\partial^2 K_{\varepsilon}^C C_{1,\varepsilon}}{\partial x^i} + \dots + (d_{k,p+2}^{\varepsilon} - d_{k,2}^{\varepsilon}) \frac{\partial^2 K_{\varepsilon}^C C_{p,\varepsilon}}{\partial x^i} +$
 $\frac{d_{k,1}^{\varepsilon}}{\beta} \times \frac{1}{K_{\varepsilon} + K_{\bar{\varepsilon}}} \frac{\partial K_{\varepsilon}^C}{\partial x^i} + \left(\frac{d_{k,1}^{\varepsilon}}{\beta} \times \frac{1}{K_{\varepsilon} + K_{\bar{\varepsilon}}} + d_{k,2}^{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 K_{\varepsilon}^C}{\partial x^i} - \frac{d_{k,1}^{\varepsilon}}{\beta}$
 $\left(\frac{1}{K_{\varepsilon} + K_{\bar{\varepsilon}}} \frac{\partial (K_{\varepsilon} + K_{\bar{\varepsilon}})}{\partial x^i} \right)^2 \Big), \text{ sur } \Omega,$

où $\frac{\varepsilon}{\varepsilon} = L \longleftarrow \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} = S,$

où $\hat{j} = j + 2,$

où pour $j \in \{n_p+1, \dots, n_{p+1}\}$ - une classe d'équivalence de R on a

$$C_{j,L}(x,t) = \frac{1}{M_j K_j} \times \frac{\xi_j(x,t) C_{j,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=n_p+1}^{n_{p+1}} \xi_j(x,t) C_{j,S}(x,t)} \times$$

$$\frac{1}{e^{K_T}} \times ((1 - \xi_j(x,t) C_{j,S}(x,t)) \left(\sum_{\substack{i=n_p+1 \\ i \neq j}}^{n_{p+1}} \omega_{j,i}^{p+1} \xi_i(x,t) C_{i,S}(x,t) + \right.$$

$$\omega_{j,n_{p+1}+1}^{p+1} (1 - \sum_{i=n_{p+1}}^{n_{p+1}} \xi_i(x,t) C_{i,S}(x,t)) - (\sum_{i=n_{p+1}}^{n_{p+1}} \xi_i(x,t) C_{i,S}(x,t))$$

$$(\sum_{i=n_{p+1}}^{n_{p+1}} \omega_{n_{p+1}+1,i}^{p+1} \xi_i(x,t) C_{i,S}(x,t)) = \hat{f}_j(\xi_1(x,t) C_{1,S}(x,t), \dots,$$

$$\xi_p(x,t) C_{p,S}(x,t)),$$

où suivant les notations du §9 on a les conditions "initiales"

$$C_{j,S} \Big|_{\hat{\partial}\Omega} = C_{j,S}^*, \quad K_{S,L} \Big|_{\hat{\partial}\Omega} = K_{S,L}^* \quad \text{et les conditions limites}$$

$$C_{j,S} \Big|_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega} = a_{j,S}, \quad K_{S,L} \Big|_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega} = b_{L,S}$$

Remarque 1 : Il n'existe pas dans la littérature d'expériences sur les lois d'équilibre local dans le cas $P > 1$.

Remarque 2 : Si la partie hyperbolique de (11) peut s'écrire :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(C_1, \dots, C_p) + \frac{\partial}{\partial x} \gamma_1(C_1, \dots, C_p) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi_p(C_1, \dots, C_p) + \frac{\partial}{\partial x} \gamma_p(C_1, \dots, C_p) = 0, \end{cases}$$

et si, pour C_1, \dots, C_p suffisamment régulières, il y a équivalence avec le système :

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} C_1 + \frac{\partial}{\partial x} f_1(C_1, \dots, C_p) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} C_p + \frac{\partial}{\partial x} f_p(C_1, \dots, C_p) = 0, \end{cases}$$

(Remarquons que contrairement au cas des entropies, exposé, par exemple, dans P. LAX [33] où le passage entre les deux systèmes est explicité, ϕ_1, \dots, ϕ_p ne sont pas des fonctions convexes de C^1, \dots, C^p), comme dans le cas scalaire, il n'y a a priori aucune raison pour que (12) et (13) + condition initiale admettent une solution faible commune pour que l'on puisse associer à (12) (qui est ici la bonne loi de conservation) un système de type (13).

Remarque 3 : Considérons toujours le système (12). Pour $j \in \{1, \dots, p\}$ posons

$$\psi_j(\vartheta_1, \dots, \vartheta_p, C_1, \dots, C_p) = \phi_j(C_1, \dots, C_p) - \vartheta_j ;$$

On observe que ψ_j est continûment différentiable dans $\mathbb{R}^p \times]0, 1[)^p$; alors, comme au §7, à partir du théorème des fonctions implicites, en tout point $(\bar{\vartheta}, \bar{C})$ de $\mathbb{R}^p \times]0, 1[)^p$ où, en notations évidentes, $\forall j \in \{1, \dots, p\}, \bar{\vartheta}_j = \phi_j(\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_p)$, pourvu que

$$\det \underbrace{\left(\frac{\partial \psi_j(\bar{\vartheta}, \bar{C})}{\partial C_j} \right)}_{\text{Matrice } p \times p} = \det \left(\frac{\partial \phi_j(\bar{\vartheta}, \bar{C})}{\partial C_j} \right) \neq 0, \text{ on peut construire une application}$$

continûment différentiable :

$$\mu: (\bar{\vartheta}_1, \dots, \bar{\vartheta}_p) \longmapsto \mu_1(\bar{\vartheta}_1, \dots, \bar{\vartheta}_p) = \bar{C}_1, \dots, \mu_p(\bar{\vartheta}_1, \dots, \bar{\vartheta}_p) = \bar{C}_p.$$

On passe alors du système (12) au système :

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} (\mu_1(\vartheta_1, \dots, \vartheta_p), \dots, \mu_p(\vartheta_1, \dots, \vartheta_p)) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \vartheta_p}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_p}{\partial x} (\mu_1(\vartheta_1, \dots, \vartheta_p), \dots, \mu_p(\vartheta_1, \dots, \vartheta_p)) = 0. \end{cases}$$

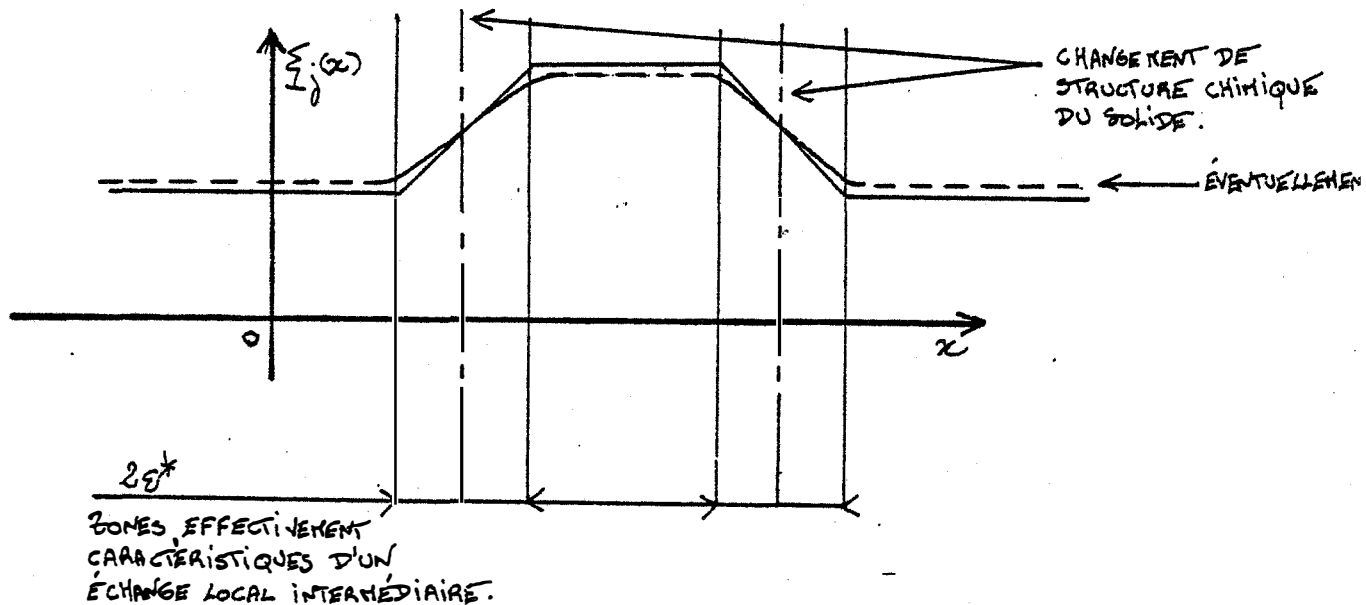
De plus, contrairement au cas du système (13), le système (14) permet de retrouver les solutions faibles associées au système (12) + condition initiale.

Cependant, on a déjà vu, pour $p = 1$, que la condition $\det \left(\frac{\partial \psi_j(\bar{\vartheta}, \bar{C})}{\partial C_j} \right) \neq 0$ pouvait ne pas être satisfaite, en particulier d'après §2, pour $\frac{\omega}{kT} > 2$ et $k_S \ll \xi k_L$.

Remarque 4 : Un cas réaliste (à partir de B. GUY (Communication orale)) est celui où, lorsque le solide est immobile, pour $j \in \{1, \dots, p\}$ fixé, il existe une partition finie de \mathbb{R}^N par des ensembles A_j^i connexes,

$A_j^i \neq \emptyset$, $\overline{A_j^i} = \overline{A_j^i}$, tels que $\forall (x,t) \in A_j^i \times [0,T]$, $\xi_j(x,t) = C_i$ -constante.

Pour une approximation $N=1$ on peut espérer par exemple :



Lorsque le solide n'est plus immobile, par effet de concassage, il peut y avoir échange dans $B(x, \varepsilon^*)$ de parties solides à structures chimiques différentes fournissant des $\xi_j(x,t)$ généraux. On peut, là encore, envisager la création de nouveaux sites en fonction de $P(x,t)$.

Cependant, il semble qu'il n'existe pas de résultats expérimentaux (par exemple en chromatographie, géologie) sur le comportement des $\xi_j(x,t)$.

Si la chimie du système permet de négliger les phénomènes de diffusion, en notations simplifiées on obtient, en posant là encore $\phi_{i,\&}(x,t) =$

$$-\frac{(1-K_{\&})^3}{(S_0 K_{\&})^2} \frac{Z_{ii}}{\mu_{\&}} \left(\frac{1}{\beta_{\&} K_{\&}} \frac{\partial K}{\partial x^i} - \gamma K_{\&} F_i \right),$$

le système :

(15)
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K_S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,S}}{\partial x^i} &= 0, \\ \frac{\partial K_L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,L}}{\partial x^i} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}_1(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S}) + K_S C_{1,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,L} \hat{f}_1(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S})) \\ &+ \phi_{i,S} C_{1,S} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}_p(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S}) + K_S C_{p,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,L} \hat{f}_p(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S})) \\ &+ \phi_{i,S} C_{p,S} = 0, \text{ sur } \Omega, \\ \phi_{i,L} \text{ et } \phi_{i,S} \text{ dépendant de } K_L \text{ et } K_S, \text{ les fonctions inconnues étant} \\ K_L, K_S, C_{1,S}, \dots, C_{p,S}, \text{ les conditions sur } \partial\Omega \text{ étant prises dans (11).} \end{aligned} \right\}$$

Dans le cas, fréquent en géologie, où le solide est immobile et le liquide s'écoulant compressible, (15) se transforme alors en :

(16)
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K_L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,L}}{\partial x^i} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}_1(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S}) + K_S C_{1,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,L} \hat{f}_1(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S})) &= 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}_p(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S}) + K_S C_{p,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,L} \hat{f}_p(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S})) &= 0, \\ \text{sur } \Omega, \phi_{i,L} \text{ dépendant de } K_L, \text{ les fonctions inconnues étant } K_L, C_{1,S}, \dots, C_{p,S}, \\ \text{les conditions sur } \partial\Omega \text{ étant prises dans (11).} \end{aligned} \right\}$$

Si l'on ajoute aux hypothèses de (16) l'assertion $K_L = \text{cte}$, il reste uniquement :

$$(17) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_{i,L}}{\partial x^i} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}_1(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S}) + K_S C_{1,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,L} \hat{f}_1(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S})) = 0, \\ & \vdots \\ & \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}_p(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S}) + K_S C_{p,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,L} \hat{f}_p(\varepsilon_1 C_{1,S}, \dots, \varepsilon_p C_{p,S})) = 0, \end{aligned} \right.$$

sur Ω , les fonctions inconnues étant $C_{1,S}, \dots, C_{p,S}$, les conditions sur $\partial \Omega$ étant prises dans (11).

De même que pour le problème à un seul constituant, on va maintenant tenir compte des flux d'échange $C_{j,t} \cap L_t \rightleftharpoons C_{j,t} \cap S_t$. Reprenons, en les adaptant, les grandes lignes du modèle précédent avec des notations semblables.

On pose $\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[\cap S_t]) = \bar{\varepsilon}_j(x,t) \times$ [nombre de moles de $\langle \quad \rangle$ susceptibles d'être occupés ou étant occupés par $C_{j,t}$] et $\lambda_N(B(x, \varepsilon^*[\cap (S_t \setminus \sum_{i=1}^p C_{i,t})]) = \hat{\varepsilon}_j(x,t) \times$ [nombre de moles de $\langle \quad \rangle$ susceptibles d'être occupés ou étant occupés par $C_{j,t}$]. $\bar{\varepsilon}_j$ et $\hat{\varepsilon}_j$ sont des fonctions que l'on peut qualifier de concentration des sites.

En faisant le rapport des deux équations précédentes, on obtient :

$$\frac{\hat{\varepsilon}_j(x,t)}{1 - \sum_{i=1}^p C_{i,S}(x,t)} = \bar{\varepsilon}_j(x,t).$$

On a alors :

$$\tilde{C}_{j,S} = \bar{\varepsilon}_j M_j C_{j,S} = \hat{\varepsilon}_j M_j \frac{C_{j,S}}{1 - \sum_{i=1}^p C_{i,S}} \equiv \varepsilon_j \frac{C_{j,S}}{1 - \sum_{i=1}^p C_{i,S}}.$$

De même pour (11), on obtient le système différentiel :

$$\begin{aligned}
 (18-1) \quad & \frac{\partial}{\partial t} (K_L(x,t) \hat{f}_1 \left(\frac{\xi_1(x,t) C_{1,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)}, \dots, \frac{\xi_p(x,t) C_{p,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) + \\
 & K_S(x,t) C_{1,S}(x,t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_S(x,t))^3}{(S_0 K_S(x,t))^2} \frac{Z_{ii}^{j=1}^L}{\mu_L} \left(\frac{1}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t) \hat{f}_1 \left(\frac{\xi_1(x,t) C_{1,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)}, \dots, \frac{\xi_p(x,t) C_{p,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(1-K_L(x,t))^3}{(S_0 K_L(x,t))^2} \frac{Z_{ii}^S}{\mu_S} \left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) C_{1,S}(x,t) \right) \right) \right) \\
 & = \psi_{3,L}(x,t), \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (18-p) \quad & \frac{\partial}{\partial t} (K_L(x,t) \hat{f}_p \left(\frac{\xi_1(x,t) C_{1,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)}, \dots, \frac{\xi_p(x,t) C_{p,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) + \\
 & K_S(x,t) C_{p,S}(x,t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_S(x,t))^3}{(S_0 K_S(x,t))^2} \frac{Z_{ii}^{j=1}^L}{\mu_L} \left(\frac{1}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t) \hat{f}_p \left(\frac{\xi_1(x,t) C_{1,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)}, \dots, \frac{\xi_p(x,t) C_{p,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(1-K_L(x,t))^3}{(S_0 K_L(x,t))^2} \frac{Z_{ii}^S}{\mu_S} \left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) C_{p,S}(x,t) \right) \right) \right) \\
 & = \psi_{p+2,L}(x,t),
 \end{aligned}$$

$$(18-p+1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (K_L(x,t) (1 - \sum_{i=1}^p \hat{f}_i \left(\frac{\xi_1(x,t) C_{1,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)}, \dots, \frac{\xi_p(x,t) C_{p,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right)))$$

$$(18) \quad + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_S(x,t))^3}{(S_0 K_S(x,t))^2} \frac{\sum_{i=1}^L \mu_L}{\beta_L K_L(x,t)} \frac{\partial K_L(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_L(x,t) F_i^L(x,t) \right)$$

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p f_i \left(\frac{\xi_1(x,t) C_{1,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)}, \dots, \frac{\xi_p(x,t) C_{p,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) \right) = \psi_{2,L}(x,t),$$

$$(18-p+2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (K_S(x,t) (1 - \sum_{i=1}^p C_{i,S}(x,t))) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} \left(- \frac{(1-K_L(x,t))^3}{(S_0 K_L(x,t))^2} \frac{\sum_{i=1}^S \mu_S}{\beta_S K_S(x,t)} \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) \right) (1 - \sum_{i=1}^p C_{i,S}(x,t)) = \psi_{2,S}(x,t),$$

$$\left(\frac{1}{\beta_S K_S(x,t)} \frac{\partial K_S(x,t)}{\partial x^i} - \gamma K_S(x,t) F_i^S(x,t) \right) (1 - \sum_{i=1}^p C_{i,S}(x,t)) = \psi_{2,S}(x,t),$$

avec

(11-p+3), sur Ω ,

où pour $j \in \{n_p+1, \dots, n_{p+1}\}$ - une classe d'équivalence de R on a

$$C_{j,L}(x,t) = \frac{1}{M_j K_j} \times \frac{\xi_j(x,t) C_{j,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t) - \sum_{j=n_p+1}^{n_{p+1}} \xi_j(x,t) C_{j,S}(x,t)} \times$$

$$e^{\frac{1}{K^T} \times \left(\left(1 - \frac{\xi_j(x,t) C_{j,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) \left(\sum_{i=n_p+1}^{n_{p+1}} \omega_{j,i}^{p+1} \frac{\xi_i(x,t) C_{i,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) + \right.$$

$$\left. \omega_{j,n_p+1}^{p+1} \left(1 - \sum_{i=n_p+1}^{n_{p+1}} \frac{\xi_i(x,t) C_{i,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) - \left(\sum_{i=n_p+1}^{n_{p+1}} \frac{\xi_i(x,t) C_{i,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) \right)$$

$$\left(\sum_{i=n_p+1}^{n_{p+1}} \omega_{n_p+1,i}^{p+1} \frac{\xi_i(x,t) C_{i,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right) = f_j \left(\frac{\xi_1(x,t) C_{1,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)} \right),$$

$$\dots, \frac{\xi_p(x,t) C_{p,S}(x,t)}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}(x,t)}, \text{ les conditions sur } \partial\Omega \text{ étant celles de (11).}$$

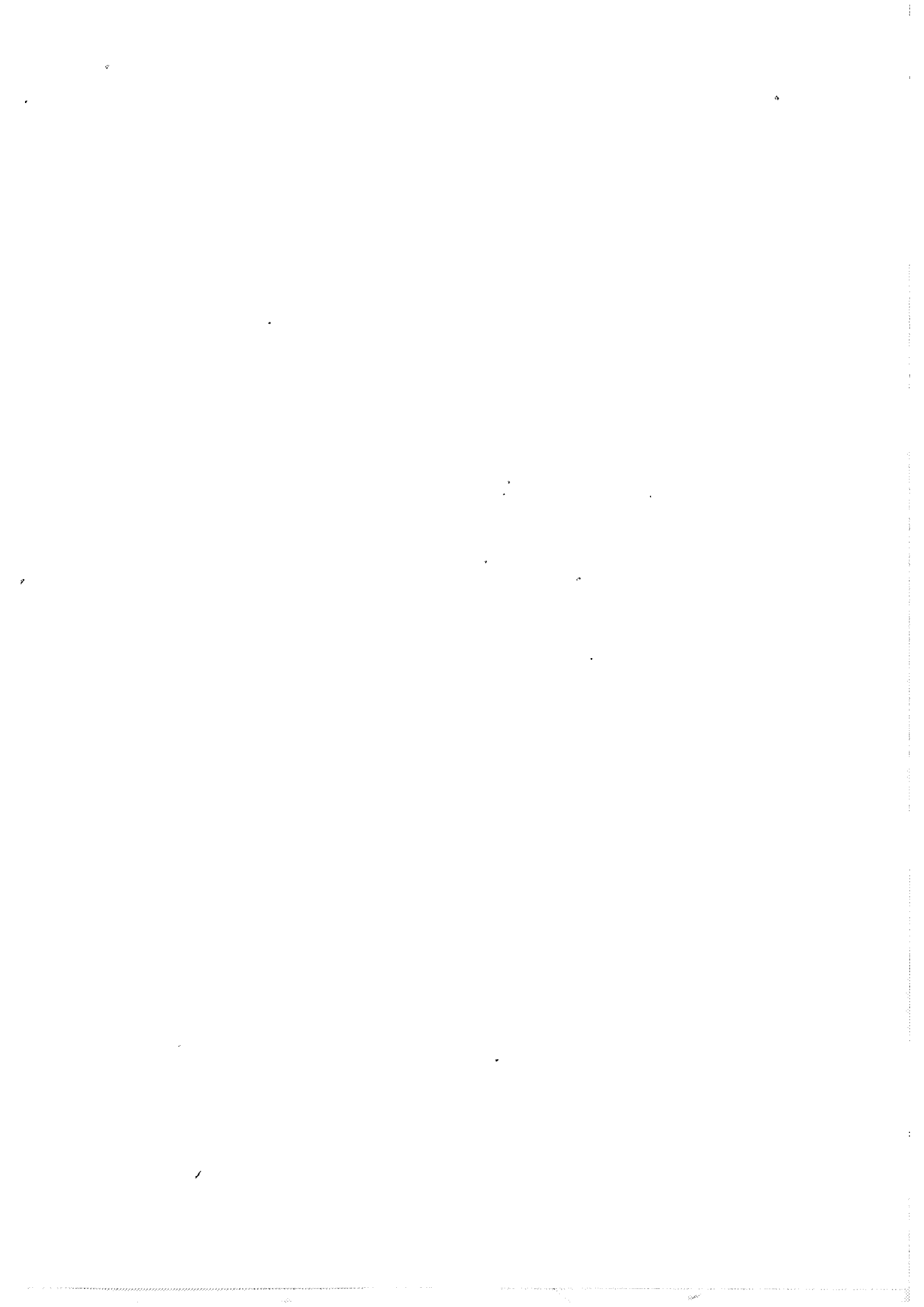
Remarque : Les $\varepsilon_j = M_j \hat{\varepsilon}_j$ ont encore la même forme que dans la remarque 4.

Si la chimie du système permet de négliger les phénomènes de diffusion, (15) devient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} (K_S (1 - \sum_{i=1}^p C_{i,S})) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi_{i,S} (1 - \sum_{i=1}^p C_{i,S})) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (K_L (1 - \sum_{i=1}^p \hat{f}_i (\frac{\varepsilon_1 C_{1,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}, \dots, \frac{\varepsilon_p C_{p,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}))) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\\
 & \phi_{i,L} (1 - \sum_{i=1}^p \hat{f}_i (\frac{\varepsilon_1 C_{1,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}, \dots, \frac{\varepsilon_p C_{p,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}))) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}_1 (\frac{\varepsilon_1 C_{1,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}, \dots, \frac{\varepsilon_p C_{p,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}) + K_S C_{1,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\\
 (19) & \left. \begin{aligned}
 & \phi_{i,L} \hat{f}_1 (\frac{\varepsilon_1 C_{1,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}, \dots, \frac{\varepsilon_p C_{p,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}) + \phi_{i,S} C_{1,S}) = 0, \\
 & \vdots \\
 & \frac{\partial}{\partial t} (K_L \hat{f}_p (\frac{\varepsilon_1 C_{1,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}, \dots, \frac{\varepsilon_p C_{p,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}) + K_S C_{p,S}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\\
 & \phi_{i,L} \hat{f}_p (\frac{\varepsilon_1 C_{1,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}, \dots, \frac{\varepsilon_p C_{p,S}}{1 - \sum_{j=1}^p C_{j,S}}) + \phi_{i,S} C_{p,S}) = 0, \text{ sur } \Omega,
 \end{aligned} \right\} \\
 & \phi_{i,L} \text{ et } \phi_{i,S} \text{ dépendant de } K_L \text{ et } K_S, \text{ les fonctions inconnues étant } K_L, \\
 & K_S, C_{1,S}, \dots, C_{p,S}, \text{ les conditions sur } \partial\Omega \text{ étant prises dans (11).}
 \end{aligned}$$

Sous cette forme on peut immédiatement introduire les simplifications de type (45) et (46) effectuées dans le cas $p = 1$.

Ceci achève la modélisation du problème géologique à plusieurs constituants chimiques et plusieurs dimensions d'espace, sur lequel on ne dispose que de résultats expérimentaux partiels et rares.



INTRODUCTION AU §-4

On va présenter ici diverses constructions de divisions fines (relativement à une mesure donnée) entre fluide et solide.

De plus on essaiera de faire quelques rapprochements entre notre problème de représentation de la roche et celui de la fabrication itérative de certains objets très découpés que l'on trouve parfois dans la littérature sous le nom d'objets fractals et qui, pour certains, ont déjà été esquissés graphiquement.



PARAGRAPHE 4

Répartition du liquide et du solide dans la roche

Notre but est ici de construire des ensembles, aussi simples que possible, de type (2)-§2 (avec éventuellement certaines généralisations). λ désignera la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R} .

Proposition 1: Soit T un espace métrique (non discret) séparable et m une mesure de Radon sur T avec $\text{supp}(m) = T$ (attention à l'adhérence classiquement contenue dans le symbole supp). Alors, il existe un ensemble Borélien $A \subset T$, qui est en fait un K_∞ (K pour compact), tel que l'on ait quelque soit V ouvert de T , $m(A \cap V) > 0$ et $m(A^c \cap V) > 0$.

En particulier dans un intervalle I de \mathbb{R} quelconque, pour toute mesure m telle que $\text{supp}(m) = I$ (par exemple $m = f(x)d\lambda$ avec $f > 0$ λ -mesurable

ou $m = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \delta_{x_i}$ avec $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} = \mathbb{Q} \cap I$; $\alpha_i > 0$, $i \in \mathbb{N}^*$), il existe

un ensemble A satisfaisant aux conditions souhaitées.

Démonstration (construction 1): D'abord, choisissons une base dénombrable d'ouverts de T soit $(V_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et supposons ensuite m diffuse.

Fixons V_1 , alors il existe (c.f C.A ROGERS [51]) K_1 et K'_1 deux compacts disjoints inclus dans V_1 et vérifiants: $m(K_1) > 0$, $m(K'_1) > 0$, $\overset{\circ}{K}_1 = \overset{\circ}{K}'_1 = \emptyset$;
 \vdots

Fixons V_i , alors il existe K_i et K'_i deux compacts disjoints inclus dans

$V_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} (K_j \cup K'_j) \right)$ vérifiants: $m(K_i) > 0$, $m(K'_i) > 0$, $\overset{\circ}{K}_i = \overset{\circ}{K}'_i = \emptyset$;

etc... .

Remarquons que si l'on désigne par K^i le compact $\bigcup_{j=1}^{i-1} (K_j \cup K'_j)$,

$V_i \setminus K^i = \emptyset \longleftarrow K^i \subset V_i \longleftarrow$ (car K^i s'écrivant comme réunion finie d'ensembles rares est rare et V_i ouvert) $V_i = \emptyset$, ce qui est contradictoire.

D'où $V_i \setminus K^i \neq \emptyset$.

Prenons alors $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i$, c'est un K_σ et il est immédiat que l'on a

$$A^c \supset \bigcup_{i=1}^{+\infty} K'_i.$$

Finalement si θ est un ouvert quelconque alors il existe $V_i \subset \theta$ avec $V_i \cap A \supset K_i$ et $V_i \cap A^c \supset K'_i$, d'où le résultat demandé.

Il ne reste plus maintenant qu'à envisager (d'après Radon-Nikodym) le cas, encore plus immédiat, où m est discrète (on rappelle que sur (T, \mathcal{C}, m) -ensemble mesuré, on a au plus une quantité dénombrable de m -atomes). Ici

$$m = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \delta_{x_i}; \quad \alpha_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

De même que précédemment:

Fixons V_1 , alors il existe x_{j_1} et $x'_{j'_1}$, $j_1 \neq j'_1$, appartenant à V_1 ;

⋮

Fixons V_i , alors il existe x_{j_i} et $x'_{j'_i}$, $j_i \neq j'_i$, appartenant à

$$V_i \setminus (\{x_{j_k}, 1 \leq k \leq i-1\} \cup \{x'_{j'_k}, 1 \leq k \leq i-1\}) - \text{ouvert} \neq \emptyset;$$

etc... .

Il suffit simplement de poser $A = \{x_{j_k}, k=1, \dots, +\infty\}$ pour le résultat demandé.

Remarque 1: Lorsque T est discret, il est immédiat qu'un tel ensemble A ne peut pas exister.

Explicitons, dans un cas particulier, un ensemble A de la proposition 1 (construction 2):

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une marche au hasard de Bernouilli sur \mathbb{Z}^3 . Considérons une suite $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de \mathbb{Z}^3 telle que l'on ait:

$$P \{ \omega; \exists n_1 \in \mathbb{N}^* / X_1 + \dots + X_{n_1} \in A_1 \text{ et } \exists n_2 \in \mathbb{N}^* / X_1 + \dots + X_{n_2} \in A_2 \dots \text{ et } \exists n_q \in \mathbb{N}^* / X_1 + \dots + X_{n_q} \in A_q \text{ etc...} \} \neq 0 \text{ et } \neq 1$$

avec $P \{ \omega; \exists n \in \mathbb{N}^* / X_1 + \dots + X_n \in A_i \} \in]0,1[, \forall i \in \mathbb{N}^*$ où l'on prendra

$$\Omega = (\{-1,1\}^{\mathbb{N}^*})^3, P = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2} \right) \quad (3) \text{ (équiprobabilité du choix dans chaque déplacement), } X_n: \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \text{ n-ième projection,}$$

$$\omega \longrightarrow X_n(\omega)$$

$A = \{ \omega; \exists n_1 \in \mathbb{N}^* / X_1 + \dots + X_{n_1} \in A_1 \text{ et } \exists n_2 \in \mathbb{N}^* / X_1 + \dots + X_{n_2} \in A_2 \dots \text{ et}$

$\exists n_q \in \mathbb{N}^* / X_1 + \dots + X_{n_q} \in A_q \text{ etc... } \}$.

Pour tout ouvert V de Ω , on a (on peut toujours se ramener à $\text{card}(V) < \aleph_0$):

$$P(V \cap A) \geq P \{ \omega; X_1 = u_1, \dots, X_{n_0} = u_{n_0} \text{ et } \exists n_1 \in \mathbb{N}^* / X_{n_0+1} + \dots + X_{n_1} \in A_1 - \sum_{i=1}^{n_0} u_i$$

$$\text{et } \exists n_2 \in \mathbb{N}^* / X_{n_0+1} + \dots + X_{n_2} \in A_2 - \sum_{i=1}^{n_0} u_i \dots \text{ et } n_q \in \mathbb{N}^* / X_{n_0+1} + \dots + X_{n_q} \in A_q$$

$$- \sum_{i=1}^{n_0} u_i \text{ etc... } \} = P(V) \times F(- \sum_{i=1}^{n_0} u_i) > 0$$

où $X_{n_0+1} + \dots + X_{n_i}$ désigne la marche à suivre pour atteindre A_i une fois la

marche $X_1 + \dots + X_{n_0}$ effectuée sur V .

De même, $P(V \cap A^c) \geq P \{ \omega; X_1 = u_1, \dots, X_{n_0} = u_{n_0} \text{ et } \forall n > n_0, X_{n_0+1} + \dots + X_n \notin A_q$

$$- \sum_{i=1}^{n_0} u_i \} = P(V) \times P \{ \omega; \forall n > 1, X_1 + \dots + X_n \notin A_q - \sum_{i=1}^{n_0} u_i \} > 0 \text{ avec un choix}$$

convenable de A_q , ce qui est toujours possible.

On renvoie ici à la théorie des promenades aléatoires (G. POLYA [49]...)

De plus l'ensemble (Ω, P) est identique à $([0,1], d\lambda)$ au sens de la mesure, d'où le résultat demandé.

Remarque 2: On peut montrer bien plus fort, ainsi: il existe une application $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $d\lambda - d\lambda$ mesurable, telle que pour tout ensemble $B \subset \mathbb{R}$, $\lambda(B) > 0$, on ait:

$$\lambda(V \cap A) > 0, \forall V \text{-ouvert de } [0,1], \text{ où } A \equiv f^{-1}(B).$$

En particulier, on a donc également: $\lambda(V \cap A^c) > 0, \forall V$ -ouvert de $[0, 1]$.
 On montre que pour tout processus gaussien stationnaire (X_t) vérifiant $\liminf_{t \rightarrow +\infty} |\text{Log}|t|| (1 - \rho(t)) > 0$ où $\rho(t)$ est une fonction dite de corrélation, les trajectoires $t \mapsto \omega(t)$ ont la propriété décrite ci-dessus (c.f S. BERMAN [3]).

Il existe aussi des constructions non probabilistes de telles fonctions f (c.f C. CARATHEODORY[7]).

Remarque 3: Soit $x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1$ dont on considère un développement dyadique soit $a_0 + \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \dots; a_n \in \{0, 1\}, a_0 = 0$.

On construit alors:

$R = \{x \in \mathbb{R} / \exists \text{ développement pour lequel } \exists n \text{ pair } \in \mathbb{N}^* / \forall m \geq n, m \text{ pair}, a_m = 1\}$
 et

$L = \{x \in \mathbb{R} / \exists \text{ développement pour lequel } \exists l \text{ impair } \in \mathbb{N}^* / \forall m \geq l, m \text{ impair}, a_m = 1\}$.

R est dense dans \mathbb{R} (par $\exists n$) et a la puissance du continu (par les m impairs).

L est dense dans \mathbb{R} (par $\exists l$) et a la puissance du continu (par les m pairs).

$R \cap L \subset \mathbb{Q}$ (car $a_m = 1$ pour $m \geq \max(n, l)$).

Relativement à λ , la partie A de la proposition 1 doit être dense dans \mathbb{R} et avoir une puissance supérieure au dénombrable, propriétés que vérifient R et L . Si l'on avait $\lambda(R \cap V) > 0, \forall V$ -ouvert de \mathbb{R} , alors on aurait, par raison de symétrie et puisque $R \cap L \subset \mathbb{Q}, \lambda(R^c \cap V) = \lambda(L \cap V) > 0, \forall V$ -ouvert de \mathbb{R} ; malheureusement:

$\lambda(R) = \lambda(L) = 0$ (car R et L peuvent s'écrire comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle).

Par contre, on peut prendre $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists \text{ développement pour lequel}$

$\exists n \in \mathbb{N}^* / m > n \sum_{n < i \leq m} a_i \leq \frac{m-n}{2}\}$ (ici $P = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{\delta_0 + \delta_1}{2}\right)^l$) et $P\{\omega; \sum_{n < i \leq m} a_i \leq \frac{m-n}{2} \geq 1/4\}$;

dans le même esprit, on peut espérer l'existence d'une application M , à valeurs dans \mathbb{N} , nous permettant de poser:

$A = \{x \in \mathbb{R} / \exists \text{ développement pour lequel } \exists n \in \mathbb{N}^* / \forall m \geq n \text{ card}\{a_i = 1, n \leq i \leq m\} - \text{card}\{a_i = 0, n \leq i \leq m\} \leq M(m-n)\}$ -ensemble attendu dans la proposition 1.

Rappels:

Définition 1: Une fonction μ définie sur les parties d'un espace Ω est appelée mesure (ou parfois mesure extérieure) sur Ω si elle satisfait aux conditions:

a) $\mu(E) \in \overline{\mathbb{R}_+}, \forall E \subset \Omega$;

b) $\mu(\emptyset) = 0$;

c) $E_1 \subset E_2 \subset \Omega \implies \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$;

d) pour toute suite $E_i \subset \Omega, i \in \{1, \dots, +\infty\}, \mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$, } sous-ad-
ditivité
dénom-
brable.

Définition 2: Une fonction τ définie sur une classe \mathcal{C} de parties de Ω est appelée une pré-mesure si elle satisfait aux conditions:

a) $\emptyset \in \mathcal{C}$;

b) $0 \leq \tau(c) \leq +\infty, \forall c$ dans \mathcal{C} ;

c) $\tau(\emptyset) = 0$.

Théorème 1 (c.f M.E. MUNROE [42]): Si τ est une pré-mesure définie sur une classe \mathcal{C} d'ensembles d'un espace métrique Ω de distance ρ , la fonction d'ensembles

$$\mu(E) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(E) \text{ où } \mu_\delta(E) = \inf_{\substack{C_i \in \mathcal{C}, d(C_i) \leq \delta, i=1 \\ \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \supset E.}} \sum_{i=1}^{+\infty} \tau(C_i),$$

d(F) représentant le diamètre d'un ensemble $F \subset \Omega$, est une mesure sur Ω .

Définition 3 (c.f C.A. ROGERS [51]): Soit Ω un espace métrique de distance ρ . H sera la classe des fonctions $h(t)$ définies $\forall t \geq 0$, qui peuvent prendre la valeur $+\infty$ en certains t , monotones croissantes pour $t > 0$, strictement positives pour $t > 0$ et continues à droite $\forall t \geq 0$. H_0 désignera l'ensemble des $h \in H$ tels que $h(0) = 0$. Soit \mathcal{G} la classe des ouverts de Ω . On définit $h(G)$ pour $G \in \mathcal{G}$ par $h(G) = h(d(G))$ si $G \neq \emptyset$ et $h(\emptyset) = 0$. Alors la mesure construite, par le théorème 1, à partir de la pré-mesure h définie sur \mathcal{G} est appelée mesure de Hausdorff-Besicovitch correspondant à la fonction h ou simplement h -mesure et est notée μ^h .

Remarque 4: Tout ensemble Borélien dans Ω est μ^h -mesurable.

Remarque 5: Habituellement lorsque $h(t) = t^r$ ($h \in H_0$), $r \in \mathbb{N}^*$, on note par $\mu^{(r)}$ la mesure de Hausdorff-Besicovitch qui lui est associée et que l'on appelle (r) -mesure.

On désignera par P l'ensemble des irrationnels x , $0 < x < 1$, qui ont un développement en fraction continue s'écrivant (en notations classiques)

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \text{ où } a_0 = 0, a_i \in \{1, 2\} \text{ pour } i \in \mathbb{N}^*.$$

On désignera par Q l'ensemble, contenant P , des irrationnels x , $0 < x < 1$, qui ont un développement en fraction continue ayant au plus un nombre fini de quotients partiels dépassant 2.

On dispose des résultats suivants (c.f. C.A. ROGERS [51]);

P est fermé dans \mathbb{R} (d'intérieur vide), $\mu^{(\frac{2}{3})}(P) = \mu^{(\frac{2}{3})}(Q) = 0$,

$$\frac{1}{3} \leq \mu^{(\frac{1}{3})}(P) \leq \mu^{(\frac{1}{3})}(Q).$$

On peut alors prendre pour partie A de la proposition 1, la mesure étant $\mu^{(\frac{1}{3})}$, l'ensemble Q .

Les constructions de parties A faites sur \mathbb{R} se généralisent à \mathbb{R}^n . En particulier, $\forall V$ -ouvert de \mathbb{R}^n , $\lambda^{an}(V) > \lambda^{an}(A^n \cap V) > 0$ où A^n est connexe par arcs.

Pour E inclus dans l'espace métrique Ω , si l'on prend pour $h(t)$ l'application de H_0 $\gamma(t)t^d$ (contenu d'une boule de rayon t dans \mathbb{R}^d si $d \in \mathbb{N}^*$) où $d \in \mathbb{R}^+$ et $\gamma(d) = [\gamma(\frac{1}{2})]^d / \gamma(1+d/2)$, alors on démontre qu'il existe une valeur D de d telle que pour $d < D$ $\mu^h(E) = +\infty$, pour $d > D$ $\mu^h(E) = 0$ (c.f les ensembles Q ou P précédents). D est appelée dimension de Hausdorff-Besicovitch. Lorsque Ω est un espace euclidien de dimension n , on a $D \leq n$.

Entre autres, l'ensemble triadique de Cantor (respectivement: la courbe de Von-Koch) dont la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R} (respectivement dans \mathbb{R}^2) est nulle et pour laquelle (respectivement: pour laquelle) on obtient un $D \in \mathbb{N}$, a une mesure μ^h non dégénérée (i.e différente de 0 ou $+\infty$).

Ces exemples sont développés dans B. MANDELBROT [37] où de plus on peut noter une grande analogie entre certaines constructions itératives d'objets (dits fractals) arrêtées en une étape quelconque et ce que l'on peut espérer voir à échelle macroscopique correspondante dans la roche (par exemple: "Réseau de drainage fluvial presque partout séparé").

Naturellement, on espère qu'il existe, relativement à la mesure de Hausdorff-Besicovitch donnée par D , des objets fractals de type $(2)-\frac{1}{2}$ (B. Mandelbrot à partir de Von-Koch?)!!!

L'intérêt de l'emploi des mesures de Hausdorff-Besicovitch par rapport à celui de la mesure de Lebesgue peut aussi résider dans le comportement des densités, en particulier de la densité circulaire (c.f C.A. ROGERS [5], A.S. BESICOVITCH [4]).



INTRODUCTION AU §-5

On fait ici, à partir d'un travail bibliographique, divers recoupements sur les espaces de fonctions à variation bornée qui sont les bons espaces dans lesquels on peut attendre les solutions des problèmes d'équations aux dérivées partielles des modèles proposés.

Le tout sera assorti de quelques considérations géométriques se rapportant à ces fonctions à variation bornée.

Les notions présentées ici sont utilisées dans la plupart des paragraphes.



PARAGRAPHE 5

Divers recouvrements sur les espaces de fonctions à variation bornée

Soit \mathbb{R}^n muni du produit scalaire euclidien noté $(.,.)$ et de norme associée notée $|\cdot|$. Notons par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la tribu des boréliens de \mathbb{R}^n et par λ_n^* la mesure extérieure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .

Alors λ_n désignera la mesure complète restriction de λ_n^* à la tribu des parties λ_n^* -mesurables de \mathbb{R}^n (rappelons que A partie λ_n^* -mesurable de \mathbb{R}^n est de la forme $B \cup N$ avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et N partie λ_n -négligeable de \mathbb{R}^n).

De plus on choisit Ω domaine de \mathbb{R}^n .

On considère alors $\mathcal{K}(\Omega)$, l'ensemble des boréliens de \mathbb{R}^n dont l'adhérence est un compact inclus dans Ω .

Définition 1 : On entendra par charge, une charge de Radon sur $\mathcal{K}(\Omega)$, c'est-à-dire une application de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, σ -additive et à valeurs finies.

Remarque 1 : Une charge μ est prolongeable en une charge de Radon $\bar{\mu}$ sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \Omega$ ssi elle est bornée sur $\mathcal{K}(\Omega)$. $\bar{\mu}$ est unique et $\bar{\mu}$ est bornée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \Omega$.

Définition 2 L. SCHWARTZ [54] : On dira que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ admet des dérivées distribution qui sont des charges (respectivement des charges bornées) ssi $\exists (\mu_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} / \forall i \in \{1, \dots, n\}, \mu_i$ soit une charge (respectivement une charge bornée) et $\forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega), \frac{\partial T}{\partial x_i}(\Phi) = \int_{\Omega} \Phi d\mu_i$.

En utilisant les notations de M. MIRANDA [41] on désignera par $K(\Omega)$ l'ensemble des ouverts de \mathbb{R}^n dont l'adhérence est un compact inclus dans Ω et, pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $k \in K(\Omega)$, par $\theta(T, k)$ la quantité

$$\left| \begin{array}{l} \text{Sup} \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_i}(\phi_i) \right| \quad \text{où} \quad \|\phi\| = \text{Sup}_{x \in \Omega} |\phi(x)| = \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in (\{\Phi \in \mathcal{D}(\Omega) / \text{supp } \Phi \subset k\})^n \\ \|\phi\| \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \text{Sup}_{x \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2(x) \right)^{1/2} .$$

Théorème 1 L. SCHWARTZ [54] : $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ admet des dérivées distribution qui sont des charges (respectivement des charges bornées)ssi $\theta(T,k) < +\infty$, $\forall k \in K(\Omega)$ (respectivement $\sup_{k \in K(\Omega)} \theta(T,k) < +\infty$).

Remarque 2 : Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on peut alors construire la distribution sur $\mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} f d\lambda_n \equiv T_f(\cdot)$ notée.

Théorème 2 M. MIRANDA [41] : Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ admet des dérivées distribution qui sont des charges alors il existe $f \in L^1_{loc}(\Omega) / \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $T(\Phi) = T_f(\Phi)$.

En utilisant les notations de A.I. VOL'PERT [56] on désignera par $BV(\Omega)$ (respectivement $\overline{BV}(\Omega)$) l'ensemble des $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telles que T_f admette des dérivées distribution qui soient des charges (respectivement des charges bornées).

Définition 3 : Soit $H \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pour μ charge définie sur la tribu $B(\mathbb{R}^n) \cap H$, on note par $|\mu|$ la mesure sur $B(\mathbb{R}^n) \cap H$ associée à la décomposition de Jordan (en notation canonique $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$). $|\mu|$ s'appelle la mesure variation totale de la charge μ . Voir par exemple A. KOLMOGOROV et S. FOMINE [29] et R.G. BARTLE [2]. Si l'on a $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ charge vectorielle où les μ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, sont du type précédent alors la mesure variation totale de la charge μ désignera la mesure sur $B(\mathbb{R}^n) \cap H$ qui vaut

$$\left(\sum_{i=1}^n |\mu_i|^2 \right)^{1/2} \equiv |\mu| \text{ notée.}$$

Remarque 3 M. MIRANDA [41] : Pour $f \in BV(\Omega)$, $\forall k \in K(\Omega)$, $|\mu|(k) = \theta(T_f, k)$ où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ fixé par la définition 2. De plus si $f \in \overline{BV}(\Omega)$ $\sup_{k \in K(\Omega)} \theta(T_f, k) = \sup_{k \in K(\Omega)} |\mu|(k) = |\bar{\mu}|(\Omega) < +\infty$ où $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n)$ -prolongée de la remarque 1.

Définition 4 : En langage de T.H. HILDEBRANDT [26], une fonction f^0 à valeurs dans \mathbb{R} , définie sur le compact $[a,b]$, $a < b$, est dite à variation bornée sur $[a,b]$ si la fonction de subdivisions de $[a,b]$, soit $g(\sigma) = \sum |f^0(x_i) - f^0(x_{i-1})|$, est bornée par rapport à σ .

La variation totale de f^0 sur $[a,b]$, notée $V(f^0; [a,b])$, est la quantité $\sup_{\sigma} g(\sigma) = \int_a^b |df^0|$ où $\int_a^b |df^0|$ représente la σ -intégrale de la fonction d'intervalle $F([c,d]) = |f^0(d) - f^0(c)|$.

f^0 est dite à variation localement bornée dans \mathbb{R} si $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $V(f^0; [a,b]) < +\infty$.

Si $V(f^0; \mathbb{R}) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} V(f^0; [a,b]) < +\infty$ alors on dit que

f^0 est à variation bornée sur \mathbb{R} et que $V(f^0; \mathbb{R})$ est sa variation totale sur \mathbb{R} .

Théorème 3 L. SCHWARTZ [54] : Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ admet une dérivée distribution qui est une charge μ alors l'application $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ qui lui est associée est λ_1 -PP égale à une fonction f^0 à variation localement bornée dans \mathbb{R} . Réciproquement, si f^0 est à variation localement bornée dans \mathbb{R} , alors, pour f égale à f^0 λ_1 -pp, T_f admet une dérivée distribution qui est une charge μ .

Remarque 4 K. KRICKEBERG [31] : On peut toujours choisir f^0 continue à droite dans le théorème 3 et dans ce cas, en utilisant les notations de la définition 3, on a :

$$|\mu|([a,b]) = V(f^0; [a,b]), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b.$$

En effet $f^0(x) = cte + \int_a^x d\mu$ λ_1 -pp. Si l'on note encore f^0 la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à f^0 , on a pour λ -presque-tout (c,d) , $c < d$, $f^0([c,d]) = f^0(d+0) - f^0(c+0) = f^0(d) - f^0(c)$

et donc

$$\int_a^b |df^0| = \sup_{\sigma} \sum |\mu([x_{i-1}, x_i])| = |\mu|([a,b]).$$

Remarquons de plus que : f^0 est un cas particulier de fonction à variation bornée régulière sur \mathbb{R} , i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f^0(x+0) - f^0(x)) = (f^0(x) - f^0(x-0)) \geq 0;$$

si μ est une charge bornée alors :

$$|\bar{\mu}|(\mathbb{R}) = V(f^0; \mathbb{R}).$$

Théorème 4 K. KRICKEBERG [31] : On pose $\Omega = \mathbb{R}^n$ et on désigne par P_{r_i} la projection sur \mathbb{R}^{n-1} parallèlement à l'axe de la ième coordonnée. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ admet des dérivées distribution qui sont des charges $(\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n))$ ssi $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f = f^0_i \lambda_n$ -PP avec f^0_i vérifiant l'assertion \mathcal{C}_i suivante :

Pour λ_{n-1} -presque tout x' dans \mathbb{R}^{n-1} , $f^0_i(x_i, x')$ est une fonction de x_i à variation localement bornée pour \mathbb{R} , continue à droite et $\forall J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ avec $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $(a_j, b_j) \in \mathbb{R}^2$ et $a_j < b_j$, $V(f^0_i(x_i, x'); [a_j, b_j])$ est une fonction sommable de x' sur $P_{r_i}(J)$.

Si l'on remplace "charges" par charges bornées alors \mathcal{C}_i se transforme en $\bar{\mathcal{C}}_i$:

Pour λ_{n-1} -presque-tout x' dans \mathbb{R}^{n-1} , $f^0_i(x_i, x')$ est à variation bornée sur \mathbb{R} , continue à droite et $V(f^0_i(x_i, x'); \mathbb{R})$ est une fonction sommable de x' sur \mathbb{R}^{n-1} .

Si l'on remplace "charges" par charges concentrées dans un ensemble $J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ avec $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $(a_j, b_j) \in \mathbb{R}^2$ et $a_j < b_j$, on observe d'abord que μ est à valeurs (vectorielles) finies sur la tribu $B(\mathbb{R}^n) \cap J$ — μ est bornée sur cette tribu

$\bar{\mu}$ charge bornée sur $B(\mathbb{R}^n)$, puisque \mathcal{C}_i se transforme en $\bar{\mathcal{C}}_i$:

λ_{n-1} -presque-partout dans $P_{r_i}(J)$, $f^0_i(x_i, x')$ est à variation bornée sur $[a_i, b_i]$, constante sur $]-\infty, a_i[$ et sur $]b_i, +\infty[$, continue à droite. $f^0_i(x_i, x')$ est pour λ_{n-1} -presque-tout y de $\mathbb{R}^{n-1} - P_{r_i}(J)$ constante sur \mathbb{R} . $V(f^0_i(x_i, x'); [a_i, b_i])$ est une fonction sommable de x' sur $P_{r_i}(J)$.

Définition 5 L. CESARI [8] : Une application f définie sur \mathbb{R}^n , λ_n -mesurable est dite à variation bornée (respectivement localement à variation bornée) au sens de Tonelli et Cesari ssi $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f = f_i^0 \lambda_n$ -PP avec f_i^0 vérifiant $\overline{\mathcal{C}}_i$ (respectivement \mathcal{C}_i).

Théorème 5 K. KRICKEBERG [31] : Soit f une application définie sur \mathbb{R}^n , λ_n -mesurable et localement à variation bornée au sens de Tonelli et Cesari, alors $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 5 : En utilisant le théorème 2, le théorème 5 et le théorème 4, on a : $f \in \overline{BV}(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $BV(\mathbb{R}^n)$) ssi f est λ_n -mesurable et à variation bornée (respectivement localement à variation bornée) au sens de Tonelli et Cesari.

Remarque 6 W.H. FLEMING et R. RISHEL [14] : Si $f \in \overline{BV}(\mathbb{R}^n)$ alors f a une limite essentielle c à l'infini, i.e. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n / |x| > k \text{ et } |f(x) - c| > \epsilon\}) = 0$.

De plus, avec les notations du théorème 4, si $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ admet des dérivées distribution qui sont des charges concentrées dans un ensemble J , alors, en langage évident, f a une limite essentielle c pour k fini.

On rappelle que d'après S.N. KRUZKOV [32] : $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap BV(\mathbb{R}^n)$ ssi $\forall \Omega$ compact de \mathbb{R}^n , il existe une constante $c(\Omega)$ telle que quelque soit $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, $\int_\Omega |f(x+\Delta x) - f(x)| d\lambda_n \leq c(\Omega) |\Delta x|$. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \overline{BV}(\mathbb{R}^n)$ alors $c(\Omega)$ sera une constante, notée c , indépendante de Ω .

Pour $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ notons par $TV(f)$ la quantité $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{\Delta x \in \mathbb{R}^{n*}} \left(\int_{|x| \leq k} \frac{|f(x+\Delta x) - f(x)|}{|\Delta x|} d\lambda_n \right)$.

Alors, avec les notations de la remarque 3, $TV(f) = c \text{tex} |\bar{\mu}|(\mathbb{R}^n) = c < +\infty$.

Remarque 7 : On trouve aussi les notations (par ex. A.Y. LEROUX [35]) $BV(\Omega)$ et $\overline{BV}(\Omega)$ pour respectivement $BV(\Omega)$ et $\overline{BV}(\Omega)$.

Définition 6 W.H. FLEMING et R. RISHEL [14] : Soit une partie E de Ω . On note par χ_E l'application caractéristique de E dans \mathbb{R}^n . Si $\chi_E \in L^1_{loc}(\Omega)$, on appelle périmètre de E relativement à Ω la quantité

$$P_\Omega(E) = \sup_{k \in K(\Omega)} \int_E \theta(Tx, k). \text{ Remarquons que } P_\Omega(\Omega) = 0.$$

Si $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^n)$, on appelle périmètre de E et l'on note $P(E)$ la quantité finie $P_{\mathbb{R}^n}(E) = \sup_{k \in K(\mathbb{R}^n)} |\mu_{\chi_E}|(k) = |\bar{\mu}_{\chi_E}|(\mathbb{R}^n)$.

Pour le cas particulier $E = \mathbb{R}^n$ on a encore la référence E. DE GIORGI [17].

Définition 7 A.I. VOL'PERT [56] : Soit une partie E de \mathbb{R}^n . $x \in E$ est dit point de densité (respectivement de raréfaction) de E si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{\lambda_n^*(E \cap B(x, \varepsilon))}{\lambda_n^*(B(x, \varepsilon))} = 1 \text{ (respectivement } 0).$$

On notera par E_* l'ensemble des points de densité de E et par E^* la quantité \mathcal{C}_E {pts de raréfaction de E }. $\partial^* E = E^* \setminus E_*$ est alors appelée frontière essentielle de E .

Définition 8 H. FEDERER [12] : On notera par $R_a(x^0)$ le demi-espace ouvert $(x-x^0, a) > 0$. Pour $x \in E$, $\nu(x) \in \mathbb{R}^n$ est appelée normale intérieure à l'ensemble E au point x si :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{\lambda_n^*(E \cap R_{-\nu(x)}(x) \cap B(x, \varepsilon))}{\lambda_n^*(B(x, \varepsilon))} = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{\lambda_n^*(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n} E \cap R_{\nu(x)}(x) \cap B(x, \varepsilon))}{\lambda_n^*(B(x, \varepsilon))} = 0 ;$$

$-\nu(x)$ est alors appelée normale extérieure à l'ensemble E au point x .

Définition 9 A.I. VOL'PERT [56] : Soient une fonction f définie sur $E \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans \mathbb{R} et $x^0 \in E^*$. Si elle existe, on appelle limite approchée de f au point x^0 la quantité finie, notée $\mathcal{L}_E f(x^0)$ et vérifiant $\forall \varepsilon > 0$, le point x^0 est un point de raréfaction de $\{x \in E / |f(x) - \mathcal{L}_E f(x^0)| > \varepsilon\}$.

Si $E = R_a(x^0)$ on notera $\ell_E f(x^0)$ par $\ell_a f(x^0)$. Alors, pour f définie dans un voisinage de x^0 , x^0 est dit régulier pour f s'il existe un vecteur unitaire a tel que $\ell_a f(x^0)$ et $\ell_{-a} f(x^0)$ existent. De plus, pour $x^0 \in \partial^* E$ et f définie dans un voisinage de x^0 , si elles existent, les quantités $f^+(x^0) = \ell_E f(x^0)$ et $f^-(x^0) = \ell_{\mathbb{R}^n \setminus E} f(x^0)$ sont appelées respectivement trace intérieure et trace extérieure de f au point x^0 .

Remarquons que si $\nu(x^0)$, $f^+(x^0)$ et $f^-(x^0)$ existent alors :

$$f^+(x^0) = \ell_{\nu(x^0)} f(x^0) \text{ et } f^-(x^0) = \ell_{-\nu(x^0)} f(x^0).$$

Pour E partie de \mathbb{R}^n , on désignera par $P_a(E)$ la projection sur l'hyperplan $(x, a) = 0$ parallèlement à la direction a et, en notations évidentes, par $\lambda^*(E)$ la quantité $\sup_{|a|=1} \lambda_{n-1}^*(P_a(E))$.

On prendra pour E un ensemble Ω domaine borné de \mathbb{R}^n , de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 , de dimension $n-1$, connexe, sans bord, tel que $\chi_\Omega \in BV(\mathbb{R}^n)$ et $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ (c.f. §6).

Par la suite on désignera par ϑ la fonction $u\chi_\Omega$.

De plus, pour $\omega \in BV(\mathbb{R}^n)$ et une partie $E \subset \mathbb{R}^n$, on n'a pas e.g. $\omega\chi_E \in BV(\mathbb{R}^n)$. Par contre, d'après le théorème 4, on observe que $\chi_\Omega \in BV(\mathbb{R}^n)$ entraîne $\vartheta \in BV(\mathbb{R}^n)$ et donc que, $\bar{\Omega}$ étant un compact de \mathbb{R}^n , $\vartheta|_\Omega \in BV(\Omega)$.

Soit R l'ensemble des points réguliers pour ϑ , alors, d'après A.I. VOL'PERT [56], $\lambda^*(\partial^*\Omega \setminus R) = 0$. Pour $x^0 \in \partial^*\Omega \cap R$, $\exists a \in \mathbb{R}^{n*} / \ell_{\pm a} \vartheta(x^0)$ existe $\iff \ell_{\pm a} \chi_\Omega(x^0)$ existe $\iff a = \pm \nu(x^0)$.

D'où, au sens de la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$ [10] ou [40], pour presque tout $x^0 \in \partial\Omega$, $u^\pm(x^0) = \ell_{\pm \nu(x^0)} u(x^0)$.

