



HAL
open science

Estimation et détection conjointe pour la fusion d'informations

Serge Reboul

► **To cite this version:**

Serge Reboul. Estimation et détection conjointe pour la fusion d'informations. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2014. tel-01067478v2

HAL Id: tel-01067478

<https://theses.hal.science/tel-01067478v2>

Submitted on 23 Sep 2014 (v2), last revised 24 Sep 2014 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches

Estimation et détection conjointe pour la fusion d'informations

Serge REBOUL

21 Mai 2014

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Jean-Yves TOURNERET Professeur à INP-ENSEEIH T Toulouse
	Roland CHAPUIS Professeur à l'Université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand, LASMEA
	Thierry DENOEU Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne
	Thierry CHONAVEL Professeur à Télécom Bretagne
<i>Membres</i>	René GARELLO Professeur à Télécom Bretagne
	Driss OUAZAR Professeur à l'Ecole Nationale de l'Industrie Minérale de Rabat
	Jean DEZERT Ingénieur de Recherche à l'ONERA
	Mohammed BENJELLOUN Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale, LISIC

« Je dédie ce travail à Sophie.... ceux qui la connaisse comprendront »

Remerciements

A l'heure des remerciements je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude au professeur Mohammed Benjelloun qui est le garant de cette habilitation. Je tiens à le remercier pour son soutien, sa disponibilité et ses précieux conseils.

Je souhaite aussi remercier Messieurs les professeurs Jean-Yves Tourneret, Roland Chappuis, Thierry Chonavel et Thierry Denoeux pour avoir accepté de rapporter sur mon travail. Je souhaite les remercier pour les échanges scientifiques que nous avons eu à propos du document d'habilitation car leurs remarques ont permis d'améliorer la qualité du manuscrit. Je les remercie aussi pour les deux jours passé à Calais, car ils ont donné dans la convivialité, une dimension scientifique enrichissante à la soutenance orale.

Voilà maintenant plusieurs années que je connais le professeur René Garello. Il m'a fait l'honneur de bien vouloir présider le Jury, je le remercie pour sa rigueur et son soutien. Nos rencontres, à l'occasion de thèses et de congrès, ont été l'occasion de nombreuses discussions dont la matière à inspiré mes travaux.

Je tiens aussi à remercier Messieurs Les professeurs Driss Ouazar et Jean Dezert pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. J'espère que nous initierons les collaborations que nous avons évoquées dans nos discussions.

Un travail de recherche c'est aussi le fruit d'une collaboration. J'ai partagé avec Monsieur Jean-Bernard Choquel la plupart de mes « aventures scientifique » comme l'organisation de colloques, la réponse aux projets et le montage d'expérimentations en tout genre. Je le remercie d'avoir toujours été là quand il le fallait.

Je remercie les collègues qui m'ont soutenu

Enfin je remercie ma petite famille d'avoir tenu bon jusque au bout !

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1 - Résumé de mes activités.	3
1.1 Résumé simplifié des activités	3
1.2 La recherche	6
1.2.1 Bilan Quantitatif	6
1.2.2 Résumé des activités de recherche	9
1.2.3 Participations et responsabilités de projets	13
1.2.4 Rayonnement scientifique	16
1.3 L'enseignement	18
1.3.1 Bilan Quantitatif	18
1.3.2 Activités d'enseignement	19
1.3.3 Responsabilités pédagogiques	22
1.4 Vie de l'université	23
1.5 Bibliographie	23
Chapitre 2 - Synthèse de mes travaux de recherche.	31
2.1 Introduction.	31
2.1.1 La genèse.	31
2.1.2 Position du problème.	32
2.2 Estimation non linéaire en fusion d'informations.	35
2.2.1 Introduction	35
2.2.2 Estimation par transformation non linéaire	37
2.2.3 Estimation de données circulaires	46
2.3 Estimation et détection conjointe en fusion d'informations.	55
2.3.1 Introduction	55
2.3.2 Estimation et détection conjointe hors ligne.	58

2.3.3	Estimation et Détection conjointe en ligne	69
Chapitre 3	- Conclusion et perspectives	79
3.1	En résumé	79
3.2	Réflexométrie des signaux GNSS	80
3.3	Géo-localisation sous marine	83
Bibliographie		85
Annexe A	- Publications sélectionnées	93
A.1	Cycle Slip Detection and Repair with a Circular On-Line Change-Point Detector - Stienne <i>et al.</i> (2014)	93
A.2	A multi-temporal multi-sensor circular fusion filter - Stienne <i>et al.</i> (2014)	94
A.3	Non-Linear Fusion of Observations Provided by Two Sensors - Azmani <i>et al.</i> (2013)	95
A.4	GNSS dataless signal tracking with a delay semi-open loop and a phase open loop - Stienne <i>et al.</i> (2013)	96
A.5	A hybrid fusion system applied to off-line detection and change-points estimation - Boutoille <i>et al.</i> (2010)	97
A.6	Joint Segmentation of the Wind Speed and Direction - Reboul et Benjelloun (2006)	98

Introduction

Ce document décrit mes 17 années en tant qu'enseignant chercheur à l'IUT Calais Boulogne de l'Université du Littoral Côte d'Opale (ULCO). J'ai soutenu ma thèse à l'Université du Littoral en décembre 1995. J'ai intégré un poste de Maître de conférences à l'IUT Calais Boulogne en septembre 1997, suite à deux années d'ATER (Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche) à l'IUP du Littoral. Ma formation à l'Université a débuté par un DEUG dans le domaine des mathématiques et sciences pour l'ingénieur, elle s'est poursuivie par une licence et une maîtrise en télécommunications. Elle s'est terminée par un DEA et une thèse en électronique dans le domaine du traitement du signal.

J'ai effectué dans le département Génie électrique de l'IUT Calais Boulogne la plupart de mes enseignements. Je suis aussi intervenu au titre de la formation par et pour la recherche en troisième cycle à l'Université.

Durant ces 17 années j'ai été membre du Laboratoire d'Analyse des Systèmes du Littoral (LASL) dans un premier temps, puis dans un deuxième temps membre du laboratoire LISIC (Laboratoire d'Informatique, Signal et Image de la Côte d'Opale) lorsque le laboratoire LASL a fusionné avec le laboratoire LIL (Laboratoire d'Informatique du Littoral).

Mes activités de recherche sont réalisées au sein du groupe Fusion d'Informations du laboratoire. Le groupe a été renommé Système de PErception multi-capteurs et Fusion d'Informations à la dernière structuration du laboratoire en novembre 2013. J'ai développé dans cette équipe mes activités de recherche sur le thème de l'estimation et de la détection conjointes en fusion d'informations. Les méthodes proposées ont été appliquées à l'estimation du vecteur vent, la navigation par satellites et le traitement des signaux GNSS.

Aujourd'hui mes recherches s'appliquent principalement aux domaines de la réflectométrie des signaux GNSS et de la localisation sous-marine. Mes perspectives de recherche s'orientent donc naturellement vers les problématiques liées à ces applications et au développement de méthodes d'estimation-détection conjointes qui leur sont propres.

Mon mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches se compose de trois parties. Le chapitre 1 reprend le déroulement de mes travaux. Y sont abordés les aspects enseignement, recherche et administratif. Le chapitre 2 détaille mes principaux travaux de recherche. Enfin, le chapitre 3 est un positionnement de mes travaux à l'instant où j'écris ce mémoire et les perspectives qui devraient orienter mes activités dans les cinq ans à venir.

Chapitre 1

Résumé de mes activités.

1.1 Résumé simplifié des activités

Serge Reboul
44 rue du Général De Gaulle
62930 WIMEREUX
47 ans. Marié. 3 enfants.

DOCTEUR en
Electronique et
Traitement du signal
école doctorale USTL Lille 1

Expérience professionnelle.

1997 - 2014 : Enseignant-chercheur à l'IUT Calais-Boulogne et au LISIC (Laboratoire d'Informatique, Signal et Image de la Côte d'Opale – EA 4491). Maître de conférences Hors Classe, titulaire de la Prime d'Excellence Scientifique.

Recherche : Fusion d'informations, Segmentation de signaux, Estimation bayésienne, Statistique circulaire, Hybridation multi-capteurs, Poursuite de la phase et du code des signaux GNSS (Global Navigation Satellite Systems) multi-porteuses, Réflectométrie, Navigation, Estimation du vecteur vent.

Projets, animation :

- Responsable de l'équipe fusion d'informations du Laboratoire (1998/2002).

- Coresponsable scientifique du projet PPF (2002/2005) "Fusion d'Informations Appliquée au Positionnement par Satellites" obtenu dans le cadre de notre participation au pôle européen PEPSAT (Pôle de compétence Européen sur le Positionnement Satellitaire Appliqué à la mobilité Terrestre).

- Responsable de la tâche "Contribution de la télédétection spatiale à la caractérisation des plages sableuses" dans le projet "PLAges à MARées" (2007/2010) du programme RELIEFS de la TERRE de l'Institut National des Sciences de l'Univers (INSU).

- Coresponsable scientifique du projet BQR (2008/2009) (Bonus Qualité Recherche de l'ULCO) "Fusion d'informations et géo-positionnement pour la caractérisation du milieu et des sources de pollution".

- Responsable du Projet BQR (2010/2011) "Etude et mise en œuvre d'un système Radar bistatique utilisant les signaux GNSS modernes et les satellites géostationnaires d'EGNOS (European Geostationary Navigation Overlay Service) pour l'estimation du taux d'humidité des sols".

- Membre du comité scientifique et du comité d'organisation des Workshop Space Reflecto 2013, 2011 et 2010.

- Elu au conseil scientifique de l'université (2001/2005), (2008/2012), (2012/2016) et au Conseil d'Administration de l'IUT (2005/2009). Membre de la commission budget de l'Université (2010/2012). Elu au Conseil National des Universités en section 61 (2011/2016)

Encadrements : huit thèses (quatre soutenues), cinq stages Master 2 recherche.

Production scientifique : 10 articles en revue, 34 communications internationales avec acte, 8 communications internationales sans acte, 9 communications nationales avec actes.

Enseignement : Traitement du signal et des images, Fusion d'informations, Systèmes et signaux GNSS, Electronique numérique, Logique, Composant programmable CPLD/FPGA, Architectures pour le traitement du signal, Programmation C et Matlab, Programmation VHDL.

- Enseignements à l'IUT dans les domaines de l'électronique numérique, l'architecture des systèmes et le traitement du signal.
- Enseignements en Master 2 dans les domaines du traitement des signaux GNSS, de la fusion d'informations et du traitement du signal et des images.
- Enseignement à l'Ecole d'Ingénieur du Littoral Côte d'Opale, dans le domaine du filtrage statistique.
- Enseignement à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques et en master Télédétection et Techniques Spatiales de l'Institut Physique du Globe de Paris, dans le domaine du traitement des signaux GNSS.

Titres et Diplômes.

1996 : Maître de conférences.

1995 : Doctorat en électronique de l'Université du Littoral-Côte d'Opale

Mention : très honorable avec félicitations du Jury. Directeur : Professeur J.P. DUBUS. Titre : "Etude d'une méthode de segmentation d'images obtenues en résonance magnétique, en vue d'une quantification".

1991 : D.E.A Microondes, Microélectronique, Electromagnétisme de l'Université de Lille 1.

1990 : Maîtrise Télécommunications à l'Université des Sciences et Technologies de Lille 1.

1989 : Licence Télécommunications à l'Université des Sciences et Technologies de Lille 1.

1988 : DEUG A à l'Université des Sciences et Technologies de Lille 1.

Domaines de compétences.

- Signaux GNSS : Traitement du signal GPS (Global Positioning System) L1 et L2C, Acquisition et poursuite du signal GPS.
- Perception multi-capteurs : Hybridation GPS INS (Inertial Navigation System), Hybridation GPS Odométrie.
- Traitement du signal : Estimation bayésienne, Méthodes de Monte-Carlo, Filtrage d'état, Filtrage particulière, Estimation circulaire.
- Programmation : Matlab, Langage C, Langage VHDL (Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language).

Divers.

Relecteur pour les revues suivantes : Neurocomputing (Elsevier), Information Fusion (Elsevier),... . Expertises pour l'ANR, le Fond National Suisse, la Fondation STAE.

1.2 La recherche

1.2.1 Bilan Quantitatif

Activités scientifiques

Dans la suite du chapitre la convention suivante est utilisée pour référencer les articles (listés en fin de chapitre) auxquels j'ai participé :

- [AIXX] : Articles internationaux.
- [COXX] : Conférences invitées.
- [CIXX] : Communications internationales avec actes.
- [CSXX] : Communications internationales sans acte.
- [CNXX] : Communications nationales avec actes.
- [APXX] : Autres publications.
- [THXX] : Thèses.
- [MAXX] : Masters Recherche.

Je reporte dans le tableau suivant un bilan quantitatif de mes activités en recherche.

Production scientifique	
Articles en revue	10
Conférence invitée	2
Communications internationales avec actes	34
Communications internationales sans acte	8
Communications nationales avec actes	9
Autres publications	10
Thèses	4 soutenues + 4 en cours
Masters recherche	5
Responsabilité scientifique	
Responsabilités de projets	5
Participation aux projets	6
Fonctions électives	4
Rayonnement	
Organisation de conférences	3
Collaborations	3
Contrat	1

Parmi les articles en revue on peut noter 6 articles internationaux indexés dans les 8 dernières années.

Encadrement doctoral

Encadrement de thèses de doctorat 3ème cycle.

- **Jamilla Kacemi**, Fusion d'informations dans un système de positionnement hybride GPS multi-porteuses/estime
Date de soutenance : 23 juin 2006
Financement : 100% région
Université : Université du Littoral Côte d'Opale
Directeur : Mohammed Benjelloun
Encadrants : Serge Reoul (70 %) et Mohammed Benjelloun (30 %)
4 publications avec l'auteur dans le cadre de la thèse [CI18, CI14, CI13, CI12]

- **Stanislas Boutoille**, Systèmes de fusion pour la segmentation hors-ligne de signaux GPS multi-porteuses
Date de soutenance : 27 mars 2007
Financement : 100% ESR
Université : Université du Littoral Côte d'Opale
Directeur : Mohammed Benjelloun
Encadrants : Serge Reoul (70 %) et Mohammed Benjelloun (30 %)
6 publications avec l'auteur dans le cadre de la thèse [AI5, AI3, CI20, CI19, CI17, CI15]

- **Monir Azmani**, Fusion d'informations appliquée à la poursuite du code et de la phase d'un signal GPS multi-porteuses
Date de soutenance : 20 décembre 2010
Cotutelle : Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire d'Informatique, Signal et Télécom (LIST), Tanger, Maroc
Université : Université du Littoral Côte d'Opale
Directeur : Mohammed Benjelloun
Encadrants : Serge Reoul (70 %) et Mohammed Benjelloun (30 %)
8 publications avec l'auteur dans le cadre de la thèse [AI8, AI6, AI5, AI4, CI27, CI26, CI23, CI22]

- **Georges Stienne**, Traitements des signaux circulaires appliqués à l'altimétrie par la phase des signaux GNSS
Date de soutenance : 2 décembre 2013
Financement : 100% SMCO
Université : Université du Littoral Côte d'Opale
Directeur : Mohammed Benjelloun
Encadrants : Serge Reoul (70 %) et Mohammed Benjelloun (30 %)
8 publications avec l'auteur dans le cadre de la thèse [AI9, AI8, AI7, AI16, AI5, CI31, CI29, CI28]

- **Abderrahim Bourkane**, Estimation non linéaire de l'amplitude des signaux GNSS : application à la caractérisation des multi-trajets.
Cotutelle : Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire d'Informatique, Signal et Télécom (LIST), Tanger, Maroc

Date de soutenance : thèse en co-tutelle ayant débuté en janvier 2011
Université : Université du Littoral Côte d'Opale
Directeur : Mohammed Benjelloun
Encadrants : Serge Reboul (70 %) et Mohammed Benjelloun (30 %)
2 publications avec l'auteur dans le cadre de la thèse [CI30, CS8]

- **Karim El Mokhtari**, Estimation circulaire multi-modèle : Application à la navigation en environnement contraint par “map matching”
Cotutelle : Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire d'Informatique, Signal et Télécom (LIST), Tanger, Maroc
Date de soutenance : thèse en co-tutelle ayant débuté en janvier 2011
Université : Université du Littoral Côte d'Opale
Directeur : Mohammed Benjelloun
Encadrants : Serge Reboul (70 %) et Mohammed Benjelloun (30 %)
2 publications avec l'auteur dans le cadre de la thèse [CI34, CI32]
- **Florian Beaubois**, Estimation multi-modèle de la trajectoire d'un navire : Application au positionnement sous marin
Date de soutenance : thèse en co-tutelle ayant débuté en octobre 2012
Financement : 50% SMCO, 50% CCI Côte d'Opale
Université : Université du Littoral Côte d'Opale
Directeur : Jean-Charles Noyer
Encadrants : Serge Reboul (50 %) et Jean-Charles Noyer (50 %)
- **Jean-Christophe Kucwaj**, Etude et mise en œuvre d'un instrument aéroporté pour la caractérisation des zones humides à l'interface terre mer par réflectométrie des signaux GNSS
Date de soutenance : thèse en co-tutelle ayant débuté en octobre 2013
Financement : 50% SMCO, 50% ESR
Université : Université du Littoral Côte d'Opale
Directeur : Mohammed Benjelloun
Encadrants : Serge Reboul (70 %) et Mohammed Benjelloun (30 %)

Encadrement de Master 2 recherche.

- **Ziheng Zhang**, Intégration cohérente longue du signal GPS : traitement de la phase
Date de soutenance : septembre 2010
Master 2 INS3I, Université du Littoral Côte d'Opale
Encadrant : Serge Reboul (100 %)
- **Li Qi**, Estimation hors ligne de la puissance du signal GPS rétro-diffusé
Date de soutenance : septembre 2008
Master 2 INS3I, Université du Littoral Côte d'Opale
Encadrant : Serge Reboul (100 %)

- **Randam Imerzoukene**, Détection de ruptures dans le discriminant de la boucle DLL du récepteur GPS
Date de soutenance : Juillet 2006
D.E.A Modélisation des Systèmes Complexes, Université du Littoral Côte d’Opale
Encadrant : Serge Reboul (100 %)
- **Stanislas Boutoille**, Fusion d’estimation et de décision dans un récepteur GPS multi-porteuse
Date de soutenance : Juillet 2003
D.E.A Modélisation des Systèmes Complexes, Université du Littoral Côte d’Opale
Encadrant : Serge Reboul (100 %)
- **Damien Brige**, Estimation de la vitesse et de la direction du vent par fusion Bayésienne
Date de soutenance : Juillet 1999
D.E.A d’Automatique et d’Informatique Industrielle, Université de Lille I
Encadrant : Serge Reboul (100 %)

1.2.2 Résumé des activités de recherche

Je présente ici mes activités de recherche en termes d’apports théoriques et d’applications étudiées. En effet depuis mon intégration au laboratoire LASL je me suis investi dans le domaine de la fusion d’informations. J’ai développé ce thème de recherche dans le cadre Bayésien. J’ai encadré des travaux de thèse et master qui ont conduit à proposer et étudier plusieurs modèles de fusion pour l’estimation et la détection conjointe de ruptures. Ces modèles ont été appliqués à différentes problématiques pratiques qui ont évolué avec les projets qui ont financé cette recherche.

L’estimation-détection conjointe a été abordée dans ces travaux comme un problème de segmentation de signaux. Dans notre approche on souhaite réaliser l’estimation de ruptures dans des signaux supposés stationnaires par morceaux. L’estimation d’une rupture est caractérisée par sa détection et sa localisation. Les opérateurs de fusion pour la segmentation de signaux que nous avons proposés ont été développés dans le cadre Bayésien. Dans l’approche Bayésienne on définit la distribution *a posteriori* du paramètre à estimer sachant les mesures. Ici les paramètres à estimer sont les ruptures et les paramètres statistiques du signal dans les zones stationnaires. Cette distribution est classiquement exprimée sous la forme du produit des fonctions de vraisemblance des mesures multipliées par la loi *a priori* sur les paramètres à estimer. Il existe dans ce cas deux approches pour fusionner les mesures et informations fournies par plusieurs capteurs. On peut dans le cas dit "centralisé", définir à partir du produit des fonctions de vraisemblance un opérateur de fusion qui combine les mesures $[TH4]$, $[TH3]$, $[TH1]$, $[AI4]$, $[AI7]$. On peut représenter dans la loi *a priori* l’information fournie par les capteurs sur le paramètre de nuisance $[AI2]$. Lorsque cette information est imprécise elle est remplacée par une loi *a priori* sur le paramètre à estimer qui modélise cette imprécision $[AI8]$. L’estimateur est alors obtenu après marginalisation de la loi *a posteriori* suivant le paramètre à estimer $[TH3]$, $[TH2]$, $[AI5]$, $[AI6]$. Dans le cas de la fusion de détection distribuée, on construit une fonction de risque

à partir des distributions *a posteriori* des décisions prises par les capteurs sachant l'absence ou la présence d'une rupture [AI9]. Le critère de décision qui minimise cette fonction de risque dépendra de la règle de fusion [TH2], [AI3].

Les travaux de recherche sur l'estimation-détection conjointe en fusion d'informations ont été appliqués à différentes problématiques pratiques que nous décrivons dans la suite.

Estimation du vecteur vent

Le vent est un phénomène physique dont le comportement intéresse un grand nombre d'applications du domaine de l'environnement. Dans notre approche le vecteur vent est décrit par deux processus supposés stationnaires par morceaux. Le comportement aléatoire de ces processus est modélisé par une distribution circulaire de von Mises pour la direction et Log normale pour la vitesse. Nous avons proposé pour cette application un estimateur des ruptures "hors ligne" [AI2] et un estimateur fonctionnant "en ligne" [AI4]. Dans l'approche hors ligne, l'estimateur proposé est obtenu à partir de la distribution *a posteriori* des ruptures sachant les mesures. Il est implémenté sous la forme d'une fonction de contraste pénalisée que l'on minimise par recuit simulé. La fonction de contraste est définie par le logarithme de vraisemblance de la distribution de von Mises et de la distribution Log normale. La pénalisation est déduite de la loi *a priori* sur les séquences de ruptures. Nos apports théoriques dans ce contexte ont porté sur la proposition de lois *a priori* et de distributions *a posteriori* pour la segmentation conjointe des processus [AI2, CI16, CI11, CI10, CI9, CI8, CN4, CN3].

Malheureusement, même si l'approche hors ligne est très performante, elle ne reste utilisable que pour les études réalisées en différé. Pour le traitement temps réel de ces données nous avons proposé un estimateur en ligne inspiré du filtre de Kalman GLR (Generalized Likelihood Ratio). On construit alors à partir de la distribution *a posteriori* de l'état sachant les mesures un estimateur récursif de l'état du système. Le filtre proposé est composé d'un estimateur de l'état et d'un détecteur de ruptures fonctionnant simultanément [TH3, AI4, CI12, CN9].

Navigation par satellites

Le but d'un système de navigation est de fournir à un utilisateur une position et une direction à partir d'informations précises de position, d'orientation et de vitesse. Malheureusement, en environnement urbain dense, les systèmes de localisation par satellites sont peu précis et souvent défaillants (Effet canyon, visibilité restreinte, multi-trajets,...). Pour améliorer la précision du système de localisation GNSS, nous avons proposé un opérateur de fusion des pseudo-distances satellite-récepteur obtenues pour les différentes porteuses L_1 , L_2 , L_5 du signal GPS [CI14, CI12]. L'opérateur proposé permet de fusionner les mesures de pseudo-distances obtenues sur les différentes porteuses, corrélées et biaisées par les effets de la propagation dans la ionosphère. Pour améliorer la robustesse du système de localisation, nous avons réalisé l'hybridation serrée d'un récepteur GPS multi-porteuses avec un système proprioceptif composé d'odomètres et d'un gyroscope [TH1]. Le système proposé pour l'hybridation des capteurs repose sur une architecture de filtre de type "Track-to-Track". Dans cette architecture on réalise la fusion distribuée des pseudo-distances fournies par le récepteur GNSS avec les pseudo-distances satellite-récepteur reconstruites à partir des données capteurs proprioceptifs [CI18, CI12].

Dans les systèmes de navigation les paramètres importants sont l'orientation et l'attitude du système. Les grandeurs qui caractérisent les valeurs de ces paramètres sont des variables aléatoires circulaires. Dans ce contexte nous avons développé un opérateur de fusion et un filtre adapté aux données angulaires [TH3, TH1]. Ce développement, qui a été réalisé dans un cadre Bayésien s'appuie sur la distribution de von Mises pour les mesures et les états [CI18]. Nous proposons un filtre récursif qui fusionne les mesures fournies par différents capteurs et obtenues à différents instants. L'expression du filtre est obtenue à partir de la distribution *a posteriori* de l'état sachant les mesures. Dans cette modélisation la distribution de vraisemblance et la loi *a priori* sont des distributions de von Mises. On montre que l'on peut résoudre l'équation de Chapman-Kolmogorov dans le cas scalaire à partir de l'approximation de la distribution de von Mises par une distribution "Wrapped Normal". Les filtres et opérateurs de fusion proposés sont insensibles aux transitions entre $-\pi$ et π et permettent de résoudre l'ambiguïté de cadran sur des mesures fortement bruitées [AI7, CI32, CI28, CI13].

Traitement des signaux GNSS multi-porteuses

Les futurs récepteurs de navigation par satellites utiliseront des signaux GNSS modernes, construits à partir de la duplication du signal GNSS sur plusieurs fréquences porteuses. Dans ce contexte, on souhaite améliorer les traitements récepteurs et notamment les boucles de poursuite DLL (Delay Lock Loop). On réalise pour cela la fusion des signaux GNSS transmis sur différentes porteuses. Le signal discriminant qui est utilisé pour piloter les générateurs de codes de la boucle de poursuite est stationnaire par morceaux. Cependant les signaux discriminants obtenus pour différentes porteuses ont des instants de ruptures qui ne sont pas forcément synchronisés entre eux. Dans ce contexte, nous avons proposé une méthode de segmentation hors-ligne mono-rupture réalisée sous la forme d'un système hybride de fusion multi-capteurs [AI3, CI17, CI15]. La segmentation est hors ligne car les ruptures de discriminants sont estimées dans une fenêtre de taille fixe. Le système est hybride car il couple l'estimation des ruptures obtenues par un système de fusion centralisé et un système de fusion distribué. En effet, le système centralisé est plus performant en présence de ruptures simultanées et le système distribué est plus performant en présence de ruptures non-simultanées. Le système hybride proposé (à la fois centralisé et distribué), permet alors d'obtenir des performances pour la segmentation qui sont au moins aussi bonnes que les performances obtenues par le meilleur des systèmes de fusion.

Dans une boucle de poursuite DLL classique, le code généré par le récepteur est recalé sur le code du signal reçu toutes les millisecondes. Dans une boucle semi-ouverte, le code est recalé à l'issue d'un temps variable. On montre que l'évolution du discriminant peut être supposée linéaire et monotone pour un décalage entre les codes inférieur à une demi-microseconde. Au-delà d'une demi-microseconde, la pente du discriminant change de signe. Dans la thèse de Monsieur Stanislas Bouteille, nous avons proposé la mise en œuvre d'une boucle semi-ouverte dans laquelle on estime les ruptures de pente du discriminant pour lesquelles on recalc le code du récepteur d'une demi-microseconde [TH2]. L'évolution du discriminant associée aux instants des ruptures d'un signal numérisé sur une seconde est alors linéaire par morceaux. On a dans ce cas un problème de segmentation du discriminant, hors ligne et multi-ruptures. La méthode proposée repose sur l'approche Bayésienne de la sélection de modèles qui consiste à construire une fonction de contraste pénalisée pour estimer les séquences de ruptures sur les discriminants de l'ensemble des porteuses [AI5, CI10, CI19].

Traitement des signaux GNSS multi-voies

La modernisation des signaux GNSS se traduit par l'apparition de nouvelles fréquences dédiées et de nouvelles méthodes de modulation. Le nouveau signal L2C est composé d'une voie pilote qui ne contient pas de message de navigation et d'une voie données qui contient le message de navigation. Ces deux voies sont codées par des codes différents et multiplexés sur une même porteuse. Dans la thèse de Monsieur Monir Azmani, nous avons amélioré la poursuite du code et de la phase, réalisée respectivement dans la boucle DLL et PLL (Phase Lock Loop) du récepteur, en fusionnant les informations fournies par ces deux voies [TH3]. Nous avons proposé un estimateur en ligne des ruptures du discriminant de code d'un système de poursuite fonctionnant en boucle semi-ouverte. Le filtre proposé est inspiré du filtre de Kalman GLR qui estime simultanément les décalages du code et détecte les ruptures de pente dans le discriminant [AI6, CI27]. Nous avons aussi développé dans cette thèse un opérateur de fusion non linéaire qui intègre une information *a priori* sur le paramètre à estimer. Cette transformation non-linéaire permet de diminuer la corrélation entre les différentes observations. Nous démontrons théoriquement et expérimentalement que l'opérateur de fusion non-linéaire proposé est plus précis que l'opérateur classique du maximum *a posteriori*, c'est à dire qu'il offre une erreur quadratique moyenne de l'estimation plus faible [AI8].

Réflectométrie des signaux GNSS

Le taux d'humidité des sols est un paramètre important pour de nombreuses disciplines des Sciences de l'Environnement. Il a été montré que la radiométrie en bande L offre la meilleure sensibilité pour l'estimation du taux d'humidité des sols à partir du signal réfléchi par la surface à caractériser. Dans ce contexte nous avons proposé un système radar bi-statique qui utilise les signaux GNSS (en bande L) émis par les satellites GPS et reçus par une antenne située sur un mât. Dans ce cas, le taux d'humidité dans le sol est estimé à partir de la puissance du signal direct et du signal réfléchi calculée par intégrations cohérentes. Pour réaliser l'intégration cohérente du signal, il faut extraire le code du signal GNSS reçu, estimer sa pulsation et son déphasage [CI21, CI30, CS2]. La puissance du signal réfléchi étant très faible, la sensibilité du système dépendra de la durée d'intégration cohérente. On montre que l'on peut extraire le code du signal réfléchi à partir du signal direct et de la connaissance de la géométrie du système radar bi-statique. Dans notre contribution, nous avons proposé d'utiliser, pour l'intégration du signal, la voie pilote du signal L2C et un modèle d'évolution de la phase. On montre alors que l'on peut intégrer de façon cohérente le signal pendant 2 secondes. Nous avons pu alors estimer une puissance du signal réfléchi de 18 dBHz [CI26, CS3, CS4]. Pour améliorer encore la sensibilité de notre système, nous avons proposé d'utiliser les satellites géostationnaires du système EGNOS. En effet dans ce cas les positions des satellites évoluant peu, on peut intégrer le signal GNSS sur de plus longues périodes [CI25, CI24, CS5].

Le traitement des signaux GNSS repose traditionnellement sur l'estimation en boucles fermées de trois paramètres : le délai du code CDMA, la phase et la fréquence de la porteuse du signal reçu. On montre dans la thèse de monsieur Georges Stienne que l'estimation de la phase et de la fréquence en boucle fermée est à l'origine d'imprécisions et de perturbations additionnelles, telles qu'un bruit additionnel important et la présence de sauts de cycle. On propose une nouvelle approche pour l'estimation de ces paramètres s'appuyant sur une architecture de poursuite

en boucle ouverte. Dans ce cas, les mesures de phase sont des angles, définis entre $-\pi$ et π . Statistiquement, elles peuvent être modélisées par la distribution circulaire de von Mises. Les outils d'estimation circulaire développés dans la thèse de monsieur Georges Stienne sont appliqués au traitement du signal GNSS en boucle ouverte [AI6]. Nous avons proposé des filtres et des opérateurs de fusion définis dans le domaine circulaire. Les filtres proposés, définis dans le cadre Bayésien à partir de la distribution de von Mises, ont été implantés sous la forme d'un filtre récursif et sous la forme d'un filtre particulière [CI28, CI26, CI29, AI9]. On montre l'intérêt de l'approche proposée pour le positionnement et pour l'altimétrie par réflectométrie des signaux GNSS. La précision obtenue est de l'ordre du centimètre, pour des durées d'intégration d'une milliseconde. Dans ce cadre, on propose également une technique de résolution de l'ambiguïté de phase, utilisable dans une approche mono-récepteur et mono-fréquence [CI31].

1.2.3 Participations et responsabilités de projets

Pour financer mes recherches j'ai participé à l'élaboration de projets et à la rédaction de rapports d'activité pour les projets en cours. A titre d'informations, le tableau ci-dessous indique les dotations financières qui ont été allouées aux divers projets :

Projet	Dotations Financière	Origine
PPF	48000 €	ETAT
OPSYDE	64024 €	FRT
ANR - ex FRT PEPSAT	150550 €	REGION - ETAT
BQR	23500 €	ULCO
PLAMAR	11800 €	INSU-CNRS
BQR BIRASURE	36600 €	ULCO

- **Responsable du groupe Fusion d'Informations** : De 1998 à 2002 j'ai été responsable du groupe Fusion d'Informations du laboratoire. Cette responsabilité a consisté à organiser les réunions et séminaires du groupe et à coordonner les activités de recherche en vue d'intégrer les projets nationaux et régionaux de type PPF et CPER ou européen comme le FEDER ou les PCRD.
- **Contrat de recherche avec la société Télécom** : En 1999 j'ai effectué un contrat de recherche pour la société Télécom. Ce contrat, qui était une étude demandée par l'entreprise Sollac de Dunkerque, consistait à réaliser la détection, le positionnement et la reconnaissance des Wagons Poches Tonneaux pour la mesure de leurs remplissages par les hauts fourneaux de Sollac Dunkerque. Le système que nous avons proposé se composait de plusieurs caméras hyper sensibles et pouvait fonctionner la nuit. Nous avons dans le cadre de ce projet réalisé plusieurs campagnes de mesures sur site et rédigé un rapport d'essais [AP4].
- **Co-responsable scientifique du PPF "Fusion d'Informations Appliquée au Positionnement par Satellites"** : Dans le cadre de la contractualisation 2002-2005, j'ai été co-responsable scientifique pour le LASL du PPF "Fusion d'Informations Appliquée au Positionnement par Satellites". Ce PPF a été réalisé en collaboration avec le Laboratoire

d'Automatique, Génie Informatique et Signal (Université de Lille I, UMR 8146, ancien Laboratoire d'Automatique, d'Informatique Industrielle, UPRESA 802, Messieurs M. Staroswiecki et J-P. Richard). Ce PPF a permis d'appliquer les connaissances des laboratoires impliqués dans le domaine de la fusion d'informations, aux systèmes de positionnement par satellites. Le but de nos recherches étant d'augmenter la robustesse, la fiabilité et la précision des récepteurs G.P.S (Global Positioning System). Ce PPF a permis aux deux laboratoires d'acquérir des systèmes de localisation par satellites. Un système GPS différentiel multi-porteuses (Matériel Novatel) a été acquis au LASL avec les fonds du projet et nous avons utilisé ce matériel dans les thèses de Madame Jamilla Kacemi, de Monsieur Stanislas Boutoille et de Monsieur Monir Azmani.

- **Participation au projet OpSyDe** : J'ai participé à l'élaboration du projet OpSyDe (Optimisation des Systèmes de Détection et gestion de ressources). Ce projet a été financé dans le cadre du CPER 2000/2006. Il regroupe 8 chercheurs du LAGIS et du LASL, ainsi que plusieurs étudiants en DEA et en thèse. Ce projet fait partie du pôle européen PEPSAT (pilote par Marc Heddebaut, directeur de l'INRETS-LEOST (Aujourd'hui IFSTTAR - Institut Français des Sciences et Technologies des Transports de l'Aménagement et des Réseaux)). Dans la première phase du projet, notre contribution a porté sur la proposition d'un système d'hybridation serrée pour la navigation en environnement urbain dense. La thèse de Madame Jamilla Kacemi, qui a été financée par la région, a porté sur ce thème. Dans la deuxième phase du projet, notre contribution a porté sur de nouveaux traitements récepteurs utilisant les signaux GNSS modernes. Les thèses de monsieur Stanislas Boutoille, financée par le ministère, et de monsieur Monir Azmani ont porté sur ce thème. Deux systèmes d'acquisition de signaux GPS en bande L1 ("front end" de 2 MHz et 6 MHz de bande passante) ont été achetés avec les fonds du projet et utilisés dans les thèses.
- **Participation au projet "Fusion d'informations multi-capteurs pour la navigation satellitaire (LASL) et déploiement d'applications mobiles ubiquitaires (LIL) - Réf : ANR - ex. FRT 2005 - Action Régionale - CPER - DT n° 15030** : J'ai participé à l'élaboration de ce projet qui a été porté par le groupe Fusion d'Informations en collaboration avec l'équipe du Professeur Cyril Fonlupt du laboratoire d'Informatique du Littoral (LIL). Il fait suite au projet OpSyDe (Optimisation des Systèmes de Détection), PEPSAT-E-CRASH vise à exploiter une information de localisation "certaine" ainsi que l'information de transfert de temps, diffusée par les satellites de navigation. Ces signaux, agrégés en un service nouveau, auront pour but d'aider à la gestion des sinistres automobiles par les compagnies d'assurance. Un véhicule Renault Kangoo instrumenté a été acquis dans le cadre de ce projet. Ce véhicule a été utilisé dans les thèses de messieurs Stanislas Boutoille et Monir Azmani. Il est aujourd'hui utilisé dans le cadre d'une collaboration que nous avons avec le Pr. Yassine Ruichek du Laboratoire Systèmes et Transports de l'Université Technologique de Belfort Montbéliard et avec le Pr. Benaissa Amami responsable du Laboratoire LIST (Laboratoire d'Informatique, Système et Télécommunication) de la Faculté des sciences et Techniques de Tanger, de l'Université Abdelmalek Essaâdi.
- **Co-responsable scientifique du BQR "Fusion d'informations et géo-positionnement pour la caractérisation du milieu et des sources de pollution"** : A la fin du CPER 2000/2006 nous avons décidé de réorienter les activités du groupe fusion vers l'axe de recherche prioritaire de l'université, soit la recherche dans le domaine de l'environnement.

J'ai donc participé à l'élaboration du projet BQR (2008/2009) proposé par le groupe fusion et intitulé "Fusion d'informations et géo-positionnement pour la caractérisation du milieu et des sources de pollution". J'ai assumé dans ce BQR la co-responsabilité scientifique du projet avec monsieur Gilles Roussel. Ma contribution dans ce projet a porté sur l'étude d'un système radar bi-statique utilisant le signal GPS L1 rétro-diffusé pour la caractérisation des sols. Nous avons obtenu dans ce projet un système d'acquisition robuste pour la réalisation de mesures sur le terrain (Plages de la mer du Nord).

- **Responsable scientifique de tâche dans le projet PLAMAR** : J'ai participé au projet "PLAges à MARées" (2007/2010) du programme RELIEFS de la TERRE de l'Institut National des Sciences de l'Univers (INSU). J'ai eu dans ce projet la responsabilité de la tâche "contribution de la télédétection spatiale à la caractérisation des plages sableuses". Cette responsabilité a consisté à coordonner les activités des partenaires de cette tâche et à fournir tous les six mois un rapport d'activité. Ma contribution dans ce projet a porté sur l'étude et la mise en œuvre d'un système radar bi-statique utilisant la voie pilote du signal GPS L2C rétro-diffusé pour la caractérisation des sols. Un système d'acquisition de signaux GPS L2C a été acquis et un système radar bi-statique a été construit avec les fonds du projet.
- **Responsable scientifique du BQR BIRASURE** : Depuis 2010, j'ai centralisé mes activités de recherche sur la réflectométrie des signaux GNSS. Dans ce cadre j'ai porté un projet ESA qui a été rédigé en collaboration avec Cyril Botteron du "Electronics and Signal Processing LABORatory" de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Ce projet intitulé "BIRASURE - soil moisture estimation using land-reflected EGNOS and GALILEO BI-static RADAR measurements", AO/1-6311/2010/F/WE, a été classé 15/70, mais n'a finalement pas été financé malgré sa sélection, par manque de financements. J'ai aussi porté un projet BQR (2010/2011) "Etude et mise en œuvre d'un système Radar bi-statique utilisant les signaux GNSS modernes et les satellites géostationnaires d'EGNOS pour l'estimation du taux d'humidité des sols", qui a été évalué A (l'évaluation réalisée par un membre du CNU 61). Notre contribution dans ce BQR porte sur l'étude et la mise en œuvre d'un système de réflectométrie à haute sensibilité utilisant les signaux des satellites géostationnaires EGNOS. Un système d'acquisition simultané multivoies (3 voies) a été construit par la société Silicom dans le cadre de ce projet et a été utilisé par Mr. Georges Stienne durant sa thèse (financée par le Syndicat Mixte de la Côte d'Opale) et est actuellement utilisé par monsieur Jean Christophe Kucwaj dans le cadre de sa thèse (financée par le Syndicat Mixte de la Côte d'Opale).
- **Responsable du matériel scientifique** : L'ensemble de ces projets a conduit à l'acquisition de nombreux matériels expérimentaux dont nous sommes, avec monsieur Jean Bernard Choquel, les utilisateurs et en charge de leur maintenance. Pour nos activités dans le domaine de la navigation, nous avons un véhicule Kangoo instrumenté (136 662,61 Euro TTC). Les instruments qui équipent ce véhicule sont une station inertielle Sensorex, un magnétomètre Crossbow, un récepteur GPS différentiel Novatel, un capteur laser CORRSYS DATRON L400 pour la mesure de vitesse et un système d'acquisition de mesures HBM MGC plus. Ce système permet de synchroniser les mesures capteurs et de récupérer les informations qui sont fournies par le bus CAN du véhicule. Pour nos activités dans le domaine du traitement des signaux GNSS et de la réflectométrie, nous avons plusieurs types d'antennes et de systèmes de numérisations des signaux en sortie d'antenne. Nous

disposons donc d'antennes directionnelles et omnidirectionnelles à polarisation circulaire droite et gauche et, pour positionner les antennes, d'un mât télescopique pneumatique de 10 mètres installé sur le véhicule instrumenté. Nous disposons de systèmes fixes pour la numérisation des signaux GNSS en bandes L1 et L2 de chez Accord software, et d'un système mobile pour la numérisation de trois voies simultanées et sur l'ensemble des bandes GNSS que nous avons fait construire par l'entreprise Silicom.

1.2.4 Rayonnement scientifique

Dans le cadre du rayonnement scientifique :

J'ai participé à l'organisation et à la tenue de plusieurs manifestations scientifiques. J'ai participé en tant que "chairman" à la tenue des conférences IEEE IGARS URSI 2013, IEEE ROBIO 2009, IEEE PASSIVE 08, IEEE SIE 2006, MAJESTIC 2004, Fusion 2000. J'ai aussi participé à l'organisation de la journée Scientifique, Industrielle et Institutionnelle dans le cadre de PEP-SAT : "Les régions face au challenge GALILEO" (<http://www.see.asso.fr/groupe-nord/conferences/site-pepsat/pepsat310505/index.html>), et au congrès STIC et environnement 2009 qui se sont tenus à Calais (<http://stic-env2009.univ-littoral.fr/>).

La recentralisation de nos activités de recherche dans le domaine de la réflectométrie GNSS nous a permis de créer des liens privilégiés avec le CNES de Toulouse qui porte un intérêt croissant à cette problématique de recherche. Dans ce contexte j'ai participé à l'organisation et au montage du "Workshop" international Space Reflecto :

-Membre du comité scientifique et du comité d'organisation du Workshop Space Reflecto 2013, 28-29 octobre 2013, Brest, <http://www-lisic.univ-littoral.fr/spacereflecto2013/>.

-Organisateur et membre du comité scientifique du Workshop Space Reflecto 2011, 27-28 octobre 2011, Calais, <http://www-lisic.univ-littoral.fr/spacereflecto2011/>.

-Membre du comité scientifique et du comité d'organisation du Workshop Space Reflecto 2010, 1er décembre, Toulouse, <http://www-lisic.univ-littoral.fr/spacereflecto2010/>.

J'ai animé la journée de Formation sur la Propriété Intellectuelle le 25 novembre 2011 à Calais. Journée organisée par NFID (Nord France Innovation Développement), qui a invité Frédéric Foubert, Directeur adjoint au CNRS pour l'Innovation et les Relations avec les Entreprises (<http://podcast.univ-littoral.fr/index.php?page=podcast.tri=date.sens=2.mat=97.disc=24>).

Concernant mon expertise, j'ai été rapporteur de la thèse « Analyse et modélisation de l'utilisation de signaux GNSS en environnement marin », de Sarab Tay, Thèse de doctorat 3ème cycle, Telecom Bretagne. Je suis reconnu expert GNSS par l'ANR et j'ai évalué des projets des programmes JCJC et ASTRID. Je suis aussi reconnu au niveau international car j'ai été invité en tant que expert dans le domaine de la réflectométrie au workshop « Novel GNSS applications » ("7th Framework Program of the European Commission under the Environment theme, project Gfg²") qui s'est tenu sur le campus du GFZ à Potsdam. Enfin je suis reconnu en tant qu'expert

dans le domaine de la Réflectométrie GNSS par le Swiss National Science Foundation (SNSF), pour lequel j'ai évalué un projet.

Depuis 2003 je suis membre de la commission du CNIG (Conseil National de l'Information Géographique) Géo-positionnement (ex : Positionnement Statique et Dynamique). Cette commission est un groupe d'experts et d'utilisateurs français des techniques de positionnement terrestre, maritime et aérien. Ses membres sont des industriels, des institutionnels et des universitaires. Je participe donc aux assemblées de cette commission qui se réunit deux fois par ans. Les travaux qui y sont présentés et les informations et qui y sont données permettent de faire une veille technologique sur les systèmes GNSS et leurs applications. Cette veille technologique est importante pour garantir l'actualité des enseignements dans ce domaine qui évolue rapidement. J'ai dans ce cadre participé au groupe de travail "Promotion de l'enseignement et de la recherche en systèmes de positionnement par satellites" qui avait pour objectif premier de faire un recensement des formations et laboratoires travaillant dans le domaine des GNSS. Le rapport contenant le résultat de cette étude et des recommandations a été communiqué au ministère par l'intermédiaire du CNIG. Il ressort principalement de cette étude un déséquilibre des activités dans le domaine des GNSS entre le nord et le sud de la France.

Finalement je suis membre du groupe de travail du Thème A du GDR-PRC ISIS et j'ai été le correspondant du laboratoire pour le GDR-PRC ISIS de 2007 à 2010. Je suis également membre du Conseil National de l'Information Géographique (CNIG).

Les collaborations de recherches mises en place :

Pour développer une recherche en collaboration avec des laboratoires se trouvant à l'étranger nous avons créé un environnement de travail collaboratif s'appuyant sur le système de e-learning Sakai [AP10]. La partie publique du système est un site Web et la partie privée est hébergée par Sakai. Cet environnement logiciel collaboratif est utilisé pour le partage de ressources, l'organisation de réunions de travail et de séminaires de type « webinar ».

Dans le cadre de la convention entre l'Université du Littoral et l'Université Abdelmalek Es-saadi, je collabore avec Mr. le Pr. Benaissa Amami, Responsable du Laboratoire d'Informatique, Systèmes et Télécommunication (LIST) de la Faculté des Sciences et Techniques de Tanger. Le but de cette collaboration est de développer une activité de recherche portant sur la localisation des engins utilisés pour la gestion des containers dans les ports. En effet, le port de Tanger Med est l'une des plus grandes plates-formes logistiques de la Méditerranée. La localisation des engins dans ce type d'applications est un enjeu important en recherche car les systèmes de localisation par satellites sont systématiquement mis en défaut par l'environnement de réception. En effet, en plus d'une visibilité satellitaire réduite, il y a dans ce type d'applications de nombreux multi-trajets associés aux signaux GNSS réfléchis par le container métallique. Dans le cadre de cette collaboration, deux séminaires ont été organisés à la FST de Tanger. Deux thèses en co-tutelles ont débuté en janvier 2011 sur ce thème de recherche. Les axes de recherche développés dans le cadre de cette collaboration concernent le map matching circulaire [CI32] (Thèse en co-tutelle de Monsieur Karim El Mokhtari, soutenance prévue en avril 2014)

et la détection et l'exploitation de multi-trajets [CI30,CS8] (Thèse en co-tutelle de Monsieur Abderrahim Bourkane, soutenance prévue en octobre 2014). Deux sites de recherche collaboratifs ont été mis en œuvre pour le suivi de ces thèses. (<http://www-lisic.univ-littoral.fr/reflecto/>, <http://www-lisic.univ-littoral.fr/perceptionenvironnement/>).

Depuis septembre 2010, je collabore avec Mr. Cyril Botteron du Laboratoire "Electronics and Signal Processing LABORatory" de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Nous avons dans le cadre de cette collaboration soumis un projet ESA et un projet au Fond National Suisse qui n'ont pas été retenus. Depuis 2012 nous collaborons sur un projet de recherche dont le thème est l'étude et la mise en œuvre d'un système de surveillance des zones humides et de la couverture neigeuse. Nous développons dans ce cadre une technique de mesure de l'épaisseur neigeuse et du niveau d'eau par réflectométrie des signaux GNSS [CI33]. Nous avons réalisé un site de recherche collaboratif pour suivre les activités de recherche développées dans cette collaboration (<http://www-lisic.univ-littoral.fr/lisicepfl/>).

Depuis septembre 2011, je collabore avec le Pr. Jean Charles Noyer (du LISIC) sur une nouvelle problématique de recherche en lien avec le projet de territoire le "Campus de la Mer". Ce projet de territoire qui fédère des laboratoires de l'ULCO et de Lille a pour ambition de développer des problématiques propres à l'environnement marin et littoral de la région. Dans ce contexte nous travaillons sur la localisation des fonds marins avec pour application l'observation, la géolocalisation du matériel de pêche et des populations de poissons. Cette problématique de recherche qui s'inscrit dans la continuité de mes travaux actuels concerne la navigation en milieu marin, la géolocalisation et la réflectométrie. J'encadre donc dans ce contexte une thèse (Monsieur Florian Beaubois, Financement : 50% SMCO, 50% CCI Côte d'Opale) avec Mr Noyer dont le sujet est la localisation d'une balise active positionnée sur le fond marin.

1.3 L'enseignement

1.3.1 Bilan Quantitatif

J'enseigne à l'Université depuis ma première année de thèse (1992). J'ai dans ce cadre enseigné diverses matières de l'informatique industrielle. J'ai enseigné l'électronique numérique et analogique, le traitement du signal et des images, la propagation des ondes électromagnétiques en hyperfréquence, la synthèse des filtres numériques et analogiques, la synthèse des codes auto-correcteurs d'erreur, les systèmes et signaux GNSS, la fusion d'informations et le filtrage statistique. J'ai aussi enseigné l'architecture des ordinateurs, la programmation Matlab, les langages C et VHDL, la programmation des composants CPLD/FPGA et des composants DSP.

Mes enseignements ont été réalisés pour tous niveaux d'étude dans des formations généralistes et professionnalisantes. J'ai dans ce cadre enseigné en premier cycle à l'IUT en DEUG TI et en DEUG A. J'ai enseigné en deuxième cycle à l'IUP du Littoral-Calais et dans les DESS (ou Master Professionnel), réseaux câblés, IMTS (Ingénierie Mathématique et Traitement du Signal), INS3I (Ingénierie Numérique, Signal, Image et Informatique Industrielle). J'ai enseigné

en deuxième cycle dans le DEA (ou Master Recherche) MOSC (MODélisation et simulation des Systèmes Complexes). Finalement j'ai enseigné dans le mastère PPMD de l'école d'ingénieurs ENSG (Ecole Nationale des Sciences Géographiques), dans le cycle d'ingénieurs de EILCO (l'Ecole d'Ingénieur du Littoral Côte d'Opale) et au CNAM (Conservatoire National des Arts et Métiers).

Suite à mon recrutement en tant que Maître de conférences à l'IUT Calais-Boulogne, j'ai souhaité effectuer mon service statutaire à l'IUT. J'enseigne l'électronique numérique en semestre 1 à l'IUT (cours +TD+TP) et le traitement du signal en semestre 3 (cours +TD). Il est à noter que de 1997 à 2001, j'ai enseigné à l'IUT l'informatique (algorithmique et langage C). Mes enseignements en master 2 à l'université sont donc réalisés en heures supplémentaires et sur mes thèmes de recherche. Je reporte dans le tableau suivant un récapitulatif de mes enseignements (237 h équivalent TD pour l'année 2012/2013).

Enseignements	CM	TD	TP
Premier cycle			
IUT 1 ère année : Electronique Numérique	18	42	85
IUT 2 ième année : Traitement du signal	9	22	–
Troisième cycle			
EILCO 2 ième année : Filtrage Statistique	12	14	–
Mastère PPMD : Traitement des signaux GNSS	5	8	–

Depuis mon intégration à l'ULCO en tant que Maître de conférences j'ai créé et enseigné les cours suivants qui portent sur mes activités de recherche :

- Traitement de l'image (DESS IMTS, Années :1998-2000)
- Fusion d'informations (Master 2 recherche MOSC, Années : 2000-2005)
- Navigation par satellites (Master 2 Professionnel INS3I, Années : 2005-2012)
- Ouverture recherche : Fusion d'informations (Master 2 Professionnel INS3I, Années : 2005-2012)
- Traitement des signaux GNSS (Mastère PPMD de l'ENSG, Années : 2005-2014)
- Filtrage Statistique du Signal (EILCO, Années : 2012-1013)

1.3.2 Activités d'enseignement

Depuis mon intégration en tant qu'enseignant chercheur j'ai créé les cours, les travaux dirigés et les travaux pratiques des enseignements que j'ai réalisés. Les enseignements pour les formations professionnalisantes doivent répondre aux besoins exprimés par le monde professionnel, mais pas seulement. Ils doivent aussi permettre aux étudiants de suivre les évolutions technologiques en s'appuyant sur une connaissance des principes et formalismes du domaine. Enfin ils doivent pouvoir se décliner sous forme de cours théoriques où la matière est formalisée et imagée par les dernières évolutions technologiques. On doit aussi pouvoir réaliser des travaux dirigés pour la mise en applications du formalisme et des travaux pratiques pour implémenter et évaluer les dernières technologies. La mise en place et l'enseignement d'une matière dans

une formation technologique nécessite donc d'avoir une bonne connaissance du domaine et de suivre son évolution. C'est pour cette raison que les enseignements que je dispense sont proches de mes activités de recherche. Il s'agit, dans ce cas, d'un transfert des connaissances du monde de la Recherche vers la Formation Universitaire en Formations Initiale et Continue. Je décris dans la suite les différents enseignements que j'ai créés et leurs contenus :

- Le cours (75 heures en Semestre 1) d'électronique numérique comprend la logique combinatoire et séquentielle, la programmation des composants programmables en langage VHDL et la description des architectures de CPLD (Complex Programmable Logic Device) et FPGA (Field-Programmable Gate Array). En plus du formalisme classique de l'algèbre de Boole pour la logique combinatoire, j'ai introduit dans cet enseignement le formalisme lié à la description des systèmes à événements discrets par graphe d'état pour la logique séquentielle. J'y ai aussi introduit l'implémentation en langage VHDL des systèmes formalisés et l'algorithmie de la programmation par flot de données. 14 TD de 1 heure 30 permettent aux étudiants de se familiariser avec le formalisme et 15 TP de 2 heures 30 permettent aux étudiants de travailler sur un sujet pratique décrit par son cahier des charges. Dans ces travaux pratiques, les étudiants utilisent le logiciel IspDesignExpert de Lattice pour décrire en langage VHDL la fonctionnalité à réaliser, simuler et tester son fonctionnement et finalement l'implanter sur un CPLD pour le tester dans un cas réel. Dans ce contexte, nous avons proposé une série de TP pour la mise en place d'un atelier génie logiciel dont le but est la réalisation d'un microprocesseur 6809 en VHDL [AP3,AP4]. Dans ce projet l'architecture du microprocesseur est décomposée avec les étudiants, puis chaque élément de l'architecture est réalisé par un binôme. Finalement les différents éléments sont assemblés et le microprocesseur est implanté dans un CPLD.
- Le cours de traitement du signal (28 heures en semestre 3) s'intitule en fait architecture des systèmes pour le traitement du signal. Dans cet enseignement, on souhaite présenter la chaîne des traitements d'un composant dédié aux traitements du signal. On y aborde donc les problèmes de représentation des spectres, d'échantillonnage, de quantification et de codage. On présente aussi les architectures de DSP et l'implémentation des traitements de signaux dans les CPLD. Les formalismes qui sont introduits dans cet enseignement sont la transformation de Fourier, la convolution et la corrélation discrète. Ils sont utilisés pour le filtrage et la description de l'algorithme de transformée de Fourier rapide. L'analyse spectrale est étudiée dans le cadre de TD (11 heures de TD machine : implémentation Matlab) et l'implémentation des algorithmes de traitements dans un CPLD dans le cadre de TD (11 heures de TD machine). Pour cet enseignement j'ai développé une interface entre le logiciel Matlab et le logiciel IspDesignExpert de Lattice pour réaliser le traitement des signaux par un CPLD. En effet, Matlab permet de générer des signaux test ou de réaliser l'acquisition de signaux de voie réelle et d'afficher le résultat du traitement réalisé par le CPLD. Le logiciel IspDesignExpert de Lattice fournit alors un simulateur de CPLD qui est alimenté par les données produites par Matlab.
- Le traitement des signaux GNSS est un des principaux domaines d'applications de mes travaux de recherche en fusion d'informations. Il m'est donc paru opportun de monter un enseignement sur ce sujet dans le cadre d'un master professionnel. En effet avec l'arri-

vée de Galileo et la modernisation du système NAVSTAR (NAVigation System by Timing And Ranging), les systèmes GNSS sont en constant développement. De plus j'ai participé, de 2004 à 2006, au groupe de travail "Promotion de l'enseignement et de la recherche en systèmes de positionnement par satellites" du Conseil National de l'Information Géographique. Cette étude a permis de montrer qu'il existe peu d'enseignements de ce type en France et principalement dans le nord de la France. J'ai donc créé un module "Navigation Par Satellites" en Master 2 dans lequel je réalise le cours sur les systèmes GNSS et le traitement des signaux GNSS (ce cours est aussi enseigné à l'ENSG). Cet enseignement est constitué de 14 heures de cours et 20 heures de TD machine. Il s'adresse à des étudiants ayant une solide formation en mathématiques et traitement du signal. Le cours présente la constitution des signaux GNSS de NAVSTAR et GALILEO, le traitement des signaux GNSS, le calcul de positions des satellites et les différentes méthodes de calcul du point à partir des observables GPS de code et de phase. Le but des travaux dirigés associés à ce cours est d'amener les étudiants à calculer la position du récepteur à partir du signal numérisé en sortie d'antenne. Les étudiants doivent donc réaliser avec Matlab les fonctions d'acquisition et de poursuite des signaux GNSS numérisés. Ils doivent extraire le message de navigation pour dater le signal et en déduire les pseudo-distance satellite-récepteur. Finalement ils doivent calculer la position du récepteur à partir des pseudo-distance et des positions de satellites. Cet enseignement permet de mettre en pratique un grand nombre de techniques de traitement du signal (Transformée de Fourier, convolution, corrélation, filtrage d'état, estimation par moindres carrés) et il fournit aux étudiants une connaissance fine du fonctionnement des récepteurs GNSS (architecture d'un "front end", poursuite du code et de la phase, système à étalement de spectres, modulations).

- La formation à la recherche doit permettre aux étudiants de découvrir de nouveaux formalismes et/ou de nouvelles méthodes. Un module "fusion d'informations" a été créé par les membres du groupe fusion du laboratoire. Ce module a d'abord été enseigné dans le master théorique MOSC puis dans le master professionnel INS3I sous l'intitulé "ouverture recherche". Dans ce contexte, ma contribution a porté sur la mise en place d'un enseignement intitulé "fusion d'estimation et de détection". Le but de cet enseignement est de présenter les systèmes de fusion de détection centralisés et distribués. Le principe de ces systèmes est décrit dans un cadre Bayésien et les approches sont évaluées en termes de probabilité de détection, fausse alarme et probabilité d'erreur. Cet enseignement qui est constitué de 8 heures de cours et 8 heures de TD aborde successivement les systèmes de détections centralisées puis distribuées en fusion d'informations. Le but des travaux dirigés est de retrouver les résultats théoriques décrits en cours à partir de la mise en œuvre des systèmes de fusion de détections sous la forme de filtres de Kalman GLR.
- Le filtrage statistique est aujourd'hui une compétence indispensable pour les ingénieurs du domaine de l'informatique industrielle. En effet avec l'augmentation de la puissance de calcul dans les systèmes embarqués il est aujourd'hui possible d'envisager des traitements temps réel s'appuyant sur des filtres d'états. Cet enseignement est constitué de 12 heures de cours, 14 heures de TD et 14 heures de TP. Dans cet enseignement sont abordées la modélisation d'état et la synthèse des filtres par l'approche bayésienne. L'objectif est de présenter, au travers de la modélisation probabiliste et de la description statistique,

le filtrage adaptatif (filtre adaptatif de Widrow), le filtrage Bayésien (Filtrage de Kalman) et ses évolutions récentes (Filtrage particulaire). Il est étudié en TD l'implémentation des filtres et le réglage de leurs paramètres pour optimiser leurs performances. En TP les filtres sont appliqués, au filtrage de signaux Radio-FM et à la Navigation par satellites.

Durant ces cinq dernières années j'ai porté l'ensemble de mes enseignements de l'IUT vers un site de "e-learning" (apprentissage à distance). Dans cette approche on construit un environnement de travail entièrement numérique accessible au travers d'un logiciel de "e-learning". Cet environnement est constitué d'une interface partagée entre l'enseignant et les étudiants qui sont inscrits à son cours. Les étudiants disposent donc sur le site des sujets de TD et TP, des photocopies du cours et des DS des années précédentes. Ils peuvent consulter leurs notes et rendre leurs travaux pratiques. Ils disposent d'un forum pour poser des questions et partager des résultats. Pour l'enseignant responsable du module, la gestion des notes fournies par chaque intervenant sur le site est alors grandement facilitée par les outils mis à sa disposition. D'un point de vue pratique, cette approche nécessite de repenser l'ensemble des travaux pratiques pour que les comptes rendus puissent être produits sous forme numérique. J'ai aussi utilisé cette approche pour la gestion des projets tuteurés. En effet le choix et la sélection des projets peuvent être gérés ainsi que le dépôt de pré-rapports et des rapports finaux. Je travaille actuellement sur la mise en place d'une bibliothèque numérique qui regroupera l'ensemble des rapports et permettra leur consultation.

Il est à noter qu'il existe une forte incitation des directions pour l'utilisation du "e-learning" qui permet de diminuer de façon conséquente l'utilisation du papier. Aujourd'hui un des enjeux majeurs pour ce type d'approche est d'imaginer leurs utilisations dans le cadre de Travaux Dirigés.

1.3.3 Responsabilités pédagogiques

L'essentiel de mes responsabilités pédagogiques porte sur la coordination de modules d'enseignement. Concernant l'IUT, j'ai la responsabilité du module d'électronique numérique (de première année) et d'architecture pour le traitement du signal (de deuxième année) dont je réalise le cours. La ventilation du module est définie dans le PPN (Programme Pédagogique National) de la formation GEII. J'ai donc en charge l'organisation avec les différents intervenants des TD, TP, examens et l'évaluation des étudiants.

En Master 2 INS3I, j'ai créé le module "navigation par satellites" dont j'ai eu la responsabilité jusque 2012. J'ai organisé ce module en trois cours différents et trois conférences invitées qui présentent des aspects particuliers du domaine. Les trois cours concernent respectivement les systèmes et le signal GNSS (Serge Reboul LISIC), les capteurs inertiels et l'hybridation (Jean Bernard Choquel LISIC), la navigation et le "Map matching" (Mourad Zribi LISIC). Les trois conférences portent respectivement sur les Systèmes d'Information Géographique (Céline Couvez IRSN), les systèmes de références et les projections (Serge Botton ENSG), la localisation en milieu ferroviaire (Marc Hedebault IFSTTAR). J'organisais donc les interventions et l'évaluation des étudiants pour ce module.

J'ai aussi la responsabilité des projets tuteurés de première année à l'IUT. Je récolte donc

les sujets et les rapports, j'organise les soutenances et je centralise les notes. J'ai également encadré de nombreux stages à l'IUT et en master 2, et j'encadre chaque année au moins deux étudiants pendant leur stage en entreprise.

1.4 Vie de l'université

Pour que l'université puisse fonctionner il est nécessaire que chacun s'investisse dans les tâches de gestions de l'enseignement, d'animation de la recherche et de participation à la vie de l'université. Ma participation principale à la vie de l'université est présentée ici dans le cadre de mes fonctions électives.

J'ai été membre élu de la commission de spécialistes de l'établissement, dans la section 61, de 1998 à 2006. J'ai donc participé au classement des dossiers ATER et des dossiers de Maîtres de conférences. En 2010 j'ai participé à un comité de sélection pour un poste en 63e section. Depuis mon recrutement, je suis syndiqué et je suis membre actif de la section syndicale de l'ULCO. J'ai participé dans ce cadre à la mise en place des textes pour la définition et le fonctionnement des comités de sélection et à l'élaboration du budget de l'université. Depuis juin 2013, je suis co-secrétaire syndical de la section de l'ULCO.

J'ai été élu au Conseil Scientifique de l'Université pour trois mandats (2001/2005-2008/2012-2012/2016) et j'ai participé au passage de l'université aux RCE (Passage aux Responsabilités et Compétences Élargies) dans le cadre de la loi LRU (loi relative aux Libertés et Responsabilités des Universités). J'ai été élu au Conseil d'Administration de l'IUT Calais-Boulogne pour un mandat (2005/2009). Et finalement j'ai été nommé par le président de l'Université membre de la commission budget pour la période (2010/2011). L'ensemble de ces activités m'a permis d'obtenir une bonne connaissance du fonctionnement de l'université et de l'IUT.

Récapitulatif de mes fonctions électives :

- 2002-2009 : Elu à la commission de spécialistes de l'établissement (section 61).
- 2001-2005 | 2008-2012 | 2012-2016 : Elu au conseil scientifique de l'Université du Littoral Côte d'Opale.
- 2005-2009 : Elu au conseil d'administration de l'IUT Calais-Boulogne.
- 2010-2012 : Membre de la commission budget de l'université
- 2011-2015 : Elu au Conseil National des Universités (section 61).
- 2014-2016 : Co-secrétaire de la section syndicale de l'ULCO (Décharge de 64h EQTD).

1.5 Bibliographie

Articles internationaux

[A19] G. STIENNE, S. REBOUL, J. -B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, Cycle Slip Detection and Repair with a Circular On-Line Change-Point Detector, *Signal Processing*, 100, pp. 51-63, 2014.

[A18] M. AZMANI, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Non-Linear Fusion of Observations Pro-

vided by Two Sensors, 15(7), pp.2698-2715, Entropy. 2013.

[AI7] G. STIENNE, S. REBOUL, M. AZMANI, J. -B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, A multi-temporal multi-sensor circular fusion filter, Information Fusion, 18, pp. 86-100, 2014.

[AI6] G. STIENNE, S. REBOUL, M. AZMANI, J. -B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, GNSS dataless signal tracking with a delay semi-open loop and a phase open loop, Signal Processing, 93(5), pp.1192-1209, 2013.

[AI5] G. STIENNE, S. REBOUL, M. AZMANI, S. BOUTOILLE, J. -B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, Bayesian Change-Points Estimation Applied to GPS Signal Tracking, ISRN Signal Processing 2011.

[AI4] M. AZMANI, S. REBOUL, J. B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, Etude et mise en œuvre d'un estimateur récursif des paramètres statistiques d'une distribution circulaire de von Mises et d'une distribution Log-normale , Journal Européen des Systèmes Automatisés 44 (4-5), pp. 525-545, 2010.

[AI3] S. BOUTOILLE, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, A hybrid fusion system applied to off-line detection and change-points estimation, Information Fusion 11 (4), pp. 325-337, 2010.

[AI2] S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Joint Segmentation of the Wind Speed and Direction, Signal Processing 86 (4), pp. 744-759, 2006.

[AI1] D. CAPARROS-LEFEBVRE, I. GIRARD-BUTTAZ, S. REBOUL, F. LEBERT, M. CABARET, A. VERIER, M. STEINLING, J.P. PRUVO, H. PETIT, Cognitive and psychiatric impairment in herpes simplex encephalitis suggest involvement of the amygdalo-frontal pathways, Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism, 243 (3), pp. 248-256, 1995.

Articles nationaux

[AN1] S. REBOUL, A. TALEB-AHMED, M.M. ROUSSET, F. WATTRELOT, J.P. DUBUS, Reconstruction d'objets binaires à partir de deux projections orthogonales par une technique inspirée de la théorie des graphes : la recherche du flût maximum à coût minimum, Traitement du signal, 12 (15), pp. 327-341, 1995.

Conférences invitées

[CO2] S. REBOUL, Filtrage statistique des signaux dans les domaines linéaires et circulaires, Ecole d'Eté (2ème édition) : Traitement de Signal et ses Applications en Télécommunication 13 au 14 Mai 2013, ENSA de Kenitra.

[CO1] S. REBOUL, Nouveaux challenges pour les systèmes de localisation GNSS, Ecole d'Hiver, Techniques Avancées pour les Systèmes de Localisation Indoor/Outdoor et Nouvelles Applications, du 2 au 4 Mars 2011, ENSA de Marrakech.

Communications internationales avec actes

- [CI34] K. EL MOKHTARI, S. REBOUL, M. AZMANI, J-B. CHOQUEL, H. SALAHEDDINE, B. AMAMI, M. BENJELLOUN, A Map Matching algorithm based on a particle filter, Proceedings of the 4th International Conference on Multimedia Computing and Systems, (ICMCS'14), Marrakech, April 2014.
- [CI33] S. REBOUL, C. BOTTERON, M.A. RIBOT, G. STIENNE, J. LECLERE, J.-B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN P.-A. FARINE, Normalized GNSS Interference Pattern Technique, Proceedings of the IEEE IGARSS URSI Commission F Microwave Signatures 2013, Helsinki, October 28-31, 2013.
- [CI32] K. EL MOKHTARI, S. REBOUL, M. AZMANI, J-B. CHOQUEL, H. SALAHEDDINE, B. AMAMI, M. BENJELLOUN, A Circular Interacting Multi-Model Filter Applied to Map Matching, Proceedings of the 16th International Conference on Information Fusion, (Fusion 2013), Istanbul, July 2013.
- [CI31] G. STIENNE, S. REBOUL, J.-B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, GNSS code and phase processing techniques in a ground-based mobile altimetry system, IEEE/GNSS+R 2012, Lafayette, October 2012.
- [CI30] A. BOURKANE, S. REBOUL, M. AZMANI, J-B. CHOQUEL, B. AMAMI, M. BENJELLOUN, C/N0 Inversion For Soil Moisture Estimation Using Land-reflected Bi-static Radar Measurements, IEEE/GNSS+R 2012, Lafayette, October 2012.
- [CI29] G. STIENNE, S. REBOUL, J.-B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, Circular Data Processing Tools Applied to a Phase Open Loop Architecture for Multi-Channels Signals Tracking, Proceedings of IEEE/ION PLANS 2012, Myrtle Beach, April 2012.
- [CI28] G. STIENNE, S. REBOUL, M. AZMANI, J.B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, "A Multi-Sensor Circular Particle Filter Applied to the Fusion of the GPS-L2C Channels", Dans Proceedings of the 14th International Conference on Information Fusion, (Fusion 2011), Chicago, July 2011.
- [CI27] M. AZMANI, S. REBOUL, J.B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN " Information fusion applied to the tracking of GPS pilot and data channels ". Dans Proceedings of the 13th International Conference on Information Fusion, (Fusion 2010), Edinburgh, July 2010.
- [CI26] M. AZMANI, S. REBOUL, J.B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN " Soil Moisture Estimation using Land-reflected GPS L2C Bi-static Radar Measurements ", Proceedings of the 23rd International Technical Meeting of the Satellite Division of the institute of Navigation, (ION GNSS 2010), Portland, September 2010.
- [CI25] J.-L. ISSLER, F. PEROZANS, Y. TAWK, A. JOVANOVIC, C. BOTTERON, P.-A. FARINE, R. LANDRY, V. DEHANT, A. CAPORALI, S. REBOUL, Universal-SBAS : A worldwide multimodal standard ,Proceedings Elmar - International Symposium Electronics in Marine , art. no. 5606123, pp. 429-444, 2010.
- [CI24] M. SAHMOUDI, J.-L. ISSLER, F. PEROZANS, Y. TAWK, A. JOVANOVIC, C. BOTTERON, R. LANDRY, V. DEHANT, A. CAPORALI, S. REBOUL, U-SBAS (Universal SBAS) : A New Worldwide Multimodal SBAS Standard, Proceedings NAVITEC 2010.

- [CI23] M. AZMANI, S. REBOUL, J.B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, A Recursive Fusion Filter for Angular Data, IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics 2009, Guilin, China, December 2009.
- [CI22] M. AZMANI, S. REBOUL, J.B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, A Recursive Change-point Estimate of the Wind Speed and Direction, IEEE International Conference on Computational Cybernetics, ICC2009, Mallorca, Spain, November 2009.
- [CI21] L. QI, S. REBOUL, A. GARDEL, S. BOUTOILLE, J.B. CHOQUEL M. BENJELLOUN, Beach soil moisture measurement with a land reflected GPS bistatic radar technique, IEEE Oceanic Engineering Society Workshop PASSIVE'08, Hyères, October 2008.
- [CI20] S. BOUTOILLE, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Bayesian off-line segmentation applied to multi-carrier GPS signal fusion, Conference on Information Fusion 2007, Québec, July 2007.
- [CI19] S. BOUTOILLE, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Off-line segmentation of GPS signal tracking using a bayesian approach, IEEE Industrial Electronics Society, Paris, November 2006.
- [CI18] J. KACEMI, S.REBOUL, M.BENJELLOUN, Information fusion in a hybrid tightly coupled GPS/ Dead-reckoning positioning system, IEEE Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems 2006, Heidelberg, September 2006.
- [CI17] S. BOUTOILLE, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Multi-band GPS signal tracking in a high dynamic manoeuvring situation, IFAC International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO2005), Barcelona, September 2005.
- [CI16] S. REBOUL, M. BENJELLOUN, A Bayesian fusion approach to change-points analysis of processes, IEEE Information Fusion 2005, Philadelphia, July 2005.
- [CI15] S. BOUTOILLE, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Fusion of detections in a multi-carrier GPS receiver, IEEE Information Fusion 2004, Stockholm, June 2004.
- [CI14] J.KACEMI, S.REBOUL, M.BENJELLOUN, Information Fusion in a Multi-Frequencies GPS Receiver, IEEE Position Location and Navigation Symposium, PLANS 2004, Monterey, April 2004.
- [CI13] J.KACEMI, S.REBOUL, M.BENJELLOUN, Information Fusion in an Hybrid GPS Multi-Frequencies / Dead-Reckoning Navigation System, IFAC / EURON Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles, IAV2004, Lisbon, July 2004.
- [CI12] J.KACEMI, S.REBOUL, M.BENJELLOUN, Information Fusion in a Multi-Band GPS Receiver, IFAC Symposium on Cost Oriented Automation, SCOA2004, Ottawa, Canada, July 2004.
- [CI11] S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Joint Segmentation of a Set of Piecewise Stationary Processes, IEEE International Conference on Computational Cybernetics, ICC2004, Vienna, Austria, August 2004.

- [C110] S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Fusion of piecewise stationary process, In : Advances in Systems Engineering, Signal Processing and Communications, Editor : N. Mastorakis, pp 192-195, WSEAS Press, 2002.
- [C19] D. BRIGE, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, MAP estimate for directional data : Application to the atmospheric turbulence measurement, PSIP 2001, Marseille, January 2001.
- [C18] S. REBOUL, D. BRIGE, M. BENJELLOUN, Optimal segmentation by random process fusion, Fusion 2000, Paris, July 2000.
- [C17] S. REBOUL, L. EVRARD, J.P. DUBUS, Automatic detection of signal stationary rupture by analysis of its transitions and modelisation of its density probability : application to roof edges detection in range images , SPIE Electronique Imaging : Science and Technology, Nonlinear Image Processing, San Jose, Febuar 1997.
- [C16] E. DUQUENOY, A. TALEB-AHMED, S. REBOUL, Y. BERAL, J.P. DUBUS, Automatic Matching Of A Ultrasound Imaging Sequence In View Of 3d Reconstruction Of Foetus Callosus Corpus , SPIE Intelligent Robots and Computer Vision XIV : 3D vision, Product Inspection and Active Vision, Boston, 1995.
- [C15] S. REBOUL, A. TALEB-AHMED, L. GAUTIER, D. CAPARROS-LEFEBVRE, J.P. PRUVO, J.P. DUBUS, A new segmentation technique for volumetric calculation of multiple sclerosesin nuclear magnetic resonance imaging , SPIE Intelligent Robots and Computer Vision XIII : 3D vision, Product Inspection and Active Vision, Boston, November 1994.
- [C14] S. REBOUL, A. TALEB-AHMED, S. TELLIEZ, D. CAPARROS-LEFEBVRE, J.P. PRUVO, J.P. DUBUS, Segmentation for volumetric calculation in nuclear magnetic resonance imaging, MVA'94 IAPR Workshop on Machine Vision Application, Kawasaki, December, 1994.
- [C13] D. CAPARROS-LEFEBVRE, I. GIRARD-BUTTAZ, F. LEBERT, M. CABARET, B. DELCHY , S. REBOUL, M. STEINLING, A. VERIER, H. PETIT, J.P. DUBUS, J.P. FRANCKE, J.P. PRUVO, Does cognitive impairment correlate with hippocampal and amygdaloid atrophy in herpes virus (HSV) encephalitis ?, 3 th Workshop of Neurosciences, October, 1994.
- [C12] J.B. CHOQUEL, S. REBOUL, F. DUFRESNOIS, A. TALEB-AHMED, J.P. PRUVO, J.P. DUBUS, Elliptic transformation of concave contours for objects representation in 3D scene, 4 th European workshop on tree-dimensional television, Rome, October, 1993.
- [C11] A. TALEB-AHMED, S. REBOUL, M.M. ROUSSET, J.P. DUBUS, 3D reconstruction of children's jaw, 14 th Conference IEEE EMBS, Paris, 1992.

Communications internationales sans acte

- [CS8] A. BOURKANE, S. REBOUL, M. AZMANI, J-B. CHOQUEL, H. SALAHEDDINE, B. AMAMI, M. BENJELLOUN, Estimation of GNSS signals amplitude , Space Reflecto 2013, Brest, November 4-5, 2013.
- [CS7] G. STIENNE, S. REBOUL, J.B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, Ground-Based Altime-

try Using a Single-Receiver Single-Frequency GNSS Phase Ambiguity Resolution Technique, Space Reflecto 2013, Brest, November 4-5, 2013.

[CS6] G. STIENNE, S. REBOUL, J.B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, Boucle Ouverte de Phase pour l'Intégration Cohérente du Signal EGNOS dans un Système Radar Bi-Statique, MNOTSI 2012, Kénitra, June 25-27, 2012.

[CS5] G. STIENNE, S. REBOUL, J.B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, A phase Open Loop for the long coherent integration of the bi-static radar EGNOS signal, Space reflecto 2011, Calais, Décembre 2011.

[CS4] G. STIENNE, S. REBOUL, M. AZMANI, J.B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN, A multi-sensors circular fusion filter for phase estimation in a PLL open loop : application to soil moisture estimation with a GPS L2C bi-static radar system, Space reflecto 2010, Toulouse, Décembre 2010.

[CS3] C. BOTTERON, Y. TAWK, A. JOVANOVIC, P-A. FARINE, RENÉ JR. LANDRY, M. SAHMOUDI, J.-L. ISSLER, F. PEROZANS, V. DEHANT, A. CAPORALI, S. REBOUL, Universal-SBAS : A Complete Worldwide Multimodal Standard, Fifth Meeting of the International Committee on Global Navigation Satellite Systems (ICG), Turin, October 2010.

[CS2] Z. ZHANG, S. REBOUL, M. AZMANI, J. B. CHOQUEL, M. BENJELLOUN " Fusion of the GPS L2 Time Multiplexing Pilot and Data Channels Signals : Application to Soil Moisture Estimation". Proceedings of the IEEE Oceanic Engineering Society Workshop PASSIVE'10.

[CS1] L. QI, S. REBOUL, S. BOUTOILLE, J.B. CHOQUEL M. BENJELLOUN, Interest of GPS reflected signal to characterize the surface of beach, 3rd CNES/WESA Workshop on GNSS Signals and Signal processing, Toulouse, April 2008.

Communications nationales avec actes

[CN9] M. AZMANI, S. REBOUL, J. B. CHOQUEL , Étude et mise en œuvre d'un estimateur récursif des paramètres statistiques d'une distribution circulaire, Congrès STIC et environnement , Calais, Juin 2009.

[CN8] S. BOUTOILLE, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Poursuite de code hors ligne dans un récepteur GPS par sélection de modèle, MAJECSTIC 2006, Lorient, Novembre 2006.

[CN7] S. BOUTOILLE, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Poursuite de code dans un récepteur GPS multi-bandes en présence d'interférences, MAJECSTIC 2005, Rennes, Novembre 2005.

[CN6] S. BOUTOILLE, S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Fusion de détections dans un récepteur GPS multi-bandes, MAJECSTIC 2004, Calais, Octobre 2004.

[CN5] J.KACEMI, S.REBOUL, M.BENJELLOUN, Fusion d'informations dans un système de navigation hybride GPS Multi-Porteuses / Estime, MAJECSTIC'04, Calais, Octobre 2004.

[CN4] S. REBOUL, M. BENJELLOUN, Segmentation de données directionnelles, 18ème Colloque GRETSI, Toulouse, France, Septembre 2001.

- [CN3] S. REBOUL, D. BRIGE, M. BENJELLOUN, Segmentation de données directionnelles par fusion bayésienne, CIFA 2000, Lille, Juillet 2000.
- [CN2] S. REBOUL, F. DUFRESNOIS, D. CAPPAROS-LEFEBVRE, J.P. PRUVO, J.P. DUBUS, Quantification volumique et représentation tridimensionnelle du corps calleux à partir d'une exploration sagittale et coronale RMN, Forum jeunes chercheurs ITBM, Lyon, 1994.
- [CN1] A. TALEB-AHMED, S. REBOUL, F. SALOME, J.P. DUBUS, Méthode de reconstruction tridimensionnelle indirecte de la dentition à partir de deux clichés radiographiques en incidence orthogonale, Premier Symposium International de l'Image en Relief, 1991.

Autres publications

- [AP10] S.REBOUL, J. B. CHOQUEL, G. STIENNE, Utilisation de Sakai pour la gestion des projets de recherche, Les Usages du Numérique à l'ULCO, Le 26 septembre 2013.
- [AP9] S. REBOUL, A. AUBRY, Caractérisation géotechnique des plages par une approche radar bi-statique utilisant le signal GPS réfléchi, Rapport du projet " PLAgés à MARées " du programme RELIEFS de la TERRE de l'Institut National des Sciences de l'Univers, 2009 .
- [AP8] S. REBOUL, A. AUBRY, Caractérisation géotechnique des plages par une approche radar bi-statique utilisant le signal GPS réfléchi (Position du problème et résultats préliminaires), Rapport du projet " PLAgés à MARées " du programme RELIEFS de la TERRE de l'Institut National des Sciences de l'Univers, 2008.
- [AP7] S.REBOUL, J. B. CHOQUEL, Synthèse d'un microprocesseur en langage VHDL, CET-SIS'2005, Nancy, 25-27 Octobre 2005.
- [AP6] S.REBOUL, J. B. CHOQUEL, Synthèse d'un microprocesseur en langage VHDL, revue du GEII, Numero 65, pages 29-34, Juin 2005.
- [AP5] S.REBOUL, Rapport d'essais concernant la détection, le positionnement et la reconnaissance des Wagons Poches Tonneaux pour la mesure de leur remplissage par les hauts fourneaux de Sollac Dunkerque, Rapport de contrat, Entreprise Télécom F2 Février 1999.
- [AP4] S.REBOUL, Segmentation et modélisation d'une image en niveau de gris en vue de son codage, GDR ISIS, GT2, Paris, 1997.
- [AP3] S.REBOUL, A. TALEB-AHMED, J.B. CHOQUEL, J.P. DUBUS, Segmentation d'images par détection des discontinuités du signal image, GRAISYHM, Lille, 1996.
- [AP2] S.REBOUL, A. TALEB-AHMED, J.B. CHOQUEL, J.P. DUBUS, Résolution d'un problème inverse par un algorithme de recherche de flot maximum à cout minimum dans un graphe dynamique, GRAISYHM, Lille, 1994.
- [AP1] S.REBOUL, A. TALEB-AHMED, M.M. ROUSSET, J.P. DUBUS, Reconstruction 3D de la mâchoire à partir de radiographies rayon X, GDR ISIS, GT1 Reconstruction 3D, Paris, 1993.

Thèses

[TH4] G. STIENNE, Traitements des signaux circulaires appliqués à l'altimétrie par la phase des signaux GNSS, Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Littoral Côte d'Opale, Calais, 2013.

[TH3] M. AZMANI, Fusion non-linéaire appliquée aux voies pilote et données du signal GPS L2C, Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Littoral Côte d'Opale, Calais, 2010.

[TH2] S. BOUTOILLE, Systèmes de fusion pour la segmentation hors-ligne de signaux GPS multi-porteuses, Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Littoral Côte d'Opale, Calais, 2007.

[TH1] J. KACEMI, Fusion d'informations dans un système de positionnement hybride GPS multi-porteuses/estime, Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Littoral Côte d'Opale, Calais, 2006.

Masters recherche

[MA5] Z. ZHANG, Intégration cohérente longue du signal GPS : traitement de la phase, master 2 INS3I, Université du Littoral Côte d'Opale, Calais, 2010 ([CI18, CI14, CI13, CI12]).

[MA4] L. QI, Estimation hors ligne de la puissance du signal GPS rétro-diffusé, master 2 INS3I, Université du Littoral Côte d'Opale, Calais, 2008.

[MA3] R. IMERZOUKENE, Détection de ruptures dans le discriminant de la boucle DLL du récepteur GPS, mémoire de D.E.A, Modélisation des Systèmes Complexes, Calais, 2006.

[MA2] S. BOUTOILLE, Fusion d'estimation et de décision dans un récepteur GPS multi-porteuses, mémoire de D.E.A, Modélisation des Systèmes Complexes, Calais, 2003.

[MA1] D. BRIGE Estimation de la vitesse et de la direction du vent par fusion Bayésienne, DEA d'Automatique et d'Informatique Industrielle, Université de Lille I, Juin 1999.

Chapitre 2

Synthèse de mes travaux de recherche.

2.1 Introduction.

2.1.1 La genèse.

En 1997 j'ai rejoint le laboratoire LASL et l'équipe Fusion d'Informations sous la direction de Monsieur Mohammed Benjelloun. J'ai intégré ce Laboratoire suite à une thèse en traitement de l'image appliquée au domaine médical que j'ai réalisée au Laboratoire LISIR de Calais (ancien nom du laboratoire LASL). A l'époque l'axe prioritaire de l'ULCO était l'environnement. Dans ce contexte j'ai choisi de changer de thématique de recherche pour étudier la fusion d'informations et son application à des problématiques du domaine de l'environnement. Une première étude portant sur la modélisation des panaches de cheminée m'a conduit à considérer en termes d'applications l'estimation des paramètres du vecteur vent comme une problématique pratique importante pour la prévision de la dispersion des polluants. En 2000 nous avons intégré le projet régional PEPSAT sur le positionnement satellitaire et mon domaine d'application en recherche est devenu le traitement des signaux GNSS. En 2007 j'ai intégré le projet CNRS/INSU PLAMAR dans lequel j'ai développé mes activités de recherche avec pour application la réflectométrie des signaux GNSS. Aujourd'hui j'étudie, dans le cadre du projet de territoire «le Campus de la Mer», les problèmes de géolocalisation du fond marin.

Mon objectif en recherche est de trouver dans les problèmes pratiques étudiés des applications de la fusion d'informations et de nouveaux modèles de fusion bayésienne. Dans ce contexte nos travaux portent sur la combinaison des informations fournies par différents signaux pour une meilleure estimation de leurs paramètres. Une des particularités de notre approche est de considérer des signaux que l'on suppose stationnaires par morceaux. Le problème devient alors multiple car il faut détecter la présence de la rupture de stationnarité, estimer sa position et sa dynamique. On est donc dans le cas d'un problème d'estimation et de détection conjointes.

Dans ce document j'ai choisi de présenter mes travaux au travers des nouvelles techniques de fusion d'informations que nous avons développées. En fusion d'informations on peut distinguer deux approches ; l'approche dite centralisée et l'approche dite distribuée. Nous n'avons pas étudié dans ce travail l'approche dite décentralisée qui concerne plutôt les réseaux de capteurs. Dans l'approche centralisée, les mesures sont combinées pour fournir une estimée qui

sera utilisée dans le processus de détection. Dans l'approche distribuée ce sont les décisions qui sont fusionnées pour fournir une meilleure détection.

