



HAL
open science

Problèmes inverses et commande robuste de quelques équations aux dérivées partielles

Lucie Baudouin

► **To cite this version:**

Lucie Baudouin. Problèmes inverses et commande robuste de quelques équations aux dérivées partielles. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2014. tel-01067485

HAL Id: tel-01067485

<https://theses.hal.science/tel-01067485>

Submitted on 23 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MANUSCRIT

présenté pour l'obtention de

l'Habilitation à Diriger des Recherches

de l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier

par

Lucie BAUDOUIN

LABORATOIRE D'ANALYSE ET D'ARCHITECTURE DES SYSTÈMES

Document de synthèse intitulé :

**“ Problèmes inverses et commande robuste
de quelques équations aux dérivées partielles. ”**

Soutenance le vendredi 20 juin 2014, devant le jury composé de

Rapporteurs :	Mme Assia BENABDALLAH	Professeur à l'Université de Provence
	Mme Catherine BONNET	Directrice de Recherche INRIA
	M. Jérôme LE ROUSSEAU	Professeur à l'Université d'Orléans
Examineurs :	M. Otared KAVIAN	Professeur à l'Université de Versailles
	M. Christophe PRIEUR	Directeur de Recherche CNRS
	M. Jean-Pierre PUEL	Professeur émérite
	Mme Sophie TARBOURIECH	Directrice de Recherche CNRS
Parrain :	M. Jean-Pierre RAYMOND	Professeur à l'Université de Toulouse

Avoir une page pour dire au mieux à ceux qui nous entourent combien on est touchés par leur présence à nos cotés est un luxe. Alors à chacun de ceux que je ne nommerais pas au détour d'un paragraphe, et qui se doutent peut-être combien ils comptent aussi, m e r c i.

Je désire remercier sincèrement mes rapporteurs, Assia Benabdallah, Catherine Bonnet et Jérôme Le Rousseau, chacun ayant pris un temps que je sais précieux pour lire et commenter ce travail de synthèse sur mes récentes années de recherche. Merci pour votre lecture critique et bienveillante. C'est ce qui me permet de toujours avancer.

Je suis aussi redevable à Jean-Pierre Raymond, d'avoir accepté d'être mon garant et de m'avoir épaulé dans ce projet d'habilitation, malgré la distance.

Je suis enfin très reconnaissante à Otared Kavian, Christophe Prieur, Jean-Pierre Puel et Sophie Tarbouriech d'honorer ce jury de leur présence. Votre venue à chacun, votre regard sur mon parcours et votre accompagnement comptent aussi beaucoup pour moi.

Je tiens à dire à tous mes collaborateurs qu'ils incarnent ma raison profonde d'aimer ce métier et de continuer à l'exercer avec plaisir. J'aime réfléchir avec eux, j'aime leur exigence et nos interactions. Alberto, Aude, Axel, Christophe, Denis, Eduardo, Emmanuelle, Julie, Julien, Maya, Sylvain : merci !

Mon équipe de recherche au LAAS peut aussi recevoir toute ma gratitude, pour l'opportunité première de travailler avec de nouveaux collègues, pour leur soutien dans le processus de recrutement, pour leur patience à me laisser approcher, apprivoiser et comprendre peu à peu leurs (et bientôt nos) sujets de recherche. Je loue aussi la liberté qu'ils m'ont laissée, l'amitié qu'ils m'ont témoignée et la qualité du cadre professionnel - au sein du LAAS tout entier - dans lequel j'ai pu évoluer. Je remercie aussi tout particulièrement Christèle pour son aide sans failles.

A special "thank you" goes to my hosts at Bristol University, David Wagg and Simon Neild. Besides welcoming me in their group, when I was landing out of the blue, they provided a very nice environment for me to work in the UK. I was pleased to start new research projects as bridges between our thematical domains of predilection and I am also grateful to have found the freedom I needed to write this manuscript. It was actually also a pleasure to meet and share nice lunches and coffee breaks with all these young researchers in our 2.80 open-plan office !

Ces dix dernières années de recherche sont indissociables de ma vie personnelle, de la naissance de mes deux enfants, Maxime et Arthur, de la vie que nous avons construit Alexandre et moi, chacun suivant l'autre quand il le faut, à Toulouse ou à Bristol, dans une certaine idée d'une vie toujours en mouvement. A tous ceux qui, de près ou de plus loin, gravitent dans ma sphère personnelle, parents, frère, soeur, amis, merci pour votre présence, votre lumière, et les couleurs que vous donnez à ma vie.

Lucie.

Table des matières

Préambule	1
I Quelques problèmes inverses dans des équations aux dérivées partielles	3
1 Détermination de potentiel dans diverses équations des ondes	9
1.1 Introduction et principaux résultats	10
1.1.1 Ondes en milieu discontinu	13
1.1.2 Ondes sur un réseau	15
1.1.3 Ondes semi-discrétisées et questions de convergence	17
1.2 Inégalité de Carleman globale	19
1.2.1 Enoncé	19
1.2.2 Démonstration	22
1.2.3 Autres opérateurs des ondes	27
1.2.4 Deux variantes de l'inégalité de Carleman usuelle	30
1.3 Démonstration de stabilité	32
1.3.1 Stabilité du problème inverse de détermination du potentiel	32
1.3.2 Stabilité pour les autres équations d'ondes	36
1.3.3 Stabilité logarithmique	36
1.4 Conséquences et perspectives	38
1.4.1 Questions de convergence	38
1.4.2 Algorithme de reconstruction	39
1.4.3 Perspectives	42
2 Problèmes inverses dans quelques équations dispersives ou paraboliques	47
2.1 Equation de Schrödinger discontinue	47
2.2 Equation de Kuramoto-Sivashinsky	50
2.3 Equation Korteweg-de-Vries	53
2.3.1 Stabilité du problème inverse	54
2.3.2 Éléments de démonstration	55
2.3.3 Perspectives	56
II Sur la commande robuste de systèmes de dimension infinie	57
3 Application à un système d'optique adaptative	65
3.1 Présentation du système	65
3.2 Modèle de dimension infinie	67
3.3 Simulations numériques	70

3.4	Perspectives	71
4	Contrôle actif des vibrations d'un système fluide/structure	73
4.1	Description du système	73
4.2	Modèle de dimension infinie	74
4.3	Modèle mécanique équivalent et commande robuste	78
4.4	Perspectives	80
5	Autres perspectives de recherche	81
5.1	Stabilisation d'équations aux dérivées partielles	81
5.2	Prise en compte de contraintes pour les systèmes edp	82
5.3	Identification de paramètres en biologie	82
5.4	Commande active de vibrations d'un câble incliné	83
	Conclusion	85
	Publications de l'Auteur	87
	Bibliographie	96

La lucidité est la blessure la plus rapprochée du soleil.
René Char, "Les feuillets d'Hypnos" 1946.

Préambule

*P*arce qu'une bonne moitié de mes recherches récentes trouvent racine dans mes travaux de thèse, je commencerai par présenter dans une première partie l'étude de problèmes inverses de détermination de coefficients dans diverses équations aux dérivées partielles. La deuxième partie de ce mémoire aura pour but de rassembler mes contributions sur l'étude de la commande robuste de systèmes de dimension infinie depuis la rupture thématique initiée lors de mon année de postdoctorat au LAAS. Ces deux axes de mon travail ont en commun leur objet générique, les équations aux dérivées partielles, et d'une certaine manière l'un est le dual de l'autre.

Je tiens à souligner que chacune des contributions théoriques ou plus appliquées qui sont évoquées dans ce préambule est le fruit d'un travail en collaboration avec des chercheurs, nommés au fil du document, avec qui les échanges scientifiques ont été particulièrement stimulants.

J'introduis la première partie de mon manuscrit par une présentation de l'état de l'art concernant les problèmes inverses de détermination de paramètres dans les principales équations d'évolution. Le premier chapitre, qui est également le plus long de ce document, s'articule autour de la démonstration de la stabilité du problème inverse de détermination du potentiel dans une équation des ondes posée en domaine borné. J'espère avoir trouvé, sous la forme de cette présentation d'un résultat relativement classique, la meilleure manière de décrire mes contributions à l'étude de ce type précis de problème inverse dans divers cas plus exotiques, où l'équation des ondes est posée avec des conditions de transmission sur une interface, posée sur un réseau 1-d, ou bien semi-discrétisée en espace. Le principal outil employé pour arriver aux résultats correspondants est à chaque fois une inégalité de Carleman appropriée. La présentation de la méthode, presque générique, utilisée pour en déduire la stabilité du problème inverse, est ensuite l'occasion de décrire un schéma numérique nouveau pour la résolution d'un problème inverse : un algorithme de reconstruction du potentiel dont la démonstration de la convergence est basée sur l'inégalité de Carleman elle-même. Participant aussi à cette étude du passage de résultats théoriques de stabilité à des applications numériques, un théorème de convergence du problème inverse lié à une équation semi-discrétisée vers la solution du problème inverse pour l'équation continue correspondante est également présenté.

Le second chapitre rassemble l'étude de problèmes inverses de détermination de paramètres pour quelques équations : parabolique (Kuramoto-Sivashinsky) et dispersives (Schrödinger et Korteweg-de-Vries). Les spécificités de ces équations au regard des questions qui nous intéressent sont mises en valeur à l'aide de la structure de démonstration donnée au chapitre précédent, et sont illustrées par des résultats détaillés.

Une des motivations de mes travaux en commande robuste est présentée en introduction de la deuxième partie de ce manuscrit. Elle consiste à pouvoir travailler, même avec des systèmes de dimension infinie (comme c'est le cas si l'on considère des équations aux dérivées partielles), dans un cadre de type 'espace d'état' et obtenir des résultats en commande robuste H_∞ similaires à ceux de la dimension finie. La représentation d'état de la commande robuste par retour de mesure, présentée avec la bibliographie correspondante, permet de formuler ces résultats de commande H_∞ garantissant une certaine robustesse de la stabilité du système en assurant le rejet des perturbations. C'est un cadre dans lequel il n'est pas toujours possible de rentrer mais qui permet alors de travailler en dimension infinie avec des outils similaires à ceux de la dimension finie plus usuelle en automatique.

Le troisième chapitre s'intéresse à l'étude d'un système d'optique adaptative qu'il sera possible de formuler en représentation d'état, permettant ainsi d'utiliser les résultats donnés auparavant. Le quatrième chapitre, par contre, présente la modélisation d'un système couplé fluide/structure que je n'ai pas su faire entrer dans le cadre approprié, mais qui a été étudié avec les outils usuels de la commande (placement de pôles, observateurs, contrôleurs d'ordre réduit) une fois projeté en dimension finie.

J'aimerais signaler que le choix de mettre en avant ces deux principales thématiques induit par ailleurs de faire l'impasse sur certains de mes travaux (e.g. [10, 13, 25]). Il ne faut pas y voir une réduction de la valeur de ces contributions dans le cadre de ma recherche : ces travaux ont permis des contacts humains et scientifiques qui sont importants pour moi et ont contribué à ma culture scientifique.

Un dernier chapitre développe plus spécifiquement les perspectives de recherche qui ne découlent pas directement des travaux précédemment présentés et qui constitueront une évolution différente de mes activités de recherche pour les quelques années à venir. La liste complète de mes publications est disponible à la fin de ce manuscrit et est codifiée différemment de la bibliographie. Les articles soumis à évaluation pour l'habilitation à diriger des recherches sont plus précisément les suivants : [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], [11, 12] et [14]

Enfin, bien que mon statut de chercheur ne m'impose pas d'activité d'enseignement, celle-ci m'a toujours beaucoup intéressée et mobilisée. Je m'y suis réellement impliquée tout au long de mes années de thèse, mais également dès que cela a été possible après mon recrutement au CNRS. Et s'il semble que le diplôme d'habilitation à diriger des recherches porte surtout sur les aspects *recherche* d'un dossier, je souhaite pourtant souligner ici l'importance que j'accorde (comme par exemple à l'époque au moment d'approcher mon futur directeur de thèse) à la dimension pédagogique de notre travail d'encadrant. Cela éclaire en partie, je l'espère, la manière dont je m'y suis prise pour rédiger ce document.

Première partie

Quelques problèmes inverses dans des équations aux dérivées partielles

Dans la modélisation d'un phénomène à l'aide d'équations aux dérivées partielles (edp), les paramètres physiques/mécaniques/biologiques qui interviennent ne sont pas nécessairement bien connus. Or la résolution de ces équations, qui est l'objet du *problème direct*, ne peut se faire que si toutes les données du système sont identifiées (conditions initiales et aux limites, coefficients intervenant dans les équations, domaine spatial...). Si ce n'est pas le cas, des informations supplémentaires, via des mesures expérimentales par exemple, sont alors nécessaires à leur détermination. La notion mathématique de *problème inverse* consiste en la possibilité de retrouver la valeur d'un paramètre à partir de mesures partielles (localisées, pendant un temps donné, éventuellement répétées) sur la solution du système considéré.

Il faut tout d'abord souligner que les problèmes inverses ont pour principale difficulté de ne pas être nécessairement bien posés au sens de Hadamard [Had53]. Un modèle mathématique de phénomènes physiques est considéré comme un problème bien posé s'il a les propriétés suivantes, ces notions prenant sens avec le choix des espaces et des topologies dans lesquels les données et la solution du problème évoluent :

1. Existence d'une solution ;
2. Unicité de la solution ;
3. Stabilité (la solution dépend continûment des données).

La démonstration de ces propriétés est tout l'objet de l'étude des problèmes inverses dans le champ de l'analyse des edp. Bien entendu, les enjeux liés à ces propriétés dépassent l'intérêt purement théorique et elles influencent les résultats possibles d'une résolution approchée ou numérique d'un problème inverse. En effet, l'étape suivante logique, et qui concerne plus spécifiquement les études à vocation applicative, consiste à étudier l'identification (ou reconstruction) proprement dite des paramètres. A titre d'exemple, indépendamment de la méthode numérique utilisée pour un problème de reconstruction, puisque les données réellement disponibles seront bruitées, le manque de stabilité empêcherait d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse. De même que l'absence d'unicité nécessiterait des informations a priori pour pouvoir faire un choix. On peut par ailleurs signaler que du point de vue des techniques utilisées et des problématiques rencontrées autour des edp, les problèmes inverses possèdent de nombreux points communs avec les questions de contrôlabilité.

Je me suis intéressée, depuis le tout début de ma thèse portant sur l'équation de Schrödinger [18], à la démonstration de l'unicité et de la stabilité de problèmes de détermination de paramètre posés sur des edp d'évolution. Je n'ai commencé que récemment à aborder le domaine de l'identification proprement dite, et cette question sera un peu évoquée dans ce mémoire, autour de l'équation des ondes avec les travaux [3, 4].

L'unicité de la solution d'un problème inverse de détermination de source ou de paramètre dans une edp est souvent démontrée en premier, comme il apparaîtra dans la bibliographie partielle que nous allons donner ici. La stabilité du problème inverse est cependant l'objectif affiché, plus difficile à atteindre. Dans les deux cas, les techniques les plus largement utilisées reposent sur des inégalités d'énergie dans des espaces de Sobolev à poids, appelées inégalités de Carleman et introduites dans [Car39] (pour y démontrer des propriétés d'unicité pour un problème de Cauchy d'un opérateur elliptique). Ces inégalités, qui ont été généralisées entre autre par Hörmander [Hör63] pour de larges classes d'opérateurs différentiels, ont de nombreuses applications dans l'étude des edp, et pas seulement en problèmes inverses. Par exemple, pour la démonstration de propriétés de continuation unique (voir [Zui83], [Tat96]), de stabilité de problème de Cauchy pour des équations hyperboliques [KK93] ou de contrôlabilité à zéro d'équations paraboliques [FI96], [LRL12]. Je ne tends visiblement pas à être exhaustive dans les références à l'utilisation de ces inégalités, tant le domaine est en constante expansion, mais il m'arrivera de mentionner quelques travaux en contrôle qui utilisent ce type d'approche pour les équations précises sur lesquelles j'ai travaillé. Le lecteur intéressé par une vue d'ensemble sur l'utilisation des inégalités de Carleman pour l'unicité et la stabilité de problèmes inverses de détermination de coefficients peut consulter les récents surveys [Kli13, Yam09] où de nombreuses références sont données.

Cette première partie de mon mémoire a pour vocation de résumer mes contributions, découlant de plusieurs collaborations, en matière de démonstration et d'utilisation d'inégalités de Carleman pour la stabilité de problèmes inverses posés sur des edp d'évolution de type hyperbolique (équations des ondes, [14, 9, 4, 3]), parabolique (équation de Kuramoto-Sivishinsky, [5]) ou dispersives (équation de Schrödinger [14], de Korteweg-de-Vries [2]). Les techniques basées sur ces inégalités connaissent un très fort développement ces quinze dernières années dans la communauté du contrôle et des problèmes inverses pour les edp, comme en témoignent les nombreuses manifestations scientifiques et publications internationales sur ces sujets.

Dans le cadre de l'étude des problèmes inverses, l'utilisation des inégalités de Carleman pour obtenir des résultats d'unicité et de stabilité remonte à l'article [BK81] (où les auteurs publient ensemble deux résultats similaires obtenus séparément !). Plusieurs éléments caractérisent une inégalité de Carleman. On peut au moins lister l'opérateur à laquelle elle se rapporte, le poids avec lequel elle est construite, les paramètres utilisés, et son caractère local (appliqué à des fonctions régulières à support compact) ou global (jusqu'à la frontière du domaine), qui conduit à un certain terme d'observation dans le second membre (localisé, frontière, ponctuel). Je n'ai pas exploré, loin s'en faut, les diverses possibilités que chacun de ces éléments offre mais cette remarque permet d'éclairer en partie la bibliographie qui se rapporte aux sujets qui m'intéressent. En premier lieu, les travaux de Hörmander [Hör63] permettent de construire des fonctions poids de Carleman pour une large classe d'opérateurs. Et le choix d'une fonction poids appropriée aux résultats visés est loin d'être trivial, comme on peut le déduire de la très large littérature disponible. On mentionnera cependant les travaux récents pour les opérateurs elliptiques et paraboliques [LRL12] qui explorent, dans le cadre d'inégalités locales, ce type de question.

Historiquement, ce sont des résultats d'unicité pour les problèmes inverses, démontrés à l'aide d'inégalités de Carleman locales, qui ont été obtenus en premier. Les auteurs déduisent des résultats d'unicité et des estimations de stabilité de type Hölder (voir [KT04], [Kli92], [Isa06] et les références qui y sont citées) à partir des inégalités en question. L'utilisation d'inégalités de Carleman globales (ce sera notre approche dans ce mémoire) permet de démontrer directement (et d'une certaine manière, plus efficacement) des estimations de stabilité de type Lipschitz comme présenté pour la première fois dans l'article [IY01a].

Il peut être utile ici de distinguer les résultats liés aux différentes classes d'edp qui m'intéressent. Je commence logiquement avec les équations hyperboliques. L'étude d'un problème inverse de détermination de potentiel dans diverses équations des ondes occupera le premier chapitre de mon mémoire et quelques détails techniques sur plusieurs références seront donnés au moment opportun. Je me contenterai ici de mentionner d'abord les travaux [PY96, PY97] et [Yam99] déduisant, pour le problème inverse de détermination de potentiel ou de source, la stabilité Lipschitzienne à partir de l'unicité (démontrée à l'aide d'une inégalité de Carleman locale) et d'une inégalité d'observabilité. Dans le chapitre qui suit, ces résultats sont améliorés (au sens des hypothèses de régularité sur les données) avec l'utilisation d'une inégalité de Carleman globale, et en partie rendus plus généraux à travers une mesure sur une partie du bord du domaine (voir aussi [DO06]). Il faut également citer les inégalités de Carleman (et leurs applications en contrôlabilité) démontrées dans [FI96, chap. IV], [Zha00] ou [Ima02], mais aussi les études de problèmes inverses un peu différents dans [IY01a, IY01b] (donnée frontière de type Neumann homogène, et observation intérieure ou frontière, stabilité Lipschitzienne) et [IY03] (donnée frontière de type Dirichlet homogène, et observation intérieure, stabilité de type Hölder). Attention, le changement de type de données au bord n'est pas du tout anecdotique dans la démonstration d'une inégalité de Carleman globale... On se doit aussi de mentionner le récent article [SU13] qui étudie la détermination de source ou de coefficient principal dans l'équation des ondes avec une approche basée sur les inégalités de Carleman combinées à des arguments géométriques et qui donne des conditions optimales d'unicité et de stabilité.

Les méthodes employées dans les articles de Imanuvilov et Yamamoto ont inspiré celle développée dans mes différents travaux sur les problèmes inverses. C'est ce que je détaille dans le chapitre 1 en présentant en particulier [14, 9, 4] et même si on évoque souvent la méthode Bukhgeim-Klibanov [BK81], ces travaux [IY98, IY01a, IY03] sont également fondateurs dans leur utilisation d'inégalités de Carleman globales pour la stabilité de problèmes inverses.

D'autres approches permettent par ailleurs d'obtenir des résultats de stabilité logarithmique (dont on s'inspirera dans [1]), pour, par exemple, pouvoir se contenter de mesures sur une portion arbitraire du bord du domaine [Bel04b]. On peut aussi évoquer les problèmes s'intéressant à la détermination de la partie principale [KY06], [IY09], ou bien à celle de plusieurs inconnues [YZ03] (source et une donnée initiale) ou [CY11] (potentiel et données initiales, avec plusieurs mesures).

Par ailleurs, lors de mes travaux de thèse, j'ai étudié l'équation de Schrödinger et en particulier le problème inverse de détermination du potentiel pour une équation donnée dans un domaine borné, avec donnée frontière de type Dirichlet et observation du flux de la solution (mesure de Neumann) sur une partie du bord assez grande [18]. Ce problème inverse est l'exacte réplique, pour une edp dispersive, de ce qui est décrit dans le chapitre 1 pour l'équation des ondes. Je tiens à mentionner concernant l'équation de Schrödinger l'article [MOR08] qui explore des fonctions poids dégénérées, les travaux [CG10, CCG08] sur une bande infinie et la récupération de la partie principale ou de deux paramètres avec une seule mesure, ainsi que les résultats de détermination d'un potentiel dans L^p [YY10]. Nous avons par ailleurs retravaillé la même question que dans [18], mais dans le cadre d'un coefficient principal discontinu, et présenté les résultats dans l'article [11], qui sera évoqué au chapitre 2. Toujours dans le cadre des edp dispersives, nous avons également étudié un problème de détermination de paramètre dans l'équation de Korteweg-de-Vries [2]. On peut à ce sujet citer les articles [GG08] et [Ros04] qui s'appuient, dans des objectifs de contrôlabilité, sur des inégalités de Carleman que nous n'avons pas su exploiter dans l'étude du problème inverse qui nous intéressait. On détaillera, toujours dans le chapitre 2 de ce mémoire, la manière dont nous avons pu gérer cette équation non-linéaire.

Avant de terminer cette nécessaire étape de description de l'état de l'art dans la thématique ou je travaille, il me faut évoquer, quoiqu'un peu plus rapidement, les cas elliptiques et paraboliques. On en trouvera une très bonne introduction dans le livre [Cho09]. Par ailleurs, le survey récent [Yam09] de Yamamoto sur l'utilisation des inégalités de Carleman pour les équations paraboliques intéressera le lecteur avisé, de même que le survey [ARRV09] autour de la stabilité du problème de Cauchy pour les équations elliptiques avec l'utilisation de l'inégalité des trois sphères. Je citerai aussi les travaux fondateurs [FI96] de Fursikov et Imanuvilov qui montrent comment des inégalités de Carleman globales, pour des opérateurs paraboliques, peuvent permettre de démontrer et quantifier des inégalités d'observabilité. Concernant l'étude des problèmes inverses, il est important de signaler que la grande majorité des résultats obtenus jusqu'à présent (sauf pour l'unicité e.g. [CGHR12]) repose sur au moins deux observations, l'une (habituelle) correspondant à la mesure partielle/locale de la solution pendant un temps donné, l'autre (spécifique aux équations paraboliques) étant la mesure de la solution dans tout le domaine spatial mais à un temps fixé strictement positif. Nous retrouvons cette situation dans l'article [5] sur l'équation de Kuramoto-Sivashinsky, comme auparavant pour l'équation de la chaleur, avec l'unicité dans [Isa06], ou le premier résultat de stabilité Lipschitz pour la détermination d'un terme source dans [IY98]. Nous pouvons rapidement dire ici que comparativement aux problèmes inverses paraboliques, il est possible, dans les problèmes inverses hyperboliques, d'obtenir des estimations de stabilité avec une seule mesure localisée en espace, parce qu'une équation hyperbolique peut être résolue tant en temps progressif qu'en temps rétrograde, ce qui nous permet de considérer des extensions des équations et de leurs solutions en temps négatifs. Concernant l'identification de la partie principale dans une équation parabolique toujours à l'aide d'inégalités de Carleman appropriées, on mentionnera enfin [BDLR07, BGLR07] pour le cas du coefficient de diffusion alors qu'il est discontinu et [YY09] dans le cas de plusieurs mesures.

On peut finalement évoquer brièvement les problèmes inverses où les observations considérées comme disponibles sont de type "Dirichlet to Neuman map". Cette approche, qui a tout d'abord émergé dans le cadre de la résolution de problèmes inverses posés pour des équations stationnaires (comme le problème de Calderón) [SU87, BU02] et bien qu'utilisant aussi des inégalités de Carleman, est suffisamment éloignée des approches que je vais présenter pour que je n'en dise pas plus. On pourra tout de même mentionner [Cho09] et les travaux et la bibliographie présentés dans [Fer11] sur ce type de sujets.

Chapitre 1

Détermination de potentiel dans diverses équations des ondes

Résumé : L'objectif poursuivi dans ce chapitre est de présenter le plus didactiquement possible mes diverses contributions à l'étude d'un problème inverse de détermination de potentiel dans l'équation des ondes. Ici, l'équation des ondes prendra le plus souvent sa forme la plus classique dans un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n mais nous aurons pour but de présenter et d'expliquer les enjeux liés aux cas plus délicats d'une équation des ondes avec conditions de transmission sur une interface interne connue [14], d'un réseau d'équations des ondes en dimension 1 d'espace [9], ou encore d'une équation des ondes semi-discrétisée [4]. La méthode générale sera donc présentée ici sur le cas d'école, étudié avec Jean-Pierre Puel dès 2001 (mais jamais publié à ma connaissance, quoique parfois présenté à des écoles d'été), avec la démonstration de l'inégalité de Carleman appropriée et son utilisation pour en déduire une inégalité de stabilité Lipschitzienne. Nous terminerons ce chapitre par des résultats liés à l'exploitation des inégalités de Carleman obtenues pour prouver la convergence du problème inverse [4], [1] et pour concevoir et démontrer la convergence d'un algorithme de reconstruction du potentiel [3].

Tous les chapitres de ce mémoire n'ont pas vocation à prendre la forme extensive de celui-là, mais j'ai trouvé ici l'occasion plaisante de présenter simplement la structure de démonstration de résultats parfois fastidieux à lire.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ et le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 . Soit Γ_0 une partie ouverte de $\partial\Omega$. On appelle ν le vecteur normal unitaire sortant sur $\partial\Omega$.

Nous nous intéressons au problème inverse de la détermination du potentiel $p(x)$, $x \in \Omega$, à partir de la mesure de la dérivée normale (ou flux) $\partial_\nu y = \nabla y \cdot \nu$ sur une partie appropriée $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, où y est la solution de l'équation des ondes classique

$$\partial_{tt}y - \Delta y + py = g \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T)$$

avec données de Dirichlet g^∂ à la frontière et données initiales compatibles (y^0, y^1) . Plus précisément, nous donnerons la démonstration de la stabilité Lipschitzienne de ce problème, et l'outil principal est une inégalité de Carleman globale appropriée, résultat aussi intéressant en lui-même (et par ses possibles autres applications, en contrôle par exemple).

1.1 Introduction et principaux résultats

Considérons l'équation des ondes avec potentiel p indépendant du temps

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x, t) - \Delta y(x, t) + p(x)y(x, t) = g(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T), \\ y(x, t) = g^\partial(x, t), & x \in \partial\Omega, t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \partial_t y(x, 0) = y^1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

sous les hypothèses suivantes : $y^0 \in H^1(\Omega)$, $y^1 \in L^2(\Omega)$, $p \in L^\infty(\Omega)$, $g^\partial \in H^1(\partial\Omega \times (0, T))$ et $g \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ sont connus et vérifient la condition de compatibilité $g^\partial(x, 0) = y^0(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Le problème de Cauchy lié à (1.1.1) est connu pour être bien posé [LLT86] (voir aussi [LM72]) et en utilisant une méthode par transposition (puisque nous avons des données non homogènes sur le bord du domaine) on peut aussi démontrer que la solution, notée $y[p]$, vérifie

$$y[p] \in C([0, T], H^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega)).$$

On pourra également lire le résultat classique d'existence et de régularité de la solution quand $g^\partial = 0$ dans le lemme 1.17 (voir aussi [Lio88]), qui sera utilisé dans la démonstration de la stabilité du problème qui va nous intéresser.

Ce chapitre est dédié à l'étude du problème inverse de détermination de paramètre suivant :

Est-il possible de retrouver le potentiel $p = p(x)$, $x \in \Omega$, à partir de la mesure de la dérivée normale $\partial_\nu y[p]|_{\Gamma_0 \times (0, T)}$ de la solution de (1.1.1), où Γ_0 est une partie de la frontière $\partial\Omega$ et T est le temps d'observation ?

Une connaissance basique de l'équation des ondes (et spécifiquement de la vitesse finie de propagation d'une onde) conduit à attendre naturellement des conditions restrictives sur la zone Γ_0 d'observation à la frontière et le temps minimal d'observation correspondant T .

L'objectif final est bien entendu celui de l'identification du paramètre considéré

Reconstruction : Comment retrouver le potentiel p dans Ω à partir de la mesure de $\partial_\nu y[p]|_{\Gamma_0 \times (0, T)}$?

Néanmoins, c'est principalement aux questions d'identifiabilité que nous allons répondre dans un premier temps. Le problème inverse considéré est non linéaire (contrairement à ceux où c'est un terme source qui est recherché) et nous donnerons une réponse, avec information *a priori*, à cette question. Nous allons ainsi supposer que p est un potentiel donné dans une boule de $L^\infty(\Omega)$, dont le rayon est fixé (mais pas nécessairement petit) et nous nous intéressons à la stabilité autour de ce p . En d'autres termes, p et $y[p]$ sont connus *a priori*, le potentiel q est inconnu et le premier objectif général sera de répondre aux questions naturelles suivantes :

Unicité : Sous quelles conditions géométriques sur Γ_0 et T , l'égalité $\partial_\nu y[q] = \partial_\nu y[p]$ sur $\Gamma_0 \times (0, T)$ implique-t-elle $q = p$ dans Ω ?

Stabilité : Sous quelles conditions géométriques sur Γ_0 et T , est-il possible d'estimer $\|q - p\|_{L^2(\Omega)}$ ou même une norme plus forte de $(q - p)$, par une norme appropriée de $\partial_\nu y[q] - \partial_\nu y[p]$ sur $\Gamma_0 \times (0, T)$?

Nous allons ici essentiellement détailler la démonstration d'une inégalité de stabilité Lipschitzienne donnée dans le Théorème 1.1, qui impliquera de fait l'unicité également. Mais avant de donner les détails de ce résultat et de sa démonstration, qui serviront de colonne vertébrale à la présentation des contributions [14, 9, 4], il est important de situer ces travaux dans leur contexte scientifique.

Ces questions concernant l'équation des ondes ont en effet déjà reçu des réponses positives dans le cas $\Gamma_0 = \partial\Omega$, depuis le résultat d'unicité de M.V. Klibanov dans [Kli92], les premiers résultats de stabilité Lipschitzienne sous des hypothèses fortes de régularité de J.-P. Puel et M. Yamamoto dans [PY97] (pour un problème de détermination de source) puis [Yam99] (pour la détermination du potentiel).

Pour citer précisément les résultats que nous allons démontrer dans ce chapitre, nous introduisons, pour $m \geq 0$, l'ensemble

$$L_{\leq m}^\infty(\Omega) = \{q \in L^\infty(\Omega), \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m\}.$$

Nous précisons également le domaine spatio-temporel d'observation :

$$\exists x_0 \notin \bar{\Omega} \quad \text{tel que} \quad \Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega; (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}; \quad (1.1.2)$$

$$T > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|. \quad (1.1.3)$$

Ces conditions d'observation géométrique sont souvent appelées *Gamma-conditions*. La condition géométrique sur Γ_0 (voir l'exemple donné dans la figure 1.1) est apparue pour la première fois dans l'article [Ho86], pour démontrer une inégalité d'observabilité. Les travaux de J.-L. Lions [Lio88] populariseront ces conditions par la suite (voir aussi [Oss01] pour une variante).

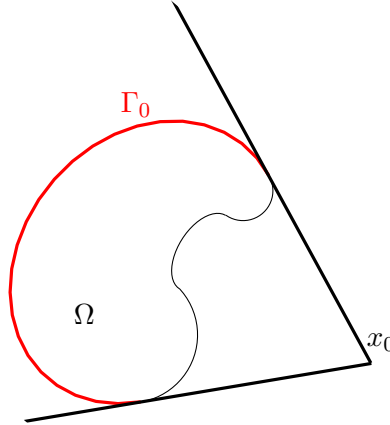


FIGURE 1.1 – Domaine Ω et observation sur une partie Γ_0 de la frontière

Théorème 1.1. Soient $m > 0$, $K > 0$ et $r > 0$. Soit p un potentiel appartenant à $L_{\leq m}^\infty(\Omega)$. Supposons que la solution $y[p]$ de l'équation (1.1.1) soit telle que

$$\|y[p]\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq K \quad (1.1.4)$$

et supposons que la donnée initiale y^0 vérifie également

$$\inf \{|y^0(x)|, x \in \bar{\Omega}\} \geq r. \quad (1.1.5)$$

Sous l'hypothèse que Γ_0 vérifie la condition géométrique (1.1.2) et que T soit tel que (1.1.3), alors pour tout $q \in L_{\leq m}^\infty(\Omega)$, la différence $\partial_\nu y[q] - \partial_\nu y[p]$ appartient à $H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))$ et il existe une constante $C = C(m, T, K, r) > 0$ telle que

$$\|\partial_\nu y[q] - \partial_\nu y[p]\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))} \leq C \|q - p\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.1.6)$$

$$\|q - p\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\partial_\nu y[q] - \partial_\nu y[p]\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))}. \quad (1.1.7)$$

L'inégalité (1.1.7) décrit la stabilité Lipschitz du problème inverse et (1.1.6) donne la dépendance continue de la dérivée de la solution par rapport au potentiel (et légitime le choix de l'observation).

Remarque 1.2. *En dimension 1 d'espace, la condition $y[p] \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ peut être uniformément garantie pour $p \in L^\infty_{\leq m}(\Omega)$ sous des contraintes de régularité supplémentaires sur (y^0, y^1) , g et g^∂ dans (1.1.1). En effet, si on suppose $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$, alors $(y^0, y^1) \in H^2 \times H^1(0, L)$, $g \in W^{1,1}(0, T; L^2(0, L))$ et $g^\partial(0), g^\partial(L) \in H^2(0, T)$, sous les conditions de compatibilité appropriées, alors la solution $\partial_t y[p]$ de (1.1.1) appartient à l'espace $C^0([0, T]; H^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$, avec des estimations ne dépendant que de m et des normes de (y^0, y^1) , g , g^∂ dans ces espaces. Par suite, grâce aux injections de Sobolev, $\partial_t y[p] \in L^2(0, T; L^\infty(0, L))$. Evidemment pour les dimensions n supérieures, les conditions de régularité sont de plus en plus exigeantes (au gré de l'injection de Sobolev utilisée) et les hypothèses de régularité nécessaires pour le potentiel considéré peuvent devenir plus contraignantes.*

Remarque 1.3. *La condition (1.1.5) sur y^0 implique, via la condition de compatibilité entre y^0 et g^∂ sur la frontière, que $|g^\partial(x, 0)| \geq r > 0$, $x \in \partial\Omega$ doit être vérifié.*

Remarque 1.4. *La condition temporelle d'observation (1.1.3) peut être remplacée par la plus précise $T > \sqrt{\sup_{x \in \Omega} |x - x_0|^2 - \inf_{x \in \Omega} |x - x_0|^2}$ comme on pourra le lire dans le paragraphe 1.3.1. Par ailleurs, on peut signaler que la référence [SU13] permet de donner des estimations optimales sur le temps d'observation dans le cadre de problèmes inverses de détermination de source ou de coefficient principal pour l'équation des ondes sans potentiel.*

La méthode de démonstration du Théorème 1.1 est basée sur une inégalité de Carleman globale et est très proche de l'approche employée dans [IY01a], qui s'intéresse à l'équation des ondes avec données frontière de type Neumann et observation localisée dans Ω pour un problème inverse de détermination de potentiel. Nous nous intéressons ici au même problème inverse (quoiqu'avec une observation sur une partie du bord seulement) que dans [Yam99], mais le présent travail nécessite moins de conditions de régularité sur la solution de l'équation $y[p]$ (qui doit être $W^{3,\infty}(\Omega \times (0, T))$) dans [Yam99]. La démonstration donnée dans [Yam99] est basée sur une inégalité de Carleman locale pour l'opérateur des ondes et un argument d'unicité-compacité permettant de conclure la stabilité à partir du résultat d'unicité [Kli92] et d'une inégalité d'observabilité [Kom94]. La méthode présentée ici permet la démonstration directe de la stabilité Lipschitz à partir de l'utilisation d'une inégalité de Carleman globale, démontrée pour l'occasion. C'est également la méthode utilisée dans nos travaux [14], [9] et [4]. Un autre avantage à l'utilisation de cette approche directe sera de reposer sur des hypothèses plus faibles sur les données et la solution de l'équation des ondes. Par ailleurs, c'est l'inégalité de Carleman démontrée qui contraindra la zone d'observation Γ_0 à répondre à certaines hypothèses géométriques, alors que la contrainte sur le temps T d'observation découlera de la méthode utilisée pour en déduire la stabilité. Cette dernière remarque sera cependant nuancée dans la section 1.2.4.

L'utilisation des inégalités de Carleman pour démontrer l'unicité dans des problèmes inverses a tout d'abord été introduite dans [BK81]. Sur les problèmes inverses posés sur des équations hyperboliques avec une seule observation, on peut évoquer [PY96] et [PY97], leur méthode reposant sur des résultats d'unicité obtenus à partir d'inégalités de Carleman locales (voir e.g. [Ima02], [Isa06]) et un argument d'unicité-compacité basé sur une inégalité d'observabilité (voir aussi [Zha00]). D'autres références étudient le problème inverse de détermination du potentiel pour l'équation des ondes avec des méthodes similaires à celle que nous allons détailler et utilisent aussi des inégalités de Carleman globales appropriées aux cas d'observations de type Dirichlet à la frontière [IY01b], ou d'observations à l'intérieur du domaine [IY01a]. Par ailleurs, on peut citer [IY03] ou [IY09], correspondant

à la détermination du coefficient principal. On peut également mentionner l'article [Bel04b] qui démontre un résultat de stabilité logarithmique quand il n'y a pas de contrainte géométrique sur la partie de frontière où l'on observe. Nous y reviendrons, en section 1.3.3, mais c'est un travail qui a en partie inspiré l'article récemment soumis [1].

