



**HAL**  
open science

# Traitement numérique de la fissuration d'une structure navale

Jean-Philippe Créte

► **To cite this version:**

Jean-Philippe Créte. Traitement numérique de la fissuration d'une structure navale. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université de Bretagne Sud, 2013. Français. NNT : . tel-01070096

**HAL Id: tel-01070096**

**<https://theses.hal.science/tel-01070096v1>**

Submitted on 30 Sep 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE-SUD

*sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne*

pour obtenir le titre de

DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE-SUD

*Mention : Sciences pour l'ingénieur*

*Spécialité : Mécanique des Matériaux*

ECOLE doctorale SICMA

*présentée par*

**Jean-Philippe Créte**

préparée au LIMATB (E4 4250)

Laboratoire d'Ingénierie des MATériaux de Bretagne

# Traitement numérique de la fissuration d'une structure navale

Thèse soutenue le 10 Décembre 2013

devant le jury composé de :

**André Dragon**

Directeur de Recherche CNRS / ENSMA / DPMM / *président*

**Alain Combescure**

Professeur des universités / INSA Lyon / LAMCOS / *rapporteur*

**Laurent Stainier**

Professeur des universités / ECN / GEM / *rapporteur*

**Bernard Auroire**

Ingénieur R&D / DGA Techniques Navales / *invité*

**Bruno Leblé**

Ingénieur R&D / DCNS Research / *invité*

**Patrice Longère**

Professeur ISAE - HDR / ISAE / ICA / *Directeur de thèse*

**Jean-Marc Cadou**

Maitre de conférence - HDR / UBS / LIMATB /

*Co-Directeur de thèse*



# Remerciements

Cette thèse fut réalisée au sein du Laboratoire d'Ingénierie des MATériaux de Bretagne de l'Université de Bretagne Sud à Lorient ainsi qu'à l'Institut Clément Ader de l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace.

Je tiens à remercier en premier lieu mes deux directeurs de thèse Patrice Longère et Jean-Marc Cadou pour leur accompagnement ainsi que leurs conseils tout au long de ma thèse.

Je tiens également à remercier Alain Combescure et Laurent Stainier pour avoir accepté de rapporter mon travail ainsi qu'André Dragon, Bernard Auroire et Bruno Leblé pour avoir accepté de l'examiner le jour de ma soutenance.

Enfin je tiens à remercier toutes les personnes que j'ai côtoyé pendant ma thèse que ce soit à Lorient, à Toulouse ou ailleurs. Et en particulier à Nico mon collègue de bureau qui n'a jamais accepté de sortir avec moi le vendredi soir car trop occupé à : "boire une petite bière avec des copaings". Au Guide pour son soutien inébranlable lors des congrès (tout comme L'ESPAGNOL). A JSB mon coloc et collègue thésard, pour les soirées passées à jouer, boire des bières\* et manger des pizzas. A Samuel pour m'avoir notamment hébergé pendant mon séjour à Toulouse pour ma soutenance. Et à tout les autres thésards qui se reconnaîtront ...

Je tiens à remercier mes amis non thésard pour leurs blagues pourries sur le thème de la recherche. Cet humour vaseux m'a entraîné peu à peu aux fins fonds (du bush et) de l'alcoolémie.

Je tiens également à m'excuser auprès de Grégoire pour sa table qui est néanmoins propre maintenant.

Et pour ceux qui se pose la question, j'ai bien fini ma thèse comme je l'avais commencé : Un VER à la main.

\* Petite rectification, JSB jouait et mangeait des pizza pendant que je buvais les bières.





# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>iii</b>
<b>I Introduction</b>	<b>1</b>
I.1 Contexte de l'étude . . . . .	3
I.2 Verrous scientifiques . . . . .	4
I.3 Enjeux scientifiques de cette thèse . . . . .	6
I.4 Contexte numérique . . . . .	11
I.5 Organisation du rapport . . . . .	13
<b>II Modélisations du comportement du matériau et de la fissure</b>	<b>17</b>
II.1 Constat expérimental . . . . .	19
II.2 Modélisation constitutive du comportement du matériau . . . . .	22
II.3 Modélisation numérique de la fissure . . . . .	38
II.4 Bilan . . . . .	61
<b>III Transition endommagement-rupture</b>	<b>67</b>
III.1 Méthodologie de l'approche adoptée . . . . .	69
III.2 Direction de propagation . . . . .	70
III.3 Amorçage de la fissure . . . . .	82
III.4 Longueur de propagation . . . . .	88
III.5 Bilan . . . . .	92
<b>IV Application</b>	<b>97</b>
IV.1 Modélisation de la fissuration dans un matériau ductile endommageable	99
IV.2 Eprouvette plate fissurée en son centre . . . . .	102
IV.3 Eprouvette à deux entailles asymétriques fissurée . . . . .	117
IV.4 Bilan . . . . .	127

Conclusions et Perspectives	133
Références bibliographiques	139
A Résultats complémentaires	149

# Notations

- ABRÉVIATIONS

- UEL : Routine fortran permettant de coder un élément utilisateur dans Abaqus
- UMAT : Routine fortran permettant de coder un matériau utilisateur dans Abaqus

- NOTATIONS TENSORIELLES

- $a$  : Scalaire
- $\underline{a}$  : Vecteur
- $\underline{\underline{a}}$  : Tenseur d'ordre 2
- $\underline{\underline{\underline{a}}}$  : Tenseur d'ordre 4
- Tr() : Trace
- det() : Déterminant

- NOTATIONS MATÉRIAU

- $\underline{\underline{\sigma}}$  : Tenseur des contraintes de Cauchy (Pa)
- $\underline{\underline{s}}$  : Partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy (Pa)
- $\sigma_0$  : Limite d'élasticité (Pa)
- $\sigma_m$  : Contrainte hydrostatique (Pa)
- $h(\kappa)$  : Energie stockée à froid (J/m<sup>3</sup>)
- $g(T)$  : Fonction d'adoucissement thermique
- $h'(\kappa)$  : Fonction d'écrouissage isotrope (Pa)

---


$\bar{\sigma}_y$	: Contrainte d'écoulement (Pa)
$p_m$	: Pression (Pa)
$p_r$	: Pression cinématique, voir Longere et al [39] (Pa)
$T_{ref}$	: Température de référence (K)
$\omega$	: Potentiel d'état
$\Phi$	: Potentiel de dissipation
$\kappa$	: Déformation plastique cumulée ou variable d'écrouissage isotrope (de la matrice plastique)
$\epsilon^{pD}$	: Intensité de la composante déviatorique de la déformation plastique instantanée
$\epsilon^{pM}$	: Intensité de la composante volumique de la déformation plastique instantanée
$\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}^e, \underline{\epsilon}^p$	: Tenseur des déformations totales, élastiques et plastiques, instantanées
$\underline{\underline{C}}$	: Tenseur d'ordre 4 de rigidité élastique (Pa)
$\underline{\underline{L}}$	: Opérateur tangent du matériau (Pa)
$T$	: Température absolue (K)
$\sigma_{eq}$	: Contrainte équivalente au sens de Mises $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}}$ (Pa)
$\Lambda, \lambda$	: Multiplicateurs viscoplastique et plastique
$f$	: Porosité ou fraction volumique des cavités
$\underline{n}$	: Direction de l'écoulement du au glissement plastique
$\mathbb{1}$	: Tenseur unité d'ordre 2

- AUTRES NOTATIONS

$[N]$	: Matrice contenant les fonctions de forme
$N_i$	: Fonction de forme au noeud i
$F_{1,2,3,..}$	: Fonctions asymptotiques
$H()$	: Fonction de Heaviside
$\psi, \phi_1, \phi_2$	: Level-set ou fonctions de niveau

# Chapitre I

## Introduction

ans ce premier chapitre, nous présentons les motivations qui nous ont conduits à nous intéresser à la problématique du "Traitement numérique de la fissuration d'une structure navale".

Dans un premier temps, nous abordons le contexte dans lequel cette thèse s'inscrit. Nous allons en particulier positionner ce travail par rapport à la thèse effectuée par Anne-Gaelle Geffroy [14] qui portait sur "la modélisation numérique de la rupture de structures navales sous l'effet d'explosion au contact". Après avoir présenté les résultats importants de sa thèse, nous mettons en évidence les limitations du modèle proposé par Anne-Gaelle Geffroy au niveau du traitement de la rupture et motivant ainsi la poursuite de sa thèse par l'étude spécifique du traitement numérique de la fissuration. Par la suite, nous mettons en avant les enjeux scientifiques de cette thèse, en analysant dans un premier temps ce que l'on observe expérimentalement durant le processus de fissuration et dans un second temps, en présentant ce que nous cherchons à modéliser dans la présente étude.

Une fois les enjeux scientifiques présentés, nous abordons le contexte numérique de cette thèse en présentant les hypothèses et choix effectués d'un point de vue numérique. Enfin, nous décrivons l'organisation de ce manuscrit.

## PLAN DU CHAPITRE I

---

<b>I.1</b>	<b>Contexte de l'étude</b>	<b>3</b>
<b>I.2</b>	<b>Verrous scientifiques</b>	<b>4</b>
I.2.1	Modélisation de la rupture de structures sous l'effet d'explosions au contact	4
I.2.2	Problèmes posés	5
<b>I.3</b>	<b>Enjeux scientifiques de cette thèse</b>	<b>6</b>
I.3.1	Introduction	6
I.3.2	Mécanismes mis en jeu	7
I.3.2.1	Point de vue macroscopique	7
I.3.2.2	Point de vue microscopique	7
I.3.3	Description du processus de fissuration	9
I.3.3.1	Introduction	9
I.3.3.2	Traitement numérique du processus de fissuration : Quels objectifs ?	10
I.3.3.3	Traitement numérique du processus de fissuration : Objectifs de cette étude ?	10
I.3.3.4	Modélisation de la discontinuité forte	11
<b>I.4</b>	<b>Contexte numérique</b>	<b>11</b>
I.4.1	Quel code de calculs ?	11
I.4.2	Procédure et schéma d'intégration	12
I.4.3	Type d'élément et formulation	13
<b>I.5</b>	<b>Organisation du rapport</b>	<b>13</b>

---

## I.1 Contexte de l'étude

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la vulnérabilité militaire navale. On peut voir sur la figure I.1 le résultat d'une attaque terroriste sur le navire militaire Américain USS Cole. Un bateau pneumatique est venu aux abords du navire avant de faire exploser les charges qu'il transportait. Cette attaque eut pour résultat de créer une déchirure de la structure du navire provoquant une voie d'eau. Etudier la vulnérabilité militaire navale consiste principalement à garantir l'intégrité des zones sensibles du navire ainsi que de protéger ces passagers. Afin d'améliorer la tenue de la structure à de telles attaques, il faut au préalable comprendre comment le matériau réagit à ces sollicitations extrêmes.



FIGURE I.1 – USS Cole après une attaque terroriste (12 octobre 2000)



FIGURE I.2 – Destroyer Torrens après torpillage volontaire par le sous-marin HMAS Famcomb (14 juin 1999)

Pour cela, la manière la plus simple consiste à réaliser des essais à l'échelle de la structure du navire. Ce type d'essai a été réalisé par la marine Américaine par le biais du torpillage du Destroyer Torrens par le sous-marin HMAS Famcomb comme le montre la figure I.2. Dans le contexte économique actuel, ce type d'essai n'est pas du tout adapté. Pour réduire les coûts, on préfère réaliser des essais à une échelle plus réduite ou bien effectuer des essais sur des échantillons, typiquement de  $1\text{m}^2$  environ, avec différentes charges et à différentes distances entre l'explosif et la plaque étudiée. A terme, l'idée est de réaliser des essais virtuels en utilisant la simulation numérique.



## I.2 Verrous scientifiques

### I.2.1 Modélisation de la rupture de structures sous l'effet d'explosions au contact

La thèse d'Anne-Gaelle Geffroy [14], voir également [15], s'inscrivait dans l'optique de modéliser la rupture de structures navales (bâtiment de surface principalement) sous l'effet d'explosions au contact (caractéristiques d'une attaque terroriste). Dans ce travail, un modèle de comportement a été développé permettant de décrire la rupture du matériau par croissance de cavités (avec prise en compte des effets d'érouissage, de viscoplasticité, d'adoucissement thermique, ...) et a été implanté dans le code de calculs par éléments finis industriel, Abaqus. On retrouve notamment dans cette thèse l'étude de l'essai d'explosion aérienne (voir figure I.3). Une des conclusions effectuées par l'auteure est que le modèle de comportement mis au point représente assez bien la réaction du matériau, ante-fissuration.

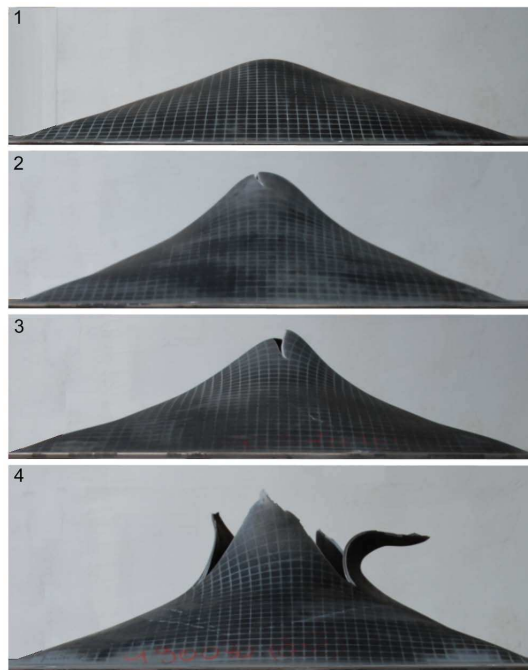


FIGURE I.3 – Déformées des plaques soumises à explosion pour une charge de plastrite donnée et à différentes distances (1 la plus lointaine et 4 la plus proche), d'après [14]

En revanche dès que la première fissure apparaît, l’auteure remarque que la propagation numérique de la fissure au sein de la structure se développe trop rapidement par rapport aux constats expérimentaux.

### I.2.2 Problèmes posés

Dans sa thèse [14], Anne-Gaelle Geffroy privilégie la modélisation du comportement du matériau et ne s’intéresse que partiellement à la fissuration. De ce fait, le passage qui mène vers la rupture du matériau est traité de façon classique (hypothèse d’une porosité critique dans une modélisation locale) et donc de nombreux phénomènes ne sont pas décrits. Sans entrer dans les détails, la méthode numérique utilisée consiste à annuler la résistance d’un élément fini dès que celui-ci atteint un critère (porosité critique). Cette méthode très simple d’implantation (ce qui fait son intérêt), hors écriture de la routine UMAT, conduit à deux effets indésirables. Le premier est que le critère de suppression de l’élément est fortement sensible à la taille de maille. Un critère à rupture identifié pour un élément de taille  $\alpha$  est différent du critère à rupture d’un élément de taille  $\beta$ , tel que  $\beta$  est différent de  $\alpha$  ( $\beta \ll \alpha$  ou  $\beta \gg \alpha$ ). Le second est que la fissure est traitée de façon grossière conduisant ainsi à une forte dépendance de l’amorçage de la fissure et de sa direction de propagation par rapport à la taille de maille. Cela signifie qu’en fonction de la taille de maille nous pouvons obtenir des résultats très différents en terme de vitesse et de direction de propagation de la fissure.

L’un des objectifs de cette étude est ainsi d’utiliser le modèle proposé par Anne-Gaelle Geffroy dans la phase ante-fissuration (élasto-(visco)plasticité et endommagement ductile) et de développer une méthode de traitement numérique de la fissuration (amorçage, orientation, propagation) appliquée aux matériaux ductiles. Ceci va permettre d’obtenir un traitement de la fissuration plus pointu permettant ainsi de rendre compte de phénomènes plus complexes et d’obtenir une description plus fine au niveau de la fissure.

## I.3 Enjeux scientifiques de cette thèse

### I.3.1 Introduction

C'est dans cette perspective d'apporter des solutions pour le traitement de la fissuration dans les matériaux ductiles que cette thèse s'inscrit. Celle-ci a en particulier vocation à terme, à développer une méthodologie de description numérique de la fissuration dans les structures navales de bâtiments de surface militaires. Le matériau étudié est un acier doux dont l'appellation est DH36. Dans cette thèse, nous abordons des cas de chargement lent (1m/s) et rapides (10m/s). De ce fait, nous prendrons en compte dans le modèle tout ce que les effets de vitesse peuvent avoir comme influence sur la structure (effets d'inertie, viscoplasticité, limitations des transferts thermiques). Dans le processus de fissuration, on entend différentes étapes qui mènent à la rupture totale de la structure. On détaille dans le prochain paragraphe ce processus, mais on peut dire dans un premier temps que nous observons dans ce type de matériau 5 étapes importantes :

- Comportement élasto-(visco)plastique homogène
- Apparition de l'endommagement ductile (plus ou moins diffus selon le problème considéré) pour des déformations plastiques non négligeables
- Localisation de la déformation et de l'endommagement (coalescence des micro-défauts)
- Formation d'une fissure
- Propagation de la fissure menant à la rupture ultime de la structure considérée

Chaque étape qui compose le phénomène de fissuration n'est pas simple à traiter numériquement et la liaison entre chaque étape n'est également pas triviale. De ce fait, la modélisation complète du phénomène de fissuration demande énormément de temps et d'expertises. **Nous nous sommes donc dans cette thèse concentrés sur la propagation d'une fissure existante.**

Les deux objectifs sont d'une part de modéliser la fissure dans le cadre d'un comportement ductile endommageable mais également de mettre en place une

méthode de propagation de cette fissure afin de modéliser une rupture ductile. Nous allons donc dans cette étude nous attacher à lever ces deux verrous.

### I.3.2 Mécanismes mis en jeu

#### I.3.2.1 Point de vue macroscopique

Avant d'arriver à la rupture, une structure en DH36 va passer par plusieurs étapes que l'on peut identifier d'un point de vue macroscopique. Prenons ainsi l'exemple d'un échantillon soumis à un essai de traction (voir Fig. I.4). D'un point de vue simplifié, dans un premier temps, nous allons observer un comportement élastique qui est homogène dans la pièce (a). A partir d'un seuil de chargement, des déformations élasto-plastiques (irréversibles) vont apparaître dans la pièce mais toujours de façon homogène (b). Ce n'est que par la suite que nous allons obtenir un comportement non homogène par le biais de la localisation des déformations entraînant une striction de la pièce (c). Enfin, nous aurons une rupture de l'échantillon (d).