Dans la première partie de ce chapitre j'aborde donc les opérateurs de fusion centralisée que nous avons proposés. Deux opérateurs originaux sont décrits ; la transformation non linéaire qui utilise la corrélation négative entre les mesures et l'estimation circulaire qui concerne les données angulaires périodiques. La deuxième partie est consacrée aux opérateurs de fusion distribuée. Deux approches originales sont présentées ; la première s'appuie sur la définition d'une loi *a priori* sur le comportement mutuel d'un ensemble de processus multi-ruptures que l'on segmente dans une approche globale hors ligne, la seconde concerne la fusion des ruptures détectées en ligne par deux opérateurs de fusion de type centralisé et distribué.

2.1.2 Position du problème.

Les méthodes de détection multi-capteurs exploitent les informations complémentaires et redondantes que fournissent les capteurs. Le domaine de la fusion d'informations comprend les méthodes qui combinent les informations redondantes fournies par un ensemble de sources. Le but de leur utilisation est d'améliorer la décision [Blo03]. On distingue alors deux types d'architectures de systèmes de fusion pour la détection : les systèmes centralisés (et décentralisés) et les systèmes distribués.

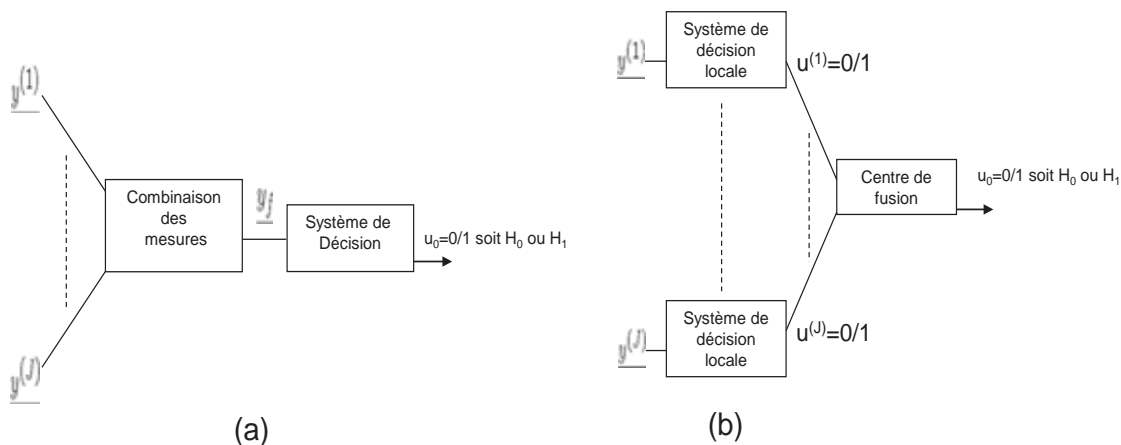


FIGURE 2.1: Systèmes de fusion centralisée et distribuée

Détection séquentielle

Dans un système centralisé, on considère l'ensemble des mesures en provenance des différents capteurs pour détecter et estimer la position de la rupture. On reporte sur la Figure 2.1.(a) l'architecture d'un système dit centralisé. On suppose en général que l'instant de rupture t et la dynamique de la rupture v sont les mêmes sur tous les capteurs. Le centre de fusion s'appuie sur

une règle de décision qui intègre la description statistique des mesures en provenance de l'ensemble des capteurs. Dans ce contexte, le problème considéré est la détection d'un changement dans la distribution statistique d'un processus J -dimensionnel. On note $\underline{y}^{(j)} = \left(y_i^{(j)}, 1 \leq i \leq n \right)$, la série j observée de vraisemblance $h^{(j)}$. Dans ce cas la règle de décision *a posteriori* de la présence d'une rupture est définie pour la segmentation en ligne par :

$$\frac{P(\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(J)} / H_1; \hat{v}, \hat{t})}{P(\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(J)} / H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad (2.1)$$

On note m_0 et m_1 les vecteurs de paramètres des distributions $h^{(j)}$ associés respectivement aux hypothèses H_0 et H_1 . On note $\underline{y}^{(j)}$ les J signaux observés et \hat{v} , \hat{t} la dynamique et l'instant de rupture estimé. En détection séquentielle le signal est segmenté dans une fenêtre de travail. La segmentation a pour objectif de détecter au plus tôt la rupture et d'estimer l'instant et la dynamique du changement dans le vecteur de paramètre du signal.

Pour améliorer la détection des ruptures il faut estimer le paramètre $m \in \{m_1, m_0\}$ avec précision. On utilise pour cela la fusion des informations fournies par les J signaux qui observent le même paramètre. Les opérateurs de fusion dans ce cas, sont des opérateurs de combinaison des mesures qui sont définis à partir de la distribution jointe suivante :

$$P(y_{f,i}, m) = P(y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(J)} / m) P(m) \quad (2.2)$$

où $y_{f,i}$ est le résultat de la combinaison des mesures soit la valeur des mesures fusionnée. On peut aussi intégrer dans le temps les mesures pour améliorer l'estimation des paramètres du signal. Dans ce cas l'inférence Bayésienne séquentielle permet de définir des filtres qui maximisent la distribution *a posteriori* du paramètre estimé sachant les mesures. L'étape dite de correction de cette inférence est définie par la distribution *a posteriori* suivante qui intègre les mesures et un modèle capteur défini par la distribution $P(y_f / m_i)$.

$$P(m_i / y_{f,1:i}) \propto P(y_f / m_i) P(m_i / y_{f,1:i-1}) \quad (2.3)$$

où m_i est un vecteur de paramètres qui évolue avec les instants i . L'étape de prédiction préliminaire à l'étape de correction permet de définir, à partir de la résolution de l'équation de Chapman-Kolmogorov, la distribution $P(m_i / y_{f,1:i-1})$ et d'intégrer ainsi un modèle d'évolution temporelle du système. L'innovation du filtre, qui est la différence entre la mesure fusionnée et le paramètre estimé, fournit alors une observation directe de \hat{v} , pour la détection de rupture. Les recherches réalisées actuellement dans ce domaine portent sur l'estimation des systèmes non linéaires. Dans ce contexte, notre contribution a porté sur l'étude et la mise en oeuvre de méthodes séquentielles Bayésiennes pour l'estimation et la fusion de données circulaires et de données linéaires corrélées négativement. Les mesures ainsi fusionnées ont été utilisées pour l'implémentation de détecteurs séquentiels paramétriques de type Kalman GLR dans différentes applications.

Détection mono-rupture hors ligne

Dans les systèmes distribués, on considère que les détections réalisées par les systèmes de décision associés à chaque capteur sont exploitées par un centre de fusion qui décide de l'absence ou de la présence d'une rupture sur l'ensemble des signaux. La segmentation mono-rupture est hors ligne car on suppose que la rupture qui peut subvenir à différents instants sur les différents capteurs est contenue dans la fenêtre de travail. On reporte sur la Figure 2.1.(b) l'architecture d'un système dit distribué. La règle de fusion concernant la décision peut être locale et s'appuyer sur les performances de détections connues des différents capteurs.

$$\begin{array}{ccc} & u_0 = 1 & \\ \frac{P(u^{(1)}, \dots, u^{(J)} / H_1)}{P(u^{(1)}, \dots, u^{(J)} / H_0)} & \begin{array}{c} > \\ < \end{array} & \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \\ & u_0 = 0 & \end{array} \quad (2.4)$$

La définition de la règle de décision au centre de fusion peut aussi se faire globalement sur l'ensemble des capteurs. On définit alors dans un même critère les règles de décision pour chaque capteur et la règle de fusion globale [Var97, Das94]. Dans un problème d'estimation de ruptures multi-capteurs il est très contraignant pour la plupart des applications de supposer les ruptures synchrones sur l'ensemble des processus. Dans ce cas la fusion distribuée permet de combiner les décisions prises par les capteurs qui ne sont pas systématiquement synchronisés entre eux. Même si la fusion distribuée est plus robuste pour l'estimation des ruptures elle est moins performante que la fusion centralisée. Notre contribution dans ce domaine a été de combiner les décisions prises par un système centralisé et un système distribué afin d'améliorer les performances globales de l'estimation de ruptures.

Détection multi-ruptures hors ligne

Pour la détection multi-ruptures à partir de mesures multi-capteurs, on suppose les processus observés stationnaires par morceaux et on note $\underline{r}^{(j)} = (r_i^{(j)}, 1 \leq i \leq n)$ la configuration de ruptures dans la série j et $\underline{r} = (\underline{r}^{(j)}, 1 \leq j \leq J)$ l'ensemble des J configurations de ruptures. $r_i^{(j)}$ prend la valeur 1 aux instants des changements et la valeur zéro entre deux changements. On note $\underline{m}^{(j)} = (m_1^{(j)}, \dots, m_{N_j}^{(j)})$ la suite des paramètres dans la série j composée de N_j segments stationnaires. Dans notre approche, les suites de paramètres $\underline{m1}^{(j)}$, $\underline{m0}^{(j)}$ associées respectivement aux hypothèses H_1 et H_0 , sont supposées différentes pour chaque signal j . Dans ce cas la règle de décision *a posteriori* permettant de décider, de deux ensembles de séquences de ruptures $\underline{r1} = \{\underline{r1}^{(1)}, \dots, \underline{r1}^{(J)}\}$ et $\underline{r0} = \{\underline{r0}^{(1)}, \dots, \underline{r0}^{(J)}\}$, laquelle est la plus probable, est définie

par :

$$\frac{P(\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(J)} / \underline{r1}^{(1)}, \dots, \underline{r1}^{(J)}; \underline{\hat{m}}1^{(1)}, \dots, \underline{\hat{m}}1^{(J)})}{P(\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(J)} / \underline{r0}^{(1)}, \dots, \underline{r0}^{(J)}; \underline{\hat{m}}0^{(1)}, \dots, \underline{\hat{m}}0^{(J)})} \underset{\underline{r0}}{\overset{\underline{r1}}{>}} \frac{P(\underline{r0}^{(1)}, \dots, \underline{r0}^{(J)})}{P(\underline{r1}^{(1)}, \dots, \underline{r1}^{(J)})} \quad (2.5)$$

Pour cette problématique la fusion d'informations permet d'obtenir une meilleure estimation des paramètres des processus en combinant les mesures obtenues sur les différents capteurs. Les opérateurs de fusion sont alors définis par la distribution *a posteriori* $P(\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(J)} / \underline{r}^{(1)}, \dots, \underline{r}^{(J)}; \underline{\hat{m}}^{(1)}, \dots, \underline{\hat{m}}^{(J)})$.

La fusion est distribuée car on recherche dans ce cas les séquences de ruptures qui maximisent la distribution *a posteriori*. Des travaux auxquels nous avons contribué [RB06] ont permis de montrer que l'on pouvait aussi améliorer la segmentation des signaux en fusionnant leurs traitements par l'intégration dans la loi *a priori* $P(\underline{r}^{(1)}, \dots, \underline{r}^{(J)})$ d'une information sur le comportement mutuel entre processus.

2.2 Estimation non linéaire en fusion d'informations.

2.2.1 Introduction

L'approche Bayésienne est bien adaptée à la fusion des informations en traitement du signal. En effet on dispose en général d'informations sur l'évolution temporelle du paramètre à estimer qui peuvent être modélisées dans l'approche Bayésienne. Dans ce cas la distribution *a posteriori* permet de relier les informations et mesures dont on dispose aux paramètres à estimer. On utilise la formule de Bayes pour représenter la crédibilité des mesures et de l'information disponible en utilisant respectivement la distribution de vraisemblance et la distribution *a priori*. L'approche Bayésienne conduit à la définition d'estimateurs du type MAP (Maximum A Posteriori) ou du type MV (Maximum de Vraisemblance) lorsque l'on ne dispose pas d'information *a priori*. Les opérateurs de fusion centralisée définis dans ce cas combinent des observations provenant de plusieurs capteurs. Dans le domaine de l'estimation, cette combinaison a pour but d'obtenir un état estimé global dont l'EQM (Erreur Quadratique Moyenne) sur le paramètre à estimer est la plus faible possible. L'estimateur proposé pour cette combinaison doit avoir un biais plus une variance inférieurs à l'EQM calculée pour chaque mesure ou chaque paramètre estimé qu'il fusionne. Quand le bruit est distribué suivant une distribution gaussienne et que les observations d'un paramètre scalaire sont indépendantes, l'opérateur de fusion le plus utilisé est le "Maximum de Vraisemblance". Cet opérateur est la somme pondérée des mesures [Mit07, HM04]. On montre que l'estimateur des moindres carrés (LS) et l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) ont dans ce cas la même expression [SLC06]. Cet estimateur est la somme pondérée des mesures où les coefficients de pondération sont définis à partir de la variance des signaux fusionnés [Coc37].

Notre apport dans ce domaine a porté sur la définition d'opérateurs de combinaison des mesures. Le but de la thèse de Mme Jamilla Kacemi [Kac06] était d'une part de définir un opérateur de fusion pour les pseudo-distances satellite GPS-récepteur obtenues sur les trois porteuses L1, L2 et L5. Les mesures étant corrélées nous avons généralisé l'opérateur de combinaison, initialement proposé pour deux mesures corrélées [BSC86], à n mesures corrélées. D'autre part, les mesures GPS multi-porteuses étant biaisées par la traversée de la ionosphère. Nous avons alors réalisé l'opérateur de fusion sous la forme d'un filtre de Kalman qui estime simultanément les biais ionosphériques et fusionne les pseudo-distances obtenues sur les différentes porteuses [KRB04a].

Dans la thèse de Monsieur Monir Azmani nous avons montré que l'on pouvait améliorer les performances de l'opérateur de fusion somme pondérée si la corrélation entre les mesures à fusionner est négative [Azm10]. Dans ce travail, nous avons proposé un opérateur de fusion non linéaire qui utilise une information a priori sur le paramètre à estimer pour rendre négatif la corrélation entre les mesures fournies par deux capteurs [ARB13]. L'opérateur de fusion proposé est appliqué à la poursuite du code du signal GPS par une boucle de poursuite semi ouverte. On montre dans notre implémentation que l'évolution du discriminant de la boucle de poursuite est linéaire par morceaux et on impose de détecter les ruptures de pentes du signal par un filtre de Kalman GLR [ARCB10b]. Dans ce travail, la fréquence Doppler est utilisée comme information a priori et l'opérateur de fusion est intégré dans le filtre de Kalman GLR qui détecte les ruptures de modèles dans l'évolution du discriminant.

L'inférence Bayésienne comprend l'ensemble des techniques qui conduisent à la définition d'estimateurs à partir de modèles d'évolutions et d'observations. Dans ce contexte, la combinaison des observations en provenance des capteurs est modélisée par la distribution de vraisemblance. Le modèle d'évolution du paramètre à estimer est intégré dans la loi *a priori* et permet de combiner les observations obtenues à des instants différents. L'inférence Bayésienne séquentielle regroupe les techniques d'estimation Bayésienne des systèmes dynamiques à évolution temporelle. Il a donc été défini dans ce cadre des opérateurs de combinaisons des observations multi-capteurs et des filtres qui intègrent les observations temporelles. Dans le cas du filtrage d'état, lorsque le modèle est linéaire, elle conduit à la définition de filtres récursifs. Dans le filtre de Kalman par exemple, l'information sur le modèle est intégrée dans la loi *a priori* de la distribution *a posteriori* de l'état sachant les mesures. L'information sur les capteurs est intégrée dans la distribution de vraisemblance de l'état sachant les mesures [BS88]. Dans le cas non linéaire, les filtres et estimateurs sont obtenus par linéarisation locale du problème ou par l'utilisation de méthodes de Monte Carlo [RAG04]. Dans le domaine du filtrage d'état, il existe principalement deux approches pour la fusion de données. Il s'agit de la fusion centralisée et de la fusion distribuée. Dans le cas de la fusion centralisée, on considère un ensemble de mesures indépendantes que l'on combine pour produire une observation. Dans le cas distribué, on fusionne un ensemble d'estimations corrélées pour fournir une estimation globale [Mit07]. Dans le cas général d'estimées dépendantes, les coefficients de la somme pondérée sont obtenus à partir de la résolution d'un ensemble d'équations linéaires. Ces équations expriment les contraintes sur la valeur des coefficients pour que la variance de l'opérateur de fusion soit minimale [KRB04a, SLC06]. En général, ce cas est rarement envisagé car il nécessite, pour le calcul des coefficients, de connaître la valeur des covariances entre signaux, ce qui est très difficile à estimer en pratique. En revanche, c'est dans la mise en oeuvre des systèmes de fusion distribuée

qu'il apparaît des estimées corrélées dont on peut calculer la covariance. En effet, nous considérons dans ce cas les estimations d'un même état fournies par un ensemble de filtres travaillant en parallèle [Cho79]. C'est le cas par exemple de filtres ayant des observations provenant de capteurs de natures différentes. On montre que pour deux filtres de Kalman en parallèle, le bruit d'état apporte une corrélation entre les états estimés. L'algorithme de fusion track-to-track proposé dans [BSC86] comprend la définition des coefficients de la somme pondérée des états estimés et le calcul de la covariance entre les états estimés par les deux filtres. Des variantes de ce filtre ont été proposées dans la littérature [GH02]. L'extension à N filtres en parallèle, présentée dans [CKBS03], conduit à un algorithme difficile à implémenter en pratique. Finalement une version sous optimale de l'algorithme track-to-track pour N filtres est proposée dans [SLC06] et conduit à une solution facilement implémentable et offrant une bonne précision.

Notre contribution dans ce domaine a été de proposer dans la thèse de Madame Jamilla Kacemi un système pour la fusion de données GPS multi-porteuses avec des données fournies par un odomètre et un gyromètre. L'architecture du système proposé est inspirée de l'architecture du filtre de fusion track-to-track [Kac06]. Le filtre proposé permet de réaliser l'hybridation serrée du GPS avec les capteurs proprioceptifs et de fusionner les mesures GPS multi-porteuses [KRB04b, KRB06].

Dans la thèse de Monsieur Georges Stienne, nous avons proposé un filtre Bayésien séquentiel et un opérateur de fusion pour l'estimation de grandeurs angulaires décrites par une équation d'état [Sti13]. L'opérateur de fusion est un estimateur du maximum de vraisemblance d'un ensemble de mesures décrites par une distribution circulaire de von Mises. Il intègre dans sa mise en oeuvre la périodicité des mesures. Le filtre d'état proposé s'appuie sur une modélisation circulaire du problème. Il a été développé dans un cadre Bayésien avec la distribution angulaire de von Mises. Ce travail a été appliqué à l'estimation de la phase d'un signal GPS multivoies, à l'estimation du vecteur vent et à l'estimation de la direction d'un véhicule [ARCB09, ARCB10a, ARCB10b, SRA⁺13, SRA⁺14].

2.2.2 Estimation par transformation non linéaire

Le problème lié à la définition d'un estimé sous la forme d'une moyenne pondérée avec des poids inversement proportionnels à la variance des variables aléatoires qu'il combine a été initialement abordé dans [Coc37]. Les recherches dans ce domaine ont pour objectif la définition d'estimateurs pour un ensemble d'observations partiellement consistantes. Considérons par exemple le cas de plusieurs capteurs fournissant des observations d'un même paramètre. Les capteurs mesurent la même quantité mais avec une précision différente. Dans ce cas, les observations sont dites partiellement consistantes parce que les observations obtenues avec le même capteur sont supposées être consistantes tandis que les observations obtenues avec différents capteurs sont supposées être non-consistantes.

Pour estimer la valeur du paramètre à partir d'observations non-consistantes, il faut combiner les mesures en provenance des différents capteurs. Dans ce contexte, les capteurs sont supposés être non biaisés et d'avoir des précisions différentes. C'est par exemple le cas des systèmes de géo-positionnement par satellites modernes, où une même position peut être ob-

servée à partir de signaux émis par différents systèmes satellitaires ou sur différentes bandes de fréquences. L'hétéroscédasticité est la particularité des variables aléatoires que l'on souhaite combiner et qui modélisent les données fournies par les capteurs. Les recherches dans ce domaine portent sur la définition conjointe des poids et des estimateurs qui combinent les observations. Dans [CC53] une étude a été réalisée dans le cas consistant pour évaluer la moyenne pondérée définie à partir de la variance estimée. Cette étude a été étendue dans [BW69] au cas partiellement consistant. Plusieurs travaux portant sur la définition des poids en fonction des estimés des paramètres statistiques des signaux ont conduit à la proposition de nouveaux estimateurs [Rao80, NS48]. On trouvera dans [TW06] des références récentes sur la recherche dans ce domaine.

Dans la plupart des systèmes de fusion multi-capteurs, il est supposé que les variances des processus qui représentent les mesures sont connues (ou estimées avec les observations, mais l'erreur d'estimation n'est pas prise en compte dans la définition des poids). Lorsque les observations sont indépendantes, que le paramètre est scalaire et le bruit gaussien, l'estimateur des moindres carrés (LS) et l'estimateur du maximum de vraisemblance sont les mêmes. Cet opérateur de fusion classique est la moyenne pondérée dont les poids sont inversement proportionnels à la variance [Gus01]. Lorsque les mesures sont corrélées, les poids sont définis par la variance et la covariance des mesures. Elles sont solutions d'un ensemble d'équations linéaires qui lient la variance de l'opérateur de fusion aux variances et covariances des mesures [SLC06]. Malheureusement la covariance est en pratique difficile à estimer et peu d'applications utilisent l'opérateur de fusion optimal dans ce cas [KRB04a].

L'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP) comprend dans son implémentation l'information *a priori* sur la quantité à estimer. Dans ce cas la modélisation Bayésienne d'un problème permet d'intégrer une information *a priori* sur les données à fusionner [LL01]. En effet, la distribution *a posteriori* qui modélise le problème est définie par le produit la loi *a priori* avec la distribution de vraisemblance des données multi-capteurs. L'information *a priori* peut être une loi qui décrit le paramètre à estimer [Rob01, SRA⁺11] ou une loi qui décrit le comportement mutuel entre les processus [RB06, BRB10]. Dans tous ces cas, l'opérateur de fusion qui fusionne l'information *a priori* avec les observations multi-capteurs est une somme pondérée.

Position du problème

Soient $Z^{(1)}$ et $Z^{(2)}$, deux variables aléatoires, et $z_k^{(1)}$ et $z_k^{(2)}$, leurs réalisations à l'instant k . On considère ici le cas de deux capteurs qui fournissent deux mesures, $z_k^{(1)}$ et $z_k^{(2)}$. On cherche alors à estimer un paramètre scalaire m à partir des mesures fournies par deux capteurs et d'une information *a priori* construite à partir de mesures en provenance d'un troisième capteur. Les variables aléatoires, $Z^{(1)}$ et $Z^{(2)}$, sont supposées indépendantes et avec la même moyenne m . Elles sont distribuées suivant des lois gaussiennes $f_1(\dots)$ et $f_2(\dots)$. Les variances de ces variables aléatoires sont respectivement σ_1^2 et σ_2^2 . L'opérateur de fusion du maximum de vraisemblance (ML) est l'opérateur de fusion défini par la somme pondérée suivante :

$$z_{k,ML} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 z_k^{(2)} \text{ avec } \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (2.6)$$

L'opérateur de fusion du maximum *a posteriori* (MAP) est défini par la somme pondérée suivante :

$$z_{k,MAP} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 z_k^{(2)} + \alpha_3 m_a \text{ avec } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (2.7)$$

où m est associé à une information *a priori* imprécise distribuée suivant une loi gaussienne, $f_3(\dots)$, de variance, σ_3^2 , et de moyenne, m_a . La mesure fusionnée à l'instant k est $z_{k,MAP}$, la réalisation de la variable aléatoire Z_{MAP} . Les poids sont définis comme suit :

$$\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} \quad (2.8)$$

On peut distinguer deux types de réalisations de la paire de variables aléatoires, $(Z^{(1)}, Z^{(2)})$:

- Les réalisations de $(Z^{(n_1)}, Z^{(n_2)})$ situées de part et d'autre de la moyenne, m , telles que $\{z_k^{(1)} < m\}$ et $\{z_k^{(2)} > m\}$ ou $\{z_k^{(1)} > m\}$ et $\{z_k^{(2)} < m\}$.
- Les réalisations de $(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})$ situées du même côté de la moyenne, m , telles que $\{z_k^{(1)} < m\}$ et $\{z_k^{(2)} < m\}$ ou $\{z_k^{(1)} > m\}$ et $\{z_k^{(2)} > m\}$.

On montre dans [ARB13] que les réalisations se trouvant du même côté de la moyenne sont corrélées positivement, tandis que les réalisations de part et d'autre de la moyenne sont corrélées négativement. Dans le but d'améliorer les performances de l'opérateur de fusion MAP (diminuer sa variance de sortie), nous proposons de diminuer la covariance entre les variables $Z^{(1)}$ et $Z^{(2)}$ en diminuant la covariance entre les variables $Z^{(p_1)}$ et $Z^{(p_2)}$.

Dans ce cas deux problèmes se posent ; la sélection des réalisations de $Z^{(p_1)}$ et $Z^{(p_2)}$ dans les réalisations de $Z^{(1)}$ et $Z^{(2)}$, et la définition d'une transformation qui réduit la covariance entre $Z^{(p_1)}$ et $Z^{(p_2)}$. Dans ce contexte, l'opérateur de fusion que nous proposons est non linéaire car il nécessite une étape de sélection.

Transformation non-linéaire

Soit $z_{k,NLF}$ la fusion non linéaire (NLF) de $z_k^{(1)}$ et $z_k^{(2)}$. Nous proposons de définir l'opérateur MAP de fusion non linéaire pour $\sigma_2 > \sigma_1$, en fixant deux bornes, supérieure B^u et inférieure B^d , comme suit :

- Si $z_k^{(1)} > B^u$ et $z_k^{(2)} > B^u$

$$z_{k,NLF} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 \left(z_k^{(2)} - g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}) \right) + \alpha_3 m_a \quad (2.9)$$

- Si $z_k^{(1)} < B^d$ et $z_k^{(2)} < B^d$

$$z_{k,NLF} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 \left(z_k^{(2)} + g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}) \right) + \alpha_3 m_a \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 & - \text{Sinon } z_k^{(1)} < B^d \text{ et } z_k^{(2)} > B^d \text{ ou } z_k^{(1)} > B^u \text{ et } z_k^{(2)} < B^d \\
 & \quad z_{k,NLF} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 z_k^{(2)} + \alpha_3 m_a \quad \text{avec} \quad g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}) = 0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

où $B^d = m_a - \sigma_3$, la borne inférieure, et $B^u = m_a + \sigma_3$, la borne supérieure, sont déduites de l'information *a priori* et utilisées pour sélectionner les réalisations de $Z^{(p_1)}$ et $Z^{(p_2)}$. On suppose ici que le paramètre à estimer m est contenu dans l'intervalle $[B^u, B^d]$. Dans ces expressions, $g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)})$ est une fonction qui réduit la corrélation entre $Z^{(p_1)}$ et $Z^{(p_2)}$. L'opérateur de fusion peut être réécrit comme suit :

$$z_{k,NLF} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 \left(z_k^{(2)} \pm g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}) \right) + \alpha_3 m_a \tag{2.12}$$

où les poids sont définis avec l'équation (2.8). Cependant l'opérateur de fusion non linéaire proposé est biaisé. En effet les bornes supérieures et inférieures ne sont pas nécessairement centrées sur la valeur moyenne m . On a alors un intervalle excentré et l'excentricité de celui-ci est la différence entre m et le centre de l'intervalle. L'erreur quadratique moyenne (MSE) prend en compte le biais et la variance d'un estimateur. Pour pouvoir évaluer les performances de notre estimateur en termes de MSE, on définit les notations suivantes pour les mesures fusionnées :

- Si $z_k^{(1)} > B^u$ et $z_k^{(2)} > B^u$ ou $z_k^{(1)} < B^d$ et $z_k^{(2)} < B^d$, on note $MSE(Z_{NLF}^{(p)})$, $MSE(Z_{MAP}^{(p)})$, la MSE de l'opérateur de fusion non linéaire et la MSE de l'opérateur classique de fusion linéaire.
- sinon, on note $MSE(Z_{NLF}^{(n)})$, $MSE(Z_{MAP}^{(n)})$, la MSE des opérateurs de fusion non linéaire et linéaire.

On peut alors définir l'expression suivante :

$$MSE(Z_{MAP}) = P MSE(Z_{MAP}^{(p)}) + N MSE(Z_{MAP}^{(n)}) \tag{2.13}$$

$$MSE(Z_{NLF}) = P MSE(Z_{NLF}^{(p)}) + N MSE(Z_{NLF}^{(n)}) \tag{2.14}$$

où les coefficients de normalisations, P et N , sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-\infty}^{B^d} \int_{-\infty}^{B^d} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 &+ \int_{B^u}^{\infty} \int_{B^u}^{\infty} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 N &= \int_{B^u}^{\infty} \int_{-\infty}^{B^d} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 &+ \int_{B^d}^{B^u} \int_{-\infty}^{B^d} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} + \int_{B^d}^{B^u} \int_{B^u}^{\infty} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 &+ \int_{-\infty}^{B^d} \int_{B^d}^{B^u} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} + \int_{B^u}^{\infty} \int_{B^d}^{B^u} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 &+ \int_{B^d}^{B^u} \int_{B^d}^{B^u} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} + \int_{-\infty}^{B^d} \int_{B^u}^{\infty} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)}
 \end{aligned}$$

On montre dans [Azm10] que l'erreur quadratique, $MSE(Z_{NLF})$, sera plus faible que l'erreur quadratique, $MSE(Z_{MAP})$, si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \alpha_2^2 E[\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})^2] + 2\alpha_1\alpha_2 E[Z^{(p1)} \pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})] \\ & + 2\alpha_2^2 E[Z^{(p2)} \pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})] \\ & + (2\alpha_2\alpha_3 m_a - 2m\alpha_2) E[\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})] \leq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

où m est restreint à l'intervalle $[B^u, B^d]$. Les différents termes de l'expression peuvent être calculés par intégration numérique pour une fonction non linéaire $g(\dots)$ donnée [Azm10].

Fonction non linéaire

La fonction $\pm g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)})$, est définie de façon heuristique. On utilise pour cela les conditions aux limites. Soit le cas idéal centré où $\frac{B^u+B^d}{2} = m$, on peut alors définir deux conditions pour que l'inégalité (2.15) soit vérifiée :

- Condition 1 : $E[\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})^2] = E[\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})] = 0$
- Condition 2 : $E[Z^{(p1)} \pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})] < 0$ et $E[Z^{(p2)} \pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})] < 0$

On montre dans [Azm10] que ces conditions conduisent à une simplification des termes de l'inégalité (2.15) qui conduit à ce que celles-ci soit vérifiées. Dans ce cas, ces deux conditions sont vérifiées pour $g(z_k^{(1)} - z_k^{(2)}) > 0$ si, pour $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} > B^u$ et $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} < B^d$, la fonction $g(z_k^{(1)} - z_k^{(2)})$ est centrée et symétrique.

Le principe de construction de la fonction non linéaire est le suivant : on additionne un offset, $d > 0$, positif si $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} < B^d$ ou on soustrait ce même offset si $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} > B^u$. Soient les distributions statistiques suivantes :

- Soit $f_p(z_k^{(p1)} - z_k^{(p2)})$ la distribution gaussienne de la différence entre les variables aléatoires, $Z^{(p1)}$ et $Z^{(p2)}$. Cette distribution est de moyenne nulle et sa variance est donnée par $(\sigma_p)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^p$.
- Soit $f_n(z_k^{(n1)} - z_k^{(n2)})$ la distribution gaussienne de la différence entre les variables aléatoires, $Z^{(n1)}$ et $Z^{(n2)}$. Cette distribution est de moyenne nulle et sa variance est donnée par $(\sigma_n)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^n$.

où σ_{12}^p et σ_{12}^n sont obtenus par intégration numérique [ARB13]. La valeur de d est la solution de l'égalité suivante pour $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} < B^d$ or $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} > B^u$:

$$f_n(d) = \frac{f_p(z_k^{(p1)} - z_k^{(p2)})}{C}$$

avec :

$$C = \frac{f_p(0)}{f_n(0)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_p}$$

Soit la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_n} \exp^{-\frac{1}{2} \frac{(d)^2}{\sigma_n^2}} = \frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_p} \exp^{-\frac{1}{2} \frac{(z_k^{(p1)} - z_k^{(p2)})^2}{\sigma_p^2}}$$

On peut alors déduire l'expression de d :

$$d = \frac{\sigma^n}{\sigma^p} \left| z_k^{(1)} - z_k^{(2)} \right| \text{ pour } z_k^{(1)}, z_k^{(2)} < B^d \text{ ou } z_k^{(1)}, z_k^{(2)} > B^u \quad (2.16)$$

On représente sur la Figure 2.2 le principe de la fonction non linéaire.

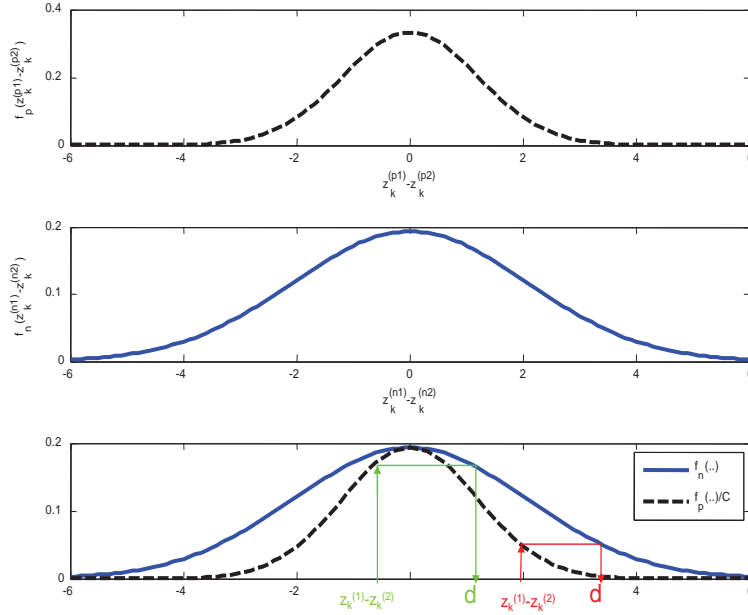


FIGURE 2.2: Principe de la fonction non linéaire.

Expérimentation

Pour montrer que l'opérateur de fusion non linéaire proposé est meilleur que l'opérateur linéaire classique, on calcule le terme de gauche de l'inégalité (2.15). On définit alors la contrainte $MSE(Z_{NLF}) - Var(Z_{MAP})$ sur la fonction non linéaire proposée. Pour que notre opérateur soit plus performant il faut que la contrainte soit négative. L'évaluation de cette contrainte est réalisée par intégration numérique et on montre que celle-ci reste négative ou nulle lorsque l'on fait varier l'information *a priori*, soit la taille de l'intervalle et son excentricité.

On représente sur la Figure 2.3 la contrainte en fonction de la longueur de l'intervalle, $B^u - B^d$, et la valeur de l'excentricité $\left| \frac{B^u + B^d}{2} - m \right|$. Les courbes de la Figure 2.3 sont obtenues pour $\sigma_1 = \sigma_2$ et $\sigma_2 \gg \sigma_1$.

- Lorsque $\sigma_2 \gg \sigma_1$ la fusion a peu d'intérêt car la mesure $Z^{(2)}$, qui est peu précise, apporte peu d'information sur le paramètre à estimer. Dans ce cas la valeur de la contrainte est proche de zéro. Ce résultat reste vrai dans tous les cas où il existe une forte différence de précision entre les mesures issues de différents capteurs.
- Lorsque $\sigma_2 = \sigma_1 = 3$ la contrainte est négative pour toutes les valeurs d'intervalles et d'excentricité. L'opérateur proposé est donc plus performant que l'opérateur linéaire classique. On notera cependant que pour des faibles valeurs de taille d'intervalle, la contrainte est proche de zéro. En effet, dans ce cas, $\alpha_3 \approx 1$ car l'information *a priori* est très précise. Les observations apportent dans ce cas peu d'information et ne sont pas considérées dans l'estimation (on a alors $\alpha_1, \alpha_2 \approx 0$).

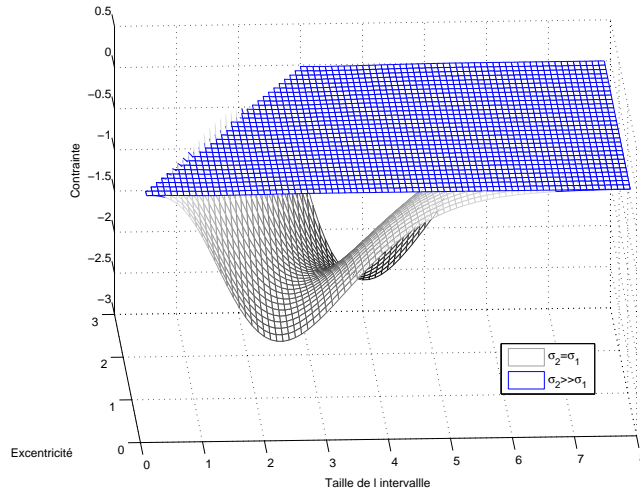


FIGURE 2.3: La contrainte en fonction de l'intervalle et l'excentricité.

On représente sur la Figure 2.4 la valeur normalisée de la contrainte, $\frac{MSE(Z_{NLF}) - Var(Z_{MAP})}{Var(Z_{MAP})}$, en fonction de la taille de l'intervalle et de l'excentricité. La contrainte est calculée pour deux valeurs de $\sigma_1 = \sigma_2$. Les courbes peuvent ainsi être comparées car les valeurs observées sont normalisées.

- On peut observer sur la Figure 2.4 que lorsque la taille de l'intervalle augmente, la contrainte tend vers zéro moins rapidement pour $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ que pour $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$. En effet, la probabilité pour que $z_k^{(1)}$ et $z_k^{(2)}$ soient compris dans l'intervalle est supérieure pour $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$, que pour $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$. Dans le cas $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$, moins d'observations sont modifiées par la transformation non linéaire et l'opérateur de fusion proposé tend vers l'opérateur de fusion linéaire, soit vers une valeur nulle de la contrainte.

On évalue en simulation l'apport de notre opérateur de fusion non linéaire en comparant ses performances avec l'opérateur linéaire classique.

Dans cette simulation, on considère 1000 réalisations de 1000 observations fournies par deux capteurs et les bruits sur les mesures décorrélés. On présente sur la Figure 2.5.a l'exemple

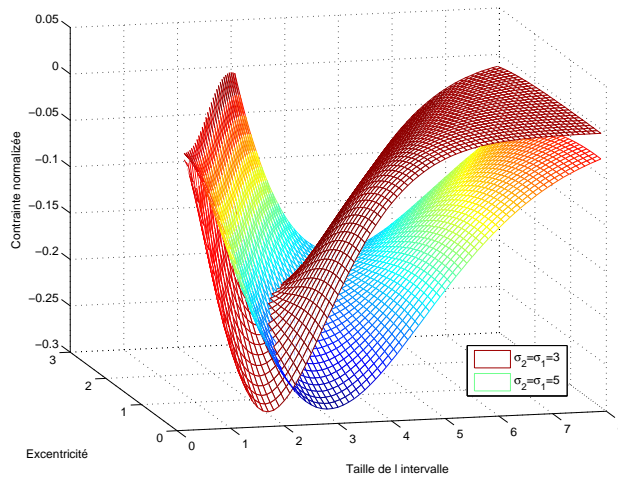


FIGURE 2.4: La contrainte pour deux valeurs $\sigma_1 = \sigma_2$.

d'une série temporelle et l'information *a priori* (deux lignes horizontales qui représentent l'intervalle considéré). En pratique, pour chaque réalisation, l'information *a priori* m_a est générée aléatoirement suivant une loi gaussienne de variance σ_3 .

On reporte dans le Tableau 2.1 les paramètres des signaux et la variance théorique de l'opérateur de fusion du maximum de vraisemblance (ML).

On reporte dans le Tableau 2.2 et sur la Figure 2.5.b la MSE des opérateurs de fusion MAP et non-linéaire.

La MSE de l'opérateur de fusion proposée est toujours inférieure à la MSE des opérateurs de fusion linéaire MAP et maximum de vraisemblance (ML). Lorsque σ_3 est faible, l'information *a priori* est précise et l'opérateur de fusion MAP et non-linéaire ont des performances très proches. En effet, dans ce cas, α_3 tend vers 1. Lorsque σ_3 est grand les performances de l'opérateur de fusion MAP et de l'opérateur de fusion linéaire tendent vers les performances de l'opérateur de fusion ML. En effet, dans ce cas, α_3 tend vers 0.

	Moyenne	MSE
Signal $z^{(1)}$	4	1
Signal $z^{(2)}$	4	2
Fusion ML	4	0.666

TABLE 2.1: Paramètres théoriques des signaux.

Pour pouvoir conclure sur les performances de l'opérateur de fusion non linéaire proposé au regard des opérateurs linéaires classiques, il faut évaluer l'hypothèse qui suppose que le paramètre à estimer est contenu dans l'intervalle qui définit l'information *a priori*. En effet, lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, les performances de l'opérateur proposé sont moins bonnes que celle de l'opérateur MAP. Nous avons montré par des simulations dans le cas de deux applications que cette hypothèse est le plus souvent vérifiée en pratique. La première

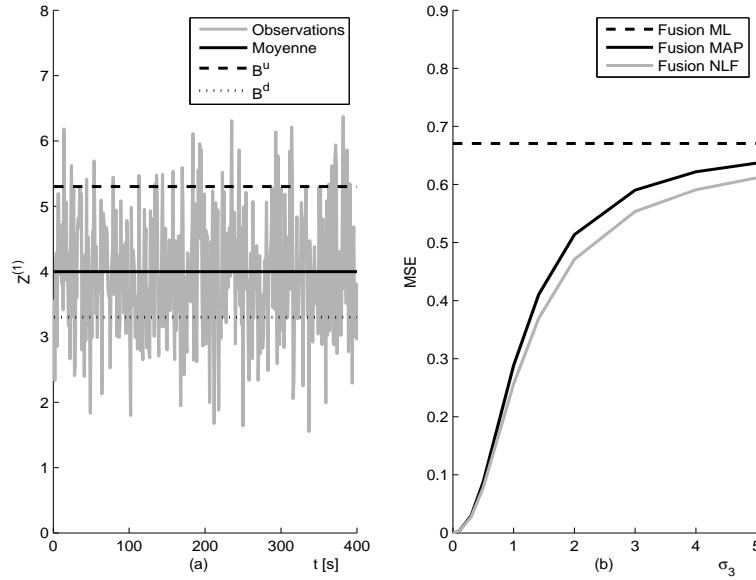


FIGURE 2.5: Exemple de réalisation et MSE des opérateurs évalués.

Information a priori Précision σ_3	Erreur quadratique moyenne	
	Fusion MAP	Fusion NLF
0.0	0.0000	0.0000
0.1	0.0030	0.0030
0.3	0.0294	0.0274
0.5	0.0876	0.0779
1.0	0.2884	0.2566
1.4	0.4106	0.3695
2.0	0.5135	0.4711
3.0	0.5902	0.5534
4.0	0.6218	0.5909
5.0	0.6369	0.6114

TABLE 2.2: MSE de l'opérateur de fusion non-linéaire et de l'opérateur de fusion MAP.

application considérée est le positionnement d'un système de navigation utilisant un GPS multi-porteuses (Bandes L1 et L2) et des mesures de caps et de vitesses. La fusion est réalisée sur les composantes en x et y des positions fournies par le GPS avec les deux bandes. Dans cette application l'information *a priori* est construite avec les mesures de caps et de vitesses. La taille de l'intervalle de la transformation non-linéaire est fixée expérimentalement. Le centre de l'intervalle pour les projections suivant les axes x et y est défini à partir de l'estimé précédente et des mesures de caps et vitesses [ARB13]. La deuxième application est l'estimation des valeurs du discriminant de code de la boucle DOL (Delay Open Loop) d'un récepteur GPS. Dans une DOL les variations du discriminant sont fortement linéaires et la pente de cette évolution est

connue précisément grâce à la fréquence Doppler fournie par la FLL (Frequency Lock Loop). Pour définir la transformation non linéaire, on utilise l'état précédemment estimé, la pente de l'évolution du discriminant (définition du centre de l'intervalle) et on fixe la taille de l'intervalle [Azm10]. Pour ces deux applications, on montre que les performances de l'opérateur de fusion proposé sont supérieures aux performances des opérateurs classiques.

2.2.3 Estimation de données circulaires

On trouve dans la littérature de nombreuses applications dont les observations sont des directions. Lorsque ces directions sont coplanaires elles sont naturellement représentées par des points sur le cercle unité de \mathbb{R}^2 . Lorsque les observations sont aléatoires, elles sont étudiées avec les outils de la statistique circulaire. Les statistiques directionnelles sont utilisées pour analyser les données sphériques ou angulaires comme par exemple la direction du vent [RB06],[DT07], [GJ07], [ARCB10a]. Nous avons proposé de les utiliser pour le traitement de la phase des signaux GNSS [SRA⁺13, SRCB14]. Les lois de probabilités de von Mises décrivent les phénomènes aléatoires angulaires et jouent un rôle analogue à celui que tient la loi normale pour des observations ponctuelles [MJ99].

Il n'est pas facile d'étendre les approches traditionnelles de la statistique à l'analyse des données circulaires. La difficulté dépend principalement de la différence de topologies entre la ligne droite du domaine linéaire et le cercle du domaine circulaire. La vraisemblance des distributions circulaires possède dans la plupart des cas une forme compliquée avec des paramètres de normalisation inconnus [BS09]. En général, les mesures d'angle et la distribution des états à estimer sont supposées gaussiennes, donc définies sur un domaine linéaire. Lorsque l'état est un angle, et donc défini sur un domaine circulaire, on peut utiliser un filtre de Kalman étendu reposant sur la linéarisation locale du problème [QM02] [Zie06] ou tout simplement un filtre de Kalman classique dans le cas de petits angles comme pour le filtrage des mesures gyroscopiques [BDW94]. En effet, dans le cas de petits angles, la distribution gaussienne est une bonne approximation de la distribution circulaire normale de von Mises [MJ99]. Cependant la direction moyenne des mesures doit être définie comme la direction de référence, associée à un angle nul, pour diminuer l'influence des transitions entre $-\pi$ et π qui sont vues dans le domaine linéaire comme des ruptures de stationnarité. D'autre part, l'approximation gaussienne n'est pas satisfaisante pour des variations d'angle importantes, car il faut dans ce cas que la distribution tienne compte du caractère périodique de la variable aléatoire qui est définie sur un intervalle. Un filtre d'état défini dans le domaine linéaire réalise une erreur sur l'estimation de l'état et le calcul de la covariance [Fis87]. En effet, d'une part, la distribution des mesures sur l'intervalle périodique n'est plus obligatoirement symétrique autour de la direction moyenne. D'autre part, les transitions d'angle entre $-\pi$ et π sont perçues dans le domaine linéaire comme des ruptures de stationnarité. Donc, il est nécessaire dans le domaine linéaire de définir l'angle moyen des mesures comme étant la direction de référence d'angle nul. Les filtres d'état définis dans ce cadre non stationnaire sont des filtres multi-modèles qui intègrent une modélisation Markovienne des transitions entre modèles. Malheureusement ces techniques sont difficiles à mettre en oeuvre car elles nécessitent de définir un nombre fini de modèles et sont peu performantes lorsque l'angle moyen évolue de façon continue en présence de bruits importants.

Dans ce travail nous avons défini un opérateur de fusion multi-capteurs et multi-temporel dans un cadre Bayésien, à partir de la distribution circulaire de von Mises. Dans l'approche classique les filtres d'état sont déduits de l'expression de la distribution *a posteriori* de l'état sachant son estimé. Cette distribution est gaussienne et définie dans le domaine linéaire. Pour tenir compte du caractère périodique des données angulaires, nous proposons de définir le filtre à partir de distributions angulaires [SRA⁺14]. L'expression du filtre est obtenue à partir de la distribution *a posteriori* de l'état sachant les mesures. Dans cette modélisation la distribution de vraisemblance et la loi *a priori* sont des distributions de von Mises. On montre que l'on peut résoudre l'équation de Chapman-Kolmogorov dans le cas scalaire à partir de l'approximation de la distribution de von Mises par une distribution "Wrapped Normal". Ces résultats sont étendus au cas vectoriel en supposant que la corrélation des mesures et des états est nulle.

Opérateur circulaire de fusion multi-capteurs

L'expression de la densité de probabilité de la distribution de von Mises est donnée par :

$$f(\theta, \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp(\kappa \cos(\theta - \mu)) \quad (2.17)$$

où μ et κ sont respectivement la moyenne et le paramètre de concentration de la distribution et I_0 la fonction de Bessel modifiée de premier type et d'ordre 0 :

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\kappa \cos(\phi)) d\phi \quad (2.18)$$

C'est cette distribution circulaire normale que nous utilisons pour définir des observations bruitées. Considérons N mesures angulaires $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$ obtenues à un instant k et que nous souhaitons fusionner en une seule mesure $\phi_{f,k}$. On recherche alors l'estimateur du maximum de vraisemblance. Les mesures sont supposées indépendantes et suivent toutes une distribution de von Mises de moyenne θ_k et de paramètres de concentrations respectifs $\kappa_R^{(1)} \dots \kappa_R^{(N)}$. La fonction de vraisemblance de θ_k , le paramètre à estimer, sachant les observations $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$, est définie par :

$$L(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)} | \theta_k) = f(\phi_k^{(1)} | \theta_k, \kappa_R^{(1)}) f(\phi_k^{(2)} | \theta_k, \kappa_R^{(2)}) \dots f(\phi_k^{(N)} | \theta_k, \kappa_R^{(N)}) \quad (2.19)$$

$$\text{avec : } f(\phi_k^{(i)} | \theta_k, \kappa_R^{(i)}) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp(\kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)} - \theta_k)) \quad (2.20)$$

$$\text{il s'en suit : } L(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)} | \theta_k) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(1)})} \dots \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(N)})} \exp\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)})\right) \quad (2.21)$$

Le logarithme de la fonction de vraisemblance est alors donné par :

$$l = \log L(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)} | \theta_k) = - \sum_{i=1}^N \log(2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})) + \left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)})\right) \quad (2.22)$$

Pour obtenir le maximum de vraisemblance on dérive cette équation suivant θ_k et on recherche son passage par zéro. On obtient alors l'équation de vraisemblance suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \theta_k} &= \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\theta_k - \phi_k^{(i)}) = 0 & (2.23) \\ \cos(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\phi_k^{(i)}) - \sin(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)}) &= 0 \\ \text{or, } S_k \cos(\theta_k) - C_k \sin(\theta_k) &= 0 \end{aligned}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ_k , noté $\phi_{f,k}$, est obtenu à partir de (2.23) et est donné par :

$$\begin{aligned} \phi_{f,k} &= \text{Arctan}^*(S_k, C_k), & (2.24) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Arctan} \left(\frac{S}{C} \right) \text{ si } C > 0 \\ \text{Arctan} \left(\frac{S}{C} \right) + \pi \text{ si } S \geq 0, C < 0 \\ \text{Arctan} \left(\frac{S}{C} \right) - \pi \text{ si } S < 0, C < 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Finalement on montre dans [SRA⁺14] que la dérivée seconde de la fonction de vraisemblance est négative et que l'on est donc bien en présence d'un maximum.

On souhaite définir maintenant la distribution conjointe des observations $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$. Celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned} f(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}) &= & (2.25) \\ \frac{1}{\prod_{i=1}^N 2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp \left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)}) \right) &= \\ \frac{1}{\prod_{i=1}^N 2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp(\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)) & \end{aligned}$$

On suppose ici que la loi jointe est une distribution de von Mises, on a alors :

$$\begin{aligned} \kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k) &= & (2.26) \\ \cos(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)}) + \sin(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\phi_k^{(i)}) & \end{aligned}$$

On en déduit alors les deux équations suivantes :

$$\kappa_f \cos \phi_{f,k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos \phi_k^{(i)} \quad (2.27)$$

$$\kappa_f \sin \phi_{f,k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin \phi_k^{(i)} \quad (2.28)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ_k est alors donné par :

$$\phi_{f,k} = \text{Arctan}^*(\kappa_f \sin \phi_{f,k}, \kappa_f \cos \phi_{f,k}) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \text{où : } \kappa_f &= \sqrt{(\kappa_f \cos \phi_{f,k})^2 + (\kappa_f \sin \phi_{f,k})^2} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos \phi_k^{(i)}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin \phi_k^{(i)}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

On montre dans [SRA⁺14], que l'opérateur de fusion classique somme pondérée et l'opérateur de fusion circulaire sont équivalents pour des valeurs d'angles éloignées de la transition entre $-\pi$ et π . Dans le cas contraire, la dispersion des mesures fusionnées par l'opérateur de fusion circulaire est plus faible que celle obtenue avec l'opérateur linéaire classique.

Filtre circulaire récursif

Soit l'équation d'état d'un système dynamique décrit par un angle et une vitesse angulaire :

$$\Theta_k = F \Theta_{k-1} + V_{k-1} \quad (2.31)$$

Avec $\Theta_k = [\theta_k, \dot{\theta}_k]$ le vecteur d'état, que l'on souhaite estimer à chaque instant k . F est la matrice de transition donnée par $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dans notre approche, on considère que θ_k est une variable aléatoire angulaire décrivant la direction et que $\dot{\theta}_k$ est la variation angulaire observée pendant une période d'échantillonnage.

$$\theta_k = \theta_{k-1} + 1 \dot{\theta}_{k-1} + v_{1,k-1} \quad (2.32)$$

$$\dot{\theta}_k = \dot{\theta}_{k-1} + v_{2,k-1} \quad (2.33)$$

Le vecteur de bruit $V_{k-1} = [v_{1,k-1}, v_{2,k-1}]^T$ représente l'erreur sur le modèle d'état. $v_{1,k-1}$ et $v_{2,k-1}$ sont respectivement le bruit du modèle d'état sur θ_k et sur $\dot{\theta}_k$. Ils suivent tous les deux une distribution de von Mises, centrée de paramètres de concentration respectifs $\kappa_{1,Q}$, $\kappa_{2,Q}$. Dans notre modèle, on considère que les états ne sont pas corrélés et on montre par la suite que l'implémentation proposée permet malgré tout de tenir compte de la covariance entre états. On a alors la matrice des paramètres de concentration κ_Q qui est définie par :

$$\kappa_Q = \begin{bmatrix} \kappa_{1,Q} & 0 \\ 0 & \kappa_{2,Q} \end{bmatrix}$$

Pour une matrice d'observation H , l'équation de mesure est donnée par :

$$\Phi_{f,k} = H \Theta_{k-1} + W_k \quad (2.34)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Phi_{f,k} = [\phi_{f,k}, \dot{\phi}_{2,k}]^T$ est le vecteur de mesures angulaires fusionnées. $\phi_{f,k}$ est la fusion des mesures de directions $\phi_{1,k}^{(1)}$ et $\phi_{1,k}^{(2)}$. $\dot{\phi}_{2,k}$ est la mesure de variation angulaire. Le vecteur de bruit $W_k = [w_{1,k}, w_{2,k}]^T$ représente le bruit sur les mesures. $w_{1,k}$, $w_{2,k}$ sont deux bruits centrés suivant une distribution de von Mises. Ils sont respectivement le bruit sur la direction et sur la vitesse angulaire. Leurs paramètres de concentration sont respectivement $\kappa_{1,R}$, $\kappa_{2,R}$. On suppose ici que les mesures ne sont pas corrélées entre elles et la matrice des paramètres de concentration κ_R est donnée par :

$$\kappa_R = \begin{bmatrix} \kappa_{1,R} & 0 \\ 0 & \kappa_{2,R} \end{bmatrix}.$$

L'estimateur récursif circulaire que nous proposons est fondé sur un schéma du type prédiction-correction, comme n'importe quel filtre Bayésien. Chaque itération du filtre circulaire se décompose en une étape de prédiction, faisant intervenir la loi de transition, et une étape de correction faisant intervenir la nouvelle observation. Le calcul s'effectue de façon récursive selon le schéma classique suivant :

$$\begin{aligned} P(\theta_{k-1} \mid \phi_{f,1:k-1}) &\xrightarrow[\text{étape de prédiction}]{P(\theta_k \mid \theta_{k-1})} & (2.35) \\ P(\theta_k \mid \phi_{f,1:k-1}) &\xrightarrow[\text{étape de correction}]{P(\phi_{f,k} \mid \theta_k)} P(\theta_k \mid \phi_{f,1:k}) \end{aligned}$$

Soit $\Theta_k = [\theta_k, \dot{\theta}_k]^T$ le vecteur d'état inconnu que l'on souhaite estimer. La correction est réalisée avec les mesures fusionnées. On définit $\hat{\Theta}_{k/k-1} = [\hat{\theta}_{k/k-1}, \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1}]^T$ le vecteur prédiction de l'état et $\hat{\Theta}_k = [\hat{\theta}_k, \hat{\dot{\theta}}_k]^T$ l'état estimé. On note P_{θ_k} et $P_{\dot{\theta}_k}$ les paramètres de concentration des estimations de la direction et de la variation angulaire. Pour définir l'étape de prédiction du filtre, il faut résoudre l'intégrale de Chapman-Kolmogorov. Cependant l'étape de prédiction, définie par les modèles 2.32 et 2.33 pour le filtre étudié, introduit une corrélation entre les états prédits. Malheureusement il n'existe pas de distribution circulaire qui modélise cette dépendance et qui permette de résoudre analytiquement l'intégrale de Chapman-Kolmogorov. C'est pour cette raison que nous supposons que les états sont indépendants. On corrigera, dans l'étape de correction, l'erreur commise sur la covariance prédite par la non prise en compte de cette dépendance. Dans ce cas on montre que l'on peut résoudre l'intégrale de Chapman-Kolmogorov et que l'étape de prédiction est définie par les deux équations suivantes :

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = \hat{\theta}_{k-1} + \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (2.36)$$

$$P_{\theta_{k/k-1}} = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})A(\kappa_{1,Q})) \quad (2.37)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_{k/k-1} = \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (2.38)$$

$$P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} = A^{-1}(A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})A(\kappa_{2,Q})) \quad (2.39)$$

avec :

$$A(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \quad (2.40)$$

I_1 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 1. On propose dans [Sti13] plusieurs méthodes pour l'approximation de la fonction non linéaire A^{-1} . Pour définir l'étape de correction on utilise l'analogie avec le domaine linéaire. Soit le vecteur d'état $[\hat{X}_k \ \hat{X}_k]^T$ et le vecteur d'observations $[\hat{Y}_k \ \hat{Y}_k]^T$ définissant la direction et la variation angulaire dans le domaine linéaire. Pour la matrice d'état F et la matrice d'observations H définies précédemment, on peut montrer que l'étape de correction est donnée par une somme pondérée de la forme :

$$X_k = \alpha_{11}X_{k/k-1} + \alpha_{12}Y_k + \alpha_{13}(\dot{Y}_k + X_{k-1}) \quad (2.41)$$

$$\dot{X}_k = \alpha_{21}\dot{X}_{k/k-1} + \alpha_{22}\dot{Y}_k + \alpha_{23}(Y_k - X_{k-1}) \quad (2.42)$$

avec

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 1 \quad (2.43)$$

$$\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = 1 \quad (2.44)$$

On déduit alors par analogie les équations suivantes pour la correction de la direction et de la variation angulaire dans le domaine circulaire. Ces équations représentent les sommes pondérées 2.41 et 2.42 dans le domaine circulaire. Pour la direction on a :

$$C_{\theta_k} = \alpha_{11} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{12} \cos \phi_{f,k} + \alpha_{13} \cos (\dot{\phi}_{f,k} + \theta_{k-1}) \quad (2.45)$$

$$S_{\theta_k} = \alpha_{11} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{12} \sin \phi_{f,k} + \alpha_{13} \sin (\dot{\phi}_{f,k} + \theta_{k-1}) \quad (2.46)$$

$$(2.47)$$

avec

$$\alpha_{11} = P_{\theta_{k/k-1}} \quad (2.48)$$

$$\alpha_{12} = \kappa_{1,R} \quad (2.49)$$

$$\alpha_{13} = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(\kappa_{2,R})) \quad (2.50)$$

On a pour la variation angulaire :

$$C_{\dot{\theta}_k} = \alpha_{21} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{22} \cos \dot{\phi}_{f,k} + \alpha_{23} \cos (\phi_{f,k} - \theta_{k-1}) \quad (2.51)$$

$$S_{\dot{\theta}_k} = \alpha_{21} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{22} \sin \dot{\phi}_{f,k} + \alpha_{23} \sin (\phi_{f,k} - \theta_{k-1}) \quad (2.52)$$

$$(2.53)$$

avec

$$\alpha_{21} = P_{\hat{\theta}_{k/k-1}} \quad (2.54)$$

$$\alpha_{22} = \kappa_{2,R} \quad (2.55)$$

$$\alpha_{23} = A^{-1}(A(P_{\hat{\theta}_{k-1}})A(\kappa_{1,R})) \quad (2.56)$$

Dans ces expressions les coefficients α de la somme pondérée sont les paramètres de concentration des variables aléatoires circulaires. Ces paramètres n'intègrent pas, contrairement au cas linéaire, la covariance entre les variables aléatoires. Le paramètre α_{11} est dans ce cas sous-estimé et c'est le réglage de $\kappa_{1,Q}$ qui permettra de compenser cette erreur due à la non prise en compte de la corrélation entre états. On montre alors que l'étape de correction est définie par l'expression suivante :

$$P_{\hat{\theta}_k} = \sqrt{C_{\hat{\theta}_k}^2 + S_{\hat{\theta}_k}^2} \quad (2.57)$$

$$P_{\dot{\hat{\theta}}_k} = \sqrt{C_{\dot{\hat{\theta}}_k}^2 + S_{\dot{\hat{\theta}}_k}^2} \quad (2.58)$$

$$\hat{\theta}_k = \text{Arctan}^*(S_{\hat{\theta}_k}/C_{\hat{\theta}_k}) \quad (2.59)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_k = \text{Arctan}^*(S_{\dot{\hat{\theta}}_k}/C_{\dot{\hat{\theta}}_k}) \quad (2.60)$$

Ces expressions définissent l'état estimé et le paramètre de concentration associé à cette estimation.

Expérimentation

L'opérateur de fusion circulaire et le filtre récursif circulaire proposés ont été évalués sur données synthétiques. On compare, pour cela, les performances des méthodes proposées avec l'opérateur de fusion classique somme pondérée du domaine linéaire et le filtre de Kalman. Dans cette expérimentation, on simule les mesures de directions fournies par un magnétomètre embarqué dans un véhicule qui parcourt une trajectoire test [SRA⁺14]. Le bruit de mesure est distribué suivant une distribution de von Mises et les critères d'évaluations sont la distance circulaire et la variance circulaire.

En conclusion des résultats obtenus, l'opérateur de fusion proposé est aussi précis que l'opérateur somme pondérée du domaine linéaire lorsqu'il n'y a pas de transition entre $-\pi$ et π . On montre dans ce cas que l'on retrouve les propriétés du cas gaussien, soit une variance circulaire des données fusionnées qui est inversement proportionnelle à la somme des variances des signaux fusionnés. En présence de transitions entre $-\pi$ et π , l'opérateur de fusion proposé conserve les propriétés du cas gaussien contrairement à la somme pondérée du domaine linéaire dont la variance circulaire augmente.

On montre que le filtre de Kalman est une somme pondérée entre l'état prédit et la mesure. Cette somme pondérée est un estimateur qui intègre la corrélation entre les éléments du vecteur

d'état. C'est pour cette raison que l'erreur sur la direction estimée est transférée sur l'estimation de la variation d'angle (vitesse angulaire). Dans ce contexte, l'estimation de la direction et des variations de directions obtenues avec le filtre de Kalman sont peu précises aux transitions d'angles. Le filtre d'état circulaire proposé utilise l'opérateur somme pondérée du domaine circulaire. Dans ce cas ses performances en termes d'estimations de la direction et de la variation de la direction sont inchangées aux transitions d'angle.

Estimation de la direction d'un véhicule : On montre sur données réelles la faisabilité du filtre proposé pour l'estimation de la direction à partir de mesures fournies par un magnétomètre et un gyromètre. Dans notre expérimentation on considère la trajectoire de la Figure 2.6. Cette trajectoire débute par un parcours sur une route bitumée et se termine par une portion de route de campagne carrossable. On présente sur la Figure 2.7 les observations de directions et de vitesses angulaires ainsi que leurs estimés obtenues avec le filtre proposé. On peut remarquer le bruit important sur la vitesse angulaire lorsque le véhicule parcourt la route carrossable. Les résultats obtenus montrent que la direction estimée par le filtre proposé permet de lisser les observations bruitées. D'autre part le filtre proposé permet d'estimer les variations de directions du véhicule malgré le bruit important sur les observations. En effet on peut après lissage de la vitesse angulaire retrouver les manoeuvres, soit les variations de vitesses angulaires liées aux trois virages.



FIGURE 2.6: Trajectoire du véhicule

Poursuite de la phase en boucle ouverte : Un récepteur GPS fonctionne à partir de trois boucles de poursuites des paramètres du signal reçu ; la DLL (Delay Lock Loop) qui est la boucle de poursuite du code CDMA dans le signal, la PLL (Phase Lock Loop) qui est la boucle de poursuite de la phase et la FLL (Frequency Lock Loop) qui est la boucle de poursuite de la fréquence. Nous avons proposé d'utiliser le filtre circulaire pour poursuivre simultanément la phase et la fréquence du signal en boucle ouverte POL (Phase Open Loop). Cette technique a été proposée et évaluée sur données réelles dans [SRA⁺13]. Dans notre approche la poursuite du code est semi-ouverte, la phase et la fréquence du signal reçu sont estimées avec le filtre

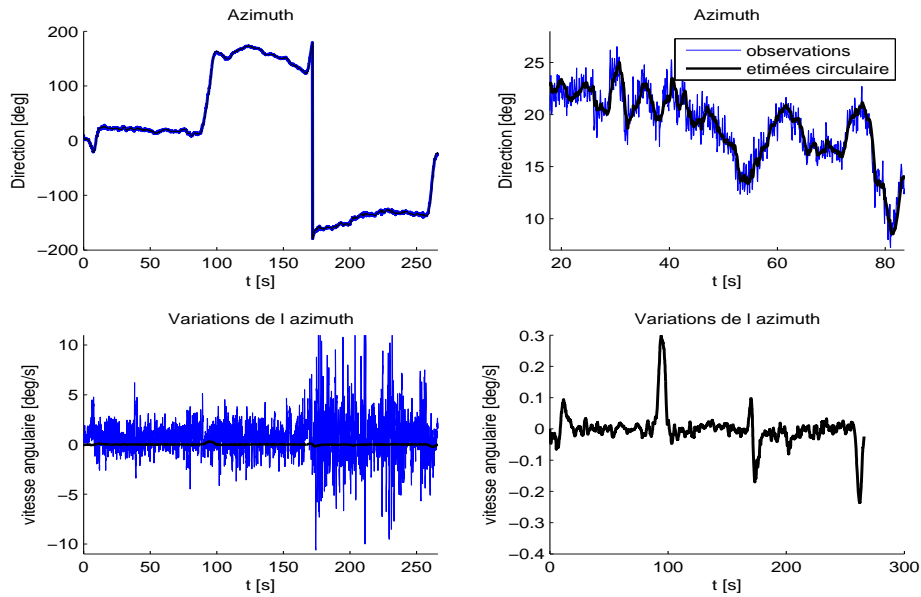


FIGURE 2.7: Estimation de la direction

circulaire proposé. On présente sur la Figure 2.8 l'estimation de la position obtenue à la milliseconde à partir des observations de code pour une expérimentation statique et dynamique. Les résultats obtenus montrent que la précision du positionnement par le code est dans ce cas métrique, et que la poursuite de la phase et de la fréquence du signal est robuste pour une trajectoire du véhicule à forte dynamique. Ces résultats montrent que l'on améliore notablement l'estimation de la position obtenue à la milliseconde en comparaison des approches classiques (Filtrage adapté et Filtrage de Kalman Étendu EKF).

Détection de sauts de cycle : Aujourd'hui un des enjeux majeurs des systèmes GNSS est le positionnement par la phase. En effet cette approche permet d'obtenir un positionnement avec une précision centimétrique. Malheureusement on ne peut, avec la phase, que mesurer des variations de pseudo-distances de 19 cm (pour le signal L1). Il existe alors deux possibilités ; la résolution de l'ambiguïté par double différence à l'aide d'un système différentiel et l'intégration des variations de phase. Cette dernière approche nécessite d'utiliser des mesures de phase bruitées, obtenues à la milliseconde et dans lesquelles des sauts de cycle apparaissent. Nous avons proposé dans [SRCB14] un estimateur de ruptures circulaire de type GLR (Generalized Likelihood Ratio) pour l'estimation des sauts de cycles en sortie de la boucle ouverte de poursuite de la phase (POL + GLR circulaire). On présente sur la Figure 2.9 la position estimée dans le cas statique et dynamique par l'approche circulaire proposée. Les résultats obtenus montrent que la précision est centimétrique, et que dans le cas d'un mouvement à forte dynamique, les sauts de cycles liés au mouvement sont correctement corrigés. On montre aussi dans ce travail que la méthode proposée est plus précise que les approches classiques qui utilisent une PLL seule ou une PLL avec un filtre de Kalman pour lisser les mesures de phases. Dans ce cas l'estimateur de rupture utilisé est le filtre de Kalman GLR.

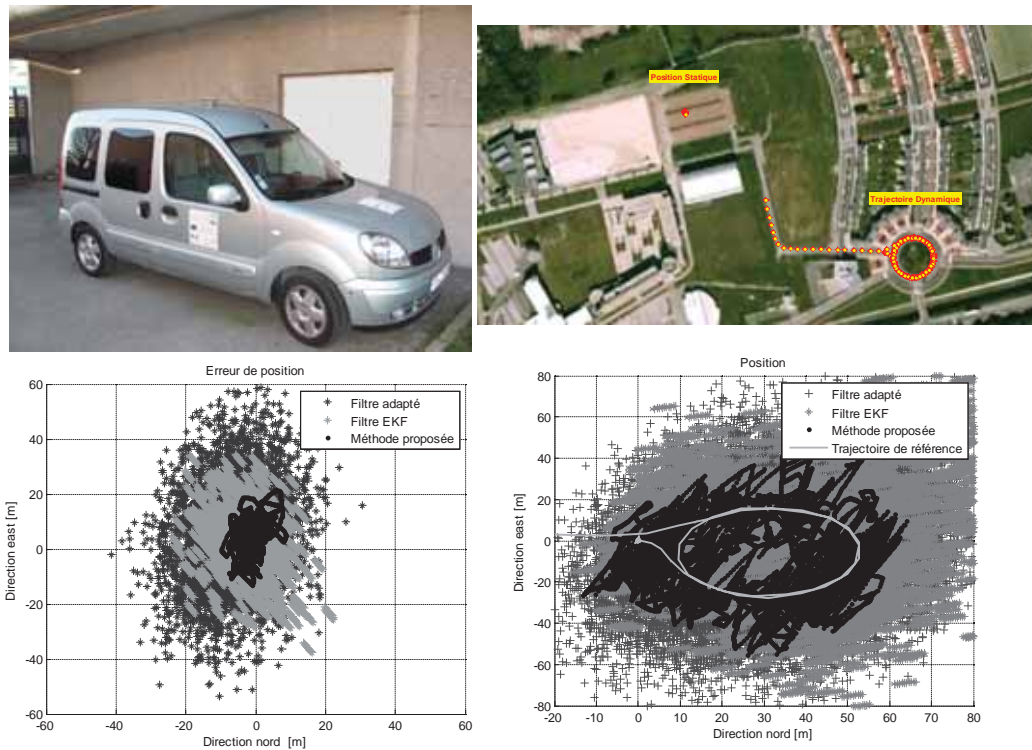


FIGURE 2.8: Estimation de la position en boucle ouverte

Estimation de la direction du vent : On modélise la direction du vent par un processus aléatoire circulaire stationnaire par morceaux. En effet pour améliorer la description de ce paramètre qui est utilisé dans les modèles de propagation de polluants, il est préférable de le décrire par sa valeur moyenne. Dans ce contexte, il faut pouvoir estimer précisément sa valeur moyenne et ses changements de valeur moyenne. On propose dans [ARCB10a] un estimateur de type GLR circulaire pour estimer les paramètres du vecteur vent lorsqu'ils évoluent dynamiquement. On présente sur la Figure 2.10 un résultat d'estimations obtenues sur données réelles. On montre sur le Figure 2.10 que l'estimateur proposé permet de décrire le signal avec un faible nombre de ruptures. On montre aussi que le signal reconstruit à partir des valeurs moyennes estimées de la direction du vent est fidèle au signal réel.

2.3 Estimation et détection conjointe en fusion d'informations.

2.3.1 Introduction

En traitement du signal les observations Y_1, \dots, Y_n sont des variables aléatoires supposées indépendantes et identiquement distribuées dans de nombreuses applications. La distribution

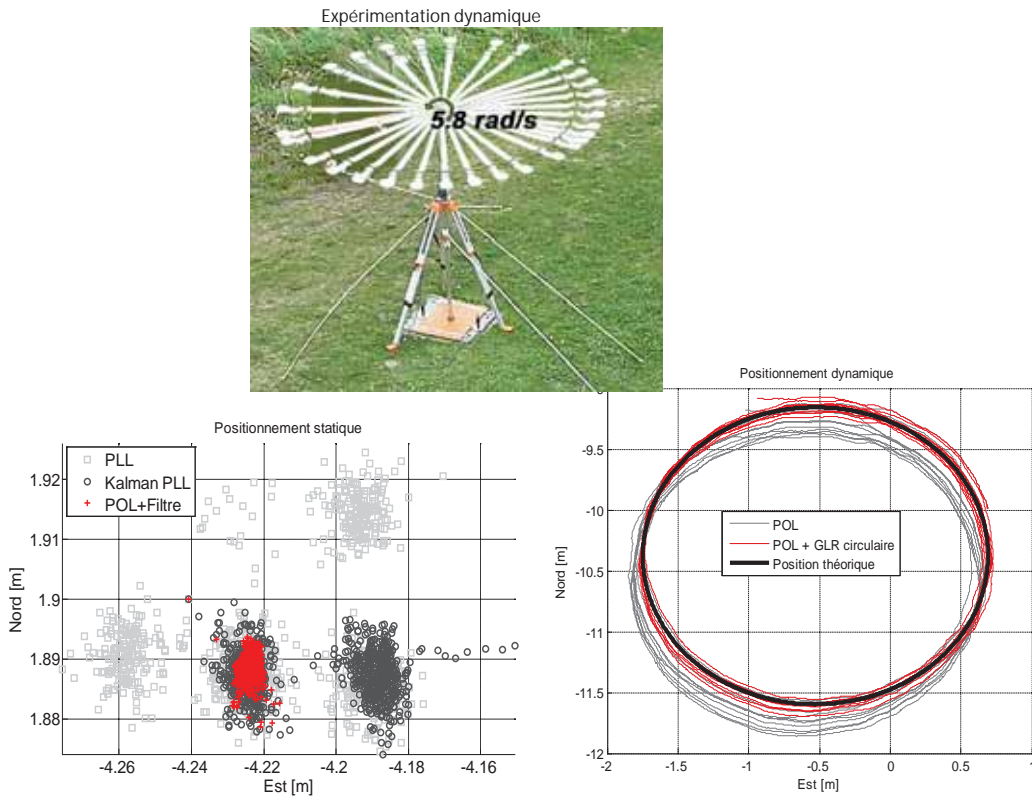


FIGURE 2.9: Estimation de la position par la phase

est de forme particulière avec un ou plusieurs paramètres inconnus. Les ruptures apparaissent lorsque la distribution des observations change. Les méthodes d'estimation de ruptures sont en général appliquées à des données ordonnées dans le temps. Leur but est alors de détecter si le mécanisme de génération des données a changé et de localiser le changement dans l'intervalle de temps où les données ont été stockées. Le plus souvent, les observations sont supposées mutuellement indépendantes et les ruptures sont observées dans un ou plusieurs paramètres de la distribution statistique des observations. Le problème de l'estimation des ruptures dans un processus aléatoire est un sujet qui est et a été abondamment étudié [BN93, Gus01]. Cette problématique dite de segmentation de signaux a pour objectif de détecter, de positionner et d'estimer la dynamique des ruptures d'un processus supposé stationnaire par morceaux. On parle dans ce cas d'estimation/détection conjointe. On peut distinguer deux grandes approches de cette problématique ; les techniques dites en ligne qui traitent les données séquentiellement lorsqu'elles sont disponibles, et les techniques dites hors-ligne qui traitent l'ensemble ou une partie du signal acquis.

Dans nos travaux nous avons adopté une représentation probabiliste des données. Il existe principalement deux approches pour l'interprétation de ces probabilités, l'approche Fréquentiste et l'approche Bayésienne. L'approche Bayésienne est adaptée aux observations ordonnées dans le temps car cette approche subjective permet d'intégrer le modèle d'évolution du système de génération des données. On utilisera la distribution *a posteriori* pour modéliser l'information

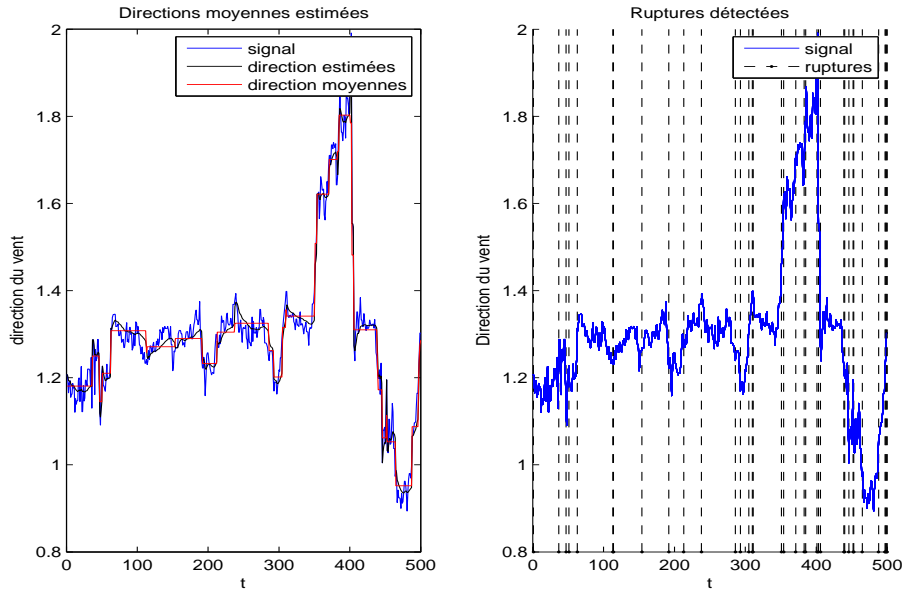


FIGURE 2.10: Estimation de la direction du vent

dont on dispose sur une hypothèse. Pour la segmentation en ligne on distingue deux hypothèses ; l'Hypothèse H_0 de présence d'une rupture et l'hypothèse H_1 d'absence de rupture. Dans ce cas la règle de décision *a posteriori* de la présence d'une rupture est définie par :

$$\frac{P(y/H_1; \hat{v}, \hat{t})}{P(y/H_0)} \begin{matrix} > & H_1 \\ < & H_0 \end{matrix} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad (2.61)$$

Dans cette expression \underline{y} est l'ensemble des observations obtenues dans une fenêtre temporelle glissante qui inclut la dernière observation fournie par le capteur. On considère ici une seule rupture dans la fenêtre de taille fixe. \hat{v} est la dynamique du saut dans les paramètres de la distribution statistique des observations à l'instant de rupture \hat{t} . Ces paramètres ne sont pas *a priori* connus dans un problème d'estimation de ruptures et doivent être estimés. Les estimateurs de ruptures en ligne sont souvent réalisés sous la forme de filtres qui fournissent, avec leur innovation, une observation directe de \hat{v} .

L'estimation hors ligne est principalement utilisée dans le cas d'un processus ayant plusieurs ruptures. Soit $\underline{r} = (r_i, 1 \leq i \leq n)$ une séquence de ruptures. On suppose le processus observé stationnaire par morceaux et r_i prend la valeur 1 aux instants de ruptures et la valeur 0 entre deux ruptures. Dans cette problématique on souhaite estimer parmi toutes les combinaisons possibles de \underline{r} (soit $n \times n$ combinaisons possibles) la séquence $\hat{\underline{r}}$ de ruptures du signal \underline{y} . Dans ce cas la règle de décision *a posteriori* permettant de décider de deux séquences de ruptures, \underline{r}_1 et

r_0 , laquelle est la plus probable est définie par :

$$\frac{P(\underline{y}/\underline{r1}; \hat{m1})}{P(\underline{y}/\underline{r0}; \hat{m0})} \underset{\underline{r0}}{\overset{\underline{r1}}{>}} \frac{P(\underline{r0})}{P(\underline{r1})} \quad (2.62)$$

Dans cette expressions $\hat{m1}$ représente les paramètres statistiques estimés dans les zones stationnaires définies par la séquence de rupture $\underline{r1}$. $\hat{m0}$ sont les paramètres définis à partir de $\underline{r0}$. Pour des signaux de taille importante, il est impossible de tester toutes les combinaisons de \underline{r} . Dans ce cas on peut utiliser la méthode de Monte Carlo, la méthodes du recuit simulé ou la programmation dynamique pour rechercher la séquence des ruptures qui fournit une distribution a posteriori maximale. Nos travaux ont portés sur la définition de la loi *a posteriori*, la maximisation de cette loi est obtenue par recuit simulé.

En fusion d'informations on considère des signaux en provenance de plusieurs capteurs. Dans les systèmes de fusion centralisée classique les signaux sont supposés avoir les mêmes paramètres à estimer avec les mêmes instants de ruptures. Dans notre approche on considère que les ruptures ne sont pas obligatoirement simultanées et présentes sur les deux signaux.

2.3.2 Estimation et détection conjointe hors ligne.

Les premiers travaux sur l'estimation hors ligne de ruptures, ont débuté dans les années 1950-1960 avec les travaux de Page [Pag57] et plus tard avec les travaux de Hinkley [Hin70, Hin71] et Kligiene [KT83]. Un certain nombre de ces recherches ont concerné, dans un premier temps, la détection d'une rupture unique dans la moyenne de plusieurs variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées [Hin70]. Ils ont ensuite été étendus à la détection d'un saut de moyenne dans un processus AR gaussien [Pic85, DP86]. On trouvera dans [DP79, JP83] des résultats théoriques complets concernant l'optimalité des approches utilisant la vraisemblance pour ce type de problème. Dans ce contexte, on trouve des contributions plus récentes qui portent sur des processus non gaussiens, à forte dépendance, décrits par des modèles complexes [Ber00, GHK99, CTC00, Tou98, GJV99].

Lorsque le nombre de ruptures est inconnu, le problème de la segmentation d'un processus stationnaire par morceaux peut être vu comme un problème de sélection de modèle. En effet dans ce cas, chaque configuration de rupture est un modèle dont l'ordre correspond au nombre de ruptures. La segmentation va consister à trouver le modèle d'ordre minimum qui "ajuste" au mieux le signal réel. Une solution classiquement utilisée pour ce type de problème est le maximum de vraisemblance pénalisée. Soit le modèle $m \in M$ et le critère empirique pénalisé suivant :

$$\hat{m} = \underset{m \in M}{\operatorname{argmin}} \{f(\hat{s}_m) + \operatorname{pen}(m)\} \quad (2.63)$$

où \hat{s}_m sont les paramètres estimés du modèle et $\operatorname{pen}(m)$ une fonction de pénalisation. Lorsque $f(t)$ est le logarithme de vraisemblance négatif de t , l'expression 2.63 est le maximum de vrai-

semblance pénalisée. Il existe dans la littérature un grand nombre de critères empiriques pénalisés que l'on peut classer en deux grandes familles ; les critères qui minimisent une expression de risque quadratique, critères dits efficaces, et les critères dits consistants qui fournissent une estimation consistante du modèle.

Les critères efficaces se sont développés à partir des travaux de Mallow [Mal73] et du critère C_p qu'il a proposé. On trouvera dans [MT98, BBM99] une description complète et précise de cette approche et différents critères de sélection de modèle. Dans ce contexte non asymptotique, les travaux de [BM01, BBM99] concernant la minimisation d'un critère de type moindre carré pondéré fournissent une expression optimale du terme de pénalisation dans un cadre gaussien.

Il existe un grand nombre de critères consistants ; parmi les plus connus on peut citer le critère AIC [Aka73] (Akaike's Information Criteria), le critère BIC [Sch78] (Bayesian Information Criteria), le critère MDL [Ris83] (Minimum Description Length). On trouvera dans [MT98] une description complète de l'ensemble de ces critères. L'ensemble de ces critères se différencie par la structure de la fonction de pénalisation qui est conditionnée par des contraintes de convergence asymptotique, définies dans un cadre gaussien [Yao88, LM00] ou de la théorie de l'information [Aka73]. Ils concernent des critères empiriques de type maximum de vraisemblance et moindre carré pénalisé. Les critères consistants sont mieux adaptés à la détection de ruptures. En effet dans l'approche efficace, l'accent est mis sur l'estimation des paramètres du modèle avec un risque quadratique le plus faible possible au détriment de la détection des ruptures. Il pourra alors être préférable d'ignorer certaines ruptures correspondant à de faibles changements dans les paramètres du signal qui sera alors sous segmenté [BM01]. Nos travaux s'inscrivent dans l'utilisation de modèles Bayésiens pour la segmentation multi-ruptures hors ligne. Nous avons dans ce cadre proposé des estimateurs réalisés sous la forme de critères consistants.

L'inférence Bayésienne comprend l'ensemble des techniques qui conduisent à la définition d'estimateurs à partir de la distribution *a posteriori* qui représente le comportement aléatoire des processus [Rob01]. Dans ce contexte, les observations en provenance des capteurs sont modélisées par la distribution de vraisemblance. Le modèle d'évolution du processus est intégré dans la loi *a priori*. Dans le cas de la segmentation d'un processus stationnaire par morceaux, l'inférence Bayésienne consiste à sélectionner le modèle avant et après rupture, soit à estimer simultanément ses paramètres ainsi que l'instant et le nombre des ruptures. La distribution *a posteriori* décrit le système et c'est dans la loi *a priori* que sont modélisées les ruptures de modèle. Le critère MAP est obtenu en maximisant la distribution *a posteriori* des instants de changements, conditionnée par l'estimation des paramètres du processus [Lav98, LL01]. Lorsque l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP) ou du minimum de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) n'a pas de forme analytique, on utilise une méthode MCMC (Monte Carlo Markov Chain) pour estimer la distribution *a posteriori* [Lav98, TDL03, Dju94]. Cependant dans la distribution *a posteriori*, les caractéristiques des capteurs et le modèle d'évolution du signal dans les zones stationnaires sont définis par des paramètres et/ou des hyper paramètres inconnus. Il a été proposé d'intégrer à la méthode MCMC des méthodes Expectation Maximisation (EM) ou d'approximation stochastique (SAEM) pour estimer les valeurs de ces paramètres [LL01, KL04].

On peut aussi utiliser une modélisation Bayésienne hiérarchique pour ne pas avoir à estimer les hyper paramètres de la distribution *a posteriori*. Dans ce cas, on définit une hyper loi *a priori* qui décrit les hyper paramètres inconnus du modèle. Lorsque l'hyper loi est une loi

conjuguée de la loi *a priori*, la distribution *a posteriori* est obtenue après marginalisation des hyper paramètres. En général on utilise une hyper loi *a priori* non informative qui introduit peu de nouveaux paramètres. On montre dans ce cas que l'estimateur obtenu est plus robuste [PADF02, Gus01]. Cependant il reste souvent, après marginalisation, des hyper paramètres à estimer. Dans ce cas ils peuvent être estimés à partir des données observées en utilisant une méthode MCMC hybride qui intègre dans la procédure de minimisation un échantillonneur de Gibb's [GG84, LL01, PADF02, DTS07].

Lorsque l'on considère la détection simultanée d'un ensemble de ruptures dans le signal, l'inférence Bayésienne consiste à sélectionner le modèle avant et après ruptures et à estimer simultanément ses paramètres. On parle alors d'estimation conjointe de ruptures [LL01, DTS07]. La distribution *a posteriori* décrit le système et c'est dans la loi *a priori* que sont modélisés les changements de modèles. Lorsque l'on considère la détection simultanée d'un ensemble de ruptures dans des signaux en provenance de plusieurs capteurs, l'inférence Bayésienne consiste à sélectionner les séquences de ruptures de chaque signal à partir de l'ensemble des mesures. On parle alors d'estimation conjointe multi-capteurs de ruptures. La distribution *a posteriori* modélise alors l'information fournie par chaque capteur et la loi *a priori* sur la séquence de ruptures est unique pour l'ensemble des signaux [BRB07]. Dans ce cas, on distingue pour ce système de fusion centralisée deux grandes approches pour combiner l'information en provenance des différents capteurs. Dans la première approche, appelée "Independent Opinion Pool", on considère que l'information fournie par chaque source est indépendante et que la loi *a posteriori* du système est le produit des distributions de vraisemblance de chaque capteur multipliées par la loi *a priori* qui est commune à l'ensemble des capteurs [BS97]. La mesure fusionnée est alors définie par le produit des fonctions de vraisemblances. La combinaison linéaire est la deuxième approche utilisée pour combiner les distributions *a posteriori* de chaque capteur. La formule de combinaison de ces densités permettant d'obtenir une densité de probabilité unique est alors appelée règle de consensus [Ben92]. La règle de consensus la plus utilisée est appelée "Linear Opinion Pool". C'est Stone [Sto61] qui fût le premier à discuter cette règle. Il s'agit d'une somme pondérée des probabilités *a posteriori*. Les pondérations sont normalisées et définies par l'utilisateur en fonction de la confiance qu'il donne à l'information fournie par chaque capteur. Si les mesures possèdent des densités de probabilité continues, alors la pondération linéaire fournira une distribution continue. En revanche, cette pondération n'obéit pas à la règle de Bayes et la distribution *a posteriori* résultante n'est pas unimodale. En effet l'expression de la règle consensus "Linear Opinion Pool" n'est pas dérivée du produit des probabilités *a posteriori* de chaque capteur de la formule de Bayes. Le "Logarithmic Opinion Pool" est une autre règle consensus qui n'a pas les désavantages du "Linear Opinion Pool". Il s'agit de la somme pondérée du logarithme des probabilités *a posteriori*. La densité résultante est alors dans ce cas moins dispersée, mais surtout obéit cette fois-ci à la règle de Bayes. Les travaux de recherche portant sur la définition d'opérateurs de fusion à partir de la loi *a priori* sont récents. Ces travaux ont principalement porté sur la proposition de loi *a priori* qui modélise le comportement mutuel entre processus [RBB00, RB06, DT07, DTD07].