L'étude du cas classique des ondes que nous venons de présenter se poursuit en Section 1.2. Nous présentons maintenant plus en détail nos contributions spécifiques. Je me suis intéressée avec divers collaborateurs à des modèles hyperboliques plus généraux, en regardant par exemple le cas d'une équation des ondes discontinue (domaine avec interface intérieure séparant deux zones de coefficient principal différent) [14], celui d'un réseau d'équations des ondes en dimension 1 d'espace [9] ou encore le cas d'une équation des ondes semi-discrétisées [4]. Les résultats obtenus sont présentés ci dessous.

1.1.1 Ondes en milieu discontinu

Soient Ω et Ω_1 deux domaines bornés de \mathbb{R}^2 de frontières $\partial\Omega$ et Γ_1 . Supposons que Ω_1 est simplement connexe, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ et posons $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ (voir illustration figure 1.2). On a alors $\partial\Omega_2 = \partial\Omega \cup \Gamma_1$. On suppose que le coefficient de propagation des ondes dans le domaine Ω est discontinu et s'écrit :

$$a(x) = \begin{cases} a_1 > 0 & \forall x \in \Omega_1, \\ a_2 > 0 & \forall x \in \Omega_2. \end{cases}$$

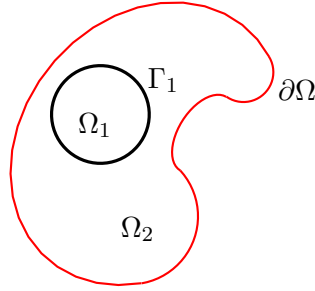


FIGURE 1.2 – Domaines Ω et Ω_1 , interface Γ_1 , et observation sur la frontière extérieure $\partial\Omega$.

Considérons l'équation des ondes en milieu discontinu suivante :

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x, t) - \operatorname{div}(a(x)\nabla y)(x, t) + p(x)y(x, t) = g(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T), \\ y(x, t) = g^\partial(x, t), & x \in \partial\Omega, t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \partial_t y(x, 0) = y^1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Si $y_0 \in H^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$, $p \in L^\infty(\Omega)$, $g^\partial \in H^1(\partial\Omega \times (0, T))$ et $g \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ sont connus et vérifient la condition de compatibilité $g^\partial(x, 0) = y_0(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$, alors le problème de Cauchy lié à (1.1.8) est bien posé et l'unique solution $y[p]$ vérifie

$$y[p] \in C([0, T]; H^1(\Omega)), \quad \partial_t y[p] \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \partial_\nu y[p] \in L^2(\partial\Omega \times (0, T)).$$

On peut par ailleurs réécrire l'équation (1.1.8) comme un système de deux équations des ondes à coefficients constants avec des conditions de transmission à l'interface Γ_1 . Nous ne donnons pas ces détails ici mais on peut renvoyer à [Lio88] et au chapitre 2, paragraphe 2.1.

Théorème 1.5. Soit Ω_1 un sous-domaine strictement convexe de Ω , de frontière Γ_1 de classe C^3 , et supposons que $a_1 > a_2 > 0$. Soient $m > 0$, $K > 0$ et $r > 0$ et soit p un potentiel appartenant à $L_{\leq m}^\infty(\Omega)$. Supposons que la donnée initiale y^0 et que la solution $y[p]$ de l'équation (1.1.8) vérifient

$$\inf \{|y^0(x)|, x \in (\Omega)\} \geq r \quad \text{et} \quad \|y[p]\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq K.$$

Alors il existe un temps $T_0 > 0$ tel que pour tout $T > T_0$ et pour tout $q \in L_{\leq m}^\infty(\Omega)$, $\partial_\nu y[q] - \partial_\nu y[p]$ appartient à $H^1(0, T; L^2(\partial\Omega))$ et il existe une constante $C = C(a_1, a_2, \Omega_1, \Omega, m, T, K, r) > 0$ telle que

$$\|q - p\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|a_2 \partial_\nu y[q] - a_2 \partial_\nu y[p]\|_{H^1(0,T;L^2(\partial\Omega))}. \quad (1.1.9)$$

Ce résultat de stabilité a été obtenu en collaboration avec Alberto Mercado et Axel Osses et est démontré en détail dans l'article [14]. Nous donnerons au cours de la démonstration du Théorème 1.1 correspondant au cas des ondes classiques quelques idées permettant l'étude de cette situation discontinue. On peut déjà remarquer qu'une observation sur la totalité de la frontière extérieure du domaine est nécessaire. Cela découle du fait que l'inégalité de Carleman permettant la gestion des termes qui apparaissent à l'interface Γ_1 repose sur une fonction poids dont le gradient s'annule à l'intérieur de Ω_1 . Deux inégalités de Carleman, correspondant à deux poids ayant leur point critique à deux endroits différents, seront alors sommées pour obtenir le résultat escompté.

Remarque 1.6. L'hypothèse sur l'ordre des coefficients a_j est illustrées par la Figure 1.3. Dans le dessin de gauche, où le coefficient de propagation est plus grand dans le domaine Ω_1 , d'après la loi de Snell tous les rayons intérieurs atteignent la frontière extérieure indépendamment de leur angle d'incidence. Inversement, dans le dessin de droite, certains rayons ayant un grand angle d'incidence restent piégés près de l'interface.

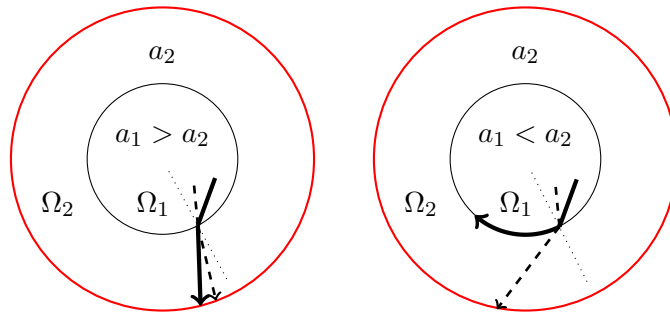


FIGURE 1.3 – Influence des coefficients de propagation sur les trajectoires de rayons optiques.

Remarque 1.7. Le temps minimal d'observation T_0 est estimé plus en détail dans [14] et dépend, comme attendu, des valeurs de a_1 , a_2 et de la taille de Ω_1 et de Ω_2 .

Plusieurs résultats en contrôle d'équations des ondes avec coefficients discontinus ont lieu d'être évoqués ici. Tout d'abord, la contrôlabilité exacte de [Lio88] pour une équation des ondes avec conditions de transmission : schématiquement, ce résultat indique que l'on peut contrôler les ondes dans un domaine discontinu (au sens de la vitesse de propagation des ondes) depuis la frontière extérieure si la vitesse est croissante d'une couche à l'autre en allant vers l'intérieur et si le domaine est étoilé. L'inégalité de Carleman globale que nous démontrons dans notre situation implique une inégalité

d'observabilité qui démontre un cas particulier de contrôlabilité similaire. En outre, si la monotonie de vitesse est inversée, il existe des solutions non contrôlables dont l'énergie reste concentrée près de l'interface [MZ02], [CZ02]. D'un autre coté, dans le cadre des équations paraboliques et elliptiques, on pourra citer [LRR10] qui démontre entre autre un résultat de contrôlabilité à zéro quel que soit le signe du saut à l'interface de discontinuité.

On ne considère dans l'article [14] que le cas d'un coefficient principal constant par morceaux (i.e. a_1 et a_2 constants), pour surmonter la difficulté principale qui se trouve essentiellement au niveau de la gestion des termes à l'interface de discontinuité. Cependant, il est possible de prendre en compte des coefficients $a_1(x)$ et $a_2(x)$ tels que leur trace à l'interface soit constante, et sous des hypothèses additionnelles sur ∇a_j similaires à celle de la référence [IY03] (il y a une remarque détaillée à ce sujet dans l'article [14]).

Par ailleurs, il est approprié de mentionner les inégalités de Carleman globales démontrées dans le cas de coefficients discontinus pour l'équation de la chaleur [DOP02] (utilisée dans [BY06] pour un problème inverse de détermination de source) et [BDLR07] ou enfin [BGLR07] (pour un problème inverse de détermination de coefficient de diffusion et de donnée initiale à partir de mesure sur une partie du bord). Nous parlerons au chapitre suivant de notre résultat [11] pour l'équation de Schrödinger avec coefficient principal discontinu.

1.1.2 Ondes sur un réseau

Soit \mathcal{R} un réseau étoilé à $n + 1$ branches e_j , de longueurs $l_j > 0$, $j \in \{0, \dots, n\}$, connectées à un noeud central que nous supposons être 0 (voir Figure 1.4). Pour toute fonction $v : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on pose

$$v_j := v|_{e_j} \text{ la restriction de } v \text{ à la branche } e_j,$$

$$[v]_0 := \sum_{j=0}^n v_j(0) \text{ le crochet de transmission au noeud } 0.$$

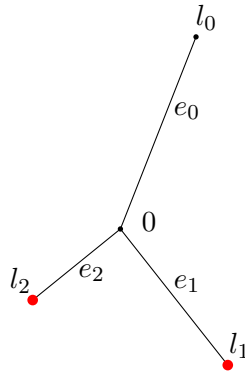


FIGURE 1.4 – Un réseau à 3 branches, avec observation en \bullet .

Plus précisément, nous considérons sur ce réseau 1-d plan une équation des ondes avec un potentiel éventuellement différent sur chaque branche :

$$\begin{cases} \partial_t^2 y(x, t) - \partial_x^2 y(x, t) + p(x)y(x, t) = g(x, t), & x \in \mathcal{R}, t \in (0, T), \\ y_j(l_j, t) = g_j^\partial(t), & \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \partial_t y(x, 0) = y^1(x), & x \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad (1.1.10)$$

sous l'hypothèse de continuité et la loi de Kirschoff au noeud central 0, données par

$$y_j(0, t) = y_i(0, t) = y(0, t), \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, \quad 0 < t < T, \quad (1.1.11)$$

$$[\partial_x y(t)]_0 = \sum_{j=0}^n \partial_x y_j(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (1.1.12)$$

Nous utilisons les notations

$$\begin{aligned} L^2(\mathcal{R}) &= \{v : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, v_j \in L^2(0, l_j), \forall j \in \{0, \dots, n\}\} \\ &\text{avec la norme } \|v\|_{L^2(\mathcal{R})}^2 = \int_{\mathcal{R}} |v|^2 dx = \sum_{j=0}^n \int_0^{l_j} |v_j(x)|^2 dx, \\ H_0^1(\mathcal{R}) &= \{v : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, v_j \in H^1(0, l_j), v_j(l_j) = 0, v_j(0) = v_i(0), \forall i, j \in \{0, \dots, n\}\}, \\ &\text{avec la norme } \|v\|_{H_0^1(\mathcal{R})}^2 = \int_{\mathcal{R}} |\partial_x v|^2 dx = \sum_{j=0}^n \int_0^{l_j} |\partial_x v_j(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Si $y^0 \in H^1(\mathcal{R})$, $y^1 \in L^2(\mathcal{R})$, $p \in L^\infty(\mathcal{R})$, $g^\partial \in H^1((0, T) \times \mathcal{R})$ et $g \in L^1(0, T; L^2(\mathcal{R}))$ sont connus et si $g_j^\partial(0) = y_j^0(l_j)$, le problème de Cauchy (1.1.10)-(1.1.12) est bien posé et on peut aussi démontrer que

$$y \in C([0, T], H^1(\mathcal{R})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathcal{R})).$$

Nous étudions le problème inverse de détermination du potentiel p sur chacune des $n+1$ branches du réseau étoilé à partir des seules mesures aux "feuilles" (voir figure 1.4), donc seulement n mesures à la frontière du réseau : $(y_{i,x}(l_i, \cdot))_{i=1..n}$ sur $(0, T)$, .

Théorème 1.8. Soient $m > 0$, $K > 0$ et $r > 0$. Soit p un potentiel appartenant à $L_{\leq m}^\infty(\mathcal{R})$. Supposons que la donnée initiale y^0 et que la solution $y[p]$ de (1.1.10)-(1.1.12) soient telles que

$$\inf \{|y^0(x)|, x \in \mathcal{R}\} \geq r \quad \text{et} \quad \|y[p]\|_{H^1(0, T; L^\infty(\mathcal{R}))} \leq K.$$

Alors pour tout $q \in L_{\leq m}^\infty(\mathcal{R})$, $j \in \{0, \dots, n\}$, $y_{j,x}[p](l_j) - y_{j,x}[q](l_j)$ appartient à $H^1(0, T)$ et il existe un temps $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$, il existe une constante $C = C(T, r, m, K, l_0, \dots, l_n) > 0$ telle que :

$$\|q - p\|_{L^2(\mathcal{R})} \leq C \sum_{j=1}^n \|\partial_x y_j[p](l_j) - \partial_x y_j[q](l_j)\|_{H^1(0, T)}. \quad (1.1.13)$$

Ce résultat a été obtenu en collaboration avec Emmanuelle Crépeau et Julie Valein et est démontré en détail dans l'article [9]. Nous donnerons au cours de la démonstration du résultat correspondant au cas des ondes classiques quelques éléments permettant l'étude de cette situation sur un réseau d'équation des ondes. L'idée principale est de démontrer une inégalité de Carleman unique valable sur la totalité du réseau et repose sur le choix d'une fonction poids, s'inspirant des travaux présentés dans [BDLR07], ne vérifiant étonnamment pas les conditions de transmission au noeud central, contrairement au choix qui est fait dans les cas de coefficients discontinus dans [14, 11] où le poids vérifie les conditions de transmission à l'interface de discontinuité du coefficient principal.

Remarque 1.9. De nouveau, le temps minimal d'observation T_0 dépend entre autre des valeurs de l_j caractérisant le réseau \mathcal{R} , mais la construction de la fonction poids de Carleman que nous détaillons plus loin n'en a pas permis l'optimisation (voir [9]).

Les résultats de contrôle et de stabilisation dans des réseau d'équations des ondes sont nombreux comme en témoignent entre autres [DZ06, Zua11] ou [LLS94]. Par exemple, à partir d'un seul noeud extérieur du réseau et à l'aide d'inégalités d'observabilité, contrôlabilité et stabilisabilité sont démontrées dans [Dág04] ou [VZ09].

Dans le champ des problèmes inverses pour les réseaux d'ondes, plusieurs approches existent, comme les questions de scattering dans [VCMS11], ou celles de *boundary control method* de [Bel04a, ALM10], pour la détermination de propriétés géométriques (nombre, longueurs, angles des branches) avec des résultats d'unicité essentiellement. Notre étude d'un problème de détermination de coefficient d'ordre 0 (le potentiel) par une observation unique pendant un temps T assez grand, en les n feuilles d'un réseau de type arbre, via une estimation de Carleman globale sur le réseau, est cependant tout à fait différente et nouvelle. Elle est à rapprocher du travail simultané [IPR12] pour le cas d'un réseau d'équation de la chaleur et de Schrödinger.

1.1.3 Ondes semi-discrétisées et questions de convergence

Le problème inverse continu, que nous avons présenté en détail, consiste à déterminer le potentiel dans une équation des ondes à partir d'une seule mesure du flux sur une partie du bord du domaine et de la connaissance des données initiales et de la donnée de Dirichlet sur la totalité du bord. C'est un problème inverse désormais bien compris et qui possède les propriétés attendues d'unicité et de stabilité : c'est le résultat donné dans le Théorème 1.1.

Cependant, ce résultat continu n'est pas suffisant pour justifier les simulations numériques utilisées pour calculer effectivement le potentiel. En collaboration avec Sylvain Ervedoza, je me suis intéressée à la question de la convergence de ce problème inverse, c'est-à-dire de la convergence du potentiel discret, solution d'un problème inverse posé sur une équation discrétisée (avec un schéma de type différences finies), vers le potentiel solution du problème inverse continu correspondant. Pour expliquer comment prouver un tel résultat de convergence, et dans le cadre de la dimension 1 d'espace dans [4], nous utilisons une approche basée sur le lemme de Lax (où consistance et stabilité impliquent la convergence du schéma numérique). L'étape la plus difficile est celle concernant la stabilité pour le problème inverse posé sur l'équation des ondes discrétisées, stabilité qui devra être montrée uniformément par rapport au pas du maillage de la discrétisation. Nous savions au départ qu'il faudrait gérer des phénomènes, déjà mis en évidence sur les problèmes de contrôle discret, dus à des ondes hautes fréquences créées par la discrétisation et qui se propagent mal (voir [IZ99, EZ11]). La clef de ce travail [4] repose donc sur la démonstration très technique d'une inégalité de Carleman pour l'équation des ondes semi-discrétisées, donnant ce résultat de stabilité que nous allons maintenant détailler. L'apparition d'un terme de type régularisation Tychonoff dans l'estimée de stabilité permet de résoudre de façon satisfaisante ces problèmes connus de convergence hautes fréquences.

Par ailleurs, nous pouvons évoquer les travaux récents de F. Boyer, F. Hubert et J. Le Rousseau [BHLR10a, BHLR10b, BR13] démontrant des inégalités de Carleman discrètes pour des équations paraboliques et elliptiques (semi-)discrétisées.

Dans l'article [4], nous avons ainsi commencé à nous intéresser à la question du calcul numérique d'une approximation du potentiel $p \in L_{\leq m}^{\infty}(0, 1)$ dont on suppose qu'il est borné en norme $L^{\infty}(0, 1)$ par la constante $m > 0$. Pour ce faire, posons $N \in \mathbb{N}$, choisissons le paramètre de discrétisation $h = 1/(N + 1)$ et considérons l'équation des ondes semi-discrétisée en dimension 1 d'espace :

$$\begin{cases} \partial_{tt}y_{j,h}(t) - (\Delta_h y_h)_j(t) + p_{j,h}y_{j,h}(t) = g_{j,h}, & t \in (0, T), j \in \{1, \dots, N\}, \\ y_{0,h}(t) = g_h^0(t), \quad y_{N+1,h}(t) = g_h^1(t), & t \in [0, T], \\ y_{j,h}(0) = y_{j,h}^0, \quad \partial_t y_{j,h}(0) = y_{j,h}^1, & j \in \{1, \dots, N\}, \end{cases} \quad (1.1.14)$$

où

$$(\Delta_h y_h)_j = \frac{1}{h^2}(y_{j+1,h} - 2y_{j,h} + y_{j-1,h})$$

est la définition de l'opérateur de Laplace discret de type différences-finie et où $(y_{j,h}^0, y_{j,h}^1)$ sont les données initiales discrètes (y^0, y^1) en $x_j = jh$; $g_h^i \in L^2(0, T)$, $i = 0, 1$ et $g_h \in L^1(0, T; \mathbb{R}^N)$ étant les données frontière et source échantillonnées.

Pour définir les versions discrètes des opérateurs et espace fonctionnels utiles, nous utilisons les notations ∂_h^+ , ∂_h^- , $L_h^2(0, 1)$, $L_h^\infty(0, 1)$:

$$(\partial_h^+ v_h)_j = (\partial_h^- v_h)_{j+1} = \frac{1}{h}(v_{j+1,h} - v_{j,h});$$

$L_h^2(0, 1)$ (respectivement $L_h^2([0, 1])$) est l'espace des fonctions discrètes $v_h = (v_{j,h})_{j \in \{1, \dots, N\}}$, (resp. $j \in \{0, \dots, N\}$) doté de la norme

$$\|v_h\|_{L_h^2(0,1)}^2 = \int_{(0,1)} |v_h|^2 = h \sum_{j=1}^N |v_{j,h}|^2 \quad \left(\text{resp. } \|v_h\|_{L_h^2([0,1])}^2 = \int_{[0,1]} |v_h|^2 = h \sum_{j=0}^N |v_{j,h}|^2 \right);$$

$L_h^\infty(0, 1)$ est doté de la norme $\|v_h\|_{L_h^\infty(0,1)} = \sup_{j \in \{1, \dots, N\}} |v_{j,h}|$.

Une approche naturelle pour le calcul d'une approximation du potentiel p dans le cadre de notre problème inverse consiste à chercher $p_h \in L_{h, \leq m}^\infty(0, 1)$ tel que la mesure discrète approche la mesure continue disponible, autrement dit :

$$\partial_t (\partial_h^- y_h[p_h])_{N+1}(t) \simeq \partial_t \partial_x y[p](t, 1), \quad t \in (0, T), \quad (1.1.15)$$

où $y_h[p_h]$ est la solution de (1.1.14) avec potentiel p_h et

$$(\partial_h^- y_h[p_h])_{N+1} = \frac{y_{N+1,h}[p_h] - y_{N,h}[p_h]}{h} = \frac{g_h^1(t)}{h} - \frac{y_{N,h}[p_h]}{h}$$

est l'approximation naturelle de la dérivée normale (ou flux) à la frontière $x = 1$. Evidemment, la signification de \simeq dans (1.1.15) aura besoin d'être clarifiée. La question est alors la suivante :

*La proximité des observations discrètes et continues (1.1.15) implique-t-elle $p_h \simeq p$?
Ou, pour être plus précis, peut-on garantir la convergence des potentiels discrets p_h vers le potentiel continu p quand $h \rightarrow 0$?*

C'est cette question de convergence qui nous intéresse et qui est démontrée en détail dans [4]. Pour résumer rapidement les résultats, nous y démontrons que la convergence en question est effectivement vérifiée, à condition qu'un terme de pénalisation (ou de renforcement de l'opérateur d'observation) soit introduit. La clé est une inégalité de stabilité pour le problème inverse discret et elle se démontre à l'aide de l'inégalité de Carleman discrète appropriée.

Nous reparlerons plus loin du résultat de convergence et ne donnons ici que son pilier principal, à savoir le résultat de stabilité obtenu.

Théorème 1.10. *Soient $m > 0$, $K > 0$ et $r > 0$. Soit p_h un potentiel appartenant à $L_{h, \leq m}^\infty(0, 1)$. Supposons que la donnée initiale y_h^0 et que la solution $y_h[p_h]$ de (1.1.14) vérifient*

$$\inf_{j \in \{1, \dots, N\}} |y_{j,h}^0| \geq r \quad \text{et} \quad \|y_h[p_h]\|_{H^1(0,T;L_h^\infty(0,1))} \leq K.$$

Alors si $T > 1$, il existe une constante $C = C(T, r, m, K) > 0$ indépendante de h telle que $\forall q_h \in L_{h, \leq m}^\infty(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \|q_h - p_h\|_{L_h^2(0,1)} &\leq C \left\| \partial_t(\partial_h^- y_h)_{N+1}[q_h] - \partial_t(\partial_h^- y_h)_{N+1}[p_h] \right\|_{L^2(0,T)} \\ &\quad + C \left\| h\partial_h^+ \partial_{tt} y_h[q_h] - h\partial_h^+ \partial_{tt} y_h[p_h] \right\|_{L^2(0,T; L_h^2(0,1))}. \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

Ce résultat de stabilité uniforme par rapport à la taille du maillage découle d'une inégalité de Carleman pour l'opérateur des ondes semi-discret contenu dans l'équation (1.1.14) que nous ne rappellerons pas dans ce mémoire. Les calculs en sont particulièrement fastidieux et sont présentés de façon la plus claire possible dans l'article [4]. On peut faire référence aux travaux [BHLR10a, BHLR10b, BHLR11] qui, les premiers, ont démontré des inégalités de Carleman pour opérateurs discrets. La méthodologie que nous utilisons dans [4] suit la leur. On pourra par ailleurs noter que si seul le cas de la dimension 1 d'espace est donné ici, celui d'un carré en dimension 2 est démontré dans [1] et donne lieu au résultat similaire attendu. Nous ne nous sommes pas aventurés à traiter le cas de maillages non uniformes comme c'est le cas dans [BHLR10b].

Enfin, sans nous étendre sur ce sujet plus largement évoqué dans l'article, le terme additionnel en $h\partial_h^+ \partial_{tt}$ qui apparait dans l'inégalité de stabilité est en parfait accord avec les remarques que l'on peut faire en contrôle d'équation des ondes discrétisées ou l'on sait que l'inégalité d'observabilité usuelle des ondes continues ne peut pas être vérifiée tel quel dans le cas discret.

Reprenons maintenant l'étude du cas des ondes classiques qui nous semble être le meilleur moyen de donner au lecteur une idée claire de la façon dont les divers résultats présentés ci-dessus peuvent être démontrés. L'inégalité de Carleman, et sa démonstration, seront données en premier lieu. Nous détaillerons ensuite quelques éléments d'explication des inégalités de Carleman des articles [14, 9, 4]. La preuve de la stabilité du problème inverse de détermination de potentiel est donnée après. Nous terminerons ce chapitre par deux applications de ces résultats de stabilité, à la convergence du problème inverse juste évoquée mais aussi à la convergence d'un algorithme de reconstruction.

1.2 Inégalité de Carleman globale

Dans cette section, nous allons démontrer une inégalité de Carleman globale pour l'opérateur

$$Lv = \partial_t^2 v - \Delta v$$

dans le domaine Ω avec données de Dirichlet homogènes sur le bord. On peut lire des inégalités de Carleman (locales) pour des fonctions régulières à support compact dans [Car39], [Hör63] et [Yam99]. Notre propos ici est de prendre en compte les fonctions sur la totalité du domaine d'étude Ω , comme dans les résultats de [IY01b], ou [IY03].

1.2.1 Enoncé

Soit la fonction $v \in L^2(-T, T; H_0^1(\Omega))$ telle que $Lv \in L^2(-T, T; L^2(\Omega))$, vérifiant $v(\pm T) = 0$ et $\partial_t v(\pm T) = 0$ dans Ω . L'opérateur des ondes avec potentiel L_p pour $p \in L_{\leq m}^\infty(\Omega)$ est défini par

$$L_p v = \partial_t^2 v - \Delta v + p v$$

et vérifie $L_p v \in L^2(-T, T; L^2(\Omega))$ dès que $Lv \in L^2(-T, T; L^2(\Omega))$.

Définissons maintenant $x_0 \notin \bar{\Omega}$, $\lambda > 0$ et $\beta \in (0, 1)$, et pour tout $(x, t) \in \Omega \times (-T, T)$, les fonctions poids :

$$\psi(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 + C_0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, t) = e^{\lambda\psi(x, t)} \quad (1.2.1)$$

où $C_0 > 0$ est choisi de manière que $\psi \geq 1$ sur $\Omega \times (-T, T)$ (voir illustration de la figure 1.5). On définit alors, pour $s > 0$,

$$w(x, t) = v(x, t)e^{s\varphi(x, t)},$$

et dans la foulée, l'opérateur conjugué

$$Pw = e^{s\varphi} L(e^{-s\varphi} w).$$

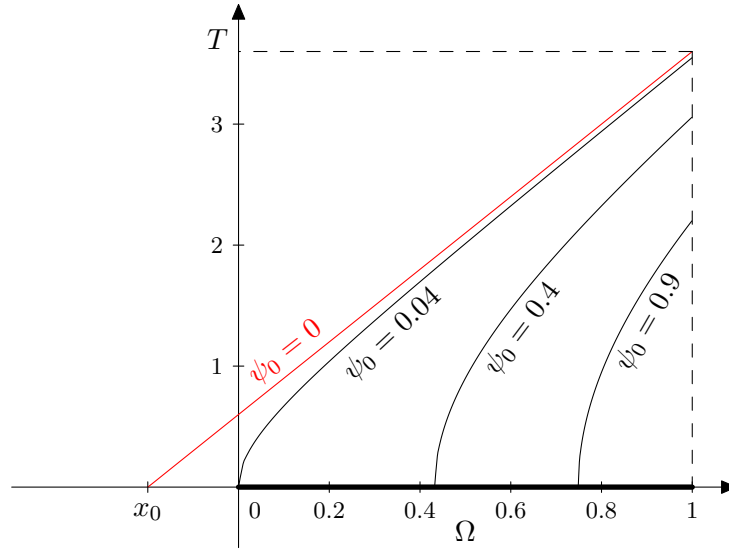


FIGURE 1.5 – Isovaleurs de la fonction poids $\psi_0(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2$, pour $\Omega = (0, 1)$, $x_0 = 0.2$, $\beta = 1/9$ et $T = (1 - x_0)/\sqrt{\beta}$.

Avant de donner formellement l'inégalité de Carleman que nous allons démontrer, explicitons l'opérateur P . On trouve facilement

$$\begin{aligned} Pw &= \partial_t^2 w - 2s\lambda\varphi(\partial_t w \partial_t \psi - \nabla w \cdot \nabla \psi) + s^2 \lambda^2 \varphi^2 w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) - \Delta w \\ &\quad - s\lambda\varphi w (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) - s\lambda^2 \varphi w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) \end{aligned}$$

et si on définit

$$\begin{aligned} P_1 w &= \partial_t^2 w - \Delta w + s^2 \lambda^2 \varphi^2 w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) \\ P_2 w &= (\alpha - 1)s\lambda\varphi w (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) - s\lambda^2 \varphi w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) \\ &\quad - 2s\lambda\varphi(\partial_t w \partial_t \psi - \nabla w \cdot \nabla \psi) \\ R w &= -\alpha s\lambda\varphi w (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

avec α choisi plus tard tel que $\frac{2\beta}{\beta + n} < \alpha < \frac{2}{\beta + n}$ (voir (1.2.8)), on obtient

$$P_1 w + P_2 w = Pw - R w.$$

Donnons maintenant cette inégalité de Carleman globale (ie “jusqu’à la frontière”), que nous allons démontrer en suivant la méthode de Imanuvilov [Ima02]. On peut lire d’autres versions d’inégalités de Carleman pour des équations hyperboliques dans [Zha00] et [Tat96].

Théorème 1.11. *Supposons qu’il existe $x_0 \notin \bar{\Omega}$ tel que*

$$\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega; (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}.$$

Alors pour tout $m > 0$, il existe $\lambda_0 > 0$, $s_0 > 0$ et une constante $M = M(m, s_0, \lambda_0, \Omega, x_0, \beta)$ telle que pour tout $p \in L_{\leq m}^\infty(\Omega)$, et tout $\lambda > \lambda_0$, $s > s_0$:

$$\begin{aligned} & s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|\partial_t v|^2 + |\nabla v|^2) dxdt + s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |v|^2 dxdt \\ & \quad + \int_{-T}^T \int_{\Omega} |P_1(e^{s\varphi} v)|^2 dxdt + \int_{-T}^T \int_{\Omega} |P_2(e^{s\varphi} v)|^2 dxdt \tag{1.2.3} \\ & \leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |L_p v|^2 dxdt + Ms\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} \varphi e^{2s\varphi} |\partial_\nu v|^2 d\sigma dt \end{aligned}$$

quel que soit $v \in H^1(-T, T; H_0^1(\Omega))$ vérifiant

$$\begin{cases} Lv \in L^2(\Omega \times (-T, T)), \\ v(x, \pm T) = \partial_t v(x, \pm T) = 0, \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

Nous ne donnons pas ici de références extensives aux inégalités de Carleman pour les équations hyperboliques, mais le lecteur intéressé peut consulter [Ima02] (ou [Kli13] pour une inégalité ponctuelle). On peut retrouver la démonstration de cette inégalité de Carleman dans l’article [3]. On en donne ci-après le détail comme support didactique d’explication des situations étudiées dans nos travaux [4, 9, 14].

Remarque 1.12. *L’inégalité (1.2.3) est uniforme en p dès que p appartient à $L_{\leq m}^\infty(\Omega)$. De plus, cette inégalité de Carleman est vérifiée pour un temps arbitraire T , mais sous la contrainte $v(\pm T) = \partial_t v(\pm T) = 0$ dans Ω .*

Remarque 1.13. *Comme je l’ai déjà évoqué en introduction de cette partie, une inégalité de Carleman pour un opérateur donné est intrinsèquement le fruit du choix de la fonction poids qu’elle utilise. Ce choix se fait en fonction des objectifs visés et de nombreux travaux témoignent des diverses possibilités. Les lister exhaustivement ici ne serait pas particulièrement constructif et je ne mentionnerai donc que brièvement les surveys [Yam09] et [LRL12] pour les cas paraboliques et elliptiques, [18, MOR08] pour Schrödinger et [Yam99, Ima02] pour les équations hyperboliques. Evidemment, des approches plus génériques questionnent la nécessité de deux paramètres λ et s , évitent aussi des choix trop tôt explicites et étudient les propriétés de pseudo-convexité du poids par rapport à l’opérateur (nécessaires à la bonne marche de la démonstration), mais ce n’est pas notre approche.*

Je me contenterai donc de signaler que le poids $\psi(x, t)$ que nous utilisons a le bon goût de s’inspirer, dans le cadre de l’étude de la contrôlabilité frontière de l’équation des ondes, du multiplicateur permettant de démontrer une inégalité d’observabilité appropriée (au sens où $\nabla\psi = (x - x_0)$, cf [Lio88], [Kom94]). Il est également construit pour que son gradient ne s’annule pas dans le domaine Ω (puisque $x_0 \notin \Omega$).

1.2.2 Démonstration

On démontrera (1.2.3) avec Lv dans le membre de droite au lieu de $L_p v$. Le résultat reste vrai pour L_p dès lors que $p \in L^\infty(\Omega \times (-T, T))$ comme on pourra le lire plus loin.

Nous avons commencé à expliquer qu'avec $w = e^{s\varphi}v$ on peut détailler $Pw = e^{s\varphi}Lv$ et écrire ainsi

$$\int_{-T}^T \int_{\Omega} (|P_1 w|^2 + |P_2 w|^2) dxdt + 2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} P_1 w P_2 w dxdt = \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Pw - Rw|^2 dxdt \quad (1.2.4)$$

Nous allons calculer et obtenir une borne inférieure pour le produit scalaire

$$\langle P_1 w, P_2 w \rangle_{L^2(\Omega \times (-T, T))} = \int_{-T}^T \int_{\Omega} P_1 w P_2 w dxdt.$$

En effet, l'objectif de cette démonstration est de minimiser ce terme croisé par des termes positifs et dominants, similaires à ceux du membre de gauche dans (1.2.3) et des termes frontières négatifs qui seront alors déplacés dans le membre de droite de l'inégalité. La preuve est divisée en 4 étapes pour en structurer la lecture.

Etape 1. Calculs explicites. On pose $\langle P_1 w, P_2 w \rangle_{L^2(\Omega \times (-T, T))} = \sum_{i,k=0}^3 I_{i,k}$ où $I_{i,k}$ est l'intégrale du produit du i -ème terme de $P_1 w$ et du k -ième terme de $P_2 w$. On utilise principalement des intégrations par parties et les propriétés de w comme $w(\pm T) = 0$, $\partial_t w(\pm T) = 0$ dans Ω et $w = 0$ sur $\partial\Omega \times (-T, T)$.

Puisque $\partial_t \Delta \psi = 0$, une intégration par parties en temps donne facilement

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{-T}^T \int_{\Omega} \partial_t^2 w ((\alpha - 1) s \lambda \varphi w (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi)) dxdt \\ &= (1 - \alpha) s \lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\partial_t w|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) dxdt \\ &\quad - \frac{(1 - \alpha)}{2} s \lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 \partial_t^2 \psi (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) dxdt \\ &\quad - \frac{(1 - \alpha)}{2} s \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 |\partial_t \psi|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) dxdt. \end{aligned}$$

De la même manière, puisque $\partial_t \nabla \psi = \mathbf{0}$, on a

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_{-T}^T \int_{\Omega} \partial_t^2 w (-s \lambda^2 \varphi w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2)) dxdt \\ &= s \lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\partial_t w|^2 (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) dxdt - s \lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 |\partial_t^2 \psi|^2 dxdt \\ &\quad - (2 + \frac{1}{2}) s \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 |\partial_t \psi|^2 \partial_t^2 \psi dxdt + \frac{s \lambda^3}{2} \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 |\nabla \psi|^2 \partial_t^2 \psi dxdt \\ &\quad - \frac{s \lambda^4}{2} \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 |\partial_t \psi|^2 (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) dxdt \end{aligned}$$

et en utilisant une intégration par parties en espace, on trouve

$$\begin{aligned}
I_{13} &= \int_{-T}^T \int_{\Omega} \partial_t^2 w (-2s\lambda\varphi(\partial_t w \partial_t \psi - \nabla w \cdot \nabla \psi)) \, dxdt \\
&= s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\partial_t w|^2 \partial_t^2 \psi \, dxdt + s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\partial_t w|^2 |\partial_t \psi|^2 \, dxdt \\
&\quad + s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\partial_t w|^2 \Delta \psi \, dxdt + s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\partial_t w|^2 |\nabla \psi|^2 \, dxdt \\
&\quad - 2s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi \partial_t w \partial_t \psi \nabla w \cdot \nabla \psi \, dxdt.
\end{aligned}$$

On calcule également

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \int_{-T}^T \int_{\Omega} -\Delta w ((\alpha - 1)s\lambda\varphi w (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi)) \, dxdt \\
&= -(1 - \alpha)s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\nabla w|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) \, dxdt \\
&\quad + \frac{(1 - \alpha)}{2} s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 \Delta \psi (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) \, dxdt \\
&\quad + \frac{(1 - \alpha)}{2} s\lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 |\nabla \psi|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) \, dxdt
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \int_{-T}^T \int_{\Omega} -\Delta w (-s\lambda^2 \varphi w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2)) \, dxdt \\
&= -s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\nabla w|^2 (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) \, dxdt \\
&\quad - \frac{s\lambda^2}{2} \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 \Delta (|\nabla \psi|^2) \, dxdt + \frac{s\lambda^3}{2} \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 \Delta \psi (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) \, dxdt \\
&\quad + \frac{s\lambda^4}{2} \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 |\nabla \psi|^2 (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) \, dxdt - s\lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |w|^2 \nabla \psi \cdot \nabla (|\nabla \psi|^2) \, dxdt
\end{aligned}$$

et en utilisant $w|_{\partial\Omega \times (-T, T)} = 0$, on obtient sur $\partial\Omega \times (-T, T)$, $\nabla w = (\partial_\nu w)\nu$ qui donne ainsi $|w|^2 = |\partial_\nu w|^2$ et permet de trouver, $D^2\psi$ étant symétrique,

$$\begin{aligned}
I_{23} &= \int_{-T}^T \int_{\Omega} -\Delta w (-2s\lambda\varphi(\partial_t w \partial_t \psi - \nabla w \cdot \nabla \psi)) \, dxdt \\
&= s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\nabla w|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) \, dxdt + 2s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\nabla \psi \cdot \nabla w|^2 \, dxdt \\
&\quad - 2s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi \partial_t w \partial_t \psi \nabla w \cdot \nabla \psi \, dxdt + s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\nabla w|^2 (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) \, dxdt \\
&\quad - s\lambda \int_{-T}^T \int_{\partial\Omega} \varphi |\partial_\nu w|^2 \nabla \psi \cdot \nu \, d\sigma dt + 2s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi D^2\psi |\nabla w|^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

On calcule enfin facilement

$$\begin{aligned} I_{31} &= \int_{-T}^T \int_{\Omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) ((\alpha - 1) s \lambda \varphi w (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi)) dx dt \\ &= (\alpha - 1) s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) dx dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_{32} &= \int_{-T}^T \int_{\Omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) (-s \lambda^2 \varphi w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2)) dx dt \\ &= -s^3 \lambda^4 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2)^2 dx dt, \end{aligned}$$

et quelques intégrations par parties permettent, puisque $\nabla(|\partial_t \psi|^2) = \mathbf{0}$, d'obtenir finalement

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_{-T}^T \int_{\Omega} s^2 \lambda^2 \varphi^2 w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) (-2s \lambda \varphi (\partial_t w \partial_t \psi - \nabla w \cdot \nabla \psi)) dx dt \\ &= s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) dx dt \\ &\quad + s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 (2\partial_t^2 \psi |\partial_t \psi|^2 + \nabla \psi \cdot \nabla (|\nabla \psi|^2)) dx dt \\ &\quad + 3s^3 \lambda^4 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2)^2 dx dt. \end{aligned}$$

Une fois les différents termes calculés rassemblés, on trouve

$$\int_{-T}^T \int_{\Omega} P_1 w P_2 w dx dt = I_w + I_{\partial_t, \nabla w} + I_{\partial \Omega} \quad (1.2.5)$$

où I_w contient tous les termes en $|w|^2$:

$$\begin{aligned} I_w &= 2s^3 \lambda^4 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2)^2 dx dt \\ &\quad + s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 (2\partial_t^2 \psi |\partial_t \psi|^2 + \nabla \psi \cdot \nabla (|\nabla \psi|^2)) dx dt \\ &\quad + \alpha s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2) dx dt + X_1, \end{aligned}$$

X_1 vérifiant, en utilisant la régularité de ψ et le fait que $\psi \geq 1$ implique $\lambda \leq e^{\lambda \psi} = \varphi$,

$$|X_1| \leq M s \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 dx dt ; \quad (1.2.6)$$

$I_{\partial_t, \nabla w}$ contient tous les termes en dérivées d'ordre 1 de w :

$$\begin{aligned} I_{\partial_t, \nabla w} &= 2s \lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\partial_t w|^2 \partial_t^2 \psi dx dt - \alpha s \lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\partial_t w|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) dx dt \\ &\quad + 2s \lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi (|\partial_t w|^2 |\partial_t \psi|^2 - 2\partial_t w \partial_t \psi \nabla w \cdot \nabla \psi + |\nabla \phi \cdot \nabla w|^2) dx dt \\ &\quad + 2s \lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi D^2 \psi |\nabla w|^2 dx dt + \alpha s \lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\nabla w|^2 (\partial_t^2 \psi - \Delta \psi) dx dt ; \end{aligned}$$

$I_{\partial\Omega}$ contient enfin le terme frontière :

$$I_{\partial\Omega} = -s\lambda \int_{-T}^T \int_{\partial\Omega} \varphi |\partial_\nu w|^2 \nabla\psi \cdot \nu(x) d\sigma dt.$$

Ici et par la suite, $M > 0$ correspond à une constante générique dépendant au moins de Ω mais indépendante de s et λ .