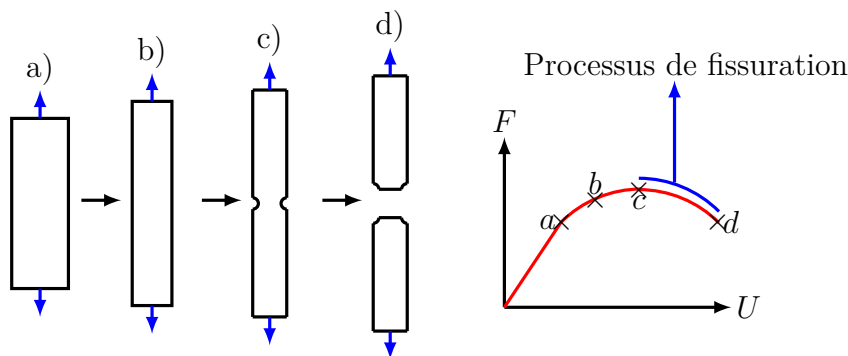


FIGURE I.4 – Exemple des différentes étapes menant à rupture

Ce que l'on entend par processus de fissuration, ce sont toutes les étapes par lesquelles passe la structure depuis la localisation des déformations (c) jusqu'à sa rupture complète (d).

#### I.3.2.2 Point de vue microscopique

Nous allons à présent regarder d'un point de vue microscopique, lors de la propagation d'une fissure, ce que l'on peut observer aux alentours de celle-ci. Dans

la thèse d'Anne-Gaelle Geffroy [14], l'auteure a réalisé un essai de traction sur une éprouvette plate entaillée en DH36. Proche de l'état de rupture complète, l'essai fut stoppé puis l'échantillon a été tronçonné afin d'observer l'état du matériau en pointe de fissure (voir Fig. I.5).

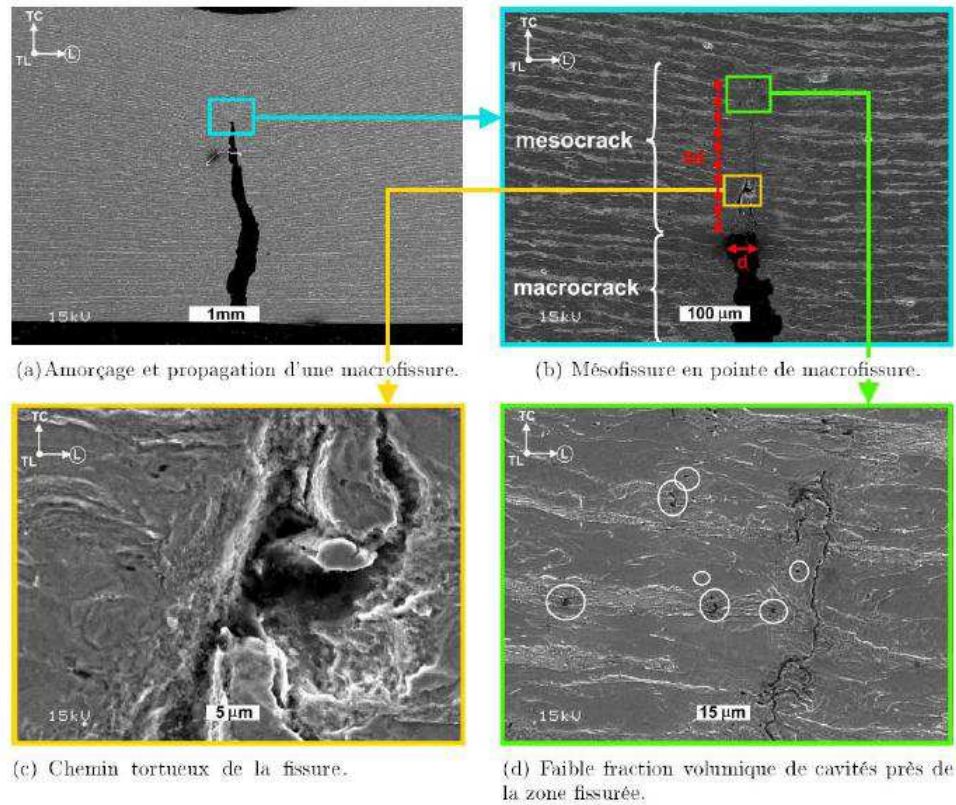


FIGURE I.5 – Analyse micro-graphique de la propagation d'une fissure [14]

A l'échelle macroscopique (a), on peut identifier uniquement la fissure. En regardant de plus près en pointe de fissure (b), on peut identifier deux échelles de fissure. On retrouve la fissure observée précédemment que l'on va qualifier de macro-fissure durant la suite de ce manuscrit. Caractéristique de la rupture ductile, le fond de la macro-fissure est émoussé. On identifie alors une seconde fissure que l'on va appeler méso-fissure (voir Fig. I.5 b) et c)) et qui est le résultat de la coalescence des vides. Pour donner un ordre d'idée, l'ouverture du fond de la macro-fissure est de l'ordre de  $45\mu\text{m}$  et la longueur de la méso-fissure est de  $225\mu\text{m}$  pour une épaisseur de  $0.5\mu\text{m}$ . Lors de la rupture de l'échantillon et sous un

chargement macroscopiquement monotone en déplacement, la fissure avance par à-coup. A partir des observations expérimentales, on peut penser que l'avancée de la macro-fissure est guidée par la taille de la méso-fissure.

### I.3.3 Description du processus de fissuration

#### I.3.3.1 Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, lors de la fissuration nous avons affaire à deux phénomènes physiques, à deux échelles différentes : la méso-fissure et la macro-fissure. D'un point de vue numérique, en reprenant le schéma proposé par Huespe et al [47] (voir Fig. I.6), on identifie trois zones avec des représentations cinématiques différentes.

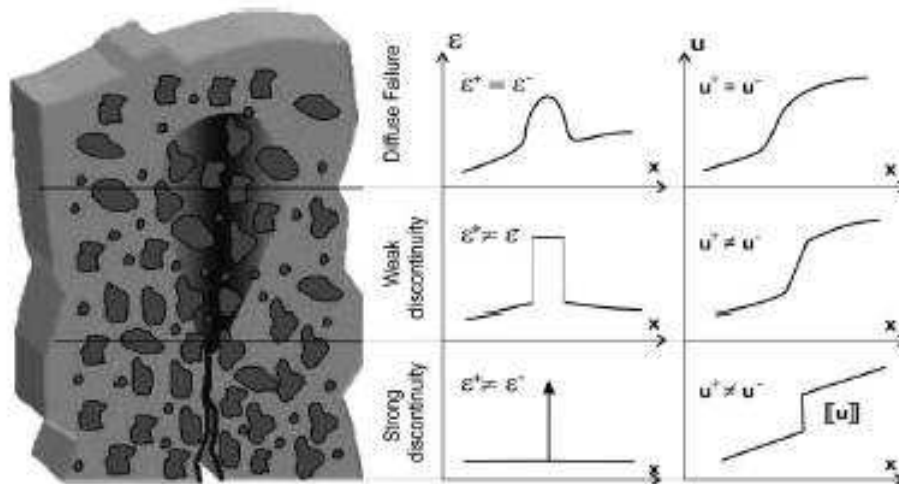


FIGURE I.6 – Approche mécanique des phénomènes physiques observés en pointe de fissure [47]

La macro-fissure que l'on qualifie ici de discontinuité forte, décrit une discontinuité du champ de déplacement. En ce qui concerne la méso-fissure que nous associons ici en première approximation à une discontinuité faible, elle est caractérisée par une continuité de la matière et donc du champ de déplacement. Cependant, elle engendre une discontinuité au niveau du champ de déformation. Pour le reste du matériau, nous considérons une continuité du champ de déformation et de déplacement.

### **I.3.3.2 Traitement numérique du processus de fissuration : Quels objectifs ?**

L'objectif du traitement numérique du processus de fissuration est donc de décrire le comportement d'un matériau, initialement continu et homogène (milieu continu endommageable), sujet à une localisation de la déformation (méso-fissure impliquant une discontinuité faible) puis à une fissuration (macro-fissure impliquant une discontinuité forte). Chaque étape ainsi que chaque transition entre les étapes induisent des difficultés numériques. La mise en place d'un modèle permettant de représenter le comportement fortement non linéaire du matériau ainsi que les deux types de discontinuités (méso et macro-fissure), et l'introduction de la physique dans ce modèle (en plus de celle présente dans l'expression du comportement du matériau) par le biais des transitions entre les différentes étapes sont des défis très compliqués. Cela entraîne donc inévitablement des choix dans ce que l'on souhaite ou non représenter.

### **I.3.3.3 Traitement numérique du processus de fissuration : Objectifs de cette étude ?**

La plupart des recherches, concernant la problématique étudiée, sont soit orientées vers le traitement numérique du phénomène de localisation ([49], [5], [25]) ou alors vers le traitement numérique de l'apparition de la fissure ainsi que de sa propagation ([6], [66]) ou enfin vers le traitement numérique de la propagation de la fissure uniquement ([52], [22]). Dans le premier axe de recherche on cherche à représenter la méso-fissure et les discontinuités qu'elle entraîne. Dans le deuxième axe de recherche, on cherche à représenter le passage d'un comportement matériau sans discontinuité à la rupture d'une structure sans toutefois s'attarder à une représentation physique de la méso et de la macro-fissure. Enfin dans le troisième axe de recherche, on cherche à traiter numériquement la macro-fissure.

L'objectif de cette étude est de se concentrer sur la représentation numérique du phénomène de macro-fissuration uniquement dans les matériaux ductiles tout en proposant une transition entre endommagement et fissuration.

### I.3.3.4 Modélisation de la discontinuité forte

Nous allons donc chercher à modéliser la macro-fissure et sa propagation dans le cadre du matériau de l'étude (DH36). Etant donné que nous n'allons pas prendre en compte dans cette modélisation le phénomène de discontinuité faible, nous allons donc supposer que physiquement lors de la propagation de la fissure, nous allons passer directement d'un état continu en terme de champs de déplacement et de déformation, à un état discontinu en déplacement. Ceci est une hypothèse assez forte qui fera l'objet d'une discussion dans les perspectives de cette thèse.

Dans la modélisation de la macro-fissure et de sa propagation au sein de la structure, trois aspects sont très importants. Le premier est la représentation numérique de la macro-fissure. Le deuxième est la modélisation du comportement du matériau en accord avec ce qui est observé expérimentalement. Le troisième aspect, celui qui constitue l'originalité de cette étude, concerne le couplage entre la macro-fissure et le modèle. Dans ce dernier aspect, on va chercher à répondre à la question : Quand et comment se propage la fissure dans un matériau ductile ?

Le choix du modèle de comportement du matériau ainsi que les différents effets qui sont pris en compte dans celui-ci, sont abordés dans le Chapitre 2. La méthode des éléments finis étendus (X-FEM), qui a été choisie afin de représenter la macro-fissure ainsi que sa propagation dans la structure est présentée dans le Chapitre 2. Enfin, le couplage entre les deux premiers aspects est détaillé dans le Chapitre 3.

## I.4 Contexte numérique

### I.4.1 Quel code de calculs ?

L'objectif de notre étude est la modélisation de phénomènes complexes (comportement matériau fortement non linéaire, macro-fissure, ...) dans l'optique de les utiliser dans le cadre d'applications industrielles. Pour répondre à cette contrainte, il a été fait le choix d'utiliser un code de calculs couramment utilisé dans l'industrie plutôt qu'un code de calculs académique. Nous avons donc choisi d'utiliser le



code de calculs par éléments finis industriel, Abaqus. Nous allons voir par la suite que cela entraîne certains choix numériques. A noter également que les aspects numériques présentés dans ce manuscrit ont été implantés dans Abaqus via des routines utilisateurs.

### **I.4.2 Procédure et schéma d'intégration**

Dans notre cas, deux procédures de résolution du problème élément fini s'offrent à nous. Soit on se base sur une procédure statique, soit dynamique. Considérant les vitesses de chargement (lentes et très rapides) que l'on souhaite appliquer, il a été fait le choix de se baser sur une procédure dynamique prenant en compte les effets d'inertie.

Nous devons ensuite choisir entre deux schémas de résolution proposés dans Abaqus (schéma implicite ou explicite). Dans le cas du schéma d'intégration implicite, on va chercher à chaque pas de temps une solution en déplacement et en vitesse. Dans le cas du schéma d'intégration explicite, on exprimera l'accélération en fonction de la solution au pas précédent. A noter que dans la version implicite d'Abaqus, on se base sur un schéma de type Newmark avec un amortissement nul ce qui est le cas dans cette étude, et en explicite sur la méthode des différences centrées. Dans le cas de chargements très rapides, ce qui l'objectif final de cette étude, on préfère pour réduire les temps de calcul utiliser un schéma d'intégration explicite.

Le choix du schéma d'intégration utilisé dans cette étude a été guidé par la méthode choisie ici, pour représenter les conséquences de la macro-fissure et de sa propagation au sein du maillage, en l'occurrence la X-FEM. La formulation de la X-FEM implantée dans Abaqus n'est pas suffisante dans le cadre de ce que l'on souhaite réaliser dans cette étude (nous allons voir dans le Chapitre 2, ce qui a motivé ce choix). Il a ainsi été fait le choix de coder la X-FEM dans Abaqus via une routine utilisateur (UEL en implicite et VUEL en explicite). Cependant le fonctionnement des deux routines utilisateurs n'est pas identique.

Il faut noter que dans le cadre d'un schéma implicite, la matrice de rigidité et la matrice de masse de chacun des éléments finis peuvent être mises à jour à tout moment. En ce qui concerne le schéma explicite, la matrice de masse de chaque élément est écrite en début de calcul et n'est plus modifiée par la suite. Nous allons

voir dans le chapitre 2 que cela pose un problème dans le cadre de la X-FEM puisque lorsque la fissure se propage, l'enrichissement des éléments finis peut changer ce qui implique, une possible modification de la matrice de masse élémentaire. Pour passer outre ce problème, la seule solution est d'utiliser un schéma d'intégration implicite qui ne pose pas ce type d'inconvénient.

### I.4.3 Type d'élément et formulation

Si nous souhaitons étudier des structures réelles et plus précisément dans notre étude, des bâtiments de surface, nous devons utiliser des éléments 3D. Pour la modélisation du comportement du matériau, ce type d'élément ne pose pas de réels problèmes. La difficulté réside surtout dans la modélisation et la propagation de la macro-fissure. En effet en 2D, la fissure se réduit à une ligne avec un fond de fissure représenté uniquement par un point. En 3D, la fissure devient un plan et le fond de fissure est modélisé par une ligne. La modélisation et la propagation de la fissure, sans considérations d'un comportement et d'un couplage complexes, sont alors un challenge en 3D.

Dans cette étude nous souhaitons nous concentrer sur le couplage et donc de ce fait, nous nous sommes intéressés à un problème en 2D. Pour des raisons purement numériques, nous nous sommes placés dans le cadre des déformations planes.

Vis à vis des chargements appliqués aux structures ainsi que des déplacements importants mis en jeu, nous devons utiliser les grandes transformations (grands déplacements et grandes déformations) dans nos modèles. Cependant, comme pour le passage 2D => 3D abordé précédemment, le passage petites transformations => grandes transformations est également un challenge en lui-même. De ce fait, comme dit auparavant, il a été fait le choix de se placer dans le cadre des petites perturbations.

## I.5 Organisation du rapport

Ce manuscrit est divisé en quatre parties.

Dans ce premier chapitre, nous avons introduit le contexte et les objectifs de

l'étude. De plus, nous avons abordé les éléments nécessaires à la compréhension de ce manuscrit ainsi que les éléments importants qui sont ensuite repris en détail dans les différents chapitres.

Le second chapitre se consacre à la modélisation du comportement du matériau ainsi qu'à la modélisation numérique de la fissure. Dans un premier temps, nous abordons le comportement du matériau et notamment deux approches permettant de rendre compte de l'endommagement de matériaux ductiles. Par la suite nous expliquons de façon détaillée le modèle mis en place dans cette étude. Dans un second temps, nous abordons les problèmes mais également les solutions numériques liés à la simulation de la propagation d'une fissure. Après une étude bibliographique des méthodes existantes, notre choix s'est porté sur la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) et nous donnons dans ce chapitre les raisons de ce choix. Cette partie a donné lieu à l'écriture du modèle cinématique de la fissure et à la modification du modèle de comportement issu de [14] pour l'adapter à un schéma de résolution implicite.

Dans le troisième chapitre, nous abordons le couplage de la X-FEM avec le comportement du matériau (DH36). Ce couplage donne lieu au développement d'une méthode de propagation permettant de rendre compte d'une rupture ductile. Au préalable, une liste non exhaustive des méthodes existantes permet de voir les forces et faiblesses de ces dernières dans le cadre qui nous intéresse ici. On note trois éléments importants dans la méthode de propagation, le critère d'amorçage, la direction dans laquelle la fissure se propage et enfin la longueur de l'incrément de fissure. Tous ces éléments et en particulier les deux premiers fortement liés au comportement du matériau, ont fait l'objet d'une attention particulière. Ainsi, nous définissons un critère d'amorçage de la fissure basé sur une énergie stockée critique aux-alentours de la pointe de fissure et une direction de propagation basée sur une analyse de bifurcation près du fond de la macro-fissure.

La quatrième partie se consacre à des applications du modèle mis en place pour traiter la "propagation d'une fissure existante". Nous testons ce modèle via un cas test. Ce chapitre est surtout consacré aux aspects numériques étant donné le peu de résultats expérimentaux à notre disposition. Cependant la comparaison avec un

modèle classiquement utilisé pour modéliser une rupture ductile par endommagement, nous permet au moins d'un point de vue numérique d'avoir une base solide de notre cas test.

Pour finir, une conclusion permet de faire un bilan de cette thèse, tant sur le plan des résultats que sur le modèle mis en place. Cette conclusion n'a pas pour but de faire l'éloge de la méthodologie développée dans cette étude, mais plutôt de faire une analyse critique des résultats obtenus ainsi que de présenter quelques pistes sur les perspectives de cette thèse.

Cette thèse a bénéficié du soutien financier de la Direction Générale de l'Armement, du Laboratoire d'Ingénierie des Matériaux de Bretagne et de l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace. Elle a été réalisée en partie au Laboratoire d'ingénierie des matériaux de Bretagne à Lorient et en partie à l'Institut Clément Ader à Toulouse.