Notre apport dans le domaine de la segmentation hors ligne des signaux porte principalement sur la définition d'estimateurs de ruptures pour les applications originales que nous avons étudiées. Cette approche a d'abord été appliquée à la segmentation de la direction et de la vi-

tesse du vent modélisée par des processus stationnaires par morceaux suivant respectivement une distribution de von Mises et une distribution Log normale [RB01, RB04, RB05, RB06].

Elle a ensuite été utilisée dans la thèse de Monsieur Stanislas Boutoille pour l'estimation des décalages du code GPS dans les boucles de poursuite du signal [Bou07]. En effet, on montre que la poursuite du code GPS CDMA est un problème de détection multi-ruptures. Dans ce contexte, nous avons proposé un estimateur MAP hors ligne pour l'estimation de l'ensemble des ruptures du signal GPS numérisé sur un intervalle de temps prédéfini. L'estimateur MAP proposé intègre dans sa mise en oeuvre une information imprécise sur les paramètres d'évolution du signal GPS dans les zones stationnaires et sur la position des ruptures [BRB06, SRA⁺11].

Estimation multi-ruptures de signaux multi-capteurs

Le problème considéré ici est la détection des changements dans la distribution statistique d'un processus J-dimensionnel. On note $\underline{y} = \left(\underline{y}^{(j)}, 1 \leq j \leq J \right)$ l'ensemble des J séries observées et $\underline{m} = \left(\underline{m}^{(j)}, 1 \leq j \leq J \right)$ l'ensemble des paramètres. On note $\underline{y}^{(j)} = \left(y_i^{(j)}, 1 \leq i \leq n \right)$ la série j observée de loi conditionnelle $h^{(j)}$. On suppose les processus observés stationnaires par morceaux et on note $\underline{r}^{(j)} = \left(r_i^{(j)}, 1 \leq i \leq n \right)$ la configuration de ruptures dans la série j et $\underline{r} = \left(\underline{r}^{(j)}, 1 \leq j \leq J \right)$ l'ensemble des J configurations de ruptures. $r_i^{(j)}$ prend la valeur 1 aux instants de changements et la valeur zéro entre deux changements. N_j est le nombre de ruptures car on suppose par convention qu'il y a toujours une rupture en $i=n$. On note $\underline{t}^{(j)} = \left(t_k^{(j)}, k \geq 1 \right)$ les instants de ruptures dans la série j associés à la configuration de rupture $\underline{r}^{(j)}$.

Les paramètres \underline{m} des processus et les séquences de ruptures \underline{r} sont estimés en maximisant la distribution *a posteriori* suivante :

$$(\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{m}}) = \underbrace{\text{Argmax}}_{(\underline{r}, \underline{m})} \text{Pr}(\underline{R} = \underline{r} / \underline{Y} = \underline{y}; \underline{m}) \quad (2.64)$$

Nous avons choisi de construire un estimateur MAP car il est possible d'intégrer dans la loi *a posteriori* une information *a priori* sur les ruptures présentes dans l'ensemble des séries observées. En effet :

$$\text{Pr}(\underline{R} = \underline{r} / \underline{Y} = \underline{y}; \underline{m}) \propto f(\underline{y} / \underline{r}; \underline{m}) f(\underline{m} / \underline{r}) \pi(\underline{r}), \quad (2.65)$$

où $\pi(\underline{r})$, la loi *a priori* des configurations de ruptures, est définie par :

$$\pi(\underline{r}) = \text{Pr}(\underline{R}^{(1)} = \underline{r}^{(1)}, \dots, \underline{R}^{(J)} = \underline{r}^{(J)}) \quad (2.66)$$

C'est dans la loi *a priori* que l'on va définir les paramètres qui guident le nombre et la position des ruptures détectées. Pour estimer la séquence de ruptures \underline{r} on minimisera le logarithme négatif de l'expression 2.65, soit :

$$U_{\underline{y}}(\underline{r}) = \sum_{j=1}^J V_{\underline{y}^{(j)}} \left(\underline{r}^{(j)}; \hat{\underline{m}}^{(j)} \left(\underline{r}^{(j)} \right) \right) - \ln \pi(\underline{r}). \quad (2.67)$$

La minimisation de cette fonction de contraste pénalisée est réalisée avec un algorithme de recuit simulé. Dans cette expression $V_{\underline{y}^{(j)}}(\dots)$ est la fonction de contraste. Cette fonction est obtenue à partir des distributions de vraisemblances qui modélisent les mesures en provenance des capteurs. Dans nos travaux nous l'avons construite avec une distribution Log normale et une distribution de von Mises pour la segmentation du vecteur vent [RB06]. Dans le cas du signal GPS multi-porteuses, nous l'avons construite pour des processus linéaires par morceaux et bruités par un bruit additif gaussien [BRB07]. Dans ce contexte, notre apport méthodologique a été de proposer d'intégrer dans la loi *a priori* une information sur le comportement mutuel entre processus. Nous avons été les premiers à proposer une loi qui favorise dans le processus de segmentation la détection de ruptures simultanées. La définition de cette loi nous a conduit à proposer un critère de détection de rupture de type "Independent Opinion Pool" [RBB00, RB06]. D'autre part nous avons proposé un critère de type "Logarithmic Opinion Pool" permettant de définir dans la loi *a priori* la probabilité de détecter sur l'un des processus lorsqu'une rupture est détectée sur l'autre. Cette règle de détection asymétrique permet alors de donner lors de la segmentation plus de confiance à l'un des processus [RB05].

Independent Opinion Pool

La loi *a priori* est définie sur le modèle d'une loi de Bernoulli. Soit λ la probabilité d'avoir une rupture. Pour un signal de taille n la probabilité d'avoir k ruptures est donnée par la loi de Bernoulli soit $\lambda^k(1-\lambda)^{n-k}$. Pour deux signaux les ruptures sont simultanées ou uniques. Soit P^2 la probabilité d'avoir deux ruptures simultanées et n^2 le nombre de ruptures simultanées. Soit $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$ la probabilité d'avoir une rupture sur le premier signal et le second signal. On note $n^{(1)}$ et $n^{(2)}$ les nombres de ruptures uniques. Dans ce contexte la probabilité des ruptures présentes sur les deux signaux peut être définie par $(P^2)^{n^2} (P^{(1)})^{n^{(1)}} (P^{(2)})^{n^{(2)}} (P^0)^{n-n^2+n^{(1)}+n^{(2)}}$ avec $P^2 + P^{(1)} + P^{(2)} + P^0 = 1$. La loi *a priori* proposée généralise ce principe à J signaux et pour des probabilités différentes à chaque instant i .

On définit $\underline{r}^{(j)}$ comme une séquence de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli. Si on suppose dans un premier temps qu'il n'existe aucun lien entre les processus, la probabilité d'avoir une séquence de ruptures \underline{r} est :

$$\pi(\underline{r}^{(1)}, \dots, \underline{r}^{(J)}) = \prod_{j=1}^J (\lambda^{(j)})^{N_j} (1 - \lambda^{(j)})^{n - N_j} \text{ avec } N_j = \sum_{i=1}^n r_{j,i}, \quad (2.68)$$

où $\lambda^{(j)}$ est la probabilité d'avoir une rupture sur $\underline{y}^{(j)}$. Dans ce modèle la valeur de $\lambda^{(j)}$ est définie par l'utilisateur, tandis que la valeur de N_j est inconnue [Lav98]. Si on suppose maintenant qu'il existe une corrélation entre les processus et qu'elle est différente pour chaque instant i . On note :

$$\begin{aligned} P_i^{(j)} &= P(r_i^{(1)} = 0, \dots, r_i^{(j)} = 1, \dots, r_i^{(J)} = 0) \\ P_i^0 &= P\left(\sum_{j=1}^J r_i^{(j)} = 0\right) \\ P_i^l &= P\left(\sum_{j=1}^J r_i^{(j)} = l\right) \text{ avec } l \in \{2, \dots, J\} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$P_i^{(j)}$ est la probabilité d'avoir une rupture unique à la position i sur le processus $\underline{y}^{(j)}$. On note ζ_j l'ensemble de ces positions. P_i^l est la probabilité d'avoir à la position i , l ruptures simultanées sur les J processus. On note η_l l'ensemble de ces positions. On définit alors la probabilité qui lie les ruptures dans les processus :

$$\pi(\underline{r}^{(1)}, \dots, \underline{r}^{(J)}) = \left(\prod_{j=1}^J \prod_{i \in \zeta_j} P_i^{(j)} \right) \left(\prod_{l=2}^J \prod_{i \in \eta_l} P_i^l \right) \left(\prod_{i \in \eta_0} P_i^0 \right), \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } & \sum_{j=1}^J \text{card} \{ \zeta_j \} + \sum_{l=2}^J \text{card} \{ \eta_l \} + \text{card} \{ \eta_0 \} = n \\ \text{et } & \sum_{j=1}^J P_i^{(j)} + \sum_{l=2}^J P_i^l + P_i^0 = 1. \end{aligned}$$

De plus, on suppose que la loi *a priori* des paramètres $\underline{m} : f(\underline{m}/\underline{r})$ est une loi uniforme sur l'ensemble des valeurs de m et que les processus sont indépendants. On a alors :

$$\begin{aligned} Pr(\underline{R} = \underline{r} / \underline{Y} = \underline{y}; \underline{m}) & \propto \\ & \prod_{j=1}^J \left(h^{(j)}(\underline{y}^{(j)} / \underline{r}^{(j)}; \underline{m}^{(j)}) \prod_{i \in \zeta_j} P_i^{(j)} \right) \left(\prod_{l=2}^J \prod_{i \in \eta_l} P_i^l \right) \left(\prod_{i \in \eta_0} P_i^0 \right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Dans le cas de deux processus, la fonction de contraste à minimiser est définie par :

$$\begin{aligned} [\hat{r}] & = \underset{(\underline{r}) \in \{0,1\}^{n \times n}}{\text{argmin}} \sum_{j=1}^2 V_{\underline{y}^{(j)}}(\underline{r}^{(j)}; \widehat{\underline{m}}^{(j)}(\underline{r}^{(j)})) \\ & + \sum_{i \in \zeta_1} \beta_i^{(1)} + \sum_{i \in \zeta_2} \beta_i^{(2)} + \sum_{i \in \eta_2} \gamma_i^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

avec $\beta_i^{(1)} = \ln\left(\frac{P_i^0}{P_i^{(1)}}\right)$, $\beta_i^{(2)} = \ln\left(\frac{P_i^0}{P_i^{(2)}}\right)$ et $\gamma_i^2 = \ln\left(\frac{P_i^0}{P_i^2}\right)$. Le terme $\sum_{i=1}^n P_i^0$ est retiré de l'expression (2.72) car il est constant. Dans les applications que nous avons étudiées, on dispose d'une information *a priori* imprécise sur la position des ruptures. En effet, quand le vecteur vent est observé avec un anémomètre situé en bords de mer, l'information *a priori* imprécise sont les instants t'_k des heures de marées hautes et basses. Cependant les changements brusques sur la vitesse et la direction du vent qui ont de fortes probabilités de se produire à ces instants, le sont dans une plage de temps autour de l'heure de basculement de la marée. C'est pour cette raison que la loi *a priori* qui modélise la probabilité des séquences de ruptures est composée de probabilités qui augmentent autour des instants de ruptures.

En pratique il y a deux façons de construire la loi *a priori* (2.70) ; la première consiste à définir les probabilités d'occurrences des ruptures et la seconde à définir la pénalisation associée à chaque type de rupture (la pénalisation sera d'autant plus faible que le type de rupture sera probable). C'est cette dernière approche que nous avons utilisée pour proposer une loi *a priori*

qui intègre une information sur la position des ruptures. Il existe alors une contrainte à respecter pour la définition de cette loi. En effet on considère $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, γ^2 des pénalisations définies avec la loi (2.70) qui garantit la normalisation des probabilités. On montre que ces pénalisations peuvent être modifiées en conservant la normalisation des probabilité si les nouvelles valeurs de pénalisation respectent les conditions suivantes : $0 \leq \beta_i^{(1)} \leq \beta^{(1)}$, $0 \leq \beta_i^{(2)} \leq \beta^{(2)}$, $0 \leq \gamma_i^2 \leq \gamma^2$.

Pour favoriser la détection des ruptures aux instants t'_k nous proposons les expressions suivantes pour les paramètres de la fonction de pénalisation :

$$\beta_i^{(1)} = \beta^{(1)} - \rho^{(1)} \sum_{k=1}^N \exp\left(-\frac{(i-t'_k)^2}{2(\tau^{(1)})^2}\right) \quad (2.73)$$

$$\beta_i^{(2)} = \beta^{(2)} - \rho^{(2)} \sum_{k=1}^N \exp\left(-\frac{(i-t'_k)^2}{2(\tau^{(2)})^2}\right) \quad (2.74)$$

$$\gamma_i^2 = \left(\beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)}\right) \left(\frac{\gamma^2}{\beta^{(1)} + \beta^{(2)}}\right) \quad (2.75)$$

$\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$ définissent la confiance sur l'information *a priori* de la présence d'une rupture en t'_k . $(\tau^{(2)})^2$ et $(\tau^{(1)})^2$ définissent la confiance sur la localisation de la rupture. On montre sur la Figure 2.11 que pour le modèle proposé, la pénalisation décroît aux instants t'_k tandis que la probabilité d'avoir une rupture croît.

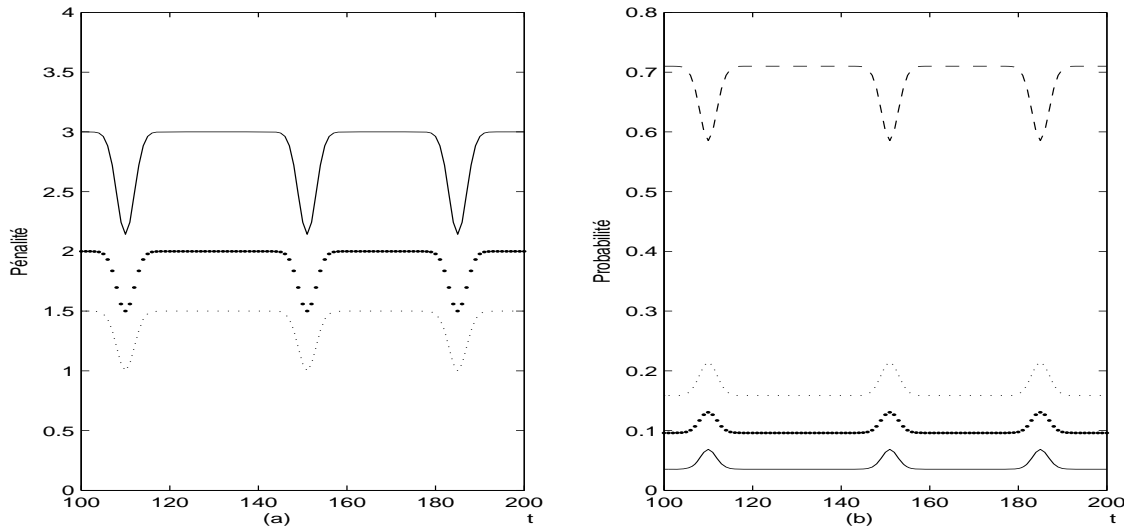


FIGURE 2.11: Fig.(a) Evolution des paramètres de pénalisation, (-) γ_i^2 , (..) $\beta_{1,i}$, (..) $\beta_{2,i}$. Fig.(b) Evolution des probabilités, (-) P_i^2 , (..) $P_i^{(1)}$, (..) $P_i^{(2)}$, (- -) P_i^0 .

Logarithmic Opinion Pool

Pour conserver la règle de Bayes et une distribution unimodale dans chaque segment, nous proposons d'utiliser une règle de combinaison des processus de type "Logarithmic Opinion Pool" [BS97]. Dans ce cas on introduit dans la distribution *a posteriori* un ensemble de paramètres $\underline{\mu} = \{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(J)}\}$ associés aux différents processus [RB05]. Ces paramètres vont introduire un poids sur le logarithme de chaque distribution qui permettra de moduler leurs interdépendances. Les paramètres $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(J)}$ vont pondérer les fonctions de contraste de chaque signal dans la fonction de contraste pénalisée globale. En effet pour construire la fonction de contraste pénalisée on prend le logarithme de la fonction de vraisemblance, et ses paramètres qui sont des puissances dans la distribution *a posteriori* deviennent des poids associés à la vraisemblance de chaque signal. Ils définissent alors les poids de l'opérateur de fusion somme pondérée qui combine les valeurs des vraisemblances.

L'estimateur du maximum *a posteriori* est dans ce cas donné par :

$$\begin{aligned}
 (\hat{r}, \hat{m}) &= \tag{2.76} \\
 &= \underbrace{\text{Argmax}}_{(r, m)} \prod_{j=1}^J \left(h^{(j)} \left(\underline{y}^{(j)} / \underline{r}^{(j)}; \underline{m}^{(j)} \right) \left(P^{(j)} \right)^{n^{(j)}} \right)^{\mu^{(j)}} \left(\prod_{l=2}^J (P^l)^{n^l} \right) (P^0)^{n^0}
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \sum_{j=1}^J n^{(j)} + \sum_{l=2}^J n^l + n^0 = n$$

Dans cette expression $(P^{(j)}, P^l, P^0)$ ne sont plus des probabilités permettant d'exprimer le comportement mutuel entre processus mais des paramètres qui ne dépendent pas des instants i . En effet, les paramètres $\underline{\mu}$ interviennent aussi dans l'expression de la loi *a priori*. Il n'est donc plus possible de favoriser l'une ou l'autre configuration de rupture en agissant seulement sur les paramètres $(P^{(j)}, P^l, P^0)$. On se propose ici de définir la loi *a priori* du critère "Independent Opinion Pool" équivalent à l'expression 2.76.

On considère le cas de deux processus et on note $h_v^{(j)} = h^{(j)}(y^{(j)} / r_i^{(j)} = v; m^{(j)})$ la vraisemblance de la présence ou de l'absence d'une rupture, $v \in \{1, 0\}$, à la position i . Pour détecter une rupture sur $\underline{y}^{(1)}$ il est nécessaire d'avoir :

$$\begin{aligned}
 (P^{(1)})^{\mu^{(1)}} (h_1^{(1)})^{\mu^{(1)}} (h_0^{(2)})^{\mu^{(2)}} &> P^0 (h_0^{(1)})^{\mu^{(1)}} (h_0^{(2)})^{\mu^{(2)}} \tag{2.77} \\
 \text{soit } \frac{(P^{(1)})^{\mu^{(1)}}}{P^0} &> \frac{(h_0^{(1)})^{\mu^{(1)}}}{(h_1^{(1)})^{\mu^{(1)}}}
 \end{aligned}$$

Soit pour détecter une rupture uniquement sur $\underline{y}^{(j)}$:

$$\frac{(P^{(j)})^{\mu^{(j)}}}{P^0} > \frac{(h_0^{(j)})^{\mu^{(j)}}}{(h_1^{(j)})^{\mu^{(j)}}} \tag{2.78}$$

Pour détecter une rupture double, soit une rupture sur les deux signaux, il faut avoir :

$$\frac{P^2}{P^0} > \left(\frac{h_0^{(1)}}{h_1^{(1)}} \right)^{\mu^{(1)}} \left(\frac{h_0^{(2)}}{h_1^{(2)}} \right)^{\mu^{(2)}} \quad (2.79)$$

En pratique, on veut favoriser la détection de ruptures simultanées, on doit donc avoir :

$$\frac{P^2}{P^0} > \prod_{j=1}^2 \left(\frac{h_0^{(j)}}{h_1^{(j)}} \right)^{\mu^{(j)}} \text{ soit } \frac{P^2}{P^0} = \alpha \prod_{j=1}^2 \left(\frac{(P^{(j)})^{\mu^{(j)}}}{P^0} \right) \text{ avec } \alpha > 1 \quad (2.80)$$

Remarque : Dans le cas de la segmentation indépendante pour détecter une rupture double il faut que l'unique condition suivante soit remplie :

$$\lambda_1 h_1^{(1)} \lambda_2 h_1^{(2)} > (1 - \lambda_1) h_0^{(1)} (1 - \lambda_2) h_0^{(2)} \quad (2.81)$$

où, λ_1 est la probabilité d'avoir une rupture sur le signal 1 et λ_2 la probabilité d'avoir une rupture sur le signal 2. Il en est de même pour la segmentation jointe "Independent Opinion Pool" ou l'unique condition suivante doit être respectée :

$$\frac{P^{(1)} P^{(2)} \alpha}{P^0 P^0} > \frac{h_0^{(1)} h_0^{(2)}}{h_1^{(1)} h_1^{(2)}} \quad (2.82)$$

Dans le cas de la segmentation jointe "Logarithmic Opinion Pool" nous allons montrer que deux conditions existent pour détecter une rupture simultanée.

Pour détecter une rupture sur les deux signaux, il faut donc avoir :

$$\frac{P^{(1)}}{(P^0)^{1/\mu^{(1)}}} > \frac{h_0^{(1)}}{h_1^{(1)}} \text{ et } \frac{P^{(2)} (\alpha)^{1/\mu^{(2)}}}{(P^0)^{1/\mu^{(2)}}} > \frac{h_0^{(2)}}{h_1^{(2)}} \quad (2.83)$$

Ou encore :

$$\frac{P^{(2)}}{(P^0)^{1/\mu^{(2)}}} > \frac{h_0^{(2)}}{h_1^{(2)}} \text{ et } \frac{P^{(1)} (\alpha)^{1/\mu^{(1)}}}{(P^0)^{1/\mu^{(1)}}} > \frac{h_0^{(1)}}{h_1^{(1)}} \quad (2.84)$$

On peut alors définir les différentes probabilités de la loi *a priori* en utilisant la réécriture suivante :

$$\frac{P^{*(1)}}{P^0} > \frac{h_0^{(1)}}{h_1^{(1)}} \text{ et } \frac{P^{*(2)} (\alpha)^{1/\mu^{(2)}}}{P^0} > \frac{h_0^{(2)}}{h_1^{(2)}} \quad (2.85)$$

où $(\alpha)^{1/\mu^{(2)}}$ favorise la détection sur $\underline{y}^{(2)}$ lorsque l'on a détecté sur $\underline{y}^{(1)}$.

$$\frac{P^{*(2)}}{P^0} > \frac{h_0^{(2)}}{h_1^{(2)}} \text{ et } \frac{P^{*(1)} (\alpha)^{1/\mu^{(1)}}}{P^0} > \frac{h_0^{(1)}}{h_1^{(1)}} \quad (2.86)$$

avec $P^{*(1)} = P^{(1)} (P^0)^{(1-1/\mu^{(1)})}$, $P^{*(2)} = P^{(2)} (P^0)^{(1-1/\mu^{(2)})}$, où $P^{*(1)}$ et $P^{*(2)}$ sont respectivement les probabilités de détecter une rupture sur les processus $\underline{y}^{(1)}$ et $\underline{y}^{(2)}$. Dans ce cas $(\alpha)^{1/\mu^{(1)}}$ favorise la détection sur $\underline{y}^{(1)}$ lorsque l'on a détecté sur $\underline{y}^{(2)}$.

On note $P^{*(12)}$ et $P^{*(21)}$ les probabilités de détecter sur le processus $\underline{y}^{(1)}$ lorsque l'on a détecté sur le processus $\underline{y}^{(2)}$ et inversement :

$$P^{*(12)} = \frac{P^{*(1)}P^{*(2)}}{P^0} (\alpha)^{1/\mu^{(1)}} \quad (2.87)$$

$$P^{*(21)} = \frac{P^{*(1)}P^{*(2)}}{P^0} (\alpha)^{1/\mu^{(2)}} \quad (2.88)$$

P^{*2} , la probabilité de détecter une rupture double, est la somme de ces probabilités, soit :

$$P^{*2} = \frac{P^{*(1)}P^{*(2)}}{P^0} \left((\alpha)^{1/\mu^{(1)}} + (\alpha)^{1/\mu^{(2)}} \right) \quad (2.89)$$

Finalement on montre qu'à partir de la normalisation des probabilités $P^0 + P^{*(1)} + P^{*(2)} + P^{*2} = 1$, on peut exprimer chaque probabilité, comme une fonction de $P^{(1)}, P^{(2)}, P^2, \alpha, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}$. En pratique l'utilisateur fixera les probabilités $P^0, P^{*(1)}, P^{*(2)}, P^{*2}$ qui ont un réel sens probabiliste pour le critère 2.76. On pourra alors favoriser la détection de ruptures doubles et la détection sur un processus en particulier avec les probabilités $P^{*(12)}$ et $P^{*(21)}$. Lorsque ces probabilités sont fixées, on peut alors déduire à partir de leur normalisation les valeurs des paramètres du critère 2.76 [RB05].

On représente sur la Figure 2.12.(a) l'évolution des probabilités du critère "Independent Opinion Pool" équivalent et sur la Figure 2.12.(b) l'évolution des paramètres du critère "Logarithmic Opinion Pool". Dans cet exemple $P^{*(12)} = P^{*(2)}/3$ et $P^{*(21)} = 2 P^{*(2)}/3$ avec $\alpha = 2$. On peut remarquer que les probabilités $P^0, P^{*(1)}, P^{*(2)}, P^{*2}, P^{*(12)}, P^{*(21)}$ sont bien normalisées contrairement aux paramètres $P^0, P^{(1)}, P^{(2)}, P^2$.

Expérimentation

Pour montrer l'intérêt de la méthode "Independent Opinion Pool", on estime la distribution empirique des ruptures détectées à partir de plusieurs réalisations de signaux aléatoires. On représente sur la Figure 2.13.(a) une réalisation de la vitesse du vent modélisée par une variable aléatoire Log normale stationnaire par morceaux. On représente sur la Figure 2.14.(a) la direction du vent modélisée par une variable aléatoire suivant une distribution de von Mises. Sur ces figures, les instants de ruptures sont indiqués par des lignes pointillées verticales. On recherche ici des ruptures dans la moyenne et la variance des processus.

Expérimentation (1) : On présente sur les Figures 2.13.(b) et 2.14.(b) la segmentation indépendante des processus qui n'intègre donc pas d'information *a priori* sur le comportement mutuel entre processus. Dans ce cas, plus la dynamique de la rupture est faible et plus la probabilité de détecter la rupture à l'instant de la rupture est faible.

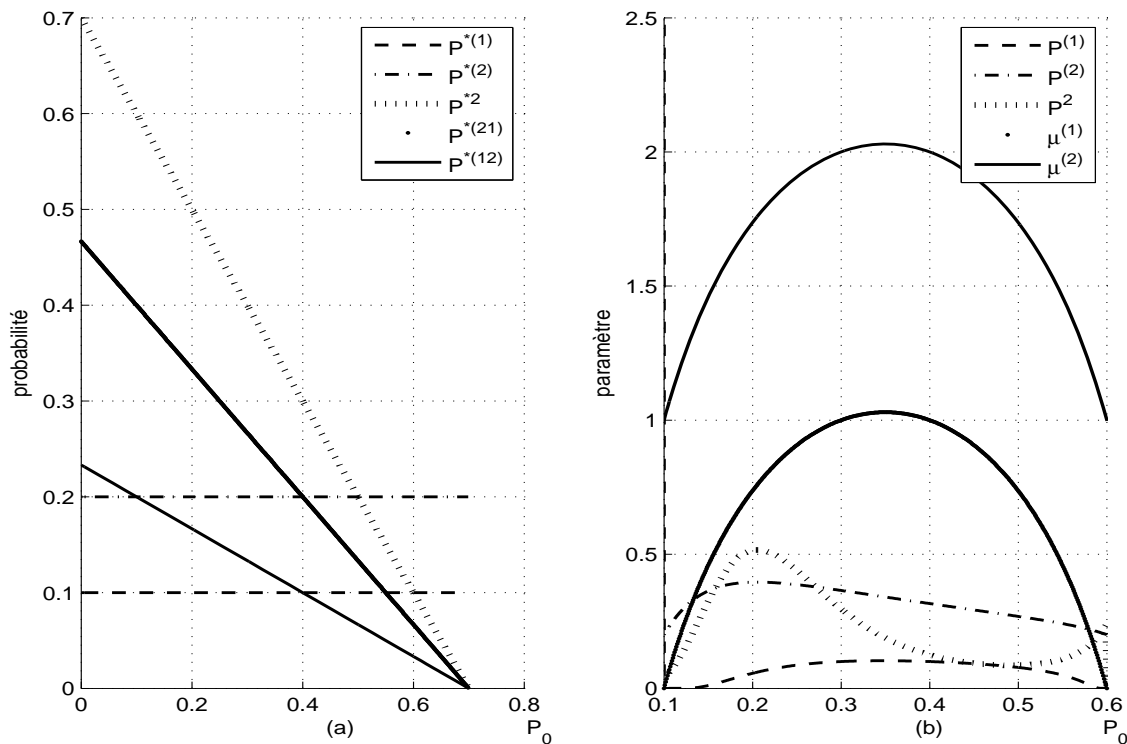


FIGURE 2.12: Fig.(a) Evolution des probabilités. Fig.(b) Evolution des paramètres du critère.

Expérimentation (2) : On présente sur les Figures 2.13.(c) et 2.14.(c) la segmentation conjointe des processus obtenue avec la loi *a priori* 2.70 qui intègre le comportement mutuel entre processus. Pour cette expérimentation on ne considère pas l'information *a priori* sur la position des ruptures. On remarquera que, dans ce cas, la segmentation conjointe des deux processus permet d'augmenter la probabilité de détection pour les ruptures présentes simultanément sur les deux signaux.

Expérimentation (3) : On présente sur les Figures 2.13.(d) et 2.14.(d) la segmentation conjointe des processus obtenue avec les paramètres de pénalisations 2.75, 2.74, 2.73 qui intègrent, en plus de l'information *a priori* sur le comportement mutuel entre processus, une information *a priori* sur la position des ruptures. On représente sur ces figures les instants de ruptures qui définissent cette information *a priori* par des lignes pointillées verticales. On peut constater sur ces figures que cette information *a priori* supplémentaire permet d'améliorer la détection des ruptures aux instants des ruptures.

Expérimentation (4) : On présente sur les Figures 2.15.(c) et 2.15.(d) la segmentation conjointe des processus obtenue en maximisant la distribution du logarithme opinion pool défini par l'expression (2.76). Les positions des ruptures sur les signaux sont les mêmes que celles indiquées sur les Figures 2.13.(a), 2.13.(b) mais la dynamique des ruptures est plus faible. On définit dans ce cas deux probabilités identiques pour la détection d'une rupture sur un des signaux quand elle a été détectée sur l'autre signal. On montre dans cette expérimentation que l'introduction de ces

probabilités croisées permet d'améliorer notablement la probabilité de détection des ruptures simultanées. On remarque aussi que dans ce cas les probabilités de fausse alarme aux instants des ruptures uniques restent faibles.

Ce travail a été évalué sur signaux réels pour la segmentation conjointe hors ligne de la vitesse et la direction du vent. En effet l'intérêt d'une telle application est de pouvoir estimer précisément la vitesse, la direction moyenne et les instants de changements de ces paramètres qui sont utilisés dans les modèles de propagation de polluants. Pour un anémomètre en bord de mer, il existe une forte probabilité pour qu'une variation de direction et vitesse du vent apparaisse simultanément sur ces deux composantes. D'autre part il existe aussi une forte probabilité pour que ces variations apparaissent aux heures de changement de marées. On montre dans [RB06] que le modèle de segmentation proposé permet d'améliorer les performances de la segmentation en intégrant une information *a priori* sur le comportement mutuel entre processus et sur les instants de marées basses et hautes.

2.3.3 Estimation et Détection conjointe en ligne

Radner [Rad62] fut un des premiers à aborder les problèmes de décisions à partir de plusieurs détecteurs locaux. En 1981, Tenney et Sandell [TJ81] furent les premiers à traiter les problèmes de la détection distribuée telle qu'on la représente sur la Figure 2.1.(b). Ils déterminèrent la règle de décision locale optimale, en s'appuyant sur le critère de Bayes, pour les capteurs qui composent le système. Dans cette approche les décisions sont combinées par l'opérateur de fusion en utilisant les règles logiques "OU" et "ET". En 1986, Chair et Varshney [CV86] posent le problème de l'optimisation de l'opérateur de fusion. Ils considèrent les décisions des détecteurs locaux comme indépendantes et déterminent à partir de là un opérateur de fusion optimale. Cet opérateur est choisi parmi toutes les combinaisons linéaires possibles des décisions à partir d'un critère qui dépend des performances de détection de chaque capteur. Cependant, dans ce travail, le problème de l'optimisation des détecteurs locaux n'est pas abordé. C'est en 1987 que Reibman et Nolte [RN87] proposent, toujours dans un cadre Bayésien, d'optimiser simultanément les détecteurs locaux et l'opérateur de fusion. Thomopoulos [TVB89] propose alors un schéma de décision optimale selon le critère d'optimisation de Neyman-Pearson. L'optimisation simultanée définie dans ce cadre, appelée PBPO (Person By Person Optimisation), conduit à un ensemble d'équations couplées dont le nombre croît très rapidement avec le nombre de capteurs, rendant leurs résolutions très difficiles. Pour simplifier ce problème, Tsitsiklis [Tsi86] montre que dans le cas où les capteurs sont identiques, sous le formalisme bayésien, les mêmes seuils sont utilisés pour chacun d'eux. Cela fournit un résultat sous-optimal lorsque le nombre de capteurs est fini. Dans ce cas, il est montré que la règle de fusion optimale est une règle *k-out-of-n* avec un seuil défini, c'est-à-dire que la décision globale sera égale à 1 si au moins *k* décisions parmi *n* sont égales à 1. Récemment, Sun, Shi et Wesel [SSW01] ont montré les propriétés de quasi-convexité de la probabilité d'erreur pour une règle de fusion *k-out-of-n* fixée. Cette propriété permet notamment d'éliminer le problème des multiples optima locaux. De ce fait, l'optimum déterminé par *n* importe quelle méthode sera l'optimum global. C'est à partir de ces travaux que Zang, Varshney et Wesel [ZVW02] ont proposé un algorithme SECANT qui permet de trouver les critères de décision optimale du système. Ils montrent également dans leurs travaux que la quasi-convexité existe pour le critère de Neyman-Pearson et utilisent la

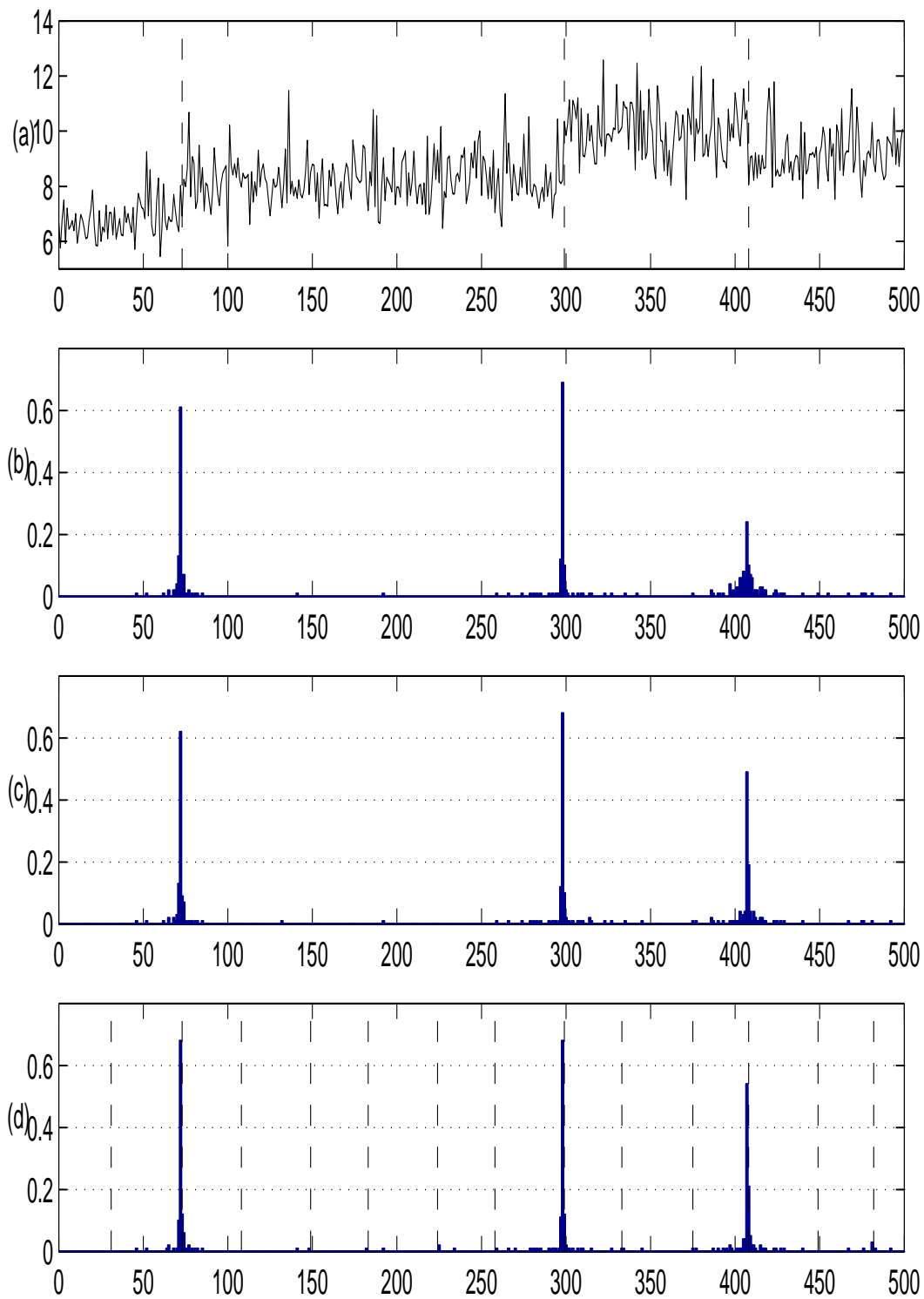


FIGURE 2.13: Fig. (a) Signal observé $y^{(1)}$ (vitesse du vent) et les instants de ruptures. Fig. (b), (c), (d) distributions empiriques des ruptures détectées $r^{(1)}$; Fig.(b) obtenues pour l'expérimentation (1), Fig.(c) obtenues pour l'expérimentation (2), Fig.(d) obtenues pour l'expérimentation (3).

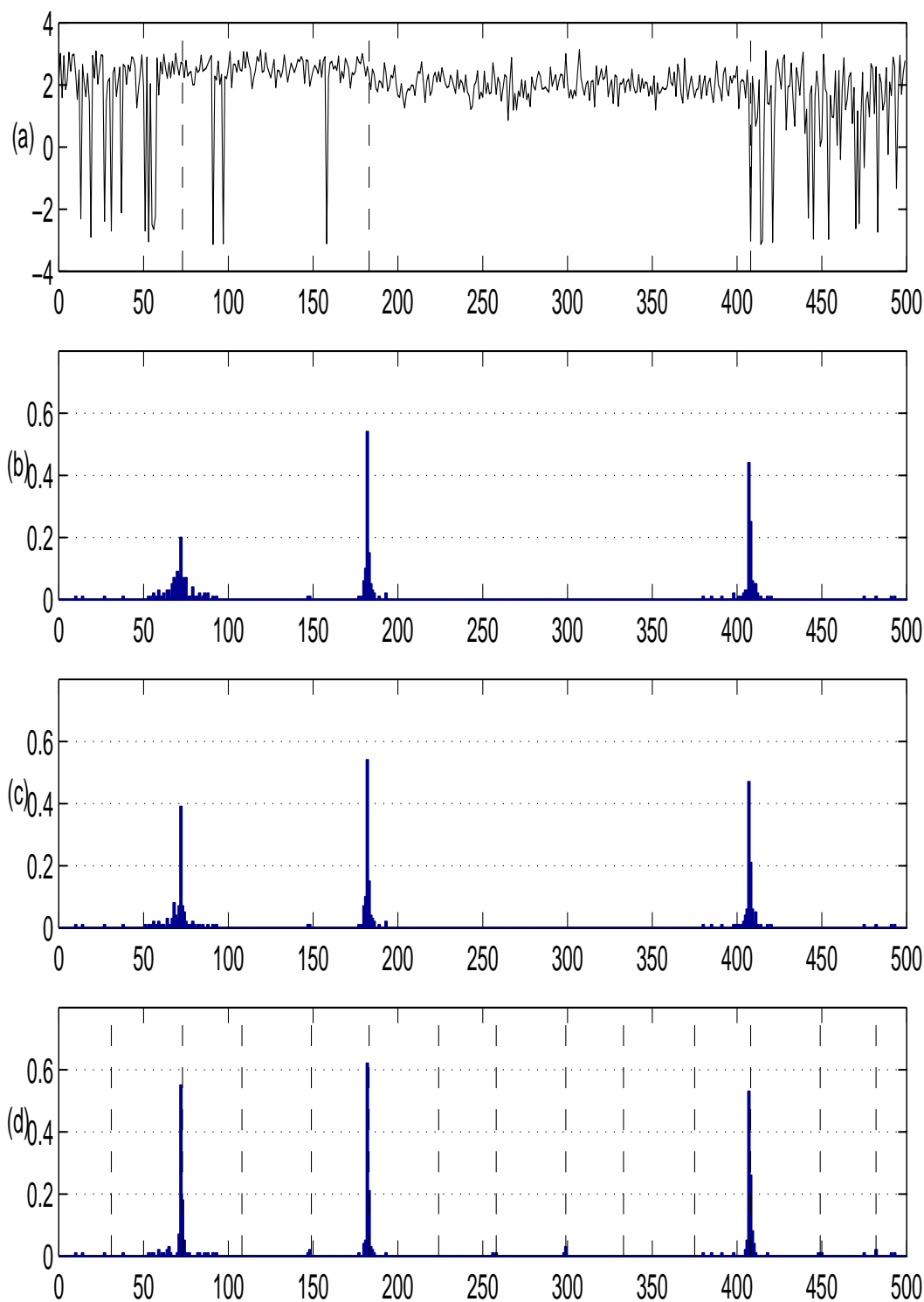


FIGURE 2.14: Fig. (a) Signal observé $y^{(2)}$ (direction du vent) et les instants de ruptures. Fig. (b), (c), (d) distributions empiriques des ruptures détectées $r^{(2)}$; Fig.(b) obtenues pour l'expérimentation (1), Fig.(c) obtenues pour l'expérimentation (2), Fig.(d) obtenues pour l'expérimentation (3).

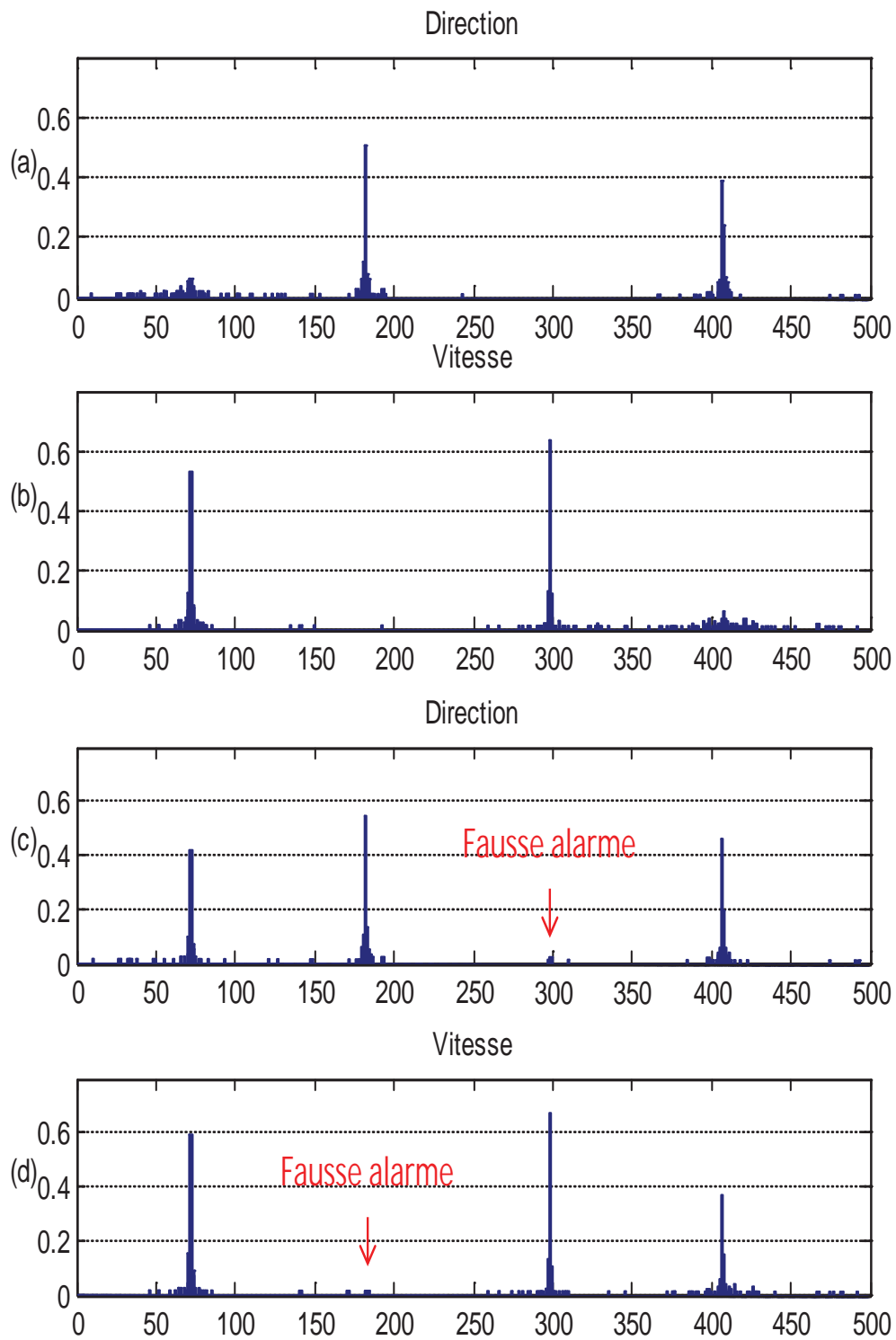


FIGURE 2.15: Distributions empiriques des ruptures détectées r obtenues pour l'expérimentation (4) ; Fig.(a) segmentation indépendante de la direction, Fig.(b) segmentation indépendante de la vitesse, Fig.(c) segmentation conjointe (logarithmic opinion pool) de la direction, Fig.(d) segmentation conjointe (logarithmic opinion pool) de la vitesse.

méthode du multiplicateur de Lagrange pour déterminer les seuils optimaux locaux.

Chen et Willet [CW05] ont étudié la transmission de l'information dans les nouveaux systèmes de communication sans fil. Dans ces systèmes, les décisions transmises au centre de fusion sont considérées dépendantes. Les auteurs établissent dans ce cadre le test de rapport de vraisemblance optimal au niveau des décisions locales pour des hypothèses binaires. Ils proposent pour cela un critère pour l'optimisation simultanée des détecteurs locaux et de l'opérateur de fusion. Ils établissent alors un algorithme permettant d'obtenir la convergence vers un minimum local symétrique (seuils identiques) ou non (dépendant des conditions initiales) du critère. D'autres critères d'optimisation pour les systèmes centralisés et distribués, utilisant la quantité d'information transmise plutôt que l'information elle-même, ont été développés. Il s'agit de critères entropiques notamment étudiés dans [Des98].

Notre contribution dans ce domaine a porté sur la proposition d'un système distribué pour l'estimation des ruptures. Ce travail a été réalisé dans le cadre de la thèse de Monsieur Stanislas Boutoille [Bou07]. Lorsque les ruptures sont présentes sur plusieurs signaux la simultanéité de leurs instants, liée à la synchronisation entre capteurs, est une contrainte difficile à tenir en pratique. Dans ce contexte, nous avons proposé un système de fusion hybride qui combine les décisions fournies par un détecteur de ruptures centralisé et par un détecteur de ruptures distribué. Le système proposé permet d'exploiter au mieux les performances de ces deux modalités lorsque les ruptures peuvent être simultanées ou non simultanées [BRB04, BRB05, BRB10].

Estimation de ruptures par fusion distribuée

Un système de fusion centralisée est plus performant lorsqu'il peut faire l'hypothèse de simultanéité des ruptures. Si cette hypothèse n'est pas respectée, ses performances se dégradent. Lorsque les ruptures sur les différents signaux ne sont pas supposées *a priori* synchrones, le système de détection doit estimer leurs positions. Dans ce cas, la fusion distribuée est la plus performante pour des instants de ruptures non synchronisés. Le problème qui se pose alors est de pouvoir choisir l'une ou l'autre des décisions prises par ces deux approches lorsque les ruptures ne sont pas obligatoirement synchrones. Nous proposons de combiner leurs décisions dans un centre de fusion distribuée. Le système hybride proposé (à la fois centralisé et distribué), permet alors d'obtenir des performances pour la segmentation qui sont au moins aussi bonnes que les performances obtenues par le meilleur des systèmes de fusion, en présence de ruptures simultanées et non-simultanées.

Estimateurs MAP centralisés et distribués

Soit $\underline{t} = (t^{(j)}, 1 \leq j \leq J)$ l'ensemble des instants des ruptures associés aux signaux en provenance des J capteurs. Soit le paramètre m_1 du signal après la rupture associé à l'hypothèse H_1 de présence d'une rupture. Soit le paramètre m_0 du signal associé à l'hypothèses H_0 d'absence de rupture. La valeur de m_0 est supposée connue. On note le rapport de vraisemblance du signal $y^{(j)}$ entre $t^{(j)} + 1$ et n :

$$g^{(j)}(m_1, t^{(j)}) = \frac{h^{(j)}(y_{t^{(j)}+1:n}^{(j)}; m_1)}{h^{(j)}(y_{t^{(j)}+1:n}^{(j)}; m_0)} \quad (2.90)$$

Le paramètre m_1 après la rupture, est inconnu.

Dans le cas de l'estimateur de rupture distribué, les paramètres dépendent du signal $\underline{y}^{(j)}$. Ils sont estimés par une double maximisation sur $m_1^{(j)}$ et $t^{(j)}$. On a alors :

$$\hat{m}_1^{(j)}(t^{(j)}) = \underbrace{\text{Argmax}}_{m_1^{(j)}} \left(g^{(j)}(m_1^{(j)}, t^{(j)}) \right) \quad (2.91)$$

$$\hat{t}^{(j)} = \underbrace{\text{Argmax}}_{t^{(j)}} \left(g^{(j)}(\hat{m}_1^{(j)}(t^{(j)}), t^{(j)}) \right) \quad (2.92)$$

Le critère MAP de décision est alors donné par :

$$\prod_{j=1}^J g^{(j)} \left(\hat{m}_1^{(j)}(\hat{t}^{(j)}), \hat{t}^{(j)} \right) \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \prod_{j=1}^J \frac{P(\hat{t}^{(j)}/H_0) P(H_0)}{P(\hat{t}^{(j)}/H_1) P(H_1)} = \lambda_2 \quad (2.93)$$

Dans le cas de l'estimateur de rupture centralisé, m_1 et t sont estimés à partir de l'ensemble des signaux fusionnés. On a alors :

$$\hat{m}_1(t) = \underbrace{\text{Argmax}}_{m_1} \left(\prod_{j=1}^J g^{(j)}(m_1, t) \right) \quad (2.94)$$

$$\hat{t} = \underbrace{\text{Argmax}}_t \left(\prod_{j=1}^J g^{(j)}(\hat{m}_1(t), t) \right) \quad (2.95)$$

Le critère MAP de décision est calculé à partir de ces paramètres et des signaux \underline{y} . Il est donné par :

$$\prod_{j=1}^J g^{(j)}(\hat{m}_1(\hat{t}), \hat{t}) \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \left(\frac{P(\hat{t}/H_0) P(H_0)}{P(\hat{t}/H_1) P(H_1)} \right)^J = \lambda_1 \quad (2.96)$$

$\hat{m}_1(\hat{t})$ et \hat{t} sont respectivement les estimations de m_1 et t sur les échantillons des J signaux pris entre t et n .

Critère de fusion distribuée hybride

Pour déterminer les seuils permettant d'obtenir la probabilité de détection la plus grande pour une probabilité de fausse alarme fixée ($Pf = \alpha$), nous recherchons la règle de décision qui maximise le Lagrangien L au sens du critère de Neyman-Pearson, défini par [BRB10] :

$$L = \lambda\alpha + \sum_u P(u_0 = 1/u) [P(u/H_1) - \lambda P(u/H_0)]. \quad (2.97)$$

où $u^{(k)} \in \{1, 0\}$ est la décision prise par le système k . Avec $u = \{u^{(1)}, u^{(2)}\}$ et u_0 les décisions prises respectivement par le système de décision centralisée et le système de fusion distribuée et par le système de fusion globale. On montre que le critère de décision de chaque système k , qui maximise L , est donné par :

$$\frac{P(\{\underline{y}^{(1)}, \underline{y}^{(2)}, \dots, \underline{y}^{(J)}\} / H_1, \underline{t}^{(k)})}{P(\{\underline{y}^{(1)}, \underline{y}^{(2)}, \dots, \underline{y}^{(J)}\} / H_0, \underline{t}^{(k)})} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \lambda \frac{C_0^k \cdot P(\underline{t}^{(k)} / H_0)}{C_1^k \cdot P(\underline{t}^{(k)} / H_1)}, \quad k \in \{1, 2\} \quad (2.98)$$

La définition des seuils dépendra de la règle de fusion hybride utilisée. Par exemple pour la règle de fusion ET, le seuil du système $k = 1$ de détection de ruptures synchronisées est donné par :

$$\lambda_1 = \lambda \frac{C_0^1}{C_1^1} = \lambda \frac{P(u^{(2)} = 1 / H_0, u^{(1)} = 1)}{P(u^{(2)} = 1 / H_1, u^{(1)} = 1)} = \lambda \frac{P_{f_{ns}}^s}{P_{D_{ns}}^s} \quad (2.99)$$

Et pour $k = 2$, on a le seuil du système non synchronisé :

$$\lambda_2 = \lambda \frac{C_0^2}{C_1^2} = \lambda \frac{P(u^{(1)} = 1 / H_0)}{P(u^{(1)} = 1 / H_1)} = \lambda \frac{P_{f_s}}{P_{D_s}} \quad (2.100)$$

Avec P_{D_s} et P_{f_s} la probabilité de détection et de fausse alarme du système synchronisé. $P_{D_{ns}}^s$ et $P_{f_{ns}}^s$ sont respectivement les probabilités de détection et de fausse alarme du système désynchronisé lorsque le système synchronisé a détecté l'hypothèse H_1 . En pratique ces probabilités sont obtenues pour différentes valeurs de seuil λ_1 . On déduit ensuite la valeur des seuils et la règle de fusion à utiliser pour obtenir la probabilité de fausse alarme souhaitée du système global.

Expérimentation

La méthode proposée a été évaluée sur signaux synthétiques en termes de probabilité de détection et d'erreur sur la localisation des ruptures. L'erreur de localisation est l'erreur quadratique moyenne entre la position estimée et la position réelle. On présente sur la Figure 2.16.(a) la probabilité de détecter les ruptures en fonction du décalage de leurs positions sur les deux signaux. Cette probabilité est obtenue pour un seuil fixé avec une probabilité de fausse alarme de 0.1. Sur la Figure 2.16.(b) la probabilité de fausse alarme est de 0.3. On reporte dans le Tableau 2.3 l'erreur de localisation obtenue pour des ruptures synchronisées et des ruptures désynchronisées avec un décalage relatif de 10 échantillons. Ces résultats nous ont permis de montrer que la fusion hybride "OU" est le meilleur compromis en termes de détection et localisation des ruptures pour les décalages étudiés dans cette expérimentation.

Ce travail a été appliqué à la poursuite du signal GPS. Les signaux GNSS modernes sont transmis sur plusieurs porteuses. Le récepteur synchronise les différentes porteuses, puis poursuit simultanément l'évolution du code sur les porteuses. Le signal GPS étant numérisé, on montre que l'évolution du discriminant est stationnaire par morceaux. Dans ce contexte, les ruptures du discriminant sont observées sur chaque porteuse. Cependant, les signaux GNSS ont

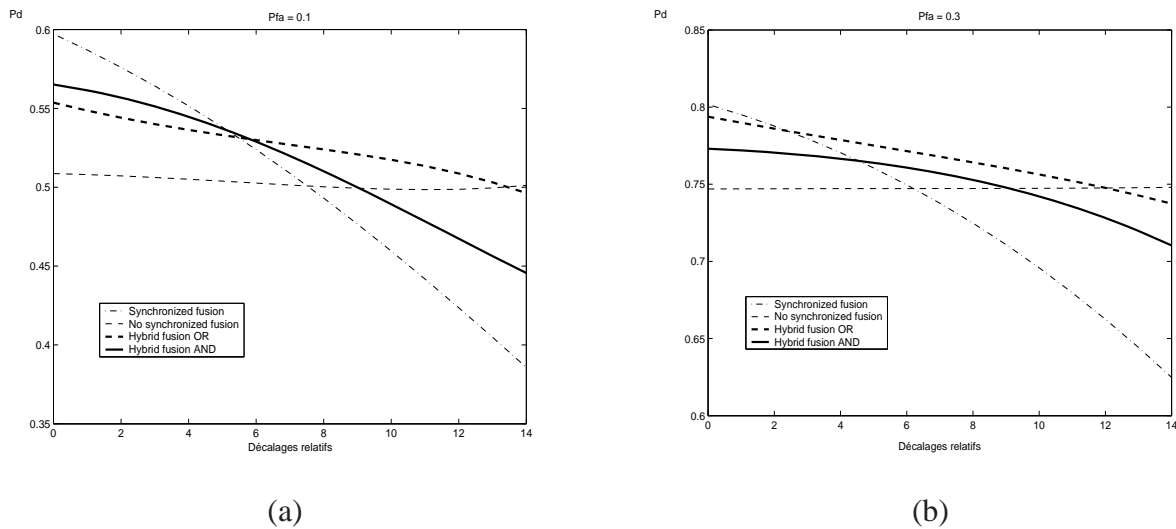


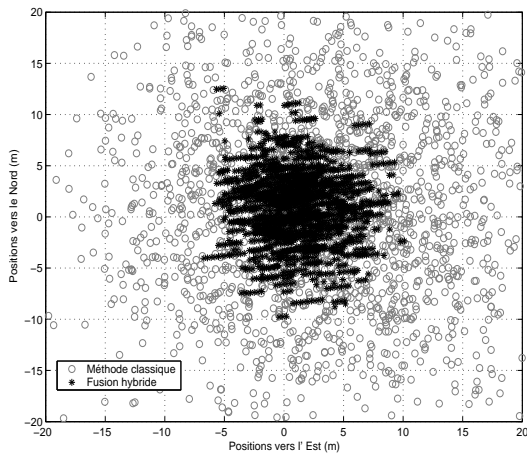
FIGURE 2.16: Probabilité de détection pour différents décalages entre ruptures et différentes probabilités de fausse alarme

Erreur \ Fusion	centralisée	distribuée	hybride "ET"	hybride "OU"
Cas synchronisé	6.5	7.92	6.15	6.14
Cas non synchronisé	8.3	7.92	6.83	6.87

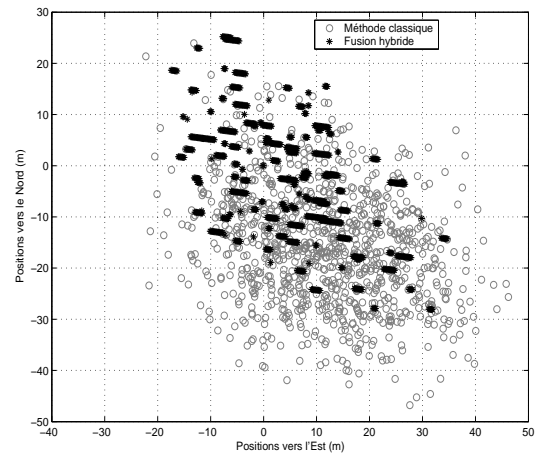
TABLE 2.3: Erreurs de localisation des ruptures pour différentes méthodes de fusion.

un parcours différent dans la ionosphère suivant leur fréquence. Dans ce cas la synchronisation des ruptures sur les différents discriminants ne peut pas être garantie. Nous avons appliqué l'estimateur de ruptures hybride proposé à la poursuite du signal GPS multi-porteuses. On reporte sur la Figure 2.17.(a) la position, calculée dans le cas statique, obtenue en fusionnant par la méthode proposée la poursuite du code sur les fréquences $L1$ et $L2$. Pour cette simulation les gains en précision obtenus pour une puissance de 45 dBHz et 51 dBHz sont doubles. Dans l'expérimentation sur données réelles, la méthode est évaluée pour la poursuite de deux signaux GPS en bande $L1$ acquis avec deux cartes d'acquisition différentes. Dans ce cas le bruit sur l'oscillateur local des cartes provoque une désynchronisation des signaux. On reporte sur la Figure 2.17.(b) la position calculée dans le cas statique. Le gain obtenu grâce à notre méthode est de 150 % pour cette expérimentation.

On reporte sur la Figure 2.18 une photo du système utilisé pour l'acquisition des signaux réels. Le dispositif expérimental utilisé est composé de deux cartes d'acquisition du signal GPS, indépendantes (c.f. Figure 2.18.(a)). Le signal en sortie d'antenne est redistribué, via un répartiteur, vers les entrées des deux cartes d'acquisition, c.f. Figure 2.18.(b). On dispose alors de deux mesures simultanées du signal GPS. Ces mesures qui sont réalisées pour la même fréquence $L1$ n'introduisent pas de décalage ionosphérique entre les porteuses. Un récepteur GPS supplémentaire (c.f. Figure 2.18.(a)) est utilisé pour récupérer le message de navigation envoyé par les satellites. C'est à partir des informations extraites de ce message que les positions des satellites sont calculées et les horloges des satellites recalées par rapport au temps GPS.

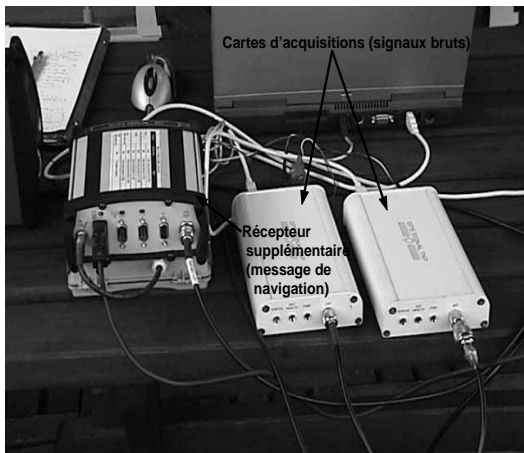


(a)

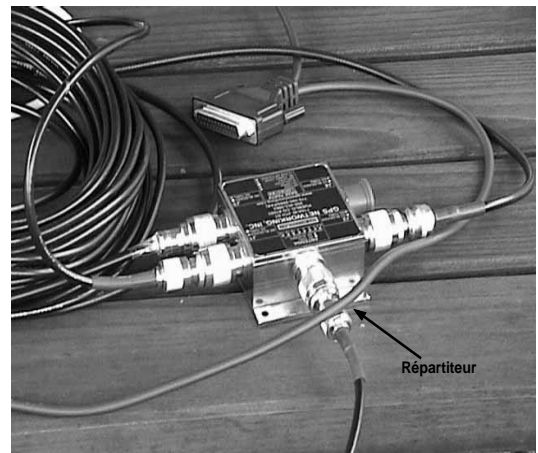


(b)

FIGURE 2.17: Positions statiques calculées dans le cas synthétique Fig.(a) et réel Fig.(b)



(a)



(b)

FIGURE 2.18: Système d'acquisition du signal GPS

Chapitre 3

Conclusion et perspectives

3.1 En résumé

Mes activités de recherche ont donc principalement porté sur la définition de systèmes d'estimation détection conjointe par fusion d'informations. Ces systèmes ont été développés dans un cadre Bayésien et utilisés pour la segmentation de signaux. Les techniques mises en œuvre ont été appliquées à l'estimation des paramètres statistiques du vecteur vent et à l'estimation des paramètres des signaux GNSS modernes.

Les perspectives de ce travail s'inscrivent dans la continuité de mes travaux antérieurs et dans la définition d'un nouveau projet. Mon objectif est de m'appuyer sur le savoir-faire développé dans les domaines du traitement des signaux GNSS et du géo-positionnement. Je souhaite donc développer mes travaux de recherche dans le domaine de la fusion d'informations. Dans ce contexte, deux axes applicatifs, tels que la réflectométrie des signaux GNSS et le géo-positionnement sous-marin, seront privilégiés :

- Les systèmes de navigation par satellites sont en pleine évolution et constituent un cadre applicatif, qui dans les années à venir va susciter un intérêt grandissant des financeurs. Il s'agit bien d'un cadre applicatif car le nombre d'applications existantes est déjà important et la potentialité en termes d'innovation augmente avec la modernisation des systèmes GNSS. Dans ce contexte, nous avons initié une activité de recherche portant sur la perception de l'environnement d'un récepteur GNSS grâce à l'utilisation d'un système radar bi-statique de signaux GNSS. Cette problématique applicative nous a permis d'identifier un certain nombre de pistes théoriques à développer dans le domaine de la fusion d'informations.
- Nos travaux de recherche en ingénierie océanographique portent sur la géolocalisation précise des fonds marins. Les systèmes GNSS permettent aujourd'hui d'estimer en statique et en dynamique la position d'un mobile terrestre avec une précision centimétrique. En mer, les signaux GNSS ne pénètrent pas dans l'eau et seuls les récepteurs se trouvant en surface peuvent être localisés. Pour remédier à ce problème, on couple un système de positionnement multi-capteurs se trouvant en surface sur un bateau, avec un système acoustique se trouvant dans l'eau. Le problème revient alors à localiser un transpondeur positionné sur le point à géo-localiser. L'objectif est ici d'obtenir une précision centimé-

trique pour les faibles profondeurs et les forts courants rencontrés dans la Manche mer du Nord.

Pour faire vivre ces projets, je participe à la définition d'un nouvel axe de recherche de l'ULCO. Cet axe qui s'est créé autour du projet de territoire "GIS (Groupement d'intérêt scientifique) Campus International de la Mer" a pour objectif d'inscrire dans les priorités de la région et de l'état (Projet CPER) la recherche dans le domaine des activités marines sur le Littoral Côte d'Opale. Je participe (avec le laboratoire LOG et l'IFREMER) à la création d'une action dans ce projet sur le thème de l'ingénierie marine. Le but est de développer un système de balises pour le positionnement sous-marin et d'acquérir un drone pour mettre en oeuvre un instrument aéroporté d'observation par réflectométrie GNSS.

Je vais présenter dans la suite les nouvelles applications que nous allons étudier, puis je décrirai les nouvelles problématiques auxquelles nous serons confrontés et les voies d'investigations en recherche que nous allons développer.

3.2 Réflectométrie des signaux GNSS

On représente sur la Figure 3.1.(a) le principe d'un système radar bi-statique utilisant les signaux GNSS et sur les Figures 3.1.(b), 3.1.(c) des systèmes que nous avons réalisés. Dans cette approche on compare le signal GNSS en provenance directe du satellite avec le signal réfléchi par le sol. Le but est alors de dériver les propriétés de la surface de réflexion à partir de leurs comparaisons. Le système est dit bi-statique car l'antenne d'émission et l'antenne de réception ne sont pas situées au même endroit. On distingue typiquement deux approches ; la réflectométrie spatiale lorsque l'antenne de réception est embarquée sur un satellite, et la réflectométrie terrestre quand l'antenne est proche du sol. C'est dans cette dernière approche que se situent nos perspectives.

Les techniques radars bi-statiques, utilisant le signal GPS ont été évaluées pour différentes applications. Par exemple Martin Neira a appliqué le système à l'altimétrie des océans [MN93]. Dans les travaux de Garrisson et al, c'est la vitesse du vent qui est mesurée à partir du signal réfléchi [GKZK02]. Enfin, de nombreux travaux décrits dans You et al [YGHS06], Germain et al [GRS⁺04] et Elfouhaily et al [ETL02] ont porté sur l'étude de modèles de réflexion et sur leurs influences sur la déformation du signal GPS réfléchi pour caractériser la surface des océans. C'est dans les travaux de Masters et al [MAK02] que l'on trouve la première étude de cette technique pour la caractérisation géotechnique des sols. Dans cette expérimentation, le RSB (Rapport Signal à Bruit) du signal en incidence directe provenant des satellites est comparé au RSB du signal réfléchi par le sol.

Pour cette application nous avons montré que la puissance du signal réfléchi peut être très faible [ARCB10c]. Pour pouvoir calculer cette puissance, il faut extraire le code du signal GNSS, estimer sa pulsation et son déphasage [QRG⁺08]. Un récepteur classique de réflectométrie numérise simultanément le signal direct et le signal réfléchi obtenus sur deux antennes

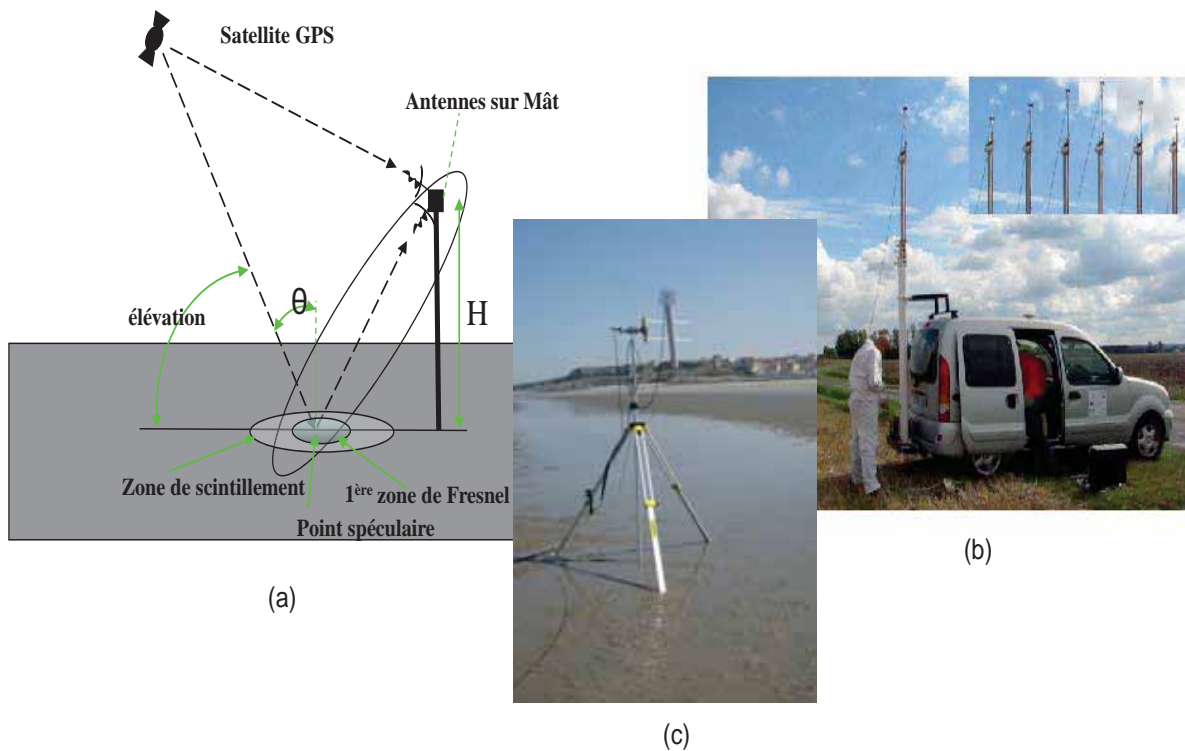


FIGURE 3.1: Système radar bi-statique terrestre

différentes. Pour des signaux à faible rapport signal sur bruit, on peut extraire le code si on a une bonne connaissance de la géométrie du système et de la fréquence Doppler du signal. En effet, en utilisant le signal direct, on peut prédire les décalages de code du signal réfléchi et la fréquence Doppler. Les deux applications de la réflectométrie que nous étudions sont l'estimation du taux d'humidité du sol par mesure de la puissance du signal réfléchi [ARCB10c] et l'altimétrie qui consiste à mesurer la différence de hauteur entre l'antenne et la surface de réflexion [SRCB12]. Pour ces deux applications la problématique de recherche est l'estimation de la phase car les décalages de code et le Doppler du signal sont connus grâce au signal direct. En effet la puissance du signal décroît avec le taux d'humidité du sol, et pour les puissances faibles les mesures de phases sont fortement bruitées. Dans le cas de l'altimétrie c'est la perte de cohérence de la phase liée à la rugosité de la surface de réflexion qui bruit fortement les mesures de phase. L'évolution de la phase est liée à la dérive de l'oscillateur local et aux accélérations relatives satellite-récepteur, cependant lorsque la phase est fortement bruitée des sauts de cycle apparaissent dans son évolution. Un des enjeux en recherche dans ce domaine est d'améliorer la sensibilité des méthodes d'estimations par la proposition de nouveaux estimateurs de la phase. Nos travaux dans ce domaine porteront sur la mise en oeuvre d'estimateurs hors ligne des paramètres d'un modèle d'évolution de la phase et des sauts de cycle. Dans ce contexte, on souhaite fusionner les observations de phases de la voie pilote et de la voie données des signaux GNSS modernes (notamment le signal L2C).

Il existe peu de travaux sur l'utilisation des signaux réfléchis par l'environnement pour l'aide

à la navigation. En effet, dans ce domaine, la majorité des travaux de recherche portent sur la détection et l'élimination des multi-trajets. Pourtant dans le cas des canyons urbains, les multi-trajets sont présents et peuvent fournir une information sur l'environnement du récepteur. La mise à contribution des signaux GNSS réfléchis pour la perception de l'environnement d'un récepteur est la deuxième voie d'investigation que nous souhaitons développer en recherche. Une étude est réalisée dans le cadre de la thèse en co-tutelle de Monsieur Abderrahim Bourkane. On peut montrer que l'évolution de l'amplitude du signal GNSS reçu dépend de la différence de trajet entre le signal direct et le signal réfléchi perçus par l'antenne [RBR⁺13]. On souhaite donc à partir de plusieurs antennes obtenir la direction d'arrivée du signal et estimer la différence de trajets entre signaux à partir de l'évolution du SNR. Ces paramètres sont utilisés pour caractériser l'environnement du récepteur. Dans ce contexte, plusieurs problèmes de recherche doivent être résolus pour extraire cette information. Parmi ces problèmes, on peut citer d'une part la définition d'une relation entre l'amplitude du signal GNSS et la valeur de la corrélation mesurée par le récepteur. Cette relation étant fortement non linéaire son inversion dans le cas dynamique est un problème de recherche [BRA⁺12]. D'autre part, le nombre de signaux combinés par l'antenne à la réception pour un même satellite pouvant être important, la définition du lien existant entre l'évolution du SNR et l'environnement de réception est un problème de recherche. Ce problème est d'autant plus compliqué que les paramètres d'évolution du SNR doivent être estimés rapidement dans le cas d'un système mobile.

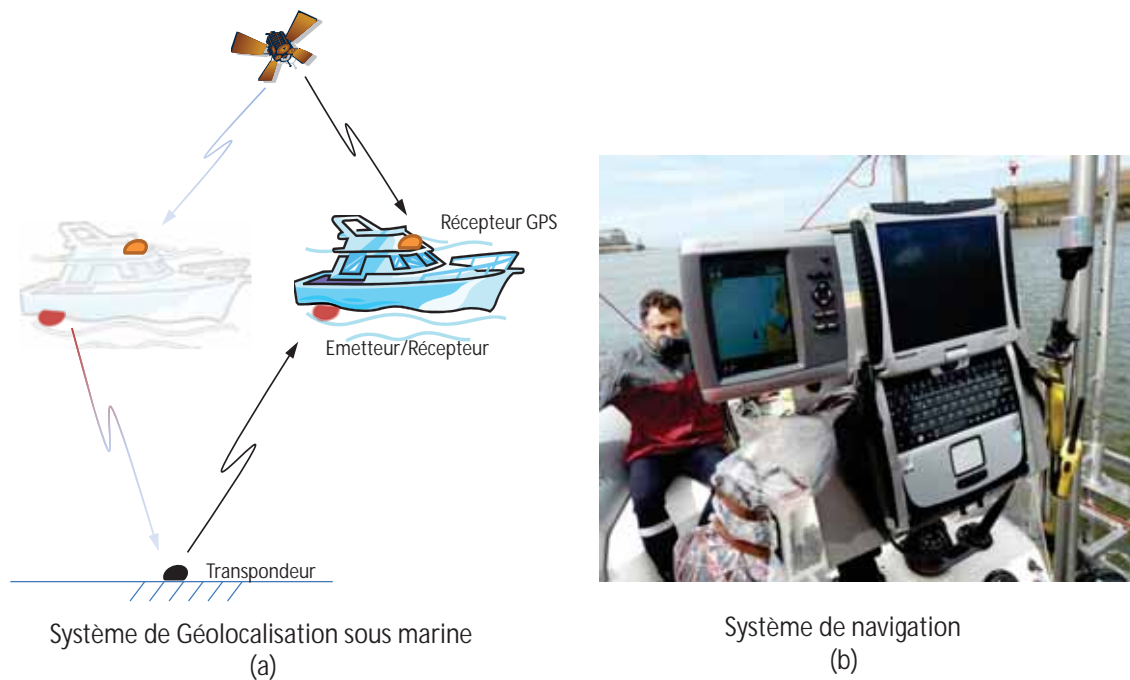


FIGURE 3.2: Système de géo-positionnement sous-marin

3.3 Géo-localisation sous marine

On représente sur la Figure 3.2.(a) le principe d'un système de géo-positionnement sous-marin. On représente sur la Figure 3.1.(b) un système de navigation que nous avons réalisé. La localisation en milieu sous-marin se distingue principalement de la localisation GNSS par deux aspects. A l'air libre c'est le récepteur GNSS qui est localisé à partir des signaux en provenance de la constellation de satellites. En milieu marin c'est le transpondeur qui est localisé à partir des signaux en provenance du bateau. Dans un système de géo-positionnement sous-marin, la position de la balise est calculée dans le bateau tandis que, à la surface de la terre, le récepteur GNSS calcule sa position.

Le principe de la localisation s'appuie comme dans le cas du système GNSS sur quatre pseudo-distances. Ces quatre pseudo-distances sont estimées à partir du temps de trajet aller retour entre l'émetteur/récepteur situé sur le bateau et la balise transpondeur. Elles sont ensuite utilisées avec les positions du bateau dans un calcul de triangulation pour définir la position 3D du transpondeur. L'utilisation de cette technique de localisation, qui permet d'obtenir une précision centimétrique, est envisagée aujourd'hui dans beaucoup d'applications, comme la géolocalisation du matériel de pêche ou l'observation et la surveillance de la morphodynamique des fonds marins.

Pour cette nouvelle activité de recherche, nous avons choisi de développer notre propre système de positionnement. Dans cette première étape d'ingénierie nous avons choisi de tester le système à l'air libre. L'objectif est ici d'évaluer les performances intrinsèques du système en absence d'erreurs liées à la propagation du signal dans l'eau. La première problématique de recherche que l'on souhaite aborder dans ce cas est l'étude et la mise en œuvre de techniques d'estimation de la trajectoire de l'émetteur/récepteur pour obtenir une précision centimétrique.

On peut distinguer plusieurs spécificités du milieu marin étudié (Manche-mer du Nord) comme la faible profondeur et la présence de courants importants. Ces deux aspects seront étudiés dans une deuxième étape de mise en œuvre du système de géolocalisation dans le milieu marin. Il s'agit notamment d'intégrer dans la modélisation du système, la déformation de la trajectoire du signal dans l'eau liée à la présence des courants. Il s'agit aussi de définir la trajectoire du bateau qui offre la meilleure configuration géométrique pour que l'inversion du système d'équations non linéaires qui conduit au calcul de position soit bien posée.

Bibliographie

- [Aka73] H. Akaike. Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. Dans Akademia Kiado, Éditeur, *Proceedings 2nd International Symposium on Information Theory*, pages 267–281, Budapest, 1973. P.N. Petrov and F. Csaki.
- [ARB13] M. Azmani, S. Reboul, et M. Benjelloun. Non-Linear Fusion of Observations Provided by Two Sensors. *Entropy*, 15(7) :2698–2715, 2013.
- [ARCB09] M. Azmani, S. Reboul, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. A Recursive Fusion Filter for Angular Data. Dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2009.
- [ARCB10a] M. Azmani, S. Reboul, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. Etude et mise en oeuvre d’un estimateur récursif des paramètres statistiques d’une distribution circulaire de von Mises et d’une distribution Log-normale. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 44(4) :525–545, 2010.
- [ARCB10b] M. Azmani, S. Reboul, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. Information fusion applied to the tracking of GPS pilot and data channels. Dans *Proceedings of the International Conference on Information Fusion*, 2010.
- [ARCB10c] M. Azmani, S. Reboul, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. Soil Moisture Estimation using Land-reflected GPS L2C Bi-static Radar Measurements. Dans *Proceedings of the 23rd International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation*, 2010.
- [Azm10] M. Azmani. *Fusion non-linéaire appliquée aux voies pilote et données du signal GPS L2C*. PhD thesis, Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Littoral Côte d’Opale, Calais, France, 2010.
- [BBM99] A. Barron, L. Birgé, et P. Massart. Risk Bounds for Model Selection Via Penalization. *Probab. theory Related Fields*, 113(3) :301–413, 1999.
- [BDW94] B. Barshan et H.G. Durrant-Whyte. Evaluation of a Solid-State Gyroscope for Robotics Applications. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 44(1) :61–67, 1994.
- [Ben92] J. A. Benediktsson. Consensus Theoretic Classification Methods. *IEEE Transactions On Systems, Man., and Cybernetics*, 22(4) :688–704, 1992.
- [Ber00] P. Bertrand. A Local Method for Estimating Change Points : The Hat Function. *Statistics*, 34 :215–235, 2000.

- [Blo03] I. Bloch. *Information Fusion in Signal and Image Processing*. John Wiley and Sons, 2003.
- [BM01] L. Birge et P. Massart. *A Generalized Cp Criterion for Gaussian Model Selection*. Preprint Université de Paris-Sud, 2001.
- [BN93] M. Basseville et N. Nikiforov. *Detection of Abrupt Changes. Theory and Application*. NJ Prentice Hall, 1993.
- [Bou07] S. Boutoille. *Systèmes de fusion pour la segmentation hors-ligne de signaux GPS multi-porteuses*. PhD thesis, Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Littoral Côte d’Opale, Calais, France, 2007.
- [BRA⁺12] A. Bourkane, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, B. Amami, et M. Benjelloun. C/N0 Inversion For Soil Moisture Estimation Using Land-reflected Bi-static Radar Measurements. Dans *Proceedings IEEE/GNSS+R 2012*, pages 1–5, Purdue, October 2012.
- [BRB04] S. Boutoille, S. Reboul, et M. Benjelloun. Fusion of detections in a multi-carrier GPS receiver. Dans *Proceedings of the International Conference on Information Fusion*, 2004.
- [BRB05] S. Boutoille, S. Reboul, et M. Benjelloun. Multi-band GPS signal tracking in a high dynamic manoeuvring situation. Dans *Proceedings of IFAC International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2005.
- [BRB06] S. Boutoille, S. Reboul, et M. Benjelloun. Off-line segmentation of GPS signal tracking using a bayesian approach. Dans *Proceedings of IEEE Industrial Electronics Society*, 2006.
- [BRB07] S. Boutoille, S. Reboul, et M. Benjelloun. Bayesian off-line segmentation applied to multi-carrier GPS signal fusion. Dans *Proceedings of the International Conference on Information Fusion*, 2007.
- [BRB10] S. Boutoille, S. Reboul, et M. Benjelloun. A hybrid fusion system applied to off-line detection and change-points estimation. *Information Fusion*, 11(4) :325–337, 2010.
- [BS88] Y. Bar-Shalom. *Tracking and data association*. Academic Press Professional, Inc., 1988.
- [BS97] J. A. Benediktsson et J. R. Sveinsson. Hybrid Consensus Theoric Classification. *IEEE Transactions On Geoscience and Remote sensing*, 35(4) :833–843, 1997.
- [BS09] S. Bhattacharya et A. SenGupta. Bayesian inference for circular distributions with unknown normalizing constants. *J. Statist.Plann.Inference*, 139 :4179–4192, 2009.
- [BSC86] Y. Bar-Shalom et L. Campo. The effect of the common process noise on the two-sensor fused-track covariance. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 22(11) :803–805, 1986.
- [BW69] T.R. Bement et J.S. Williams. Variance of weighted regression estimators when sampling errors are independent and heteroscedastic. *Journal of the American Statistical Association*, 64 :1369–1382, 1969.

- [CC53] W.G. Cochran et S.P. Carroll. A sampling investigation of the efficiency of weighing inversely as the estimated variance. *Biometrics*, 9 :447–459, 1953.
- [Cho79] C. Y. Chong. Hierarchical Estimation. Dans *Proceedings of MIT/ONR Workshop on C3*, 1979.
- [CKBS03] H. Chen, T. Kirubarajan, et Y. Bar-Shalom. Performance Limits of Track-To-Track Fusion VS. Centralized Estimation : Theory and Application. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39(2) :386–400, 2003.
- [Coc37] W.G. Cochran. Problem arising in the analysis of a series of similar experiments. *Journal of the Royal Statistical Society*, 4(1) :102–118, 1937.
- [CTC00] M. Chabert, J.Y. Tourneret, et F. Castanié. Time -Scale Analysis of Abrupt Changes Corrupted by Multiplicative Noise. *Signal Processing*, 80 :397–411, 2000.
- [CV86] Z. Chair et P.K. Varshney. Optimal Data Fusion in Multiple Sensor Detections Systems. *IEEE Transactions On Aerospace and Elect. Syst.*, 22(1) :98–101, 1986.
- [CW05] B. Chen et P. K. Willett. On the optimality of the likelihood-ratio test for local sensor decision rules in the presence of nonideal channels. *IEEE Transactions On Information Theory*, 51(2) :653–699, 2005.
- [Das94] B. V. Dasarathy. *Decision Fusion*. IEEE Computer Society Press, 1994.
- [Des98] C. Desrousseaux. *Utilisation d'un critère entropique dans les systèmes de détection*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1998.
- [Dju94] P.M. Djuric. A MAP solution to off-line segmentatin of signals. Dans *Proceedings of the IEEE ICASSP-94*, volume 4, pages 505–508, 1994.
- [DP79] J. Deshayes et D. Picard. Tests de Ruptures Dans un Modèle. *Compte-Rendus de l'Académie des sciences*, 288(Ser .A) :563–566, 1979.
- [DP86] J. Deshayes et D. Picard. Off-Line Statistical Analysis of Change-Point Models Using Non Parametric and Likelihood Methods. Dans *Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems (M. Basseville, A. Benveniste, Eds.)*, pages 103–168. Lecture Notes in control and information Sciences, LNCIS 77, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [DT07] N. Dobigeon et J.-Y. Tourneret. Joint segmentation of wind speed and direction using a hierarchical model. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(12) :5603–5621, 2007.
- [DTD07] N. Dobigeon, J.-Y. Tourneret, et M. Davy. Joint Segmentation of Piecewise Constant Autoregressive Processes by Using a Hierarchical Model and a Bayesian Sampling Approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(4) :1251–1263, 2007.
- [DTS07] N. Dobigeon, J.-Y. Tourneret, et J. D. Scargle. Joint Segmentation of Multivariate Astronomical Time Series : Bayesian Sampling With a Hierarchical Model. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(2) :414–423, 2007.
- [ETL02] T. Elfouhaily, D.R. Thompson, et L. Linstrom. Delay-doppler analysis of bistatically reflected signals from the ocean surface : Theory and application. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens*, 40 :560–573, 2002.