Remarque 8 : Si l'on considère deux recouvrements finis de $\partial\Omega$, soient :

$$\{U_x^{\beta,\gamma}\}_{i \in \{1, \dots, q_1\}} \text{ et } \{U_x^{\beta,\gamma}\}_{i \in \{q_1+1, \dots, q_2\}}$$

où les $(\beta, \gamma) \neq (\beta_0, \gamma_{\beta_0})$,

alors pour $z \in \partial\Omega$ fixé, on peut former

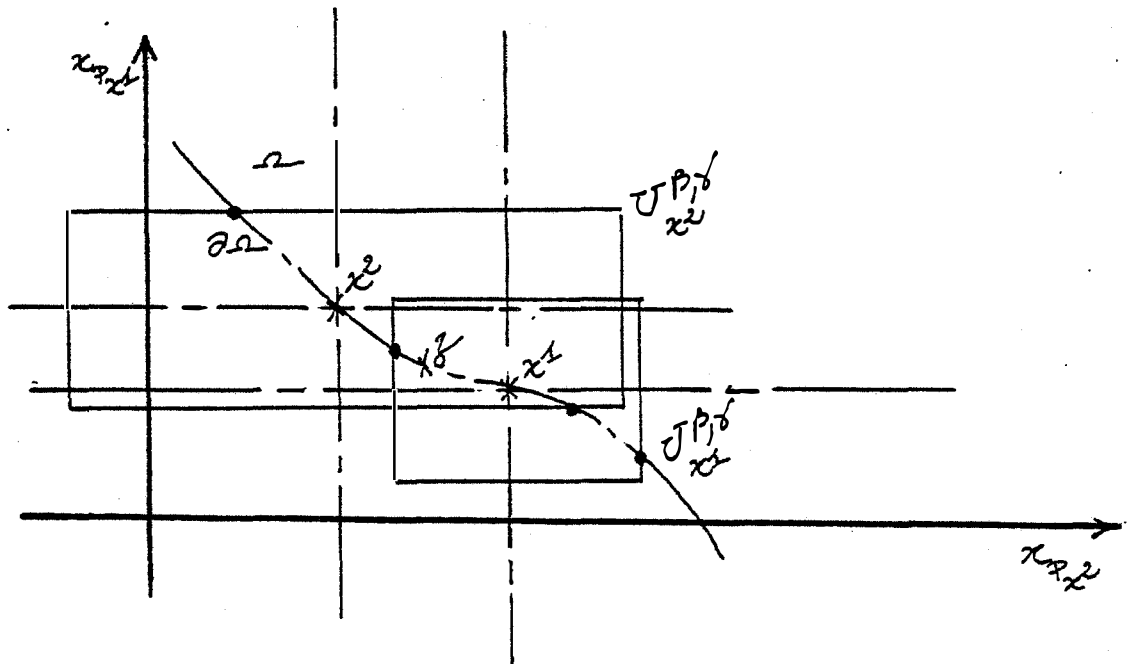
$$I = \{i \in \{1, \dots, q_2\} \mid z \in U_x^{\beta,\gamma}\} \text{ et}$$

$$J = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid j = P_i \text{ avec } i \in I\}.$$

Quelque soit $i \in I$, $U_x^{\beta,\gamma}$ étant ouvert et convexe, $\bigcap_{i \in I} U_x^{\beta,\gamma}$

est ouvert et convexe et donc est un domaine de \mathbb{R}^n .

Graphiquement :



Pour $(x^0, j) \in \mathbb{R}^n \times \{1, \dots, n\}$, la droite affine passant par x^0 et de direction le j -ième vecteur canonique e_j sera notée $D(x^0, e_j)$.

Pour $x^0 \in \partial\Omega \cap \left(\bigcap_{i \in I} U_i^{\beta, \gamma} \right) \equiv \Gamma_Z$, on a $\forall j \in J, x^0 \in \partial^*(\Omega \cap D(x^0, e_j))$;

d'où pour ω application définie dans un voisinage de x^0 dans $D(x^0, e_j)$, on peut considérer la trace $\begin{cases} \text{intérieure} \\ \text{extérieure} \end{cases}$ de ω au point x^0 , notée $\omega_j^\pm(x^0)$, où l'indice $j \in J$ rappelle que l'on a utilisé la mesure extérieure λ_1^* sur $D(x^0, e_j)$.

Remarquons que $x^0 \in \Gamma_Z \implies x^0 \in \partial^*\Omega$.

On peut alors espérer que pour $y \in \Gamma_Z$, sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle, $\forall j \in J, u^\pm(y) = \lambda_{\pm \nu}(y) u(y) = u_j^\pm(y)$.

Cependant des contreexemples introduisent l'idée que l'existence de $u^\pm(y)$ sur $\partial\Omega$ sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle n'entraîne pas à elle seule les égalités précédentes.



INTRODUCTION AU §-6

On donne dans ce paragraphe des définitions de régularité d'une frontière $\partial\Omega$ d'un ouvert Ω .

On construira explicitement un relèvement défini sur $\bar{\Omega}$ (voir l'espace tout entier) d'une fonction elle-même définie sur $\partial\Omega$ moins un certain nombre de trous, ceci après avoir précisé la régularité nécessaire de cette fonction et de ces trous.

On montre que l'on peut même, pour toute valeur $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ inférieure à une certaine valeur $\bar{\alpha}$, utiliser pour représenter $\partial\Omega$ un système fini de boules de rayon α et de centre appartenant à $\partial\Omega$ dans lesquelles on peut appliquer le théorème des fonctions implicites, "raffinement" d'un système fixé semblable mais comportant des boules de rayons différents.

Les notions présentées ici sont utilisées dans la plupart des paragraphes.

PARAGRAPHE 6

Régularités de frontières et constructions de relèvements

Dans toute la suite n sera un entier supérieur ou égal à 2.

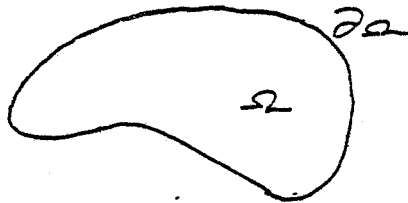
Hypothèse 1 : \mathbb{R}^n sera supposé muni de la norme euclidienne.

Soit Ω un domaine (ouvert, connexe, $\neq \emptyset$) borné de \mathbb{R}^n .

Soit $\partial\Omega$ la frontière de Ω , supposée de classe C^k , $k \in \{1, \dots, +\infty\}$, de dimension $n-1$, connexe, sans bord.

Remarque 1 : Ω borné \longleftarrow $\partial\Omega$ borné.

Graphiquement



Définition 1 : Soit $\partial\Omega$ la frontière connexe d'un domaine Ω borné de \mathbb{R}^n . $\partial\Omega$ sera dite de classe C^k , $k \in \{1, \dots, +\infty\}$, de dimension $n-1$, sans bord, ssi : $\forall x^0 \in \partial\Omega, \exists U_{x^0}$ voisinage ouvert de x^0 dans \mathbb{R}^n et $F_{x^0} \in C^k(U_{x^0}), \nabla F_{x^0}(x^0) \neq 0_{\mathbb{R}^n} / \partial\Omega \cap U_{x^0}$ soit gouverné par $F_{x^0}(x) = 0$ (i.e. $\forall x \in U_{x^0}, F_{x^0}(x) = 0 \longleftarrow x \in \partial\Omega$).

Remarque 2 : Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, $\forall x^0 \in \partial\Omega, \exists U'_{x^0}$ voisinage ouvert de $x^0, \exists p_{x^0} \in \{1, \dots, n\} / \mathbb{R}_{p_{x^0}}(\partial\Omega \cap U'_{x^0}) \equiv D_{x^0}$ domaine de \mathbb{R}^{n-1} dans lequel $\partial\Omega \cap U'_{x^0}$ est gouverné par noté. l'application définie par :

$$x_{p_{x^0}} = \phi_{x^0}(x_1, \dots, x_{p_{x^0}-1}, x_{p_{x^0}+1}, \dots, x_n),$$

$$(x_1, \dots, x_{p_{x^0}-1}, x_{p_{x^0}+1}, \dots, x_n) \in D_{x^0} \text{ et } \phi_{x^0} \in C^k(D_{x^0}) ;$$

P_{x^0} est la projection sur \mathbb{R}^{n-1} parallèlement à $x_{p_{x^0}}$.

Définition 2 : $\partial\Omega \cap U'_{x^0}$ sera appelé simple morceau de $\partial\Omega$.

Remarque 3 : $\partial\Omega$ étant compact on extrait de son recouvrement $\{U'_x\}_{x \in \partial\Omega}$

un sous-recouvrement fini $\{U'_{x_i}\}_{i \in \{1, \dots, q\}}$

qui fournit un recouvrement fini de $\partial\Omega$, soit

$\{U'_i \cap \partial\Omega\}_{i \in \{1, \dots, q\}}$, par de simples morceaux de $\partial\Omega$.

Hypothèse 2 : Pour simplifier les notations on supposera par la suite pour x^0 fixé, $p_{x^0} = n$.

Considérons l'application $\mathcal{F}_{x^0} : U'_{x^0} \longrightarrow V_{x^0}, V_{x^0}$ étant un voisinage

de \mathbb{R}^n , avec $\mathcal{F}_{x^0}(x) = y = (y_1, \dots, y_n)$ où $y_i = F_i(x), \forall i \in \{1, \dots, n\}$ et, en notations évidentes, $F_1(x) = x_1 - x_1^0, \dots, F_{n-1}(x) = x_{n-1} - x_{n-1}^0, F_n(x) = F_{x^0}(x)$.

Pour $x^0 \in \partial\Omega$ fixé, par exemple d'après [34], $\exists \beta_{x^0} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall 0 < \beta \leq \beta_{x^0}, \exists \gamma_\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall 0 < \gamma \leq \gamma_\beta$ on puisse prendre pour U'_{x^0} l'ensemble :

$$U_{x^0}^{\beta, \gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n / |x_n - x_n^0| < \beta \text{ et } \|(x_1, \dots, x_{n-1}) - (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)\|_{\mathbb{R}^{n-1}} < \gamma\}.$$

De plus, par un théorème d'inversion locale [34] on peut prendre $U'_{x^0} = U_{x^0}^{\beta, \gamma}$ tel que \mathcal{F}_{x^0} soit C^k -difféomorphisme de U'_{x^0} dans V_{x^0} -voisinage-ouvert-de- \mathbb{R}^n .

Remarque 4 : Pour $x^0 \in \partial\Omega$ fixé, $\forall B(x, \varepsilon[\subset U_{x^0}^{\beta, \gamma}$, $x \in \partial\Omega$, $\exists (\beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 / B(x, \varepsilon[\supset U_x^{\beta, \gamma}$. Pour $x = x^0$ on notera ε par ε_{x^0} .

Hypothèse 3 : $\forall x^0 \in \partial\Omega$ on supposera par la suite que $\exists \varepsilon_{x^0} \in \mathbb{R}_+^*$ / $\forall B(x, \varepsilon[\subset B(x^0, \varepsilon_{x^0}[$, $x \in \partial\Omega, \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ (on n'utilisera en fait par la suite que les cas $\varepsilon = \varepsilon_{x^0}$ ou $\varepsilon = \alpha$ -du lemme 0), $\forall y \in (S^{\mathbb{R}^n}(x, \varepsilon) \cap \partial\Omega) \setminus S^{\mathbb{R}^{n-1}}(x, \varepsilon)$ où $S^{\mathbb{R}^n}(x, \varepsilon)$ représente la sphère de \mathbb{R}^n de centre x en notation évidente.

et de rayon ε , $\exists x^y \in \partial\Omega / \forall \xi \in \mathbb{R}_+^*$ assez petit, on puisse prendre pour $U_{x^y}^1$ l'ensemble $U_{x^y}^{d_1 + \xi, d_2} \subset U_{x^0}^{\beta, \gamma}$ avec $d_1 = |x_n^y - y_n| \neq 0$, $d_2 = \|(x_1^y, \dots, x_{n-1}^y) - (y_1, \dots, y_{n-1})\|_{\mathbb{R}^{n-1}} \neq 0$, qui vérifie pour $\xi = 0$ $U_{x^y}^{d_1, d_2} \cap B(x, \varepsilon[= \emptyset$; remarquons que pour $\xi = 0$, $U_{x^y}^{d_1, d_2}$ ne peut plus être un $U_{x^y}^1$ au sens classique [34] (cf. graphique p. suivante).

Remarque 4 $\forall B(x, \varepsilon[\subset U_{x^0}^{\beta, \gamma}$, $x \in \partial\Omega$, $\text{pr}_{p_{x^0}}(B(x, \varepsilon[\cap \partial\Omega)$ ouvert de \mathbb{R}^{n-1} .

Considérons $B(x, \varepsilon[$ vérifiant l'hypothèse 3, alors, en remarquant que :

$$\text{pr}_{p_{x^0}}(U_{x^0}^{\beta, \gamma}) = \text{pr}_{p_{x^0}}(U_{x^0}^{\beta, \gamma} \cap \partial\Omega), \text{ on a :}$$

$\forall x \in \text{pr}_{p_{x^0}}(B(x, \varepsilon[\cap \partial\Omega)$, \exists un chemin affine d'origine x et d'extrémité x^0 . D'où $\text{pr}_{p_{x^0}}(B(x, \varepsilon[\cap \partial\Omega)$ est un ouvert de \mathbb{R}^{n-1} connexe par arcs $\longrightarrow \text{pr}_{p_{x^0}}(B(x, \varepsilon[\cap \partial\Omega)$ domaine.

Hypothèse 4 : On remplacera systématiquement par la suite $U_{x^0}^1$ par $B(x^0, \varepsilon_{x^0}[$. On notera que tous les résultats suivants, hormis ceux sur les recouvrement réguliers liés au lemme 0, demeurent pour $U_{x^0}^1$ si l'on n'a pas l'hypothèse 3.

Notation 1 : Notons par t_{x^0} la translation dans \mathbb{R}^{n-1} de vecteur

$$(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0), x^0 \in \partial \Omega \quad . \text{ Rappelons que } P_{x^0} = n.$$

Notation 2 : Notons par B l'ensemble $\bigcup_{i \in \{1, \dots, q\}} B(x^i, \varepsilon_{x^i})$ recouvrement de $\partial \Omega$.

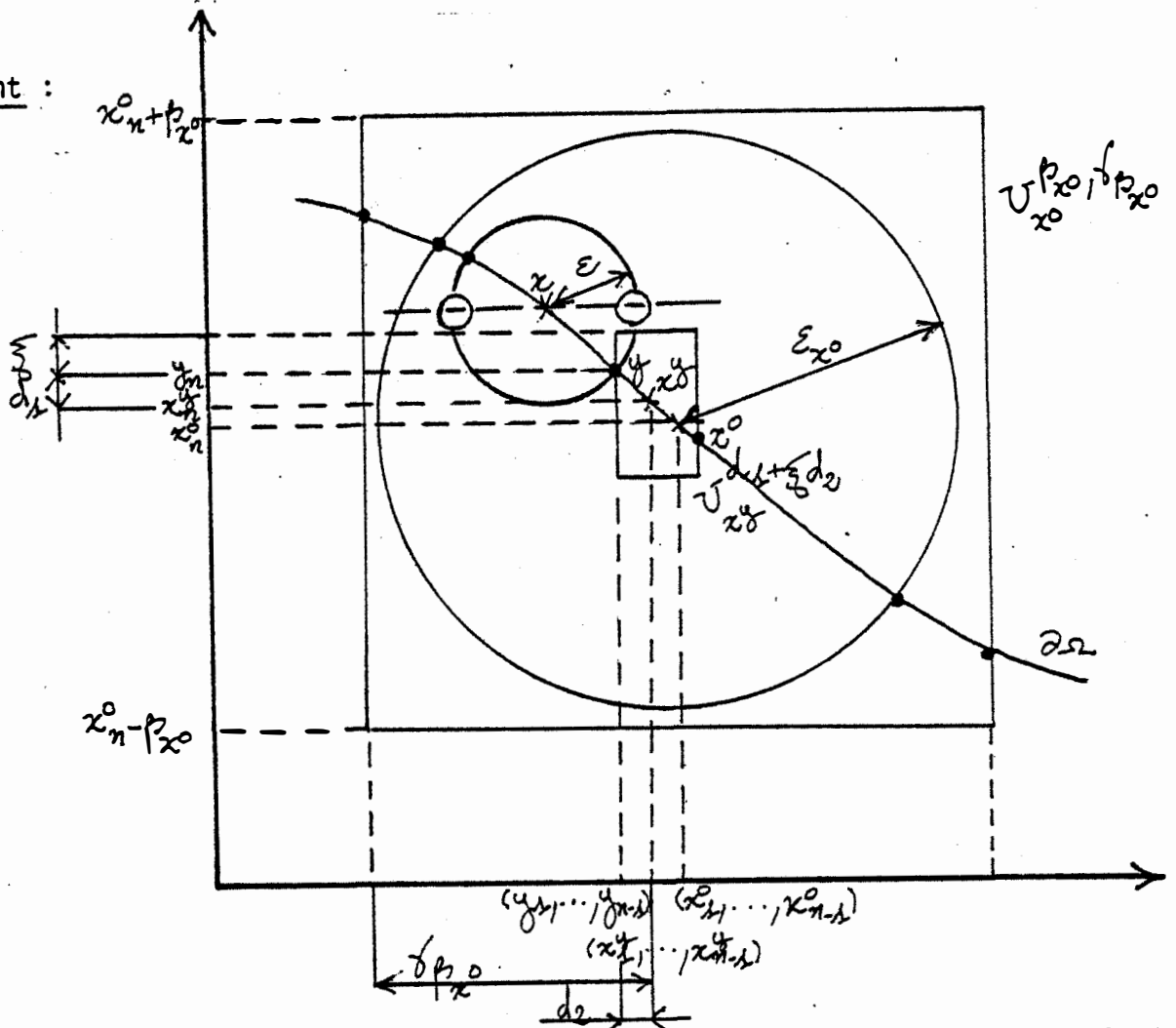
Lemme 0 : Il existe $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+^* / \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \leq \bar{\alpha}, \exists$ un recouvrement fini de $\partial \Omega$, soit

$$\{B(y^j, \alpha] \}_{j \in \{1, \dots, r\}}, \text{ avec } y^j \in \partial \Omega, \forall j \in \{1, \dots, r\}, \text{ où}$$

de plus on a (1) $\forall j \in \{1, \dots, r\}, \exists i \in \{1, \dots, q\} /$

$$B(y^j, \alpha] \subset B(x^i, \varepsilon_{x^i}) .$$

Graphiquement :



Remarque 5 : a) D'après (1) les $B(y^j, \alpha]$ vérifient la condition d'application de l'hypothèse 3.

b) De plus(1) entraîne que $\partial\Omega \cap U_{y^j}^i = \partial\Omega \cap B(y^j, \alpha)$ est gouverné par l'application ϕ_{x^i} .

Si l'on n'a pas(1) alors les résultats de a) et b) ne sont plus vérifiés automatiquement. D'autre part la démonstration du lemme 0 n'utilisera que des arguments topologiques et ne nécessitera pas de connaître la régularité des F_{x^0} .

Hypothèse 5 : On se placera par la suite dans le cas non trivial $q > 1$.

Démonstration du lemme 0 : Soit :

$$\mathcal{K} = \{(i, j) \in (\{1, \dots, q\})^2, i \neq j / B(x^i, \epsilon_{x^i}) \cap B(x^j, \epsilon_{x^j}) \neq \emptyset\}.$$

Hypothèse 6 : On supposera par la suite que :

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}, \exists \{j_\ell\}_{\ell \in \{1, \dots, P\}}$$

$$\text{avec } P \leq q-1 \text{ et } j_\ell \in \{1, \dots, q\} \setminus \{i\} / B(x^i, \epsilon_{x^i}) \subset \bigcup_{\ell=1}^P B(x^{j_\ell}, \epsilon_{x^{j_\ell}}).$$

Pour $(i, j) \in \mathcal{K}$ fixé on considère l'hyperplan $H_{i,j}$ orthogonal à $\langle x^i, x^j \rangle$ (sous-espace affine engendré par x^i et x^j) tel que :

$$S(x^i, \epsilon_{x^i}) \cap S(x^j, \epsilon_{x^j}) = S(x^i, \epsilon_{x^i}) \cap H_{i,j} = S(x^j, \epsilon_{x^j}) \cap H_{i,j} \text{ où } S(x, \epsilon)$$

représente la sphère de centre x et de rayon ϵ .

$H_{i,j}$ est un fermé de \mathbb{R}^n .

On considère de plus les deux demi-espaces de bord $H_{i,j}$, soient $H_{i,j}^+$ et $H_{i,j}^-$.

Lemme 1 : $\forall i \in \{1, \dots, q\}, \exists j \in \{1, \dots, q\} / (i, j) \in \mathcal{K}$.

Démonstration par l'absurde : Supposons $\exists i \in \{1, \dots, q\} / \forall j \in \{1, \dots, q\}$,

$(i, j) \notin \mathcal{N} \implies B(x^i, \epsilon_{xi}) \cap \partial \Omega$ qui est un ouvert de $\partial \Omega$, non vide (car contenant x^i), différent de $\partial \Omega$ pour $q > 1$, et qui est égal, en remarquant que $\{B(x^i, \epsilon_{xi})\}_{i \in \{1, \dots, q\}}$ est un recouvrement de $\partial \Omega$, $\bar{\partial \Omega} \cap \bigcup_{j \in \{1, \dots, q\} \setminus \{i\}} B(x^j, \epsilon_{xj})$, est encore un fermé de $\partial \Omega$. $\partial \Omega$ étant connexe on obtient une impossibilité.

Notons par \mathcal{N}_i l'ensemble $\{j \in \{1, \dots, q\} / (i, j) \in \mathcal{N}\}$. D'après le lemme 1, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $\mathcal{N}_i \neq \emptyset$.

On construit alors l'application $\gamma_i : \mathcal{N}_i \longrightarrow \{+, -\} / \gamma_i(j)$ soit l'unique quantité vérifiant $B(x^i, \epsilon_{xi}) \setminus B(x^j, \epsilon_{xj}) \subset H_{i,j}^{\gamma_i(j)}$.

Notons par θ_i l'ensemble $(\bigcap_{j \in \mathcal{N}_i} H_{i,j}^{\gamma_i(j)}) \cap B(x^i, \epsilon_{xi})$.

Lemme 2 : $B = \bigcup_{i=1}^q B(x^i, \epsilon_{xi}) = \bigcup_{i=1}^q \theta_i$.

- Remarque 6 : a) $\forall (i, j) \in \mathcal{N}$ on a $\gamma_i(j) = -\gamma_j(i)$.
 b) $H_{j,i} = H_{i,j}$.

Démonstration du lemme 2 : Soit $x^0 \in B \implies \exists i \in \{1, \dots, q\} / x^0 \in B(x^i, \epsilon_{xi})$.

Supposons que $x^0 \notin \bigcap_{j \in \mathcal{N}_i} H_{i,j}^{\gamma_i(j)} \implies x^0 \in \bigcup_{j \in \mathcal{N}_i} \left(B(x^i, \epsilon_{xi}) \setminus H_{i,j}^{\gamma_i(j)} \right)$

$\exists j_1 \in \mathcal{N}_i$

(d'où $j_1 \neq i$) / $x^0 \in \left(B(x^i, \epsilon_{xi}) \setminus H_{i,j_1}^{\gamma_i(j_1)} \right) \implies x^0 \in B(x^i, \epsilon_{xi})$

$\cap H_{j_1,i}^{\gamma_{j_1}(i)} = B(x^{j_1}, \epsilon_{x^{j_1}}) \cap H_{j_1,i}^{\gamma_{j_1}(i)}$.

Supposons $x^0 \notin \bigcap_{j \in \mathbb{N}_{j_1}} H_{j_1, j}^{\gamma_{j_1}(j)} \xrightarrow{\text{comme précédemment}} x^0 \in B(x^{j_1}, \epsilon_{x^{j_1}}[\cap H_{j_2, j_1}^{\gamma_{j_2}(j_1)} =$

$B(x^{j_2}, \epsilon_{x^{j_2}}[\cap H_{j_2, j_1}^{\gamma_{j_2}(j_1)} \text{ avec } j_2 \in \mathbb{N}_{j_1} \text{ (d'où } j_2 \neq j_1) .$

Posons $j_0 = i$.

On a $j_2 \neq j_0$. En effet si l'on avait $j_2 = j_0$, on aurait

$x^0 \in B(x^{j_0}, \epsilon_{x^{j_0}}[\cap H_{j_0, j_1}^{\gamma_{j_0}(j_1)} \text{ et } x^0 \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}_{j_0}} C_{B(x^{j_0}, \epsilon_{x^{j_0}}[H_{j_0, j}^{\gamma_{j_0}(j)}]$

avec $j_1 \in \mathbb{N}_{j_0}$, d'où la contradiction.

Réitérons le processus précédent pour $k \geq 2$, de l'ordre k à l'ordre $k+1$:

Supposons que $x^0 \notin \bigcap_{j \in \mathbb{N}_k} H_{k, j}^{\gamma_k(j)} \xrightarrow{\text{comme précédemment}} x^0 \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}_k} C_{B(x^k, \epsilon_{x^k}}[H_{k, j}^{\gamma_k(j)}$

$\xrightarrow{\text{comme précédemment}} x^0 \in B(x^{j_{k+1}}, \epsilon_{x^{j_{k+1}}}[\cap H_{j_{k+1}, j_k}^{\gamma_{j_{k+1}}(j_k)}$

avec $j_{k+1} \in \mathbb{N}_{j_k}$ (d'où $j_k \neq j_{k+1}$).

De plus on a : $j_{k+1} \neq j_\ell$, $\forall \ell \in \{0, \dots, k\}$. En effet si $\ell = k$ on a

$j_{k+1} \neq j_k$ et si l'on avait $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$ et $j_{k+1} = j_\ell$ on aurait

$x^0 \in B(x^{j_\ell}, \epsilon_{x^{j_\ell}}[\cap H_{j_\ell, j_k}^{\gamma_{j_\ell}(j_k)} \text{ et } x^0 \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}_{j_\ell}} C_{B(x^{j_\ell}, \epsilon_{x^{j_\ell}}[H_{j_\ell, j}^{\gamma_{j_\ell}(j)}$

avec par hypothèse de récurrence $j_k \in \mathbb{N}_{j_\ell}$, d'où la contradiction.

Le processus s'arrête obligatoirement puisque les j_k appartiennent à $\{1, \dots, q\}$ et sont différents deux à deux. D'où il existe

$\bar{k} \in \{1, \dots, q\} / x^0 \in \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}_{\bar{k}}} H_{\bar{k}, j}^{\gamma_{\bar{k}}(j)} \right) \cap B(x^{\bar{k}}, \epsilon_{x^{\bar{k}}}[$

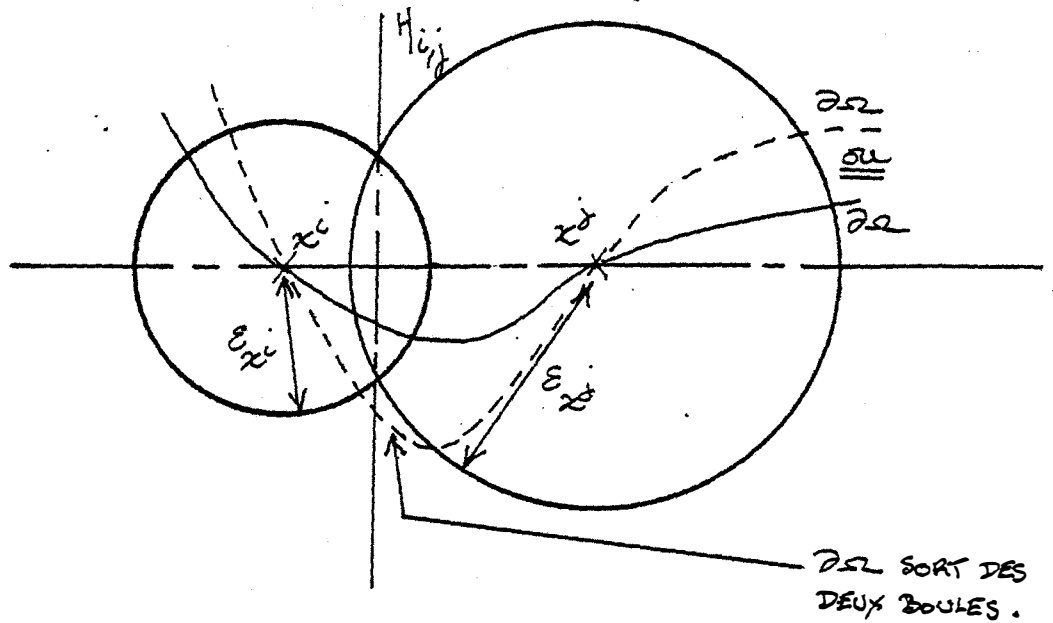
D'où $B \subset \bigcup_{i=1}^q \theta_i$; l'inclusion inverse étant immédiate on a le résultat.

Lemme 3 :
$$\bar{B} = \bigcup_{i=1}^q \left[\left(\bigcap_{j \in N_i} H_{i,j}^{\gamma_i(j)} \right) \cap B(x^i, \varepsilon_{x^i} |) \right].$$

Démonstration :
$$\bar{B} = \bigcup_{i=1}^q B(x^i, \varepsilon_{x^i} |) \subset \bigcup_{i=1}^q \left[\overline{\left(\bigcap_{j \in N_i} H_{i,j}^{\gamma_i(j)} \right) \cap B(x^i, \varepsilon_{x^i} |)} \right] =$$

$$\bigcup_{i=1}^q \left[\left(\bigcap_{j \in N_i} H_{i,j}^{\gamma_i(j)} \right) \cap B(x^i, \varepsilon_{x^i} |) \right];$$
 l'inclusion inverse étant immédiate, on a le résultat.

Graphiquement :



On notera par F_i l'ensemble $\left(\bigcap_{j \in N_i} H_{i,j}^{\gamma_i(j)} \right) \cap B(x^i, \varepsilon_{x^i} |)$.

Lemme 4 : $\forall i \in \{1, \dots, q\}, F_i \cap \partial \Omega \subset B(x^i, \varepsilon_{x^i} |)$.

Démonstration par l'absurde : Soit $i \in \{1, \dots, q\}$ fixé.

Supposons $\exists x^0 \in F_i \cap \partial\Omega \cap S(x^i, \epsilon_{x^i})$. Alors, $\{B(x^i, \epsilon_{x^i})\}_{i \in \{1, \dots, q\}}$ étant un recouvrement de $\partial\Omega$, $\exists j \in \mathbb{N}_i / x^0 \in B(x^j, \epsilon_{x^j})$ et $x^0 \notin H_{i,j}^{\gamma_i(j)} \implies x^0 \notin F_i$, d'où la contradiction.

On notera par J l'ensemble $\{j \in \{1, \dots, q\} / F_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}$.

Lemme 5 : $\forall i \in J, \exists \epsilon_i > 0 / \forall x^0 \in F_i \cap \partial\Omega, B(x^0, \epsilon_i] \subset B(x^i, \epsilon_{x^i})$.

Démonstration : Soit $i \in J$ fixé. $\partial\Omega$ borné $\implies F_i \cap \partial\Omega$ compact.

On a alors $d(S(x^i, \epsilon_{x^i}), F_i \cap \partial\Omega) = \epsilon_i > 0$ car $(F_i \cap \partial\Omega) \cap S(x^i, \epsilon_{x^i}) = \emptyset$ d'après le lemme 4, $F_i \cap \partial\Omega$ et $S(x^i, \epsilon_{x^i})$ compacts.

Démontrons alors par l'absurde que l'on a :

(1) $\forall x^0 \in F_i \cap \partial\Omega, B(x^0, \epsilon_i] \subset B(x^i, \epsilon_{x^i})$.

Supposons que l'on n'ait pas (1), alors $\exists x^0 \in F_i \cap \partial\Omega, \exists x \in B(x^0, \epsilon_i] / x \notin B(x^i, \epsilon_{x^i})$. $B(x^0, \epsilon_i]$ connexe et $x \in B(x^0, \epsilon_i] \cap \bigcap_{\mathbb{R}n} B(x^i, \epsilon_{x^i}) \neq \emptyset, x^0 \in B(x^0, \epsilon_i] \cap B(x^i, \epsilon_{x^i}) \neq \emptyset \implies B(x^0, \epsilon_i] \cap S(x^i, \epsilon_{x^i}) \neq \emptyset$.

Soit $\xi \in B(x^0, \epsilon_i] \cap S(x^i, \epsilon_{x^i})$ fixé. Alors $d(x^0, \xi) < \epsilon_i$ avec $x^0 \in F_i \cap \partial\Omega$ et $\xi \in S(x^i, \epsilon_{x^i})$ et $\inf_{\substack{x \in S(x^i, \epsilon_{x^i}) \\ y \in F_i \cap \partial\Omega}} d(x, y) = \epsilon_i$, ce qui est contradictoire.

On a donc (1).

Prenons $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \leq \min_{i \in J} \varepsilon_i = \bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+^*$. $\partial \Omega$ étant compact, on extrait de son recouvrement $\{B(x, \alpha[) \}_{x \in \partial \Omega}$ un sous-recouvrement fini, soit $\{B(y^j, \alpha[) \}_{j \in \{1, \dots, r\}}$ avec $y_j \in \partial \Omega, \forall j \in \{1, \dots, r\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$ fixé. D'après le lemme 3,

$$\exists i \in \{1, \dots, q\} / y_j \in F_i \cap \partial \Omega$$

D'où, d'après le lemme 5, $B(y^j, \alpha[\subset B(y^j, \varepsilon_i[\subset B(x^i, \varepsilon_{x^i}[$, ce qui achève la démonstration de lemme 0.

Remarque 7 : Si à la fin de la preuve du lemme 0 on n'extrait pas de sous-recouvrement fini, le lemme 0 demeure avec $B(x^0, \alpha[$, $x^0 \in \partial \Omega$ à la place de $B(y^j, \alpha[$, $j \in \{1, \dots, r\}$.

Hypothèse 7 : Le lemme 0 nous autorise à considérer par la suite que l'on a : $\varepsilon_{x^0} = \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x^0 \in \partial \Omega$ et $\varepsilon_{x^i} = \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$.

Remarque 8 : $\forall x^0 \in \partial \Omega$, l'application surjective $\psi_{x^0} : D_{x^0} \longrightarrow B(x^0, \varepsilon[\cap \partial \Omega$ définie par $\psi_{x^0}(y) = (y, \phi_{x^0}(y))$ étant continue (car ϕ_{x^0} continue) et D_{x^0} étant connexe, $B(x^0, \varepsilon[\cap \partial \Omega$ est un domaine de $\partial \Omega$.

Notation 3 : On notera par la suite $\mathcal{F}_{x^0}(B(x^0, \varepsilon[\cap \partial \Omega))$ par Σ_{x^0} .

Remarque 9 : On voit que $\Sigma_{x^0} = t_{-x^0}(D_{x^0})$ est un domaine de \mathbb{R}^{n-1} . Cependant il est intéressant de le démontrer par : \mathcal{F}_{x^0} étant continue, $\mathcal{F}_{x^0}(B(x^0, \varepsilon[\cap \partial \Omega))$ est connexe d'après la remarque 8.

Alors notons formellement par x la quantité $\mathcal{F}_{x^0}^{-1}(y)$. $y \in \Sigma_{x^0} =$
 $\mathcal{F}_{x^0}(B(x^0, \varepsilon] \cap \partial \Omega) \longmapsto x \in B(x^0, \varepsilon] \cap \partial \Omega \longmapsto y \in V_{x^0} =$
 $\underbrace{\hspace{10em}}$
 $\text{car } \forall x \in B(x^0, \varepsilon], x \in \partial \Omega \iff F_n(x) = 0.$

$\mathcal{F}_{x^0}(B(x^0, \varepsilon])$ et $y_n = F_n(x) = 0$ $\underbrace{\hspace{5em}}$ $y \in V_{x^0} \cap \{y \in \mathbb{R}^n /$
 $\text{car } y = \mathcal{F}_{x^0}(x).$

$y = (y', 0)$ avec $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ qui par définition est un ouvert de \mathbb{R}^{n-1} .

Soit $\partial \Omega_1 \subset \partial \Omega$.

Considérons $F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1) = \overline{\partial \Omega_1}^{\partial \Omega} \cap \overline{\partial \Omega \setminus \partial \Omega_1}^{\partial \Omega}$ $\underbrace{\hspace{10em}} =$
 $\partial \Omega$ étant une partie fermée de \mathbb{R}^n .

$\overline{\partial \Omega_1} \cap \overline{\partial \Omega \setminus \partial \Omega_1}$ fermé de \mathbb{R}^n .

$\{B(x^0, \varepsilon] \}_{x^0 \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)}$ est un recouvrement de $F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)$.

Notation 4 : Soit $x^0 \in \partial \Omega$ fixé, alors :

Notons par $\Sigma_{x^0}^0$ l'ensemble $\mathcal{F}_{x^0}(F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1) \cap B(x^0, \varepsilon])$.

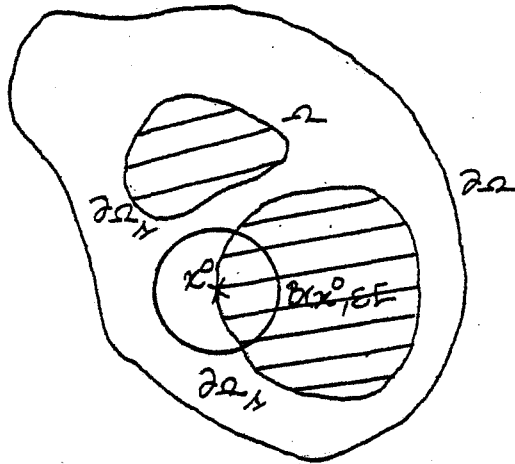
$\Sigma_{x^0}^- \longleftarrow \mathcal{F}_{x^0}(\overline{\partial \Omega_1} \cap B(x^0, \varepsilon]).$

$\Sigma_{x^0}^+ \longleftarrow \mathcal{F}_{x^0}((\overline{\partial \Omega \setminus \partial \Omega_1}) \cap B(x^0, \varepsilon]).$

Remarque 10 : On a $\Sigma_{x^0} = \Sigma_{x^0}^+ \cup \Sigma_{x^0}^-$ et \mathcal{F}_{x^0} étant injective,

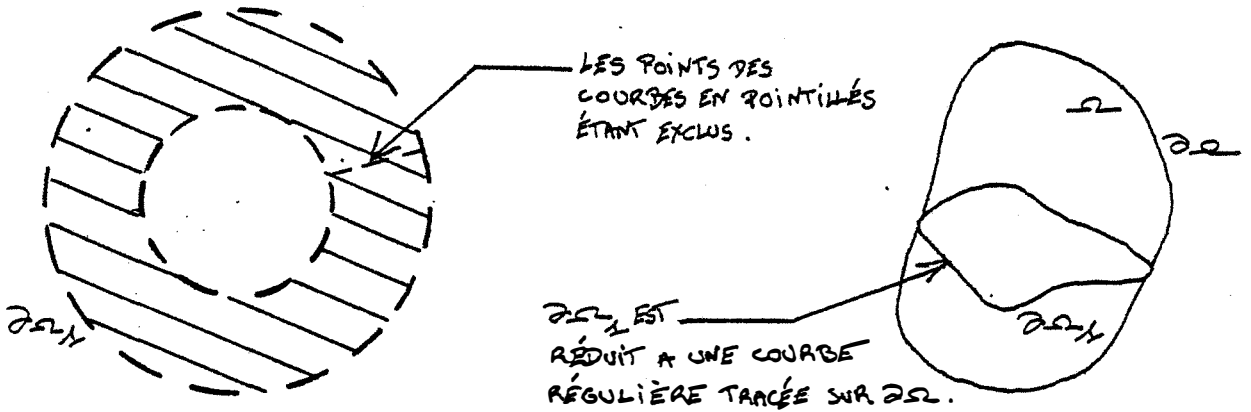
$$\Sigma_{x^0}^+ \cap \Sigma_{x^0}^- = \Sigma_{x^0}^0.$$

Graphiquement :



Hypothèse 8 : $\partial\Omega \cap \partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_1$ mis sous la forme générique A vérifient $\overset{0}{\widehat{A}^{\partial\Omega}} = \overset{0}{\widehat{A}^{\partial\Omega_1}}$,
 ce qui est équivalent à dire $\overset{0}{\partial\Omega} \cap \partial\Omega_1$ ou-exclusif $\partial\Omega \cap \partial\Omega_1$ vérifie la
 propriété précédente et $\overset{0}{A^{\partial\Omega}} = \overset{0}{A^{\partial\Omega_1}}$.

On exclut, par exemple, les ensembles $\partial\Omega_1$ de la forme graphique:



Hypothèse 9 : On supposera que $\forall x^0 \in F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1)$, $\overset{0}{\Sigma_{x^0}^{\pm}} \mathbb{R}^{n-1}$ domaine de \mathbb{R}^{n-1} .

Lemme 6 : Quelque soit $x^0 \in F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1)$, $\overline{\Sigma_{x^0}^{\pm} \mathbb{R}^{n-1}} = \Sigma_{x^0}^{\pm} \setminus \Sigma_{x^0}^0$

$= \Sigma_{x^0}^{\pm} \setminus \Sigma_{x^0}^{\mp}$ et $\Sigma_{x^0}^0 \subset \overline{\Sigma_{x^0}^{\pm} \setminus \Sigma_{x^0}^0} \mathbb{R}^{n-1}$.
 \mathcal{F}_{x^0} étant x^0 bijective.

Démonstration : Soit $x \in \overline{\Sigma_{x^0}^{\pm} \mathbb{R}^{n-1}}$ $\longmapsto \exists B(x, \mu] \subset \mathbb{R}^n$ où x est une notation

pour $(x, 0) / B(x, \mu] \cap \Sigma_{x^0} \subset \Sigma_{x^0}^+$ \mathcal{F}_{x^0} étant bijective.

$\mathcal{F}_{x^0}^{-1}(x)$ étant noté par X , $X \in \mathcal{F}_{x^0}^{-1}(B(x, \mu] \cap \Sigma_{x^0}) \subset$

$\mathcal{F}_{x^0}^{-1}(\Sigma_{x^0}^+) \longmapsto \mathcal{F}_{x^0}^{-1}(B(x, \mu])$, ouvert de \mathbb{R}^n du fait que \mathcal{F}_{x^0}

homéomorphisme, étant noté par θ , $x \in \theta \cap \partial\Omega \cap B(x^0, \epsilon] \subset$
 ouvert de $\partial\Omega$.

$(\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1)^{\partial\Omega} \cap B(x^0, \epsilon] \xrightarrow{\theta \text{ pouvant être pris quelconque car } \mathcal{F}_{x^0} \text{ homéomorphisme.}}$

$X \in \overline{\partial\Omega} \cap (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1)^{\partial\Omega}$

$B(x^0, \epsilon] \xrightarrow{\text{Hypothèse 8}} X \notin \underbrace{F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1)}_{= F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1)} \cap B(x^0, \epsilon] \equiv C$ et $X \in$ noté.

$(\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1)^{\partial\Omega} \cap B(x^0, \epsilon] \equiv D$ noté. \mathcal{F}_{x^0} étant bijective.

$x = \mathcal{F}_{x^0}(X) \in \Sigma_{x^0}^+ \setminus \Sigma_{x^0}^0$.

De plus on a immédiatement $C \subset D \setminus C$ \mathcal{F}_{x^0} étant un homéomorphisme

$\Sigma_{x^0}^0 \subset \overline{\Sigma_{x^0}^+ \setminus \Sigma_{x^0}^0} \mathbb{R}^{n-1}$ \mathbb{R}^{n-1} étant une partie fermée de \mathbb{R}^n .

On pratiquerait de même avec - en remplacement de +.

Remarque 11 : a) $\forall x^0 \in F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1)$ on a $\Sigma_{x^0}^{\pm} \setminus \Sigma_{x^0}^0 \subset \Sigma_{x^0}^{\pm} =$

$$(\Sigma_{x^0}^{\pm} \setminus \Sigma_{x^0}^0) + \Sigma_{x^0}^0 \subset \overline{\Sigma_{x^0}^{\pm} \setminus \Sigma_{x^0}^0} \mathbb{R}^{n-1}$$

- qui est un connexe car $\Sigma_{x^0}^{\pm} \setminus \Sigma_{x^0}^0$ connexe.

D'où $\Sigma_{x^0}^{\pm}$ connexe.

b) $\forall x^0 \in F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1)$ on a de plus :

a) $\mathbb{M}_{x^0}^{\pm}$ connexe $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\mathcal{F}_{x^0} \text{ étant un homéomorphisme.}}$ $\begin{cases} \overline{\partial\Omega_1} \cap B(x^0, \varepsilon[\text{ connexe} \\ \text{et} \\ (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1) \cap B(x^0, \varepsilon[\text{ connexe.} \end{cases}$

c) Considérons $\mathcal{C} = \{x^0 \in \partial\Omega / B(x^0, \varepsilon[\cap \overline{\partial\Omega_1} \neq \emptyset \text{ et}$

$$B(x^0, \varepsilon[\cap F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1) = \emptyset\}$$

Soit $x^0 \in \mathcal{C}$ fixé. On a alors $B(x^0, \varepsilon[\cap \overline{\partial\Omega_1} \neq \emptyset$. Si l'on suppose

$B(x^0, \varepsilon[\cap \bigcup_{\partial\Omega} \overline{\partial\Omega_1} \neq \emptyset$, cela contredit $B(x^0, \varepsilon[\cap F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1)$

$\underbrace{=}_{\text{Hypothèse 8.}} B(x^0, \varepsilon[\cap F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1) = \emptyset$ car $B(x^0, \varepsilon[\cap \partial\Omega$ est connexe

d'après la remarque 8 (remarquons que $B(x^0, \varepsilon[$ connexe ne concluerait pas).

D'où $B(x^0, \varepsilon[\cap \partial\Omega \subset \overline{\partial\Omega_1}$ $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{hypothèse 8.}}$ $B(x^0, \varepsilon[\cap \partial\Omega \subset \overline{\partial\Omega_1}^{\partial\Omega}$.

D'où $\forall x^0 \in \mathcal{C}$, $\Sigma_{x^0}^- = \Sigma_{x^0}^+$ domaine de \mathbb{R}^{n-1} , $\Sigma_{x^0}^+ = \Sigma_{x^0}^0 = \emptyset$ par construction.

On obtiendrait un résultat équivalent en échangeant - et + et en considérant $B(x^0, \varepsilon[\cap (\overline{\partial\Omega} \setminus \overline{\partial\Omega_1})$ à la place de $B(x^0, \varepsilon[\cap \overline{\partial\Omega_1}$.

d) $\overline{\partial\Omega_1}$ n'est pas, en général, connexe.

Hypothèse 10 : $\forall x^0 \in F_r^{\partial \Omega_1}, \exists f_{x^0} \in C^k(\Sigma_{x^0}), \nabla f_{x^0} \in \mathbb{R}^{n-1}$
 || par abus de notation.
 $\mathbb{R}^{n-1} / \Sigma_{x^0}$

$\neq 0$ soit gouverné par $f_{x^0}(x) = 0$.

Remarque 12 : Pour $n=2$, les prolongements dus à l'hypothèse 10 étant immédiats on prendra $n > 2$.

Remarque 13 : Alors, d'après le théorème des fonctions implicites,

$\forall x^0 \in F_r^{\partial \Omega_1}, \exists \Sigma'_{x^0}$ voisinage ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}, \exists Q_{x^0} \in \{1, \dots, n-1\}$

(en tenant compte de l'hypothèse 2) / $P_{r_{Q_{x^0}}}(\Sigma^0_{x^0} \cap \Sigma'^0_{x^0}) \equiv \Delta_{x^0}$
 domaine de \mathbb{R}^{n-2} dans lequel $\Sigma'^0_{x^0}$ est gouverné par l'application définie par :

$$x_{Q_{x^0}} = \psi_{x^0}(x_1, \dots, x_{Q_{x^0}-1}, x_{Q_{x^0}+1}, \dots, x_{n-1}),$$

$$(x_1, \dots, x_{Q_{x^0}-1}, x_{Q_{x^0}+1}, \dots, x_{n-1}) \in \Delta_{x^0}$$

et $\psi_{x^0} \in C^k(\Delta_{x^0})$; $P_{r_{Q_{x^0}}}$ est la projection sur \mathbb{R}^{n-2} parallèlement à $x_{Q_{x^0}}$.

Hypothèse 11 : On supposera par la suite que $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^*_+$ assez petit (remarquons (not. évid.)).

$$\Delta(\Sigma^0_{x^0} \cap \mathbb{R}^{n-1}) \leq \Delta(B(x^0, \epsilon) \cap \mathbb{R}^n) = 2\epsilon$$

pour pouvoir poser $\Sigma^1_{x^0}$ (respectivement $\Sigma^{0'}_{x^0}$) égal à Σ_{x^0} (respectivement $\Sigma^0_{x^0}$).

Hypothèse 12 : Pour simplifier les notations on supposera par la suite pour

$$x^0 \in F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1) \text{ fixé, } Q_{x^0} = n-1.$$

Hypothèse 11 \longleftarrow (par un raisonnement semblable à celui de la remarque 8)

$$\forall x^0 \in F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1), \Sigma_{x^0}^0 \text{ connexe} \xrightarrow[\text{homéomorphisme}]{\mathcal{F}_{x^0}^{-1}} F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1) \cap B(x^0, \varepsilon) \text{ connexe.}$$

Définition 3 : Une application $a : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $C^k(\partial\Omega)$,

$k \in \{1, \dots, +\infty\}$ si $\forall x^0 \in \partial\Omega$, l'application :

$$a(\mathcal{F}_{x^0}^{-1}(j(\cdot))) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ \downarrow j(\cdot) & & \uparrow a(\cdot) \\ (\Sigma_{x^0}^0) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{x^0}^{-1}(\cdot)} & B(x^0, \varepsilon) \cap \partial\Omega \end{array}$$

est de classe C^k dans

le domaine $\Sigma_{x^0}^0$ de \mathbb{R}^{n-1} .

Hypothèse 13 : $\forall x^0 \in F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1)$, pour $k \in \{1, \dots, +\infty\}$ fixé, on considèrera l'application ψ^{x^0} définie par :

$$\psi^{x^0} : \begin{array}{ccc} \Sigma_{x^0}^+ & \xrightarrow{\psi^{x^0}} & \mathbb{R} \\ \downarrow j(\cdot) & & \uparrow a(\cdot) \\ (\Sigma_{x^0}^+, \partial\Omega_1) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{x^0}^{-1}(\cdot)} & (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1) \cap B(x^0, \varepsilon) \end{array}$$

où a est donnée

telle que $\forall x^0 \in F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1), \psi^{x^0} \in C^k(\Sigma_{x^0}^+)$.

Pour $x^0 \in F_r(\partial\Omega)$ fixé, considérons Σ_{x^0} voisinage de $\mathcal{F}_0(x^0)$

$\overbrace{\mathbb{R}^{n-1}}^0$
par abus de notation.

L'équation donnant Σ_{x^0} est gouvernée, en tenant compte de l'hypothèse 12, par $x_{n-1} = \psi_{x^0}(x_1, \dots, x_{n-2})$ avec $\psi_{x^0} \in C^k(\Delta_{x^0})$.

Supposons, par exemple,

$$\forall x \in \overbrace{\mathbb{R}^{n-1}}^0_{x^0}, \quad x_{n-1} \geq \psi_{x^0}(x_1, \dots, x_{n-2}).$$

Considérons l'application :

$$A_{x^0}: \Sigma_{x^0} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \text{ définie par } A_{x^0}(x) = y = (y_1, \dots, y_{n-1}) =$$

$(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} - \psi_{x^0}(x_1, \dots, x_{n-2}))$; c'est un C^k -difféomorphisme de Σ_{x^0} dans θ_{x^0} -voisinage-ouvert-de- \mathbb{R}^{n-1} .

Soit, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé assez petit, dans θ_{x^0} le cube

$$k_a = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |y_i| < a, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\};$$

Notons par $\tilde{\Sigma}_{x^0}$ le domaine de \mathbb{R}^{n-1} contenant $0_{\mathbb{R}^{n-1}}$, soit $A_{x^0}^{-1}(k_a)$.

On peut choisir $a/\sqrt{k_a} \mathbb{R}^{n-1} \subset \theta_{x^0} \xrightarrow{A_{x^0} \text{ homéomorphisme}} \tilde{\Sigma}_{x^0} \subset \Sigma_{x^0}$.

De plus on a $A_{x^0}(\overbrace{\Sigma_{x^0} \cap \tilde{\Sigma}_{x^0}}^{\text{ouvert de } \mathbb{R}^{n-1}}) = k_a \cap \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid y_{n-1} > 0\} \equiv k_a^+$ noté.

D'où on a la situation :

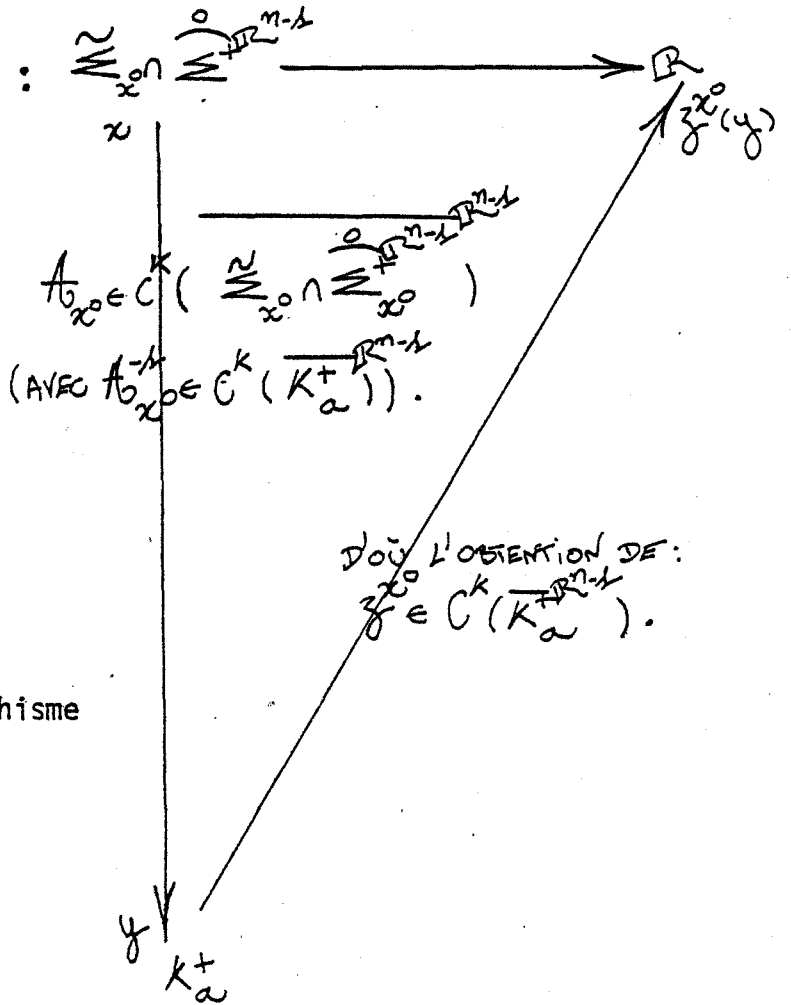
$$\psi^{x_0} : \Sigma_{x_0}^+ \cap \Sigma_{x_0}^+ \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

$$C^k(\Sigma_{x_0}^+ \cap \Sigma_{x_0}^+ \mathbb{R}^{n-1}) \xrightarrow{m} \mathbb{R}^{n-1}$$

$\Sigma_{x_0}^+$ car :

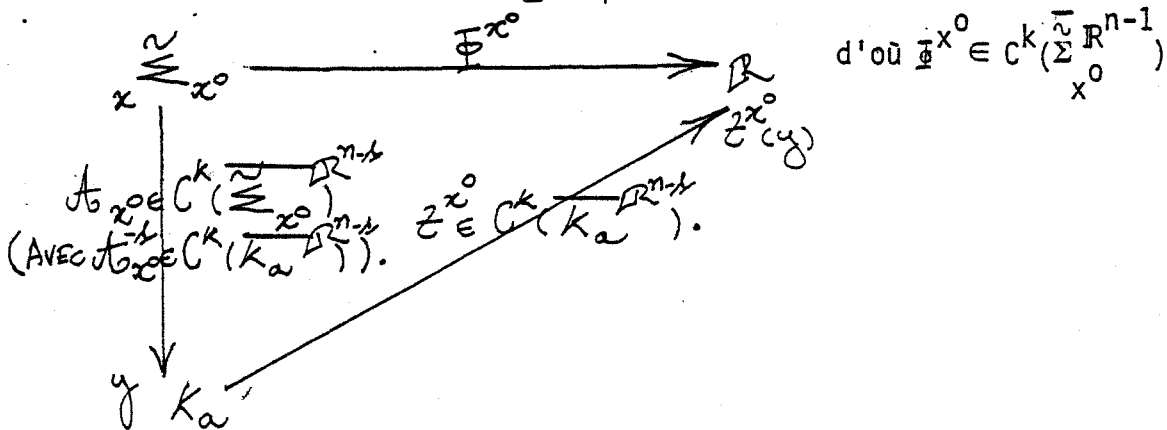
$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{x_0}^+ \subset \Sigma_{x_0}^+ \text{ et } \mathcal{F}_{x_0} \text{ homéomorphisme} \\ \Sigma_{x_0}^+ \subset \Sigma_{x_0}^+ \end{array} \right.$$

$$\Sigma_{x_0}^+ \cap \Sigma_{x_0}^+ \subset \Sigma_{x_0}^+$$



Alors selon un résultat dans V. MIKAILOV [40], il existe un prolongement $z^{x_0}(y) \in C^k(\overline{K_a^+})$ à la fonction $z^{x_0} \in C^k(\overline{K_a^+})$ définie précédemment.

On définit ainsi \mathbb{I}^{x_0} par :



et de plus : $\mathbb{H}^{x^0} \left| \begin{matrix} \circ \\ \Sigma^+ \\ x^0 \end{matrix} \right. \mathbb{R}^{n-1} \cap \Sigma_{x^0}^{\sim} = \psi^{x^0}$.

$\Sigma_{x \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)}^{\sim}$ -ouvert-de- \mathbb{R}^{n-1} = θ_x -ouvert-de- $\mathbb{R}^n \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid y=(y', 0)$

avec $y' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$; alors $\forall x \cap \theta_x$ est un ouvert de \mathbb{R}^n dont l'intersec-
tion avec $\{y \in \mathbb{R}^n \mid y=(y', 0)$ avec $y' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ vaut Σ_x^{\sim} , et $\mathcal{F}_x^{-1}(\forall x \cap \theta_x)$

$\equiv \mathbb{H}_x$ voisinage ouvert de x dans lequel on peut considérer
noté.

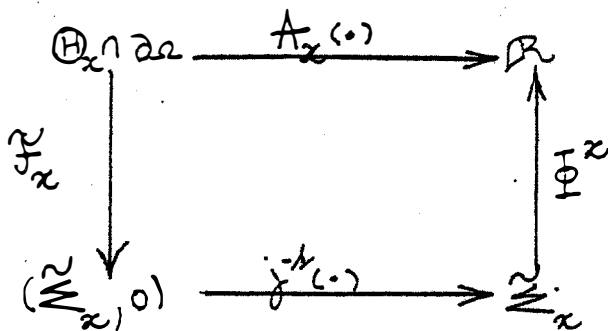
$B(x, \hat{\varepsilon}_x] \subset \mathbb{H}_x$ (remarquons que $\hat{\varepsilon}_x \leq \varepsilon$). Soit le recouvrement de

$F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1) \{B(x, \hat{\varepsilon}_x] \}_{x \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)}$. Pour $x \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)$ fixé, choisissons

alors $\hat{\varepsilon}_x$ suffisamment petit pour que $P_{r_p x}(B(x, \hat{\varepsilon}_x]) \subset P_{r_p x}(\mathbb{H}_x \cap \partial \Omega)$.