# Chapitre II

## Modélisations du comportement du matériau et de la fissure

Nous présentons dans ce chapitre la modélisation du comportement du matériau ainsi que le traitement numérique de la macro-fissure. Nous analysons dans un premier temps le mode de rupture du DH36 ainsi que les phénomènes auxquels le matériau est sujet. Nous voyons alors que l'endommagement par germination et la croissance des vides est à l'origine de la rupture du matériau. Dans un second temps, nous abordons la modélisation du comportement du DH36. Pour modéliser les conséquences de l'endommagement ductile, plusieurs approches sont possibles et nous en présentons deux exemples. Dans cette étude, nous utilisons une version du modèle micro-mécanique de GTN (Gurson-Tvergaard-Needleman) modifiée pour rendre compte de la croissance de cavités en cisaillement. Nous faisons ici, une description du modèle en reprenant le potentiel ainsi que les lois d'état et d'évolution utilisées. L'implantation numérique du modèle est également abordée.

La troisième partie de ce chapitre se consacre à la représentation numérique de la fissure. Nous réalisons dans un premier temps, un bilan non exhaustif des méthodes utilisées usuellement. Il apparait alors que la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) est une méthode efficace pour traiter le type de problèmes auxquels nous nous intéressons. Nous allons voir le principe de cette méthode ainsi que quelques améliorations possibles. Le coeur du problème est le couplage entre la X-FEM et le comportement du matériau dans le cas d'une rupture ductile. Avant la mise au point d'une méthode de propagation qui est présentée dans le prochain chapitre, nous devons appliquer la X-FEM avec le comportement fortement non linéaire du matériau et cela passe par quelques analyses et choix vis à vis de la méthode et de ses possibilités.

Pour clore ce chapitre, nous réalisons un bilan afin de reprendre les éléments les plus importants, vus précédemment.

## PLAN DU CHAPITRE II

---

<b>II.1 Constat expérimental . . . . .</b>	<b>19</b>
II.1.1 Ecrouissage, effets de la température et de la vitesse . . .	19
II.1.2 Endommagement et rupture . . . . .	20
<b>II.2 Modélisation constitutive du comportement du maté-</b>	
<b>    riau . . . . .</b>	<b>22</b>
II.2.1 Modèles constitutifs . . . . .	22
II.2.1.1 Cadre thermodynamique . . . . .	22
II.2.1.2 Modèles de Gurson et GTN . . . . .	23
II.2.1.3 Modèle de Lemaître . . . . .	25
II.2.1.4 Comparaison des modèles de Lemaître et GTN	27
II.2.2 Modèle couplé de plasticité-endommagement ductile uti-	
lisé dans cette étude . . . . .	28
II.2.2.1 Description des potentiels d'état et de dissipation	28
II.2.2.2 Lois d'évolution . . . . .	34
II.2.2.3 Implantation numérique . . . . .	36
<b>II.3 Modélisation numérique de la fissure . . . . .</b>	<b>38</b>
II.3.1 Exemples de modèles de fissuration . . . . .	38
II.3.1.1 Dans le cadre de la méthode des éléments finis	38
II.3.1.2 Enrichissement de la méthode des éléments finis	39
II.3.2 Modèle numérique retenu : X-FEM . . . . .	41
II.3.2.1 Méthode originale . . . . .	41
II.3.2.2 Améliorations . . . . .	44
II.3.3 Application dans le cadre d'un comportement ductile	
endommageable . . . . .	49
II.3.3.1 Enrichissement du champ de déplacement . . .	49
II.3.3.2 Intégration numérique . . . . .	54
II.3.3.3 Représentation de la fissure . . . . .	56
II.3.4 Implantation numérique . . . . .	58
II.3.4.1 XFEM dans Abaqus . . . . .	58
II.3.4.2 XFEM via une routine utilisateur . . . . .	58
II.3.4.3 Notion de matrice de masse évolutive . . . . .	59
<b>II.4 Bilan . . . . .</b>	<b>61</b>
II.4.1 Modélisation constitutive du comportement du matériau	61
II.4.2 Modélisation numérique de la fissure . . . . .	62

---

## II.1 Constat expérimental

Nous présentons ici les principaux résultats expérimentaux sur le matériau de l'étude, à savoir le DH36, voir [14] [15] pour plus d'informations.

### II.1.1 Ecouissage, effets de la température et de la vitesse

Des essais ont été réalisés dans le cadre de la thèse d'Anne-Gaelle Geffroy [14] pour mettre en évidence les effets de l'écrouissage, de l'adoucissement thermique et de la vitesse de chargement. Une partie de ces résultats expérimentaux est reportée dans les figures II.1 et II.2.

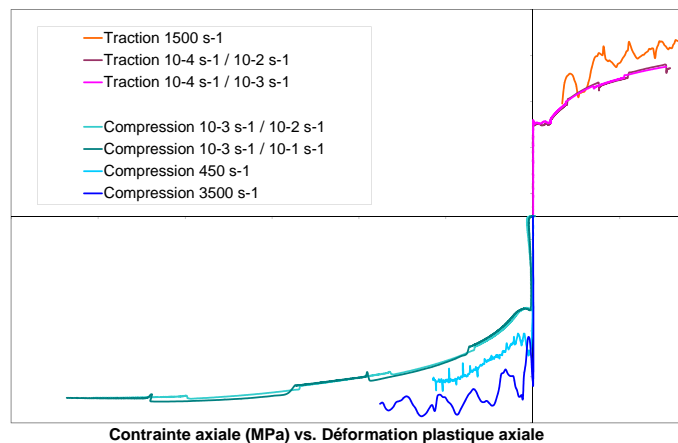


FIGURE II.1 – Influence de la vitesse de chargement sur la réponse du DH36 pour des chargements à température ambiante (20°C), d'après [14]

D'après la figure II.1, on constate un écrouissage marqué du matériau avec une tendance à la saturation pour les grandes déformations. De la même façon, on constate que la vitesse de chargement a un effet durcissant sur la réponse du matériau. Dans son étude, l'auteure remarque également une asymétrie de comportement traction/compression sur l'effet de la vitesse de chargement. Pour des chargements rapides, une élévation de la température au sein du matériau peut apparaître. L'influence de la température initiale est donc également étudiée



dans [14] (voir figure II.2) pour des chargements quasi-statiques.

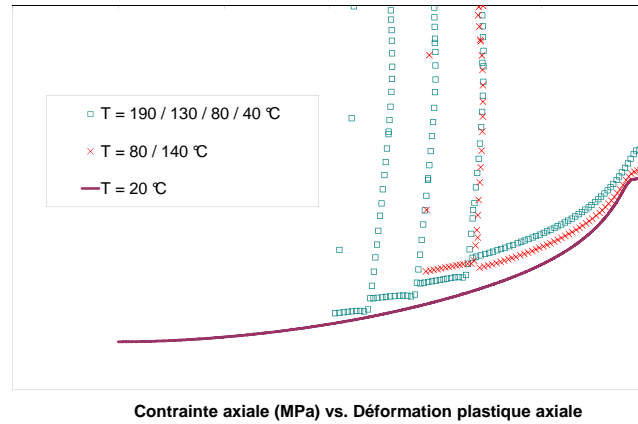


FIGURE II.2 – Influence de la température sur la réponse du DH36 pour des chargements quasi-statiques, d’après [14]

Les courbes de la figure II.2 montrent que la température de l’essai a un effet adoucissant sur la réponse du matériau. Les applications visées invoquant des chargements monotones jusqu’à rupture, Anne-Gaelle Geffroy [14] n’a pas mené d’essais pour dissocier la contribution de l’écroutissage isotrope et la contribution de l’écroutissage cinématique, à l’écroutissage total du matériau. De ce fait, par défaut l’écroutissage est donc supposé isotrope.

### II.1.2 Endommagement et rupture

L’analyse du mode de rupture du matériau est une étape importante puisque c’est à partir des constatations réalisées que dépend le modèle mis au point. Dans le cas des matériaux métalliques soumis à des chargements monotones à des températures supérieures à la température de transition fragile/ductile, la rupture est généralement ductile. Parallèlement, de multiples phénomènes peuvent être responsables de l’amorçage de la rupture ductile (inclusions, empilements de dislocations, ...) [35]. Dans sa thèse, A.G. Geffroy [14] réalise une importante étude

micrographique de la rupture du DH36. Pour plus de précisions, le lecteur est donc invité à consulter cet ouvrage mais nous allons néanmoins, résumer ici les points importants identifiés. On détecte notamment la présence de cavités et de micro-fissures intervenant à un état avancé de la déformation. Ce qui laisse supposer un amorçage tardif de l'endommagement. L'auteure constate également une porosité d'une part très faible avant (méso et macro) fissuration et d'autre part principalement localisée autour de la fissure en question.

D'un point de vue microscopique, on schématise le processus d'endommagement du DH36 en quatre étapes (voir Figure II.3). Dans un premier temps (a)), nous avons un matériau supposé sain. Le matériau se déforme élasto-plastiquement jusqu'à l'apparition des premières cavités (b)). Par la suite, ces cavités croissent et dans le même temps de nouveaux trous germent (c)). Puis, les cavités coalescent pour former comme nous l'avons vu précédemment une méso-fissure (d)). Vient alors l'apparition d'une macro-fissure qui mène à la rupture finale du matériau.

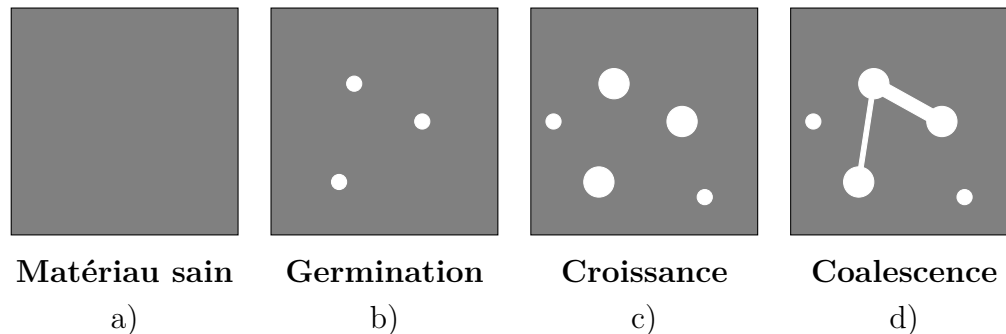


FIGURE II.3 – Représentation schématisée du processus d'endommagement du DH36 au niveau microscopique

Comme nous pouvons le voir, l'endommagement et la rupture auxquels le DH36 est soumis, sont complexes. Le point important qui ressort, est donc que la modélisation de la rupture du matériau de l'étude nécessite des simplifications qui peuvent parfois être considérées comme assez grossières.

## II.2 Modélisation constitutive du comportement du matériau

### II.2.1 Modèles constitutifs

Afin de modéliser l'endommagement et la rupture des matériaux ductiles, il existe de nombreux modèles [14]. Dans son étude l'auteure scinde ces modèles en deux catégories respectivement, les modèles dits dilatants [20] [51] [56], et les modèles non dilatants [28] [34]. La première catégorie de modèles, permet de rendre compte d'une déformation volumique liée à la croissance des cavités au contraire des autres modèles. Dans le cadre de sa thèse, Anne-Gaelle Geffroy réalise une étude qualitative des différents modèles. Dans le cadre de notre étude, nous présentons à titre bibliographique (avant de faire un choix) le modèle de Gurson [20] (GTN en fait [66]) dans le cas des modèles dilatants et le modèle de Lemaître [34] dans le cas des modèles non dilatants. Nous choisissons d'étudier ces deux modèles largement utilisés dans la communauté scientifique traitant de l'endommagement ductile. Le choix fait ici de comparer ces deux modèles est de mettre en avant qu'il existe plusieurs modélisations possibles de l'endommagement et du mode de rupture du DH36.

#### II.2.1.1 Cadre thermodynamique

Nous considérons dans cette étude un matériau métallique sujet à de l'adoucissement thermique, de l'écroutissage isotrope et de l'endommagement ductile comme nous l'avons vu précédemment. Les variables d'état permettant de prendre en compte ces phénomènes sont donc : le tenseur des déformations élastiques  $\xi^e$ , la température absolue  $T$ , la variable d'écroutissage isotrope  $\kappa$  (ou déformation plastique cumulée) et la variable d'endommagement  $D$ . L'état instantané du matériau est supposé être décrit via l'énergie libre de Helmholtz  $\omega(\xi^e, T, \kappa, D)$  qui est classiquement décomposée en une partie réversible  $\omega_r(\xi^e, T, D)$ , stockée  $\omega_s(\kappa, T, D)$  et des parties liées aux effets thermiques  $\omega_T(T, D)$  et à l'endommagement  $\omega_D(D)$ .

$$\omega(\xi^e, T, \kappa, D) = \omega_r(\xi^e, T, D) + \omega_s(\kappa, T, D) + \omega_T(T, D) + \omega_D(D) \quad (\text{II.1})$$

Les variables d'état forces associées à  $(\xi^e, T, \kappa, D)$  sont, le tenseur des contraintes thermo-élastiques  $\varrho$ , l'entropie  $\eta$ , la force de l'écroutissage isotrope  $r$  et la force

thermodynamique associée à l'endommagement  $Y$  tel que :

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\epsilon}^e} = \frac{\partial \omega_r}{\partial \underline{\epsilon}^e} \\
 -\eta &= \frac{\partial \omega}{\partial T} = \frac{\partial \omega_r}{\partial T} + \frac{\partial \omega_s}{\partial T} + \frac{\partial \omega_T}{\partial T} \\
 r &= \frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\partial \omega_s}{\partial p} \\
 -Y &= \frac{\partial \omega}{\partial D} = \frac{\partial \omega_r}{\partial D} + \frac{\partial \omega_s}{\partial D} + \frac{\partial \omega_T}{\partial D} + \frac{d\omega_D}{dD}
 \end{aligned} \tag{II.2}$$

Pour le cas présent, le potentiel de dissipation  $\Phi(\varrho, r, Y; T, D)$  peut être écrit en une contribution plastique-endommagement  $\Phi_P(\varrho, r; T, D)$  et une contribution liée uniquement à l'endommagement  $\Phi_D(Y; T, D)$ , tel que :

$$\Phi(\varrho, r, Y; T, D) = \Phi_P(\varrho, r; T, D) + \Phi_D(Y; T, D) \tag{II.3}$$

### II.2.1.2 Modèles de Gurson et GTN

#### II.2.1.2.1 Principe du modèle de Gurson

L'approche utilisée par Gurson est comparable à celle adoptée par Rice et Tracey [55]. Le principe est l'étude micromécanique d'une cavité présente dans une matrice et ce, dans différentes configurations. Pour ce faire, Gurson fait l'hypothèse que la matrice a un comportement rigide parfaitement plastique et qui obéit au critère d'écoulement de Mises. Le but final, est de réussir à définir un critère d'écoulement d'un volume élémentaire contenant une cavité sphérique. Gurson déduit de son analyse micromécanique une fonction d'écoulement de la forme :

$$\Phi = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \tag{II.4}$$

Dans son modèle, Gurson met en avant le rôle de la contrainte hydrostatique sur l'écoulement plastique et la croissance des vides. On peut pour finir noter deux phénomènes que traduit cette fonction d'écoulement :

- Dans le cas où nous sommes uniquement en présence de contraintes déviatoriques ( $\sigma_m = 0$ ), nous retrouvons une formulation semblable à celle de Mises (voir équation II.25) à la présence d'un terme de porosité près.

- Dans le cas où nous sommes uniquement en présence de contraintes hydrostatiques ( $\sigma_{eq} = 0$ ), là où le critère de Von Mises ne traduit pas l'évolution de la plasticité au sein du matériau, le critère de Gurson le permet, en l'occurrence de la dilatance plastique.

### II.2.1.2.2 Modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman

Tvergaard et Needleman [66] partent du constat que le modèle de Gurson ne permet pas de rendre compte de la perte totale de rigidité de la matière due à la coalescence des vides. De ce fait, ils proposent de modifier la fonction d'écoulement originale en remplaçant la porosité par une porosité effective  $f^*$  censée rendre compte de cette phase de coalescence, tel que :

$$f^* = \begin{cases} f & , \text{pour } f \leq f_c \\ f_c + C_1(f - f_c) & , \text{pour } f > f_c \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

avec  $f_c$  la porosité critique avant apparition du phénomène de coalescence et  $C_1$  une constante permettant de rendre compte du phénomène de coalescence. Ils enrichissent également le modèle original de Gurson en incorporant le terme  $\sigma_y$  pour rendre compte des effets d'écrouissage [59]. Ils ajoutent de plus une constante  $q_1$  afin d'avoir une fonction d'écoulement en accord avec les études numériques menées par Tvergaard [64][65] dans le cas de matériaux contenant une distribution de cavités de formes sphériques et cylindriques à base circulaire. Le modèle couramment désigné par les initiales GTN s'écrit alors :

$$\Phi = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^2 + 2q_1 f^* \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_y} \right) - \left( 1 + (q_1 f^*)^2 \right) \quad (\text{II.6})$$

A noter que Tvergaard conseille de prendre  $q_1 = 1.5$  afin de rendre compte de la distribution de cavités sphériques et cylindriques à base circulaire. On peut également remarquer que la valeur ultime ( $f_u^*$ ) de la porosité à laquelle nous avons une rupture totale est donnée par  $f_u^* = \frac{1}{q_1}$ . Le paramètre  $C_1$  de l'équation II.5, va permettre d'établir un lien entre la fraction volumique des cavités observée à rupture et la valeur ultime de porosité dans le potentiel  $\Phi$ .

**II.2.1.3 Modèle de Lemaître**

**II.2.1.3.1 Principe**

Dans l'approche thermodynamique, on cherche à décrire l'effet de l'endommagement sur le comportement du matériau ainsi que sur ses caractéristiques mécaniques. Les cavités ne sont pas explicitement représentées dans ce modèle. De nombreux modèles sont basés sur une telle approche mais nous nous restreignons ici au modèle de Lemaître [34] qui est sans doute le modèle de référence dans ce domaine [52] [23]. Avant la mise au point du modèle de Lemaître, le phénomène d'amorçage, de croissances de cavités ainsi que la formation de micro-fissures dues aux grandes déformations, ont fait l'objet de nombreuses analyses d'un point de vue micro-mécanique. Lemaître fait le constat que les modèles micro-mécaniques représentent assez bien les mécanismes physiques de l'endommagement d'un point de vue microscopique mais qu'ils posent des difficultés lorsque l'on souhaite représenter une rupture ductile dans des structures à grande échelle. L'auteur met donc en avant cette différence d'échelle entre le niveau microscopique  $10^{-3}$ - $10^{-2}$  mm et l'échelle de la structure  $10^2$ - $10^3$  mm, pour proposer une approche différente. Lemaître propose donc de voir l'endommagement comme une variable macroscopique. A cette échelle, il est difficile d'introduire autant de physiques que dans les approches micro-mécaniques, mais l'auteur met en avant la facilité du traitement de l'endommagement du matériau dans le cas du calcul de la rupture de structures.