- [Fis87] N.I. Fisher. Problems with the Current Definition of the Standard Deviation of Wind Direction. *Journal of Climat and Applied Meteorology*, 26 :1522–1529, 1987.
- [GG84] S. Geman et D. Geman. Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, (6) :721–741, 1984.
- [GH02] J.B. Gao et C.J. Harris. Some Remarks on Kalman Filters for the Multisensor Fusion. *Information Fusion*, 3(3) :191–201, 2002.
- [GHK99] I. Gijbels, P. Hall, et A. Kneip. On the Estimation of Jump Points in Smooth Curves. *The Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 51 :231–251, 1999.
- [GJ07] R. Gatto et S. R. Jammalamadaka. The generalized von Mises distribution. *Statistical Methodology*, 4 :341–353, 2007.
- [GJV99] K. Ghosh, S.R. Jammalamadaka, et M. Vasudaven. Change-Point Problems for the Von Mises Distribution. *Journal of Applied Statistics*, 26(4) :423–434, 1999.
- [GKZK02] J.L. Garrison, A. Komjathy, V.U. Zavorotny, et S. Katzberg. Wind Speed Measurement Using Forward Scattered GPS Signals. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens*, 40 :50–65, 2002.
- [GRS⁺04] O. Germain, G. Ruffini, F. Soulat, M. Caparrini, B. Chapron, et P. Silvestrin. The Eddy experiment : GNSS-R speculometry for directional sea-roughness retrieval from low altitude aircraft. *Geophys. Res. Lett.*, 31 :21307–21307, 2004.
- [Gus01] F. Gustafsson. *Adaptive Filtering and Change Detection*. John Wiley and Sons, 2001.
- [Hin70] D.V. Hinkley. Inference About the Change Point in a Sequence of Random Variables. *Biometrika*, 57(1) :1–17, 1970.
- [Hin71] D.V. Hinkley. Inference in Two-Phase Regression. *Jal American Statistical Association*, 66(336) :736–743, 1971.
- [HM04] D. L. Hall et S. A. H. McMullen. *Mathematical Techniques in Multisensor Data Fusion*. Artech House Information Warfare Library, 2004.
- [JP83] J. Deshayes et D. Picard. *Ruptures de Modèles En Statistique*. PhD thesis, Thèses d’Etat, Université de Paris-Sud, Orsay, France, 1983.
- [Kac06] J. Kacemi. *Fusion d’informations dans un système de positionnement hybride GPS multi-porteuses/estime*. PhD thesis, Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Littoral Côte d’Opale, Calais, France, 2006.
- [KL04] E. Kuhn et M. Lavielle. Coupling a stochastic approximation version of EM with an MCMC procedure. *ESAIM Proba. Statist.*, 8 :115–131, 2004.
- [KRB04a] J. Kacemi, S. Reboul, et M. Benjelloun. Information Fusion in a Multi-Frequencies GPS Receiver. Dans *Proceedings of IEEE PLANS 2004*, 2004.
- [KRB04b] J. Kacemi, S. Reboul, et M. Benjelloun. Information Fusion in an Hybrid GPS Multi-Frequencies / Dead-Reckoning Navigation System. Dans *Proceedings of IFAC / EURON Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*, 2004.

-
- [KRB06] J. Kacemi, S. Reboul, et M. Benjelloun. Information fusion in a hybrid tightly coupled GPS/ Dead-reckoning positioning system. Dans *Proceedings of IEEE Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*, 2006.
- [KT83] K. Kligiene et L. Telksnys. Methods of Detecting Instants of Change of Random Process Properties. *Automation and Remote Control*, 44(10) :1241–1283, 1983.
- [Lav98] M. Lavielle. Optimal Segmentation of Random Processes. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 46(5) :1365–1373, 1998.
- [LL01] M. Lavielle et E. Lebarbier. An Application of MCMC Methods for Multiple Change-Points Problem. *Signal Processing*, 81 :39–53, 2001.
- [LM00] M. Lavielle et E. Moulines. Least Squares Estimation of an Unknown Number of Shifts in a Time Series. *J. Time Ser. Anal.*, 21(1) :33–59, 2000.
- [MAK02] D. Masters, P. Axelrad, et S. Katzberg. Initial results of land-reflected GPS bistatic radar measurements in SMEX02. *Remote Sens. of Env.*, 92 :507–520, 2002.
- [Mal73] C.L. Mallows. Some Comments on Cp. *Technometrics*, 15 :661–675, 1973.
- [Mit07] H. B. Mitchell. *Multi-Sensor Data Fusion*. Springer, 2007.
- [MJ99] K.V. Mardia et P.E. Jupp. *Directional Statistics*. Wiley Series In Probability and Statistics. John Wiley and Sons, 1999.
- [MN93] M. Martin-Neira. A Passive Reflectometry and Interferometry System (PARIS) : Application to ocean altimetry. *ESA J.*, 17 :331–355, 1993.
- [MT98] A.D.R. McQuarrie et C.L. Tsai. *Regression and Time Series Model Selection*. World Scientific, Singapore, 1998.
- [NS48] J. Neyman et E. Scott. Consistent estimators based on partially consistent observations. *Econometrica*, 16 :1–32, 1948.
- [PADF02] E. Punsakaya, C. Andrieu, A. Doucet, et W.J. Fitzgerald. Bayesian Curve Fitting Using MCMC with Applications to Signal Segmentation. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 50(3) :747–758, 2002.
- [Pag57] E.S. Page. Estimating the Point of Change in a Continuouou Process. *Biometrika*, 44 :248–252, 1957.
- [Pic85] D. Picard. Testing and Estimating Change Points in Time Series. *J. Applied Prob.*, 17 :841–867, 1985.
- [QM02] H. Qi et J.B. Moore. Direct Kalman filtering approach for GPS/INS integration. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 38(2) :687–693, 2002.
- [QRG⁺08] L. Qi, S. Reboul, A. Gardel, S. Boutoille, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. Beach soil moisture measurement with a land reflected GPS bistatic radar technique. Dans *Proceedings of the IEEE Oceanic Engineering Society Workshop PASSIVE'08*, 2008.
- [Rad62] R. Radner. Team Decision Problems. *Annals of Mathematical Statistics*, 33 :857–881, 1962.
- [RAG04] B. Ristic, S. Arulampalam, et N. Gordon. *Beyond the kalman filter : Particle filter for tracking applications (IPF)*. Artech House Publishers, 2004.

- [Rao80] J.N.K. Rao. Estimating the common mean of possibly different normal populations : a simulation study. *Journal of the American Statistical Association*, 75 :447–453, 1980.
- [RB01] S. Reboul et M. Benjelloun. Segmentation de Données Directionnelles. Dans *Proceedings GRETSI2001*, Toulouse, Septembre 2001.
- [RB04] S. Reboul et M. Benjelloun. Joint Segmentation of a Set of Piecewise Stationary Processes. Dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Computational Cybernetics*, 2004.
- [RB05] S. Reboul et M. Benjelloun. A Bayesian fusion approach to change-points analysis of processes. Dans *Proceedings of the International Conference on Information Fusion*, 2005.
- [RB06] S. Reboul et M. Benjelloun. Joint Segmentation of the Wind Speed and Direction. *Signal Processing*, 86 :744–759, 2006.
- [RBB00] S. Reboul, D. Brige, et M. Benjelloun. Optimal Segmentation by Random Process Fusion. Dans *Proceedings Proceedings of the International Conference on Information Fusion*, Paris, July 2000.
- [RBR⁺13] S. Reboul, C. Botteron, M.A. Ribot, G. Stienne, J. Leclere, J.B. Choquel, et P.A. Farine M. benjelloun. Normalized GNSS Interference Pattern Technique. Dans *Proceedings Proceedings of the IEEE IGARSS URSI Commission F Microwave Signatures 2013*, pages 28–31, Helsinki, October 2013.
- [Ris83] J. Rissanen. A Universal Prior for Integers and Estimation by Minimum Description Length. *Annals of statistics*, 11 :416–431, 1983.
- [RN87] A.R. Reibman et L.W. Nolte. Optimal Detection and Performance of Distributed Sensor Systems. *IEEE Transactions On Aerospace and Elect. Syst.*, 23 :24–30, 1987.
- [Rob01] C.P. Robert. *The Bayesian Choice*. Springer texts in statistics, 2001.
- [Sch78] G. Schwarz. Estimating the Dimension of a Model. *Ann. Statist.*, 6 :461–464, 1978.
- [SLC06] V. Shin, Y. Lee, , et T.S. Choi. Generalized Millman’s formula and its application for estimation problems. *Signal Processing*, 86(2) :257–266, 2006.
- [SRA⁺11] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. Bayesian Change-Points Estimation Applied to GPS Signal Tracking. *ISRN Signal Processing*, 2011.
- [SRA⁺13] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. GNSS dataless signal tracking with a delay semi-open loop and a phase open loop. *Signal Processing*, 93(5) :1192–1209, 2013.
- [SRA⁺14] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. A multi-temporal multi-sensor circular fusion filter. *Information Fusion*, 18(0) :86–100, 2014.
- [SRCB12] G. Stienne, S. Reboul, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. GNSS code and phase processing techniques in a ground-based mobile altimetry system. Dans *Proceedings of the IEEE/GNSS+R 2012*, pages 1–5, October 2012.

-
- [SRCB14] G. Stienne, S. Reboul, J.B. Choquel, et M. Benjelloun. Cycle Slip Detection and Repair with a Circular On-Line Change-Point Detector. *Signal Processing*, 100(0) :51 – 63, 2014.
- [SSW01] W. Shi, T.W. Sun, et R.D. Wesel. Quasiconvexity and optimal binary fusion for distributed detection with identical sensors in generalized Gaussian noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47 :446–450, 2001.
- [Sti13] G. Stienne. *Traitement des signaux circulaires appliqués à l’altimétrie par la phase des signaux GNSS*. PhD thesis, Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Littoral Côte d’Opale, Calais, France, 2013.
- [Sto61] M. Stone. The opinion pool. *Ann. Stat.*, 32 :1339–1342, 1961.
- [TDL03] J.Y. Tournet, M. Doisy, et M. Lavielle. Bayesian off-line detection of multiple change-points corrupted by multiplicative noise : application to SAR image edge detection. *Signal Processing*, 83 :1871–1887, 2003.
- [TJ81] R.R. Tenney et N.R. Sandell Jr. Detection with Distributed Sensors. *IEEE Transactions On Aerospace and Elect. Syst.*, 17 :98–101, 1981.
- [Tou98] J.Y. Tournet. Detection and Estimation of Abrupt Changes Contaminated by Multiplicative Gaussian Noise. *Signal Processing*, 68 :259–270, 1998.
- [Tsi86] J. N. Tsitsiklis. On threshold rules in decentralized detection. Dans *Proceedings of the 25th International Conference on Decision and Control*, pages 232–236, Athens, Greece, 1986.
- [TVB89] S.C.A Thomopoulos, R. Viswanathan, et D.K. Bougoulas. Optimal Distributed Decision Fusion. *IEEE Transactions On Aerospace and Elect. Syst.*, 25 :761–765, 1989.
- [TW06] M. Tsao et C. Wu. Empirical likelihood inference for a common mean in the presence of heteroscedasticity. *The Canadian Journal of Statistics*, 34(1) :45–59, 2006.
- [Var97] P. K. Varshney. *Distributed Detection and Data Fusion*. Springer, 1997.
- [Yao88] Y.C. Yao. Estimating the Number of Change-Points Via Schwarz Criterion. *Stat. Probab. Lett.*, 6 :181–189, 1988.
- [YGHS06] H. You, J.L. Garrison, G. Heckler, et D. Smajlovic. The Autocorrelation of Waveforms Generated From Ocean-Scattered GPS Signals. *IEEE Geosci. and Remote Sens. Letters*, 3 :78–82, 2006.
- [Zie06] N. I. Ziedan. *GNSS Receiver for Weak Signals*. Artech house, 2006.
- [ZVW02] Q. Zhang, P. K. Varshney, et R. D. Wesel. Optimal bi-level quantization of i.i.d sensor observations of binary hypothesis testing. *IEEE Transactions On Information Theory*, 48(7) :2105–2111, 2002.

Annexe A

Publications sélectionnées

A.1 Cycle Slip Detection and Repair with a Circular On-Line Change-Point Detector - Stienne *et al.* (2014)

Cet article a été publié dans le revue Signal Processing 100, pp. 51-63, 2014.



Cycle slip detection and repair with a circular on-line change-point detector



G. Stienne*, S. Reboul, J.B. Choquel, M. Benjelloun

Laboratoire d'Informatique, Signal et Image de la Côte d'Opale (LISIC), Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille, France; Université du Littoral Côte d'Opale (ULCO), 50, rue Ferdinand Buisson, BP 699, 62228 CALAIS cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 25 April 2013

Received in revised form

1 January 2014

Accepted 3 January 2014

Available online 16 January 2014

Keywords:

GNSS signal processing

Angular estimation

Cycle slip

Phase positioning

ABSTRACT

In this article, we propose a circular change-point detector for on-line processing of the phase and the frequency of a GPS-L1 signal. The aims of this processing are to get an accurate estimation of the phase and to use it to get centimeter precise position estimates every millisecond. We propose to track the phase of the GPS signal in an open loop and the frequency in a semi-open loop. In an open loop, the phase delay evolves as a circular random variable. Furthermore, the phase is subject to cycle slips. These abrupt changes must be detected and repaired. We propose a circular generalized likelihood test for the on-line detection of changes in the phase measurements. With the estimation and detection being non-linear, we propose a particle filter defined according to the circular von Mises distribution for the estimation of the phase and frequency. The proposed architecture is assessed using synthetic and real data.

© 2014 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

GNSS signal processing lies on the estimation of three parameters: the signal code delay, the phase and the frequency of the signal. The estimation of these parameters allows the GNSS receiver to reconstruct the signal emitted by the satellite [1]. Phase measurements are the main observables in both RTK (real-time kinematic) and PPP (precise point positioning) applications. Under kinematic conditions the GNSS data are usually recorded at high rate (20 Hz or higher) and are subject to cycle slips. In addition to RTK and PPP applications, the use of real-time high rate GNSS data is also a goal for scientific research that needs precise positioning of dynamic systems [2]. The best GNSS positioning is obtained using the phase data estimated during the receiver processing. This is due to the continuity of the phase, while the code delays are piecewise stationary [3]. Since the parameters can be

estimated every millisecond (the code chip period of the GPS L1 signal), it is theoretically possible to get a sub-centimetric positioning accuracy with a rate of 1000 Hz [4]. Using code delays, it is only possible to get precisions of about several meters at the same rate [5].

A precise estimation of phase data is thus needed for accurate high rate positioning applications. Generally, the phase estimation in a GPS receiver is obtained using a phase lock loop (PLL). This loop corrects the phase replicated by the receiver at each iteration of the process in order to keep the phase delay between the received and the replicated signal close to zero. The frequency is updated after some iterations employing a frequency lock loop (FLL) [1]. Using recursive filters for phase and frequency in such close architectures implies time correlation problems [5]. In order to avoid these problems, we track the phase observations in an open loop (POL). The frequency is tracked in a semi-open loop. It is indeed necessary to close the frequency tracking loop when the difference between the frequencies of the received signal and the receiver replica exceeds a threshold. We show that when this frequency delay exceeds this threshold, the

* Corresponding author.

E-mail address: stienne@lisic.univ-littoral.fr (G. Stienne).

frequency of the received signal is no more observable with the phase measurements.

There are a relatively small number of research papers about cycle slip detection and repair using single GPS receiver data [6]. This undifferenced observations approach uses the phase and pseudo-range measurements obtained on several carrier frequencies in order to detect the cycle slips. In this case, two kinds of observations are constructed: the difference between carrier phase measurements obtained on the two carrier frequencies (it is assumed that the probability to have a simultaneous cycle slip on both carriers is very low) and the difference between the pseudo-range code and the carrier phase obtained on the same frequency [7]. These observations define a piecewise stationary process with abrupt changes at the cycle slip instants. In practice, this signal is weakly stationary due to ionospheric perturbations and several approaches were proposed to address the detection and repair of cycle slips in this case [8,2]. In order to have more accurate measurements and high rate data, we propose to detect the cycle slips in the phase tracking process. Indeed, in an open loop, the cycle slip appears as an abrupt change in the estimated values of phase. Furthermore, at a high rate, less ionospheric perturbation related cycle slips occur.

In an open loop, the phase is an angular data evolving in radians modulo 2π . It imposes to define dedicated circular processing tools that can take the periodicity of the definition interval (e.g. $[-\pi; \pi]$ in our case) into account [9]. The circular normal distribution defined in the circular domain includes the data periodicity. This distribution, also known as the von Mises distribution [10,11], is equivalent to the Gaussian distribution in the linear domain. We can find in the published works multiple uses of the von Mises distribution to model angular data. For example, in [12–14], the circular distribution was used to model sensor measurements. In [15,16], the von Mises distribution was used to model angular information in Markov decision processes. Circular filters developed in a Bayesian framework have been proposed in several works. In the scalar case, a Bayesian tracking procedure with a mixture of von Mises distribution was proposed in [17]. In the vector case, a multi-temporal and multi-sensor recursive filter was proposed in [9]. To our knowledge, the only work about on-line circular change point detector was described in [18] for the scalar case.

The statistical property of the GNSS carrier phase observations has been validated as a von Mises distribution [19,5]. Consequently, we propose to develop a filter in a Bayesian framework with circular statistics distributions for the phase data processing. In this article, we propose a circular particle filter and a change point circular detector defined in a Bayesian context with von Mises distributions. The aim of this article is to propose a solution to cycle slip occurrences in the scope of [5]. Two main reasons motivated our choice for a particle filter. The first reason is that a particle filter provides an estimate that takes the correlation between the phase and frequency state into account, instead of the classical circular Bayesian filter [5,9]. Indeed, in this case, the improvement of the angular velocity estimation is important because this estimate is used as input in the change point detector and to estimate

the satellite–receiver pseudo-range. The second reason is that the change magnitude estimate of the proposed circular GLR change point estimator is circular and non-linear.

We assess the proposed filter and the proposed tracking architecture on synthetic and real data. We show that the proposed circular filter employed in a phase open loop for phase estimation every millisecond is more accurate and more robust than a Kalman filter employed in a phase lock loop. We show that the proposed circular GLR change point estimator, applied to the phase observations provided by the open loop, is more accurate than a classical Kalman GLR change point estimator, applied to the phase observations provided in cycles by a PLL. We show that the proposed filter is better in terms of change detection and magnitude estimation, especially in case of a low carrier-to-noise ratio (C/N_0). Finally, we show the feasibility of the proposed open architecture that employs our circular filter to process a real L1 signal. We derive the expression of the pseudo-ranges with the estimated phase and frequency. In our approach, the pseudo-ranging is relative to the first pseudo-range obtained with the code observables. The positioning is obtained using a classical least-squares based triangulation. We show in the experimentation that the proposed technique provides more accurate relative position estimations as compared to a classical phase and frequency lock loop.

The paper is organized as follows. After the introduction, we present the circular particle filter in the second section. We provide there a presentation of the von Mises distribution, a modeling of the problem and the circular filter itself. The circular change point detector is described in the third section. The fourth section is dedicated to the description of the Phase Open Loop and Frequency Semi-Open Loop architectures. The experimentation and the methods comparison are conducted in section five. The last section is the conclusion.

2. Phase estimation

2.1. Statistical inference

In this work, the measurements of phase are described by a random variable ϕ_k distributed according to a von Mises distribution. Let k be the sampling instant. The von Mises distribution, also named circular normal (\mathcal{M}) distribution, describes a circular directional random phenomenon with one preferred orientation [20]. This distribution can be considered as a circular version of the normal distribution [11]. The von Mises distribution is symmetric, uni-modal on one period and its density is given by the following expression:

$$f_M(\phi_k; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\phi_k - \mu)} \quad (1)$$

$$\phi_k \sim \mathcal{M}(\mu, \kappa) \quad (2)$$

where ϕ_k defines the random angle, μ the mean direction and κ the concentration parameter. I_0 is the modified Bessel function of the first kind and order 0. $I_0(\kappa)$ can be considered as a normalizing constant [11]

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos \theta} d\theta = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\kappa}{2}^{2r} \left(\frac{1}{r!}\right)^2 \quad (3)$$

In order to estimate the phase in an open loop, we chose to develop a circular particle filter. The filter is of order 2. Indeed, we dispose in our case of observations of the angle from which the value of the angle and the angular velocity (proportional to the frequency) are estimated. Due to cycle slips, the observations of phase are assumed to be piecewise stationary.

Let us consider the following time series in each stationary piece for $k \in \{t_i\}$:

$$\phi_k = (m_i + v_i dt(k - t_{i-1}) + \varepsilon_k) \bmod 2\pi \quad t_{i-1} + 1 \leq k \leq t_i \quad (4)$$

- t_i is the i th instant of change.
- m_i is the initial phase value at t_{i-1} .
- v_i is the angular velocity in the interval $[t_{i-1}, t_i]$ and dt the sampling period.
- ε_k is a centered random noise distributed according to a von Mises distribution.

We define $\nu_i = m_{i+1} - m_i$ as the change magnitude at t_i in the piecewise stationary process.

Let us consider the following state equation of the parameters to estimate in the stationary pieces:

$$\theta_k = F\theta_{k-1} + V_{k-1} \quad (5)$$

where $\theta_k = [\theta_k, \dot{\theta}_k]$ is the state vector that we want to estimate at each instant k . The estimation of $\dot{\theta}_k$ permits to increase the robustness of the filter when facing rapid angular variations. F is the transition matrix, given by

$$F = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\theta_k = \theta_{k-1} + dt, \quad \dot{\theta}_{k-1} + v_{k-1}^{[1]} \quad (6)$$

$$\dot{\theta}_k = \dot{\theta}_{k-1} + v_{k-1}^{[2]} \quad (7)$$

The noise vector $V_{k-1} = [v_{k-1}^{[1]}, v_{k-1}^{[2]}]^T$ represents the error of the state model. $v_{k-1}^{[1]}$ and $v_{k-1}^{[2]}$ are respectively the state model noise on θ_k and on $\dot{\theta}_k$. $v_{k-1}^{[1]}$ follows a 0-centered von Mises distribution of concentration parameter κ_Q and $v_{k-1}^{[2]}$ follows a 0-centered normal distribution of variance ν_Q .

In our application, we only have measurements ϕ_k on the angle θ_k , meaning no measurement of the angular velocity $\dot{\theta}_k$ is available. The measurement equation is thus given by

$$\phi_k = \theta_{k-1} + w_k \quad (8)$$

w_k is the noise on angle measurement, which is 0-centered with respect to a von Mises distribution with concentration parameter κ_R .

Let us consider a working window of size M for the change point estimator. The working window is defined between instants k and $k-M+1$. We show in Fig. 1 the change magnitude ν_i and the change instant t_i that have to be estimated by the circular change point detector.

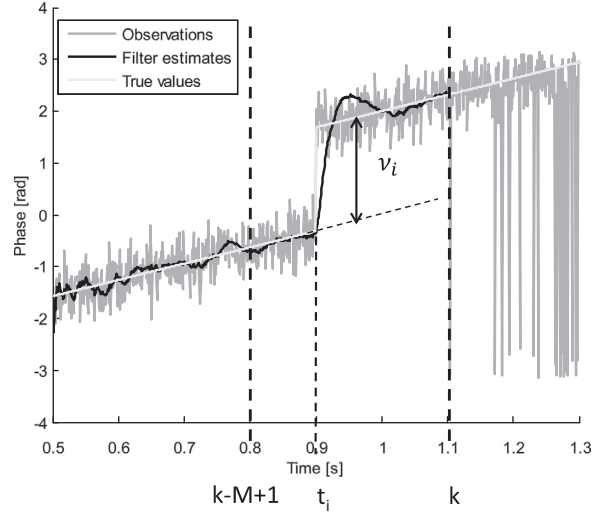


Fig. 1. Change instant and change magnitude in phase observations.

The estimation is performed in the working window. When a change is detected, the cycle slip is repaired.

In practice, the angular velocity is supposed to be constant in the working window. An estimate of the velocity and of the phase at instant $k-M+1$, $\hat{\theta}_{k-M+1} = [\hat{\theta}_{k-M+1}, \hat{\dot{\theta}}_{k-M+1}]^T$ is provided by the particle filter to the circular change point estimator. When a change is detected, the estimates $\hat{\theta}_{k-M+1:k}$ are repaired as described in Section 3.

The notations used throughout the article are listed in Appendix B. In the next sections, we describe the particle filter that processes the data in the stationary pieces and the circular GLR change point estimator that detects and repairs the cycle slips.

2.2. Particle filter

In the case of angular data, several sequential recursive filters have been used, such as the extended Kalman filter [21], but none are optimal. Particle filtering is a powerful smoothing tool when the models in use are non-linear and when the distributions of the state and measurement noises are not Gaussian. There are three principal steps at each iteration of the process, namely the prediction, which consists in generating particles pseudo-randomly following the state equation; the update, which is a ponderation of the generated particles using measurements; and finally the resampling of the particles, which regularly allows the redistribution of the particles in order to avoid degeneration. Numerous resampling methods exist [22], each having its advantages and inconveniences.

In our application, the filtering algorithm is as follows:

1. Initialization: We draw N particles $x_0^i = \begin{pmatrix} \phi_0^i \\ \dot{\theta}_0^i \end{pmatrix}$, $i=1, \dots, N$. ϕ_0^i are drawn from the von Mises distribution of mean ϕ_0 and concentration parameter κ_0^R . $\dot{\theta}_0^i$ are drawn from the normal distribution of mean 0 and variance ν_0^R . The weights are initialized to $w_0^i = 1/N$.

2. Prediction step: The particles are propagated on the angular velocity via the following equation:

$$x_k^i = \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_{k-1}^i + \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_k^i \end{pmatrix} \quad (9)$$

where ν_k^i follows a normal distribution of mean 0 and variance ν_0^2 .

3. Update step: The weights are computed according to the angle measurements:

$$w_k^i = w_{k-1}^i f_M(\phi_k; \theta_k^i, 2\kappa_0^R) \quad (10)$$

with f_M being the von Mises density function defined by Eq. (1). The weights are then normalized.

4. Estimation: The angle and the angular velocity are estimated according to the formula

$$\hat{\theta}_k = \arg \left(\sum_{i=1}^N w_k^i e^{j\theta_k^i} \right) \quad (11)$$

$$\hat{\theta}_k = \sum_{i=1}^N w_k^i \theta_k^i \quad (12)$$

where j is the complex number square root of -1 . An observation ϕ_k can be associated with the values $\hat{\theta}_k$ or $\hat{\theta}_k + \pi$ of the parameter to estimate, implying an ambiguity of π on the parameter to estimate. This ambiguity appears more often for low values of the concentration parameter that models the measurement noise. To solve this ambiguity, we propose to use the circular distance [11] between the measurement and the predicted angle.

Let the circular distance d_c between two angles be

$$d_c(\theta_k, \phi_k) = 1 - \cos(\theta_k - \phi_k) \quad (13)$$

$$\text{If } d_c(\hat{\theta}_{k-1}, \phi_k) > d_c(\hat{\theta}_{k-1} + \pi, \phi_k) \quad (14)$$

$$\text{Then } \phi_k = \phi_k + \pi \quad (15)$$

5. Resampling: The chosen resampling is here the SIR (sequential importance resampling) [22] with an effective number of particles as follows:

$$N_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_k^i} \quad (16)$$

3. Circular GLR change point estimator

3.1. Hypothesis testing

The change detector processes the signal in the working window. Let us consider two hypotheses:

- H_1 : there is a change at instant r in the working window.
- H_0 : there is no change in the working window.

Let us assume unnoisy observations $\tilde{\phi}_l$. We show in Fig. 2 the estimated phase delay $\hat{\theta}_{0,l}$ of θ_l in the working window. l is the l th instant defined between $k-M+1$ and k .

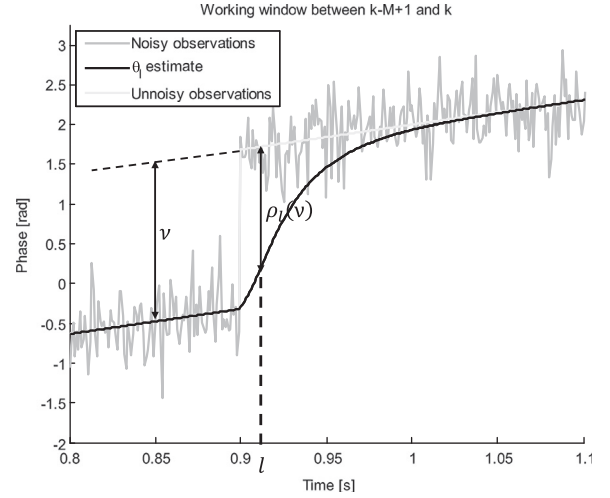


Fig. 2. Definition of $\rho_l(\nu)$ in the working window.

The estimate $\hat{\theta}_{0,l}$ is obtained with the following recursive filter defined in [5,9]. The filter is defined by a step of prediction and an update step.

Step of prediction:

$$\hat{\theta}_{0,l/l-1} = \hat{\theta}_{0,l-1} + \Delta\theta \quad (17)$$

$$P_{0,l/l-1} = A^{-1}(A(P_{0,l-1})A(Q)) \quad (18)$$

Update step:

$$\hat{\theta}_{0,l} = \arctan^* \left(\frac{D_l}{C_l} \right) \quad (19)$$

$$P_{0,l} = \sqrt{C_l^2 + D_l^2} \quad (20)$$

where

$$C_l = P_{0,l/l-1} \cos(\hat{\theta}_{0,l/l-1}) + R \cos(\phi_l) \quad (21)$$

$$D_l = P_{0,l/l-1} \sin(\hat{\theta}_{0,l/l-1}) + R \sin(\phi_l) \quad (22)$$

where $\Delta\theta$ is the angular variation ($\Delta\theta = \hat{\theta}_{k-M+1} dt$) and $\arctan^*(\cdot)$ is the “quadrant-specific” inverse of the tangent. Eqs. (21) and (22) express the circular weighted sum between the phase observation ϕ_l and the predicted state $\hat{\theta}_{0,l/l-1}$. The predicted state is given by Eq. (17) and the predicted concentration parameter by Eq. (18). The phase observations are provided by the POL. The estimated state is given by Eq. (19) and the concentration parameter of the estimated state by Eq. (20).

We show in [9] that $\hat{\theta}_{0,l}$ is in the scalar case the MAP (Maximum A Posteriori) estimate of θ_l observed with ϕ_l . Q and R are parameters of the filter and $A(\dots) = I_1(\dots)/I_0(\dots)$ is the ratio between the two Bessel functions [9]. We show in Fig. 2 the function $\rho_l(\nu) = \tilde{\phi}_l - \hat{\theta}_{0,l}$ defined after the change instant r .

Let us assume a change at instant r , we show in Appendix A that for unnoisy observations and for $l \geq r$:

$$\hat{\theta}_{0,l} = \Psi_{l-r} + \hat{\theta}_{0,l-1} + \Delta\theta \quad (23)$$

with

$$\Psi_{l-r} = \arctan\left(\frac{R \sin(\nu - \sum_{i=0}^{l-r-1} \Psi_i)}{P_{0,l/l-1} + R \cos(\nu - \sum_{i=0}^{l-r-1} \Psi_i)}\right) \quad (24)$$

and

$$\Psi_0 = \arctan\left(\frac{R \sin(\nu)}{P_{0,r/r-1} + R \cos(\nu)}\right) \quad (25)$$

It follows that

$$\rho_l(\nu) = \tilde{\phi}_l - \hat{\theta}_{0,l} = \nu - \sum_{i=0}^{k-r} \Psi_i \quad (26)$$

3.2. Decision rule

Let us define the following innovation:

$$\varepsilon_l = \phi_l - \hat{\theta}_{0,l} \quad (27)$$

with

$$P_{\varepsilon,l} = A^{-1}(A(P_{0,l})A(R)) \quad (28)$$

ε_l is distributed according to a von Mises distribution with concentration parameter P_ε . If we assume a change at instant r , then $\varepsilon_{r:k}$ are noisy observations of $\rho_{r:k}(\nu)$. In this context, for a change of magnitude ν at instant r , we derive the two following hypotheses:

- Hypothesis H_1 : a change at r , then

$$\varepsilon_{r:k} \sim \mathcal{M}(\rho_{r:k}(\nu), P_\varepsilon) \quad (29)$$

- Hypothesis H_0 : no change at r , then

$$\varepsilon_{r:k} \sim \mathcal{M}(0, P_\varepsilon) \quad (30)$$

Then we can derive the following log likelihood of the MAP decision rule:

$$\ell(r, \nu) = \sum_{i=r}^k P_{\varepsilon,i} \cos(\varepsilon_i) - \sum_{i=r}^k P_{\varepsilon,i} \cos(\varepsilon_i - \rho_i(\nu)) \quad (31)$$

$$\begin{array}{l} H_0 \\ > 0 \\ H_1 \\ < 0 \end{array}$$

where the two hypotheses are supposed to be equiprobable. In practice, the values of ν and r are unknown and have to be estimated in the working window.

3.3. Estimation of the change instant and magnitude

The estimated instant of change \hat{r} is obtained with the following maximization:

$$\{\hat{r}\} = \underbrace{\arg\max}_{k-M+1 \leq r \leq k} \{\ell(r, \hat{\nu}_r)\} \quad (32)$$

where $\hat{\nu}_r$ is the estimate of ν computed with the observations $\varepsilon_{r:k}$. We adopt a Bayesian circular estimation approach in order to process this estimate. Let us define the following state equation for a constant value of ν :

$$\nu_l = \nu_{l-1} + \omega_l \quad (33)$$

Let us define the following measurement equation:

$$\varepsilon_l = \rho_l(\nu_{l-1}) + \omega_l \quad \text{for } r \leq l \leq k \quad (34)$$

where ω_l and ω_l are centered noises distributed according to von Mises distributions and $\rho_l(\dots)$ a nonlinear function defined with Eq. (26). The estimated value of $\hat{\nu}_l$ is obtained with the particle circular filter described in the preceding section.

Finally the decision is processed with the following test:

$$\begin{array}{l} H_0 \\ \sum_{i=\hat{r}}^k P_{\varepsilon,i} \cos(\varepsilon_i) - \sum_{i=\hat{r}}^k P_{\varepsilon,i} \cos(\varepsilon_i - \rho_i(\hat{\nu}_{\hat{r}})) > \lambda \\ H_1 \\ < \lambda \end{array} \quad (35)$$

3.4. Phase estimation with cycle slip repair

We define $\hat{\theta}_{c,k}$ the repaired phase (corrected phase) with the estimates $\hat{\theta}_k$ and $\hat{\theta}_{0,k}$. It follows two cases in the definition of this repair estimate:

- When a cycle slip is detected, we realize the following correction in the working window:

$$\hat{\theta}_{c,l} = \hat{\theta}_{0,l} + \rho_l(\hat{\nu}_{\hat{r}}) - \hat{\nu}_{\hat{r}} - \nu_l \quad \text{for } \hat{r} \leq l \leq k \quad (36)$$

$$\nu_{k+1} = \nu_k + \hat{\nu}_{\hat{r}} \quad (37)$$

- When no cycle slip is detected:

$$\hat{\theta}_{c,k} = \hat{\theta}_k - \nu_k \quad (38)$$

$$\nu_k = \nu_{k-1} \quad (39)$$

4. Phase positioning using open loops

The circular particle filter and the circular change point estimator described in this article are applied to the phase measurements of a GNSS signal, namely a GPS-L1 signal. The estimated phase and frequency are used to process precise pseudo-ranges. Finally, the positioning is obtained via a classical least-squares estimator [1].

4.1. Phase positioning principle

Since the receiver measures the phase difference between the sensed signal and a local replica of this signal, the phase variation provides an observation of the pseudo-range variation. The pseudo-range ρ_n at n th iteration is then defined by

$$\rho_n = \rho_0 + \sum_{k=1}^n \Delta\rho_k \quad (40)$$

with ρ_0 being the pseudo-range at first iteration, and $\Delta\rho_k = \rho_k - \rho_{k-1}$. We show next that the values of $\Delta\rho_k$ are obtained with centimeter accuracy from the phase and frequency estimates provided by the POL. The value of ρ_0 can be derived from the first code delay and from the

message of navigation with meter accuracy. ρ_0 can also be obtained with centimeter accuracy if the first position is estimated with a double difference resolution method [4].

The pseudo-range variations can be obtained considering the following formulas:

$$\Delta\rho_k = v_{k-1}T_c \quad (41)$$

$$v_{k-1} = -f_{d,k-1} \frac{C}{f_I} \quad (42)$$

where v_k is the relative satellite–receiver speed and $f_{d,k}$ is the frequency of the received signal at iteration k . These parameters evolve over time due to the Doppler effect. T_c is the code chip period, C is the speed of light and f_I is the intermediate frequency of the processed signal.

Indeed, the sensed GPS signal is down-converted (in order to be sampled) at this intermediate frequency by means of a down-converter driven by a local clock oscillator. A replica of the signal is then generated by the receiver in order to demodulate and decode the data message. The tracking loops estimate the code, phase and frequency delays between the sensed and the replicated signal. In our approach, we take the clock noise disturbances into account, so the phase and frequency delays are modeled as normal random walks [23]. We denote f_I the frequency of the local replicated signal (demodulating frequency) and f the residual frequency of the demodulated signal, defined as follows:

$$f_k = (f_{d,k} + W_{f_k}) - f_{l,k} \quad (43)$$

with W_f being the local oscillator noise. The frequency delay implies phase delay variations over time

$$\theta_k = \theta_{k-1} + 2\pi f_k T_c + W_{\theta_k} \quad (44)$$

with θ_k being the phase delay and W_{θ} the local oscillator noise on the phase delay. Finally, we get

$$\Delta\rho_k = -\left(f_{l,k-1} + f_{k-1} - W_{f_{k-1}}\right) \frac{CT_c}{f_I} \quad (45)$$

$$\Delta\rho_k = -\left(f_{l,k-1}T_c + \frac{\Delta\theta_{k-1}}{2\pi} - W_{f_{k-1}}T_c - \frac{W_{\theta_{k-1}}}{2\pi}\right) \frac{C}{f_I} \quad (46)$$

with $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$. With the local oscillator noises W_{f_k} and W_{θ_k} being common to all the observed satellite signals, they are parts of the offset removed by using a fourth satellite in the triangulation process [1], so the estimated pseudo-range variation is

$$\widehat{\Delta\rho}_k = -\left(f_{l,k-1}T_c + \frac{\Delta\hat{\theta}_{c,k-1}}{2\pi}\right) \frac{C}{f_I} \quad (47)$$

where $\Delta\hat{\theta}_{c,k-1}$ is the difference between two successive corrected phase delay estimates, defined in the interval $[-\pi; \pi]$. According to Eq. (44), when the frequency delay f_k between the sensed signal and the replica frequencies is too large, the phase delay variation jumps from π to $-\pi$ (or $-\pi$ to π). This happens when

$$|2\pi f T_c + W_{\theta}| > \pi \quad (48)$$

$$\Leftrightarrow |f| > \frac{1}{2T_c} - \left|\frac{W_{\theta}}{\pi}\right| \quad (49)$$

When this threshold is reached, the frequency of the replica signal is updated (and all the filter parameters reset) by

$$f_{l,k} = f_{l,k-1} + \hat{f}_{k-1} \quad (50)$$

with \hat{f}_{k-1} being the estimated frequency delay provided by the circular particle filter.

In practice, for classic positioning applications (static or kinematic cases), the update of the demodulating frequency has to be performed after a large number of tracking iterations. Indeed, in the case of an emitting satellite at low elevation and a receiver placed on an aircraft, the frequency update would occur after several seconds.

4.2. Proposed architecture

In the first stage, the frequency f_d , the code delay τ and the phase delay θ are initialized in the acquisition process. At the end of this first stage, the receiver tracks the variations of these parameters as a function of time in a

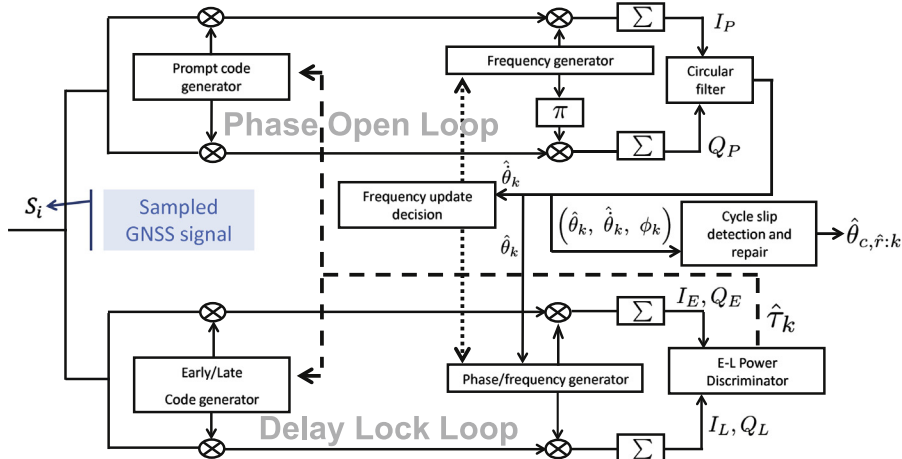


Fig. 3. Proposed tracking architecture.

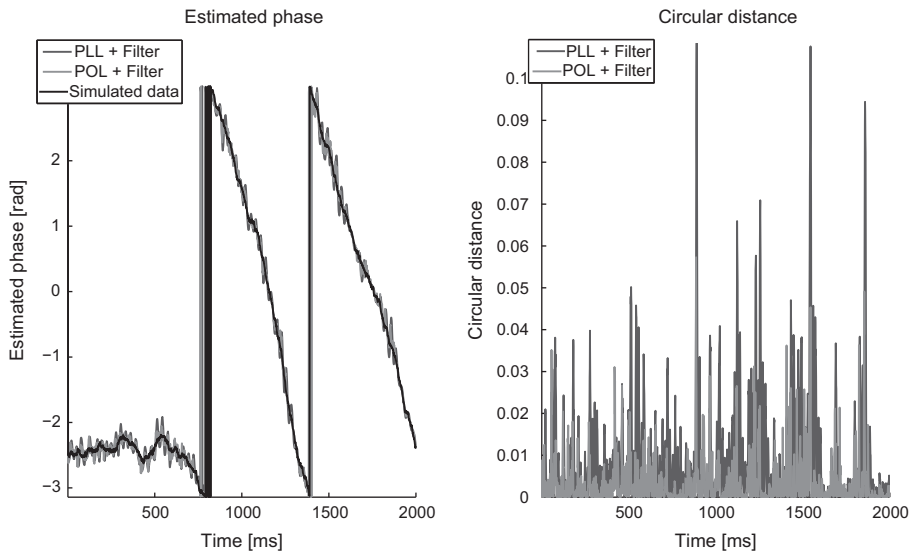


Fig. 4. Comparison between PLL and POL filter estimates.

tracking module. The frequency and phase indeed vary with the Doppler effect, and the code delay varies with the satellite–receiver pseudo-range evolution. In order to compute the navigation solution, the receiver multiplies the received signal with in-phase and quad-phase replica of the GPS signal. The proposed tracking architecture is presented in Fig. 3. Its aim is to track the code delay in a delay lock loop (DLL, in the bottom of the figure) and the phase and frequency delays in a phase open loop (POL, in the top of the figure).

Generally, the phase delay of GNSS signals is tracked in a phase lock loop (PLL), aided by a frequency lock loop (FLL), that estimates the phase delay variations at each period of the CDMA code, or after an integration over some code chip periods [1]. In such a lock tracking architecture, the loop filter for the phase estimation employs the previous phase delay estimate as a part of its measurement data at time k , inducing a temporal correlation between two successive estimates. Furthermore, for low signal-to-noise ratios, the integration of the phase delay provokes cycle slips when the estimated phase delay is higher than $\pi/2$.

In order to avoid these problems, we propose to use a phase open loop that provides observations of the phase delay for each code chip period. The phase delay measurements ϕ are smoothed by the circular filter described in Section 2.2. The filter also provides an estimate of the frequency delay. These estimates, as well as the phase measurements, are used as input for the cycle slip estimator. The code delay is tracked in a classic DLL architecture [1] using a non-coherent discriminator, namely the Early-minus-Late. In the case of short signal losses, it is possible in the open loop architecture to keep a good estimation of the phase and frequency by predicting them with the circular loop filter.

5. Experimentation

In this experimentation, we want to assess the proposed tools, namely the proposed tracking architecture

and the cycle slip estimator. The methods are firstly assessed on synthetic signals and secondly on real data. The proposed filter is compared in the synthetic case to the classical Kalman filter in terms of circular distance and dispersion between the estimated signal parameters and their real values. In the real case, the proposed filter is assessed for kinematic and static position estimations. Parameters and positions are estimated every millisecond.

5.1. Synthetic data

5.1.1. Phase estimation

In this experimentation, we compare the proposed circular recursive filter used in a POL with a Kalman filter used in a PLL. Indeed, in a PLL, the phase measurements are corrected using the previous loop filter estimate, so the PLL provides phase variations to its loop filter. Phase variations being modeled using the normal distribution, the Kalman filter is often used as a PLL filter. In our experiments, we fix the parameters of both the proposed circular filter and the classic Kalman filter so the errors obtained on phase estimates at a C/N_0 of 40 dB Hz are minimal in terms of circular distance and dispersion.

For the PLL Kalman filter, the state noise vector, associated with phase and frequency, is set to [30, 500] and the noise vector to [0.1, 0]. The parameters of the circular particle filter are set to $N=200$, $v_0^0=0.01$, $\kappa_0^0=1$ and $N_{eff}=0.35$.

The sampling frequency of the received GPS-L1 signal is 20 MHz. In the synthetic case, different carrier-to-noise ratios (C/N_0) are considered, namely 50 dB Hz, 40 dB Hz, 38 dB Hz and 30 dB Hz, as well as different relative satellite–receiver accelerations. These different accelerations imply different Doppler frequency rates. The GPS clock noise disturbances are modeled as normal random walks. The variances of the sequences associated with the phase and frequency random walks are defined for a temperature compensated crystal oscillator (TCXO) [23]. The signal

bandwidth is set to 4 MHz. We use the early minus late coherent discriminator for the DLL, and the correlator spacing between Early and Prompt codes is set to $T_c/2$. Each experiment lasts 40 seconds.

We show in Fig. 4(a) an example of realization of the simulated signal phase and the estimated phase delay obtained with the proposed method and the Kalman filter. We show in Fig. 4(b) the circular distance, defined Eq. (13), between the estimated phase delay and its real value. We notice on these figures that the phase estimations using both methods are centered on the value to estimate, but with better results in terms of circular distance for the proposed method. This is due to the time-correlation that a filter used in a locked loop induces between successive estimations.

In order to assess the estimation, we process the normalized circular dispersion. The circular dispersion D_v between a parameter θ_k and an observation ϕ_k is defined in $\{0, 2\}$ as follows:

$$D_v(\phi_k, \theta_k) = \frac{1}{n} \left(n - \sum_{k=1}^n \cos(\theta_k - \phi_k) \right) \quad (51)$$

We report in Table 1 the circular dispersion of the estimated phase delay as a function of C/N_0 and of the mean and maximum Doppler rates. Three cases are presented, depicting very low to very high dynamics on both the receiver and the satellite. The case $m/M=5/10$ Hz/s corresponds to the case of a receiver on a car and a satellite at medium elevation. We report Table 1 the circular dispersion obtained with the Kalman PLL and the proposed circular POL. It appears that the phase estimation using the proposed method is about 3 times more accurate for high carrier-to-noise ratio (50 and 40 dB Hz). At a low carrier-to-noise ratio (30 dB Hz), the proposed method supports higher dynamics than the classic Kalman PLL.

We report Table 2 the root mean square error (RMSE) of the estimated frequency delay as a function of C/N_0 and of the mean and maximum Doppler rates. We report Table 2 the RMSE obtained with the Kalman PLL and the proposed circular POL. It appears that the proposed method provides a better estimation of the frequency delay. The ratio between the RMSE of the compared methods increases from 5 (50 dB Hz) to 10 (38 dB Hz) with the augmentation of the noise level. At a carrier-to-noise ratio of 30 dB Hz, the PLL loses lock and is not able to estimate the frequency.

In this experimentation, we show that the proposed tracking POL is more accurate than the classical Kalman PLL. We indeed show that the normalized circular dispersion of the phase estimate is lower for the proposed filter, as well as the frequency RMSE. We also show that the

proposed POL is more robust to noise, especially in the case of high dynamics. The proposed filter outperforms the classical Kalman filter because of the unwanted oscillations produced by time correlations in a lock loop recursive filter. Also, cycle slips occur in the PLL phase estimation, especially for $C/N_0 = 30$ dB Hz. The estimated frequency and phase delay in the proposed POL are more accurate, and we will show in the experimentation on real data that this allows improving the positioning accuracy.

5.1.2. Cycle slip detection

In this experimentation a cycle slip estimator is associated with the tracking loops. We compare the proposed circular GLR detector with a classical Kalman GLR detector [24]. In the classical case, the PLL provides measurements of phase in cycles and for the proposed architecture, the measurements of phase provided by the open loop are in radians. In order to repair the GPS signal, we have to detect the cycle slip and to estimate the instant and dynamic of the change in the phase delay. We assess the estimators for different carrier-to-noise ratios and for a cycle slip magnitude of 1 rad. We track the satellite PRN 21 with a satellite–receiver relative speed of 416 m/s, a Doppler rate of 4.830 Hz/s and an initial residual frequency $f=3$ Hz.

The size of the working window is fixed to $M=20$ samples and $R=10$, $Q=1000$ for the circular detector in the working window. For the Kalman GLR detector we fix $R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $Q = \begin{bmatrix} 5e-3 & 0 \\ 0 & 1e-3 \end{bmatrix}$. We report in Table 3 the thresholds of detection for the circular and Kalman GLR detectors and for different carrier-to-noise ratios.

We show in Fig. 5(a) an example of phase delay behavior with a cycle slip at instant $k=80$ ms and an example of the estimated repaired signal. We show in Fig. 5(b) the probability of detection of the cycle slip for a carrier-to-noise ratio of $C/N_0 = 30$ dB Hz. In Fig. 5(b) we notice that several parameters can be defined in order to assess the detector. These parameters are the dispersion errors on the estimated change instant and the probability of detection. The estimated change dynamic is another parameter of the method that is assessed. In order to have a complete assessment of

Table 2

Root mean square error of the estimated frequency delay for the (PLL/POL) filters.

Doppler rate (Hz/s)	C/N_0 (dB Hz)			
	50	40	38	30
(mean/max)				
0/0.04	4.3/0.61	20/2.2	30/3.3	240/16
5/10	4.4/0.62	20/2.2	31/3.4	9390/17
100/170	4.5/1.0	20/3.0	32/4.4	5.1e6/22

Table 1

Circular dispersion of the estimated phase delay for the (PLL/POL) filters.

Doppler rate (Hz/s)	C/N_0 (dB Hz)			
	50	40	38	30
(mean/max)				
0/0.04	2.0e–3/4.4e–4	8.5e–3/2.5e–3	1.4e–2/4.6e–3	1.0e–1/2.4e–2
5/10	1.9e–3/4.5e–4	8.2e–3/2.6e–3	1.3e–2/4.1e–3	4.6e–1/2.7e–2
100/170	2.1e–3/6.6e–4	8.8e–3/3.3e–3	1.4e–2/5.1e–3	9.7e–1/3.0e–2

the detector, the probability of false alarm must be jointly estimated with the probability of detection. The detector threshold is fixed for a given probability of false alarm. Furthermore, in order to get an accurate estimation of the change magnitude, a change is retained if $\hat{r} = k - M + 1$.

We report in Table 4 the probability of detection associated with a given probability of false alarm $P_f=0.001$. In Table 4, we report the probability of detection obtained for the assessed circular and Kalman GLR detectors.

We report in Table 5 the root mean square error between the estimated change instant and its real value.

We report in Table 6 the circular dispersion of the estimated change magnitude.

For high C/N_0 , 50 dB Hz and 40 dB Hz, the probabilities of detection are the same for the circular GLR and the Kalman GLR. When the signal-to-noise ratio is weak, the phase observations provided in cycles by the PLL contain rapid changes due to the integration of the noisy phase delays. These additional cycle slips increase the false alarm probability of the Kalman GLR detector. In this case the probability of detection is higher for the proposed approach because this effect does not occur in the phase observations provided by a POL. The estimated change instants are obtained with the same accuracy for the two

detectors, but in terms of change magnitude estimation, the proposed circular GLR is more accurate than the Kalman GLR. Finally, we can conclude that the proposed approach improves the cycle slip estimation and repair. The accuracy can still be improved with a larger working window, but in this case the limit is the constant velocity assumption in the working window.

Table 3
Threshold of detection of the filter.

C/N_0 (dB Hz)	50	40	38	30
Kalman GLR	0.0025	0.023	0.04	4.7
Circular GLR	0.072	0.35	0.55	3

Table 4
Probability of detection.

C/N_0 (dB Hz)	50	40	38	30
Kalman GLR	1	0.996	0.883	0.002
Circular GLR	1	1	1	0.494

Table 5
Root mean square error of the estimated change instant in ms.

C/N_0 (dB Hz)	50	40	38	30
Kalman GLR	0	0.1	0.2	2.5
Circular GLR	0	0.1	0.2	1.5

Table 6
Circular error dispersion of the estimated change magnitude.

C/N_0 (dB Hz)	50	40	38	30
Kalman GLR	$8.6e-4$	$7.7e-3$	$1.1e-2$	1.5
Circular GLR	$8.5e-4$	$3.6e-3$	$5.1e-3$	$6.6e-2$

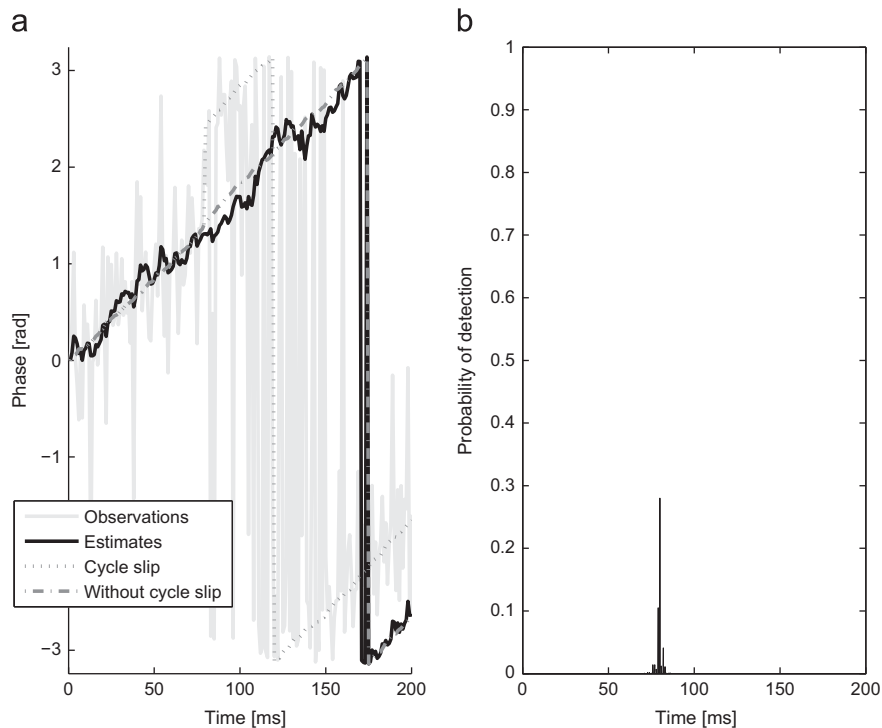


Fig. 5. Cycle slip detection and estimation.

In our implementation, the processing was realized off-line because the drawback of the proposed method is the heavy computational load. Indeed, considering the fact that an observation of phase is provided for every CDMA code period, the system can operate in real time if it processes the data in less than one millisecond. The particle tracking filter must generate and process 500 particles in order to efficiently estimate the phase at each instant (each code period). For each new observation of phase, the change point detector tests a possible cycle slip occurrence at each instant of the working window. Furthermore, at each tested instant, a particle filter of 500 particles is used to estimate the change dynamic. In our point of view the computational load is too heavy for the system to operate in real time.

5.2. Real data

We consider in the experimentation with real data a static and a kinematic case. A bit grabber samples and stores the signal provided by an antenna. The sampling rate for the acquisition of the L1 signal is 25 MHz and the system bandwidth is 50 MHz. In the static case, the acquisition of the signal lasts 8 s and 10 s in the kinematic case. For the static case, the antenna is positioned on the roof of the laboratory. In the kinematic case, the antenna is at the extremity of an arm moved by a rotating system. In the kinematic case, we performed a circular trajectory of the antenna. We show in Fig. 6 a top view of the system while it is rotating.

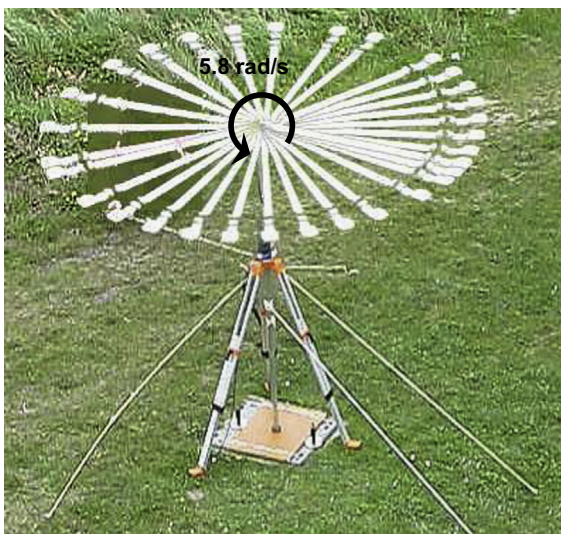


Fig. 6. Rotating system for the kinematic experimentation.

Table 7

Satellite constellation for the static experimentation.

PRN	1	11	14	17	19	20	23	28	31	32
C/N_0 (dB Hz)	51.2	49.8	44	48.4	41.7	49.8	45.4	43.0	44.8	50.7

5.2.1. Static positioning

The satellite constellation available for this experimentation is described in Table 7. All the presented satellites were used for the position computation. We show in Fig. 7 the estimated position errors obtained in the static case. The position error is the position processed in a coordinate system centered on the real position of the antenna. In this experimentation, the first pseudo-ranges are computed with the first code delays and with the time information contained in the message of navigation. Since we only want to show the accuracy improvement in the relative positioning estimation, the tropospheric and ionospheric delays are not corrected. These biases are assumed to be constant during the experimentation and to affect in the same way the positions obtained for the different assessed methods. The positions are relative to the first position and this is the reason why we observe a bias in the mean positioning results of Fig. 7. We show in this figure the positions obtained with the phase measurements provided by a PLL, the phase measurements processed by a Kalman loop filter in a PLL (denoted PLL Filter) and the phase measurements processed by the proposed circular filter in a POL (denoted POL Filter).

It appears that cycle slips occurred in the PLL in the phase observations due to the integration of the noisy phase delay. These cycle slips are not abrupt changes in the phase observations but slow monotone increasing or decreasing variations that are not detected by the Kalman GLR change point estimator. This effect does not appear on the phase observations provided by an open loop and this is the main reason why the proposed approach is more accurate. It also appears that the positions obtained via the proposed method are more concentrated than the positions obtained via the PLL. This is the consequence of the temporal correlation that affects the phase estimated by a recursive filter in a lock loop.

We report in Table 8 the standard deviation of the position errors obtained from Fig. 7 in the North and East

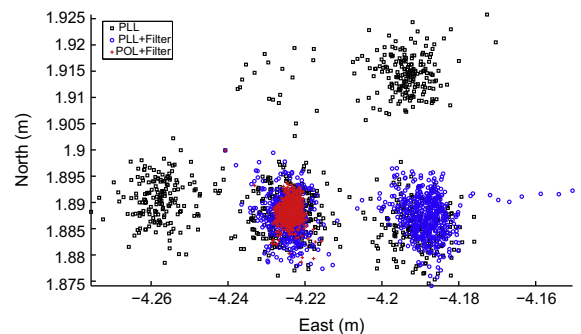


Fig. 7. Estimated positions in the static case.

directions. We also report the standard deviation and the mean of the distances between the estimated positions and the real positions.

The statistical parameters of the position error presented in Table 8 confirm the results observed in Fig. 7. These results show that the proposed method is more accurate because the standard deviation of the error is lower. The variance of this parameter is indeed lower for the proposed method, it also indicates that the estimated positions are concentrated on the real position.

5.2.2. Kinematic positioning

In the kinematic case, the trajectory of the antenna is a circle in the horizontal plane of diameter 2.44 m. For this experimentation, we realize 9.25 circular rounds in 10 s. We show in Fig. 8 the estimated position error (the coordinate system is centered on the system position, obtained with an OEM4 Novatel receiver) and a circle which represents the theoretical trajectory of the antenna. In this experimentation, we compare the estimated positions obtained with the proposed POL and the positions obtained with the proposed POL and the proposed circular GLR estimator that detects and repairs the cycle slips.

Table 8
Position error for real data in the static case.

	East deviation (σ)	North deviation (σ)	Distance (m/ σ)
PLL	2.5e-2	1.2e-2	(4.6/2.2e-2)
PLL filter	1.9e-2	3.9e-3	(4.6/1.7e-2)
POL filter	1.9e-3	2.0e-3	(4.6/1.9e-3)

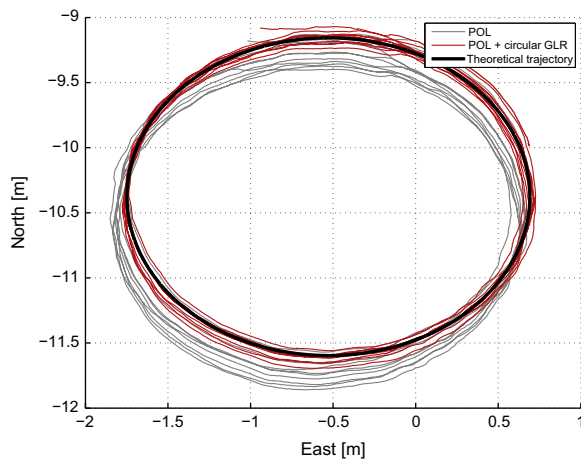


Fig. 8. Estimated positions in the kinematic case.

Table 9
Trajectory error in the kinematic case.

	East standard deviation (m)	North standard deviation (m)	Mean distance (m)
POL + circular filter	1.1e-2	3.7e-2	1.5e-1
POL + circular filter + circular GLR estimator	2.6e-3	3.3e-3	3.6e-3

The theoretical circle of diameter 2.44 m is fitted to the estimated positions. The mean distance and the standard deviation of the residual error between the estimate positions and the theoretical circle are reported in Table 9.

In Table 9, the mean distance and the standard deviation of the error for the East and for the North direction are lower when the cycle slips are detected and repaired. We can observe in Fig. 8 the cycle slips' effect on the estimated position. When the cycle slips are not repaired there is indeed a drift of the estimated circle position due to the increasing pseudo-range error associated with the integration of the corrupted phase delays. We can observe that when the cycle slips are corrected the estimated circles remain centered on the same point.

6. Conclusion

This paper proposes a circular change point estimator defined in a Bayesian framework with circular von Mises distributions. This work is applied to the processing of cycle slips in the phase measurements of a GNSS signal.

We propose a phase open loop and a frequency semi-open loop dedicated to the tracking of the GNSS phase signals. The first interest of the proposed open loop architecture is to avoid the monotone increasing or decreasing variations of phases due to the integration of the phase delays by a classical PLL. The second interest of the proposed open loop architecture is to avoid the time-correlation between two successive estimations that appear in filter aided lock loops.

In an open loop, the observations of phase are not obtained in cycles like for a classical PLL, but as angular values defined between $[-\pi, \pi]$. In this context, we developed circular processing tools in order to take the phase transitions between $-\pi$ and π , that are seen as abrupt changes in the linear domain, into account. In order to process the angular values produced by the phase open loop, as well as the frequency, we propose a particle filter defined in the circular domain using von Mises distributions. In order to repair the cycle slips in the signal, we propose a circular GLR change point detector defined in a Bayesian circular framework.

The experiments can be separated in two parts: The first part is dedicated to the cycle slip detector, meaning the phase estimation method and the cycle slip detection and repair. The performances of these two filters are linked and we show that the proposed POL composed of a circular particle filter and a change point detector is more accurate than a Kalman PLL associated to a Kalman GLR detector. The second part of the experimentation concerns the application of the method to static and dynamic positioning. In the static case, we show that the PLL generates more cycle slips than the POL. The obtained

positioning accuracy demonstrates the interest of the POL and the proposed filters. In the dynamic case, we show that rapid antenna movements provoke frequent cycle slips. This result demonstrates the interest of processing the data at a rate of 1 ms and we show that the proposed method is in this case more accurate compared to the classical approach.

Appendix A. Definition of Ψ_l

Let us assume a change at r in the working window and unnoisy measurements $\tilde{\phi}_l$. According to Eqs. (19), (21) and (22) we can derive the following relation:

$$C_l \sin(\hat{\theta}_{0,l}) = D_l \cos(\hat{\theta}_{0,l})$$

$$P_{0,l/l-1} \sin(\hat{\theta}_{0,l/l-1} - \hat{\theta}_{0,l}) = R \sin(\hat{\theta}_{0,l} - \tilde{\phi}_l)$$

- At $l=r$: $\tilde{\phi}_r = \hat{\theta}_{0,r-1} + \nu + \Delta\theta$
 $-P_{0,r/r-1} \sin(\hat{\theta}_{0,r} - (\hat{\theta}_{0,r-1} + \Delta\theta))$
 $= R \sin(\hat{\theta}_{0,r} - (\hat{\theta}_{0,r-1} + \nu + \Delta\theta))$

then

$$\hat{\theta}_{0,r} = \arctan\left(\frac{R \sin(\nu)}{P_{0,r/r-1} + R \cos(\nu)}\right) + \hat{\theta}_{0,r-1} + \Delta\theta$$

We note

$$\hat{\theta}_{0,r} = \Psi_0 + \hat{\theta}_{0,r-1} + \Delta\theta$$

- At $l=r+1$: $\tilde{\phi}_{r+1} = \hat{\theta}_{0,r} + \nu + \Delta\theta - \Psi_0$
 $-P_{0,r+1/r} \sin(\hat{\theta}_{0,r+1} - (\hat{\theta}_{0,r} + \Delta\theta))$
 $= R \sin(\hat{\theta}_{0,r+1} - (\hat{\theta}_{0,r} + \nu + \Delta\theta - \Psi_0))$

then

$$\hat{\theta}_{0,r+1} = \arctan\left(\frac{R \sin(\nu - \Psi_0)}{P_{0,r+1/r} + R \cos(\nu - \Psi_0)}\right) + \hat{\theta}_{0,r} + \Delta\theta$$

$$\hat{\theta}_{0,r+1} = \Psi_1 + \hat{\theta}_{0,r} + \Delta\theta$$

- At $l=r+m$: $\tilde{\phi}_{r+m} = \hat{\theta}_{0,r+m-1} + \nu + \Delta\theta - \sum_{i=0}^{m-1} \Psi_i$
 Finally we can derive the following expression:

$$\hat{\theta}_{0,r+m} = \arctan\left(\frac{R \sin(\nu - \sum_{i=0}^{m-1} \Psi_i)}{P_{0,r+m/r+m-1} + R \cos(\nu - \sum_{i=0}^{m-1} \Psi_i)}\right)$$

$$+ \hat{\theta}_{0,r+m-1} + \Delta\theta$$

$$\hat{\theta}_{0,r+m} = \Psi_m + \hat{\theta}_{0,r+m-1} + \Delta\theta$$

Appendix B. Symbols glossary

Symbol	Definition
$\mathcal{M}(\mu, \kappa)$	Von Mises distribution of mean μ and concentration parameter κ

f_M	Von Mises density function
k	considered iteration (sample index)
dt	sampling period
ϕ	angle (phase delay) measurement
$\theta = [\theta, \dot{\theta}]^T$	vector (angle, angular velocity) to estimate
$x_k^i = [\theta_k^i, \dot{\theta}_k^i]^T$	circular filter particles
$\hat{\cdot}$	estimate of a parameter
M	size of the working window
l	considered position in the working window ($l \in [k-M+1, k]$)
r	change position
ν	change amplitude
$\hat{\theta}_{0,l}$	estimated angle before repair
$\hat{\theta}_{c,l}$	repaired estimated angle
$\tilde{\phi}_l$	unnoisy angle observation (affected by the change)
$\rho_l(\nu)$	$\tilde{\phi}_l - \hat{\theta}_{0,l}$, see Fig. 2
Ψ_{l-r}	$\hat{\theta}_{0,l} - \hat{\theta}_{0,l-1} - dt \hat{\theta}_{k-M+1}$
e_l	innovation $\phi_l - \hat{\theta}_{0,l}$

References

- [1] E.D. Kaplan, C.J. Hegarty, *Understanding GPS, Principles and Applications*, second ed. Artech House, Boston, London, 2006.
- [2] Z. Liu, A new automated cycle slip detection and repair method for a single dual-frequency GPS receiver, *J. Geod.* 85 (2011) 171–183.
- [3] G. Lachapelle, *GNSS Carrier Phase Positioning*, ESA International Summer School on GNSS, 2011.
- [4] D. Kim, R.B. Langley, GPS ambiguity resolution and validation: methodologies, trends and issues, in: *Proceedings of the 7th GNSS Workshop and International Symposium on GPS/GNSS*, 2000, pp. 213–221.
- [5] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, M. Benjelloun, GNSS dataless signal tracking with a delay semi-open loop and a phase open loop, *Signal Process.* 93 (5) (2013) 1192–1209.
- [6] S.B. Bisnath, Efficient, automated cycle-slip correction of dual-frequency kinematic GPS data, in: *Proceedings of ION GPS*, September 2000, pp. 145–154.
- [7] G. Blewitt, An automatic editing algorithm for GPS data, *Geophys. Res. Lett.* 17 (3) (1990) 199–202.
- [8] M. Lacy, M. Reguzzoni, F. Sans, G. Venuti, The Bayesian detection of discontinuities in a polynomial regression and its application to the cycle-slip problem, *J. Geod.* 82 (9) (2008) 527–542.
- [9] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, M. Benjelloun, A multi-temporal multi-sensor circular fusion filter, *Inf. Fusion* 18 (2014) 86–100.
- [10] E. Batschelet, *Circular Statistics in Biology*, Academic Press, New York, 1981.
- [11] S.R. Jammalamadaka, A. SenGupta, *Topics in Circular Statistics*, World Scientific Publ., New Jersey, 2001.
- [12] I. Markovic, I. Petrovic, Speaker localization and tracking with a microphone array on a mobile robot using von Mises distribution and particle filtering, *Robot. Auton. Syst.* 58 (11) (2010) 1185–1196.
- [13] S. Reboul, M. Benjelloun, Joint segmentation of the wind speed and direction, *Signal Process.* 86 (4) (2006) 744–759.
- [14] D. Nikovski, *State-aggregation algorithms for learning probabilistic models for robot control* (Ph.D. dissertation), Carnegie Mellon University, 2002.
- [15] H. Shatkay, L. Pack Kaelbling, Learning geometrically-constrained hidden Markov models for robot navigation: bridging the topological-geometrical gap, *J. Artif. Intell. Res.* 16 (2002) 167–207.
- [16] N. Roy, G. Gordon, S. Thrun, Finding approximate POMDP solutions through belief compression, *J. Artif. Intell. Res.* 23 (2005) 1–40.
- [17] I. Markovic, I. Petrovic, Bearing-only tracking with a mixture of von Mises distributions, in: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Vilamoura, Algarve, Portugal, October 7–12, 2012.
- [18] M. Azmani, S. Reboul, J.B. Choquel, M. Benjelloun, Etude et mise en oeuvre d'un estimateur récursif des paramètres statistiques d'une distribution circulaire de von Mises et d'une distribution Log-normale, *J. Eur. Syst. Autom.* 44 (4–5) (2010) 525–545.
- [19] J. Cai, E.W. Grafarend, C. Hu, The statistical property of the GNSS carrier phase observations and its effects on the hypothesis testing

- of the related estimators, in: Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2007), 2007, pp. 331–338.
- [20] K.V. Mardia, P.E. Jupp, *Directional Statistics*, Wiley, Chichester, 1999.
- [21] M. Azmani, S. Reboul, J.B. Choquel, M. Benjelloun, A recursive fusion filter for angular data, in: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, 2009.
- [22] S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp, A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking, *IEEE Trans. Signal Process.* 50 (2) (2002) 174–188.
- [23] N.I. Ziedan, *GNSS Receivers for Weak Signals*, Artech House, Boston, London, 2006.
- [24] A.S. Willsky, H.L. Jones, A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems, *IEEE Trans. Autom. Control* 21 (1) (1976) 108–112.

A.2 A multi-temporal multi-sensor circular fusion filter - Stienne *et al.*(2014)

Cet article a été publié dans le revue Information Fusion 18, pp. 86-100, 2014.



A multi-temporal multi-sensor circular fusion filter



G. Stienne, S. Reboul*, M. Azmani, J.B. Choquel, M. Benjelloun

Laboratoire d'Informatique, Signal et Image de la Côte d'Opale (LISIC), Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille, France
 Université du Littoral Côte d'Opale (ULCO), 50 Rue Ferdinand Buisson, BP719, 62228 Calais cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 9 July 2012

Received in revised form 20 May 2013

Accepted 22 May 2013

Available online 12 June 2013

Keywords:

Circular statistic
 Bayesian estimation
 Fusion

ABSTRACT

In many multi-sensor applications, noisy angular data are modeled as random variables which are commonly defined on the linear domain while the “classical fusion and filtering” are used to process their realizations. Weighted sum and Kalman filter are indeed the common approaches used to fuse and filter the data in most cases. These approaches are limited by the periodic nature of the angular data. In this article, the error of angular measurements is assumed to follow a von Mises distribution. Under this assumption, a multi-sensor fusion operator is proposed. Under the same assumption, a magnetometer and a gyroscope.

© 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

We can find in the published works numerous applications where the observations are directions [1–4]. When these directions are in the same plane, they are naturally represented on a unit circle of R^2 . In the case of random observations, this data can be studied with the circular statistics. Directional statistics were employed to study spherical and angular data such as the wind direction [5–8]. The von Mises probability law describes angular random phenomena and plays the same role as the normal distribution for linear observations [9]. Angular data are periodic and defined on an interval of length 2π . Angles are assumed to take values from an interval $[-\pi, \pi)$. In the circular domain the definition of an angle is associated with a reference “zero direction” that defines the null angle value. For example magnetic declination is the angle between magnetic north and true north, the reference of “zero direction”. In order to estimate the mean value of circular random variables with statistical modeling of the linear domain, the direction of reference is chosen close to the value of the parameter to estimate. In this case the probability that a random variable, of small variance, contains in its realizations transitions between $-\pi$ and π is low. When the direction of reference is unknown, circular data and their associated circular distribution are not necessarily symmetrically distributed around the parameter to estimate. It follows that mean and variance computed with estimator of the linear domain can be wrong and over estimated. We can

define in the circular case a mean estimate and a measurement of dispersion directly proportional to the parameter of concentration of the circular distributions. The concentration parameters of the distributions are inversely proportional to the distributions variances [9]. Most of the time, there are no direct estimates for the concentration parameters of the circular distributions. In practice, approximations or indirect estimations are employed [1]. Actually this is the case of the circular normal distribution (von Mises distribution) widely used in Bayesian framework [10–13].

A random variable is defined on a straight line in the linear case and on a circle in the circular case. This article proposes a fusion operator and a filter defined in the circular domain with circular distributions. Several reasons have motivated this development. For large angular measurements the Gaussian approximation (linear domain approximation) is not satisfactory because the Gaussian distribution does not take the periodic nature of the data into account. Furthermore a periodic distribution defined on an interval is not necessarily symmetric around its mean value. Consequently, a state filter like the Kalman filter, defined on a linear domain, makes an error on the estimated state and on its covariance [1]. Finally the angular shifts between $-\pi$ and π are seen in the linear domain as abrupt changes and this nonstationary evolution deteriorates the performance of the state filters. In the case of stochastic angular process, the mean direction of the observations must be defined as the reference direction associated with the zero angle so the transitions between $-\pi$ and π have a low probability of occurring. To remain centered on the mean direction we can use strategies to detect a change in the mean direction. This problem is known as the change point problem and is relatively new for directional data [11,13]. In the classical linear case, it as been

* Corresponding author at: Laboratoire d'Informatique, Signal et Image de la Côte d'Opale (LISIC), Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille, France.

E-mail address: serge.reboul@univ-littoral.fr (S. Reboul).

shown in [14] that the least square estimate (LS) and the maximum likelihood estimate (ML) of the fused measurement have the same expression. This estimate is the weighted sum of the measurements where the normalizing weights are defined with the covariance of the measurements [15–17]. The mean value of the measurements obtained by the different sensors is assumed to be the same and we can show that the variance of the fused measurement is lower than the variance of the measurements. Unfortunately this property is only true for small angular variations that are assumed to be Gaussian. Unlike in the Gaussian case, the sum of von Mises distributed variables has an unknown concentration parameter [12]. Furthermore, the concentration parameter of the product of a circular random variable and a constant is also undefined because it depends on the reference direction. Finally the normalized weighted sum can be biased due to the transitions between $-\pi$ and π . Consequently, the weighted sum, which is the classical linear fusion operator, cannot be used in the circular case.

In linear or nonlinear state filtering, measurements errors and state variables errors are assumed to follow Gaussian distributions. When the state is an angle, one can employ an extended Kalman filter based on the local linearization of the problem [18,19]. For some applications, such as filtering the small angular variations obtained from gyroscopic measurements, the classical Kalman filter was employed [20]. Indeed, in this particular case, the Gaussian normal distribution is close to the circular von Mises distribution [9]. In practice, most of the applications that deal with angle-only observations like bearings-only tracking or attitude estimation using inertial sensors involve nonlinear transformations. These nonlinear transformations link the angular value of the circular domain to a linear state description of the filter. In the case of weakly nonlinear systems, the design of the filter was realized by local linearization of the problem [21]. For strongly nonlinear systems, the filters were developed in the hidden Markov model framework using particle filters [22,23,4], where the goal was to model the observations in the circular domain in order to overcome the instability and time consuming problems associated with the processing of the nonlinearity.

A preliminary version of the filter was proposed in [24]. The filter was defined therein in the scalar case and assessed on synthetic data. A Bayesian tracking procedure with a mixture of von Mises distribution was proposed in [25]. In this paper the scalar case is investigated using a mixture of von Mises in order to handle nonlinear state transition. In this case the filter cannot be derived in a close form and a procedure of component reduction is needed in the tracking process. We proposed in [4] a particle filter implementation of the filter for the scalar case. Therein the filter was applied to the phase estimation of modern GNSS signals. In [26,27], new architectures using circular filters were proposed for the phase processing of GNSS signals. In this work we describe, in a rigorous theoretical Bayesian framework, the circular fusion operator and the circular filter implementation for the joint estimation of angular direction and angular velocity. Furthermore, this state vector circular filter is applied to azimuth direction estimation from magnetometer and gyroscopic real measurements.

The proposed fusion operator merges angular measurements provided by sensors with different accuracies. We derive a new fusion operator for circular data which is derived from the expression of the von Mises likelihood distribution of the fused measurements given the mean angular value to estimate. We also propose a recursive state filter that merges the observations of direction and angular velocity obtained at different instants. In order to consider the periodic nature of the angular data we assume that the state and measurement noise errors are distributed according to a von Mises distribution. It follows that the measurements distribution and the prior probability distribution of the state are circular normal distributions. We derive the prediction step of the recursive filter

from the Chapman Kolmogorov equation. We derive the update step from the posterior probability distribution of the estimated state.

This work is applied to the azimuth estimation of a multi-sensor system. Accurate real-time tracking of the orientation or attitude of rigid bodies has applications in robotics, aerospace, underwater vehicles, synthetic reality, etc. The orientation of a static or slow-moving rigid object can be measured with an inertial/magnetic sensor module. Such sensor modules typically contain a 3-axis accelerometer and a 3-axis magnetometer. The azimuth angle is determined by measuring the earth's magnetic field using the magnetometer. The inclination (pitch) and roll angles are determined by using accelerometers to measure the direction of earth's gravity. In dynamic applications where rapid movements are involved, a triad of angular rate sensors (gyroscopes) is usually added as a "complementary" high-frequency source of information on orientation [28]. In this work we merge the azimuth measurements provided by a 2-axis magnetometer and a dual axis gyroscope. We have at our disposal angle measurements and angular rate measurements that we combine using the proposed circular fusion filter.

After this introduction, the multi-sensor fusion operator is presented in Section 2. The Section 3 provides the definition of the multi-temporal fusion filter in both the scalar and the vector cases. The results of experiments conducted on synthetic and real data are reported in Section 4. The last section is the conclusion.

2. Multi-sensor circular fusion operator

2.1. Circular distributions

The general formula for the probability density function of the von Mises distribution is given by:

$$f(\theta, \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp(\kappa \cos(\theta - \mu)) \quad (1)$$

where μ and κ are respectively the mean and concentration parameters and I_0 is the modified Bessel function of the first kind and order 0:

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\kappa \cos(\phi)) d\phi \quad (2)$$

We denote a random circular variable θ following a von Mises distribution of mean μ and a concentration parameter κ by:

$$\theta|\mu \sim \mathcal{M}(\theta|\mu, \kappa) \quad (3)$$

Since Wrapped Normal and von Mises distributions differ only in few percent [29,1], the von Mises probability density function can be approximated by a Wrapped Normal distribution [12]. A Wrapped Normal distribution (\mathcal{WN}) is a sum of Gaussian distributions centered on the means $\mu + 2k\pi$. This sum allows reproducing the multi-modal nature of the periodic circular distributions. Its expression is given by:

$$f_{\mathcal{WN}}(\theta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\theta - \mu + 2k\pi)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

We denote a random variable θ distributed according to a Wrapped Normal distribution of mean μ and variance ρ by:

$$\theta|\mu \sim \mathcal{WN}(\theta|\mu, \rho) \quad (5)$$

with $\sigma^2 = -2\log(\rho)$. The convolution of two \mathcal{WN} distributions is a \mathcal{WN} distribution [9]. Then if $\theta_1 \sim \mathcal{WN}(\mu_1, \rho_1)$ and $\theta_2 \sim \mathcal{WN}(\mu_2, \rho_2)$ are two independent random variables, their sum is a random variable distributed according to the following \mathcal{WN} distribution: $\theta_1 + \theta_2 \sim \mathcal{WN}(\mu_1 + \mu_2, \rho_1\rho_2)$ with $\rho_1 = \exp(-\sigma_1^2/2)$ and $\rho_2 = \exp(-\sigma_2^2/2)$. In this context, we will use the approximation of a \mathcal{M}

distribution by a \mathcal{WN} distribution in order to derive the distribution of the sum of two random \mathcal{M} variables.

The approximation is defined by $\mathcal{M}(\mu, \kappa) \approx \mathcal{WN}(\mu, A(\kappa))$, where $\mathcal{WN}(\mu, A(\kappa))$ is a Wrapped Normal distribution of mean μ and parameter σ^2 with [12]:

$$\sigma^2 = -2 \log(A(\kappa)) \quad (6)$$

$$A(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \quad (7)$$

I_1 is the modified Bessel function of the first kind and order 1.

We can define the approximation of a \mathcal{WN} distribution as a \mathcal{M} distribution by $\mathcal{WN}(\mu, \rho) \approx \mathcal{M}(\mu, A^{-1}(\rho))$. In this expression $A^{-1}(\cdot)$ must be computed by approximation. From [12]:

For $\kappa \geq 0.6$:

$$A(\kappa) \approx \left(1 - \frac{1}{2\kappa}\right) \quad (8)$$

It follows from (6):

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \exp(-\frac{\sigma^2}{2})} \right) \quad (9)$$

For $\kappa < 0.6$:

$$A(\kappa) \approx \exp\left(\frac{-1}{2\kappa}\right) \quad (10)$$

It follows from (6):

$$\kappa = \frac{1}{\sigma^2} \quad (11)$$

Furthermore the following relationship can be obtained from the maximum likelihood of the von Mises distributions of n measurements [12]:

$$A(\kappa) = \frac{R}{n} \quad (12)$$

With:

$$R = \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \hat{\mu}) \quad (13)$$

$$\text{and } \hat{\mu} = \text{Arctan}^*(S, C) \quad (14)$$

$$\text{and } C = \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i), S = \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i) \quad (15)$$

Arctan^* is the ‘‘quadrant-specific’’ inverse of the tangent. It follows from 8, 10 and 12 that an approximation of the maximum likelihood estimate of κ is given by:

$$\text{for } \frac{R}{n} \geq 0.3 \quad \hat{\kappa} \approx \frac{n}{2(n-R)} \quad (16)$$

$$\text{for } \frac{R}{n} < 0.3 \quad \hat{\kappa} \approx \frac{1}{2 \log\left(\frac{n}{R}\right)} \quad (17)$$

2.2. Circular fusion operator

We propose to define the fusion operator of a set of random variables distributed according to a \mathcal{M} distribution. The operator is defined in the maximum likelihood sense. The proposed fusion operator integrates the periodicity of the random variables and is independent of the reference ‘‘zero direction’’.

Let $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$ be angular measurements provided by N sensors. Let k be the sampling instant. The goal is to obtain the fused

measurement $\phi_{f,k}$ from the sequence $\{\phi_k^{(i)}\}_{i=1:N}$. The measurements errors (as random variables) are assumed independent and distributed according to a \mathcal{M} distribution of mean θ_k and of concentration parameters $\kappa_R^{(1)}, \dots, \kappa_R^{(N)}$. The likelihood function of θ_k , the parameter to estimate given the observations $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$, is given by:

$$L(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)} | \theta_k) = f(\phi_k^{(1)} | \theta_k, \kappa_R^{(1)}) f(\phi_k^{(2)} | \theta_k, \kappa_R^{(2)}) \dots f(\phi_k^{(N)} | \theta_k, \kappa_R^{(N)}) \quad (18)$$

$$\text{with: } f(\phi_k^{(i)} | \theta_k, \kappa_R^{(i)}) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp(\kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)} - \theta_k)) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{it follows: } L(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)} | \theta_k) \\ = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(1)})} \dots \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(N)})} \exp\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)})\right) \end{aligned} \quad (20)$$

The logarithm of the likelihood function is given by:

$$\begin{aligned} l = \log L(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)} | \theta_k) \\ = -\sum_{i=1}^N \log(2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})) + \left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)})\right) \end{aligned} \quad (21)$$

In order to obtain the maximum likelihood we differentiate this equation with respect to θ_k and equating to zero. We obtain the following likelihood equations:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\theta_k - \phi_k^{(i)}) = 0 \quad (22)$$

$$\cos(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\phi_k^{(i)}) - \sin(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)}) = 0$$

$$\text{or } S_k \cos(\theta_k) - C_k \sin(\theta_k) = 0$$

The maximum likelihood estimate of θ_k , denoted $\phi_{f,k}$, is obtained using (22) as:

$$\phi_{f,k} = \text{Arctan}^*(S_k, C_k) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\frac{S}{C}\right) & \text{if } C > 0 \\ \text{Arctan}\left(\frac{S}{C}\right) + \pi & \text{if } S \geq 0, C < 0 \\ \text{Arctan}\left(\frac{S}{C}\right) - \pi & \text{if } S < 0, C < 0 \end{cases} \quad (23)$$

We use the second derivative to determine if the value we obtain is a minimum or maximum. If the second derivative is negative, it indeed indicates a maximum. The expression of the second derivative of the likelihood is given by:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \theta_k} = \sum_{i=1}^N -\kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)}) \quad (24)$$

Any linear combination of a cosine and a sine of equal periods is equal to a single sine with the same period but with a phase shift and a different amplitude, then Eq. (24) can be rewritten as follows:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \theta_k} = -C_k \cos(\theta_k) - S_k \sin(\theta_k) = \sqrt{S_k^2 + C_k^2} \sin(\theta_k + \varphi_k) \quad (25)$$

with:

$$\varphi_k = \text{Arctan}^*(-C_k, -S_k), \quad (26)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}^*(-S_k, -C_k) = \begin{cases} -\text{Arctan}\left(\frac{S}{C}\right) + \frac{\pi}{2} & \text{if } C < 0 \\ -\text{Arctan}\left(\frac{S}{C}\right) - \frac{\pi}{2} & \text{if } C > 0 \end{cases}$$

Since $\phi_{f,k} + \varphi_k = -\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}$, the value of (24) for $\theta_k = \phi_{f,k}$ is negative and equal to $-\sqrt{S_k^2 + C_k^2}$. We can conclude that the estimate $\phi_{f,k}$ maximizes the logarithm of the likelihood function (21). For a given set of parameters $\kappa_R^{(i)}$, the first term of expression (21) is fixed and the second term is a cosine function with a single maximum. In this context we can conclude that the maximum is global for angles defined on a period of 2π . However this maximum is local and periodic if we consider the angles has a real number.

Let the vector $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$ be distributed according to a \mathcal{M} distribution with parameters θ_k and $\kappa_R^{(1)} \dots \kappa_R^{(N)}$. Then the joint density of the observations $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$ is given by:

$$\begin{aligned} f(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^N 2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)})\right) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^N 2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp(\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k) = \cos(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)}) + \sin(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\phi_k^{(i)}) \quad (28)$$

We deduce the following two equations:

$$\kappa_f \cos \phi_{f,k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos \phi_k^{(i)} \quad (29)$$

$$\kappa_f \sin \phi_{f,k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin \phi_k^{(i)} \quad (30)$$

Then the ML estimate of θ_k can be written as:

$$\phi_{f,k} = \text{Arctan}^*(\kappa_f \sin \phi_{f,k}, \kappa_f \cos \phi_{f,k}) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{where: } \kappa_f &= \sqrt{(\kappa_f \cos \phi_{f,k})^2 + (\kappa_f \sin \phi_{f,k})^2} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos \phi_k^{(i)}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin \phi_k^{(i)}\right)^2} \end{aligned} \quad (32)$$

The ML estimate of expression (31) is a circular fusion operator. The fusion operator is more accurate than the sensors if the circular dispersion of the fused measurements are lower than the circular dispersion provided by the sensors. We show next, with von Mises large-sample approximation property that this constraint is realized for the proposed fusion operator.