Étape 2. Minoration de chaque terme.

- Pour les termes d'ordre 0 en w , on observe que

$$I_w = s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 F_\lambda(\phi) |w|^2 dx dt + X_1$$

où

$$\begin{aligned} F_\lambda(\phi) &= 2\lambda(|\partial_t \psi|^2 - |\nabla\psi|^2)^2 + (2\partial_t^2 \psi |\partial_t \psi|^2 + \nabla\psi \cdot \nabla(|\nabla\psi|^2)) + \alpha(\partial_t^2 \psi - \Delta\psi)(|\partial_t \psi|^2 - |\nabla\psi|^2) \\ &= 32\lambda(\beta^2 t^2 - |x - x_0|^2)^2 - 16(\beta^3 t^2 - |x - x_0|^2) - 8\alpha(\beta + n)(\beta^2 t^2 - |x - x_0|^2) \\ &= 32\lambda(\beta^2 t^2 - |x - x_0|^2)^2 - 8(\alpha(\beta + n) + 2\beta)(\beta^2 t^2 - |x - x_0|^2) + 16(1 - \beta)|x - x_0|^2. \end{aligned}$$

Dès lors que $x_0 \notin \bar{\Omega}$, on a $16(1 - \beta)|x - x_0|^2 \geq c_* > 0$ et si on pose $X = \beta^2 t^2 - |x - x_0|^2$ on considère alors le polynôme $P(X) \geq 32\lambda X^2 - 8(\alpha(\beta + n) + 2\beta)X + c_*$ dont le minimum sera strictement positif si $\lambda > 0$ est choisi assez grand.

Par conséquent, λ_0 étant choisi suffisamment grand, il existe un $M = M(\lambda_0, x_0) > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$,

$$s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 F_\lambda(\phi) |w|^2 dx dt \geq M s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 dx dt.$$

Ainsi, utilisant également (1.2.6),

$$I_w \geq M s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 dx dt - M s \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 dx dt. \quad (1.2.7)$$

- En ce qui concerne les termes d'ordre 1, en $\partial_t w$ et ∇w , on observe que

$$\begin{aligned} 2s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi (|\partial_t w|^2 |\partial_t \psi|^2 - 2\partial_t w \partial_t \psi \nabla w \cdot \nabla \psi + |\nabla \psi \cdot \nabla w|^2) dx dt \\ = 2s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi (\partial_t w \partial_t \psi - \nabla w \cdot \nabla \psi)^2 dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

Considérant alors que les termes en $s\lambda$ doivent donner les termes dominants en $|\partial_t w|^2$ et $|\nabla w|^2$ et donc être strictement positifs, on devine que l'on doit imposer

$$2\partial_t^2 \psi - \alpha(\partial_t^2 \psi - \Delta\psi) > 0 \quad \text{et} \quad 2D^2\psi + \alpha(\partial_t^2 \psi - \Delta\psi) > 0.$$

Cela vient contraindre la valeur de la constante $\alpha > 0$ dans la définition (1.2.2) de $P_2 w$. On obtient, après calcul explicite, que $\beta \in (0, 1)$ et que α doit vérifier

$$\frac{2\beta}{\beta + n} < \alpha < \frac{2}{\beta + n}. \quad (1.2.8)$$

Il existe ainsi un $M = M(\lambda_0, x_0, \beta) > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$,

$$I_{\partial_t, \nabla w} \geq Ms\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\partial_t w|^2 dxdt + Ms\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\nabla w|^2 dxdt. \quad (1.2.9)$$

• Enfin, le terme frontière s'écrit aussi $I_{\partial\Omega} = -s\lambda \int_{-T}^T \int_{\partial\Omega} \varphi |\partial_\nu w|^2 (x - x_0) \cdot \nu(x) d\sigma dt$ et comme $\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega; (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$, on a plus précisément

$$I_{\partial\Omega} \geq -Ms\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} \varphi |\partial_\nu w|^2 d\sigma dt. \quad (1.2.10)$$

Si on rassemble maintenant (1.2.7), (1.2.9) et (1.2.10) dans (1.2.5), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \int_{\Omega} P_1 w P_2 w dxdt + Ms\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} \varphi |\partial_\nu w|^2 d\sigma dt + Ms\lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 dxdt \\ \geq Ms\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi (|\partial_t w|^2 + |\nabla w|^2) dxdt + Ms^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 dxdt. \end{aligned}$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Pw - R w|^2 dxdt &\leq 2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Pw|^2 dxdt + 2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Rw|^2 dxdt \\ &\leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Pw|^2 dxdt + Ms^2 \lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^2 |w|^2 dxdt, \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire, par suite de (1.2.4), que

$$\begin{aligned} s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi (|\partial_t w|^2 + |\nabla w|^2) dxdt + s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 dxdt \\ + \int_{-T}^T \int_{\Omega} (|P_1 w|^2 + |P_2 w|^2) dxdt \leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Pw|^2 dxdt + Ms\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} \varphi |\partial_\nu w|^2 d\sigma dt \\ + Ms\lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 dxdt + Ms^2 \lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^2 |w|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Il faut enfin choisir s_0 assez grand pour que les termes de la dernière ligne (hérités de X_1 et $|Rw|^2$) soient absorbés par le terme dominant en $s^3 \lambda^3 |w|^2 \varphi^3$ dès que $s > s_0$. Nous avons ainsi prouvé qu'il existe une constante $M = M(s_0, \lambda_0, \Omega, x_0, \beta)$ telle que

$$\begin{aligned} s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi (|\partial_t w|^2 + |\nabla w|^2) dxdt + s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |w|^2 dxdt \\ + \int_{-T}^T \int_{\Omega} |P_1 w|^2 dxdt + \int_{-T}^T \int_{\Omega} |P_2 w|^2 dxdt \\ \leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Pw|^2 dxdt + Ms\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} \varphi |\partial_\nu w|^2 d\sigma dt \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

$\forall s > s_0, \forall \lambda > \lambda_0.$

Etape 3. Retour à la variable v . Comme $w = ve^{s\varphi}$, on a aisément

$$\begin{aligned} e^{2s\varphi} |\partial_t v|^2 &\leq 2|\partial_t w|^2 + 2s^2 |\partial_t \varphi|^2 |w|^2 \text{ dans } \Omega \times (-T, T), \\ e^{2s\varphi} |\nabla v|^2 &\leq 2|\nabla w|^2 + 2s^2 |\nabla \varphi|^2 |w|^2 \text{ dans } \Omega \times (-T, T), \\ e^{2s\varphi} |\partial_\nu v|^2 &= |\partial_\nu w|^2 \text{ sur } \partial\Omega \times (-T, T), \end{aligned}$$

et par construction, $Pw = e^{s\varphi}Lv$. En notant que le poids φ est minoré par e^{λ_0} , l'inégalité (1.2.11) s'écrit alors

$$\begin{aligned} &s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|\partial_t v|^2 + |\nabla v|^2) dxdt + s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |v|^2 dxdt \\ &\quad + \int_{-T}^T \int_{\Omega} |P_1(e^{s\varphi}v)|^2 dxdt + \int_{-T}^T \int_{\Omega} |P_2(e^{s\varphi}v)|^2 dxdt \tag{1.2.12} \\ &\leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |Lv|^2 dxdt + Ms\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} \varphi e^{2s\varphi} |\partial_\nu v|^2 d\sigma dt. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration de l'inégalité de Carleman pour l'opérateur $L = \partial_t^2 - \Delta$.

Etape 4. Opérateur des ondes avec potentiel. L'inégalité de Carleman (1.2.3) pour l'opérateur $L_p = \partial_t^2 - \Delta + p$ avec $p \in L_{\leq m}^\infty(\Omega)$ est une conséquence directe de (1.2.12) en remarquant que sur $\Omega \times (-T, T)$,

$$|Lv|^2 \leq 2|L_p v|^2 + 2\|p\|_{L_{\leq m}^\infty(\Omega)} |v|^2 \leq 2|L_p v|^2 + 2m|v|^2.$$

En effet, choisissant s_0 (ou λ_0) à nouveau assez grand, on peut absorber le terme

$$2Mm \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |v|^2 dxdt$$

du membre de droite de (1.2.12) par un terme dominant du membre de gauche et obtenir (1.2.3) pour une nouvelle constante $M = M(m, s_0, \lambda_0, \Omega, x_0, \beta) > 0$. Cela termine la démonstration du Théorème 1.15.

1.2.3 Autres opérateurs des ondes

Nous ne rentrerons pas dans les détails de l'énoncé ni de la démonstration des inégalités de Carleman obtenues pour les autres opérateurs des ondes étudiés dans [14], [9] et [4] mais souhaitons néanmoins donner une idée plus précise des difficultés rencontrées.

Ondes discontinues

La principale difficulté de l'inégalité de Carleman démontrée dans [14] concerne la gestion des termes qui apparaissent à l'interface Γ_1 entre les domaines de conductivité a_1 et a_2 différentes. Pour schématiser, dans Ω_k , $k = 1, 2$, où l'on peut écrire un simple opérateur des ondes $\partial_t^2 - a_k \Delta + p$, de nouveaux termes frontières rassemblés dans un I_{Γ_1} (à l'image de $I_{\partial\Omega}$) apparaissent puisque la donnée de Dirichlet sur Γ_1 n'y est pas nulle. Quand on assemble les calculs faits sur Ω_1 et Ω_2 , on fait en sorte de minorer ces termes d'interface par 0 en utilisant à la fois le fait que $0 < a_2 < a_1$ et les propriétés de la fonction poids φ (qui va entre autre contenir une information liée aux conditions de transmissions qui découlent de l'opérateur discontinu). Plus de détails sont donnés dans le chapitre 2 au sujet de l'étude d'un cas similaire pour l'équation de Schrödinger discontinue.

La fonction poids $\varphi = e^{\lambda\psi}$ sur laquelle l'inégalité de Carleman repose est construite sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$ à partir de (pour $j, k = 1, 2$)

$$\psi|_{\Omega_j}(x, t) = \eta(x) \frac{a_k}{\rho(x)^2} |x - x_0|^2 - \beta t^2 + C_j \quad (x, t) \in \Omega_j \times (-T, T), j \neq k \quad (1.2.13)$$

où $\beta \in (0, 1)$, C_1 et C_2 sont choisis de manière appropriée, η est une fonction cut-off en espace d'un petit voisinage de $x_0 \in \Omega_1$ et $\rho(x)$ est la distance entre x_0 et Γ_1 sur la droite (x_0, x) . Un exemple est illustré par la figure 1.6. Les propriétés (détaillées dans la Proposition 1 de [14]) dont nous avons besoin pour la fonction ψ , spécifiquement au niveau de l'interface Γ_1 , imposent en effet un x_0 à l'intérieur de Ω_1 .

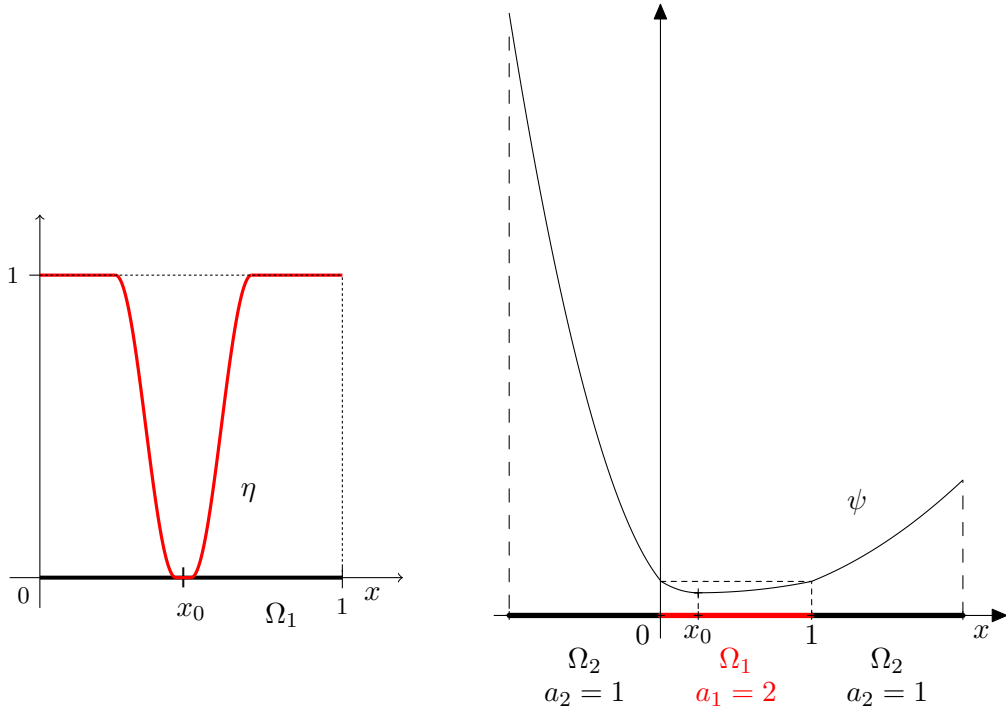


FIGURE 1.6 – Exemple de fonction cut-off η et de fonction poids ψ pour les ondes discontinues.

L'inégalité de Carleman obtenue contient alors, dans son membre de droite, un terme localisé autour de x_0 . On peut, en choisissant un autre point $x_0^* \in \Omega_1$ approprié, et le cut-off associé η^* , construire un autre poids ψ^* . La sommation de la nouvelle inégalité correspondant à ψ^* avec celle en ψ , permet d'absorber le terme local de l'une par un terme dominant du membre de gauche de l'autre.

On pourra remarquer que cette méthode a pour conséquence de faire figurer le flux de la solution observée sur la totalité de la frontière extérieure $\partial\Omega$ dans le second membre de l'inégalité de Carleman (donc comme mesure permettant de démontrer la stabilité du problème inverse).

Ondes sur un réseau

Dans le cadre d'équations des ondes 1-d sur un réseau étudié dans l'article [9], une unique inégalité de Carleman est démontrée à partir d'un poids ψ défini sur la totalité du réseau et soigneusement écrit pour gérer les conditions au noeud central et fonctionner sur chaque branche du réseau.

Schématiquement, cela prend la forme suivante :

La fonction poids $\varphi = e^{\lambda\psi}$ est construite sur chaque branche e_j du réseau à partir de (pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$)

$$\psi|_{e_j}(x, t) := \psi_j(x, t) = (x - x_j)^2 - \beta t^2 + M_j, \quad (x, t) \in (0, l_j) \times (-T, T)$$

où $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^-)^n$, $\beta \in (0, 1)$ et $T > 0$ sont tels que

$$\beta T \leq \frac{\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|}{2}$$

et où $M_0, M_1, \dots, M_n > 0$ sont choisies de manière appropriée pour avoir, $\psi_i(0, t) = \psi_j(0, t)$ et $\psi_j(x, t) \geq 1$, $\forall i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(x, t) \in (0, l_j) \times (-T, T)$, et pour que la matrice $(n+1) \times (n+1)$ symétrique $A_\psi(t) :=$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \psi_0(0) + \partial_x \psi_1(0) & \partial_x \psi_0(0) & \cdots & \partial_x \psi_0(0) & -\partial_x \psi_0(0)[\partial_x \psi]_0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & -\partial_x \psi_0(0)[\partial_x \psi]_0 \\ & & \ddots & \psi_{0,x}(0) & \vdots \\ & & & \partial_x \psi_0(0) + \partial_x \psi_n(0) & -\partial_x \psi_0(0)[\partial_x \psi]_0 \\ & & & & \Psi(t) \end{pmatrix}$$

soit définie positive, avec $\Psi(t) = \partial_x \psi_0(0)[\partial_x \psi]_0^2 + [(\partial_x \psi)^3]_0 - (\partial_t \psi)^2(0, t)[\partial_x \psi]_0$.

Dans la démonstration de l'inégalité de Carleman attendue, ce sont les termes frontières au noeud central 0 qui demandent un travail différent de ce qui a été présenté précédemment. La propriété de coercivité que vérifie la matrice $A_\psi(t)$:

$$\exists \alpha > 0, \forall t \in [-T, T], \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, (A_\psi(t)\xi, \xi) \geq \alpha|\xi|^2,$$

permet de montrer qu'il sont positifs et peuvent donc être ignorés. Le choix des points x_j (voir le Lemme 2.1 dans [9], il faut par exemple que les x_j , pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soient assez éloignés de 0) est quant à lui crucial pour pouvoir se contenter de n mesures aux extrémités extérieures du réseau de $n+1$ branches.

L'utilisation d'une fonction poids plus naturelle vérifiant les conditions de continuité de loi de Kirchoff au niveau du noeud central ne permet pas de satisfaire les inégalités requises pour démontrer l'estimation de Carleman dont nous avons besoin pour notre problème inverse. Nous proposons ainsi cette fonction poids ψ (avec une matrice A_ψ définie-positive) en nous inspirant d'un type de fonction poids introduit d'abord dans [BDLR07] pour l'équation de la chaleur avec un coefficient discontinu.

A notre connaissance, aucune inégalité de Carleman globale pour un réseau d'équation des ondes n'avait été écrite auparavant. On peut tout de même citer [IPR12] pour le cas d'un réseau d'équation de la chaleur et de Schrödinger, dont les auteurs travaillent cependant avec la somme de plusieurs inégalités de Carleman. En outre, de nombreux résultats de contrôlabilité sur des réseaux ne concernent que l'équation d'onde sans termes d'ordre inférieur (voir [LLS94, Sch92] par exemple), et ce n'est pas le cas ici. C'est l'un des points forts des inégalités de Carleman, et il est connu qu'une inégalité d'observabilité peut en être déduite assez facilement et donc conduire à des résultats de contrôlabilité exacte.

Ondes semi-discretisées

Le lecteur assidu pourra lire dans l'article [4] la démonstration d'une inégalité de Carleman discrète (ci-dessous) dans le cas de la dimension 1 d'espace. Celui de la dimension 2 est présenté, plus succinctement, dans l'article [1] récemment soumis. Nous donnons ici le résultat de [4], pour mieux en évoquer les particularités.

Théorème 1.14. Soit l'opérateur des ondes semi-discrètes $L_{ph}^h v_h = \partial_{tt} v_h - \Delta_h v_h + p_h v_h$ et soit $\beta \in (0, 1)$ le paramètre utilisé dans la définition (1.2.1) de la fonction poids φ .

Alors pour tout $m > 0$, il existe $s_0 > 0$, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ et une constante $M = M(s_0, \lambda, T, \varepsilon, \beta) > 0$ indépendante de $h > 0$ telle que pour tout $p \in L_{\leq m}^\infty(\Omega)$, $h \in (0, h_0)$ et tout $s \in (s_0, \varepsilon/h)$,

$$\begin{aligned} & s \int_{-T}^T \int_{(0,1)} e^{2s\varphi_h} |\partial_t v_h|^2 dt + s \int_{-T}^T \int_{(0,1)} e^{2s\varphi_h} |\partial_h^+ v_h|^2 dt + s^3 \int_{-T}^T \int_{(0,1)} e^{2s\varphi_h} |v_h|^2 dt \\ & \leq M \int_{-T}^T \int_{(0,1)} e^{2s\varphi_h} |L_{ph}^h v_h|^2 dt + Ms \int_{-T}^T e^{2s\varphi_h(1,t)} |(\partial_h^- v_h)_{N+1}|^2 dt \\ & \quad + Ms \int_{-T}^T \int_{(0,1)} e^{2s\varphi_h} |h \partial_h^+ \partial_t v_h|^2 dt \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

quel que soit v_h vérifiant

$$\begin{cases} L^h v_h \in L^2(-T, T; L_h^2(0, 1)), \\ v_{0,h}(t) = v_{N+1,h}(t) = 0 \\ v_h(\pm T) = \partial_t v_h(\pm T) = 0, \end{cases} \quad \text{sur } (-T, T),$$

avec $\varphi_{j,h}(t) = \varphi(jh, t)$ pour $j \in \{0, \dots, N\}$ et $\varphi_h(1, t) = \varphi(1, t)$.

Des commentaires détaillés sur cette inégalité de Carleman sont faits dans [4] et nous n'en donnerons ici qu'un aperçu choisi. La démonstration de cette inégalité est structurée comme celle du cas continu présenté précédemment mais les calculs en sont bien plus délicats. Le choix d'un maillage uniforme est lié à notre volonté de garder une certaine clarté dans les calculs, mais on pourra lire, par exemple dans [BHLR10a] concernant les équations elliptiques, le cas de familles de maillages réguliers.

Le fait que la constante M soit indépendante de la taille du maillage h est cruciale dans le cadre de la convergence du problème inverse que nous étudions. On peut à ce sujet faire le parallèle avec l'étude de la convergence du contrôle de l'équation des ondes où une inégalité d'observabilité uniforme en le paramètre de discrétisation est fondamentale pour empêcher les contrôles discrets de diverger (e.g. [EZ11]).

D'autre part, la limitation de la taille du paramètre s par ε/h est une hypothèse technique, qui n'est par ailleurs pas surprenante au regard des travaux [BHLR10a, BHLR10b]. En effet, si s est d'ordre $1/h$, alors $e^{s\varphi}$ est une fonction haute-fréquence d'ordre $1/h$ qui ne reflète plus la dynamique de l'opérateur des ondes continues.

Par comparaison et analogie avec (1.15), un nouveau terme est apparu dans le second membre de (1.2.14), et il ne peut pas être absorbé par le membre de gauche. Ce terme est dû à la création, par le processus de discrétisation donnant (1.1.14), de hautes fréquences parasites voyageant à une vitesse d'ordre h et qui ne peuvent donc pas être observées en temps fini uniformément par rapport à h . De fait, ce terme est nécessaire car son absence aurait pour conséquence une inégalité d'observabilité uniforme pour l'équation des ondes discrète, en contradiction avec les résultats dans [IZ99, Zua05, EZ11].

1.2.4 Deux variantes de l'inégalité de Carleman usuelle

Variante avec terme ponctuel en $t = 0$. En vue de démontrer l'inégalité de stabilité du problème inverse qui nous intéresse, une approche consiste à démontrer en amont une inégalité de Carleman adaptée à cette utilisation précise. C'est ce que je souhaite présenter ici, bien que cela ne soit pas exactement la présentation utilisée dans les articles [14, 9, 4]. On pourra par contre la lire dans [1].

Nous démontrons donc rapidement ici une inégalité de Carleman avec un terme en $\partial_t v(x, 0)$ dans le membre de gauche, sous la condition que $v(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. Le théorème prend la forme suivante :

Théorème 1.15. *Supposons qu'il existe $x_0 \notin \bar{\Omega}$ tel que $\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega; (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$. Alors pour tout $m > 0$, il existe $\lambda > 0$, $s_0 > 0$ et une constante $M = M(m, s_0, \lambda, \Omega, x_0, \beta)$ telle que pour tout $p \in L^\infty_{\leq m}(\Omega)$, et tout $s > s_0$:*

$$\sqrt{s} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |\partial_t v(0)|^2 dx \leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |L_p v|^2 dx dt + Ms \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu v|^2 d\sigma dt \quad (1.2.15)$$

quel que soit $v \in H^1(-T, T; H_0^1(\Omega))$ vérifiant

$$\begin{cases} v(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega, \\ Lv \in L^2(\Omega \times (-T, T)), \\ v(x, \pm T) = \partial_t v(x, \pm T) = 0, \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

Démonstration. On se place ici dans le même cadre que pour la démonstration de l'inégalité de Carleman (1.2.3) du Théorème 1.15. Supposant maintenant que $v(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, on a alors $w(x, 0) = e^{s\varphi(x, 0)} v(x, 0) = 0$ en plus de $w(x, \pm T) = \partial_t w(x, \pm T) = 0$.

Inspirée par [IY01b], la méthode que nous utilisons consiste à considérer l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_{-T}^0 \int_{\Omega} P_1 w(x, t) \partial_t w(x, t) dx dt$$

où $P_1 w$ est défini dans (1.2.2). D'une part, en utilisant les propriétés de w , on peut faire le calcul :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{-T}^0 \int_{\Omega} (\partial_t^2 w - \Delta w + s^2 \lambda^2 \varphi^2 w (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2)) \partial_t w dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t w(0)|^2 dx - \frac{s^2 \lambda^2}{2} \int_{-T}^0 \int_{\Omega} \partial_t (\varphi^2 (|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2)) |w|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

D'autre part, en utilisant que $2ab\sqrt{s} \leq a^2 + sb^2$ permet d'avoir

$$2\sqrt{s} |\mathcal{I}| \leq \int_{-T}^0 \int_{\Omega} |P_1 w|^2 dx dt + s \int_{-T}^0 \int_{\Omega} |\partial_t w|^2 dx dt$$

et en fixant $\lambda > \lambda_0$, on obtient, à partir de (1.2.16),

$$\sqrt{s} \int_{\Omega} |\partial_t w(0)|^2 dx \leq \int_{-T}^T \int_{\Omega} |P_1 w|^2 dx dt + s \int_{-T}^T \int_{\Omega} |\partial_t w|^2 dx dt + Ms^{5/2} \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^2 |w|^2 dx dt,$$

où $M > 0$ est une constante générique dépendant de $s_0, \lambda, \Omega, x_0$ et β , mais indépendante de $s > s_0$. L'utilisation de l'inégalité Carleman intermédiaire (1.2.11) démontrée précédemment, permet d'obtenir, la fonction poids φ étant majorée (par $e^{\lambda \|\psi\|_{L^\infty((-T, T) \times \Omega)}}$),

$$\begin{aligned} \sqrt{s} \int_{\Omega} |\partial_t w(0)|^2 dx &\leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Pw|^2 dx dt + Ms \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} \varphi |\partial_\nu w|^2 d\sigma dt \\ &\leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |Lv|^2 dx dt + Ms \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu v|^2 d\sigma dt. \end{aligned}$$

Les étapes 3 et 4 de la démonstration du Théorème 1.15 permettent de conclure la preuve de (1.2.15).

Nous détaillerons dans la section suivante comment la stabilité Lipschitzienne du problème inverse étudié peut se déduire de l'inégalité de Carleman 1.2.15 désormais à notre disposition.

Variante en temps grand. En réponse à la remarque 1.12, il est possible de démontrer des inégalités de Carleman prenant en compte plus explicitement la contrainte de la propagation à vitesse finie de l'information dans l'équation des ondes. L'idée repose sur la remarque que l'inégalité de Carleman démontrée précédemment cache dans la contrainte " $v(\pm T) = \partial_t v(\pm T) = 0$ dans Ω ", l'information qu'un temps minimal d'observation est nécessaire pour l'équation des ondes. On peut par exemple démontrer le résultat suivant (les détails sont donnés dans l'article [3]) :

Théorème 1.16. *Supposons qu'il existe $x_0 \notin \bar{\Omega}$ tel que $\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega; (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$. Supposons également que*

$$T > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|.$$

Définissons alors la fonction poids φ comme dans (1.2.1) avec β tel que $\sup_{x \in \Omega} |x - x_0| < \beta T$.

Alors pour tout $m > 0$, il existe $s_0 > 0$ et une constante $M = M(T, m, s_0, \Omega, x_0, \beta)$ telle que pour tout $p \in L_{\leq m}^\infty(\Omega)$, et tout $s > s_0$:

$$\begin{aligned} & s \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|\partial_t z|^2 + |\nabla z|^2) dxdt + s^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |z|^2 dxdt \\ & \leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |L_p z|^2 dxdt + Ms \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z|^2 d\sigma dt, \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

quel que soit $z \in L^2(-T, T; H_0^1(\Omega))$ vérifiant $Lz \in L^2(\Omega \times (-T, T))$ et $\partial_\nu z \in L^2(\partial\Omega \times (-T, T))$. Si de plus $z(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors on peut également écrire

$$\begin{aligned} & \sqrt{s} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |\partial_t z(0)|^2 dx + s \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|\partial_t z|^2 + |\nabla z|^2) dxdt + s^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |z|^2 dxdt \\ & \leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |Lz|^2 dxdt + Ms \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z|^2 d\sigma dt. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Ces derniers résultats, ainsi que leur méthode de démonstration utilisant des estimations d'énergie, permettront ensuite de démontrer la convergence d'un algorithme de reconstruction du potentiel. Nous reviendrons sur ce sujet dans le paragraphe 1.4.2.

1.3 Démonstration de stabilité

1.3.1 Stabilité du problème inverse de détermination du potentiel

Avant de donner la démonstration du Théorème 1.1, nous rappelons le lemme suivant résolvant le problème de Cauchy pour l'équation des ondes usuelle et donnant des estimations d'énergie et de trace de la solution.

Lemme 1.17. *Supposons que $p \in L_{\leq m}^\infty(\Omega)$, $g \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $u^1 \in L^2(\Omega)$ et considérons l'équation des ondes suivante*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) + p(x)u(x, t) = g(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T) \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Le problème de Cauchy est bien posé et l'équation (1.3.1) admet une unique solution faible

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$$

De plus, il existe une constante $C = C(\Omega, T, m) > 0$ telle que pour tout $t \in (0, T)$, l'énergie $E_u(t) = \|\partial_t u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ du système vérifie

$$E_u(t) \leq C \left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \quad (1.3.2)$$

et la dérivée normale de la solution $\partial_\nu u$ appartient à $L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$ et vérifie

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))} \leq C \left(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right). \quad (1.3.3)$$

Ce résultat est très classique et nous faisons référence à [LM72, Chapitre 3] pour la preuve de l'existence et unicité de la solution de l'équation (1.3.1). L'estimation (1.3.2) peut formellement se déduire de la multiplication de (1.3.1) par $\partial_t u$, puis par intégrations par parties de cette égalité sur $(0, T) \times \Omega$. Concernant l'estimation (1.3.3), on renvoie à [Lio88, Chapitre 1]. C'est un résultat de régularité cachée qui peut-être démontré en utilisant la méthode des multiplicateurs.

Forts de ces estimations et de l'inégalité de Carleman (1.2.3), nous pouvons maintenant travailler à la démonstration des inégalités (1.1.6) et (1.1.7). La méthode s'inspire de celle de Imanuvilov et Yamamoto, présentée dans [IY01b].

Comme le suggère la norme $H^1(0, T; L^2(\Gamma_0))$ de $\partial_\nu y[q] - \partial_\nu y[p]$ qui y apparaît, nous allons travailler sur $z = \partial_t (y[q] - y[p])$. La démonstration peut se découper en quelques étapes.

Etape 1. Estimations d'énergie. L'équation vérifiée par $z = \partial_t (y[q] - y[p])$ s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t^2 z(x, t) - \Delta z(x, t) + q(x)z(x, t) = (p - q)(x)\partial_t y[p](x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T) \\ z(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T) \\ z(x, 0) = 0, \quad \partial_t z(x, 0) = (p - q)(x)y^0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Si on applique le lemme 1.17 à cette équation, sous les hypothèses (faites dans le Théorème 1.1) que $p, q \in L^\infty(\Omega)$ et $y[p] \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ on peut écrire que l'unique solution vérifie

$$z \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$$

et l'énergie du système

$$E_z(t) = \|z(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\partial_t z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

est telle que pour tout $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} E_z(t) &\leq C\|(p - q)y^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|(p - q)\partial_t y[p]\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq C\|p - q\|_{L^2(\Omega)}^2 \|y[p]\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \leq CK^2 \|p - q\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

De plus, $\partial_\nu z \in L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$ avec l'estimation

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))} \leq C\|p - q\|_{L^2(\Omega)}^2 \|y[p]\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \leq CK^2 \|p - q\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

qui donne ainsi $\partial_\nu y[q] - \partial_\nu y[p] \in H^1(0, T; L^2(\Gamma_0))$ et démontre l'inégalité (1.1.6). D'une certaine manière, nous avons ainsi donné un sens à la mesure du flux de la solution au bord du domaine, information sur laquelle notre problème inverse est basé.

Etape 2. Choix de la fonction poids. Ayant supposé que $T > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|$ dans (1.1.3), on peut choisir $\beta \in (0, 1)$ et $\eta > 0$ tels que la fonction poids $\psi(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 + C_0$ définie en (1.2.1) vérifie

$$\begin{cases} \psi(x, 0) > C_0, & \forall x \in \Omega, \\ \psi(x, t) \leq C_0, & \forall (x, t) \in \Omega \times ([-T, -T + \eta] \cup [T - \eta, T]). \end{cases}$$

En particulier,

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) \geq e^{\lambda C_0}, & \forall x \in \Omega, \\ \varphi(x, t) \leq e^{\lambda C_0}, & \forall (x, t) \in \Omega \times ([-T, -T + \eta] \cup [T - \eta, T]), \end{cases} \quad (1.3.6)$$

et dans la suite, on fixe $\beta \in (0, 1)$ tel que $T\sqrt{\beta} > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|$, λ_0 et s_0 tels que l'inégalité de Carleman (1.2.3) puisse être appliquée.

Remarque 1.18. *Sous l'hypothèse temporelle un peu moins contraignante*

$$T^2 > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|^2 - \inf_{x \in \Omega} |x - x_0|^2,$$

on peut également choisir β et η tels que les mêmes résultats soient valables. Cela représente une petite amélioration par rapport à la condition usuelle qui ne sera par exemple pas possible dans le cadre de l'algorithme présenté plus loin (qui s'appuie sur le Théorème 1.16 ou l'hypothèse donnée ne peut pas être remplacée par celle ci).

Etape 3. Extension en temps et troncature. Nous étendons maintenant le système (1.3.4) sur $(-T, T)$ de manière paire en posant $z(x, t) = z(x, -t)$ pour tout $(x, t) \in \Omega \times (-T, 0)$. On étend aussi $\partial_t y[p]$ par parité et on garde les mêmes notations pour le nouveau problème. Par suite,

$$z \in C([-T, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([-T, T]; L^2(\Omega)) \text{ et } \partial_t y[p] \in L^2(-T, T; L^\infty(\Omega)).$$

Notre objectif est d'appliquer l'inégalité de Carleman à notre disposition dans le Théorème 1.15 de manière à pouvoir estimer une norme de $(p - q)$ par une norme de $\partial_\nu y[q] - \partial_\nu y[p]$. La solution z de l'équation (1.3.4) étendue à $(-T, T)$ est un bon candidat mais elle n'est pas nulle en temps $t = \pm T$. Nous pourrions appliquer la nouvelle inégalité de Carleman du Théorème 1.16 mais nous allons utiliser, comme c'est le cas dans [14, 9, 4], la méthode plus usuelle basée sur (1.2.3) et donc faire appel à une fonction cut-off en temps calibrée pour fonctionner avec le poids ψ et le choix de η dans l'étape précédente.

On définit ainsi la fonction cut-off $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$, illustrée par la figure 1.7, telle que

$$\begin{cases} \chi(\pm T) = \chi'(\pm T) = 0 \\ \chi(t) = 1 \end{cases} \quad \forall t \in [-T + \eta, T - \eta] \quad (1.3.7)$$

et on pose $v = \chi z$ qui vérifie le système :

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v + qv = \chi(p - q)\partial_t y[p] + \chi''z + 2\chi'\partial_t z, & \text{dans } \Omega \times (-T, T) \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (-T, T) \\ v(0) = 0, \quad \partial_t v(0) = (p - q)y^0, & \text{dans } \Omega \\ v(\pm T) = 0, \quad \partial_t v(\pm T) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.3.8)$$

On peut remarquer que $(p - q)$, que l'on veut estimer, se trouve maintenant à la fois dans le terme source et dans la donnée initiale.

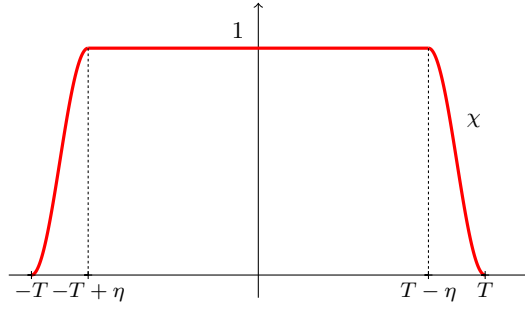


FIGURE 1.7 – Fonction cut-off χ .