**II.2.1.3.2 Variable d'endommagement**

Pour comprendre la représentation de la variable d'endommagement, prenons l'exemple d'une structure endommagée (voir Figure II.4). Dans celle-ci, nous allons considérer un élément de volume de taille macroscopique. Prenons dans ce dernier une surface  $S$  définie par sa normale  $n$ . Dans cette section, nous retrouvons des cavités et des micro-fissures dont la surface totale est définie par  $S_D$ .

La variable d'endommagement  $D$  associée avec sa normale  $g$  est alors définie par :

$$D_g = \frac{S_D}{S} \tag{II.7}$$

D'un point de vue physique,  $D_g$  représente le rapport de l'aire des cavités et micro-fissures par unité de surface dans le plan  $g$ .

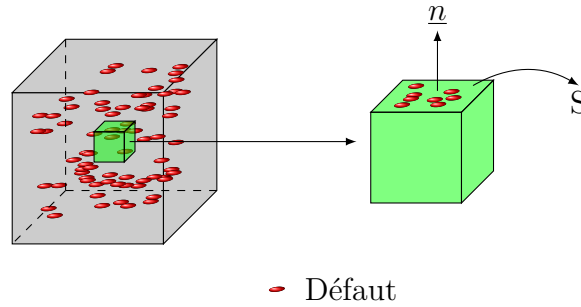


FIGURE II.4 – Concept d’endommagement macroscopique

$$\begin{aligned}
 D_g = 0 & \quad \text{état non endommagé} \\
 D_g = 1 & \quad \text{état totalement endommagé} \\
 0 < D_g < 1 & \quad \text{caractérisation de l'état d'endommagement}
 \end{aligned}
 \tag{II.8}$$

On peut voir que la variable d’endommagement est directement liée à l’orientation de la normale au plan d’étude, ce qui permet d’étudier le cas d’un endommagement anisotrope. Dans son article, Lemaître [34] se limite au cas d’un endommagement isotrope et nous nous retrouvons avec une variable d’endommagement scalaire, tel que :

$$D_g = D \quad \forall g \tag{II.9}$$

### II.2.1.3.3 Notion de contrainte effective et principe d’équivalence en déformation

Le modèle de Lemaître reprend la notion de contrainte effective introduite par Kachanov [29]. Dans le cas d’un endommagement isotrope et en reprenant la notation précédente, le tenseur des contraintes effectives s’écrit donc :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \tag{II.10}$$

Le second point important est que ce modèle adopte le principe d’équivalence en déformation. On suppose que la déformation du matériau n’est affectée par l’endommagement que sous la forme du tenseur des contraintes effectives. C’est à dire que pour toute déformation dépendante du tenseur des contraintes dans le cas

d'un matériau sain, en présence d'endommagement nous remplaçons dans celle-ci le tenseur des contraintes précédent par le tenseur des contraintes effectives. Par exemple dans le cas 1D, la déformation élastique et la déformation plastique (cas d'un écrouissage de type Ramberg-Osgood) s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}\epsilon^e &= \frac{\tilde{\sigma}}{E} \\ \epsilon^p &= \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\alpha}\right)^M\end{aligned}\tag{II.11}$$

avec  $E$  le module d'Young et  $(\alpha, M)$  les coefficients d'écrouissage. Ce deuxième point est très important puisqu'il suppose que chaque comportement est corrigé de la même manière.

#### II.2.1.4 Comparaison des modèles de Lemaître et GTN

Il est assez difficile d'effectuer une réelle comparaison entre les deux modèles abordés tant ils ne cherchent pas à modéliser la rupture par endommagement de la même manière. Nous allons néanmoins donner dans ce paragraphe quelques éléments de comparaison.

- Modèle de Lemaître :
  - Approche macroscopique
  - Introduction de la notion de contrainte effective dans une approche thermodynamique
  - Couplage fort de l'endommagement dans le potentiel d'état
  - Dégradation de l'élasticité du matériau
  - Non prise en compte de la dilatance plastique
  
- Modèle de GTN :
  - Approche micromécanique
  - Couplage fort de l'endommagement dans le potentiel de dissipation
  - Pas de dégradation de l'élasticité du matériau



– Prise en compte de la dilatance plastique

Le choix de l'utilisation de l'un ou l'autre est surtout basé sur deux considérations. La première est, qu'est-ce que l'on souhaite modéliser au niveau du comportement du matériau ? Si l'on souhaite introduire un peu de physique, il faut alors se tourner vers un modèle de GTN. A contrario si l'on souhaite modéliser, par exemple le cas d'une structure à grande échelle, le modèle de Lemaître avec une vision macroscopique sera sans doute préférable. Un second aspect et non des moindres est également la difficulté de l'implantation numérique. D'un point de vue numérique le modèle de Lemaître est plus simple à implanter et aura une vitesse de convergence du modèle plus rapide que le modèle de GTN de part cet aspect macroscopique permettant de rendre moins locale la forte non linéarité matérielle. Cette remarque est valable dans le cas du modèle de Lemaître et du modèle de GTN présentés précédemment.

Dans notre cas étude, nous avons utilisé un modèle de type GTN de part les constats expérimentaux réalisés par Anne-Gaëlle Geffroy [14], où il n'a pas été observé une dégradation élastique marquée mais également afin d'introduire le plus de physique possible dans le modèle.

## II.2.2 Modèle couplé de plasticité-endommagement ductile utilisé dans cette étude

Dans notre approche, nous utilisons un modèle de type GTN modifié, voir [14]. Nous allons ici résumer ce modèle et notamment sa mise en équation et la représentation des différents phénomènes physiques qui vont nous intéresser.

### II.2.2.1 Description des potentiels d'état et de dissipation

Nous partons du principe que le modèle de Gurson décrit un couplage fort de l'endommagement dans le potentiel de dissipation et à contrario un couplage faible au niveau du potentiel d'état. On définit alors un potentiel d'état sous la forme :

$$\omega(\underline{\epsilon}^e, \kappa, T) = \omega_r(\underline{\epsilon}^e) + \omega_s(\kappa, T) \quad (\text{II.12})$$

avec  $\omega_r$  et  $\omega_s$  respectivement la partie réversible et stockée du potentiel d'état. Ces deux quantités peuvent alors se décomposer sous la forme :

$$\omega_r(\underline{\epsilon}^e) = \frac{1}{2} \underline{\epsilon}^e : \underline{\mathbb{C}} : \underline{\epsilon}^e \quad (\text{II.13})$$

$$\omega_s(\kappa, T) = h(\kappa)g(T) \quad (\text{II.14})$$

Basés sur ce potentiel d'état, on peut alors écrire le tenseur des contraintes ainsi que la force d'écroissage comme :

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\epsilon}^e} = \frac{d\omega_r}{d\underline{\epsilon}^e} = \underline{\mathbb{C}} : \underline{\epsilon}^e \quad (\text{II.15})$$

$$r = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa} = \frac{\partial \omega_s}{\partial \kappa} = h'(\kappa)g(T) \quad (\text{II.16})$$

Les deux fonctions  $h'(\kappa)$  et  $g(T)$  se mettent alors sous la forme :

$$h'(\kappa) = R_\infty [1 - \exp(-k\kappa)]^\beta \quad (\text{II.17})$$

$$g(T) = 1 - \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^m \quad (\text{II.18})$$

avec  $(R_\infty, k, \beta)$  les constantes de l'écroissage isotrope et  $(T_{ref}, m)$  les constantes de la fonction d'adoucissement thermique.

En ce qui concerne le potentiel de dissipation, dans le cadre de la thèse d'Anne-Gaelle Geffroy [14], un modèle a été développé basé sur celui de GTN (voir équation II.6). Celui-ci est alors décrit comme :

$$\Phi = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\bar{\sigma}_y} \right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(-\frac{3}{2} \frac{p_m + p_r}{\bar{\sigma}_y}\right) - (1 + (q_1 f)^2) = 0 \quad (\text{II.19})$$

avec  $q_1$  la constante vue précédemment et introduite par Tvergaard ( $q_1 = 1$ ).

La contrainte d'écoulement, la porosité et  $p_r$  (que nous précisons par la suite) permettent d'introduire de façon phénoménologique dans le modèle de GTN, les phénomènes physiques qui semblent important de prendre en compte dans notre étude. Pour plus de clarté, nous étudions séparément ces trois quantités et précisons ce qu'elles permettent de décrire.

### II.2.2.1.1 Contrainte d'écoulement

Au cours de l'étude qu'elle a menée, Anne-Gaelle Geffroy a pu remarquer que trois phénomènes sont pré-pondérants et doivent être décrits dans la contrainte d'écoulement : l'écroutissage isotrope, l'adoucissement thermique, la viscoplasticité (voir figures II.2 II.1). La contrainte d'écoulement est alors décomposée en deux parties :

$$\bar{\sigma}_y(\kappa, \dot{\kappa}, T, \dots) = \sigma_y(\kappa, T) + \sigma_{vp}(\dot{\kappa}, T, \dots) \quad (\text{II.20})$$

avec  $\sigma_y$  la partie de la contrainte d'écoulement indépendante du temps et  $\sigma_{vp}$  une seconde partie permettant de décrire un durcissement de la résistance du matériau dû aux aspects viscoplastiques.

La partie indépendante (voir figure II.5) du temps s'écrit comme :

$$\sigma_y = (R_0 + R_\infty[1 - \exp(-k\kappa)]^\beta) g(T) \quad (\text{II.21})$$

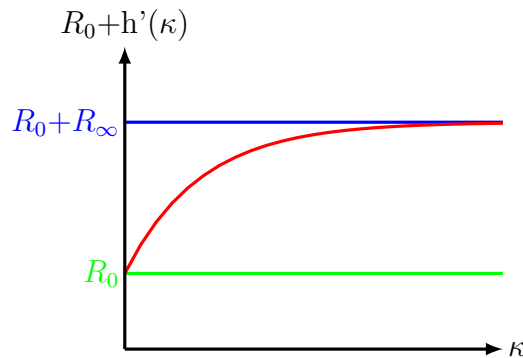


FIGURE II.5 – Modélisation de l'écroutissage isotrope

avec  $R_0$  le rayon initial de la fonction d'écoulement de Hubert-Mises à 0K,  $R_\infty$  la contrainte de saturation,  $(k, \beta)$  des coefficients de la fonction de Voce,  $\kappa$  la déformation plastique cumulée et  $g(T)$  la fonction représentant l'adoucissement thermique (voir figure II.6), définie par :

$$g(T) = \left(1 - \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^m\right) \quad (\text{II.22})$$

avec  $m$  un coefficient de la loi. Dans le cas d'un coefficient  $m$  proche de 1 (cas dans notre étude), on retrouve une influence linéaire de la température dans la partie indépendante du temps de la contrainte d'écoulement.

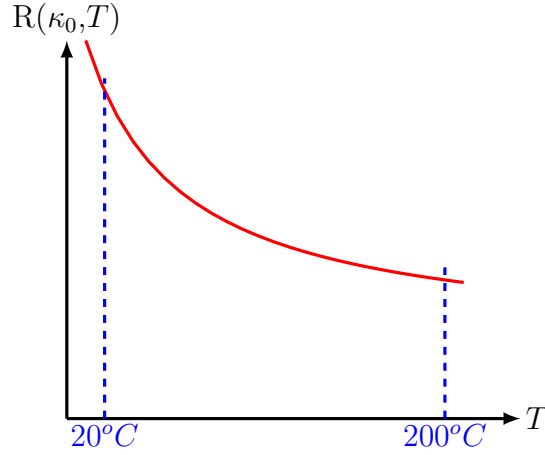


FIGURE II.6 – Modélisation de l'adoucissement thermique

La partie dépendante du temps (voir figure II.7) qui suit une loi de type Norton, s'écrit comme :

$$\sigma_{vp} = Y \left[ \dot{\kappa} \exp\left(\frac{V_a p m}{k_b T}\right) \right]^{\frac{1}{n}} \tag{II.23}$$

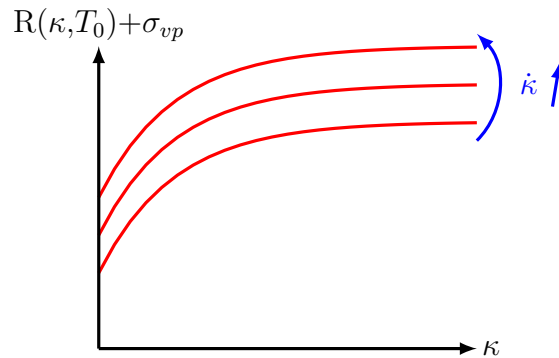


FIGURE II.7 – Modélisation de l'influence de la viscoplasticité

avec  $(Y, n)$  des constantes de la loi,  $(V_a, k_b)$  des constantes en rapport avec le comportement asymétrique, avec  $V_a = V_h \beta^3$  où  $V_h$  est une constante et  $\beta$  l'amplitude du vecteur de Burgers  $\beta = 2.5\text{\AA}$  et avec  $k_B$  la constante de Boltzmann

( $k_B=1.3804.10^{-23}J/K$ ). Il nous reste alors trois variables respectivement,  $\dot{\kappa}$  la vitesse de déformation plastique,  $T$  la température et  $p_m$  la pression. A noter que le rajout dans la loi de Norton du terme exponentiel, permet de décrire une asymétrie (voir figure II.8) de l'effet de la viscosité en traction/compression qui a été constatée pour ce matériau. Cette approche a notamment été proposée par Graff et al [18].

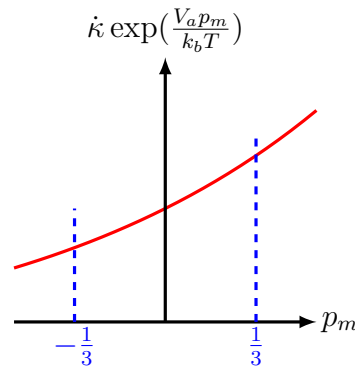


FIGURE II.8 – Modélisation de l’asymétrie traction/compression de la vitesse

### II.2.2.1.2 Porosité

La variable de porosité ( $f^*$  dans le modèle de GTN), doit être capable de représenter les effets combinés de croissance des vides existants ainsi que la germination de nouveaux trous et pour finir la coalescence des cavités. Ces trois mécanismes ont été présentés lors de l’introduction sur l’analyse du mode de rupture du DH36. On réussit de manière assez générale à bien représenter les mécanismes de croissance et de germination des vides mais surtout à quantifier ces deux phénomènes. A contrario le phénomène de coalescence des vides qui accélère la perte de résistance du matériau est assez difficile à modéliser. Des modèles cependant existent afin de le représenter et on peut notamment citer le plus couramment utilisé, celui développé par Tvergaard et Needleman [66]. Partant du principe que d’une part la loi d’évolution du phénomène est très complexe à mettre en oeuvre mais également que les paramètres matériaux associés à ce phénomène ne sont également pas simples à identifier, la variable de porosité du modèle mis en place dans cette étude ne modélise que les effets de croissance et de germination de cavités. Celle-ci se divise donc en deux parties :

$$\dot{f} = \dot{f}_g + \dot{f}_n \tag{II.24}$$

avec  $\dot{f}_g$  la partie en rapport avec la croissance des cavités et  $\dot{f}_n$  la partie en rapport avec la germination de nouveaux trous. Les lois d'évolution de chacune de ces deux parties seront présentées dans le paragraphe suivant.

Il faut noter que dans le modèle utilisé dans notre étude, nous supposons que les cavités sont sphériques avec une distribution aléatoire dans notre matériau. Une approche différente avec des cavités non sphériques a notamment été développée par Gologanu et al [17].

**II.2.2.1.3 Comportement en cisaillement**

Reprenons le potentiel décrit plus haut (voir équation II.6, avec  $f^*=f$ ) et appliquons lui, le cas d'un chargement en cisaillement pure ( $p_m = 0$ ) :

$$\Phi = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^2 - (1 - q_1 f)^2 = 0 \tag{II.25}$$

Usuellement et comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, la loi d'évolution de la croissance des cavités dépend directement des déformations volumiques du matériau. Dans le cas de ce type de chargement, on trouve alors  $\text{Tr} \underline{d}^p = 0$  impliquant  $\dot{f}_g = 0$  et par suite  $f = f_0$  (voir équation II.33).

On retrouve alors un potentiel semblable au critère de Mises à une constante près. Cela traduit donc que sous un chargement en cisaillement pur, nous sommes incapables avec le modèle de GTN original de traduire l'endommagement par cisaillement. Pour passer outre ce problème qui ne représente pas ce qui peut être observé expérimentalement, plusieurs modèles ont été développés. Dans notre modèle (voir équation II.19) nous utilisons l'approche proposée par Longère et al [38] consistant à introduire  $p_r$  dans le potentiel. Celle-ci s'apparente à une contrainte de clivage et se formule comme :

$$p_r = b \ln(q_1 f) \tag{II.26}$$

avec  $b$  une constante du matériau. Ce mode d'écrouissage d'un point de vue mathématique permet de décaler le potentiel plastique de GTN vers les pressions positives (voir figure II.9) permettant ainsi de développer des déformations volumiques même dans le cas d'un chargement en cisaillement pur (règle de normalité).

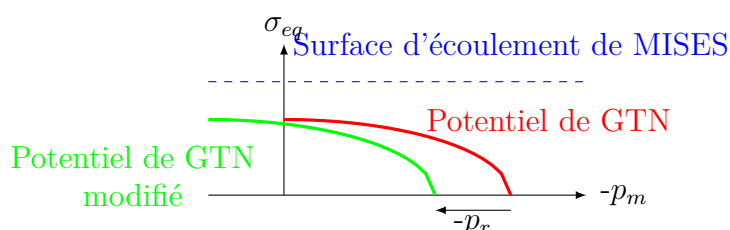


FIGURE II.9 – Illustration du décalage du potentiel de GTN

D'autres approches existent avec un objectif identique et on peut notamment citer celle proposée par Nahshon et Hutchinson [44]. Sans rentrer dans les détails le principe de cette méthode est d'apporter une contribution supplémentaire dans la loi d'évolution de  $\dot{f}_g$  vue précédemment. Cette contribution permet alors, dans le cas d'un chargement en cisaillement pur d'autoriser une croissance des cavités. A noter qu'avec cette méthode nous allons avoir un faible impact sur le potentiel plastique alors qu'avec l'approche utilisée dans notre modèle, nous avons un impact fort sur  $\Phi$ .