2.3. Fusion of two sensors observations

Let consider n angular observations $\phi_{1,n}^{(1)}$ and $\phi_{1,n}^{(2)}$ provided by two different sensors. The circular dispersion around the direction θ_k of the fused measurements is the circular variance V_f defined by:

$$V_f = 1 - \bar{R} \quad (33)$$

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2} \quad (34)$$

$$\text{With: } \bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(\phi_{f,k} - \theta_k) \quad \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\phi_{f,k} - \theta_k) \quad (35)$$

$V^{(1)}$ and $V^{(2)}$ are respectively the circular variances of $\phi_{1,n}^{(1)}$ and $\phi_{1,n}^{(2)}$. In case of measurements errors following a \mathcal{M} distribution, we have the following large-sample approximation [9]:

$$E[\bar{R}] \approx A(\kappa) + \frac{1}{2n\kappa}, \quad n \rightarrow \infty \quad (36)$$

where $E[\cdot]$ denotes the expectation. Using (36) the circular variances of the processes can be computed as:

$$E[V] \approx 1 - E[\bar{R}], \quad n \rightarrow \infty \quad (37)$$

The variance of a weighted sum, in the case of independent noise error, is obtained with the following relation [30]:

$$\frac{1}{V_f} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{V^{(i)}} \quad (38)$$

We show next that relation (37) is a good approximation for the fusion of angular measurements. It follows from (38) that:

$$V_f < \min\{V^{(1)}, V^{(2)}\} \quad (39)$$

Expressions (38) and (39) are still valid for N sensors. Fig. 1 presents the circular variance computed for $\kappa_R^{(1)} = 1$ and different values of $\kappa_R^{(2)}$. This result shows a good agreement between the theoretical and practical estimate (on 1000 realizations) of the variance V_f . On a linear domain the classical fusion operator is the weighted sum [30]. So we conclude that expression (31) acts as a weighted sum in the circular domain.

3. Multi-temporal circular fusion filter

We describe in this section the expression of a multi-temporal circular fusion filter within the Bayesian framework. We assume that state and measurement errors follow to a von Mises distribution.

3.1. Circular recursive scalar filter

Let define a discrete-time system of initial law $f(\theta_0)$, with a transition law $f(\theta_k | \theta_{k-1}, Q)$ and a likelihood function $f(\phi_{f,k} | \theta_k, \kappa_f)$. The state and measurement equations are as follows:

$$\begin{cases} \theta_k = h\theta_{k-1} + v_{k-1} \\ \phi_{f,k} = \theta_k + w_k \end{cases} \quad (40)$$

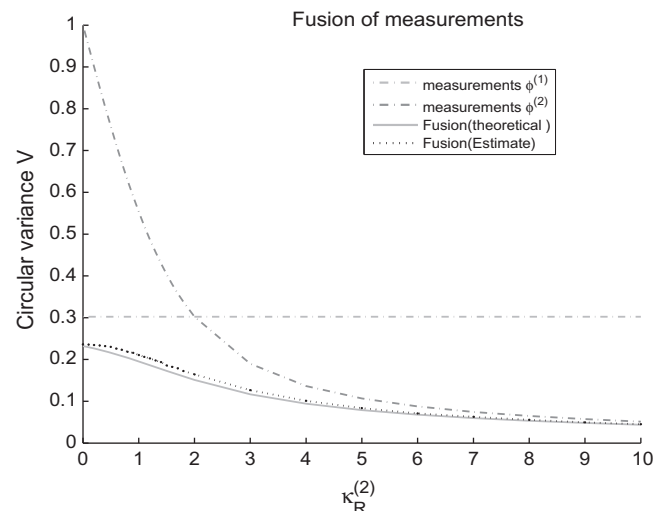


Fig. 1. Circular variance of the processes as a function of $\kappa_R^{(2)}$.

In (40) w_k is a measurement noise, following a $\mathcal{M}(0, \kappa_f)$ distribution. v_{k-1} is a state model noise, following a $\mathcal{M}(0, \kappa_Q)$ distribution. The proposed recursive circular estimate is derived from the posterior probability distribution. Each estimation of the filter is defined by the transition law and by the likelihood function. The recursive processing of the filter is defined by the classical following scheme:

$$P(\theta_{k-1}|\phi_{f,1:k-1}) \xrightarrow[\text{[}P(\theta_k|\theta_{k-1})\text{]}]{\text{prediction step}} P(\theta_k|\phi_{f,1:k-1}) \xrightarrow[\text{[}P(\phi_{f,k}|\theta_k)\text{]}]{\text{update step}} P(\theta_k|\phi_{f,1:k}) \quad (41)$$

In Fig. 2, the architecture of the proposed filter is shown. As in the classical linear case we can notice in this representation a prediction step defined from the previous estimation and an update step performed with the fused measurements. In our design we use the prediction step to process the ambiguity of π on the measurements to fuse.

3.1.1. Prediction step

We suppose a von Mises distribution for the posterior probability $f(\theta_{k-1}|\phi_{f,1:k-1})$ obtained at instant $k-1$, i.e.

$$\theta_{k-1}|\phi_{f,1:k-1} \sim \mathcal{M}(\theta_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1}, P_{k-1}) \quad (42)$$

where $\hat{\theta}_{k-1}$ and P_{k-1} denotes respectively the *a posteriori* mean and concentration parameter of θ_{k-1} . The Chapman Kolmogorov equation defines the distribution of the predicted state:

$$f(\theta_k|\phi_{f,1:k-1}) = \int f(\theta_k|\theta_{k-1}, \phi_{f,1:k-1})f(\theta_{k-1}|\phi_{f,1:k-1})d\theta_{k-1} \quad (43)$$

In the case of a von Mises distribution, the prediction step is then defined as follows:

$$\mathcal{M}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \propto \int \mathcal{M}(\theta_k|\theta_{k-1}, \kappa_Q)\mathcal{M}(\theta_{k-1}|\hat{h}\hat{\theta}_{k-1}, P_{k-1})d\theta_{k-1} \quad (44)$$

In order to solve (44), we propose to approximate the von Mises distribution $\mathcal{M}(\mu, \kappa)$ by the ‘‘Wrapped Normal’’ distribution $\mathcal{WN}(\mu, \rho)$ with $\rho = A(\kappa)$ and $\kappa = A^{-1}(\rho)$.

The distribution $\mathcal{M}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1})$, is obtained by approximating the distributions $\mathcal{M}(\theta_k|h\theta_{k-1}, \kappa_Q)$ and $\mathcal{M}(\theta_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1}, P_{k-1})$ of Eq. (43) by the following ‘‘Wrapped Normal’’ distributions:

$$\mathcal{M}(\theta_k|h\theta_{k-1}, \kappa_Q) \approx \mathcal{WN}(\theta_k|h\theta_{k-1}, A(\kappa_Q)) \quad (45)$$

$$\mathcal{M}(\theta_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1}, P_{k-1}) \approx \mathcal{WN}(\theta_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{k-1})) \quad (46)$$

with:

$$\mathcal{WN}(\theta_k|h\theta_{k-1}, A(\kappa_Q)) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\theta_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$\mathcal{WN}(\theta_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{k-1})) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(\theta_{k-1} - \hat{\theta}_{k-1} + 2\pi m)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

where $\sigma_1^2 = -2\log(A(\kappa_Q))$ et $\sigma_2^2 = -2\log(A(P_{k-1}))$.

The integral (43) can be rewritten as follows:

$$\mathcal{M}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \approx \int \mathcal{WN}(\theta_k|h\theta_{k-1}, A(\kappa_Q))\mathcal{WN}(\theta_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{k-1})) d\theta_{k-1} \quad (47)$$

Using the homomorphism property of the wrapped distribution [9], (47) can be written as:

$$\approx \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\theta_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(\frac{-(\theta_{k-1} - \hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_2^2}\right) d\theta_{k-1} \quad (48)$$

For $n=0$, this product of Gaussian laws of means $h\theta_{k-1}$ and $\hat{\theta}_{k-1}$ can be rewritten as:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}} \sqrt{\frac{(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}{2\pi(\sigma_1^2\sigma_2^2)}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1})^2}{2(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}\right) \times \exp\left(-\frac{B}{2}\left(\theta_{k-1} - \left(\frac{h\theta_k}{B\sigma_1^2} + \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{B\sigma_2^2}\right)\right)^2\right) \quad (49)$$

where $B = \frac{\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$

The integral (43) is defined with the periodic wrapped distributions \mathcal{WN} by:

$$\mathcal{M}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}} \times \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{2(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta_{k-1}, n) d\theta_{k-1} \quad (50)$$

$$\text{With } g(\theta_{k-1}, n) = \sqrt{\frac{B}{2\pi}} \exp\left(-\frac{B}{2}\left(\theta_{k-1} - \left(\frac{h\theta_k}{B\sigma_1^2} + \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{B\sigma_2^2}\right) + 2\pi n\right)^2\right) \quad (51)$$

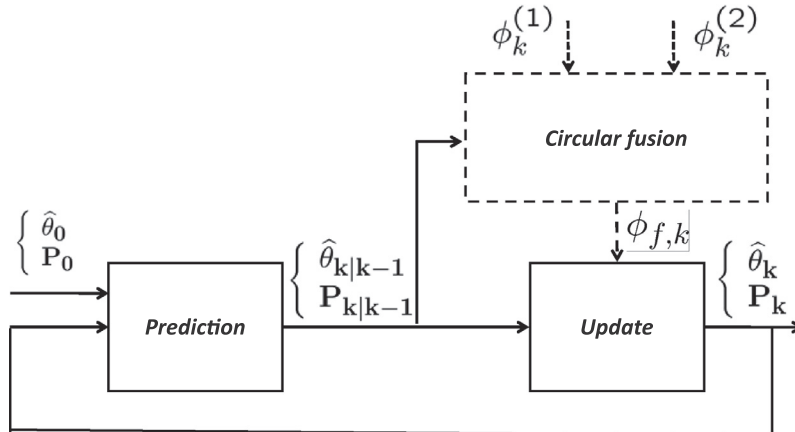


Fig. 2. Architecture of the proposed multi-sensor multi-temporal fusion filter.

$g(\theta_{k-1}, n)$ is a Gaussian law of mean $\frac{h\hat{\theta}_k}{B\sigma_1^2} + \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{B\sigma_2^2}$ and variance $\frac{1}{B}$.

$$\text{It follows : } \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta_{k-1}, n) d\theta_{k-1} = 1 \quad \forall (n) \in \mathbb{R}^2 \quad (52)$$

which implies : $\mathcal{M}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \approx$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{2(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2)}\right) \approx$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi(-4\log(A(h^2P_{k-1})A(\kappa_Q)))}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{(-4\log(A(h^2P_{k-1})A(\kappa_Q)))}\right) \approx$$

$$\mathcal{WN}(\theta_k | h\hat{\theta}_{k-1}, A(h^2P_{k-1})A(\kappa_Q))$$

3.1.2. Update step

In the update step we define $\hat{\theta}_k$ the estimate of θ_k , and its concentration parameter P_k . The update equation is deduced from the posterior probability distribution $f(\theta_k | \phi_{f,1:k})$ defined as follows:

$$\underbrace{f(\theta_k | \phi_{f,1:k})}_{\text{posterior distribution}} \propto \underbrace{f(\theta_k | \phi_{f,1:k-1})}_{\text{prior distribution}} \underbrace{f(\phi_{f,k} | \theta_k)}_{\text{likelihood}} \quad (53)$$

In our model the prior probability distribution and the likelihood follow von Mises distributions. Using Bayes' rule, we derive the posterior probability distribution $f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_k)$ as follows:

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_k) = \frac{1}{Z_k} \mathcal{M}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \mathcal{M}(\phi_{f,k} | \theta_k, \kappa_f) \quad (54)$$

where $Z_k = \mathcal{M}(\phi_{f,k} | \phi_{f,1:k-1})$ is a normalizing constant. This implies:

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_k) \propto \exp(P_{k/k-1} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1}) + \kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k))$$

From Eq. (54), we get:

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_k) \propto \exp(P_{k/k-1} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1})) * \exp(\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)) \quad (55)$$

$$\propto \exp(P_{k/k-1} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1}) + \kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)) \quad (56)$$

$$\propto \exp(C_k \cos(\theta_k) + S_k \sin(\theta_k)) \quad (57)$$

$$\text{with : } C_k = P_{k/k-1} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_f \cos \phi_{f,k} \quad (58)$$

$$S_k = P_{k/k-1} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_f \sin \phi_{f,k} \quad (59)$$

Finally we obtain:

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_k) \propto \exp\left(\sqrt{C_k^2 + S_k^2} \cos(\theta_k - \text{Arctan}^*(S_k, C_k))\right) \quad (60)$$

$$\text{with : } \hat{\theta}_k = \text{Arctan}^*(S_k, C_k) \quad (61)$$

$$P_k = \sqrt{C_k^2 + S_k^2} \quad (62)$$

It is shown in [12], that the estimate $\hat{\theta}_k$ follows a von Mises law. This law is defined by a mean $\text{Arctan}^*(S_k, C_k)$ and a concentration parameter $\sqrt{C_k^2 + S_k^2}$. The posterior probability distribution $f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_k)$ is a distribution of von Mises given by:

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_k) = \mathcal{M}(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_k) = \frac{1}{2\pi I_0(P_k)} \exp(P_k \cos(\theta_k - \hat{\theta}_k)) \quad (63)$$

3.1.3. Ambiguity mitigation

If $|\phi_k^{(i)} - \theta_k| > \pi/2$ there is an indetermination on θ_k the observed angle. Indeed, the measurement $\phi_k^{(i)}$ can be associated with the angle θ_k or to the angle $\theta_k + \pi$. For example, for a null angle and very noisy observations, we can have $|\phi_k^{(i)}| > \pi/2$, in this case $\phi_k^{(i)}$ is closer to π than to 0 (in the minimum circular distance point of view). This measurement will be considered, by error, as an observation of the angle π . We have in this case an ambiguity of π on the angle to estimate. In order to detect a case of ambiguity, we compute the circular distance d_c between the predicted and measured angles [12]:

$$d_c(\phi_k, \theta_k) = 1 - \cos(\phi_k - \theta_k) \quad (64)$$

In order to mitigate the ambiguity we discard the measurement $\phi_k^{(i)}$ whose the circular distance from $\hat{\theta}_{k/k-1}$ is greater than 1 (the circular distance obtained for $|\phi_k^{(i)} - \hat{\theta}_{k/k-1}| > \pi/2$), since it contains little information.

3.2. Circular recursive vector filter

Suppose now that there are two sensors providing two angular measurements and one sensor providing measurements of angular change (the product of angular rate by time interval). The equation of state is in this case given by:

$$\Theta_k = F\Theta_{k-1} + V_{k-1} \quad (65)$$

At each time instant k , $\Theta_k = [\theta_k, \dot{\theta}_k]$ is the state to estimate, where θ_k denotes a random variable describing a direction and $\dot{\theta}_k$ is a random variable describing the variations of angle. F is the transition matrix given by $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \dot{\theta}_{k-1} + v_{1,k-1} \quad (66)$$

$$\dot{\theta}_k = \dot{\theta}_{k-1} + v_{2,k-1} \quad (67)$$

The process noise $V_{k-1} = [v_{1,k-1}, v_{2,k-1}]^T$ is assumed to be drawn from zero mean von Mises distributions with concentration parameters $\kappa_{1,Q}$, $\kappa_{2,Q}$. At instant k , an observation of the state is defined according to:

$$\Phi_{f,k} = H\Theta_{k-1} + W_k \quad (68)$$

where H is the observation matrix:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Phi_{f,k} = [\phi_{f,k}, \dot{\phi}_k]^T$ is the vector of angular measurements. $\phi_{f,k}$ is the fusion of the observations $\phi_k^{(1)}$ and $\phi_k^{(2)}$. $\dot{\phi}_k$ is the angular change observed during a time interval. In the notation $\phi_k^{(i)}$, (i) denotes the i th sensor and k the time instant. The noise vector $W_k = [w_{1,k}, w_{2,k}]^T$ represents the measurements noise error. $w_{1,k}, w_{2,k}$ are two centered noises following respectively a $\mathcal{M}(0, \kappa_{1,R})$ and $\mathcal{M}(0, \kappa_{2,R})$ distribution. $\hat{\Theta}_{k/k-1} = [\hat{\theta}_{k/k-1}, \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1}]$ is the predicted state estimate, $\hat{\Theta}_k = [\hat{\theta}_k, \hat{\dot{\theta}}_k]$ the estimated state and $P_{\hat{\theta}_k}$ and $P_{\hat{\dot{\theta}}_k}$ their respective concentration parameters. The definition of the prediction step is obtained by solving the Chapman–Kolmogorov equation in the independent case with the same demonstration as described Section 3.1. We derive the following equation for the prediction step:

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = \hat{\theta}_{k-1} + \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (69)$$

$$P_{\theta_{k/k-1}} = A^{-1}(A(\kappa_{1,Q})A(P_{\theta_{k-1}})A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})) \quad (70)$$

where $\hat{\theta}_{k-1}$ and $\hat{\dot{\theta}}_{k-1}$ are distributed according to the following von Mises distributions $\mathcal{WN}(\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{\theta_{k-1}}))$ and $\mathcal{WN}(\hat{\dot{\theta}}_{k-1}, A(P_{\dot{\theta}_{k-1}}))$ respectively. Using the additive property of two \mathcal{WN} random

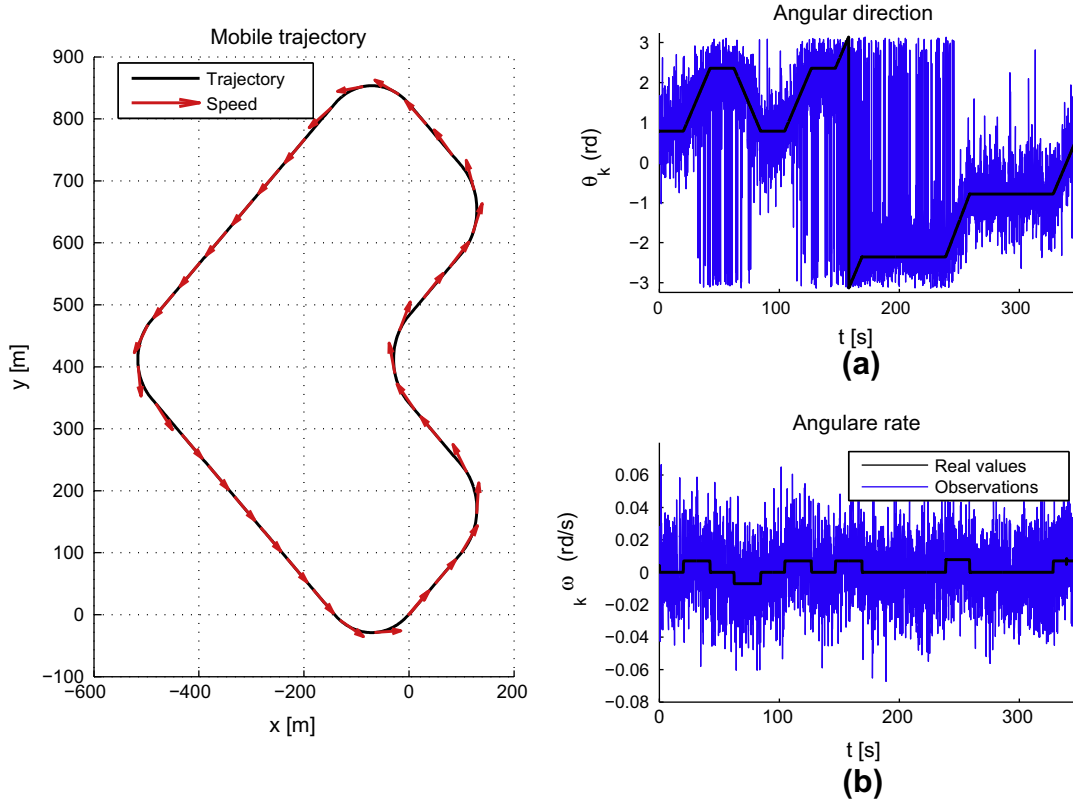


Fig. 3. Mobile trajectory.

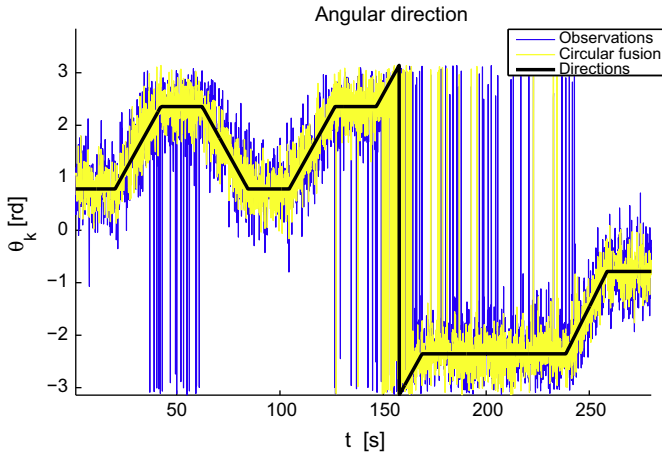


Fig. 4. Real directions and fused measurements for the mobile trajectory.

variables described in the Section 2.1, we show that the sum of the Eq. (66) is distributed according to the distribution $\mathcal{WN}(\hat{\theta}_{k-1} + \hat{\theta}_{k-1}, A(P_{\theta_{k-1}})A(P_{\theta_{k-1}}))$. Then we can define the distribution (46) used in the Chapman-Kolmogorov equation as $\mathcal{WN}(\hat{\theta}_{k-1} | \hat{\theta}_{k-1} + \hat{\theta}_{k-1}, A(P_{\theta_{k-1}})A(P_{\theta_{k-1}}))$. We solve the Chapman-Kolmogorov equation and we derive the Eq. (70).

However the prediction step defined by the state model (66) introduces a correlation between the states, which is not considered in the resolution of the Chapman Kolmogorov equation. The consequence of this approximation is that the parameter of concentration $P_{\theta_{k/k-1}}$ is underestimated. We will define how we correct this underestimation in the update step.

We can derive the following prediction equation associated to the equation of state (67):

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = \hat{\theta}_{k-1} \quad (71)$$

$$P_{\theta_{k/k-1}} = A^{-1}(A(\kappa_{2,Q})A(P_{\theta_{k-1}})) \quad (72)$$

In order to define the update step in the circular case, we use the analogy with the linear domain. In Appendix A, the update step of an Alpha Beta filter is defined in the linear domain by the following weighted sum:

$$\hat{x}_k = \beta_{11}\hat{x}_{k/k-1} + \beta_{12}Z_k + \beta_{13}(\dot{Z}_k + \hat{x}_{k-1}) \quad (73)$$

$$\hat{\hat{x}}_k = \beta_{21}\hat{\hat{x}}_{k/k-1} + \beta_{22}\dot{Z}_k + \beta_{23}(Z_k - \hat{x}_{k-1}) \quad (74)$$

where $\hat{X}_k = [\hat{x}_k, \hat{\hat{x}}_k]^T$ is the estimated state, $\hat{X}_{k/k-1} = [\hat{x}_{k/k-1}, \hat{\hat{x}}_{k/k-1}]^T$ is the predicted state and $Z_k = [z_k, \dot{z}_k]^T$ the measurement. By analogy we define in the circular domain the estimated direction as the ‘‘circular weighted sum’’ (31) of $\hat{\theta}_{k/k-1}$, $\phi_{f,k}$, $\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}$. The estimated angular change is the ‘‘circular weighted sum’’ (31) of $\dot{\phi}_k$, $\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}$ and $\hat{\theta}_{k/k-1}$. We show in Appendix B that the following ‘‘circular weighted sum’’ is the MAP estimate. It follows:

$$C_{\theta_k} = \alpha_{11} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{12} \cos \phi_{f,k} + \alpha_{13} \cos(\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}) \quad (75)$$

$$S_{\theta_k} = \alpha_{11} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{12} \sin \phi_{f,k} + \alpha_{13} \sin(\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}) \quad (76)$$

with

$$\alpha_{11} = P_{\theta_{k/k-1}} \quad (77)$$

$$\alpha_{12} = \kappa_{1,R} \quad (78)$$

$$\alpha_{13} = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(\kappa_{2,R})) \quad (79)$$

For the angular change we obtain:

$$C_{\dot{\theta}_k} = \alpha_{21} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{22} \cos \dot{\phi}_k + \alpha_{23} \cos(\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (80)$$

$$S_{\dot{\theta}_k} = \alpha_{21} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \alpha_{22} \sin \dot{\phi}_k + \alpha_{23} \sin(\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (81)$$

with

$$\alpha_{21} = P_{\hat{\theta}_{k|k-1}} \quad (82)$$

$$\alpha_{22} = \kappa_{2,R} \quad (83)$$

$$\alpha_{23} = A^{-1}(A(P_{\hat{\theta}_{k-1}})A(\kappa_{1,R})) \quad (84)$$

These equations act as the weighted sum (73) and (74) in the circular domain. In these expressions the coefficients α of the weighted sum are the concentration parameters of the circular random variables distributed according to von Mises distributions. The weight α_{11} is underestimated due to the fact that we do not take into account the correlation introduced by Eq. (66). In practice we can tune the filter with the parameter $\kappa_{1,Q}$ so we compensate this underestimation by increasing its value. Finally, we obtain the estimates of θ_k and $\dot{\theta}_k$ distributed according to von Mises distributions with parameters defined by:

$$P_{\theta_k} = \sqrt{C_{\theta_k}^2 + S_{\theta_k}^2} \quad (85)$$

$$P_{\dot{\theta}_k} = \sqrt{C_{\dot{\theta}_k}^2 + S_{\dot{\theta}_k}^2} \quad (86)$$

$$\hat{\theta}_k = \text{Arctan}^*(S_{\theta_k}, C_{\theta_k}) \quad (87)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_k = \text{Arctan}^*(S_{\dot{\theta}_k}, C_{\dot{\theta}_k}) \quad (88)$$

4. Experimentation

We realized three experiments with different goals. First we assess the proposed fusion operator on synthetic data, next the recursive circular filter is assessed on synthetic data. Finally, an experimentation is performed with real magnetometer and gyroscope measurements in order to show the feasibility and the interest of the method.

In the synthetic case we consider a moving system with two sensors providing measurements of the mobile direction, while

the other sensor provides measurements of the system angular velocity. The two sensors are assumed to be independent and the measurements errors uncorrelated. The sensors provide the measurements with a sampling frequency of 10 Hz. The mobile trajectory and an example of measurements provided by the sensors are illustrated in Fig. 3. We depict in Fig. 3a the mobile direction and in Fig. 3b the angular velocity of the mobile. The additive noises on the angular direction and on the angular velocity follow a von Mises law. On this example the concentration parameter of the noise is $\kappa_{1,R}^{(1)} = 3$ for the direction and $\kappa_{2,R} = 3000$ for the angular velocity.

In the next section, the proposed methods are compared to the classical techniques used in the linear domain: the weighted sum and the Kalman filter. The performances of both methods are evaluated using the circular distance d_c and the circular dispersion D_v defined for measurements of the circular domain. These measurements of distance and dispersion are computed with the following expressions [12]:

$$d_c = 1 - \cos(\theta - \phi_k) \quad (89)$$

$$D_v = n - \sum_{k=1}^n \cos(\theta - \phi_k) \quad (90)$$

where n is the number of observations ϕ_k of θ . The circular distance takes the following values:

$$d_c = 0 \text{ when } \theta - \phi_k = 0$$

$$d_c = 2 \text{ when } |\theta - \phi_k| = \pi$$

4.1. Fusion operator: synthetic case

Fig. 4 shows the values of directional measurements and the fusion of the observed direction for the trajectory of Fig. 3. In Fig. 4, we show the result obtained with the circular fusion operator and

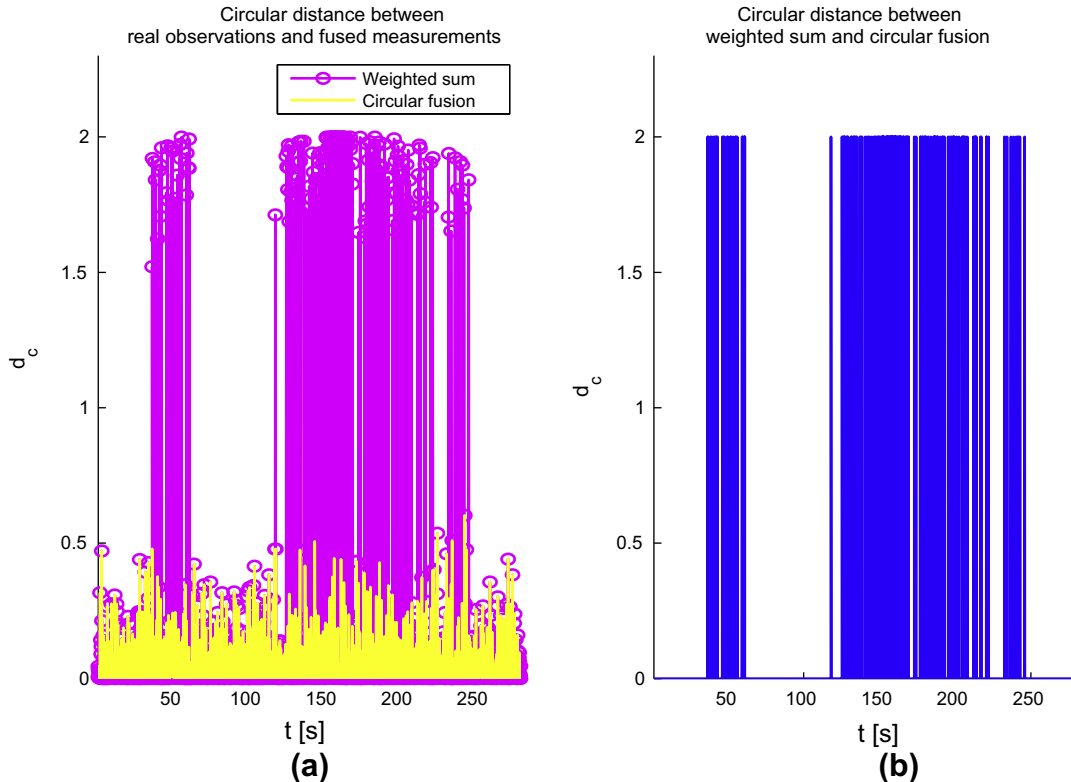


Fig. 5. Circular distance as a function of the concentration parameter κ_f .

for noise measurements distributed according to von Mises distributions of concentration parameters $\kappa_{1,R}^{(1)} = \kappa_{1,R}^{(2)} = 5$. In this figure the fused measurements are more concentrated around the real direction compared to the measurements.

We depict in Fig. 5a the circular distance between the real direction and the direction processed by the proposed circular fusion operator and the classical weighted sum fusion operator. We show in Fig. 5b the circular distance between the fused measurements obtained with the circular fusion operator and the weighted sum. It can be noticed in Fig. 5b that the weighted sum and the circular fusion operator produce the same results for angles close to the null direction. At the transitions, the classical weighted sum operator is failing because it does not take the periodic nature of the angular observations into account. In this case, the circular distances between the angles is 2.

We present in Table 1 the estimated circular dispersion between the real angle and the angle computed with the fusion operators. This dispersion is processed for several values of the

Table 1
Circular dispersion of the observed direction.

Parameters $\kappa_{1,R}^{(1)} = \kappa_{1,R}^{(2)}$	Circular dispersion		
	Measurement	Weighted sum	Circular fusion
0.5	0.746	0.806	0.691
1.0	0.540	0.615	0.434
2.0	0.307	0.375	0.190
3.0	0.189	0.261	0.108
4.0	0.133	0.193	0.070
5.0	0.109	0.148	0.056
6.0	0.090	0.128	0.046
7.0	0.073	0.096	0.038
8.0	0.064	0.083	0.034
9.0	0.057	0.080	0.029
10.0	0.053	0.067	0.027

concentration parameters $\kappa_{1,R}^{(1)}$ and $\kappa_{1,R}^{(2)}$ of the noisy observations. The estimated dispersion reported in Table 1 shows that the estimated direction obtained with the proposed operator is more precise than the sensors measurements and the linear weighted sum fusion operator. For all the values of $\kappa_{1,R}^{(1)}$ the dispersion is indeed the smallest. We can notice in Table 1 that the weighted sum is less accurate than the measurements because the estimated dispersion is higher. This result is explained by the fact that the weighted sum does not take the transitions between $-\pi$ and π into account.

We can observe in the Table 1 that for $\kappa_{1,R}^{(1)} > 3$, the dispersion of the circular fusion operator is approximately half the dispersion of the measurements. This result is in accordance with the theoretical point of view because for high value of the concentration parameter (low variances) the Gaussian Bayesian framework can be used as an approximation in the circular domain. On the other hand for $\kappa_{1,R}^{(1)} < 3$, some observations are separated from the true direction by an angle superior to $\pi/2$ which causes the ambiguity on the angle to estimate. In this case the fusion operators estimate with the ambiguous observations the true direction plus π . The proposed fusion operator is less accurate in this case and the dispersion of the measurements processed by the circular fusion operator is lower than half the dispersion of the measurements.

4.2. Recursive circular filter: synthetic case

In this section we assess the proposed recursive circular filter. For this experimentation we consider observations of directions and angular rates provided by two different sensors. Fig. 6a shows the measurements of direction and the estimated directions provided by the proposed filter and the Kalman filter. We show in Fig. 6b the measurements of angular velocity and the estimated angular velocities obtained with both filters. In Fig. 6a, the measurements of directions are generated with random noises following a von Mises distribution with concentration parameter $\kappa_{1,R}^{(1)} = \kappa_{1,R}^{(2)} = 3$. In Fig. 6b, the measurements of angular velocity

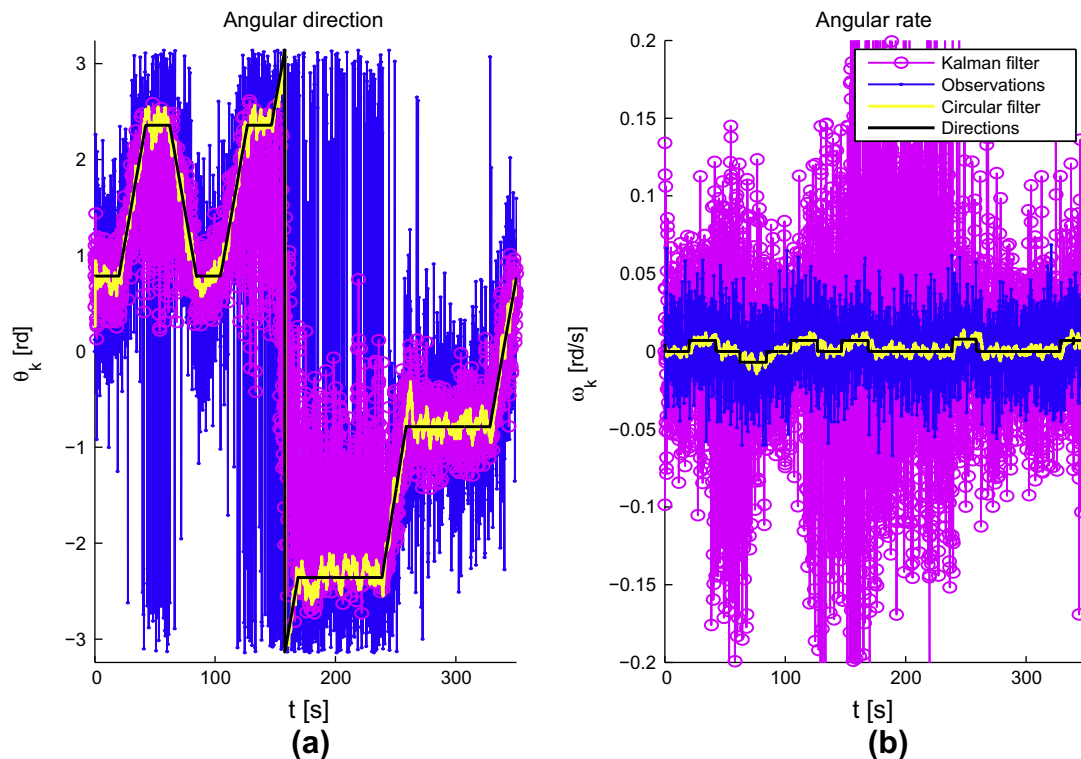


Fig. 6. Estimated direction and angular rate.

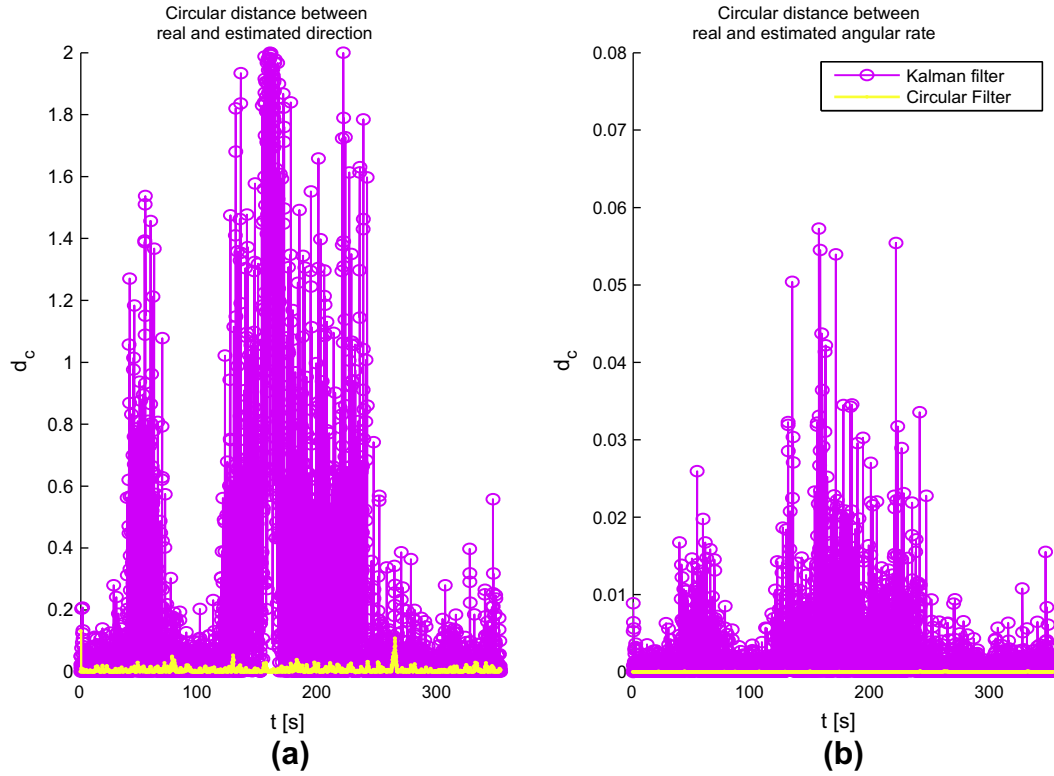


Fig. 7. Circular distances as a function of time.

Table 2
Dispersion of the estimated direction.

Parameters $\kappa_{1,R}^{(1)}$	Circular dispersion		
	Measurement	Kalman filter	Circular filter
0.5	0.746	0.725	0.378
1.0	0.540	0.506	0.050
2.0	0.307	0.248	0.011
3.0	0.189	0.156	0.006
4.0	0.133	0.097	0.005
5.0	0.109	0.062	0.003
6.0	0.090	0.051	0.003
7.0	0.073	0.049	0.003
8.0	0.064	0.041	0.003
9.0	0.057	0.039	0.003
10.0	0.053	0.039	0.002

Table 3
Dispersion of the estimated angular rate.

Parameters $\kappa_{2,R}$	Circular dispersion		
	Measurement	Kalman filter	Circular filter
500	7.46e-001	4.60e-005	1.32e-005
1000	5.40e-001	3.00e-005	9.50e-006
2000	3.07e-001	2.68e-005	5.77e-006
3000	1.89e-001	2.82e-005	4.49e-006
4000	1.33e-001	2.89e-005	3.83e-006
5000	1.09e-001	3.19e-005	3.54e-006
6000	9.01e-002	3.26e-005	3.38e-006
7000	7.33e-002	3.34e-005	3.11e-006
8000	6.39e-002	3.66e-005	3.47e-006
9000	5.75e-002	3.55e-005	3.31e-006
10,000	5.27e-002	3.52e-005	3.24e-006

are generated with a random noise following a von Mises distribution of concentration parameter $\kappa_{2,R} = 3000$. In these figures, the estimated directions and angular velocities are obtained with the

Table 4
Circular dispersion obtained with the circular fusion operator with or without the ambiguity processing.

Parameters $\kappa_{1,R}^{(1)} = \kappa_{1,R}^{(2)}$	Circular dispersion		
	Measurement	Equivocal circular fusion	Circular fusion
0.5	0.746	0.691	0.483
1.0	0.540	0.434	0.193
2.0	0.307	0.190	0.126
3.0	0.189	0.108	0.093
4.0	0.133	0.070	0.068
5.0	0.109	0.056	0.055
6.0	0.090	0.046	0.046

proposed recursive circular filter and a Kalman filter. In this experimentation, the state noise covariance matrix of the Kalman filter is $Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and the covariance matrix of the measurement noise is $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. For the circular filter, the concentration parameters of the state noise is $\kappa_{1,Q} = 1e3$, $\kappa_{2,Q} = 1e6$ and the concentration parameters of the measurement noise is $\kappa_{1,R} = 10$, $\kappa_{2,R} = 10$. It can be noticed in Fig. 6a that the proposed circular filter provides the best estimations of direction and angular velocity compared to those obtained with the Kalman filter. In this experimentation the Kalman filter fails because the transitions between $-\pi$ and π are seen in the linear domain as abrupt changes. Furthermore the error of direction estimation is reported on the angular velocity estimation. In this case, the angular velocity estimation is corrupted at the change instants (transitions between $-\pi$ and π).

We show in Fig. 7a the circular distance between the real direction and the directions estimated with the Kalman filter and the proposed circular filter. We show in Fig. 7b the circular distance

between the real angular velocity and the angular velocities estimated with both filters. These circular distances are computed with the signals presented in Fig. 6. We show again with these results the superiority of the proposed filter compared to the Kalman filter for the filtering of angular data, since lower circular distances for the direction and the angular velocity are obtained using the circular filter.

We present in Table 2 the dispersion between the real angle and the estimated angle obtained by filtering. The dispersion is processed for different values of the concentration parameter

$\kappa_{1,R}^{(1)} = \kappa_{1,R}^{(2)}$ of the noisy measurements. We report in Table 3 the circular dispersion between the real angular velocity and the estimated angular velocities obtained by filtering. The dispersion is processed for different values of the concentration parameter $\kappa_{2,R}$ of the noisy measurements.

The results reported in Tables 2 and 3 show that the circular filter is more precise (less dispersive) than both the Kalman filter and measurements. The direction and angular velocity dispersions are indeed lower for all the values of $\kappa_{1,R}^{(1)}$ and $\kappa_{2,R}$. These results can also be explained by the failure of the Kalman filter at the transitions between $-\pi$ and π . We report in Table 4 the circular dispersion obtained with the circular fusion operator with or without the ambiguity processing. In this case, the ambiguity of π on the angle to estimate is processed with the predicted angle (obtained with the previous estimate and the equation of states) provided by the circular filter. The ambiguous measurements are detected and discarded. It follows for $\kappa_{1,R}^{(1)} < 3$ a dispersion close to half the dispersion of the measurements as expected by the theoretical point of view. This experiment demonstrates that the ambiguity processing improves the accuracy of the proposed fusion filter.

To conclude, the proposed fusion operator provides the same accuracy as the classical weighted sum in the linear domain when there is no transition between $-\pi$ and π in the angular values, i.e., when the ambiguity is processed. In this case, we show experimentally that we retrieve the property of the weighted sum of Gaussian random variables. We can indeed express the dispersion of the circular fusion operator according to the measurements dispersion. When there are some transitions between $-\pi$ and π in the measurements, the proposed circular filter is more accurate and it preserves the property of the Gaussian linear domain.

The Kalman filter is a weighted sum of the predicted parameter estimate and the measurement. This weighted sum is an estimate that integrates the correlation of the state vector elements. This is the reason why the errors on direction estimation are transferred on the angular velocity estimation. It explains why we obtain poor results on the angular velocity estimation with a Kalman filter. We



Fig. 8. The real trajectory.

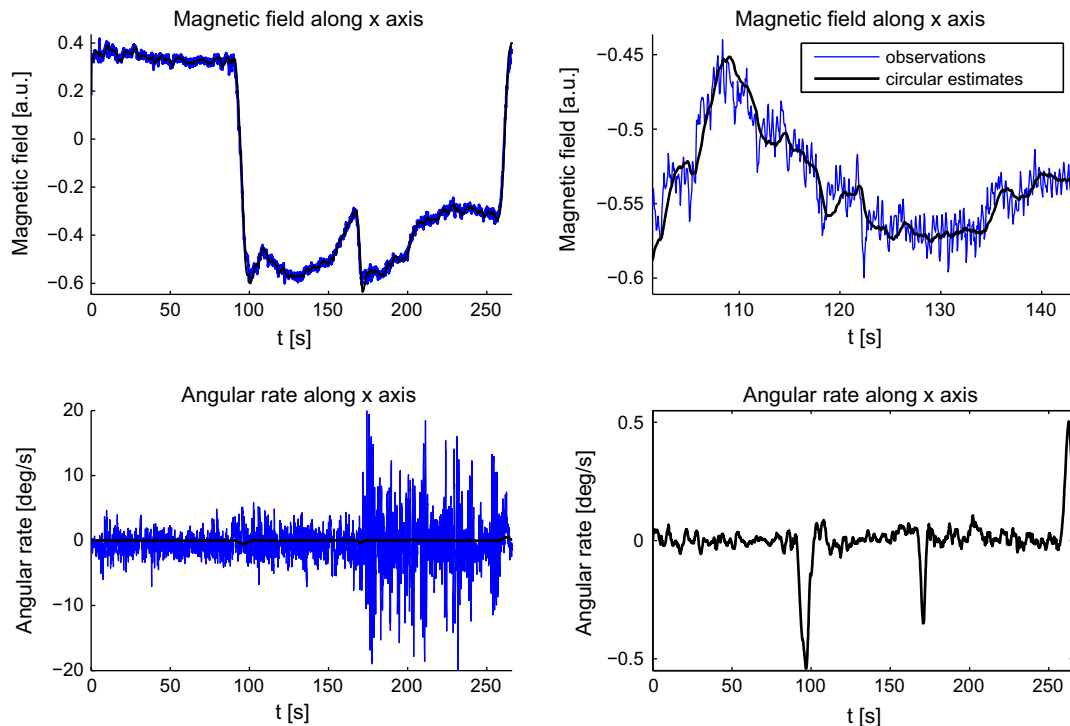


Fig. 9. Sensors measurements, estimated magnetic field and angular rate along the x axis.

propose in this article that the circular recursive filter employs the circular fusion operator to combine the predicted state with the measurements. We show that for angular periodic data the proposed circular weighted sum is more accurate than the classical linear weighted sum then we have the same conclusion for the multi-temporal fusion filter.

4.3. Recursive circular filter: real case

Many electronic systems onboard moving sensors to provide information about their surrounding environment. The mobile system should direct its sensors in the direction of its displacement. The azimuth direction is of primary importance to understand

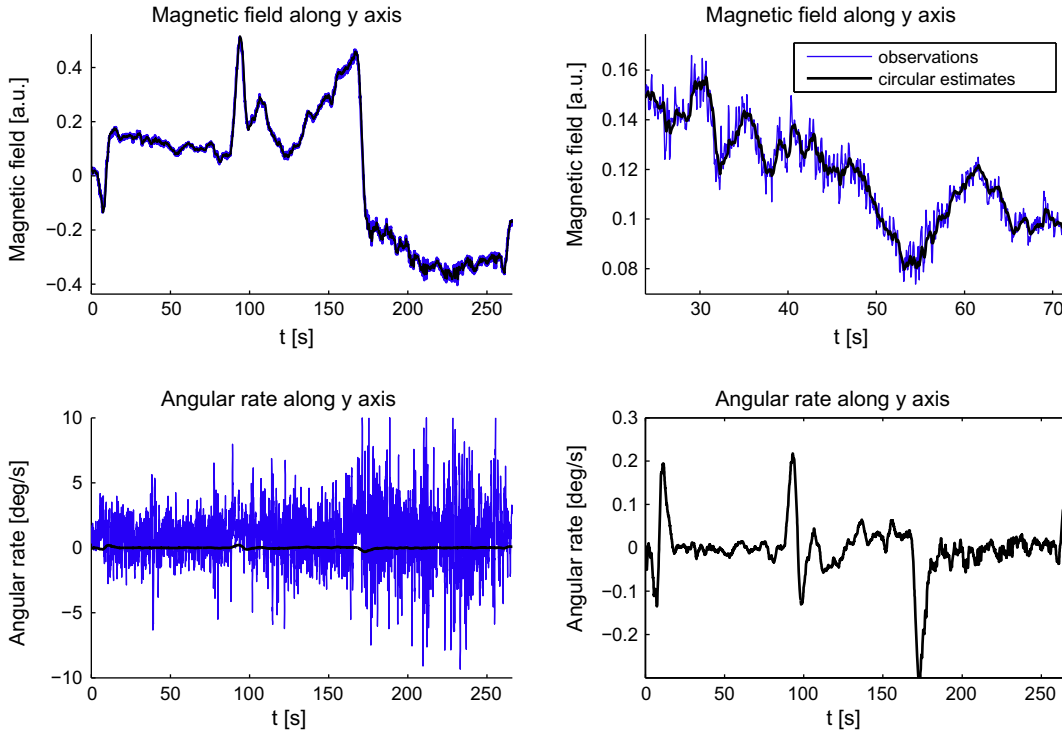


Fig. 10. Sensors measurements, estimated magnetic field and angular rate along the y axis.

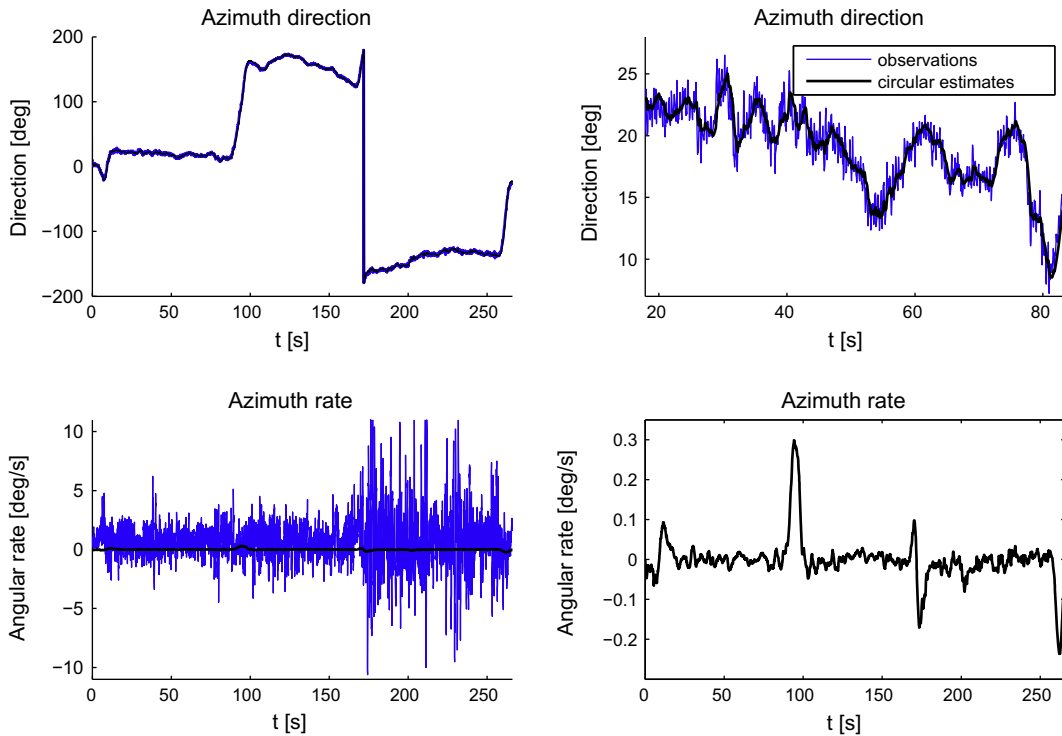


Fig. 11. Azimuth measurements, estimated azimuth and angular rate.

the place where the mobile is going and where it has to direct its sensors.

An electronic compass computes the azimuth of the mobile with the earth magnetic field measurements sensed along the x and y axis of the earth-fixed reference co-ordinate system. This sensor is sensible to the electromagnetic perturbations of the environment composed of Ferro-electric elements. The azimuth rate of turn is computed with two orthogonally-oriented gyroscopes that form a dual axis rate sensor. The two gyroscopes are oriented along the x and y axis of the earth-fixed reference co-ordinate system. We use in this real experimentation a sensor MT9 supplied by the society Xsens Technologies B.V. This sensor provides measurements, in real time, of orientation and acceleration in the three-dimensional space. These measurements are obtained with magnetometers, gyroscopes and accelerometers.

We show in Fig. 8 the real triangular-like trajectory realized with the multi-sensor system embedded in a vehicle. The trajectory is composed of two country lanes joined by a dirt road. The vehicle drives on the first country lane and then takes the second country lane after a turn. The vehicle drives from the second country lane to the dirt road after a turn and closes the loop.

We depict in Fig. 9 the angular rate and magnetic field observed along the x axis of the absolute reference of the system. We also shows in this figure the estimated magnetic field and angular rate obtained with the proposed multi-temporal circular fusion filter. We show in Fig. 10 the angular rate and magnetic field observed along the y axis and their estimates computed with the proposed filter. It can be noticed in Fig. 9 and in Fig. 10 that the noise power increases, on the magnetic field and angular rate observations, after 175 s when we enter the dirt road because of the uneven ground.

The estimated magnetic field and angular rate are less dispersive with the proposed filter than with the measurements. This estimate is insensitive to the signal to noise change that occurs at the 175th s. We can clearly observe that the estimated angular rate changes with respect to the turns of the vehicle. The same observation cannot be made from the measurements only.

We show in Fig. 11 the azimuth direction and azimuth rate computed with the values of magnetic field and angular rate defined along the x and y axis. The azimuth direction is the quadrant specific inverse tangent of the magnetic field along the y and x axis. The azimuth rate is the quadrant specific inverse tangent of the angular rate along the y and x axis.

The results depicted Fig. 11 show the feasibility of the proposed filter on real data. We can observe on this figure that the estimated azimuth and angular velocity provided by the multi-temporal circular filter are more precise than the measurements provided by the electronic compass. The estimates are indeed less dispersive and more robust.

5. Conclusion

We propose in this article a fusion operator and a recursive filter for the estimation of circular random processes. This work is applied to the estimation of the orientation and angular rate of a mobile.

In our approach a state model is used in design of a multi-temporal fusion filter. We assume that both measurement and state noise errors follow a von Mises law. Under the assumptions above, we derive in a Bayesian framework a multi-sensor and multi-temporal circular fusion filter. The proposed circular filter and fusion operator integrate the periodic nature of the angular data unlike the Kalman filter described in the linear domain by a Gaussian distribution. In this context, the proposed filter does not process the transitions between $-\pi$ and π as abrupt changes. Furthermore

we show that coupling the proposed fusion operator with the proposed multi-temporal fusion filter allows to process the ambiguity of π on the state to estimate observed with noisy measurements.

We assess the proposed circular filter and fusion operator on synthetic data. We show that the estimates of the proposed fusion operator are more accurate than the estimates provided by the classical fusion operator defined in the linear domain. The estimated direction and angular rate are indeed less dispersive than the estimates obtained with a Kalman filter. In the experimentation on real data, the proposed filter is applied to the estimation of the azimuth direction from data provided by magnetic compasses and gyroscopes. We show in this experimentation that the proposed filter provides a robust and accurate estimation of the azimuth.

The prospects of this work concern the development of a circular filter in a Bayesian framework that takes into account the correlation between the components of the state vector.

Appendix A. Update step in the linear domain

The classical equations of the Kalman filter that link the state vector $\hat{X}_k = [\hat{x}_k, \hat{y}_k]$ to the predicted state $\hat{X}_{k/k-1} = [\hat{x}_{k/k-1}, \hat{y}_{k/k-1}]$ and to the measurement $Z_k = [z_k, \dot{z}_k]^T$ are the maximum *a posteriori* estimate defined in [31] with the following equations:

$$\hat{X}_k = \frac{P_k}{P_{k/k-1}} \hat{X}_{k/k-1} + \frac{P_k * H^T}{R} Z_k \quad (A.1)$$

$$\frac{1}{P_k} = \frac{1}{P_{k/k-1}} + \frac{H^T}{R} \quad (A.2)$$

In the scalar case expression (A.1) is a weighted sum (with normalized weights) between the measurement and the predicted state. In these expressions $P_k, P_{k/k-1}$ respectively define the covariance matrices of the estimated and predicted states. R is the covariance matrix of the measurement errors and H the observation matrix. In Section 2.2 expression (61) defines a weighted sum of angle values in the circular domain. Like in the linear domain this weighted sum combines the measurement and the predicted state. Let H be the observation matrix and F the transition matrix:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Let R be the observation matrix and Q the transition matrix:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

Using a symbolic solver we derive the following relations for the equation of correction (A.1):

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k/k-1} \\ \hat{y}_{k/k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-a) & b \\ c & (1-d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ \dot{z}_k \end{bmatrix}$$

With the equation of state:

$$\hat{x}_{k/k-1} = \hat{x}_{k-1} + \hat{y}_{k-1}$$

$$\hat{y}_{k/k-1} = \hat{y}_{k-1}$$

We derive the following weighted sum for \hat{x}_k :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= a\hat{x}_{k/k-1} + (1-a)z_k + b(\dot{z}_k - \hat{y}_{k/k-1}) \\ &= a\hat{x}_{k/k-1} + (1-a)z_k + b(\dot{z}_k - (\hat{x}_{k/k-1} - \hat{x}_{k-1})) \\ &= (a-b)\hat{x}_{k/k-1} + (1-a)z_k + b(\dot{z}_k + \hat{x}_{k-1}) \\ &= \beta_{11}\hat{x}_{k/k-1} + \beta_{12}z_k + \beta_{13}(\dot{z}_k + \hat{x}_{k-1}) \end{aligned} \quad (A.3)$$

where

$$\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} = 1$$

We derive the following weighted sum for \hat{x}_k :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= d\hat{x}_{k/k-1} + (1-d)\dot{z}_k + c(z_k - \hat{x}_{k/k-1}) \\ &= d\hat{x}_{k/k-1} + (1-d)\dot{z}_k + c(z_k - (\hat{x}_{k/k-1} + \hat{x}_{k-1})) \\ &= (d-c)\hat{x}_{k/k-1} + (1-d)\dot{z}_k + c(z_k - \hat{x}_{k-1}) \\ &= \beta_{21}\hat{x}_{k/k-1} + \beta_{22}\dot{z}_k + \beta_{23}(z_k - \hat{x}_{k-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where

$$\beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} = 1$$

These sums (A.3) and (A.4) are the maximum *a posteriori* estimate of the states given the predicted states and measurements. There weights are defined with the variances and covariance of the predicted states and measurements [15].

Appendix B. Update step in the circular domain

We define $f(\theta_k|\hat{\theta}_k, P_k)$, the posterior probability distribution of the state knowing the estimate. We define this distribution by analogy with the linear case. In the Kalman alpha-beta filter the direction is observed via the measurement, the predicted state and the sum of the angular variation with the previous state (expression (A.3)). According to the observations $\phi_{f,k}$ and $\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}$ are independent, the Bayes' rule implies that the posterior probability distribution of the angle is:

$$\begin{aligned} f(\theta_k|\hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) &= \frac{1}{\alpha_k} \mathcal{M}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \mathcal{M}(\dot{\phi}_k \\ &\quad + \hat{\theta}_{k-1}|\theta_k, \tilde{\kappa}_1) \mathcal{M}(\phi_{f,k}|\theta_k, \kappa_R) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

where $\alpha_k = \mathcal{M}(\phi_{f,k}|\phi_{f,1:k-1})$ is a normalizing constant.

$\tilde{\kappa}_1 = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(\kappa_{2,R}))$ is associated to the sum $\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}$ [27].

The same reasoning (analogy with expression (A.4)) allows to define the posterior probability distribution $f(\hat{\theta}_k|\hat{\theta}_k, P_{\hat{\theta}_k})$. The Bayes' rule implies that the angular change posterior probability distribution is as follows:

$$\begin{aligned} f(\hat{\theta}_k|\hat{\theta}_k, P_{\hat{\theta}_k}) &= \frac{1}{\beta_k} \mathcal{M}(\hat{\theta}_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\hat{\theta}_{k/k-1}}) \mathcal{M}(\phi_{f,k} \\ &\quad - \hat{\theta}_{k-1}|\hat{\theta}_k, \tilde{\kappa}) \mathcal{M}(\dot{\phi}_k|\hat{\theta}_k, \kappa_{2,R}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

where β_k is also a normalizing constant and $\tilde{\kappa}_2 = A^{-1}(A(\kappa_{1,R})A(P_{\hat{\theta}_{k-1}}))$ is associated to the difference $\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}$. Expressions of $\tilde{\kappa}_2$ and of the posterior probability distribution are defined as for the direction described previously.

Then:

$$\begin{aligned} f(\theta_k|\hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) &\propto \exp(P_{\theta_{k/k-1}} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1})) * \exp(\tilde{\kappa}_2 \cos(\dot{\phi}_k \\ &\quad + \hat{\theta}_{k-1} - \theta_k)) \exp(\kappa_{f,R} \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} f(\hat{\theta}_k|\hat{\theta}_k, P_{\hat{\theta}_k}) &\propto \exp(P_{\hat{\theta}_{k/k-1}} \cos(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k/k-1})) * \exp(\tilde{\kappa}_2 \cos(\phi_{f,k} \\ &\quad - \hat{\theta}_{k-1} - \hat{\theta}_k)) \exp(\kappa_{2,R} \cos(\dot{\phi}_k - \hat{\theta}_k)) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Finally the maximum *a posteriori* estimate can be derived as in (2.2) by differentiating the log of $f(\theta_k|\hat{\theta}_k, P_{\theta_k})$ and $f(\hat{\theta}_k|\hat{\theta}_k, P_{\hat{\theta}_k})$:

$$\hat{\theta}_k = \text{Arctan}^*(S_{\theta_k}, C_{\theta_k}) \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{\dot{\theta}}_k = \text{Arctan}^*(S_{\dot{\theta}_k}, C_{\dot{\theta}_k}) \quad (\text{B.6})$$

with:

$$C_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa}_1 \cos(\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}) + \kappa_{f,R} \cos \phi_{f,k} \quad (\text{B.7})$$

$$S_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa}_1 \sin(\dot{\phi}_k + \hat{\theta}_{k-1}) + \kappa_{f,R} \sin \phi_{f,k} \quad (\text{B.8})$$

$$C_{\dot{\theta}_k} = P_{\hat{\theta}_{k/k-1}} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa}_2 \cos(\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}) + \kappa_{2,R} \cos \dot{\phi}_k \quad (\text{B.9})$$

$$S_{\dot{\theta}_k} = P_{\hat{\theta}_{k/k-1}} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \tilde{\kappa}_2 \sin(\phi_{f,k} - \hat{\theta}_{k-1}) + \kappa_{2,R} \sin \dot{\phi}_k \quad (\text{B.10})$$

These estimate are distributed according to:

$$f(\theta_k|\hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) \propto \exp(P_{\theta_k} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_k))$$

$$f(\hat{\theta}_k|\hat{\theta}_k, P_{\hat{\theta}_k}) \propto \exp(P_{\hat{\theta}_k} \cos(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k))$$

With:

$$P_{\theta_k} = \sqrt{C_{\theta_k}^2 + S_{\theta_k}^2} \quad (\text{B.11})$$

$$P_{\hat{\theta}_k} = \sqrt{C_{\hat{\theta}_k}^2 + S_{\hat{\theta}_k}^2} \quad (\text{B.12})$$

References

- [1] N.I. Fisher, Problem with the current definition of the standard deviation of wind direction, *Journal of Climate and Applied Meteorology* 26 (1987) 1522–1529.
- [2] C. Mello, Statistiques circulaires et utilisations en psychologie, *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology* 1 (2005) 11–17.
- [3] K.V. Mardia, C.C. Taylor, G.K. Subramaniam, Protein bioinformatics and mixtures of bivariate von Mises distributions for angular data, *Biometrics* 63 (2007) 505–512.
- [4] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.-B. Choquel, M. Benjelloun, A multi-sensor circular particle filter applied to the fusion of the GPS-L2C channels, in: *Proceedings of the 14th International Conference on Information Fusion*, 2011, pp. 1–8.
- [5] S. Reboul, M. Benjelloun, Joint segmentation of the wind speed and direction, *Signal Processing* 86 (2006) 744–759.
- [6] N. Dobigeon, J. Tourneret, Joint segmentation of wind speed and direction using a hierarchical model, *Computational Statistics & Data Analysis* 51 (2006) 5603–5621.
- [7] R. Gatto, S.R. Jammalamadaka, The generalized von Mises distribution, *Statistical Methodology* 4 (2007) 341–353.
- [8] M. Azmani, S. Reboul, J.B. Choquel, M. Benjelloun, Etude et mise en oeuvre d'un estimateur récursif des paramètres statistiques d'une distribution circulaire de von Mises et d'une distribution Log-normale, *Journal Européen des Systèmes Automatisés* 44 (2010) 525–545.
- [9] K.V. Mardia, P.E. Jupp, *Directional Statistics*, Wiley, Chichester, 1999.
- [10] K.V. Mardia, S.A.M. El-Atoum, Bayesian inference for the Von Mises-Fisher distribution, *Biometrika* 63 (1976) 203–206.
- [11] K. Ghosh, S.R. Jammalamadaka, M. Vasudaven, Change-point problems for the von Mises distribution, *Journal of Applied Statistics* 26 (1999) 423–434.
- [12] S.R. Jammalamadaka, A. SenGupta, *Topics in Circular Statistics*, World Scientific Publ., New Jersey, 2001.
- [13] A. Sengupta, A.K. Laha, A Bayesian analysis of the change-point problem for directional data, *Journal of Applied Statistics* 35 (2008) 693–700.
- [14] V. Shin, Y. Lee, T.S. Choi, Generalized Millman's formula and its application for estimation problems, *Signal Processing* 86 (2006) 257–266.
- [15] J. Kacemi, S. Reboul, M. Benjelloun, Information fusion in a multi-frequencies GPS receiver, in: *Position Location and Navigation Symposium (PLANS)*, 2004, pp. 399–404.
- [16] D.L. Hall, S.A.H. McMullen, *Mathematical Techniques in Multisensor Data Fusion*, Artech House, Norwood, 2004.
- [17] F. Gustafsson, *Adaptive Filtering and Change Detection*, Wiley, 2001.
- [18] H. Qi, J.B. Moore, Direct Kalman filtering approach for GPS/INS integration, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 38 (2002) 687–693.
- [19] N.I. Ziedan, *GNSS Receivers for Weak Signals*, Artech House, Norwood, 2004.
- [20] B. Barshan, H.G. Durrant-Whyte, Evaluation of a solid-state gyroscope for robotics applications, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 44 (1994) 61–67.
- [21] X. Yun, E.R. Bachmann, Design, implementation, and experimental results of a quaternion-based Kalman filter for human body motion tracking, *IEEE Transactions on Robotics* 22 (2006) 1216–1217.
- [22] B. Ristic, M.S. Arulampalam, Tracking a manoeuvring target using angle-only measurements: algorithms and performance, *Signal Processing* 83 (2003) 1223–1238.
- [23] I. Markovic, I. Petrovic, Speaker localization and tracking with a microphone array on a mobile robot using von Mises distribution and particle filtering, *Robotics and Autonomous Systems* 58 (2010) 1185–1196.

- [24] M. Azmani, S. Reboul, J.-B. Choquel, M. Benjelloun, A recursive fusion filter for angular data, in: Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, 2009, pp. 882–887.
- [25] I. Markovic, I. Petrovic, Bearing-only tracking with a mixture of von Mises distributions, in: IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012, pp. 707–712.
- [26] G. Stienne, S. Reboul, J.-B. Choquel, M. Benjelloun, Circular data processing tools applied to a phase open loop architecture for multi-channels signals tracking, in: Position Location and Navigation Symposium (PLANS), 2012, pp. 633–642.
- [27] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.-B. Choquel, M. Benjelloun, GNSS dataless signal tracking with a delay semi-open loop and a phase open loop, Signal Processing 93 (2013) 1192–1209.
- [28] X. Yun, E.R. Bachmann, R.B. McGhee, A simplified quaternion-based algorithm for orientation estimation from earth gravity and magnetic field measurements, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement 57 (2008) 638–650.
- [29] M.A. Stephens, Random walk on a circle, Biometrika 50 (1963) 385–390.
- [30] H.B. Mitchell, Multi-Sensor Data Fusion, An Introduction, Springer, 2007.
- [31] Y. Zhu, Z. You, J. Zhao, K. Zhang, X.R. Li, The optimality for the distributed Kalman filtering fusion with feedback, Automatica 37 (2001) 1489–1493.

A.3 Non-Linear Fusion of Observations Provided by Two Sensors - Azmani *et al.* (2013)

Cet article a été publié dans le revue Entropy 15(7), pp.2698-2715, 2013.

Article

Non-Linear Fusion of Observations Provided by Two Sensors

Monir Azmani , Serge Reboul * and Mohammed Benjelloun

Laboratoire d'Informatique, Signal et Image de la Côte d'Opale (LISIC),

Univ Lille Nord de France, Université du Littoral Côte d'Opale (ULCO),

50 rue Ferdinand Buisson, BP719, 62228 Calais Cedex, France;

E-Mails: monir.azmani@azmani.ma (M.A.); mohammed.benjelloun@lisic.univ-littoral.fr (M.B.)

* Author to whom correspondence should be addressed; E-Mail: serge.reboul@univ-littoral.fr;

Tel.: +33-0-321-463-698; Fax: +33-0-321-460-686.

Received: 22 April 2013; in revised form: 5 June 2013 / Accepted: 8 June 2013 /

Published: 11 July 2013

Abstract: When we try to make the best estimate of some quantity, the problem of combining results from different experiments is encountered. In multi-sensor data fusion, the problem is seen as combining observations provided by different sensors. Sensors provide observations and information on an unknown quantity, which can differ in precision. We propose a combined estimate that uses prior information. We consider the simpler aspects of the problem, so that two sensors provide an observation of the same quantity. The standard error of the observations is supposed to be known. The prior information is an interval that bounds the parameter of the estimate. We derive the proposed combined estimate methodology, and we show its efficiency in the minimum mean square sense. The proposed combined estimate is assessed using synthetic data, and an application is presented.

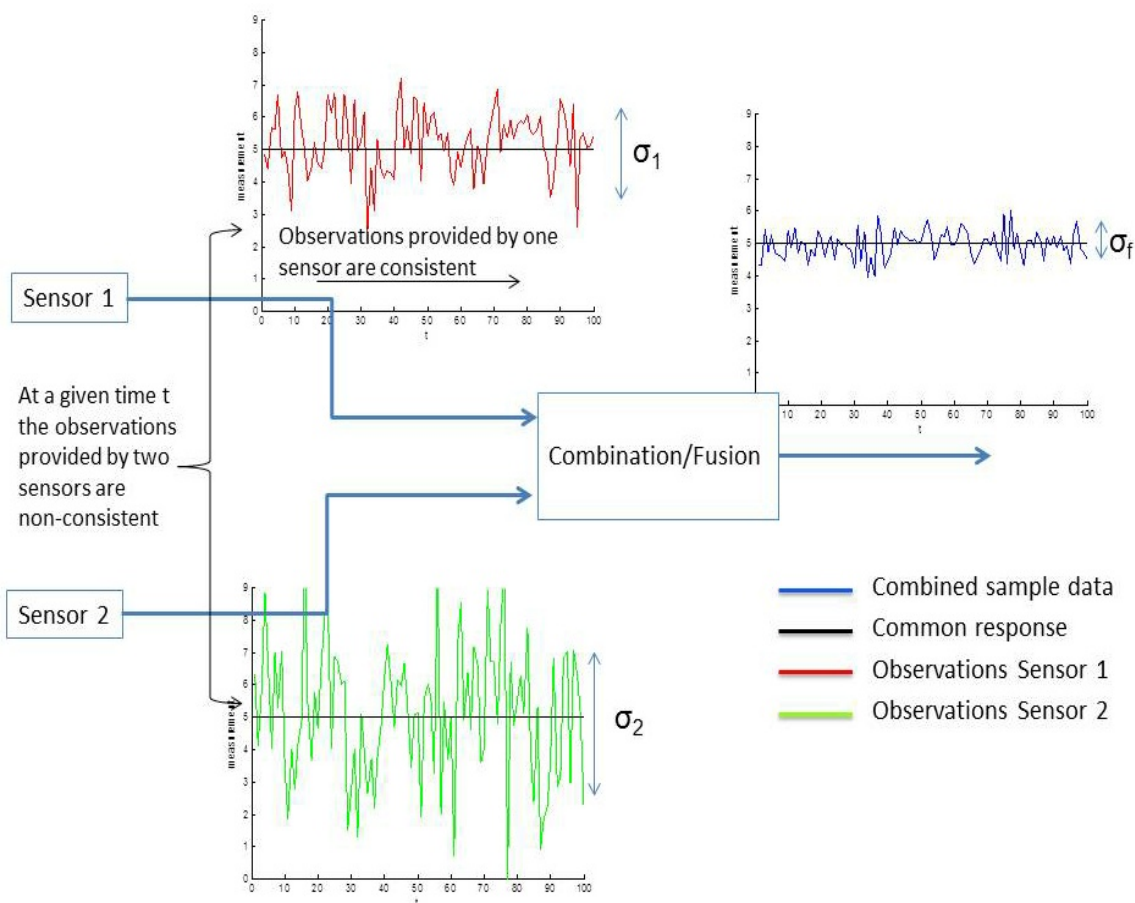
Keywords: estimation; fusion; weighted sum

1. Introduction

The problem of making a combined estimate as a weighted mean with weights inversely proportional to the variance was discussed previously in [1]. Research in this area is conducted to derive a combined estimate when the observations are partially consistent. For example, suppose two or more sensors perform; these sensors are used to provide observations on a common response variable. The sensors measure the same parameter, but their measurements differ in precision. The observations are partially

consistent, because the observations obtained with the same sensor are assumed to be consistent and the observations provided by different sensors are assumed to be non-consistent. We present in Figure 1 the case of two sensors. To make inferences about the common parameter, we wish to make use of the combined sample data. These sensors are assumed to have no systematic biases, but to differ in precision. This is the case, for example, of the Global Navigation Satellite System (GNSS) application, where the same position can be observed with signals broadcast on different frequency bands and signals broadcast by different satellite systems. Heteroscedasticity is the key feature of the combined sample data. Research in this domain focuses on the joint definition of weights and combined estimators. In [2], the efficiency of the weighted mean with estimate variances was studied. The variance of the weighted regression was derived in [3]. A new estimator that is more efficient than the maximum likelihood estimate was developed in [4]. Further references and proposed estimators can be found in [5,6].

Figure 1. Heteroscedasticity framework in information fusion.



Most of the multi-sensors data fusion systems assume that the variances of processes are known (or estimated on the processes, but the error of estimation is not taken into account in the definition of the weights), and the classical Bayesian estimation is used to design fusion operators. When the measurements are independent, the least square (LS) estimate and the maximum likelihood (ML) estimate are the same. This classical fusion operator is the weighted mean with weights inversely proportional to the variance [7]. For dependent or correlated measurements, the weights are defined by the variances and covariance of the observations. They are a solution of a set of linear equations that link

the variance of the fusion operator to the variances and covariance of the measures [8]. Unfortunately, in practice, the covariance is difficult to estimate, and few applications use the optimal fusion operator in this case [9].

Maximum a posteriori (MAP) estimators use in their implementation prior information to estimate a quantity. The Bayesian modeling of a problem allows one to integrate prior information on the data to fuse [10]. The *a posteriori* distribution that models the problem is defined by the product of a priori law with the likelihood distribution of the multi-sensor data. The prior information can be a priori law on the parameter to estimate [11,12] or on the mutual behavior of processes [13,14]. In the sequential Bayesian inference framework, the prior law models the information brought by the dynamic state equation of the Bayesian filter [15,16]. In all those cases, the fusion operator that merges the prior information with the observations is a weighted sum.

Some multi-sensor data fusion systems defined in the sequential Bayesian inference framework have to combine distributed estimates. Let us consider an estimate of the same state provided by different filters working in parallel. This is the case of filters having different observations provided by sensors of different kinds. It is shown in [17] that for two Kalman filters working in parallel, the process noise brings a correlation between the estimate states. The Track-to-Track fusion filter proposed by [17] uses a weighted sum to fuse the correlate estimate. The weights are, in this case, the function of the variances and covariance of the estimate state. In the proposed filter, a recursive expression of the estimate state covariance is derived in order to compute the weighted sum. Many different implementations of the Track-to-Track fusion filter can be found in published works [18]. The extension of the fusion technique to N filters in parallel was proposed by [19], but the filter is difficult to process in practice. Finally, a sub-optimal version of the filter proposed in [8] allows one to solve the problem of covariance estimation and to provide an easy solution to implement with good accuracy.

In the present paper, we consider a simple aspect of the problem, two sensors, $i \in \{1, 2\}$, and observations, $z^{(i)}$, distributed according to a Gaussian distribution of mean, m , and variance, σ_i^2 . We propose a non-linear estimate that uses prior information in order to combine the observations. This information is an approximate value of m , m_a assumed to be distributed according to a Gaussian law of variance, σ_3^2 . Furthermore, m is assumed to be inside the interval, $[m_a - \sigma_3, m_a + \sigma_3]$. It is shown in [10] that the classical (MAP) estimate is a weighted sum of the observations and of the prior information. We show that the proposed fusion operator outperforms the MAP estimate in the minimum quadratic error sense. The proposed fusion operator is assessed for a multi-sensor system that estimates the position of an object. The multi-sensor system is composed of a multi-band GNSS receiver, a yaw rate sensor and a speed meter sensor. In this case, the data fusion system has to combine the estimated position obtained for each band of the GNSS receiver. The measurements of direction and velocity provided by the dead reckoning sensors are the prior information on the parameter to estimate.

The rest of the paper is organized as follows: In Section 2, we state the problem. The fusion operator is presented in Section 3. Section 4 is dedicated to the experiments. We conclude in Section 5.

2. Problem Statement

Let us consider $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$, two random variables, and $z_k^{(1)}$ and $z_k^{(2)}$, their realizations at instant, k . We consider the case of two sensors providing two measures, $z_k^{(1)}$ and $z_k^{(2)}$. The random variables, $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$, are assumed to be independent with the same mean, m , and distributed according to Gaussian law, $f_1(\dots)$ and $f_2(\dots)$. The variance of these random variables are, respectively, σ_1^2 and σ_2^2 . The maximum-likelihood estimation (MLE) fusion operator is the following weighted sum:

$$z_{k,MLE} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 z_k^{(2)} \text{ with } \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \tag{1}$$

The MAP fusion operator is the following weighted sum:

$$z_{k,MAP} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 z_k^{(2)} + \alpha_3 m_a \text{ with } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \tag{2}$$

where m_a is the imprecise prior information assumed to be distributed according to a Gaussian law, $f_3(\dots)$, of variance, σ_3^2 , and mean, m . The fused measurement at instant k is $z_{k,MAP}$, the realization of the random variable Z_{MAP} . The weights are defined as follows:

$$\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} \tag{3}$$

We can distinguish two kinds of realizations of the random variable pair, $(Z^{(1)}, Z^{(2)})$:

- Realizations $(Z^{(n_1)}, Z^{(n_2)})$ situated on both sides of the mean, m , such as $\{z_k^{(1)} < m\}$ and $\{z_k^{(2)} > m\}$ or $\{z_k^{(1)} > m\}$ and $\{z_k^{(2)} < m\}$.
- Realizations $(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})$ situated on the same side of the mean, m , such as $\{z_k^{(1)} < m\}$ and $\{z_k^{(2)} < m\}$ or $\{z_k^{(1)} > m\}$ and $\{z_k^{(2)} > m\}$.

We show in Appendix 1 that the realizations on the same side of the mean are positively correlated, while the realizations on both sides of the mean are negatively correlated. In order to improve the MAP fusion operator (decrease its output variance), we propose to reduce the covariance between the random variables, $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$, by decreasing the covariance between $Z^{(p_1)}$ and $Z^{(p_2)}$. Two problems come up, the selection of the realizations of $Z^{(p_1)}$ and $Z^{(p_2)}$ in the realizations of $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$ and the definition of a transformation that reduces the covariance of $Z^{(p_1)}$ and $Z^{(p_2)}$. The proposed fusion operator is non-linear, because it needs a stage of selection.

3. Non-Linear Fusion Operator

3.1. The Non-Linear Transformation

3.1.1. Definition of the Non-Linear Transformation

Let $z_{k,NLF}$ be the non-linear fusion (NLF) of $z_k^{(1)}$ and $z_k^{(2)}$. We propose to define the non-linear MAP fusion operator, for $\sigma_2 > \sigma_1$, as follows:

- If $z_k^{(1)} > B^u$ and $z_k^{(2)} > B^u$

$$z_{k,NLF} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 \left(z_k^{(2)} - g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}) \right) + \alpha_3 m_a \tag{4}$$

- If $z_k^{(1)} < B^d$ and $z_k^{(2)} < B^d$

$$z_{k,NLF} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 \left(z_k^{(2)} + g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}) \right) + \alpha_3 m_a \tag{5}$$

- otherwise $z_k^{(1)} < B^d$ and $z_k^{(2)} > B^d$ or $z_k^{(1)} > B^d$ and $z_k^{(2)} < B^d$

$$z_{k,NLF} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 z_k^{(2)} + \alpha_3 m_a \quad \text{with} \quad g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}) = 0 \tag{6}$$

where $B^d = m_a - \sigma_3$, the lower bound, and $B^u = m_a + \sigma_3$, the upper bound, which are derived from the prior information and used to select the realizations of $Z^{(p_1)}$ and $Z^{(p_2)}$. In these expressions, $g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)})$ is a function that reduces the correlation between $Z^{(p_1)}$ and $Z^{(p_2)}$. The fusion operator can be rewritten as follows:

$$z_{k,NLF} = \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 \left(z_k^{(2)} \pm g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}) \right) + \alpha_3 m_a \tag{7}$$

where the weights are defined with Equation (3). The non-linear fusion operator is biased. The upper and lower bound are indeed not necessarily centered on the mean value, m . The mean square error (MSE) takes into account the variance and bias of an estimator. We derive in the next paragraph a condition on the proposed non-linear transformation that guarantees a smaller MSE for the proposed operator.

3.1.2. A Condition on the Non-Linear Transformation

Let us define the following notation for the fused measurements:

- If $z_k^{(1)} > B^u$ and $z_k^{(2)} > B^u$ or $z_k^{(1)} < B^d$ and $z_k^{(2)} < B^d$, we notice $MSE(Z_{NLF}^{(p)})$, $MSE(Z_{MAP}^{(p)})$, the respective MSE of the non-linear fusion operator output and of the linear fusion operator output.
- otherwise, we notice $MSE(Z_{NLF}^{(n)})$, $MSE(Z_{MAP}^{(n)})$, the respective MSE for the non-linear fusion operator and for the linear fusion operator.

Let us define the following expressions:

$$MSE(Z_{MAP}) = P MSE(Z_{MAP}^{(p)}) + N MSE(Z_{MAP}^{(n)}) \tag{8}$$

$$MSE(Z_{NLF}) = P MSE(Z_{NLF}^{(p)}) + N MSE(Z_{NLF}^{(n)}) \tag{9}$$

where the coefficients of normalization, P and N , are defined as follows:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-\infty}^{B^d} \int_{-\infty}^{B^d} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 &\quad + \int_{B^u}^{\infty} \int_{B^u}^{\infty} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 N &= \int_{B^u}^{\infty} \int_{-\infty}^{B^d} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 &\quad + \int_{B^d}^{B^u} \int_{-\infty}^{B^d} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} + \int_{B^d}^{B^u} \int_{B^u}^{\infty} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{B^d} \int_{B^d}^{B^u} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} + \int_{B^u}^{\infty} \int_{B^d}^{B^u} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\
 &\quad + \int_{B^d}^{B^u} \int_{B^d}^{B^u} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} + \int_{-\infty}^{B^d} \int_{B^u}^{\infty} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)}
 \end{aligned}$$

We show in Appendix 2 that the quadratic error, $MSE(Z_{NLF})$, will be smaller than the quadratic error, $MSE(Z_{MAP})$, if the following inequality holds:

$$\begin{aligned} &\alpha_2^2 E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})^2] + 2\alpha_1\alpha_2 E[Z^{(p_1)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] \\ &+ 2\alpha_2^2 E[Z^{(p_2)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] \\ &+ (2\alpha_2\alpha_3 m_a - 2m\alpha_2) E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] \leq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

The terms of this equation are defined by:

Term 1: $E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})^2] = \frac{N_{E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})^2]}}{D}$

$$\begin{aligned} N_{E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})^2]} &= \int_{-\infty}^{B^d} \int_{-\infty}^{B^d} g(z^{(1)}, z^{(2)})^2 f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\ &- \int_{B^u}^{\infty} \int_{B^u}^{\infty} g(z^{(1)}, z^{(2)})^2 f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \end{aligned}$$

$$D = \int_{-\infty}^m \int_{-\infty}^m f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} + \int_m^{\infty} \int_m^{\infty} f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)}$$

Term 2: $E[Z^{(p_1)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] = \frac{N_{E[Z^{(p_1)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]}}{D}$

$$\begin{aligned} N_{E[Z^{(p_1)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]} &= \int_{-\infty}^{B^d} \int_{-\infty}^{B^d} z^{(1)} g(z^{(1)}, z^{(2)}) f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\ &- \int_{B^u}^{\infty} \int_{B^u}^{\infty} z^{(1)} g(z^{(1)}, z^{(2)}) f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \end{aligned}$$

Term 3: $E[Z^{(p_2)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] = \frac{N_{E[Z^{(p_2)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]}}{D}$

$$\begin{aligned} N_{E[Z^{(p_2)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]} &= \int_{-\infty}^{B^d} \int_{-\infty}^{B^d} z^{(2)} g(z^{(1)}, z^{(2)}) f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\ &- \int_{B^u}^{\infty} \int_{B^u}^{\infty} z^{(2)} g(z^{(1)}, z^{(2)}) f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \end{aligned}$$

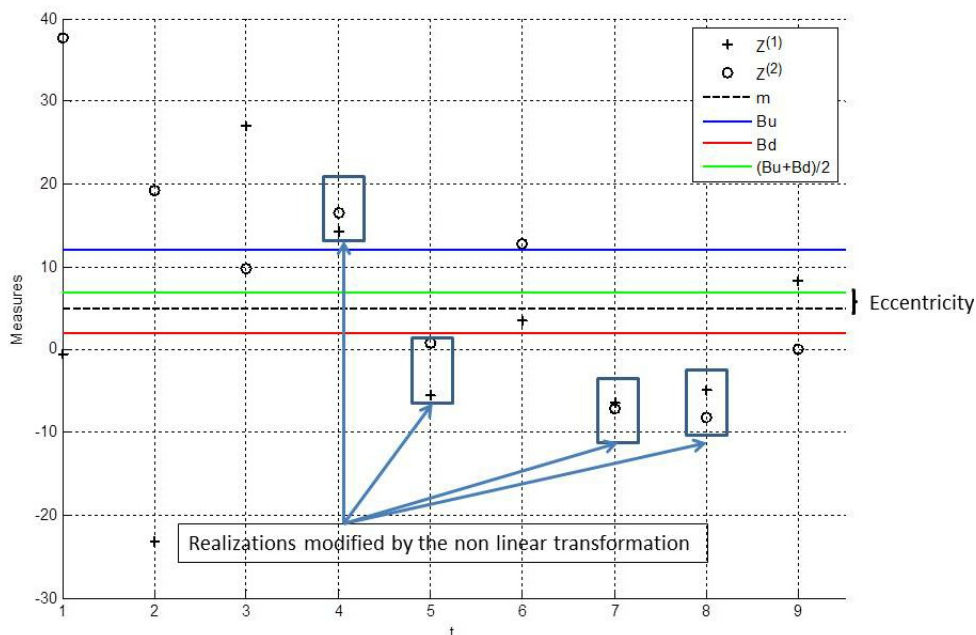
Term 4: $E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] = \frac{N_{E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]}}{D}$

$$\begin{aligned} N_{E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]} &= \int_{-\infty}^{B^d} \int_{-\infty}^{B^d} g(z^{(1)}, z^{(2)}) f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \\ &- \int_{B^u}^{\infty} \int_{B^u}^{\infty} g(z^{(1)}, z^{(2)}) f_1(z^{(1)}) f_2(z^{(2)}) dz^{(1)} dz^{(2)} \end{aligned}$$

where in the Terms 1–4, the difference between the integrals are due to the signs of $\pm g(\cdot)$, as defined in Equations (4) and (5).