Remarquons que $P_{r_p x}(\mathbb{H}_x \cap \partial \Omega) \subset P_{r_p x}(B(x, \varepsilon] \cap \partial \Omega) = D_x$.

Considérons maintenant pour $x \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)$:



Alors, pour $x^0 \in B(x, \hat{\varepsilon}_x]$, $A_x(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, \phi_x(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)) \equiv \mathcal{F}_x^x(x^0)$
noté.
définit une application appartenant à $C^k(B(x, \hat{\varepsilon}_x])$ qui coïncide
sur $B(x, \hat{\varepsilon}_x] \cap \partial \Omega$ avec A_x .

On considère le recouvrement du compact $F_r(\partial\Omega_1)$

$\{B(x, \frac{\hat{\epsilon}_x}{3})\}_{x \in F_r(\partial\Omega_1)}$ dont on extrait un sous-recouvrement fini,

soit $\{B(x^i, \frac{\hat{\epsilon}_x^i}{3})\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$:

Soit $\tilde{B} = \bigcup_{i=1}^s B(x^i, \frac{\hat{\epsilon}_x^i}{3})$. \tilde{B} bornée $\longleftarrow F_r(\tilde{B})$ est un compact.

On a alors $d(F_r(\tilde{B}), F_r(\partial\Omega_1)) = \tilde{\epsilon} > 0$ car $F_r(\tilde{B}) \cap F_r(\partial\Omega_1) = \emptyset$,

$F_r(\tilde{B})$ et $F_r(\partial\Omega_1)$ compacts. $F_r(\tilde{B}) \cap F_r(\partial\Omega_1) = \emptyset$ car $F_r(\tilde{B}) =$

$\overline{\tilde{B}}^0 = \tilde{B}^0$ et $F_r(\partial\Omega_1) \subset \tilde{B}^0$.

$\{B(x, \tilde{\epsilon})\}_{x \in \partial\Omega} \subset_{\mathbb{R}^n} (\bigcup_{i=1}^s B(x^i, \frac{\hat{\epsilon}_x^i}{3}))$ est un recouvrement de $\partial\Omega \cap$

$\bigcup_{i=1}^s B(x^i, \frac{\hat{\epsilon}_x^i}{3})$ vérifiant, pour x fixé, $B(x, \tilde{\epsilon}) \cap F_r(\partial\Omega_1) = \emptyset$

remarque 11-c. $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } B(x, \tilde{\epsilon}) \cap \partial\Omega \subset \overline{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1} \\ \text{ou-exclusif} \\ \text{(ii) } B(x, \tilde{\epsilon}) \cap \partial\Omega \subset \overline{\partial\Omega_1} \end{array} \right.$, qui fournit une partition

des $x \dots$

Si x vérifie i) alors on choisit $0 < \hat{\epsilon}_x \leq \tilde{\epsilon}$ suffisamment petit

pour que $P_{r_x}(B(x, \hat{\epsilon}_x)) \subset P_{r_x}(B(x, \tilde{\epsilon}) \cap \partial\Omega) \xrightarrow[\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon} \leq \epsilon]{\subset} D_x$.

Hypothèse 14 : $\forall x$ vérifiant i), pour $k \in \{1, \dots, +\infty\}$ fixé, on supposera que l'application :

$a(\mathcal{F}_x^{-1}(j(\cdot))) : \bigcup_x \xrightarrow{\text{(EN NOTATION ÉVIDENTE)}} \mathbb{R}$ est de classe C^k



dans le domaine $\tilde{\Sigma}_x$ de \mathbb{R}^{n-1} avec $a(\cdot)$ donnée vérifiant l'hypothèse 13.

Alors, pour $x^0 \in B(x, \hat{\varepsilon}_x]$, $a(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, \phi_x(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)) \equiv \mathcal{F}^x(x^0)$ noté.

définit une application appartenant à $C^k(B(x, \hat{\varepsilon}_x])$ qui coïncide sur $B(x, \hat{\varepsilon}_x] \cap \partial\Omega$ avec a .

Si x vérifie ii) alors on prend $\hat{\varepsilon}_x = \tilde{\varepsilon}$ et $\forall x^0 \in B(x, \tilde{\varepsilon}], \mathcal{F}^x(x^0) = 0$.

$\{B(x, \frac{\hat{\varepsilon}_x}{3}] \}_{x \in \partial\Omega} \cap \bigcup_{i=1}^s B(x^i, \frac{\hat{\varepsilon}_x^i}{3})$ étant un recouvrement du

compact $\partial\Omega \cap \bigcup_{i=1}^s B(x^i, \frac{\hat{\varepsilon}_x^i}{3})$, on en extrait un sous-recouvrement

fini, soit $\{B(x^i, \frac{\hat{\varepsilon}_x^i}{3})\}_{i \in \{s+1, \dots, r\}}$

D'où $\{B(x^i, \frac{\hat{\varepsilon}_x^i}{3})\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$ recouvrement fini de $\partial\Omega$.

Définissons, pour $i \in \{1, \dots, r\}$, l'application $a_i(x^0)$ par :

$$a_i \Big|_{B(x^i, \frac{\hat{\varepsilon}_x^i}{3})} = \mathcal{F}^{x^i}(x^0) \text{ et } a_i \Big|_{\mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} B(x^i, \frac{\hat{\varepsilon}_x^i}{3})} = \begin{cases} \text{si } x^0 \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_1^0 : a(x^0) \\ \text{si } x^0 \notin \partial\Omega \cap \partial\Omega_1^0 : 0 \end{cases}$$

$\forall i \in \{1, \dots, r\}$ considérons $\theta_i(x^0) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \theta_i(x^0) = 1$ dans

$B(x^i, \frac{\hat{\varepsilon}_x^i}{3})$ [et $\theta_i(x^0) = 0$ dans $\mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} B(x^i, \frac{\hat{\varepsilon}_x^i}{2})$].

Remarque 14 : La construction explicite d'une telle fonction est assurée dans V. MIKAILOV [40].

On posera $\sigma_i(x^0) = 1 - \theta_i(x^0)$.

On construit alors les applications définies par :

$\gamma_1(x^0) = \theta_1(x^0)$ et pour $2 \leq i \leq r, \gamma_i(x^0) = \sigma_1(x^0) \dots \sigma_{i-1}(x^0) \theta_i(x^0)$.

On a : $\gamma_i(x^0) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \gamma_i(x^0) = 0$ dans $\bigcup_{j < i} B(x^j, \frac{\epsilon_j}{2})$ et dans $\bigcap_{\mathbb{R}^n} B(x^i, \frac{\epsilon_i}{2})$.

Le calcul montre que $\gamma_1(x^0) + \dots + \gamma_i(x^0) = 1 - \sigma_1(x^0) \dots \sigma_i(x^0)$.

D'où $\forall x^0 \in \bigcup_{j \leq i} B(x^j, \frac{\epsilon_j}{3}), \gamma_1(x^0) + \dots + \gamma_i(x^0) = 1$.

L'application définie par $\gamma_i(x^0)a_i(x^0) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (donc appartient à $C^k(\bar{\Omega})$) car elle égale zéro dans $\bigcap_{\mathbb{R}^n} B(x^i, \frac{\epsilon_i}{2})$. D'où l'application définie par $A(x^0) = \sum_{i=1}^r \gamma_i(x^0)a_i(x^0) \in C^k(\bar{\Omega})$.

Soit $x^0 \in \overline{\partial\Omega \cap \Omega_1}^{\partial\Omega}$ fixé et soit $B(x^\ell, \frac{\epsilon_\ell}{3})$ la première boule du recouvrement précédent de $\partial\Omega$ contenant x^0 . Puisque $\gamma_i(x^0) = 0$ dans $\bigcup_{j < i} B(x^j, \frac{\epsilon_j}{3})$ [on a $\gamma_i(x^0) = 0$ pour $i > \ell$].

Hypothèse 15 : On supposera $\{i \in \{s+1, \dots, r\} / x^i \text{ vérifie ii}\}$ numéroté en dernier de t à r .

Alors $A(x^0) = \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i(x^0)a_i(x^0)$ avec $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, a_i(x^0) = a(x^0)$ et (puisque $x^0 \in B(x^\ell, \frac{\epsilon_\ell}{3})$) $\sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i(x^0) = 1 \implies A(x^0) = a(x^0)$.

D'où A appartenant à $C^k(\bar{\Omega})$ est un prolongement de a .

Remarque 15 : a) Dans ce qui précède il n'est pas obligatoire de considérer le cas ii), cependant cette construction permet d'envisager des prolongements autres que 0 dans $\bigcup_{i=t}^r B(x^i, \epsilon_i)$.

b) On dit que la construction précédente utilisant les γ_i est faite par partition différentiable de l'unité ; une telle méthode de construction est développée dans J. DIEUDONNE [10].

c) Grâce au lemme 0 on peut obtenir un peu mieux :

$\forall i \in \{1, \dots, s\}, \hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall i \in \{s+1, \dots, r\}, \hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$ (pour $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit on pourra prendre, par exemple, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{3}$).

On utiliserait : $F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)$ étant un compact de \mathbb{R}^n , on peut extraire au-sens-du lemme 0 de son recouvrement $\{B(x, \hat{\varepsilon}_x] \mid x \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)\}$ un recouvrement $\{B(x, \hat{\varepsilon}] \mid x \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)\}$ avec $0 < \hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$.

Alors pour $x \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1)$ fixé, $\exists \bar{x} \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1) / B(x, \hat{\varepsilon}] \subset B(\bar{x}, \hat{\varepsilon}_x]$

$\subset \mathbb{H}_{\bar{x}} \subset B(\bar{x}, \varepsilon]$ (remarquons que $B(x, \hat{\varepsilon}] \subset \mathbb{H}_x$ peut être faux ici).

Les \bar{x} étant en nombre fini on choisit $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit pour que $\forall x \in F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1), P_{r, P_{\bar{x}}} (B(x, \hat{\varepsilon})) \subset P_{r, P_{\bar{x}}} (\partial \Omega \cap \mathbb{H}_{\bar{x}})$.

On utilise alors $A_{\bar{x}}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, \phi_{\bar{x}}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0))$.

Remarquons que l'emploi de boules $B(x, \mu]$ avec $x \in \overline{\partial \Omega \setminus \partial \Omega_1}^0$ telles que $B(x, \mu] \cap F_r^{\partial \Omega}(\partial \Omega_1) \neq \emptyset$ est interdit.. D'où $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.



INTRODUCTION AU §-7

On va s'intéresser ici à un problème avec condition initiale de type :

$$(a) \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(u)}{\partial x} = 0$$

pour lequel on définira une notion de solution faible (on fournira des exemples de ces solutions montrant quelques particularités).

Si l'on peut (ce qui n'est pas obligatoire) associer au problème de type

(a) un problème de type :

$$(b) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 ,$$

on observera qu'il est possible qu'il n'y ait pas coïncidence des solutions faibles associées aux problèmes (a) ou (b) avec condition initiale (et même qu'aucune solution avec choc d'un problème de type (a) avec une condition initiale ne soit égale à une solution d'un problème de type (b) avec une condition initiale (différente ou non)).

Cela nous amène donc à choisir l'équation de modélisation (a) ou (b) en fonction de la quantité physique effectivement conservée qui se lit sous le signe $\frac{\partial}{\partial t}$.

De plus on ne peut pas appliquer de méthode entropique classique pour sélectionner une unique solution de (a) + condition initiale, en particulier la méthode de Kruzkov conduisant à une formule d'Oleinik interprétable géométriquement.

On peut cependant persister et voir si, à priori, une formule de "Type Oleinik" ne permettrait pas cette sélection ; en fait cette méthode échoue sur l'existence et l'unicité.

PARAGRAPHE 7Remarques et illustrations sur le type exact des équations à traiter

Remarque 1 : Considérons la loi de conservation :

$$(1) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

où $u = u(x,t)$ avec $x \in \mathbb{R}$, $t \in]0, T[$, $T > 0$, de flux $f \in C^1(\mathbb{R})$

et avec la condition initiale :

$$(2) u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}.$$

On supposera alors la solution u de (1) + (2) régulière et qu'il existe γ et ϕ applications appartenant à $C^1(\mathbb{R})$ et vérifiant :

$$(3) \phi'(u)f'(u) = \gamma'(u), \forall u \in S = \{u(x,t) \in \mathbb{R} / (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T[\text{ avec } u \text{ solution de (1) + (2)}\}.$$

D'où u solution de (1) + (2) est aussi solution de :

$$(4) \frac{\partial \phi(u)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma(u)}{\partial x} = 0 + (2).$$

De plus, s'il existe ψ application appartenant à $C^1(\mathbb{R})$ et vérifiant :

$$(5) \gamma = \psi \circ \phi,$$

pour $\phi'(u) \neq 0$, $\forall u \in S$, l'assertion (3) devient :

$$(6) f'(u) = \psi'(\phi(u)), \forall u \in S$$

et en posant $\vartheta = \phi(u)$, (4) s'écrit :

$$(7) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \psi(\vartheta)}{\partial x} = 0$$

et l'on peut prendre pour (2) :

$$(8) \vartheta(x,0) = \phi(u_0(x))$$

Réciproquement, considérons la loi de conservation (4).

On supposera alors la solution u de (4) + (2) régulière et qu'il existe f application appartenant à $C^1(\mathbb{R})$ et vérifiant :

$$(9) \quad \phi'(u)f'(u) = \gamma'(u), \phi'(u) \neq 0, \forall u \in T = \{u(x,t) \in \mathbb{R} / (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, T[\text{ avec } u \text{ solution de (4) + (2)}\}.$$

D'où u solution de (4) + (2) est aussi solution de (1) + (2).

De plus, s'il existe ψ application appartenant à $C^1(\mathbb{R})$ et vérifiant (5), alors on obtient :

$$(10) \quad f'(u) = \psi(\phi(u)), \forall u \in T.$$

Définition 1 : Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$ sera dite solution faible de (4) + (2) si $\forall \Phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$, u vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T \left\{ \phi(u) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \gamma(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u_0(x)) \Phi(x, 0) dx = 0$$

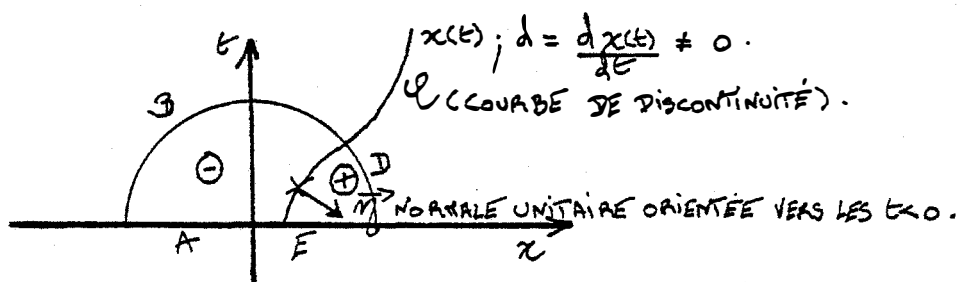
où $C_0^1(\mathbb{R} \times]0, T[)$ est l'espace des fonctions de classe C^1 à support compact dans $\mathbb{R} \times]0, T[$.

Il est alors naturel de se demander si les solutions faibles, associées aux problèmes (1) ou (4) avec condition initiale, coïncident.

Notation 1 : $\forall (x, t)$ point de discontinuité fixé de u , on posera :
 $u_-(x, t) = u(x-0, t) \equiv u_-$, $u_+(x, t) = u(x+0, t) \equiv u_+$.

Supposons définie par $x(t)$ une courbe de discontinuité de u de dimension 1 et de classe C^1 .

Graphiquement :



On prend : $\mathcal{C} \cap \text{Supp}(\Phi) \neq \emptyset$; $\text{Supp}(\Phi) = \ominus \cup \oplus$; sur chacun des domaines \ominus ou \oplus , Φ et u appartiennent à C^1 ; $\phi(u)$ et $\gamma(u)$ appartiennent à C^1 .

On a, en notations évidentes :

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(u(x,t))\Phi(x,t)n_x(x,t) d\sigma = \gamma(u_-(x,t))\Phi(x,t)x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+d^2}} d\sigma + \int_{\mathcal{C}} \gamma(u_+(x,t))\Phi(x,t) x \frac{-1}{\sqrt{1+d^2}} d\sigma, \quad \text{et}$$

$$\int_{\partial\Omega} \phi(u(x,t))\Phi(x,t)n_t(x,t)d\sigma = \int_A \phi(u(x,0))\Phi(x,0)x^{-1}d\sigma + \int_{\mathcal{C}} \phi(u_-(x,t))\Phi(x,t)x$$

$$\frac{-d}{\sqrt{1+d^2}} d\sigma + \int_E \phi(u(x,0))\Phi(x,0)x^{-1}d\sigma + \int_{\mathcal{C}} \phi(u_+(x,t))\Phi(x,t)x$$

$$\frac{d}{\sqrt{1+d^2}} d\sigma . u \text{ solution faible du problème entraîne :}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^+ \{ \phi(u(x,t)) \frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} + \gamma(u(x,t)) \frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x} \} dx dt = \iint_{\ominus} - d\Omega + \iint_{\oplus} - d\Omega =$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u_0(x))\Phi(x,0)dx = - \iint_{\ominus} \frac{\partial\phi(u(x,t))}{\partial t} \Phi(x,t) + \frac{\partial\gamma(u(x,t))}{\partial x} \Phi(x,t) d\Omega$$

$$- \iint_{\oplus} - d\Omega + \int_{\mathcal{C}} \gamma(u_-(x,t))\Phi(x,t)x \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} d\sigma + \int_{\mathcal{C}} \gamma(u_+(x,t))\Phi(x,t)x \frac{-1}{\sqrt{1+d^2}} d\sigma$$

$$+ \int_A \phi(u(x,0))\Phi(x,0)x^{-1}d\sigma + \int_{\mathcal{C}} \phi(u_-(x,t))\Phi(x,t)x \frac{-d}{\sqrt{1+d^2}} d\sigma$$

$$+ \int_E \phi(u(x,0))\Phi(x,0)x^{-1}d\sigma + \int_{\mathcal{C}} \phi(u_+(x,t))\Phi(x,t)x \frac{d}{\sqrt{1+d^2}} d\sigma .$$

On obtient, en prenant des Φ à support compact dans \ominus puis dans \oplus ,

$$\text{dans } \begin{matrix} \ominus \\ \oplus \end{matrix} : \frac{\partial\phi(u)}{\partial t} + \frac{\partial\gamma(u)}{\partial x} = 0 .$$

En prenant des \underline{x} à support compact dans $\ominus^U \oplus$, on trouve :

$$\gamma(u_-) - \gamma(u_+) - d(\phi(u_-) - \phi(u_+)) = 0,$$

$$\gamma(u_+) - \gamma(u_-) = d(\phi(u_+) - \phi(u_-)),$$

qui fournit les relations dites de Rankine et Hugoniot :

Pour l'équation (4): $r = \frac{dx(t)}{dt}$ vérifie $\gamma(u_+) - \gamma(u_-) = r(\phi(u_+) - \phi(u_-))$.

Pour l'équation (1): $s = \frac{dx(t)}{dt}$ vérifie $f(u_+) - f(u_-) = s(u_+ - u_-)$,

où $\{(t, x(t))\}$, $t \in]0, T[$ est une courbe de discontinuité de classe C^1 et de dimension 1.

Prenons alors, par exemple, $\phi(u) = u^2$ et $\gamma(u) = u^3$;

On obtient : $\phi'(u) = 2u$, $\gamma'(u) = 3u^2$, $\frac{\gamma'(u)}{\phi'(u)} = \frac{3}{2}u = f'(u)$,

$f(u) = \frac{3}{4}u^2 + \text{constante}$.

On a alors : $r = \frac{(u_+^3 - u_-^3)}{(u_+^2 - u_-^2)} = \frac{(u_+^2 + u_+ u_- + u_-^2)}{(u_+ + u_-)}$,

$s = \frac{3}{4} \frac{(u_+^2 - u_-^2)}{(u_+ - u_-)} = \frac{3}{4}(u_+ + u_-)$, avec $u_+ \neq u_-$.

Si l'on suppose $r = s$ on obtient :

$$\frac{(u_+^2 + u_+ u_- + u_-^2)}{(u_+ + u_-)} = \frac{3}{4}(u_+ + u_-) \iff (u_+^2 + u_-^2) + u_+ u_- =$$

$$\frac{3}{4}((u_+^2 + u_-^2) + 2u_+ u_-) \iff \frac{1}{4}(u_+^2 + u_-^2) - \frac{1}{2}u_+ u_- = 0 \iff$$

$$\frac{(u_+ - u_-)^2}{4} = 0, \text{ avec } u_+ \neq u_-.$$

On n'a donc pas coïncidence, en général, des solutions faibles associées aux problèmes (4) ou (1) avec condition initiale.

A titre d'exemple, comparons les solutions faibles de (4) et (1), associées à un problème de Riemann, qui ne font intervenir dans la solution que les valeurs de la condition initiale.

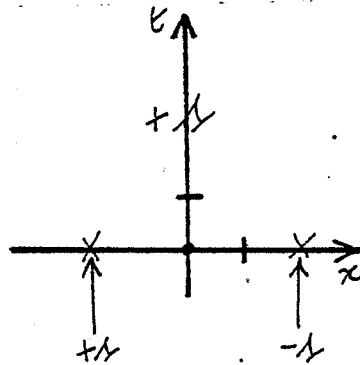
Pour $\phi(u) = u^2$ et $\gamma(u) = u^3$:

(4)

$$u_+ = -1$$

$$u_- = 1$$

$$r = +\infty$$



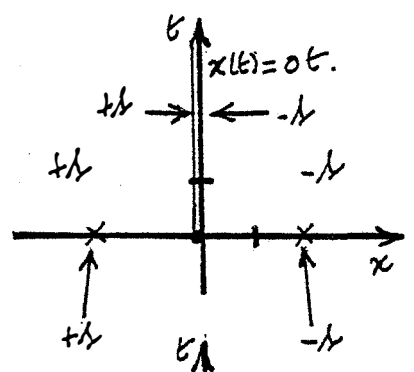
Dans ce cas on a propagation à vitesse infinie de la condition initiale de la solution faible (!) car $\gamma(1) \neq \gamma(-1)$ et $\phi(1) = \phi(-1)$.

Démontrons directement que la solution donnée de (4), $u_+ = -1$, $u_- = 1$ est effectivement une solution faible :

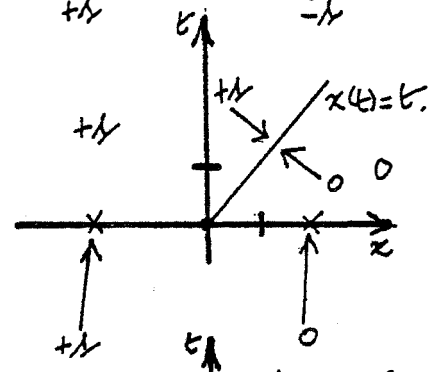
Pour $\Phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, T[)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T \left\{ \phi(u(x,t)) \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} + \gamma(u(x,t)) \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x} \right\} dx dt = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T \left(\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x} \right) dx dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} dt \right) dx + \\ & \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x} dx \right) dt = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi(x,T) - \Phi(x,0)) dx + \int_0^T (\Phi(+\infty,t) - \Phi(-\infty,t)) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,0) dx \\ & = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u_0(x)) \Phi(x,0) dx, \text{ d'où le résultat.} \end{aligned}$$

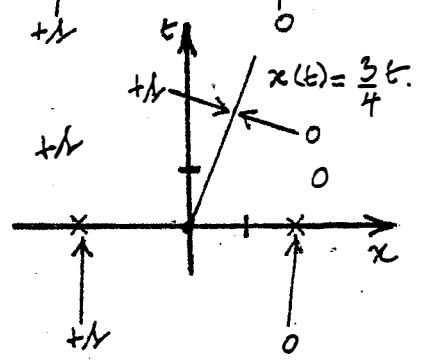
(1)
 $u_+ = -1$
 $u_- = 1$
 $s = 0$



(4)
 $u_+ = 0$
 $u_- = 1$
 $r = 1$



(1)
 $u_+ = 0$
 $u_- = 1$
 $s = \frac{3}{4}$



En particulier, il est nécessaire de considérer la quantité effectivement conservée u (respectivement $\vartheta = \phi(u)$) à laquelle sera associée l'équation (1) (respectivement l'équation (7)), les solutions faibles ne vérifiant plus $\phi(u) = \vartheta$ pour les problèmes avec condition initiale.

Remarquons encore que si ϕ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors $\frac{\partial \phi(u)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma(u)}{\partial x}$ peut s'écrire immédiatement sous la forme :

$$(11) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\gamma \circ \phi^{-1}] (\vartheta), \quad \vartheta = \phi(u), \quad \psi = \gamma \circ \phi^{-1}.$$

Remarque 2 : Si l'on veut maintenant comparer des solutions entropiques :
 Pour (1) on dispose de la notion d'entropie de O.A. OLEINIK [46] [47] et des constructions géométriques de la solution entropique dues à A.Y. LEROUX [35] et M. GEL'FAND [16].

✓ Pour (4) et ϕ C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on en déduit, en utilisant (11), une notion similaire d'entropie :

Notation 2 : On notera par $I(u_+, u_-)$ l'ensemble $[\text{Min}(u_+, u_-), \text{Max}(u_+, u_-)]$.

On supposera que la solution faible de (4) que l'on choisit, vérifie :

$$(12) \frac{\gamma(u_+) - \gamma(u_-)}{\phi(u_+) - \phi(u_-)} \geq \frac{\gamma(u_+) - \gamma(k)}{\phi(u_+) - \phi(k)}, \forall k \in I(u_+, u_-), \text{ condition}$$

d'entropie qui sera encore utilisée pour toute application $\phi \in C^1(\mathbb{R})$.

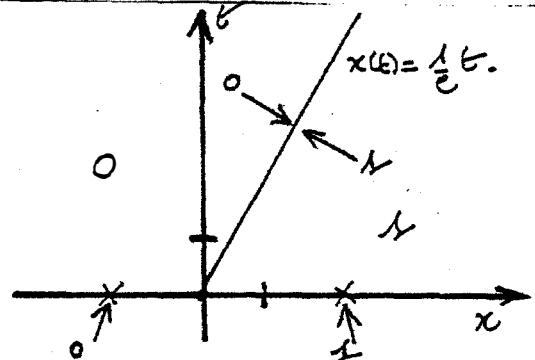
Si l'on veut obtenir, pour le cas (4), une formule de type (12), il faut utiliser, comme c'est fait dans S.N. KRUKOV [32], la fonction $|\phi(u) - \phi(k)|$ (qui doit d'abord permettre de retrouver Rankine et Hugoniot) qui ici n'est e.g. ni concave, ni convexe et ne peut donc jouer le rôle d'une entropie.

Remarque 3 : Pour $\phi \in C^1$ -difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , la construction géométrique de la solution entropique fournie par (12) et celle de A.Y. LEROUX [35] et M. GEL'FAND [16] adaptée à $\gamma \circ \phi^{-1}(\vartheta)$. Pour ϕ moins régulière de nombreux problèmes se posent.

A titre d'exemple, étudions et comparons les solutions "entropiques" de (4) et (1), associées à un problème de Riemann.

Prenons pour ϕ l'application de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* définie par $\phi(u) = e^u$. Prenons pour γ l'application de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+ définie par $\gamma(u) = u^2$. Considérons, pour le problème (4), la solution faible :

$$(4) \begin{aligned} u_+ &= 1 \\ u_- &= 0 \\ r &= \frac{\gamma(u_+) - \gamma(u_-)}{\phi(u_+) - \phi(u_-)} = \frac{u_+^2 - u_-^2}{e^{u_+} - e^{u_-}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$



La condition d'entropie devient : $\frac{1}{e} \geq \frac{1-k^2}{e-e^k}, \forall k \in [0, 1]$.

$$r = (u_+ + u_-) \left(\frac{u_+ - u_-}{e^{u_+} - e^{u_-}} \right) \quad \text{---} \quad \lim_{\substack{u_- \rightarrow u_+ \\ u_- \neq u_+}} r = \frac{2u_+}{e^{u_+}}$$

En prenant $u_+ = 1$ et $u_- = k$ dans ce qui précède on remarque que la condition d'entropie n'est pas vérifiée.

Ecrivons alors notre problème sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \gamma \circ \phi^{-1}}{\partial x}(\vartheta) = 0. \\ \vartheta(x, 0) = \phi(u_0(x)). \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{on a : } \gamma \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\phi^{-1}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}_+ \\ & & \vartheta & \longrightarrow & \text{Log } \vartheta & \longrightarrow & \text{Log}^2 \vartheta. \end{array}$$

$$\begin{cases} u_- = 0 \longmapsto \vartheta_- = \phi(u_-) = 1. \\ u_+ = 1 \longmapsto \vartheta_+ = \phi(u_+) = e. \end{cases}$$

On peut alors utiliser la méthode géométrique de détermination de la solution entropique développée par A.Y. LEROUX [35] :

$$\text{Log}^{2'}(\vartheta) = 2 \frac{\text{Log } \vartheta}{\vartheta} \text{ pour } \vartheta \in \mathbb{R}_+^*, \text{ d'où } \text{Log}^{2'}(1) = 0 \text{ et } \text{Log}^{2'}(e) = \frac{2}{e}.$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Considérons l'application } \tilde{\gamma} : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vartheta & \longmapsto & \tilde{\gamma}(\vartheta) = 2 \frac{\text{Log } \vartheta}{\vartheta}. \end{array}$$

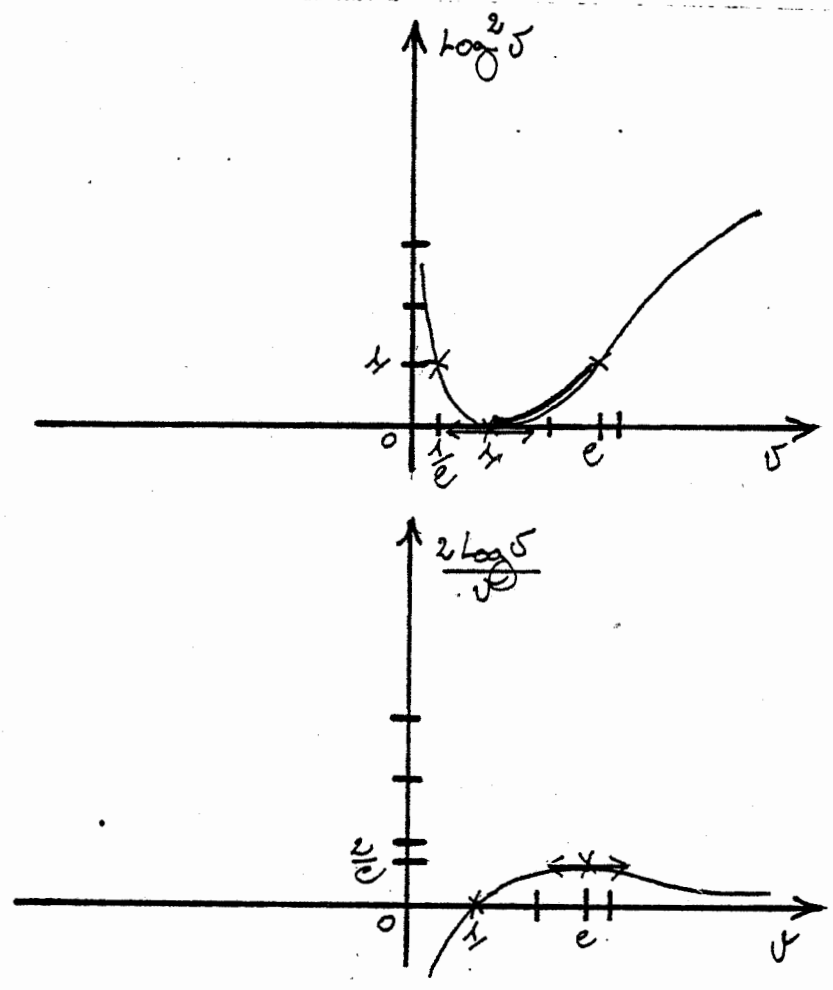
$$\tilde{\gamma}'(\vartheta) = 2 \frac{(1 - \text{Log } \vartheta)}{\vartheta^2} \text{ pour } \vartheta \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\tilde{\gamma}'(\vartheta) = 0 \text{ pour } \vartheta = e ; \tilde{\gamma}'(\vartheta) > 0 \text{ pour } \vartheta \in]0, e[.$$

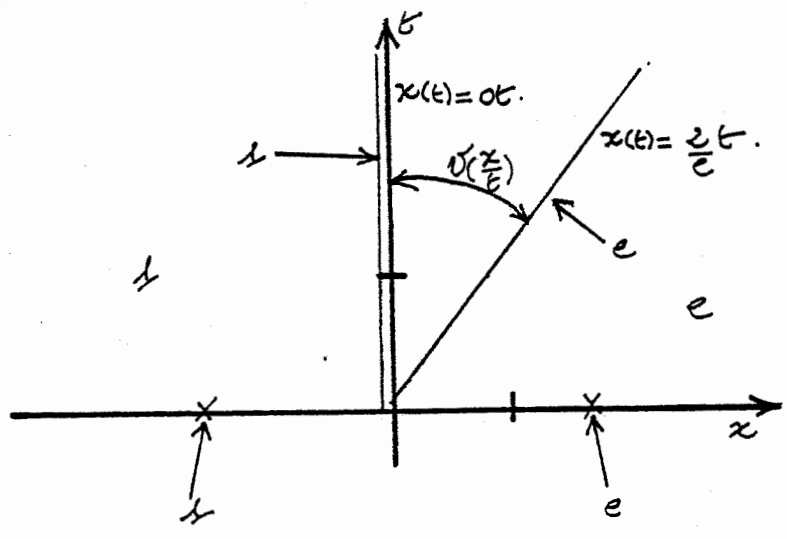
$\tilde{\gamma}$ est donc un C^1 -difféomorphisme de $]0, e[$ sur $] -\infty, \frac{2}{e} [$ et $\text{Log}^{2\vartheta}$ est strictement convexe sur $] , e[$.

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0_+} \tilde{\gamma}(\vartheta) = -\infty ; \quad \lim_{\vartheta \rightarrow +\infty} \tilde{\gamma}(\vartheta) = 0.$$

Graphiquement :



On a une détente de 1 à e, ce qui justifie que la solution faible proposée précédemment soit à rejeter. On a la solution entropique :



Posons $\xi = \frac{x}{t}$.

On veut alors :

$$(13) \text{Log}^2(\vartheta(\xi)) = \xi = 2 \frac{\text{Log}(\vartheta(\xi))}{\vartheta(\xi)} \text{ pour } \xi \in]0, \frac{2}{e}[.$$

(13) devient $\tilde{\gamma}(\vartheta(\xi)) = \xi$ pour $\xi \in]0, \frac{2}{e}[$. D'où $\vartheta = \tilde{\gamma}^{-1}$
 C^1 -difféomorphisme de $]0, \frac{2}{e}[$ sur $]1, e[$.

D'autre part (3) s'écrit $f'(u) = \frac{\gamma'(u)}{\phi'(u)} = \frac{2u}{e^u}$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Une intégration par parties montre que $f(u)$ est de la forme
 $\frac{-2(1+u)}{e^u} + k$ (k constante prise égale à zéro).

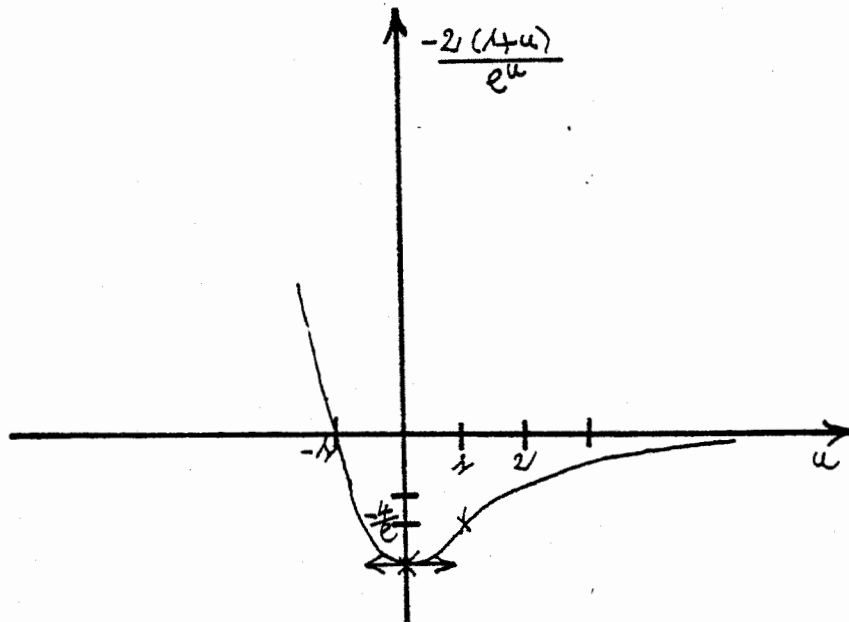
$$f'(u) = 0 \text{ pour } u = 0 ; f'(u) \leq 0 \text{ pour } u \geq 0.$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = 0 ; \lim_{u \rightarrow -\infty} f'(u) = -\infty.$$

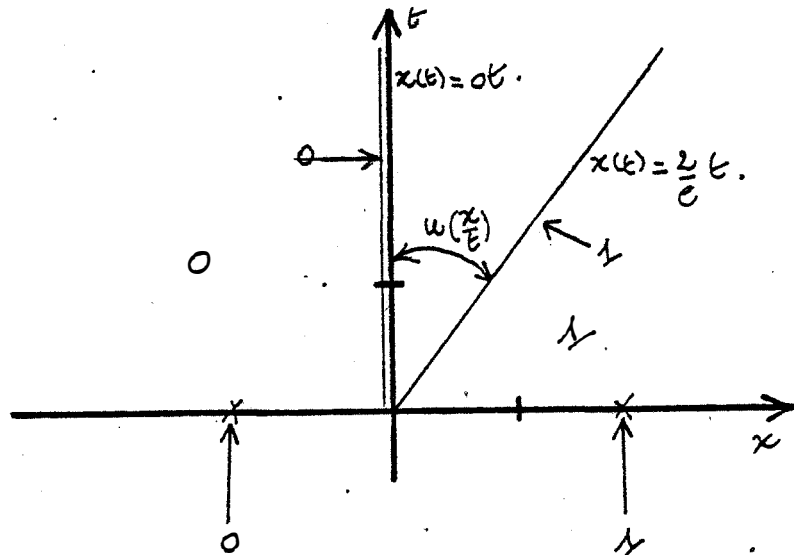
$$f(-1) = 0 ; f(0) = -2 ; \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 0 ; \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = +\infty.$$

$$f''(u) = \frac{2(1-u)}{e^u} . f''(u) \leq 0 \text{ pour } u \geq 1.$$

Graphiquement :



On construit comme précédemment la solution entropique :



avec $u\left(\frac{x}{t}\right) = [\phi_0^{-1} \gamma^{-1}] \left(\frac{x}{t}\right)$ pour $0 < \frac{x}{t} < \frac{2}{c}$.

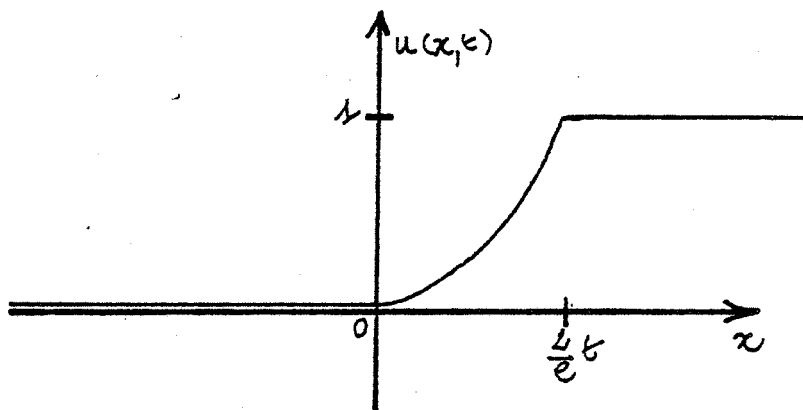
Plus généralement, pour un problème de Riemann avec ϕ C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} on a la relation $\phi(u) = \vartheta$ entre solutions faibles pour $u \in C^0(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$.

On a formellement $\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{x}{t}\right) = \frac{\partial}{\partial x} [\phi_0^{-1} \gamma^{-1}] \left(\frac{x}{t}\right) =$

$$\frac{\phi^{-1}(\gamma^{-1}(\frac{x}{t}))}{\gamma(\gamma^{-1}(\frac{x}{t}))} \times \frac{1}{t} = \frac{1}{\gamma^{-1}(\frac{x}{t}) \gamma'(\gamma^{-1}(\frac{x}{t}))} \times \frac{1}{t}.$$

D'où $\frac{\partial u}{\partial x} (0+0) = \frac{1}{2t}$ et $\frac{\partial u}{\partial x} (\frac{2}{c} - 0) = +\infty$.

Graphiquement à t fixé :



En utilisant de même les calculs précédents on trouve les solutions entropiques :

(1)

$$u_+ = 2$$

$$u_- = 1$$

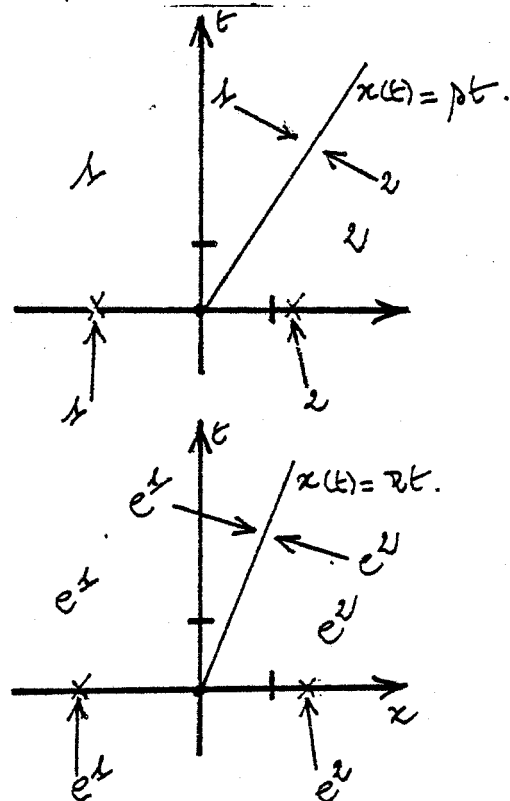
$$s = -\frac{6}{e^2} + \frac{4}{e} \approx 0,650$$

(7)

$$\vartheta_+ = e^2$$

$$\vartheta_- = e$$

$$r = \frac{3}{e^2 - e} \approx 0,642$$



On n'a donc plus $\phi(u) = \vartheta$.

Si maintenant ϕ n'est plus un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , étudions la condition d'"entropie" (12).

On se donne le problème de Riemann :

$$\phi, \gamma, u_0(x) = \begin{cases} a & \text{pour } x < 0 \\ b & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

On supposera qu'il existe une subdivision finie $\sigma = (c_0, \dots, c_n)$ de $I(a, b)$ sur laquelle ϕ est décomposable en C^1 -difféomorphismes de $[c_i, c_{i+1}]$ dans \mathbb{R} , $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Ceci exclut, par exemple, pour $a < 0$ et $b > 0$, l'application

$$\phi(x) \in C^1(\mathbb{R}) \text{ valant } \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Posons alors $\phi(u) = u^2$, $\gamma(u) = u^3$, $a = -1$, $b = 2$.

On a $\sigma = (-1, 0, 2)$.

Construisons les graphes de $\gamma_0[\phi|_{[-1,0]}]^{-1} \equiv \gamma_1$ sur $[0,1]$ et $\gamma_0[\phi|_{[0,2]}]^{-1} \equiv \gamma_2$ sur $[0,4]$:

La puissance $1/2$ désignant la racine positive d'un réel positif,

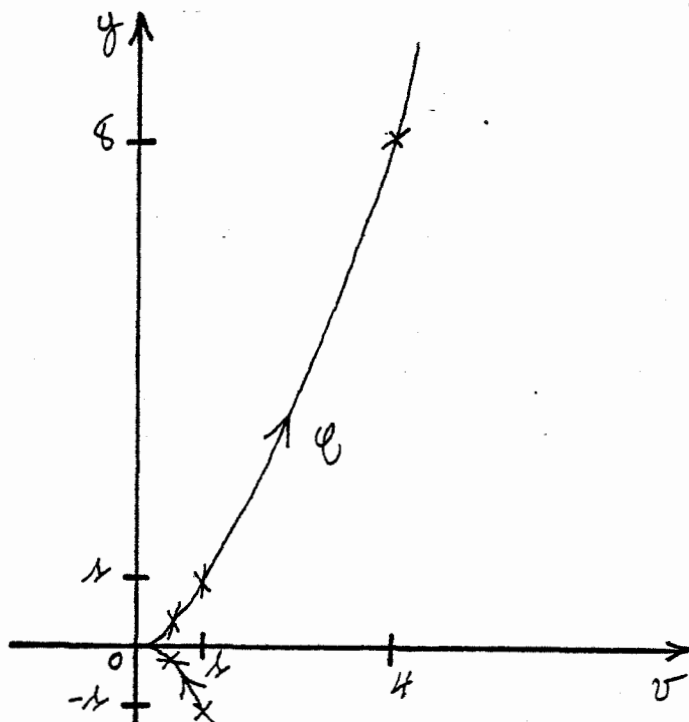
$$\gamma_1(\vartheta) = -\vartheta^{3/2}, \quad \gamma_2(\vartheta) = \vartheta^{3/2}.$$

$$\gamma_2'(\vartheta) = -\gamma_1'(\vartheta) = \frac{3}{2} \vartheta^{1/2} \geq 0 \text{ pour } \vartheta \in \mathbb{R}_+, = 0 \text{ pour } \vartheta = 0.$$

$$\gamma_2''(\vartheta) = -\gamma_1''(\vartheta) = \frac{3}{4} \vartheta^{-1/2} \geq 0 \text{ pour } \vartheta \in \mathbb{R}_+.$$

$$\text{Pour } \vartheta = \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{2 \times 1,414} \approx -\vartheta^{3/2} > -\frac{1}{2}.$$

Graphiquement :



Le passage pour u de a à b fournit un sens naturel de parcours de la courbe \mathcal{C} réunion des graphes de γ_1 sur $[0,1]$ et γ_2 sur $[0,4]$.

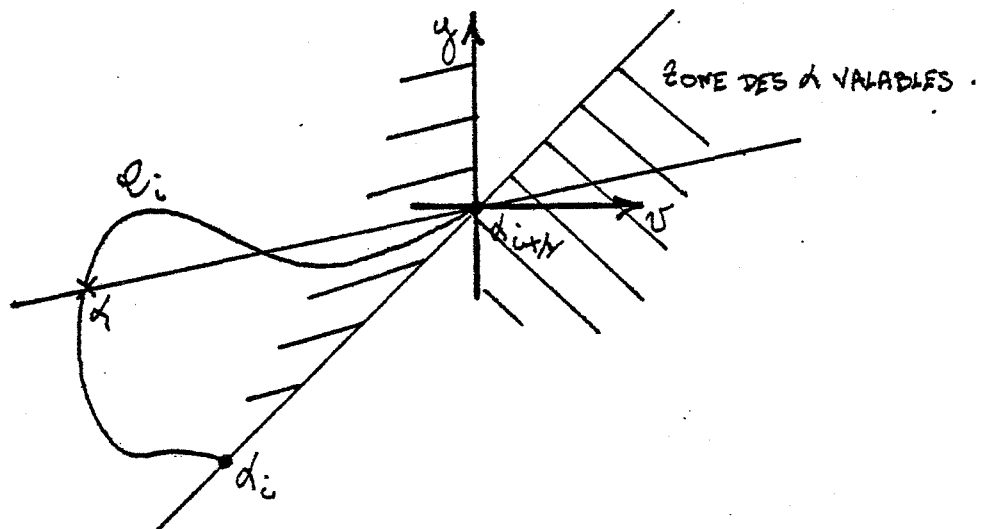
Si l'on veut obtenir une solution "entropique", on construit $\alpha_0 = \text{origine-de-}\mathcal{C} < \dots < \alpha_m = \text{extrémité-de-}\mathcal{C}$ points de \mathcal{C} (éventuellement, si σ est dénombrable, une suite $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de point de \mathcal{C}) supposés totalement ordonnés (la relation d'ordre étant noté $<$) par le sens de parcours de \mathcal{C} .

$\forall i \in \{0, \dots, m-1\}$ on appellera \mathcal{C}_i le chemin orienté de \mathcal{C} d'origine α_i et d'extrémité α_{i+1} .

On relie, pour $i \in \{0, \dots, m-1\}$, α_i à α_{i+1} soit par un segment de droite, soit par \mathcal{C}_i .

On veut alors que pour tout $\alpha \in \mathcal{C}_i$, la droite passant par (α, α_{i+1}) ait une pente supérieure ou égale à celle de la droite passant par (α, α_{i+1}) .

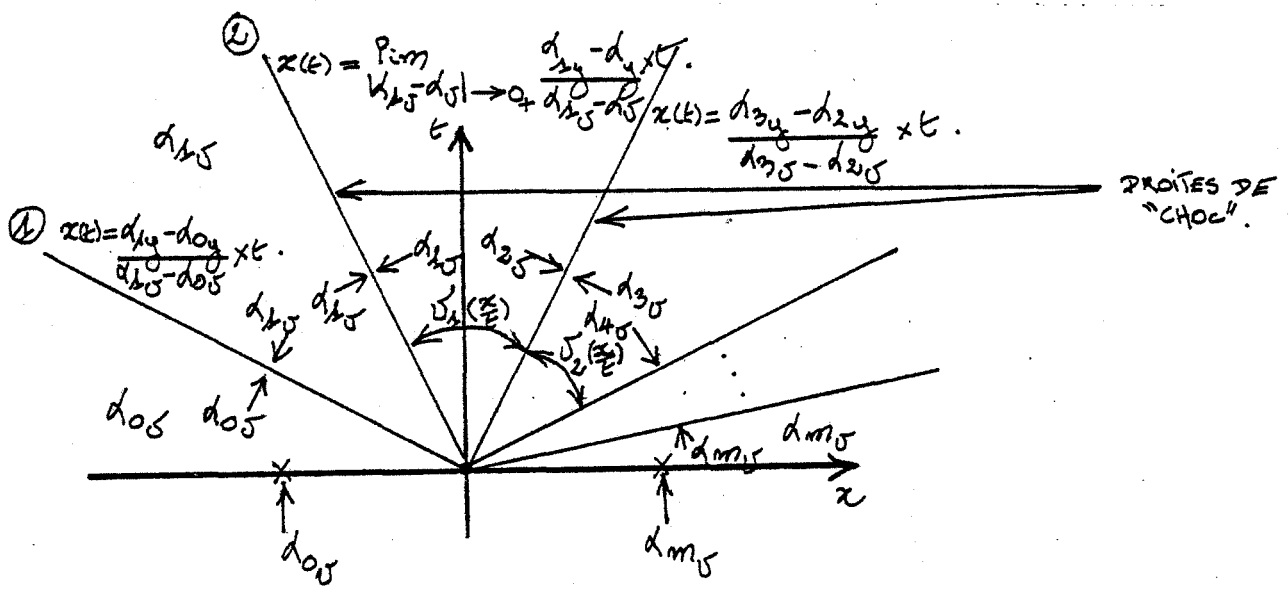
Graphiquement :



En notations évidentes, on veut que \mathcal{C}_i soit incluse dans l'intersection du demi-plan gauche, si $\alpha_{i+1} \geq \alpha_i$, de bord l'axe des ordonnées passant par α_{i+1} et du demi-plan fermé gauche, si $\alpha_{i+1} \geq \alpha_i$, de bord la droite passant par (α_i, α_{i+1}) .

On construit alors une solution en ϑ du type :

Graphiquement :



Remarquons que les cas ① et ② ne sont pas interdits ici contrairement au cas où ϕ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

De plus, pour pouvoir relier l'état $\alpha_{0,\vartheta}$ à l'état $\alpha_{m,\vartheta}$, on veut, mais il n'est pas toujours évident qu'on puisse les trouver, des pentes croissantes de droites de "choc".

La solution en u se construit en remplaçant α_i par l'unique $u \in I(a,b)$ auquel correspond le point $\alpha_i \in \mathcal{C}$.

Quand aux détenteurs $u(\frac{x}{t})$, elles s'obtiennent en remarquant que $r'(u(\frac{x}{t})) - \frac{x}{t} \phi'(u(\frac{x}{t})) = 0$.

En effet, posons $\xi(x,t) = \frac{x}{t}$. On suppose alors u s'écrire sous la forme $u(x,t) = u\left(\frac{x}{t}\right) = u(\xi(x,t))$, u suffisamment régulière.

$$\frac{\partial \phi(u(\xi))}{\partial t} = \phi'(u(\xi)) \frac{d u(\xi)}{d \xi} \times \xi - \frac{x}{t^2} = \phi'(u(\xi)) \frac{d u(\xi)}{d \xi} \times \xi - \frac{\xi}{t}.$$

$$\frac{\partial \gamma(u(\xi))}{\partial x} = \gamma'(u(\xi)) \frac{d u(\xi)}{d \xi} \times \frac{1}{t}.$$

Si u réalise (4) au sens fort, on obtient :

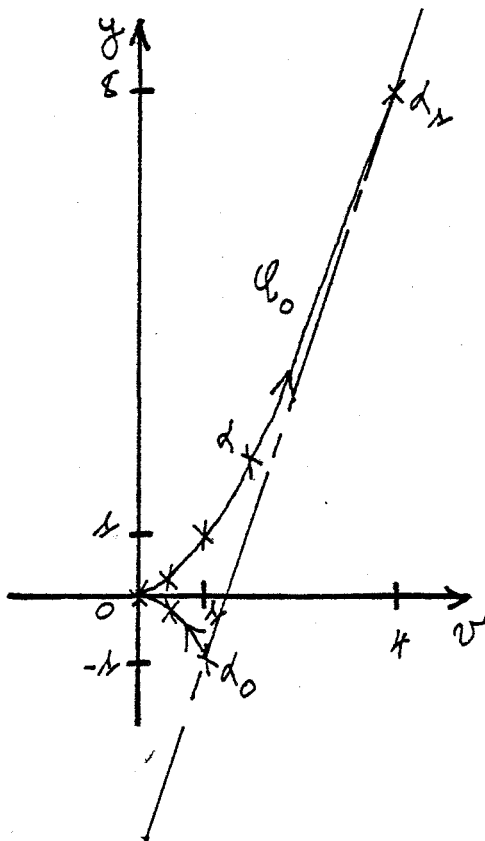
$$\frac{1}{t} \times \frac{d u(\xi)}{d \xi} (\gamma'(u(\xi)) - \xi \phi'(u(\xi))) = 0.$$

On veut alors :

$$\gamma'(u(\xi)) - \xi \phi'(u(\xi)) = 0.$$

Examinons l'unicité des solutions du problème "entropique" :

Graphiquement, en utilisant la construction géométrique précédente :



PREMIÈRE SOLUTION "ENTROPIQUE".

Si l'on veut un choc entre 1 et 4, puisqu'on a $\alpha_1 > \alpha_0$, il faut que \mathcal{C}_0 soit incluse dans l'intersection du demi-plan fermé gauche de bord l'axe des ordonnées passant par α_1 et du demi-plan fermé gauche de bord la droite passant par (α_0, α_1) .

On veut donc :

$$\frac{\alpha_1 y - \alpha_0 y}{\alpha_1 y - \alpha_0 y} \geq \frac{\alpha_1 y - \alpha_0 y}{\alpha_1 y - \alpha_0 y}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{C}_0, \text{ ce qui est équivalent à}$$

$$\text{demander } \frac{u_+^2 + u_+ u_- + u_-^2}{u_+ + u_-} \geq \frac{u_+^2 + u_+ k + k^2}{u_+ + k},$$

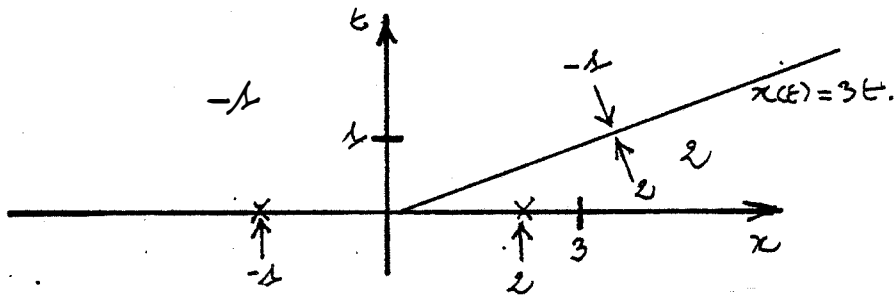
$\forall k \in I(u_-, u_+)$, avec $u_+ = 2$ et $u_- = -1$. On obtient :

$$\frac{4-2+1}{2-1} = 3 \geq \frac{4+2k+k^2}{2+k} \quad \text{pour } k \in [-1, 2] \quad \underbrace{2+k > 0}$$

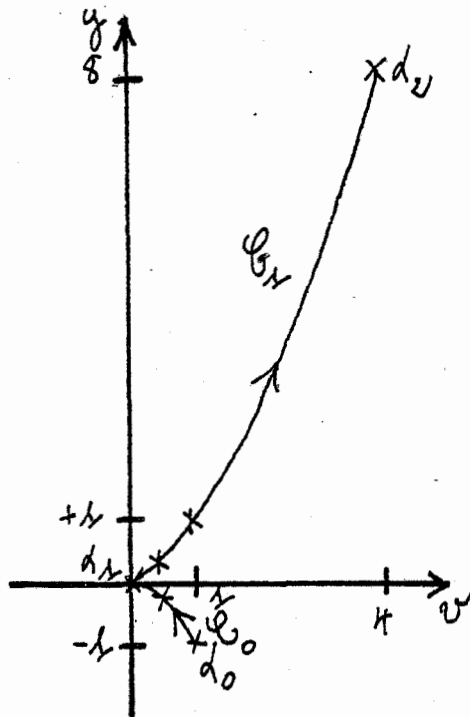
$$6+3k \geq 4+2k+k^2, \quad k \in [-1, 2] \quad \longleftarrow 0 \geq -2-k+k^2 =$$

$(k-2)(k+1)$, $k \in [-1, 2]$, ce qui est vérifié.

On a donc la solution "entropique" :



On peut aussi obtenir géométriquement une solution comportant deux détente :



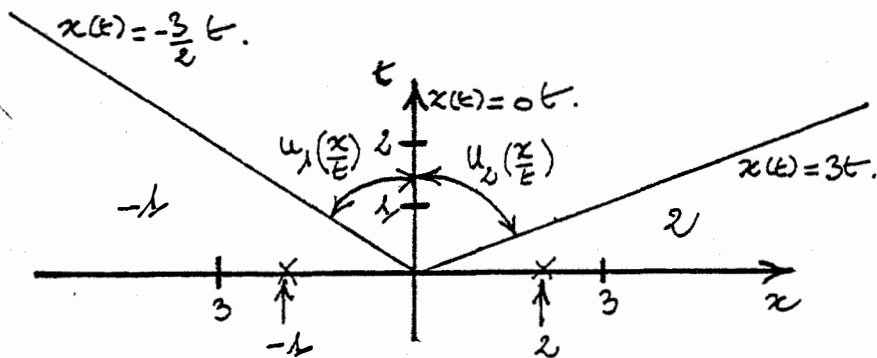
DEUXIEME SOLUTION "ENTROPIQUE".

$$[\gamma_0 \phi^{-1}]'(\phi(u)) = \frac{\gamma'(u)}{\phi'(u)} \text{ pour } \phi \text{ } C^1 \text{-difféomorphisme de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Ceci peut être appliqué successivement à $\phi|_{[-1,0]}$ et $\phi|_{[0,2]}$.