### II.2.2.2 Lois d'évolution

Nous allons décrire les principales lois d'évolution du modèle. Tout d'abord, le taux des déformations plastiques  $\dot{\xi}^p$  est déduit de la règle de normalité :

$$\dot{\xi}^p = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \Lambda \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} \tilde{n} - \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p_m} \tilde{\delta} \right) = \dot{\epsilon}^{pD} \tilde{n} + \frac{1}{3} \dot{\epsilon}^{pM} \tilde{\delta} \quad (\text{II.27})$$

$$\tilde{n} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{s}}{\sigma_{eq}} \quad (\text{II.28})$$

Les parties déviatorique et volumique, respectivement  $\dot{\epsilon}^{pD}$  et  $\dot{\epsilon}^{pM}$ , du taux des déformations plastiques  $\dot{\xi}^p$  sont données par :

$$\dot{\epsilon}^{pD} = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} = 2\Lambda \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\sigma_y} \quad (\text{II.29})$$

$$\dot{\epsilon}^{pM} = -\Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial p_m} = 3q_1 q_2 f \Lambda \frac{\sinh[-\frac{3}{2}q_2(\tilde{p}_m + \tilde{p}_r)]}{\bar{\sigma}_y} \quad (\text{II.30})$$

avec  $\tilde{\sigma}_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{\bar{\sigma}_y}$ ,  $\tilde{p}_m = \frac{p_m}{\bar{\sigma}_y}$  et  $\tilde{p}_r = \frac{p_r}{\bar{\sigma}_y}$ , et où  $\Lambda$  représente le multiplicateur viscoplastique.

La loi d'évolution de la variable d'érouissage isotrope  $\kappa$  s'écrit (voir Gurson [20]) :

$$\dot{\kappa} = \frac{\sigma_{eq}\dot{\epsilon}^{pD} - p_m\dot{\epsilon}^{pM}}{(1-f)\bar{\sigma}_y} \quad (\text{II.31})$$

En se basant sur les travaux de Longère et al [39], voir également Longère et Dragon [37], l'échauffement adiabatique sous sollicitations dynamiques est décrit comme :

$$\rho C \dot{T} = \sigma_{eq}\dot{\epsilon}^{pD} - p_m\dot{\epsilon}^{pM} - r\dot{\kappa} \quad (\text{II.32})$$

Comme vu précédemment, le taux de porosité  $\dot{f}$  est décomposé en deux parties. Chacune de ces contributions est alors décrite respectivement par :

$$\begin{aligned} \dot{f}_g &= (1-f)\text{Tr} \underline{q}^p = (1-f)\dot{\epsilon}^{pM} \\ \dot{f}_g(0) &= f_0 \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_n &= B\dot{\sigma}_y \\ \dot{f}_n(0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

avec  $B$  une fonction définie par Longère et al. [39], tel que :

$$B = f_{max} \frac{p}{\sigma_c} \Phi_{I_0}^{p-1} \exp(-\Phi_{I_0}^p) \quad (\text{II.35})$$

avec  $f_{max}$  la porosité à partir de laquelle il n'y a plus germination de nouveaux trous,  $p$  une constante (=2),  $\sigma_c$  une contrainte critique et  $\Phi_{I_0}$  le critère de germination.  $\sigma_c$  comprend une composante indépendante du temps et une composante visqueuse, tel que :

$$\sigma_c = R_0 + \sigma_{vp} \quad (\text{II.36})$$



La composante visqueuse  $\sigma_{vp}$  dans  $\sigma_c$  permet de réduire la vitesse de germination des nouveaux trous pour des chargements rapides. Ce phénomène a été observé dans [14] où un endommagement moins important avait été détecté sur des éprouvettes en traction dynamique par rapport à celles soumises à de la traction quasi-statique. Finalement, le critère de germination  $\Phi_{I_0}$  est construit sur la base du modèle de GTN modifié, tel que :

$$\Phi_{I_0} = \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_c} \right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(-\frac{3}{2} \frac{p_m + p_r}{\sigma_c}\right) - (1 + (q_1 f)^2) \quad (\text{II.37})$$

### II.2.2.3 Implantation numérique

Le comportement du matériau présenté au-dessus a été implanté dans Abaqus standard (implicite) comme matériau utilisateur (UMAT), pour des éléments finis 3D et 2D en déformations planes. L'intégration numérique du modèle a été réalisée en utilisant la procédure classique de retour radial combinée avec l'algorithme de résolution de Newton-Raphson, voir Aravas [2] pour plus de détails. Vis à vis de la difficulté que représente le calcul d'un opérateur tangent cohérent efficace, le choix de l'utilisation d'un opérateur tangent élastique a été fait. Cela a pour conséquence de réduire la taille du pas de temps à chaque incrément. En divisant l'équation II.29 par l'équation II.30, ou inversement, on élimine le multiplicateur viscoplastique :

$$\Xi_{\Delta} = \Delta \epsilon^{pD} \frac{\partial \Phi}{\partial p_m} + \Delta \epsilon^{pM} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{eq}} = 0 \quad (\text{II.38})$$

L'intégration numérique consiste alors à la résolution du système d'équations suivant :

$$\Phi(\sigma_{eq}, p_m; H^{\alpha}) = 0 \quad (\text{II.39})$$

$$\Xi_{\Delta} = 0 \quad (\text{II.40})$$

$$p_m = p_m^e + K \Delta \epsilon^{pM} \quad (\text{II.41})$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}^e - 3\mu \Delta \epsilon^{pD} \quad (\text{II.42})$$

$$\Delta H = h(\Delta \epsilon^{pD}, \Delta \epsilon^{pM}, \sigma_{eq}, p_m, H) \quad (\text{II.43})$$

avec  $\sigma_{eq}^e$  et  $p_m^e$  représentant respectivement la contrainte équivalente et la pression test,  $\Delta H$  le système des lois complémentaires (équations II.29, II.30, II.24, II.33, II.34) écrites sous une forme incrémentale. Les constantes  $\mu$  et  $K$  représentent respectivement les modules de cisaillement et de compressibilité. Les conditions adiabatiques sont activées pour une vitesse de déformation supérieure ou égale à  $1s^{-1}$ . Dans les autres cas on suppose un état isotherme.

## II.3 Modélisation numérique de la fissure

### II.3.1 Exemples de modèles de fissuration

Afin de rendre compte de la propagation d'une fissure dans une structure, de nombreuses techniques ont été développées au cours des dernières décennies. Cette partie n'a pas pour but de faire un état de l'art exhaustif de ces méthodes, mais plutôt de réaliser une énumération des méthodes les plus couramment utilisées. On choisit de classer ces méthodes en deux grandes catégories, celles qui sont appliquées dans le cadre des éléments finis classiques et celles basées sur un enrichissement de la méthode des éléments finis

#### II.3.1.1 Dans le cadre de la méthode des éléments finis

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, trois méthodes sont représentatives de ce que l'on peut trouver usuellement, le remaillage ou maillage adaptatif, la suppression d'éléments et la méthode des éléments cohésifs ou d'interface.

Les méthodes de remaillage [8] [7] présentent l'avantage de représenter géométriquement la fissure au sein de la structure. Cependant lorsque la fissure se propage, les étapes de projection de champ de l'ancien vers le nouveau maillage peuvent poser quelques problèmes [57] [58].

La suppression des éléments [14] [6] [23] est la méthode la plus simple à mettre en oeuvre afin de décrire une propagation de fissure. Cependant nous nous confrontons à deux problèmes :

- Grande dépendance au maillage
- Représentation géométrique grossière de la fissure

La méthode des éléments cohésifs classiques présente l'avantage d'obtenir une bonne représentation géométrique de la fissure. Cependant l'inconvénient de cette méthode est que le trajet de la fissure doit être à priori connu. Cette méthode est donc particulièrement utilisée dans le cas de l'étude du délaminage des composites [1]

où la direction/plan de délaminage est connue. Dans le cas du traitement d'une propagation de fissure arbitraire, Xu et Needleman [68] ont introduit des éléments d'interface entre tous les éléments. La méthode est alors moins restrictive mais le trajet de fissure n'est pas entièrement arbitraire.

### II.3.1.2 Enrichissement de la méthode des éléments finis

Nous voyons que les méthodes permettant de rendre compte de la propagation d'une fissure dans une structure, appliquées dans le cadre des éléments finis standards entraînent plusieurs inconvénients. Des méthodes d'enrichissement ont alors été développées. On peut alors identifier deux façons d'enrichir la méthode des éléments finis classiques :

- par enrichissement nodal
- par enrichissement élémentaire

#### II.3.1.2.1 Enrichissement nodal

Ce que l'on entend par un enrichissement nodal, ce sont les méthodes basées sur le concept de partition de l'unité de Melenk et Babuska [40]. Plusieurs méthodes sont basées sur ce concept comme la GFEM [63], ou encore la X-FEM [41]. Mais on retrouve également des modèles classiquement utilisés dans le cadre de la FEM qui utilisent les propriétés de la méthode de partition de l'unité, ou PUM "Partition Unity Method" [9] [10].

Si on applique le concept de partition de l'unité dans le cadre des éléments finis, on peut alors écrire d'une manière générale :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i \left( a_i + \sum_{j=1}^m \varphi^j b_i^j \right) \quad (\text{II.44})$$

avec  $N_i$  les fonctions de forme éléments finis (garantissant le principe développé par Melenk et Babuska [40]),  $a_i$  les degrés de liberté réguliers,  $n$  est le nombre de noeuds,  $m$  est le nombre de fonctions d'enrichissement,  $b_i^j$  est le  $j^{\text{ième}}$  degré de

liberté additionnel associé au degré de liberté  $i$  et  $\varphi^j$  représente la  $j^{\text{ième}}$  fonction d'enrichissement.

L'intérêt des méthodes basées sur la PUM est alors dans le cadre des éléments finis, d'enrichir la cinématique des éléments par une fonction ( $\varphi$ ) ou des fonctions ( $\varphi^j$ ) permettant de décrire le champ souhaité. En l'occurrence dans le cas de la rupture, on cherche à enrichir la cinématique des éléments finis afin d'éviter de mailler les surfaces de discontinuité provoquées par la fissure. La X-FEM est basée sur ce principe et nous verrons par la suite quels types d'enrichissement peuvent être utilisés.

### II.3.1.2.2 Enrichissement élémentaire

Ce que l'on entend par un enrichissement élémentaire (E-FEM), ce sont les méthodes basées sur l'incorporation d'une discontinuité au sein des éléments finis [27]. Les degrés de liberté associés à cette discontinuité sont réduits à l'élément au contraire des méthodes basées sur un enrichissement nodal. Ces méthodes développées dans un premier temps pour le traitement du phénomène de localisation [5] [49] sont aujourd'hui utilisées pour la description des discontinuités fortes [46] [48]. L'avantage de telles méthodes est d'une part de pouvoir décrire la transition d'un comportement homogène à une discontinuité faible puis le passage à une discontinuité forte. D'autre part les degrés de liberté associés à la discontinuité sont bien moindres comparés aux méthodes basées sur un enrichissement nodal. Cependant, ces degrés de liberté doivent garantir la continuité de la surface de la fissure. De plus, les résultats dépendent fortement de la formulation choisie [47].

### II.3.1.2.3 Bilan

On peut voir que dans une vision d'enrichissement de la méthode des éléments finis dans le cadre de la mécanique de la rupture, il existe deux grandes stratégies possibles (enrichissement nodal et enrichissement élémentaire). Dans le cadre de l'enrichissement élémentaire, elles permettent de traiter numériquement, la discontinuité faible et la discontinuité forte. Cette méthode semble donc assez intéressante dans un contexte général. Cependant, dans le choix qui nous intéresse ici, c'est à

dire la description uniquement de la discontinuité forte, notre choix s'est porté sur la X-FEM et ce pour plusieurs raisons.

Le premier argument et non des moindres, est que l'on voit que la méthode est applicable à plusieurs domaines comme le contact [16] [62] où encore les plaques [32] pour ne citer qu'eux, ce que l'on ne retrouve pas pour la E-FEM. Le second fortement lié au premier est que l'on retrouve beaucoup plus de publications et d'ouvrages consacrés à la X-FEM, ce qui est un avantage indéniable d'un point de vue recherche.

### II.3.2 Modèle numérique retenu : X-FEM

Nous détaillons ici la méthode des éléments finis étendues (X-FEM). Dans un premier temps, nous revenons sur le principe de la méthode et notamment de l'enrichissement utilisé. Nous verrons ensuite quelques améliorations de première importance qui ont été apportées à la méthode originale. Finalement, nous présenterons le modèle X-FEM utilisé dans notre étude qui permet le couplage avec le comportement fortement non linéaire du matériau.

#### II.3.2.1 Méthode originale

##### II.3.2.1.1 Principe

La première approche de la X-FEM est communément attribuée à Belytschko et Black [4]. Dans celle-ci, les auteurs enrichissent le champ de déplacement par des fonctions asymptotiques [13] issues de la mécanique de la rupture et permettant de décrire le champ de déplacement en pointe de fissure. Tous les noeuds dont le support (l'élément) est coupé par la fissure sont enrichis par ces fonctions. Cependant des problèmes de conditionnement apparaissent [33]. Reprenant le principe de cette première approche, Moes et al [41] ont alors l'idée d'utiliser la fonction de Heaviside afin de modéliser la discontinuité du champ de déplacement, tout en conservant les fonctions asymptotiques pour décrire le champ de déplacement en fond de fissure.

Deux types d'enrichissement sont alors utilisés (illustré sur la figure II.11) pour obtenir un champ de déplacement de la forme :

$$u(x) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i a_i}_1 + \underbrace{\sum_{j \in J} N_j b_j H(x)}_2 + \underbrace{\sum_{k \in K} N_k \left( \sum_{l=1}^4 c_k^l F_l(r, \theta) \right)}_3 \quad (\text{II.45})$$

1. Champ de déplacement régulier
2. Champ de déplacement discontinu
3. Champ de déplacement singulier permettant de représenter le champ de déplacement en pointe de fissure

avec  $I$  désignant les noeuds de la structure,  $J$  les noeuds appartenant aux éléments coupés par la fissure et  $K$  les noeuds appartenant à l'élément contenant le fond de fissure. Les quantités vectorielles  $a_i$ ,  $b_j$  et  $c_k$  désignent les degrés de liberté des noeuds en question dans chaque cas.  $N_i$ ,  $N_j$  et  $N_k$  sont les fonctions de formes classiques utilisées en FEM.  $H$  désigne la fonction de Heaviside (voir équation II.47) qui permet de décrire le saut du déplacement aux niveaux des éléments entièrement coupés par la fissure.  $F_l$  désigne les quatre fonctions asymptotiques qui nous permettent de décrire le champ de déplacement en fond de fissure au niveau de l'élément contenant la pointe de fissure.

Dans le cas d'un problème en élasticité bidimensionnel avec un matériau homogène isotrope, les quatre fonctions asymptotiques utilisées sont alors [4] :

$$F_{l=1,2,3,4} = \left[ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{II.46})$$

avec  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires exprimées dans le repère locale du fond de fissure (Figure II.10). Il faut noter que la première fonction  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$  est discontinue à travers les lèvres de la fissure tandis que les trois autres restent continues. La fonction de Heaviside dans l'équation II.46, est définie comme :

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ si } (x - x^*) \underline{n} \geq 0 \\ -1 \text{ dans les autres cas} \end{array} \right\} \quad (\text{II.47})$$

avec  $x(x,y,z)$  représentant le point étudié,  $x^*(x,y,z)$  est le point le plus proche de  $x$  et étant sur la fissure et  $n$  est la normale extérieure à la fissure au point  $x^*$  (Figure II.10).

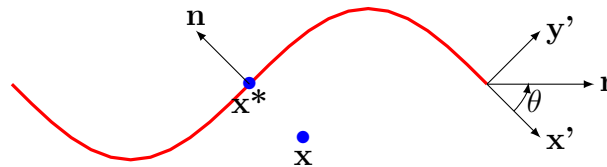


FIGURE II.10 – Illustration de la fonction de Heaviside

Comme nous pouvons le voir Figure II.11, les noeuds des éléments traversés entièrement par la fissure sont enrichis avec la fonction de Heaviside ( $u(x)=u_1+u_2$ , dans l'équation II.45) et les noeuds de l'élément contenant le fond de fissure sont enrichis avec les fonctions asymptotiques ( $u(x)=u_1+u_3$ , dans l'équation II.45).

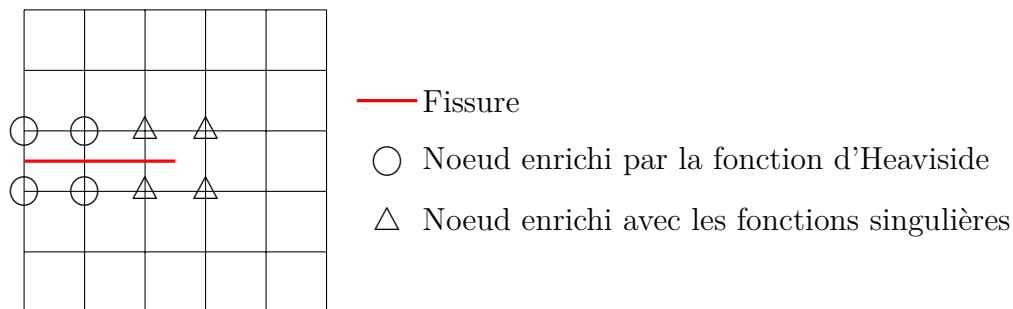


FIGURE II.11 – Illustration des noeuds enrichis par la fonction de Heaviside et ceux enrichis par les fonctions singulières

### II.3.2.1.2 Intégration numérique

L'utilisation de fonctions discontinues et asymptotiques pose un problème en ce qui concerne l'intégration numérique. En effet, l'intégration de telles fonctions d'enrichissement nécessite une bonne approximation qui ne peut pas se faire en utilisant les méthodes classiques utilisées en FEM (4 points de Gauss pour les quadrangles et 1 pour les triangles). Pour résoudre ce problème, Moes et al [41] ont sous-découpé les éléments à intégrer en triangles ce qui permet d'avoir un grand nombre de points de Gauss et donc une précision accrue (voir figure II.12).