The condition of Equation (10) depends on the variance of the fused random variables, on the interval size and on its eccentricity, $\left| \frac{B^u + B^d}{2} - m \right|$. We show in Figure 2 several realizations of $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$, an interval and its associated eccentricity. We show in this figure the realizations that will be modified by the non-linear transformation, the observations that satisfy the conditions: $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} < B^d$ or $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} > B^u$. In the next paragraph, we propose a function, $\pm g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)})$, that holds the inequality in Equation (10) for an interval that contains the parameter for estimating.

Figure 2. Example of non-linear transformation.



3.2. Transformation Function

3.2.1. Conditions on the Transformation Function

The function, $\pm g(z_k^{(1)}, z_k^{(2)})$, is defined heuristically. In the centered case, $\frac{B^u+B^d}{2} = m$, we can define two conditions to hold the inequality in Equation (10):

- **Condition 1:**

$$E[\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})^2] = E[\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})] = 0$$

- **Condition 2:**

$$E[Z^{(p1)} \pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})] < 0 \text{ and } E[Z^{(p2)} \pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})] < 0$$

These two conditions are verified for a positive function of the difference between two measurements, $g(z_k^{(1)} - z_k^{(2)}) > 0$. For $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} > B^u$ and $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} < B^d$, the function, $g(z_k^{(1)} - z_k^{(2)})$, is indeed centered and symmetric. The Terms 1 and 4 are null in this case. Furthermore, if the function, $g(z_k^{(1)} - z_k^{(2)})$, is positive, the Terms 2 and 3 are negative, and the inequality in Equation (10) is negative. In the next paragraph, we propose a non-linear function that matches these conditions, and we show, in the experimentation, that the inequality in Equation (10) for this function is always negative, even if the interval is not centered on the parameter to be estimated.

3.2.2. Definition of the Transformation Function

The principle of the non-linear transformation is to, respectively, add or subtract a positive offset, $d > 0$, if $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} < B^d$ or $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} > B^u$. Let us consider the following statistic distributions:

- Let $f_p(z_k^{(p1)} - z_k^{(p2)})$ be the Gaussian distribution of the difference between the random variables, $Z^{(p1)}$ and $Z^{(p2)}$. This distribution is a zero-mean, and its variance is given by $(\sigma_p)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^p$.
- Let $f_n(z_k^{(n1)} - z_k^{(n2)})$ be the Gaussian distribution of the difference between the random variables, $Z^{(n1)}$ and $Z^{(n2)}$. This distribution is a zero-mean, and its variance is given by $(\sigma_n)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^n$.

where σ_{12}^p and σ_{12}^n are obtained by numerical integration of the Equations (15) and (16) of Appendix 1. The value of d is the solution of the following equality for $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} < B^d$ or $z_k^{(1)}, z_k^{(2)} > B^u$:

$$f_n(d) = \frac{f_p(z_k^{(p1)} - z_k^{(p2)})}{C}$$

with:

$$C = \frac{f_p(0)}{f_n(0)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_p}$$

Let us define the following relation:

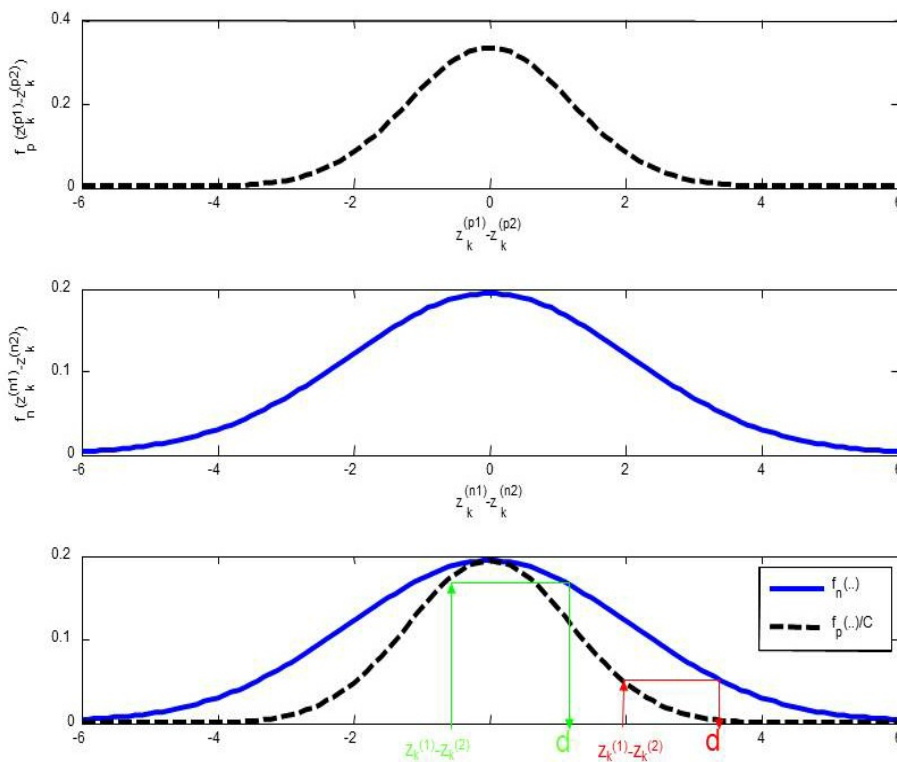
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_n} \exp^{-\frac{1}{2} \frac{(d)^2}{\sigma_n^2}} = \frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_p} \exp^{-\frac{1}{2} \frac{(z_k^{(p1)} - z_k^{(p2)})^2}{\sigma_p^2}}$$

then, we can derive the following expression for d :

$$d = \frac{\sigma_n}{\sigma_p} \left| z_k^{(1)} - z_k^{(2)} \right| \text{ for } z_k^{(1)}, z_k^{(2)} < B^d \text{ or } z_k^{(1)}, z_k^{(2)} > B^u \tag{11}$$

We explain in Figure 3 the principle of the definition of d . The experimentation presented in the next paragraph shows that the proposed non-linear function holds the inequality in Equation (10). We assess in this experimentation the proposed fusion operator on synthetic data.

Figure 3. Principle of the non-linear function.



4. Experimentation

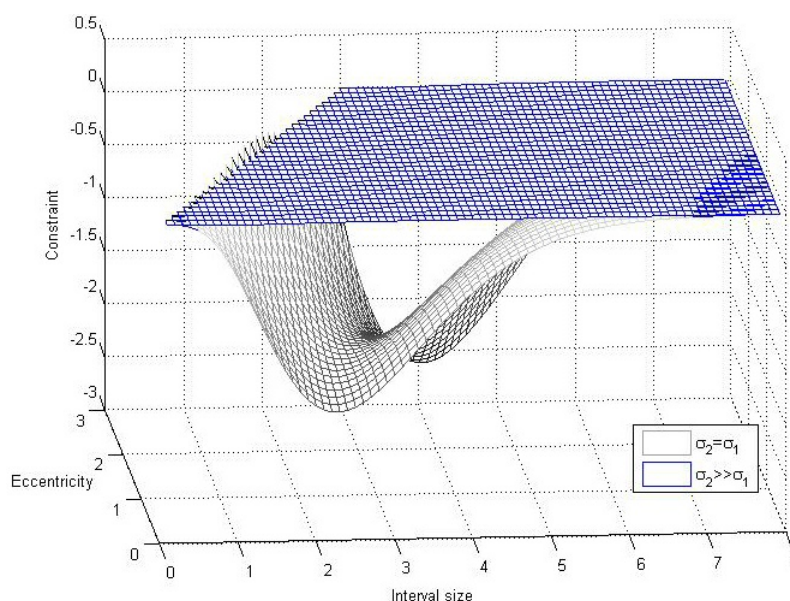
In this experimentation, we first verify the inequality in Equation (10) for the proposed non-linear function. The fusion operator is assessed in a second experimentation, and finally, we demonstrate the feasibility of the proposed operator, in a third experimentation, for the fusion of data provided by a multi-sensor system.

4.1. Verification of the Inequality

In order to show that the proposed non-linear fusion operator has an output MSE lower than the classical linear fusion operator, we compute the left term of inequality in Equation(10). This term is defined as a constraint on the non-linear function and is equal to $MSE(Z_{NLF}) - Var(Z_{MAP})$. The evaluation of this constraint is processed by numerical integration of Terms 1–4 defined in paragraph 3.1.2. We show that the proposed non-linear function holds the inequality in Equation (10), because the constraint is negative or null for all interval sizes and eccentricity.

We show in Figure 4 the constraint as a function of the interval length, $B^u - B^d$, and of the eccentricity, $\left| \frac{B^u + B^d}{2} - m \right|$. The curves of Figure 4 are obtained for $\sigma_1 = \sigma_2$ and $\sigma_2 \gg \sigma_1$. When $\sigma_2 \gg \sigma_1$, the fusion is less accurate, because the random variable, $Z^{(2)}$, brings little information on the parameter to estimate (so $\alpha_2 \approx 0$). In this case, the constraint is close to zero, so the proposed and the MAP fusion operator are similar. When $\sigma_2 = \sigma_1 = 3$, the constraint is negative for all the intervals and values of eccentricity. We can notice that for small values of the interval size, the constraint is close to zero. In this case, $\alpha_3 \approx 1$, because the prior information is very accurate, and the fusions operators do not use the observations. In conclusion, the greatest is the difference between the variances of $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$; less interesting is the fusion. We can notice that this conclusion is also valid for the classical fusion operator. However, the constraint is always negative, and it shows that the proposed fusion operator is more accurate than the classical MAP fusion operator.

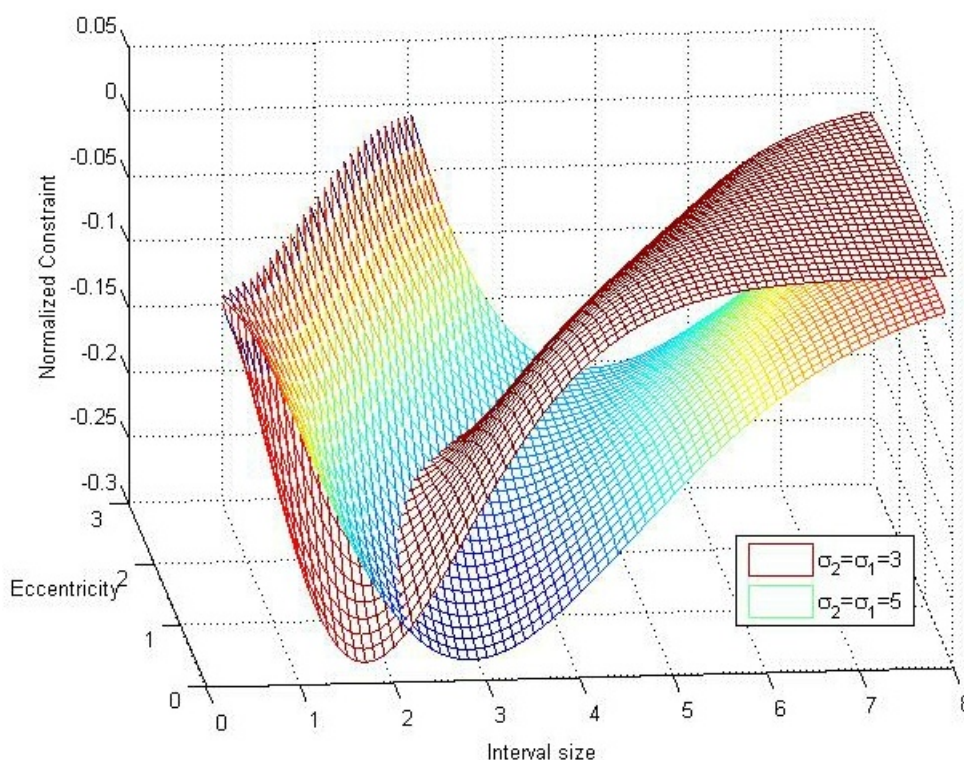
Figure 4. The constraint as a function of the interval and eccentricity.



We show in Figure 5 the normalized value of the constraint, $\frac{MSE(Z_{NLF}) - Var(Z_{MAP})}{Var(Z_{MAP})}$, as a function of the interval size and of the eccentricity. The constraint is processed for two values of $\sigma_1 = \sigma_2$ and the normalization allows one to compare these two cases. We can observe in Figure 5 that when the interval length and the eccentricity increase for $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, the constraint tends towards zero more quickly than for $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$. The probability of $z_k^{(1)}$ and $z_k^{(2)}$ to be in a given interval is indeed higher for $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ than for $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. When this probability decreases, less observations are modified by the non-linear transformation, and the output variance of the non-linear fusion operator tends to the output variance of the MAP fusion operator.

We show in this experimentation that from a theoretical point of view, the proposed fusion operator is more accurate than the classical fusion operator, because the proposed non-linear function holds the inequality in Equation (10). In the next paragraph, we assess the proposed operator with synthetic data.

Figure 5. The constraint for two values of $\sigma_1 = \sigma_2$.



4.2. Assessment of the Fusion Operator

In this experimentation, we compare the non-linear fusion operator with the classical ML and MAP fusion operators. We consider a constant signal of 1, 000 samples. We show in Figure 6a a temporal series of $Z^{(1)}$. The prior information is an interval represented on this figure by two horizontal dotted lines.

To compare the operators, we estimate the MSE between the fused measurements and the parameters to be estimated. For the ML fusion operator, the MSE is equal to the variance, because the combined estimate is unbiased. We report in Table 1 the parameters of the signals and the theoretical output variance of the classical ML fusion operator.

In order to assess the MAP and the non-linear fusion operator, we process 1,000 realizations of the temporal series, $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$. For each experiment, we randomly generate the prior information, m_a , according to a Gaussian distribution of mean m and variance σ_3 . We report in Table 2 and we show in Figure 6b the MSE of the MAP and nonlinear fusion operator as a function of σ_3 .

We notice in Figure 6b and in Table 2 that the MSE of the proposed non-linear fusion operator is always inferior or equal to the MSE of the MAP and LS fusion operators. When σ_3 is small, the prior information is accurate and α_3 tends to one. The MSE of the MAP estimate and of the non-linear fusion operator tends to zero. In this case, the MAP estimate tends to be the same as the non-linear fusion operator, because α_1 and α_2 tend to zero. When σ_3 is large, the prior information is inaccurate. The MSE of the MAP estimate and of the non-linear fusion operator tends to the MSE of the LS estimate. The three fusion operators tend to be identical, because α_3 is close to zero, and the interval length Bu-Bd is large. Then, no transformation is processed by the non-linear fusion operator.

Figure 6. Example of process and mean standard error (MSE) of the proposed operator.

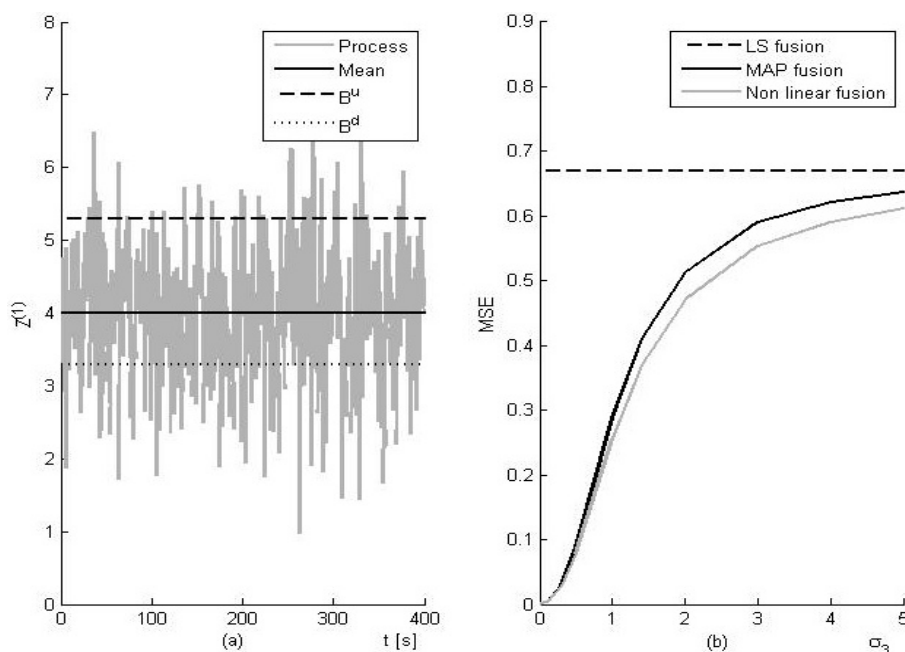


Table 1. Theoretical parameters of the signals.

	Mean	MSE
First signal $z^{(1)}$	4	1
Second signal $z^{(2)}$	4	2
Linear fusion	4	0.666

The only difference between the MAP and the non-linear fusion operators is the observation weighted by α_2 . In the non-linear fusion case, this observation is processed with a nonlinear function in order to decrease the correlation between $z_k^{(1)}$ and $z_k^{(2)}$. Therefore, this transformation decreases the MSE of the

fusion operator compared to the MSE of the MAP estimate. We notice in Figure 6b that for $\sigma_3 < 2$, the difference between the MSE increases when α_2 increases, so, when σ_3 increases (α_3 decreases because the prior information is less accurate). However, for $\sigma_3 > 2$, the number of transformations processed by the non-linear transformation decreases, and the difference between the MSE decreases.

Table 2. MSE of the NL (non-linear) and Maximum **a posteriori** (MAP) fusion operators.

Prior information Accuracy σ_3	Mean Square Error	
	MAP Fusion	NL Fusion
0.0	0.0000	0.0000
0.1	0.0030	0.0030
0.3	0.0294	0.0274
0.5	0.0876	0.0779
1.0	0.2884	0.2566
1.4	0.4106	0.3695
2.0	0.5135	0.4711
3.0	0.5902	0.5534
4.0	0.6218	0.5909
5.0	0.6369	0.6114

4.3. Multi-Sensor Estimation

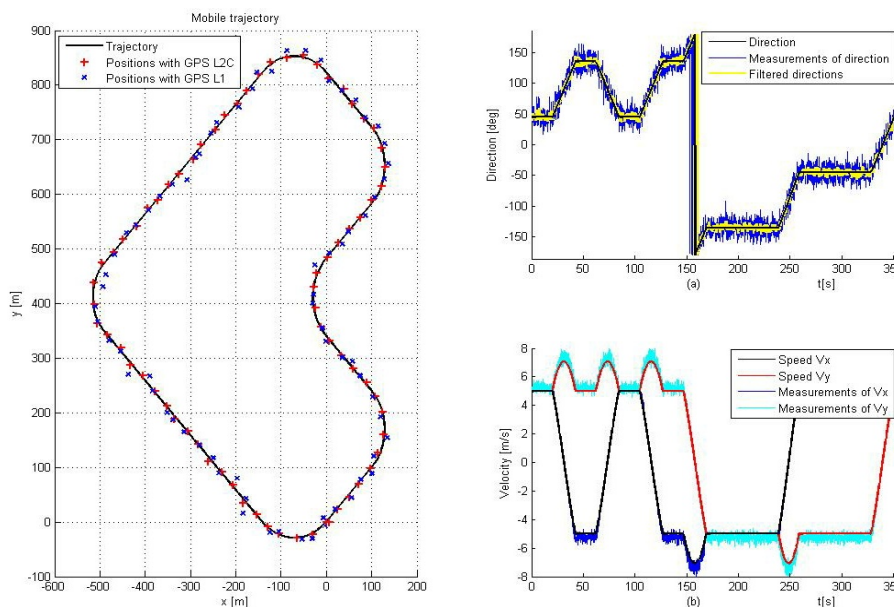
In this experimentation, we want to assess a multi-sensor fusion system that uses the proposed non-linear transformation. The system, embarked on a vehicle, is composed of a multi-band GNSS receiver, a speedometer and a magnetometer.

The multi-bands GNSS receiver provides measurements of positions obtained in the GNSS L1 band and in the GNSS L2C band. The measurement rate is equal to 10 Hz, and we assume a standard positioning service, non-differential horizontal (latitude & longitude) positioning and SAoff. The classical receiver at the L1 band, simulated in this experimentation, has a four meter root means square (RMS) error (the error is the distance between the position and its estimate). For a measurement rate of 10 Hz, the estimate position is the averaging of 100 observations for the L1 band and five observations for the L2C band. A receiver can indeed compute a position every millisecond at the L1 band and every 20 milliseconds at the L2C band. If the horizontal latitude and longitude errors were not correlated, the RMS error would be inversely proportional to the square root of the number of measurements. However, the errors are correlated, and this causes the error from averaging to decrease at a slower rate than if the errors were not correlated. It is a reasonable assumption to consider a double RMS error for the L2C band. A speedometer is installed in a vehicle. The uncertainty of the speedometer is equal to 5% of the vehicle speed. In this context, we assume a bias of 5% and an additive Gaussian noise on the measurements. The noise variance is equal to 0.1 m/s. Finally, we assume an additive Gaussian noise on the measurements of direction. The noise variance is equal to two degrees.

The plots in Figure 7 show the trajectory and the sensors’ measurements. In Figure 7, the left figure shows the trajectory and the observed positions provided by the GNSS receiver. In Figure 7, the top right figure presents the measurements of direction provided by the magnetometer and the filtered directions obtained with a circular filter [20]. The bottom right figure presents the measurements of speed, V_x and V_y , along the x - and y -axis. These measurements are the projections of the velocity vectors processed with the observed noisy direction and speed (vector magnitude).

In our implementation, the upper and lower bound intervals of the proposed non-linear transformation are defined at time, $t + \Delta t$, with direction and speed. The non-linear transformation is applied to each component, x , y , of the position. For the x component, the interval center is the estimated x component at t plus the variation in position during Δt along the x -axis ($V_x * \Delta t$). The size of the interval is fixed to $B^u - B^d = 0.9$; this value is fixed in practice. The same method is used for the non-linear fusion of the component, y .

Figure 7. Trajectory and sensors’ measurements.



We report in Table 3 the mean square error of the position for the x and y directions and the position RMS error. We report this statistical parameter for the proposed non-linear fusion method, the ML and MAP fusion operators and for the GPS L1 positions.

Table 3. Error of position.

Statistical parameter	MSE x	MSE y	RMS error
GPS L1	2.0549	2.0141	2.0169
ML fusion	1.3565	1.4039	1.6612
MAP fusion	0.2524	0.2556	0.7128
non-linear fusion	0.2350	0.2365	0.6867

This experimentation shows a possible application of the proposed combined estimate. The previous estimate with the measurements of displacement (provided by the dead reckoning sensors) are used to construct the prior information (lower and upper bound of the interval). In this case, the eccentricity is distributed according to a Gaussian law. As shown in the previous paragraph, the MSE of the proposed combined estimate is lower than the classical fusion operators. However, the difference between the MSE of the MAP estimate and of the non-linear fusion operator is not as high as the one obtained in the assessment of the fusion operators. For this practical case, the true position is some time not contained in the interval defined by the upper and lower bound, and the non-linear transformation has an additive bias that increases the MSE. This is the principal limitation of the proposed fusion operator.

The limitation of the non-linear fusion operator is due to the definition of an interval that contains the parameter to be estimated. If the interval is small, the probability to be outside this interval is high, and the MSE of the proposed method can be superior to the MSE of the MAP estimate. If the interval is large, the proposed estimate has little interest, because its MSE is close to the MSE of the LS estimate. Therefore, there is an ambivalence between these two cases, and the size of the interval must be, in practice, tuned by the user in order to improve the estimation.

5. Conclusions

In this article, we propose a new combined estimate that uses a prior law. The proposed new method combines observations provided by two sensors. The prior law is an interval that contains the quantity to estimate. The proposed fusion operator is more accurate in the minimum mean square sense than the classical ML and MAP fusion operators.

The proposed combined estimate is based on a non-linear transformation of the signals. The aim of this transformation is to decrease the covariance between the observations in order to decrease the output mean square error of the fusion operator. We define a condition for a non-linear transformation to decrease the covariance. We derive the function and the associated non-linear transformation that holds this condition.

As expected from the theoretical derivation provided in the article, we show in the experimentation that the proposed non-linear combined estimate outperforms the classical fusion operator when the quantity to be estimated is in the interval. We propose an example of a practical implementation of the proposed combined estimate. We show that the non-linear fusion improves the positioning of a multi-sensor system composed of a multi-band GNSS receiver and dead reckoning sensors.

The prospect of this work concerns the extension of the proposed method to more than two observations.

Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.

References

1. Cochran, W.G. Problem arising in the analysis of a series of similar experiments. *J. R. Stat. Soc.* **1937**, *4*, 102–118.

2. Cochran, W.G.; Carroll, S.P. A sampling investigation of the efficiency of weighting inversely as the estimated variance. *Biometrics* **1953**, *9*, 447–459.
3. Bement, T.R.; Williams, J.S. Variance of weighted regression estimators when sampling errors are independent and heteroscedastic. *J. Am. Stat. Assoc.* **1969**, *64*, 1369–1382.
4. Neyman, J.; Scott, E. Consistent estimators based on partially consistent observations. *Econometrica* **1948**, *16*, 1–32.
5. Rao, J.N.K. Estimating the common mean of possibly different normal populations: A simulation study. *J. Am. Stat. Assoc.* **1980**, *75*, 447–453.
6. Tsao, M.; Wu, C. Empirical likelihood inference for a common mean in the presence of heteroscedasticity. *Can. J. Stat.* **2006**, *34*, 45–59.
7. Gustafsson, F. *Adaptive Filtering and Change Detection*; Wiley: New York, NY, USA, 2001.
8. Shin, V.; Lee, Y.; Choi, T.S. Generalized Millman's formula and its application for estimation problems. *Signal Process.* **2006**, *86*, 257–266.
9. Kacemi, J.; Reboul, S.; Benjelloun, M. Information Fusion in a Multi-Frequencies GPS Receiver. In Proceedings of the IEEE International Conference on Aerospace And Electronics Systems Society (IEEE, AESS), Position Location and Navigation Symposium (PLANS), Monterey, CA, USA, 26–29 April 2004; pp. 399–404.
10. Lavielle, M.; Lebarbier, E. An application of MCMC methods for the multiple change-points problem. *Signal Process.* **2001**, *81*, 39–53.
11. Robert, C.P. *The Bayesian Choice*, 2nd ed.; Springer: New York, NY, USA, 2001.
12. Stienne, G.; Reboul, S.; Azmani, M.; Boutoille, S.; Choquel, J.B.; Benjelloun, M. Bayesian change-points estimation applied to GPS signal tracking. *ISRN Signal Process.* **2011**, doi:10.5402/2011/148242.
13. Boutoille, S.; Reboul, S.; Benjelloun, M. A hybrid fusion system applied to off-line detection and change-points estimation. *Inf. Fusion* **2010**, *11*, 325–337.
14. Reboul, S.; Benjelloun, M. Joint segmentation of the wind speed and direction. *Signal Process.* **2006**, *86*, 744–759.
15. Mitchell, H.B. *Multi-Sensor Data Fusion, An Introduction*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2007.
16. Zhu, Y.; You, Z.; Zhao, J.; Zhang, K.; Li, X.R. The optimality for the distributed kalman filtering fusion with feedback. *Automatica* **2001**, *37*, 1489–1493.
17. Bar-Shalom, Y.; Campo, L. The effect of the common process noise on the two-sensor fused-track covariance. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **1986**, *22*, 803–805.
18. Gao, J.B.; Harris, C.J. Some remarks on kalman filters for the multisensor fusion. *Inf. Fusion* **2002**, *3*, 191–201.
19. Chen, H.; Kirubarajan, T.; Bar-Shalom, Y. Performance limits of track-to-track fusion vs. centralized estimation: Theory and application. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **2003**, *39*, 386–400.
20. Azmani, M.; Reboul, S.; Choquel, J.-B.; Benjelloun, M. A Recursive Fusion Filter for Angular Data. In Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, Guilin, China, 19–23 December 2009; pp. 882–887.

Appendix 1

In this appendix, we show that the realizations of two random variables on the same side of the mean are positively correlated. We show that the realizations on both sides are negatively correlated. Let $f(..)$ be the distribution of the random variables, $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$. The covariance of $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$ is given by:

$$\sigma_{12} = E(Z^{(1)}Z^{(2)}) - [E(Z^{(1)})E(Z^{(2)})] \tag{12}$$

$$= \iint z^{(1)}z^{(2)}f_1(z^{(1)})f_2(z^{(2)})dz^{(1)}dz^{(2)} - \left[\int z^{(1)}f_1(z^{(1)})dz^{(1)} \int z^{(2)}f_2(z^{(2)})dz^{(2)} \right] \tag{13}$$

We develop the covariance Equation (13) for the different kind of realizations of $Z^{(1)}$ and $Z^{(2)}$. It follows that:

$$\sigma_{12} = (PC_1 + PC_2) + (NC_1 + NC_2) - m^2 \tag{14}$$

with:

$$PC_1 = \int_m^{+\infty} \int_m^{+\infty} z^{(1)}z^{(2)}f_1(z^{(1)})f_2(z^{(2)})dz^{(1)}dz^{(2)}$$

$$PC_2 = \int_{-\infty}^m \int_{-\infty}^m z^{(1)}z^{(2)}f_1(z^{(1)})f_2(z^{(2)})dz^{(1)}dz^{(2)}$$

$$NC_1 = \int_m^{+\infty} \int_{-\infty}^m z^{(1)}z^{(2)}f_1(z^{(1)})f_2(z^{(2)})dz^{(1)}dz^{(2)}$$

$$NC_2 = \int_{-\infty}^m \int_m^{+\infty} z^{(1)}z^{(2)}f_1(z^{(1)})f_2(z^{(2)})dz^{(1)}dz^{(2)}$$

$(PC_1 + PC_2)$ is a term associated with the realizations of $Z^{(p1)}$ and $Z^{(p2)}$, and $(NC_1 + NC_2)$ is a term associated with the realizations of $Z^{(n1)}$ and $Z^{(n2)}$. Let σ_{12}^p be the covariance of $Z^{(p1)}$, $Z^{(p2)}$ and σ_{12}^n be the covariance of $Z^{(n1)}$, $Z^{(n2)}$. These covariances are given by the following expressions:

$$\sigma_{12}^p = \frac{PC_1 + PC_2}{DPC} - m^2 \tag{15}$$

$$\sigma_{12}^n = \frac{NC_1 + NC_2}{DNC} - m^2 \tag{16}$$

with:

$$DPC = \int_m^{+\infty} \int_m^{+\infty} f_1(z^{(1)})f_2(z^{(2)})dz^{(1)}dz^{(2)} + \int_{-\infty}^m \int_{-\infty}^m f_1(z^{(1)})f_2(z^{(2)})dz^{(1)}dz^{(2)}$$

$$DNC = \int_m^{+\infty} \int_{-\infty}^m f_1(z^{(1)})f_2(z^{(2)})dz^{(1)}dz^{(2)} + \int_{-\infty}^m \int_m^{+\infty} f_1(z^{(1)})f_2(z^{(2)})dz^{(1)}dz^{(2)}$$

$$DPC + DNC = 1$$

It follows:

$$\sigma_{12} = DPC \ \sigma_{12}^p + DNC \ \sigma_{12}^n \tag{17}$$

Furthermore, we state that:

$$\int_m^{+\infty} z^{(1)} f_1(z^{(1)}) dz^{(1)} = \frac{m+a}{2} \tag{18}$$

It follows:

$$\int_{-\infty}^m z^{(1)} f_1(z^{(1)}) dz^{(1)} = \frac{m-a}{2} \tag{19}$$

We can then define:

$$PC1 = \frac{(m+a)^2}{4} \tag{20}$$

$$PC2 = \frac{(m-a)^2}{4} \tag{21}$$

$$NC1 = NC2 = \frac{(m^2 - a^2)}{4} \tag{22}$$

$$DPC = DNC = \frac{1}{2} \tag{23}$$

Finally, it follows:

$$\sigma_{12}^p = a^2 \tag{24}$$

$$\sigma_{12}^n = -a^2 \tag{25}$$

According to the previous equation, the covariance of $Z^{(p1)}, Z^{(p2)}$ is positive, and the covariance of $Z^{(n1)}, Z^{(n2)}$ is negative.

Appendix 2

In this appendix, we derive the condition that the mean square error, $MSE(Z_{NLF})$, of the proposed non-linear fusion operator is lower than the mean square error, $MSE(Z_{MAP})$, of the linear fusion operator. This error is lower if we decrease the covariance between the realizations of the processes that correlated positively, because $MSE(Z_{MAP}^{(n)}) = MSE(Z_{NLF}^{(n)})$. The mean square errors, $MSE(Z_{MAP}^{(p)})$ and $MSE(Z_{NLF}^{(p)})$, of the fusion operators are given by:

$$\begin{aligned} MSE(Z_{MAP}^{(p)}) &= Var(Z_{MAP}^{(p)}) + (Bias(Z_{MAP}^{(p)}))^2 \\ &\text{and} \\ MSE(Z_{NLF}^{(p)}) &= Var(Z_{NLF}^{(p)}) + (Bias(Z_{NLF}^{(p)}))^2 \\ &= Var(Z_{NLF}^{(p)}) + (E[Z_{NLF}^{(p)}] - m)^2 \\ &= Var(Z_{MAP}^{(p)} + \alpha_2(\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)}))) \\ &\quad + (E[Z_{MAP}^{(p)} + \alpha_2(\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)}))] - m)^2 \\ &= Var(Z_{MAP}^{(p)}) \\ &\quad + \alpha_2^2 Var(\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})) + 2\alpha_2 cov(Z_{MAP}^{(p)}, \pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})) \\ &\quad + (E[Z_{MAP}^{(p)} + \alpha_2(\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)}))] - m)^2 \\ &= Var(Z_{MAP}^{(p)}) + \alpha_2^2 Var(\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})) \\ &\quad + 2\alpha_2 cov(Z_{MAP}^{(p)}, \pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)})) \\ &\quad + (E[Z_{MAP}^{(p)}] - m + E[\alpha_2(\pm g(Z^{(p1)}, Z^{(p2)}))])^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MSE(Z_{NLF}^{(p)}) &= \\
 Var(Z_{MAP}^{(p)}) + \alpha_2^2 Var(\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})) &+ 2\alpha_2 cov(Z_{MAP}^{(p)}, \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})) \\
 + (E[Z_{MAP}^{(p)}] - m)^2 + \alpha_2^2 (E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})])^2 & \\
 + 2\alpha_2 ((E[Z_{MAP}^{(p)}] - m) E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]) &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 MSE(Z_{NLF}^{(p)}) &= \\
 Var(Z_{MAP}^{(p)}) + (E[Z_{MAP}^{(p)}] - m)^2 + 2\alpha_2 (cov(Z_{MAP}^{(p)}, \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})) & \\
 + \alpha_2^2 (Var(\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})) + (E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})])^2) & \\
 + 2\alpha_2 (E[Z_{MAP}^{(p)}] E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] - m E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]) &
 \end{aligned}$$

With:

$$\begin{aligned}
 E[Z_{MAP}^{(p)}] - m &= 0 \\
 Var(\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})) + (E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})])^2 &= E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})^2] \\
 MSE(Z_{MAP}^{(p)}) &= Var(Z_{MAP}^{(p)})
 \end{aligned}$$

It follows:

$$\begin{aligned}
 MSE(Z_{NLF}^{(p)}) &= MSE(Z_{MAP}^{(p)}) + \alpha_2^2 (E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})^2]) \\
 &+ 2\alpha_2 cov(Z_{MAP}^{(p)}, \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})) \\
 &+ 2\alpha_2 (E[Z_{MAP}^{(p)}] E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] - m E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]) \\
 \\
 MSE(Z_{NLF}^{(p)}) &= MSE(Z_{MAP}^{(p)}) + \alpha_2^2 (E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})^2]) \\
 &+ 2\alpha_2 \alpha_1 E[Z^{(p_1)} (\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)}))] + 2\alpha_2^2 E[Z^{(p_2)} (\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)}))] \\
 &+ 2\alpha_2 \alpha_3 E[m_a (\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)}))] \\
 &- 2\alpha_2 (\alpha_1 E[Z^{(p_1)}] + \alpha_2 E[Z^{(p_2)}] + \alpha_3 E[m_a]) E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] \\
 &+ 2\alpha_2 (\alpha_1 E[Z^{(p_1)}] + \alpha_2 E[Z^{(p_2)}] + \alpha_3 E[m_a]) E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] \\
 &- 2m\alpha_2 E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] \\
 &= MSE(Z_{MAP}^{(p)}) + \alpha_2^2 E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})^2] \\
 &+ 2\alpha_2 \alpha_1 E[Z^{(p_1)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] + 2\alpha_2^2 E[Z^{(p_2)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] \\
 &(2\alpha_2 \alpha_3 m_a - 2m\alpha_2) E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})]
 \end{aligned}$$

Then, $MSE(Z_{NLF}^{(p)})$ is lower than $MSE(Z_{MAP}^{(p)})$, if the following condition holds:

$$\begin{aligned}
 \alpha_2^2 E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})^2] + 2\alpha_2 \alpha_1 E[Z^{(p_1)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] & \\
 + 2\alpha_2^2 E[Z^{(p_2)} \pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] & \\
 + (2\alpha_2 \alpha_3 m_a - 2m\alpha_2) E[\pm g(Z^{(p_1)}, Z^{(p_2)})] \leq 0 &
 \end{aligned}$$

A.4 GNSS dataless signal tracking with a delay semi-open loop and a phase open loop - Stienne *et al.* (2013)

Cet article a été publié dans le revue Signal Processing 93(5), pp. 1192-1209, 2013.



GNSS dataless signal tracking with a delay semi-open loop and a phase open loop



G. Stienne*, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, M. Benjelloun

Laboratoire d'Informatique, Signal et Image de la Côte d'Opale (LISIC), Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille; Université du Littoral Côte d'Opale (ULCO), 50 rue Ferdinand Buisson, BP 699 - 62228 CALAIS cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 7 May 2012
 Received in revised form
 10 December 2012
 Accepted 12 December 2012
 Available online 26 December 2012

Keywords:

GNSS signal processing
 Bayesian estimation
 Circular estimation

ABSTRACT

In this article we propose to process the code and phase delay of a dataless GNSS signal in open and semi-open loops. The aims of this processing are to get an accurate estimate of the phase and code delays by integration of the GNSS signal. We show that in an open loop the code delay evolution is a piecewise stationary process and we propose to model the phase delay as a circular random variable distributed according to a von Mises distribution. In this context the code tracking is realised on the GNSS signal by estimating the abrupt changes in the code discriminator values. We propose a Bayesian modeling of the problem in order to define the change point estimator. The proposed estimator involves in its definition the inaccurate prior information of Doppler and signal to noise density ratio provided by the phase delay tracking loop. Furthermore we propose a circular Bayesian modeling of the observations provided by the phase open loop. From this model, we derive a circular recursive filter for the estimation of phase delay and frequency of the carrier. The proposed tools are assessed using synthetic and real data.

© 2012 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Since the processing of digitised Global Navigation Satellite System (GNSS) signals has become feasible, numerous demultiplexing and demodulation processing tools have been developed for the received GNSS signals. The purpose of these techniques is to estimate the GNSS signal carrier frequency and phase delay and the CDMA code delay in interference environments. These disturbances are the multipaths and electromagnetic interferences as well as the signal attenuation during its propagation [22]. In this context we can find in the published works three main approaches to improve the accuracy, reliability and robustness of the processing. These approaches concern the use of multi sensor aided systems, the long integration of the signal, the modeling

of the CDMA autocorrelation function alteration in the design of the processings. For example the new processing of multipath and interference signal takes into account the shape distortion of the auto correlation function in the design of the code delay estimate [24,19]. The new aided systems use a vector tracking loop to estimate the delays of the GNSS signal of each satellite with the global navigation solution obtained with or without the integration of external sensors [31,21]. In any case the observations provided by the tracking loops are the code and phase delays from each satellite and it is the integration of the signal that allows to extract the signal from the noise [23].

A GNSS receiver tracks the received signal in order to estimate the delays of code and phase which rely on the receiver displacement. In this article, the signal processing aim is the tracking of signals with low carrier to noise ratio (C/N_0). With the modernisation and the creation of GNSS systems, new signal structures have been proposed. One of the particularities of these new signals is the

* Corresponding author. Tel.: +33 321465679.

E-mail address: stienne@lisic.univ-littoral.fr (G. Stienne).

presence of a dataless pilot channel that allows a long coherent integration of the observed code and phase delays in order to improve the positioning accuracy and robustness. For example the GPS-L2C signal is composed of two civil channels, namely the pilot channel and the data channel, in its structure. These two channels are respectively multiplexed by the CM (Code Moderate) and CL (Code Long) codes and are then multiplexed together using Time Division Multiplexing (TDM). The GPS-L5 signal is composed of a pilot channel and a data channel multiplexed by two orthogonal codes and modulated by two carriers in quadrature [16].

The GNSS signal tracking is realised by a Delay Lock Loop (DLL) for the CDMA code and a Phase Lock Loop (PLL) for the carrier phase. A classic code tracking loop is composed of a match filter. The tracking performance of the match filter depends on several parameters. These parameters of the baseband GNSS processor are the predetection integration time, the correlator spacing, the receiver and the DLL bandwidth. All these parameters are linked together. For example the predetection integration time must be as long as possible in order to process weak signals and as short as possible to operate under high dynamic stress of the receiver. The thermal noise is reduced when the bandwidth and the correlator spacing are reduced but the sensitivity to dynamic stress is increased. “The rule-of-thumb tracking threshold for the DLL (Delay Lock Loop) is that the 3-sigma value of the jitter due to all sources of loop stress must not exceed half of the linear pull-in range of the discriminator” [3]. It is proposed in [1,2] a general expression for noise code tracking jitter for coherent and noncoherent early minus late discriminators. These expressions are functions of the effective C/N_0 . There are two different ways to reduce the DLL jitter. The first way is to reduce the code loop bandwidth and the second one is to increase the predetection integration time. In a classical receiver the predetection integration time does not exceed 20 ms, the duration of a navigation data bit, and the loop bandwidth is defined to match the rule-of-thumb condition. According to the representation proposed in [1], a code tracking loop is composed of a TOA (Time of Arrival) estimator and a TOA smoothing filter. Unsmoothed TOA estimates are processed by a TOA smoothing filter. This filter produces smoothed TOA estimates that are provided to the TOA estimator as previous TOA estimates [1]. In this model the GNSS signals are supposed continuous, the unsmoothed TOA estimate is assumed to be stationary and its temporal correlation is not taken into account. The smoothing of the TOA increases when the code tracking loop bandwidth is reduced [1,3]. Unfortunately this effect is limited by the temporal correlation of the unsmoothed TOA. This correlation is introduced in the TOA estimator by the correction with the previous TOA estimate. In order to avoid this problem the loop must be open or the predetection integration time must be increased. However, the TOA provided by the TOA estimator is no more stationary in this case. For continuous GNSS signals, the TOA is linearly varying (as a function of the relative satellite-receiver speed). For sampled GNSS signals, the unsmoothed TOA estimate is piecewise stationary with abrupt changes

every observable delay of code. A delay of code is indeed observable if its value exceed an integral multiple of the sampling period. The novelty of the code tracking loop proposed in this article is to take into account the piecewise stationary behaviour of the TOA in the smoothing filter. The predetection integration time is 1 ms and the mean correlator values are estimated in the stationary pieces. The code tracking threshold is defined as half the magnitude of the change and is a function of the carrier to noise ratio. In this context the tracking loop filter is a change point estimate because the filter has to detect a change and estimate the instant of change. For a given C/N_0 the length of integration of the correlator values will depend on the probability of change detection fixed by the user.

In this article the objective of the tracking process is to maintain accurate code track and to avoid loss of lock. In this context the aim of the signal processing is to realise coherent integration on long periods in order to avoid loss of lock. It is also to estimate accurately the change instants in the discriminator in order to maintain an accurate code track and pseudo-range estimation. The need of precise pseudo-range arises in several applications. For example when we increase the measurement frequency the only way to improve the positioning is to process the position with accurate pseudo-ranges. In urban navigation when the DOP is poor the only way to improve the positioning is to use accurate pseudo-ranges because a small error implies in this case a large error of position. The long coherent integration is the best way to improve the signal to noise ratio compared to noncoherent integration, which is limited by the squaring loss. Indoor and under foliage localisation are two well known applications that deal with very low signal to noise ratio. In a classical GNSS receiver the coherent integration time does not exceed a few dozens of milliseconds, extending the coherent integration time for these applications will allow using GPS under more different kinds of covered areas. The use of narrow correlator in the presence of multipath [20] needs also to process very low signals to noise ratio because the maximum value of the discriminator is proportional to the correlator spacing.

In this work we propose to track the signal with an open loop for the carrier phase and a semi-open loop for the code. This approach allows suppressing the temporal correlation and then to integrate the signal for longer time. In this paper, we propose a new architecture that uses together a Delay Semi-Open Loop (DSOL) for the code tracking and a Phase Open Loop (POL) for the phase and the frequency tracking. We show that the code tracking process can be defined as a change point estimator and we define a circular Bayesian filter to estimate the carrier phase angular value.

Receivers which work with a pilot channel have to process a CDMA code and a carrier mixed with a Bi-Phase Shift Keying modulation. In this case the goal of the tracking loops is to generate a replica of the received signal in order to measure its code and phase delays. In a classical receiver the local code is retiming every period, or multiple of code period, in order to stay locked to the received signal. The received signal is sampled so the

smallest observable delay of code is equal to a sampling period.

In a semi open loop the local code is not retiming at each period of code [15]. In this case we will observe in the discriminator behaviour a jump of its mean value at every code delays equal to multiple of the sampling period. In our approach we propose to retime the local code on the received signal at the change instants of the discriminator. These instants, which are variable, depend on the satellite-receiver relative speed. The jump magnitude is a function of the code delay and of the carrier to noise ratio. We propose a Bayesian modeling of the problem in order to define a change point estimate of the discriminator values. In this modeling, we define as inaccurate prior information the measurements of carrier to noise ratio and the measurements of relative satellite-receiver speed. These measurements are both provided by the phase tracking loop. The loop defined in this approach is semi-open because the code is retiming at the change instants. This kind of loop allows the long coherent integration of the signal and then a more accurate estimation of the code delay. The change instants are indeed estimated with the uncorrelated discriminator values obtained since the last detected change.

When the received signal has a low carrier to noise ratio, it is the PLL that loses its lock first. To improve the tracking performance of a PLL, the signal can be integrated over several code periods and unaided and Doppler aided frequency lock loops [23,4] can be employed. It is also possible to decrease the noise power on the observables by fusing the phase delay measurements provided by the data and dataless channels of a GNSS signal [8,9]. When the loop is open we directly measure (as discriminator values) the angular values of phase delays that evolved on the whole 2π period. The purpose of the proposed POL and circular filter is to improve the estimated phase delay compared with the one obtained with a PLL using loop filters. However, the phase angle is calculated in cycles in its definition interval (e.g. $[0, 2\pi)$ or $[-\pi, \pi)$). In this context, filters used traditionally, namely the extended Kalman filter (EKF) [10] and the particle filters [11–13], are not optimal.

The POL proposed in this paper employs a recursive filter defined according to a circular Bayesian inference. This tool is developed according to the von Mises circular distribution, which can be considered as the equivalent of the normal distribution in the linear domain [14]. In [5], the statistical property of the GNSS carrier phase observations is validated as von Mises distribution. The circular filter is developed in a Bayesian framework like the Kalman filter in the linear domain. The system is described by a state equation and we try to find the estimator of the state knowing the measurements that maximises the *a posteriori* distribution of the state knowing the measurements. The proposed filter is structured in a prediction step and an update step defined respectively from the state prior and the likelihood of the observations. However, it is necessary here to use some approximations to solve the Chapman–Kolmogorov equation that defines the prediction step of the filter.

The filter described here was originally presented in [6]. In this paper we provide a complete and detailed

description of the circular filter and its design. Furthermore we propose its implementation in a global code and carrier tracking loop process.

The open loop architecture for the signal tracking and the various tools that are dedicated to it are assessed in our experiments on synthetic data. We compare the proposed methods with the classic DLL and PLL implemented with EKF loop filters. Finally, we demonstrate the feasibility of the proposed architecture by calculating positions using real data.

The paper is organised as follows. After this introduction, the second section is dedicated to the problem positioning and to the definition of the tracking architecture. The third section is about the proposed change-point detector that is used in the DSOL. We are interested in the fourth section in the circular filter employed in the POL. The fifth section consists in testing the proposed architecture. The results are confronted with the results produced by conventional methods. Finally, the sixth section concludes the article.

2. Problem positioning

2.1. Code and phase loops discriminator

The dataless signal structure is as follows:

$$S_L(t) = \sqrt{2}A_e CDMA(t) \sin(2\pi f_L t) \quad (1)$$

with

- f_L a predefined frequency in the IEEE L band (1–2 GHz),
- A_e the power of the emitted signal,
- $CDMA(t)$ a Code Division Multiple Access (CDMA) code of period T_b .

In order to track a GNSS signal, a receiver realises the demodulation of the received signal. The received signal is down converted to in-phase and quadrature-phase components. It processes three values of correlation with the received signal and a local replica generated by the receiver. For each component, three values of correlation, denoted $R(\dots)$, are processed with three shifted replicas of the CDMA code. The three values of correlation are named Early, Late and Prompt. They are respectively obtained for a CDMA code in advance, a code delayed and a code prompt. Then, the receiver has six measurements at each instant k , denoted $I_{E,k}$, $I_{L,k}$, $I_{P,k}$ and $Q_{E,k}$, $Q_{L,k}$, $Q_{P,k}$, associated respectively with the carriers in phase and in “quadrature”.

After an acquisition step, the replica is synchronised with the received signal. The satellite and receiver motions cause a desynchronisation of the local signal and the phase and code delays are estimated by tracking loops. We denote $\tau_{e,k}$ the code delay that relies on the variations of the satellite-receiver pseudo-range. We denote $\phi_{e,k}$ and $f_{e,k}$ the delays of phase and frequency associated with the satellite-receiver movements and to the drift of the local oscillator. In our approach we use the discriminator “Early

minus Late” in the code loop and the measurement of phase delay in the phase loop.

Let $T_c/2$ be the gap between the Early/Late and the Prompt codes, with T_c the duration of a bit (chip) of the CDMA code. When the locally generated code is not reset, the “Early minus Late” discriminator presents an extremum when the code delay is of $\pm T_c/2$. The in phase components expressions used in the discriminator are given by [17]

$$I_{E,k} = I_k\left(\frac{T_c}{2}\right) = \sqrt{2S/N_0T_b}R\left(\tau_{e,k} - \frac{T_c}{2}\right) \text{sinc}(f_{e,k}T_b) \cos(\phi_{e,k}) + \eta_k^I \quad (2)$$

$$I_{L,k} = I_k\left(-\frac{T_c}{2}\right) = \sqrt{2S/N_0T_b}R\left(\tau_{e,k} + \frac{T_c}{2}\right) \text{sinc}(f_{e,k}T_b) \cos(\phi_{e,k}) + \eta_k^L \quad (3)$$

$$I_{P,k} = I_k(0) = \sqrt{2S/N_0T_b}R(\tau_{e,k}) \text{sinc}(f_{e,k}T_b) \cos(\phi_{e,k}) + \eta_k^P \quad (4)$$

$$Q_{P,k} = Q_k(0) = \sqrt{2S/N_0T_b}R(\tau_{e,k}) \text{sinc}(f_{e,k}T_b) \sin(\phi_{e,k}) + \eta_k^Q \quad (5)$$

with

S/N_0 the signal to noise density ratio,
 η_k^I, η_k^Q centred white Gaussian random noises of variance one, $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

with R the correlation function:

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c} & \text{for } 0 \leq |\tau| \leq T_c \\ 0 & \text{for } T_c \leq |\tau| \end{cases} \quad (6)$$

The expression of the code discriminator $D_k = I_{E,k} - I_{L,k}$ is thus

$$D_k = F_k \left(R\left(\tau_{e,k} - \frac{T_c}{2}\right) - R\left(\tau_{e,k} + \frac{T_c}{2}\right) \right) \quad (7)$$

with

$$F_k = \sqrt{2S/N_0T_b} \text{sinc}(f_{e,k}T_b) \cos(\phi_{e,k}) \quad (8)$$

The measurement of phase delay, obtained in the phase loop, is given by

$$\phi_{e,k} = \arctg\left(\frac{Q_{P,k}}{I_{P,k}}\right) \quad (9)$$

2.2. “Early minus Late” discriminator variations

Five cases appear for the correlation computation. Each case corresponds to a linear evolution of the code discriminator. For a decreasing (respectively increasing) pseudo-range, leading to a negative (respectively positive) signal code delay $\tau_{e,k}$, the “Early minus Late” discriminator presents a decreasing (respectively increasing) trend for $|\tau_{e,k}| < T_c/2$, and increasing (respectively decreasing) for

$$\frac{3T_c}{2} > |\tau_{e,k}| > \frac{T_c}{2}.$$

For $|\tau_{e,k}| > 3T_c/2$, the discriminator equals zero. For both decreasing or increasing pseudo-ranges, the maximum of the discriminator absolute value is reached when $\tau_{e,k} = \pm T_c/2$. Fig. 1 shows the evolution of the Early-minus-Late discriminator as a function of the considered sample, when the local code is not reset. Both cases are displayed. The equation of the linear part of the discriminator situated around the null value of the code delay, namely for $-T_c/2 \leq \tau_{e,k} \leq T_c/2$, is given by

$$D_k = F_k \left(1 - \frac{\frac{T_c}{2} - \tau_{e,k}}{T_c} - 1 + \frac{\tau_{e,k} + \frac{T_c}{2}}{T_c} \right) \quad (10)$$

$$D_k = \frac{2F_k}{T_c} \tau_{e,k} \quad (11)$$

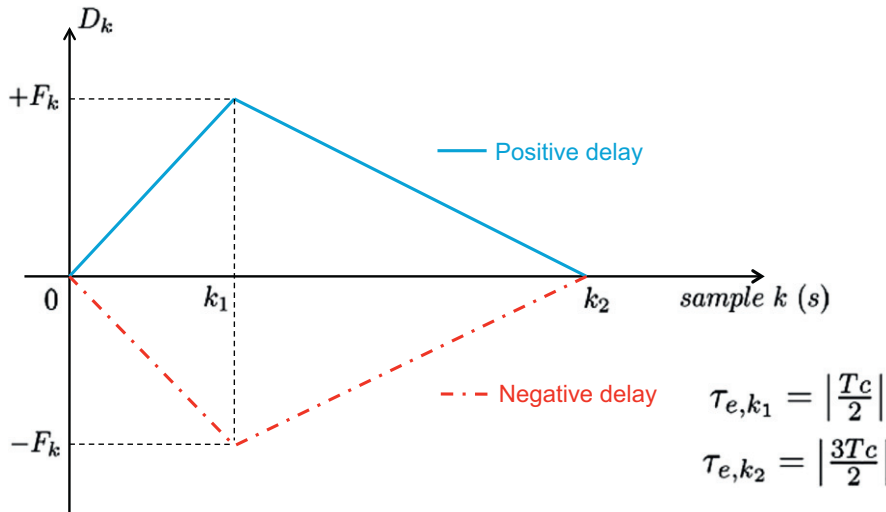


Fig. 1. Discriminator variations according to sampled time.

In the real case we have to take into account the limited bandwidth of the signal and the sampling frequency. We display on Fig. 2 (on the left) the normalised discriminator values obtained for a 4 MHz bandwidth receiver. When the signal is sampled at frequency f_s , the discriminator behaviour displayed Fig. 2 (on the right) is piecewise stationary. The changes in the discriminator are associated with code delays equal to a multiple of the sampling period. On this figure the values of discriminator (which depend on τ_e) are displayed in milliseconds as a function of the code periods. For the four first change instants in the discriminator values, F_k is proportional to the product of the code delay $\tau_{e,k}$ with the carrier to noise ratio. The maximum value of the discriminator F_k is obtained after a delay which depends on the relative satellite-receiver speed.

The proposed design considers a correlator spacing of one chip and a replica code phase of Tc^*fs , early or late. The proposed model can also be used for narrow correlator taking into account the following consideration: some code tracking loops use smaller correlator spacing D , in order to improve the multipath performances. In this case the linear part of the discriminator that is used in our approach is between $-(D/2) \leq \tau_{e,k} \leq D/2$. In this context higher sampling frequency will be needed in order to have a minimum of two changes in the linear part of the discriminator. The front-end bandwidth will limit the value of the sampling frequency.

In our approach we want to detect, in the discriminator values, the first change instant and the change magnitude. The local code is retimed at the change instant and we compute, with the magnitude of the change, the value of the code delay. We indeed use in this case the phase delay and the value of S/N_0 provided by the phase tracking loop. The knowledge of the code delay at the

retiming instant allows to linearly interpolate its values between two changes and then to get an estimate of the satellite-receiver pseudo-range every millisecond.

2.3. Architecture of the open loop tracking system

We present on Fig. 3 the proposed architecture for the tracking of a GNSS dataless signal. The loop on the top of the figure is a POL used to provide measurements of phase and frequency of the carrier. In this POL, the code and the frequency of the replica signal are updated at each change instant in the discriminator values of the second loop. The circular filter described in paragraph 4 provides an estimate of the phase $\hat{\phi}_e$ and frequency \hat{f}_e of the signal. An estimate of the SNR is computed with I_p and the Doppler frequency f_d is derived from \hat{f}_e .

The second loop in the bottom of the figure is the DSOL. The phase and the frequency of the replica for this loop are the ones estimated in the POL. The gap τ_e between the replica code and the received signal $S_r(t)$ increases until a change in the “Early minus Late” discriminator is detected. When a change is detected the code delay $\hat{\tau}_e$ is estimated and the delay of the replica code is updated. The pseudo-range is linearly interpolated between the previous and the current detected changes. We suppose in this model that the satellite-receiver evolution is weakly nonlinear between two changes.

3. Code delay estimation

3.1. Application to a GNSS signal and definition of the change point parameters

In an open loop the discriminator output varies because the satellite-receiver distance varies. This variation is mainly

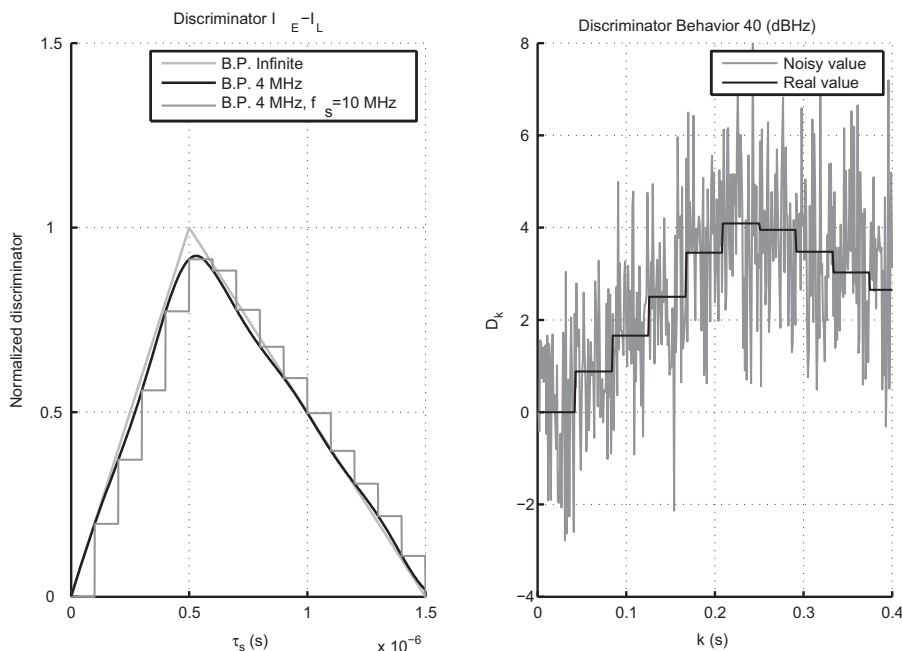


Fig. 2. Discriminator as a function of time (s).

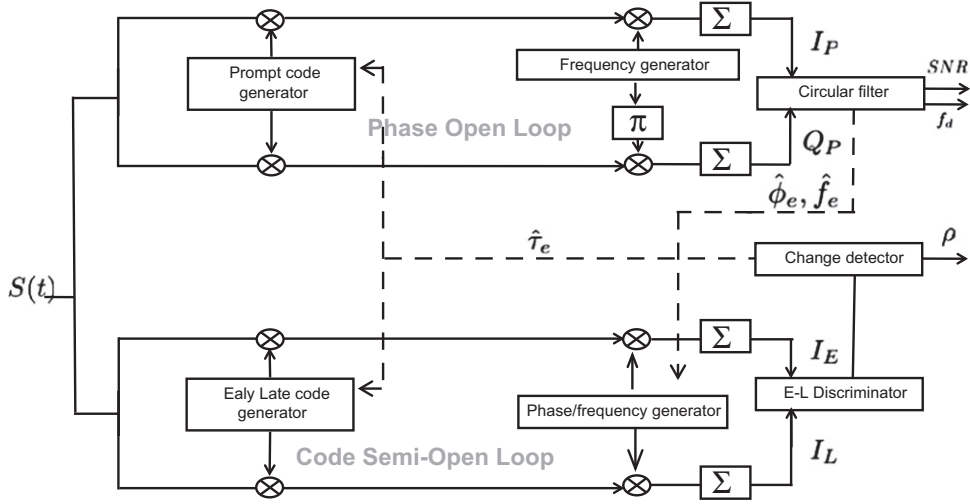


Fig. 3. Architecture of the proposed tracking algorithm.

Table 1
Size of the working window as a function of the relative speed satellite-receiver.

$f_d v_s$ (Hz m/s)	10,000 1903	5000 951	1000 190	500 95	100 19
M (ms)	7	15	78	157	787

due to the satellite motion and is supposed to be linear. The discriminator behaviour is piecewise stationary and when the Doppler frequency is high the discriminator reaches its maximum value with short stationary pieces. On the other hand, when the Doppler is low the stationary pieces are larger. In our filter implementation, the size of the working window will not exceed the length of the stationary pieces that depend on the Doppler frequency so on the relative satellite-receiver speed.

We consider at the k th period of code, so at the k th millisecond, the discriminator value. We estimate the change point in the time series of noisy discriminator values defined from the last detected change to the current instant k . When a change is detected the code delay is estimated and the local code is reset on the received signal. The change point performances (in terms of accuracy of the estimated change instant and change magnitude) are functions of the size of the working window M and the prior information on the change magnitude m .

We use the Doppler frequency in order to fix the size of the working window. The Doppler frequency f_d provided by the POL is a function of v_s the satellite-receiver speed. We derive from v_s the length of the stationary piece in number of CDMA code periods. We indeed observe a jump in the discriminator values when the pseudo-range variation exceeds $\Delta = C/f_s$ with f_s the sampling frequency and C the speed of light. In this case the number of milliseconds needed to observe a jump in the discriminator behaviour is given by

$$M = \left\lfloor \frac{\Delta}{v_s * T_b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{f_L}{f_s * T_b * f_d} \right\rfloor$$

Table 2
Change point magnitude m as a function of the size of the working window ($M, 2M, 3M$) and the carrier to noise ratio C/N_0 .

C/N_0 (dBHz)	50	45	40	30	20
m/M	1.41	0.80	0.45	0.14	0.04
$m/2M$	2.12	1.19	0.67	0.21	0.07
$m/3M$	2.83	1.59	0.89	0.28	0.09

with $v_s = \frac{Cf_d}{f_L}$ (12)

where the function $\lfloor \cdot \rfloor$ gives the integer part. We report in Table 1 the size of the working window for several satellite-receiver speeds. We can notice that the smaller the relative speed is, the larger the working window and the most accurate the change point estimates will be. In this context we will have larger working windows in order to process pseudo-ranges of satellites situated at the zenith of the receiver.

In order to process the change point estimate and to fix the threshold we have to know the magnitude of the change. The change magnitude is a function of the signal to noise density ratio S/N_0 . In our implementation this value is provided by the phase loop and is supposed to stay fixed during the change point estimation. The change point magnitude is defined by a discriminator variation associated with a code delay of $1/f_s$. Then we have

$$m = \frac{2 \sqrt{2S/N_0 T_b}}{f_s T_c} \quad (13)$$

We report in Table 2 m as a function of the signal to noise density ratio. The noise on the discriminator values has a variance of 2. In this context the change magnitudes are very low compared with the noise power. It is necessary to integrate the discriminator observations to get an accurate estimation of the change instants. In this table, the values of m are defined for three sizes of the working window $\{M, 2M, 3M\}$. We can process the change point estimate with at most the first three stationary pieces of the discriminator values provided by the open loop as defined in Fig. 2. However, as the size of the working window increases, the estimated change point is more accurate but the delay to detection increases.

In practice, we fix the change point probability of detection to 0.9 in order to define the size of the working window. In this context we won't track the satellites with a high speed and a low C/N_0 because the working window will be too small to get the expected probability of detection. We so avoid taking inaccurate measurements into account for the position computation.

3.2. Change point estimation

In our approach we have at instant k a temporal series of discriminator values provided by the code semi-open loop. We have a series of observations obtained every millisecond between k and the last detected change instant k_p . We denote $\underline{y} = (y_i, k_p \leq i \leq k)$ the observed series of conditional law $h(\cdot)$. We suppose in our implementation that we have the values of M and m provided by the phase open loop.

Let r be the change position in the temporal series with $k_p \leq r \leq k$. The statistical distribution of the discriminator \underline{y} is defined by

$$P(\underline{y}, r, \underline{m}) = P(\underline{m} | \underline{y}, r) h(\underline{y} | r) \pi(r) \quad (14)$$

where $\pi(r)$ is the prior on the change position. r is the change instant to estimate and \underline{m} is a set of parameter $\underline{m} = \{0, m\}$. The discriminator values are 0 before the change and m after the change. $h(\cdot)$ is the likelihood function. Furthermore

$$P(\underline{m} | \underline{y}, r) h(\underline{y} | r) = h(\underline{y} | r, \underline{m}) P(\underline{m} | r) \quad (15)$$

The estimator of the change instant is defined by

$$\begin{aligned} (\hat{r}) &= \underbrace{\text{Argmax}}_{(k_p \leq r \leq k)} P(r | \underline{y}) \\ &= \underbrace{\text{Argmax}}_{(k_p \leq r \leq k)} \log(h(\underline{y} | r) \pi(r)) \\ &= \underbrace{\text{Argmin}}_{(k_p \leq r \leq k)} -\log(h(\underline{y} | r) \pi(r)) \end{aligned} \quad (16)$$

In practice the POL does not provide the real value m of the change magnitude but an estimated value computed with the SNR of the received signal. We model this inaccurate information with a Gaussian distribution of mean μ , the estimated value of m provided by the POL, and variance V . V defines the inaccuracy on the estimated magnitude. Let μ, V be hyper parameters that define *a priori* information on the

value of \underline{m} . Then

$$(\hat{r}) = \underbrace{\text{Argmin}}_{(k_p \leq r \leq k)} -\log(h(\underline{y} | r; \mu, V) \pi(r)) \quad (17)$$

The likelihood distribution $h(\underline{y} | r, \underline{m})$ is given by

$$\begin{aligned} h(\underline{y} | r, \underline{m}) &= \prod_{i=k_p}^{r-1} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i)^2}{4}\right) \\ &\times \prod_{i=r}^k \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i - m)^2}{4}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

where the “Early minus Late” discriminator variance is equal to 2. We assume that m follows a Gaussian distribution of mean μ and of variance V/n_r [18], with $n_r = k - r + 1$. We use this distribution as *a priori* information in our model. Then

$$P(m | r; \mu, V) = \frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left(-n_r \frac{(m - \mu)^2}{2V}\right) \quad (19)$$

We show in Appendix A that

$$\begin{aligned} h(\underline{y} | r; \mu, V) &= \frac{1}{\sqrt{(4\pi)^{(k-k_p+1)}}} \sqrt{\frac{V_r n_r}{V}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=k_p}^k \frac{y_i^2}{2} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right)\right) \end{aligned} \quad (20)$$

with

$$V_r = 1 / \left(\frac{n_r}{2} + \frac{n_r}{V} \right) \quad (21)$$

$$\mu_r = V_r \left(\mu \frac{n_r}{V} + \sum_{i=r}^k \frac{y_i}{2} \right) \quad (22)$$

We propose to define the prior probability to have a change $\pi(r)$ at position r by a Bernoulli distribution such as

$$\pi(r; M) = \lambda_r (1 - \lambda_r) \quad (23)$$

with $\lambda_r = 1/2$ for $k_p \leq r \leq k - M$, otherwise λ_r is smaller than $1/2$ (in practice we take, $\lambda_r = 0.1$). This prior distribution permits to define the minimum number of samples M after the change in order to detect it. It encourages to use the whole discriminator stationary piece in order to get an accurate estimation of m . The estimator of r in the sliding window is thus defined by

$$(\hat{r}) = \underbrace{\text{Argmin}}_{(k_p \leq r \leq k)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=k_p}^k \frac{y_i^2}{2} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right) - \log(\pi(r; M)) \right\} \quad (24)$$

Finally a change is detected when the estimate of m defined by μ_r is higher than a threshold. μ_r is the weighted sum between the observations and μ the prior information. We use the following decision rule (Maximum *A Posteriori* decision rule):

$$\mu_r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\mu}{2} \quad (25)$$

We suppose here that the hypothesis of presence and absence of change have the same probability $1/2$.

4. Phase and frequency estimation

The main problem of a Phase Open Loop is that it provides the evolution of the phase measurement in cycles, in a circular domain. In general, the measurements of phase variations provided by a Phase Lock Loop are assumed to evolve in a linear domain and are processed with a Kalman filter. As part of a POL, the evolution of the phase over time cannot be assumed to be linear. Indeed the evolution of the measurement is then periodic and Gaussian noise model is no more appropriated. The processing tools defined on linear Gaussian statistics are no longer adapted to the measurements processing. The choice was made in this paper to develop signal processing tools dedicated to circular measurements. In our approach the circular measurements are supposed to be distributed according to a von Mises distribution.

Indeed, it has been shown in [5] that the statistical property of the GNSS carrier phase observations can be validated as von Mises distribution. The von Mises distribution was also employed previously to model the phase noise in interaural applications [7]. We defined our first processing tools using von Mises distributions for the phase tracking of a GNSS signal in [9]. A particle filter was implemented in the scalar case and a circular fusion operator was also proposed.

The recursive alpha-beta circular filter described here was then briefly presented in [6] for the phase tracking of a GPS-L2C signal.

4.1. Circular distributions

The von Mises distribution, also known as the circular normal (\mathcal{CN}) distribution [25], describes circular random phenomenon with one preferred orientation [26]. This distribution can be seen as a circular version of the normal distribution [14]. It describes the distribution of a circular random variable $f_{\mathcal{CN}}(\theta; \mu, \kappa)$ of mean μ and concentration parameter κ . κ varies from 0 to infinity and behaves like the inverse of the variance. θ can be any real number, the distribution being 2π -periodic. For low

values of κ , the von Mises distribution has a uniform repartition between 0 and 2π , for which no particular direction is privileged, as shown on Fig. 4. For high values of κ , the von Mises distribution tends to a normal distribution of variance $1/\kappa$.

The von Mises distribution is symmetric and unimodal [27]. Its density is given by the following formula:

$$f_{\mathcal{CN}}(\theta; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)} \tag{26}$$

where θ defines the random direction, evolving in any interval of length 2π . μ is the mean direction and κ the concentration parameter. I_0 is the modified Bessel function of the first kind and order 0. $I_0(\kappa)$ can be considered as a normalising constant [28].

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cdot \cos \theta} d\theta = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r} \left(\frac{1}{r!}\right)^2 \tag{27}$$

The Wrapped Normal circular distribution (\mathcal{WN}) is a mixture of Gaussian distributions centred on a 2π -periodic value μ . This mixture can reproduce the multi-modal feature of the circular distributions related to the periodicity of the angular variables. A Wrapped Normal distribution is obtained by wrapping a normal distribution around a circle. Its expression is given by

$$f_{\mathcal{WN}}(\theta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(\theta - \mu + 2k\pi)^2 / 2\sigma^2} \tag{28}$$

The Wrapped Normal distribution has the additivity property of random variables. In this case, the sum of two random variables following a \mathcal{WN} distribution is also a \mathcal{WN} random variable with known parameters, unlike the sum of two random variables following a von Mises distribution for which the concentration parameter is unknown [28]. More precisely if $\theta_1 \sim \mathcal{WN}(\mu_1, \rho_1)$ and $\theta_2 \sim \mathcal{WN}(\mu_2, \rho_2)$ are independent, then $\theta_1 + \theta_2 \sim \mathcal{WN}(\mu_1 + \mu_2, \rho_1 \rho_2)$ with $\rho_1 = \exp(-\sigma_1^2/2)$ and $\rho_2 = \exp(-\sigma_2^2/2)$.

It has been shown that a von Mises distribution can be approximated by a Wrapped Normal distribution [28] with very low precision losses. This loss of few percent does not affect the estimation process [29,30]. This approximation is

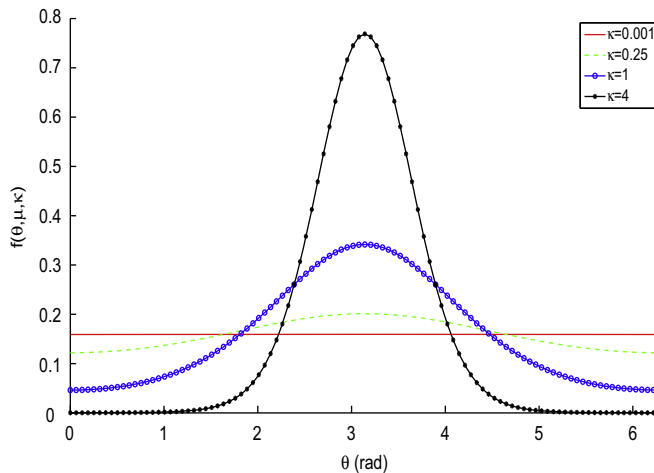


Fig. 4. Von Mises distribution for $\mu = \pi$.

defined by $\mathcal{CN}(\mu, \kappa) \approx \mathcal{WN}(\mu, A(\kappa))$. $\mathcal{WN}(\mu, A(\kappa))$ is a Wrapped Normal distribution of mean μ and variance $\sigma^2 = -2 \log(A(\kappa))$. This approximation is defined for

$$A(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \quad (29)$$

I_1 is the modified Bessel function of the first kind and order 1.

It is also possible to approximate a Wrapped Normal distribution by a von Mises distribution. This approximation is defined by $\mathcal{WN}(\mu, \rho) \approx \mathcal{CN}(\mu, A^{-1}(\rho))$. The concentration parameter of the von Mises distribution is defined with respect to the variance of the Wrapped Normal distribution by $\kappa = A^{-1}(\exp(-\sigma^2/2))$. A^{-1} is approximated via Taylor expansions of order 2 [28]:

- For $\kappa \geq 0.6$

$$x = A(\kappa) \approx \frac{1 - \frac{3}{8\kappa} - \frac{15}{128\kappa^2}}{1 + \frac{1}{8\kappa} + \frac{9}{128\kappa^2}} \quad (30)$$

The only real root is

$$\kappa = A^{-1}(x) = \frac{-(9x + 15)}{8x - 64\sqrt{\frac{-17x^2}{64} - \frac{3x}{32} + \frac{39}{64} + 24}} \quad (31)$$

- For $\kappa < 0.6$, $x = A(\kappa) \approx \frac{\kappa}{2}$, thus

$$\kappa = A^{-1}(x) = 2x \quad (32)$$

4.2. Bayesian circular filter

To estimate the phase in an open loop, we chose to develop a recursive alpha-beta circular filter. Indeed, we dispose in our case of the observations of the angle from which the value of the angle and the angular velocity (Doppler frequency) are estimated. The state equation in this case is given by

$$\Theta_k = F\Theta_{k-1} + V_{k-1} \quad (33)$$

where $\Theta_k = [\theta_k, \dot{\theta}_k]$ is the state vector, that we want to estimate at each instant k . The estimation of $\dot{\theta}_k$ permits to increase the robustness of the filter when facing rapid angular variations. F is the transition matrix, given by

$$F = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_k = \theta_{k-1} + dt\dot{\theta}_{k-1} + v_{k-1}^{[1]} \quad (34)$$

$$\dot{\theta}_k = \dot{\theta}_{k-1} + v_{k-1}^{[2]} \quad (35)$$

The noise vector $V_{k-1} = [v_{k-1}^{[1]}, v_{k-1}^{[2]}]^T$ represents the error of the state model. $v_{k-1}^{[1]}$, $v_{k-1}^{[2]}$ are respectively the state model noise on θ_k and on $\dot{\theta}_k$. Each of them follows a 0-centred von Mises distribution with respective concentration parameters $\kappa_Q^{[1]}$, $\kappa_Q^{[2]}$. We consider that the state concentration and correlation matrix is

$$\kappa_Q = \begin{bmatrix} \kappa_Q^{[1]} & 0 \\ 0 & \kappa_Q^{[2]} \end{bmatrix}$$

In our application, we only have measurements ϕ_k on the angle θ_k , meaning no measurement of the angular velocity $\dot{\theta}_k$ is available. The measurement equation is thus given by

$$\phi_k = \theta_{k-1} + w_k \quad (36)$$

w_k is the noise on angle measurement, which is 0-centred with respect to a von Mises distribution with concentration parameter κ_R . We denote P_{θ_k} and $P_{\dot{\theta}_k}$ the concentration parameters of the direction and the angular velocity estimates and $\hat{\Theta}_{k/k-1} = [\hat{\theta}_{k/k-1}, \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1}]^T$ the state prediction vector.

The definition of the filter in a Bayesian framework requires to determine the *a posteriori* distribution of the state at iteration k knowing all the previous measurements $\phi_{1:k}$. This distribution is proportional to the prior on the value of the state to estimate, multiplied by the likelihood of the measurements:

$$\underbrace{f(\theta_k | \phi_{1:k})}_{a \text{ posteriori distribution}} \propto \underbrace{f(\theta_k | \phi_{1:k-1})}_{\text{prior}} \underbrace{f(\phi_k | \theta_k)}_{\text{likelihood}} \quad (37)$$

In Bayesian filtering, an *a priori* value on the state to estimate is defined by predicting its value with the state equation. The prediction step of the filter is defined by solving the Chapman–Kolmogorov equation. This resolution is described in Appendix B. We show in this appendix that the filter prediction equations are defined by

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = \hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (38)$$

$$P_{\theta_{k/k-1}} = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})A(\kappa_Q^{[1]})) \quad (39)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_{k/k-1} = \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (40)$$

$$P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} = A^{-1}(A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})A(\kappa_Q^{[2]})) \quad (41)$$

We show that the *a priori* distributions that define the prediction step are von Mises distributions given by

$$\theta_k | \phi_{1:k-1} \sim \mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \quad (42)$$

$$\dot{\theta}_k | \dot{\phi}_{1:k-1} \sim \mathcal{CN}(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1}, P_{\dot{\theta}_{k/k-1}}) \quad (43)$$

In our model, the prior and the likelihood are von Mises distributions. We have to define $f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_k)$, the *a posteriori* distribution of the state knowing the estimate. The Bayes' rule implies that the *a posteriori* distribution of the angle is

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) = \frac{1}{\alpha_k} \mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \mathcal{CN}(\phi_k | \theta_k, \kappa_R) \quad (44)$$

where $\alpha_k = \mathcal{CN}(\phi_k | \phi_{1:k-1})$ is a normalising constant. The Bayes' rule also implies that the angular velocity *a posteriori* distribution is as follows:

$$f(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_k, P_{\dot{\theta}_k}) = \frac{1}{\beta_k} \mathcal{CN}(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1}, P_{\dot{\theta}_{k/k-1}}) \mathcal{CN}(\phi_k - \hat{\theta}_{k-1} | \dot{\theta}_k, \tilde{\kappa}) \quad (45)$$

where β_k is also a normalising constant and $\tilde{\kappa} = A^{-1}(A(\kappa_{1,R})A(P_{\theta_{k-1}}))$ is the concentration parameter of the difference $\phi_k - \hat{\theta}_{k-1}$. The expression of the concentration

parameter is obtained using the approximation of the von Mises distribution via a Wrapped Normal distribution and the additivity property of the latter as described in the previous paragraph. In our application there is no measurement of the angular velocity. When developing the Kalman filter in its alpha-beta form, it can be shown that the velocity is estimated in the absence of observations via the difference between the measurement and the previous state. It is by analogy with the linear case that the above *a posteriori* distribution is defined.

Then

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) \propto \exp(P_{\theta_{k/k-1}} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1})) * \exp(\kappa_R \cos(\phi_k - \theta_k)) \quad (46)$$

$$f(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_k, P_{\dot{\theta}_k}) \propto \exp(P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \cos(\dot{\theta}_k - \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1})) * \exp(\tilde{\kappa} \cos(\phi_k - \hat{\theta}_{k-1} - \dot{\theta}_k)) \quad (47)$$

Finally

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) \propto \exp\left(\sqrt{C_{\theta_k}^2 + S_{\theta_k}^2} \cos\left(\theta_k - \arctan\left(\frac{S_{\theta_k}}{C_{\theta_k}}\right)\right)\right) \quad (48)$$

$$f(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_k, P_{\dot{\theta}_k}) \propto \exp\left(\sqrt{C_{\dot{\theta}_k}^2 + S_{\dot{\theta}_k}^2} \cos\left(\dot{\theta}_k - \arctan\left(\frac{S_{\dot{\theta}_k}}{C_{\dot{\theta}_k}}\right)\right)\right) \quad (49)$$

with

$$C_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_R \cos \phi_k \quad (50)$$

$$S_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_R \sin \phi_k \quad (51)$$

$$C_{\dot{\theta}_k} = P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \cos \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1} + \tilde{\kappa} \cos(\phi_k - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (52)$$

$$S_{\dot{\theta}_k} = P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \sin \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1} + \tilde{\kappa} \sin(\phi_k - \hat{\theta}_{k-1}) \quad (53)$$

The following estimators are distributed via a von Mises distribution [28]:

$$\hat{\theta}_k = \arctan(S_{\theta_k} / C_{\theta_k}) \quad (54)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_k = \arctan(S_{\dot{\theta}_k} / C_{\dot{\theta}_k}) \quad (55)$$

Then

$$f(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) = \mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) = \frac{1}{2\pi I_0(P_{\theta_k})} \exp(P_{\theta_k} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_k)) \quad (56)$$

$$f(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_k, P_{\dot{\theta}_k}) = \mathcal{CN}(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_k, P_{\dot{\theta}_k}) = \frac{1}{2\pi I_0(P_{\dot{\theta}_k})} \exp(P_{\dot{\theta}_k} \cos(\dot{\theta}_k - \hat{\dot{\theta}}_k)) \quad (57)$$

with

$$P_{\theta_k} = \sqrt{C_{\theta_k}^2 + S_{\theta_k}^2} \quad (58)$$

$$P_{\dot{\theta}_k} = \sqrt{C_{\dot{\theta}_k}^2 + S_{\dot{\theta}_k}^2} \quad (59)$$

4.2.1. Ambiguity resolution

An observation ϕ_k can be associated with two values $\hat{\theta}_k$ or $\hat{\theta}_k + \pi$ of the parameter to estimate. In this context, there can be a measurement error of π on the parameter to estimate for very noisy circular observations. In this case the distribution of the observations has a low parameter of concentration. In order to correct this error when it occurs, we propose to use the circular distance between the measured and the predicted angle. Let define the circular distance d_c between two angles:

$$d_c(\phi_k, \theta_k) = 1 - \cos(\phi_k - \theta_k) \quad (60)$$

Then we have:

$$\text{If } d_c(\hat{\theta}_{k/k-1}, \phi_k^{(i)}) > d_c(\hat{\theta}_{k/k-1} + \pi, \phi_k^{(i)}) \quad (61)$$

$$\text{Then } \phi_k^{(i)} = \phi_k^{(i)} + \pi \quad (62)$$

The ambiguity is solved by choosing (in the minimum circular distance sense) the measurement $\phi_k^{(i)}$ or $\phi_k^{(i)} + \pi$ that is the closest to the predicted state.

5. Experimentations

5.1. Pseudo-range estimation assessment

First, experiments on synthetic data were conducted to estimate the contribution of the proposed methods. We simulate a real satellite constellation (satellites positions are defined with a Rinex file provided by a receiver), and measurements obtained with a static receiver. The simulated signal is a dataless pilot channel. Different Carrier to Noise Ratios (C/N_0) are considered, namely 50 dBHz, 40 dBHz, 30 dBHz and 20 dBHz. The GPS clock noise disturbances are modelled as normal random walks. The variances of the sequences associated with the phase and frequency random walks are defined for a temperature-compensated crystal oscillator (TCXO) [17]. The sampling rate of the signal is set to 20 MHz. The signal bandwidth is set to 4 MHz. The correlator spacing between Early and Prompt values is set to $T_c/2$. Each experiment lasts 2 s.

We first want to compare the contribution of the proposed tracking algorithm in semi-open loop with the traditional code tracking methods. To do this we compare the mean and the variance of the error on the estimated satellite-receiver pseudo-range. The reference is obtained for a noise-free signal.

The first tracking method confronted to the proposed architecture is the classical match filter using the coherent discriminator ‘‘Early minus Late’’ without loop filter [3]. It is a classical DLL assisted PLL with a ATAN2 discriminator. In this implementation the threshold for the DLL discriminator is half the change magnitude defined by expression (13). The threshold is a function of the carrier to noise ratio. The results are computed with a 20 ms coherent integration of the signal.

In the second method a DLL and FLL-assisted-PLL tracking loops are used for the carrier and code. The loop filters are extended Kalman filters described in [17] and implemented with a 20 ms coherent integration of the signal. The threshold for the DLL discriminator is half the change magnitude defined by expression (13). In this

implementation, for the EKF loop filter of the code discriminator “Early minus Late”, the state noise is set to 0.05 and the measurement noise is set to 1. For the EKF loop filter of the carrier discriminator ATAN2, the state noise vector, associated with phase and frequency, is set to $[1 \ 30]^T$ and the measurement noise $[0.005 \ 0]^T$.

For the proposed method, the threshold for the DLL discriminator is the change magnitude defined by expression (13). The size of the working window is $3M$ where M is defined in expression (12) and is function of the satellite-receiver relative speed. In this case the size of the working window allows obtaining a change point probability of detection greater than 0.9 for all the tested C/N_0 . In this implementation the parameters of the circular filter are: $\kappa_Q^{[1]} = 30$, $\kappa_Q^{[2]} = 500$, $\kappa_R = 0.35$. The parameter of the change detector is $V=10$. The coherent integration lasts 1 ms.

We display Fig. 5 the pseudo-range errors with respect to time for a C/N_0 of 40 dBHz. The pseudo-range error is computed for the satellites 27 and 5 which have respectively a doppler of 1.4 KHz and 3.8 KHz. The pseudo-range errors are obtained for the estimates provided by the proposed open loops and the classical close loops with and without loops filter.

With the results displayed Fig. 5 we can conclude that the proposed method is more accurate because the error is more concentrated around zero. We can also notice that the proposed method is more accurate when the Doppler frequency is low. In this case the satellite-receiver speed is indeed low so the integration length is high. We report Table 3 the error on the estimated pseudo-range for satellite 5 as a function of the carrier to noise ratio. We report in this table the standard deviation of this error.

The error reported Table 3 is appreciatively four times lower for the proposed method when it is compared with the classical method. Furthermore we can notice that for a C/N_0 of 20 dBHz the reference methods EKF and match filter have a very high standard deviation because in this case the tracking process has lose lock.

We report Table 4 the probability to lose lock for the three tested methods. This probability has been computed from 1000 realisations of the tracking of the satellite 5 in the static case. We decide that a tracking loop has lost lock when the error of estimation of the code delay is greater than $3T_c/2$. As defined Fig. 1 this delay corresponds to a null value of the discriminator and in this case the probability to re-lock the track is very low.

The results presented Table 4 show that the proposed method is the most robust since the probability to lose lock is the lowest.

5.2. Phase estimation assessment

We now compare the proposed circular recursive filter used in a POL with an extended Kalman filter used in a PLL. In order to evaluate the obtained results with each method, we estimate the circular distance d_c and the circular dispersion D_v , respectively equivalent to the distance and the variance for angular values between 0 and 2π . These parameters are obtained with the following expressions [28]:

$$d_c(\phi_k, \theta_k) = 1 - \cos(\theta_k - \phi_k) \quad (63)$$

$$D_v(\phi_k, \theta_k) = n - \sum_{k=1}^n \cos(\theta_k - \phi_k) \quad (64)$$

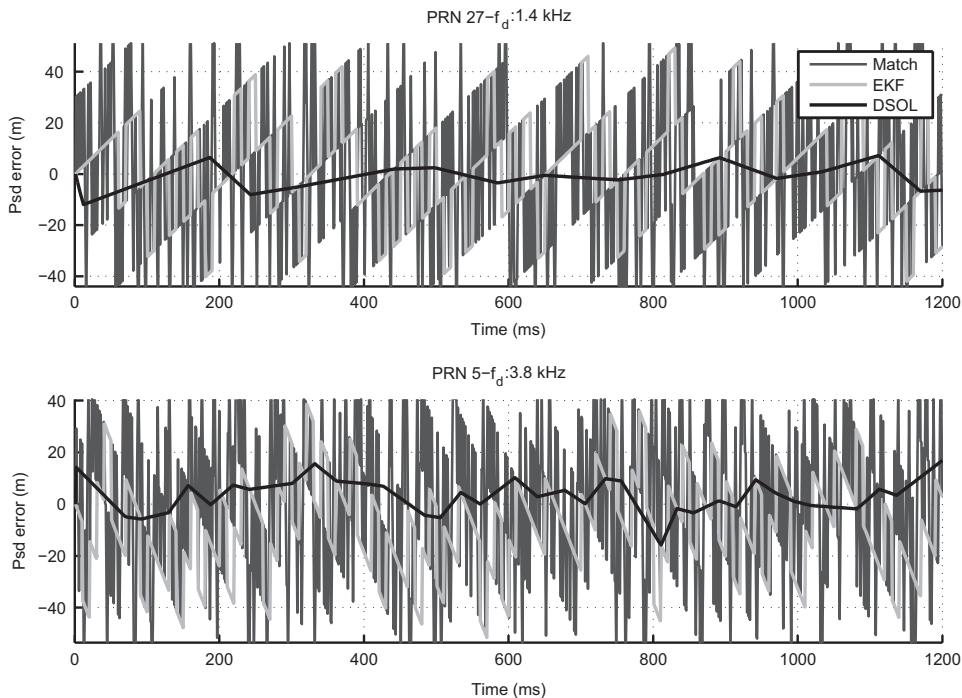


Fig. 5. Pseudo-range errors obtained for the different tested methods and a C/N_0 of 40 dBHz.