En considérant que pour une détente $\frac{\gamma'(u(\xi))}{\phi'(u(\xi))} = \xi$, on obtient

la solution "entropique" après calcul :



Il n'y a donc pas unicité des solutions "entropiques" ; examinons alors le problème de l'existence de ces solutions.

Dans le cas précédent, à (4) + (2) on pouvait associer

(1) : $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{4} u^2 \right) = 0$ + (2). On va expliciter maintenant un cas où l'on peut vérifier (en écrivant $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2s}{\cos s} ds \geq \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos s} ds$, $\frac{1}{\cos s}$ admettant formellement pour primitive :

$\text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{s}{2} \right) \right| + \text{cte}$) que (4) + (2) n'a pas de problème (1) + (2) associé (et ceci même au sens des distributions).

Maintenant prenons $\text{card } \sigma > 2$ avec, par exemple :

$$\phi(u) = \sin u, \gamma(u) = u^2, a = -\pi, b = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{On a } \sigma = \left(-\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2} \right).$$

Construisons les graphes de $\gamma \circ \phi \Big|_{\left[-\pi, \frac{\pi}{2} \right]}^{-1}$ sur $[-1, 0]$,

de $\gamma \circ \phi \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]}^{-1}$ sur $[-1, 1]$, de $\gamma \circ \phi \Big|_{\left[\frac{\pi}{2}, \pi + \frac{\pi}{2} \right]}^{-1}$ sur $[-1, 1]$.

$$\text{On a } \left([\sin^{-1}]^2 \right)' (\sin u) - \frac{\gamma'(u)}{\phi'(u)} = \frac{2u}{\cos u} = 0 \text{ pour } u=0, \text{ i.e. } \vartheta = 0.$$

$$\lim_{u \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \frac{2u}{\cos u} = \pm \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2u}{\cos u} = \mp \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{2u}{\cos u} = -\infty.$$

$$\text{On a formellement } (\gamma \circ \phi^{-1})'(\vartheta) = \frac{2 \sin^{-1}(\vartheta)}{\cos(\sin^{-1}(\vartheta))}.$$

$$\text{Si l'on redérive en } \vartheta: \left(\frac{2 \sin^{-1}(\vartheta)}{\cos(\sin^{-1}(\vartheta))} \right)'$$

$$2 \left(\frac{\cos(\sin^{-1}(\vartheta)) (\sin^{-1}(\vartheta))' - \sin^{-1}(\vartheta) (\cos(\sin^{-1}(\vartheta)))'}{\cos^2(\sin^{-1}(\vartheta))} \right) \text{ et}$$

$$(\sin^{-1}(\vartheta))' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}(\vartheta))}, \quad (\cos(\sin^{-1}(\vartheta)))' =$$

$$-\sin(\sin^{-1}(\vartheta)) \times \frac{1}{\cos(\sin^{-1}(\vartheta))} = \frac{-\vartheta}{\cos(\sin^{-1}(\vartheta))}.$$

$$D'ou \left(\frac{2\sin^{-1}(\vartheta)}{\cos(\sin^{-1}(\vartheta))} \right)' = 2 \left(1 + \frac{\vartheta}{\cos^2(\sin^{-1}(\vartheta))} \right).$$

En considérant $\vartheta = \sin u$, on obtient la dérivée seconde de $\gamma\phi^{-1}$ exprimée en fonction de u :

$$2 \left(\frac{1 + u \operatorname{Tgu}}{\cos^2 u} \right).$$

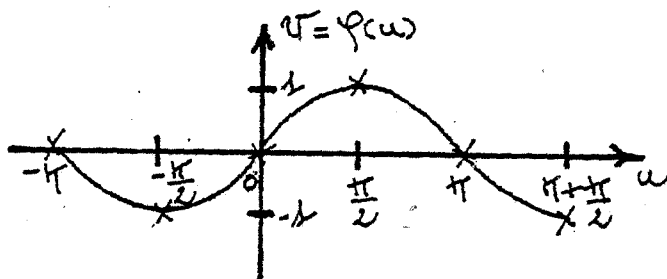
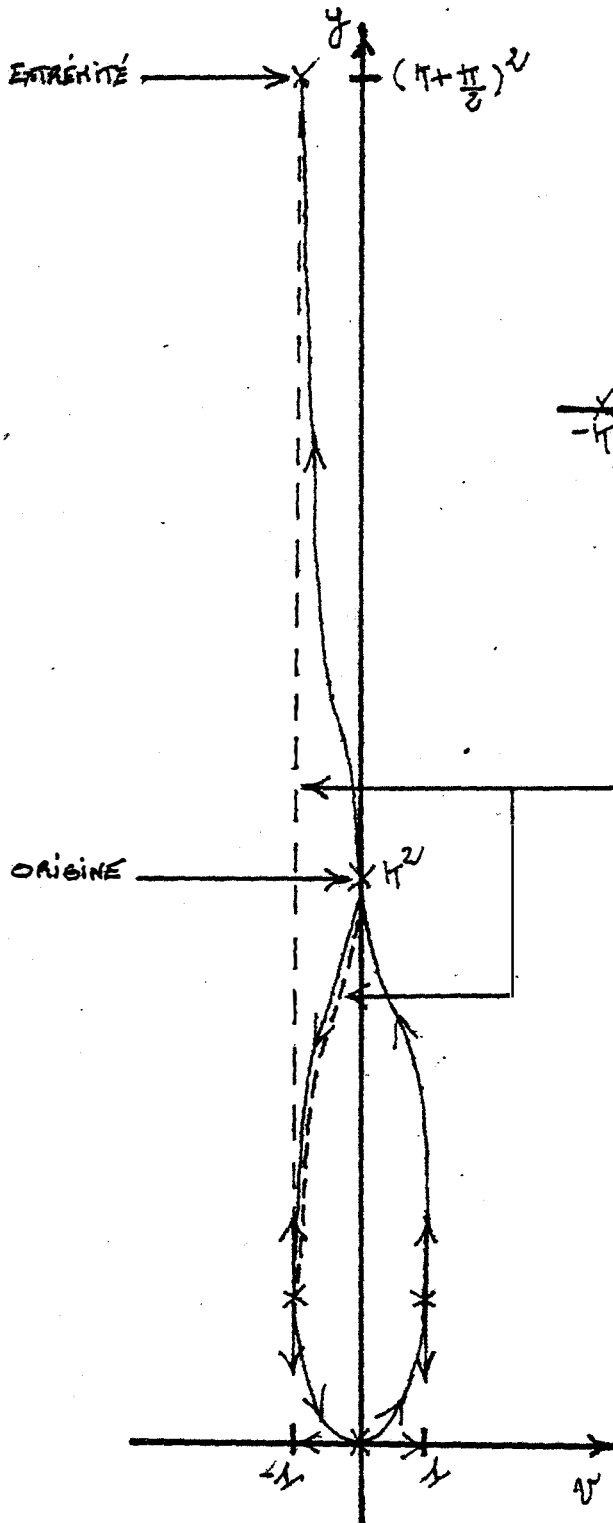
$0 \leq \operatorname{Tgu} \leq +\infty$ pour $u \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel on a un changement de convexité car $1 + u \operatorname{Tgu}$ y change de signe.

$-\infty \leq \operatorname{tgu} \leq 0$ pour $u \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, intervalle sur lequel on n'a pas de changement de convexité car $1 + u \operatorname{Tgu}$ n'y change pas de signe.

De même, pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on n'a pas de changement de convexité et, pour $u \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, on a un changement de convexité.

Puis, pour $u > \pi$, les changements de convexité se retrouvent de manière périodique.

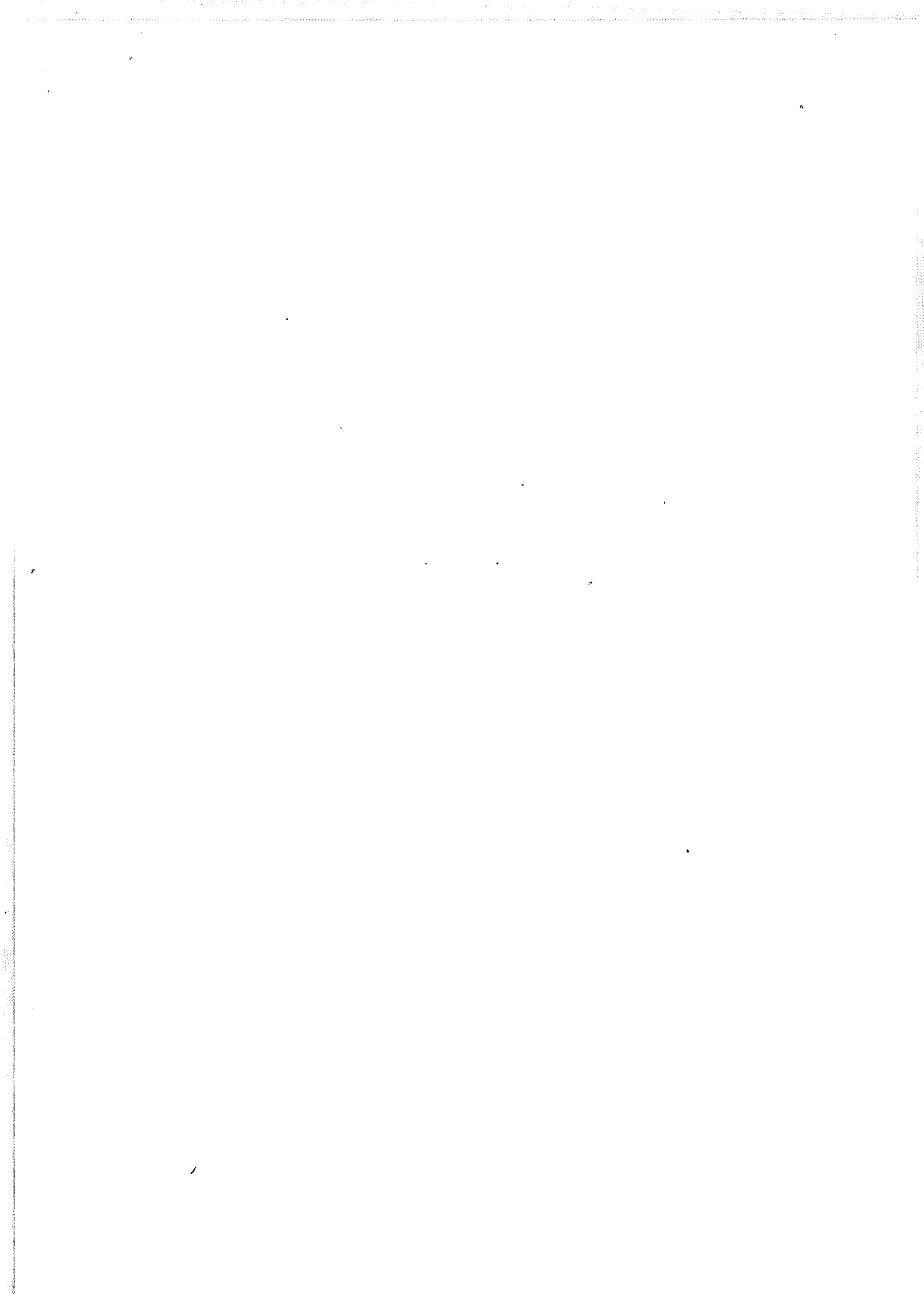
Graphiquement :



SOLUTION "ENTROPIQUE" AVEC PROPAGATION
A VITESSE INFINIE DE LA CONDITION INITIALE.

Pour $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, il n'existe plus de solution "entropique" où $b = \pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, car alors on ne peut plus construire de solution vérifiant les constructions géométriques explicitées précédemment et la croissance des pentes des droites de "choc".

Remarque 4 : Pour ϕ suffisamment régulière, le terme visqueux naturel associé au problème (4) est, pour $\varepsilon \rightarrow 0_+$, $\varepsilon \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2}$; c'est effectivement le bon terme qu'il faut envisager pour le problème à K_L et K_S constants où il est légitime de négliger le terme d_{32} de §2 -remarque 12. On rappelle que $k = 1,38054 (\pm 6) \times 10^{-23}$ Joules avec ω espéré peu différent de k . Les expériences sont toujours pratiquées par des températures T grandes ($\frac{\omega}{kT} < 2$); il serait intéressant d'obtenir des résultats expérimentaux statiques pour T aussi faible que possible, ceci afin d'avoir $\phi'(u)$ non monotone. On se reportera sur la question au §2.



I N T R O D U C T I O N A U §-8

Parmi les méthodes numériques à mettre en oeuvre dans la résolution d'un problème hyperbolique de type

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} (u(x,t), x,t) + g(u(x,t), x,t) = 0$$

la nécessité de présenter (en particulier pour les problèmes géologiques) l'évolution de la solution dans l'espace (u,x) , ainsi que la variété des échelles de temps et de lieux peut nous conduire à choisir la méthode de transport-écroulement (Y. BRENNIER). Cette méthode, très visuelle, permet de garder en mémoire, sur l'axe u , l'évolution de la solution et par là même de s'affranchir partiellement de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy.

Cependant l'algorithme de transport-écroulement nous est proposé en dimension 1 d'espace. Sa mise en oeuvre en dimension 2 devient plus complexe avec l'apparition d'écroulements parasites dus à une discrétisation de l'espace inexistante en dimension 1. Sa généralisation, sur les bases fournies, en dimension supérieure ou égale à 3 est impraticable.

La méthode proposée ici permet :

- i) une dimension N quelconque finie d'espace
- ii) une augmentation de la précision en ne discrétisant plus l'espace, discrétisation en général non justifiée par la complexité de la représentation de la solution u .
- iii) de ne pas affecter de signe aux particules (A. CHORIN) qui seront transformées ici en particules de discontinuité.

iv) une élimination immédiate des assemblages particules-anti-particules (sic) qui restent en permanence comptabilisés chez Y. BRENNIER.

v) d'utiliser des conditions initiales non dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et vérifiant certaines propriétés aux limites.

Pour l'algorithme en dimension 1 nous donnerons des simplifications dues à des considérations de parité. De plus, afin qu'il n'y ait pas d'éclatement du schéma numérique, on propose une élimination du nombre de particules dans un stockage du profil d'ensemble.

Contrairement à la méthode classique de transport-écroulement qui ne traite que

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} (u(x,t)) = 0,$$

la méthode proposée permet de pratiquer le transport-écroulement dans le cas

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} (u, x, t) + g(u, x, t) = 0$$

où les caractéristiques ne sont plus des droites et d'envisager une méthode euristique dans le cas général où la solution n'est plus constante le long des caractéristiques. On note de plus que la méthode de transport-écroulement semble bien adaptée aux problèmes de conditions limites qui sont importants, comme ceux intervenant en géologie.

METHODES DE TRANSPORT-ECROULEMENT

EN DIMENSION QUELCONQUE FINIE

I.- PRINCIPE THEORIQUE DE LA METHODE DE TRANSPORT-ECROULEMENT :

On considère la loi de conservation :

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}[f(u)] = 0$$

où $u = u(x,t)$ avec $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in]0, T[$, $T > 0$,

de flux $f = (f_1, \dots, f_N)$, $f \in \{C^1(\mathbb{R})\}^N$,

et avec la condition initiale

$$(2) \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

où $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})^N \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^N)$, une fonction $\omega(x)$ de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$

appartenant à $BV_{loc}(\mathbb{R}^N)$, espace des fonctions locale-

ment à variation bornée au sens de Tonelli-Cesari

, si et seulement si quelque soit

Ω compact de \mathbb{R}^N , il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\forall \Delta x \in \mathbb{R}^N, \quad \int_{\Omega} |\omega(x+\Delta x) - \omega(x)| dx \leq C(\Omega) \|\Delta x\|_{\mathbb{R}^N}.$$

DEFINITION : On appellera solution classique de (1) + (2)

une solution u de (1) + (2) appartenant à $C^1(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$.

On considérera alors le vecteur dérivé $f'(u) \in \mathbb{R}^N$.

Toute solution classique $u(x,t)$ vérifie au sens fort l'équation :

$$(1') \left[\frac{\partial}{\partial t} + f'(u(x,t)) \cdot \text{grad} \right] (u(x(t))) = 0.$$

D'où, d'après le théorème des dérivations composées, pour toute application $x : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^N$ suffisamment régulière vérifiant

$$(3) \quad \frac{dx(t)}{dt} = f'(u(x(t), t)) \quad \text{on a} \quad \frac{du}{dt}(x(t), t) = 0$$

qui entraîne $u(x(t), t) = \text{constante}$ pour tout $t \in [0, T[$.

Si l'on prend $x(0) = x_0$ alors la solution de (3) s'écrit

$$(4) \quad x(t) = x_0 + tf'(u(x(t), t)) = x_0 + tf'(u_0(x_0))$$

droite appelée caractéristique, le long de laquelle u reste constante égale à $u_0(x_0)$.

On pose $u_0(x_0) = \omega_0$. Alors (4) entraîne :

$$(5) \quad u(x_0 + tf'(\omega_0), t) = \omega_0.$$

Soit le sous-graphe de u_0 :

$$(6) \quad A = \{(x, \omega) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} / u_0(x) \geq \omega\}.$$

On considère alors les tranches horizontales de A :

$A_\omega \times \{\omega\}$ avec $A_\omega = \{x \in \mathbb{R}^N / u_0(x) \geq \omega\}$ où ω fixé appartient à \mathbb{R} et réalise $A_\omega \neq \emptyset$.

Si l'on pose arbitrairement $u_0(x) = \omega$ sur A_ω et si formellement on applique (5), alors, à t fixé, sur $\{(x, t) / x \in A_\omega + tf'(\omega)\}$ u vaut ω .

C'est-à-dire que la tranche $A_\omega \times \{\omega\}$ a été translatée de $(tf'(\omega), 0)$, translation qui ne dépend, à t fixé, que de la cote ω de la tranche considérée.

Soit alors, toujours à t fixé, la réunion des tranches horizontales de A translatées :

$$(7) \quad B = \bigcup_{\omega/A_\omega \neq \emptyset} \{(x, \omega) / x \in A_\omega + tf'(\omega)\} = \bigcup_{\omega/A_\omega \neq \emptyset} \{(x, \omega) / u_0(x - tf'(\omega)) \geq \omega\}.$$

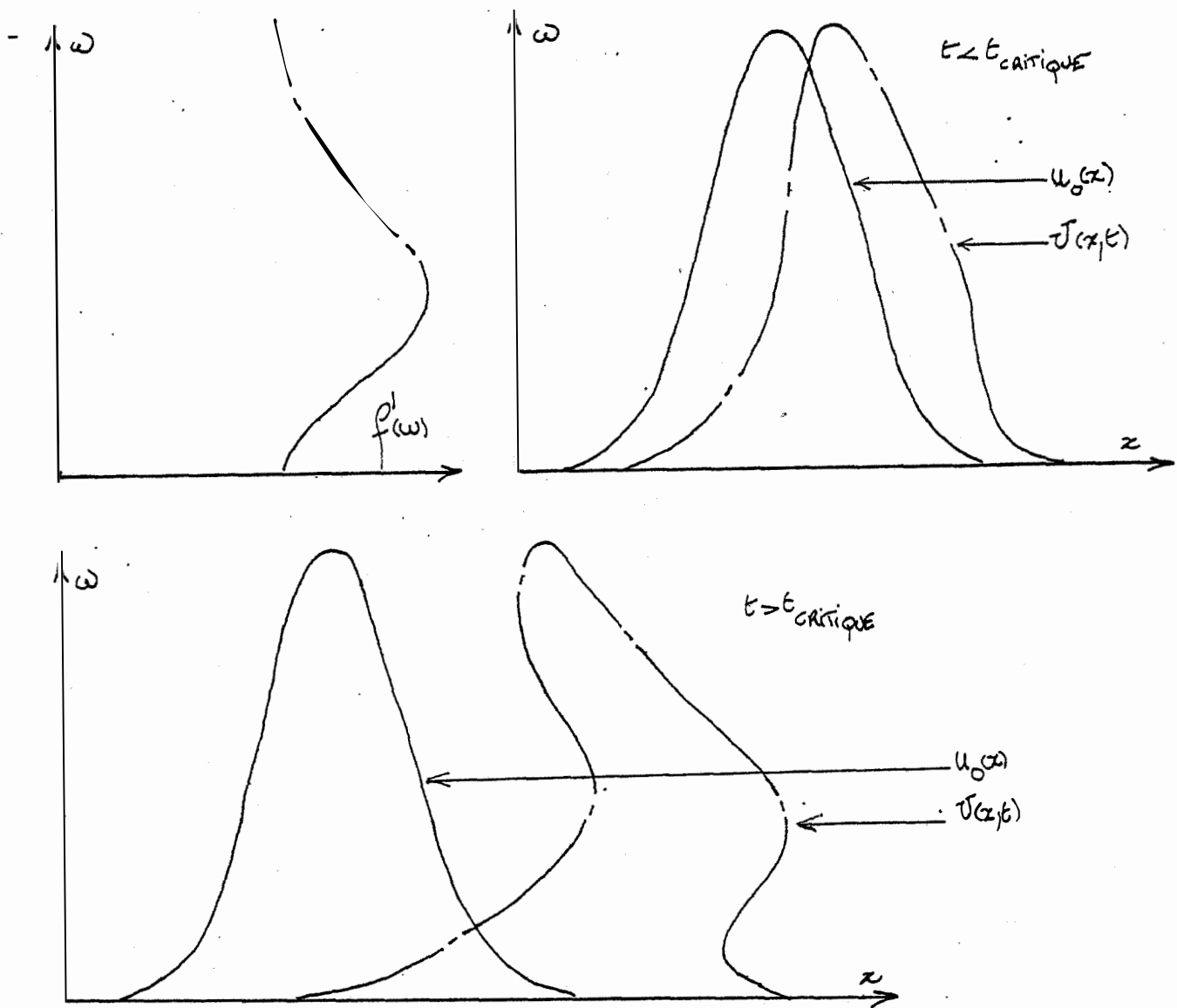
Considérons les coupes verticales de B : $B_x \times \{x\}$ avec

$$(8) \quad B_x = \{\omega \in \mathbb{R} / (x, \omega) \in B\}.$$

On espère B_x ensemble connexe de \mathbb{R} , $\forall x \notin \mathcal{E}$ avec \mathcal{E} ensemble de mesure nulle, de façon à définir par $\bigcup_x \{x\} \times F_r(B_x)$ presque partout le graphe d'une application notée $U(., t)$, cette dernière devant coïncider avec une solution au temps t de (1) + (2).

En général, l'existence de "chocs" entraîne qu'il existe t_{critique} tel que pour $t > t_{\text{critique}}$ $U(., t)$ devienne, sur un ensemble de mesure non nulle, une multiapplication et ceci même pour une condition initiale u_0 régulière. On ne peut donc plus espérer avoir une solution classique du problème (1)+(2).

Graphiquement, d'après les tracés de Y. BRENIER [5]:



DEFINITION : La multiapplication $U(.,t)$ s'appellera la transportée au temps t de u_0 .

On sait alors reformuler (1)+(2) pour obtenir des solutions faibles et en choisir une dite solution entropique et notée u , par :

DEFINITION (A.Y le Roux [35]) : une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$

est solution entropique du problème (1)+(2) lorsque $\forall K \in \mathbb{R}$
 $\forall \varphi \in C_{0+}^2(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$ -ensemble des fonctions de classe C^2 et à
support compact sur $\mathbb{R}^N \times]0, T[$ prenant des valeurs réelles supé-
rieures ou égales à zéro, on a :

$$(9) \quad \iint_{\mathbb{R}^N \times]0, T[} \left[|u-K| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{signe}(u-K)(f(u)-f(K)) \cdot \text{grad} \varphi \right] dx dt \geq 0;$$

$$(10) \quad \forall R > 0, \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \notin \mathcal{E}}} \int_{|x| < R} |u(x,t) - u_0(x)| dx = 0,$$

\mathcal{E} ensemble de mesure nulle dans $]0, T[$.

Remarque : (10) peut être remplacé par

$$(11) \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^N.$$

La notion de solution entropique est étudiée dans S.N. Kruz-
kov [32]. Notre but est alors d'essayer, à partir des multi-
plications $U(\cdot, t)$, $t \in]0, \tilde{t}[$, de fabriquer la solution entro-
pique $u(\cdot, \tilde{t})$ de (1)+(2).

Notion d'écroulement :

Soit t fixé. Définissons l'écroulée de la multiapplication
 $U(\cdot, t)$:

Soit x fixé, B_x défini par (8) est de la forme $]-\infty, b^x) \cup$

$$\bigcup_{i=1}^{M_x} (a_i^x, b_i^x) \text{ avec } -\infty < b^x < a_1^x < b_1^x < \dots < a_{M_x}^x < b_{M_x}^x, \text{ où}$$

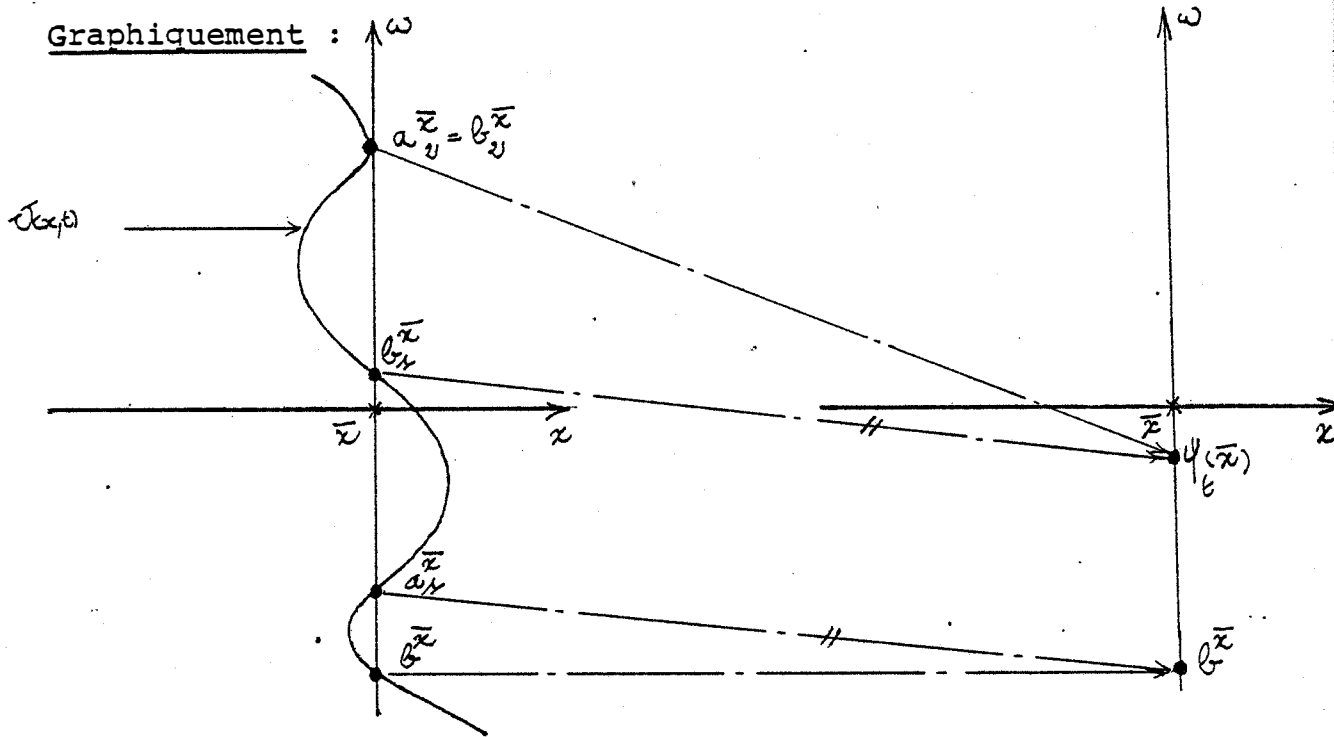
) ainsi que (désignent chacun un crochet ouvert ou fermé.

On construit alors une application ψ_t de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} définie

$$\text{par } \psi_t(x) = b^x + \sum_{i=1}^{M_x} (b_i^x - a_i^x).$$

Si l'on remplace B_x par $B_x^{\sim} =]-\infty, \psi_t(x)]$ -ensemble connexe de "mesure équivalente", $U_x \{x\} \times F_r(B_x^{\sim})$ définit, cette fois, partout le graphe de l'application $\psi_t(x)$.

DEFINITION : L'application ψ_t s'appellera l'écroulée de $U(\cdot, t)$.



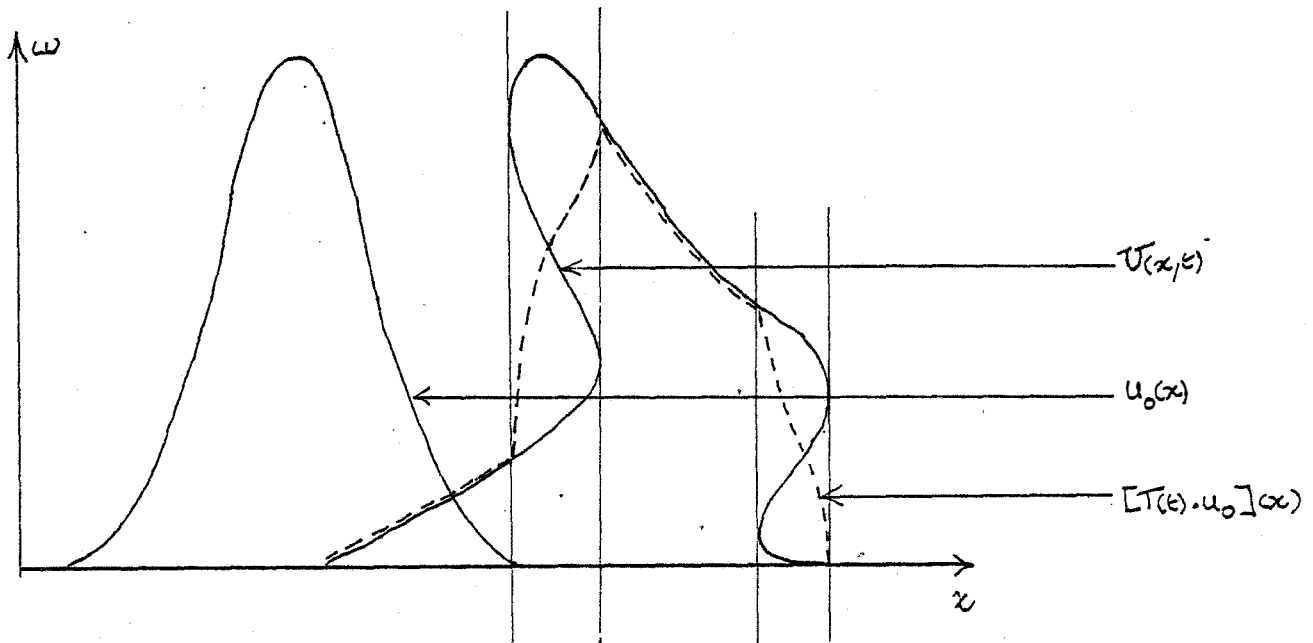
Notion d'opérateur de Transport-écroulement :

On définit, à t fixé, l'opérateur $T(t)$ dit de Transport-écroulement par

$$(12) \quad [T(t)](u_0) = \psi_t. \text{ On notera } [T(t)](u_0) \text{ par } T(t).u_0.$$

Remarquons que l'opérateur $T(t)$ est associé à la fonction f de (1).

Illustration graphique portant sur les tracés précédents :



comparons alors, à titre d'exemple, la solution entropique
à $T(t) \cdot u_0$:

Soit l'équation de Burgers

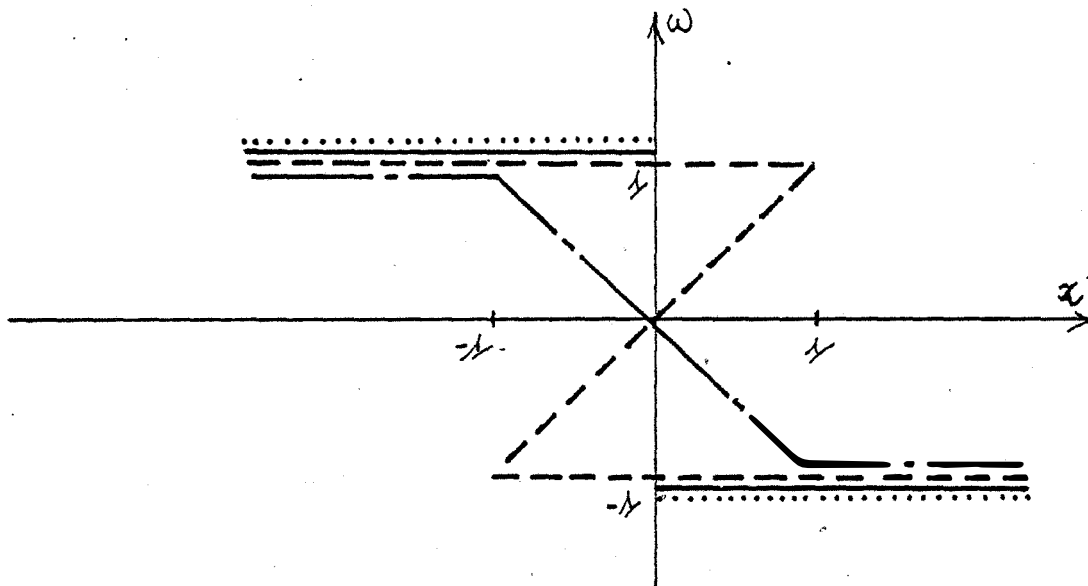
$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0.$$

On rappelle que la solution entropique de (13)+(2) ne peut admettre de discontinuité croissante.

On prendra la condition initiale

$$(14) \quad u_0(x) = - \text{signe}(x).$$

On a pour $t = 1$:



Avec : solution entropique $u(.,1)$
 ——— u_0
 - - - - $U(.,1)$
 - · - · $T(1).u_0$

On voit donc que $T(t).u_0$ ne coïncide pas, en général, avec la solution entropique $u(.,t)$.

Cependant on dispose des théorèmes suivants (Y. Brenier [5], [6]) :

THEOREME 1 : Si l'application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^N est lipschitzienne, alors, pour une donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, l'unique solution entropique de (1)+(2) s'écrit sous la forme :

$$u(.,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\frac{t}{n}\right)^n . u_0 \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^N), \forall t \in]0, T[,$$

où $T\left(\frac{t}{n}\right)^n$ désigne l'opérateur $T\left(\frac{t}{n}\right) \circ \dots \circ T\left(\frac{t}{n}\right)$.

←————→
n fois

THEOREME 2.: Soit (u_m) une suite convergeant dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers u_0 ; soit (f^p) une suite d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^N , uniformément lipschitziennes, telles que $f^{p'}(\omega) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} f'(\omega)$

presque partout sur \mathbb{R} ; si l'on note $T_p(t)$ l'opérateur associé à f^p , alors l'unique solution entropique de (1)+(2) s'écrit $u(.,t) = \lim_{m,n,p \rightarrow +\infty} T_p\left(\frac{t}{n}\right)^n \cdot u_m$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, $\forall t \in]0, T[$.

II. METHODE NUMERIQUE SE TRANSPORT-ECROULEMENT EN DIMENSION

QUELCONQUE FINIE.

II.0) Notions générales :

La fonction u_0 sera supposée approchée au sens du théorème 2 par une fonction $u_{\delta\omega}$ constante par morceaux, à valeurs dans $\omega_{ref} + \delta\omega \mathbb{Z}$ avec $\delta\omega \in \mathbb{R}$ et $\omega_{ref} \in \mathbb{R}$ -valeur de référence dont le choix sera précisé par la suite. De plus, $u_{\delta\omega}$ admettra un nombre fini de particules de discontinuité, notion dont on donnera une définition plus loin.

De même f' sera supposée approchée au sens du théorème 2 par une fonction $f^{\delta\omega'}$ constante par morceaux sur chaque intervalle $]\omega_{ref} + i\delta\omega, \omega_{ref} + (i+1)\delta\omega[$, $i \in \mathbb{Z}$.

Nous définirons plus précisément les approximations précédentes au moment de leur utilisation.

NOTATIONS.: Pour ne pas alourdir l'écriture, on remplacera $u_{\delta\omega}$ par u_0 , $f^{\delta\omega'}$ par f' et l'on appellera encore $T(t)$ l'opérateur de transport-écroulement associé à $f^{\delta\omega'}$.

REMARQUE 1 : Bien que les théorèmes 1 et 2 demandent $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

le schéma numérique sera appliqué à des u_0 tels qu'il existe M_0 et M_1 réels ne dépendant que de u_0 , $M_0 \leq M_1$, avec pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et presque tout $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N\}$, u_0 constante sur $D_{M_0} = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_N) / x \in]-\infty, M_0[\}$ et sur $D_{M_1} = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_N) / x \in [M_1, +\infty[\}$.

DEFINITION : Si u_0 est du type précédent on dira que u_0 est de type constant sur les D_{M_0} et D_{M_1} .

II-1) METHODE NUMERIQUE DE TRANSPORT-ECROULEMENT EN DIMENSION 1

DEFINITION : u_0 étant une fonction constante par morceaux, on appelle particule de discontinuité de u_0 un point $(\bar{x}, \bar{\omega})$ avec \bar{x} abscisse telle que u_0 non continue en \bar{x} et $\bar{\omega} \in \{\omega \in \mathbb{R} / \omega = \xi + (i-1)\delta\omega + \frac{\delta\omega}{2}, i \in \{1, \dots, K\}\}$ où $\xi = \min(u_0(\bar{x}_+), u_0(\bar{x}_-))$ et $|u_0(\bar{x}_+) - u_0(\bar{x}_-)| = K\delta\omega$, $K \in \mathbb{N}^*$.

a) On choisit $\omega_{ref} \in \mathbb{R}$ tel que $\omega_{ref} \leq \min_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) - \delta\omega$.

Notons que ω_{ref} est fini car u_0 admet un nombre fini de particules de discontinuité.

On a immédiatement $\omega_{ref} < \min_{x \in \mathbb{R}} [T(\frac{t}{n})^n \cdot u_0](x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ où

pour $n = 0$ $T(\frac{t}{n})^n = id$.

b) En utilisant les notations de la remarque 1, pour $x \in]-\infty, M_0[$ (respectivement $x \in [M_1, +\infty[$) on a

$u_0(x) = A = \omega_{ref} + \varepsilon_1 \delta\omega$ avec $\varepsilon_1 \in \mathbb{N}^*$ (respectivement

$$u_0(x) = B = \omega_{\text{ref}} + \varepsilon_2 \delta\omega \quad \text{avec } \varepsilon_2 \in \mathbb{N}^*.$$

La propagation ayant lieu à vitesse finie, il existe deux valeurs x_+ et x_- telles que pour tout $t \in]0, T[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait :

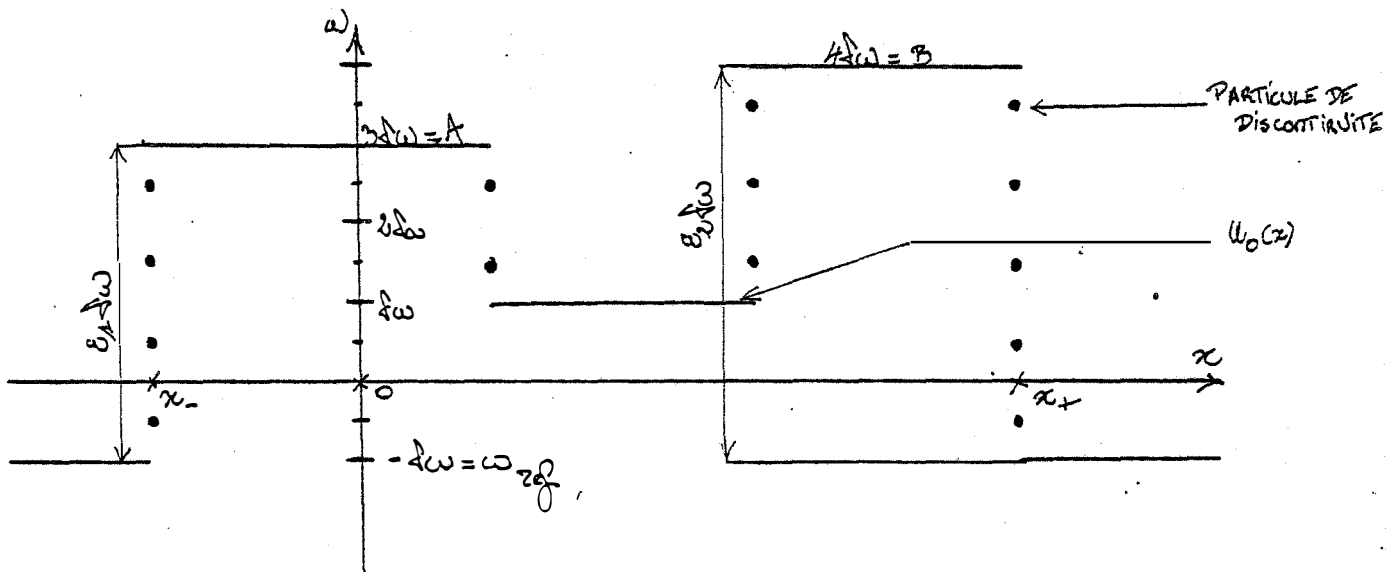
$$\text{Pour } x > x_+, [T(\frac{t}{n})^n \cdot u_0](x) = B \quad \text{et pour } x < x_-, [T(\frac{t}{n})^n \cdot u_0](x) = A.$$

x_+ et x_- dépendent évidemment de T , u_0 et f' .

On introduit alors une discontinuité en x_+ et en x_- , en supposant que $u_0(x) = \omega_{\text{ref}}$ pour $x \in]-\infty, x-[U]x_+, +\infty[$,

cela revient à créer ε_2 particules de discontinuité en x_{\pm} .

Graphiquement :



c) On pose $\omega_{\text{max}} = \text{Max}_{x \in \mathbb{R}} u_0(x)$. Notons que ω_{max} est fini car u_0 admet un nombre fini de particules de discontinuité.

On a $\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{ref}} = \gamma_0 \delta\omega$. On notera par Γ l'ensemble ordonné des cotes des particules discontinuité de u_0 .

$$\Gamma = \{\Gamma_i / i \in \{1, \dots, \gamma_0\} \text{ où } \Gamma_i = \omega_{\text{ref}} + (i-1)\delta\omega + \frac{\delta\omega}{2}\}.$$

On applique alors le principe théorique de la méthode de

Transport-écroulement pour l'opérateur $T(\delta t)$ avec $\delta t = \frac{t}{n}$,

en considérant les étapes :

d) Méthode de transport des particules de cote Γ_i :

Pour $i \in \{1, \dots, \gamma_0\}$ fixé on suppose déterminé $\{x_1^i, \dots, x_{N_i}^i\}$

ensemble des abscisses des particules de discontinuité de u_0 , avant transport, de cote Γ_i , où $x_1^i < \dots < x_{N_i}^i$.

On détermine alors $\{\hat{x}_1^i, \dots, \hat{x}_{N_i}^i\}$ ensemble noté \square_i

des abscisses des particules précédentes transportées :

Si $x_j^i = x_{\pm}$ alors $\hat{x}_j^i = x_{\pm}$ sinon on a $\hat{x}_j^i = x_j^i + \delta t f''(\Gamma_i)$.

D'un point de vue pratique il faudra prendre x_{\pm} proches des infinis machine pour ne pas avoir de translation des x_j^i au delà de $[x_-, x_+]$.

Ces particules transportées ont pour cote Γ_i . On a

$\hat{x}_1^i < \dots < \hat{x}_{N_i}^i$. $\hat{\cdot}$ désignera l'application de transport précédente.

D'après b) tous les N_i sont pairs.

e) Pour $i \in \{2, \dots, \gamma_0\}$ on pose $\Delta_{i-1} = \bigcup_{j \in \{2, \dots, i\}} \{\hat{x}_1^{j-1}, \dots, \hat{x}_{N_{j-1}}^{j-1}\}$.

On réécrit Δ_{i-1} sous la forme générique :

$$\Delta_{i-1} = \{x_1 < \dots < x_{K_{i-1}}\}.$$

Δ_{i-1} représente l'ensemble des abscisses des particules de

discontinuité transportées et dont la cote appartient à

$\{\Gamma_j / j \in \{1, \dots, i-1\}\}$.

f) Méthode d'écroutement des particules de cote Γ_j :

On considère pour $j \in \{1, \dots, \gamma_0\}$ l'application x_j^K de \mathbb{R} dans \mathbb{N} définie par

$$x_j^K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } K \text{ est pair,} \\ \left. \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in]x_K^j, x_{K+1}^j[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \right\} & \text{si } K \text{ impair.} \end{cases}$$

Avec : $(x_K^j, x_{K+1}^j) \in \mathbb{Q}^2$. On notera P_K^j un pavé $]x_K^j, x_{K+1}^j[x \omega_{ref} + (j-1)\delta\omega, \omega_{ref} + j\delta\omega[$ et \hat{P}_K^j un pavé $]x_K^j, x_{K+1}^j[x \omega_{ref} + (j-1)\delta\omega, \omega_{ref} + j\delta\omega[$ où $K \in \{1, \dots, N_j-1\}$ avec $j \in \{1, \dots, \gamma_0\}$.
Les pavés \hat{P}_K^j sont obtenus en translatant les pavés P_K^j de $(\delta\omega f'(\Gamma_j), 0)$.

Hypothèse 1 : On supposera que quelque soit $j \in \{1, \dots, \gamma_0\}$, il n'existe pas $K \in \{1, \dots, N_j-2\}$ tel que les deux pavés P_K^j et P_{K+1}^j soient inclus dans le sous-graphe de u_0 .

Alors, sous l'hypothèse 1, $x_j^K(x)$ est la fonction indicatrice de la projection sur les abscisses, parallèlement à l'axe des ω , du pavé \hat{P}_K^j s'il est effectivement issu du sous-graphe de u_0 et la fonction constante nulle sinon.

On pose alors :

$$x_1 = \sum_{K=1}^{N_1-1} x_1^K = \sum_{\left\{ \begin{array}{l} K \text{ impair} \\ K \in \{1, \dots, N_1-1\} \end{array} \right.} x_1^K ;$$

$$x_i = x_{i-1} + \sum_{K=1}^{N_i-1} x_i^K = x_{i-1} + \sum_{\left\{ \begin{array}{l} K \text{ impair} \\ K \in \{1, \dots, N_i-1\} \end{array} \right.} x_i^K.$$

Proposition : on a $\omega_{ref} + \delta\omega\chi_{\gamma_0} = T(\delta t) \cdot u_0$ presque partout sur $[x_-, x_+]$.

Notre but est ici de déterminer χ_i à partir de χ_{i-1} et des $\chi_i^K, K \in \{1, \dots, N_i - 1\}$.

Il est immédiat que pour $i \in \{2, \dots, \gamma_0\}$ les χ_{i-1} sont entièrement déterminés par la donnée de Δ_{i-1} et $M_{i-1} = (m_1, \dots, m_K, \dots, m_{K_{i-1}-1})$ où m_K représente le nombre de pavés \hat{P}_K^j , K impair appartenant à $\{1, \dots, N_j - 1\}$ et j appartenant à $\{1, \dots, i-1\}$, dont la projection sur les abscisses, parallèlement à l'axe des ω , recouvre $]x_K, x_{K+1}[$.

DEFINITION : Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille finie de pavés de l'espace $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$, avec $P_i = \prod_{j=1}^N (x_{j,1}^i, x_{j,2}^i) \times (\omega_1^i, \omega_2^i)$.

On appellera entassement de $(P_i)_{i \in I}$ sur $X \subset \mathbb{R}^N$ le nombre de pavés P_i dont la projection sur \mathbb{R}^N , parallèlement à l'axe restant, recouvre X .

Remarque : l'entassement de $(P_i)_{i \in I}$ sur X étant indépendant des (ω_1^i, ω_2^i) , on peut moralement considérer que ces pavés sont "les uns sur les autres". Ceci justifiant a posteriori l'emploi du terme entassement.

m_K sera donc l'entassement sur $]x_K, x_{K+1}[$ des pavés \hat{P}_K^j ,

K impair appartenant à $\{1, \dots, N_j - 1\}$ et $j \in \{1, \dots, i-1\}$.

De plus les $\chi_i^K, K \in \{1, \dots, N_i - 1\}$ sont entièrement déterminés par la donnée de \square_i .

Notre but devient donc ici de déterminer Δ_i et M_i pour avoir x_i , ceci à partir de Δ_{i-1} , M_{i-1} , \square_i .

On a d'après a) : $\Delta_1 = (x_-, x_+)$, $M_1 = (1)$.

On propose alors l'algorithme suivant une détermination de Δ_i et M_i pour $i \geq 2$:

On part de $l = 1$.

1°/ A partir de \hat{x}_{l-1}^i (si cela a un sens), on classe \hat{x}_l^i par rapport à Δ_{i-1} .

a) si $\hat{x}_l^i = x_K$ on incrémente m_K composante de M_{i-1} ($m_K \leftarrow m_K + 1$); aller en 2°).

b) Si $x_K < \hat{x}_l^i < x_{K+1}$ on crée après m_K un nouvel élément $\bar{m} = m_K + 1$ dans M_{i-1} et on classe \hat{x}_l^i dans Δ_{i-1} ; aller en 2°/.

2°/ c) Pour $\alpha = 1$ à $K_{i-1} - K$ faire :

d) Si $\hat{x}_{l+1}^i > x_{K+\alpha}$ incrémenter $m_{K+\alpha}$ composante de M_{i-1} ; aller en c).

e) Si $\hat{x}_{l+1}^i = x_{K+\alpha}$ aller en 3°/.

f) Si $\hat{x}_{l+1}^i < x_{K+\alpha}$ on crée avant $m_{K+\alpha}$ un nouvel élément $\bar{m} = \bar{m} - 1$ où \bar{m} est l'élément précédant $m_{K+\alpha}$ dans M_{i-1} complété par 1°/; on classe \hat{x}_{l+1}^i dans Δ_{i-1} ; aller en 3°/.

3°/ Passer au l impair suivant, jusqu'à N_{i-1} , en retournant en 1°/.

Remarque : En cas de dépassement d'indice voir un élément fictif.

Lorsqu'on a terminé on récupère dans Δ_{i-1} et M_{i-1} respectivement Δ_i et M_i .

g) Discrétisation de la condition initiale :

On suppose $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ condition initiale de (2) donnée.
 On considère alors $X = \{y_1 < \dots < y_r\}$ avec $y_1 = x_-$, $y_r = x_+$,
 définissant les noeuds d'un maillage arbitraire de $[x_-, x_+]$.
 On prend alors pour $u_{\delta\omega}$ une application constante par
 morceaux valant $\bar{\omega}_{ref} + m_K \delta\omega$ sur $]y_K, y_{K+1}[$, $K \in \{1, \dots, r-1\}$
 avec $m_K = \lfloor (u_0(\frac{y_{K+1} + y_K}{2}) - \bar{\omega}_{ref}) / \delta\omega \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant
 l'application partie entière) où $\bar{\omega}_{ref} \leq (\text{Min}_{x \in \mathbb{R}} u_0(x)) - \delta\omega$.
 On prendra alors $\omega_{ref} = \bar{\omega}_{ref}$ qui réalise a) car $\forall K \in \{1, \dots, r-1\}$,
 $m_K > 0$. m_K est l'entassement sur $]y_K, y_{K+1}[$ des pavés de
 la forme $]y_K, y_{K+1}[^{[x]} \omega_{ref} + (i-1)\delta\omega, \omega_{ref} + i\delta\omega[$ pour $i \in \mathbb{N}^*$,
 qui sont inclus dans le sous-graphe de $u_{\delta\omega}$.

De plus il est immédiat que la donnée de $M = (m_1, \dots, m_{r-1})$,
 X entraîne la connaissance presque partout sur $[x_-, x_+]$ de $u_{\delta\omega}$.

h) Méthode de détermination des $x_1^i, \dots, x_{N_i}^i$ à partir de X, M :

i) On range M de taille $r-1$ dans \tilde{M} bordé de zéros et de taille
 $r+1$, les 2 zéros précédents servant à faire figurer les par-
 ticules de discontinuité, prévues par b), en x_{\pm} ; \tilde{Q}_i sera
 destiné à valoir $(x_1^i, \dots, x_{N_i}^i)$ pour $i \in \{1, \dots, \gamma_0\}$;

ii) on pose $i = 1$;

iii) Pour $K=1$ à $r-1$ faire :

iv) si $\tilde{m}_K \leq 0$ aller en iii),

v) si $\tilde{m}_K > 0$:

vi) si $\tilde{m}_{K-1} \leq 0$ on classe dans \tilde{Q}_i une
 nouvelle composante valant y_K ;

vii) Si $\tilde{m}_{K+1} \leq 0$ on classe dans \square_1 une nouvelle composante valant y_{K+1} ; aller en iii).

viii) on fait $\tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}-(1)$ avec (1) vecteur de taille $r+1$ dont toutes les composantes sont égales à 1; si $\tilde{M} \leq (0)$ on a $i = \gamma_0$ et l'on arrête; sinon on fait $i \longleftarrow i+1$ et l'on retourne en iii).

Remarque : L'indice i fournit la cote $\omega_{ref} + (i-1)\delta\omega + \frac{\delta\omega}{2}$ des particules définissant $x_1^i, \dots, x_{N_i}^i$.

1) L'algorithme de Transport-écroulement en dimension 1 :

1°/ g); $\bar{n} \longleftarrow n$;

2°/ $h-1$);

3°/ $\Delta_1 = (x-, x+); M_1 = (1)$;

4°/ On pose $i=1$;

5°/ On fait $\tilde{M} \longleftarrow \tilde{M}-(1)$; si $\tilde{M} \leq (0)$ on a $i = \gamma_0$ et l'on va en 9°/.

6°/ $h-iii$);

7°/ d) - appliqué à \square_i ;

8°/ f); aller en 5°/.

9°/ On a dans Δ_{γ_0} , et M_{γ_0} respectivement le nouvel x

et le nouvel M ; $\bar{n} \longleftarrow \bar{n}-1$; si $\bar{n} \neq 0$ aller en 2°/; sinon aller en 10°/.

10°/ On a $T(\frac{t}{n})^n \cdot u_0 = \omega_{ref} + m_K \delta\omega$ sur l'intervalle

$]x_K, x_{K+1}[$ pour $K \in \{1, \dots, K_{\gamma_0} - 1\}$.

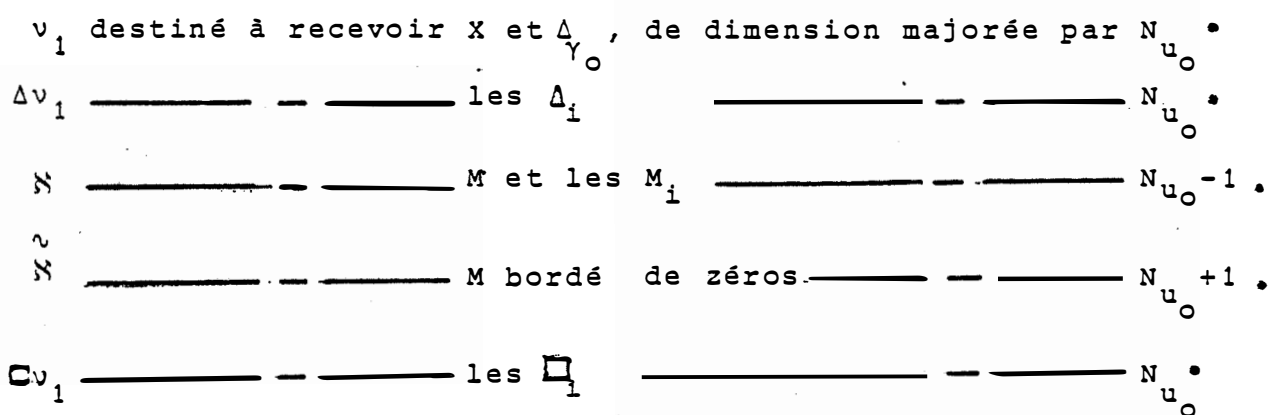
Coût de l'algorithme de transport-écroulement en dimension 1 :

On notera $TV(\omega)$ la variation totale de l'application ω de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

$$TV(\omega) = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \sup_{\text{subdivisions finies de } [a,b]} \sum_{K=1}^n |\omega(x_K) - \omega(x_{K-1})|$$

Soit v constante par morceaux, à valeurs dans $\omega_{ref} + \delta\omega\mathbb{Z}$, qui admet un nombre fini de particules de discontinuité N_v , alors $T(\delta t).V$ est du même type que v et d'après Y. Brenier [5],[6] $TV(T(\delta t).V) \leq TV(V) = N_v \delta\omega$. Si l'on note $N_{v,m}$ le nombre de particules de discontinuité associé à $T(\delta t)^m.V$, alors d'après $TV(T(\delta t)^m.V) = N_{v,m} \delta\omega$ et ce qui précède : $N_v \geq N_{v,1} \geq \dots \geq N_{v,m} \geq \dots$ Ceci entraîne qu'il n'y ait pas d'éclatement du schéma numérique.

Il faut réserver en mémoire (en notations évidentes) :



Il faut donc réserver une place mémoire majorée par $5N_{u_0} \leq 5\gamma_0 N_0$ avec N_0 le nombre de noeuds du maillage initial de $[x-, x+]$. Les majorations précédentes sont très larges.

II - 2) Méthode numérique de transport-écroulement en dimension 2 :

On va suivre une méthode semblable à celle pratiquée en dimension 1, où l'on remplacera les vecteurs par des Tableaux à 2 dimensions et où l'on décomposera les phases d'écroulements.

Définition : On considère l'espace affine \mathbb{R}^N muni du produit scalaire euclidien. Soit $(\bar{x}, i_1, \dots, i_N)$ un repère cartésien orthonormé de \mathbb{R}^N , on définit une $\frac{1}{2^k}$ partie de \mathbb{R}^N d'origine \bar{x} , avec $K \in \{0, \dots, N\}$ par :

Pour $K = N$ c'est $\{A_{\bar{x}, \varepsilon}\}_{\varepsilon \in T}$, $T = \{+, -\}^N$, où $A_{\bar{x}, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^N /$

$x = \bar{x} + \sum_{j=1}^N \lambda_j i_j$ avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ et signe $(\lambda_j) = j^{\text{ième}}$ -coordonnée de ε notée $\varepsilon_j\}$;

pour $K \in \{1, \dots, N-1\}$ c'est $\{B_{\bar{x}, \varepsilon^k, r^k}\}_{\varepsilon^k \in S, r^k \in R}$, $S = \{+, -\}^K$,

$R = \{(r_1, \dots, r_K) \in \{1, \dots, N\}^K\}$, où $B_{\bar{x}, \varepsilon^k, r^k} = \{x \in \mathbb{R}^N /$

$x \in \cup_{\varepsilon \in Q} A_{\bar{x}, \varepsilon}$ avec $Q = \{\varepsilon \in T / \forall i \in \{1, \dots, K\}, \varepsilon_{r_i^k} = \varepsilon_{r_i^k}\}$;

Pour $K = 0$ c'est $\cup_{\varepsilon \in T} A_{\bar{x}, \varepsilon} = \mathbb{R}^N$.

remarque : u_0 constante par morceaux signifiera ici, u_0 constante sur chaque pavé d'un pavement recouvrant \mathbb{R}^N , \mathbb{R}^N étant muni du produit scalaire euclidien et rapporté au repère cartésien orthonormé $(\alpha, i_1, \dots, i_N)$, chaque pavé considéré étant non dégénéré.