Étape 4. Utilisation de l'inégalité de Carleman. Nous appliquons maintenant l'inégalité de Carleman (1.2.15) - adaptée à notre objectif - à la solution v de (1.3.8). On a alors

$$\sqrt{s} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 |y^0|^2 dx \leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |L_q v|^2 dx dt + Ms \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu v|^2 d\sigma dt \quad (1.3.9)$$

Par ailleurs, le terme source de l'équation (1.3.8) donne

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |L_q v|^2 dx dt \\ & \leq 2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\chi(p - q) \partial_t y[p]|^2 dx dt + 2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|\chi' \partial_t z|^2 + |\chi'' z|^2) dx dt \end{aligned}$$

et les propriétés (1.3.7) de la fonction cut-off χ et (1.3.6) du poids φ permettent d'écrire

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |L_q v|^2 dx dt \\ & \leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |p - q|^2 |\partial_t y[p]|^2 dx dt + M \left(\int_{-T}^{-T+\eta} + \int_{T-\eta}^T \right) \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|\partial_t z|^2 + |z|^2) dx dt \\ & \leq M \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 |\partial_t y[p]|^2 dx dt \\ & \quad + M \left(\int_{-T}^{-T+\eta} + \int_{T-\eta}^T \right) \int_{\Omega} e^{2se^{\lambda C_0}} (|\partial_t z|^2 + |z|^2) dx dt \\ & \leq MK^2 \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 dx + Me^{2se^{\lambda C_0}} \left(\int_{-T}^{-T+\eta} + \int_{T-\eta}^T \right) E_z(t) dt. \end{aligned}$$

L'estimation d'énergie (1.3.5) et, de nouveau, les propriétés (1.3.6) de φ , donnent enfin

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |L_q v|^2 dx dt & \leq MK^2 \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 dx + M\eta K^2 e^{2se^{\lambda C_0}} \int_{\Omega} |p - q|^2 dx \\ & \leq M \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 dx. \end{aligned}$$

Si on rassemble cette dernière estimation avec (1.3.9), on a démontré que

$$\sqrt{s} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 |y^0|^2 dx \leq M \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 dx + Ms \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu v|^2 d\sigma dt.$$

L'hypothèse (1.1.5) sur y^0 permet alors d'obtenir

$$\int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 dx \leq \frac{M}{\sqrt{s}} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 dx + M\sqrt{s} \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_{\nu} v|^2 d\sigma dt,$$

et le choix d'un paramètre s assez grand (i.e. tel que $(1 - M/\sqrt{s}) > 0$) donne finalement

$$\int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p - q|^2 dx \leq M\sqrt{s} \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_{\nu} v|^2 d\sigma dt.$$

La démonstration de l'inégalité de stabilité Lipschitzienne (1.1.7) du Théorème 1.1 se termine par le retour aux variables z puis y , avec la majoration de φ sur $\Gamma_0 \times (0, T)$ et la minoration de $\varphi(0)$ sur Ω , puisqu'alors on trouve

$$\int_{\Omega} |p - q|^2 dx \leq M\sqrt{s} \int_0^T \int_{\Gamma_0} |\partial_{\nu} \partial_t (y[p] - y[q])|^2 d\sigma dt.$$

1.3.2 Stabilité pour les autres équations d'ondes

Les inégalités de stabilité Lipschitzienne décrites dans les Théorèmes 1.5, 1.8 et 1.10 que l'on peut lire dans [4, 9, 14] (mais aussi dans [1]) se démontrent à partir des inégalités de Carleman sans changement structurel majeur dans la démonstration qui vient d'être présentée. Nous renvoyons le lecteur aux articles correspondant pour plus de détails techniques et remarques spécifiques.

1.3.3 Stabilité logarithmique

Dans le cadre de l'étude de ce problème inverse de détermination de potentiel, il est intéressant de tenter de démontrer des résultats de stabilité en s'affranchissant de la contrainte géométrique sur le domaine d'observation frontière. C'est chose faite dans l'article [Bel04b] où M. Bellassoued démontre un résultat de stabilité logarithmique sans condition géométrique pour la zone d'observation Γ_0 . Ce résultat est rappelé ici.

Théorème 1.19 (voir [Bel04b]). *Soient $m > 0$, $r > 0$ et \mathcal{O} un ouvert inclu dans Ω tel que $\partial\Omega \subset \overline{\mathcal{O}}$. Dans l'équation (1.1.1), on suppose que $g = 0$, $g^{\partial} = 0$, $(y^0, y^1) \in H^3(\Omega) \times H^2(\Omega)$ avec les conditions de compatibilité appropriées et on suppose que $\inf_{x \in \overline{\Omega}} |y^0(x)| \geq r$, et que le potentiel p appartient à $\Lambda(Q, m)$ où*

$$\Lambda(Q, m) = \{p \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad \text{tel que } p|_{\mathcal{O}} = Q \text{ et } \|p\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq m\}.$$

Alors pour un temps $T > 0$ assez grand, il existe $C > 0$ tel que pour tout $q \in \Lambda(Q, m)$,

$$\|p - q\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\log \left(2 + \frac{C}{\|\partial_{\nu} y[p] - \partial_{\nu} y[q]\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))}} \right) \right]^{-1/2}.$$

La démonstration utilise une transformation de Fourier-Bros-Iagoniltzer (F-B-I), qui permet essentiellement de se ramener à une équation elliptique, et repose ensuite sur une inégalité de Carleman elliptique et une approche inspirée de [Rob95].

L'objectif d'un travail récemment soumis avec Axel Osses et Sylvain Ervedoza [1] est d'établir des résultats de stabilité pour l'approximation semi-discrète de l'équation des onde dans un rectangle lors de la détermination d'un potentiel à partir de la connaissance du flux de la solution sur une

partie de la frontière *avec* ou *sans* conditions d'observation géométriques. L'analyse est basée sur deux types d'estimations de Carleman : celle pour l'opérateur des ondes semi-discret en dimension 2 d'espace d'une part, généralisant ainsi les résultats de [4], et celle pour l'opérateur elliptique semi-discret de [BHLR10a] d'autre part, assortie de l'utilisation de la transformation F-B-I. La méthode utilisée s'inspire en partie de celle présentée dans [Bel04b] mais avec une transformation F-B-I plus fine, issue de [LR97, Phu10]. Les résultats de stabilité que nous démontrons pour ces approximations semi-discrètes permettent ensuite d'obtenir des résultats de convergence pour le problème inverse correspondant, en partie analogues à ceux de [4].

Nous ne donnons ici que la contrepartie discrète du Théorème 1.19 donné précédemment :

Théorème 1.20 (Stabilité logarithmique semi-discrète). *Soient*

$$\Omega = (0, 1)^2, \quad \Gamma_0 \subset \{1\} \times (0, 1), \quad \Gamma_1 = (\{1\} \times (0, 1)) \cup ((0, 1) \times \{1\}).$$

et supposons l'existence d'un ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$ tel que

- *\mathcal{O} contienne un voisinage de Γ_1 dans Ω .*
- *le potentiel q_h est connu sur $\partial\Omega_h$ et dans \mathcal{O}_h , où il vaut $Q_h \in L_h^\infty(\mathcal{O}_h)$.*

Soit q_h^a dans la classe $\Lambda_h(Q_h, m)$ définie pour $Q_h \in L_h^\infty(\mathcal{O}_h)$ et $m > 0$ par

$$\Lambda_h(Q_h, m) = \{q_h \in L_h^\infty(\Omega_h), \text{ t.q. } q_h|_{\mathcal{O}_h} = Q_h \text{ et } \|q_h\|_{L_h^\infty(\Omega_h)} \leq m\}.$$

Soient $\alpha_0 > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$. Supposons aussi que $y_h^0 \in H_h^1(\Omega_h)$ et que la solution $y_h[q_h^a]$ de

$$\begin{cases} \partial_{tt}y_h - \Delta_h y_h + q_h^a y_h = f_h & \text{in } (0, T) \times \Omega_h, \\ y_h = f_{\partial, h} & \text{on } (0, T) \times \partial\Omega_h, \\ y_h(0) = y_h^0, \quad \partial_t y_h(0) = y_h^1 & \text{in } \Omega_h. \end{cases}$$

vérifie les conditions

$$\inf_{\Omega_h} |y_h^0| \geq \alpha_0 \quad \text{et} \quad y_h[q^a] \in H^1(0, T; L_h^\infty(\Omega_h)) \cap W^{2,1}(0, T; L_h^2(\Omega_h)).$$

Alors il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour $T > 0$ assez grand, pour tout $h \in (0, h_0)$, quel que soit $q_h^b \in \Lambda_h(Q_h, m)$ vérifiant

$$q_h^a - q_h^b \in H_{0,h}^1(\Omega_h) \quad \text{et} \quad \|q_h^a - q_h^b\|_{H_{0,h}^1} \leq M,$$

on a

$$\begin{aligned} \|q_h^a - q_h^b\|_{L_h^2(\Omega_h)} &\leq Ch^{\frac{1}{1+\alpha}} + C \left[\log \left(2 + \frac{C}{\|\partial_\nu e_h(y_h[q_h^a]) - \partial_\nu e_h(y_h[q_h^b])\|_{H^1(0, T; L^2(\Gamma_0))}} \right) \right]^{-\frac{1}{1+\alpha}} \\ &\quad + Ch \sum_{k=1,2} \left\| \partial_{h,k}^+ \partial_{tt} y_h[q_h^a] - \partial_{h,k}^+ \partial_{tt} y_h[q_h^b] \right\|_{L^2(0, T; L_h^2(\Omega_{h,k}^-))}. \end{aligned}$$

où e_h est un opérateur d'extension à des fonctions continues et affines par morceaux.

La démonstration de ce théorème et les détails des notations (dont nous espérons l'intuition abordable) sont donnés dans l'article [1].

1.4 Conséquences et perspectives

A la suite de cette présentation détaillée de résultats de stabilité Lipschitzienne pour le problème inverse de détermination de potentiel, il est légitime de se poser des questions liées à la reconstruction effective du paramètre concerné. Deux pistes ont été explorées dans mes travaux les plus récents : d'une part celle de l'étude de la convergence du problème inverse [4], présentée dans le paragraphe 1.1.3, et d'autre part, celle de la mise en place d'un algorithme de reconstruction [3], basé sur l'inégalité de Carleman et la structure de la démonstration de la stabilité, et qui s'appuiera sur la variante de Carleman en temps grand du paragraphe 1.2.4.

1.4.1 Questions de convergence

La référence [4] s'appuie sur le résultat (1.1.16) de stabilité uniforme en h pour démontrer la convergence, évoquée dans la section 1.1.3, du problème inverse qui nous intéresse. Le résultat principal de cet article est présenté ci-dessous.

Pour pouvoir comparer fonction discrètes et continues, on introduit deux opérateurs d'extension. Le premier étend les fonctions discrètes en fonctions continues et affines par morceaux : l'extension $e_h(v_h)$ de $(v_{j,h})_{j \in \{0, \dots, N+1\}}$ est définie sur $[0, 1]$ par

$$e_h(f_h)(x) = f_{j,h} + \left(\frac{f_{j+1,h} - f_{j,h}}{h} \right) (x - jh) \quad \text{sur } [jh, (j+1)h], \quad j \in \{0, \dots, N\} \quad (1.4.1)$$

et présente l'avantage d'être naturellement dans $H^1(0, 1)$. Le deuxième les étend en fonctions continues par morceaux : l'extension $e_h^0(v_h)$ est définie pour $(v_{j,h})_{j \in \{1, \dots, N\}}$ par

$$\begin{aligned} e_h^0(v_h) &= v_{j,h} \quad \text{sur } [(j-1/2)h, (j+1/2)h], \quad j \in \{1, \dots, N\}, \\ e_h^0(v_h) &= 0 \quad \text{sur } [0, h/2] \cup [(N+1/2)h, 1]. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

En particulier, on a $\|e_h^0(f_h)\|_{L^2(0,1)} = \|f_h\|_{L_h^2(0,1)}$.

Nous pouvons maintenant introduire, pour $h > 0$, l'opérateur d'observation discret

$$\begin{aligned} \Theta_h : L_{h, \leq m}^\infty(0, 1) &\rightarrow L^2(0, T) \times L^2((0, T) \times (0, 1)) \\ p_h &\mapsto (\partial_t(\partial_h^- y_h[p_h])_{N+1}, h \partial_x e_h(\partial_{tt} y_h[p_h])), \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

où $y_h[p_h]$ est la solution de (1.1.14), et son analogue continu

$$\begin{aligned} \Theta_0 : L_{\leq m}^\infty(0, 1) &\rightarrow L^2(0, T) \times L^2((0, T) \times (0, 1)) \\ p &\mapsto (\partial_t \partial_x y[p](\cdot, 1), 0), \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

où $y[p]$ est la solution de (1.1.1) avec $\Omega = (0, 1)$. Le résultat de convergence est alors le suivant.

Théorème 1.21. *Supposons que $T > 1$ et qu'il existe $m > 0$ tel que $p \in L_{\leq m}^\infty(0, 1)$. Supposons que les données du système des ondes continue (1.1.1) sur $\Omega = (0, 1)$ vérifient*

$(y^0, y^1) \in H^2(0, 1) \times H^1(0, 1)$, $g \in W^{1,1}(0, T; L^2(0, 1))$, $(g^\partial(0) = g^0, g^\partial(1) = g^1) \in (H^2(0, T))^2$, avec les conditions de compatibilité $g^k(0) = y^0(k)$ et $\partial_t g^k(0) = y^1(k)$ pour $k = 0, 1$, et que les suites des données initiales discrètes (y_h^0, y_h^1) et des termes source $g_h, (g_h^0, g_h^1)$ vérifient

$$\begin{aligned} (e_h^0(\Delta_h y_h^0), e_h^0(\Delta_h y_h^1)) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} (\Delta y^0, \Delta y^1) \quad \text{dans } L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1), \\ e_h^0(g_h) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} g \quad \text{dans } W^{1,1}(0, T; L^2(0, 1)) \quad \text{et} \quad (g_h^0, g_h^1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} (g^0, g^1) \quad \text{dans } (H^2(0, T))^2. \end{aligned}$$

Si il existe $r > 0$ tel que

$$\inf \{ |y^0(x)|, x \in (0, 1) \} \geq r > 0, \quad \text{et} \quad \forall h > 0, \quad \inf_{j \in \{1, \dots, N\}} |y_{j,h}^0| \geq r$$

et si $q_h \in L_{h, \leq m}^\infty(0, 1)$ vérifie

$$\Theta_h(q_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \Theta_0(p) \quad \text{fortement dans } L^2(0, T) \times L^2((0, T) \times (0, 1)) \quad (1.4.5)$$

alors on a la convergence

$$e_h^0(q_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} p \quad \text{dans } L^2(0, 1). \quad (1.4.6)$$

La démonstration du Théorème 1.21 se trouve en section 4 de la référence [4] et consiste en un raisonnement de type Lax pour la convergence des schémas numériques. Il repose à la fois sur le résultat de stabilité uniforme du Théorème 1.10 et sur l'existence d'une suite de potentiels tels que (1.4.5) soit possible (ce qui prouve que le Théorème 1.21 n'est pas vide d'intérêt). Ce dernier point est traduit par le résultat de consistance suivant :

Théorème 1.22. *Sous les hypothèses du théorème précédent, quel que soit le potentiel $p \in L_{\leq m}^\infty(0, 1)$ il existe une suite de potentiels discrets $p_h \in L_{h, \leq m}^\infty(0, 1)$ telle que*

$$\begin{aligned} e_h^0(p_h) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} p && \text{dans } L^2(0, 1) \quad \text{et} \\ \Theta_h(p_h) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \Theta_0(p) && \text{dans } L^2(0, T) \times L^2((0, T) \times (0, 1)). \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

De plus, la solution $y_h[p_h]$ de (1.1.14) vérifie $\sup_{h \in (0, 1)} \|y_h[p_h]\|_{H^1(0, T; L_h^\infty(0, 1))} < \infty$.

Nous avons par la suite travaillé à la généralisation de ce type de résultats de convergence à la dimension 2 d'espace, et à une observation sur une petite partie de la frontière comme dans [Bel04b]. Ces travaux sont présentés dans l'article soumis [1] sur lequel je ne donne pas plus de détails ici.

1.4.2 Algorithme de reconstruction

Nous présentons ici brièvement un résultat détaillé dans la référence [3] consistant en la description d'un algorithme de reconstruction du potentiel dans le cadre du problème inverse étudié pour l'équation des ondes. En effet, le résultat de stabilité du Théorème 1.1 n'est pour l'instant pas donné avec un argument constructif qui pourrait expliquer comment effectivement retrouver le potentiel p à partir de la connaissance de $\partial_\nu y[p]|_{\Gamma_0 \times (0, T)}$. Avec Maya de Buhan et Sylvain Ervedoza, nous nous sommes donc intéressés à la construction d'un algorithme, basé sur le raisonnement démontrant la stabilité (1.1.7), permettant une implémentation de calculs numériques pour la reconstruction du potentiel.

En paraphrasant ce qui est écrit dans [Kli13], on peut dire quelques mots sur les challenges liés au calcul numérique de reconstruction de paramètres dans les edp. Même si les problèmes inverses sont un champ d'étude aisément applicatif, et même si les questions de détermination de coefficients dans les edp ont été beaucoup étudiées depuis les années 60, le sujet des méthodes numériques fiables les concernant en est encore à ses débuts. Plusieurs facteurs combinés en sont la cause : ces problèmes inverses sont non-linéaires, souvent mal posés, et dans le cas d'une seule mesure d'observation, la quantité minimale d'information disponible ne simplifie pas la tâche. Les méthodes classiques de type moindres carrés souffrent par exemple du phénomène des minima locaux, qui nécessitent alors une bonne première estimation de la solution.

Nous détaillons un peu ici une approche très différente, pour laquelle des tests numériques, dont on donnera un aperçu plus loin, sont en cours.

Soient $m > 0$, $q \in L_{\leq m}^{\infty}(\Omega)$, $\mu \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ et $g \in L^2(\Omega \times (0, T))$. Pour un paramètre $s > 0$ et un poids φ défini en (1.2.1) donné, on introduit la fonctionnelle

$$J_{s,q}[\mu, g](z) = \frac{1}{2s} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \Delta z + qz - g|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_{\nu} z - \mu|^2 d\sigma dt$$

sur les trajectoires des ondes z telles que $z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\partial_t^2 z - \Delta z + qz \in L^2(\Omega \times (0, T))$, $\partial_{\nu} z \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ et $z(\cdot, 0) = 0$ dans Ω .

On peut démontrer que $J_{s,q}[\mu, g]$ admet un unique minimiseur Z pour $s \geq s_0$ sous les hypothèses usuelles (rappelées dans le Théorème 1.16) (1.1.2)-(1.1.3) sur le domaine spatio-temporel d'observation (voir [3]). On sait aussi étudier comment ce minimiseur Z dépend du terme source $g \in L^2(\Omega \times (0, T))$ et on démontre le résultat suivant :

Théorème 1.23. *Supposons qu'il existe $x_0 \notin \bar{\Omega}$ tel que $\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$ et supposons également que $T > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|$. Soient $m > 0$ et $q \in L_{\leq m}^{\infty}(\Omega)$.*

Si $\mu \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$, $g^a, g^b \in L^2(\Omega \times (0, T))$ et si Z^j est l'unique minimiseur de la fonctionnelle $J_{s,q}[\mu, g^j]$ pour $j \in \{a, b\}$, alors il existe $s_0(m)$ et $M = M(m)$ tels que, pour tout $s \geq s_0(m)$,

$$s^{1/2} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |\partial_t Z^a(0) - \partial_t Z^b(0)|^2 dx \leq M \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |g^a - g^b|^2 dxdt,$$

où $\varphi = \varphi_{\beta, \lambda}$ est choisi tel que le Théorème 1.16 soit vérifié.

La preuve de ce théorème se fait à l'aide de l'inégalité de Carleman (1.2.18) et de l'utilisation de l'équation d'Euler-Lagrange vérifiée par le minimum de la fonctionnelle $J_{s,q}[\mu, g]$. Ce résultat a l'avantage de nous donner une information sur la manière dont le minimiseur Z en question dépend du terme source g . Cela permet alors de proposer un algorithme de calcul du potentiel p à partir de la mesure du flux $\partial_{\nu} y[p]$ de la solution du système (1.1.1) rappelé ici

$$\begin{cases} \partial_t^2 y - \Delta y + p(x)y = g, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ y = g^{\partial}, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.4.8)$$

On utilise également l'information a priori d'une borne $L^{\infty}(\Omega)$ sur le potentiel inconnu p :

$$\exists m > 0 \quad \text{tel que} \quad p \in L_{\leq m}(\Omega).$$

Algorithme 1. • Initialisation : $q^0 = 0$.

• Itération : étant donné q^k , on pose

$$\mu^k = \partial_t \left(\partial_{\nu} y[q^k] - \partial_{\nu} y[p] \right) \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T)$$

où $y[q^k]$ est la solution de (1.4.8) avec le potentiel q^k . On introduit ensuite la fonctionnelle $J_{s,q^k}[\mu^k, 0]$ définie, pour $s > 0$ choisi indépendamment de k , par

$$J_{s,q^k}[\mu^k, 0](z) = \frac{1}{2s} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \Delta z + q^k z|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_{\nu} z - \mu^k|^2 d\sigma dt$$

sur les trajectoires $z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ telles que $\partial_t^2 z - \Delta z + q^k z \in L^2(\Omega \times (0, T))$, $\partial_\nu z \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ et $z(\cdot, 0) = 0$ dans Ω .
Soit Z^k l'unique minimiseur de $J_{s, q^k}[\mu^k, 0]$, et posons alors

$$\tilde{q}^{k+1} = q^k + \frac{\partial_t Z^k(\cdot, 0)}{y^0}.$$

On définit finalement

$$q^{k+1} = T_m(\tilde{q}^{k+1}), \quad \text{où } T_m(q) = \begin{cases} q, & \text{si } |q| \leq m, \\ \text{sign}(q)m, & \text{si } |q| \geq m. \end{cases}$$

La démonstration de la convergence, pour s assez grand, de cet algorithme repose sur le Théorème 1.23 et sur la structure de la démonstration de stabilité Lipschitzienne. C'est le résultat présenté ici :

Théorème 1.24. *Supposons qu'il existe $x_0 \notin \bar{\Omega}$ tel que $\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$ et supposons également que $T > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|$. Soient $m > 0$, $r > 0$ et $p \in L_{\leq m}^\infty(\Omega)$.*

Supposons que la donnée initiale y^0 et que la solution $y[p]$ de l'équation (1.4.8) soient telles que

$$\inf \{|y^0(x)|, x \in (\Omega)\} \geq r \quad \text{et} \quad y[p] \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega)).$$

Alors il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $s \geq s_0(m)$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} (q^{k+1} - p)^2 dx \leq \frac{M}{\sqrt{s}} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} (q^k - p)^2 dx.$$

En particulier, quand s est assez grand, l'Algorithme 1 converge.

Nous insistons sur le fait que cette approche est constructive. En particulier, à chaque étape de l'algorithme, on résout un problème de minimisation quadratique strictement convexe. De plus, nous avons l'avantage de la convergence de notre algorithme par comparaison avec la méthode classique de résolution de ce problème inverse qui consiste en la minimisation de

$$J(q) = \int_0^T \int_{\Gamma_0} |\partial_\nu y[q] - \partial_\nu y[p]|^2 d\sigma dt, \quad (1.4.9)$$

qui n'est pas convexe et peut avoir plusieurs minima locaux.

Dans le cadre d'études de méthodes de calcul numérique pour les problèmes inverses, nous ne donnerons que peu de références, mais citerons néanmoins les travaux de L. Beilina et M. Klibanov (entre autre [BK08, KB12, Kli13]) qui ont une approche très différente de la notre, mais qui concernent également des problèmes inverses avec une seule mesure, et donnent aussi un résultat de convergence global (ne dépendant pas de la qualité de la première valeur utilisée). Dans [BK08] par exemple, c'est la vitesse de propagation qui est déterminée à partir de mesures au bord du domaine et leur méthode est basée sur une transformée de Laplace de l'équation (la variable de temps est alors remplacée par une pseudo-fréquence, et le temps total de mesure T doit donc être grand) et une procédure de *layer stripping* par rapport à la pseudo-fréquence.

On peut enfin juste mentionner les travaux récents présentés dans l'article [CFCM13] s'appuyant également sur des inégalités de Carleman pour démontrer des résultats numériques de contrôlabilité de l'équation des ondes.

1.4.3 Perspectives

Les axes naturels de recherches futures sur ces deux derniers sujets se présentent presque d'eux même. Il est tout d'abord intéressant de comprendre l'intérêt de combiner les deux questions pour présenter un travail complet d'étude numérique de reconstruction du potentiel. On peut à ce titre présenter quelques simulations numériques où l'algorithme présenté est mis en oeuvre et où, en présence de données bruitées, la prise en compte d'un terme de pénalisation inspiré de celui présent dans l'inégalité de stabilité (1.1.16) améliore les résultats.

Voici quelques illustrations préliminaires de notre algorithme pour les valeurs suivantes :

$$\Omega = (0, 1), \quad x_0 = -0.1, \quad T = 1.3, \quad \beta = 0.99, \quad y_0(x) = 2 + \sin(\pi x).$$

On initialise l'algorithme avec $q_0(x) = 0$ dans Ω et on se donne 50 points de discrétisation en espace et un pas de temps de 0.01 (pour une CFL de 0.5).

Sans brouter les mesures, et en rappelant que l'on observe la dérivée temporelle du flux $\partial_\nu y[p]$ en $x = 1$ (voir figure 1.8) on constate sur la figure 1.9 une très bonne détermination du potentiel, avec ou sans utiliser un terme de pénalisation identique à celui de l'estimation de stabilité (1.1.16) dans le cas semi-discret.

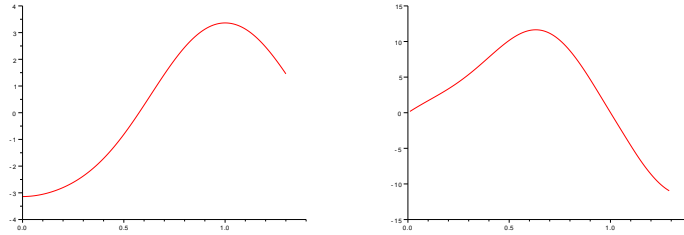


FIGURE 1.8 – Observation $t \mapsto \partial_\nu y[p](1, t)$ (à gauche) et sa dérivée en temps (à droite).

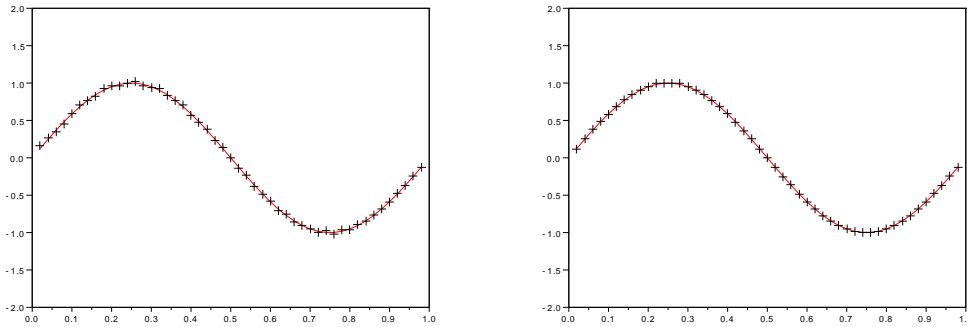


FIGURE 1.9 – Potentiel donné p (—) et potentiel retrouvé (+), sans (à gauche) puis avec (à droite) terme de régularisation.

En se donnant le même potentiel à retrouver, et en appliquant un bruit de 2% sur les mesures, la dérivée de l'observation $t \mapsto \partial_t \partial_\nu y[p](1, t)$ bruitée utilisée et les résultats obtenus pour la détermination du potentiel, avec ou sans terme de pénalisation sont donnés par la figure 1.10.

Toujours avec le même potentiel à retrouver, et en appliquant maintenant un bruit de 10% sur les mesures, l'observation $t \mapsto \partial_t \partial_\nu y[p](1, t)$ bruitée utilisée doit être régularisée en amont avant utilisation (la dérivation en temps accentue trop le bruit pour que l'observation bruitée soit exploitable directement). La figure 1.11 donne le flux observé, bruité et régularisé ainsi que sa dérivée, sans bruit et avec bruit et régularisation. Les résultats obtenus pour la détermination du potentiel, avec ou sans terme de pénalisation sont donnés par la figure 1.12.

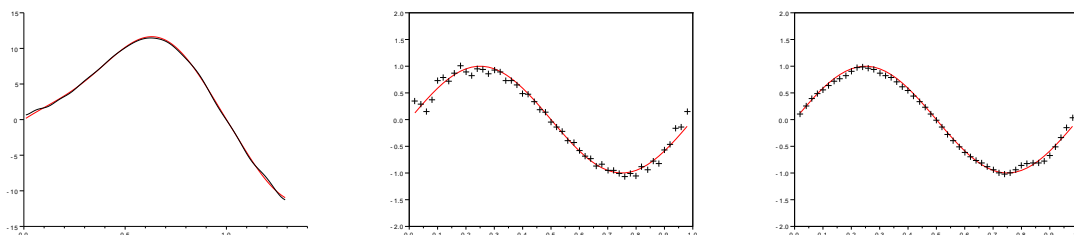


FIGURE 1.10 – Observation non bruitée (—) et bruitée (×) (à gauche). Potentiel donné p (—) et potentiel retrouvé (+), sans (milieu) puis avec (à droite) terme de régularisation.

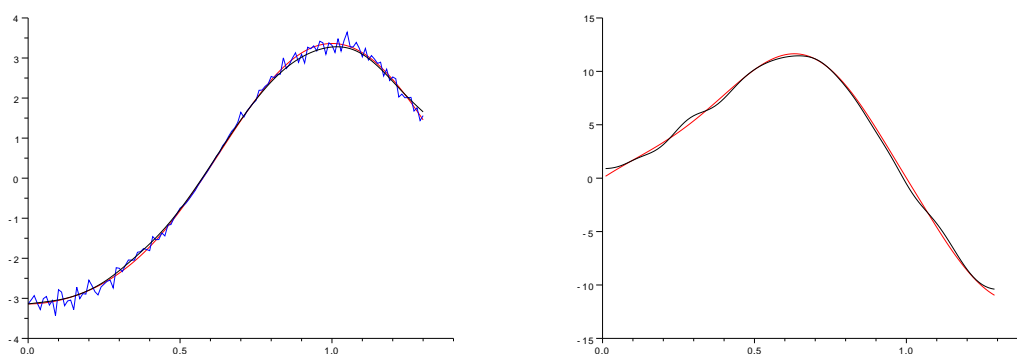


FIGURE 1.11 – Observation $t \mapsto \partial_t \partial_\nu y[p](1, t)$ (à gauche) et sa dérivée en temps (à droite), non bruitée (—), bruitée (×) et régularisée (—).

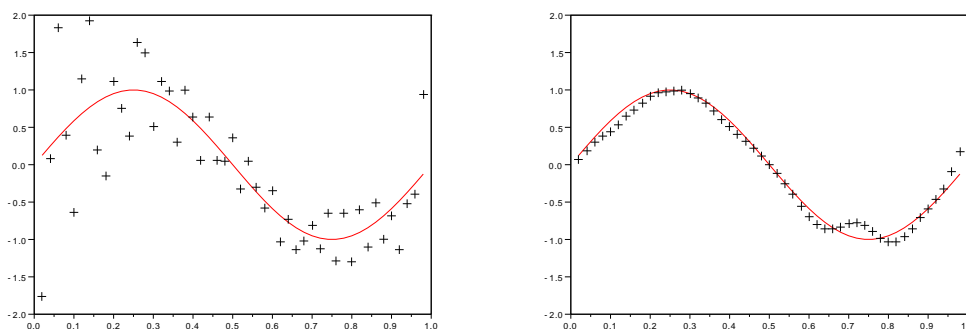


FIGURE 1.12 – Potentiel donné p (—) et potentiel retrouvé (+), sans (à gauche) puis avec (à droite) terme de régularisation.

On donne enfin dans les figures 1.13 et 1.14 quelques résultats obtenus pour des potentiels donnés p différents, plus ou moins réguliers que le précédent.

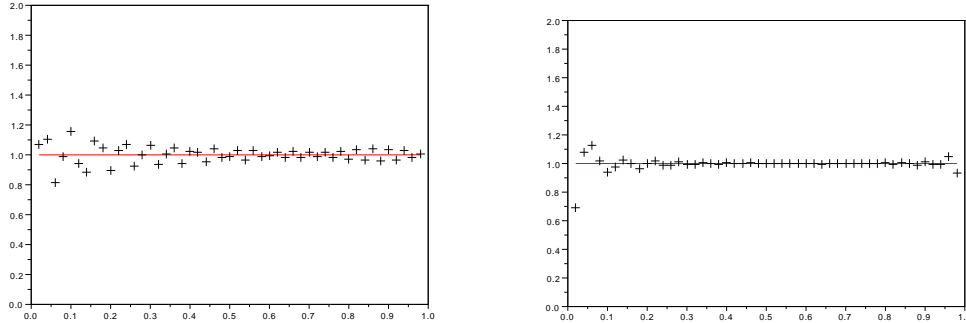


FIGURE 1.13 – Potentiel donné $p(x) = 1$ (–) et potentiel retrouvé (+), sans bruit, sans (à gauche) puis avec (à droite) terme de régularisation.

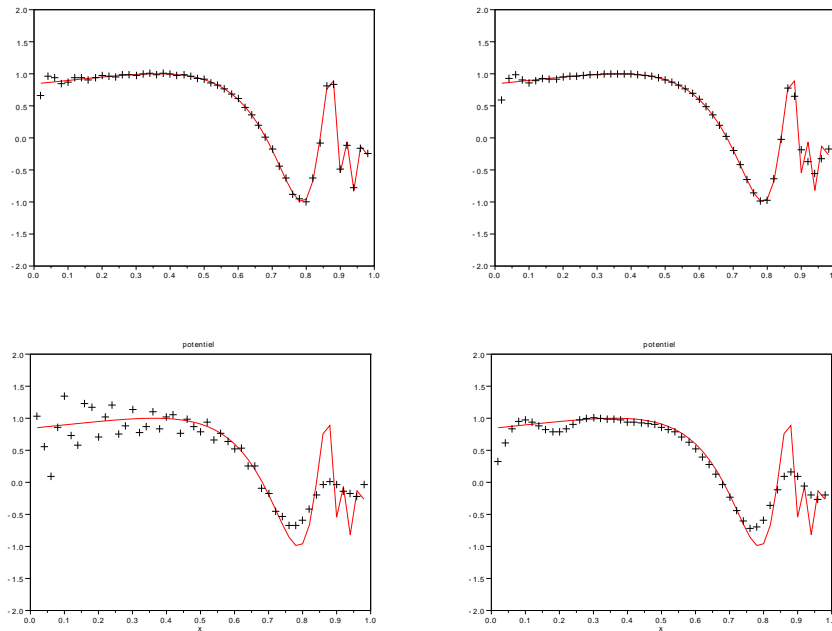


FIGURE 1.14 – Potentiel donné p (–) et potentiel retrouvé (+), sans (à gauche) puis avec (à droite) terme de régularisation. Sans bruit (en haut) ou avec 2% de bruit (en bas).

Il faut cependant signaler que ces simulations en dimension 1 d'espace, qui donnent ces résultats en moins de $k = 20$ itérations, ont le défaut d'être réalisées pour de très petites valeurs des paramètres de Carleman $s = 1$ et $\lambda = 0.1$. Ces simulations peuvent aussi cacher des difficultés rencontrées de manière plus évidentes en passant à la dimension 2. A titre d'exemple, on trouvera dans la figure 1.15 le cas

$$\Omega = \mathcal{D}(0, 1), \quad x_0 = (-1.1, 0), \quad T = 2.5, \quad \beta = 0.99, \quad s = 1, \quad \lambda = 0.1$$

et pour y_0 solution de $-\Delta y_0 = 1$ dans Ω et $y_0 = 2$ sur $\partial\Omega$. En 2 itérations, qui prennent près d'une journée, sans bruit et avec terme de régularisation (adapté pour les éléments finis triangulaires

utilisés) on observe des résultats qui méritent amélioration.

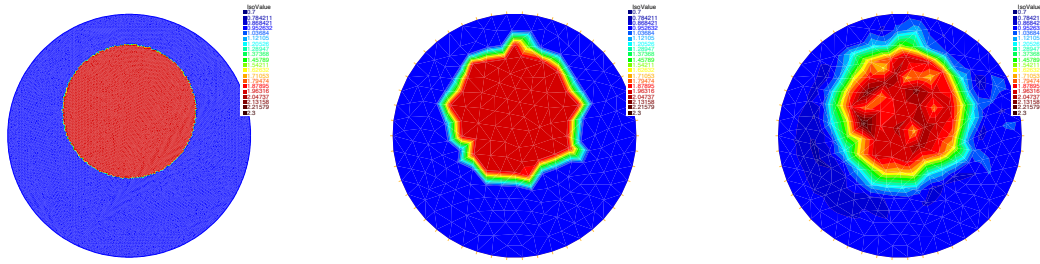


FIGURE 1.15 – A gauche, le potentiel donné p et au milieu, sa projection sur le maillage grossier utilisé. A droite le résultat obtenu après 2 itérations.

La rapidité de convergence et le temps de calcul sont ainsi rapidement mis à mal dans ce nouveau cadre et l'idée s'impose qu'il faut tenter, tout en gardant cette approche basée sur Carleman et la démonstration de la stabilité Lipschitzienne, de simplifier les calculs (et éviter l'explosion des constantes) en considérant une fonction poids avec une seule exponentielle (donc un seul paramètre s). C'est un sujet que nous commençons à explorer avec Maya de Buhan et Sylvain Ervedoza, en parallèle de simulations numériques en 1-d et 2-d pour en valider la pertinence.

Il est par ailleurs intéressant d'envisager plus tard la question de la détermination de la vitesse de propagation dans l'équation des ondes, qui est un problème probablement plus pertinent du point de vue des applications.

Chapitre 2

Problèmes inverses dans quelques équations dispersives ou paraboliques

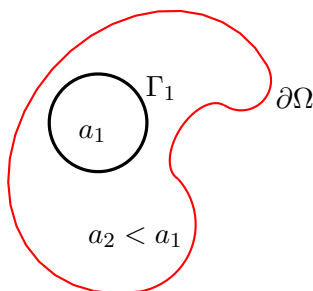
Résumé : Nous allons présenter ici plus brièvement quelques résultats de stabilité Lipschitzienne pour d'autres edp d'évolution. On quitte les équations hyperboliques du chapitre précédent, mais on considère encore ici des problèmes inverses de détermination de coefficients avec observation unique, et la méthode employée pour en démontrer la stabilité est toujours à base d'inégalités de Carleman globales. Les équations en question seront maintenant dispersives (Schrodinger [11] et KdV [2]) ou parabolique (KS [5]). Nous nous contenterons de pointer les éléments spécifiques aux nouvelles situations présentées succinctement et ce chapitre sera moins étendu que le précédent, pouvant en partie bénéficier des détails extensifs qui y ont été donnés.

2.1 Equation de Schrödinger discontinue

Soient $T > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) un domaine borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 . On travaille ici avec l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t y(x, t) + \operatorname{div}(a(x)\nabla y(x, t)) + p(x)y(x, t) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ y(x, t) = g^\partial(x, t), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ y(x, 0) = y^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où



$$a(x) = \begin{cases} a_1 > 0 & x \in \Omega_1, \\ a_2 > 0 & x \in \Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1, \end{cases}$$

avec $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, simplement connexe et de normale unitaire sortante ν_1 sur sa frontière $\partial\Omega_1 = \Gamma_1$.