Table 3

Standard deviation errors on the estimated pseudo-range (satellite 5) for several SNRs.

C/N_0 (dBHz)	50	40	30	20
Match filter	18.6	27.5	45.2	1014.7
EKF loop filter	9.7	18.2	26.5	357.1
Open loop	3.6	7.7	13.0	64.2

Table 4

Probability to lose lock for a C/N_0 of 20 dBHz and 18 dBHz.

C/N_0 (dBHz)	Match filter	EKF loop filter	Open loop
20	0.9	0.59	0.04
18	0.98	0.88	0.31

When $|\theta_k - \phi_k|$ is equal to 0 modulo 2π , the circular distance d_c reaches zero, its minimum. When $|\theta_k - \phi_k|$ is equal to π modulo 2π , the circular distance reaches 2, its maximum.

We show Fig. 6 the phase estimation results obtained for the satellite 5 and a C/N_0 of 40 dBHz. We can observe that the results obtained with the proposed filter have a lower circular distance so a more accurate estimation of the phase. The same conclusion can be done with the results shown Table 5 for each tested C/N_0 . The standard deviation and the circular dispersion of the estimated phase error are indeed the lowest for each carrier to noise ratio C/N_0 . These results can be explained by two reasons. The classical architecture employing a filter in a lock loop, it induces time correlation errors: an estimation error at sample $k-1$ will be used in the filter measurement at time k . In the proposed architecture, we avoid this problem using an open loop. The second reason is that the measurements in a PLL are phase residuals, meaning phase variations. Employing variations instead of the phase data, the measurement noise in the PLL is higher than in the POL.

5.3. Position estimation assessment

We display Fig. 7 the satellite constellation and the position calculated every millisecond in the static case. We display on this figure the error on the estimated position obtained for a carrier to noise ratio of 40 dBHz. The positions are processed with the pseudo-ranges provided by the three tested methods.

We can notice Fig. 7 that the position error is less dispersive and centred on the null error for the proposed method. In the case of the EKF loops filters we observe a shift of the estimated positions and a piecewise evolution of the positions. These errors are due to the coherent integration of the signal over 20 ms.

We report Table 6 the standard deviation of the position error in the north and east directions obtained Fig. 7. We also report the standard deviation and the mean of the distances between the estimated positions and the real position.

The statistical parameters of the position error presented in Table 6 confirm the results observed in Fig. 7. These results show that the proposed method is more

accurate because the standard deviation of the error is lower and the mean distance smaller. This last parameter indicates that the estimated positions are centred on the real position.

To evaluate the methods, we report in Fig. 8 the standard deviation of the errors in the north and east directions. We report these errors as a function of the carrier to noise ratio C/N_0 .

The statistical parameters of the error displayed Fig. 8 show that the proposed method is more accurate than the classical approaches for all carriers to noise ratio considered in practice. Furthermore for a $C/N_0 = 20$ dBHz we show that the proposed method is more robust because none of the satellite tracking loses lock as it is shown with the small standard deviation of the position error.

5.4. Real case

We want now to assess the proposed method on real data. We consider in our experimentation a static and a dynamic case. A bit grabber samples and stores the signal provided by an antenna. The sampling rate used for the acquisition of the L1 signal is 20 MHz. The bandwidth of the signal is 2 MHz. The coherent integration lengths are the same as for synthetic data, namely 20 ms integration length for the classic techniques and 1 ms for the proposed technique. The correlator spacing between Early and Prompt values is $T_c/2$. For this experimentation we process the navigation message offline in order to construct a pilot channel with the L1 GPS signal. In the static case the acquisition of the signal lasts 8 s and 20 s in the dynamic case. The antenna of the receiver is positioned on the roof of a car. We display Fig. 9 the trajectories on a map, the trajectories on an aerial image and the instrumented vehicle.

We show Fig. 10 the position errors obtained with the tested methods. The position computation is realised each millisecond during 8 s, meaning 8000 points are available. For this experimentation the real position is estimated with a Novatel receiver in differential mode. We display Fig. 10 the positions estimated by the tested methods. In this figure the origin of the graph (the null position in the north and east directions) is the estimated real position provided by a Novatel DGPS and for an integration length of 1 min.

The results observed on Fig. 10 show that the proposed method is the most accurate. Furthermore we can notice that the results obtained in the real case are close to the results obtained in the synthetic case. The values of the carrier to noise ratio of each satellite are in this experimentation close to 40 dBHz.

We display Table 7 the standard deviation of the error computed with the points of Fig. 10.

These results confirm the observations of Fig. 10. The proposed method provides an estimate of the position more concentrated around its real value. However, we can notice that, compared to the synthetic case, there is a rise of the mean distance that is due to the uncorrected ionospheric and tropospheric delay of propagation.

In the dynamic case, the trajectory is realised around a roundabout. The positions of reference are obtained with

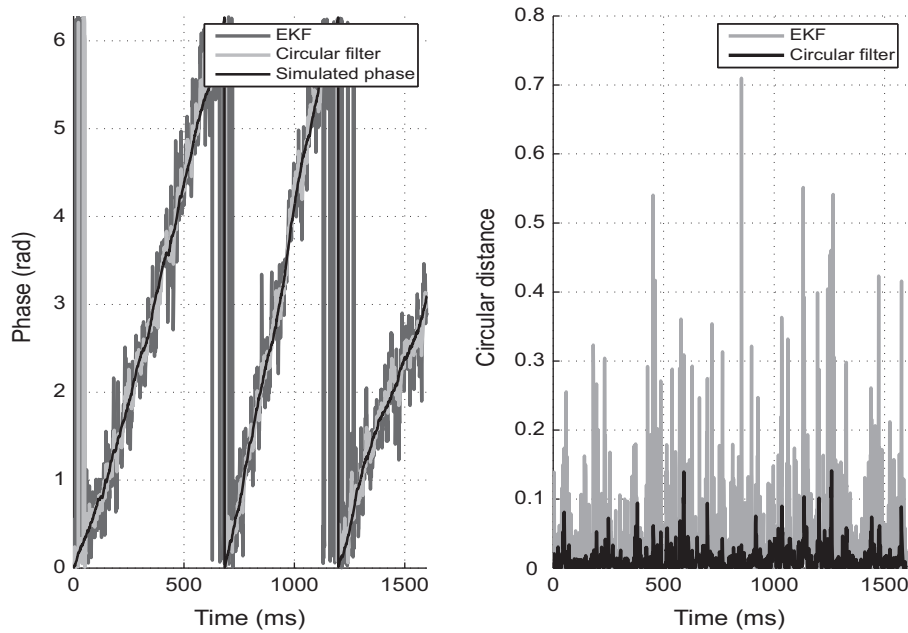


Fig. 6. Estimated phase and circular distance.

Table 5

Circular dispersion and standard deviation errors (D_v / σ) on the estimated phase.

C/N_0 (dBHz)	50	40	30	20
PLL	(3.04/0.055)	(32.62/0.183)	(373.62/0.687)	(1638.37/1.614)
EKF loop filter	(1.02/0.032)	(9.38/0.097)	(75.51/0.279)	(1451.65/1.493)
Circular filter	(0.52/0.022)	(3.01/0.055)	(22.22/0.150)	(189.94/0.445)

a Novatel DGPS and for an integration length of 1 s. We display Fig. 11 the positions estimated with the three tested methods. In this representation the position of reference at the beginning of the trajectory defines the origin of the graph.

We can notice Fig. 11 that the positions provided by the classical methods do not permit to retrieve the nature of the trajectory. On the other hand the positions estimated with the proposed method are closer to the estimated real points and it is possible to recover the mobile trajectory.

In conclusion, the proposed method allows improving the accuracy and the robustness of the positioning for a localisation every millisecond. These ameliorations are obtained thanks to the long coherent integration of the pilot channel of the GNSS signal. In the case of the phase delay processing, this long integration is possible with a circular filter because the phase open loop provides independent observations of the phase delay. Actually when the loop is closed, there is a temporal correlation of the observed delay of phase. This correlation quickly limits the length of the integration. Regarding the code loop, the proposed method uses a change point estimate in a semi open loop. The semi-open loop provides uncorrelated observations of the code delay and we can integrate the signal on a length especially as long as the satellite-receiver speed is low. This integration permits to

improve the change detection and the estimated magnitude of the code delay. Furthermore we also improve the pseudo-range estimation because we use the estimated change magnitude in order to get the code delay at the change instant and then we linearly interpolate the pseudo-range evolution between the last and the current change.

The proposed system may be subject to transient events. For the phase data, these transient events are mainly caused by cycle slips associated with abrupt changes of π in the phase values. The alpha beta circular filter provides a fast and stable response to this kind of event thanks to its recursive structure with a feedback on the estimated state. For the code data, a transient event occurs when you have an abrupt change in the signal power due to multi-path or sudden foliage coverage. In this case, the proposed DSOL provides a robust and fast response to these transient events because its threshold is defined with the estimated signal power provided by the POL.

Compared to the classical approach the circular filter and the change point estimate used in the open loop have a higher computational complexity. Regarding phase processing it will be necessary to use a floating point processor in order to compute the trigonometric functions. The change detector implemented in the semi open loop will be more time consuming. The changes are indeed estimated at each

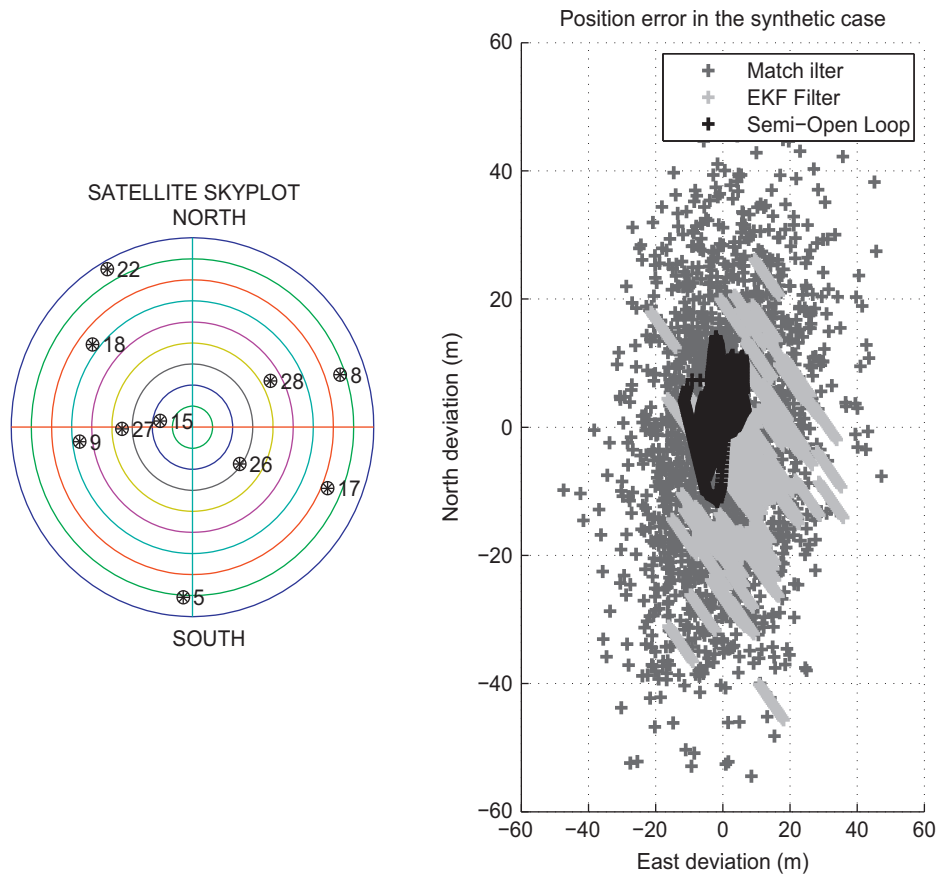


Fig. 7. Simulated constellation and estimated error positions for a C/N_0 of 40 dBHz.

Table 6
Position error for a C/N_0 of 40 dBHz.

Method	East deviation (σ)	North deviation (σ)	Distance (m/σ)
Match filter	17.5	14.4	(20.0/10.6)
EKF loop filter	11.8	10.0	(15.8/8.6)
Proposed method	3.6	3.3	(5.1/2.1)

instant with the observations obtained on several working windows. Finally the last disadvantage of the proposed approach is that the detected changes have a delay equal to the length of the working window.

6. Conclusion

In this article we propose a new tracking architecture for the dataless channel of a GNSS signal. This architecture is based on an open loop for the phase and a semi-open loop for the code. The aim of the tracking process is to provide an accurate estimate of the phase delay and frequency of the carrier and an accurate estimate of the CDMA code delay. We propose a circular filter to estimate the phase delay and a change point estimate for the code delay.

The proposed change point estimate is defined in a Bayesian framework. In our approach we consider inaccurate

prior information on the Doppler frequency and on the carrier to noise ratio for each satellite. This information is provided by the phase tracking loop. We construct the posterior distribution of the change instants with a prior law that models the inaccurate value of the change magnitude computed with the Doppler frequency. We define the likelihood of the observations given the change instant with a Gaussian law that models the inaccurate values of the carrier to noise ratio.

The observations of phase in an open loop are noisy angular data. They are modelled as random data distributed according to the circular distributions of von Mises. We propose a recursive circular filter to estimate the angular values. The filter is defined in a Bayesian framework by solving analytically the prediction and update equations.

Experiments conducted on synthetic data permit to assess each tool presented in this article. The DSOL associated with the proposed slope change-point detector highly reduces errors in the calculation of pseudo-range in comparison to the classic DLL with or without an EKF loop filter. The proposed method is especially robust against noise for signals with SNR higher than 20 dBHz. In the experimentation, we assess the proposed tracking architecture for position estimation every millisecond. We show that the proposed change point detector used in the DSOL and the circular filter used in the POL improve the localisation accuracy by a factor of 3. Experiments on

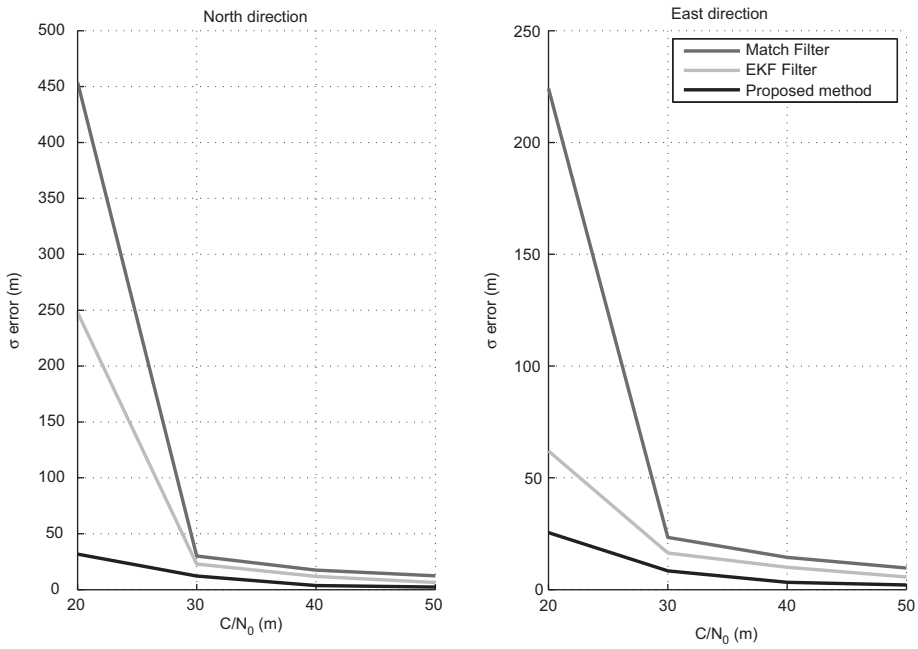


Fig. 8. Position error in the East and North directions.

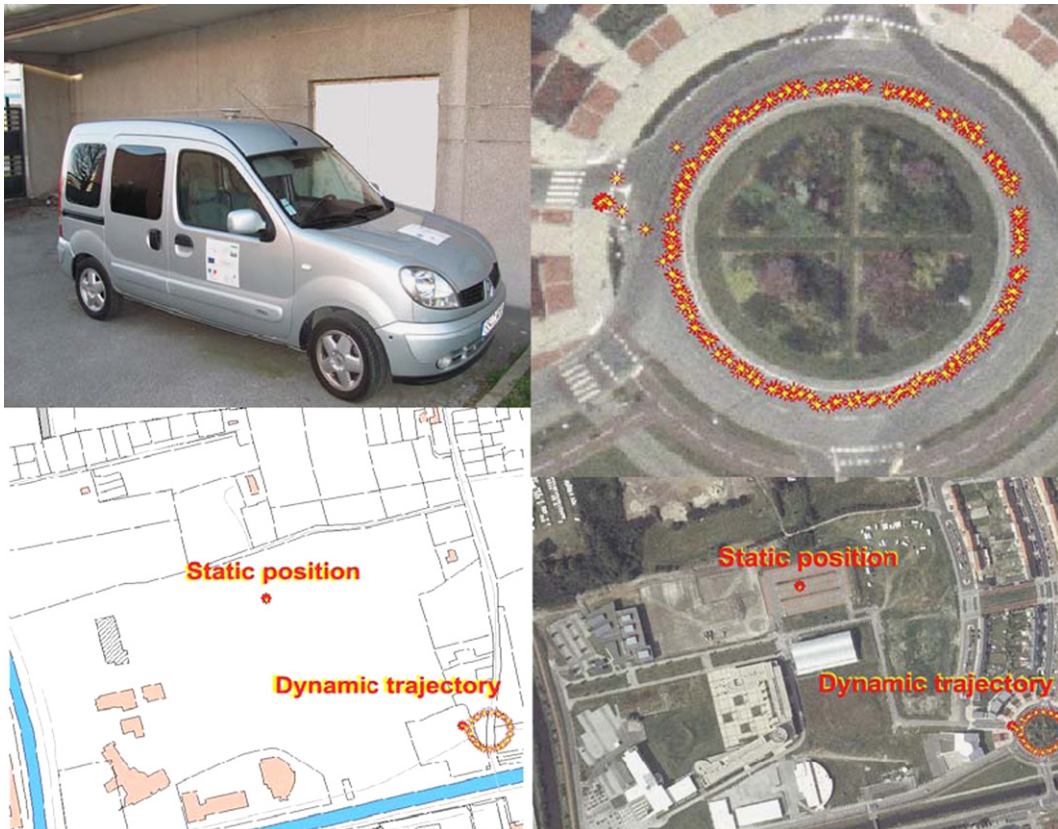


Fig. 9. Dynamic and static trajectories and the instrumented vehicle.

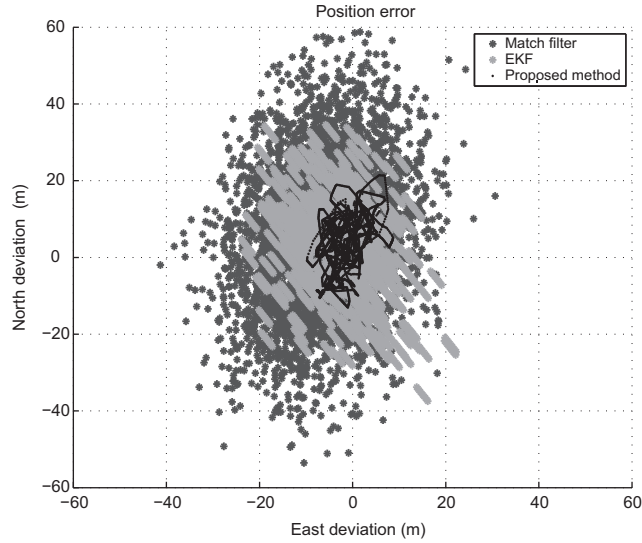


Fig. 10. Estimated positions errors in the static case.

Table 7
Standard deviation of the position error.

	East deviation σ	North deviation σ	Distance (m/ σ)
Match filter	18.6	9.6	(20.1/10.7)
EKF loop filter	13.0	8.2	(14.1/7.3)
Proposed method	6.7	3.6	(7.7/4.0)

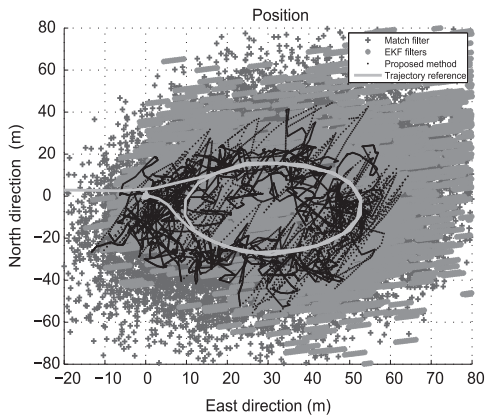


Fig. 11. Estimated positions in the dynamic case.

real data show the feasibility of the proposed method and confirm the results obtained in the synthetic case.

The main perspective of this work lies in the implementation of a change-point detector in the circular domain in order to detect cycle slips in phase behaviour.

Appendix A

We have:

$$P(\underline{m}/\underline{y}, r)h(\underline{y}/r) = h(\underline{y}/r, \underline{m})P(\underline{m}/r) \quad (65)$$

Introducing the *a priori* information in the Eq. (15), we get

$$P(\underline{m}/\underline{y}, r; \mu, V)h(\underline{y}/r; \mu, V) = h(\underline{y}/r, \underline{m})P(\underline{m}/r; \mu, V) \quad (66)$$

$$P(\underline{m}/\underline{y}, r; \mu, V)h(\underline{y}/r; \mu, V) = \prod_{i=k_p}^{r-1} h(y_i; 0) \prod_{i=r}^k h(y_i/m) \times P(\underline{m}/r; \mu, V) \quad (67)$$

$$\text{with } h(\underline{y}/r; \mu, V) = \prod_{i=k_p}^{r-1} h(y_i; 0) \prod_{i=r}^k h(y_i; \mu, V) \quad (68)$$

Let $\Gamma = \prod_{i=r}^k h(y_i/m)P(\underline{m}/r; \mu, V)$. Eqs. (18) and (19) imply that

$$\Gamma = \prod_{i=r}^k \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i-m)^2}{4}\right) \frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left(-n_r \frac{(m-\mu)^2}{2V}\right)$$

Let define

$$V_r = 1 / \left(\frac{n_r}{2} + \frac{n_r}{V} \right)$$

$$\mu_r = V_r \left(\mu \frac{n_r}{V} + \sum_{i=r}^k \frac{y_i}{2} \right)$$

As in [15] we can show that, according to Eqs. (67) and (68), we have

$$h(\underline{y}/r; \mu, V) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi)^{(k-k_p+1)}}} \sqrt{\frac{n_r V_r}{V}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=k_p}^k \frac{y_i^2}{2} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right)\right) \quad (69)$$

Appendix B

We show here the resolution of the Chapman-Kolmogorov equation that defines the prediction step.

We assume that the *a posteriori* distribution defined on $k-1$, $f(\theta_{k-1}|\phi_{1:k-1})$ is a von Mises distribution.

$$\theta_{k-1}|\phi_{1:k-1} \sim \mathcal{CN}(\theta_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1}, P_{\theta_{k-1}}) \tag{70}$$

where $\hat{\theta}_{k-1}$ and $P_{\theta_{k-1}}$ denote respectively the *a posteriori* mean and variance of θ_{k-1} . In our approach, the state noise is distributed according to a von Mises law of concentration parameter κ_Q . The prediction distribution is given by the resolution of the Chapman–Kolmogorov integral:

$$f(\theta_k|\phi_{1:k-1}) = \int f(\theta_k|\theta_{k-1}, \phi_{1:k-1})f(\theta_{k-1}|\phi_{1:k-1}) d\theta_{k-1} \tag{71}$$

The resolution of the Chapman–Kolmogorov integral in the case of von Mises distributions should lead us to define the prediction step by

$$\begin{aligned} \mathcal{CN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) &\propto \int \mathcal{CN}(\theta_k|\tilde{\theta}_{k-1}, \kappa_Q^{[1]}) \\ &\times \mathcal{CN}(\tilde{\theta}_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}, P_{\tilde{\theta}_{k-1}}) d\tilde{\theta}_{k-1} \end{aligned} \tag{72}$$

where $\tilde{\theta}_{k-1} = \theta_{k-1} + dt\dot{\theta}_{k-1}$ and $P_{\tilde{\theta}_{k-1}} = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(P_{\dot{\theta}_{k-1}}))$. In this expression, we do not introduce the correlation between θ_{k-1} and $\dot{\theta}_{k-1}$ because the circular distributions integrating state correlation do not allow to solve the Chapman–Kolmogorov equation. To solve this integral, we propose to approximate the von Mises distributions $\mathcal{CN}(\mu, \kappa)$ by Wrapped Normal distributions $\mathcal{WN}(\mu, \rho)$ with $\rho = A(\kappa)$.

In order to compute the distribution $\mathcal{CN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}})$, we approximate each of the distributions $\mathcal{CN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k-1}, \kappa_Q^{[1]})$ and $\mathcal{CN}(\tilde{\theta}_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}, P_{\tilde{\theta}_{k-1}})$ of the Eq. (72) by the following Wrapped Normal distributions:

$$\mathcal{CN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k-1}, \kappa_Q^{[1]}) \approx \mathcal{WN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k-1}, A(\kappa_Q^{[1]}))$$

$$\begin{aligned} \mathcal{CN}(\tilde{\theta}_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}, P_{\tilde{\theta}_{k-1}}) \\ \approx \mathcal{WN}(\tilde{\theta}_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{\tilde{\theta}_{k-1}})) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{WN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k-1}, A(\kappa_Q^{[1]})) &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \\ &\times \left(\frac{-(\theta_k - \hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_1^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{WN}(\tilde{\theta}_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{\tilde{\theta}_{k-1}})) \\ = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{(\tilde{\theta}_{k-1} - (\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}) + 2\pi m)^2}{2\sigma_2^2} \right) \end{aligned}$$

where $\sigma_1^2 = -2 \log(A(\kappa_Q^{[1]}))$ and $\sigma_2^2 = -2 \log(A(P_{\tilde{\theta}_{k-1}}))$.

The integral (72) can then be written as

$$\begin{aligned} \mathcal{CN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \\ \approx \int \mathcal{WN}(\theta_k|\tilde{\theta}_{k-1}, A(\kappa_Q^{[1]}))\mathcal{WN}(\tilde{\theta}_{k-1}|\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}, \\ \times A(P_{\tilde{\theta}_{k-1}})) d\tilde{\theta}_{k-1} \end{aligned} \tag{73}$$

According to the homomorphism property of the wrapped distributions [26], it follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{CN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \\ \approx \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \exp \left(\frac{-(\theta_k - \hat{\theta}_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_1^2} \right) \\ \times \exp \left(-\frac{(\tilde{\theta}_{k-1} - (\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}) + 2\pi n)^2}{2\sigma_2^2} \right) d\tilde{\theta}_{k-1} \end{aligned} \tag{74}$$

We show that for $n=0$, the product of these two Gaussian distributions, of respective mean $\tilde{\theta}_{k-1}$ and $(\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1})$, can be expressed as the product of the two following Gaussian distributions:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \sqrt{\frac{B}{2\pi}} \exp \left(-\frac{(\theta_k - (\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \\ \times \exp \left(-\frac{B}{2} \left(\tilde{\theta}_{k-1} - \left(\frac{\theta_k}{B\sigma_1^2} + (\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}) \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{B\sigma_2^2} \right) \right)^2 \right) \end{aligned} \tag{75}$$

where

$$B = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}.$$

The integral (72) is then defined in the case of the periodic distributions \mathcal{WN} by

$$\begin{aligned} \mathcal{CN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) &\approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \\ &\times \exp \left(-\frac{(\theta_k - (\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}) + 2\pi n)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tilde{\theta}_{k-1}, n) d\tilde{\theta}_{k-1} \end{aligned} \tag{76}$$

with

$$\begin{aligned} g(\tilde{\theta}_{k-1}, n) \\ = \sqrt{\frac{B}{2\pi}} \exp \left(-\frac{B}{2} \left(\tilde{\theta}_{k-1} - \left(\frac{\theta_k}{B\sigma_1^2} + (\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}) \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{B\sigma_2^2} \right) + 2\pi n \right)^2 \right) \end{aligned} \tag{77}$$

$g(\tilde{\theta}_{k-1}, n)$ being a Gaussian law of mean

$$\frac{\theta_k}{B\sigma_1^2} + (\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}) \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{B\sigma_2^2}$$

and variance $1/B$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tilde{\theta}_{k-1}, n) d\tilde{\theta}_{k-1} = 1 \quad \forall (n) \in \mathbb{R}^2 \tag{78}$$

Implying that

$$\begin{aligned} \mathcal{CN}(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) \\ \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \\ \times \exp \left(-\frac{(\theta_k - (\hat{\theta}_{k-1} + dt\hat{\theta}_{k-1}) + 2\pi n)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi(-4 \log(A(P_{\hat{\theta}_{k-1}})A(\kappa_Q^{[1]})))}} \\ \times \exp\left(-(\theta_k - (\hat{\theta}_{k-1} + dt \frac{\hat{\theta}_{k-1}}{(-4 \log(A(P_{\hat{\theta}_{k-1}})A(\kappa_Q^{[1]})))}) + 2\pi n)^2\right) \\ \approx \mathcal{WN}(\theta_k | (\hat{\theta}_{k-1} + dt \hat{\theta}_{k-1}), A(\kappa_Q^{[1]})A(P_{\hat{\theta}_{k-1}})A(P_{\hat{\theta}_{k-1}}))$$

Finally

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = \hat{\theta}_{k-1} + dt \hat{\theta}_{k-1} \\ P_{\hat{\theta}_{k/k-1}} = A^{-1}(A(P_{\hat{\theta}_{k-1}})A(P_{\hat{\theta}_{k-1}})A(\kappa_Q^{[1]}))$$

The same demonstration gives the following prediction equation:

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = \hat{\theta}_{k-1} \\ P_{\hat{\theta}_{k/k-1}} = A^{-1}(A(P_{\hat{\theta}_{k-1}})A(\kappa_Q^{[2]}))$$

References

- [1] J.W. Betz, K.R. Kolodziejski, Generalized theory of code tracking with an early-late discriminator, part 1: lower bound and coherent processing, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems* 45 (4) (2009) 1538–1556.
- [2] J.W. Betz, K.R. Kolodziejski, Generalized theory of code tracking with an early-late discriminator, part 2: non-coherent processing and numerical results, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems* 45 (4) (2009) 1557–1564.
- [3] E.D. Kaplan, C.J. Hegarty, *Understanding GPS, Principles and Applications*, 2nd ed, Artech House, Boston, London, 2006.
- [4] P.J. Kazemi, C. O'Driscoll, G. Lachapelle, Digital phase lock loop with frequency rate feedback, in: *Proceedings of the 22nd International Technical Meeting of the Satellite Division of the ION*, 2009, pp. 201–208.
- [5] J. Cai, E.W. Grafarend, C. Hu, The statistical property of the GNSS carrier phase observations and its effects on the hypothesis testing of the related estimators, in: *Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2007)*, 2007, pp. 331–338.
- [6] G. Stienne, S. Reboul, J.-B. Choquel, M. Benjelloun, Circular data processing tools applied to a phase open loop architecture for multi-channels signals tracking, in: *Proceedings of IEEE/ION PLANS 2012*, April 2012, pp. 633–642.
- [7] M.I. Mandel, D.P.W. Ellis, A probability model for interaural phase difference, in: *Workshop on Statistical and Perceptual Audio Processing (SAPA)*, 2006.
- [8] O. Julien, Carrier-phase tracking of future data/pilot signals, in: *Proceedings of the 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of The ION*, 2005, pp. 113–124.
- [9] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, J.B. Choquel, M. Benjelloun, A multi-sensor circular particle filter applied to the fusion of the GPS-L2C channels, in: *Proceedings of the 14th International Conference on Information Fusion*, 2011.
- [10] Y. Bar-Shalom, X.-R. Li, *Estimation and Tracking: Principles, Techniques and Software*, Artech House, Boston, London, 1993.
- [11] E. Fischler, B.Z. Bobrovsky, Mean time to loose lock of phase tracking by particle filtering, *Signal Processing* 86 (11) (2006) 3481–3485.
- [12] C. Jianjun, F. Guoyu, H. Mengjun, F. Qiang, Application of particle filter for angle measure, in: *International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems*, 2010.
- [13] P.O. Amblard, J.M. Brossier, E. Moisan, Phase tracking: what do we gain from optimality? Particle filtering versus phase-locked loops, *Signal Processing* 83 (1) (2003) 151–167.
- [14] C. Mello, *Statistiques circulaires et utilisations en psychologie*, *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology* 1 (1) (2005) 11–17.
- [15] G. Stienne, S. Reboul, M. Azmani, S. Boutoille, J.B. Choquel, M. Benjelloun, Bayesian change-points estimation applied to GPS signal tracking, *ISRN Signal Processing* 2011 (2011).
- [16] *Global Positioning System Wing, Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces, IS-GPS-200, Revision E, June 8, 2010.*
- [17] N.I. Ziedan, *GNSS Receivers for Weak Signals*, Artech House, Boston, London, 2006.
- [18] M. Lavielle, E. Lebarbier, An application of MCMC methods for the multiple change-points problem, *Signal Processing* 81 (2001) 39–53.
- [19] M. Sahnoudi, M.G. Amin, Robust tracking of weak GPS signals in multipath and jamming environments, *Signal Processing* 89 (2009) 1320–1333.
- [20] A.J. Van Dierendonck, P. Fenton, T. Ford, Theory and performance of narrow correlator spacing in a GPS receiver, *Journal of the Institute of Navigation* 39 (3) (1992) 265–283.
- [21] M. Lashley, D.M. Bevly, J.Y. Hung, Performance analysis of vector tracking algorithms for weak GPS signals in high dynamics, *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* 3 (4) (2009) 661–673.
- [22] F. van Graas, A. Soloviev, M.U. de Haag, S. Gunawardena, Closed-loop sequential signal processing and open-loop batch processing approaches for GNSS receiver design, *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* 3 (4) (2009) 571–586.
- [23] A. Razavi, D. Gebre-Egziabher, D.M. Akos, Carrier loop architectures for tracking weak GPS signals, *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems* 44 (2) (2008) 697–709.
- [24] J. Soubielle, I. Fijalkov, P. Duvaut, A. Bibaut, GPS positioning in a multipath environment, *IEEE Transaction on Signal Processing* 50 (1) (2002) 141–150.
- [25] E. Batschelet, *Circular Statistics in Biology*, Academic Press, New York, 1981.
- [26] K.V. Mardia, P.E. Jupp, *Directional Statistics*, Wiley, Chichester, 1999.
- [27] S. Degerine, *Lois de von Mises et Lois Liées*, *Annales de l'I.H.P.*, section B, tome 15 1 (1999) 63–77.
- [28] S.R. Jammalamadaka, A. SenGupta, *Topics in Circular Statistics*, World Scientific Publishing Co, New Jersey, 2001.
- [29] N.I. Fisher, Problem with the current definition of the standard deviation of wind direction, *Journal of Climate and Applied Meteorology* 26 (1987) 1522–1529.
- [30] M.A. Stephens, Random walk on a circle, *Biometrika* 50 (1963) 385–390.
- [31] J. Won, D. Dotterbock, B. Eissfeller, Performance comparison of three different types of nonlinear Kalman filter approach for a vector-based GNSS signal tracking loop, *Proceedings of ION GNSS-2009* 3 (3) (2009) 203–213.

A.5 A hybrid fusion system applied to off-line detection and change-points estimation - Boutoille *et al.* (2010)

Cet article a été publié dans le revue Information Fusion 11 (4), pp. 325-337, 2010.



A hybrid fusion system applied to off-line detection and change-points estimation

S. Boutoille, S. Reboul*, M. Benjelloun

Université du Littoral Côte d'Opale, Laboratoire d'Analyse des Systèmes du Littoral, 50 Rue Ferdinand Buisson, B.P. 699, 62228 Calais Cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 15 April 2008

Received in revised form 19 December 2008

Accepted 29 October 2009

Available online 10 November 2009

Keywords:

Change-points estimation

Information fusion

Centralized detection

Distributed detection

Bayes decision rules

ABSTRACT

In this paper we investigate the problem of off-line detection and estimation of change-point instants on data provided by two sensors. In this context sensors synchronization, that provides simultaneous change-point instants on the data, is in practice a constraint hard to maintain. The contribution of this work is the proposition of a hybrid fusion system that performs as well as the centralized fusion detector respectively optimal for simultaneous and not simultaneous change. The system we propose is composed of two GLR tests (Generalized Likelihood Ratio) defined as centralized fusion detectors for the two configurations of change-point (simultaneous and not simultaneous). Decisions of these fusion detectors are combined in a fusion operator. The system is hybrid (centralized and distributed) because the distributed decisions supplied by the centralized fusion systems are combined in a global fusion operator. The contribution of our method is shown on synthetic data. The application to the treatment of a real multi-carrier GPS signal shows the feasibility of the method.

© 2009 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

The first works on off-line change detection began in the years 1950–1960 with the works of Page [1] and continued later with the works of Hinckley [2], Kligiene and Telksnys [3]. Many contributions were originally dedicated to the detection of a single change from the mean of a set of independent and identically distributed random variables [2,4]. These works have been extended to the jump detection in the mean of an autoregressive Gaussian process [5,6]. We can find in [7,8] some theoretical results about the optimality of the likelihood methods applied to this kind of problems. In this context, there are numerous contributions [9–13] for correlated not-Gaussian processes with complex models. Today, many researchers are investigated in the field of change detection in a context of information fusion. In bayesian frameworks, the classical optimal centralized fusion operators are defined as an extension of the mono-dimensional off-line change detection methods. The proposed detectors are constructed from the expression of the posterior distribution combination. The posterior distributions are associated to the data provided by the different sensors. A lot of different combinations, like the simple product or the weighted sum, have been proposed in the published works [14–16]. When all the data cannot be synchronized or available at the detectors, the detection is distributed. In this context the purpose of information fusion in the distributed detection system is to combine detections obtained from the different detectors and to provide a global decision.

Radner [17] was one of the first to study the problem of decision from several local detectors. In 1981, Tenney and Sandell [18], introduced the problem of distributed detection which involves the combination, by a global fusion operator, of several detections obtained from different local detectors. In their work, they defined the optimal local decision rule with a Bayes criterion, for the different sensors of the system. In this approach the decisions were combined with a fusion operator defined as “AND” or “OR” fusion rules. In 1986 Chair and Varshney [19] presented the problem of fusion as an optimisation problem. In this work, they consider each decision of the local detectors independent, and define an optimal fusion operator. This operator is chosen among all the possible linear combinations of local decisions, based on a criterion depending on the detection capacities of each sensor. However, in this work, the optimisation of the local detectors with the global fusion operator is not considered. Reibman and Nolte [20] proposed in 1987, always in a Bayesian framework, to optimise simultaneously the local detectors and the fusion operator. In this context, Thomopoulos et al. [21] has proposed a technique of decision optimal in the Neyman-Pearson sense. This technique, called PBPO (Pearson By Pearson Optimisation), leads to a set of interconnected equations. Unfortunately, the number of equations rapidly increases with the number of sensors and the problem becomes difficult to solve. We can find many contributions in the published works about the resolution of this problem for different hypotheses [22–24]. There are other optimisation criteria for the fusion of distributed detection problem. For example people can use the quantity of information to define an entropic criterion [25,26]. In Chen and Willet works [27], applied to information transmission in the wireless communication networks, the correlated decision case from local detectors is studied.

* Corresponding author. Tel.: +33 321 463 698; fax: +33 321 460 686.
E-mail address: serge.reboul@lasl.univ-littoral.fr (S. Reboul).

The authors propose for this problem a likelihood ratio test for the local detectors and a criterion of optimization for the local detectors and the global fusion operator. In this work, they introduce a specific algorithm that minimizes this criterion under some particular conditions of symmetry.

In this paper we investigate the problem of off-line detection and estimation of change-point instants on data provided by two sensors. We consider two windows of samples with one change-point on each one, not necessary localised at the same instants. Then we have two change-point configurations respectively defined for simultaneous and not simultaneous change instants. The optimal fusion detectors for change-point detection and estimation depend on the change configuration. For some practical multi-sensors applications the change configuration cannot be a priori known and can change with the evolution of the processes. In this case the chosen fusion detector is not always optimal.

This work is mainly motivated by the problems of sensors and signals synchronization which arise frequently in multi-sensors applications. Sensors synchronization, that provides simultaneous the change-point instants on the data, is indeed in practice a constraint hard to maintain. Most of the time the systems are synchronized in an initialisation step and must be periodically or automatically re-synchronized when they are running. In this context the change-points cannot always be assumed simultaneous and the less constraining hypothesis is used and change-points are assumed to be no simultaneous.

The contribution of this work is the definition of a hybrid fusion system that performs as well as the optimal centralized fusion detectors associated to each configuration of change. In this approach no assumption is made on the simultaneity of the change-point instants in the data supplied by the sensors. In the following of the paper we are describing two GLR (Generalized Likelihood Ratio) expressions for each configuration of change-point. The first one is synchronized because it assumes the simultaneity of the change-points on the two processes. The second one is unsynchronized because it does not make assumption on the simultaneity of the change-points. Decisions of these fusion methods are combined in a fusion operator. The system we proposed is hybrid (centralized and distributed) because the distributed decisions supplied by the centralized fusion systems are combined in a global fusion operator. We show in this case that change detection probability for the proposed hybrid fusion system is superior than the centralized fusion operator that assumes the change no simultaneous. We obtain the same conclusion for the precision of change-point estimation.

In this article, an example of application is given for the treatment of a GPS signal. A GPS receiver must indeed track the received satellite signal. In this context it has to detect a change in a signal of synchronization (discriminator signal) between a local code generated by the receiver and the code in the received signal. In the future, with the modernisation of NAVSTAR (navigation system time and ranging) and with the new Galileo system we will have multi-carrier GPS signals. In this case, the change detection will be simultaneously realized on several signals of synchronization.

The paper is organized as follow. Section 2 describes the different centralized fusion approaches based on changes that are simultaneous or not. The system of distributed detection and the associated criteria of fusion are defined in Section 3. In Section 4 we present the different numerical experiments on synthetic data and real GPS signals.

2. Criteria of centralized fusion

2.1. MAP decision rule applied to multi-sensor segmentation

The problem we address in this paper is the off-line change-points estimation and the detection of changes in the statistical

distribution of a J -dimensional process. Let $\underline{y}_j = (y_{j,i}, 1 \leq i \leq n)$ be the observed series with conditional law h_j , and $\underline{y} = (\underline{y}_j, 1 \leq j \leq J)$ be the set of J series. We note $\underline{Y} = (\underline{Y}_j, 1 \leq j \leq J)$ the set of J non-stationary processes where \underline{y} is a set of J observations. We assume that the distribution of the processes \underline{Y} depends on parameters $\underline{\theta}$. Thus the problem consists now of detecting the changes of $\underline{\theta}$. In our application the changes affect the mean of the processes. We assume that the processes are piecewise stationary in one or two pieces. Let $\underline{r}_j = (r_{j,i}, 1 \leq i \leq n)$ be a change-point process j and $\underline{r} = (\underline{r}_j, 1 \leq j \leq J)$ be the set of J change-point process. r_j takes the value 0 between two changes and 1 at the point of change. We define $h(\cdot/\underline{r}; \underline{\theta})$ the density function of the distribution of \underline{Y} conditionally to \underline{r} for an independent parameter $\underline{\theta}$. In our distribution h is a Gaussian distribution that models the additive random Gaussian noise on the piecewise stationary discriminator values. Let $\underline{\theta}_j = (\theta_{j,1}, \theta_{j,2})$ be the sequence of parameters in the process composed of one or two stationary segments. $\underline{\theta} = (\underline{\theta}_j, 1 \leq j \leq J)$ is the set of J series of parameters. We notice t_j the instants of change in the process associated to the change-point process r_j . We notice $\underline{t} = (t_j, 1 \leq j \leq J)$ the set of J instants of change. We define two hypotheses H_1 and H_0 respectively associated to occurrence or absence of a change in the signals \underline{y} (a change in the statistical distribution of the signal).

We define the hypothesis H_1 as:

$$\begin{cases} r_{j,i} = 1 & \text{for } i = t_j \text{ and } j \in 1, \dots, J \\ r_{j,i} = 0 & \forall i \neq t_j \text{ and } j \in 1, \dots, J \\ \text{with } \underline{\theta}_j = (\theta_{j,0}, \theta_{j,1}) \end{cases}$$

We define the hypothesis H_0 as:

$$\begin{cases} r_{j,i} = 0 & \forall i \neq n \text{ and } j \in 1, \dots, J \\ r_{j,i} = 1 & \text{for } i = n \text{ and } j \in 1, \dots, J \\ \text{with } \underline{\theta}_j = (\theta_{j,0}) \end{cases}$$

We display in Fig. 1 an example of series y_j and change-point process associated to the hypothesis H_1 . In this work, we want to define the change change-point process in order to identify the hypothesis H_0 or H_1 and to estimate the change-point. The MAP (Maximum A posteriori Probability) criterion that allows identification of the hypothesis is given by:

$$\begin{matrix} H_1 \\ P(H_1/\underline{r}, \underline{Y} = \underline{y}; \underline{\theta}) > < P(H_0/\underline{r}, \underline{Y} = \underline{y}; \underline{\theta}) \\ H_0 \end{matrix} \quad (1)$$

We define $h(\cdot/\underline{r}, H_i; \underline{\theta})$ the density function of the distribution of \underline{Y} conditionally to \underline{r} for the hypothesis H_i and an independent parameter $\underline{\theta}$. The MAP criteria can be rewritten as follows after applying Bayes's rule:

$$\begin{matrix} H_1 \\ h(\underline{y}/\underline{r}, H_1; \underline{\theta})P(\underline{r}/H_1)P(H_1)f(\underline{\theta}) > < h(\underline{y}/\underline{r}, H_0; \underline{\theta})P(\underline{r}/H_0)P(H_0)f(\underline{\theta}) \\ H_0 \end{matrix} \quad (2)$$

In this expression $f(\underline{\theta})$ is the prior law of statistical parameters. These parameters are assumed to be independent from the considered hypothesis. In the case of several processes, we can deduce the following decision criterion:

$$\frac{\prod_{j=1}^J h_j(\underline{y}_j/\underline{r}_j, H_1; \underline{\theta}_j)}{\prod_{j=1}^J h_j(\underline{y}_j/\underline{r}_j, H_0; \underline{\theta}_j)} > < \frac{\prod_{j=1}^J P(\underline{r}_j/H_0) P(H_0)}{\prod_{j=1}^J P(\underline{r}_j/H_1) P(H_1)} \quad (3)$$

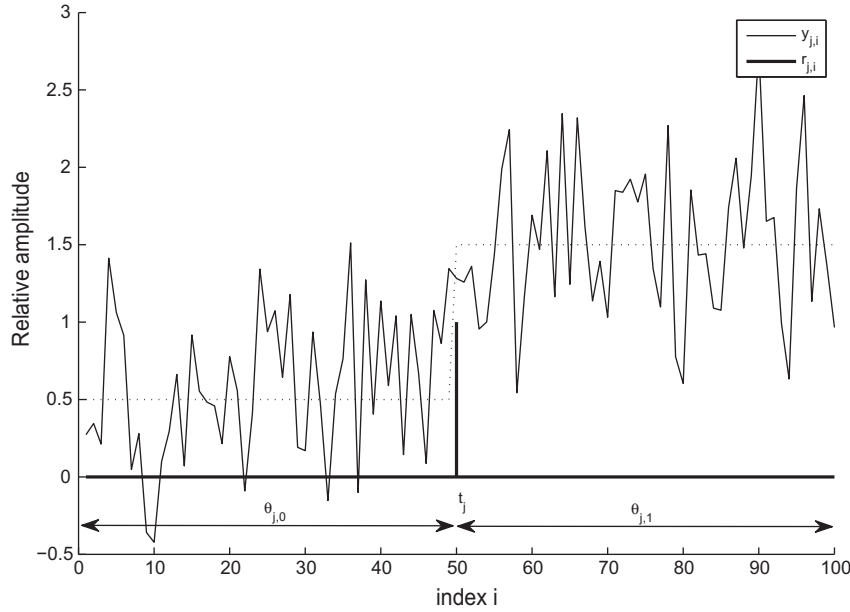


Fig. 1. Example of random experiment y_j and r_j for hypothesis H_1 .

Let t_j be the change instant in the series y_j defined at $r_{ij} = 1$. We notice $\underline{y}_{j,t_j:n}$ the set of signal samples taken from t_j to n . After simplification, the previous criterion can be written as follows:

$$\frac{\prod_{j=1}^J h_j(\underline{y}_{j,t_j+1:n}; \theta_{j,1})}{\prod_{j=1}^J h_j(\underline{y}_{j,t_j+1:n}; \theta_{j,0})} > \frac{\prod_{j=1}^J P(t_j/H_0) P(H_0)}{\prod_{j=1}^J P(t_j/H_1) P(H_1)} \quad (4)$$

In our problem, we assume that the parameter $\theta_{j,0}$ is known and that the parameters $\theta_{j,1}$ and t_j are unknown. Then we have to define an estimate for the parameters in addition to the decision rule to identify the hypothesis. For a given estimate of the change instant \hat{t}_j the decision rule can be written as follows:

$$\frac{\prod_{j=1}^J h_j(\underline{y}_{j,\hat{t}_j+1:n}; \theta_{j,1})}{\prod_{j=1}^J h_j(\underline{y}_{j,\hat{t}_j+1:n}; \theta_{j,0})} > \frac{\prod_{j=1}^J P(\hat{t}_j/H_0) P(H_0)}{\prod_{j=1}^J P(\hat{t}_j/H_1) P(H_1)} \quad (5)$$

This decision rule defines a system of centralized detection fusion since the decision is made from all the samples from the signals. In the following, we detail two possible cases for the GLR (General Likelihood Ratio). In a first case we assume that we have no prior information on the mutual behaviour of the processes, and we consider then that the changes are not necessarily simultaneous. In the second case, we assume that the changes instant are simultaneous on the different processes. The purpose of this article is to propose a system of distributed detection fusion that combines the decisions obtained from these two approaches of centralized detection. In practice, the two cases are indeed possible and the distributed fusion system must provide the best results obtained from the two systems.

2.2. MAP decision rule when changes are not simultaneous

The GLR test is a maximisation on t_j . Without prior information on the changes instant t_j , t_j is estimated on each signal considered separately. On the other hand θ_1 is estimated from the samples from the two signals. In this case, the system of detection and esti-

mation is called unsynchronized system of centralized fusion. We note the likelihood ratio:

$$g_j(\theta_1, t_j) = \frac{h_j(\underline{y}_{j,t_j+1:n}; \theta_1)}{h_j(\underline{y}_{j,t_j+1:n}; \theta_0)} \quad (6)$$

The parameters θ_1 and θ_0 , respectively associated to hypotheses H_1 and H_0 , are the same for all the processes. In the standard case the parameters are unknown and it is necessary to realize a double maximisation on θ_1 and t_j . Then we have:

$$\hat{\theta}_{j,1}(t_j) = \underset{\theta_{j,1}}{\text{Argmax}}(g_j(\theta_{j,1}, t_j)) \quad (7)$$

$$\hat{t}_j = \underset{t_j}{\text{Argmax}}(g_j(\hat{\theta}_{j,1}(t_j), t_j)) \quad (8)$$

The decision rule leads to a detection algorithm of the form:

$$\frac{\prod_{j=1}^J g_j(\hat{\theta}_{j,1}(\hat{t}_j), \hat{t}_j)}{\prod_{j=1}^J g_j(\hat{\theta}_{j,1}(\hat{t}_j), \hat{t}_j)} > \frac{\prod_{j=1}^J P(\hat{t}_j/H_0) P(H_0)}{\prod_{j=1}^J P(\hat{t}_j/H_1) P(H_1)} = \lambda_2 \quad (9)$$

2.3. MAP decision rule when changes are simultaneous

When the changes are simultaneous we mention synchronized system of centralized fusion. Let t be the unique change instant. θ_1 and t are estimated from samples of the signals with:

$$\hat{\theta}_1(t) = \underset{\theta_1}{\text{Argmax}} \left(\prod_{j=1}^J g_j(\theta_1, t) \right) \quad (10)$$

$$\hat{t} = \underset{t}{\text{Argmax}} \left(\prod_{j=1}^J g_j(\hat{\theta}_1(t), t) \right) \quad (11)$$

The decision rule is expressed from estimated parameters and the signals \underline{y} . The decision algorithm is described by the following expression:

$$\prod_{j=1}^J g_j(\hat{\theta}_1(\hat{t}), \hat{t}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \left(\frac{P(\hat{t}/H_0) P(H_0)}{P(\hat{t}/H_1) P(H_1)} \right)^J = \lambda_1 \quad (12)$$

$\hat{\theta}_1(\hat{t})$ and \hat{t} are respectively the estimates of θ_1 and t calculated from samples of the J signals taken between t and n .

3. Distributed fusion system

3.1. Decision rule formulation of the hybrid fusion system

We introduce next, a hybrid fusion system that combines the decisions given by the centralized fusion systems defined in the previous paragraph. We display in Fig. 2 the proposed system structure. This block diagram describes a parallel fusion network. In this approach two detectors (two centralized fusion systems) observe a common signal and make a local decision according to the present hypothesis. The local decisions are combined to supply a global decision. This system is hybrid because it is composed of centralized and distributed fusion systems. We define u_0 in Fig. 2 as the global decision taken by the system. u_1 and u_2 respectively symbolize the decision taken by the synchronized and unsynchronized centralized fusion systems. Let $t_1 = \hat{t}$ be an estimate of the assumed simultaneous changes instant in the synchronized fusion case. Let $t_2 = (\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_j)$ be the vector of changes instant estimated on the J signals in the unsynchronized or synchronized fusion case. For every threshold λ_1 or λ_2 , the system abilities in term of change detection and localisation vary. They are assessed with the probability of detection and false alarm for the estimated instant of changes t_1 and t_2 . $P_{D_k} = P(u_k = 1/H_1)$, $k \in \{1, 2\}$, denotes the detection probability of the system k . We note $P_{f_k} = P(u_k = 1/H_0)$ the probability of false alarm. For a fixed threshold λ_k , the probabilities of detection and false alarm are given by:

$$P_{D_k} = \sum_{\underline{t}_k} P(u_k = 1, \underline{t}_k/H_1) = \sum_{\underline{t}_k} P(u_k = 1/H_1, \underline{t}_k) \cdot P(\underline{t}_k/H_1) \quad (13)$$

$$P_{f_k} = \sum_{\underline{t}_k} P(u_k = 1, \underline{t}_k/H_0) = \sum_{\underline{t}_k} P(u_k = 1/H_0, \underline{t}_k) \cdot P(\underline{t}_k/H_0) \quad (14)$$

In these expressions, $P(u_1 = 1/H_1, t_1)$ is the probability to detect a change at t_1 , with the synchronized fusion system, when H_1 is the true hypothesis. The purpose of this work is to combine the decisions obtained from the two systems of centralized fusion to get the global decision u_0 and the thresholds λ_1 and λ_2 that give the best results of detection. In this context, we want to find the thresholds and the fusion rule of the distributed fusion system that maximise the probability of detection for a given probability of false alarm. We have $P_D = P(u_0 = 1/H_1)$ and $P_f = P(u_0 = 1/H_0)$,

the probability of detection and false alarm of the distributed system. Let u denote the decision vector containing the local decisions u_1 and u_2 . Then we have:

$$P_D = P(u_0 = 1/H_1) = \sum_u P(u_0 = 1/u, H_1) P(u/H_1) \\ = \sum_u P(u_0 = 1/u) P(u/H_1)$$

and

$$P_f = P(u_0 = 1/H_0) = \sum_u P(u_0 = 1/u, H_0) P(u/H_0) \\ = \sum_u P(u_0 = 1/u) P(u/H_0)$$

In this expression, u_0 is function of the decision u and the fusion rule. In our approach, we try to find the decision rule that maximises the Lagrangian defined in the Neyman–Pearson sense (maximise the probability of detection for a given probability of false alarm). The thresholds of detection will be deduced from this decision rule. The function L is constructed:

$$L = P_D - \lambda(P_f - \alpha)$$

with λ the Lagrange multiplier. Then we have:

$$L = \sum_u P(u_0 = 1/u) P(u/H_1) - \lambda \left(\left(\sum_u P(u_0 = 1/u) P(u/H_0) \right) - \alpha \right)$$

and

$$L = \lambda \alpha + \sum_u P(u_0 = 1/u) [P(u/H_1) - \lambda P(u/H_0)] \quad (15)$$

For global system optimisation, a person-by-person optimization methodology is adopted. In this approach, we optimize the detector (or system) k associated to the decision u_k . $u^k = u_{j \neq k}$ with $j, k \in \{1, 2\}$, denote the decision taken by the other systems, decisions assumed to be fixed. To find the decision rule for the system k we develop the expression of L according to u_k , then we have:

$$L = \lambda \alpha + \sum_{u^k} P(u_0 = 1/u_k = 0, u^k) \cdot [P(u_k = 0, u^k/H_1) \\ - \lambda P(u_k = 0, u^k/H_0)] + \sum_{u^k} P(u_0 = 1/u_k = 1, u^k) \\ \cdot [P(u_k = 1, u^k/H_1) - \lambda P(u_k = 1, u^k/H_0)] \quad (16)$$

In our case of correlated measurements, we have:

$$P(\{u_1, u_2\}/H_1) = P(u_1/H_1) P(u_2/u_1, H_1)$$

The correlation between decisions shows that we have two centralized fusion systems with same signals at their entrances. In this context, the fusion system estimates the parameters of

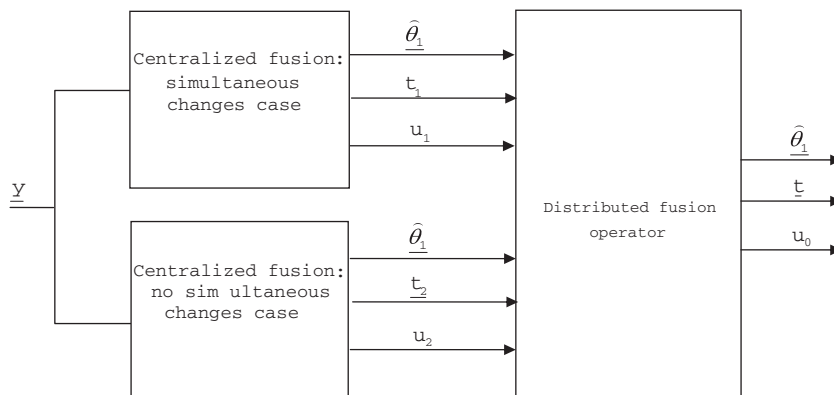


Fig. 2. Block diagram of a parallel hybrid fusion network.

the signal and the change instants, jointly in one case and independently in the other case. We define the following probabilities to express the dependence between the decisions:

$$P(\{u_1 = 1, u_2\}/H_1) = P(u_1 = 1/H_1) \cdot P(u_2/H_1, u_1 = 1) \quad (17)$$

$$P(\{u_2 = 1, u_1\}/H_1) = P(u_2 = 1/H_1, u_1) \cdot P(u_1/H_1) \quad (18)$$

These two probabilities are defined for $i = 1, j = 1$, and we have the general following expression:

$$P(\{u_k = j, u^k\}/H_i) = P(u_k = j/H_i, (u^k)_{k \neq 1}) \cdot P(u^k/H_i, (u_k = j)_{k \neq 2}) \quad (19)$$

where $i, j \in \{0, 1\}$. Normalisation of probabilities leads us to the following expression:

$$P(u_k = 0/H_i, (u^k)_{k \neq 1}) = 1 - P(u_k = 1/H_i, (u^k)_{k \neq 1}) \quad (20)$$

Substituting Eqs. (19) and (20) into (16) yields the following expression:

$$L = \lambda\alpha + C^k + \sum_{u^k} P(u_k = 1/H_1, (u^k)_{k \neq 1}) \cdot A_1^k - \lambda \sum_{u^k} P(u_k = 1/H_0, (u^k)_{k \neq 1}) \cdot A_0^k \quad (21)$$

with

$$C^k = \lambda\alpha + \sum_{u^k} P(u_0 = 1/u_k = 0, u^k) [P(u^k/H_1, (u_k = 0)_{k \neq 2}) - \lambda P(u^k/H_0, (u_k = 0)_{k \neq 2})] \quad (22)$$

and

$$A_i^k = P(u_0 = 1/u_k = 1, u^k) \cdot P(u^k/H_i, (u_k = 1)_{k \neq 2}) - P(u_0 = 1/u_k = 0, u^k) \cdot P(u^k/H_i, (u_k = 0)_{k \neq 2}) \quad (23)$$

Let define the components of $Y_k, k \in \{1, 2\}$: $Y_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_j, t_2\}$ and $Y_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_j, t_1\}$. We can write:

$$P(u_k = 1/H_i, (u^k)_{k \neq 1}) = \int_{Y_k} P(u_k = 1/Y_k) \cdot P(Y_k/H_i, (u^k)_{k \neq 1}) dY_k \quad (24)$$

and

$$P(u_k = 1/H_i, (u^k)_{k \neq 1}) = \int_{Y_k} P(u_k = 1/Y_k) \cdot P(Y_k/H_i) dY_k \quad (25)$$

In these expressions, Y_k do not depend on u_k , so we can write:

$$L = C^k + \int_{Y_k} P(u_k = 1/Y_k) [C_1^k P(Y_k/H_1) - \lambda C_0^k P(Y_k/H_0)] dY_k \quad (26)$$

with

$$C_i^k = \sum_{u^k} [P(u_0 = 1/u_k = 1, u^k) \cdot P(u^k/H_i, (u_k = 1)_{k \neq 2}) - P(u_0 = 1/u_k = 0, u^k) \cdot P(u^k/H_i, (u_k = 0)_{k \neq 2})] \quad (27)$$

C^k is independent from the decision rule associated to the detector k , and L is maximum when the integral in expression (26) is maximal. Therefore, we have:

$$P(u_k = 1/Y_k, (u^k)_{k \neq 1}) = 0, \quad \text{if } C_1^k P(Y_k/H_1) - \lambda C_0^k P(Y_k/H_0) < 0 \quad (28)$$

and

$$P(u_k = 1/Y_k, (u^k)_{k \neq 1}) = 1, \quad \text{if } C_1^k P(Y_k/H_1) - \lambda C_0^k P(Y_k/H_0) > 0 \quad (29)$$

The decision rule for the system k is given by:

$$\begin{array}{c} H_1 \\ P(Y_k/H_1) > \lambda \frac{C_0^k}{C_1^k} \\ P(Y_k/H_0) < \lambda \frac{C_0^k}{C_1^k} \\ H_0 \end{array} \quad (30)$$

or

$$\begin{array}{c} H_1 \\ P(\{y_1, y_2, \dots, y_j\}/H_1, t_k) > \lambda \frac{C_0^k}{C_1^k} \cdot \frac{P(t_k/H_0)}{P(t_k/H_1)} \\ P(\{y_1, y_2, \dots, y_j\}/H_0, t_k) < \lambda \frac{C_0^k}{C_1^k} \cdot \frac{P(t_k/H_0)}{P(t_k/H_1)} \\ H_0 \end{array}, \quad k \in \{1, 2\} \quad (31)$$

From this expression we can deduce the threshold of each system k . However, as we will demonstrate in the next paragraph, the definition of C_1^k and C_0^k depends on the fusion rule. Furthermore, we can bring in the decision rule, prior information on the change positions $P(t_k/H_1)$ and $P(t_k/H_0)$. However, in our application we do not have this prior information and then we assume that $P(t_k/H_1) = P(t_k/H_0)$.

3.2. Definition of the decision rule for AND and OR fusion operator

The decision criterion is here considered for the system k . We note $P_{abc} = P(u_0 = a/u_k = b, u^k = c)$ with $a, b, c \in \{0, 1\}$ and $P_{ab} = P(u_0 = a/u_k = b, u^k)$. From Eq. (27) we have:

$$\frac{C_0^k}{C_1^k} = \frac{\sum_{u^k} [P_{11} \cdot P(u^k/H_0, (u_k = 1)_{k \neq 2}) - P_{10} \cdot P(u^k/H_0, (u_k = 0)_{k \neq 2})]}{\sum_{u^k} [P_{11} \cdot P(u^k/H_1, (u_k = 1)_{k \neq 2}) - P_{10} \cdot P(u^k/H_1, (u_k = 0)_{k \neq 2})]} \quad (32)$$

For $k = 1$ the threshold expression of (31) is given by:

$$\lambda \frac{C_0^1}{C_1^1} = \lambda \frac{\sum_{u_2} [P_{11} \cdot P(u_2/H_0, u_1 = 1) - P_{10} \cdot P(u_2/H_0, u_1 = 0)]}{\sum_{u_2} [P_{11} \cdot P(u_2/H_1, u_1 = 1) - P_{10} \cdot P(u_2/H_1, u_1 = 0)]} \quad (33)$$

and for $k = 2$ we have:

$$\lambda \frac{C_0^2}{C_1^2} = \lambda \frac{\sum_{u_1} [P_{11} \cdot P(u_1/H_0) - P_{10} \cdot P(u_1/H_0)]}{\sum_{u_1} [P_{11} \cdot P(u_1/H_1) - P_{10} \cdot P(u_1/H_1)]} \quad (34)$$

In these expressions, P_{ab} is defined with the fusion rule, as shown in the next paragraphs.

3.2.1. "AND" distributed fusion rule

Let us consider here, a combination "AND" between the decisions of the two centralized fusion systems. Then we have:

$$P_{111} = P(u_0 = 1/u_1 = 1, u_2 = 1) = P(u_0 = 1/u_2 = 1, u_1 = 1) = 1 \quad \text{and} \quad P_{110} = P_{101} = P_{100} = 0$$

We obtain for $k = 1$ the threshold of the synchronized centralized fusion system:

$$\lambda_1 = \lambda \frac{C_0^1}{C_1^1} = \lambda \frac{P(u_2 = 1/H_0, u_1 = 1)}{P(u_2 = 1/H_1, u_1 = 1)} = \lambda \frac{P_{fns}^s}{P_{Dns}^s} \quad (35)$$

For $k = 2$, we have the threshold of the unsynchronized system:

$$\lambda_2 = \lambda \frac{C_0^2}{C_1^2} = \lambda \frac{P(u_1 = 1/H_0)}{P(u_1 = 1/H_1)} = \lambda \frac{P_{fs}}{P_{Ds}} \quad (36)$$

We can deduce the following expressions which show a dependency between the two thresholds:

$$\lambda_1 \cdot \frac{P_{fs}}{P_{Ds}} = \lambda_2 \cdot \frac{P_{fns}^s}{P_{Dns}^s} \quad (37)$$

In this expression, P_{D_s} and P_{f_s} are the probabilities of detection and of false alarm of the synchronized system. $P_{D_{ns}}^s$ and $P_{f_{ns}}^s$ are the probabilities of detection and false alarm of the unsynchronized system when the hypothesis H_1 has been detected by the synchronized system.

3.2.2. “OR” distributed fusion rule

A combination “OR” is considered here between the decisions of the two centralized fusion systems. Then we have:

$$P_{111} = P(u_0 = 1/\{u_1 = 1, u_2 = 1\}) = P(u_0 = 1/\{u_2 = 1, u_1 = 1\}) = 1$$

and $P_{110} = P_{101} = 1$, $P_{100} = 0$

We obtain for $k = 1$:

$$\lambda_1 = \lambda \frac{C_0^1}{C_1^1} = \lambda \frac{P(u_2 = 0/H_0, u_1 = 1)}{P(u_2 = 0/H_1, u_1 = 1)} = \lambda \frac{1 - P_{f_{ns}}^s}{1 - P_{D_{ns}}^s} \quad (38)$$

and for $k = 2$:

$$\lambda_2 = \lambda \frac{C_0^2}{C_1^2} = \lambda \frac{P(u_1 = 0/H_0)}{P(u_1 = 0/H_1)} = \lambda \frac{1 - P_{f_s}}{1 - P_{D_s}} \quad (39)$$

Finally we have:

$$\lambda_1 \cdot \frac{1 - P_{f_s}}{1 - P_{D_s}} = \lambda_2 \cdot \frac{1 - P_{f_{ns}}^s}{1 - P_{D_{ns}}^s} \quad (40)$$

We show again in this expression the dependency between the detection thresholds λ_1 and λ_2 , which are defined by the user under the constraint of a false alarm probability established for the global system.

3.2.3. Definition of the detection thresholds

The definition of λ_1 and λ_2 is realized under the constraint of a false alarm probability for the global system. Furthermore these values must respect expression (37) for the “AND” fusion rule and expression (40) for the “OR” fusion rule. For a “AND” fusion rule, the probabilities of detection and false alarm of the global system are given by the following relations:

$$P_f = P(\{u_1 = 1, u_2 = 1\}/H_0) = P(u_2 = 1/H_0, u_1 = 1) \cdot P(u_1 = 1/H_0)$$

$$P_f = P_{f_{ns}}^s \cdot P_{f_s} \quad (41)$$

$$P_D = P(\{u_1 = 1, u_2 = 1\}/H_1) = P(u_2 = 1/H_1, u_1 = 1) \cdot P(u_1 = 1/H_1)$$

$$P_D = P_{D_{ns}}^s \cdot P_{D_s} \quad (42)$$

For a “OR” fusion rule, these probabilities are given by the following relations:

$$P_f = 1 - P(u_1 = 0, u_2 = 0/H_0) = P_{f_{ns}}^s + P_{f_s} - P_{f_{ns}}^s \cdot P_{f_s} \quad (43)$$

$$P_D = 1 - P(u_1 = 0, u_2 = 0/H_1) = P_{D_{ns}}^s + P_{D_s} - P_{D_{ns}}^s \cdot P_{D_s} \quad (44)$$

In practice, we fix the value of λ_1 (thus P_{f_s} and P_{D_s}) then we search the value of λ_2 (thus $P_{f_{ns}}^s$ and $P_{D_{ns}}^s$) that verifies the expressions (37) or (40) according to the fusion rule. These two values are associated to the probabilities of false alarm $P_{f_{ns}}^s$ and P_{f_s} and a probability P_f for the global system. Finally, we retain the values of λ_1 and λ_2 that provide a probability P_f equal to the probability of false alarm we have fixed for the global system.

4. Experimentations

4.1. Experiments on synthetic data

In this experiment we want to assess the proposed method on synthetic signals. We consider the results in terms of detection and change-points estimation. Firstly, we are going to assess the centralized fusion system in the cases of simultaneous and not simultaneous instants of changes. Secondly, we are going to show

the contribution of the proposed hybrid fusion method for an unknown configuration of changes.

We consider in this experiment 40 samples of two noisy signals. The noise is modelled as a zero-mean white Gaussian random process. The noise variance is fixed to 9 and the mean of the signal is 0 before the change and 1 after it. We have in this case a SNR (Signal to Noise Ratio) of -9 dB. We display in Figs. 3 and 4 an example of signals for two different change configurations. In Fig. 3 the changes are simultaneous and situated at the 20th sample. In Fig. 4 the changes are not simultaneous; the change for the first signal is situated at the 20th sample and the change for the second signal at the 30th sample. We assume, for the different assessments, that the mean value before the change and the variance of the signal are constant and known. What is unknown is only the point of change and mean value after the change.

In this experiment we want to evaluate and compare, in terms of detection and localization, the two systems of centralized fusion with the global hybrid fusion system for the “AND” and “OR” fusion rules. To assess the detection results, we calculate the probabilities of detection and false alarm from 10,000 realizations of the signals described in Figs. 3 and 4. We assume the presence of changes (simultaneous and not simultaneous) for hypothesis H_1 and absence of changes for hypothesis H_0 . The probability of detection is the probability to detect changes when hypothesis H_1 is true. The probability of false alarm is the probability to detect changes when hypothesis H_0 is true. The signal segmentation is realized with the sliding window algorithm described in Appendix A. Several values are tested for the thresholds λ_1 and λ_2 (c.f. Eq. (12), (9)). For each value, we have a probability of detection Pd and false alarm Pf and we can draw the ROC (Receiver Operating Characteristic) curve associated to the detector.

4.1.1. Change detection evaluation

In practice, we fix the probability of false alarm and we deduce the threshold λ_1, λ_2 and the detection probabilities of the synchronized and unsynchronized centralized fusion system. Then we can calculate the probabilities of detection and false alarm of the hybrid system for the “AND” and “OR” fusion rule. We display in Figs. 5 and 6 the ROC curves of the different fusion systems for two different change configurations. In Fig. 5, we considered simultaneous change instants at the 20th sample. In Fig. 6, we considered not simultaneous change instants. In this case, for the first signal, there is a change at the 20th sample and a change for the second signal at the 30th sample. We can conclude for these different results:

- When the changes are simultaneous Fig. 5, the synchronized centralized fusion system always gives the best results (a higher probability of detection for a given probability of false alarm). In this case the hybrid fusion system gives better results for the “AND” and “OR” fusion rules than the unsynchronized centralized fusion system.
- When the changes are not simultaneous Fig. 6, the unsynchronized centralized fusion system always gives better results than the synchronized system. In this case the hybrid fusion system, for the “AND” and the “OR” fusion rule, is at least as effective as the unsynchronized centralized fusion systems (the ROC curve for the unsynchronized fusion is the same as for the hybrid AND fusion rule).

In practice, the configuration of changes is unknown and can vary. Then we conclude that the hybrid fusion system is the best compromise for detection. Furthermore, the length of the delay between the change instants influences the probability of detection and false alarm. We show in Figs. 7 and 8, the evolution of the detection probability, for a fixed false alarm, depending on the delay. In our application the false alarm probability definition lead to

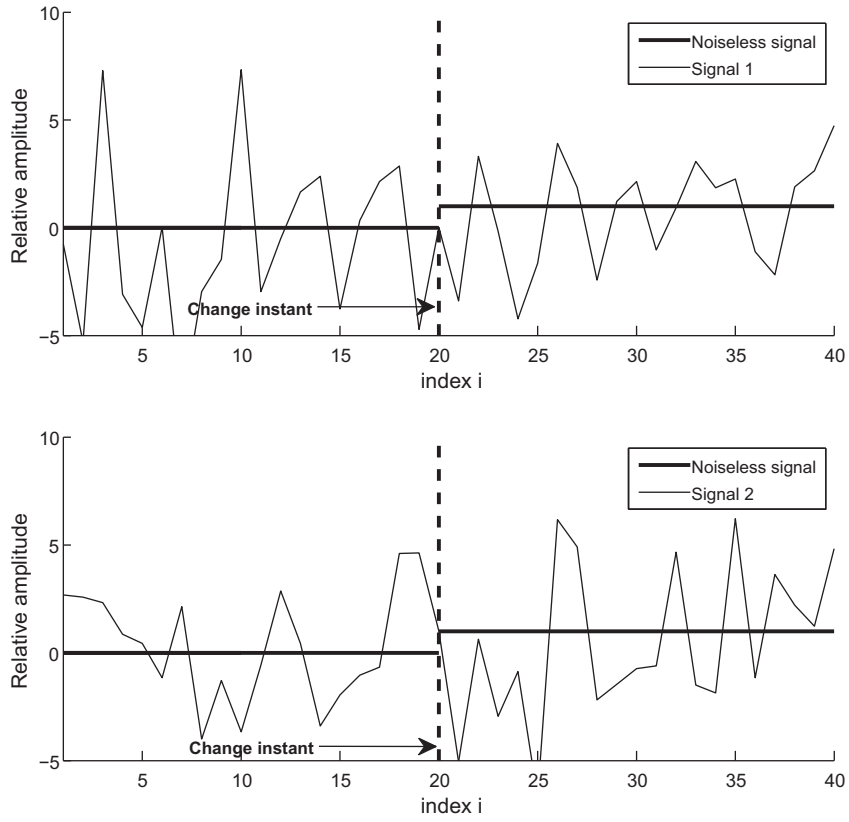


Fig. 3. Signals experiment for synchronized changes instant.

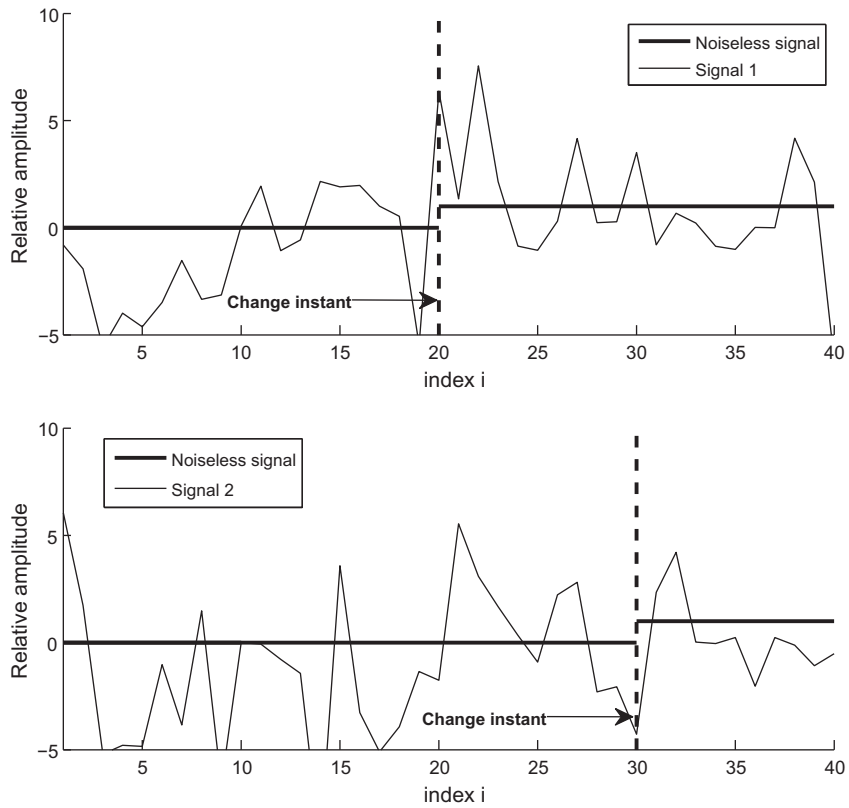


Fig. 4. Signals experiment for unsynchronized changes instant.

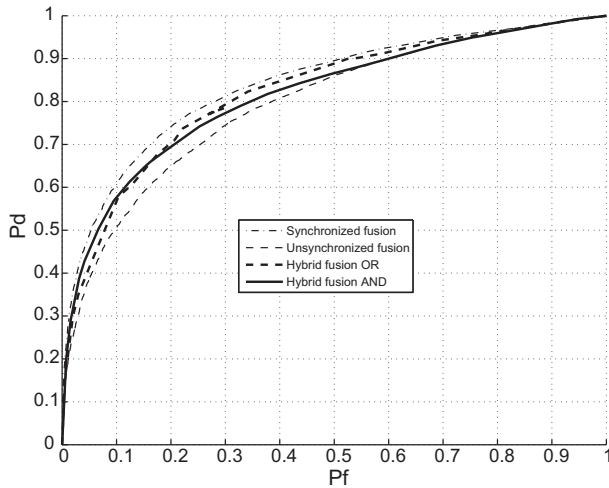


Fig. 5. ROC curves for simultaneous change detection.

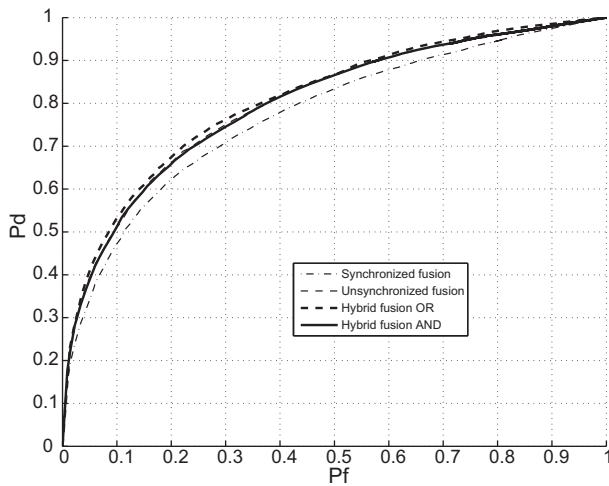


Fig. 6. ROC curves for not simultaneous change detection.

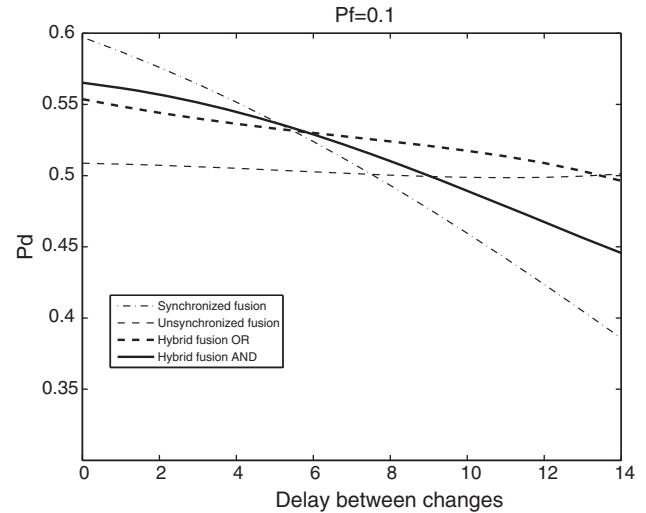


Fig. 7. Evolution of P_d , for $P_f = 0.1$, as a function of the delay between changes.

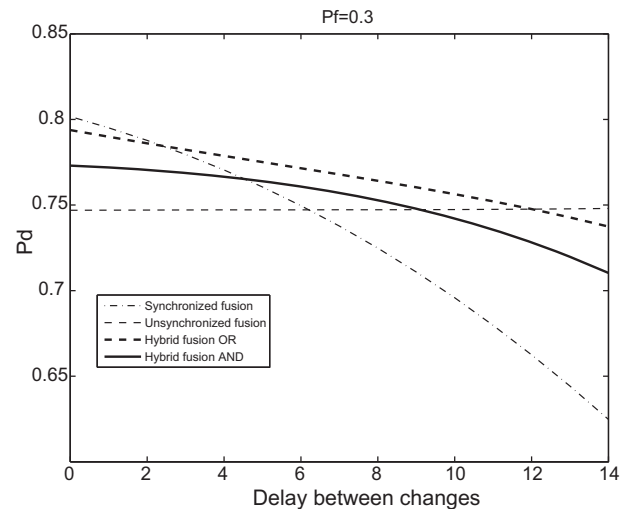


Fig. 8. Evolution of P_d , for $P_f = 0.3$, as a function of the delay between changes.

a trade off between precision and robustness. The power of noise on the pseudo range measurements increases indeed with the probability of false alarm. In the other hand the method is less robust for small values of the false alarm probability. In this case we can lose the synchronization between the received and the local code. When the receiver is unlocked it begins a time consuming step of acquisition during which the receiver cannot provide measurements positions. In practice we observe that a false alarm probability of $P_f = 0.1$ gives a good compromise between robustness and accuracy in the static case. In the dynamic case a value of $P_f = 0.3$ is more appropriate. In Fig. 7 the probability of false alarm is 0.1 and is 0.3 in Fig. 8.

In Figs. 7 and 8, we remark that the probability of detection is constant for the unsynchronized fusion system because this method does not make any assumption on the delay between the changes. On the other hand, the probability of decision decreases for the synchronized fusion because this method assumes simultaneous changes. The probabilities start with a value superior to the unsynchronized case and become inferior for a delay higher than seven samples. The hybrid fusion system with the “OR” fusion rule always gives a probability of detection between the probabilities of the unsynchronized and synchronized centralized fusion systems. For the “AND” fusion rule the probability decreases and becomes

rapidly inferior to the probability of the unsynchronised centralized fusion. Finally, when the delay is large, the unsynchronized fusion system gives the higher probability of detection.

In conclusion, the hybrid fusion method does not make any assumption on the change configuration. It will be more appropriate in practice than the centralized fusion method. The simultaneity of the changes instant is indeed a strong hypothesis in practice. For example, in our GPS application the signals associated to the different carrier frequencies are propagated differently into the atmosphere. Furthermore, the CDMA codes on each carrier are different, so it is also difficult to synchronise their generation in the satellite and their demultiplexing in the receiver. Finally, when the atmospheres state evolves the delay value varies. For our application, we are going to use the “OR” fusion rule because the probability of detection is higher than the unsynchronized fusion case for the delay we have in practice.

4.1.2. Change localization evaluation

In this experimentation, we want to evaluate the hybrid fusion system for change localization. We fix the false alarm probability to 0.2. We display on Figs. 9 and 10 the empirical detected change distribution for each signal. Results displayed on these figures are

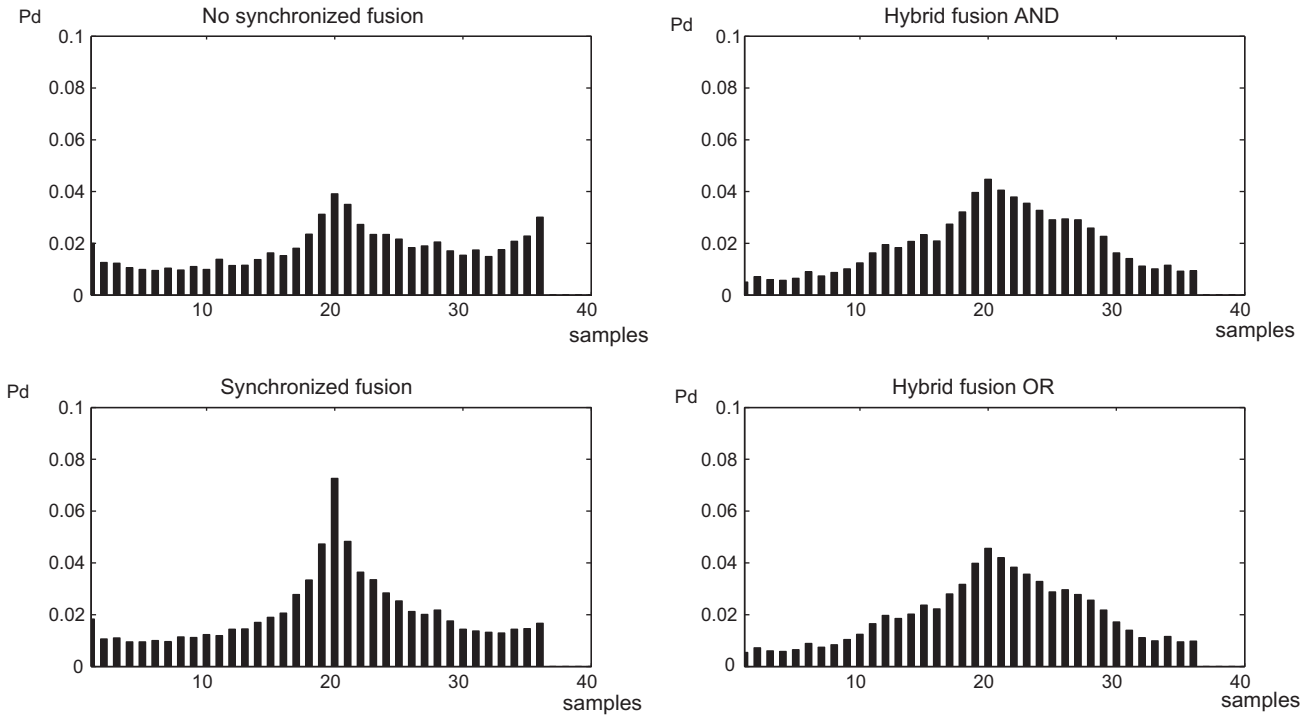


Fig. 9. Empirical distribution of detected changes: simultaneous change case.