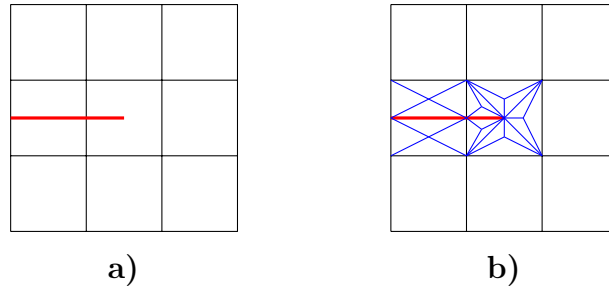


FIGURE II.12 – Principe d’intégration par sous-découpage : a) Maillage de la structure et b) Sous-découpage réalisé pour l’intégration numérique

### II.3.2.2 Améliorations

Nous avons vu précédemment la formulation X-FEM originale proposée par Moes et al [41]. Nous nous intéressons à présent aux principales améliorations qui ont été proposées.

#### II.3.2.2.1 Fonctions de niveau ou Level-set

Afin de représenter et mettre à jour la fissure en cas de propagation, Moes et al [42] ont l’idée d’appliquer des level-set à la méthode X-FEM. Dans la méthode originale, la fissure est représentée comme une succession de segments de droites (cas 2D) ce qui peut être lourd et difficile à implémenter dans un code de calcul. Ici, seules deux fonctions sont nécessaires pour décrire la fissure (voir Figure II.13).

- Lorsque  $\psi=0$  et  $\phi=0$  le point est situé sur le fond de la fissure
- Lorsque  $\psi=0$  et  $\phi<0$  le point est situé sur la fissure

La fonction  $\psi(x)$  est appelé fonction échelon de la distance et est décrite de la façon suivante :

$$\psi(x) = \min|\underline{n} \cdot (x - x^*)| \text{sign}(\underline{n} \cdot (x^* - x)) \quad (\text{II.48})$$

La fonction  $\text{sign}(\cdot)$  est une fonction échelon semblable à la fonction de Heaviside vue auparavant. En utilisant ensuite une deuxième fonction échelon de la distance ( $\psi(x)$ ), nous pouvons décrire le front de fissure. Pour ce faire, on choisit  $\phi(x)$  de telle manière qu’elle soit perpendiculaire à la fonction  $\psi(x)$ . De plus, le signe de

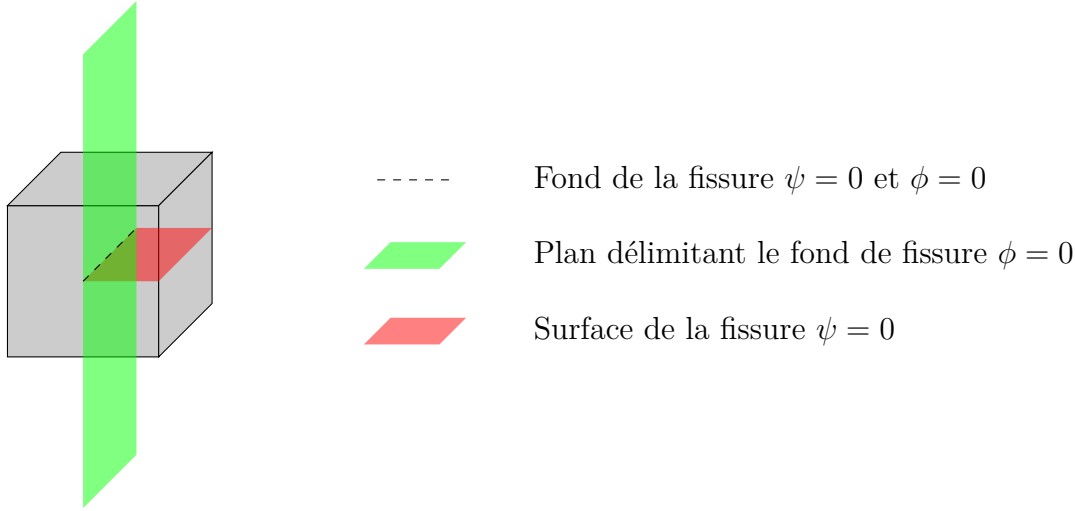


FIGURE II.13 – Illustration du concept de level-set

$\phi(x)$  est défini tel que lorsque  $\psi(x)=0$  et  $\phi(x)<0$ , nous sommes sur la fissure. Ces deux fonctions sont calculées aux noeuds de chaque élément du maillage et des conditions vont nous permettre de savoir quels éléments sont coupés par la fissure et quels éléments contiennent le fond de fissure.

Par la suite, en utilisant les résultats des fonctions  $\psi$  et  $\phi$  aux noeuds de chaque élément, on peut interpoler ces deux fonctions au sein d'un élément avec l'aide des fonctions de forme de celui-ci (voir équation II.49 II.50).

$$\phi(x) = \sum_{i \in I} \phi_i \cdot N_i \tag{II.49}$$

$$\psi(x) = \sum_{i \in I} \psi_i \cdot N_i \tag{II.50}$$

Les auteurs ont ensuite injecté ces deux expressions dans l'équation II.45 pour obtenir le champ de déplacement suivant :

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i N_i + \sum_{j \in J} b_j N_j H(\psi(x)) + \sum_{k \in K} N_k \left( \sum_{l=1}^4 c_k^l F_l(\phi(x), \psi(x)) \right) \tag{II.51}$$

Le problème étudié par les auteurs est le même que celui développé dans [41], c'est à dire nous sommes sur un problème en élasticité linéaire avec un matériau homogène isotrope. Les quatre fonctions asymptotiques énoncées auparavant (voir

équation II.46) sont donc encore valables. Le seul changement est que nous allons utiliser les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  afin de calculer  $r$  et  $\theta$  :

$$r = \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \tag{II.52}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\phi}{\psi}\right) \tag{II.53}$$

La simulation de la propagation d'une fissure revient ensuite à mettre à jour les fonctions level-set [19] à chaque pas de temps. Un inconvénient subsiste avec cette méthode puisqu'il faut avoir un maillage assez fin pour bien représenter la fissure. Cependant, elle permet de décrire des fissures compliquées, comme par exemple une fissure dans un cas 3D.

### II.3.2.2.2 Intégration des fonctions de forme asymptotiques

Pour que la méthode X-FEM soit efficace, il faut avoir une connaissance précise de ce qui se passe au niveau du fond de fissure, c'est-à-dire avoir des fonctions de forme asymptotiques adéquates. Cependant, il faut également que l'intégration numérique au niveau de l'élément contenant le fond de fissure soit précise. Pour ce faire, dans la méthode originale [41], les auteurs réalisent un sous-découpage de l'élément en question et ils obtiennent de bons résultats. Pour y arriver, le nombre de sous-triangles nécessaire est néanmoins important et cela augmente le temps de calcul.

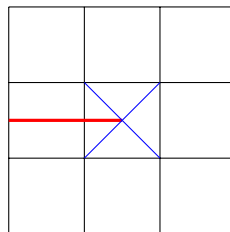


FIGURE II.14 – Sous découpage de l'élément contenant le fond de fissure

Dans [3] et [31], les auteurs proposent de réaliser une intégration des fonctions de forme asymptotiques par une forme quasi-polaire. L'utilisation de fonctions de

forme asymptotiques conduit à calculer, pour la matrice de rigidité, des intégrales de la forme :

$$\int_{T_e} \nabla(F_i \varphi_j) \cdot \nabla(F_k \varphi_l) dx \quad (\text{II.54})$$

Avec  $T_e$  désignant un triangle du maillage. On peut remarquer qu'avec cette intégration, nous avons des singularités en  $r^{-1/2}$ . En utilisant une intégration quasi-polaire, nous transformons  $dx$  par  $r.dr.d\theta$  et cette singularité disparaît. L'élément contenant le fond de fissure est alors divisé en quatre sous-triangles dans le cas d'un élément quadrangle (Figure II.14) avec chaque triangle ayant comme sommet la pointe de la fissure. Chaque triangle est issu de la transformée géométrique suivante :

$$\tau : \begin{cases} x \\ y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x.y \\ y \end{cases} \quad (\text{II.55})$$

qui permet de transformer un carré en triangle (Figure II.15). Cette transformation permet d'augmenter facilement le nombre de points d'intégration en fond de fissure ce qui permet d'avoir un temps de calcul moins important qu'avec la méthode originale.

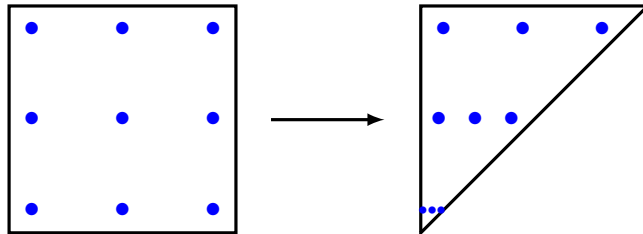


FIGURE II.15 – A gauche l'élément parent et à droite l'élément physique

### II.3.2.2.3 Augmentation de la zone d'enrichissement

Dans la méthode originale, seuls les noeuds de l'élément contenant le fond de fissure sont enrichis par les fonctions asymptotiques. Dans [3] et [31], les auteurs mettent en évidence que nous n'arrivons pas à atteindre le taux de convergence maximal avec la méthode X-FEM contrairement à ce qui est attendu. Ils proposent

donc d'étendre la zone contenant les noeuds enrichis par les fonctions asymptotiques pour résoudre ce problème (Figure II.16).

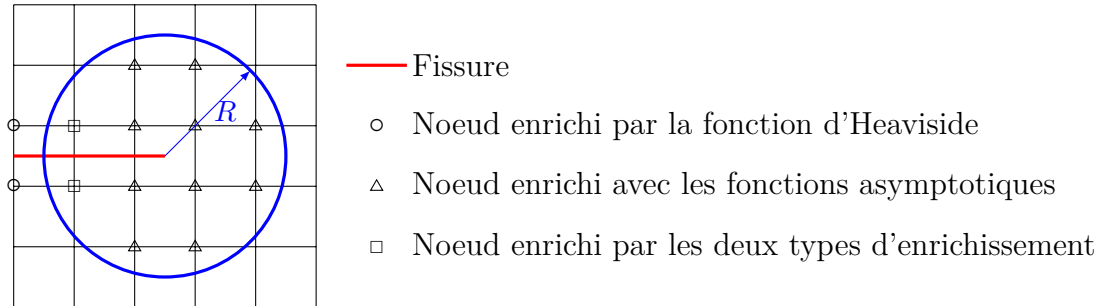


FIGURE II.16 – Zone d'enrichissement fixe

La taille de la zone enrichie est indépendante de la taille du maillage. Cette méthode permet d'atteindre le taux de convergence maximal mais les auteurs ont remarqué également que celle-ci augmentait considérablement le nombre de degrés de liberté ainsi que le conditionnement du système linéaire. Dans [32], l'auteur rappelle qu'un conditionnement trop élevé dégrade la solution numérique et rend difficile la résolution du système linéaire. Pour résoudre ces problèmes, [3] et [31] proposent deux solutions distinctes que nous ne présentons pas ici basées respectivement, sur une méthode de préconditionnement et sur un enrichissement global avec raccord nodal.

#### II.3.2.2.4 Application pour des matériaux écrouissables

Les fonctions asymptotiques utilisées dans le cadre de la X-FEM dépendent directement du comportement du matériau. Dans la méthode originale, les fonctions asymptotiques sont identifiées dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de rupture. Dans un cadre de plasticité confinée, Elguedj et al [11] proposent une nouvelle base de fonctions asymptotiques basées sur les champs HRR (Hutchinson-Rice-Rosengren) [26] [55]. Cette méthode s'applique dans le cas d'une loi d'écrouissage de type loi puissance. Les auteurs retiennent comme base finale :

$$F_{l=1,2,3,4,5,6} = r^{\frac{1}{n+1}} \left[ \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \theta, \sin \frac{\theta}{2}, \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \sin 3\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \sin 3\theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (\text{II.56})$$

avec  $n$  l'exposant d'écroûissage de la loi puissance. On remarque toujours la présence de la première fonction  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$  qui est discontinue à travers les lèvres de la fissure.

### II.3.3 Application dans le cadre d'un comportement ductile endommageable

Nous avons abordé dans la partie précédente, la méthode X-FEM originale ainsi que quelques unes des améliorations qui ont été proposées au cours de ces dernières années. Dans un premier temps, la plupart des cas d'application de la X-FEM étaient basés sur un comportement élastique linéaire [41]. Mais au fil des années, on a cherché à coupler la X-FEM avec des comportements matériaux non linéaires. Ainsi on a pu voir une étude menée sur le couplage de la X-FEM avec un comportement élasto-plastique avec de la plasticité confinée [11] puis avec un comportement élasto-plastique avec une plasticité étendue [22] et finalement avec un comportement élasto-plastique endommageable [52]. On remarque dans ces différentes études que le comportement du matériau joue un rôle prépondérant dans le choix de la formulation X-FEM et notamment le champ de déplacement utilisé ainsi que la méthode d'intégration. Dans notre cas d'étude, l'utilisation d'un comportement fortement non linéaire ainsi que l'utilisation d'un code de calcul industriel (Abaqus) doit également être pris en compte dans le choix de la formulation X-FEM utilisée. Nous allons voir que le comportement du matériau joue un rôle important dans le choix de l'enrichissement du champ de déplacement ainsi que dans la méthode d'intégration numérique. Nous allons aborder également la manière de modéliser la fissure afin d'être le plus clair possible lorsque nous aborderons le chapitre 3.

#### II.3.3.1 Enrichissement du champ de déplacement

##### II.3.3.1.1 Fonctions asymptotiques

Dans la méthode X-FEM originale, on distingue donc deux types d'enrichissement (voir équation II.45) :

- Fonction de Heaviside pour représenter la discontinuité du champ de déplace-

ment

- Fonctions asymptotiques pour représenter le champ de déplacement en pointe de fissure

Les fonctions asymptotiques dépendent directement du comportement du matériau. Dans le cadre d'un comportement élastique fragile [4] où d'un comportement élasto-plastique avec de la plasticité confinée [11], des études analytiques permettent de déterminer une base de fonctions asymptotiques capable de décrire le champ de déplacement en pointe de fissure pour ces deux cas de figure. Dans le cas d'un matériau ductile avec un comportement fortement non linéaire, l'expression analytique du champ en question en pointe de fissure n'est pas a priori connu. Une autre approche est alors de définir les fonctions asymptotiques par le biais de simulations numériques. Cependant, le fait que le matériau de cette étude est soumis à de l'érouissage, de l'adoucissement thermique, de la viscoplasticité ainsi que de l'endommagement ductile, augmente considérablement la complexité des fonctions à identifier.

Pour surmonter ce problème, une autre approche consiste à utiliser les fonctions asymptotiques issues de la mécanique linéaire élastique de rupture [53]. Malgré le fait que l'évaluation du champ de contrainte-déformation autour du fond de fissure n'est pas correcte, cette technique permet toutefois de reproduire le cas où le fond de fissure est situé à l'intérieur d'un élément au contraire de la formulation du champ de déplacement avec uniquement l'enrichissement de type Heaviside où le fond de fissure est obligatoirement situé sur l'arête d'un élément.

On peut alors se poser la question de la pertinence de l'utilisation de telles fonctions dans notre étude. Outre le fait que les fonctions asymptotiques permettent de représenter la pointe de fissure au sein d'un élément, est-ce qu'il y a un réel intérêt au niveau des résultats que nous pouvons attendre ?

Pour un tel comportement matériau, il est très compliqué de comparer qualitativement les champs en pointe de fissure pour les deux formulations du champ de déplacement X-FEM (avec et sans fonctions asymptotiques). La méthode la plus simple et la plus logique est alors de comparer une unique variable locale en pointe de fissure. Dans cette optique, nous avons donc étudié l'évolution de la

contrainte équivalente proposée par Haboussa et al [22] (dans le cadre d'un matériau élasto-plastique) en pointe de fissure dans le cas d'une plaque fissurée soumise à un chargement en traction sans propagation de la fissure (voir figure II.17). Pour cette application, la méthode d'intégration utilisée sera présentée dans la section suivante. Le comportement du matériau a quant à lui été présenté précédemment.

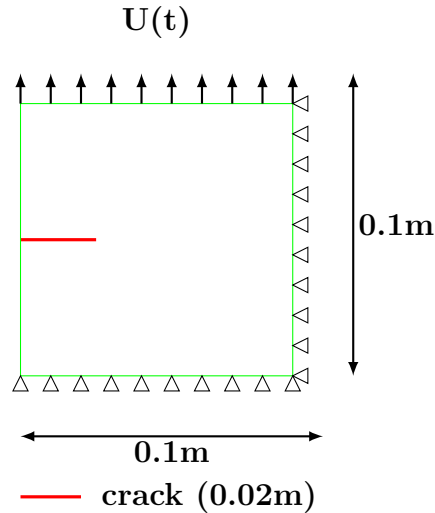


FIGURE II.17 – Application réalisée pour l'étude de l'influence des fonctions asymptotiques

L'évolution de cette contrainte équivalente (voir figure II.18) a été étudiée pour deux tailles de mailles différentes pour chaque cas d'étude, c'est-à-dire avec et sans utilisation des fonctions asymptotiques issues de Belytschko et Black [4] (avec et sans le terme 3 dans l'équation II.45).