On considère de nouveau le problème inverse de détermination du potentiel p à partir d'une unique observation de la donnée de Neumann $\partial_\nu y[p]$ sur la frontière $\partial\Omega$. Ce problème, traité en collaboration avec Alberto Mercado dans l'article [11], fait suite à celui du cas classique (sans discontinuités) étudié dans [18, MOR08] et fait aussi parfaitement écho au travail [14] présenté au paragraphe 1.1.1 pour l'équation des ondes discontinues. L'un comme l'autre viennent, d'une certaine

manière, compléter les résultats existant dans le cadre de coefficients variables mais réguliers comme [IY03], [LTY99] ou [Bel04c], avec les même méthodes basées sur des inégalités de Carleman globales. Il est intéressant de noter que ces différents travaux requièrent des bornes sur le gradient des coefficients, ce qui rend inutilisable l'idée d'approcher les coefficients discontinus par d'autres qui seraient réguliers.

N'ayant pas donné beaucoup de détails sur le cas des ondes discontinues dans le chapitre 1, nous prenons ici le temps de réécrire l'équation (2.1.1) comme un système de deux équations de Schrödinger à coefficients constants avec les équations de couplage nécessaires : si on note $y_j = y|_{\Omega_j}$ pour $j = 1, 2$, alors y est solution de

$$i\partial_t y + \operatorname{div}(a\nabla y) + py = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

si et seulement si d'une part, pour chaque $j \in \{1, 2\}$, y_j résout

$$i\partial_t y_j + \operatorname{div}(a_j \nabla y_j) + p y_j = 0, \quad \text{dans } \Omega_j \times (0, T)$$

et d'autre part, les conditions de transmission suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} y_1 = y_2 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ a_1 \partial_{\nu_1} y_1 = a_2 \partial_{\nu_1} y_2 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T). \end{cases}$$

Dans le cadre de l'étude d'edp paraboliques à coefficient principal discontinu à l'aide d'inégalités de Carleman, on peut évoquer [DOP02] pour l'étude de la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur semilinéaire, en précisant que l'inégalité de Carleman qui y est démontrée est utilisée dans [BY06] pour démontrer la stabilité d'un problème inverse de détermination de source. On peut aussi suggérer la lecture des travaux [BDLR07], [BGLR07] sur ce même type de sujet. Enfin, pour des équations paraboliques et elliptiques, on pourra citer les résultats présentés dans [LRR10, LRR11] qui démontrent des inégalités de Carleman quel que soit le signe du saut à l'interface de discontinuité.

Dès que $p \in L^\infty(\Omega)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $g^\partial \in L^2(\Gamma \times (0, T))$, l'équation (2.1.1), admet une unique solution faible $y[p] \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega)) \cap H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$. La démonstration est basée sur une méthode par transposition comme on peut lire dans [Mac94].

L'objectif est de démontrer l'unicité et la stabilité du problème inverse non linéaire caractérisé par l'application

$$p|_\Omega \longmapsto a_2 \partial_\nu y[p]|_{\partial\Omega \times (0, T)}.$$

Comme dans les autres situations décrites au chapitre 1, nous donnons une réponse locale à ces questions : c'est la stabilité autour d'un potentiel p borné dans $L^\infty(\Omega)$ que nous démontrons.

Dans ce travail, nous introduisons une fonction poids φ (voir (2.1.3)) qui est à la fois de la forme de celle présentée dans [18] et de construction similaire à celle détaillée dans [14] pour les ondes discontinues. Nous démontrons nos résultats (inégalité de Carleman et stabilité Lipschitzienne) sous une hypothèse de convexité forte (ou uniforme) pour l'interface Γ_1 (cela signifie grossièrement que sa courbure est uniformément minorée par une constante positive) et une hypothèse sur le saut du coefficient principal a . Notre résultat final prend la forme suivante :

Théorème 2.1. *Soit Ω_1 un sous-domaine fortement convexe de Ω et supposons que $a_1 > a_2 > 0$. Soient $m > 0$, $K > 0$ et $r > 0$ et soit p un potentiel appartenant à $L_{\leq m}^\infty(\Omega)$. Supposons que la donnée initiale y^0 et que la solution $y[p]$ de l'équation (2.1.1) soient telles que*

$$y^0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}), \quad \inf \{|y^0(x)|, x \in \Omega\} \geq r \quad \text{et} \quad \|y[p]\|_{H^1(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq K.$$

Alors pour tout $q \in L_{\leq m}^{\infty}(\Omega)$, $\partial_{\nu}y[q] - \partial_{\nu}y[p]$ appartient à $H^1(0, T; L^2(\partial\Omega))$ et il existe une constante $C = C(a_1, a_2, \Omega_1, \Omega, m, T, K, r) > 0$ telle que

$$\|p - q\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|a_2\partial_{\nu}y[p] - a_2\partial_{\nu}y[q]\|_{H^1(0, T; L^2(\partial\Omega))}. \quad (2.1.2)$$

On remarquera qu'il n'y a pas de temps minimal d'observation à respecter, comme dans le résultat de la référence [18], et contrairement au Théorème 1.5 pour les ondes discontinues. On notera également que ce résultat reste vrai si la donnée initiale est à valeurs purement imaginaire, c'est-à-dire si $y^0 \in H^1(\Omega; i\mathbb{R})$. On ne sait pas, à ma connaissance, démontrer ce résultat pour $y^0 \in H^1(\Omega; \mathbb{C})$. C'est un problème technique lié à la prolongation de l'opérateur de Schrödinger en temps négatif.

Pour démontrer l'inégalité de Carleman qui permet de déduire ce résultat de stabilité, par une technique déjà présentée dans [18] et assez semblable à ce qui a été décrit pour les ondes, il convient de construire une fonction poids appropriée. Elle doit permettre de démontrer une inégalité de Carleman sur chaque sous-domaine Ω_j sans supposer que la solution de l'équation soit nulle à l'interface Γ_1 et elle doit aussi permettre de gérer les termes de l'interface quand on somme les deux estimations. Elle prend la forme suivante : pour $s > 0$ et $\lambda > 0$ on définit sur $\Omega \times (-T, T)$ la fonction

$$\varphi(x, t) = \frac{\alpha - e^{\lambda\psi(x)}}{(T-t)(T+t)} \quad (2.1.3)$$

où $\alpha > \|e^{\lambda\psi}\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ et où $\psi \in C^4(\bar{\Omega})$, s'écrivant $\psi_j = \psi|_{\Omega_j}$, vérifie sur l'interface Γ_1 les conditions

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_2 = \text{cte}, \\ a_1\partial_{\nu_1}\psi_1 = a_2\partial_{\nu_1}\psi_2, \\ \partial_{\nu_1}\psi_1 - \partial_{\nu_1}\psi_2 < 0, \end{cases}$$

et dans chaque domaine Ω_j les usuelles hypothèses de non-annulation du gradient

$$|\nabla\psi| \geq \delta > 0$$

et de pseudo-convexité, avec $D_a^2\psi = \left(a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)\right)_{1 \leq i, j \leq N}$:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \quad 2D_a^2\psi(\xi, \bar{\xi}) + 2a^2\lambda|\nabla\psi \cdot \xi|^2 - a\nabla a \cdot \nabla\psi|\xi|^2 \geq \epsilon|\xi|^2.$$

L'existence d'une telle fonction ψ sera possible uniquement dans un domaine $\Omega_1 \cup \Omega_2 \setminus B_{\epsilon}(x_0)$ pour $x_0 \in \Omega_1$. Cela amènera, comme expliqué au paragraphe 1.1.1, à considérer la somme de deux inégalités de Carleman écrites pour deux poids ψ et ψ^* dont le gradient s'annule en deux points différents x_0 et x_0^* et tels que

$$\psi - \psi^* \geq \delta > 0 \text{ dans } B_{\epsilon}(x_0^*) \quad \text{et} \quad \psi^* - \psi \geq \delta > 0 \text{ dans } B_{\epsilon}(x_0).$$

Un exemple de construction de telles fonctions est donné dans [11] et prend la forme (illustrée par la figure 1.6 également)

$$\psi|_{\Omega_j}(x) = \eta(x) \frac{a_k}{\rho(x)^2} |x - x_0|^2 + M_j \quad x \in \Omega_j, j \neq k \quad (2.1.4)$$

avec $M_j > 0$ tels que $a_1 - a_2 = M_1 - M_2$, et où η est une fonction cut-off en espace d'un petit voisinage de $x_0 \in \Omega_1$ (voir dessin) et $\rho(x)$ est la distance entre x_0 et Γ_1 sur la droite (x_0x) . Nous ne donnons pas l'inégalité de Carleman obtenue. Elle est détaillée et démontrée dans la référence [11].

Voici une brève idée de la démonstration de la stabilité à partir de cette inégalité de Carleman. Elle suit les étapes de celle détaillée pour la première fois dans l'article [18] et peut se résumer rapidement en le calcul, d'une part, et l'estimation, d'autre part, de l'intégrale \mathcal{I}_ψ suivante (ou plus précisément ici de la somme de deux intégrales de cette forme, pour chacun des deux poids ψ et ψ^* utilisés dans l'inégalité de Carleman) :

$$\mathcal{I}_\psi = \operatorname{Im} \left(\int_{-T}^0 \int_{\Omega} P_1 w(x, t) \overline{w(x, t)} dx dt \right),$$

où l'on a posé $w = e^{-s\varphi} \partial_t(y[p] - y[q])$ et

$$P_1 w = i\partial_t w + \operatorname{div}(a\nabla w) + s^2 a |\nabla \varphi|^2 w.$$

Pour ce faire, il est nécessaire d'étendre la solution $v = \partial_t(y[p] - y[q])$ de

$$\begin{cases} i\partial_t v + \operatorname{div}(a\nabla v) + qv = (p - q)\partial_t y[p], & \Omega \times (0, T) \\ v = 0, & \partial\Omega \times (0, T) \\ v(0) = -i(p - q)y^0, & \Omega, \end{cases}$$

en temps négatif par la formule $v(x, t) = -\bar{v}(x, -t)$ (et $y[p](x, t) = \bar{y}[p](x, -t)$) pour tout $(x, t) \in \Omega \times (-T, 0)$. Comme y^0 , a , q et p sont à valeurs réelles, le système posé sur $\Omega \times (-T, T)$ s'écrit de la même façon et la solution garde la même régularité.

On se contentera de deux remarques sur le déroulement du calcul et de l'estimation de \mathcal{I}_ψ . D'une part, contrairement au cas des ondes (cf étape 3, paragraphe 1.3.1), il n'est pas nécessaire ici d'appliquer un cut-off en temps avant de pouvoir appliquer l'inégalité de Carleman. Cela est dû au poids utilisé, qui porte lui-même l'annulation de $w = e^{-s\varphi} v$ en temps $t = \pm T$ (et l'on retrouve cette particularité en travaillant avec l'équation de la chaleur par exemple, pour laquelle le poids peut prendre la même forme - en la variable de temps - qu'ici). D'autre part, on utilisera de nouveau la propriété du poids φ (l'analogue de (1.3.6)) qui se résume par $e^{-2s\varphi(x, t)} \leq e^{-2s\varphi(x, 0)}$ pour tout $x \in \Omega$ et $t \in (-T, T)$ et qui permet, avec la condition de non annulation de y^0 puis le choix d'un paramètre s assez grand, de conclure à la stabilité (2.1.2).

L'étude de problèmes inverses pour l'équation de Schrödinger est également l'objet de l'article [MOR08], avec une fonction poids dégénérée et par suite des conditions géométriques sur la zone d'observation plus faible que dans [18], mais aussi des références [CCG08, CG10] où le problème est considéré sur une bande infinie, ou [YY10] qui démontre l'unicité pour la détermination de potentiels $L^p(\Omega)$ pour $p > \max(n, 2)$. On peut enfin mentionner les travaux [BC09] qui prouvent de la stabilité logarithmique en combinant une inégalité de Carleman et la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer permettant de se ramener à une équation parabolique.

2.2 Equation de Kuramoto-Sivashinsky

Ce paragraphe est l'occasion de donner quelques informations concernant le travail effectué en collaboration avec Eduardo Cerpa, Emmanuelle Crépeau et Alberto Mercado. Nous nous sommes intéressés dans [5] à l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (K-S) qui est une edp parabolique non-linéaire, en dimension 1 d'espace et d'ordre 4, qui peut modéliser la phase turbulente dans des équations de type réaction-diffusion mais aussi la propagation d'une flamme plane, décrivant l'influence combinée de la diffusion et de la conduction thermique du gaz sur la stabilité d'une telle flamme.

L'équation K-S avec des coefficients non-constants décrivant la diffusion $\sigma = \sigma(x)$, et l'anti-diffusion $\gamma = \gamma(x)$, est donnée par

$$\begin{cases} \partial_t y + \partial_x^2(\sigma(x)\partial_x^2 y) + \gamma(x)\partial_x^2 y + y\partial_x y = g, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = g_1(t), \quad y(1, t) = g_2(t), & t \in (0, T), \\ \partial_x y(0, t) = g_3(t), \quad \partial_x y(1, t) = g_4(t), & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où σ vérifie $\sigma(x) \geq \alpha_0 > 0$ pour tout $x \in (0, 1)$, et les fonctions y^0, g, g_j sont les conditions initiales, le terme source et les données frontière respectivement. Tous ces termes sont supposés connus et compatibles. Dans cette edp non-linéaire, le terme d'ordre 4 modélise la diffusion et celui d'ordre 2 les instabilités naissantes. Ce paragraphe présente le résultat de stabilité du problème inverse de détermination de paramètre suivant :

Est il possible de retrouver le coefficient d'anti-diffusion $\gamma = \gamma(x)$, $x \in (0, 1)$ à partir de la mesure de $\partial_x^2 y(0, t)$ et $\partial_x^3 y(0, t)$ sur $(0, T)$ et de celle de $y(x, T_0)$ sur $(0, 1)$, où $y = y[\gamma]$ est la solution de l'équation (2.2.1) et $T_0 \in (0, T)$?

L'équation K-S étant parabolique, il était effectivement attendu qu'une mesure frontière (en $x = 0$ ici) ne soit pas suffisante pour démontrer la stabilité du problème inverse considéré et qu'il faille envisager une observation additionnelle de la solution (voir figure 2.1) partout dans le domaine spatial et à un temps $T_0 \in (0, T)$ donné, comme dans e.g. [BGLR07, IY98]. Cette équation non-linéaire

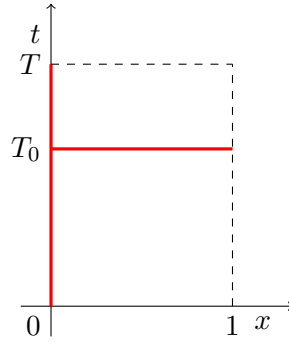


FIGURE 2.1 – Domaine d'observation pour K-S.

n'avait pas auparavant fait l'objet d'étude de problèmes inverses, mais on peut trouver dans [CM11] une inégalité de Carleman (pour des coefficients constants et pour l'opérateur K-S linéarisé), dans le cadre de la contrôlabilité à zéro. La référence [Cer10] rassemble aussi d'autres résultats de contrôle pour cette équation. L'article [5] présente d'abord des résultats d'existence et de régularité de la solution $y[\gamma]$ d'une telle équation (2.2.1) dans les espaces nécessaires à l'étude du problème inverse (et surtout à la méthode employée).

Dans l'objectif d'énoncer nos principaux résultats, nous introduisons l'opérateur K-S linéarisé et à coefficients non constants

$$L_{KS}v = \partial_t v + \partial_x^2(\sigma\partial_x^2 v) + q_2\partial_x^2 v + q_1\partial_x v + q_0v$$

avec $q_j \in L^\infty((0, T) \times (0, 1))$ pour $j = 0, 1, 2$. L'inégalité de Carleman que nous démontrons se construit à partir d'une fonction poids ϕ de la forme

$$\phi(x, t) = \frac{\beta(x)}{\phi_0(t)}, \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times (0, T)$$

où d'une part $\phi_0 \in C^1([0, T])$ vérifie $\phi_0(0) = \phi_0(T) = 0$ et pour $T_0 \in (0, T)$ donné, $\forall t \in (0, T)$,

$$0 < \phi_0(t) \leq \phi_0(T_0),$$

et d'autre part $\beta \in C^4([0, 1])$ est tel que pour un $r > 0$ donné, $\forall x \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} 0 < r &\leq \beta(x), & 0 < r &\leq \beta'(x), \\ \beta''(x) &\leq -r < 0, & |\sigma'(x)\beta'(x)| &\leq \frac{r}{4} \min_{z \in [0, 1]} \{\sigma(z)\}. \end{aligned}$$

Par exemple, si σ est constant et $T_0 = T/2$, on peut choisir $\beta(x) = \sqrt{1+x}$ et $\phi_0(t) = t(T-t)$.

Théorème 2.2. Soient ϕ la fonction poids et L_{KS} l'opérateur K-S linéarisé défini ci-dessus.

Pour tout $m > 0$, il existe $\lambda_0 > 0$, et une constante $M = M(m, T, \lambda_0, r)$ tel que pour tout q_i vérifiant $\|q_j\|_{L^\infty((0, T) \times (0, 1))} \leq m$ pour $i = 0, 1, 2$, et tout $\lambda > \lambda_0$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 e^{-2\lambda\phi} \left(\frac{|\partial_t v|^2 + |\partial_x^2(\sigma \partial_x^2 v)|^2}{\lambda\phi} + \lambda^7 \phi^7 |v|^2 + \lambda^5 \phi^5 |\partial_x v|^2 + \lambda^3 \phi^3 |\partial_x^2 v|^2 + \lambda\phi |\partial_x^3 v|^2 \right) dx dt \\ \leq C \int_0^T \int_0^1 e^{-2\lambda\phi} |L_{\text{KS}} v|^2 dx dt \\ + C \int_0^T e^{-2\lambda\phi(t, 0)} \left(\lambda^3 (\partial_x \phi(t, 0))^3 \sigma(0)^2 |\partial_x^2 v(t, 0)|^2 + \lambda \partial_x \phi(t, 0) \sigma^2(0) |\partial_x^3 v(t, 0)|^2 \right) dt \end{aligned}$$

quel que soit $v \in L^2(0, T; H^4 \cap H_0^2(0, 1))$ vérifiant $Lv \in L^2((0, T) \times (0, 1))$.

On pourra comparer cette inégalité de Carleman avec celles d'autres équations paraboliques avec données de Dirichlet homogènes au bord du domaine [FI96, IY98] en notant cependant que l'on se sert d'un unique paramètre λ (et pas de second paramètre s), probablement en partie grâce à la situation de dimension 1 d'espace où nous sommes (cf [CM11]). On peut par ailleurs lire dans [Guz13] une inégalité de Carleman pour K-S avec deux paramètres (utilisée pour un problème inverse de détermination de la partie principale σ).

La stabilité Lipschitzienne que nous démontrons s'énonce de la façon suivante.

Théorème 2.3. Soient $m > 0$, $K > 0$ et $r > 0$. Supposons que $\sigma \in H^4(0, 1)$, $\gamma, \tilde{\gamma} \in H^4(0, 1)$, $g \in L^2(0, T; H^4(0, 1)) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1))$, $y^0 \in H^6(0, 1)$ et $g_j \in H^2(0, T)$ pour $j = 1, \dots, 4$ vérifient les conditions de compatibilités appropriées. Soit (en notant $H^s := H^s(0, 1)$)

$$\mathcal{Z} := \{z \in C([0, T]; H^6) \cap L^2(0, T; H^8) / z_t \in C([0, T]; H^2) \cap L^2(0, T; H^4)\}$$

et supposons que $y[\gamma]$ et $y[\tilde{\gamma}] \in \mathcal{Z}$ et qu'il existe $T_0 \in (0, T)$ tel que

$$\inf \{ |\partial_x^2 y[\tilde{\gamma}](T_0, x)|, x \in (0, 1) \} \geq r, \quad \text{et} \quad \|y[\gamma]\|_{\mathcal{Z}} \leq K.$$

Alors pour tout $\gamma \in L_{\leq m}^\infty(0, 1)$, il existe une constante $C = C(m, T, K, r, \alpha_0) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{L^2(0, 1)} \leq C \left\| \partial_x^2 y[\gamma](\cdot, 0) - \partial_x^2 y[\tilde{\gamma}](\cdot, 0) \right\|_{H^1(0, T)} + C \left\| \partial_x^3 y[\gamma](\cdot, 0) - \partial_x^3 y[\tilde{\gamma}](\cdot, 0) \right\|_{H^1(0, T)} \\ + C \|y[\gamma](T_0, \cdot) - y[\tilde{\gamma}](T_0, \cdot)\|_{H^4(0, 1)} + C \|y[\gamma](T_0, \cdot) - y[\tilde{\gamma}](T_0, \cdot)\|_{H^1(0, 1)}^2. \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

Remarque 2.4. Le seul terme au carré dans (2.2.2) vient de la nonlinéarité et il est très petit quand les observations sont petites. Nous le laissons par souci d'exactitude.

Remarque 2.5. *Il peut être intéressant, pour des raisons numériques par exemple, de connaître explicitement comment la constante C dans (2.2.2) dépend de la diffusion σ ou du temps T . Ce type de questions est abordée dans l'article de synthèse [FCG06] pour la constante d'observabilité dans le cadre d'équations paraboliques d'ordre 2.*

Comme précédemment, nous donnerons uniquement une rapide idée de la démonstration de la stabilité (2.2.2) à partir du Théorème 2.2. Elle est détaillée dans l'article [5] et nécessite l'utilisation à deux reprises de l'inégalité de Carleman. On peut de nouveau la résumer en le calcul, d'une part, et l'estimation, d'autre part, de l'intégrale \mathcal{I}_{KS} suivante :

$$\mathcal{I}_{KS} = 2 \int_0^1 \int_0^{T_0} w(t, x) w_t(t, x) dt dx$$

où l'on a posé $w = e^{-\lambda\phi} \partial_t(y[\gamma] - y[\tilde{\gamma}])$ et où $v = \partial_t(y[\gamma] - y[\tilde{\gamma}])$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^2(\sigma \partial_x^2 v) + \gamma \partial_x^2 v + y[\tilde{\gamma}] \partial_x v + \partial_x y[\tilde{\gamma}] v = (\tilde{\gamma} - \gamma) \partial_x^2 \partial_t y[\tilde{\gamma}] - f, & \text{dans } (0, 1) \times (0, T), \\ v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \partial_x v(0, t) = 0, \quad \partial_x v(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ v(x, 0) = \tilde{\gamma} y^0, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

avec $f(t, x) = u(t, x) \partial_x \partial_t y[\gamma](t, x) + \partial_x u(t, x) \partial_t y[\gamma](t, x)$ où $u = y[\gamma] - y[\tilde{\gamma}]$. Ce terme source est le fruit de la non-linéarité de l'équation K-S, et c'est aussi lui qui impose une double utilisation de l'inégalité de Carleman.

Puisque $w(t=0) = 0$ (grâce aux propriétés de la fonction poids), le calcul (non détaillé ici) de \mathcal{I}_{KS} correspond à celui de

$$\int_0^1 |w(T_0, x)|^2 dx \quad (= \mathcal{I}_{KS})$$

et donne à la fois le terme que l'on veut estimer $\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{L^2(0,1)}$, pourvu que $\partial_x^2 y[\tilde{\gamma}](T_0, x)$ ne s'annule pas, et les termes d'observation au temps T_0 attendus.

On applique par ailleurs une première fois l'inégalité de Carleman pour majorer \mathcal{I}_{KS} . La présence du terme source f nécessite une deuxième utilisation de Carleman, qui est rendue possible grâce à la régularité de la solution $y[\gamma]$ de (2.2.1), en permettant de travailler sur l'équation vérifiée par u .

Remarque 2.6. *On évite les problèmes que la non-linéarité pourrait soulever grâce à la régularité que l'on peut avoir (ou d'une certaine manière, imposer) sur la solution de l'équation. On peut signaler que l'on doit alors faire des hypothèses de régularité H^4 sur le coefficient que l'on cherche, et qui, dans l'idéal, devrait juste être inconnu et borné dans L^∞ . On peut aussi noter que l'on observe la solution à une seule extrémité du domaine spatial, et non aux deux.*

2.3 Equation Korteweg-de-Vries

Ce dernier résultat de stabilité d'un problème inverse que je vais évoquer est un autre fruit de la même collaboration. Eduardo Cerpa et Emmanuelle Crépeau étant des spécialistes du contrôle de l'équation Korteweg-de-Vries (KdV) [CC09], nous avons voulu tirer profit dans ce nouveau cadre de notre expérience sur l'équation K-S, l'une et l'autre étant des équations en dimension 1 d'espace avec la même non-linéarité. Mais la comparaison s'arrête très vite, KdV étant une équation dispersive alors que K-S est parabolique. L'équation KdV modélise l'écoulement d'ondes de faible amplitude dans un canal, ou par exemple la propagation de la pression sanguine dans les artères [CS07].

2.3.1 Stabilité du problème inverse

On s'intéresse plus précisément à une équation de KdV posée sur un intervalle borné $[0, L]$:

$$\begin{cases} \partial_t y + a(x)\partial_x^3 y + \partial_x y + y\partial_x y = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(L, t) = \partial_x y(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où a vérifie $a(x) \geq a_0 > 0$, pour tout $x \in [0, L]$.

D'une certaine manière, le coefficient principal a est relié à la topographie du canal où l'écoulement est considéré (voir [2] et les références qui s'y trouvent). On considère le problème inverse de détermination de paramètre suivant :

Est il possible de retrouver le coefficient principal $a = a(x)$, $x \in (0, L)$ à partir de la mesure de $\partial_x y(0, t)$, $\partial_x^2 y(0, t)$ et $\partial_x^2 y(L, t)$ sur $(0, T)$, où $y = y[a]$ est la solution de l'équation (2.3.1) ?

L'équation KdV n'a pas auparavant fait l'objet d'étude de problèmes inverses, mais on peut trouver dans [Ros04, GG08] des inégalités de Carleman (pour des coefficients constants et pour l'opérateur KdV linéarisé), dans le cadre d'études de contrôlabilité. Notre principal résultat s'écrit de la manière suivante.

Théorème 2.7. *Soient $r > 0$, $a_0 > 0$, $\alpha > 0$ et $K > 0$. Supposons que la donnée initiale*

$$y^0 \in \mathcal{Y} := \{u \in H^7(0, L); u(0) = u(L) = u'(L) = 0\}$$

vérifie, pour tout $x \in [0, L]$

$$\partial_x^3 y^0(x) = \partial_x^3 y^0(L - x) \quad \text{et} \quad |\partial_x^3 y^0(x)| \geq r. \quad (2.3.2)$$

Définissons

$$\Sigma(a_0, \alpha) = \left\{ a \in W^{6, \infty}(0, L) / \forall x \in [0, L], \right. \\ \left. a(x) \geq a_0, a(x) = a(L - x), \text{ et } \|a\|_{W^{6, \infty}(0, L)} \leq \alpha \right\}. \quad (2.3.3)$$

Alors, il existe une constante $C = C(L, T, r, a_0, \alpha, K) > 0$ telle que

$$C \|a - \tilde{a}\|_{L^2(0, L)} \leq \|\partial_x y[a]_x(0, t) - \partial_x y[\tilde{a}](0, t)\|_{H^1(0, T)} \\ + \|\partial_x^2 y[a](0, t) - \partial_x^2 y[\tilde{a}](0, t)\|_{H^1(0, T)} + \|\partial_x^2 y[a](L, t) - \partial_x^2 y[\tilde{a}](L, t)\|_{H^1(0, T)} \quad (2.3.4)$$

pour tout a, \tilde{a} dans $\Sigma(a_0, \alpha)$ tel que les solution de l'équation (2.3.1) vérifient

$$\max\{\|y[a]\|_{W^{1, \infty}(0, T; W^{3, \infty}(0, L))}, \|y[\tilde{a}]\|_{W^{1, \infty}(0, T; W^{3, \infty}(0, L))}\} \leq K.$$

Les hypothèses $a \in W^{6, \infty}(0, L)$ et $y^0 \in \mathcal{Y}$ permettent de garantir l'existence d'une unique solution $y[a] \in W^{1, \infty}(0, T; W^{3, \infty}(0, L))$. Avant de donner une brève idée de la démonstration du théorème, on remarquera par ailleurs deux choses : les hypothèses de symétrie sur y^0 et a , et les mesures de la solution de l'équation nécessaires à la stabilité du problème inverse. D'une part, ces hypothèses de symétrie auront l'utilité cruciale de permettre l'extension de la solution de KdV en temps négatif, ce qui évite d'avoir besoin, comme dans le cas parabolique (cf K-S), d'ajouter une observation de la solution en temps $T_0 > 0$. D'autre part, la connaissance pointue de l'équation de KdV et de sa contrôlabilité frontière (voir [Cer07, CC09, CC04, Ros97]) peuvent donner une idée des mesures nécessaires dans le membre de droite de l'inégalité de stabilité (2.3.4), mais ici, ce sont essentiellement les hypothèses de symétrie qui en imposent deux en $x = 0$ et une en $x = L$.

2.3.2 Éléments de démonstration

La preuve de ce théorème repose sur une nouvelle inégalité de Carleman pour l'opérateur KdV linéarisé et à coefficients non-constants qui prend la forme

$$L_{\text{KdV}}v = \partial_t v + a(x)\partial_x^3 v + q_1 \partial_x v + q_0 v$$

avec $q_0 \in L^\infty(-T, T; W^{1,\infty}(0, L))$ et $q_1 \in L^\infty((-T, T) \times (0, L))$. De façon en partie similaire à [FI96, DOP02, FCG06, BDLR07] pour les équations paraboliques, on construit des fonctions poids ϕ et θ de la forme, pour $\lambda > 0$:

$$\phi(x, t) = \frac{e^{\kappa\lambda\|\beta\|_\infty} - e^{\lambda\beta(x)}}{(T+t)(T-t)}, \quad \theta(x, t) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{(T+t)(T-t)}, \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times (-T, T)$$

où $\beta \in C^3([0, L])$ est telle qu'il existe $r > 0$, et $\kappa \in (1, 2)$ vérifiant

$$r \leq \beta(x), \quad r \leq \beta'(x), \quad \forall x \in (0, L) \quad \text{et} \quad \kappa \max_{[0, L]} \beta < 2 \min_{[0, L]} \beta.$$

Par exemple, on peut choisir $\beta(x) = x + 2L$. L'inégalité de Carleman que nous démontrons s'écrit :

Théorème 2.8. *Soient les fonctions poids ϕ et θ et l'opérateur KdV linéarisé L_{KdV} définis ci-dessus. Il existe $s_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$ et une constante $C > 0$ dépendant de $L, T, s_0, \lambda_0, \alpha, a_0, r$ et $\|\beta\|_{C^3([0, L])}$ telle que pour tout $s \geq s_0$ et $\lambda \geq \lambda_0$,*

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T \int_0^L e^{-2s\phi} (s^5 \lambda^6 \theta^5 |v|^2 + s^3 \lambda^4 \theta^3 |\partial_x v|^2 + s \lambda^2 \theta |\partial_x^2 v|^2) dx dt \\ & \leq C \int_{-T}^T \int_0^L e^{-2s\phi} |L_{\text{KdV}}v|^2 dx dt + C s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T e^{-2s\phi(L, t)} \theta^3(L, t) |\partial_x v(L, t)|^2 dt \\ & \quad + C s \lambda \int_{-T}^T e^{-2s\phi(L, t)} \theta(L, t) |\partial_x^2 v(L, t)|^2 dt \quad (2.3.5) \end{aligned}$$

pour tout $v \in L^2(-T, T; H^3 \cap H_0^1(0, L))$ tel que $Lv \in L^2((0, L) \times (-T, T))$.

On peut remarquer que pour cette équation, nous avons démontré une inégalité de Carleman avec deux paramètres s et λ . On peut trouver des inégalités de Carleman pour KdV avec un seul paramètre dans [GG08, Ros04] où le poids est de la forme $\phi = \beta(x)/(t(T-t))^\mu$. Ce type de choix (avec $\mu = 1$) aurait généré des hypothèses supplémentaires sur la fonction β , que nous avons souhaité éviter (voir par exemple dans le cas K-S celles qui sont faites au paragraphe précédent, à comparer avec le poids à deux paramètres choisi dans [Guz13]).

La démonstration de l'inégalité de stabilité (2.3.4) à partir de l'inégalité de Carleman (2.3.5) repose de nouveau sur l'extension en temps négatif de l'équation et de sa solution, comme on le fait pour les équations des ondes ou de Schrödinger. Et de même que pour gérer la non-linéarité de l'équation K-S, on aura ici aussi besoin d'utiliser à deux reprises l'estimation de Carleman : une fois sur l'équation vérifiée par $u = y[a] - y[\tilde{a}]$ et une autre sur celle en $z = \partial_t u$. On ne détaillera donc ici que le procédé que nous avons mis en place pour étendre notre edp en temps négatif et l'intégrale \mathcal{I}_{KdV} utilisée pour y appliquer Carleman.

Pour écrire l'équation de KdV linéarisée sur l'intervalle $(-T, T)$, on définit deux extensions : - l'une est une *extension symétrique* et pour tout g défini sur $[0, L] \times [0, T]$, on écrit, $\forall x \in [0, L]$,

$$\hat{g}(x, t) = \begin{cases} g(x, t) & \text{si } t \in [0, T], \\ g(L-x, -t) & \text{si } t \in [-T, 0); \end{cases}$$

- l'autre est une *extension anti-symétrique* et pour tout g sur $[0, L] \times [0, T]$, on pose, $\forall x \in [0, L]$,

$$\check{g}(x, t) = \begin{cases} g(x, t) & \text{si } t \in [0, T], \\ -g(L - x, -t) & \text{si } t \in [-T, 0). \end{cases}$$

C'est pour pouvoir appliquer ce type d'extension à l'équation vérifiée par $z = \partial_t(y[a] - y[\tilde{a}])$ qu'on supposera que la donnée initiale $z_0 = (\tilde{a} - a)\partial_x^3 y^0$ de l'équation en $z = \partial_t(y[a] - y[\tilde{a}])$ vérifie

$$z_0(x) = z_0(L - x), \quad \forall x \in [0, L] \quad (2.3.6)$$

ce qui veut dire que l'on doit le vérifier pour a, \tilde{a} et $\partial_x^3 y_0$, cf (2.3.2) et (2.3.3). On peut alors définir et travailler avec $v := \hat{z}$ sur $[0, L] \times [-T, T]$, qui vérifie l'équation

$$\begin{cases} \partial_t v + a(x)\partial_x^3 v + (1 + y[\tilde{a}])\partial_x v + \partial_x y[\tilde{a}]v = \check{f}, & (x, t) \in (0, L) \times (-T, T), \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, & t \in (-T, T), \\ \partial_x v(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \partial_x v(L, t) = -\partial_x z(0, -t), & t \in (-T, 0), \\ v(x, 0) = (\tilde{a}(x) - a(x))\partial_x^3 y^0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (2.3.7)$$

où

$$f = (\tilde{a}(x) - a(x))\partial_x^3 \partial_t y[\tilde{a}] - \partial_x \partial_t y[a](y[a] - y[\tilde{a}]) - \partial_t y[\tilde{a}]\partial_x(y[a] - y[\tilde{a}]).$$

La démonstration de l'inégalité de stabilité se résume en le calcul d'une part, et l'estimation d'autre part, de l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I}_{\text{KdV}} = \int_{-T}^0 \int_0^L w(x, t) P_1 w(x, t) dx dt$$

où l'on a posé $w = e^{-s\phi} v = e^{-s\phi} \hat{z}$ et

$$P_1 w = \partial_t w + 3as^2(\partial_x \phi)^2 \partial_x w + a\partial_x^3 w + 3as^2 \partial_x \phi \partial_x^2 \phi w.$$

2.3.3 Perspectives

Les phénomènes modélisés par l'équation KdV peuvent soulever d'autres problèmes inverses à étudier, probablement plus intéressants d'un point de vue applicatif. Nous avons ici travaillé sur le problème le plus compliqué que nous pouvions traiter avec les outils que nous maîtrisons. Mais par exemple, le flux sanguin pulsatoire dans une section artérielle pouvant être modélisé par l'équation KdV (voir [CS07] pour plus de détails), on peut envisager la question de la détermination de l'écoulement à l'entrée de l'artère avec une seule mesure à la sortie, ou bien la détermination des coefficients physiques comme la rigidité des parois des artères. Ces problèmes inverses ouverts sont très pertinents pour la médecine cardiovasculaire et pourront faire l'objet d'études futures.

D'autres problèmes inverses pourront retenir notre attention, avec en particulier l'idée d'explorer les couples d'edp, un peu dans la lignée des questions plus récentes d'étude de la contrôlabilité (avec un seul contrôle) de systèmes d'équations couplées (voir par exemple le survey [AKBGBdT11] concernant le contrôle d'équations paraboliques). Un premier sujet qu'il pourra être intéressant de regarder concernerait par exemple un problème inverse posé pour un couple KdV-Schrödinger modélisant les interactions d'ondes longues et courtes.

Deuxième partie

Sur la commande robuste de systèmes de dimension infinie

Les problèmes les plus étudiés en automatique sont formulés à l'aide de systèmes de dimension finie, qui sont souvent au départ des troncatures ou approximations de modèles de dimension infinie. Pour une meilleure prise en compte de la dynamique du système considéré (le dispositif, ses actionneurs, ses capteurs...), les équations aux dérivées partielles (edp), qui correspondent à des systèmes de dimension infinie, peuvent être plus appropriées. Le compromis à faire est alors celui entre la précision du modèle et les savoir-faire que l'on peut mettre en oeuvre (ou développer) dessus. Ma formation de départ étant celle du contrôle des edp, c'est sur ce type d'objet que je continue de travailler, tout en souhaitant toujours enrichir mes compétences en contrôle/commande de techniques issues de l'automatique théorique.

L'un des objectifs de cette partie est de rendre compte de mes travaux d'analyse et de synthèse en commande robuste de systèmes décrits par des edp et équipés de matériaux intelligents, qui réagissent par exemple mécaniquement ou électriquement à des sollicitations extérieures (matériaux piézoélectriques en l'occurrence). Dans le cadre de la mécanique des structures flexibles, la multiplication des degrés de liberté, due à une répartition distribuée d'actionneurs et de capteurs intelligents rend légitime l'utilisation d'un modèle écrit à l'aide d'edp. De plus, certaines méthodes de l'automatique robuste en dimension finie sont généralisées à la dimension infinie, à l'aide d'équations de Riccati par exemple. L'un des intérêts applicatifs de ce sujet est d'utiliser ces généralisations pour des modèles edp et de ne revenir à la dimension finie, à l'aide d'une troncature appropriée, qu'au moment de l'implémentation numérique. Un autre intérêt repose sur le faible nombre de variables physiques utilisées dans la modélisation edp, venant concurrencer favorablement la taille des matrices représentant un système complexe en dimension finie.

Cette approche, en rupture avec mes travaux de thèse, fut tout d'abord l'objet de mon postdoctorat sur la commande robuste d'un dispositif d'Optique Adaptative [12]. J'ai eu l'occasion depuis d'utiliser ce type d'idées appliqué à d'autres systèmes [20, 19], où l'enjeu est, dans un premier temps, d'écrire un modèle de type espace d'état à l'aide d'edp, pour ensuite en étudier la commande robuste théorique, avant de discrétiser le modèle en vue d'une approche numérique implémentable sur un banc d'essai. Après cette introduction au contrôle robuste H_∞ d'un système de dimension infinie, le prochain chapitre aura ainsi pour but de présenter la modélisation puis la commande H_∞ d'un système d'Optique Adaptative. Le dernier chapitre présentera enfin divers travaux de commande robuste d'un système modélisant les vibrations d'une aile d'avion dont les réservoirs sont plus ou moins remplis de kérosène [8, 7, 6]. C'est cependant sur un modèle de dimension finie (issu de la troncature d'un modèle partiellement écrit à base edp) que ces travaux ont été effectués. Nous donnerons une idée des difficultés rencontrées dans la modélisation edp du système couplé en question.