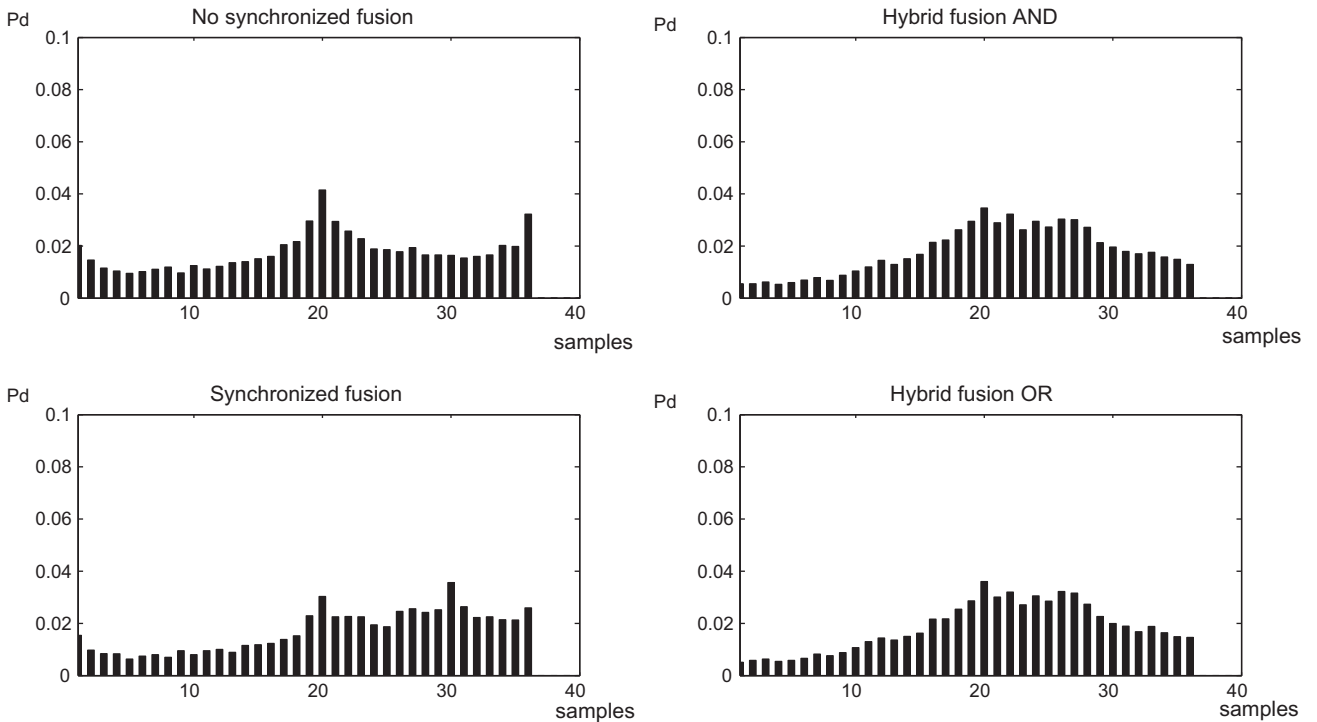


Fig. 10. Empirical distribution of detected changes: not simultaneous change case.

obtained with the centralized and hybrid fusion systems. Synchronized and unsynchronized fusion systems realize respectively joined and independent change localization. Hybrid fusion, which is a combination of these two systems, calculates the mean estimate of their statistical parameters and instants of change. In order to evaluate quantitatively detected change localization, we calculate in Tables 1 and 2 different indicators from the empirical

distribution of the detected changes. We report the probability of change detection at the 20th sample position P_{20} and the probability to detect at ± 3 samples around this position $P_{20\pm 3}$. The criterion PCE (Precision of Change-point Estimation) is the root mean square error between the true and the estimate change point. The precision of the change-point instant estimation increases when the PCE decreases. In order to evaluate the precision of parameter

Table 1
Changes localization evaluation: simultaneous changes case.

Simultaneous changes	P_{20}	$P_{20\pm 3}$	PCE	PM
Synchronized fusion	0.07	0.3	6.5	0.46
Unsynchronized fusion	0.04	0.2	7.92	0.53
Hybrid fusion "AND"	0.05	0.26	6.15	0.47
Hybrid fusion "OR"	0.05	0.26	6.14	0.47

Table 2
Changes localization evaluation: not simultaneous change case.

Not simultaneous changes	$P_{1,20}$	$P_{1,20\pm 3}$	PCE	PM
Synchronized fusion	0.03	0.15	8.3	0.57
Unsynchronized fusion	0.04	0.2	7.92	0.55
Hybrid fusion "AND"	0.03	0.2	6.83	0.56
Hybrid fusion "OR"	0.03	0.2	6.87	0.56

estimation we use the relative distance PM between the true and the estimated parameter value [28]. In the same way, the estimation of the statistical parameters is more precise when PM is small. For a change in the mean the relative distance is defined as:

$$PM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|m_e(i) - m_t(i)|}{m_t(i)} \quad (45)$$

where m_t and m_e are respectively the true and estimated vector of mean of length n defined in each stationary peace.

We conclude from the different results displayed in Figs. 9, 10 and the values reported in Tables 1 and 2:

- In case of simultaneous changes, we compare unsynchronized and synchronized fusion systems with the results displayed in Fig. 9 and the values reported in Table 1. We show that the probability of change detection, when there is a change, is higher (P_{20} is higher) and more concentrated ($P_{20\pm 3}$ is higher) around the true position of the changes in the synchronized fusion case. Furthermore, synchronized fusion enables a better localization (smaller PCE) of the simultaneous changes and a more accurate parameter estimation (smaller PM). For hybrid fusion, probabilities of change detection and relative distance PM defined in Table 1, are between the results obtained with the unsynchronized and synchronized fusion systems. In this case, we have better results regarding estimate accuracy of change instants defined by PCE indicator.
- In case of not simultaneous changes, we compare unsynchronized and synchronized fusion systems with Fig. 10 and values reported in Table 2. We show that the detection results are better in this case for unsynchronized fusion system. When we look at the indicators PCE and PM, we can draw the same conclusion for precision of localization and estimation. For hybrid fusion, detection results and relative distance PM, are between those obtained with the unsynchronized and synchronized systems. In this case, we have better results regarding estimate accuracy of change instants defined by PCE indicator.

In conclusion, we show in the previous paragraph that hybrid fusion is a good compromise, in terms of change detection, between unsynchronized and synchronized fusion systems. Furthermore we demonstrate in this section that hybrid fusion gives better results, in terms of precision, for change localization and parameter estimation. We are now going to evaluate the method on a real application for which we cannot make assumptions about

the change configuration. This application is the segmentation of the multi-band GPS signal. In this case, changes on signals associated to the different bands, are not necessarily simultaneous and the precision of change localization has a direct influence on the receiver positioning precision.

4.2. GPS signal segmentation

GPS receivers compute the propagation delay of electromagnetic waves sent by a constellation of satellites. From the delay estimated for at least four satellites, the receiver can calculate its position. The maximum likelihood estimate of the propagation delay is obtained with the measurements of a code tracking discriminator. The discriminator is calculated with the correlation between a local CDMA code generated by the receiver and the CDMA code received in the signal sent by the satellite. The codes generated by the GPS receiver must stay synchronized with the codes of the received signals. In this case, the discriminator is close to zero, otherwise it evolves with the shift of the received code. In practice, we have to detect changes in the noisy measurements of the discriminator. In our approach, the detection of the delay between the CDMA codes is realized in a window of discriminator samples. This sampled signal is assumed piecewise stationary. The theoretical evolution of the discriminator is linear. In practice, signals are sampled and the discriminator signal increases by successive levels [29]. For each level, the noisy measurements of the discriminator are modeled by a stationary signal. The receiver indeed measures a delay every millisecond and the CDMA code is a binary code. Let f_s be the sampling frequency, then T_e is the smallest detectable delay. The smallest measurable distance variation is in this case $T_e * c$. This distance is in general reached by a moving receiver, after several milliseconds. The discriminator values are then stationary during this period. In our application, we considered a receiver with a 20 MHz sampling frequency. The smallest detectable distance variation is 15 m. A classical value for the satellite-receiver relative speed is about 1000 m/s then we need 15 ms to detect a shift between the codes. During this length of time, the discriminator is a stationary signal with a mean equal to zero. We can use a working window of 20 ms (10 ms before and 10 ms after the change), then a window of 20 samples for the detection of a change in the discriminator. In the future civil GPS systems, different CDMA codes will be available on different carrier frequencies. We will have then several discriminator signals associated to the different carriers. The changes on these discriminators will not be synchronized for several reasons. The propagation delay of the GPS signal in the atmosphere varies with the frequency of the carrier and the state of the atmosphere. This state also evolves with time and receiver position. Moreover, demultiplexing by the receiver and the generation by the satellite of different codes induce additional delay. Finally, synchronization between changes in discriminators of different carriers is not necessary in practice and the delays between the changes evolve with time. In our implementation, discriminators are synchronized in a first step of acquisition. In a second operational step, changes are detected and change-points estimated with the discriminator values. The CDMA codes are shifted with a same delay, to stay synchronized with the received signals. When the delay between the detected change instants is higher than a threshold the CDMA codes of the two carriers are independently re-synchronized with the received signal on each carrier.

4.2.1. Synthetic GPS data segmentation

We present in Fig. 11 the static positions (the real position of the receiver is 0 m in East and North directions) of a receiver calculated every millisecond with a classical method and with the proposed method. We consider, for this experiment on synthetic data,

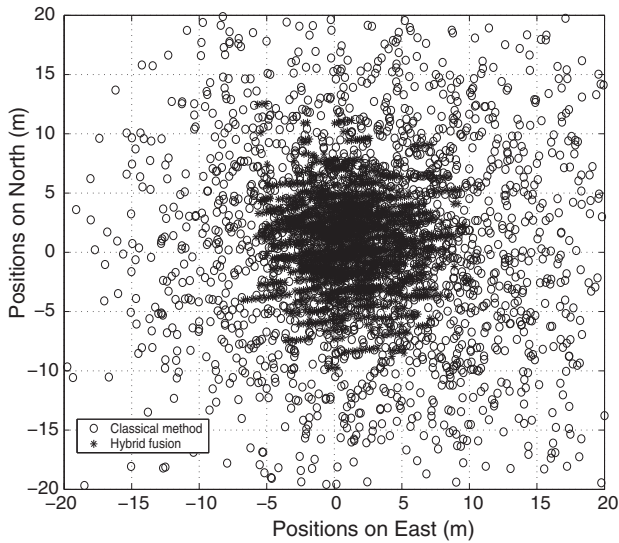


Fig. 11. Calculated positions every millisecond in the static case ($C/N_0 = 45$ dB Hz).

Table 3
Static position 0 error in the synthetic case ($C/N_0 = 45$ dB Hz).

	Mean gap/ variance East direction (m/m^2)	Mean gap/ variance North direction (m/m^2)	Mean/ variance Distance (m/m^2)
Classical method	7.04/29	7.62/34	11.47/41
Hybrid fusion	2.48/3	2.94/5	4.27/6

Table 4
SNR for the different satellites and acquisition systems.

Satellites	Receiver 1	Receiver 2
	$C/N_0 L_1$ (dB Hz)	$C/N_0 L_1$ (dB Hz)
29	43	47
26	39.7	45
28	44.8	49
8	43.1	47.9
10	44	49.7

a constellation of seven satellites with a (Horizontal Dilution of Precision) HDOP = 0.93. The SNR on the two carriers and for the different satellites is 45 dB Hz. We display, with black stars in Fig. 11, the receiver position calculated for a GPS multi-band signal segmented with the “OR” hybrid fusion method. We display, with black circles in Fig. 11, the receiver position calculated for a GPS single-band signal and a classical code tracking first order DLL (Delay-Locked Loop) [30]. We can notice that the calculated positions with our method are more concentrated around the true position of the receiver. We report in Table 3, the mean and variance of the gap value between the real position and the measured positions in the North and East directions. We also report in this table the mean and variance of the Euclidian distance between the receiver and the measured positions. According to these results, we can conclude that the proposed method is more precise because gaps and distance are smaller than in the classical case (4.27 m compared to 11.47 m for example).

4.2.2. Real GPS data segmentation

Currently the civil code, for GPS system NAVSTAR, is not available for all satellites on frequency L_2 (1227.6 MHz). So, for our experiment we use the frequency L_1 (1575.42 MHz) and two

Table 5
Static position error in a real case.

	Mean gap/ variance East direction (m/m^2)	Mean gap/ variance North direction (m/m^2)	Mean/ variance Distance (m/m^2)
Classical method	14.05/115	16.93/166	23.65/178
Hybrid fusion	10.43/65	10.26/61	15.73/83

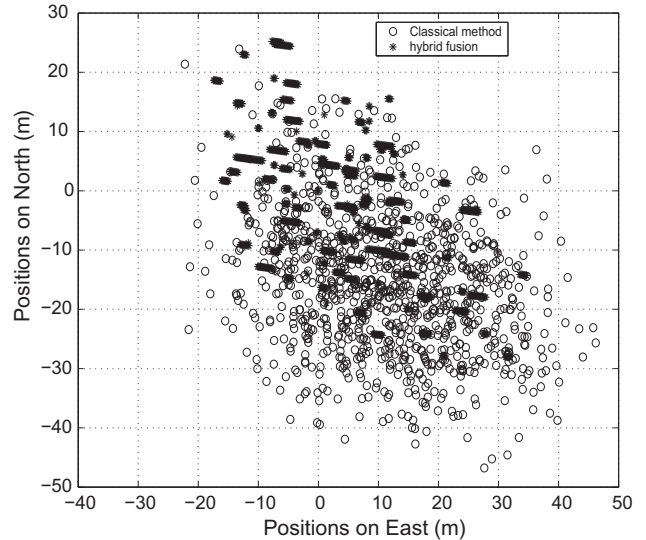


Fig. 12. Calculated positions every millisecond in a static real case.

simultaneous acquisitions of the signal. We consider two real GPS signals sampled with a sampling frequency of 20 MHz and two acquisition systems with a passband of respectively 8 MHz and 2 MHz. For this experimentation, we have five satellites and a value of HDOP = 7.24. The receiver is static and we report in Table 4 the different SNR associated to the visible satellites. We display in Fig. 12 the static positions calculated in the real case every millisecond with the classical and with the proposed method. We can notice in Fig. 12 that hybrid fusion gives estimate positions centred at the real antenna location. We report in Table 5 the mean and variance of the gap for the North and East directions and the mean and variance of the distance between the real and the estimate positions. We can conclude that in the real case the proposed method is more precise because gap and distance are smaller.

5. Conclusion

We present in this article a hybrid fusion method for the joint detection and estimation of change-point instants on two signals. In our approach, we combine decisions provided by two centralized fusion systems. These different systems assume the change simultaneous or do not make any hypothesis on change configuration. Decisions obtained by these two methods, respectively synchronized and unsynchronized, are combined with a distributed fusion operator defined for different fusion rules. For a “OR” fusion rule, we show on numerical experiments that this hybrid fusion method is a good compromise between synchronized and unsynchronised centralized fusion system, in terms of change detection and localization. Feasibility of our method is presented on synthetic and real GPS multi-band data for localization of a static receiver. We show that we obtain a better positioning precision with our multi-band detection method, compared to the classical single band approach. The prospects of our work are the extension of this method for more

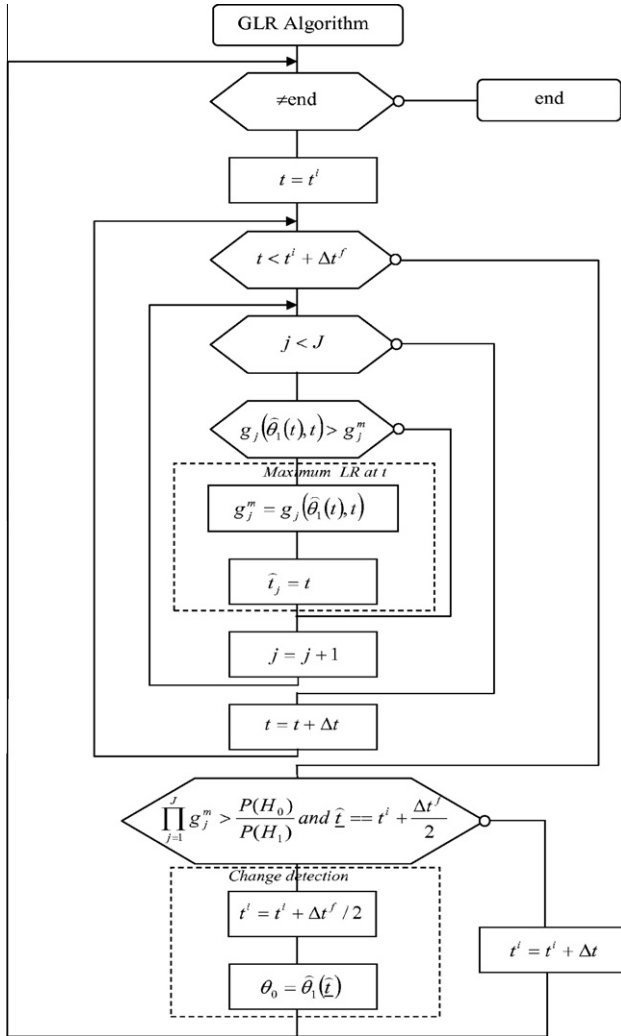


Fig. 13. Block diagram of the sliding window test.

than two processes. In the modern GPS systems the number of available carriers will indeed be greater than two.

Acknowledgments

The authors would like to thank the French minister of “Enseignement Supérieur et de la Recherche” and the “Nord-Pas de Calais” region that finances this work in the project PEPSAT. The authors would like to thank the reviewers for their helpful and constructive comments.

Appendix A. Realisation of the detector

We notice y_j the N discriminator values on the working window, associated to the carrier j . Let θ_j be the statistical parameters of the discriminator before and after the change. We assume that the received and local CDMA code are synchronized in an acquisition step, then we notice $\theta_j = \{\{0, \sigma_{j,0}\}, \{\mu_1, \sigma_{j,1}\}\}$. In the following expression, we defined the distribution of the discriminator j for a change instant t_j and hypothesis H_0 and H_1 :

$$h_j(\underline{y}_j/\underline{r}_j, H_1; \theta_j) = \prod_{i=1}^{t_j-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{j,0}} \exp\left(\frac{-(y_{j,i})^2}{2\sigma_{j,0}^2}\right) \cdot \prod_{i=t_j}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{j,1}} \times \exp\left(\frac{-(y_{j,i} - \mu_{j,1})^2}{2\sigma_{j,1}^2}\right) \quad (46)$$

and

$$h_j(\underline{y}_j/\underline{r}_j, H_0; \theta_j) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{j,0}} \exp\left(\frac{-(y_{j,i})^2}{2\sigma_{j,0}^2}\right). \quad (47)$$

For the two carriers, the log likelihood ratio defined in expression (6) is given by the following formula:

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{i=t_j}^N \log\left(\frac{\sigma_{j,0}^2}{\sigma_{j,1}^2}\right) + \frac{(y_{j,i})^2}{2\sigma_{j,0}^2} - \frac{(y_{j,i} - \mu_{j,1})^2}{2\sigma_{j,1}^2} \quad (48)$$

We found in the published works several implantations of the likelihood test for change detection [1,31,32,4]. We display in Fig. 13 the block diagram of the sliding window method we used for the on line detection of changes. Let $g_j(\theta_1, t)$ be the Likelihood Ratio (LR) for the signal j at instant t . $g_j(\theta_1, t)$ is calculated on the working window $\{t, \dots, t + \Delta t^f\}$ of fixed length Δt^f . Let g_j^m be the maximum value of the likelihood ratio at instant t . In this description Δt is the sampling time interval and $\hat{\theta}_1(t)$ is calculated with its maximum likelihood estimate. The current instant is t and t_i is the initial instant. We notice \hat{t}_j the estimate instant of change. In our approach, a change is detected if it is situated at the centre of the working window. With this constraint, we can fix the threshold values that depend in practice on the change position in the window. However, we can notice that we have systematically a delay for the detection. This delay, $\Delta t^f/2$, is about 10 ms and is acceptable in the case of GPS positioning.

References

- [1] E.S. Page, Continuous inspection schemes, *Biometrika* 41 (1–2) (1954) 100–115.
- [2] D.V. Hinkley, Inference about the change point in a sequence of random variables, *Biometrika* 57 (1) (1970) 1–17.
- [3] N. Kligiene, L. Telksnys, Methods of detecting instants of change of random process properties, *Automation and Remote Control* 44 (10) (1983) 1241–1283.
- [4] I. Nikiforov, M. Basseville, *Detection of Abrupt Changes: Theory and Application*, Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [5] D. Picard, Testing and estimating change points in time series, *Advances in Applied Probability* 17 (4) (1985) 841–867.
- [6] J. Deshayes, D. Picard, Off-Line statistical analysis of change-point models using non parametric and likelihood methods, detection of abrupt changes in signal and dynamical systems, in: M. Basseville, A. Benveniste (Eds.), *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, LNCIS 77, Springer, New York, 1986, pp. 103–168.
- [7] J. Deshayes, D. Picard, Tests de ruptures dans un modèle, *Compte-Rendu de l'Académie des Sciences* 288 (1979) 563–566.
- [8] J. Deshayes, *Rupture de modèles en statistique*, Ph.D. thesis, Université de Paris-Sud, Orsay, France, 1983.
- [9] P. Bertrand, A local method for estimating change points: the hat function, *Statistics* 34 (3) (2000) 215–235.
- [10] I. Gijbels, P. Hall, A. Klein, On the estimation of jump points in smooth curves, *The Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 51 (2) (1999) 231–251.
- [11] M. Chabert, J.Y. Tourneret, F. Castanie, Time-scale analysis of abrupt changes corrupted by multiplicative noise, *Signal Processing* 80 (3) (2000) 397–411.
- [12] J.Y. Tourneret, Detection and estimation of abrupt changes contaminated by multiplicative Gaussian noise, *Signal Processing* 68 (3) (1998) 259–270.
- [13] K. Ghosh, S.R. Jammalamadaka, M. Vasudaven, Change-point problems for the Von Mises distribution, *Journal of Applied Statistics* 26 (4) (1999) 423–434.
- [14] J.A. Benediktsson, J.R. Sveinsson, P.H. Swain, Hybrid consensus theoretic classification, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 35 (4) (1997) 833–843.
- [15] C. Genest, J.V. Zidek, Combining probability distributions: a critique and annotated bibliographie, *Statistical Science* 1 (1) (1986) 114–118.
- [16] S. Reboul, M. Benjelloun, Joint segmentation of the wind speed and direction, *Signal Processing* 86 (4) (2006) 744–759.
- [17] R. Radner, Team decision problems, *Annals of Mathematical Statistics* 33 (1962) 857–881.
- [18] R.R. Tenney, N.R. Sandell, Detection with distributed sensors, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System* 17 (4) (1981) 98–101.
- [19] Z. Chair, P.K. Varshney, Optimal data fusion in multiple sensor detections systems, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System* 22 (1) (1986) 98–101.
- [20] A.R. Reibman, L.W. Nolte, Optimal detection and performance of distributed sensor systems, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System* 23 (1) (1987) 24–30.

- [21] S.C. A Thomopoulos, R. Viswanathan, D.K. Bougoulas, Optimal distributed decision fusion, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System* 25 (5) (1989) 761–765.
- [22] J.N. Tsitsiklis, On threshold rules in decentralized detection, in: *Proceedings of the 25th International Conference on Decision and Control*, Athens, Greece, 1986, pp. 103–168.
- [23] W. Shi, T.W. Sun, R.D. Wesel, Quasi-convexity and optimal binary fusion for distributed detection with identical sensors in generalized Gaussian noise, *IEEE Transactions on Information Theory* 47 (1) (2001) 446–450.
- [24] Q. Zhang, P.K. Varshney, R.D. Wesel, Optimal bi-level quantization of i.i.d sensor observations of binary hypothesis testing, *IEEE Transactions on Information Theory* 48 (7) (2002) 2105–2111.
- [25] C. Desrousseaux, Utilisation d'un critère entropique dans les systèmes de détection, Ph.D. thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, France, 1998.
- [26] D. Middleton, *Statistical communication theory*, MC Graw-Hill, New York, 1960.
- [27] B. Chen, P.K. Willett, On the optimality of the likelihood-ratio test for local sensor decision rules in the presence of nonideal channels, *IEEE Transactions on Information Theory* 51 (2) (2005) 653–699.
- [28] Z. Wang, P. Willett, Two algorithms to segment white gaussian data with piecewise constant variances, *IEEE Transactions on Signal Processing* 51 (2) (2003) 373–385.
- [29] S. Boutoille, S. Reboul, M. Benjelloun, Fusion of detections in a multi-carrier GPS receiver, in: *Proceedings of the Seventh International Conference on Information Fusion*, Stockholm, Sweden, 2004, pp. 85–90.
- [30] A.J. Van Dierendonck, P. Fenton, T. Ford, Theory and performance of narrow correlator spacing in a GPS receiver, *Journal of the Institute of Navigation, USA* 39 (3) (1992) 265–283.
- [31] G. Lorden, Procedures for reacting to a change in distribution, *The Annals of Mathematical Statistics* 42 (6) (1971) 1897–1908.
- [32] G.V. Moustakides, Optimal stopping times for detecting changes in distributions, *The Annals of Statistics* 14 (4) (1986) 1379–1387.

A.6 Joint Segmentation of the Wind Speed and Direction - Reboul et Benjelloun (2006)

Cet article a été publié dans le revue Signal Processing 86 (4), pp. 744-759, 2006.



Joint segmentation of the wind speed and direction

S. Reboul*, M. Benjelloun

*Université du Littoral Côte d'Opale, Laboratoire d'Analyse des Systèmes du Littoral, 50 Rue Ferdinand Buisson,
B.P. 699, 62228 Calais Cedex, France*

Received 14 April 2003; received in revised form 18 May 2005; accepted 4 July 2005
Available online 3 August 2005

Abstract

We present in this article a Bayesian estimation method for the joint segmentation of a set of piecewise stationary processes. The estimate we propose is based on the maximization of the posterior distribution of the change instants conditionally to the process parameter estimation. It is defined as a penalized contrast function with a first term related to the fit to the observation and a second term of penalty. The expression of the contrast function is deduced from the log-likelihood of the parametric distribution that models the statistic evolution of processes in the stationary segments. In the case of joint segmentation the penalty term is deduced from the prior law of change instants. It is composed of parameters that guide the number and the position of changes and of parameters that will bring prior information on the joint behavior of processes. This work is applied to the estimation of wind statistics parameters. We use data available from a cup anemometer and a wind vane, supposed to be piecewise stationary. The contrast function is deduced from the circular Von Mises distribution for the wind direction and from the log-normal distribution for the speed. The feasibility and the contribution of our method are shown on synthetic and real data.

© 2005 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Segmentation; Bayesian estimation; Detection

1. Introduction

The problem of change-point detection has been studied considerably over the years. We found in the literature sequential or on-line segmentation

methods [1] (in which analysis is performed as each new observation is gathered) and off-line methods for which it is considered that all the data are available at the same time and perform a global segmentation. One interesting area of study is the extension of change-point methods in the problem of the joint segmentation of piecewise stationary processes. In this paper we present a non-sequential Bayesian approach for the joint segmentation of wind direction and wind velocity supposed to be piecewise stationary.

*Corresponding author. Tel.: +33 3 2146 3698;
fax: +33 3 2146 0686.

E-mail addresses: Serge.Reboul@lasl.univ-littoral.fr
(S. Reboul), Mohammed.Benjelloun@lasl.univ-littoral.fr
(M. Benjelloun).

The classical change-point problem supposes that the data are normally distributed with constant (but unknown) variance and the mean is suspected to undergo an abrupt change in value. The first works on this problem are due to Page [2] and Hinkley [3] for the detection of one change in the process. When the number of changes is unknown, the problem of change-point detection can be seen as a problem of model selection. In this case, each change configuration is a model and the number of changes is the dimension of the model. A classical solution to solve this problem is the penalized maximum likelihood. Let M be the model set, $m \in M$ a model and the empirical penalized criterion:

$$\hat{m} = \underset{m \in M}{\operatorname{argmin}} \{f(\hat{s}_m) + \operatorname{pen}(m)\}, \quad (1)$$

where \hat{s}_m are the estimated parameters of the model, and $\operatorname{pen}(m)$ a penalty function (in our presentation, we choose $f(t) = -\log$ -likelihood of the noise distribution $f(\cdot)$ of the model observations t). The first work about such criteria is due to Mallows [4] and Akaike [5]. Both approaches are based on some unbiased estimation of the quadratic risk and aim at choosing a model which minimizes this risk: this is the *efficiency* point of view. Recent and more detailed works about this kind of criteria can be found in [6]. Another point of view about model selection consists in assuming the existence of a true model of minimal size and aiming at finding it. This is the case of change-point detection where all possible configurations of changes m are in M . The criteria described in [7,8] have been designed to find the model with a probability tending to 1 when the variance of the process goes to 0: this is the *consistency* point of view. For those criteria the penalty term is a linear function of the model dimension. In this paper we propose a criterion deduced from the MAP estimate of the posterior distribution of the change instants conditionally to the process parameter estimation of a set of processes. We suppose the configuration of changes to be a sequence of Bernoulli variables [9] and we obtain for the penalty term a linear function of the model dimension. In the case of joint segmentation the penalty term is deduced from the prior law of the

change instants. It is composed of parameters that guide the number and the position of changes and parameters that will bring prior information on the joint behavior of the process.

This work is applied to the statistical estimation of horizontal wind vector parameters. For modeling the transport and the diffusion of airborne pollutants, knowledge of the wind characteristics plays a crucial role in the numerical models of air quality [10,11]. The dispersion of airborne material is mainly due to turbulent diffusion inherent in atmospheric motion. For realistic estimates of dispersion, it is therefore of primary importance to have an accurate description of atmospheric turbulence and wind vector parameters. The wind vector is described, in an Euclidean co-ordinate system, by three typical parameters: the vector of mean wind speed, the vector of mean wind direction and the angular standard deviation. The angular standard deviation is an indicator of atmospheric stability (Pasquill classes [12]). It allows appreciating the atmospheric turbulence taking into account the local topographical and climatic conditions. In our approach the wind velocity is expressed by two components, the wind speed and the wind direction, supposed to be piecewise stationary. The statistical properties of the wind speed are described by a positive linear random variable: the variable follows a log-normal distribution [13]. The wind direction is a circular random variable: it follows a Von Mises distribution [11]. In the preceding works the wind vector parameters were estimated on data supposed to be stationary. In this case the measurements were inaccurate and needed manual human intervention [10].

The problem, then, consists in recovering the instants of change in the recorded wind data. The wind velocity vector is described by an angle and a module. The value of these two parameters is available from a cup anemometer and a wind vane placed at the seafront. For this application we can define prior information on the behavior of the process. First, there is a correlation of the change instants with the tide hours. Second, the modifications of climatic conditions induce simultaneous changes in the two processes [14]. The goal of the joint estimation method we propose in this article

is to integrate in the segmentation the prior information we have on the joint behavior of the process.

The paper is organized as follows. Section 2 describes the Bayesian technique. We detail, in this section, the joint estimation method used for estimating the posterior distribution of the change points. The parametric model and the MAP estimate of wind vector parameters are described in Section 3. In Section 4 we present numerical experiments on synthetic and real data.

2. A Bayesian approach

The problem we address in this paper is the detection of changes in the statistical distribution of a J -dimensional process. Let $y_j = (y_{j,i}, 1 \leq i \leq n)$ be a non-stationary process with conditional law h_j , and $\underline{y} = (y_j, 1 \leq j \leq J)$ the set of J processes. We assume that the processes are piecewise stationary. Let $\underline{r}_j = (r_{j,i}, 1 \leq i \leq n)$ be the configuration of change points in the process y_j and $\underline{r} = (\underline{r}_j, 1 \leq j \leq J)$ the configuration of changes. $r_{j,i}$ takes the value 0 between two changes and 1 at the change instant. Let $\underline{\theta}_j = (\theta_{j,1}, \dots, \theta_{j,K_j})$ be the sequence of parameters in the process y_j composed of K_j stationary segment ($\theta_{j,k}$ is the parameter in the k th segment of the series y_j). K_j is also the number of changes because we suppose that there is a change at $i = n$. Let $\underline{t}_j = (t_{j,k}, k \geq 0, t_{j,0} = 0)$ be the instants of change in the process y_j associated with the configuration of changes \underline{r}_j . Let $\underline{t}_j^* = (t_{j,k}^*, k \geq 0, t_{j,0}^* = 0)$ be the real instant of change we want to detect. $\underline{\theta}$ and \underline{r} are estimated by maximizing the posterior distribution:

$$(\hat{r}, \hat{\theta}) = \underset{(\underline{r}, \underline{\theta})}{\text{Argmax}} \Pr(\underline{R} = \underline{r} / \underline{Y} = \underline{y}; \underline{\theta}) \quad (2)$$

$$= \underset{(\underline{r}, \underline{\theta})}{\text{Argmax}} \prod_{j=1}^J h_j(y_j / \underline{r}_j; \underline{\theta}_j) f_j(\underline{\theta}_j) \pi(\underline{r}), \quad (3)$$

where $\pi(\underline{r})$, the prior law of \underline{r} , is given by

$$\pi(\underline{r}) = \Pr(\underline{R}_1 = \underline{r}_1, \dots, \underline{R}_J = \underline{r}_j). \quad (4)$$

Let $f_j(\underline{\theta}_j)$ be the probability to have the sequence of parameters $\underline{\theta}_j$ for the process y_j . We do not have

any prior information on θ_j , so we suppose $f_j(\underline{\theta}_j)$ to be a uniform law. The parameters θ_j are estimated using empirical maximum likelihood estimation. When we take the negative logarithm of Eq. (3) we define a penalized empirical criterion, where \underline{r} (the number and position of changes) is estimated by minimizing the penalized contrast function defined by

$$U_{\underline{y}}(\underline{r}) = \sum_{j=1}^J V_{y_j}(\underline{r}_j; \hat{\underline{\theta}}_j(\underline{r}_j)) - \ln \pi(\underline{r}). \quad (5)$$

$\hat{\underline{\theta}}_j(\underline{r}_j)$ is the vector of parameters estimated in the stationary parts defined by the configuration \underline{r}_j . In this expression the first term measures the fidelity to the observation, whereas the second term (penalty) is related to the number and the position of changes. In what follows we propose a parametric formulation for the prior law that will integrate prior information on the joint behavior of processes. We define \underline{R}_j as a sequence of independent Bernoulli variables. If we suppose in a first step that we do not have any prior information on the positions of changes and on the joint behavior of processes, the probability to have a sequence \underline{r} is given by

$$\pi(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_J) = \prod_{j=1}^J \lambda_j^{K_j} (1 - \lambda_j)^{n-K_j} \quad (6)$$

with $K_j = \sum_{i=1}^n r_{j,i}$,

where λ_j is the probability to have a change on y_j . If we suppose now that the processes are correlated and that we have prior information on the location of changes, we define

$$P_{j,i} = P(r_{1,i} = 0, \dots, r_{j,i} = 1, \dots, r_{J,i} = 0), \quad (7)$$

$$P_i^0 = P\left(\sum_{j=1}^J r_{j,i} = 0\right), \quad (8)$$

$$P_i^l = P\left(\sum_{j=1}^J r_{j,i} = l\right) \quad \text{with } l \in \{2, \dots, J\}. \quad (9)$$

$P_{j,i}$ is the probability to have a unique change at position i in the process y_j . Let ζ_j be the set of positions where there is exclusively a change in

the process y_j . P_i^l is the probability to have l simultaneous changes at position i . Let η_l be the set of positions where there is a change on l of the J processes. We define the joint probability that links the change in processes as

$$\pi(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_J) = \left(\prod_{j=1}^J \prod_{i \in \zeta_j} P_{j,i} \right) \left(\prod_{l=2}^J \prod_{i \in \eta_l} P_i^l \right) \times \left(\prod_{i \in \eta_0} P_i^0 \right), \quad (10)$$

with

$$\sum_{j=1}^J \text{card}\{\zeta_j\} + \sum_{l=2}^J \text{card}\{\eta_l\} + \text{card}\{\eta_0\} = n$$

and

$$\sum_{j=1}^J P_{j,i} + \sum_{l=2}^J P_i^l + P_i^0 = 1.$$

We have

$$\begin{aligned} & -\ln(\pi(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_J)) \\ &= -\sum_{j=1}^J \sum_{i \in \zeta_j} \ln(P_{j,i}) - \sum_{l=2}^J \sum_{i \in \eta_l} \ln(P_i^l) \\ & \quad - \sum_{i \in \eta_0} \ln(P_i^0) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \eta_0} \ln(P_i^0) &= \sum_{i=1}^n \ln(P_i^0) - \sum_{j=1}^J \sum_{i \in \zeta_j} \ln(P_i^0) \\ & \quad - \sum_{l=2}^J \sum_{i \in \eta_l} \ln(P_i^0). \end{aligned}$$

We can write

$$\begin{aligned} & -\ln(\pi(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_J)) \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{i \in \zeta_j} \ln\left(\frac{P_i^0}{P_{j,i}}\right) \\ & \quad + \sum_{l=2}^J \sum_{i \in \eta_l} \ln\left(\frac{P_i^0}{P_i^l}\right) - \sum_{i=1}^n \ln(P_i^0). \end{aligned}$$

The last term of this expression is independent of the sequence of changes, and then the expression

can be written as

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \sum_{i \in \zeta_j} \beta_{j,i} + \sum_{l=2}^J \sum_{i \in \eta_l} \gamma_i^l \\ & \quad \text{with } \beta_{j,i} = \ln\left(\frac{P_i^0}{P_{j,i}}\right) \text{ and } \gamma_i^l = \ln\left(\frac{P_i^0}{P_i^l}\right). \end{aligned}$$

The value of $\beta_{j,i}$ decreases when the probability to have a unique change on the process y_j at the position i increases. In the same way, the value of γ_i^l decreases when the probability to have l simultaneous changes on the J processes at the position i increases.

3. Estimation of wind vector parameters

3.1. Expression of the contrast function

The first decision taken at the beginning of this work was either to deal with measurements of wind velocity and wind direction (in polar co-ordinate system), assumed to be two different and independent time series, or to deal with the components of the horizontal wind vector (in Cartesian co-ordinate system). One of the advantages of the former is that this is the usual way to record wind data by the traditional sensors (anemometer and vane). Furthermore, this approach is more intuitive and it is easier to interpret speed and direction separately than with horizontal components [14]. It is to be noted that circular variables statistics [15], used for the wind direction in the polar co-ordinate system, are more complex than linear magnitude statistics, used for the projections of the wind vector in the Cartesian co-ordinate system [10]. However, because of its advantages, the first option was chosen.

In our application we use a cup anemometer and a wind vane. The wind velocity will be expressed by two components: the wind speed and the wind direction. We propose to use the classical distribution described in the literature for this application. The Von Mises distribution models the wind direction which is a circular random variable. This distribution is equivalent in the circular domain to the Gaussian distribution in the linear domain [15].

The classical distribution for the wind speed is the Weibull distribution [11], but it is shown that for an anemometer at the seafront a log-normal distribution can be used [13].

In what follows the statistical properties of wind speed are described by a positive linear random variable: the variable follows a log-normal distribution. The wind direction is a circular random variable: it follows a Von Mises distribution. A circular random variable α has a Von Mises distribution with mean direction μ_α and a concentration parameter κ if it has the probability density function:

$$h_A(\alpha) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\alpha - \mu_\alpha)}, \tag{11}$$

where $I_0(\kappa)$ is the modified Bessel function of the first kind and order zero. The wind velocity vector is described by two processes: an angle \underline{y}_2 and a norm \underline{y}_1 . Thus we consider the following stationary time series in the segment k :

$$y_{1,i} = \exp(\sigma_k \varepsilon_{1,i} + m_k), \quad t_{1,k-1}^* + 1 \leq i \leq t_{1,k}^*, \tag{12}$$

$$y_{2,i} = ((\mu_k + \kappa_k \varepsilon_{2,i}) \bmod [2\pi]), \quad t_{2,k-1}^* + 1 \leq i \leq t_{2,k}^*, \tag{13}$$

where $\varepsilon_{1,i}$ is a zero mean normal random variable of variance 1. $\varepsilon_{2,i}$ is a zero mean Von Mises random variable with a concentration parameter with value 1. The likelihood function of $y_{1,i}$ in the segment k is given by

$$h_1(\underline{y}_1 / \underline{r}_1; \underline{\theta}_1) = \prod_{i=t_{1,k-1}+1}^{t_{1,k}} \frac{1}{y_{1,i} \sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \left(\frac{(\log(y_{1,i}) - m_k)^2}{2\sigma_k^2} \right) \right). \tag{14}$$

Then the negative log-likelihood of the contrast function we want to minimize is given for the wind speed by

$$\sum_{k=1}^{K_1} \left\{ n_{1,k} \log(\hat{\sigma}_k) + \sum_{i=t_{1,k-1}+1}^{t_{1,k}} \left(\frac{(\log(y_{1,i}) - \hat{m}_k)^2}{2\hat{\sigma}_k^2} + \log(y_{1,i}) \right) \right\}, \tag{15}$$

where $\hat{\sigma}_k^2$ and \hat{m}_k are, respectively, the empirical variance and mean calculated on the k th segment, and $n_{1,k} = t_{1,k} - t_{1,k-1}$ is its length. Specifically,

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n_{1,k}} \sum_{i=t_{1,k-1}+1}^{t_{1,k}} \log(y_{1,i}),$$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n_{1,k} - 1} \sum_{i=t_{1,k-1}+1}^{t_{1,k}} (\log(y_{1,i}) - \hat{m}_k)^2.$$

After simplification of Eq. (15), the contrast function we must minimize is given by

$$\underbrace{\operatorname{argmin}}_{(\underline{r}_1) \in \{0,1\}^n} V_{\underline{y}_1}(\underline{r}_1, \hat{\underline{\theta}}_1(\underline{r}_1)) = \underbrace{\operatorname{argmin}}_{(\underline{r}_1) \in \{0,1\}^n} \left\{ \sum_{k=1}^{K_1} n_{1,k} \left(\hat{m}_k + \frac{1}{2} \log(\hat{\sigma}_k^2) \right) \right\}. \tag{16}$$

The likelihood function of $y_{2,i}$ in the segment k is given by

$$h_2(\underline{y}_2 / \underline{r}_2; \underline{\theta}_2) = \prod_{i=t_{2,k-1}+1}^{t_{2,k}} \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_k)} \times \exp(\kappa_k \cos(y_{2,i} - \mu_k)). \tag{17}$$

Then the negative log-likelihood of the contrast function we want to minimize is given for the wind direction by

$$\sum_{k=1}^{K_2} \left\{ n_{2,k} \log(I_0(\hat{\kappa}_k)) - \hat{\kappa}_k \sum_{i=t_{2,k-1}+1}^{t_{2,k}} (\cos(y_{2,i} - \hat{\mu}_k)) \right\}, \tag{18}$$

where $\hat{\mu}_k$ is the empirical mean calculated on the k th segment, and $n_{2,k} = t_{2,k} - t_{2,k-1}$ is its length. Unfortunately this expression cannot be computed directly because there is no estimator for κ_k and $I_0(\hat{\kappa}_k)$ is a tabulated function. We show in Appendix A that this expression can be simplified, and then the contrast function to minimize for the wind direction is given by

$$\underbrace{\operatorname{argmin}}_{(\underline{r}_2) \in \{0,1\}^n} V_{\underline{y}_2}(\underline{r}_2, \hat{\underline{\theta}}_2(\underline{r}_2))$$

$$= \underbrace{\operatorname{argmin}}_{(r_2) \in (0,1)^n} \left\{ \sum_{k=1}^{K_2} n_{2,k} (\log(\hat{s}_k^2)) \right\}, \quad (19)$$

where \hat{s}_k , the empirical standard circular variance, is a function of the empirical circular variance \hat{v}_k , given by

$$\hat{v}_k = 1 - \frac{1}{n_{2,k}} \sum_{i=t_{2,k-1}+1}^{t_{2,k}} \cos(y_{2,i} - \hat{\mu}_k),$$

$$\hat{s}_k^2 = \ln \frac{1}{(1 - \hat{v}_k)^2}$$

and

$$\hat{c} = \frac{1}{n_{2,k}} \sum_{i=t_{2,k-1}+1}^{t_{2,k}} \cos(y_{2,i}),$$

$$\hat{s} = \frac{1}{n_{2,k}} \sum_{i=t_{2,k-1}+1}^{t_{2,k}} \sin(y_{2,i}),$$

$$\hat{\mu}_0 = \operatorname{Arctan} \left(\frac{\hat{s}}{\hat{c}} \right),$$

$$\hat{\mu}_k = \begin{cases} \hat{\mu}_0 & \text{if } \hat{s} > 0, \hat{c} > 0 \\ \hat{\mu}_0 + \pi & \text{if } \hat{c} < 0 \\ \hat{\mu}_0 + 2\pi & \text{if } \hat{s} < 0, \hat{c} > 0 \end{cases}.$$

In conclusion, the expression of the empirical penalized criterion to minimize is given by

$$[\hat{r}] = \underbrace{\operatorname{argmin}}_{(r) \in (0,1)^{n \times n}} \sum_{k=1}^{K_1} n_{1,k} \left(\hat{m}_k + \frac{1}{2} \log(\hat{\sigma}_k^2) \right) + \sum_{k=1}^{K_2} n_{2,k} (\log(\hat{s}_k^2)) + \sum_{i \in \zeta_1} \beta_{1,i} + \sum_{i \in \zeta_2} \beta_{2,i} + \sum_{i \in \eta_2} \gamma_i^2. \quad (20)$$

3.2. Expression of the penalty term

In this application we have prior information on the joint behavior of processes. First, there is a correlation between the instants of change and the hours of tides. Second, the modifications of

climatic conditions induce simultaneous changes in the two processes [14].

We suppose in a first step that we do not have any information on the possible location of changes. The value of the parameters $\beta_{1,i} = \beta_1 \forall i$, $\beta_{2,i} = \beta_2 \forall i$ and $\gamma_i^2 = \gamma^2 \forall i$ are independent of the position i . Then, it is the value of γ^2 that will bring prior information on the joint behavior of processes. A small value of γ^2 will favor the detection of simultaneous changes, while a large value of γ^2 will have the inverse effect. Its value will be defined experimentally under the following constraints:

- We take $\gamma^2 < \beta_1 + \beta_2$ ($P^2 P^0 > P_1 P_2$) to advantage the simultaneous changes.
- We take $\gamma^2 \geq \beta_1$ and $\gamma^2 \geq \beta_2$ ($P_1 \geq P^2$ and $P_2 \geq P^2$) if we also want to detect single changes.
- We take $\beta_1, \beta_2, \gamma^2 > 0$ ($P_1, P_2, P^2 > P^0$) because we do not want the signal to be over-segmented.

In the case where we do not have any a priori information on the presence of simultaneous changes, the value of γ^2 is $\gamma^2 = \beta_1 + \beta_2$ ($P_1 P_2 = P^0 P^2$), and the segmentations of the two processes are independent.

We suppose in a second step that we have an information on the possible location of changes, like a high probability to have a change at the tide hours. Let $t' = (t'_k, N \geq k \geq 1)$ be the tide tables. The penalized expression we propose is given by

$$\beta_{1,i} = \beta_1 - \rho_1 \sum_{k=1}^N \exp \left(-\frac{(i - t'_k)^2}{2\tau_1^2} \right), \quad (21)$$

$$\beta_{2,i} = \beta_2 - \rho_2 \sum_{k=1}^N \exp \left(-\frac{(i - t'_k)^2}{2\tau_2^2} \right), \quad (22)$$

$$\gamma_i^2 = (\beta_{1,i} + \beta_{2,i}) \left(\frac{\gamma^2}{\beta_1 + \beta_2} \right). \quad (23)$$

In these expressions the parameters ρ_1 and ρ_2 control the probability to have a change when the tides occur; a probability 1 for $\rho_1 > \beta_1$ and $\rho_2 > \beta_2$ and a probability $\frac{1}{2}$ for $\rho_1 = 0$ and $\rho_2 = 0$. The parameters τ_1 and τ_2 introduce an uncertainty

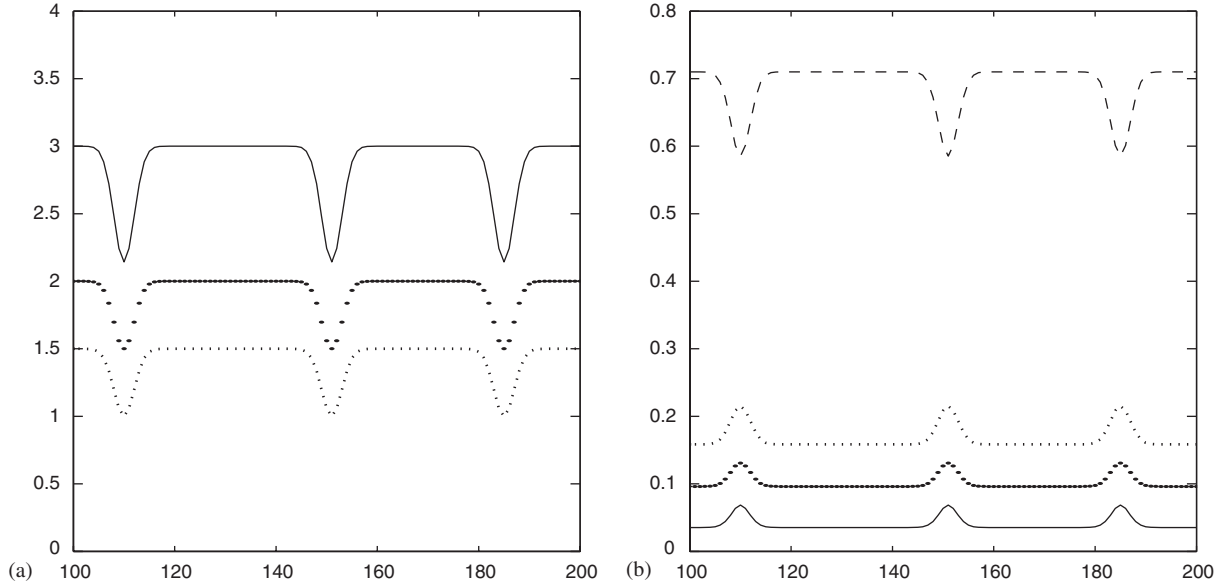


Fig. 1. (a) Penalty parameters evolution: (-) γ_i^2 , (..) $\beta_{1,i}$, (..) $\beta_{2,i}$. (b) Probability evolution: (-) P_i^2 , (..) $P_{1,i}$, (..) $P_{2,i}$, (- -) P_i^0 .

on the prior information we have for the localization of changes. We show in Fig. 1 the evolution of the penalty parameters and their associate probability. In this example we have $\underline{t} = (110, 151, 185)$, $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 2$, $\gamma^2 = 3$, $\rho_1 = \rho_2 = 0.5$, $\tau_1 = \tau_2 = 2$.

4. Numerical experiments

4.1. Experiments on synthetic data

We show in this experiment the contribution of the joint segmentation for the detection of changes and the estimation of the statistical parameters of the wind vector. The sequence of changes \hat{t} is estimated by minimizing Eq. (20) with a simulated annealing algorithm described in Appendix B. In this experiment we define \underline{y}_1 and \underline{y}_2 as two sequences of 500 samples. There are three changes on \underline{y}_1 at $\underline{t}_1^* = (0, 73, 299, 408, 499)$, and three changes on \underline{y}_2 at $\underline{t}_2^* = (0, 73, 183, 408, 499)$. The vector of parameters on \underline{y}_1 is $\underline{\theta}_1 = ((m_k, \sigma_k), k \in \{1, \dots, 5\}) = ((1.9, 0.1), (2.1, 0.1), (2.3, 0.1), (2.2, 0.1))$ and on \underline{y}_2 , $\underline{\theta}_2 = ((\mu_k, \kappa_k), k \in \{1, \dots, 5\}) =$

$((2.5, 2), (2.5, 1), (2, 1), (2, 3))$. An example of observed series is plotted in Figs. 2(a) and 3(a). In these figures, we represent the instants of change with vertical dotted lines. In Eq. (20), $\beta_{j,i}$ have an estimate in the Gaussian case [6,8]. For the distributions we are working on, we do not have any estimate for these parameters. In practice, these parameters are defined experimentally by the user. In this context, we tune their value to obtain the true number of changes in the signal. With small values of $\beta_{j,i}$ we will detect a large number of changes and a small one for a large value of $\beta_{j,i}$. To evaluate the performances of the segmentation we realize the following experiments, noted (1), (2) and (3), on 100 realizations of the signals \underline{y}_1 and \underline{y}_2 .

(1) Independent segmentation of the two signals:

We suppose that the parameters of the penalty function are independent of the position i and we take $\gamma^2 = \beta_1 + \beta_2$. The values of β_1 and β_2 are chosen so that the average of the number of changes detected, $\hat{K} = \hat{K}_1 + \hat{K}_2$, on 100 realizations of the signals, is equal or close to its true value ($K = 8$).

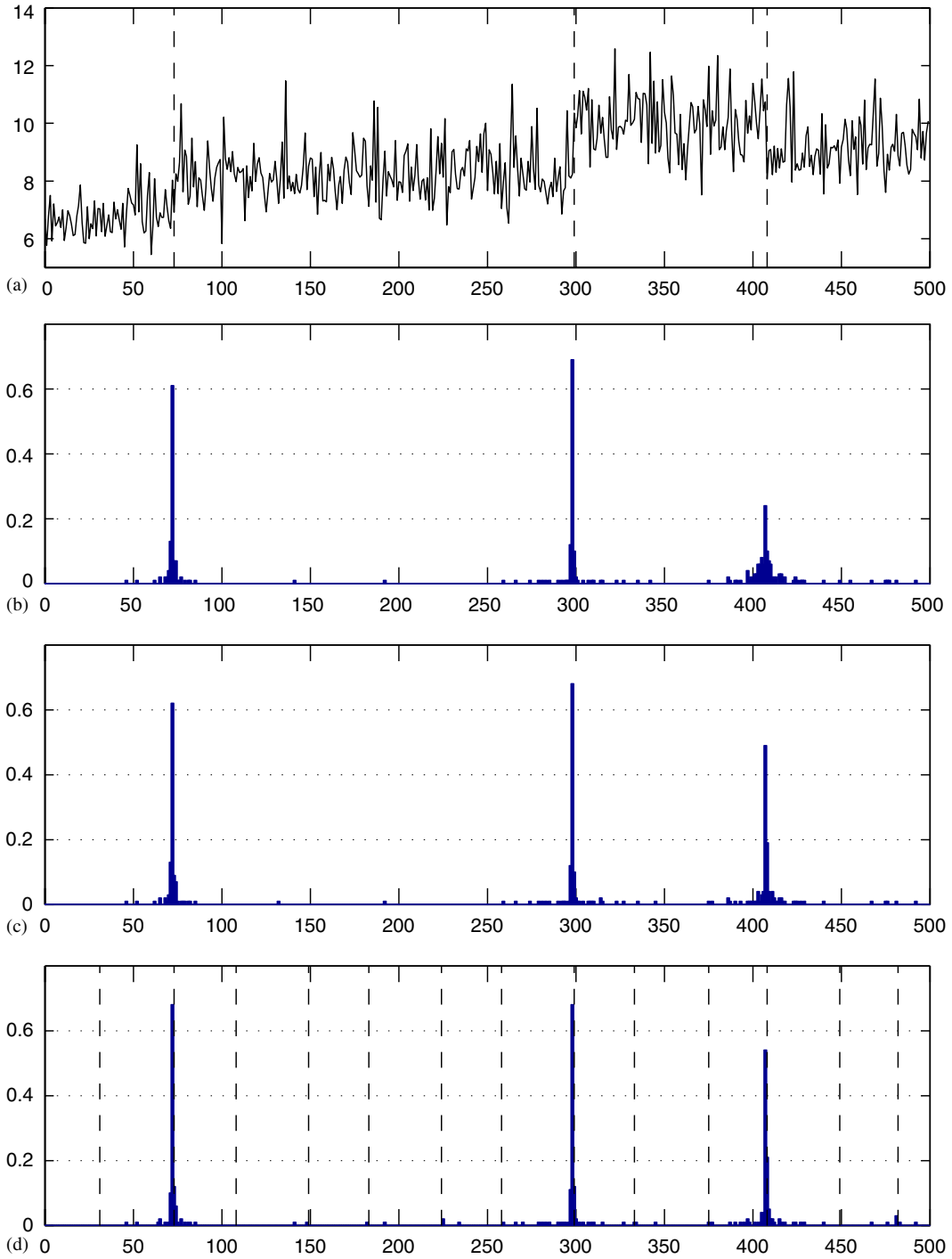


Fig. 2. (a) The observed signal y_1 (wind speed) and the change-point instants. (b)–(d) Posterior empirical distribution of r_1 ; (b) obtained for experiment (1), (c) obtained for experiment (2), (d) obtained for experiment (3).

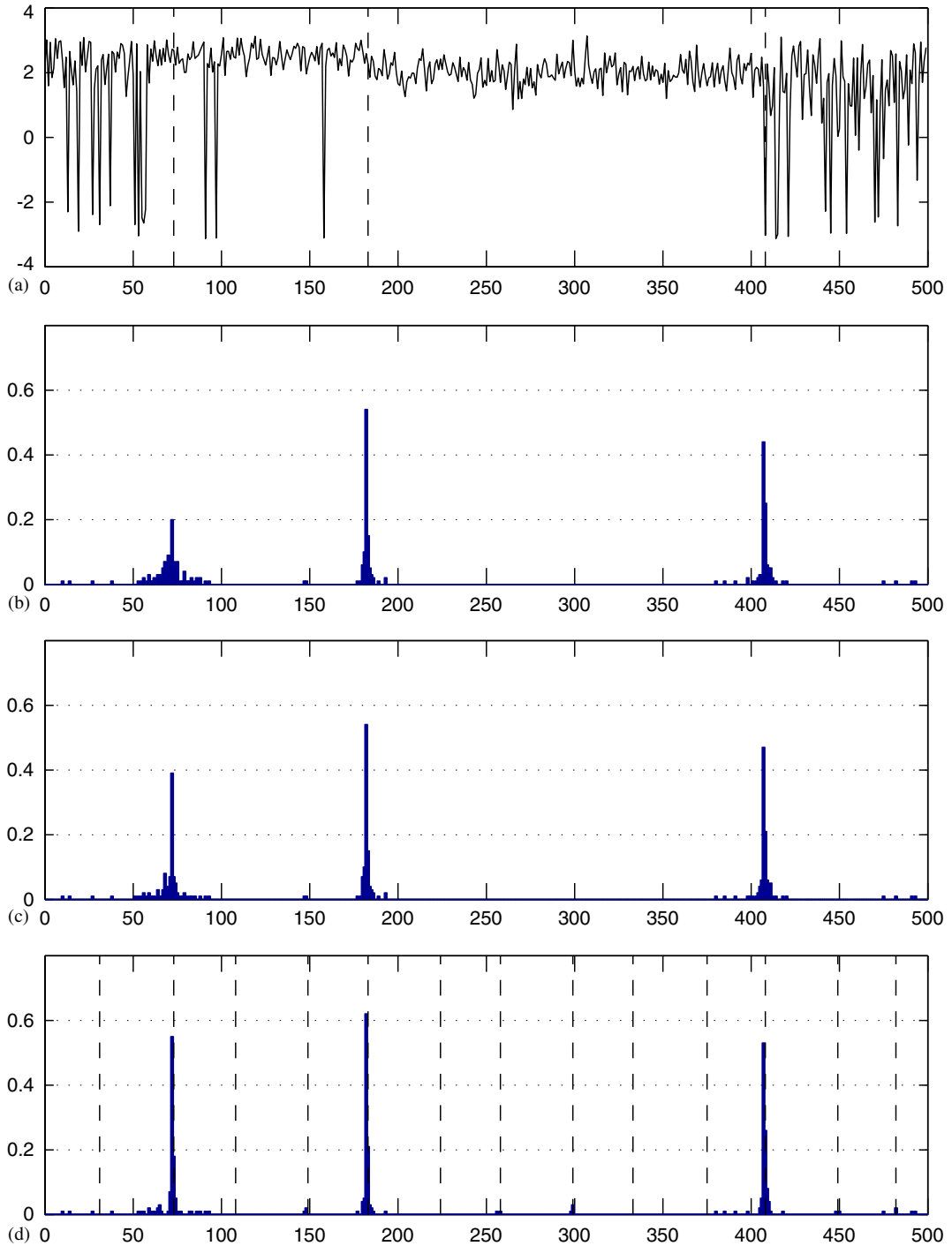


Fig. 3. (a) The observed signal y_2 (wind direction) and the change-point instants. (b)–(d) Posterior empirical distribution of r_2 ; (b) obtained for experiment (1), (c) obtained for experiment (2), (d) obtained for experiment (3).

- (2) *Joint segmentation of the two signals:* We suppose here that the values of β_1 and β_2 have been fixed in experiment (1). The value of the parameter γ^2 is chosen the smallest possible, so that the average of the number of changes detected on 100 realizations of the signals remains equal or close to its true value.
- (3) *Joint segmentation of the two signals with contribution of an a priori information:* We suppose here that the values of β_1 , β_2 and γ^2 have been fixed in the previous experiments (1) and (2). The values of ρ_1 , ρ_2 , τ_1 and τ_2 are chosen as large as possible so that the average of the number of changes detected remains equal or close to its true value.

We report in Table 1 the parameter values, as well as the standard deviation and the mean of the estimated number of changes.

We display in Figs. 2 and 3 the marginal posterior probabilities, $\{P(r_{1,i} = 1; \theta_1)\}$ and $\{P(r_{2,i} = 1; \theta_2)\}$ obtained for experiments (1)–(3). In Figs. 2(d) and 3(d), we represent, with vertical dotted lines, the instants with a high probability to have a change.

We report in Table 2 the probabilities of change detection at their true positions, and in Table 3 these probabilities when the changes are detected at ± 2 sample around their true positions.

Table 1
Parameters values for the different experiments

	β_1	β_2	γ^2	ρ_1	ρ_2	τ_1	τ_2	\bar{K}	$\sigma_{\hat{K}}$
(1)	5	13	$\beta_1 + \beta_2$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	8.8	1
(2)	5	13	16	0	0	$+\infty$	$+\infty$	8.7	0.95
(3)	5	13	16	1	4	2	2	8.8	1

Table 2
Probabilities of change detection at their true positions

	$t^*_{1,1}$	$t^*_{1,2}$	$t^*_{1,3}$	$t^*_{1,4}$	$t^*_{2,1}$	$t^*_{2,2}$	$t^*_{2,3}$	$t^*_{2,4}$
(1)	0.61	0	0.69	0.24	0.20	0.54	0	0.44
(2)	0.62	0	0.68	0.49	0.39	0.54	0	0.47
(3)	0.68	0.01	0.72	0.54	0.55	0.62	0.01	0.53

When we compare the results of experiment (1) with those of experiments (2) and (3), we note in Figs. 2 and 3 that the probability to detect changes at their true positions in Table 2 increases when the signals are segmented jointly. The results in Table 3 show that in this case the detected changes are more concentrated around their true positions.

In the results of change detection in Figs. 2(c) and 3(c) the number of detected changes increases and all the additional changes are localized at their true positions. For the change detection presented in Figs. 2(d) and 3(d) most of the additional changes are localized at their true positions, but some additional changes are localized at the tide hours. To define the segmentation parameters, the user will have to make a trade-off between good detections and false alarms (a false alarm is a change detected at a tide hour when there is no change). In our implementation we choose a number of additional detected changes at their true positions greater than the number of false alarms.

A “good” segmenter should locate the beginnings and ends of the segments reasonably accurately; it should provide for each segment a good estimate of the parameters. To evaluate the performances of parameter estimation we use the relative distances between the true and the estimate parameters [16]. For the wind speed we calculate the relative distance as

$$PM_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|m_e(i) - m_t(i)|}{m_t(i)}, \tag{24}$$

where m_t and m_e are, respectively, the true and estimated vectors of mean wind speed of length n , with

$m_t(i)$ = the true mean for i th observation $y_{1,i}$,

Table 3
Probabilities of change detection at ± 2 sample around their true positions

	$t^*_{1,1} \pm 2$	$t^*_{1,2} \pm 2$	$t^*_{1,3} \pm 2$	$t^*_{1,4} \pm 2$	$t^*_{2,1} \pm 2$	$t^*_{2,2} \pm 2$	$t^*_{2,3} \pm 2$	$t^*_{2,4} \pm 2$
(1)	0.81	0	0.91	0.40	0.35	0.79	0	0.72
(2)	0.84	0	0.90	0.72	0.53	0.79	0	0.74
(3)	0.90	0.01	0.91	0.79	0.80	0.88	0.04	0.84

and m_e defined similarly. The smaller the PM_1 , the better performance a segmenter provides. In the same way the relative distances for the wind direction are defined by

$$PM_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\mu_e(i) - \mu_t(i)|}{\mu_t(i)}, \quad (25)$$

$$PM_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|s_e(i) - s_t(i)|}{s_t(i)}. \quad (26)$$

Let us consider the following experiment where we have changes in the mean of the wind speed, of the wind direction and in the circular variance of the direction. There are four changes on y_1 and y_2 at the same position $t_1^* = t_2^* = (0, 73, 183, 299, 408, 499)$. The vector of parameters on y_1 is $\theta_1 = ((m_k, \sigma_k), k \in \{1, \dots, 5\}) = ((2, 0.1), (2.2, 0.1), (2.1, 0.1), (2.3, 0.1), (2.2, 0.1))$ and on y_2 , $\theta_2 = ((\mu_k, \kappa_k), k \in \{1, \dots, 5\}) = ((2.5, 2), (2.5, 1), (2, 1), (2.2, 1), (2.2, 3))$.

We performed experiments (1)–(3) with the parameter values defined in Table 1. We show in Table 4 that the probability to detect the changes at their true positions increases when the signals are segmented jointly. We report in Table 5 an example of relative distances obtained for experiments (1)–(3).

The results reported in Table 5 show that in this case the relative distance decreases when the signals are jointly segmented. However, this

Table 4
Probabilities of change detection at their true positions

	$t^*_{1,1}$	$t^*_{1,2}$	$t^*_{1,3}$	$t^*_{1,4}$	$t^*_{2,1}$	$t^*_{2,2}$	$t^*_{2,3}$	$t^*_{2,4}$
(1)	0.60	0.30	0.67	0.25	0.22	0.53	0.16	0.39
(2)	0.65	0.56	0.67	0.50	0.37	0.58	0.36	0.48
(3)	0.65	0.60	0.72	0.51	0.53	0.62	0.54	0.53

Table 5
Relative distances for the different experiments

	PM_1	PM_2	PM_3
(1)	0.0044	0.029	0.125
(2)	0.0042	0.023	0.122
(3)	0.0033	0.021	0.117

Table 6

Percentage of time for which the relative distances of experiment (1) are superior to the relative distances of experiments (2) and (3)

	$PM_1^{(1)} - PM_1^{(i)} \geq 0$ (%)	$PM_2^{(1)} - PM_2^{(i)} \geq 0$ (%)	$PM_3^{(1)} - PM_3^{(i)} \geq 0$ (%)
$i = 2$	75	72	67
$i = 3$	82	78	74

situation does not always take place in practice, we give in Table 6 (where $PM_j^{(i)}$ is the relative distance j for the experiment (i)), the percentage of time (calculated on 100 realizations of processes) for which the relative distances of experiments (2) and (3) are lower than the relative distance obtained in (1). These results show that in most cases the estimation of the statistical parameters is more precise for experiments (2) and (3).

In conclusion, the joint segmentation permits to localize the instants of change with more precision, and therefore to have a more precise evaluation of the statistical parameters of the signals.

4.2. Experiments on real data

We show now the potential of the method on real data. The data are available from a cup anemometer and a wind vane placed at the seafront. The signals are segmented and the statistical parameters of the wind vector are estimated in each segment. Fig. 4 shows the evolution of the wind direction and speed, sampled at intervals of 10 min. We also show the hours of high and low tides with dotted vertical lines. We observe in this figure that there is a correlation between the change instants and the tide hours. The segmentation result is displayed in Fig. 5. The value of the segmentation parameters is the same as in the case of synthetic data, given in Table 1.

The segmentation of real data is a difficult problem because hypotheses of the statistical model are not respected. For example, the changes are not abrupt, and there is a slow evolution of the statistical parameters in the segments, stimulated by the progressive evolution of the climatic conditions. Furthermore, the data, filtered by the sensors, are not independent. We can

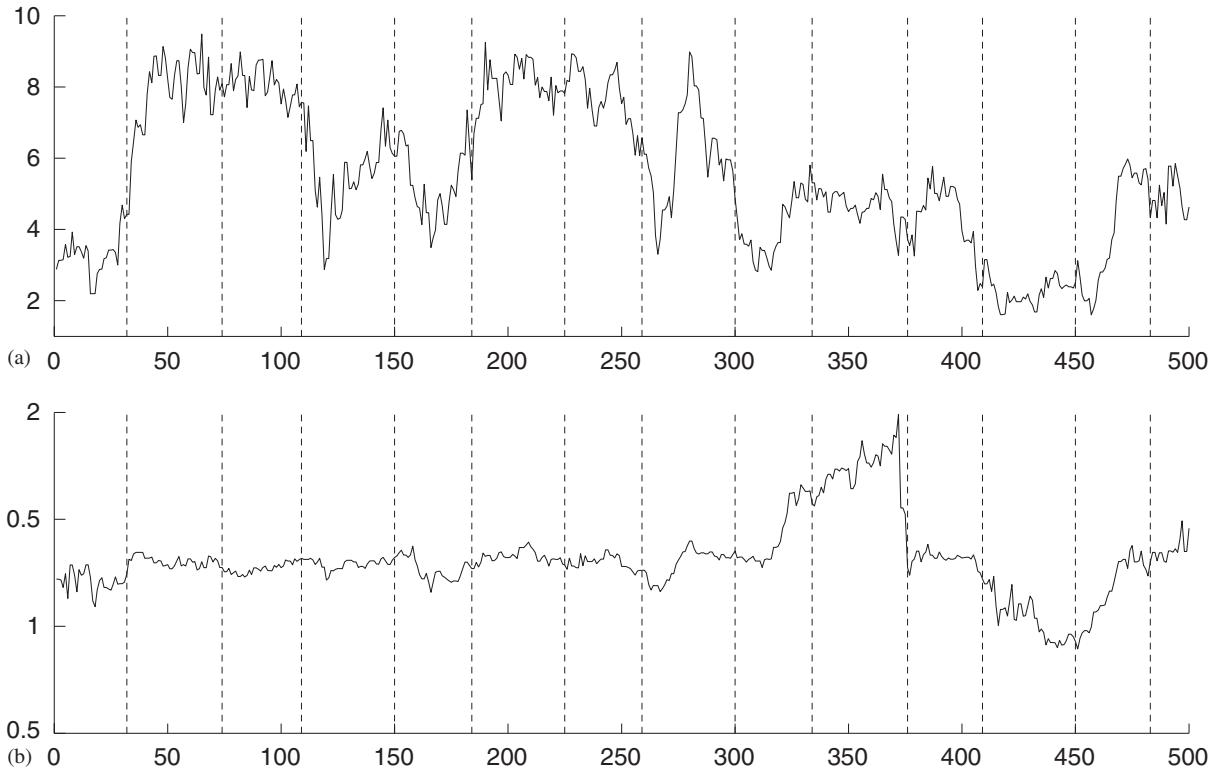


Fig. 4. The observed signals and the tide hour instants: (a) the wind speed, (b) the wind direction.

observe on segmentation results in Fig. 5 that the model of piecewise constant statistic parameters sometime does not fit the data. For example, there is an evolution of the mean wind direction around 460 in Fig. 5(b), or there is a peak in the wind speed around 240 in Fig. 5(a). If we increase the resolution of the segmentation (we increase the number of changes), we increase the number of detected changes in the non-stationary region, like around 35 in Fig. 5(a) or 460 in Fig. 5(b) or on the peak situated around 240 in Fig. 5(a).

To quantify the performance of the segmentation we compute a distance in the RMS (root mean square) sense between the signal and its reconstruction. This reconstruction error is an indicator of the goodness of fit of the model (right number of changes, proper statistical distribution). We calculate the mean of the RMS error between the real data and several synthetic reconstruction of the signal (100 reconstructions of the signal). For

the construction of synthetic signals we use a Von Mises and a log-normal random generator (IMSL library) with statistical parameters (\hat{m}_k , $\hat{\sigma}_k$, \hat{s}_k , \hat{v}_k) estimated on real data.

If the statistical distribution (Von Mises/log-normal) is the appropriate model for the real data, the reconstruction error must be close to the reconstruction error calculated between synthetic reconstructions. The reconstruction error, for the segmentation presented in Fig. 5, is 0.42 for the wind speed and 0.0028 for the direction. The same error, calculated between synthetic reconstruction of the signal, is 0.43 for the wind speed and 0.0021 for the direction. The errors are close, and we can conclude a good agreement between the real data and the statistical model of the wind vector.

When the resolution of the segmentation increases we have a more precise description of the stationary parts (small changes are detected). In this case the number of changes increases and

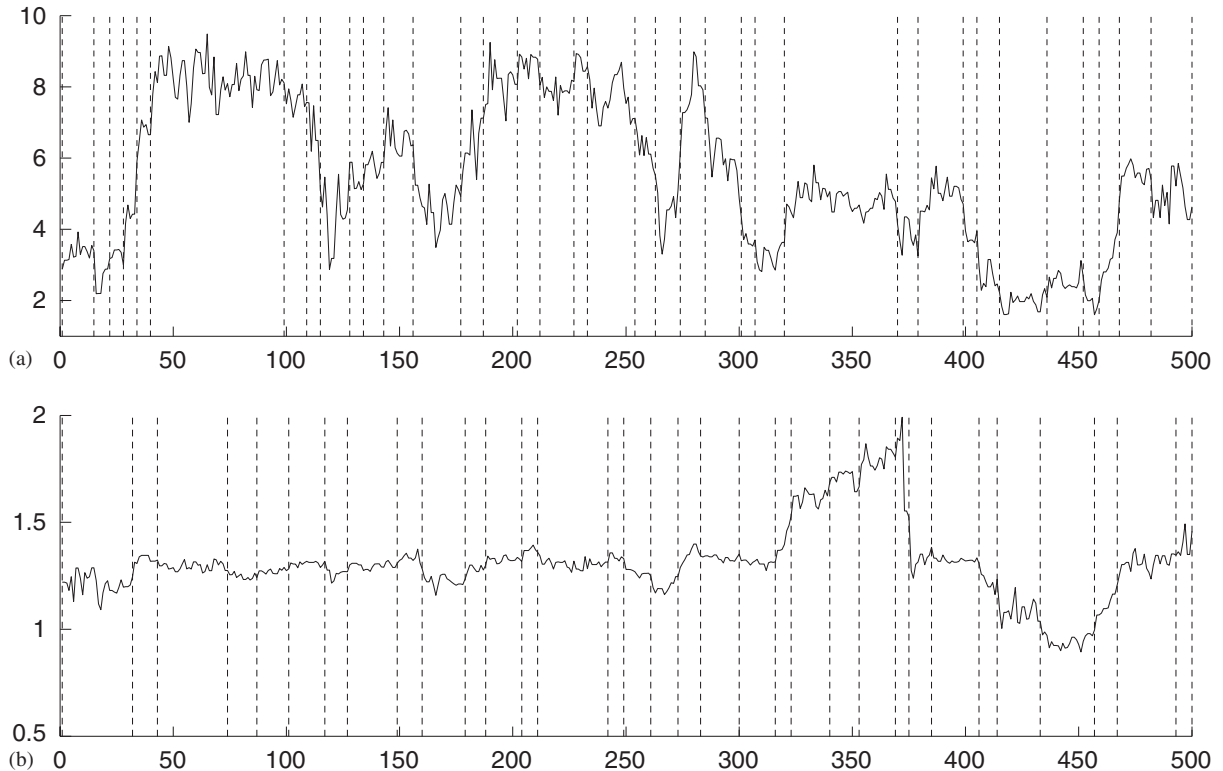


Fig. 5. The instant of changes detected (a) for the wind speed and (b) for the wind direction.

the reconstruction error decreases. We display in Fig. 6 the evolution of the RMS error for different numbers of changes (different values of β_1 and β_2). It is very difficult to decide whether the signal is over-segmented or not. In practice, the resolution of the segmentation will be defined by the user, i.e. the reconstruction error will help him to take a decision. In our experiment we suppose that we have a good statistical modelling of the real data when the reconstruction error is small. Moreover, we suppose that we have a good segmentation of the signal when the number of detected changes is not too large. We note in Fig. 6 that the segmentation parameters we used for the experiment presented in Fig. 5 constitute a good compromise between the number of changes and the reconstruction error.

The modelling errors make sometimes the interpretation of the measurements difficult. For example, we can observe in Fig. 6(b) that the

reconstruction error increases between 40 and 60 (usually this error decreases when the number of changes increases and remains stationary when the signal is over-segmented). The error increases because the model (piecewise stationary) does not fit the evolution of the signal around 375 in Fig. 5(b). In this stationary part of the signal there is a large change of the wind direction which increases the reconstruction error. The reconstruction error, if we do not take in consideration the signal in this area, decreases and remains stationary when the number of changes is superior to 40.

5. Conclusion

We present in this article a Bayesian estimation technique for the joint estimation of piecewise stationary processes. This method is applied to the estimation of wind statistical parameters. The

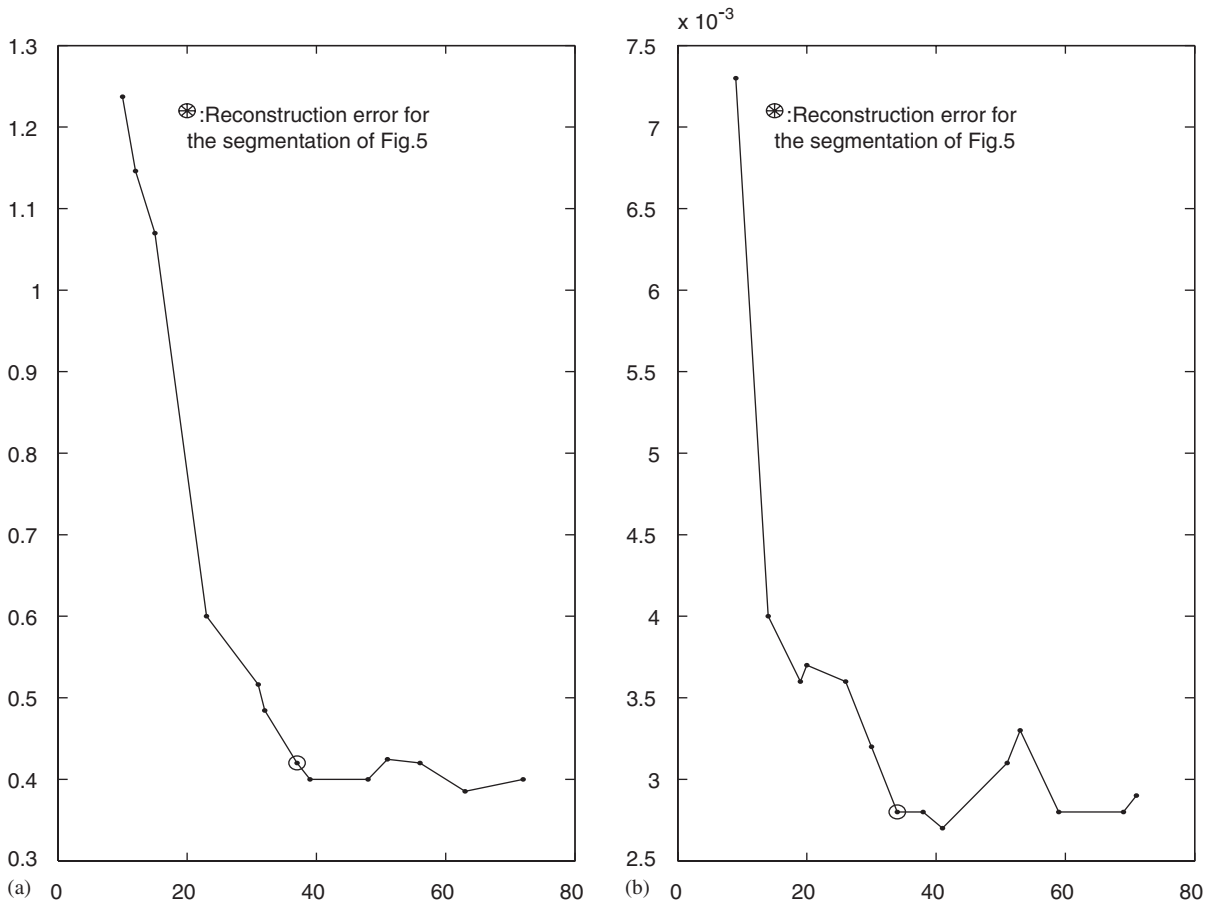


Fig. 6. Evolution of the root mean square error, between the real data and several synthetic reconstruction of the signal, with the number of changes. Reconstruction error (a) for the wind speed and (b) for the wind direction.

MAP estimate we propose is a penalized contrast function. The contrast function is deduced from the circular Von Mises parametric distribution of the wind direction and the log-normal distribution of the wind speed. The penalty term is composed of parameters that guide the number and the position of changes and parameters that carry prior information on the joint behavior of the processes. Numerical experiments on synthetic data show that the joint estimation model increases the segmentation performances in terms of change detection and localization. The feasibility of the method on real data is presented, and the results show the good agreement of the model with the reality.

The criterion with a penalty term we propose is not constrained by the number of processes and can be used in other applications with different contrast functions [9] (different distribution, additive or multiplicative noise). The perspectives of our work are the extension of this method to the fusion of random sets distribution for ambiguous and unambiguous observations.

Acknowledgements

The authors would like to thank the reviewers for their helpful and constructive comments.

Appendix A. Simplification of the log-likelihood of the Von Mises distribution

$$\begin{aligned}
 & -\log(h_2(y_2 / r_2; \theta_2)) \\
 &= \sum_{k=1}^{K_2} \left\{ n_{2,k} \log(2\pi) + n_{2,k} \log(I_0(\hat{\kappa}_k)) \right. \\
 & \quad \left. - \hat{\kappa}_k \sum_{i=l_{2,k-1}+1}^{l_{2,k}} (\cos(y_{2,i} - \hat{\mu}_k)) \right\}.
 \end{aligned}$$

We use the simplification $\hat{\kappa}_k \approx 1/\hat{s}_k^2$ [15], which is a suitable simplification for a value of $\kappa < 3$ in our application. With the maximum likelihood estimate of \hat{s}_k^2 and \hat{v}_k the previous expression can be rewritten as

$$\begin{aligned}
 & -\log(h_2(y_2 / r_2; \theta_2)) \\
 &= \sum_{k=1}^{K_2} \left\{ n_{2,k} \log(2\pi) \right. \\
 & \quad \left. + n_{2,k} \log \left(I_0 \left(\frac{1}{\hat{s}_k^2} \right) \right) - n_{2,k} \frac{1 - \hat{v}_k}{\hat{s}_k^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

We obtain the expression to minimize

$$\sum_{k=1}^{K_2} \left\{ n_{2,k} \log \left(I_0 \left(\frac{1}{\hat{s}_k^2} \right) \right) - n_{2,k} \frac{1 - \hat{v}_k}{\hat{s}_k^2} \right\}.$$

In this expression the term in the sum (associate with the k th segment) is of the form $n_{2,k} f(\hat{s}_k^2)$, where $f(\cdot)$ is a monotonic function of \hat{s}_k^2 . We propose to replace $f(\cdot)$ by the logarithm function. The expression to minimize becomes

$$\sum_{k=1}^{K_2} \{n_{2,k} \log(\hat{s}_k^2)\}.$$

Appendix B

It is known that searching for the real configuration of changes in all possible sequences is not computationally tractable. Nevertheless, by assuming statistical independence between the segments, the optimal segmenter can be solved with reduced computation via simulated annealing [9]. The simulated annealing algorithm is an iterative

procedure that converges to the optimal \hat{r} solution (that minimize Eq. (20)) with probability 1 [17]. In the case of the joint estimation technique the simulated annealing algorithm proceeds as follows:

- (1) An initial random sequence \underline{r} is drawn. Choose an initial value for the parameter T ($T_k, k = 0$), called temperature (in our application $T_0 = 500$). $k = 0$.
- (2) A new configuration $\tilde{\underline{r}}$ is drawn from \underline{r} in one of these three cases:
 - (i) Add, remove or translate a change at a random position i in \underline{r}_1 .
 - (ii) Add, remove or translate a change at a random position i in \underline{r}_2 .
 - (iii) Add, remove or translate a simultaneous change at a random position i in \underline{r} .
- (3) Let $\Delta U_y = U_y(\tilde{\underline{r}}) - U_y(\underline{r})$.
- (4) Set $\underline{r} = \tilde{\underline{r}}$ with probability 1 if $\Delta U_y < 0$ and with probability $\exp\{\frac{-\Delta U_y}{T_k}\}$ elsewhere. Decrease the value of $T_{k+1} = f(T_k)$ (in our application $T_{k+1} = T_k * 0.99$).
- (5) $k = k + 1$. Go to (2).

References

- [1] M. Basseville, N. Nikiforov, The detection of abrupt changes-theory and applications, Information and System Sciences Series, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [2] E.S. Page, Estimating the point of change in a continuous process, *Biometrika* 44 (1957) 49–61.
- [3] D.V. Hinkley, Inference about the change point in a sequence of random variables, *Biometrika* 57 (1970) 1–17.
- [4] C.L. Mallows, Some comments on Cp, *Technometrics* 15 (1974) 661–675.
- [5] H. Akaike, Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, in: Second International Symposium on Information Theory (Tsahkadsor, 1971), Akadémiai Kiado, Budapest, 1973, pp. 267–281 (MR 58 #3144).
- [6] L. Birgé, P. Massart, Gaussian model selection, *J. European Math. Soc.* 3 (2001) 203–268.
- [7] Y.C. Yao, Estimating the number of change-points via schwarz criterion, *Statist. Probab. Lett.* 6 (1988) 181–189.
- [8] M. Lavielle, E. Moulines, Least squares estimation of an unknown number of shifts in a time series, *J. Time Series Anal.* 21 (2000) 33–59.
- [9] M. Lavielle, Optimal segmentation of random processes, *IEEE Trans. Signal Process.* 46 (1998) 1365–1373.

- [10] R.U. Weber, Estimators for the standard deviations of lateral, longitudinal and vertical wind components, *Atmospheric Environment* 32 (1998) 3639–3646.
- [11] M. Martin, L.V. Cremades, J.M. Santabarbara, Analysis and modelling of time series of surface wind speed and direction, *Internat. J. Climatology* 19 (1999) 197–209.
- [12] F. Pasquill, F.B. Smith, *Atmospheric diffusion*, Ellis Horwood Series in Environmental Science, 3rd ed., Ellis Horwood Limited/a division of Wiley, 1982.
- [13] P. Skyum, C. Christiansen, P. Blaesild, Hyperbolic distributed wind, sea-level and wave data, *J. Coastal Res.* 12 (1996) 883–889.
- [14] J. Breckling, *The analysis of directional time series: applications to wind speed and direction*, Lecture Notes in Statistics, Springer, Berlin, 1989.
- [15] K.V. Mardia, P.E. Jupp, *Directional Statistics*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, New York, 1999.
- [16] Z. Wang, P. Willett, Two algorithms to segment white gaussian data with piecewise constant variances, *IEEE Trans. Signal Process.* 51 (2003) 373–385.
- [17] D. Geman, *Random fields and inverse problems in imaging*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, New York, 1990.

Résumé

La détection des changements ou ruptures dans les paramètres de la distribution statistique d'une série temporelle est un problème de recherche en traitement du signal qui trouve des applications dans de nombreux domaines comme le traitement des signaux GNSS. Le projet scientifique développé dans mon mémoire d'habilitation à diriger des recherches concerne l'étude des méthodes d'estimation et de détection conjointe de ruptures pour la fusion d'informations. Les approches proposées dans ce cadre sont utilisées dans différentes applications comme l'estimation des paramètres du vecteur vent, le traitement des signaux GNSS et le filtrage des mesures fournies par les capteurs inertiels. L'objectif de la fusion est d'utiliser les informations ou mesures fournies par différents capteurs pour avoir une meilleure connaissance du paramètre à estimer. Nous avons donc proposé dans ce travail plusieurs méthodes d'estimation et de détection conjointe de rupture qui fusionnent les informations fournies par des capteurs. Le but étant d'améliorer les performances des opérateurs en termes de détection, de localisation et d'estimation de la dynamique des ruptures. Les approches proposées dans un cadre bayésien s'appuient sur la définition de la distribution a posteriori des paramètres à estimer sachant les mesures multi-capteurs. Un des apports de nos travaux dans ce domaine est de proposer un ensemble de filtres définis dans le domaine circulaire avec la distribution de von Mises. Un autre apport est de proposer une loi a priori qui modélise le comportement mutuel entre plusieurs processus dans le cas de la segmentation multi-ruptures hors ligne de signaux multi-capteurs. Ce travail a principalement été appliqué au géo positionnement et plus particulièrement au traitement de la phase et du code des signaux GNSS multi-porteuses. Nous avons montré par des expérimentations sur signaux réels que les méthodes proposées permettent d'obtenir une localisation centimétrique à la milliseconde d'un récepteur ayant un mouvement de forte dynamique. Aujourd'hui les perspectives de ce travail sont dans le traitement des signaux de réflectométrie GNSS et de géolocalisation sous-marine. En effet pour ces applications les signaux sont fortement atténués et déformés par le milieu de propagation, ce qui constitue un nouvel enjeu pour les méthodes de fusion d'informations en traitement du signal.

Mots-clés: Fusion d'informations, Segmentation de signaux, Estimation bayésienne, Statistique circulaire, Signaux GNSS.