D'après la figure II.18, l'utilisation des fonctions asymptotiques n'apporte pas d'améliorations en terme d'évolution de la contrainte équivalente au sens de Haboussa et al [22]. Si on se base sur ces résultats, l'unique avantage de l'utilisation des fonctions asymptotiques est de pouvoir arrêter le fond de fissure au sein d'un élément. Si maintenant on raisonne en terme de degrés de liberté dans le cas d'un élément quadrangle, l'utilisation des deux types d'enrichissement nous amène à 48 degrés de liberté par élément alors qu'en utilisant uniquement la fonction de Heaviside nous avons uniquement 16 degrés de liberté par élément. La question qui se pose alors est : l'utilisation de 32 degrés de liberté en plus (des 8 degrés de liberté en utilisant la fonction de Heaviside) pour pouvoir modéliser un arrêt



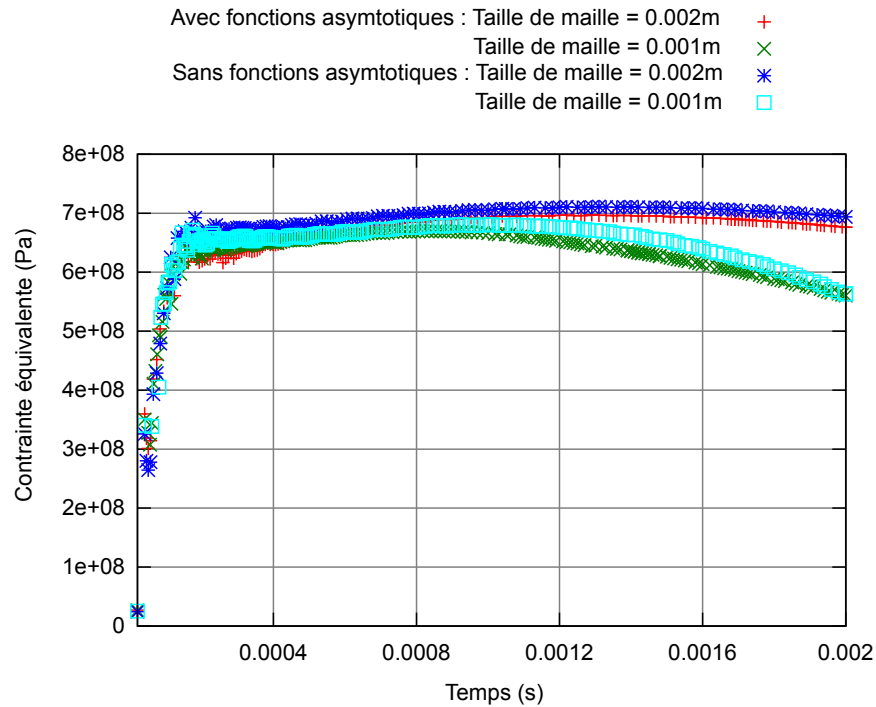


FIGURE II.18 – Evolution de la contrainte équivalente avec et sans utilisation des fonctions asymptotiques

de fissure au sein d'un élément est-elle indispensable ? Il ne semble pas y avoir de bonnes ou de mauvaises réponses à cette question. Cependant, dans un contexte industriel où la diminution des temps de calcul est un enjeu crucial, la réduction du nombre de degrés de liberté semble une nécessité. De plus l'intégration numérique sans l'utilisation des fonctions asymptotiques est rendue moins complexe.

En l'absence d'une base de fonctions asymptotiques connues pour le comportement du matériau complexe considéré dans cette étude et d'après les remarques précédentes, nous avons réduit le champ de déplacement à la seule utilisation d'un enrichissement via la fonction de Heaviside.

$$u(x) = \overbrace{\sum_{i \in I} N_i a_i}^1 + \overbrace{\sum_{j \in J} N_j b_j H(x)}^2 \quad (\text{II.57})$$

## II.3.3.1.2 Variante de la base décalée

Dans leur approche, Zi et Belytschko [70] proposent notamment et c'est ce qui va nous intéresser ici, une variante de la fonction d'enrichissement de Heaviside. Celle-ci appelée couramment base décalée, consiste à introduire dans la formulation originale II.45, la position des noeuds.

$$u(x) = \overbrace{\sum_{i \in I} N_i a_i}^1 + \overbrace{\sum_{j \in J} N_j b_j (H(x) - H_j)}^2 \quad (\text{II.58})$$

avec  $H_j$  la valeur de la fonction de Heaviside au noeud  $j$ . L'intérêt de cette variante est que l'enrichissement disparaît au niveau des noeuds et cela a deux conséquences intéressantes.

Le premier intérêt de cette méthode est que nous réduisons le nombre d'éléments dont la cinématique est enrichie. En effet, dans la méthode originale lorsqu'un noeud est enrichi, tous ses supports (éléments en connection avec ce noeud) sont enrichis (voir figure II.19).

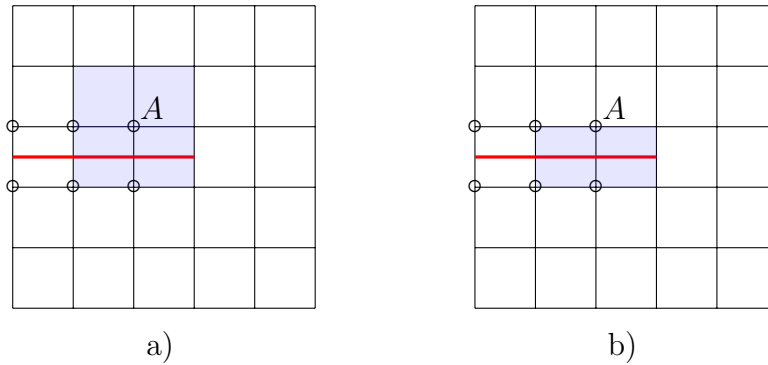


FIGURE II.19 – Notion d'enrichissement des supports du noeud A avec utilisation a) de la fonction de Heaviside originale et b) de la base décalée

Avec l'utilisation de la variante de Zi et Belytschko [70], seuls les éléments coupés par la fissure interagissent avec celle-ci, voir figure II.19, ce qui a pour but de simplifier l'implantation numérique.

Le second intérêt est le pilotage des conditions aux limites, dans notre cas soit un

champ de déplacement soit un champ de vitesse en bord de structure qui peut alors se faire de manière classique.

### II.3.3.2 Intégration numérique

#### II.3.3.2.1 Comportement matériau élastique linéaire

Le champ de déplacement des éléments enrichis s'est complexifié par l'introduction de la fonction de Heaviside (discontinue). L'intégration numérique sur de tels éléments est donc rendue complexe. Or la méthode des éléments finis nécessite une bonne approximation de ces fonctions sur le domaine de l'élément. Dans la méthode originale, l'élément à intégrer est sous-découpé en triangles ce qui permet d'avoir un grand nombre de points de Gauss et donc une précision accrue. Le sous-découpage se conforme également à la position de la fissure au sein de chaque élément (voir figure II.20).

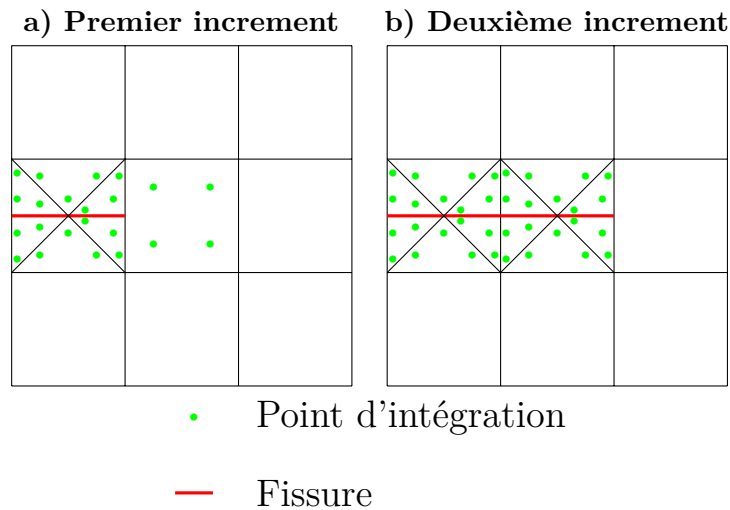


FIGURE II.20 – Evolution des points d'intégration durant la propagation d'une fissure dans la méthode originale

Cette méthode est pratique lorsque nous sommes en présence d'un comportement élastique mais avec un comportement élasto-plastique, nous avons besoin de connaître l'histoire des variables d'état à chaque point de Gauss de chaque élément au pas précédent. Or ici, il y a une incompatibilité.

### II.3.3.2.2 Comportement matériau élasto-plastique

De prime abord, pour résoudre le problème précédent il faut réaliser une projection des variables internes sur les nouveaux points de Gauss. Or cette projection n'est pas simple à mettre en oeuvre et peut également poser des problèmes d'ordre numérique. Partant de ce constat, dans un cadre élasto-plastique dans le cas de la plasticité confinée, Elguedj et al [11] proposent une méthode basée sur deux types de sous-découpage (voir figure II.21).

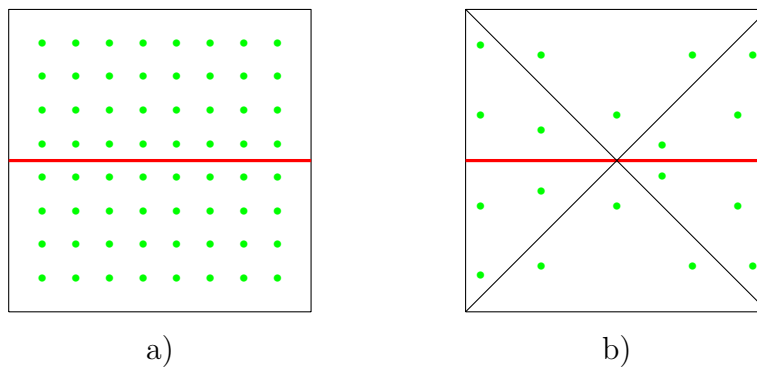


FIGURE II.21 – Représentation des deux types de sous-découpage utilisés pour l'intégration numérique dans le cas d'un matériau élasto-plastique : a) Sous découpage régulier et b) Sous découpage évolutif, d'après [11]

Un premier sous-découpage évolutif compatible avec les lèvres de la fissure permet de calculer la matrice de rigidité de l'élément enrichi. Un second sous-découpage fixe (nécessitant un grand nombre de points d'intégration) non compatible avec la fissure va permettre de calculer les variables d'état. A noter que dans le cas de la plasticité confinée, l'utilisation du second découpage avec un très grand nombre de points d'intégration ne s'active que dans les éléments proches de la pointe de la fissure. Dans les autres cas on utilise un nombre de points fixes. Le but étant de passer de ce dernier à un très grand nombre de points d'intégration avant apparition de plasticité dans l'élément. Prabel et al [53] appliquent cette méthode dans le cas dynamique et montrent une bonne qualité de la méthode.

### II.3.3.2.3 Approche utilisée

Pour obtenir une bonne intégration, des points de Gauss dans un élément coupé doivent être présents de part et d'autre de la fissure. Dans un cadre où l'histoire des variables d'état est importante, [11] et [53] proposent une alternative afin d'obtenir une bonne intégration de la matrice de rigidité et de la matrice de masse et aucune projection des variables d'état. Cependant un problème se pose toujours en ce qui concerne le calcul des efforts de cohésion de l'élément faisant intervenir les contraintes. De plus, l'utilisation du sous-découpage évolutif augmente le nombre d'opérations à réaliser.

La question est alors : Est-ce que l'utilisation d'un sous-découpage avec un très grand nombre de points d'intégration n'est-il pas suffisant dans notre cas d'étude ? En considérant que le comportement fortement non linéaire du matériau a un impact très important dans les éléments situés près du fond de fissure, s'assurer d'une bonne intégration, que ce soit des matrices de rigidité ou encore des efforts de cohésion, semble être un objectif de second ordre. De ce fait, le choix d'un unique sous-découpage fixe avec un très grand nombre de points d'intégration a été fait. Comme conseillé par Prabel et al [53], 64 points de Gauss sont utilisés pour l'intégration numérique des éléments enrichis. La transition entre un sous-découpage fixe avec peu de points de Gauss vers un très grand nombre de points de Gauss présentée précédemment n'a que peu d'utilité puisque la plasticité est étendue dans notre cas d'étude. Dans notre modèle, tous les éléments enrichis possèdent 64 points de Gauss.

### II.3.3.3 Représentation de la fissure

Pour représenter la fissure ainsi que sa propagation, nous utilisons les level-set présentées précédemment. Chaque nouvel incrément de fissure sera modélisé comme un segment qui sera alors caractérisé à l'aide de trois fonctions de niveau (voir figure II.22).

Les trois fonctions auront le rôle suivant :

- Fonction  $\psi$  qui va décrire la direction de la fissure
- Fonction  $\phi_1$  qui va décrire le front de cette fissure  $\Rightarrow \perp$  à  $\psi$  au point  $g$
- Fonction  $\phi_2$  qui va décrire le front précédent de la fissure  $\Rightarrow \perp$  à  $\psi$  au point  $V_g$

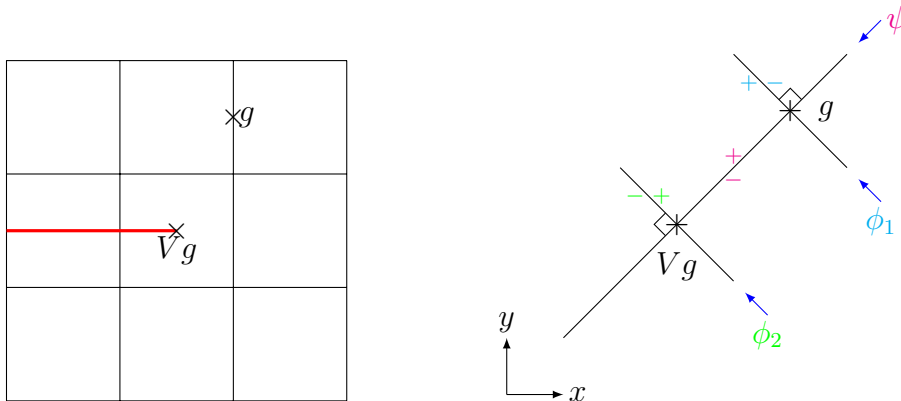


FIGURE II.22 – Représentation des fonctions de niveaux utilisées pour représenter la propagation d’une fissure

Pour savoir si un élément est enrichi ou non, nous allons utiliser les level-set en respectant certaines règles.

Un point important à considérer avec les level-set c’est le domaine sur lequel celles-ci seront appliquées. Dans le cas de petites perturbations (faible changement au niveau du maillage), on utilisera le maillage de notre structure à l’état initial comme domaine pour représenter la fissure. Il n’y aura pas besoin de réactualisation de ce domaine au cours du calcul puisque nous sommes dans l’hypothèse de petits déplacements. Au contraire dans notre étude vis à vis du comportement du matériau, la possibilité d’une grande distorsion au niveau du maillage nous oblige à réactualiser à chaque incrément le domaine où est représentée la fissure. Dans ce cas, on peut utiliser le maillage de notre structure à l’instant  $t$  (voir figure II.23) comme domaine sur lequel les level-set seront appliquées.

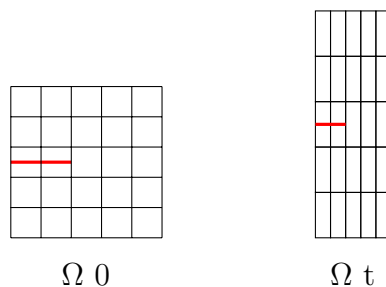


FIGURE II.23 – Evolution d’une structure fissurée au cours du temps

## II.3.4 Implantation numérique

### II.3.4.1 XFEM dans Abaqus

Au début de ce travail (2010), la méthode des éléments finis enrichis venait d'être implantée dans le code de calcul industriel Abaqus. Cependant l'approche proposée était loin d'être satisfaisante par rapport à l'étude souhaitée et posait plusieurs problèmes.

Le premier d'entre eux, est que la X-FEM d'Abaqus ne pouvait pas se coupler avec un comportement matériau utilisateur (UMAT) mais uniquement avec des comportements assez simples (élasticité/élasto-plasticité). En utilisant une telle approche, on fait un pas en avant par rapport à la thèse d'Anne-Gaelle Geffroy [14] en modélisant plus précisément la fissure mais on fait un pas en arrière en ce qui concerne la modélisation de la rupture ductile par endommagement du matériau. Le second problème est qu'il n'est également pas possible de coupler la X-FEM d'Abaqus avec une méthode de propagation utilisateur propre à une rupture ductile par endommagement. Le critère d'amorçage, la direction de propagation et la longueur du nouvel incrément de fissure sont alors définis par des critères basiques (élasticité/élasto-plasticité) qui sont très insuffisants pour ce que l'on cherche à représenter dans cette étude. Le dernier problème est la formulation d'enrichissement proposée dans Abaqus qui est loin de satisfaire aux attentes effectuées dans ce chapitre (formulation du champ de déplacement, intégration numérique, ...).

La X-FEM implantée dans Abaqus étant loin d'être suffisante pour l'étude que l'on souhaite mener, il a été fait le choix d'implanter la formulation que nous avons mis au point dans Abaqus via une routine utilisateur (UEL).

### II.3.4.2 XFEM via une routine utilisateur

L'avantage de passer par une routine utilisateur est que nous n'avons pas de restriction par rapport au modèle que l'on souhaite utiliser. On peut alors, modéliser notre approche X-FEM couplée avec le comportement du matériau et mettre au point une méthodologie de propagation que nous allons aborder au prochain chapitre. Nous n'allons finalement utiliser Abaqus que pour résoudre le système discret ( $[M]\ddot{\underline{U}} + [K]\underline{U} = \underline{F}$ ).

Dans un cas classique d'utilisation, le fonctionnement de la routine et du couplage avec Abaqus est assez simple (voir figure II.24). Pour chaque élément du maillage,

Abaqus fait appel à la routine utilisateur en fournissant des données d'entrée (déplacements nodaux, histoires des variables d'état, incrément des déplacements nodaux, incrément de temps, ...) et on doit fournir en données de sortie, la matrice de rigidité, la matrice de masse et les efforts de cohésions de cet élément. Par la suite, Abaqus résout le système et appelle de manière identique cette routine utilisateur jusqu'à convergence du problème. Dès que celui-ci a convergé, on passe à l'incrément suivant jusqu'à la fin du calcul.

Si on applique ce fonctionnement à ce que l'on souhaite réaliser dans cette étude, c'est-à-dire implanter la X-FEM et mettre au point une méthodologie de propagation de la fissure, on obtient alors un organigramme un peu plus complexe (voir figure II.25). Il y a alors quatre étapes importantes, deux durant le calcul courant, une durant le post-traitement et la dernière valable durant tout le calcul. La première étape intervient lorsqu' Abaqus fait appel à la routine utilisateur afin d'identifier l'enrichissement de l'élément courant ("Role element"). Durant la deuxième étape du calcul courant, on doit définir la matrice de rigidité, la matrice de masse et les efforts de cohésion de l'élément en tenant compte de l'enrichissement de ce dernier ("Calcul : K, M, Fint"). La troisième étape importante est la mise en place de la méthode de propagation de la fissure qui conduit au final, à la mise à jour des enrichissements au sein du maillage. Celle-ci a lieu en post-traitement de l'incrément courant permettant ainsi de faciliter la convergence du problème par le biais du découplage méthode de propagation et résolution du système (on ne recherche pas l'équilibre du système durant la propagation "comme un schéma explicite"). La quatrième étape importante est le couplage entre la routine utilisateur et Abaqus dans le cadre de notre modèle, nécessitant des outils supplémentaires afin de coupler au mieux notre routine utilisateur avec Abaqus.