Définition : On appelle particule de discontinuité de u_0 , un point $(\bar{x}, \bar{\omega}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tel que :

i) $\bar{\omega} \in \omega_{ref} + \frac{\delta\omega}{2} + \delta\omega\mathbb{Z}$. On remarque que u_0 constante par morceaux $\leftarrow A_{\bar{\omega}}$ pavement de \mathbb{R}^N .

ii) \bar{x} (qui dépend de $\bar{\omega}$) vérifie :

Il n'existe pas de voisinage $V_{\bar{x}}$ de \bar{x} tel que $V_{\bar{x}} \cap A_{\bar{\omega}} = \emptyset$

$V_{\bar{x}} \cap \Delta$ et Δ défini par :

Il existe $l \in \{1, \dots, N\}$ tel que Δ soit réunion d'ensembles de la forme $B_{\bar{x}, \varepsilon}^{N-1, N-1} = A_{\bar{x}, \hat{\varepsilon}} \cup A_{\bar{x}, \tilde{\varepsilon}}$ (car $\text{card}(Q) = 2^{N-K}$) où $\hat{\varepsilon}_1 \neq \tilde{\varepsilon}_1$.

Remarquons que si l existe et si $m \in \{1, \dots, N\}$ est tel qu'il n'existe pas $A_{\bar{x}, \hat{\varepsilon}}$ et $A_{\bar{x}, \tilde{\varepsilon}}$ ($\hat{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon} \in T^2$, tels que $\hat{\varepsilon}_m \neq \tilde{\varepsilon}_m$, alors $l \neq m$.

Remarquons enfin que les \bar{x} appartiennent à la réunion des points extrémaux des pavés du pavement associé à u_0 . Les particules de discontinuité repèrent les points

$(\bar{x}, \bar{\omega}) \in \mathbb{R}^N \times \{\omega_{ref} + \frac{\delta\omega}{2} + \delta\omega\mathbb{Z}\}$ tels qu'il existe un changement de profil de $A_{\bar{\omega}}$ en \bar{x} .

Par la suite, pour simplifier les notations, on prendra, sans perte de généralité, $N = 2$.

a) Même résultat que dans II-1-a) en remplaçant \mathbb{R} par \mathbb{R}^2 .

b) La propagation ayant lieu à vitesse finie, u_0 étant de type constant sur les D_{M_0} et D_{M_1} , il existe \bar{M}_0 et \bar{M}_1 , dépendants de T, u_0, f' , tels que :

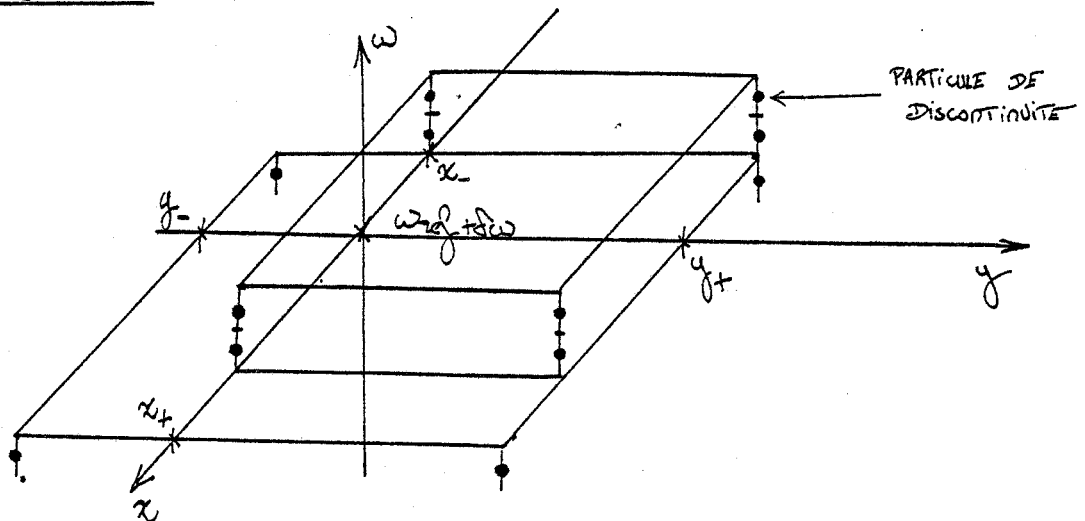
i) $[M_0, M_1]^2 \subset [\bar{M}_0, \bar{M}_1]^2$.

ii) $\forall t \in]0, T[\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, T(\frac{t}{n})^n \cdot u_0$ est de type constant sur les $D_{\bar{M}_0}$ et $D_{\bar{M}_1}$.

On choisit $[x_-, x_+] \times [y_-, y_+] \supset [\bar{M}_0, \bar{M}_1]^2$ et l'on introduit des discontinuités sur F_r ($[x_-, x_+] \times [y_-, y_+]$) en supposant $u_0(x) = \omega_{ref}$ pour $x \in C_{\mathbb{R}^2}([x_-, x_+] \times [y_-, y_+])$.

On crée ainsi des particules de discontinuité sur $F_r([x_-, x_+] \times [y_-, y_+])$.

Graphiquement :



c) Même résultat que dans II-1-c) en remplaçant \mathbb{R} par \mathbb{R}^2 .
On applique alors le principe théorique de la méthode de transport-écroulement pour l'opérateur $T(\delta t)$ avec $\delta t = t/n$, en considérant les étapes :

d) Méthode de transport des particules de cote Γ_i :

Pour $i \in \{1, \dots, Y_0\}$ fixé on suppose déterminé $\{x_1^i, \dots, x_{N_i}^i\}$ (respectivement $\{y_1^i, \dots, y_{N_i}^i\}$) ensemble des abscisses (respectivement des ordonnées des particules de discontinuité de u_0 , avant transport, de cote Γ_i , où $x_1^i < \dots < x_{N_i}^i$

(respectivement $y_1^i < \dots < y_{N_i}^i$).

On détermine alors $\{\hat{x}_1^i, \dots, \hat{x}_{N_i}^i\}$ (respectivement $\{\hat{y}_1^i, \dots, \hat{y}_{N_i}^i\}$) ensemble noté \square_i^x (respectivement \square_i^y) des

abscisses (respectivement des ordonnées) des particules précédentes transportées :

Si $x_j^i = x_{\pm}$ alors $\hat{x}_j^i = x_{\pm}$, si $y_p^i = y_{\pm}$ alors $\hat{y}_p^i = y_{\pm}$; sinon on a $\hat{x}_j^i = x_j^i + \delta t f_1'(\Gamma_i)$, $\hat{y}_p^i = y_p^i + \delta t f_2'(\Gamma_i)$.

D'un point de vue pratique il faudra prendre x_{\pm} et y_{\pm} proches des infinis machine pour ne pas avoir de translation des x_j^i au delà de $[x_-, x_+]$ et des y_p^i au delà de $[y_-, y_+]$.

Ces particules transportées ont pour cote Γ_i . On a $\hat{x}_1^i < \dots < \hat{x}_{N_i}^i$ et $\hat{y}_1^i < \dots < \hat{y}_{N_i}^i$. Λ désignera l'application de

transport précédente.

e) Pour $i \in \{2, \dots, \gamma\}$ on pose $\Delta_{i-1}^x = \bigcup_{j \in \{2, \dots, i\}} \{\hat{x}_1^{j-1}, \dots, \hat{x}_{N_{j-1}}^{j-1}\}$ et

$\Delta_{i-1}^y = \bigcup_{j \in \{2, \dots, i\}} \{\hat{y}_1^{j-1}, \dots, \hat{y}_{N_{j-1}}^{j-1}\}$. On réécrit Δ_{i-1}^y sous la forme

générique : $\Delta_{i-1}^x = \{x_1 < \dots < x_{K_{i-1}}\}$ (respectivement Δ_{i-1}^y)

représente l'ensemble des abscisses (respectivement des ordonnées) des particules de discontinuité transportées et dont la cote appartient à $\{\Gamma_j / j \in \{1, \dots, i-1\}\}$.

f) Méthode d'écroutement des particules de cote Γ_i :

On notera $P_{K,1}^j$ un pavé $]x_K^j, x_{K+1}^j[\times]y_1^j, y_{1+i}^j[\times]\omega_{ref} + (j-1)\delta\omega, \omega_{ref} + j\delta\omega[$

et $\hat{P}_{K,1}^j$ un pavé $]x_K^j, x_{K+1}^j[\times]y_1^j, y_{1+1}^j[\times]\omega_{ref} + (j-1)\delta\omega,$
 $\omega_{ref} + j\delta\omega [$ où $K \in \{1, \dots, N_j^x - 1\}, l \in \{1, \dots, N_j^y - 1\}$ avec $j \in \{1, \dots, \gamma_0\}$.
 Les pavés $\hat{P}_{K,1}^j$ sont obtenus en translatant les pavés $P_{K,1}^j$
 de $(\delta t f'(\Gamma_j), 0)$.

On considère alors $\chi_j^{K,1}$ fonction indicatrice de la pro-
 jection sur le plan des (x, y) , parallèlement à l'axe des ω ,
 du pavé $\hat{P}_{K,1}^j$ s'il est effectivement issu du sous-graphe de
 u_0 et fonction constante nulle sinon.

On pose alors

$$\chi_1 = \sum_{K=1}^{N_1^x-1} \sum_{l=1}^{N_1^y-1} \chi_1^{K,1}; \chi_i = \chi_{i-1} + \sum_{K=1}^{N_i^x-1} \sum_{l=1}^{N_i^y-1} \chi_i^{K,1}.$$

Proposition : On a $\omega_{ref} + \delta\omega \chi_{\gamma_0} = T(\delta t) \cdot u_0$ presque partout
 sur $]x_-, x_+ [\times]y_-, y_+ [$.

Notre but est ici de déterminer χ_i à partir de χ_{i-1} et des
 $\chi_i^{K,1}, K \in \{1, \dots, N_i^x - 1\}, l \in \{1, \dots, N_i^y - 1\}$.

Il est immédiat que pour $i \in \langle 2, \gamma_0 \rangle$ les χ_{i-1} sont entière-
 ment déterminés par la donnée de $\Delta_{i-1}^x, \Delta_{i-1}^y$ et M_{i-1} matrice

$(M_{K,1}^{i-1})_{K \in \{1, \dots, N_{i-1}^x - 1\}, l \in \{1, \dots, N_{i-1}^y - 1\}}$ où $M_{K,1}^{i-1}$

représente l'entassement sur $]x_K, x_{K+1}[\times]y_1, y_{1+1}[$ des pavés

$\hat{P}_{m,n}^j$ effectivement issus du sous-graphe de $u_0, m \in \{1, \dots, N_j^x - 1\},$

$n \in \{1, \dots, N_j^y - 1\}$ et $j \in \{1, \dots, i-1\}$.

De plus les $\chi_i^{K,1}, K \in \{1, \dots, N_i^x - 1\}, l \in \{1, \dots, N_i^y - 1\}$ sont

entièrement déterminés par la donnée de \square_i^x , \square_i^y et \hat{M}_i
matrice $(\hat{M}_{K,1})_{K \in \{1, \dots, N_i^x - 1\}, 1 \in \{1, \dots, N_i^y - 1\}}$ où

$\hat{M}_{K,1}$ représente l'entassement sur $]\square_K^i, \square_{K+1}^i[x$ $]\hat{Y}_1^i, \hat{Y}_{1+1}^i[$
des pavés $P_{m,n}^i$ effectivement issus du sous-graphe de u_0 ,
 $m \in \{1, \dots, N_i^x - 1\}$, $n \in \{1, \dots, N_i^y - 1\}$.

Remarquons que l'on a $\forall K \in \{1, \dots, N_i^x - 1\}, \forall l \in \{1, \dots, N_i^y - 1\}$,
 $\hat{M}_{K,1} \in \{0, 1\}$.

Notre but devient donc ici de déterminer $\Delta_i^x, \Delta_i^y, M_i$ pour
avoir χ_i , ceci à partir de $\Delta_{i-1}^x, \Delta_{i-1}^y, M_{i-1}, \square_i^x, \square_i^y, \hat{M}_i$.

On a d'après a) : $\Delta_1^x = (x_-, x_+), \Delta_1^y = (y_-, y_+), M_1 = (1)$.

On propose alors la méthode suivante de détermination de

$\Delta_i^x, \Delta_i^y, M_i$ pour $i \geq 2$:

Définition : Soit $A = (a_{i_1, \dots, i_N})$ un tableau réel, à N di-
mensions, de taille $P_1 \times \dots \times P_N$. On définit pour $K \in \{1, \dots, N\}$
et $l \in \{1, \dots, P_K\}$, l'opérateur de dédoublement $\Theta_{K,1}$ par :

$$\Theta_{K,1}(A) = B = (b_{i_1, \dots, i_N}) \text{ tableau réel de taille } P_1 \times \dots \times P_{K-1} \times$$

$$P_{K+1} \times P_{K+1} \times \dots \times P_N \text{ où :}$$

$$\forall (i_1, \dots, i_N) \in \{1, \dots, P_1\} \times \dots \times \{1, \dots, P_{K-1}\} \times \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, P_{K+1}\} \times \dots \times \{1, \dots, P_N\}$$

$$b_{i_1, \dots, i_N} = a_{i_1, \dots, i_N}$$

$$b_{i_1, \dots, i_N} = a_{i_1, \dots, i_{K-1}, l, i_{K+1}, \dots, i_N}$$

$$b_{i_1, \dots, i_N} = a_{i_1, \dots, i_{K-1}, l, i_{K-1}, i_{K+1}, \dots, i_N}$$

Remarque : En cas de dépassement d'indice on supprime l'as-
sertion considérée.

On définit $E_x = \{a_K^x \in \mathbb{R} / \exists K \in \{1, \dots, K_{i-1}^x - 1\}$ avec
 $a_K^x \in]x_K, x_{K+1}[$ avec $E_x \cap \square_i^x = \{a_{K_1}^x < \dots < a_{K_{I_x}}^x\}$,
 $E_y = \{a_l^y \in \mathbb{R} / \exists l \in \{1, \dots, K_{i-1}^y - 1\}$ avec $a_l^y \in]y_l, y_{l+1}[$
avec $E_y \cap \square_i^y = \{a_{l_1}^y < \dots < a_{l_{I_y}}^y\}$, $\hat{E}_x = \{b_m^x \in \mathbb{R} / \exists m \in \{1, \dots, N_{i-1}^x - 1\}$
avec $b_m^x \in]x_m^{\wedge i}, x_{m+1}^{\wedge i}[$ avec $\hat{E}_x \cap \Delta_{i-1}^x = \{b_{m_1}^x < \dots < b_{m_{J_x}}^x\}$,
 $\hat{E}_y = \{b_n^y \in \mathbb{R} / \exists n \in \{1, \dots, N_i^y - 1\}$ avec $b_n^y \in]y_n^{\wedge i}, y_{n+1}^{\wedge i}[$
avec $\hat{E}_y \cap \Delta_{i-1}^y = \{b_{n_1}^y < \dots < b_{n_{J_y}}^y\}$.

1°/ On pose $\xi = 0$;

2°/ Pour $r = 1$ à I_x faire :

$$M_{i-1} \longleftarrow \Theta_{1, K_r + \xi} (M_{i-1});$$

$$\xi = \xi + 1.$$

3°/ On pose $\xi = 0$;

4°/ Pour $r = 1$ à I_y faire :

$$M_{i-1} \longleftarrow \Theta_{2, l_r + \xi} (M_{i-1});$$

$$\xi = \xi + 1.$$

5°/ On pose $\xi = 0$;

6°/ Pour $r = 1$ à J_x faire :

$$\hat{M}_i \longleftarrow \Theta_{1, m_r + \xi} (\hat{M}_i);$$

$$\xi = \xi + 1.$$

7°/ on pose $\xi = 0$;

8°/ Pour $r = 1$ à J_y faire :

$$\hat{M}_i \longleftarrow \Theta_{2, n_r + \xi} (\hat{M}_i);$$

$$\xi = \xi + 1.$$

9°/ on classe \hat{x}_1^i par rapport à Δ_{i-1}^x et \hat{y}_1^i par rapport à Δ_{i-1}^y .

Si $\hat{x}_1^i \in \begin{cases} \{x_K\} & \text{alors on pose } \beta = K. \\]x_K, x_{K+1}[& \text{_____ } \beta = K+1. \end{cases}$

Si $\hat{y}_1^i \in \begin{cases} \{y_1\} & \text{alors on pose } \mu = 1. \\]y_1, y_{1+1}[& \text{_____ } \mu = 1+1. \end{cases}$

On suppose que l'on a repéré la taille $M \times N$ de \hat{M}_i , alors $\forall (K, l) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$, $M_{K+\alpha-1, l+\beta-1} \leftarrow M_{K+\alpha-1, l+\beta-1} + \hat{M}_{K, l}$, les composantes de M_{i-1} restantes étant inchangées.

10°/ On classe \square_i^x dans Δ_{i-1}^x et \square_i^y dans Δ_{i-1}^y .

Lorsqu'on a terminé on récupère dans $\Delta_{i-1}^x, \Delta_{i-1}^y, M_{i-1}$ respectivement $\Delta_i^x, \Delta_i^y, M_i$.

remarque : on peut aussi procéder en faisant

$$\square_i^x \leftarrow \square_i^x \cup \{x_-, x_+\} \text{ et } \square_i^y \leftarrow \square_i^y \cup \{y_-, y_+\}$$

et en bordant \hat{M}_i par les lignes ou colonnes nulles correspondant aux nouveaux pavés introduits. On applique alors de 1°/ à 8°/ et 9°/ devient $M_{i-1} \leftarrow M_{i-1} + \hat{M}_i$.

g) Discrétisation de la condition initiale :

On suppose $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ condition initiale de (2) donnée. On considère alors $x = \{z_1^x < \dots < z_{r_x}^x\}$ avec $z_1^x = x_-, z_{r_x}^x = x_+$ et $y = \{z_1^y \dots z_{r_y}^y\}$ avec $z_1^y = y_-, z_{r_y}^y = y_+$, $x \times y$ définissant les noeuds d'un maillage rectangulaire arbitraire de

$[x_-, x_+] \times [y_-, y_+]$. On prend alors pour $u_{\delta\omega}$ une application constante par morceaux valant $\bar{\omega}_{ref} + M_{i,j} \delta\omega$ sur $]z_i^x, z_{i+1}^x[\times]z_j^y, z_{j+1}^y[$, $i \in \{1, \dots, r_x - 1\}$, $j \in \{1, \dots, r_y - 1\}$

avec $M_{i,j} = [(u_0 (\frac{z_{i+1}^x + z_i^x}{2}, \frac{z_{j+1}^y + z_j^y}{2}) - \bar{\omega}_{ref}) / \delta\omega]$

([.] désignant l'application partie entière) où $\bar{\omega}_{ref} \leq$

$(\min_{x \in \mathbb{R}_0^+} u_0(x)) - \delta\omega$. On prendra alors $\omega_{ref} = \bar{\omega}_{ref}$ qui réalise

a) car $\forall i \in \{1, \dots, r_x - 1\}$, $\forall j \in \{1, \dots, r_y - 1\}$, $M_{i,j} > 0$. $M_{i,j}$ est l'entassement sur $]z_i^x, z_{i+1}^x[\times]z_j^y, z_{j+1}^y[$ des pavés de la forme $]z_i^x, z_{i+1}^x[\times]z_j^y, z_{j+1}^y[\times]\omega_{ref} + (l-1)\delta\omega, \omega_{ref} + l\delta\omega[$ pour $l \in \mathbb{N}^*$, qui sont inclus dans le sous-graphe de $u_{\delta\omega}$.

De plus il est immédiat que la donnée de $M = (M_{i,j}), X, Y$ entraîne la connaissance presque partout sur $[x_-, x_+] \times [y_-, y_+]$ de $u_{\delta\omega}$.

h) Méthode de détermination des $x_1^i, \dots, x_{N_i^x}^i$ et des $y_1^i, \dots, y_{N_i^y}^i$

à partir de X, Y, M :

- i) on range M de taille $r_x - 1 \times r_y - 1$ dans \tilde{M} bordé de zéros et de taille $r_x + 1 \times r_y + 1$, les $2(r_x + r_y)$ zéros précédents servant à faire figurer les particules de discontinuité, prévues par b), sur $F_r([x_-, x_+] \times [y_-, y_+])$; \square_i^x et \square_i^y seront destinés à valoir respectivement $(x_1^i, \dots, x_{N_i^x}^i)$ et $(y_1^i, \dots, y_{N_i^y}^i)$ pour $i \in \{1, \dots, \gamma_0\}$;
- ii) on pose $i = 1$;
- iii) Pour $K = 2$ à $r_y + 1$ faire :

iv) Pour $j=2$ à r_x+1 faire :

v) si $\tilde{M}_{j,K} > 0$, le point (z_{j-1}^x, z_{K-1}^y) porte un particule ssi $(\tilde{M}_{j,K-1}, \tilde{M}_{j-1,K-1}, \tilde{M}_{j-1,K}) \neq (\alpha, \beta, \gamma)$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$

ou $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^*$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$; si

oui on classe dans \square_i^x (respectivement \square_i^y) une nouvelle composante valant z_{j-1}^x (respectivement z_{K-1}^y), aller en iii)

vi) Même méthode que v) où l'on prend $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_-)^3$ ou

$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ou $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-$.

vii) On fait $\tilde{M} \leftarrow \tilde{M} - (1)$ avec (1) matrice de taille $r_x+1 \times r_y+1$ dont les composantes sont égales à 1; si $\tilde{M} \leq (0)$ on a $i = \gamma_0$ et l'on arrête; sinon on fait $i \leftarrow i+1$ et l'on retourne en iii).

Remarque: L'indice i fournit la cote $\omega_{ref} + (i-1)\delta\omega + \frac{\delta\omega}{2}$ des particules définissant $x_1^i, \dots, x_{N_i^x}^i$ et $y_1^i, \dots, y_{N_i^y}^i$.

i) Méthode de détermination de \hat{M}_i à partir de $(x_1^i, \dots, x_{N_i^x}^i)$,

$(y_1^i, \dots, y_{N_i^y}^i)$, X, Y et \tilde{M} :

Remarquons que $(x_1^i, \dots, x_{N_i^x}^i) \in X^{N_i^x}$ et $(y_1^i, \dots, y_{N_i^y}^i) \in Y^{N_i^y}$.

Soit le pavé $]x_j^i, x_{j+1}^i[\times]y_K^i, y_{K+1}^i[\times]\omega_{ref} + (i-1)\delta\omega, \omega_{ref} + i\delta\omega[$, le $\hat{M}_{j,K}$ qui est associé à sa transportée vaut (à cause de la définition de x_\pm et y_\pm) :

1, si étant fixé un $[z_m^x, z_{m+1}^x[\times]z_n^y, z_{n+1}^y[[C] x_j^i, x_{j+1}^i[\times]$

$y_K^i, y_{K+1}^i[$, la valeur de \tilde{M} à l'étape i qui lui est associée

est strictement positive; sinon 0.

On choisira par exemple $z_m^x = x_j^i$ et $z_n^y = y_k^i$.

j) Algorithme de transport écroulement en dimension 2 :

1°/ g); $\bar{n} \leftarrow n$;

2°/ h - i);

3°/ $\Delta_1^x = (x_-, x_+)$; $\Delta_1^y = (y_-, y_+)$; $M_1 = (1)$;

4°/ on pose $i = 1$;

5°/ on fait $\hat{M} \leftarrow \hat{M} - (1)$; si $\hat{M} \leq (0)$ on a $i = \gamma_0$ et l'on va en 10°/.

6°/ h - iii);

7°/ i);

8°/ d) - appliqué à \square_i^x et \square_i^y ;

9°/ f); aller en 5°/.

10°/ on a dans $\Delta_{\gamma_0}^x$, $\Delta_{\gamma_0}^y$, M_{γ_0} respectivement le nouvel

X, le nouvel Y, le nouvel M; $\bar{n} \leftarrow \bar{n} - 1$; si $\bar{n} \neq 0$ aller en 2°/; sinon aller en 11°/.

11°/ on a $T\left(\frac{t}{n}\right)^n \cdot u_0 = \omega_{ref} + M_{i,j} \delta\omega$ sur le pavé $]x_i, x_{i+1}[\times]$

$y_j, y_{j+1}[$ pour $i \in \{1, \dots, K_{\gamma_0}^x - 1\}$, $j \in \{1, \dots, K_{\gamma_0}^y - 1\}$.

II.3) Méthode numérique de transport-écroulement en dimension

$N \geq 2$:

On suit une méthode semblable à celle pratiquée en dimension 2 où l'on remplace les tableaux à 2 dimensions par des tableaux à N dimensions. Les définitions délicates du cas $N=2$ ayant été données pour N quelconque, la généralisation de II.2) au cas $N > 2$ est sans difficulté.

COÛT DE L'ALGORITHME DE TRANSPORT-ECROULEMENT EN DIMENSION $N \geq 2$:

On considère l'application précédente u_0 , constante par morceaux, prolongée par ω_{ref} , admettant un nombre fini de particules de discontinuité.

On construit \bar{u}_0 tel que $\bar{u}_0(x) = u_0(x) - \omega_{ref}$; on appelle $N_{\bar{u}_0}$ le nombre total de particules de discontinuité de \bar{u}_0 ,

alors $N_{\bar{u}_0} = N_{u_0}$.

on a $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N)$. On peut donc définir

$$TV(\bar{u}_0) = \sup_{h \in \mathbb{R}^{N*}} \left\{ \frac{1}{\|h\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_0(x+h) - \bar{u}_0(x)| dx \right\} \quad \text{et } \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

$$TV_i(\bar{u}_0) = \sup_{\substack{h = (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0) \\ h_i \in \mathbb{R}^*}} \left\{ \frac{1}{|h_i|} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_0(x+h) - \bar{u}_0(x)| dx \right\}.$$

Soit $M = \{M_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$ ensemble de m points de \mathbb{R}^{N-1}

fixé. Soit un pavement P dans \mathbb{R}^{N-1} dont chaque pavé est non dégénéré. Sachant que la réunion des points extrémaux de l'adhérence de chaque pavé de P est égale à M , le nombre minimal de pavés de P constructibles est minoré par

$$\frac{m}{2^{N-1}}.$$

on a alors $\forall i \in \{1, \dots, N\}, TV_i(\bar{u}_0) \geq \frac{(N-1) \times N_{\bar{u}_0}}{2^{N-1}} \times \prod_{j \in \{1, \dots, N\} - \{i\}} e_j \times \delta_{i0}$

où $e_j = \min_{K \in \{1, \dots, r_j - 1\}} |z_K^j - z_{K+1}^j|$ en notation évidente d'après II-2.

En majorant les $TV_i(\bar{u}_0)$ par $TV(\bar{u}_0)$ et en multipliant les inégalités obtenues on a :

$$\frac{2^{N \times (N-1)}}{(N-1)^N \delta \omega^N} TV(\bar{u}_0)^N \geq N_{u_0}^N \times \left(\prod_{i \in \{1, \dots, N\}} e_i^{N-1} \right) \text{ inégalité dans}$$

laquelle on peut remplacer les \bar{u}_0 par u_0 .

Remarquons que $T(\delta t) \cdot u_0$ est du même type que u_0 , de plus d'après Y. BRENIER [5] [6] on a $TV(T(\delta t) \cdot u_0) \leq TV(u_0)$

(faux avec TV_i). On notera N_{u_m} le nombre de particules associées à $u_m = T(\delta t)^m \cdot u_0$.

On supposera :

Hypothèse 2 : $\exists c > 0 / \forall m \in \mathbb{N}, \prod_{i \in \{1, \dots, N\}} e_{i,m} \geq c / N_{u_m}$ ($e_{i,m}$ en notation évidente).

Remarque : A u_0 fixé on espère $TV(u_0)^N \ll +\infty$ et $c > 0$.

Alors on obtient :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \frac{2^{N \times (N-1)}}{(N-1)^N \delta \omega^N} TV(u_0)^N \geq c N_{u_m}$$

Ceci entraîne qu'il n'y ait pas d'éclatement du schéma numérique.

Il peut y avoir éclatement si $\forall c > 0, \exists m_c \in \mathbb{N} / \prod_{i \in \{1, \dots, N\}} e_{i,m_c} < c N_{u_{m_c}}$,

par exemple si $\text{Max}_{i \in \{1, \dots, N\}} \{ \lim_{m \rightarrow +\infty} e_{i,m} \} = 0$.

remarquons que, par définition, $\forall j \in \{1, \dots, N\} \forall m \in \mathbb{N}, e_{j,m} \neq 0$.

On supposera :

Hypothèse 3 : $\forall j \in \{1, \dots, N\} \forall m \in \mathbb{N}, e_{j,m} > \varepsilon > 0$.

Remarque : Hypothèse 3 \longleftarrow hypothèse 2. L'hypothèse 3 est vérifiée, par exemple, si l'on discrétise la méthode suivant

un maillage de pas ε en espace ou si l'on a systématiquement une troncature numérique en ε dans la méthode.

Alors on obtient $\forall m \in \mathbb{N}, \frac{2^{N-1}}{(N-1)\delta\omega} TV(u_0) \geq \varepsilon^{N-1} N_{u_m}$.

Ce résultat demeure si il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\forall j \in \{1, \dots, N\} - \{i\}, \forall m \in \mathbb{N}, e_{j,m} > \varepsilon > 0$ (en se référant à la minoration de $TV_i(u_0)$). Là encore il n'y a pas d'éclatement du schéma numérique.

Notation : On désignera par Θ une des constantes trouvées précédemment, telle que $\forall m \in \mathbb{N}, \Theta \geq N_{u_m}$.

Il faut réserver en mémoire (en notations évidentes) :

v_1	destiné à recevoir x_1	et $\Delta_{y_0}^{x_1}$, de dimension majorée par Θ .
\vdots		\vdots	\vdots
v_N	_____	x_N et $\Delta_{y_0}^{x_N}$	_____ Θ .
Δv_1	_____	les $\Delta_i^{x_1}$	_____ Θ .
\vdots		\vdots	\vdots
Δv_N	_____	les $\Delta_i^{x_N}$	_____ Θ .
x	_____	M et les M_i	_____ $(\Theta - 1)^N$.
x^2	_____	M bordé de zéros	_____ $(\Theta + 1)^N$.
$\square v_1$	_____	les $\square_i^{x_1}$	_____
\vdots		\vdots	\vdots
$\square v_N$	_____	les $\square_i^{x_N}$	_____ Θ .
\hat{x}	_____	les \hat{M}_i	_____ $(\Theta - 1)^N$.

Il faut donc réserver une place mémoire majorée par :
 $3N\theta + 2(\theta - 1)^N + (\theta + 1)^N$. Les majorations précédentes
sont très larges.





INTRODUCTION AU §-9

Etant confrontés dans la modélisation à des problèmes identiques, on présente ici ce qu'est un problème, à conditions limites variables en espace et en temps, associé au traitement d'une équation hyperbolique de type :

$$(a) \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i(u(x,t), x, t)}{\partial x_i} + g(u(x,t), x, t) = 0$$

On explicite une méthode numérique capable de traiter ces problèmes aux limites ainsi que de reproduire le principe du transport - écoulement dans le cas de l'équation (a), le tout restant euristique.

On examinera aussi l'utilisation d'un relèvement de la condition limite qui, en particulier, nous permettra d'illustrer et de comparer à la main la méthode précédente avec une condition limite nulle et le transport - écoulement avec une condition limite variable correspondante.

PARAGRAPHE 9

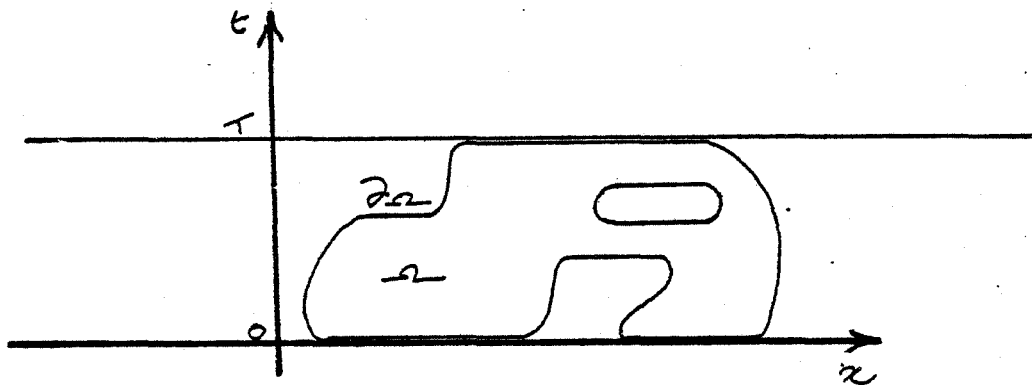
Méthode numérique générale et son adaptation à un problème aux limites générale

On considère la loi de conservation :

$$(1) \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} [f(u)] = 0$$

où $u = u(x,t)$ avec $(x,t) \in \Omega$ domaine borné de $\mathbb{R}^N \times [0,T]$, $T > 0$, de frontière $\partial \Omega$ de classe C^k , $k \in \{1, \dots, +\infty\}$, de dimension N , connexe, sans bord, telle qu'il existe $((x_1,0), (x_2,T)) \in (\partial \Omega)^2$, de flux $f = (f_1, \dots, f_N)$, $f \in \{C^1(\mathbb{R})\}^N$.

Graphiquement :



Définition 1 : Pour $(x,t) \in \partial \Omega$ fixé, on appelle $\eta(x,t) = (\nu(x,t), \zeta(x,t)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ la normale unitaire extérieure à $\partial \Omega$ en (x,t) . Remarquons que $\eta(x,t)$ est définie partout sur $\partial \Omega$.

Notation 1 : On pose, pour $t \in [0,T]$ fixé, $\hat{\partial \Omega}_t = \{(x,t) \in \partial \Omega / \nu(x,t) = (0, \dots, 0)\}$.

Hypothèse 1 : On suppose que $\bigcup_{t \in [0,T]} \hat{\partial \Omega}_t \equiv \text{noté } \hat{\partial \Omega} = \partial \Omega_1$ presque partout au sens de la mesure de Lebesgue sur $\partial \Omega$ [10] ou [40] où $\partial \Omega_1$ est un ensemble $\partial \Omega_1$ considéré dans §6.

On prend alors la condition "initiale" :

$$(2) \quad u \Big|_{\hat{\partial}\Omega} = u^* \Big|_{\hat{\partial}\Omega} \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle, } u^* \text{ assez régulière.}$$

Remarque 1 : Dans §6, $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$ jouant un rôle symétrique, on peut, en échangeant + et -, supposer que u^* vérifie les mêmes hypothèses que a-§6.

On prend de même la condition limite :

$$(3) \quad u \Big|_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega} = a \Big|_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega} \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle, où } a \text{ est une application } a \text{ considérée dans §6.}$$

Remarque 2 : $\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$ sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle. De plus Hypothèse 10-§6 $\int_{F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1)}$ est de mesure superficielle nulle $\int_{(\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1) \setminus \overbrace{(\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1)}^{\partial\Omega} \cap F_r^{\partial\Omega}(\partial\Omega_1)}$ est de mesure superficielle nulle $\int_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega} = \int_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_1}$ sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle.

Ceci justifie l'emploi de $a \Big|_{\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega}$ de même que celui de $u^* \Big|_{\hat{\partial}\Omega}$

-dans-le-cadre-de-la-remarque 1.

Alors en utilisant la formulation de Cl. BARDOS, A.Y. LEROUX J.C. NEDELEC [1], on prend :

$$(4) \quad \text{Min}_{k \in I(u^+(x,t), a(x,t))} \{ \text{sg}(u^+(x,t) - a(x,t)) (f(u^+(x,t)) - f(k)) \cdot \nu(x,t) \} = 0$$

sur $\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega$ sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle, où $I(\alpha, \beta)$ intervalle fermé de bornes α et β et où, en supposant $x_\Omega \in \overline{BV}(\mathbb{R}^{N+1})$ et $u \in BV(\mathbb{R}^{N+1})$, $u^+(x,t)$ est la fonction définie au §6.

Alors, en utilisant le §6, on peut prolonger, suivant le $k \in \{1, \dots, +\infty\}$ choisi, a en une application A appartenant à $C^k(\bar{\Omega})$. Posons $B = u - A \circ u$ u vérifie (1) + (2) + (3). On obtient immédiatement :

$$(5) \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{div} f(B+A) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \text{ où } f(\cdot+A) = (f_1(\cdot+A), \dots, f_N(\cdot+A))$$

sera notée \tilde{f} .

La formulation (4) se transforme en :

$$(6) \operatorname{Min} \{sg(B^+(x,t)) ([\tilde{f}(B^+) - \tilde{f}(k)](x,t)) \cdot \nu(x,t)\} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \hat{\partial}\Omega$$

$$k \in I(B^+(x,t), 0).$$

sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle.

Remarque 3 : Considérons l'équation $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u(x,t), x, t)$

+ $g(u(x,t), x, t) = 0$ dans Ω avec u suffisamment régulière.

$$\text{On a : } \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u(x,t), x, t) = \frac{\partial f_i}{\partial u}(u(x,t), x, t) \times \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} +$$

$\frac{\partial f_i}{\partial(x)_i}(u(x,t), x, t), i \in \{1, \dots, N\}$. L'équation se transforme en :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial u}(u(x,t), x, t) \times \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} =$$

$$- \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial(x)_i}(u(x,t), x, t) - g(u(x,t), x, t). \text{ Si l'on suppose :}$$

$$(7) \frac{d\xi_i(t)}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \xi(t), t), i \in \{1, \dots, N\}, \vartheta(t) = u(\xi(t), t) \text{ avec}$$

$\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_N(t))$, alors :

$$(8) \frac{d\vartheta(t)}{dt} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial(x)_i}(\vartheta(t), \xi(t), t) - g(\vartheta(t), \xi(t), t).$$

Pour un problème de Cauchy de type (2)-§8, on peut alors envisager de pratiquer une méthode que l'on appellera de nivellement - transport - écoulement.

En notations évidentes on choisit :

$$\xi_{x^0}(0) = x^0 \text{ et l'on a } \vartheta_{x^0}(0) = u_0(x^0).$$

Supposons connu, pour

$$\delta t > 0 \text{ fixé, } \vartheta_{x^0}(\delta t), \forall x^0 \in \mathbb{R}^N.$$

On construit alors un nivellement de u_0 , i.e une approximation ϑ_0 du type II-(0)-§8 pour l'application :

$$\mathbb{R}^N \xrightarrow[n=0]{\psi} \mathbb{R} \dots$$

$$x^0 \longmapsto \vartheta_{x^0}(\delta t)$$

ϑ_0 est constituée de pavés repérés par 2^N particules de discontinuité. Remarquons que l'opération de nivellement met en relation deux points $(x^1, u_0(x^1))$ et $(x^2, u_0(x^2))$ tels que x^1 voisin de x^2 et qui sont transformés par (7) + (8) au temps δt en

$$(\xi_{x^1}(\delta t), \vartheta_{x^1}(\delta t) = \vartheta_{x^2}(\delta t) \text{ et } (\xi_{x^2}(\delta t), \vartheta_{x^2}(\delta t) = \vartheta_{x^1}(\delta t)).$$

On peut alors, par exemple, pour chaque face d'un pavé fixé déterminé par $(\omega, d_i) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $i \in \{1, \dots, 2^N\}$, considérer son milieu (ω, m) .

Supposons alors que (7) + (8) avec $\xi_m(0) = m$, $\vartheta_m(\delta t) = \omega$ permette de déterminer avec unicité $\xi_m(\delta t)$. On transporte alors (ω, m) en $(\omega, \xi_m(\delta t))$. On procède ainsi pour chaque milieu d'une face, ce qui permet de reconstituer un pavé repéré par 2^N particules de discontinuité. On peut alors par comptage de l'entassement des pavés sur le maillage de \mathbb{R}^N qu'ils engendrent reconstituer l'écroulement u_1 de la fonction transportée.

On réitère le procédé en remplaçant u_0 par u_1 , etc... .

Remarquons que contrairement à u_n , $n \in \mathbb{N}^*$, u_0, ψ_0, ψ_n ne sont pas e.g. du type II-(0)-§8.

A partir de cette méthode on pourra envisager, pour une équation du type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}[f(u,x,t)] + g(u,x,t) = 0,$$

un traitement numérique pour le problème aux limites (2) + (3).

Remarque 4 : On peut, par exemple, prendre pour ψ_n une fonction spline d'ajustement d'ordre q basée sur n points choisis :

Ecrivons (7)+(8) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_{m,i}(t)}{dt} = b_i(\vartheta_m(t), \xi_m(t), t) \\ \frac{d\vartheta_m(t)}{dt} = b_{N+1}(\vartheta_m(t), \xi_m(t), t) \end{array} \right.$$

avec $i \in \{1, \dots, N\}$, $\xi_m(0) = m$, $\vartheta_m(\delta t) = \omega$.

Dans la méthode de nivellement - transport - écroulement on veut $\xi_m(\delta t)$.

On pose $h = \frac{\delta t}{k}$, $t_i = ih$ pour $i \in \{0, \dots, k\}$.

Appliquons la méthode d'Euler (on peut utiliser des méthodes classiques implicites ou explicites à un ou plusieurs pas); on obtient :

$$(9) \quad X \equiv \left\{ \begin{array}{l} \xi_{m,1}^1 = \xi_{m,1}^0 + h b_1(\vartheta_m^0, \xi_m^0, 0) \\ \vdots \\ \xi_{m,1}^k = \xi_{m,1}^{k-1} + h b_1(\vartheta_m^{k-1}, \xi_m^{k-1}, (k-1)h) \\ \vdots \\ \xi_{m,N}^1 = \xi_{m,N}^0 + h b_N(\vartheta_m^0, \xi_m^0, 0) \\ \vdots \\ \xi_{m,N}^k = \xi_{m,N}^{k-1} + h b_N(\vartheta_m^{k-1}, \xi_m^{k-1}, (k-1)h) \\ \vdots \\ \vartheta_m^0 = \vartheta_m^1 + h b_{N-1}(\vartheta_m^1, \xi_m^1, h) \\ \vdots \\ \vartheta_m^{k-1} = \vartheta_m^k + h b_{N+1}(\vartheta_m^k, \xi_m^k, \delta t) \end{array} \right.$$

avec $\vartheta_m^k = \omega$, $\xi_{m,i}^0 = m_i$ pour $i \in \{0, \dots, k\}$, où l'on utilisera les approximations :

Pour $j \in \{1, \dots, N\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$:

$$b_j(\vartheta_m^i, \xi_m^i, ih) \approx \frac{f_j(\vartheta_m^i + \varepsilon, \xi_m^i, ih) - f_j(\vartheta_m^i - \varepsilon, \xi_m^i, ih)}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0;$$

Pour $i \in \{1, \dots, k\}$ et e_j j-ième vecteur canonique à N composants :

$$b_{N+1}(\vartheta_m^i, \xi_m^i, ih) \approx - \frac{\sum_{j=1}^{N_j} f_j(\vartheta_m^i, \xi_m^i + \varepsilon e_j, ih) - f_j(\vartheta_m^i, \xi_m^i - \varepsilon e_j, ih)}{2\varepsilon}$$

$$- g(\vartheta_m^i, \xi_m^i, ih), \quad \varepsilon > 0.$$

(9) peut s'écrire sous la forme $X = \Phi(X)$. On peut alors appliquer formellement une méthode de point fixe pour trouver X. On peut aussi utiliser formellement une méthode de Newton pour trouver X. On construit alors la matrice $Y(X)$..

		N+1 $\xi_{0,i}$			
		k Termes		k Termes	
N+1 $\xi_{0,i}$	k Termes	$-1, 0, \dots, 0$	$0, \dots, 0$	$0, \dots, 0$	$0, \dots, 0$
		$h_2 b_{2,1}(x), -1, 0, \dots, 0$	\dots	$h_2 b_{2,1}(x), 0, \dots, 0$	$h_2 b_{2,1}(x), 0, \dots, 0$
		\vdots		\vdots	\vdots
		$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$		$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$	$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$
N+1 $\xi_{0,i}$	k Termes	$0, \dots, 0$	$-1, 0, \dots, 0$	$0, \dots, 0$	$0, \dots, 0$
		$h_2 b_{2,N}(x), 0, \dots, 0$	\dots	$h_2 b_{2,N}(x), -1, 0, \dots, 0$	$h_2 b_{2,N}(x), 0, \dots, 0$
		\vdots		\vdots	\vdots
		$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$		$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$	$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$
k Termes	k Termes	$h_2 b_{2,1}(x), 0, \dots, 0$	$h_2 b_{2,1}(x), 0, \dots, 0$	$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$	$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$
		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
		$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$	\dots	$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$	$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$
		$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$		$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$	$0, \dots, 0, h_2 b_{2,N}(x), \dots$

avec pour $i \in \{0, \dots, k\}$, $x_i = (\vartheta_m^i, \xi_m^i, ih)$,

où l'on utilisera les approximations :

Pour $\lambda \in \{1, \dots, N+1\}$, $j \in \{1, \dots, N\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$:

$$\partial_\lambda b_j(\vartheta_m^i, \xi_m^i, ih) \approx (f_j((\vartheta_m^i + \varepsilon, \xi_m^i, ih) + \varepsilon e'_\lambda) - f_j((\vartheta_m^i - \varepsilon, \xi_m^i, ih) + \varepsilon e'_\lambda) - f_j((\vartheta_m^i + \varepsilon, \xi_m^i, ih) - \varepsilon e'_\lambda) + f_j((\vartheta_m^i - \varepsilon, \xi_m^i, ih) - \varepsilon e'_\lambda)) / (2\varepsilon)^2,$$

$\varepsilon > 0$, où e'_λ est le λ -ième vecteur canonique à $N+2$ composants ; pour $\lambda \in \{1, \dots, N+1\}$ et $i \in \{1, \dots, k\}$:

$$\partial_\lambda b_{N+1}(\vartheta_m^i, \xi_m^i, ih) \approx -(\sum_{j=1}^N (f_j((\vartheta_m^i, \xi_m^i + \varepsilon e_j, ih) + \varepsilon e'_\lambda) - f_j((\vartheta_m^i, \xi_m^i - \varepsilon e_j, ih) + \varepsilon e'_\lambda) - f_j((\vartheta_m^i, \xi_m^i + \varepsilon e_j, ih) - \varepsilon e'_\lambda) + f_j((\vartheta_m^i, \xi_m^i - \varepsilon e_j, ih) - \varepsilon e'_\lambda))) / (2\varepsilon)^2 - (g((\vartheta_m^i, \xi_m^i, ih) + \varepsilon e'_\lambda) - g((\vartheta_m^i, \xi_m^i, ih) - \varepsilon e'_\lambda)) / 2\varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Alors, en notations évidentes, la méthode de Newton s'écrit :

$$X^{n+1} = X^n - \begin{bmatrix} Y(X^n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_{m,1}^0 + h b_1(\vartheta_m^0, \xi_m^0, 0) - \xi_{m,1}^1 \\ \vartheta_m^1 + h b_{N+1}(\vartheta_m^1, \xi_m^1, h) - \vartheta_m^0 \end{bmatrix}$$

pour la n -ième étape

et l'on obtient ainsi ξ_m^k demandé.

Pour construire ψ_n , comme indiqué précédemment, on se sert de k points x^i . On a ici $\vartheta_{x^i}^0 = \vartheta_{x^i}(0) = u_0(x^i)$, $\xi_{x^i}^0 = \xi_{x^i}(0) = x^i$ et l'on veut $\vartheta_{x^i}^k = \vartheta_{x^i}(\delta t)$. On peut alors utiliser la méthode précédente en réécrivant les k dernières équations de (9) dans le bon sens.

Les réitérations se font de la même façon en considérant les problèmes :

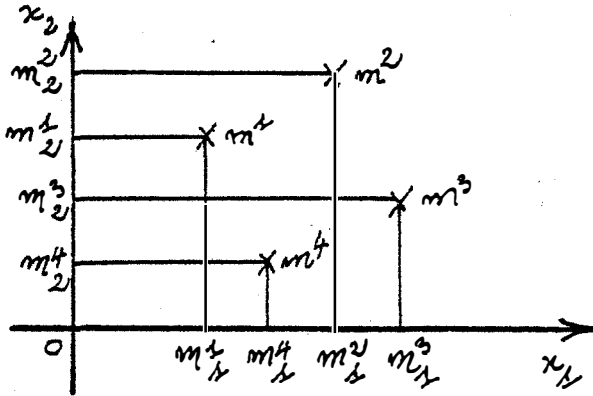
et

$$\xi_{x^i}(j\delta t) = x^i, \vartheta_{x^i}(j\delta t) = u_0(x^i) \text{ où l'on veut } \vartheta_{x^i}((j+1)\delta t)$$

$$\xi_m(j\delta t) = m, \vartheta_m(j\delta t) = \omega \quad \text{-----} \quad \xi_m((j+1)\delta t).$$

Donnons une méthode pour reconstituer un pavé à partir des milieux des faces.

On choisira, sans porte de généralité, $N = 2$ et l'on notera par m^1, m^2, m^3, m^4 les 4 points milieux.



On pratique alors l'algorithme :

a) fixer un ordre de sélection des axes de coordonnées (la représentation en dépendra) ; on choisira ici (1,2) à titre d'exemple ;

b) faire $U = \emptyset$;

c) prendre pour ℓ le premier numéro des axes de coordonnées sélectionnés ;

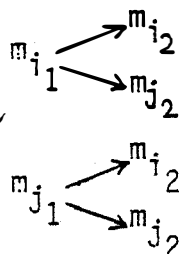
d) on détermine pour $i_\ell \in \{1, \dots, 4\}$ $U, m_{i_\ell}^\ell = \text{Min}_{j_\ell \in \{1, \dots, 4\} \setminus U} m_{j_\ell}^\ell$

(en cas d'égalité on fait un choix au hasard) ; on constitue un couple (m_{i_ℓ}, m_{j_ℓ}) (cela reviendra à considérer l'hyperplan, orthogonal à l'axe ℓ , auquel appartient m_{i_ℓ}) ;

e) faire $U \leftarrow U \cup \{m_{i_\ell}, m_{j_\ell}\}$;

f) prendre pour ℓ le numéro suivant des axes de coordonnées sélectionnés ; s'ils sont épuisés aller en g) ; sinon aller en d) .

g) on construit l'arbre des sommets demandés, soit ici :



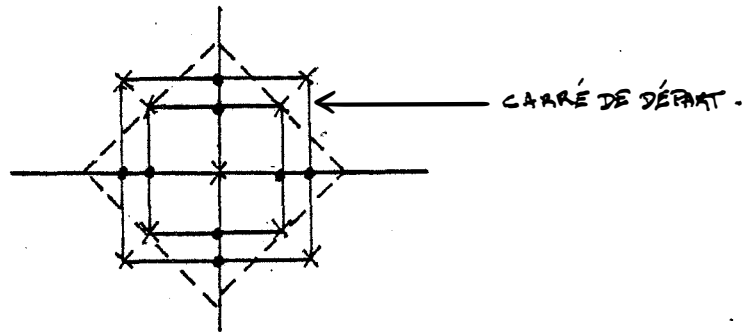
et on élimine le cas où 2 sommets se confondent.

Cet algorithme est immédiatement adaptable en dimension N quelconque finie.

Cette méthode est exacte pour tout déplacement du pavé résultant, par abus de langage, de la composition de translations, dilata-tions, rotations d'angle $k \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

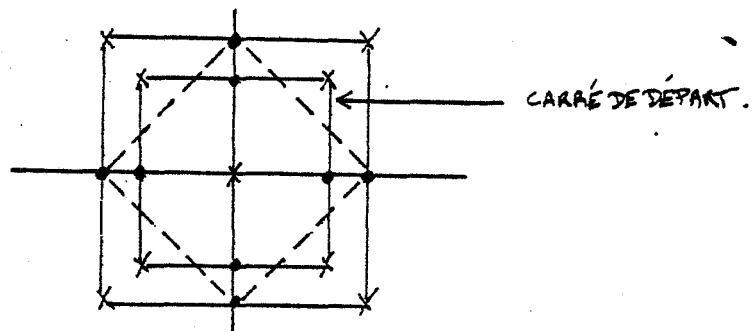
Notons cependant que pour un carré, on obtient, par rotations successives de $\pm \frac{\pi}{4}$, une décroissance stricte vers zéro de la surface des carrés approximants.

Graphiquement :

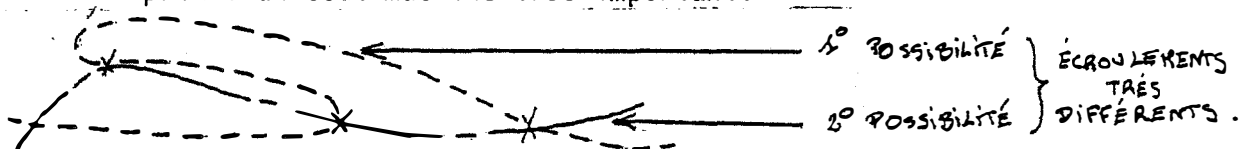


Si l'on veut appliquer aux sommets (ce qui est très couteux) la méthode que l'on emploie pour les milieux, on a alors, pour un carré, par rotations successives de $\pm \frac{\pi}{4}$, une croissance stricte vers $+\infty$ de la surface des carrés approximants.

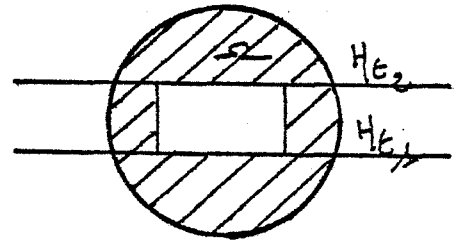
Graphiquement :



On peut chercher à éviter les cas précédents en modifiant δt . On peut aussi faire mieux par des découpages de \mathbb{R}^N , cependant au prix d'un coût machine très important.



Remarque 5 : La reconstitution nécessaire de la transportée de la frontière du sous-graphe d'une application fixée à partir de la transportée de particules (de discontinuité ou non) repérant cette frontière est un problème très difficile s'il y a peu de particules. La méthode de nivellement - transport - écroulement règle, en particulier, cette question.



On considère l'application \mathfrak{S} de \mathbb{R}^{N+1} dans \mathbb{R} qui égale sur Ω une prolongée régulière de u^* notée u^* et qui égale λ sur $\mathbb{R}^{N+1} \setminus \Omega$ (cf. construction de §2).

Soit $t \in [0, T]$ fixé.

On pose alors $\lambda(x, t) = \lim_{\substack{\ell \rightarrow t \\ \ell > t}} \mathfrak{S}(x, \ell)$, $x \in \mathbb{R}^N$, ce qui est

indispensable pour tenir compte, en particulier, des trous dans Ω .

Soit $H_t = \{(x, t), x \in \mathbb{R}^N\}$. On définit l'opérateur γ_t de l'ensemble des applications de H_t dans \mathbb{R} dans lui-même par $\gamma_t(u) = \vartheta$ où $\vartheta = u$ sur $H_t \cap \Omega$ et $\vartheta = \lambda$ sur $H_t \setminus \Omega$.

Si l'on appelle $T_s(t)$ l'opérateur de nivellement - transport - écroulement de condition initiale prise au temps s et de résultat final donné au temps $s+t$ (qui se réduit à un opérateur de transport - écroulement dans le cas $\frac{d\vartheta(t)}{dt} = 0$), alors, en notations évidentes, en considérant pour $P \in \{0, \dots, n-1\}$

$\bigcirc_{i=0}^P (T_{\frac{it}{n}}(\frac{t}{n}) \circ \gamma_{\frac{it}{n}}) . 1 = \bar{u}(\cdot, \frac{(P+1)t}{n})$, on obtient

$\gamma_t \circ \left[\bigcirc_{i=0}^{n-1} (T_{\frac{it}{n}}(\frac{t}{n}) \circ \gamma_{\frac{it}{n}}) \right] . 1$ pour solution approchée de $u(\cdot, t)$.

Hypothèse 2 : Admettons que l'on veuille une solution approchée de $u(.,t^*)$, $t^* \in]0, T[$. On suppose alors que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \{t \in [0, t^*] / \lambda_N(H_t \cap \partial\Omega) > 0\} \subset \left\{ \frac{it^*}{n_0}, i \in \{0, \dots, n_0\} \right\}.$$

Il est alors immédiat que l'on puisse remplacer n_0 par un entier $n \geq n_0$ aussi grand que l'on veut.

L'hypothèse 2 exprime que dans la méthode de nivellement - transport - écroulement on tient compte de toutes les conditions "initiales" appartenant à $[0, t^*]$.

Remarque 6 : Supposons que l'on ait $\nu \approx (0, \dots, 0)$ sur une partie de $\partial\Omega \setminus \hat{\partial}\Omega$ de mesure superficielle non nulle contenue dans :

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} / t < t^*, t^* \in]0, T[\}.$$

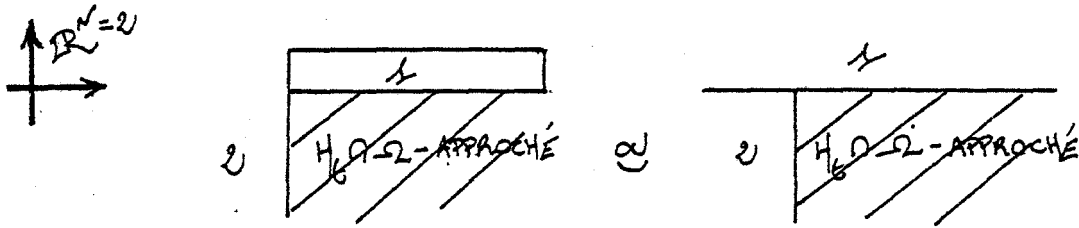
Alors, si l'on veut obtenir une solution approchée de $u(.,t^*)$, il faut choisir un n tel que pour $\varepsilon \ll 1$ fixé on ait $\forall m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant l'hypothèse 2,

$$m > n, t \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{m} \leq \varepsilon, \text{ où l'on utilise les notations :}$$

J_n sera l'ensemble inclus dans $\{0, \dots, n\}$ vérifiant $\{t \in [0, t^*] / \lambda_N(H_t \cap \partial\Omega) > 0\} = \left\{ \frac{it^*}{n} / i \in J_n \right\}$ et μ_n sera la quantité

$$\text{Max}_{i \in \{0, \dots, n\} \setminus J_n} \text{Sup}_{(x, t) \in H \frac{it^*}{n} \cap \partial\Omega} \frac{|z(x, t)|}{|\nu(x, t)|_{\mathbb{R}^N}}.$$

Si l'on applique la méthode de transport - écroulement sur u avec A dans la condition limite, il faut introduire une représentation de type II-(0)-§8 de A qui, en particulier pour A admettant une variation totale grande sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, nécessite un grand nombre de particules de discontinuité (e.g. pour $N > 1$ il est exclu de trouver un A "simple"). De plus A n'est pas unique, et a priori, la solution approchée de (1)+(2)+(3) en dépend ; on peut avoir graphiquement :



qui après transport peuvent influencer différemment la solution.