Profitions de cette introduction pour présenter brièvement le cadre dans lequel nous souhaitons travailler de manière à pouvoir s'adresser au mieux aux communautés du contrôle des edp et de l'automatique. A ce sujet, nous recommandons la lecture de [Tad90], pour la clarté de sa présentation

dans le domaine temporel du problème de la commande H_∞ d'un système de dimension finie, qui utilise une approche orientée 'contrôle optimal' permettant ensuite d'aborder aisément le cas de la dimension infinie comme présenté dans [BB93]. Un autre article en dimension finie [GD88], avec une formulation par représentation d'état également, fait référence dans le domaine de la commande robuste. Nous pouvons enfin renvoyer aux livres [DZG96] et [DP00], le premier donnant une approche de la commande H_∞ par équations de Riccati, le second s'intéressant à une approche par LMI (inégalités matricielles linéaires) que nous n'utiliserons pas ici.

Dans un premier temps, en vue de l'étude d'un problème de commande par retour de mesure, l'objectif poursuivi est de mettre le système formulé au départ à l'aide d'edp sous la forme standard d'un modèle d'état linéaire de dimension infinie :

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + B_1W(t) + B_2U(t), & \forall t \geq 0, \\ X(0) = 0, \\ Z(t) = C_1X(t) + D_{12}U(t), & \forall t \geq 0, \\ Y(t) = C_2X(t) + D_{21}W(t), & \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

où X est l'état du système et X' sa dérivée en temps, U le contrôle en entrée, W la perturbation en entrée, Y la sortie mesurée et Z la sortie à contrôler.

L'objectif est de trouver un contrôleur dynamique \mathcal{K} assurant que l'influence de la perturbation W sur la sortie Z que l'on souhaite contrôler reste plus petite qu'une borne spécifique. Le schéma bloc standard décrivant la situation est donné par la figure 2.2.

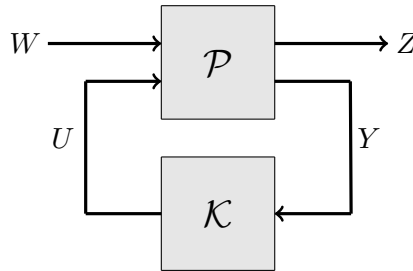


FIGURE 2.2 – Schéma standard du contrôle par retour de mesure

On note \mathcal{X} l'espace d'état, \mathcal{U} l'espace des contrôles, \mathcal{W} celui des perturbations, et \mathcal{Y} et \mathcal{Z} les espaces d'observation et de sortie. Ce sont tous des espaces de Hilbert réels séparables. L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe sur \mathcal{X} (pour une introduction à la théorie des semigroupes, on renvoie à la lecture de [CH98], [Paz83] ou encore le récent [TW09, Chapitre 2]). On note $\mathcal{D}(A)$ le domaine de A et on définit également les opérateurs linéaires bornés $B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{X})$, $B_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$, $C_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, $C_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $D_{12} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Z})$ et $D_{21} \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{Y})$.

Le contrôleur peut alors prendre la forme suivante

$$\begin{cases} \Phi'(t) = (A + M)\Phi(t) + NY(t), & \forall t \geq 0, \\ \Phi(0) = 0, \\ U(t) = L\Phi(t) + RY(t), & \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (\mathcal{K})$$

où Φ est l'état adjoint (ou reconstructeur) qui dépend de la mesure Y et permet d'obtenir la commande U . L'opérateur $A + M$ est également le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe sur un

espace de Hilbert réel séparable. Les opérateurs linéaires L , N et R sont bornés sur les espace attendus. Avec ce contrôleur, le système en boucle fermée, d'entrée W et de sortie Z s'écrit simplement, $\forall t \geq 0$:

$$\begin{cases} X' &= (A + B_2RC_2)X + B_2L\Phi + (B_1 + B_2RD_{21})W, \\ \Phi' &= (A + M)\Phi + NC_2X + ND_{21}W, \\ Z &= (C_1 + D_{12}RC_2)X + D_{12}L\Phi + D_{12}RD_{21}W, \end{cases}$$

et introduit l'opérateur

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A + B_2RC_2 & B_2L \\ NC_2 & A + M \end{pmatrix}$$

qui permet de définir une application linéaire bornée $S_{\mathcal{K}}$ telle que $Z(t) = (S_{\mathcal{K}}W)(t)$. Sa borne est notée $\|S_{\mathcal{K}}\|_{\infty}$.

Précisons maintenant ce que nous entendons par commande robuste H_{∞} par retour de mesures. On peut décrire la synthèse H_{∞} comme une méthode qui sert à la conception de commandes optimales. Elle permet de garantir théoriquement une certaine robustesse de la stabilité du système tout en assurant des performances de rejet de perturbations. La description (\mathcal{P}) du système que nous considérons implique, comme l'illustre aussi en partie la figure 2.2, que la commande U mise en place à l'aide du contrôleur (\mathcal{K}) agit en fonction de la fonctionnelle de coût

$$J_0(U, W) = \int_0^{\infty} \|Z(t)\|_{\mathcal{Z}}^2 dt$$

et à l'aide de l'observation partielle $Y = C_2X + D_{21}W$.

On veut construire un contrôleur dynamique par retour de sortie $\mathcal{K} = (L, M, N, R)$ qui stabilise exponentiellement le système en boucle fermée (c'est-à-dire que Λ est un opérateur exponentiellement stable, et correspond à un coût fini $J_0(L\Phi + RY, W)$) et assure que l'influence de la perturbation W sur la sortie à contrôler Z , *i.e.* le ratio

$$\rho(\mathcal{K}) = \sup_{W \in \mathcal{W}} \frac{J_0(L\Phi + RY, W)}{\int_0^{\infty} \|W(t)\|_{\mathcal{W}}^2 dt}$$

est plus petit qu'une borne donnée γ^2 . C'est la même chose que de vouloir $\|S_{\mathcal{K}}\|_{\infty} \leq \gamma$.

Pour simplifier les formules que nous allons donner, nous faisons les hypothèses suivantes

$$D_{12}^* [C_1 \ D_{12}] = [\mathbf{0} \ I] \quad \text{et} \quad D_{21} [B_1^* \ D_{21}^*] = [\mathbf{0} \ I], \quad (2.3.8)$$

qui permettent de traduire la fonctionnelle de coût J_0 par

$$J_0(U, W) = \int_0^{\infty} (\|C_1X(t)\|_{\mathcal{Z}}^2 + \|U(t)\|_{\mathcal{U}}^2) dt$$

et de simplifier l'écriture du système en boucle fermée en

$$\begin{pmatrix} X \\ \Phi \end{pmatrix}' = \Lambda \begin{pmatrix} X \\ \Phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_2RD_{21} \\ ND_{21} \end{pmatrix} W.$$

Permettons-nous de rappeler ici les définitions usuelles (en utilisant l'approche de [Dat70]) :

Definition 1. La paire (A, B) est exponentiellement stabilisable si pour tout $X_0 \in \mathcal{X}$, il existe $V \in L^2(0, \infty; \mathcal{U})$ tel que la solution de $X' = AX + BV$ avec $X(0) = X_0$ vérifie $X \in L^2(0, \infty; \mathcal{X})$.

Définition 2. On dit que la paire (A, H) est exponentiellement détectable (resp. observable) si la paire (A^*, H^*) est exponentiellement stabilisable (resp. contrôlable).

Donnons également plus formellement la définition de la γ^2 -robustesse.

Définition 3. On dit que la propriété de γ^2 -robustesse avec observation partielle est vérifiée pour le système (\mathcal{P}) , ou encore que le système (\mathcal{P}) est exponentiellement stabilisable avec atténuation γ , s'il existe un contrôleur dynamique par retour de sortie \mathcal{K} exponentiellement stabilisant tel que $\rho(\mathcal{K}) < \gamma^2$ (i.e. tel que Λ est exponentiellement stable et $\|S_{\mathcal{K}}\|_{\infty} < \gamma$).

On peut alors trouver dans les références [BB93] et [vK93b] une démonstration du résultat suivant, qui décrit la commande robuste d'un système de dimension infinie comme équivalente à la résolution de deux équations de Riccati. Le cas d'un opérateur de contrôle B_2 non borné est par ailleurs présenté de manière similaire dans l'article [Bar95]. On peut également faire référence à la présentation très claire et complète de ces résultats dans [Mor10] par K. Morris.

Théorème 2.9. Soit $\gamma > 0$ donné. Supposons que le système (\mathcal{P}) vérifie les hypothèses (2.3.8) et que le couple (A, B_1) est exponentiellement stabilisable et le couple (A, C_1) est exponentiellement détectable.

Le système (\mathcal{P}) vérifie la propriété de γ^2 -robustesse avec observation partielle si et seulement si il existe deux opérateurs symétriques définis positifs $P, \Sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ solutions des équations de Riccati et de compatibilité suivantes :

- $\forall X \in \mathcal{D}(A), PX \in \mathcal{D}(A^*),$

$$(PA + A^*P + P(B_2B_2^* - \gamma^{-2}B_1B_1^*)P + C_1^*C_1)X = 0 \quad (i)$$

et $A - (B_2B_2^* - \gamma^{-2}B_1B_1^*)P$ génère un semi-groupe exponentiellement stable dans \mathcal{X} ;

- $\forall X \in \mathcal{D}(A^*), PX \in \mathcal{D}(A),$

$$(\Sigma A^* + A\Sigma + \Sigma(C_2^*C_2 - \gamma^{-2}C_1^*C_1)\Sigma + B_1B_1^*)X = 0 \quad (ii)$$

et $A^* - (C_2^*C_2 - \gamma^{-2}C_1^*C_1)\Sigma$ génère un semi-groupe exponentiellement stable dans \mathcal{X} ;

- $I - \gamma^{-2}P\Sigma$ est inversible et

$$\Pi = \Sigma (I - \gamma^{-2}P\Sigma)^{-1} \geq 0. \quad (iii)$$

De plus, si les conditions (i)-(iii) sont vérifiées, alors le contrôleur \mathcal{K} défini par

$$L = -B_2^*P, \quad M = -(B_2B_2^* - \gamma^{-2}B_1B_1^*)P - \Pi C_2^*C_2, \quad N = \Pi C_2^*, \quad R = 0 \quad (2.3.9)$$

donne un opérateur du système en boucle fermée

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A + B_2RC_2 & B_2L \\ NC_2 & A + M \end{pmatrix}$$

exponentiellement stable et garantit que $\rho(\mathcal{K}) < \gamma^2$. Finalement, si les solutions des équations de Riccati existent, alors elles sont uniques. \square

Nous ne discuterons pas plus ici les différentes hypothèses techniques qui sont données dans [vK93b] (ou encore [vKPC93] pour le contrôle par retour d'état, ou enfin le livre [vK93a]), permettant essentiellement de simplifier les formules (comme évoqué plus tôt avec (2.3.8)). On trouvera aussi une discussion sur une autre formulation de ce résultat, rassemblant (ii) et (iii) en un seul item dans [Mor01, Mor10]. Enfin, une autre démonstration détaillée est donnée dans [Bar95], pour le cas du retour d'état, avec un cadre permettant de prendre en compte le contrôle frontière (donc non borné) d'équations hyperboliques.

Remarque 2.10. *Le contrôleur par feedback \mathcal{K} donné dans (2.3.9) est en fait sous-optimal et connu sous le nom de contrôleur/compensateur central.*

Une interrogation légitime à la suite de ce type de résultat concerne la résolution de ces équations de Riccati dont les solutions sont des opérateurs. Plusieurs auteurs se sont intéressés à cette question délicate et à celle, sous-jacente, de la convergence des solutions des équations de Riccati algébriques qui correspondraient à un système de dimension finie approchant celui de dimension infinie qui nous intéresse. En plus de [Mor10], plusieurs travaux comme [IM98], [Mor01], [IZC05], [Ift12] traitent de ces questions que je n’aborderai pas ici, bien que ceux-ci permettent de donner un crédit supplémentaire à des simulations numériques que l’on peut entreprendre sur des modèles tronqués. Si on considère par exemple une troncature par projection sur une base de vecteurs propres de l’opérateur d’évolution en question, les résultats dépendent alors fortement de son spectre, qui peut entre autre être de type hyperbolique (et il faut dans ce cas filtrer les hautes fréquences), de type parabolique (où l’approximation modale peut donner de très bons résultats), ou encore par exemple de type “plaques” (ou certaines propriétés dispersives contrebalancent un spectre présentant des similarités avec le cas hyperbolique).

Comme nous venons de le présenter, il existe une théorie du contrôle robuste pour les systèmes de dimension infinie qui se présente de manière très analogue à celle de la dimension finie. Cependant, plus concrètement, le contrôleur est alors un opérateur qu’il faudra approcher pour obtenir une loi de commande implémentable. De plus, l’approche la plus fréquente consistera souvent non pas à approcher le contrôle *continu* obtenu (que l’on obtient uniquement si l’on sait résoudre ces équations à base d’opérateurs), mais à contrôler un système *discret* approchant le système d’origine. Et ce n’est pas la même opération (voir [Zua05]). Dans le cas des edp modélisant des systèmes flexibles (comme les ondes ou les plaques) par exemple, les approximations qui sont utilisées dans la simulation et la conception du contrôleur effectif vont alors souffrir des défauts assez connus concernant soit les modes haute fréquence (déjà évoqués dans la partie I de ce mémoire) pour des discrétisations spatiales, soit le phénomène de spillover (voir e.g. [Bal78], [BC88]) pour des approximations modales... Sans nous étendre sur ces constats que l’on retrouve dans une large bibliographie, nous voulions les mentionner comme des pistes de travail à creuser dans la continuité de nos sujets actuels.

Chapitre 3

Application à un système d'optique adaptative

Résumé : Dans le cadre de mon travail Postdoctoral au LAAS (sept 2005-août 2006), j'ai travaillé à la mise en place de techniques de contrôle robuste pour un système d'optique adaptative incluant un modèle dynamique pour le miroir déformable. Ces travaux, effectués en collaboration avec Denis Arzelier et Christophe Prieur (groupe MAC au LAAS), ont donné lieu à un article [12] et deux articles de conférence [24, 23] ainsi qu'à l'encadrement d'un stagiaire (Fabien Guignard) pendant plusieurs mois en 2006 et 2007. L'objectif sur ce sujet à vocation applicative était dans un premier temps de rentrer dans le cadre d'un modèle d'état standard de dimension infinie sur lequel les résultats de commande robuste présentés en introduction de cette partie pouvaient s'appliquer. Par la suite, il s'agissait de tirer partie de cette approche nouvelle pour effectuer des simulations numériques s'affranchissant de certaines contraintes usuelles dans l'étude de ce type de système d'optique adaptative.

3.1 Présentation du système

Un système d'optique adaptative a pour objectif de corriger les déformations d'un front d'onde incident, par exemple dues à la turbulence de l'atmosphère dans le cas de l'image d'une étoile reçue par un télescope terrestre. La lumière est alors analysée par un détecteur (analyseur de surface d'onde) qui transmet en temps réel les informations permettant à un miroir déformable de s'orienter pour compenser les défauts de l'image.

Dans le cadre qui nous intéresse, la performance des instruments optiques installés au sol est limitée par la turbulence atmosphérique et l'optique adaptative permet une correction en temps réel des effets de la turbulence grâce à un miroir bimorphe commandé à partir de mesures de la déformation du front d'onde, dans le but d'obtenir des images à haute résolution.

Le dispositif qui retenu dans l'article [12] est schématisé dans la Figure 3.1. Plus précisément, dans le but de retrouver le front d'onde originel émis par la source observée et perturbé par l'atmosphère avant qu'il n'atteigne le télescope terrestre, un miroir primaire corrige d'abord le basculement du front d'onde (qui se traduit par un mouvement rapide du centre de gravité de l'image au foyer d'un télescope). Ce miroir appelé Tilt-tip ayant corrigé les 3 premiers modes de vibration de l'onde, un miroir secondaire entreprend, à l'aide d'une couche d'actionneurs piezo-électriques et d'une boucle de commande dédiée, de corriger les modes suivants. Nous en avons modélisé le fonctionnement à l'aide d'équations aux dérivées partielles et étudié la commande robuste H_∞ par retour de mesures provenant de l'analyseur de surface d'onde de Shack-Hartmann (voir Figure 3.2) et de la couche de capteurs du miroir bimorphe.

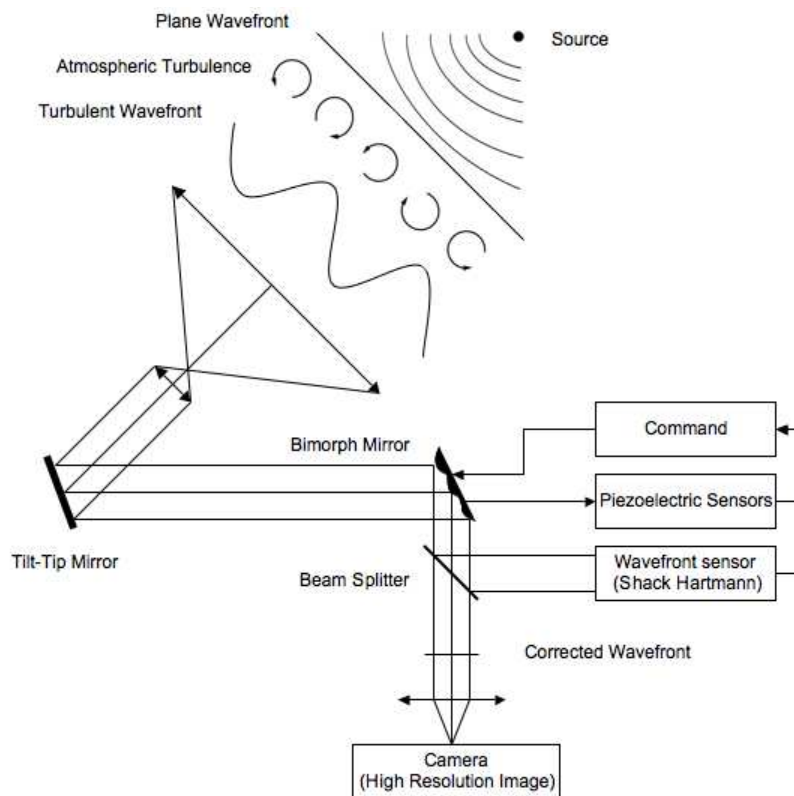


FIGURE 3.1 – Système d’optique adaptative - La boucle de commande est composée d’un analyseur Shack-Hartmann recevant le front d’onde et d’une couche de capteurs piézo-électriques donnant la position précise du miroir bimorphe, permettant à eux deux de calculer le contrôle approprié du miroir pour retrouver le front d’onde originel.

D’un point de vue plus général, je me suis intéressée à l’analyse et la synthèse de commande robuste pour un système (le miroir déformable) équipé d’un grand nombre de capteurs et d’actionneurs piézo-électriques dont la modélisation par équations aux dérivées partielles linéaires était de ce fait assez légitime. L’objectif consistait à étudier le contrôle par retour de mesures (informations partielles sur l’état du système), robuste au sens du rejet de perturbations dont les performances sont évaluées en norme H_∞ . Un sous produit de notre approche sera de pouvoir se passer du calcul de ce que l’on nomme la *matrice d’interaction* du système “miroir + Shack-Hartmann”, qui donne la relation entre l’entrée de chaque cellule piézo-électrique du miroir et la sortie correspondante de l’analyseur. Cette matrice est comparable à un modèle statique du miroir et doit être très régulièrement expérimentalement mesurée pour, entre autres, coller aux mieux à la réalité physique du moment.

Comme présenté en introduction, l’utilisation d’équations de Riccati permet la construction d’un contrôleur H_∞ dans le cadre de la dimension infinie, sujet où peu de travaux sont disponibles dans la littérature (voir principalement [vK93a] et [BB93]). Notre but était alors de rentrer dans le cadre permettant d’appliquer le Théorème 2.9 en question. La modélisation appropriée et justifiée du système est donc la principale tâche à effectuer, en prenant en compte à la fois une dynamique du miroir déformable (ce qui n’est que très rarement le cas dans les études de dispositifs d’optique adaptative que nous avons pu trouver) et la phase turbulente de l’onde incidente. Un modèle du miroir bimorphe avait déjà été développé dans [LP07] et nous avons par ailleurs modélisé une dynamique pour la phase turbulente de l’onde incidente reçue par le miroir, inspirée par [Nol76] et [CRM95], ce qui nécessite une certaine connaissance des perturbations atmosphériques impliquées et complique sensiblement

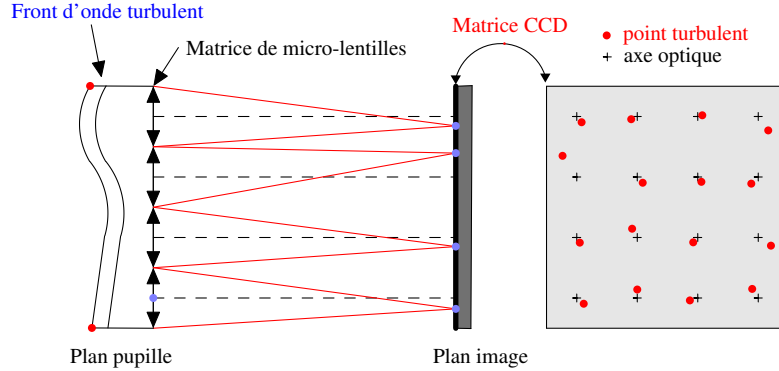


FIGURE 3.2 – Analyseur de surface d’onde de type Shack-Hartmann

l’analyse du problème de contrôle robuste.

3.2 Modèle de dimension infinie

La mise en place d’un modèle de type edp pour le dispositif d’optique adaptative que nous considérons peut se justifier de différentes manières. Le grand (voire *très grand*, puisque c’est la tendance en matière de télescopes terrestres de dernière génération, voir www.eso.org/public/teles-instr/vlt/ à propos du Very Large Telescope de l’ESO au Chili) nombre d’entrées du miroir déformable est un premier argument. Il est lié à la taille du miroir, au nombre de ses degrés de liberté, de ses capteurs et actionneurs... D’autre part, la prise en compte de la dynamique de ce miroir est également assez novatrice.

Concernant le contrôle du miroir primaire (tip-tilt) on peut renvoyer à [FMZ09] ou [CRKC11]. D’autre part, dans le survey [KRPC12] on trouvera des approches de type LQG avec conception de contrôle optimal au sens de la minimisation de la variance de la phase résiduelle (image dégradée par les turbulences, après correction). Leur approche se fait également par espace d’état mais ne prend pas en compte la dynamique du miroir déformable.

Pour présenter brièvement le modèle que nous avons développé pour ce dispositif, on peut définir les différentes variables qui entrent en jeu de la manière suivante.

C’est une phase turbulente du front d’onde, ϕ_{tur} , que le télescope terrestre reçoit et que l’on souhaite corriger. Pour ce faire, on dispose d’un analyseur de surface d’onde, le Shack-Hartmann, qui analyse la phase résultante ϕ_{res} du front d’onde après réflexion de ϕ_{tur} par le miroir déformable, dont on notera $e = e(r, \theta, t)$ le déplacement transverse (t étant la variable de temps et (r, θ) les coordonnées polaires du miroir circulaire de rayon a). La phase corrigée induite par e est alors donnée par la formule $\phi_{\text{cor}} = \frac{4\pi}{\lambda} e$ où λ est la longueur d’onde. Plusieurs perturbations seront prises en compte, comme celles représentant des incertitudes sur le modèle, ou bien les dynamiques négligées, notées w_{mod} et w_{tur} , les bruits respectifs liés aux capteurs piezo-electriques w_{pe} ou au Shack-Hartmann w_{SH} . Le schéma standard correspondant à ce système est décrit par la Figure 3.3, tirée de [23].

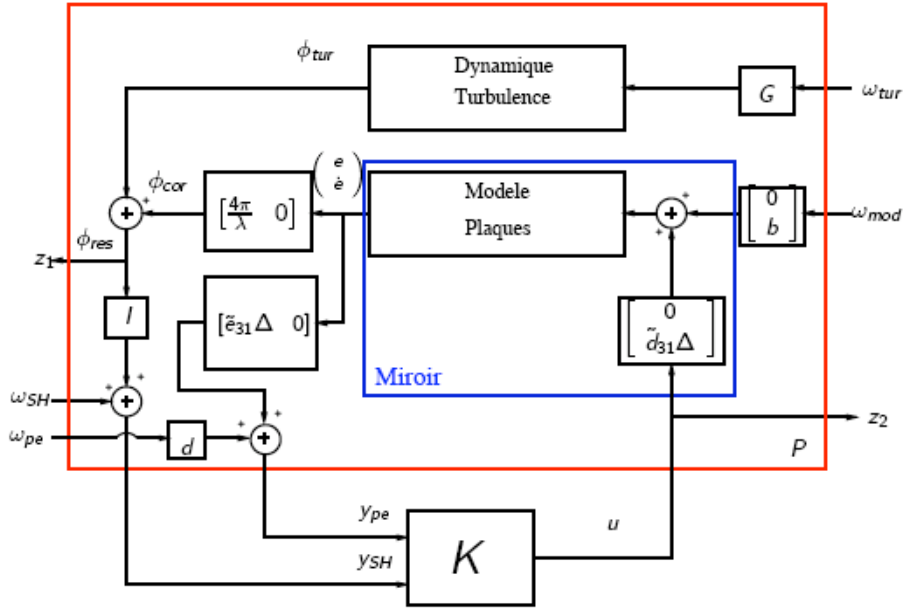


FIGURE 3.3 – Modèle standard de la boucle de contrôle d'un système d'optique adaptive.

Pour utiliser le langage propre à la représentation d'état, nous avons ainsi défini

- le vecteur d'état $X = (e, \partial_t e, \phi_{\text{tur}})^T$;
- le vecteur des perturbation en entrée $W = (w_{\text{mod}}, w_{\text{SH}}, w_{\text{tur}}, w_{\text{pe}})^T$;
- le contrôle $U = u$ qui correspond au voltage appliqué aux actionneurs piezo-électriques ;
- le vecteur des mesures en sortie $Y = (y_{\text{pe}}, y_{\text{SH}})$ composé de la mesure des capteurs piezo-électriques du miroir et de la sortie du Shack-Hartmann ;
- le vecteur de la sortie à contrôler $Z = (\phi_{\text{res}}, u)$.

Ces grandeurs sont liées par les équations modélisant le système comme suit :

$$\begin{cases} \rho \partial_{tt} e + Q_1 \Delta^2 e + Q_2 e = \tilde{d}_{31} \Delta u + b \rho w_{\text{mod}} \\ \partial_t \phi_{\text{tur}} = \mathcal{F} \phi_{\text{tur}} + \mathcal{G} w_{\text{tur}} \\ \phi_{\text{res}} = \phi_{\text{tur}} - \frac{4\pi}{\lambda} e \\ y_{\text{pe}} = \tilde{e}_{31} \Delta e + d w_{\text{pe}} \\ y_{\text{SH}} = \phi_{\text{tur}} - \frac{4\pi}{\lambda} e + c w_{\text{SH}} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

avec $\Delta = \partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}$ le Laplacien en coordonnées polaires, \mathcal{F} et \mathcal{G} des applications linéaires, b , c et d des paramètres de réglage. On a noté ρ la densité surfacique du miroir, Q_1 son coefficient de rigidité, Q_2 un coefficient de correction, et enfin, \tilde{e}_{31} et \tilde{d}_{31} des coefficients liés au matériau piezo-électrique utilisé. Nous ne détaillons pas les unités physiques des différents éléments de ce système d'edp, mais les équations aux dimensions correspondantes ont été vérifiées. Les edp sont assorties des conditions initiales appropriées, et des conditions frontière de bord libre pour le miroir (un disque Ω de rayon a) qui s'écrivent, en coordonnées polaires :

$$\partial_{rr} e + \nu \left(\frac{\partial_r e}{r} + \frac{\partial_{\theta\theta} e}{r^2} \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad \partial_r (\Delta e) + \frac{1-\nu}{r} \partial_r \left(\frac{\partial_{\theta} e}{r} \right) \Big|_{r=a} = 0. \quad (3.2.2)$$

L'edp en la variable e correspondant à la dynamique du miroir est issue de [LP07] et est assez légitimement une équation des plaques. L'équation différentielle satisfaite par ϕ_{tur} est le fruit d'une étude de la modélisation de la turbulence (via la théorie de Kolmogorov) portée par une projection sur une douzaine de polynômes de Zernike [No176] (correspondant aux principales aberrations optiques) et l'utilisation d'un filtre formeur linéaire. Les détails pourront être lus dans [12]. On donnera simplement le tableau des 15 premiers modes de Zernike : les trois premiers étant corrigés par le miroir primaire (tip-tilt), nous avons travaillé avec les 12 suivants, et qui, au total, portent 92% de l'information optique [PA93].

i	$Z_i(r, \theta)$	Name
1	1	Piston
2	$2\frac{r}{a}\cos\theta$	y tilt
3	$2\frac{r}{a}\sin\theta$	x tilt
4	$\sqrt{3}(2(\frac{r}{a})^2 - 1)$	Focus
5	$\sqrt{6}(\frac{r}{a})^2\cos 2\theta$	Astigmatism
6	$\sqrt{6}(\frac{r}{a})^2\sin 2\theta$	Astigmatism
7	$\sqrt{8}(3(\frac{r}{a})^3 - 2\frac{r}{a})\cos\theta$	Pure coma
8	$\sqrt{8}(3(\frac{r}{a})^3 - 2\frac{r}{a})\sin\theta$	Pure coma
9	$\sqrt{5}(6(\frac{r}{a})^4 - 6(\frac{r}{a})^2 + 1)$	Spherical
10	$\sqrt{8}(\frac{r}{a})^3\cos 3\theta$	Trefoil
11	$\sqrt{8}(\frac{r}{a})^3\sin 3\theta$	Trefoil
12	$\sqrt{10}(4(\frac{r}{a})^4 - 3(\frac{r}{a})^2)\cos 2\theta$	Fifth-order astigmatism
13	$\sqrt{10}(4(\frac{r}{a})^4 - 3(\frac{r}{a})^2)\sin 2\theta$	Fifth-order astigmatism
14	$\sqrt{12}(10(\frac{r}{a})^5 - 12(\frac{r}{a})^3 + 3(\frac{r}{a}))\cos 4\theta$	
15	$\sqrt{12}(10(\frac{r}{a})^5 - 12(\frac{r}{a})^3 + 3(\frac{r}{a}))\sin 4\theta$	

TABLE 3.1 – Premiers modes de Zernike

Par suite, les opérateurs correspondant à la forme standard

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + B_1W(t) + B_2U(t), \\ Z(t) = C_1X(t) + D_{12}U(t), \\ Y(t) = C_2X(t) + D_{21}W(t), \end{cases} \quad \forall t \geq 0, \quad (\mathcal{P})$$

s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\frac{Q_1}{\rho}\Delta^2 - \frac{Q_2}{\rho}I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{d}_{31}\Delta \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4\pi}{\lambda}I & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} \tilde{e}_{31}\Delta & 0 & 0 \\ -\frac{4\pi}{\lambda}I & 0 & I \end{pmatrix}, \quad D_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le miroir étant un disque Ω , le domaine de l'opérateur A est

$$\mathcal{D}(A) = H_{bc}^4(\Omega) \times H^2(\Omega) \times L^2(\Omega) = \{e \in H^4(\Omega), e \text{ vérifiant (3.2.2)}\} \times H^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

L'espace d'état s'écrit $\mathcal{X} = (L^2(\Omega))^3$ et on a par ailleurs $\mathcal{U} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{W} = (L^2(\Omega))^4$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Z} = (L^2(\Omega))^2$. Nous pouvons vérifier aisément que le théorème 2.9 s'applique à la situation que nous venons de détailler, dans les espaces fonctionnels en question (voir [12]) en appliquant essentiellement le Théorème de Lumer-Phillips [Paz83, LG99].

3.3 Simulations numériques

Dans le but de comparer les performances de notre approche en dimension infinie avec celle d'approches plus classiques, comme par exemple [PA93], nous avons effectué quelques simulations numériques. Comme mentionné en introduction de cette partie du mémoire, nous revenons à une méthode de type "early lumping" consistant à approcher le système de dimension infinie par un système tronqué de dimension finie sur lequel calculer le contrôleur robuste par les méthodes numériques usuelles. Une méthode de type "late lumping", quoique probablement plus pertinente, n'est possible que si l'on sait résoudre les équations de Riccati concernées, donc trouver P et Σ , pour pouvoir en déduire U . Cela n'a pas été possible ici.

Une approximation de dimension finie du système original est obtenue par projection des variables sur une base tronquée spécifiquement choisie pour chacun des deux états, $(e, \partial_t e)$ et ϕ_{tur} , du système. Une première base, formée des modes propres de l'opérateur Δ^2 sur le disque Ω de rayon a avec données de bord libres, servira pour la déformation $(e, \partial_t e)$ du miroir :

$$\begin{aligned} L_{kj}(r, \theta) &= a_{kj} \left(J_k \left(\frac{\lambda_{kj} r}{a} \right) + c_{kj} I_k \left(\frac{\lambda_{kj} r}{a} \right) \right) \cos(k\theta), \\ M_{kj}(r, \theta) &= a_{kj} \left(J_k \left(\frac{\lambda_{kj} r}{a} \right) + c_{kj} I_k \left(\frac{\lambda_{kj} r}{a} \right) \right) \sin(k\theta), \quad \forall (k, j) \in \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires de $x \in \Omega$, J_k et I_k sont les fonctions de Bessel respectivement ordinaires et modifiées de première espèce et d'ordre k , et $(\frac{\lambda_{kj}}{a})^4$ la valeur propre associée (voir par exemple [Ble79] et [Lei69]). Les coefficients λ_{kj} , c_{kj} et a_{kj} dépendent des conditions de bord et de normalisation des fonctions propres. La famille $\{L_{kj}, M_{kj}, (k, j) \in \mathbb{N}^2\}$ est alors une base Hilbertienne de $H_{bc}^4(\Omega)$. La seconde base, utilisée pour la turbulence atmosphérique ϕ_{tur} , est formée des polynômes de Zernike. Les détails et les valeurs des différents coefficients sont disponibles dans [12] ou [23].

Une fois préparés ainsi aux simulations numériques, nous avons choisi d'utiliser les données physiques du dispositif du projet SESAME de l'Observatoire de Paris (que nous ne rappelons pas ici). Ils utilisent un miroir bimorphe composé de 31 actionneurs piezo-électriques. Nous avons simulé uniquement les 12 modes suivant les 2 tilts (voir tableau 3.1) et la performance du contrôle est évaluée par comparaison des normes $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ de ϕ_{res} et ϕ_{tur} , comme c'est par exemple le cas dans [RCK⁺04]. Nous avons ensuite effectué des simulations de Monte-Carlo et noté une atténuation de la distorsion de phase du front d'onde réfléchi de 48% (voir Figure 3.4), comparable à celle de [PA93]. Cette comparaison, bien que préliminaire, montre au moins la pertinence de cette nouvelle approche.

Ces simulations, qui concluent notre étude d'un système d'optique adaptative, présentent un début prometteur d'une approche très différente de ce qui est traditionnellement envisagé. Et contrairement à beaucoup de références, (e.g. [KRP⁺06]) nous n'avons pas de matrice d'interaction à calculer de manière récurrente.

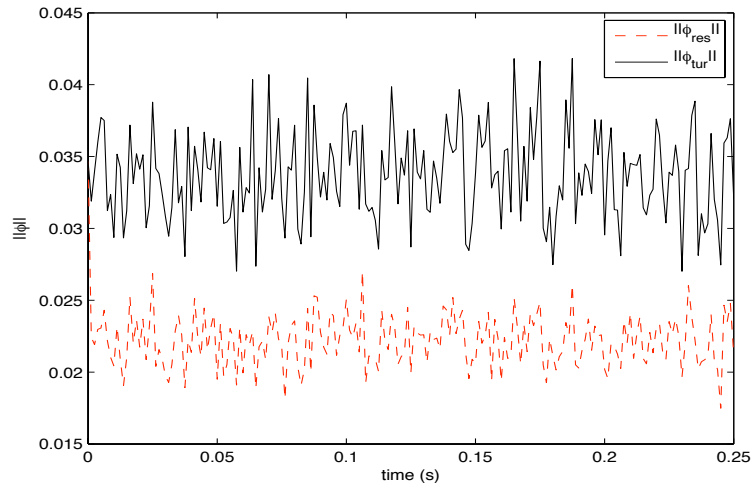


FIGURE 3.4 – Evolution temporelle de $\|\phi_{\text{tur}}\|_{L^2(\Omega)}$ (-) et de $\|\phi_{\text{res}}\|_{L^2(\Omega)}$ (- -)

3.4 Perspectives

Dans ces travaux, le système considéré a été reformulé dans un cadre espace d'état pour en étudier le contrôle robuste H_∞ . Une première motivation était que la théorie du contrôle H_∞ est désormais bien établie, même dans le cadre de la dimension infinie, et que ce type de contrôleurs fournit des propriétés intrinsèques de robustesse. Une autre motivation était la nature réellement multi-variables de ce problème de contrôle. Nous pouvons souligner que nous avons utilisé une approche complètement nouvelle dans ce domaine, en considérant un modèle dynamique du miroir bimorphe. Nous ne prétendons cependant pas dépasser les méthodes usuelles en optique adaptative mais essentiellement préparer une nouvelle approche de ce type de problèmes prenant en compte certaines caractéristiques intrinsèques du système.

Les contacts avec des équipes ayant accès à un banc d'essai n'ayant pas eu l'occasion de s'approfondir, je n'ai pas continué à travailler dans cette thématique. Néanmoins, un point de départ pour la poursuite de travaux théoriques sur le sujet serait de prendre en compte d'une part des non-linéarités de type saturation ou d'hystérésis des matériaux piezo-électriques (effet mémoire) et d'autre part un modèle de l'analyseur de Shack-Hartmann, éventuellement avec un terme de retard, ou d'échantillonnage concernant le traitement des mesures effectuées. Par ailleurs, il serait pertinent de faire l'analyse d'une modélisation de type système à temps discret [Loo10]. On peut enfin signaler de nouvelles applications des procédés d'optique adaptative en ophtalmologie. C'est un sujet étudié par exemple dans [IWBA10] où l'on trouve du contrôle H_∞ avec modèle d'état de dimension finie et en temps discret pour une application à la médecine de l'oeil. À plus long terme, nous pourrions imaginer travailler, toujours avec cette approche à partir de modèle edp, sur ce nouveau type de dispositif.

Chapitre 4

Contrôle actif des vibrations d'un système fluide/structure

Résumé : Ces travaux ont été effectués dans le cadre du co-encadrement avec Christophe Prieur (GIPSA-lab, Grenoble) de la thèse (2007-2010) de Bogdan Robu, sur des problèmes d'interaction fluide /structure et de contrôle actif de vibrations. Cela a permis la diversification de mes sujets d'application en contrôle robuste, mais le système edp considéré n'a pas été, au final, un candidat entrant simplement dans le cadre 'représentation d'état' pour la commande robuste présenté en introduction de cette partie de mon mémoire. Cela semble essentiellement dû à la nature du système que nous n'avons pas su écrire comme un modèle standard en dimension infinie. Ce chapitre présentera donc les équations du modèle en question, ainsi que les résultats obtenus avec notre doctorant sur le modèle tronqué de dimension finie. Ces travaux ont donné lieu à plusieurs articles de conférence [22, 21] et articles de journaux [8, 7, 6].