On remarque que $B(\xi_{x^0}(t), t) = u(x^0, 0) - A(\xi_{x^0}(t), t) = u(x^0, 0) - A(x^0, 0) + A(x^0, 0) - A(\xi_{x^0}(t), t) = B(x^0, 0) + (A(x^0, 0) - A(\xi_{x^0}(t), t))$.

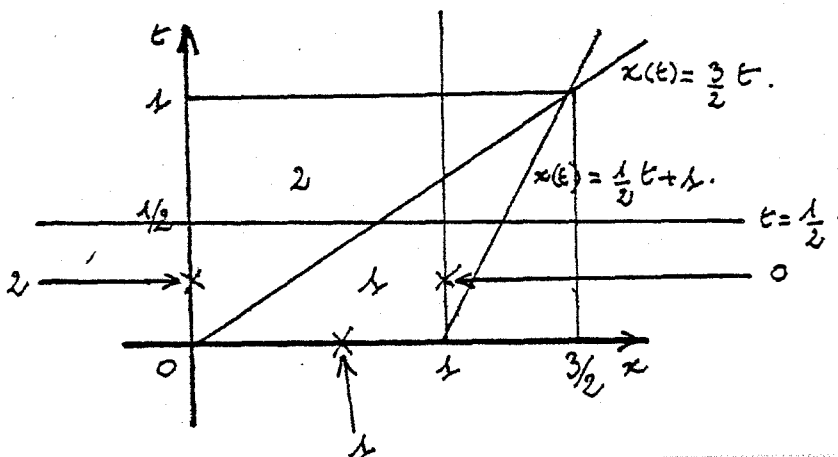
Maintenant posons $F(b, x, t) = \tilde{[f(b)]}(x, t)$ et $g(b, x, t) = \frac{\partial A(x, t)}{\partial t}$.

On peut alors appliquer la méthode de nivellement - transport - écroulement sur B (supposé réclamé à chaque étape) avec 0 pour condition limite.

Bien que, contrairement au cas précédent, la représentation de la condition limite soit simple, il faut ici évaluer un grand nombre de quantités $A(x^0, 0) - A(\xi_{x^0}(t), t)$.

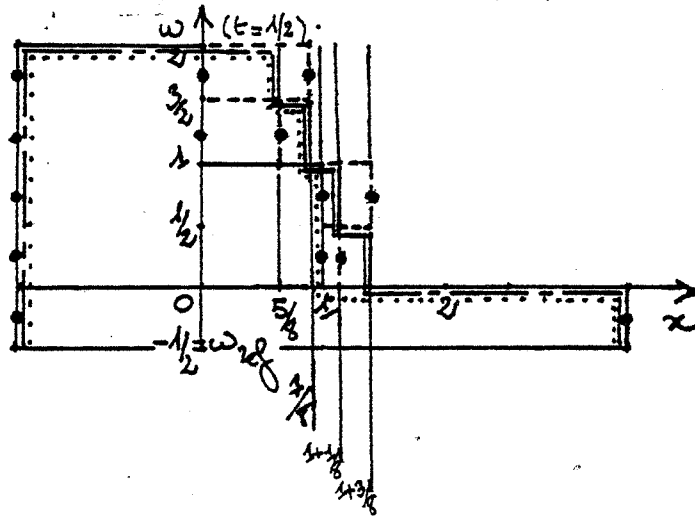
A titre d'illustration appliquons les méthodes de $\left\{ \begin{array}{l} \text{nivellement-} \\ \text{et} \end{array} \right.$ transport - écroulement précédentes dans le cas de l'équation de Burgers $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$ avec $u_0(x) = 1$ pour $0 \leq x < 1$; $u(0, t) = 2$, $u(1, t) = 0$, pour $t > 0$.

Graphiquement la solution entropique du problème limite est :



Par la méthode de transport - écroulement ($\delta\omega = \frac{1}{2}$) on a :

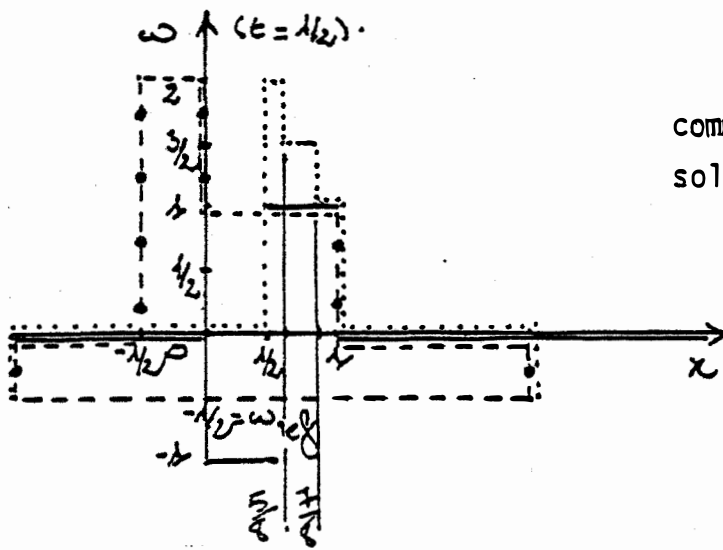
$$\gamma_1 \circ \left[T\left(\frac{1}{2}\right) \circ \gamma_0 \right] \cdot 1 \text{ qui vaut graphiquement :}$$



- Avec :
- $[\gamma_0] \cdot 1$
 - $[\text{transportée } (\frac{1}{2}) \circ \gamma_0] \cdot 1$
 - - — $[T(\frac{1}{2}) \circ \gamma_0] \cdot 1$
 - $\gamma_1 \circ [T(\frac{1}{2}) \circ \gamma_0] \cdot 1$

On supposera A régulière approchée par $\bar{A}(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{pour } x < 1/2 \\ 0 & \text{pour } x > 1/2. \end{cases}$

Alors pour la méthode de nivellement - transport - écroulement ($\delta\omega = 1/2$) on a $\gamma_1 \circ [T_0(\frac{1}{2}) \circ \gamma_0] \cdot 1$ qui vaut graphiquement :



comme attendu on a la même solution que précédemment.

Avec le tableau :

x	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$	1	$+∞$
$u_0(x)$	2	2	1	1	0	
$\xi_m(1/2) = u_0(x)/2 + x$	$1+x$	$1+x$	$1/2+x$	$1/2+x$	x	
$f_0(\xi_m(1/2), 1/2)$	2	0	0	0	0	
$\gamma(\xi_m(1/2), 1/2)$	0	2	1	1	0	

Pour un m fixé tel que $B(\xi_m(1/2), \frac{1}{2}) = \omega$, on trouve
 $\xi_m(\frac{1}{2}) = u_0(m)/2 + m$.

Avec : ——— $[\gamma_0] \cdot 1$
 ----- ψ_0
 $\frac{\gamma_1}{2} \circ [T_0(\frac{1}{2}) \circ \gamma_0] \cdot 1$.



I N T R O D U C T I O N A U §-10

On va fournir ici cinq programmes type capables de traiter certains problèmes qui se posent aux géologues. Cette partie constitue une application directe des paragraphes précédents.

Néanmoins il faut préciser que ces programmes ayant évolué à travers trois systèmes différents (avec toutes les variations autour des normes existantes), il leur est impossible d'être optimaux.



PARAGRAPHE 10Programmation du problème

Les programmes suivants utilisent pour base la méthode du §-8.

Les résultats sont consignés par sortie graphique couleur sur écran télé, sur écran Tektronix et sur papier spécial H.P. .

De plus un détail des opérations est conservé en sortie listing.

Calcul traite :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} = 0,$$

$$x \in \mathbb{R}, t \in]0, T[, T > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R},$$

Les fonctions précédentes étant suffisamment régulières (du point de vue "informatique").

Calculz traite :

$$\frac{\partial (K_L f(C_S(x,t)) + K_S C_S(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial K_L V_L(t) f(C_S(x,t))}{\partial x} = 0,$$

$$\text{avec } f(C_S) = \frac{1}{MK} \frac{\xi C_S}{1 - \xi C_S} \frac{\omega}{e^{kT}} (1 - 2\xi C_S),$$

$$x \in \mathbb{R}, t \in]0, T[, T > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R},$$

les fonctions précédentes étant suffisamment régulières (du point de vue "informatique").

CalcuZ peut aussi traiter la forme
$$\frac{\partial C_S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha(C_S(x,t),t)}{\partial x} = 0$$

obtenue comme au §-7 en considérant C_S suffisamment régulière et en effectuant les dérivations partielles.

CalcuZ peut aussi comparer par superposition les solutions obtenues par l'une et l'autre méthode.

CalcuX traite :

$$\frac{\partial (K_L f(C_S(x,t)) + K_S C_S(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial K_L V_L(t) f(C_S(x,t))}{\partial x} = 0,$$

$$\text{avec } f(C_S) = \frac{1}{MK} \times \frac{\xi C_S}{1 - \xi C_S} \times \frac{\omega}{e^{KT}} (1 - 2\xi C_S),$$

$$x \in \mathbb{R}, t \in]0, T[, T > 0,$$

avec les conditions limites présentées plus bas,

les fonctions précédentes étant suffisamment régulières (du point de vue "informatique").

De plus CalcuX a les mêmes autres possibilités que CalcuZ.

Calcul traite :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i(u(x,t))}{\partial x^i} = 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^2, t \in]0, T[, T > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^2,$$

les fonctions précédentes étant suffisamment régulières (du point de vue "informatique").

Calcula traite :

$$\frac{\partial (K_L f(C_S(x,t)) + K_S C_S(x,t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial K_L V_i^L(t) f(C_S(x,t))}{\partial x^i} = 0,$$

$$\text{avec } f(C_S) = \frac{1}{MK} \times \frac{\xi C_S}{1 - \xi C_S} \times e^{\frac{u}{kT} (1 - 2\xi C_S)}$$

$$x \in \mathbb{R}^2, t \in]0, T[, T > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^2,$$

les fonctions précédentes étant suffisamment régulières (du point de vue "informatique").

Calcula peut aussi traiter la forme
$$\frac{\partial C_S(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \alpha_i(C_S(x,t), t)}{\partial x^i} = 0,$$

obtenue comme au §-7 en considérant C_S suffisamment régulière et en effectuant les dérivations partielles.

Calcua peut aussi comparer par superposition les solutions obtenues par l'une et l'autre méthode.

Remarque 1: Quelque soit $N \in \mathbb{N}^*$ sous le signe $\frac{\partial}{\partial x^i}$ on peut aussi rajouter, de manière immédiate, dans les programmes, le terme $K_S V_i^S(t) C_S(x,t)$ de déformation du solide.

Remarque 2: On a vu §-9 que
$$\frac{\gamma_{(p+1)t}}{n} \circ \sum_{i=0}^p \left(\frac{\tau_{it}}{n} \text{ ou } \frac{\gamma_{it}}{n} \right) \cdot 1$$

représente une solution approchée de $u(\cdot, \frac{(p+1)t}{n})$.

Lorsqu'on cherche une solution approchée de $u(\cdot, t)$, on évalue donc les $u(\cdot, \frac{(p+1)t}{n})$ -intermédiaires.

On observe cependant que la précision de la solution approchée de $u(\cdot, t)$ augmente lorsque p (i.e. n) augmente et qu'elle diminue lorsque, pour p et n fixés, t croît. Le rapport entre ces deux comportements reste à définir. C'est pourquoi dans les programmes, par "sécurité", on prendra $p+1 = q^2$ et $n = q$ afin d'approximer chaque $u(\cdot, qt)$, $q \in \mathbb{N}^*$ (on n'utilisera pas les évaluations des $u(\cdot, \frac{(p+1)t}{n})$ -intermédiaires).

Remarque 3: Il se peut qu'intervienne $f_i(u, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N, t)$ à la place de $f_i(u)$, ce qui se produit dans notre cas pour $V_L(x,t) =$

$$V_L(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N, t) = (V_L^L(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N, t), \dots, -208-$$

$$V_N^L(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N, t)) \quad (\text{c.f. } \S-2).$$

$$(8)- \S-9 \text{ devient alors : } \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

et (7)- §-9 peut être utilisé pour appliquer, par exemple, une méthode d'

Euler (en notations évidentes) :

$$\xi_i(p\delta t) = \xi_i(p\delta t) + \frac{\partial f_i}{\partial v} (v(p\delta t), \xi_1(p\delta t), \dots, \xi_{i-1}(p\delta t), \xi_{i+1}(p\delta t), \dots, \xi_N(p\delta t), p\delta t) \times \delta t.$$

Il est alors quasi immédiat d'adapter par un indichage, la méthode du §-9 à

chaque opérateur $T_{it}(\frac{t}{n})$ o $\gamma_{it}^{\frac{t}{n}}$: Lorsque $V_L(x,t) = V_L(t)$ c'est encore plus simple puisqu'il suffit d'adapter, par un indichage, la méthode du §-8.

On s'en tiendra ici à des écritures formelles, la forme exacte des équations à traiter ayant été présentée §-2 et §-7.

On dispose de la loi de conservation :

$$(1) \frac{\partial g(u)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u) = 0$$

avec $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^N \times [0, T[$.

Posons $v = g(u)$.

On obtient formellement

$$(2) \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_i(v) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{f_i'(u)}{g'(u)} \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$$

avec $\psi_i = f_i \circ g^{-1}$, $v(x,0) = g(u_0(x))$, $x \in \mathbb{R}^N \times [0, T[$.

Jusqu'à présent les gens programmaient sur l'équation (1) (pour $N = 1$), c'est

$$\text{à dire sur } \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i(u)}{\partial x_i} = 0$$

avec $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^N \times [0, T[$.

où h_i était une primitive de $\frac{f_i'(u)}{g'(u)}$ (ou une approchée explicite de cette pri-

mitive).

Pour la méthode du §-8, cela se traduit par un transport de $\underline{u_0(x)}$ à vitesse indiquée par $\frac{f'_i(u)}{g'(u)}$.

La vraie équation sur laquelle il faut programmer (c.f. §-2 et §-7) est (2).

Pour la méthode du §-8 (qui sera celle utilisée ici), cela se traduit par un transport de $\underline{v_0(x)}$ à vitesse indiquée par $\frac{f'_i(u)}{g'(u)}$.

N'ayant e.g. pas explicitement ψ_j , on voit qu'il faut adapter la méthode numérique employée. Pour le transport d'une particule de discontinuité de cote Γ_k (c.f. §-8), on devra alors appliquer la vitesse de transport

$$\frac{f'_i(g^{-1}(\Gamma_k))}{g'(g^{-1}(\Gamma_k))}$$

Enfin la solution approchée en \bar{t} réclamée sera $\bar{u}(x, \bar{t}) = g^{-1}(\bar{v}(x, \bar{t}))$ où $\bar{v}(x, \bar{t})$ est la solution approchée de (2) obtenue par la méthode précédente.

Pour déterminer $\Gamma^k = g^{-1}(\Gamma_k)$ on appliquera, par exemple, une méthode de Newton (pour trouver $\Gamma^k/g(\Gamma^k) - \Gamma_k = 0$)

i.e. $\Gamma_{n+1}^k = \Gamma_n^k - \frac{g(\Gamma_n^k) - \Gamma_k}{g'(\Gamma_n^k)}$ où l'on posera $\Gamma_0^k = \Gamma_k$ (car grossièrement g

non trop éloigné de l'identité). Pour calculer $\bar{u}(x, \bar{t})$ on procédera de même avec la valeur de $\bar{v}(x, \bar{t})$ en chacun de ses plateaux dont les coordonnées spatiales seront conservées.

On appliquera encore (avec des sécurités) cette méthode pour g quelconque de classe C^1 .

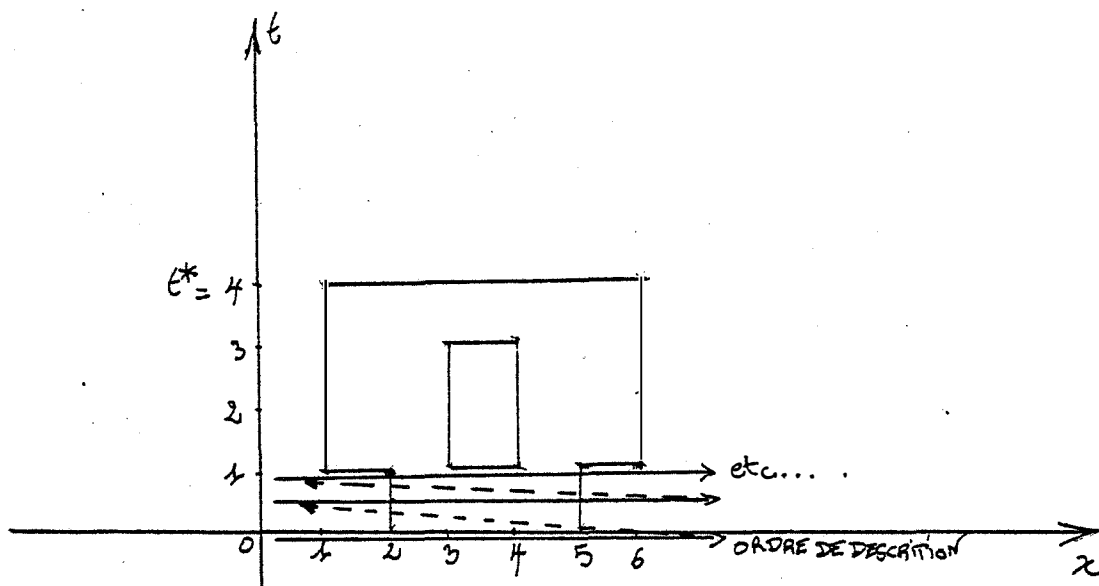
On suppose l'hypothèse 2 §-9 réalisée et $N = 1$.

Cela dit Ω (c.f. §-9) sera supposé approché par une décomposition en segments de droite non dégénérés parallèles à l'axe des t ou à celui des x .

Toujours en notations du §-9, les composantes connexes de $H_t \cap \Omega$ où $t \in [0, t^*]$ seront repérées par les coordonnées de leurs extrémités; pour deux t consécutifs, $t_1 < t_2$, tels que $\lambda_N(H_t \cap \Omega) > 0$, on notera que $\forall \bar{t} \in]t_1, t_2[$, les $H_{\bar{t}} \cap \Omega$ (assimilés à des sous-ensembles de \mathbb{R}) sont identiques.

Illustration directe de la méthode suivie :

pour représenter par exemple :



On rentrera en machine, sur un même vecteur, les nombres :

(XMOIN,2)	(0,0)	(1)
(2,5)	(0,0)	(-1)
(5,XPLU)	(0,0)	(1)
(XMOIN,2)	(0,1)	(1)

(2,5)	(0,1)	(0)	*
(5,XPLU)	(0,1)	(1)	
(XMOIN,1)	(1,1)	(1)	
(1,2)	(1,1)	(-1)	
(2,3)	(1,1)	(0)	*
(3,4)	(1,1)	(1)	
(4,5)	(1,1)	(0)	*
(5,6)	(1,1)	(-1)	
(6,XPLU)	(1,1)	(1)	
(XMOIN,1)	(1,2)	(1)	
(1,3)	(1,2)	(0)	*
(3,4)	(1,2)	(1)	
(4,6)	(1,2)	(0)	*
(6,XPLU)	(1,2)	(1)	
(XMOIN,1)	(3,3)	(1)	
(1,3)	(3,3)	(0)	*
(3,4)	(3,3)	(-1)	
(4,6)	(3,3)	(0)	*
(6,XPLU)	(3,3)	(1)	
(XMOIN,1)	(3,4)	(1)	
(1,6)	(3,4)	(0)	*

(6, XPLU) (3,4) (1)

(XMOIN, 1) (4,4) (1)

(1,6) (4,4) (0) *

(6, XPLU) (4,1) (1)

Les composants du vecteur ne sont pas rentrés en machine, ils figurent uniquement à titre indicatif. XMOIN et XPLU étant des infinies machine choisis et où dans

(x_1, x_2) (t_1, t_2) (i)

(t_1, t_2) représente les extrémités d'un intervalle, $]t_1, t_2[$ pour

$t_1 < t_2$ et $[t_1, t_1]$ pour $t_1 = t_2$, de la partition de $[0, t^*]$ fournie naturel-

lement par les t tels que $\lambda(H_t \cap \partial\Omega) > 0$; (x_1, x_2) représente les extrémités

d'un intervalle de la partition de H_t , $t \in]t_1, t_2[$ ou respectivement $[t_1, t_1]$,

fournie naturellement par les extrémités des composantes connexes de $H_t \cap \partial\Omega$,

(i) indique que, pour $t \in]t_1, t_2[$ ou respectivement $[t_1, t_1]$, $C_S(x; t)$ vaut pour

$$i = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} C_S^*(x, t) \\ C_S(x, t) \\ a_x(x, t) \end{cases} \text{ lorsque } x \in [x_1, x_2], \text{ où l'on supposera pour simpli-}$$

 fier C_S^* est a_S (c.f. §-2) données explicitement sur \mathbb{R}^2 .

Remarque 4: pour remplir le vecteur précédents il vaut mieux tenir compte effectivement de la fonction $\lambda(x, t)$ du §-9.

Toutes ces notions se retrouvent succinctement commentées dans les programmes.

Remarque 5 : on rappelle que, pour le bon fonctionnement des programmes et l'obtention de résultats réalistes (en U.S.I.), l'on veut :

$$K_L \in]0,1[.$$

$$K_S \in]0,1[.$$

$$K_L + K_S < 1.$$

$$K \in [10^{-3}, 10^3] \setminus \{0\}.$$

$$M = \frac{1}{\text{Nombre d'avogadro} \times \text{volume d'une molécule}} \in [10^5, 10^7],$$

$$\xi \in]1, 10^3],$$

$$\omega \in [0, 10^{-19}],$$

$$k = 1,380 \times 10^{-23},$$

$$T \in [500, 1000],$$

C_L et C_S prennent leurs valeurs dans $]0,1[$.

$\omega_{\text{ref}} \geq 0$ suffisamment petit par rapport aux valeurs que prennent les applications fournissant les conditions aux bords (c.f. §-8).

Attention aux arguments des fonctions circulaires en XPLU et XMOIN !

Remarque 6: notre problème s'écrit pour une dimension d'espace :

$$(1) \quad \frac{\partial v_S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial (\gamma_0 \phi^{-1}(v_S(x,t)) V(x,t))}{\partial x} = 0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, T[,$$

$$(2) \quad v_S = \phi(u_S) \Big|_{y=y_S}, \quad \gamma(u_S) = f(u_S),$$

$$(3) \quad v_S(x,0) = \phi(u_S(x,0)).$$

Posons $\gamma_0 \phi^{-1} = \psi$.

On obtient l'équation :

$$(4) \quad \frac{\partial v_S}{\partial t} + \frac{\partial (\psi(v_S) V)}{\partial x} = 0.$$

Afin d'effectuer un calcul explicite supposons

(5) $\Psi(v) = v$ (approximation réaliste pour certaines fonctions f).

L'équation (1) devient :

$$(6) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x,t) V(x,t)}{\partial x} = 0$$

et l'on attend $v(x,t)$ sous la forme $v(x,t) = e^{Th(t)} (\sin^2(x) + 1)$.

On pratique alors une méthode de variation de la constante :

$$\text{Posons } \frac{\lambda(x,t)}{v(x,t)} = V(x,t).$$

$$\text{On veut donc } \frac{\partial \lambda(x,t)}{\partial x} = - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - (1 - Th^2(t)) e^{Th(t)} (\sin^2(x) + 1).$$

D'où on peut prendre :

$$(7) V(x,t) = \frac{- (1 - Th^2(t)) \left(\frac{3x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right)}{(\sin^2(x) + 1)} > 0.$$

$$\text{On a : } v(\cdot, 0) = \sin^2(x) + 1.$$

$$V(\cdot, 0) = - \frac{\frac{3x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}}{\sin^2(x) + 1}.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(\cdot, t) = e(\sin^2(\cdot) + 1).$$

$$t \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\cdot, t) = 0(\cdot).$$

$$t \rightarrow +\infty$$

Tandis que la variation totale de V sur un segment quelconque tend à s'annuler

lorsque $t \rightarrow +\infty$, celle de v croit strictement.



```

DIMENSION XX(200),DELT11(200),CAREI(200)
DIMENSION NN(199),NNTILD(201)
WRITE (3,700)
700 FORMAT ('FORMAT A4',/, 'FENETRE 15 80 10 80',/,
S'CADRE R 1',/, 'ANISOTROPE -20 20 0 1',/, 'ABSOLU',/,
S'IIRET 3',/, 'CARACTERE C 1 1',/,
S'AXES 4 0.1 0 0 2 2 1 0 2',/, 'COULEUR B')
IZI=0
C   DELT11,NN NON MEME DIM QUE XX JUSQUA MAXUO
READ (5,500) OMGREF,DELTO,DELTT,MR,NOMBR
500 FORMAT (2X,3E12.3,2I3)
DTINIT=DELTT;NUMER=1;INUMER=1;MRINIT=MR
IF (MR.LT.4) WRITE (6,30);STOP
30  FORMAT (2X,'MR TROP PETIT')
23  CONTINUE
MRM1=MR-1
MRP1=MR+1
CALL SUBDIV (OMGREF,DELTO,MR,MRM1,XPLU,XMOIN,XX,NN,IZI)
19  CONTINUE
NNTILD(1)=0;NNTILD(MRP1)=0
DO 3 I=2,MR
II=I-1
NNTILD(I)=NN(II)
3   CONTINUE
C   ON VIENT DE REMPLIR NNTILD A PARTIR DE NN
IORD=0
15  CONTINUE
IORD=IORD+1
CALL RCHER (XX,NNTILD,CAREI,IORD,MR,MRP1,ICAREI)
IF (ICAREI.EQ.0) GO TO 18
CALL TRANSP (CAREI,ICAREI,DELTO,DELTT,XPLU,XMOIN,IORD,OMGREF)
DO 16 I=1,MRP1
NNTILD(I)=NNTILD(I)-1
16  CONTINUE
IF (IORD.EQ.1) DELT11(1)=XMOIN;DELT11(2)=XPLU;IDELTI=2;NN(1)=1;
SINN=1;GO TO 17
CALL ECRUOL (CAREI,DELT11,ICAREI,IDELTI,NN,INN,IORD)
17  CONTINUE
GO TO 15
18  CONTINUE
C   ON A DANS DELT11 LE NOUVEL XX ET DANS NN LE NOUVEL NN
IF (INUMER.EQ.1) IDELM1=IDELTI-1;GO TO 22
INUMER=INUMER-1
MR=IDELTI;MRP1=MR+1;MRM1=MR-1
DO 21 I=1,MR
XX(I)=DELT11(I)
21  CONTINUE
GO TO 19
22  CONTINUE
WRITE (6,110) NUMER
110 FORMAT (2X,'ON A OBTENU U EN ',I3,'DELTAT.',///)
WRITE (6,300)
300 FORMAT (2X,'VOICI XX ET NN CORRESPONDANT ET LA VALEUR DE LA
SFONCTION ASSOCIEE',/,2X,71('*'),//)
IZI=IZI+1
IF (IZI.EQ.6) WRITE (6,800);STOP
WRITE (3,900) IZI
800 FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES DE TRAITs ',
S'POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT ILLISIBLE-ARRET')

```

```

900 FORMAT ('TIRET ',I3)
   DO 31 I=1,IDELEM1
   VW=OMGREF+NN(I)*DELTD
   WRITE (6,200) DELTI1(I),NN(I),VW
   AWX=DELTI1(I)
   AWY=DELTI1(I+1)
   IF (I.EQ.1) AWX=-20.
   IF (I.EQ.IDELEM1) AWY=20.
   WRITE (3,600) AWX,VW,AWX,VW,AWY,VW
600 FORMAT ('SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE',/,1X,E12.3,1X,
SE12.3,/,1X,E12.3,1X,E12.3,/, '*')
200 FORMAT (2X,E12.3,/,25X,I3,45X,E12.3)
   31 CONTINUE
   WRITE (6,400) DELTI1(IDELETT)
400 FORMAT (2X,E12.3)
   NUMER=NUMER+1
   IF (NUMER.GT.NOMBR) WRITE (3,120);STOP
120 FORMAT ('FIN')
   INUMER=NUMER**2
   DELTT=DTINIT/NUMER
   MR=MRINIT
   GO TO 23
   END
   SUBROUTINE SUBDIV (U,D,M,MM1,XP,XM,XX,NN,IZI)
   DIMENSION XX(M)
   DIMENSION NN(MM1)
C   ON VA REMPLIR XX ET NN INITIAUX
   READ (7,60) BORN1,BORN2
60 FORMAT (2X,2E12.3)
   CALL ONDINE (BORN1,BORN2,IZI)
   XP=BORN2+1.E+05;XM=BORN1-1.E+05
   XX(1)=XM;XX(M)=XP
   MM3=M-3
   ACH=(BORN2-BORN1)/MM3
   DO 1 I=2,MM1
   II=I-2
   XX(I)=BORN1+II*ACH
   1 CONTINUE
   DO 2 I=1,MM1
   NN(I)=IFIX((UZERO((XX(I+1)+XX(I))/2)-0)/D)
   2 CONTINUE
   WRITE (6,40) (XX(I),I=1,M)
40 FORMAT (2X,'VOICI XX:',/,2X,8('*'),//,(2X,E12.3,///))
   WRITE (6,50) (NN(I),I=1,MM1)
50 FORMAT (2X,'VOICI NN:',/,2X,8('*'),//,(2X,I3,///))
   RETURN
   END
   SUBROUTINE RCHER (XX,NNII,CRI,IORD,M,MP1,II)
C   XX,NNII ET IORD ETANT DONNES ON RANGE DANS CAREI,
C   CAREI AVANT TRANSPORT RANGE PAR ORDRE CROISSANT STRICT
C   SI ON PART DE XX DEJA RANGE.
   DIMENSION XX(M),CRI(M)
   DIMENSION NNII(MP1)
   II=0
   DO 4 I=2,M
   IM1=I-1
   IF (NNII(I).LE.0) GO TO 4
   IF (NNII(IM1).LE.0) II=II+1;CRI(II)=XX(IM1)
   IF (NNII(I+1).LE.0) II=II+1;CRI(II)=XX(I)
C   SI II=0 ON A DEPASSE LE MAX DE UO

```



```

4 CONTINUE
  IF (II.EQ.0) RETURN
  WRITE (6,00) IORD,(CRI(I),I=1,II)
60 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',13,' AVANT TRANSPORT:',/,2X,31('*'),//,
  S (2X,E12.3,//))
  RETURN
  END
  SUBROUTINE TRANSP (CRI,II,DO,DT,XP,XM,IORD,0)
C PHASE DE TRANSPORT DE LA IORDIEME ORDONNEE
  DIMENSION CRI(II)
  GAMAI=0+(IORD-1)*DO+DO/2
  DO 5 I=1,II
  IF((CRI(I).EQ.XM).OR.(CRI(I).EQ.XP)) GO TO 5
  CRI(I)=CRI(I)+DT*FPRIM(GAMAI)
  5 CONTINUE
  WRITE (6,70) IORD,(CRI(I),I=1,II)
70 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',13,' APRES TRANSPORT:',/,2X,31('*'),//,(
  S2X,E12.3,//))
  RETURN
  END
  SUBROUTINE ECGOUL (CRI,DTI,IIC,IID,NN,INN,IORD)
C ON ECGOULE CAREIORD SUR DELTAIORD-1 EN COMPTANT
C LES ENTASSEMENTS
  DIMENSION CRI(IIC),DTI(IID)
  DIMENSION NN(INN)
  LDEPAR=1;L=-1
  6 CONTINUE
  L=L+2
  IF (L.GT.IIC-1) WRITE (6,90) IORD,(DTI(I),I=1,IID);WRITE (6,
  S100) IORD,(NN(I),I=1,INN);RETURN
  DO 7 I=LDEPAR,IID
  IF (CRI(L).LE.DTI(I)) GO TO 8
  7 CONTINUE
  WRITE (6,80) L,CRI(L)
  STOP
  8 CONTINUE
  IF (CRI(L).EQ.DTI(I)) NN(I)=NN(I)+1;INDIK=I+1;GO TO 9
  IM1=I-1;INN=INN+1;IID=IID+1
  NOPER=1
  CALL CLASS1 (NN,INN,IM1,NOPER)
  CALL CLASS2 (DTI,IID,IM1,CRI(L))
  INDIK=I+1
  9 CONTINUE
  LP1=L+1
  DO 11 IALFA=INDIK,IID
  IF (CRI(LP1).LE.DTI(IALFA)) GO TO 12
  NN(IALFA)=NN(IALFA)+1
  11 CONTINUE
  WRITE (6,80) LP1,CRI(LP1)
  STOP
  12 CONTINUE
  IF (CRI(LP1).EQ.DTI(IALFA)) LDEPAR=IALFA+1;GO TO 6
  IALFM1=IALFA-1;INN=INN+1;IID=IID+1
  NOPER=-1
  CALL CLASS1 (NN,INN,IALFM1,NOPER)
  CALL CLASS2 (DTI,IID,IALFM1,CRI(LP1))
  LDEPAR=IALFA+1
  GO TO 6
  80 FORMAT (2X,'ERREUR DUE AU CLASSEMENT DE CRI',13,'=',E12.3)
  90 FORMAT (2X,'VOICI DT',13,' :',/,2X,13('*'),//,(2X,E12.3,//))

```

```

100 FORMAT (2X,'VOICI NN A LETAPE',I3,' :',/,2X,22('*'),/,/, (2X,I3,/,/
S))
END
SUBROUTINE CLASS1 (NN,INN,IM1,NO)
C PLACE APRES NK UN NOUVEL ELEMENT VALANT NK+NO
C ET ON A DEJA AJOUTE UNE CASE DANS INN
DIMENSION NN(INN)
I=INN-IM1
DO 13 J=1,I
JJ=INN-J
NN(JJ+1)=NN(JJ)
13 CONTINUE
NN(IM1+1)=NN(IM1+1)+NO
RETURN
END
SUBROUTINE CLASS2 (DTI,IID,IM1,VALEUR)
C PLACE APRES XK UN NOUVEL ELEMENT CRI(L)
C ET ON A DEJA AJOUTE UNE CASE DANS IID
DIMENSION DTI(IID)
I=IID-IM1-1
DO 14 J=1,I
JJ=IID-J
DTI(JJ+1)=DTI(JJ)
14 CONTINUE
DTI(IM1+1)=VALEUR
RETURN
END
FUNCTION UZERO (X)
IF (ABS(X).LE.10.) UZERO=-0.04*X+0.6; GOTO1
IF (X.LT.0) UZERO=1.;GOTO1
UZERO=0.2
1 CONTINUE
RETURN
END
FUNCTION FPRIM (X)
FPRIM=X
RETURN
END
SUBROUTINE CNDINE (BORN1,BORN2,IZI)
C TRACE DE UZERO
ACH=(BORN2-BORN1)/20.
AZ=UZERO(BORN1)
IZI=IZI+1
IF (IZI.EQ.6) WRITE (6,800);STOP
800 FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES '
S,'DE TRAIT POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT '
S,'ILLISIBLE-ARRET')
WRITE (3,10) IZI,BORN1,AZ
10 FORMAT ('TIRET ',I3,/, 'SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE')
DO 1 I=1,21
AX=BORN1+(I-1)*ACH
AZ=UZERO(AX)
WRITE (3,20) AX,AZ
20 FORMAT (1X,E12.3,1X,E12.3)
1 CONTINUE
WRITE (3,30)
30 FORMAT ('*')
RETURN
END

```

VOICI XX:

-0.100E+06

-0.100E+02

0.000E+00

0.100E+02

0.100E+06

VOICI NN:

9

7

3

1

VOICI CARRE 1 AVANT TRANSPORT:

-0.100E+06

0.100E+06

VOICI CARRE 1 APRES TRANSPORT:

-0.100E+06

0.100E+06

VOICI CARRE 2 AVANT TRANSPORT:

-0.100E+06

0.100E+02

VOICI CARRE 2 APRES TRANSPORT:

-0.100E+06

0.125E+02

VOICI DT 2 :

-0.100E+06

0.125E+02

0.100E+06

VOICI NN A LETAPE 2 :

2

1

VOICI CARRE 3 AVANT TRANSPORT:

-0.100E+06

0.100E+02

VOICI CARRE 3 APRES TRANSPORT:

-0.100E+06

0.135E+02

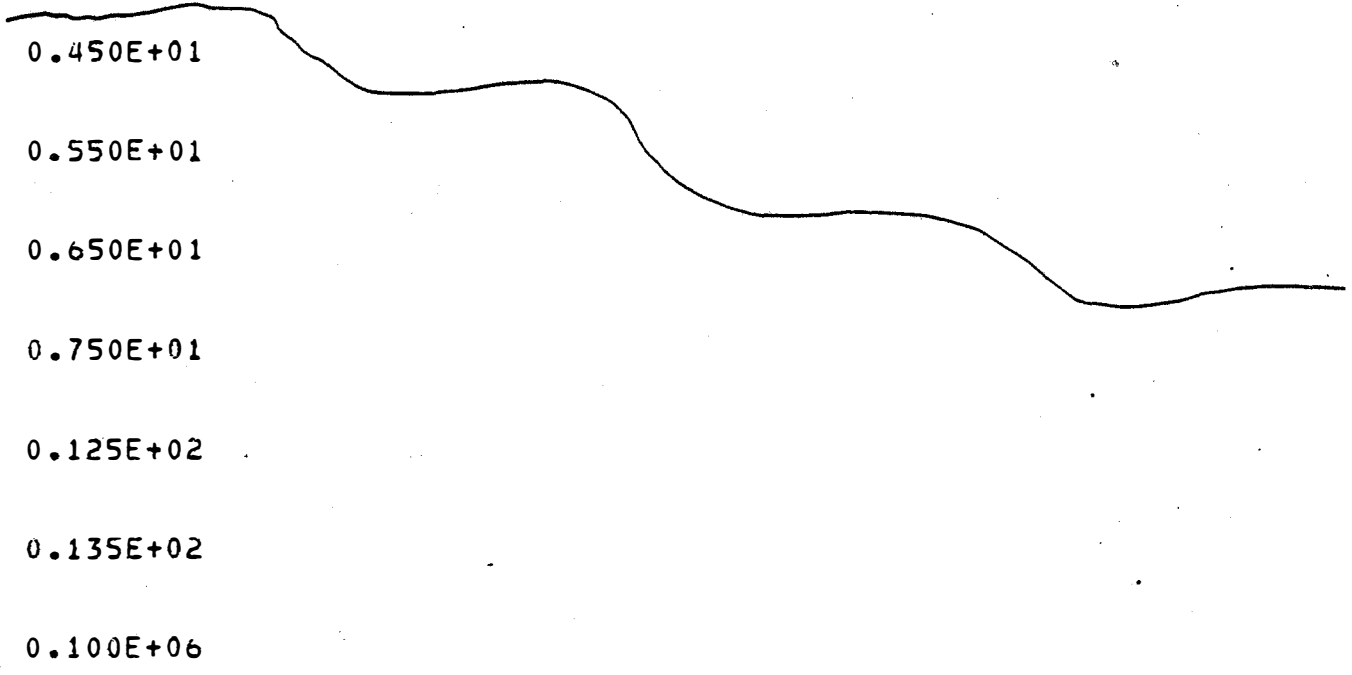
VOICI DT 3 :

-0.100E+06

0.125E+02

0.135E+02





VOICI NN A LETAPE 9 :

- 9
- 8
- 7
- 6
- 5
- 4
- 3
- 2
- 1

ON A OBTENU U EN 1DELTA.

VOICI XX ET NN CORRESPONDANT ET LA VALEUR DE LA FONCTION ASSOCI

-0.100E+06	9	0.100E+01
-0.150E+01	8	0.900E+00
-0.500E+00	7	0.800E+00
0.450E+01	6	0.700E+00
0.550E+01	5	0.600E+00
0.650E+01	4	0.500E+00
0.750E+01	3	0.400E+00
0.125E+02	2	0.300E+00
0.135E+02	1	0.200E+00
0.100E+06		

VOICI XX:

-0.100E+06

-0.100E+02

0.000E+00

0.100E+02

0.100E+06

VOICI NN:

9

7

3

1

VOICI CARRE 1 AVANT TRANSPORT:

-0.100E+06

0.100E+06

```

DIMENSION XX(500),DELTI1(500),CAREI(500)
DIMENSION NN(499),NNTILD(501)
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
READ (5,220) CAES,CAEL,AVEEL,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
220 FORMAT (2X,E12.3)
WRITE (3,700)
700 FORMAT ('FORMAT A4',/, 'FENETRE 15 80 10 80',/,
S'CADRE R 1',/, 'ANISOTROPE -20 20 0 1',/, 'ABSOLU',/,
S'TIRET 3',/, 'CARACTERE C 1 1',/,
S'AXES 4 0.1 0 0 2 2 1 0 2',/, 'COULEUR B')
READ (5,130) INDIS
130 FORMAT (2X,I3)
IF (INDIS.GT.3) WRITE (6,140);STOP
C   POUR INDIS=1 TRAITEMENT SIMPLIFIE, POUR INDIS=2 TRAITEMENT
C   NORMAL, POUR INDIS=3 DOUBLE TRAITEMENT POUR COMPARAISON.
140 FORMAT (2X, 'INDIS DONNE TROP GRAND')
INDEX=INDIS
IF (INDEX.EQ.3) INDIS=2
42 CONTINUE
IZI=0
C   DELTI1,NN NON MEME DIM QUE XX JUSQUA MAXUO
READ (5,500) OMGREF,DELTO,DELTT,MR,NOMBR
500 FORMAT (2X,3E12.3,2I3)
DTINIT=DELTT;NUMER=1;INUMER=1;MRINIT=MR
IF (MR.LT.4) WRITE (6,30);STOP
30 FORMAT (2X, 'MR TROP PETIT')
23 CONTINUE
MRM1=MR-1
MRP1=MR+1
CALL SUBDIV (OMGREF,DELTO,MR,MRM1,XPLU,XMOIN,XX,NN,IZI,INDIS)
19 CONTINUE
NNTILD(1)=0;NNTILD(MRP1)=0
DO 3 I=2,MR
II=I-1
NNTILD(I)=NN(II)
3 CONTINUE
C   ON VIENT DE REMPLIR NNTILD A PARTIR DE NN
IORD=0
15 CONTINUE
IORD=IORD+1
CALL RCHER (XX,NNTILD,CAREI,IORD,MR,MRP1,ICAREI)
IF (ICAREI.EQ.0) GO TO 18
TVEEL=(NUMER**2-INUMER)*DELTT
CALL TRANSP (CAREI,ICAREI,DELTO,DELTT,XPLU,XMOIN,IORD,OMGREF,
SINDIS)
DO 16 I=1,MRP1
NNTILD(I)=NNTILD(I)-1
16 CONTINUE
IF (IORD.EQ.1) DELTI1(1)=XMOIN;DELTI1(2)=XPLU;IDELTI=2;NN(1)=1;
SINN=1;GO TO 17
CALL ECRoul (CAREI,DELTI1,ICAREI,IDELTI,NN,INN,IORD)
17 CONTINUE
GO TO 15
18 CONTINUE
C   ON A DANS DELTI1 LE NOUVEL XX ET DANS NN LE NOUVEL NN
IF (INUMER.EQ.1) IDELM1=IDELTI-1;GO TO 22
INUMER=INUMER-1
MR=IDELTI;MRP1=MR+1;MRM1=MR-1
DO 21 I=1,MR

```

```

      XX(I)=DELTII(I)
21  CONTINUE
      GO TO 19
22  CONTINUE
      IF (INDIS.EQ.1) WRITE(6,110) NUMER;GO TO 47
      WRITE(6,150) NUMER
47  CONTINUE
110  FORMAT (2X,'ON A OBTENU U EN ',I3,'DELTAT.',///)
150  FORMAT (2X,'ON A OBTENU V EN ',I3,'DELTAT,MAIS U SERA DESSINE.'
      S,///)
      WRITE (6,300)
300  FORMAT (2X,'VOICI XX      ET NN CORRESPONDANT ET LA VALEUR DE LA
      SFONCTION ASSOCIEE',/,2X,71('*'),//)
      IZI=IZI+1
      IF (IZI.EQ.6) WRITE (6,800);STOP
      WRITE (3,900) IZI
800  FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES DE TRAITs ',
      S'POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT ILLISIBLE-ARRET')
900  FORMAT ('TIRET ',I3)
      DO 31 I=1,IDELEM1
      VW=OMGREF+NN(I)*DELTO
      WRITE (6,200) DELTII(I),NN(I),VW
      AWX=DELTII(I)
      AWY=DELTII(I+1)
      IF (I.EQ.1) AWX=-20.
      IF (I.EQ.IDELM1) AWY=20.
      IF (INDIS.NE.1) CALL NEWTN (VW)
      WRITE (3,600) AWX,VW,AWX,VW,AWY,VW
600  FORMAT ('SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE',/,1X,E12.3,1X,
      SE12.3,/,1X,E12.3,1X,E12.3,/, '*')
200  FORMAT (2X,E12.3,/,25X,I3,45X,E12.3)
31  CONTINUE
      WRITE (6,400) DELTII(IDELETI)
400  FORMAT (2X,E12.3)
      NUMER=NUMER+1
      IF (NUMER.LE.NOMBR) GO TO 43
      IF (INDEX.NE.3) WRITE (3,120);STOP
      INDIS=1;INDEX=1
      GO TO 42
43  CONTINUE
120  FORMAT ('FIN')
      INUMER=NUMER**2
      DELTT=DTINIT/NUMER
      MR=MRINIT
      GO TO 23
      END
      SUBROUTINE SUBDIV (O,D,M,MM1,XP,XM,XX,NN,IZI,INDIS)
      DIMENSION XX(M)
      DIMENSION NN(MM1)
      ON VA REMPLIR XX ET NN INITIAUX
      READ (7,60) BORN1,BORN2
60  FORMAT (2X,2E12.3)
      CALL ONDINE (BORN1,BORN2,IZI,INDIS)
      XP=BORN2+1.E+70;XM=BORN1-1.E+70
      XX(1)=XM;XX(M)=XP
      MM3=M-3
      ACH=(BORN2-BORN1)/MM3
      DO 1 I=2,MM1
      II=I-2
      XX(I)=BORN1+II*ACH

```



```

1 CONTINUE
  DO 2 I=1,MM1
  IF (INDIS.EQ.1) NN(I)=IFIX((UZERO((XX(I+1)+XX(I))/2)
S-0)/D);GO TO 44
  NN(I)=IFIX((VZERO((XX(I+1)+XX(I))/2)-0)/D)
44 CONTINUE
  2 CONTINUE
  WRITE (6,40) (XX(I),I=1,M)
40 FORMAT (2X,'VOICI XX:',/,2X,8('*'),//,(2X,E12.3,//))
  WRITE (6,50) (NN(I),I=1,MM1)
50 FORMAT (2X,'VOICI NN:',/,2X,8('*'),//,(2X,I3,//))
  RETURN
  END
  SUBROUTINE RCHER (XX,NNTI,CRI,IORD,M,MP1,II)
C XX,NNTILD ET IORD ETANT DONNES ON RANGE DANS CAREI,
C CAREI AVANT TRANSPORT RANGE PAR ORDRE CROISSANT STRICT
C SI ON PART DE XX DEJA RANGE.
  DIMENSION XX(M),CRI(M)
  DIMENSION NNTI(MP1)
  II=0
  DO 4 I=2,M
  IM1=I-1
  IF (NNTI(I).LE.0) GO TO 4
  IF (NNTI(IM1).LE.0) II=II+1;CRI(II)=XX(IM1)
  IF (NNTI(I+1).LE.0) II=II+1;CRI(II)=XX(I)
C SI II=0 ON A DEPASSE LE MAX DE UO
  4 CONTINUE
  IF (II.EQ.0) RETURN
  WRITE (6,60) IORD,(CRI(I),I=1,II)
60 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',I3,' AVANT TRANSPORT:',/,2X,31('*'),//,
S (2X,E12.3,//))
  RETURN
  END
  SUBROUTINE TRANSP (CRI,II,DO,DT,XP,XM,IORD,O,INDIS)
C PHASE DE TRANSPORT DE LA IORDIEME ORDONNEE
C DIMENSION CRI(II)
  GAMAI=0+(IORD-1)*DO+DO/2
  IF (INDIS.EQ.1) GO TO 45
  CALL NEWTN (GAMAI)
45 CONTINUE
  DO 5 I=1,II
  IF((CRI(I).EQ.XM).OR.(CRI(I).EQ.XP)) GO TO 5
  CRI(I)=CRI(I)+DT*FPRIM(GAMAI)
  IF (CRI(I).LT.XM) CRI(I)=XM
  IF (CRI(I).GT.XP) CRI(I)=XP
  5 CONTINUE
  WRITE (6,70) IORD,(CRI(I),I=1,II)
70 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',I3,' APRES TRANSPORT:',/,2X,31('*'),//,(
S2X,E12.3,//))
  RETURN
  END
  SUBROUTINE ECROUL (CRI,DTI,IIC,IID,NN,INN,IORD)
C ON ECROULE CAREIORD SUR DELTAIORD-1 EN COMPTANT
C LES ENTASSEMENTS
  DIMENSION CRI(IIC),DTI(IID)
  DIMENSION NN(INN)
  LDEPAR=1;L=-1
  6 CONTINUE
  L=L+2
  IF (L.GT.IIC-1) WRITE (6,90) IORD,(DTI(I),I=1,IID);WRITE (6,

```

```

S100) IORD,(NN(I),I=1,INN);RETURN
DO 7 I=LDEPAR,IID
IF (CRI(L).LE.DTI(I)) GO TO 8
7 CONTINUE
WRITE (6,80) L,CRI(L)
STOP
8 CONTINUE
IF (CRI(L).EQ.DTI(I)) NN(I)=NN(I)+1;INDIK=I+1;GO TO 9
IM1=I-1;INN=INN+1;IID=IID+1
NOPER=1
CALL CLASS1 (NN,INN,IM1,NOPER)
CALL CLASS2 (DTI,IID,IM1,CRI(L))
INDIK=I+1
9 CONTINUE
LP1=L+1
DO 11 IALFA=INDIK,IID
IF (CRI(LP1).LE.DTI(IALFA)) GO TO 12
NN(IALFA)=NN(IALFA)+1
11 CONTINUE
WRITE (6,80) LP1,CRI(LP1)
STOP
12 CONTINUE
IF (CRI(LP1).EQ.DTI(IALFA)) LDEPAR=IALFA+1;GO TO 6
IALFM1=IALFA-1;INN=INN+1;IID=IID+1
NOPER=-1
CALL CLASS1 (NN,INN,IALFM1,NOPER)
CALL CLASS2 (DTI,IID,IALFM1,CRI(LP1))
LDEPAR=IALFA+1
GO TO 6
80 FORMAT (2X,'ERREUR DUE AU CLASSEMENT DE CRI',I3,'=',E12.3)
90 FORMAT (2X,'VOICI DT',I3,' :',/,2X,13('*'),//,(2X,E12.3,//))
100 FORMAT (2X,'VOICI NN A LETAPE',I3,' :',/,2X,22('*'),//,(2X,I3,//
S))
END
SUBROUTINE CLASS1 (NN,INN,IM1,NO)
C PLACE APRES NK UN NOUVEL ELEMENT VALANT NK+NO
C ET ON A DEJA AJOUTE UNE CASE DANS INN
DIMENSION NN(INN)
I=INN-IM1
DO 13 J=1,I
JJ=INN-J
NN(JJ+1)=NN(JJ)
13 CONTINUE
NN(IM1+1)=NN(IM1+1)+NO
RETURN
END
SUBROUTINE CLASS2 (DTI,IID,IM1,VALEUR)
C PLACE APRES XK UN NOUVEL ELEMENT CRI(L)
C ET ON A DEJA AJOUTE UNE CASE DANS IID
DIMENSION DTI(IID)
I=IID-IM1-1
DO 14 J=1,I
JJ=IID-J
DTI(JJ+1)=DTI(JJ)
14 CONTINUE
DTI(IM1+1)=VALEUR
RETURN
END
FUNCTION UZERO (X)
IF (ABS(X).LE.10.) UZERO=-0.02*X+0.6;GO TO 1

```

```

IF (X.LT.0) UZERO=0.8;GO TO 1
UZERO=0.4
1 CONTINUE
RETURN
END
FUNCTION FPRIM (X)
FPRIM=F1PRIM(X)/GEPRIM(X)
RETURN
END
SUBROUTINE ONDINE (BORN1,BORN2,IZI,INDIS)
C TRACE DE UZERO
ACH=(BORN2-BORN1)/20.
IF (INDIS.EQ.1) AZ=UZERO(BORN1);GO TO 2
AZ=VZERO(BORN1)
2 CONTINUE
IZI=IZI+1
IF (IZI.EQ.6) WRITE (6,800);STOP
800 FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES '
S,'DE TRAIT POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT '
S,'ILLISIBLE-ARRET')
WRITE (3,10) IZI,BORN1,AZ.
10 FORMAT ('TIRET ',I3,/, 'SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE')
DO 1 I=1,21
AX=BORN1+(I-1)*ACH
IF (INDIS.EQ.1) AZ=UZERO(AX);GO TO 3
AZ=VZERO(AX)
3 CONTINUE
WRITE (3,20) AX,AZ
20 FORMAT (1X,E12.3,1X,E12.3)
1 CONTINUE
WRITE (3,30)
30 FORMAT ('*')
RETURN
END
FUNCTION VZERO(X)
Y=UZERO(X)
VZERO=GEE(Y)
RETURN
END
SUBROUTINE NEWTN (GAMAI)
EPS=0.001
GAMAK=GAMAI
DO 1 I=1,20
BUFR=GAMAK
GAMAK=GAMAK-((GEE(GAMAK)-GAMAI)/GEPRIM(GAMAK))
BUFR=ABS(GAMAK-BUFR)/BUFR
IF (BUFR.LT.EPS) GAMAI=GAMAK;RETURN
1 CONTINUE
WRITE (6,10);STOP
10 FORMAT (2X,'NEWTON ECHOUE')
END
FUNCTION F1PRIM (X)
C POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D UN TYPE DIFFERENT
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
F1PRIM=CAEL*VEEL(TVEEL,AVEEL)*XI/EM/CA*EXP(OME/CAPTI/
STEE*(1.-2.*XI*X))*(1./(1.-XI*X)**2-2.*OME*XI*X/
SCAPTI/TEE/(1.-XI*X))
RETURN
END
FUNCTION GEE (X)

```

```

] C  POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D UN TYPE DIFFERENT
COMMON CAES, CAEL, TVEEL, AVEEL, CA, EM, XI, OME, CAPTI, TEE
GEE=CAEL/EM/CA*XI*X/(1.-XI*X)*EXP(OME/CAPTI/TEE*
S(1.-2.*XI*X))+CAES*X
RETURN
END
FUNCTION GEPRIM (X)
C  POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D UN TYPE DIFFERENT
COMMON CAES, CAEL, TVEEL, AVEEL, CA, EM, XI, OME, CAPTI, TEE
GEPRIM=F1PRIM(X)/VEEL(TVEEL, AVEEL)+CAES
RETURN
END
FUNCTION VEEL (X, AVEEL)
C  CAEL*VEEL EST LA VITESSE DE DARCY
C  ELLE PEUT CHANGER DE SIGNE
VEEL=AVEEL*(-0.0495*X+1.)
RETURN
END

```

```

DIMENSION XX(500),DELTI1(500),CAREI(500)
DIMENSION NN(499),NNTILD(501)
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
DIMENSION XGRAF(300)
READ (5,310) NGRAF
IF (NGRAF.GT.300) WRITE (6,330);STOP
READ (5,320) (XGRAF(I),I=1,NGRAF)
330 FORMAT (2X,'NGRAF TROP GRAND')
310 FORMAT (2X,I3)
320 FORMAT (5(2X,E12.3))
READ (5,220) CAES,CAEL,AVEEL,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
220 FORMAT (2X,E12.3)
WRITE (3,700)
700 FORMAT ('FORMAT A4',/, 'FENETRE 15 80 10 80',/,
S'CADRE R 1',/, 'ANISOTROPE -20 20 0 1',/, 'ABSOLU',/,
S'TIRET 3',/, 'CARACTERE C 1 1',/,
S'AXES 4 0.1 0 0 2 2 1 0 2',/, 'COULEUR B')
READ (5,130) INDIS
130 FORMAT (2X,I3)
IF (INDIS.GT.3) WRITE (6,140);STOP
C POUR INDIS=1 TRAITEMENT SIMPLIFIE, POUR INDIS=2 TRAITEMENT
C NORMAL, POUR INDIS=3 DOUBLE TRAITEMENT POUR COMPARAISON.
140 FORMAT (2X, 'INDIS DONNE TROP GRAND')
INDEX=INDIS
IF (INDEX.EQ.3) INDIS=2
42 CONTINUE
IZI=0
C DELTI1,NN NON MEME DIM QUE XX JUSQUA MAXUO
READ (5,500) OMGREF,DELTO,DELTT,IVIS,NOMBR
500 FORMAT (2X,3E12.3,2I3)
XPLU=1.E+70;XMOIN=-1.E+70
DTINIT=DELTT;NUMER=1;INUMER=1
IF (IVIS.LT.3) WRITE (6,30);STOP
30 FORMAT (2X,'IVIS TROP PETIT')
23 CONTINUE
MR=3
MRM1=2
XX(1)=XMOIN;XX(2)=0.;XX(3)=XPLU
NN(1)=1;NN(2)=1
TVEEL=0.
CALL WMAIN (XX,NN,MR,MRM1,TVEEL,XGRAF,NGRAF,IVIS,OMGREF
S,DELTO,IZI,INDIS)
MRP1=MR+1
19 CONTINUE
NNTILD(1)=0;NNTILD(MRP1)=0
DO 3 I=2,MR
II=I-1
NNTILD(1)=NN(II)
3 CONTINUE
C ON VIENT DE REMPLIR NNTILD A PARTIR DE NN
IORD=0
15 CONTINUE
IORD=IORD+1
CALL RCHEP (XX,NNTILD,CAREI,IORD,MR,MRP1,ICAREI)
IF (ICAREI.EQ.0) GO TO 18
CALL TRANSP (CAREI,ICAREI,DELTO,DELTT,XPLU,XMOIN,IORD,OMGREF,
SINDIS)
TVEEL=(NUMER**2-INUMER+1)*DELTT
DO 16 I=1,MRP1

```

```

NNTILD(1)=NNTILD(1)-1
16 CONTINUE
IF (IORD.EQ.1) DELTI1(1)=XMOIN;DELTI1(2)=XPLU;IDELTI=2;NN(1)=1;
SINN=1;GO TO 17
CALL ECROUL (CAREI,DELTI1,ICAREI,IDELTI,NN,INN,IORD)
17 CONTINUE
GO TO 15
18 CONTINUE
C ON A DANS DELTI1 LE NOUVEL XX ET DANS NN LE NOUVEL NN
IF (INUMER.EQ.1) IDELM1=IDELTI-1;CALL WMAIN(DELTI1,
SNN,IDELTI,IDELM1,TVEEL,XGRAF,NGRAF,IVIS,OMGREF,
SDELTO,IZI,INDIS);GO TO 22
INUMER=INUMER-1
MR=IDELTI;MRM1=MR-1
DO 21 I=1,MR
XX(I)=DELTI1(I)
21 CONTINUE
CALL WMAIN(XX,NN,MR,MRM1,TVEEL,XGRAF,NGRAF,IVIS,
SOMGREF,DELTO,IZI,INDIS)
MRP1=MR+1
GO TO 19
22 CONTINUE
IF (INDIS.EQ.1) WRITE(6,110) NUMER;GO TO 47
WRITE(6,150) NUMER
47 CONTINUE
110 FORMAT (2X,'ON A OBTENU U EN ',I3,'DELTAT.',///)
150 FORMAT (2X,'ON A OBTENU V EN ',I3,'DELTAT,MAIS U SERA DESSINE.'
S,///)
WRITE (6,300)
300 FORMAT (2X,'VOICI XX ET NN CORRESPONDANT ET LA VALEUR DE LA
SFONCTION ASSOCIEE',/,2X,I7('*'),//)
IZI=IZI+1
IF (IZI.EQ.6) WRITE (6,800);STOP
WRITE (3,900) IZI
800 FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES DE TRAITs ',
S'POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT ILLISIBLE-ARRET')
900 FORMAT ('TIRET ',I3)
DO 31 I=1,IDELM1
Vw=OMGREF+NN(I)*DELTO
WRITE (6,200) DELTI1(I),NN(I),Vw
AwX=DELTI1(I)
AwY=DELTI1(I+1)
IF (AwX.LT.-20.) AwX=-20.;GO TO 881
IF (AwX.GT.20.) AwX=20.
881 CONTINUE
IF (AwY.LT.-20.) AwY=-20.;GO TO 882
IF (AwY.GT.20.) AwY=20.
882 CONTINUE
IF (INDIS.NE.1) CALL NEWTN (Vw)
WRITE (3,600) AwX,Vw,AwX,Vw,AwY,Vw
600 FORMAT ('SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE',/,1X,E12.3,1X,
SE12.3,/,1X,E12.3,1X,E12.3,/, '*')
200 FORMAT (2X,E12.3,/,25X,I3,45X,E12.3)
31 CONTINUE
WRITE (6,400) DELTI1(IDELTI)
400 FORMAT (2X,E12.3)
NUMER=NUMER+1
IF (NUMER.LE.NOMBR) GO TO 43
IF (INDEX.NE.3) WRITE (3,120);STOP
INDIS=1;INDEX=1

```

```

GO TO 42
43 CONTINUE
120 FORMAT ('FIN')
INUMER=NUMER**2
DELTT=DTINIT/NUMER
GO TO 23
END
SUBROUTINE RCHEP (XX,NNTI,CRI,IORD,M,MP1,II)
C XX,NNTILD ET IORD ETANT DONNES UN RANGE DANS CAREI,
C CAREI AVANT TRANSPORT RANGE PAR ORDRE CROISSANT STRICT
C SI ON PART DE XX DEJA RANGE.
DIMENSION XX(M),CRI(M)
DIMENSION NNTI(MP1)
II=0
DO 4 I=2,M
IM1=I-1
IF (NNTI(I).LE.0) GO TO 4
IF (NNTI(IM1).LE.0) II=II+1;CRI(II)=XX(IM1)
IF (NNTI(I+1).LE.0) II=II+1;CRI(II)=XX(I)
C SI II=0 ON A DEPASSE LE MAX DE U0
4 CONTINUE
IF (II.EQ.0) RETURN
WRITE (6,60) IORD,(CRI(I),I=1,II)
60 FORMAT (2X,'VOICI CAPRE',I3,' AVANT TRANSPORT:',/,2X,31('*'),//,
S (2X,E12.3,///))
RETURN
END
SUBROUTINE TRANSP (CRI,II,DO,DT,XP,XM,IORD,O,INDIS)
C PHASE DE TRANSPORT DE LA IORDIEME ORDONNEE
DIMENSION CRI(II)
GAMAI=O+(IORD-1)*DO+DO/2
IF (INDIS.EQ.1) GO TO 45
CALL NEWTN (GAMAI)
45 CONTINUE
DO 5 I=1,II
IF((CRI(I).EQ.XM).OR.(CRI(I).EQ.XP)) GO TO 5
CRI(I)=CRI(I)+DT*FPRIM(GAMAI)
IF (CRI(I).LT.XM) CRI(I)=XM
IF (CRI(I).GT.XP) CRI(I)=XP
5 CONTINUE
WRITE (6,70) IORD,(CRI(I),I=1,II)
70 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',I3,' APRES TRANSPORT:',/,2X,31('*'),//,(
S2X,E12.3,///))
RETURN
END
SUBROUTINE ECROUL (CRI,DT1,IIC,IID,NN,INN,IORD)
C ON ECROULE CAREIORD SUR DELTAIORD-1 EN COMPTANT
C LES ENTASSEMENTS
DIMENSION CRI(IIC),DT1(IID)
DIMENSION NN(INN)
LDEPAR=1;L=-1
6 CONTINUE
L=L+2
IF (L.GT.IIC-1) WRITE (6,90) IORD,(DT1(I),I=1,IID);WRITE (6,
S100) IORD,(NN(I),I=1,INN);RETURN
DO 7 I=LDEPAR,IID
IF (CRI(L).LE.DT1(I)) GO TO 8
7 CONTINUE
WRITE (6,80) L,CRI(L)
STOP

```

```

8 CONTINUE
IF (CRI(L).EQ.DTI(1)) NN(I)=NN(I)+1;INDIK=I+1;GO TO 9
IM1=I-1;INN=INN+1;IID=IID+1
NOPER=1
CALL CLASS1 (NN,INN,IM1,NOPER)
CALL CLASS2 (DTI,IID,IM1,CRI(L))
INDIK=I+1
9 CONTINUE
LP1=L+1
DO 11 IALFA=INDIK,IID
IF (CRI(LP1).LE.DTI(IALFA)) GO TO 12
NN(IALFA)=NN(IALFA)+1
11 CONTINUE
WRITE (6,80) LP1,CRI(LP1)
STOP
12 CONTINUE
IF (CRI(LP1).EQ.DTI(IALFA)) LDEPAR=IALFA+1;GO TO 6
IALFM1=IALFA-1;INN=INN+1;IID=IID+1
NOPER=-1
CALL CLASS1 (NN,INN,IALFM1,NOPER)
CALL CLASS2 (DTI,IID,IALFM1,CRI(LP1))
LDEPAR=IALFA+1
GO TO 6
80 FORMAT (2X,'ERREUR DUE AU CLASSEMENT DE CRI',I3,'=',E12.3)
90 FORMAT (2X,'VOICI DT',I3,' :',/,2X,I3('*'),//,(2X,E12.3,//))
100 FORMAT (2X,'VOICI NN A LETAPE',I3,' :',/,2X,22('*'),//,(2X,I3,//
S))
END
SUBROUTINE CLASS1 (NN,INN,IM1,NO)
C PLACE APRES NK UN NOUVEL ELEMENT VALANT NK+NO
C ET ON A DEJA AJOUTE UNE CASE DANS INN
DIMENSION NN(INN)
I=INN-IM1
DO 13 J=1,I
JJ=INN-J
NN(JJ+1)=NN(JJ)
13 CONTINUE
NN(IM1+1)=NN(IM1+1)+NO
RETURN
END
SUBROUTINE CLASS2 (DTI,IID,IM1,VALEUR)
C PLACE APRES XK UN NOUVEL ELEMENT CRI(L)
C ET ON A DEJA AJOUTE UNE CASE DANS IID
DIMENSION DTI(IID)
I=IID-IM1-1
DO 14 J=1,I
JJ=IID-J
DTI(JJ+1)=DTI(JJ)
14 CONTINUE
DTI(IM1+1)=VALEUR
RETURN
END
FUNCTION UZERO (X,T)
IF (ABS(X).LE.10.) UZ1=-0.02*X+0.6;GO TO 1
IF (X.LT.0) UZ1=0.8;GO TO 1
UZ1=0.4
1 CONTINUE
IF (T.LE.10.) UZ2=-0.02*T+0.6;GO TO 2
UZ2=0.4
2 CONTINUE

```



```

UZERO=AMAX1(UZ1,UZ2)
RETURN
END
FUNCTION FPRIM (X)
FPRIM=FIPRIM(X)/GEPRIM(X)
RETURN
END
FUNCTION VZERO(X,T)
Y=UZERO(X,T)
VZERO=GEE(Y)
RETURN
END
SUBROUTINE NEWTN (GAMAI)
EPS=0.001
GAMAK=GAMAI
DO 1 I=1,20
BUFR=GAMAK
GAMAK=GAMAK-((GEE(GAMAK)-GAMAI)/GEPRIM(GAMAK))
BUFR=ABS(GAMAK-BUFR)/BUFR
IF (BUFR.LT.EPS) GAMAI=GAMAK;RETURN
1 CONTINUE
WRITE (6,10);STOP
10 FORMAT (2X,'NEWTON ECHOUÉ')
END
FUNCTION FIPRIM (X)
C POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D UN TYPE DIFFERENT
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
FIPRIM=CAEL*VEEL(TVEEL,AVEEL)*XI/EM/CA*EXP(OME/CAPTI/
STEE*(1.-2.*XI*X))*(1./(1.-XI*X)**2-2.*OME*XI*X/
SCAPTI/TEE/(1.-XI*X))
RETURN
END
FUNCTION GEE (X)
C POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D UN TYPE DIFFERENT
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
GEE=CAEL/EM/CA*XI*X/(1.-XI*X)*EXP(OME/CAPTI/TEE*
S(1.-2.*XI*X))+CAES*X
RETURN
END
FUNCTION GEPRIM (X)
C POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D UN TYPE DIFFERENT
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
GEPRIM=FIPRIM(X)/VEEL(TVEEL,AVEEL)+CAES
RETURN
END
FUNCTION VEEL (X,AVEEL)
C CAEL*VEEL EST LA VITESSE DE DARCY
C ELLE PEUT CHANGER DE SIGNE
VEEL=AVEEL*(-0.0495*X+1.)
RETURN
END
SUBROUTINE DECAL (TAB,NTAB,XGRAF,I,NENTAS,NTABM1)
DIMENSION TAB(NTAB)
DIMENSION NENTAS(NTABM1)
C ON RAPPELLE QUE L'ON PEUT AUSSI DIMENSIONNER
C LES TABLEAUX A 1. ON VA DEDOUBLER LA CASE
C ADEQUAT DE NN. ON VA INSERER XGRAF DANS LA
C CASE ADEQUAT DE TAB.
NTABMI=NTAB-I
DO 1 J=1,NTABMI

```

```

JJ=NTAB-J+2
JK=JJ-1
TAB(JJ)=TAB(JJ-1)
NENTAS(JK)=NENTAS(JK-1)
1 CONTINUE
TAB(I+1)=XGRAF
NTAB=NTAB+1;NTABM1=NTAB-1
RETURN
END
SUBROUTINE DIMIN (TAB,NTAB,XGRAF1,XGRAF2,NENTAS,
SNTABM1,IMARK)
DIMENSION TAB(NTAB)
DIMENSION NENTAS(NTABM1)
C ON RAPPELLE QUE L'ON PEUT AUSSI DIMENSIONNER
C LES TABLEAUX A 1. ON VA SUPPRIMER ENTRE XGRAF1
C ET XGRAF2 LES CASES DE TAB INTERMEDIAIRES AINSI
C QUE LES CASES DE NN CORRESPONDANTES POUR N'EN
C LAISSER QU'UNE SEULE.
DO 1 I1=1,500
IF (TAB(I1).EQ.XGRAF1) IMARK=I1;GO TO 3
1 CONTINUE
WRITE (6,10);STOP
3 CONTINUE
DO 2 I2=1,500
IF (TAB(I2).EQ.XGRAF2) GO TO 4
2 CONTINUE
WRITE (6,20);STOP
4 CONTINUE
10 FORMAT (2X,'ARRET DE I1 DANS DO 1')
20 FORMAT (2X,'ARRET DE I2 DANS DO 2')
IDIFF=I2-I1
IF (IDIFF.EQ.1) GO TO 11
ISPRIM=IDIFF-1
NTMI2P=NTAB-I2+1
DO 5 I=1,NTMI2P
TAB(I1+I)=TAB(I2-1+I)
NENTAS(I1+I-1)=NENTAS(I2-2+I)
5 CONTINUE
NTAB=NTAB-ISPRIM;NTABM1=NTAB-1
11 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE REMPLI (TAB,NTAB,NENTAS,NTABM1,IMARK,IVIS
S,OMGREF,DELTO,XGRAF3,TEMP,INDIS)
DIMENSION TAB(NTAB)
DIMENSION NENTAS(NTABM1)
C ON VA DIVISER L'INTERVALLE OUVERT DE BORNES
C (IMPLICITES) XGRAF1,XGRAF2,EN PLUSIEURS INTERVALLES
C ,PUIS INSERER CES VALEURS EN MODIFIANT TAB
C PUIS NN GRACE A XGRAF3.
ACH=(TAB(IMARK+1)-TAB(IMARK))/IVIS
I=1
1 CONTINUE
A=TAB(IMARK)+I*ACH
IW=IMARK+I-1
CALL DECAL(TAB,NTAB,A,IW,NENTAS,NTABM1)
I=I+1
IF (I.NE.IVIS) GO TO 1
DO 2 I=1,IVIS
II=IMARK+I-1

```

```

    NENTAS(II)=NFUNKT(TAB(II),TAB(II+1),XGRAF3,TEMP,OMGREF
S,DELTO,INDIS)
2 CONTINUE
  RETURN
  END
  FUNCTION NFUNKT (X,Y,ZZ,T,O,D,INDIS)
  B=(X+Y)/2.
  IF (ZZ.EQ.1) GO TO 3
  IF (INDIS.EQ.1) NFUNKT=IFIX((UZERO(B,TEMP)-O)/D);GO TO 4
  NFUNKT=IFIX((VZERO(B,TEMP)-O)/D)
  GO TO 4
3 CONTINUE
  IF (INDIS.EQ.1) NFUNKT=IFIX((AA(B,TEMP)-O)/D);GO TO 4
  NFUNKT= IFIX((BA(B,TEMP)-O)/D)
4 CONTINUE
  RETURN
  END
  FUNCTION BA (X,T)
  Y=AA(X,T)
  BA=GEE(Y)
  RETURN
  END
  SUBROUTINE WMAIN (TAB,NENTAS,NTAB,NTABM1,TEMP,XGRAF
S,NGRAF,IVIS,OMGREF,DELTO,IZI,INDIS)
  DIMENSION TAB(NTAB),XGRAF(NGRAF)
  DIMENSION NENTAS(NTABM1)
  C POUR LE TEMPS TEMP ON MODIFIE LES ABSCISSES TAB ET
  C LES ENTASSEMENTS CORRESPONDANTS NENTAS EN FONCTION
  C DES CONDITIONS LIMITEES ET INITIALES REPEREES PAR
  C XGRAF. ON UTILISERA UN NOMBRE IVIS D'INTERVALLES
  C DE SUBDIVISION DES CONDITIONS LIMITEES ET INITIALES.
  DO 1 IL=3,NGRAF,5
  IF (((XGRAF(IL).LT.TEMP).AND.(XGRAF(IL+1).GT.TEMP))
S.OR.((TEMP.EQ.XGRAF(IL)).AND.(TEMP.EQ.XGRAF(IL+1)))
S) GO TO 2
  IF (IL.EQ.NGRAF-2) WRITE (6,10);SIOP
10 FORMAT (2X,'NGRAF DEPASSE, PRENDRE TEMP PLUS PETIT')
  1 CONTINUE
  2 CONTINUE
  DO 3 IM=IL,NGRAF,5
  IF ((XGRAF(IL).NE.XGRAF(IM)).OR.(XGRAF(IL+1).NE.
SXGRAF(IM+1))) GO TO 4
  DO 5 I=1,500
  IF ((XGRAF(IM-2).GT.TAB(I)).AND.(XGRAF(IM-2)
S.LT.TAB(I+1))) CALL DECAL(TAB,NTAB,XGRAF(IM-2),I,
SNENTAS,NTABM1);GO TO 6
  IF (XGRAF(IM-2).LE.TAB(I+1)) GO TO 6
  5 CONTINUE
  6 CONTINUE
  DO 7 I=1,500
  IF ((XGRAF(IM-1).GT.TAB(I)).AND.(XGRAF(IM-1).LT.
STAB(I+1))) CALL DECAL(TAB,NTAB,XGRAF(IM-1),I,
SNENTAS,NTABM1);GO TO 8
  IF (XGRAF(IM-1).LE.TAB(I+1)) GO TO 8
  7 CONTINUE
  8 CONTINUE
  CALL DIMIN(TAB,NTAB,XGRAF(IM-2),XGRAF(IM-1),
SNENTAS,NTABM1,IMARK)
  CALL REMPLI(TAB,NTAB,NENTAS,NTABM1,IMARK,IVIS,
SOMGREF,DELTO,XGRAF(IM+2),TEMP,INDIS)

```

```

IF (IM.EQ.NGRAF-2) GO TO 4
3 CONTINUE
4 CONTINUE
IF (TEMP.NE.0) GO TO 77
C TRACE DE LA CONDITION INITIALE APPROCHEE
IZI=IZI+1
IF (IZI.EQ.6) WRITE (6,800);STOP
800 FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES '
S,'DE TRAIT POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT '
S,'ILLISIBLE-ARRET')
WRITE (3,900) IZI
900 FORMAT ('TIRET ',I3)
DO 31 I=1,NTABM1
VW=OMGREF+NENTAS(I)*DELTO
AWX=TAB(I)
AWY=TAB(I+1)
IF (AWX.LT.-20.) AWX=-20.;GO TO 881
IF (AWX.GT.20.) AWX=20.
881 CONTINUE
IF (AWY.LT.-20.) AWY=-20.;GO TO 882
IF (AWY.GT.20.) AWY=20.
882 CONTINUE
WRITE (3,600) AWX,VW,AWX,VW,AWY,VW
600 FORMAT ('SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE',
S/,1X,E12.3,1X,E12.3,/,1X,E12.3,1X,E12.3,/, '*')
31 CONTINUE
WRITE (6,40) (TAB(I),I=1,NTAB)
40 FORMAT (2X,'VOICI XX:',/,2X,8('*'),/, (2X,E12.3,///))
WRITE (6,50) (NENTAS(I),I=1,NTABM1)
50 FORMAT (2X,'VOICI NN:',/,2X,8('*'),/, (2X,I3,///))
77 CONTINUE
RETURN
END
FUNCTION AA (X,T)
IF (ABS(X).LE.10.) UZ1=-0.2*SIN(3*X)+0.6;GO TO 1
UZ1=1.
1 CONTINUE
IF (T.LT.10.) UZ2=-0.2*SIN(3*T)+0.6;GO TO 2
UZ2=0.8
2 CONTINUE
AA=UZ1*UZ2
RETURN
END

```

```

    DIMENSION XX(20),YY(20),DELTIX(20),DELTIY(20),CAREIX(20),CAREIY
    S(20),T(1)
    DIMENSION NN(19,19),NCHAPO(19,19)
    COMMON NNTILD(21,21)
C   DELTIX,DELTIY,NN NON MEME DIM QUE XX,YY JUSQUA MAXUO
    READ (5,100) OMSGREF,DELTO,DELTT,MRX,MRY,NOMBRE
100  FORMAT (2X,3E12.3,3I3)
    WRITE (3,700)
700  FORMAT ('FORMAT A4',/, 'FENETRE 15 80 10 80',/,
    S'CADRE R 1',/, 'ANISOTROPE -20 20 0 1',/, 'ABSOLU',/,
    S'TIRET 3',/, 'CARACTERE C 1 1',/,
    S'AXES 4 0.1 0 0 2 2 1 0 2',/, 'COULEUR B')
    IZI=0
    DTINIT=DELTT;NUMER=1;INUMER=1;MRINIX=MRX;MRINIY=MRY;T(1)=0.
    IF ((MRX.LT.4).OR.(MRY.LT.4)) WRITE (6,10);STOP
10  FORMAT (2X,'MRX OU MRY TROP PETITS')
    1 CONTINUE
    MRXM1=MRX-1;MRXP1=MRX+1
    MRYM1=MRY-1;MRYP1=MRY+1
    CALL SUBDIV (OMGREF,DELTO,MRX,MRY,MRXM1,MRYM1,XPLU,XMOIN,YPLU,YM
    SOIN,XX,YY,NN,19,IZI)
    2 CONTINUE
    DO 3 I=1,MRYP1
    DO 3 J=1,MRXP1
    NNTILD(I,J)=0
    3 CONTINUE
    DO 4 I=2,MRY
    DO 4 J=2,MRX
    II=I-1;JJ=J-1
    NNTILD(I,J)=NN(II,JJ)
    4 CONTINUE
C   ON VIENT DE REMPLIR NNTILD A PARTIR DE NN
    IORD=0
    5 CONTINUE
    IORD=IORD+1
    CALL RCHER (XX,YY,CAREIX,CAREIY,IORD,MRX,MRY,MRXP1,MRYP1,ICAREX,
    SICAREY)
    IF (ICAREY.EQ.0) GO TO 6
    CALL DTERMI (XX,YY,MRX,MRY,CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,NCHAPO,19
    S,NCX,NCY,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN,IX1,IX2,IY1,IY2)
    CALL TRANSP (CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,DELTO,DELTT,XPLU,XMOIN,
    SYPLU,YMOIN,IORD,OMGREF)
    DO 7 I=1,MRYP1
    DO 7 J=1,MRXP1
    NNTILD(I,J)=NNTILD(I,J)-1
    7 CONTINUE
    IF (IORD.EQ.1) DELTIX(1)=XMOIN;DELTIX(2)=XPLU;IDELTX=2;DELTIY(1)
    S=YMOIN;DELTIY(2)=YPLU;IDELTY=2;NN(1,1)=1;INX=1;INY=1;GO TO 8
    IW1=INX;IW2=INY
    CALL TERCAL (NN,19,INX,INY,CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,DELTIX,
    SDELTIY,1,IW1,1,IW2,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN)
    CALL TERCAL (NCHAPO,19,NCX,NCY,DELTIX,DELTIY,IDELTX,IDELTY,
    SCAREIX,CAREIY,IX1,IX2,IY1,IY2,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN)
    DO 9 I=1,INY
    DO 9 J=1,INX
    NN(I,J)=NN(I,J)+NCHAPO(I,J)
    9 CONTINUE
C   ON CLASSE CAREIX%DELTIX ET CAREIY%DELTIY
    DO 11 I=1,ICAREX

```

```

CALL ELIM (CAREIX(I),0.,DELTIX,T,IDELTX,1)
11 CONTINUE
DO 12 I=1,ICAREY
CALL ELIM (CAREIY(I),0.,DELTIY,T,IDELTY,1)
12 CONTINUE
CALL TRILEN (IDELTX,DELTIX)
CALL TRILEN (IDELTY,DELTIY)
8 CONTINUE
GO TO 5
6 CONTINUE
C ON A DANS DELTIX LE NOUVEL XX,DANS DELTIY LE NOUVEL YY, DANS
C NN LE NOUVEL NN
IF (INUMER.EQ.1) GO TO 13
INUMER=INUMER-1
MRX=IDELTX;MRY=IDELTY;MRXP1=MRX+1;MRYP1=MRY+1
DO 14 I=1,MRY
YY(I)=DELTIY(I)
14 CONTINUE
DO 15 I=1,MRX
XX(I)=DELTIX(I)
15 CONTINUE
GO TO 2
13 CONTINUE
WRITE (6,20) NUMER
20 FORMAT (2X,'ON A OBTENU U EN ',I3,'DELTAT.',///)
WRITE (6,30)
30 FORMAT (2X,'VOICI XX PUIS YY PUIS NN PUIS LA VALEUR DE LA '
S,'FONCTION ASSOCIEE',/,2X,64('*'),//)
WRITE (6,40) (DELTIX(I),I=1,IDELTX)
WRITE (6,40) (DELTIY(I),I=1,IDELTY)
WRITE (6,50) ((NN(I,J),J=1,INX),I=1,INX)
IZI=IZI+1
IF (IZI.EQ.6) WRITE(6,110);STOP
WRITE (3,120) IZI
110 FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES DE TRAIT',
S'POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT ILLISIBLE-ARRET')
120 FORMAT ('TIRET ',I3)
DO 900 I=1,INX
DO 900 J=1,INX
VW=OMGREF+NN(I,J)*DELTO
WRITE (6,40) VW
900 CONTINUE
40 FORMAT (2X,10E12.3)
50 FORMAT (2X,10I3)
IIYY=IDELTY-1
DO 112 I=1,IIYY
BWy1=DELTIY(I)
CALL R1IFN(BWy1)
BWy2=DELTIY(I+1)
CALL R1IEN(BWy2)
YCH=(BWy2-BWy1)/5
DO 112 IY=1,6
BWy=BWy1+(IY-1)*YCH
ANISOX=20.-40./(1.+3./160.*BWy-3./8.)
ANISOO=1.-1./(1.+3./160.*BWy-3./8.)
AS=ABS(ANISOO)
IF (AS.LE.1.E-06) AS=0.
WRITE (3,130) ANISOX,ANISOO
130 FORMAT ('ANISOTROPE',1X,E12.3,1X,'20.00',1X,E12.3,1X,
S'1.00'),

```

```

      I1WW=IDELTX-1
      DO 113 J=1,I1WW
      BWX1=DELTX(J)
      CALL R1IEN(BWX1)
      BWX2=DELTX(J+1)
      CALL R1IEN(BWX2)
      WW=OMGREF+NN(J,1)*DELTO
      WRITE (3,140) BWX1,WW,BWX1,WW,BWX2,WW
140  FORMAT ('SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE',/,1X,E12.3,1X,
      SE12.3,/,1X,E12.3,1X,E12.3,/, '*')
113  CONTINUE
112  CONTINUE
      NUMER=NUMER+1
      IF (NUMER.GT.NOMBRE) WRITE (3,150);STOP
150  FORMAT ('FIN')
      INUMER=NUMER**2
      DELTT=DTINIT/NUMER
      MRX=MRINIX;MRY=MRINIY
      GO TO 1
      END
      SUBROUTINE SUBDIV (OMGREF,DELTO,MRX,MRY,MRXM1,MRYM1,XPLU,XMOIN,
      SYPLU,YMOIN,XX,YY,NN,NNPASS,IZI)
      DIMENSION XX(MRX),YY(MRY)
      DIMENSION NN(NNPASS,NNPASS)
C     ON VA REMPLIR LES VECTEURS XX,YY ET LE TABLEAU NN INITIAUX.
      READ (7,100) BORNX1,BORNX2,BORNY1,BORNY2
100  FORMAT (2X,4E12.3)
      CALL ONDINE (BORNX1,BORNX2,BORNY1,BORNY2,IZI)
      XPLU=BORNX2+1.E+05;XMOIN=BORNX1-1.E+05
      YPLU=BORNY2+1.E+05;YMOIN=BORNY1-1.E+05
      XX(1)=XMOIN;XX(MRX)=XPLU;YY(1)=YMOIN;YY(MRY)=YPLU
      MM3=MRX-3
      ACH=(BORNX2-BORNX1)/MM3
      DO 1 I=2,MRXM1
      II=I-2
      XX(I)=BORNX1+II*ACH
1  CONTINUE
      MM3=MRY-3
      ACH=(BORNY2-BORNY1)/MM3
      DO 2 I=2,MRYM1
      II=I-2
      YY(I)=BORNY1+II*ACH
2  CONTINUE
      DO 3 I=1,MRYM1
      DO 3 J=1,MRXM1
      NN(I,J)=IFIX((UZERO((XX(J+1)+XX(J))/2,(YY(I+1)+YY(I))/2)-OMGREF)
      S/DELTO)
3  CONTINUE
      WRITE (6,10) (XX(I),I=1,MRX)
      WRITE (6,20) (YY(I),I=1,MRY)
10  FORMAT (2X,'VOICI XX:',/,2X,8('*'),/,/(2X,E12.3,/,/))
20  FORMAT (2X,'VOICI YY:',/,2X,8('*'),/,/(2X,E12.3,/,/))
      WRITE (6,30) ((NN(I,J),J=1,MRXM1),I=1,MRYM1)
30  FORMAT (2X,'VOICI NN:',/,2X,8('*'),/,/(2X,9I3,/,/))
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TRANSP (CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,DELTO,DELTT,
      SXPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN,IORD,OMGREF)
C     PHASE DE TRANSPORT DE LA IORDIEME ORDONNEE
      DIMENSION CAREIX(ICAREX),CAREIY(ICAREY)

```

```

GAMAI=OMGREF+(IORD-1)*DELTO+DELTO/2
DO 3 I=1,ICAREX
IF ((CAREIX(I).EQ.XMOIN).OR.(CAREIX(I).EQ.XPLU)) GO TO 3
CAREIX(I)=CAREIX(I)+DELTT*FPRIM1(GAMAI)
3 CONTINUE
DO 4 I=1,ICAREY
IF ((CAREIY(I).EQ.YMOIN).OR.(CAREIY(I).EQ.YPLU)) GO TO 4
CAREIY(I)=CAREIY(I)+DELTT*FPRIM2(GAMAI)
4 CONTINUE
WRITE (6,40) IORD,(CAREIX(I),I=1,ICAREX)
WRITE (6,50) IORD,(CAREIY(I),I=1,ICAREY)
40 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',13,'X APRES TRANSPORT:',/,2X,32('*'),//
S,(2X,E12.3,//))
50 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',13,'Y APRES TRANSPORT:',/,2X,32('*'),//
S,(2X,E12.3,//))
RETURN
END
SUBROUTINE TRILEN (KP1,XIEM)
DIMENSION XIEM(KP1)
N1=KP1-1
DO 32 I=1,N1
I1=I+1
DO 33 J=I1,KP1
IF (XIEM(J).GE.XIEM(I)) GO TO 33
B=XIEM(I)
XIEM(I)=XIEM(J)
XIEM(J)=B
33 CONTINUE
32 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE DTERMI (XX,YY,MRX,MRY,CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,
SNCHAPO,NCPASS,NCX,NCY,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN,IX1,IX2,IY1,IY2)
A PARTIR DE XX*YY INITIAL, DE CAREIX ET CAREIY "AVANT"
TRANSPORT, DE NNTILD, ON REMPLIT NCHAPO.
COMMON NNTILD(21,21)
DIMENSION XX(MRX),YY(MRY),CAREIX(ICAREX),CAREIY(ICAREY)
DIMENSION NCHAPO(NCPASS,NCPASS)
NCHAPO EST SUPPOSE EVENTUELLEMENT COMPLETE PAR X-,X+,Y-,Y+
INDIKX=0;INDIKY=0
IF (CAREIY(1).NE.YMOIN) INDIKY=INDIKY+1
IF (CAREIY(ICAREY).NE.YPLU) INDIKY=INDIKY+2
IF (CAREIX(1).NE.XMOIN) INDIKX=INDIKX+4
IF (CAREIX(ICAREX).NE.XPLU) INDIKX=INDIKX+8
K=INDIKX+INDIKY+1;ICXM1=ICAREX-1;ICYM1=ICAREY-1;ICXP1=ICAREX+1;
SICYP1=ICAREY+1
GO TO (1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4),K
1 CONTINUE
NCY=ICYM1;IY1=1;IY2=NCY;GO TO 9
2 CONTINUE
NCY=ICAREY;IY1=2;IY2=NCY;GO TO 9
3 CONTINUE
NCY=ICAREY;IY1=1;IY2=ICYM1;GO TO 9
4 CONTINUE
NCY=ICYP1;IY1=2;IY2=ICAREY
9 CONTINUE
GO TO (5,5,5,5,6,6,6,6,7,7,7,7,8,8,8,8),K
5 CONTINUE
NCX=ICXM1;IX1=1;IX2=ICXM1;GO TO 11
6 CONTINUE,

```



```

NCX=ICARFX;IX1=2;IX2=NCX;GO TO 11
7 CONTINUE
NCX=ICAREX;IX1=1;IX2=ICXM1;GO TO 11

8 CONTINUE
NCX=ICXP1;IX1=2;IX2=ICAREX
11 CONTINUE
C ON VA METTRE LES ZEROS DE NCHAPO, RESTERA A ELIMINER CEUX
C QUI NE CONVIENNENT PAS
DO 12 I=1,NCY
DO 12 J=1,NCX
NCHAPO(I,J)=0
12 CONTINUE
C CLASSEMENT DE CAREIX(I) DANS XX ET DE CAREIY(I) DANS YY
C ET SORTIE DES COORDONNEES DE LA CASE DE NNTILD CORRESPONDANT
IX1M1=IX1-1
IY1M1=IY1-1
DO 13 J=IX1,IX2
DO 13 I=IY1,IY2
II=I-IY1M1
JJ=J-IX1M1
DO 14 IJX=1,MRX
IF (CAREIX(JJ).EQ.XX(IJX)) GO TO 15
14 CONTINUE
STOP1
15 CONTINUE
DO 16 IJY=1,MRY
IF (CAREIY(II).EQ.YY(IJY)) GO TO 17
16 CONTINUE
STOP2
17 CONTINUE
C ON REMPLIT PAR DES 1 EN SADRESSANT AU BON ELEMENT
C DE NNTILD, CEST A DIRE NNTILD(IJY+1,IJX+1)
IF (NNTILD(IJY+1,IJX+1).GT.0) NCHAPO(I,J)=1
13 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE RCHER (XX,YY,CAPEIX,CAREIY,IORD,MRX,MRY,MRXP1,
SMRYP1,ICAREX,ICAREY)
COMMON NNTILD(21,21)
DIMENSION XX(MRX),YY(MRY),CAREIX(MRX),CAREIY(MRY)
ICAREX=0;ICAREY=0
DO 5 I=2,MRYP1
DO 5 J=2,MRXP1
NA=NNTILD(I,J-1);NB=NNTILD(I-1,J-1);NC=NNTILD(I-1,J)
IF (NNTILD(I,J).GT.0) GO TO 6
IF (((NA.LE.0).AND.(NB.LE.0)).AND.(NC.LE.0)) GO TO 5
IF (((NA.LE.0).AND.(NB.GT.0)).AND.(NC.GT.0)) GO TO 5
IF (((NA.GT.0).AND.(NB.GT.0)).AND.(NC.LE.0)) GO TO 5
IF (ICAREY.EQ.0) ICAREY=1;ICAREX=1;CAREIY(1)=YY(I-1);
SCAREIX(1)=XX(J-1);GO TO 5
CALL ELIM (XX(J-1),YY(I-1),CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY)
GO TO 5
6 CONTINUE
IF (((NA.GT.0).AND.(NB.GT.0)).AND.(NC.GT.0)) GO TO 5
IF (((NA.LE.0).AND.(NB.LE.0)).AND.(NC.GT.0)) GO TO 5
IF (((NA.GT.0).AND.(NB.LE.0)).AND.(NC.LE.0)) GO TO 5
IF (ICAREY.EQ.0) ICAREY=1;ICAREX=1;CAREIY(1)=YY(I-1);
SCAREIX(1)=XX(J-1);GO TO 5
CALL ELIM (XX(J-1),YY(I-1),CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY)

```

```

5 CONTINUE
C ON VA RANGER CAREIX ET CAREIY
  IF (ICAREY.EQ.0) RETURN
  CALL TRILEM (ICAREY,CAREIY)
  CALL TRILEM (ICAREX,CAREIX)
C A PARTIR DE XX,YY,NNTILD UN A REMPLI ET RANGE CAREIX ET CAREIY
C AVANT TRANSPORT, AU NIVEAU IORD. SI AU CHOIX ICAREX OU ICAREIY
C SONT NULS ON A TROUVE LE NOUVEL UO.
  WRITE (6,60) IORD,(CAREIX(I),I=1,ICAREX)
  WRITE (6,70) IORD,(CAREIY(I),I=1,ICAREY)
60 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',I3,'X AVANT TRANSPORT:',/,2X,32('*'),
  S//,(2X,E12.3,///))
70 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',I3,'Y AVANT TRANSPORT:',/,2X,32('*'),
  S//,(2X,E12.3,///))
  RETURN
  END
SUBROUTINE ELIM (XXJM1,YYIM1,CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY)
C ON ELIMINE XXJM1 OU YYIM1 SUIVANT QU'ILS SE TROUVENT OU NON
C RESPECTIVEMENT DANS CAREIX OU CAREIY
  DIMENSION CAREIX(ICAREX),CAREIY(ICAREY)
  DO 7 I=1,ICAREX
  IF (CAREIX(I).EQ.XXJM1) GO TO 8
7 CONTINUE
  ICAREX=ICAREX+1;CAREIX(ICAREX)=XXJM1
8 CONTINUE
  DO 9 I=1,ICAREY
  IF (CAREIY(I).EQ.YYIM1) RETURN
9 CONTINUE
  ICAREY=ICAREY+1;CAREIY(ICAREY)=YYIM1
  RETURN
  END
SUBROUTINE TERCAL (TABLO,ITPASS,NXTABL,NYTABL,CLASX,CLASY,
  SICLASX,ICLASY,TABX,TABY,IX1,JX2,IY1,IY2,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN)
C ON VA CREER DES COLONNES PUIS DES LIGNES DANS TABLO, LE DECOUPANT
C UNIQUEMENT A LA RENCONTRE DUNE COORDONNEE COLONNE PUIS LIGNE DE
C CLASX PUIS CLASY NE FIGURANT PAS DANS LES COORDONNEES COLONNE
C PUIS LIGNE DE TABX PUIS TABY FOURNISSANT TABLO.
  DIMENSION CLASX(ICLASX),CLASY(ICLASY),
  STABX(1),TABY(1)
  INTEGER TABLO(ITPASS,ITPASS)
  NTOUR=-1
  ITABX=IX2-IX1+2
  ITABY=IY2-IY1+2
  DO 21 I=1,ICLASX
  DO 22 II=1,ITABX
  IF (CLASX(I).LE.TABX(II)) GO TO 23
22 CONTINUE
  II=ITABX+1;GO TO 24
23 CONTINUE
  IF (CLASX(I).EQ.TABX(II)) GO TO 21
24 CONTINUE
  IF (((II.EQ.1).AND.(CLASX(I).EQ.XMOIN)).OR.((II.EQ.ITABX+1).AND.
  S(CLASX(I).EQ.XPLU))) GO TO 21
  NXTABL=NXTABL+1
  NTOUR=NTOUR+1
  IW=IX1-2+II+NTOUR+1
  DO 25 I1=1,NYTABL
  DO 25 I2=IW,NXTABL
  I3=IW+NXTABL-I2
  TABLO(I1,I3)=TABLO(I1,I3-1)

```

```

25 CONTINUE
21 CONTINUE
  NTOUR=-1
  DO 26 I=1,ICLASY
  DO 27 II=1,ITABY
  IF (CLASY(I).LE.TABY(II)) GO TO 26
27 CONTINUE
  II=ITABY+1;GO TO 29
28 CONTINUE
  IF (CLASY(I).EQ.TABY(II)) GO TO 26
29 CONTINUE
  IF (((II.EQ.1).AND.(CLASY(I).EQ.YMOIN)).OR.((II.EQ.ITABY+1).AND.
S(CLASY(I).EQ.YPLU))) GO TO 26
  NYTABL=NYTABL+1
  NTOUR=NTOUR+1
  IW=IY1-2+1I+NTOUR+1
  DO 31 I1=1,NXTABL
  DO 31 I2=IW,MYTABL
  I3=IW+NYTABL-I2
  TABLO(I3,I1)=TABLO(I3-1,I1)
31 CONTINUE
26 CONTINUE
  RETURN
  END
  FUNCTION UZERO (X,Y)
  IF (ABS(X).LE.10.) UZ1=-0.2*SIN(3*X)+0.6;GO TO 1
  IF (X.LT.0.) UZ1=0.8;GO TO 1
  UZ1=0.4
  1 CONTINUE
  IF (ABS(Y).LE.10.) UZ2=-0.2*COS(3*Y)+0.6;GO TO 2
  IF (Y.LT.0) UZ2=0.8;GO TO 2
  UZ2=0.4
  2 CONTINUE
  UZERO=AMAX1(UZ1,UZ2)
  RETURN
  END
  FUNCTION FPRIM1 (X)
  FPRIM1=X
  RETURN
  END
  FUNCTION FPRIM2 (Y)
  FPRIM2=Y
  RETURN
  END
  SUBROUTINE ONDINE (BX1,BX2,BY1,BY2,IZI)
  TRACE DE UZERO
  ACHX=(BX2-BX1)/10.
  ACHY=(BY2-BY1)/10.
  IZI=IZI+1
  IF (IZI.EQ.6) WRITE(6,800);STOP
800 FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES '
S,'DE TRAIT POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT '
S,'ILLISIBLE-ARRET')
  WRITE (3,10) IZI
  10 FORMAT ('TIRET ',I3)
  DO 1 I=1,11
  Y=BY2-(1-I)*ACHY
  ANISOX=20.-40./(1.+5./160.*Y-3./8.)
  ANISOO=1.-1./(1.+3./160.*Y-3./8.)
  WRITE (3,50) ANISOX,ANISOO

```

```
50 FORMAT ('ANISOTROPE',1X,E12.3,1X,'20.00',1X,E12.3,1X,  
S'1.00')  
Z=UZERO(BX1,Y)  
WRITE(3,20) BX1,Z  
20 FORMAT ('SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE')  
DO 2 J=1,11  
X=BX1+(J-1)*ACHX  
Z=UZERO(X,Y)  
WRITE (3,30) X,Z  
30 FORMAT (1X,E12.3,1X,E12.3)  
2 CONTINUE  
WRITE (3,40)  
40 FORMAT ('*')  
1 CONTINUE  
RETURN  
END  
SUBROUTINE R1IEN (BW)  
IF (BW.GT.20.) BW=20.  
IF (BW.LT.-20.) BW=-20.  
RETURN  
END
```

```

DIMENSION XX(20),YY(20),DELTTX(20),DELTIIY(20),CAREIX(20),CAREIY
S(20),T(1)
DIMENSION NN(19,19),NCHAPO(19,19)
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL1,AVEEL2,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
COMMON NNTILD(21,21)
READ (5,210) CAES,CAEL,AVEEL1,AVEEL2,CA,EM,XI,OME,CAPTI,
STEE
210 FORMAT (2X,E12.3)
WRITE (3,700)
700 FORMAT ('FORMAT A4',/, 'FENETRE 15 80 10 80',/,
S'CADRE R 1',/, 'ANISOTROPE -20 20 0 1',/, 'ABSOLU',/,
S'TIRET 3',/, 'CARACTERE C 1 1',/,
S'AXES 4 0.1 0 0 2 2 1 0 2',/, 'COULEUR 8')
READ (5,220) INDIS
220 FORMAT (2X,I3)
IF (INDIS.GT.3) WRITE (6,114);STOP
C POUR INDIS=1 TRAITEMENT SIMPLIFIE, POUR INDIS=2 TRAITEMENT
C NORMAL,POUR INDIS=3 DOUBLE TRAITEMENT POUR COMPARAISON.
114 FORMAT (2X,'INDIS DONNE TROP GRAND')
INDEX=INDIS
IF (INDEX.EQ.3) INDIS=2
115 CONTINUE
C DELTIX,DELTIIY,NN NON MEME DIM QUE XX,YY JUSQUA MAXUO
READ (5,100) OMGREF,DELTO,DELTT,MRX,MRY,NOMBRE
100 FORMAT (2X,3E12.3,3I3)
IZI=0
DTINIT=DELTT;NUMER=1;INUMER=1;MRINIX=MRX;MRINIY=MRY;T(1)=0.
IF ((MRX.LT.4).OR.(MRY.LT.4)) WRITE (6,10);STOP
10 FORMAT (2X,'MRX OU MRY TROP PETITS')
1 CONTINUE
MRXM1=MRX-1;MRXP1=MRX+1
MRYM1=MRY-1;MRYP1=MRY+1
CALL SUBDIV (OMGREF,DELTO,MRX,MRY,MRXM1,MRYM1,XPLU,XMOIN,YPLU,YM
SOIN,XX,YY,NN,19,IZI,INDIS)
2 CONTINUE
DO 3 I=1,MRYP1
DO 3 J=1,MRXP1
NNTILD(I,J)=0
3 CONTINUE
DO 4 I=2,MRY
DO 4 J=2,MRX
II=I-1;JJ=J-1
NNTILD(I,J)=NN(II,JJ)
4 CONTINUE
C ON VIENT DE REMPLIR NNTILD A PARTIR DE NN
IORD=0
5 CONTINUE
IORD=IORD+1
CALL RCHEX (XX,YY,CAREIX,CAREIY,IORD,MRX,MRY,MRXP1,MRYP1,ICAREX,
SICAREY)
IF (ICAREY.EQ.0) GO TO 6
CALL DTERMI (XX,YY,MRX,MRY,CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,NCHAPO,19
S,NCX,NCY,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN,IX1,IX2,IY1,IY2)
TVEEL=(NUMER**2-INUMER)*DELTT
CALL TRANSP (CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,DELTO,DELTT,XPLU,XMOIN,
SYPLU,YMOIN,IORD,OMGREF,INDIS)
DO 7 I=1,MRYP1
DO 7 J=1,MRXP1
NNTILD(I,J)=NNTILD(I,J)-1

```

```

7 CONTINUE
  IF (IORD.EQ.1) DELTIX(1)=XMOIN;DELTIX(2)=XPLU;IDELTX=2;DELTIIY(1)
  S=YMOIN;DELTIIY(2)=YPLU;IDELTY=2;NN(1,1)=1;INX=1;INY=1;GO TO 8
  IW1=INX;IW2=INY
  CALL TERCAL (NN,19,INX,INY,CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,DELTIX,
  SDELTIIY,1,IW1,1,IW2,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN)
  CALL TERCAL (NCHAPO,19,NCX,NCY,DELTIX,DELTIIY,IDELTX,IDELTY,
  SCAREIX,CAREIY,IX1,IX2,IY1,IY2,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN)
  DO 9 I=1,INY
  DO 9 J=1,INX
  NN(I,J)=NN(I,J)+NCHAPO(I,J)
9 CONTINUE
C   ON CLASSE CAREIX%DELTIX ET CAREIY%DELTIIY
  DO 11 I=1,ICAREX
  CALL ELIM (CAREIX(I),0.,DELTIX,T,IDELTX,1)
11 CONTINUE
  DO 12 I=1,ICAREY
  CALL ELIM (CAREIY(I),0.,DELTIIY,T,IDELTY,1)
12 CONTINUE
  CALL TRILEN (IDELTX,DELTIX)
  CALL TRILEN (IDELTY,DELTIIY)
8 CONTINUE
  GO TO 5
6 CONTINUE
C   ON A DANS DELTIX LE NOUVEL XX,DANS DELTIY LE NOUVEL YY, DANS
C   NN LE NOUVEL NN
  IF (INUMER.EQ.1) GO TO 13
  INUMER=INUMER-1
  MRX=IDELTX;MRY=IDELTY;MRXP1=MRX+1;MRYP1=MRY+1
  DO 14 I=1,MRY
  YY(I)=DELTIIY(I)
14 CONTINUE
  DO 15 I=1,MRX
  XX(I)=DELTIX(I)
15 CONTINUE
  GO TO 2
13 CONTINUE
  IF (INDIS.EQ.1) WRITE (6,20) NUMER;GO TO 119
  WRITE (6,330) NUMER
119 CONTINUE
330 FORMAT (2X,'ON A OBTENU V EN ',I3,'DELTAT,MAIS U SERA '
  S,'DESSINE.',///)
20 FORMAT (2X,'ON A OBTENU U EN ',I3,'DELTAT.',///)
  WRITE (6,30)
30 FORMAT (2X,'VOICI XX PUIS YY PUIS NN PUIS LA VALEUR DE LA ',
  S'FONCTION ASSOCIEE',/,2X,64('*'),//)
  WRITE (6,40) (DELTIX(I),I=1,IDELTX)
  WRITE (6,40) (DELTIIY(I),I=1,IDELTY)
  WRITE (6,50) ((NN(I,J),J=1,INX),I=1,INY)
  IZI=IZI+1
  IF (IZI.EQ.6) WRITE(6,110);STOP
  WRITE (3,120) IZI
110 FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES DE TRAIT',
  S'POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT ILLISIBLE-ARRET')
120 FORMAT ('TIRET ',I3)
  DO 900 I=1,INY
  DO 900 J=1,INX
  VW=OMGREF+NN(I,J)*DELTO
  WRITE (6,40) VW
900 CONTINUE

```

```

40 FORMAT (2X,10E12.3)
50 FORMAT (2X,10I3)
  IYY=IDELTY-1
  DO 112 I=1,IYY
  BMY1=DELT1Y(I)
  CALL R1IEN(BMY1)
  BMY2=DELT1Y(I+1)
  CALL R1IEN(BMY2)
  YCH=(BMY2-BMY1)/5
  DO 112 IY=1,6
  BMY=BMY1+(IY-1)*YCH
  ANISOX=20.-40./(1.+3./160.*BMY-3./8.)
  ANISOO=1.-1./(1.+3./160.*BMY-3./8.)
  AS=ABS(ANISOO)
  IF (AS.LE.1.E-06) AS=0.
  WRITE (3,130) ANISOX,ANISOO
130 FORMAT ('ANISOTROPE',1X,E12.3,1X,'20.00',1X,E12.3,1X,
S'1.00')
  IIWW=IDELTX-1
  DO 113 J=1,IIWW
  BWX1=DELTIX(J)
  CALL R1IEN(BWX1)
  BWX2=DELTIX(J+1)
  CALL R1IEN(BWX2)
  WW=OMGREF+NN(J,1)*DELTO
  IF (INDIS.NE.1) CALL NEWTN(WW)
  WRITE (3,140) BWX1,WW,BWX1,WW,BWX2,WW
140 FORMAT ('SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE',/,1X,E12.3,1X,
SE12.3,/,1X,E12.3,1X,E12.3,/, '*')
113 CONTINUE
112 CONTINUE
  NUMER=NUMER+1
  IF (NUMER.LE.NOMBRE) GO TO 116
  IF (INDEX.NE.3) WRITE (3,310);STOP
  INDIS=1;INDEX=1
  GO TO 115
116 CONTINUE
310 FORMAT ('FIN')
  INUMER=NUMER**2
  DELTT=DTINIT/NUMER
  MRX=MRINIX;MRY=MRINIY
  GO TO 1
  END
  SUBROUTINE SUBDIV (OMGREF,DELTO,MRX,MRY,MRXM1,MRYM1,XPLU,XMOIN,
SYPLU,YMOIN,XX,YY,NN,NNPASS,IZI,INDIS)
  DIMENSION XX(MRX),YY(MRY)
  DIMENSION NN(NNPASS,NNPASS)
C  ON VA REMPLIR LES VECTEURS XX,YY ET LE TABLEAU NN INITIAUX.
  READ (7,100) BORNX1,BORNX2,BORNY1,BORNY2
100 FORMAT (2X,4E12.3)
  CALL ONDINE (BORNX1,BORNX2,BORNY1,BORNY2,IZI,INDIS)
  XPLU=BORNX2+1.E+05;XMOIN=BORNX1-1.E+05
  YPLU=BORNY2+1.E+05;YMOIN=BORNY1-1.E+05
  XX(1)=XMOIN;XX(MRX)=XPLU;YY(1)=YMOIN;YY(MRY)=YPLU
  MM3=MRX-3
  ACH=(BORNX2-BORNX1)/MM3
  DO 1 I=2,MRXM1
  II=I-2
  XX(I)=BORNX1+II*ACH
1 CONTINUE

```

```

MM3=MRY-3
ACH=(BORN2-BORN1)/MM3
DO 2 I=2,MRYM1
II=I-2
YY(I)=BORN1+II*ACH
2 CONTINUE
DO 3 I=1,MRYM1
DO 3 J=1,MRXM1
NN(I,J)=IFIX((UZERO((XX(J+1)+XX(J))/2,(YY(I+1)+YY(I))/2)-OMGREF)
S/DELTO)
IF (INDIS.EQ.1) NN(I,J)=IFIX((UZERO((XX(J+1)+XX(J))/2,
S(YY(I+1)+YY(I))/2)-OMGREF)/DELTO);GO TO 117
NN(I,J)=IFIX((VZERO((XX(J+1)+XX(J))/2,(YY(I+1)+YY(I))/2)
S-OMGREF)/DELTO)
117 CONTINUE
3 CONTINUE
WRITE (6,10) (XX(I),I=1,MRX)
WRITE (6,20) (YY(I),I=1,MRY)
10 FORMAT (2X,'VOICI XX:',/,2X,8('*'),//,(2X,E12.3,///))
20 FORMAT (2X,'VOICI YY:',/,2X,8('*'),//,(2X,E12.3,///))
WRITE (6,30) ((NN(I,J),J=1,MRXM1),I=1,MRYM1)
30 FORMAT (2X,'VOICI NN:',/,2X,8('*'),//,(2X,9I3,///))
RETURN
END
SUBROUTINE TRANSP (CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,DELTO,DELTT,
SXPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN,IORD,OMGREF,INDIS)
C PHASE DE TRANSPORT DE LA IORDIEME ORDONNEE
DIMENSION CAREIX(ICAREX),CAREIY(ICAREY)
GAMAI=OMGREF+(IORD-1)*DELTO+DELTO/2
IF (INDIS.EQ.1) GO TO 118
CALL NEWTN(GAMAI)
118 CONTINUE
DO 3 I=1,ICAREX
IF ((CAREIX(I).EQ.XMOIN).OR.(CAREIX(I).EQ.XPLU)) GO TO 3
CAREIX(I)=CAREIX(I)+DELTT*FPRIM1(GAMAI)
IF (CAREIX(I).LT.XMOIN) CAREIX(I)=XMOIN
IF (CAREIX(I).GT.XPLU) CAREIX(I)=XPLU
3 CONTINUE
DO 4 I=1,ICAREY
IF ((CAREIY(I).EQ.YMOIN).OR.(CAREIY(I).EQ.YPLU)) GO TO 4
CAREIY(I)=CAREIY(I)+DELTT*FPRIM2(GAMAI)
IF (CAREIY(I).LT.YMOIN) CAREIY(I)=YMOIN
IF (CAREIY(I).GT.YPLU) CAREIY(I)=YPLU
4 CONTINUE
WRITE (6,40) IORD,(CAREIX(I),I=1,ICAREX)
WRITE (6,50) IORD,(CAREIY(I),I=1,ICAREY)
40 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',I3,'X APRES TRANSPORT:',/,2X,32('*'),//
S,(2X,E12.3,///))
50 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',I3,'Y APRES TRANSPORT:',/,2X,32('*'),//
S,(2X,E12.3,///))
RETURN
END
SUBROUTINE TRILEN (KP1,XIEM)
DIMENSION XIEM(KP1)
N1=KP1-1
DO 32 I=1,N1
II=I+1
DO 33 J=II,KP1
IF (XIEM(J).GE.XIEM(I)) GO TO 33
B=XIEM(I)

```



```

XIEM(I)=XIEM(J)
XIEM(J)=R
33 CONTINUE
32 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE DTERMI (XX,YY,MPX,MRY,CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY,
SNCHAPO,NCPASS,NCX,NCY,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN,IX1,IX2,IY1,IY2)
C
C A PARTIR DE XX*YY INITIAL, DE CAREIX ET CAREIY "AVANT"
C TRANSPORT, DE NNTILD, ON REMPLIT NCHAPO.
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL1,AVEEL2,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
COMMON NNTILD(21,21)
DIMENSION XX(MPX),YY(MRY),CAREIX(ICAREX),CAREIY(ICAREY)
DIMENSION NCHAPO(NCPASS,NCPASS)
C
C NCHAPO EST SUPPOSE EVENTUELLEMENT COMPLETE PAR X-,X+,Y-,Y+
INDIKX=0;INDIKY=0
IF (CAREIY(1).NE.YMOIN) INDIKY=INDIKY+1
IF (CAREIY(ICAREY).NE.YPLU) INDIKY=INDIKY+2
IF (CAREIX(1).NE.XMOIN) INDIKX=INDIKX+4
IF (CAREIX(ICAREX).NE.XPLU) INDIKX=INDIKX+8
K=INDIKX+INDIKY+1;ICXM1=ICAREX-1;ICYM1=ICAREY-1;ICXP1=ICAREX+1;
SICYP1=ICAREY+1
GO TO (1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4),K
1 CONTINUE
NCY=ICYM1;IY1=1;IY2=NCY;GO TO 9
2 CONTINUE
NCY=ICAREY;IY1=2;IY2=NCY;GO TO 9
3 CONTINUE
NCY=ICAREY;IY1=1;IY2=ICYM1;GO TO 9
4 CONTINUE
NCY=ICYP1;IY1=2;IY2=ICAREY
9 CONTINUE
GO TO (5,5,5,5,6,6,6,6,7,7,7,7,8,8,8,8),K
5 CONTINUE
NCX=ICXM1;IX1=1;IX2=ICXM1;GO TO 11
6 CONTINUE
NCX=ICAREX;IX1=2;IX2=NCX;GO TO 11
7 CONTINUE
NCX=ICAREX;IX1=1;IX2=ICXM1;GO TO 11
8 CONTINUE
NCX=ICXP1;IX1=2;IX2=ICAREX
11 CONTINUE
C
C ON VA METTRE LES ZEROS DE NCHAPO, RESTERA A ELIMINER CEUX
C QUI NE CONVIENNENT PAS
DO 12 I=1,NCY
DO 12 J=1,NCX
NCHAPO(I,J)=0
12 CONTINUE
C
C CLASSEMENT DE CAREIX(I) DANS XX ET DE CAREIY(I) DANS YY
C ET SORTIE DES COORDONNEES DE LA CASE DE NNTILD CORRESPONDANT
IX1M1=IX1-1
IY1M1=IY1-1
DO 13 J=IX1,IX2
DO 13 I=IY1,IY2
II=I-IY1M1
JJ=J-IX1M1
DO 14 IJX=1,MRX
IF (CAREIX(JJ).EQ.XX(IJX)) GO TO 15
14 CONTINUE

```

```

STOP1
15 CONTINUE
DO 16 IJY=1,MRY
IF (CAREIY(II).EQ.YY(IJY)) GO TO 17
16 CONTINUE
STOP2
17 CONTINUE
C ON REMPLIT PAR DES 1 EN SADRESSANT AU BON ELEMENT
C DE NNTILD, CEST A DIRE NNTILD(IJY+1,IJX+1)
IF (NNTILD(IJY+1,IJX+1).GT.0) NCHAPO(I,J)=1
13 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE RCHER (XX,YY,CAREIX,CAREIY,IORD,MRX,MRY,MRXP1,
SMRYP1,ICAREX,ICAREY)
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL1,AVEEL2,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
COMMON NNTILD(21,21)
DIMENSION XX(MRX),YY(MRY),CAREIX(MRX),CAREIY(MRY)
ICAREX=0;ICAREY=0
DO 5 I=2,MRYP1
DO 5 J=2,MRXP1
NA=NNTILD(I,J-1);NB=NNTILD(I-1,J-1);NC=NNTILD(I-1,J)
IF (NNTILD(I,J).GT.0) GO TO 6
IF (((NA.LE.0).AND.(NB.LE.0)).AND.(NC.LE.0)) GO TO 5
IF (((NA.LE.0).AND.(NB.GT.0)).AND.(NC.GT.0)) GO TO 5
IF (((NA.GT.0).AND.(NB.GT.0)).AND.(NC.LE.0)) GO TO 5
IF (ICAREY.EQ.0) ICAPEY=1;ICAREX=1;CAREIY(1)=YY(I-1);
SCAREIX(1)=XX(J-1);GO TO 5
CALL ELIM (XX(J-1),YY(I-1),CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY)
GO TO 5
6 CONTINUE
IF (((NA.GT.0).AND.(NB.GT.0)).AND.(NC.GT.0)) GO TO 5
IF (((NA.LE.0).AND.(NB.LE.0)).AND.(NC.GT.0)) GO TO 5
IF (((NA.GT.0).AND.(NB.LE.0)).AND.(NC.LE.0)) GO TO 5
IF (ICAREY.EQ.0) ICAREY=1;ICAREX=1;CAREIY(1)=YY(I-1);
SCAREIX(1)=XX(J-1);GO TO 5
CALL ELIM (XX(J-1),YY(I-1),CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY)
5 CONTINUE
C ON VA RANGER CAREIX ET CAREIY
IF (ICAREY.EQ.0) RETURN
CALL TRILEN (ICAREY,CAREIY)
CALL TRILEN (ICAREX,CAREIX)
C A PARTIR DE XX,YY,NNTILD ON A REMPLI ET RANGE CAREIX ET CAREIY
C AVANT TRANSPORT, AU NIVEAU IORD. SI AU CHOIX ICAREX OU ICAREIY
C SONT NULS ON A TROUVE LE NOUVEL UO.
WRITE (6,60) IORD,(CAREIX(I),I=1,ICAREX)
WRITE (6,70) IORD,(CAREIY(I),I=1,ICAREY)
60 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',I3,'X AVANT TRANSPORT:',/,2X,32('*'),
S//,(2X,E12.3,//))
70 FORMAT (2X,'VOICI CARRE',I3,'Y AVANT TRANSPORT:',/,2X,32('*'),
S//,(2X,E12.3,//))
RETURN
END
SUBROUTINE ELIM (XXJM1,YYIM1,CAREIX,CAREIY,ICAREX,ICAREY)
C ON ELIMINE XXJM1 OU YYIM1 SUIVANT QU'ILS SE TROUVENT OU NON
C RESPECTIVEMENT DANS CAREIX OU CAREIY
DIMENSION CAREIX(ICAREX),CAREIY(ICAREY)
DO 7 I=1,ICAREX
IF (CAREIX(I).EQ.XXJM1) GO TO 8
7 CONTINUE

```

```

    ICAREX=ICAREX+1;CAREIX(ICAREX)=XXJM1
8 CONTINUE
    DO 9 I=1,ICAREY
    IF (CAREIY(I).EQ.YYIM1) RETURN
9 CONTINUE
    ICAREY=ICAREY+1;CAREIY(ICAREY)=YYIM1
    RETURN
    END
    SUBROUTINE TERCAL (TABLO,ITPASS,NXTABL,NYTABL,CLASX,CLASY,
    SICLASX,ICLASY,TABX,TABY,IX1,IX2,IY1,IY2,XPLU,XMOIN,YPLU,YMOIN)
C ON VA CREER DES COLONNES PUIS DES LIGNES DANS TABLO, LE DECUUPANT
C UNIQUEMENT A LA RENCONTRE DUNE COORDONNEE COLONNE PUIS LIGNE DE
C CLASX PUIS CLASY NE FIGURANT PAS DANS LES COORDONNEES COLONNE
C PUIS LIGNE DE TABX PUIS TABY FOURNISSANT TABLO.
    DIMENSION CLASX(ICLASX),CLASY(ICLASY),
    STABX(1),TABY(1)
    INTEGER TABLO(ITPASS,ITPASS)
    NTOUR=-1
    ITABX=IX2-IX1+2
    ITABY=IY2-IY1+2
    DO 21 I=1,ICLASX
    DO 22 II=1,ITABX
    IF (CLASX(I).LE.TABX(II)) GO TO 23
22 CONTINUE
    II=ITABX+1;GO TO 24
23 CONTINUE
    IF (CLASX(I).EQ.TABX(II)) GO TO 21
24 CONTINUE
    IF (((II.EQ.1).AND.(CLASX(I).EQ.XMOIN)).OR.((II.EQ.ITABX+1).AND.
    S(CLASX(I).EQ.XPLU))) GO TO 21
    NXTABL=NXTABL+1
    NTOUR=NTOUR+1
    IW=IX1-2+II+NTOUR+1
    DO 25 I1=1,NYTABL
    DO 25 I2=IW,NXTABL
    I3=IW+NXTABL-I2
    TABLO(I1,I3)=TABLO(I1,I3-1)
25 CONTINUE
21 CONTINUE
    NTOUR=-1
    DO 26 I=1,ICLASY
    DO 27 II=1,ITABY
    IF (CLASY(I).LE.TABY(II)) GO TO 28
27 CONTINUE
    II=ITABY+1;GO TO 29
28 CONTINUE
    IF (CLASY(I).EQ.TABY(II)) GO TO 26
29 CONTINUE
    IF (((II.EQ.1).AND.(CLASY(I).EQ.YMOIN)).OR.((II.EQ.ITABY+1).AND.
    S(CLASY(I).EQ.YPLU))) GO TO 26
    NYTABL=NYTABL+1
    NTOUR=NTOUR+1
    IW=IY1-2+II+NTOUR+1
    DO 31 I1=1,NXTABL
    DO 31 I2=IW,NYTABL
    I3=IW+NYTABL-I2
    TABLO(I3,I1)=TABLO(I3-1,I1)
31 CONTINUE
26 CONTINUE
    RETURN

```

```

END
FUNCTION UZERO (X,Y)
IF (ABS(X).LE.10.) UZ1=-0.2*SIN(3*X)+0.6;GO TO 1
IF (X.LT.0.) UZ1=0.8;GO TO 1
UZ1=0.4
1 CONTINUE
IF (ABS(Y).LE.10.) UZ2=-0.2*COS(3*Y)+0.6;GO TO 2
IF (Y.LT.0) UZ2=0.8;GO TO 2
UZ2=0.4
2 CONTINUE
UZERO=AMAX1(UZ1,UZ2)
RETURN
END
FUNCTION FPRIM1 (X)
FPRIM1=X
RETURN
END
FUNCTION FPRIM2 (Y)
FPRIM2=Y
RETURN
END
SUBROUTINE ONDINE (BX1,BX2,BY1,BY2,IZI,INDIS)
C TRACE DE UZERO
ACHX=(BX2-BX1)/10.
ACHY=(BY2-BY1)/10.
IZI=IZI+1
IF (IZI.EQ.6) WRITE(6,800);STOP
800 FORMAT (2X,'ON A UTILISE TOUTES LES VARIETES '
S,'DE TRAIT POSSIBLES-LE DESSIN DEVIENDRAIT '
S,'ILLISIBLE-ARRET')
WRITE (3,10) IZI
10 FORMAT ('TIRET ',I3)
DO 1 I=1,11
Y=BY2-(I-1)*ACHY
ANISOX=20.-40./(1.+3./160.*Y-3./8.)
ANISOO=1.-1./(1.+3./160.*Y-3./8.)
WRITE (3,50) ANISOX,ANISOO
50 FORMAT ('ANISOTROPE',1X,E12.3,1X,'20.00',1X,E12.3,1X,
S'1.00')
IF (INDIS.EQ.1) Z=UZERO(BX1,Y);GO TO 11
Z=VZERO(BX1,Y)
11 CONTINUE
WRITE(3,20) BX1,Z
20 FORMAT ('SAUT',1X,E12.3,1X,E12.3,/, 'TRACE')
DO 2 J=1,11
X=BX1+(J-1)*ACHX
IF (INDIS.EQ.1) Z=UZERO(X,Y);GO TO 4
Z=VZERO(X,Y)
4 CONTINUE
WRITE (3,30) X,Z
30 FORMAT (1X,E12.3,1X,E12.3)
2 CONTINUE
WRITE (3,40)
40 FORMAT ('*')
1 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE RIIEN (BW)
IF (BW.GT.20.) BW=20.
IF (BW.LT.-20.) BW=-20.