4.1 Description du système

Parmi la large classe des problèmes de contrôle des interactions fluide-structure, nous nous sommes intéressés au problème spécifique et original du contrôle actif de l'interaction des modes de ballonnement d'un fluide dans un réservoir avec les modes de vibration de structure du support de ce réservoir. Le dispositif plus précisément étudié en est un exemple typique, étant constitué par une plaque équipée d'un réservoir à une extrémité et de capteur/actionneurs piezoélectriques à l'autre.

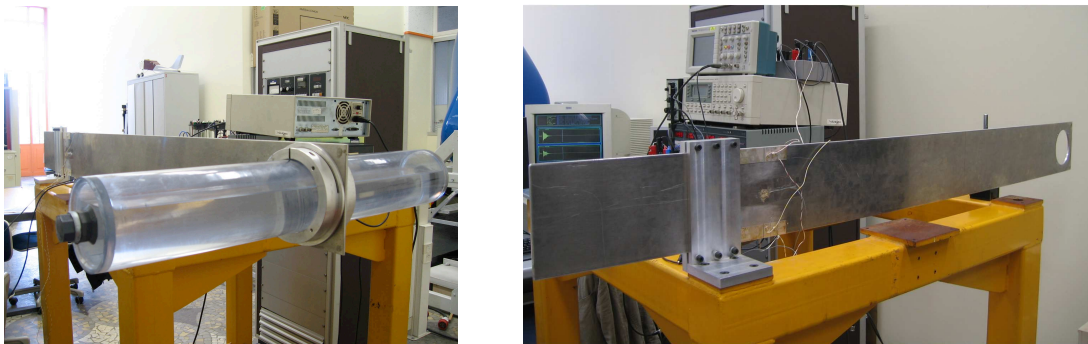


FIGURE 4.1 – Banc d'essai - ISAE ENSICA - avec et sans réservoir encastré.

Afin de satisfaire des contraintes de performance et de confort sur les lois de pilotage, il est nécessaire de quantifier et de contrôler les phénomènes affectant les modes de structures des ailes d'avion. Le fait que ces phénomènes dépendent du niveau de remplissage du réservoir que ces ailes contiennent introduit des contraintes supplémentaires de robustesse. Ces phénomènes physiques sont étudiés à travers ce dispositif expérimental (voir la photo donnée par la Figure 4.1) reproduisant leur comportement dynamique, élaboré à l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE).

Plusieurs étapes jalonnent cette étude : la modélisation des modes souples d'une aile d'avion et des phénomènes de ballonnement, la réduction de modèle appropriée afin d'obtenir un modèle de comportement utilisable puis la synthèse de lois de commande robustes. Les travaux ont donné lieu à des articles détaillant la modélisation mathématique (en dimension finie et infinie) du dispositif expérimental, et les résultats numériques et expérimentaux obtenus, selon les cas, par des contrôleurs par placement de pôle [6], avec retour d'état couplé à un observateur de type Luenberger [8], par commande robuste H_∞ directement ou après réduction de modèle [7].

4.2 Modèle de dimension infinie

Nous allons donner ici les principales étapes de la construction d'un modèle à base d'équations aux dérivées partielles du système qui nous intéresse. Le dispositif expérimental est composé d'une longue plaque en métal, encadrée à une extrémité, libre sur ces trois autres cotés et perforée à la limite de son autre extrémité d'un large trou circulaire permettant l'encastrement d'un réservoir cylindrique horizontal (voir les Figures 4.2 et 4.3 ci-dessous), que l'on remplira d'un certain niveau de liquide.

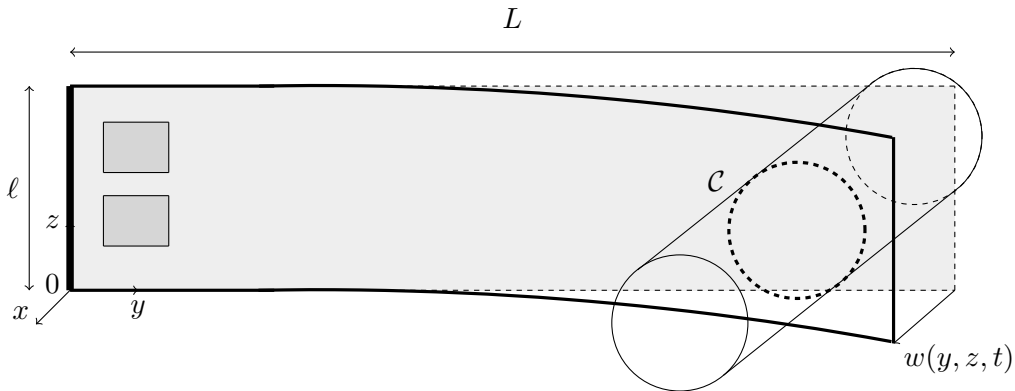


FIGURE 4.2 – Schéma du dispositif *plaque + réservoir*.

Modèle des vibrations de la plaque. Nous considérons cette plaque vibrante sous des hypothèses physiques raisonnables, et elle est ainsi modélisée par l'edp suivante (on consultera [Ble79, Chapitre 11.1] ou [GR96, Chapitre 4.6] pour plus de détails à ce sujet) :

$$m_s \partial_{tt} w + \zeta \partial_t w + D \Delta_{(y,z)}^2 w = F, \quad \text{dans } [0, L] \times [0, l] \times (0, T). \quad (4.2.1)$$

Le déplacement transversal de la plaque qui nous intéresse principalement est noté $w = w(y, z, t)$. L'opérateur linéaire ζ modélise l'amortissement naturel des vibrations de la plaque et $\Delta_{(y,z)}$ est l'opérateur Laplacien, c'est-à-dire $\Delta_{(y,z)} = \partial_{yy} + \partial_{zz}$. La plaque est caractérisée par sa densité surfacique m_s , et sa rigidité flexionnelle D .

L'équation (4.2.1) est assortie de conditions initiales appropriées. Les conditions de bord extérieur (encastré-libre-libre-libre) du mouvement de la plaque (voir e.g. [Ble79]) s'écrivent :

$$\begin{aligned} w = \partial_y w = \partial_z w = 0, & \quad \text{sur } \{0\} \times [0, \ell], \\ \partial_{yyy} w = \partial_{zzz} w = \partial_{yy} w = \partial_{zz} w = 0, & \quad \text{sur } \{L\} \times [0, \ell], \\ \partial_{yyy} w = \partial_{zzz} w = \partial_{yy} w = \partial_{zz} w = 0, & \quad \text{sur } (0, L) \times \{0, \ell\}. \end{aligned}$$

Enfin, la distribution surfacique des forces extérieures auxquelles la plaque est soumise est notée F et elle se déduit plus précisément de la somme des forces exercées par les actionneurs (que je ne détaillerai pas ici, voir e.g. [CP06] ou [7]) et des forces exercées par les modes de ballonnement du liquide se trouvant dans le réservoir. Nous y reviendrons dans l'écriture du couplage du liquide et de la plaque.

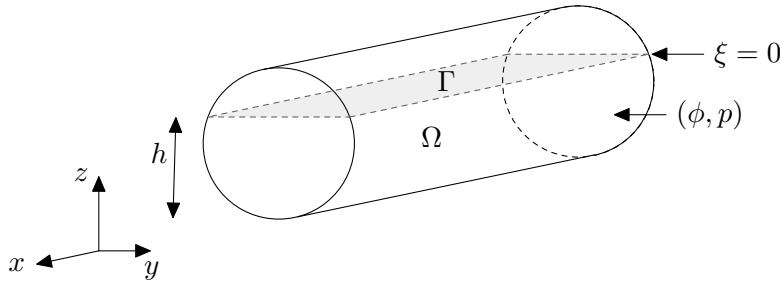


FIGURE 4.3 – Schema du réservoir de liquide.

Modèle du ballonnement du liquide dans son réservoir. Nous renvoyons au livre [Sto57] pour tous les détails concernant la modélisation des écoulements de liquides non visqueux et incompressibles.

Ainsi, considérant maintenant le mouvement longitudinal (selon l'axe $(0x)$) du fluide parfait incompressible et irrotationnel se trouvant dans le réservoir, l'équation de continuité du liquide qui occupe le volume Ω , s'écrit

$$\Delta\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0, \quad \forall(x, y, z) \in \Omega, \quad (4.2.2)$$

où $\phi(x, y, z, t)$ est le potentiel de vitesse du liquide. Le volume Ω possède une frontière libre (ou surface) Γ et des "parois", notées $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Une première condition de bord au niveau des parois est alors

$$\nabla\phi \cdot \nu = 0, \quad \forall(x, y, z) \in \partial\Omega \setminus \Gamma. \quad (4.2.3)$$

L'équation du mouvement du liquide prend ensuite la forme de la loi de Bernoulli une fois linéarisée (voir aussi [Dod00]) :

$$\partial_t\phi(x, y, z, t) + \frac{p(x, y, z, t)}{\rho} + gz - \alpha(t)x = 0, \quad \forall(x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T). \quad (4.2.4)$$

L'accélération subie par le réservoir le long de l'axe $(0x)$ est notée α et g est la constante de gravitation ; le liquide est caractérisé par sa densité ρ et sa hauteur moyenne au repos h et on a noté

$p = p(x, y, z, t)$ la pression dans le liquide. Soit maintenant $\xi = \xi(x, y, t)$ la fluctuation du niveau du liquide par rapport à sa hauteur moyenne au repos h , c'est-à-dire

$$z = h + \xi(x, y, t) \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma$$

On trouvera dans [Sto57, Rob10] des détails liés à cette modélisation, et en particulier les explications des simplification et linéarisation permettant d'écrire l'équation dynamique suivante à la surface libre Γ du liquide (voir [Dod00]), qui est une autre condition de bord de l'équation de Laplace (4.2.2) :

$$\partial_t \xi(x, y, t) = \partial_z \phi(x, y, h, t), \quad \forall (x, y, z, t) \in \Gamma \times (0, T). \quad (4.2.5)$$

On peut lui adjoindre une seconde condition au bord libre du liquide, où l'on suppose $p = 0$ dans (4.2.4)

$$\partial_t \phi(x, y, h, t) = -g\xi(x, y, t) + \alpha(t)x, \quad \forall (x, y, z, t) \in \Gamma \times (0, T). \quad (4.2.6)$$

On peut lire dans [Sto57] des détails sur la détermination unique de la solution ϕ de ce type de modèle de continuité du liquide (équation de Laplace (4.2.2) avec conditions de bord (4.2.3), (4.2.5) et (4.2.6)). Il faudra par contre se doter de conditions initiales pour ξ .

Remarque 4.1. *A ce stade, il n'est pas clair qu'il soit possible de décrire le système complet sous la forme standard d'un modèle d'état linéaire de dimension infinie, même avant de travailler sur le couplage de ces équations. Je tiens juste à donner ici une idée des difficultés rencontrées. Les variables caractérisant l'état s'imposent pour le moment comme étant $(w, \partial_t w)$ pour la plaque, et (ξ, ϕ, p) pour le fluide. Mais on remarquera dès maintenant que la pression p dans le liquide est une variable pour laquelle nous n'avons pas d'équation dynamique et que l'équation de Laplace vérifiée par ϕ ne trouvera pas non plus sa place dans ce formalisme classique (i.e. prenant la forme (P) présentée en introduction).*

Ceci étant dit, même une orientation vers une formulation de type descripteur de l'équation d'état (pour peut-être travailler à partir des références [LMPR09] et [Rei08] par exemple) n'est pas claire. Cela correspondrait à entrer dans le formalisme

$$EX' = AX + B_1W + B_2U \quad (D)$$

où E est une matrice singulière. Ici, on aurait par exemple

$$X = (w, \partial_t w, \xi, \phi, p)^T \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cependant, si dans l'équation (4.2.4), $\alpha(t)x$ est supposé provenir du couplage avec les vibrations de la plaque et s'écrire à l'aide de w , par contre gz ne saurait s'écrire en fonction de ϕ , ξ ou p . Par ailleurs, si l'on se contente de considérer la variable ϕ à la surface libre du liquide (pour éliminer le terme en gz), ce sont les termes de couplage, que nous allons détailler ci-dessous, qui ne sont plus correctement décrits.

Il faut probablement trouver une autre approche permettant d'écrire un modèle d'état à partir de ces edp, choisir l'état du système autrement... et nous allons brièvement expliquer pourquoi les termes de couplages ne simplifient en rien la tâche en question. On peut cependant mentionner l'article [Ray10] qui étudie la stabilisation par feedback d'un modèle fluide/structure composé d'un équation de Navier-Stokes dans un rectangle couplée à une équation des poutres (Euler-Bernoulli) sur une partie de sa frontière. La commande est calculée à l'aide d'une équation de Riccati et un projecteur de Leray est utilisé pour ré-écrire le système linéarisé (voir aussi [NR13]). C'est une approche que nous n'avons pas tenté d'utiliser mais qui pourrait peut-être lever une partie des problèmes rencontrés.

Couplage des modèles. Nous terminerons l'écriture de notre modèle edp avec celle des termes de couplage entre les deux éléments (fluide et plaque) du système.

D'une part, l'influence des vibrations de la plaque sur le ballonnement du liquide se résume au calcul de l'accélération α intervenant dans l'équation (4.2.4). Elle s'exprime simplement en fonction de $\partial_{tt}w$ considéré au centre de gravité, noté $G = (y_G, z_G)$ dans le repère de la plaque, du réservoir cylindrique empli de liquide au repos. Ainsi, on peut écrire que

$$\alpha(t) = -\frac{\zeta}{m_s} \partial_{tt}w(y_G, z_G, t) - \frac{D}{m_s} \Delta_{(y,z)}^2 w(y_G, z_G, t).$$

Il faut alors noter que le couplage est localisé en espace (on peut aussi imaginer l'écrire sous forme intégrale en considérant une moyenne des accélérations évaluées au niveau de l'encastrement).

D'autre part, l'influence du ballonnement du liquide sur les vibrations de la plaque se calcule à l'aide de la force transversale exercée par les mouvements du liquide. On peut formuler cette action comme une donnée à la frontière \mathcal{C} de la cavité circulaire de la plaque, ou bien comme une force répartie sur la partie virtuelle de la plaque située à l'intérieur de \mathcal{C} . Quel que soit le choix, il faut ensuite en écrire la résultante en terme de source F de l'edp (4.2.1).

Nous faisons l'hypothèse que le liquide ne connaît pas de mouvement le long de l'axe $(0y)$, et ne se déplace que selon l'axe $(0x)$. Cela permet de conclure que si l'on note F^{liq} la force de ballonnement que le liquide exerce le long de l'axe $(0x)$ (les composantes selon y et z sont nulles), alors en utilisant la relation (4.2.4) simplifiée en $p = -\rho(\partial_t\phi + gz)$ et en notant l la longueur du cylindre et l_z la largeur du cylindre à la hauteur z , on a :

$$\begin{aligned} F^{\text{liq}}(t) &= \int_0^h \int_0^{l_z} p(l/2, y, z, t) - p(-l/2, y, z, t) dydz \\ &= -\rho \int_0^h \int_0^{l_z} \partial_t\phi(l/2, y, z, t) - \partial_t\phi(-l/2, y, z, t) dydz. \end{aligned}$$

On peut lire dans [Rob10, Dod00] les explications concernant le déplacement du centre de gravité du liquide et permettant de comprendre que seuls les modes de ballonnement antisymétriques ont une action sur le déplacement du réservoir, ce qui donne finalement :

$$F^{\text{liq}}(t) = -2\rho \int_0^h \int_0^{l_z} \partial_t\phi(l/2, y, z, t) dydz.$$

L'action du ballonnement du liquide est ensuite introduite dans l'équation des plaques (4.2.1). On peut par exemple calculer la répartition de la force F^{liq} sur le bord \mathcal{C} de l'encastrement du cylindre et elle devient alors une condition frontière résumée dans le terme F de (4.2.1). On peut la répartir à l'intérieur de \mathcal{C} comme évoqué plus haut. On peut aussi calculer le moment induit aux différents points de la plaque par cette force appliquée au centre de gravité G . Il nous faut signaler ici que les rares références où un réservoir cylindrique horizontal contenant du liquide est étudié suggèrent toutes à ce stade (le calcul des forces ou moments du ballonnement) de travailler avec un modèle rectangulaire équivalent. C'est le choix qui a été fait dans le cadre de la thèse de B. Robu également.

Cette longue présentation, que nous ne poussons pas plus avant, avait pour objectif de présenter le modèle le plus fidèlement possible tout en restant dans le cadre de la dimension infinie. C'est aussi l'occasion de justifier le travail anticipé de passage à la dimension finie pour aborder les questions de commande robuste qui étaient au coeur de la thèse de B. Robu.

4.3 Modèle mécanique équivalent et commande robuste

La modélisation de dimension infinie que nous venons de présenter n'a été ni complètement écrite dans [Rob10] ni utilisée ultérieurement pour les problèmes de cadre théorique que j'espère avoir su pointer. Néanmoins, les travaux effectués dans cette thèse ne se sont pas arrêtés à ces limitations et la première tâche fut de construire un modèle équivalent de dimension finie le plus fidèle possible au formalisme edp que nous avons alors à disposition (essentiellement sans formulation du couplage en dimension infinie).

Je ne vais pas donner ici beaucoup de détails sur ce travail, qui est présentés à la fois dans [Rob10] et dans [7] (ainsi que dans le papier de conférence [22]). La modélisation de dimension finie des balottements du liquide a été effectuée par modèle mécanique équivalent, écrit à l'aide de M pendules dont l'action globale (liée aux poids, longueurs et points d'attache) devait imiter celle du modèle edp. L'équation modélisant la plaque vibrante est quant à elle discrétisée par projection sur les N premiers modes propres associés à l'opérateur Δ^2 sur la plaque rectangulaire avec bords encastré-libre-libre-libre. Les couplages sont écrits après ces deux passages à la dimension finie. On peut également lire dans [7] l'ajustement du modèle théorique avec la réalité du système étudié, ou "*model matching*", effectuée par essai/erreur à la lecture du diagramme de Bode correspondant (Voir Figure 4.4).

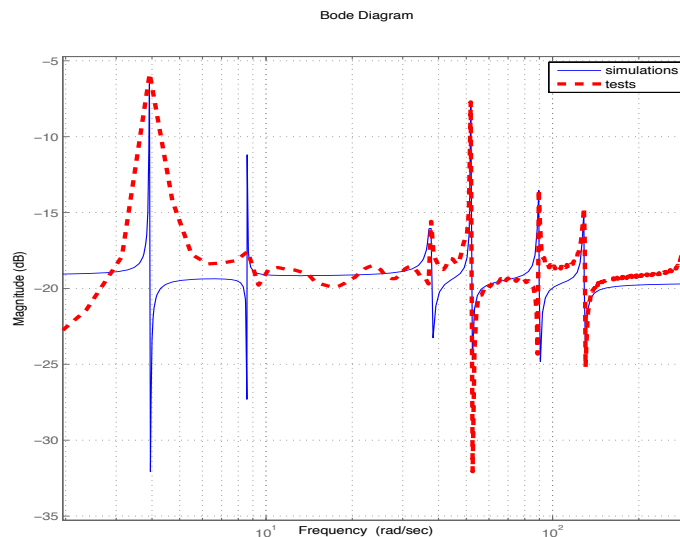


FIGURE 4.4 – Ajustement des fréquences pour un remplissage du réservoir à 90% : modèle simulé numériquement (—) / modèle expérimental (- -)

Le modèle étant alors adapté à l'étude de la commande par retour de mesure, l'objectif était double : en faire une étude numérique poussée, mais aussi implémenter les contrôleurs calculés sur le dispositif de test à notre disposition.

Dans un premier temps, [22] étudie la commande par placement de pôle du système écrit pour $N = 3$, $M = 2$ et présente les simulations numériques et expériences sur le banc de test, en vue de valider l'approximation du modèle. A ce stade, aucun amortissement n'est pris en compte et c'est un contrôleur calculé par retour d'état (et en utilisant un observateur de Luenberger) qui est utilisé. Pour $N = 5$, $M = 3$ et avec la prise en compte d'un terme d'amortissement ζ devant être ajusté, l'article [8] détaille la procédure de contrôle par placement de pôle (voir les exemples de la Figure 4.5) et [6] compare également les résultats avec un contrôleur H_∞ . On s'intéresse par ailleurs à la contribution

énergétique de chaque mode de vibration du système complet, à lire dans [6], pour expliquer que prendre en compte $N + M = 8$ modes, c'est déjà considérer 95% de l'énergie totale, tandis que le premier mode de flexion de la plaque en contient déjà près de 63%.

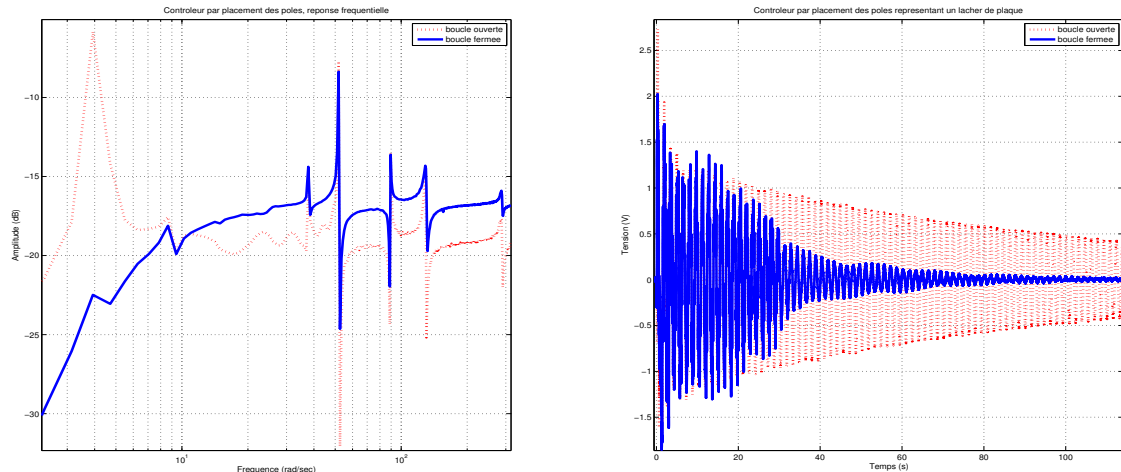


FIGURE 4.5 – Exemple de réponses fréquentielle et temporelle d'une méthode par placement de pôle en test expérimental : boucle ouverte (- -) / boucle fermée (-).

Dès que l'on souhaite prendre en compte tous ces modes de vibration N et de ballonnement M , se pose le problème de la taille du contrôleur que l'on doit calculer. C'est une question qui est traitée dans [21, 7] avec l'utilisation du package *HIFOO* dans MATLAB [GHMO09] pour le calcul de contrôleur robuste H_∞ (voir l'exemple donné dans la Figure 4.6 pour un contrôleur d'ordre réduit égal à 1). Ce package permet par ailleurs de calculer des contrôleurs simultanés pour plusieurs objectifs de performance. Nous l'utilisons donc également dans [21, 7] pour traiter simultanément le cas de plusieurs niveaux de remplissage du réservoir, ce qui est particulièrement intéressant au regard des applications concernées par ce dispositif.

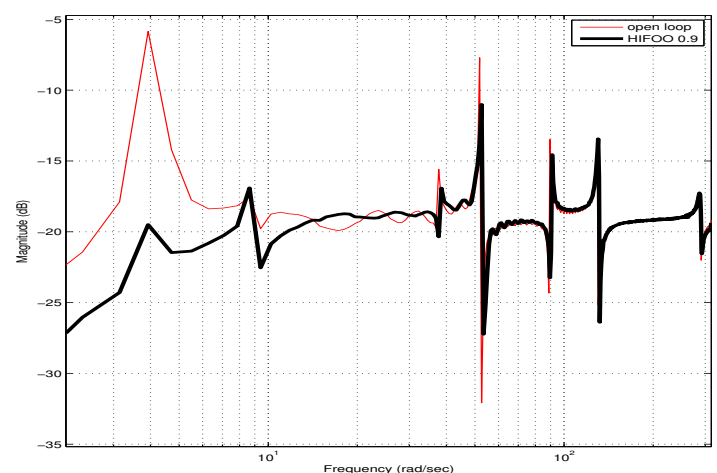


FIGURE 4.6 – Exemple de réponse fréquentielle, en test expérimental, avec un contrôleur *HIFOO* d'ordre 1.

Enfin, à plusieurs reprises dans ces articles, la question du phénomène de spillover est évoquée, sans pour autant constituer un problème insurmontable dans le dispositif que nous étudions. D'une part, c'est probablement grâce à l'amortissement naturel ζ que nous échappons à ce type de problème où l'on attend usuellement que le contrôleur de $N + M$ modes soit excitant pour les modes suivants. D'autre part, quand un spillover est observé, la mise en place d'un filtre passe haut sur la sortie contrôlée permet d'obtenir de bons résultats [7].

4.4 Perspectives

L'intérêt et la difficulté majeure de ces travaux auront été de considérer une approche très étendue des questions de commande d'un dispositif de couplage fluide/structure, allant de la modélisation à base d'edp au calcul numérique de contrôleurs et à leur implémentation sur un dispositif expérimental. J'ai voulu donner ici quelques éléments détaillés de modélisation du système à l'aide d'edp, mais ils sont loin d'avoir été complètement exploités pour le moment, n'entrant pas simplement dans le cadre standard le plus répandu dans la littérature en dimension infinie.

Du point de vue de la modélisation en dimension infinie, deux pistes sont envisageables. On peut d'une part évoquer l'utilisation de projecteur de Leray, utilisé pour écrire le système différemment (voir e.g. les dispositifs fluide/structure étudiés à l'aide d'équation de Riccati dans [Ray10, NR13]). C'est une approche qui pourrait éventuellement lever une partie des problèmes de modélisation que nous avons identifiés. J'ai par ailleurs repéré récemment les articles [LMPR09] et [Rei08] (le système de Stokes, rappelant nos problèmes de modélisation du ballonnement, fait partie des exemples donnés) où quelques pistes de travail doivent être envisageables puisqu'ils s'intéressent à des modèles de type *descripteurs* en dimension infinie. On peut enfin imaginer des approches en terme de modélisation simplifiée, mais toujours en dimension infinie, utilisant un modèle edp de type *plaque + ondes* par exemple.

Par ailleurs, il reste des questions toujours d'actualité de modélisation plus fine en dimension finie de la structure couplée concernée, d'analyse modale et d'identification des paramètres du système. Un des objectifs serait effectivement de pouvoir aborder avec plus de précision encore les questions de commande robuste des vibrations du système, par exemple en disposant de plus de capteurs (pour le niveau de liquide entre autre). Il serait aussi intéressant dans ce cadre de dimension finie dans un premier temps, d'analyser quelques aspects non-linéaires du modèle, concernant par exemple les actionneurs et les phénomènes d'hystérésis ou de saturation des matériaux piézo-électrique.

Chapitre 5

Autres perspectives de recherche

Au delà des différentes perspectives que j'ai pu dégager des travaux spécifiques qui m'ont occupée ces dernières années, j'aimerais présenter ici brièvement quelques-unes des autres pistes de recherche que je souhaite explorer dans les années à venir, les premières ayant été présentées à la fin de chaque chapitre concerné. Celles-ci sont le fruit de discussions préliminaires que j'ai pu avoir avec divers collaborateurs et se présentent en partie en rupture avec les approches que j'ai pu avoir jusqu'à présent.

5.1 Stabilisation d'équations aux dérivées partielles

Un premier thème intéressant trouve de nouveau racine dans l'utilisation de techniques issues de l'automatique en dimension finie dans le cadre de l'étude du contrôle et de la stabilisation d'équations aux dérivées partielles. Ce projet de recherche sera exploré en collaboration avec Alexandre Seuret et Frédéric Gouaisbaut, deux de mes collègues du groupe MAC au LAAS.

Nous nous intéressons à l'étude des propriétés de stabilité et contrôle pour des systèmes linéaires de dimension infinie, écrits à l'aide d'équations aux dérivées partielles ou d'équations différentielles fonctionnelles (dites à retard). L'émulation scientifique entre systèmes à retard et systèmes de type edp doit permettre à ces travaux de tirer parti des méthodes et outils propres à chacun de ces domaines que nous couvrons par nos expertises respectives.

Mes deux collègues ont développé, dans de récents travaux (e.g. [SGA13, SGF13] et [SG13b]), l'utilisation de différentes inégalités intégrales pour faire de nouvelles démonstrations de la stabilisation de systèmes à retard ou à données échantillonnées. L'idée de départ consiste à utiliser une inégalité de Wirtinger pour améliorer les résultats traditionnellement obtenus à l'aide de l'inégalité de Jensen [SG13b] permettant de traduire les conditions de stabilité d'un système sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Ils parviennent ainsi à réduire le conservatisme que l'approche usuelle introduit dans les conditions de stabilité. Leur approche a également évolué et ils utilisent maintenant une décomposition sur une base de polynômes de Legendre, associée ensuite à une inégalité de Bessel, et ils obtiennent des résultats très efficaces [SG13a] dans le cadre des systèmes à retard. Or il se trouve que l'analyse de stabilité d'edp ou de systèmes à retard peut être menée à l'aide de fonctionnelles de Lyapunov très similaires [FO09]. Nos travaux s'appuieront sur les approches récentes de stabilisation des systèmes à retard présentés dans [SG13b] se basant sur des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Notre projet est donc l'étude exploratoire de l'extension de ces approches 'améliorées' à des systèmes edp pour leur stabilité, leur contrôle et leur approximation (avec conservation des propriétés de stabilité par exemple...). Des applications à la stabilisation d'équations aux dérivées partielles hyperboliques d'ordre 1 ou 2 sont envisagées, et il faudra savoir se positionner par rapport, entre autres, à [CdNB07], aux approches récentes de type backstepping [SCK10] ou aux

classiques, e.g. [Kom97]. On imagine aussi travailler à l'étude de systèmes à données échantillonnées, comme c'est le cas dans [LF12] où, pour un retard constant, ce sont de nouvelles fonctionnelles de Lyapunov discontinues qui sont introduites et mènent à des conditions de stabilité formulées à l'aide de LMI simplifiées (voir aussi [FB12] concernant une edp parabolique).

5.2 Prise en compte de contraintes pour les systèmes edp

J'envisage une seconde approche des questions d'analyse en stabilité et/ou performance ou encore de synthèse de contrôleurs pour les systèmes edp, cette fois-ci avec prise en compte de non-linéarités isolées (saturations [TQA⁺11], hystérésis [MNZ93], zones mortes, ...) en collaboration avec Sophie Tarbouriech (MAC, LAAS) et Christophe Prieur (GIPSA, Grenoble). Des travaux qu'ils ont encore en cours [PGdSJT13] s'intéressent à des edp hyperboliques en dimension 1 d'espace (équations des ondes et des poutres) avec prise en compte de saturation en amplitude des actionneurs (la saturation étant encapsulée dans une condition de secteur). Leur approche est de type Lyapunov et ils ont des résultats de stabilité globale asymptotique. Nous avons pour projet d'étudier dans un premier temps des questions d'analyse de stabilité locale impliquant alors la détermination, ou au moins la caractérisation d'une estimation, du bassin d'attraction pour l'équation des ondes avec commandes bornées ou saturantes. Il faudra alors être capable d'étendre les résultats obtenus pour tenir compte des contraintes technologiques en amplitude et en vitesse des actionneurs (ce qui est par exemple le cas pour des actionneurs piézo-électriques). D'autres types de non-linéarités isolées seront considérés dans un second temps, ainsi que des modèles edp appropriés aux applications envisagées.

Pour reprendre l'étude de matériaux piézo-électriques présents dans les dispositifs exposés dans la partie II de ce manuscrit, on peut souligner que la présence de non-linéarités et de saturations dans les capteurs et les actionneurs de ce type de matériau intelligent pose des problèmes d'analyse. Traiter du problème d'analyse du domaine de fonctionnement sûr (performances requises, stabilité, contrôlabilité à zéro...) pour le système bouclé avec différents modèles d'actionneur et/ou de capteurs saturants implique le développement de techniques et de méthodes adaptées, comme [TPGdS06] dans les cas de la dimension finie. En débordant du cadre du problème d'analyse (contrôleur supposé connu), il est intéressant d'aborder les problèmes de retouches du contrôleur ou d'ajout de boucles supplémentaires afin, par exemple, que la saturation envisagée ne dégrade pas (trop) les propriétés attendues pour le système bouclé. C'est dans ce contexte que l'approche appelée *anti-windup* (voir par exemple, [TGGQ11] et [ZT11]) peut être considérée, afin d'étendre les résultats préliminaires obtenus dans [TPGdSJ05].

Enfin, un autre type de contraintes dont il convient de tenir compte sont les contraintes d'information ou de communication [EM01]. Ainsi, j'aimerais également aborder avec Sophie Tarbouriech et Luca Zaccarian (MAC, LAAS), le cas où l'entrée d'un système edp est discrète (échantillonnée ou quantifiée), ce qui constitue une première classe de système avec information limitée sur l'entrée. Dans ce contexte les techniques de commande classiques ne s'appliquent plus directement. Considérant une loi de commande connue, il s'agirait alors d'étudier sous quelles conditions les propriétés de stabilité et performance sont préservées. Il serait alors intéressant en combinant une approche basée sur l'utilisation de fonction d'énergie (fonction de Lyapunov) adéquate et les techniques basées événement (event-triggered [Tab07]) d'adapter les résultats obtenus dans le cadre des systèmes continus de dimension finie [SPTZ13].

5.3 Identification de paramètres en biologie

Dans l'objectif d'aborder la question plus pratique de l'identification des paramètres dans un système formulé à l'aide d'edp, je commence à travailler avec Isabelle Queinnec (MAC, LAAS) sur un

modèle issu de la biologie (biofiltres). Dans le domaine du traitement des eaux usées ou à potabiliser, l'utilisation de filtres biologiques représente une voie alternative aux stations d'épuration ou de potabilisation. Ces filtres biologiques sont classiquement décrits par des modèles d'edp paraboliques [ZQW12]. Lors de cette étape de modélisation, un point clé réside dans l'identification des paramètres du modèle. D'un point de vue mathématique, le problème inverse de détermination de paramètres à partir de mesures sur les solutions impose de s'intéresser aux aspects d'identifiabilité (au sens unicité et stabilité du problème inverse) puis d'identification proprement dit. Dans ce contexte, notre projet commun comporte deux aspects. Le premier concerne le lien entre le modèle et les mesures disponibles à travers l'étude du problème direct (qui prend la forme d'un système d'edp paraboliques et de transport couplées) puis du problème inverse. L'objectif est ainsi de construire le problème d'identification en trouvant un compromis entre la complexité du modèle edp (et donc du nombre et du type de paramètres impliqués dans le modèle) et les mesures disponibles. Le problème peut aussi s'exprimer comme la description des mesures nécessaires pour garantir l'identifiabilité des paramètres d'un modèle donné (voir e.g. [CGHR12]). Le deuxième aspect des travaux envisagés concerne l'identification proprement dite des paramètres par des techniques d'optimisation non-linéaire. Dans ce cadre là, et pour faire suite à l'approche décrite dans [ZQW12] (en dimension finie) une étude orientée observateurs (en dimension infinie) nous semble également être une piste à considérer dans la lignée des travaux [IRT11]. La mise en place d'une collaboration avec Ghislain Haine (DMIA ISAE, Toulouse) me permettra de travailler à la frontière entre les questions de problèmes inverses pour les edp que je traite par une approche très théorique jusqu'à présent (cf Partie I du manuscrit) et des techniques d'identification à base d'observateurs pour les edp qu'il a utilisées dans ses travaux de thèse [Hai12] (voir aussi [HR12]).

5.4 Commande active de vibrations d'un cable incliné

Je terminerai ce dernier chapitre en évoquant des travaux en cours en collaboration avec David Wagg, Simon Neild (Dynamics and Control research group, de l'Université de Bristol, Royaume Uni) et Aude Rondepierre (IMT et INSA, Toulouse). J'ai été accueillie au *Department of Mechanical Engineering* de l'Université de Bristol ces deux dernières années et si le cadre s'est aussi montré propice à la rédaction de ce manuscrit d'HdR, il a surtout permis la mise en place d'un travail commun que je vais détailler ici.

Mon projet en arrivant à Bristol était de mettre en place avec ces nouveaux collègues un sujet de recherche sur la commande active de vibrations, à mi-chemin entre leur expertise en ingénierie mécanique et contrôle de vibrations non-linéaires et la mienne, en contrôle d'équations aux dérivées partielles (edp). Au cours de nos premiers échanges, nous avons pu identifier un sujet d'intérêt commun concernant la commande des vibrations d'un cable incliné comme ceux que l'on trouve dans les ponts haubanés, et dont la modélisation mathématique est donnée dans leur livre [WN10]. Etant plus particulièrement intéressée par l'analyse et la synthèse de commande robuste de systèmes décrits à l'aide d'edp, j'ai proposé d'orienter l'étude vers celle du contrôle H_∞ des vibrations de ce type de cable modélisé par des équations des ondes (1-d) non-linéaires couplées.

Les cables inclinés sont par exemple des composantes importantes des ponts haubanés et leurs vibrations peuvent être induites, entre autres, par les mouvements du tablier dûs à la circulation des véhicules. Le design des phénomènes de transmission des vibrations est crucial pour la compréhension de la dynamique du système, d'autant plus que les cables impliqués sont très flexibles et naturellement peu amortis. L'objectif général est de prédire et contrôler leur réponse à des excitations extérieures. Cette application en ingénierie civile, permettant d'illustrer la problématique, n'est cependant pas la plus pertinente pour y appliquer des approches de contrôle actif. Nous avons ainsi en tête une application plus appropriée concernant une structure de télescope avec cables (voir [SBP11]).

Dans le but de pouvoir travailler dans le cadre de dimension infinie présenté en introduction de la Partie II, et comme présenté dans le chapitre sur l'optique adaptative, la première étape à effectuer fut de rentrer dans le formalisme approprié à l'étude de la commande H_∞ du système. Nous avons donné les principaux éléments de ce travail dans les articles de conférence [20, 19].

Nous y effectuons dans un deuxième temps un passage à la dimension finie par projection sur les premiers modes propres de l'opérateur des ondes pour pouvoir implémenter nos premières simulations numériques. Une étude de la commande robuste par retour d'état [20] a préparé celle par retour de mesures [19] et quelques améliorations de l'écriture du modèle, essentiellement au niveau des mesures disponibles et des contrôles envisageable, sont encore à creuser. Un article plus détaillé est en début de rédaction et nous souhaitons y intégrer une étude plus approfondie des résultats de commande robuste qu'il est possible d'obtenir pour le système en question, réduit à la dimension finie. Les questions de spillover (que l'on peut observer en l'absence de terme d'amortissement) seront aussi abordées. Le cadre H_∞ , préparé par l'étude et la validation préalable du modèle en dimension infinie pourra ensuite être comparé à des approches H_2 ou mixte H_2/H_∞ en fonction des objectifs de performance ou que l'on souhaitera se donner.