```

```

RETURN
END
FUNCTION FPRIM1 (U)
FPRIM1=F1PRIM(U)/G1PRIM(U)
RETURN
END
FUNCTION FPRIM2 (U)
FPRIM2=F2PRIM(U)/G2PRIM(U)
RETURN
END
FUNCTION VZERO (X,Y)
Z=UZERO(X,Y)
VZERO=GEE(Z)
RETURN
END
SUBROUTINE NEWTN (GAMAI)
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL1,AVEEL2,CA,EM,XI,OME,CAPTI,TEE
EPS=0.001
GUR=0.
GAMAK=GAMAI
GO TO 778
777 CONTINUE
IF (GUR.NE.0.) WRITE (6,10);STOP
GAMAK=1./XI-0.01
GUR=1.
778 CONTINUE
DO 1 I=1,20
BUFR=GAMAK
IF (1.-XI*GAMAK.LE.0) GO TO 777
GAMAK=GAMAK-((GEE(GAMAK)-GAMAI)/G1PRIM(GAMAK))
BUFR=ABS(GAMAK-BUFR)/BUFR
IF (BUFR.LT.EPS) GAMAI=GAMAK;RETURN
1 CONTINUE
WRITE (6,10);STOP
10 FORMAT (2X,'NEWTON ECHOUÉ')
END
FUNCTION F1PRIM (X)
C POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D'UN TYPE DIFFERENT (PAS
C D'EXTERNAL).
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL1,AVEEL2,CA,EM,XI,OME,
SCAPTI,TEE
F1PRIM=CAEL*VEEL1(TVEEL,AVEEL1)*XI/EM/CA*EXP(
SOME/CAPTI/TEE*(1.-2.*XI*X))*(1./(1.-XI*X)**2
S-2.*OME*X/X/CAPTI/TEE/(1.-XI*X))
RETURN
END
FUNCTION F2PRIM (X)
C POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D'UN TYPE DIFFERENT (PAS
C D'EXTERNAL).
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL1,AVEEL2,CA,EM,XI,OME,
SCAPTI,TEE
F2PRIM=CAEL*VEEL2(TVEEL,AVEEL2)*XI/EM/CA*EXP(
SOME/CAPTI/TEE*(1.-2.*XI*X))*(1./(1.-XI*X)**2
S-2.*OME*X/X/CAPTI/TEE/(1.-XI*X))
RETURN
END
FUNCTION G1PRIM (X)
C POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D'UN TYPE DIFFERENT (PAS
C D'EXTERNAL).
COMMON CAES,CAEL,TVEEL,AVEEL1,AVEEL2,CA,EM,XI,OME,

```

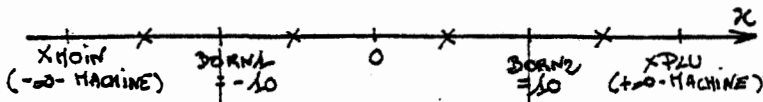
```

SCAPTI, TEE
G1PRIM=F1PRIM(X)/VEEL1(TVEEL, AVEEL1)+CAES
RETURN
END
FUNCTION G2PRIM (X)
C POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D'UN TYPE DIFFERENT (PAS
C D'EXTERNAL).
COMMON CAES, CAEL, TVEEL, AVEEL1, AVEEL2, CA, EM, XI, OME,
SCAPTI, TEE
G2PRIM=F2PRIM(X)/VEEL2(TVEEL, AVEEL2)+CAES
RETURN
END
FUNCTION VEEL1 (X, AVEEL1)
C CAEL*VEEL1 EST LA VITESSE DE DARCY SUIVANT X;
C ELLE PEUT CHANGER DE SIGNE.
VEEL1=AVEEL1
RETURN
END
FUNCTION VEEL2 (Y, AVEEL2)
C CAEL*VEEL2 EST LA VITESSE DE DARCY SUIVANT Y;
C ELLE PEUT CHANGER DE SIGNE.
VEEL2=AVEEL2
RETURN
END
FUNCTION GEE (X)
C POURRA CEPENDANT ETRE PRISE D'UN TYPE DIFFERENT.
COMMON CAES, CAEL, TVEEL, AVEEL1, AVEEL2, CA, EM, XI, OME, CAPTI,
STEE
GEE=CAEL/EM/CA*XI*X/(1.-XI*X)*EXP(OME/CAPTI/TEE*
S(1.-2.*XI*X))+CAES*X
RETURN
END

```

CALCUL UTILISÉ ICI :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0,2 & \text{POUR } x \geq 10 \\ 0,4 + x + 0,6 & \text{POUR } |x| \leq 10 \\ 0 & \text{POUR } x \leq -10 \end{cases} \cdot f(u) = \frac{u^2}{2}$$

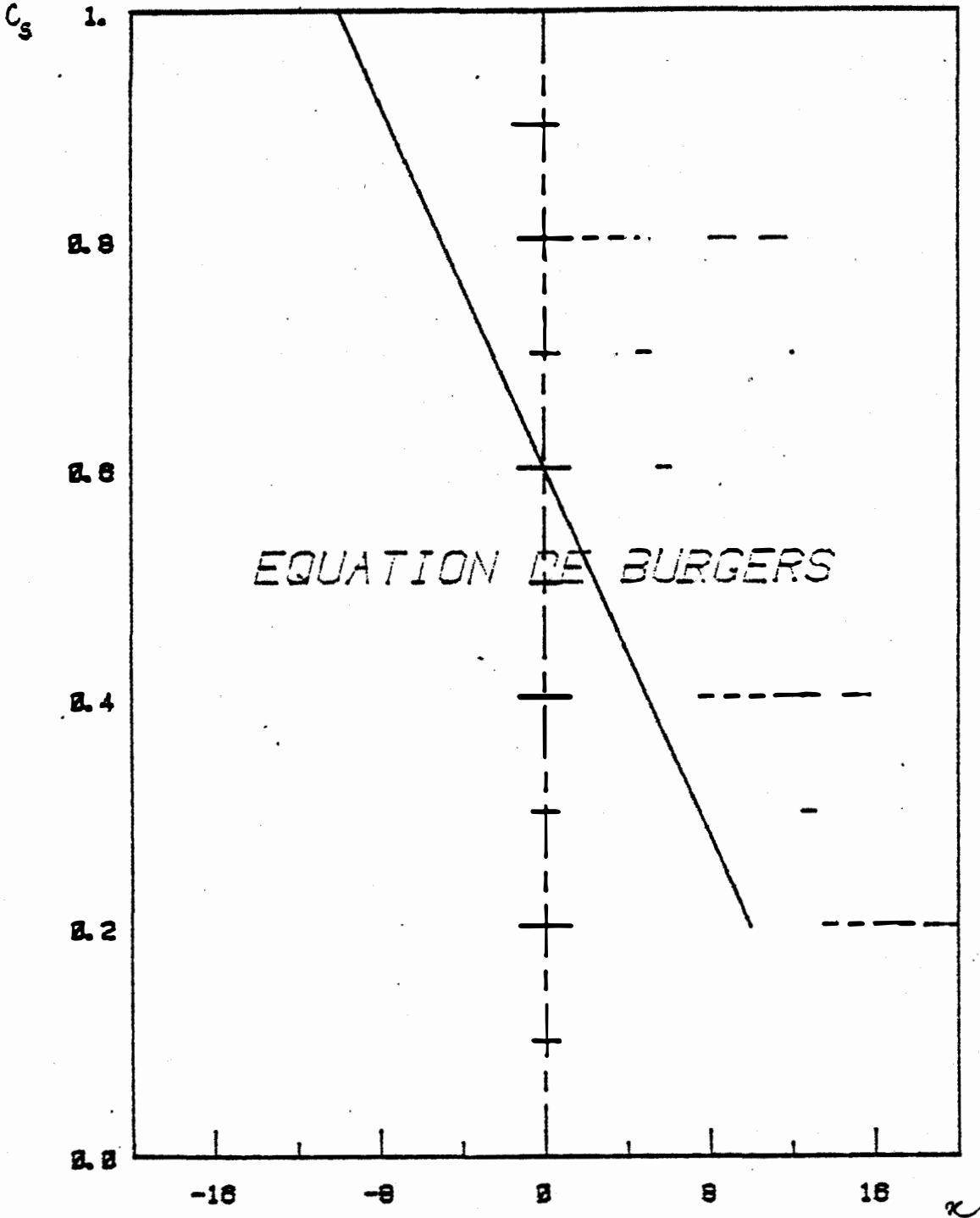


ON CONSTRUIT À PARTIR DE LA VALEUR DE u_0 EN CES POINTS MILIEUX LA FONCTION EN ESCALIER APPROCHANT u_0 .

FENÊTRE D'OBSERVATION DE u_0 .

GUY. ECOLE. ABS
1983/10/28 1753:23
fichier: GRIGRI

- - - - - SOLUTION APPROCHÉE À $\epsilon = 10$.
- - - - - SOLUTION APPROCHÉE À $\epsilon = 30$.
- — — — — CONDITION INITIALE (NON APPROCHÉE) ENTRE DORN1 ET DORN2.



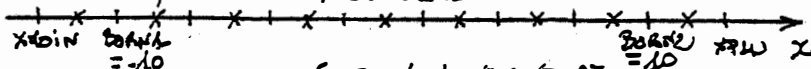
$C_s \equiv$ CONCENTRATION EN COMPOSANT CHIMIQUE DANS LE SOLIDE.
 $x \equiv$ DISTANCES.

CALCUL UTILISE ICI :

LES CONSTANTES : $k_0 = 0,4$, $k_L = 0,4$, $K = 10^{-3}$, $M = 10^6$, $\xi = 1,2$,
 $\omega = 10^{20}$, $K = 1,36 \times 10^{23}$, $T = 700$.

$V_L(t) = -0,0485t + 1$ (MÈTRES/AN OU D'AUTRES UNITÉS).

$u(x) = \begin{cases} 0,4 & \text{POUR } x \geq 10 \\ -0,02x + 0,6 & \text{POUR } |x| \leq 10 \\ 0,5 & \text{POUR } x \leq -10 \end{cases}$



--- C_5 POUR $t = 10$ ET $t = 20$ (PAR $V(x,t)$)
 (SORTIE RÉELLE EN BLEU).

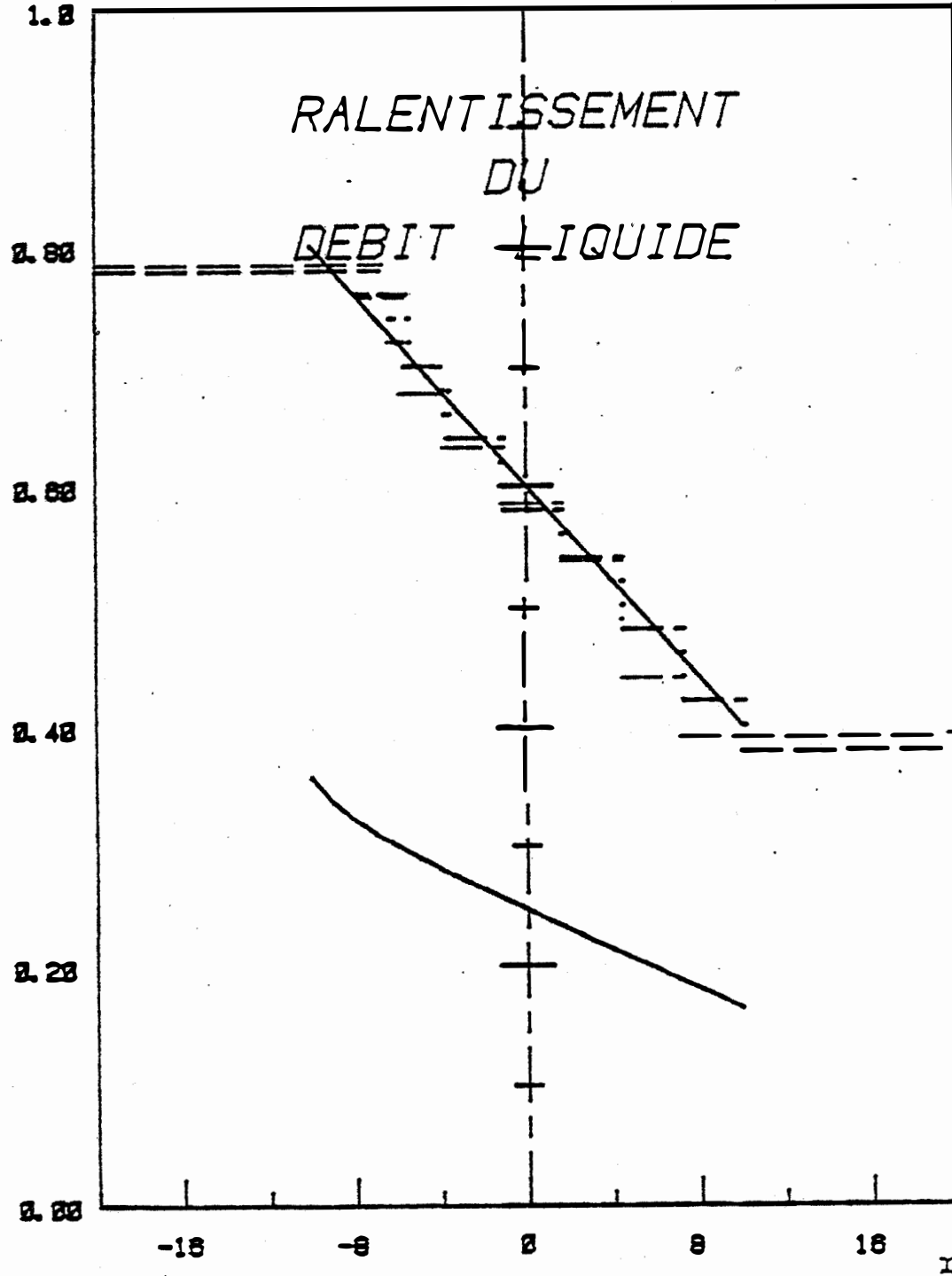
--- C_5 POUR $t = 10$ ET $t = 20$ (PAR $u(x,t)$)
 (EN + GRAS, SORTIE RÉELLE EN VERT).

--- $u(x,0)$ ET $v(x,0)$ NON APPROCHES.

AVEC UNE POROSITÉ ET UNE VITESSE TRÈS GRANDES, IL N'Y A QUE TRÈS PEU DE SARRA FORMÉ.

GUY. ECOLE. ABS
 1983/11/02 1742:31
 fichier: GWGW

C_5



CALCUL UTILISE ICI:

LES VITESSES CONSTANTES QUE GWEN

$$V_1(t) = 10 (-0,0495t + 1)$$

$$U_0(x,t) = \max(U_1, U_2) \text{ AVEC } U_2 = \begin{cases} 0,4 & \text{POUR } x \geq 10 \\ -0,02x + 0,6 & \text{POUR } |x| \leq 10 \\ 0,8 & \text{POUR } x \leq -10 \end{cases}$$

$$U(x,t) = 0,6 \text{ SUR }]-10, 10[\text{ ET } U \in]0, 10[\text{ ET }]10, 20[$$

----- C_3 POUR $t=10$ (PAR $U(x,t)$).

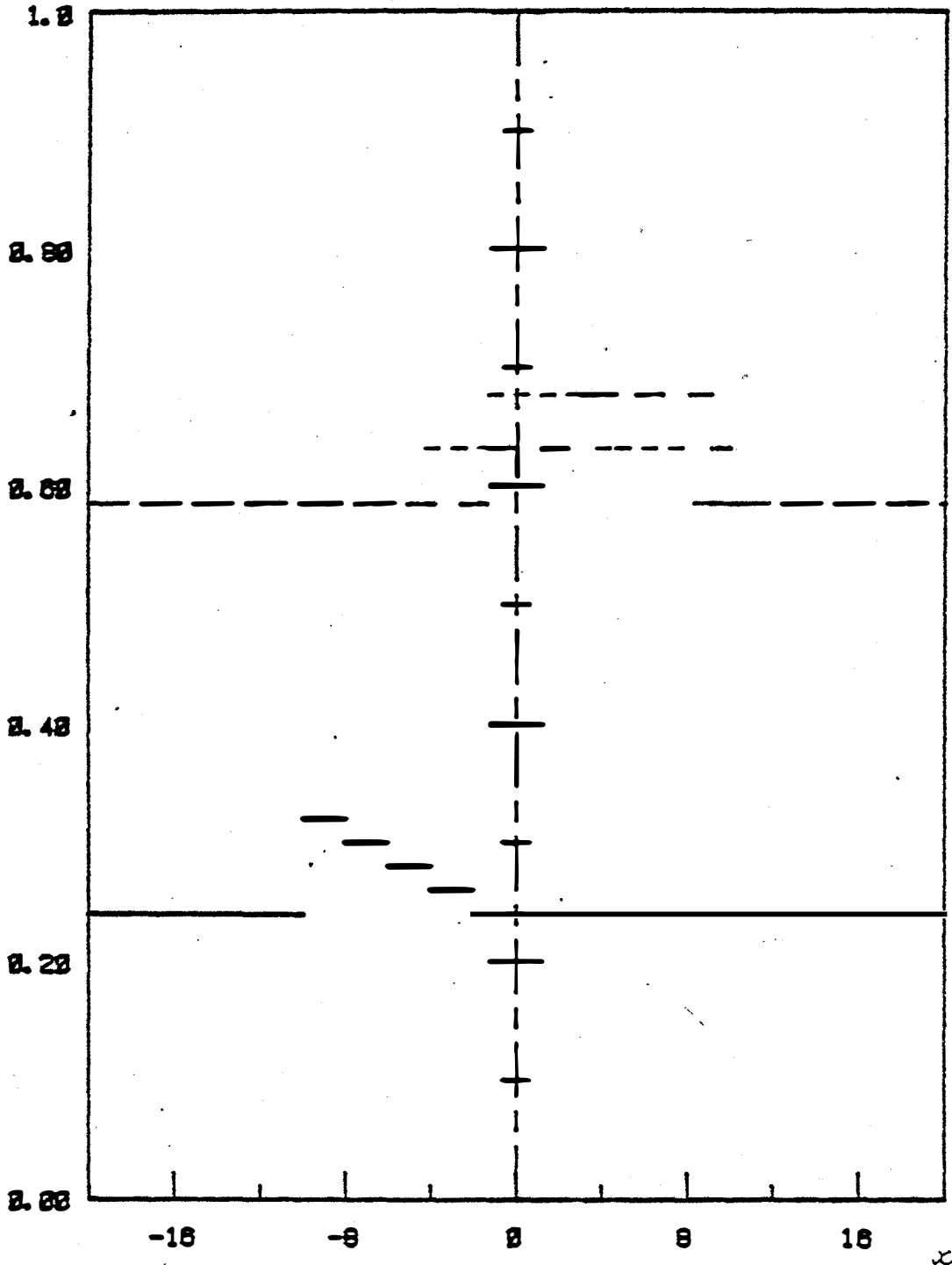
----- C_3 POUR $t=20$ (PAR $U(x,t)$).

_____ $U(x,0)$ (NON APPROCHEE).

GUY. ECOLE. ABS
1983/11/02 1745:14
fichier: GXGX1

ON A UN PHENOMENE DE DILUTION.

C_3



CALCUL UTILISE ICI :

LES MEMES QUANTITES QUE GXGXL,

SAUF

----- C_3 POUR $t=10$ (PAR $U(x,t)$)

----- C_3 POUR $t=20$ (PAR $U(x,t)$)

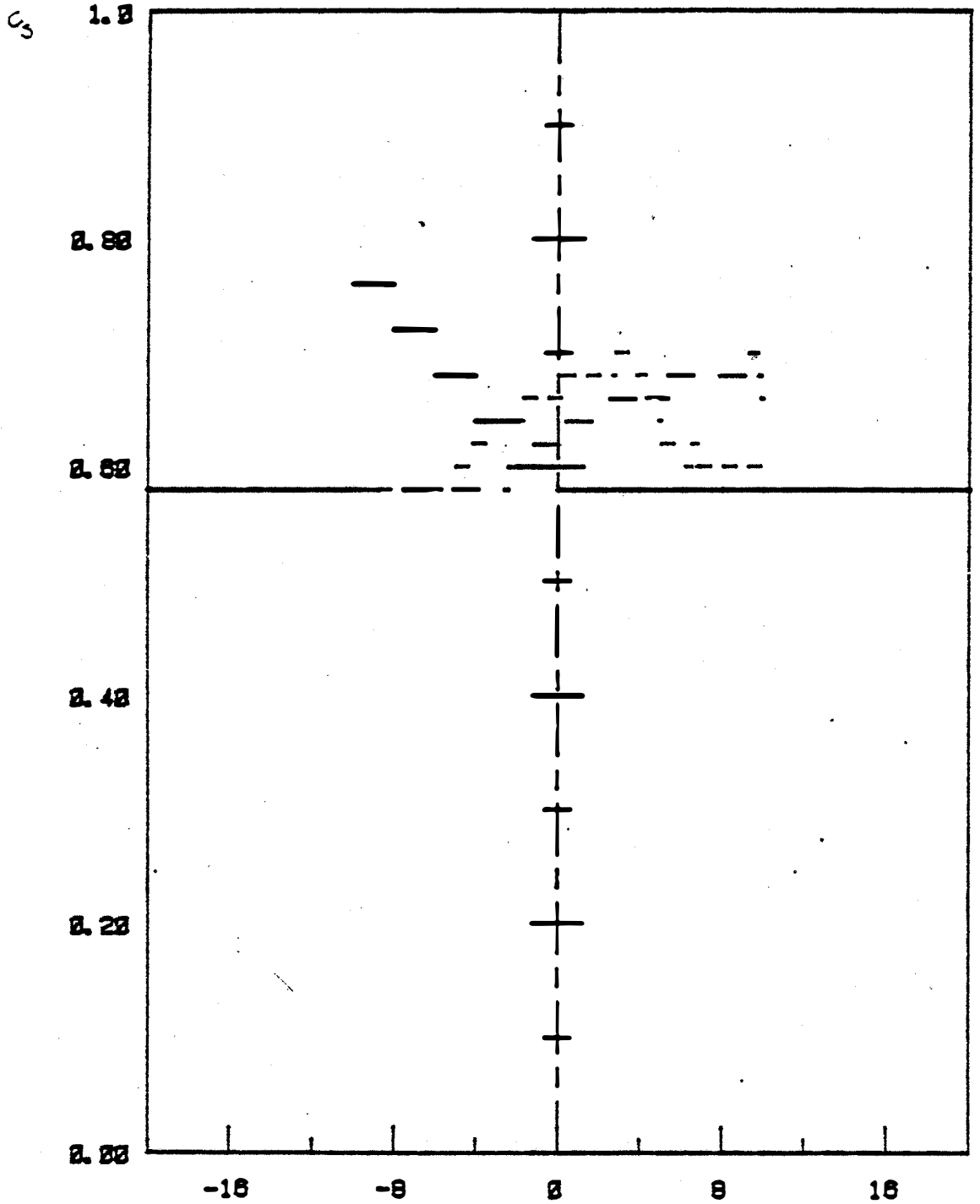
----- $U(x,0)$ (NON APPROCHEE)

GUY.ECOLE.ABS

1983/10/28 1822:11

fichier: GXGX2

ON A UN PHENOMENE DE DILUTION :



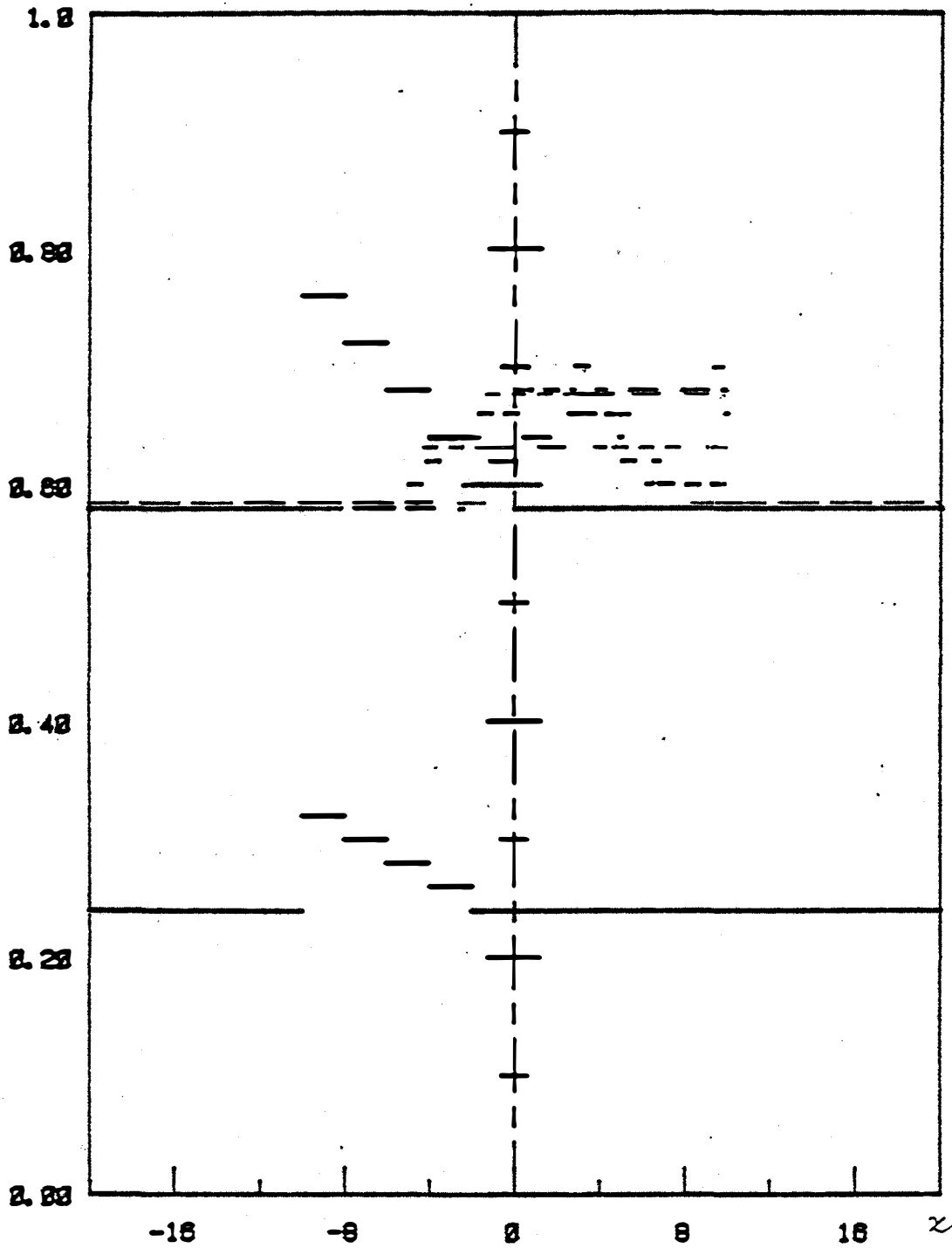
CALCUL UTILISE ICI:

SUPERPOSITION POUR COMPARAISON DE
GXGA ET GXGU -

GUY. ECOLE. ABS
1983/11/02 1702:08

fichier: GXGX3

C₃



CALCUL UTILISE ICI :

$$U_0(x, y) = \max(U_{21}, U_{22})$$

$$Avec \begin{cases} U_{21} = \begin{cases} 0,8 & \text{pour } x < -10 \\ -0,2 \sin(3x) + 0,6 & \text{pour } |x| \leq 10 \\ 0,4 & \text{pour } x \geq 10 \end{cases} \\ U_{22} = \begin{cases} 0,8 & \text{pour } y < -10 \\ -0,2 \cos(3y) + 0,6 & \text{pour } |y| \leq 10 \\ 0,4 & \text{pour } y > 10 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1(u) = 2/2 \\ P_2(u) = 2/2 \end{cases}$$

ON PREND

A $t=0$: X_{P11}

$BOANX1 = +10$

0,8	0,7	0,7	0,4
0,8	0,7	0,7	0,4
0,8	0,7	0,7	0,7
0,8	0,8	0,8	0,8

$BOANX1 = -10$

0,8	0,7	0,7	0,7
0,8	0,8	0,8	0,8

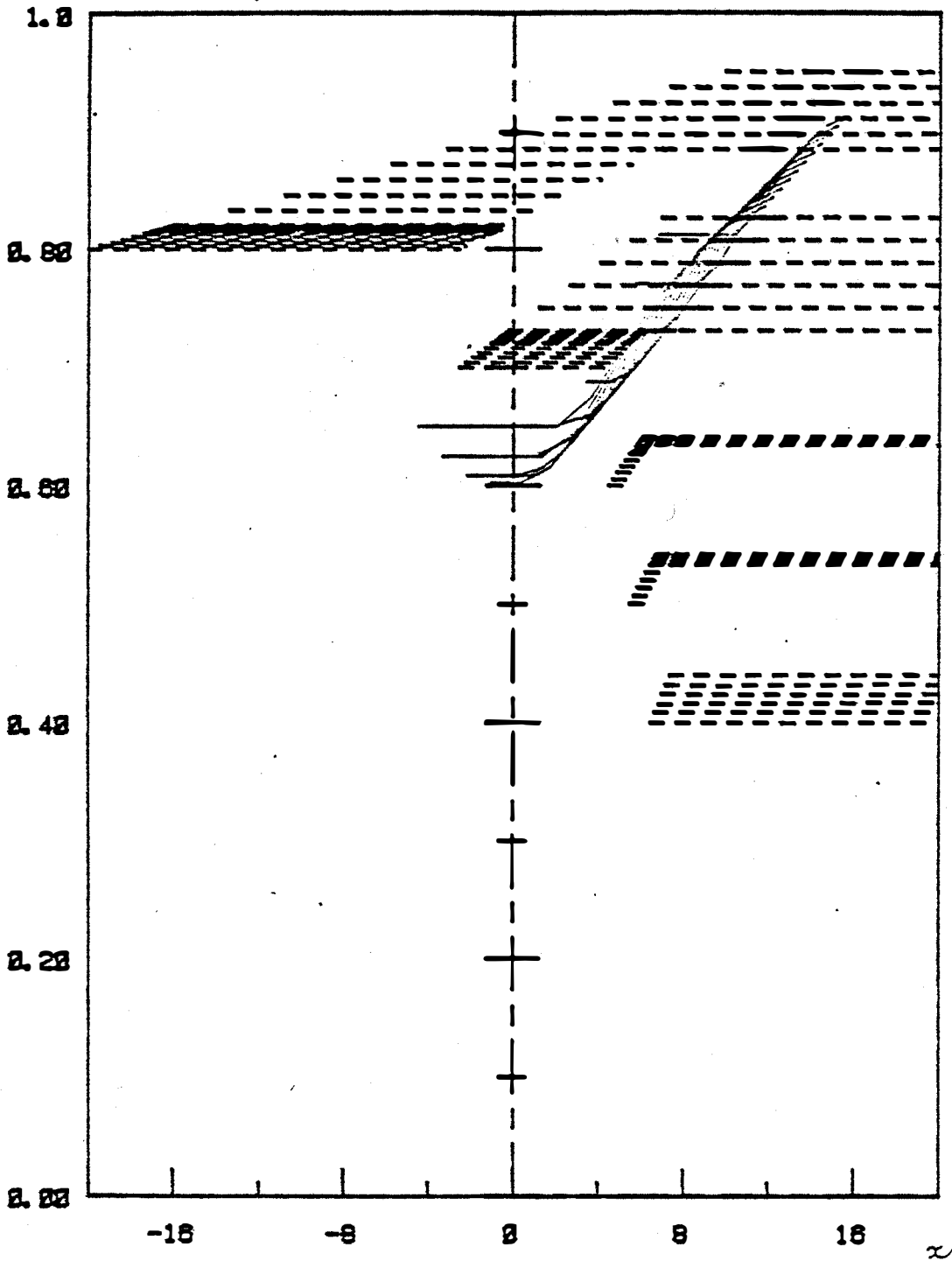
X_{P11}

$-10 \ 0 \ +10 \ X_{P21}$
 $BOANX1 \ BOANX2$

--- SOLUTION APPROCHEE POUR $t=10$
 ——— U_0 (NON APPROCHEE) ENTRE $[BOANX1, BOANX2]$ X $[BOANX1, BOANX2]$

GUY. ECOLE. ABS
 1983/11/02 1732:23
 fichier: GRAPU1

C_3



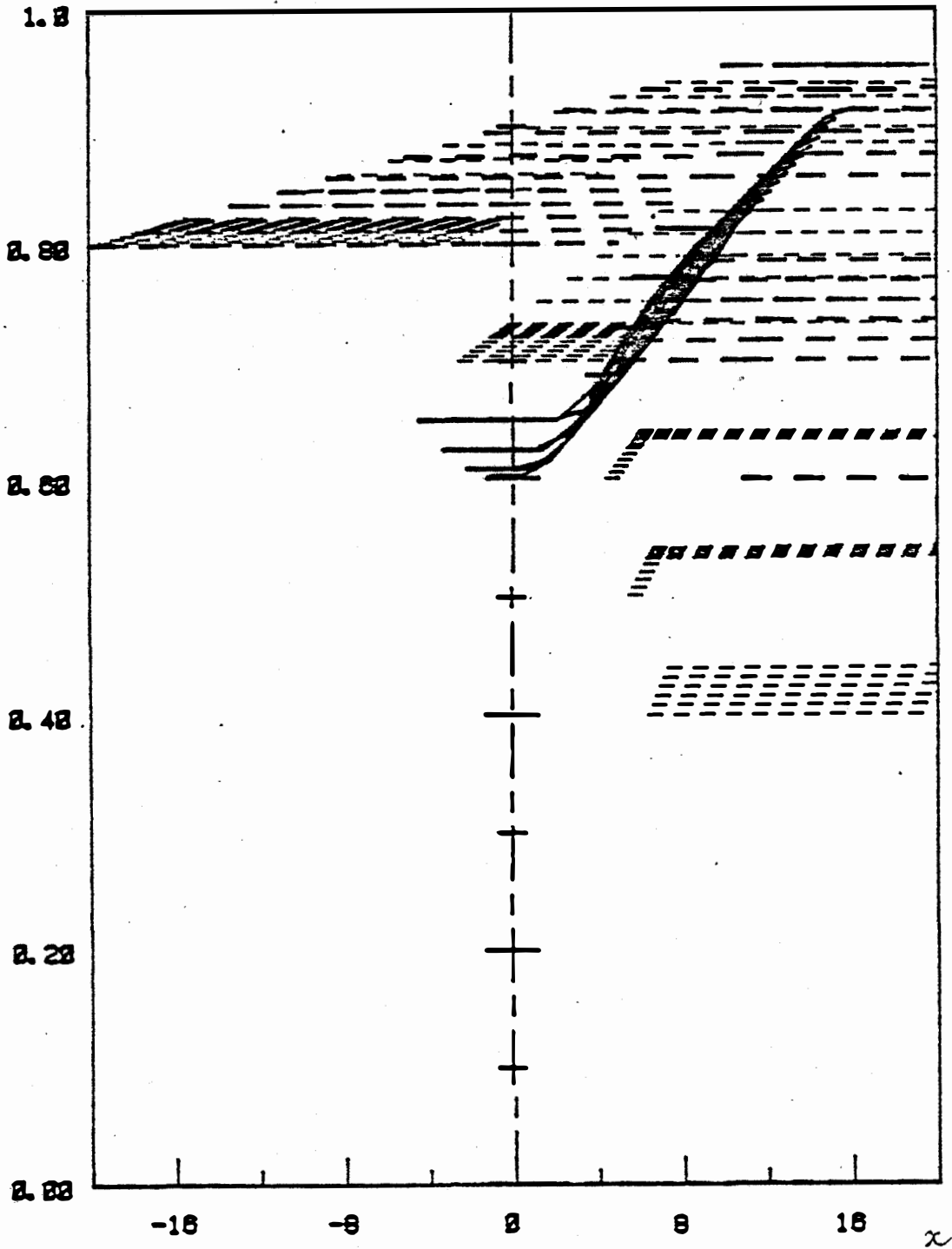
CALCUL UTILISÉ ICI:

LES MÊMES DONNÉES QUE GRAPU1,
AVEC

GUY.ECOLE.ABS
1983/11/02 1739:17
fichier: GRAPU2

- SOLUTION APPROCHÉE
POUR $t=10$
- SOLUTION APPROCHÉE
POUR $t=20$
- U_0 (NON APPROCHÉE)
ENTRE [BORNY1, BORNY2]
X [BORNY1, BORNY2]

C5



CALCULA UTILISE ICI:

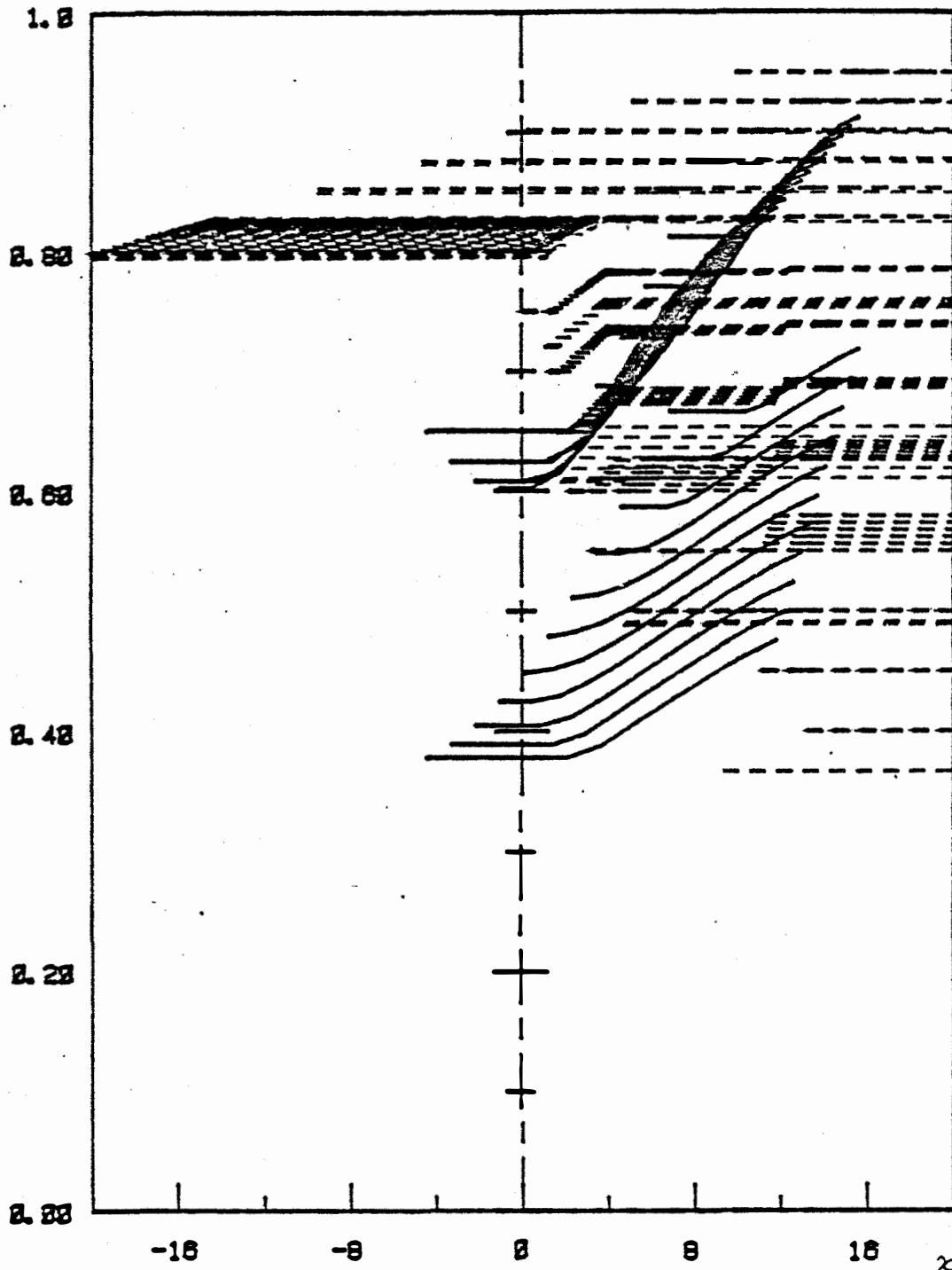
LES VITESSES CONSTANTES QUE GUYU,
LA CONDITION INITIALE DE GAGRA.

$$V_1^L(t) = 5, \quad V_2^L(t) = 10.$$

- - - - - C_5 POUR $t=10$ (PAR $V(x,t)$)
(SORTIE REELLE EN BLEU)
- - - - - C_5 POUR $t=10$ (PAR $U(x,t)$)
(EN +GARS, SORTIE REELLE EN VERT)
- — — — — $U(x,0)$ ET $V(x,0)$ (NON APPROCHÉES)
ENTRÉE [BORN11, BORN12]
X [BORN14, BORN12]

GUY. ECOLE. ABS 1983/11/02 1717:05
fichier: GAGR4

C_5



C O N C L U S I O N

A partir des modèles fournis on peut imaginer beaucoup de programmes, certains de ceux-ci sont détaillés mais non programmés dans ce qui précède.

Cependant une tâche importante était de fournir un lien, pour notre problème, entre mathématicien et géologue et de donner à ce dernier un modèle suffisamment complexe pour envisager la grande diversité des cas géologiques.

De plus, ce qui est intéressant dans ce problème et qui le rend plutôt plus complet que les modèles hyperboliques classiques de dynamique des gaz, tient au fait de l'association substrat-composants chimiques.

Il est naturellement exclu en deux années exactement de faire un tour suffisant de la question... et il faut bien s'arrêter un jour!



-BIBLIOGRAPHIE-

- 1- (C1.) BARDOS, (A.Y.) LEROUX et (J.C.) NEDELEC : "First Order Quasilinear Equations with Boundary Conditions" Rapport interne n^o 38, Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, 1978, 17 p. .
- 2- (R.G.) BARTLE, (J.) WILEY & Sons inc : "The Elements Of Intégration", New-york, London, Sydney, 1966.
- 3- (S.) BERMAN : Trans. A.M.S., 1979.
- 4- (A.S.) BESICOVITCH : "On The Fundamental Geometric Properties of Linearly Measurable Plane Sets", Math. Annln, 98, 1928, P. 422-64, etc... .
- 5- (Y.) BRENIER : "Calcul des Lois de Conservation Scalaires par la Méthode de Transport-Ecoulement", Rapport de Recherche I.N.R.I.A. n^o 53, Février 1981.
- 6- (Y.) BRENIER : "Approximation de Solutions Entropiques d'Equations d'Evolution Semi-Linéaires", Rapport de Recherche I.N.R.I.A. n^o 60, Mars 1981.
- 7- (C.) CARATHEODORY : "Theory of Functions", vol. II, 1960.
- 8- (L.) CESARI : "Sulle Funzioni a Variazione Limitata", Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa Sc. Fis. Mat., II Ser. 5, 1936, P. 299-313.
- 9- (A.R.) COOPER Jr. : "Vector Space Treatment of Multicomponent Diffusion", Publications of Cleveland University, Ohio 44 106, 1974, P. 15-30.
- 10- (J.) DIEUDONNE : "Eléments d'Analyse", Gauthier-Villars, Fascicule 23, Tom. 3, Chapitres 16 et 17, 1974, 367 p. .
- 11- (H.) ENGELKE : "Chemische Diffusion und Brechungsindexverlauf in Zusammengeschmolzenen Gläsern" Thesis, Universität Erlangen-Nürnberg, 1972.

- 12- (H.) FEDERER : "An Analytic Characterisation of Distribution whose Partial Derivatives Are Representable by Measures", Bull. Amer. Math. Soc. 60, 1954, 339 p. .
- 13- (G.W.) FISHER & (D.) ELLIOT : "Criteria for Quasi-Steady Diffusion and Local Equilibrium in Metasomatism, Geochemical Transports and Kinetics", Carnegie Inst. Washington, P. 231-259.
- 14- (W.H.) FLEMING & (R.) RISHEL : "An Integral Formula for Total Gradient Variation", Arch. Math., Vol. XI, 1960, P. 218-222.
- 15- (M.) FONTEILLES : "Les Mécanismes de la Métasomatose", Bull. Minéral, 101, 1978, P. 166-194.
- 16- (I.M.) GEL'FAND : "Some Problems in the Theory of Quasilinear Equations", Math. U.S.S.R. Sbornik, 1960, P. 295-381.
- 17- (E. De) GIORGI : "Su una Teoria Generale della Misura $(r-1)$ -Dimensionale in uno Spazio ad r Dimensioni", Ann. Mat. Pura Appl. (4) 36, 1954, P. 191-213.
- 18- (S.R. De) GROOT & (P.) MAZUR : "Non Equilibrium Thermodynamics", Chapitre 11, North Holland Publ.Co, Amsterdam, 1969.
- 19- (J.J.) GRUFFAT : "Equilibre d'un Fluide avec une Roche", Ecole des Mines de Saint-Etienne, 1983.
- 20- (B.) GUY : "Pétrologie et Géochimie Isotrope (S.C.O.) des Skarns à Scheelite de Costabonne (Pyrénées Orientales, France)", Thèse de Doct. Ing. en Sciences et Techniques Minières, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1979, 270 p. .
- 21- (B.) GUY : "Etude Géologique et Pétrologique du Gisement de Costabonne", Mémoire du B.R.G.M. n^o 99, Minéralisations Liées aux Granitoïdes, 2^e partie, La Genèse des Skarns à Tungstène des Pyrénées, Ch. 5, P. 236-250.

- 22- (B.) GUY, (M.) FONTEILLES et (P.) SOLER : "Etude du Processus de Formation des Gîtes de Skarns de Salau et Costabonne", Mémoire du B.R.G.M. n^o 99, Ch. 7, P. 259-282.
- 23- (B.) GUY : " Certaines Alternances Récurrentes Rencontrées dans les Skarns et les Structures Dissipatives au Sens de Prigogine : un Rapprochement", C.R. Acad. Sc., Paris, 292, II, 1981, P. 413-416.
- 24- (B.) GUY : "A Contribution to the Theory of Infiltration Metasomatic Zoning", Ecole Nationale Supérieure de Mines de Saint-Etienne, 1981, 58p. .
- 25- (B.) GUY : "Un Modèle de Transport Non-Linéaire en Géologie : La Transformation Chimique d'une Roche sous l'Action d'un Fluide. L'Exemple des Skarns", Groupe de Travail Bifurcations, Université et Ecole des Mines de Saint-Etienne, 1981, P. 69-81.
- 26- (T.H.) HILDEBRANDT : "Introduction to the Theory of Integration", Pure and Applied Mathematics, Academy Press New-York and London, 1973, 385p. .
- 27- (A.) HOFMANN : "Chromatographic Theory of Infiltration Metasomatism and its Application to Feldspars", Am. J. Sci. 272, 1972, P. 69-90.
- 28- (D.M.) KERRICK : "The Genesis of Zoned Skarns in the Sierra Nevada", California, Journal of Petrology, Vol. 18, Part 1, 1977, P. 144-181.
- 29- (A.) KOLMOGOROV et (S.) FOMINE : "Eléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle", Editions Mir-Moscou, 1977, 536p. .
- 30- (D.S.) KORZHINSKII : " Theory of Metasomatic Zoning", Clarendon Press Oxford, 1970, 162p. .
- 31- (K.) KRICKEBERG : "Distributionen, Funcktionen Beschränkter Variation und Lebesguescher inhalt nicht Parametrischer Flächen", Ann. Mat. Pura Appl. (4) 44, 1957, P. 105-133.

- 32- (S.N.) KRUKOV : " First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables", Mat. Sbornik, Tom. 81 (123), Vol.10, N^o 2, 1970, P. 217-242.
- 33- (P.) LAX : " Shock Waves and Entopy", Courant Institute of Mathematical Sciences A.E.C. Computing and Applied Mathematics Center, New-York University, 1971, P. 603-634.
- 34- (J.) LELONG-FERRAND et (J.M.) ARNAUDIES (par ex.) : "Analyse", Tom. 2, Dunoud, 1972.
- 35- (A.Y.) LEROUX : "Approximation de Quelques Problèmes Hyperboliques Non-Linéaires", Thèse, Université de Rennes, 1979, 286 p. .
- 36- (J.T.) LIYAMA : "Contribution à l'Etude des Equilibres Sub-Solidus du Système Ternaire Orthose-Albite-Anorthite à l'Aide de Réactions d'Echanges d'Ions Na-K au Contact d'une Solution Hydrothermale", Bull. Soc. Fr. Minér. Crist., 89, 1966, P. 442-454.
- 37- (B.) MANDELBROT : "Les Objets Fractals-Forme, Hasard et Dimension", Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Flammarion, 1975, 190 p. .
- 38- (G.) MARSILY : "Cours d'Hydrogéologie, Ecole des Mines de Paris, 1980, 273p. .
- 39- (G.) MATHERON : "Elements pour une Théorie des Milieux Poreux", Masson, 1967, 166p. .
- 40- (V.) MIKAILOV : "Equations aux Dérivées Partielles", Editions Mir-Moscou, 1980, 390p. .
- 41- (M.) MIRANDA : "Distribuzioni Avente Derivate Misme Insieme di Perimetro Localmente Finito", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 18, 1964, P. 27-56.
- 42- (M.E.) MUNROE : "Introduction to Measure and Intégration", Addison-Weshley, Reading, Mass., U.S.A., 1953, 310 p. .

- 43- (Y.) OISHI : " Curved Diffusion Paths in Ternary Systems", Préprint of 1st. U.S.-Japan Seminar on Basic Science of Ceramics, Tokyo, Japan, 1969.
- 44- (Y.) OISHI : " Analysis of Ternary Diffusion ; Solutions of Diffusions Equations and Calculated Concentration Distribution", The Journal of Chemical Physics, Vol. 43, n^o 5, 1965, P. 1611-1620.
- 45- (Y.) OISHI : "Analysis of Ternary Diffusion : Diffusion Equations in Terms of Intrinsic Diffusion Coefficients", 1965.
- 46- (O.A.) OLEINIK : "Uniqueness and Stability of the Generalized Solution of the Cauchy Problem for a Quasilinear Equation", Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2,33, 1963, P. 285-290.
- 47- (O.A.) OLEINIK : "Discontinuous Solution of Non-Linear Differentiel Equations", Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2,26, 1963, P. 95-172.
- 48- (M.) PERRIN et (B.) GUY : "Quelques Aspects de la Transformation Chimique des Roches sous l'Action de Solutions (Métasomatose)", Document de Présentation des Activités du Département de Géologie, E.M.S.E., Ch. 4; 1980, 6 p. .
- 49- (G.) POLYA : "Sur un Problème d'Orientation Probabiliste sur un Réseau Routier", Journal Math. Annalen, 1921.
- 50- RIST et BONNIVARD : "Réduction d'un Lit d'Oxydes de Fer par un Gaz", 1^o Partie, Etude Théorique dans l'Hypothèse de Vitesses Infinies de Réaction, Revue de Métallurgie, 60, 1963, P. 23-37.
- 51- (C.A.) ROGERS : "Hausdorff Measures", Cambridge University Press, 1970, 179 p. .
- 52- (J.) ROUX : "Un Modèle de Solution Solide Multi-Site", dans Hautes Températures et Sciences de la Terre, C.N.R.S., P. 61-71.

- 53- (F.) SAUER : Max-Planck-Institut für Biophysik, Frankfurt, 1973.
- 54- (L.) SCHWARTZ : "Théorie des Distributions", I; II, Actual Sc. Ind., 1091, Paris 1950, 1121, Paris 1951.
- 55- (A.K.) VARSHNEYA : "Multicomponent Diffusion in Glasses", Thesis, Case Western Reserve University, 1970.
- 56- (A.I.) VOL'PERT : "The Spaces BV and Quasilinear Equations", Math. U.S.S.R.-Sbornik, Tom. 73 (115), Vol. 2, n^o 2, 1967, P. 225-267.