Enfin, contrairement à notre absence d'accès à un banc d'essai en optique adaptative, l'équipe de Bristol possède un dispositif expérimental sur lequel nous nous appuyons déjà pour le choix des paramètres de nos simulations numériques actuelles, et avec lequel nous comptons travailler dans un dernier temps. Ce sera également l'occasion de comparer les résultats en matière d'amortissement des vibrations de notre approche avec celle, explorée (avec des objectifs différents) par mes collègues dans l'article [GBNWM08], où seuls trois modes de vibrations sont conservés, mais avec les non-linéarités les combinant.

Conclusion

J'aimerais ajouter à ce manuscrit quelques mots de synthèse pour éclairer mon cheminement scientifique. Les deux axes que j'ai développés découlent naturellement de mon parcours professionnel, ancré au départ dans mes travaux de thèse (en mathématiques) à l'Université de Versailles, et orienté par la suite à travers les opportunités découlant de mon postdoc (en automatique) au LAAS puis de mon poste de chercheur au CNRS. J'estime devoir beaucoup, dans l'amorce de ma carrière, à l'encadrement éclairé de mon directeur de thèse Jean-Pierre Puel autant qu'à l'accueil particulièrement stimulant de l'équipe MAC (Méthodes et Algorithmes en Commande) du LAAS. La cohérence des recherches que j'ai entreprises dès lors s'est construite autour de l'étude du contrôle et des problèmes inverses dans les équations aux dérivées partielles avec un attachement plus marqué aux applications. Cela se traduit naturellement par les questions abordées en commande d'un système d'optique adaptative ou d'un couplage fluide/structure, mais également par des approches nouvelles sur les problèmes inverses en terme de convergence de schéma numérique ou d'algorithme de reconstruction.

L'écriture de ce manuscrit est aussi l'occasion pour moi de souligner que si le travail du chercheur est solitaire à certains moments clefs, mon goût pour ce métier est par ailleurs essentiellement lié à la qualité des interactions avec mes collaborateurs. Les divers résultats que j'ai pu présenter ont aussi pour dénominateur commun systématique une convergence des compétences et expertises des auteurs vers le sujet abordé. J'en suis sortie plus riche à chaque fois et c'est bien ainsi que cette profession continue de me plaire.

Avec un emprunt au vocabulaire de l'analyse de la composition en peinture, dégageons quelques lignes de force des sujets de recherche que j'ai présentés.

Dans le cadre précis de l'étude de la détermination de paramètre dans des edp d'évolution avec une seule mesure de la solution à la frontière du domaine considéré, nous avons exploré systématiquement une méthodologie spécifique pour déduire la stabilité Lipschitzienne du problème inverse à partir de l'inégalité de Carleman appropriée à l'opérateur et à l'observation considérés. Nous avons identifié les limitations liées aux différents types d'équations étudiées et dégagé le cadre théorique permettant de formuler chaque résultat. Les équations abordées n'avaient pas fait l'objet d'études en la matière auparavant (je pense en particulier à KS, KdV et aux ondes sur un réseau) et les difficultés surmontées sont autant de contributions spécifiques. Une seconde ligne de force tend à répondre aux questions soulevées par la reconstruction effective d'un potentiel dans l'équation des ondes, à travers la preuve de la convergence du problème inverse dans le cas d'une discrétisation du Laplacien par un schéma de type différences finies, et à travers la mise en place d'un algorithme convergent, basé sur

la méthode de démonstration de la stabilité. Le champ abordé ici donne des résultats novateurs, tant par la technicité des démonstrations proposées que via la construction d'un algorithme globalement convergent présenté dans le cadre d'un problème inverse non-linéaire.

Concernant la commande de systèmes de dimension infinie, la description disponible dans la littérature d'un cadre permettant de décrire la commande robuste H_∞ du système comme équivalente à la résolution d'équations de Riccati était un point de départ solide pour l'étude de modèles applicatifs pour lesquels les edp gardaient une grande légitimité. Mais si l'absence d'éléments précis pour résoudre ces équations de Riccati (dont les solutions sont des opérateurs) a forcé le passage prématuré à la dimension finie, nous avons néanmoins ainsi abordé les questions concrètes de calcul de contrôleurs, de placement de pôles, de performance, sur les systèmes considérés. On peut ainsi mettre en valeur l'approche très différente et les résultats encourageants que cela a permis en optique adaptative, avec la prise en compte d'un modèle dynamique pour le miroir bimorphe. Le seul regret aura été de ne pas avoir l'occasion de tester cette approche sur un banc d'essai. A l'inverse, dans le cas du dispositif plaque/réservoir, le modèle edp aura servi de support à la construction d'un modèle mécanique équivalent de dimension finie à partir duquel plusieurs questions de commande robuste par retour de mesure ont été abordées et implémentées avec succès sur un dispositif expérimental. L'originalité de la démarche entreprise ici fut effectivement la largeur du spectre d'étude sur ce problème de commande active de vibrations, depuis la modélisation à base d'edp jusqu'aux expérimentations réelles, via le calcul numérique de contrôleurs.

Je ne saurais conclure sans dire que je sais mieux maintenant que les enjeux de ma position à l'interface entre deux domaines ne peuvent pas se résumer à l'utilisation d'un bagage méthodologique et technique d'une discipline sur des questions émergeant d'une autre. La compréhension et l'appropriation des problématiques et des outils de toute nouvelle science est un travail de longue haleine et ma formation aux méthodes de l'automatique moderne est encore en cours. Les différentes perspectives de recherche que j'envisage s'articulent autour de cette volonté. Je dessinerais donc l'avenir de mon travail de chercheur comme étant nourri désormais d'échanges plus stratégiques avec mes collègues du LAAS à la frontière, que je compte estomper, entre nos domaines d'expertise.

Publications de l'auteur

Article soumis

- [1] L. Baudouin, S. Ervedoza et A. Osses - Stability of an inverse problem for the discrete wave equation and convergence results.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00874565>

Articles publiés dans des Journaux Internationaux à comité de lecture

- [2] L. Baudouin, E. Cerpa, E. Crépeau et A. Mercado - On the determination of the principal coefficient from boundary measurements in a KdV equation. à paraître dans le *Journal of Inverse and Ill-posed problems*.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00765919>
- [3] L. Baudouin, M. de Buhan et S. Ervedoza - Global Carleman estimates for waves and applications, *Comm. in Partial Differential Equation*, Vol. 38, no. 5, (2013) pp. 823-859.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00633562/fr/>
- [4] L. Baudouin et S. Ervedoza - Convergence of an inverse problem for discrete wave equations, *SIAM J. Control and Optimization* 51-1 (2013), pp. 556-598.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00602335/fr/>
- [5] L. Baudouin, E. Cerpa, E. Crépeau et A. Mercado - Lipschitz stability in an inverse problem for the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Applicable Analysis*, Vol. 92, no. 10 (2013) pp. 2084-2102.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00510506/fr/>
- [6] B. Robu, L. Baudouin et C. Prieur - Active vibration control of a fluid/plate system using a pole placement controller, *International Journal of Control*, Vol 85, no.6 (2012) pp. 684-694.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00584586/fr/>
- [7] B. Robu, L. Baudouin, C. Prieur et D. Arzelier - Simultaneous H_∞ vibration control of fluid/plate system via reduced-order controller, *IEEE journal on Transactions on Control Systems Technology*, Vol 20, no.3 (2012) pp. 700-711.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00584343/fr/>
- [8] B. Robu, L. Baudouin et C. Prieur - Contrôle actif des vibrations dans un système couplé fluide/structure, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, Vol 45, no.7-10 (2012) pp. 495-511.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00584310/fr/>
- [9] L. Baudouin, E. Crépeau et J. Valein - Global Carleman estimate on a network for the wave equation and application to an inverse problem, *Math. Control and Related Fields*, Vol 1, no.3 (2011) pp. 307-330.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00576296/fr/>
- [10] L. Baudouin, J. Salomon et G. Turinici - Analysis of the Toolkit method for the time dependent Schrödinger equation, *Journal of Scientific Computing*, Vol 49, no.2 (2011) pp. 111-136.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00403798/fr/>
- [11] L. Baudouin et A. Mercado - An inverse problem for Schrödinger equations with discontinuous main coefficient, *Applicable Analysis* 87, no. 10-11 (2008) pp. 1145-1165.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00271954/fr/>

- [12] L. Baudouin, C. Prieur, F. Guignard et D. Arzelier - Robust control of a bimorph mirror for adaptive optics system, *Applied Optics*, 47 (2008), no. 20, pp. 3637-3645.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00271968/fr/>
- [13] L. Baudouin et J. Salomon - Constructive solutions of a bilinear control problem for a Schrödinger equation, *Systems and Control Letters*, 57 (2008), no. 6, pp. 453-464.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00271940/fr/>
- [14] L. Baudouin, A. Mercado et A. Osses - A global Carleman estimate in a transmission wave equation and application to a one-measurement inverse problem, *Inverse Problems*, 23, no. 1 (2007) pp. 257-278.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00271925/fr/>
- [15] L. Baudouin - A bilinear optimal control problem applied to a time dependent Hartree-Fock equation coupled with classical nuclear dynamics, *Portugaliae Mathematica (N.S.)*, 63, no. 3 (2006) pp. 293-325.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145716/fr/>
- [16] L. Baudouin - Existence and regularity of the solution of a time dependent Hartree-Fock equation coupled with a classical nuclear dynamics, *Revista Matemática Complutense*, 18 (2005), no. 2, pp. 285-314.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145715/fr/>
- [17] L. Baudouin, O. Kavian et J.-P. Puel - Regularity for a Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control, *Journal of Differential Equations*, 216 (2005), no.1, pp. 188-222.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145710/fr/>
- [18] L. Baudouin et J.-P. Puel - Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrodinger equation, *Inverse Problems*, 18 (2002), pp. 1537-1554.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00143868/fr/>

Actes de conférences et notes

- [19] L. Baudouin, S. Neild, A. Rondepierre et D. Wagg - Robust measurement feedback control of an inclined cable. *1st IFAC workshop on control of systems modeled by partial differential equations, Paris, France (CPDE 2013)*.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00784727/fr/>
- [20] L. Baudouin, S. Neild et D. Wagg - H_∞ -control with state feedback of an inclined cable. *European Control Conference 2013, Zurich, Suisse (ECC 2013)*.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00822702/fr/>
- [21] B. Robu, V. Pommier-Budinger, L. Baudouin, C. Prieur et D. Arzelier - Simultaneous H_∞ vibration control of fluid/plate system via reduced-order controller. *49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta (CDC 2010)*.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00556927/fr/>
- [22] B. Robu, L. Baudouin et C. Prieur - A controlled distributed parameter model for a fluid-flexible structure system : numerical simulations and experiment validations. *48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai (CDC 2009)*.
<http://homepages.laas.fr/lbaudouin/articles/RBP-CDC.pdf>
- [23] L. Baudouin, C. Prieur, F. Guignard et D. Arzelier - Control of adaptive optics system : an H_∞ approach. *17th IFAC world congress (2008)*.
<http://homepages.laas.fr/lbaudouin/articles/BPGA-IFAC.pdf>
- [24] L. Baudouin, C. Prieur et D. Arzelier - Robust control of a bimorph mirror for adaptive optics system. *17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2006)*.
<http://homepages.laas.fr/lbaudouin/articles/BPA-MTNS.pdf>
- [25] L. Baudouin et J. Salomon - Constructive solutions of a bilinear control problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342 (2006), no. 2, pp. 119-124.
- [26] L. Baudouin et J.-P. Puel - Détermination de potentiel dans une équation de Schrodinger à partir de mesures sur une partie du bord. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 334 (2002), pp. 967-972.

Bibliographie

- [AKBGBdT11] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa, *Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : a survey*, Math. Control Relat. Fields **1** (2011), no. 3, 267–306.
- [ALM10] S. A. Avdonin, G. Leugering, and V. Mikhaylov, *On an inverse problem for tree-like networks of elastic strings*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. **90** (2010), no. 2, 136–150.
- [ARRV09] G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset, and S. Vessella, *The stability for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems **25** (2009), no. 12, 123004, 47.
- [Bal78] M. J. Balas, *Active control of flexible systems*, J. Optim. Theory Appl. **25** (1978), no. 3, 415–436.
- [Bar95] V. Barbu, *H_∞ boundary control with state feedback : the hyperbolic case*, SIAM J. Control Optim. **33** (1995), no. 3, 684–701.
- [BB93] A. Bensoussan and P. Bernhard, *On the standard problem of H_∞ -optimal control for infinite-dimensional systems*, Identification and control in systems governed by partial differential equations (South Hadley, MA, 1992), SIAM, Philadelphia, PA, 1993, pp. 117–140.
- [BC88] J. Bontsema and R. Curtain, *A note on spillover and robustness for flexible systems*, IEEE Trans. Automat. Control **33** (1988), no. 6, 567–569.
- [BC09] M. Bellassoued and M. Choulli, *Logarithmic stability in the dynamical inverse problem for the Schrödinger equation by arbitrary boundary observation*, J. Math. Pures Appl. (9) **91** (2009), no. 3, 233–255.
- [BDLR07] A. Benabdallah, Y. Dermenjian, and J. Le Rousseau, *Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications to controllability and an inverse problem*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), no. 2, 865–887.
- [Bel04a] M. I. Belishev, *Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method*, Inverse Problems **20** (2004), no. 3, 647–672.
- [Bel04b] M. Bellassoued, *Global logarithmic stability in inverse hyperbolic problem by arbitrary boundary observation*, Inverse Problems **20** (2004), no. 4, 1033–1052.
- [Bel04c] ———, *Uniqueness and stability in determining the speed of propagation of second-order hyperbolic equation with variable coefficients*, Appl. Anal. **83** (2004), no. 10, 983–1014.
- [BGLR07] A. Benabdallah, P. Gaitan, and J. Le Rousseau, *Stability of discontinuous diffusion coefficients and initial conditions in an inverse problem for the heat equation*, SIAM J. Control Optim. **46** (2007), no. 5, 1849–1881 (electronic).
- [BHLR10a] F. Boyer, F. Hubert, and J. Le Rousseau, *Discrete Carleman estimates for elliptic operators and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **93** (2010), no. 3, 240–276.
- [BHLR10b] ———, *Discrete carleman estimates for elliptic operators in arbitrary dimension and applications*, SIAM J. Control Optim. **48** (2010), 5357–5397.
- [BHLR11] ———, *Uniform controllability properties for space/time-discretized parabolic equations*, Numer. Math. **118** (2011), no. 4, 601–661.
- [BK81] A. L. Bukhgeim and M. V. Klibanov, *Uniqueness in the large of a class of multidimensional inverse problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **260** (1981), no. 2, 269–272.

- [BK08] L. Beilina and M. V. Klivanov, *A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem*, SIAM J. Sci. Comput. **31** (2008), no. 1, 478–509.
- [Ble79] R. D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Krieger Publishing Company, 1079.
- [BR13] F. Boyer and J. Le Rousseau, *Carleman estimates for semi-discrete parabolic operators and application to the controllability of semi-linear semi-discrete parabolic equations*, Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis (2013), 46p.
- [BU02] A. L. Bukhgeim and G. Uhlmann, *Recovering a potential from partial Cauchy data*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), no. 3-4, 653–668.
- [BY06] M. Bellassoued and M. Yamamoto, *Inverse source problem for a transmission problem for a parabolic equation*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **14** (2006), no. 1, 47–56.
- [Car39] T. Carleman, *Sur un problème d’unicité pur les systèmes d’équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes*, Ark. Mat., Astr. Fys. **26** (1939), no. 17, 9.
- [CC04] J.-M. Coron and E. Crépeau, *Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **6** (2004), no. 3, 367–398.
- [CC09] E. Cerpa and E. Crépeau, *Boundary controllability for the nonlinear Korteweg-de Vries equation on any critical domain*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009), no. 2, 457–475.
- [CCG08] L. Cardoulis, M. Cristofol, and P. Gaitan, *Inverse problem for the Schrödinger operator in an unbounded strip*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **16** (2008), no. 2, 127–146.
- [CdNB07] J.-M. Coron, B. d’Andréa Novel, and G. Bastin, *A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws*, IEEE Trans. Automat. Control **52** (2007), no. 1, 2–11.
- [Cer07] E. Cerpa, *Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain*, SIAM J. Control Optim. **46** (2007), no. 3, 877–899 (electronic).
- [Cer10] ———, *Null controllability and stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation*, Commun. Pure Appl. Anal. **9** (2010), no. 1, 91–102.
- [CFCM13] N. Cîndae, E. Fernández-Cara, and A. Münch, *Numerical controllability of the wave equation through a primal method and carleman estimates*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **19** (2013), no. 4, 1076–1108.
- [CG10] L. Cardoulis and P. Gaitan, *Simultaneous identification of the diffusion coefficient and the potential for the Schrödinger operator with only one observation*, Inverse Problems **26** (2010), no. 3, 035012, 10.
- [CGHR12] M. Cristofol, J. Garnier, F. Hamel, and L. Roques, *Uniqueness from pointwise observations in a multi-parameter inverse problem*, Commun. Pure Appl. Anal. **11** (2012), no. 1, 173–188.
- [CH98] T. Cazenave and A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 13, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998, Translated from the 1990 French original by Yvan Martel and revised by the authors.
- [Cho09] M. Choulli, *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 65, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [CM11] E. Cerpa and A. Mercado, *Local exact controllability to the trajectories of the 1-D Kuramoto-Sivashinsky equation*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 4, 2024–2044.
- [CP06] E. Crépeau and C. Prieur, *Control of a clamped-free beam by a piezoelectric actuator*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **12** (2006), no. 3, 545–563 (electronic).
- [CRKC11] C. Correia, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, and J.-M. Conan, *Minimum-variance control for astronomical adaptive optics with resonant deformable mirrors*, Eur. J. Control **17** (2011), no. 3, 222–236.

- [CRM95] J.-M. Conan, G. Rousset, and P.-Y. Madec, *Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence*, J. Opt. Soc. Am. A **12** (1995), no. 7, 1559–1570.
- [CS07] E. Crépeau and M. Sorine, *A reduced model of pulsatile flow in an arterial compartment*, Chaos Solitons Fractals **34** (2007), no. 2, 594–605.
- [CY11] R. Cipolatti and M. Yamamoto, *An inverse problem for a wave equation with arbitrary initial values and a finite time of observations*, Inverse Problems **27** (2011), no. 9, 095006, 15.
- [CZ02] C. Castro and E. Zuazua, *Concentration and lack of observability of waves in highly heterogeneous media*, Arch. Ration. Mech. Anal. **164** (2002), no. 1, 39–72.
- [Dág04] R. Dáger, *Observation and control of vibrations in tree-shaped networks of strings*, SIAM J. Control Optim. **43** (2004), no. 2, 590–623 (electronic).
- [Dat70] R. Datko, *Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **32** (1970), 610–616.
- [DO06] A. Doubova and A. Osses, *Rotated weights in global Carleman estimates applied to an inverse problem for the wave equation*, Inverse Problems **22** (2006), no. 1, 265–296.
- [Dod00] F. T. Dodge, *The new "dynamic behavior of liquids in moving containers"*, Southwest Research Institute, San Antonio, 2000.
- [DOP02] A. Doubova, A. Osses, and J.-P. Puel, *Exact controllability to trajectories for semilinear heat equations with discontinuous diffusion coefficients*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **8** (2002), 621–661 (electronic), A tribute to J. L. Lions.
- [DP00] G. E. Dullerud and F. G. Paganini, *A course in robust control theory : a convex approach*, Texts in applied mathematics, Springer, New York, 2000.
- [DZ06] R. Dáger and E. Zuazua, *Wave propagation, observation and control in 1-d flexible multi-structures*, Mathématiques & Applications (Berlin), vol. 50, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [DZG96] J. C. Doyle, K. Zhou, and K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, 1996.
- [EM01] N. Elia and S.K. Mitter, *Stabilization of linear systems with limited information*, IEEE Transactions on Automatic Control **46** (2001), no. 9, 1384–1400.
- [EZ11] S. Ervedoza and E. Zuazua, *The wave equation : Control and numerics*, Control of Partial Differential Equations (P. M. Cannarsa and J. M. Coron, eds.), Lecture Notes in Mathematics, CIME Subseries, Springer Verlag, 2011.
- [FB12] E. Fridman and A. Blichovsky, *Robust sampled-data control of a class of semilinear parabolic systems*, Automatica J. IFAC **48** (2012), no. 5, 826–836.
- [FCG06] E. Fernández-Cara and S. Guerrero, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM J. Control Optim. **45** (2006), no. 4, 1399–1446 (electronic).
- [Fer11] D. Dos Santos Ferreira, *Carleman estimates and applications to inverse problems and unique continuation*, HdR, Université Paris 13, 2011.
- [FI96] A. V. Fursikov and O. Y. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series, vol. 34, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [FMZ09] E. Fedrigo, R. Muradore, and D. Zilio, *High performance adaptive optics system with fine tip/tilt control*, Control Engineering Practice **17** (2009), no. 1, 122 – 135.
- [FO09] E. Fridman and Y. Orlov, *Exponential stability of linear distributed parameter systems with time-varying delays*, Automatica J. IFAC **45** (2009), no. 1, 194–201.
- [GBNWM08] A. Gonzalez-Buelga, S.A. Neild, D.J. Wagg, and J.H.G. Macdonald, *Modal stability of inclined cables subjected to vertical support excitation*, Journal of Sound and Vibration **318** (2008), no. 3, 565 – 579.
- [GD88] K. Glover and J. C. Doyle, *State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity*, Systems Control Lett. **11** (1988), no. 3, 167–172.

- [GG08] O. Glass and S. Guerrero, *Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit*, *Asymptot. Anal.* **60** (2008), no. 1-2, 61–100.
- [GHMO09] S. Gumussoy, D. Henrion, M. Millstone, and M.L. Overton, *Multiobjective robust control with hifoo 2.0*, Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design, 2009.
- [GR96] M. G eradin and D. Rixen, *Th eorie des vibrations*, Masson, 1996.
- [Guz13] P. Guzman, *Lipschitz stability in an inverse problem for the main coefficient of a kuramoto-sivashinsky type equation*, *J. Math. Anal. Appl.* **408** (2013), no. 1, 275–290.
- [Had53] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy’s problem in linear partial differential equations*, Dover Publications, New York, 1953.
- [Hai12] G. Haine, *Observateurs en dimension infinie. application à l’étude de quelques problèmes inverse*, Ph.D. thesis, Université de Lorraine, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00750725>, 2012.
- [Ho86] L. F. Ho, *Observabilité frontière de l’équation des ondes*, *C. R. Acad. Sci. Paris S r. I Math.* **302** (1986), no. 12, 443–446.
- [H r63] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116, Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.
- [HR12] G. Haine and K. Ramdani, *Reconstructing initial data using observers : error analysis of the semi-discrete and fully discrete approximations*, *Numer. Math.* **120** (2012), no. 2, 307–343.
- [Ift12] O. V. Iftime, *Block circulant and block Toeplitz approximants of a class of spatially distributed systems - an LQR perspective*, *Automatica* **48** (2012), no. 12, 3098–3105.
- [IY09] O. Y. Imanuvilov, V. Isakov, and M. Yamamoto, *New realization of the pseudoconvexity and its application to an inverse problem*, *Appl. Anal.* **88** (2009), no. 5, 637–652.
- [IM98] K. Ito and K. A. Morris, *An approximation theory of solutions to operator Riccati equations for H^∞ control*, *SIAM J. Control Optim.* **36** (1998), no. 1, 82–99 (electronic).
- [Ima02] O. Y. Imanuvilov, *On Carleman estimates for hyperbolic equations*, *Asymptot. Anal.* **32** (2002), no. 3-4, 185–220.
- [IPR12] L. I. Ignat, A. F. Pazoto, and L. Rosier, *Inverse problem for the heat equation and the Schrödinger equation on a tree*, *Inverse Problems* **28** (2012), no. 1, 015011, 30.
- [IRT11] K. Ito, K. Ramdani, and M. Arius Tucsna, *A time reversal based algorithm for solving initial data inverse problems*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **4** (2011), no. 3, 641–652.
- [Isa06] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 127, Springer, New York, 2006.
- [IWBA10] A. Iqbal, Z. Wu, and F. Ben-Amara, *Mixed-sensitivity h_∞ control of magnetic-fluid-deformable mirrors*, *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on* **15** (2010), no. 4, 548–556.
- [IY98] O. Y. Imanuvilov and M. Yamamoto, *Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate*, *Inverse Problems* **14** (1998), no. 5, 1229–1245.
- [IY01a] ———, *Global Lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations*, *Inverse Problems* **17** (2001), no. 4, 717–728, Special issue to celebrate Pierre Sabatier’s 65th birthday (Montpellier, 2000).
- [IY01b] ———, *Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations*, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), no. 7-8, 1409–1425.
- [IY03] ———, *Determination of a coefficient in an acoustic equation with a single measurement*, *Inverse Problems* **19** (2003), no. 1, 157–171.
- [IZ99] J.A. Infante and E. Zuazua, *Boundary observability for the space semi discretizations of the 1-d wave equation*, *Math. Model. Num. Ann.* **33** (1999), 407–438.
- [IZC05] O. V. Iftime, H. J. Zwart, and R. F. Curtain, *A representation of all solutions of the control algebraic Riccati equation for infinite-dimensional systems*, *Internat. J. Control* **78** (2005), no. 7, 505–520.

- [KB12] M. V. Klibanov and L. Beilina, *Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems*, Springer, 2012.
- [KK93] M. A. Kazemi and M. V. Klibanov, *Stability estimates for ill-posed Cauchy problems involving hyperbolic equations and inequalities*, Appl. Anal. **50** (1993), no. 1-2, 93–102.
- [Kli92] M. V. Klibanov, *Inverse problems and Carleman estimates*, Inverse Problems **8** (1992), no. 4, 575–596.
- [Kli13] ———, *Carleman estimates for global uniqueness, stability and numerical methods for coefficient inverse problems*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **21** (2013), no. 4, 477–560.
- [Kom94] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization*, RAM : Research in Applied Mathematics, Masson, Paris, 1994, The multiplier method.
- [Kom97] ———, *Rapid boundary stabilization of linear distributed systems*, SIAM J. Control Optim. **35** (1997), no. 5, 1591–1613.
- [KRP⁺06] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan, and P. Viaris de Lesegno, *Optimal control, observers and integrators in adaptive optics*, Opt. Express **14** (2006), no. 17, 7464–7476.
- [KRPC12] C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, and J.-M. Conan, *Minimum variance prediction and control for adaptive optics*, Automatica J. IFAC **48** (2012), no. 9, 1939–1954.
- [KT04] M. V. Klibanov and A. Timonov, *Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications*, Inverse and Ill-posed Problems Series, VSP, Utrecht, 2004.
- [KY06] M. V. Klibanov and M. Yamamoto, *Lipschitz stability of an inverse problem for an acoustic equation*, Appl. Anal. **85** (2006), no. 5, 515–538.
- [Lei69] A. W. Leissa, *Vibration of plates*, Scientific and Technical Information Division, NASA., 1969 (English).
- [LF12] K. Liu and E. Fridman, *Wirtinger’s inequality and Lyapunov-based sampled-data stabilization*, Automatica J. IFAC **48** (2012), no. 1, 102–108.
- [LG99] Z.-H. Luo and O. Guo, B.-Z. and Morgul, *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications*, Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag London Ltd., London, 1999.
- [Lio88] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués. tome 1. contrôlabilité exacte*, vol. RMA 8, Masson, 1988.
- [LLS94] J. E. Lagnese, G. Leugering, and E. J. P. G. Schmidt, *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [LLT86] I. Lasiecka, J.-L. Lions, and R. Triggiani, *Nonhomogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators*, J. Math. Pures Appl. (9) **65** (1986), no. 2, 149–192.
- [LM72] J.-L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications.*, Springer-Verlag, New York, 1972, Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 182.
- [LMPR09] P. Losse, V. Mehrmann, L. Poppe, and T. Reis, *The modified optimal \mathcal{H}_∞ control problem for descriptor systems*, SIAM Journal on Control and Optimization **47** (2009), no. 6, 2795–2811.
- [Loo10] D. P. Looze, *Discrete-time model for an adaptive optics system with input delay*, International Journal of Control **83** (2010), no. 6, 1217–1231.
- [LP07] M. Lenczner and C. Prieur, *Asymptotic model of an active mirror*, Int. J. Tomogr. Stat. **5** (2007), no. W07, 68–72.
- [LR97] G. Lebeau and L. Robbiano, *Stabilisation de l’équation des ondes par le bord*, Duke Math. J. **86** (1997), no. 3, 465–491.
- [LRL12] J. Le Rousseau and G. Lebeau, *On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **18** (2012), no. 3, 712–747.

- [LRR10] J. Le Rousseau and L. Robbiano, *Carleman estimate for elliptic operators with coefficients with jumps at an interface in arbitrary dimension and application to the null controllability of linear parabolic equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **195** (2010), no. 3, 953–990.
- [LRR11] ———, *Local and global Carleman estimates for parabolic operators with coefficients with jumps at interfaces*, Invent. Math. **183** (2011), no. 2, 245–336.
- [LTY99] I. Lasiecka, R. Triggiani, and P.-F. Yao, *Inverse/observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **235** (1999), no. 1, 13–57.
- [Mac94] E. Machtyngier, *Exact controllability for the Schrödinger equation*, SIAM J. Control Optim. **32** (1994), no. 1, 24–34.
- [MNZ93] J. W. Macki, P. Nistri, and P. Zecca, *Mathematical models for hysteresis*, SIAM Review **35** (1993), no. 1, 94–123.
- [Mor01] K. A. Morris, *H^∞ -output feedback of infinite-dimensional systems via approximation*, Systems Control Lett. **44** (2001), no. 3, 211–217.
- [MOR08] A. Mercado, A. Osses, and L. Rosier, *Inverse problems for the Schrödinger equation via Carleman inequalities with degenerate weights*, Inverse Problems **24** (2008), no. 1, 015017, 18.
- [Mor10] K. Morris, *Control of systems governed by partial differential equations*, The Control Handbook (W. S. Levine, ed.), Electrical Engineering Handbook, vol. 3, CRC press, 2nd ed., 2010.
- [MZ02] F. Macià and E. Zuazua, *On the lack of observability for wave equations : a Gaussian beam approach*, Asymptot. Anal. **32** (2002), no. 1, 1–26.
- [Nol76] R. J. Noll, *Zernike polynomials and atmospheric turbulence*, J. Opt. Soc. Am. **66** (1976), no. 3, 207–211.
- [NR13] P. A. Nguyen and J.-P. Raymond, *Boundary stabilization of the navier-stokes equations in the case of mixed boundary conditions*, submitted (2013).
- [Oss01] A. Osses, *A rotated multiplier applied to the controllability of waves, elasticity, and tangential Stokes control*, SIAM J. Control Optim. **40** (2001), no. 3, 777–800 (electronic).
- [PA93] R. N. Paschall and D. J. Anderson, *Linear quadratic gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements*, Appl. Opt. **32** (1993), no. 31, 6347–6358.
- [Paz83] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [PGdSJT13] C. Prieur, JM Gomes da Silva Jr, and S. Tarbouriech, *Wave and beam equation with saturated input*, communication personnelle (2013).
- [Phu10] K. D. Phung, *Waves, damped wave and observation*, Some problems on nonlinear hyperbolic equations and applications (Ta-Tsien Li, Yue-Jun Peng, and Bo-Peng Rao, eds.), Ser. Contemp. Appl. Math. CAM, vol. 15, Higher Ed. Press, Beijing, 2010, pp. 386–412.
- [PY96] J.-P. Puel and M. Yamamoto, *On a global estimate in a linear inverse hyperbolic problem*, Inverse Problems **12** (1996), no. 6, 995–1002.
- [PY97] ———, *Generic well-posedness in a multidimensional hyperbolic inverse problem*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **5** (1997), no. 1, 55–83.
- [Ray10] J.-P. Raymond, *Feedback stabilization of a fluid-structure model*, SIAM J. Control Optim. **48** (2010), no. 8, 5398–5443.
- [RCK⁺04] B. Le Roux, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, L. M. Mugnier, and T. Fusco, *Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics*, J. Opt. Soc. Am. A **21** (2004), no. 7, 1261–1276.
- [Rei08] T. Reis, *Controllability and observability of infinite-dimensional descriptor systems*, Automatic Control, IEEE Transactions on **53** (2008), no. 4, 929–940.
- [Rob95] L. Robbiano, *Fonction de coût et contrôle des solutions des équations hyperboliques*, Asymptotic Anal. **10** (1995), no. 2, 95–115.

- [Rob10] B. Robu, *Active vibration control of a fluid/plate system*, Ph.D. thesis, University of Toulouse, 2010.
- [Ros97] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **2** (1997), 33–55 (electronic).
- [Ros04] ———, *Control of the surface of a fluid by a wavemaker*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **10** (2004), no. 3, 346–380 (electronic).
- [SBP11] M. Smrz, R. Bastaits, and A. Preumont, *Active damping of the camera support mast of a cherenkov gamma-ray telescope*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment **635** (2011), no. 1, 44 – 52.
- [Sch92] E. J. P. G. Schmidt, *On the modelling and exact controllability of networks of vibrating strings*, SIAM J. Control Optim. **30** (1992), no. 1, 229–245.
- [SCK10] A. Smyshlyaev, E. Cerpa, and M. Krstic, *Boundary stabilization of a 1-d wave equation with in-domain antidamping*, SIAM J. Control Optim. **48** (2010), no. 6, 4014–4031.
- [SG13a] A. Seuret and F. Gouaisbaut, *Hierarchy of lmi-conditions for the stability of time delay systems*, soumis à Automatica (2013).
- [SG13b] A. Seuret and F. Gouaisbaut, *Wirtinger-based integral inequality : Application to time-delay systems*, Automatica **49** (2013), no. 9, 2860–2866.
- [SGA13] A. Seuret, F. Gouaisbaut, and Y. Ariba, *Bessel inequality for robust stability analysis of time-delay system*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Florence, Italie., 2013.
- [SGF13] A. Seuret, F. Gouaisbaut, and E. Fridman, *Stability of systems with fast-varying delay using improved wirtinger’s inequality*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Florence, Italie., 2013.
- [SPTZ13] A. Seuret, C. Prieur, S. Tarbouriech, and L. Zaccarian, *Event-triggered sampling for linear closed-loop systems with plant input saturation*, Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS) (Toulouse (France)), August 2013.
- [Sto57] J. J. Stoker, *Water waves : the mathematical theory with applications*, Interscience Publishers, Inc, New York, 1957.
- [SU87] J. Sylvester and G. Uhlmann, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math. (2) **125** (1987), no. 1, 153–169.
- [SU13] P. Stefanov and G. Uhlmann, *Recovery of a source term or a speed with one measurement and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), 5737–5758.
- [Tab07] P. Tabuada, *Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks*, IEEE Transactions on Automatic Control **52** (2007), no. 9, 1680–1685.
- [Tad90] G. Tadmor, *Worst-case design in the time domain : the maximum principle and the standard H_∞ problem*, Math. Control Signals Systems **3** (1990), no. 4, 301–324.
- [Tat96] D. Tataru, *Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems*, J. Math. Pures Appl. (9) **75** (1996), no. 4, 367–408.
- [TGGQ11] S. Tarbouriech, G. Garcia, J.M. Gomes da Silva Jr., and I. Queinnec, *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*, Springer-Verlag London Ltd., 2011.
- [TPGdS06] S. Tarbouriech, C. Prieur, and JM Gomes da Silva, *Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations*, IEEE Transactions on Automatic Control, **51** (2006), no. 8, 1364–1371.
- [TPGdSJ05] S. Tarbouriech, C. Prieur, and JM Gomes da Silva Jr, *An anti-windup strategy for a flexible cantilever beam*, Proc. of the 16th IFAC World Congress, Praha, 2005.
- [TQA⁺11] S. Tarbouriech, I. Queinnec, T. Alamo, M. Fiacchini, and E. F. Camacho, *Ultimate bounded stability and stabilization of linear systems interconnected with generalized saturated functions*, Automatica **47** (2011), 1473–1481.

- [TW09] M. Tucsnak and G. Weiss, *Observation and control for operator semigroups*, Birkäuser Advanced Texts, vol. XI, Springer, 2009.
- [VCMS11] F. Visco-Comandini, M. Mirrahimi, and M. Sorine, *Some inverse scattering problems on star-shaped graphs*, J. Math. Anal. Appl. **378** (2011), no. 1, 343–358.
- [vK93a] B. van Keulen, *H_∞ -control for distributed parameter systems : a state-space approach*, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [vK93b] ———, *H_∞ -control with measurement-feedback for linear infinite-dimensional systems*, J. Math. Systems Estim. Control **3** (1993), no. 4, 373–411.
- [vKPC93] B. van Keulen, M. Peters, and R. Curtain, *H_∞ -control with state-feedback : the infinite-dimensional case*, J. Math. Systems Estim. Control **3** (1993), no. 1, 1–39.
- [VZ09] J. Valein and E. Zuazua, *Stabilization of the wave equation on 1-D networks*, SIAM J. Control Optim. **48** (2009), no. 4, 2771–2797.
- [WN10] D. Wagg and S. Neild, *Nonlinear vibration with control : For flexible and adaptive structures*, Solid mechanics and its applications, Springer, 2010.
- [Yam99] M. Yamamoto, *Uniqueness and stability in multidimensional hyperbolic inverse problems*, J. Math. Pures Appl. (9) **78** (1999), no. 1, 65–98.
- [Yam09] M. Yamamoto, *Carleman estimates for parabolic equations and applications*, Inverse Problems **25** (2009), no. 12, 123013.
- [YY09] G. Yuan and M. Yamamoto, *Lipschitz stability in the determination of the principal part of a parabolic equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **15** (2009), no. 3, 525–554.
- [YY10] ———, *Carleman estimates for the Schrödinger equation and applications to an inverse problem and an observability inequality*, Chin. Ann. Math. Ser. B **31** (2010), no. 4, 555–578.
- [YZ03] M. Yamamoto and X. Zhang, *Global uniqueness and stability for a class of multidimensional inverse hyperbolic problems with two unknowns*, Appl. Math. Optim. **48** (2003), no. 3, 211–228.
- [Zha00] X. Zhang, *Explicit observability inequalities for the wave equation with lower order terms by means of Carleman inequalities*, SIAM J. Control Optim. **39** (2000), no. 3, 812–834.
- [ZQW12] I. Torres Zúñiga, I. Queinnec, and A. Vande Wouwer, *Observer-based output feedback linearizing control strategy for a nitrification–denitrification biofilter*, Chemical Engineering Journal **191** (2012), no. 0, 243 – 255.
- [ZT11] L. Zaccarian and A.R. Teel, *Modern anti-windup synthesis*, Princeton University Press, Princeton, 2011.
- [Zua05] E. Zuazua, *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods*, SIAM Rev. **47** (2005), no. 2, 197–243 (electronic).
- [Zua11] ———, *Control and stabilization of waves on 1-d networks*, vol. Modelling and Optimisation of Flows on Networks, Lecture Notes in Mathematics, CIME foundation subseries, no. 2062, Springer, 2011.
- [Zui83] C. Zuily, *Uniqueness and nonuniqueness in the Cauchy problem*, Progress in Mathematics, vol. 33, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1983.