Il faut bien avoir à l'esprit que l'implantation numérique de la méthode X-FEM n'est pas simple et elle est rendue très compliquée (mais pas infaisable!) lorsque l'on souhaite réaliser cette tâche dans un code de calcul industriel.

### II.3.4.3 Notion de matrice de masse évolutive

Afin de mieux comprendre notre choix d'utiliser une formulation implicite plutôt qu'explicite comme expliqué dans le premier chapitre, nous allons très succinctement étudier l'écriture de la matrice de masse élémentaire. Dans le cadre des éléments



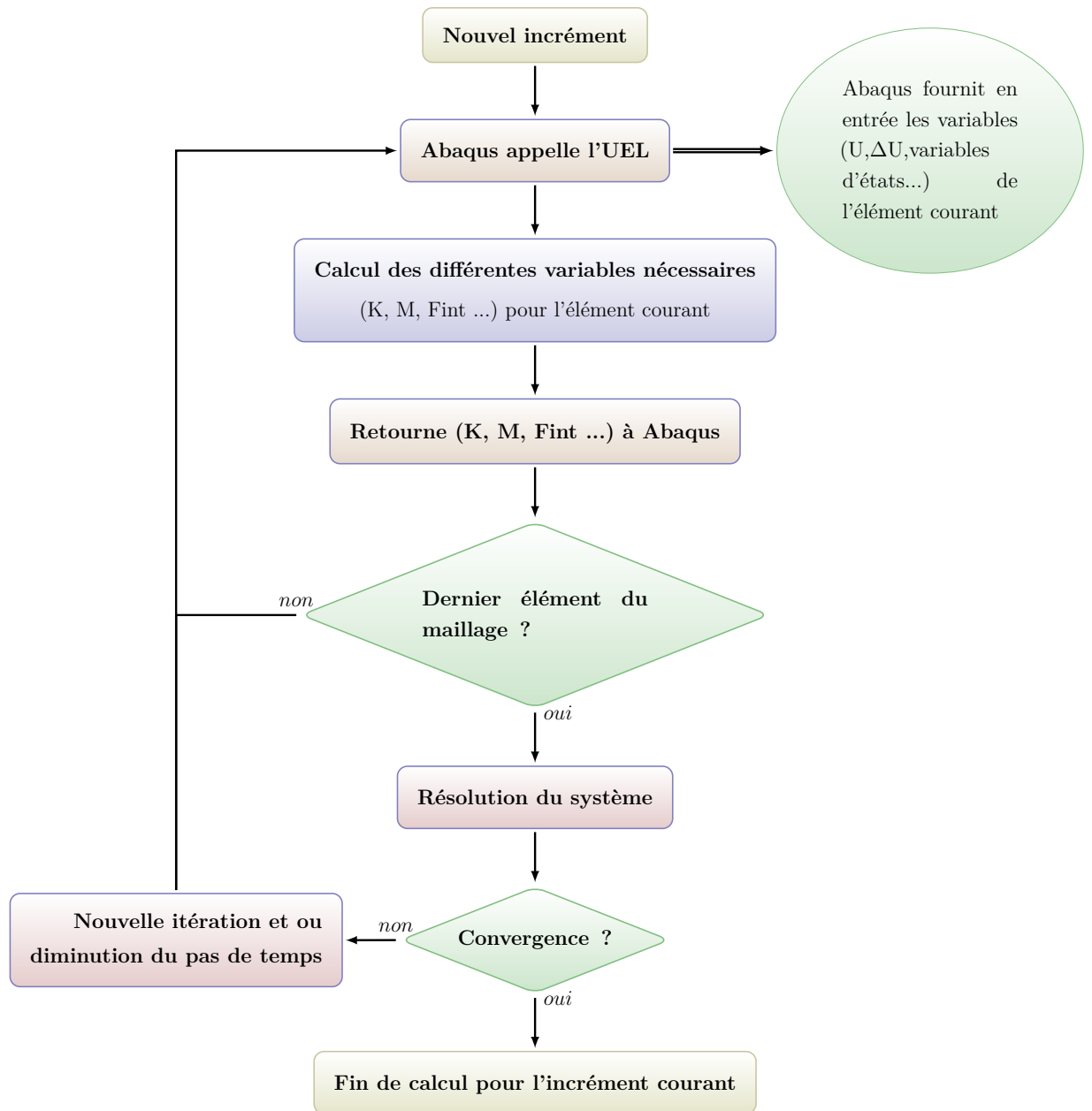


FIGURE II.24 – Organigramme simplifié du fonctionnement d'une routine utilisateur dans un cas classique d'utilisation

finis, cette matrice s'exprime sous la forme :

$$[M] = \int_{V_e} \rho [N(x, y, z)]^t [N(x, y, z)] dV \quad (\text{II.59})$$

avec  $[M]$  la matrice de masse de l'élément,  $Ve$  le volume de l'élément,  $[N(x, y, z)]$  la matrice contenant les fonctions de forme de l'élément ( $N_i$ ) et  $\rho$  la masse volumique du matériau. Dans un calcul utilisant la méthode des éléments finis classiques, la formulation du champ de déplacement au sein de l'élément ne change pas et donc  $[N(x, y, z)]$  reste identique durant tout le calcul (pas de changements au niveau de la matrice de masse) (voir équation II.60).

$$[N(x, y, z)] = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 \end{bmatrix} \quad (\text{II.60})$$

Dans le cadre de la X-FEM, la formulation du champ de déplacement au sein d'un élément peut évoluer, ce qui a pour conséquence de modifier la matrice contenant les fonctions de forme  $[N(x, y, z)]$  (voir équation II.61).

$$[N(x, y, z)] = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N1(H(x) - H(1)) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & N2 & 0 & N2(H(x) - H(2)) & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N1(H(x) - H(1)) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & N2 & 0 & N2(H(x) - H(2)) \end{bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

Dans ce cas, la matrice de masse peut évoluer au cours du temps. Ceci explique que nous utilisons un schéma de résolution implicite (permettant la modification à chaque incrément de la matrice de masse) plutôt qu'explicite (matrice de masse définie en début de calcul et non modifiable par la suite) propre à Abaqus.

## II.4 Bilan

Nous allons ici résumer les principales informations données dans ce chapitre.

### II.4.1 Modélisation constitutive du comportement du matériau

Nous avons pu voir dans un premier temps dans ce chapitre que la rupture du DH36 est due à la croissance et à la coalescence de cavités au sein du matériau. Afin de modéliser cette rupture ductile par endommagement, de multiples modèles existent que [14] classe en deux grandes familles : les modèles dits dilatants et les modèles non dilatants. La première famille permet l'apparition d'une déformation volumique par le biais de la croissance des cavités alors que la seconde famille ne le permet pas. Afin de mettre en évidence qu'il n'existe pas une unique façon de

modéliser le comportement du DH36, nous avons présenté un modèle pour chaque famille, modèle de Lemaître pour les non dilatants et modèle de GTN pour les dilatants. Dans le cadre de notre étude, nous avons choisi d'utiliser un modèle de type GTN afin d'introduire le plus de physique possible dans la modélisation. Nous avons alors retenu un potentiel plastique qui est résumé dans le tableau II.1. Celui-ci permet notamment par le biais de la contrainte d'écoulement  $\bar{\sigma}_y$  de prendre en compte les effets, de l'écrouissage isotrope, de l'adoucissement thermique, de la viscoplasticité et de l'asymétrie en traction/compression, qui ont été observés expérimentalement [14]. En ce qui concerne la porosité, seule la germination de nouveaux trous et la croissance des vides existants ont été modélisés. Le choix de la non modélisation du phénomène de coalescence a été motivé par le fait qu'il est très complexe à définir et à quantifier. Faute de données suffisamment probantes, nous avons choisi de ne pas le représenter. Le dernier point important du modèle est l'introduction d'un mode d'écrouissage proposé par Longère et al [39] dans le potentiel plastique. Celui-ci a pour but de permettre la croissance de cavités dans le cas d'un chargement en cisaillement.

Le modèle de comportement mis au point dans le cadre d'un matériau ductile endommageable a ensuite été intégré dans le code de calcul industriel Abaqus via une routine utilisateur matériau (UMAT).

## II.4.2 Modélisation numérique de la fissure

Le second grand enjeu de ce chapitre est la modélisation numérique de la fissure. Nous avons pu voir comme pour le comportement du matériau qu'il y a différentes approches possibles que l'on peut classer également en deux grandes familles. On distingue donc les modèles basés sur la méthode des éléments finis et des modèles basés sur un enrichissement de la cinématique des éléments finis. Au niveau des modèles basés sur la méthode des éléments finis, on peut voir qu'ils sont très vite limités, soit en terme de qualité de la représentation de la fissure provoquant ainsi une large dépendance à la taille de maille (en terme d'amorçage de la fissure et de direction de propagation), soit en terme de projection des champs lors de la propagation de la fissure dans le cas des méthodes de remaillage.

L'enrichissement de la cinématique des éléments finis est alors une alternative à la FEM pour pallier ces différents problèmes. On peut distinguer alors deux types

Potentiel plastique basé sur un modèle de type GTN	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Phi = \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y}\right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(-\frac{3}{2} \frac{p_m + p_r}{\sigma_y}\right) - (1 + (q_1 f)^2)</math></li> </ul>
Prise en compte dans la contrainte d'écoulement de différents phénomènes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ecrouissage</li> <li>• Adoucissement thermique</li> <li>• Viscoplasticité</li> </ul>
Porosité décomposée en deux parties sans prise en compte de l'effet de coalescence	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Processus de germination de nouvelles cavités</li> <li>• Croissance des cavités</li> </ul>
Autorisation de la croissance des cavités sous un chargement en cisaillement pure	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introduction d'un mode d'écrouissage proposé par Longère et al [39]</li> </ul>

TABLE II.1 – Bilan : Comportement du matériau

d'enrichissement couramment utilisés : enrichissement nodal et enrichissement élémentaire. Nous avons pu notamment voir dans ce chapitre le fonctionnement de ces deux méthodes ainsi que les notions auxquelles elles font appel. Par le biais d'une étude comparative, nous avons pu mettre en évidence les principales différences entre respectivement, la X-FEM (dans le cadre d'un enrichissement nodal) et la E-FEM (dans le cadre d'un enrichissement élémentaire) ainsi que les arguments qui nous ont orienté vers la X-FEM afin de modéliser numériquement la fissure. A savoir que la X-FEM est applicable à de nombreux domaines que l'on ne retrouve pas avec la E-FEM, mais également que l'on retrouve beaucoup plus de références bibliographiques consacrées à la méthode des éléments finis enrichis. Après avoir détaillé la méthode (X-FEM) originale [41] et quelques améliorations intéressantes, nous avons appliqué la formulation au cas d'un comportement ductile

endommageable. Ceci a donc entraîné des choix par rapport à la méthode originale. Au niveau de la formulation du champ de déplacement, après étude de l'influence du rôle des fonctions asymptotiques, nous avons choisi de ne pas les représenter dans notre modèle. De plus, afin de concentrer les enrichissements au niveau des éléments ayant une interaction avec la fissure, nous avons choisi d'utiliser la variante de la base décalée proposée par Zi et Belytschko [70]. Nous obtenons alors un champ de déplacement donné dans le tableau II.2. Le second choix a concerné l'intégration numérique de ce champ. En effet de par la discontinuité présente dans le champ de déplacement, l'intégration numérique classique ne suffit plus. Après étude, le choix d'utiliser un très grand nombre de points d'intégration (64 dans le cadre de notre étude) fixe durant la propagation de la fissure a été fait. Afin de modéliser l'avancée de la fissure et mettre notamment à jour les enrichissements, nous avons fait le choix d'utiliser les level-set vues comme des suites de segments.

Le modèle X-FEM mis au point dans le cadre d'un comportement ductile endommageable a par la suite été intégré dans le code de calcul industriel Abaqus via un élément utilisateur (UEL).

Utilisation de la XFEM pour représenter la discontinuité forte	<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>u(x) = \sum_{i \in I} N_i a_i + \sum_{j \in J} N_j b_j (H(x) - H_j)</math></li></ul>
Représentation de la fissure	<ul style="list-style-type: none"><li>• Utilisation des level-set vues comme des suites de segments</li></ul>
Intégration numérique	<ul style="list-style-type: none"><li>• Utilisation de 64 points d'intégration dans chaque élément</li></ul>
Enrichissement des éléments	<ul style="list-style-type: none"><li>• L'utilisation d'Abaqus nous oblige à définir la liste des éléments finis enrichis en début de calcul sans modifications possibles durant le calcul</li></ul>

TABLE II.2 – Bilan : Représentation de la fissure

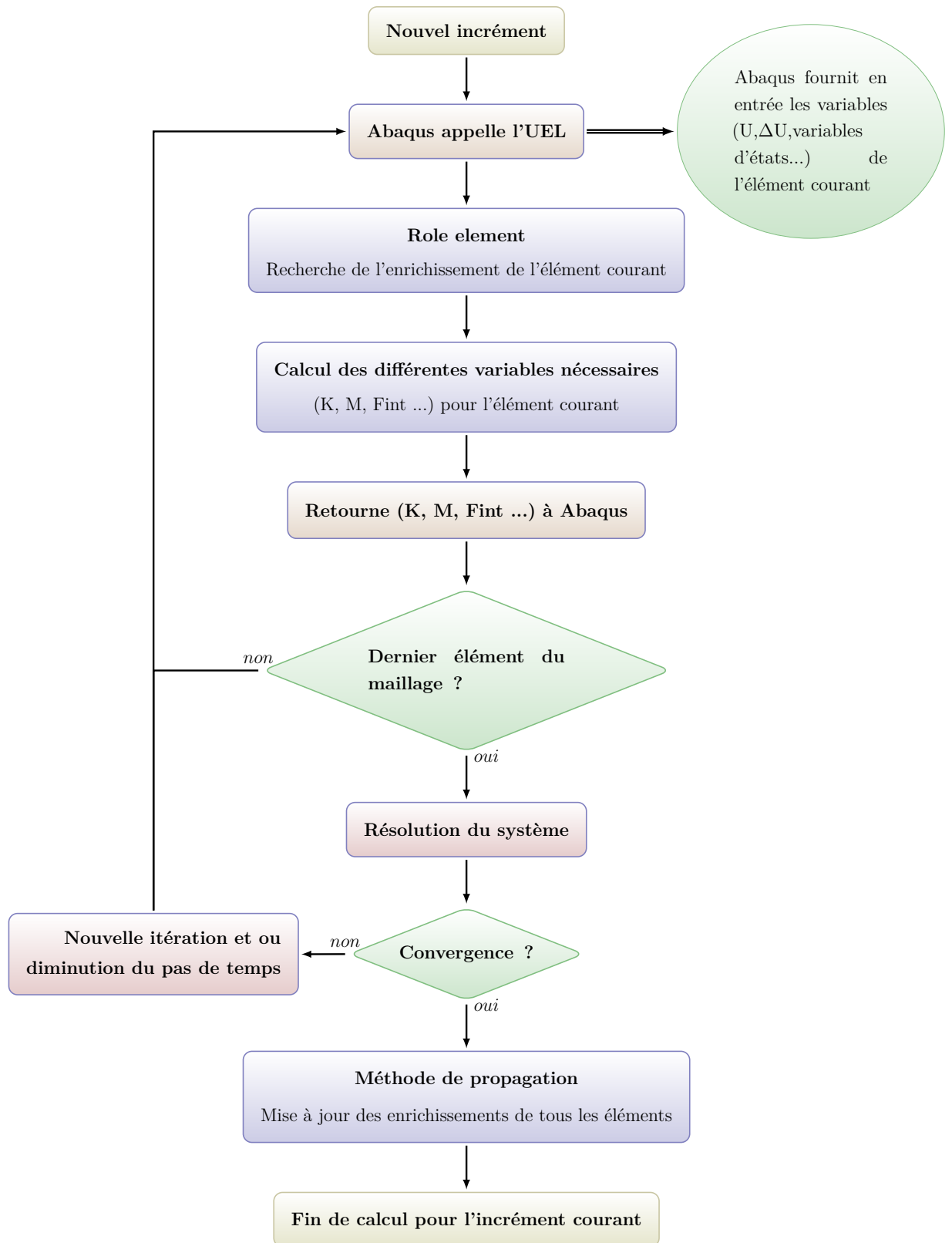



FIGURE II.25 – Organigramme simplifié du fonctionnement d'une routine utilisateur dans le cas de l'utilisation de la X-FEM

# Chapitre III

## Transition endommagement-rupture

ous avons vu dans le précédent chapitre le modèle de comportement du matériau et la méthode permettant de traduire numériquement les conséquences cinématiques de la présence d'une fissure dans la structure. Le but à présent est de coupler ces deux approches afin de rendre compte de la rupture par endommagement ductile dans le matériau considéré dans cette étude. Ceci implique donc la mise au point d'une méthode de propagation qui est l'objet de ce troisième chapitre.

Nous allons voir que la méthodologie de propagation permet de tirer certains avantages de la XFEM. Cependant et c'est le point le plus important, la méthode de propagation doit être représentative de la rupture d'une telle classe de matériaux (comportement élasto-plastique endommageable par croissance de cavités). Dans ce chapitre nous montrons qu'il existe beaucoup d'études orientées dans le cadre de matériaux élastiques ou encore élasto-plastiques mais au contraire peu portent sur le cas d'un matériau élasto-plastique endommagé par croissance de cavités. Ce point constitue donc l'originalité de ce travail. La méthode de propagation, permettant de rendre compte d'une déchirure ductile par endommagement, entraîne des choix essentiellement motivés par des considérations physiques.

Ce chapitre se divise en quatre parties. Dans un premier temps, nous posons le problème, qui est l'objectif du couplage GTN et X-FEM. Nous précisons également les éléments importants à étudier dans le cas de la propagation d'une fissure (amorçage de la fissure, direction de propagation, longueur de fissuration) et les hypothèses formulées. Dans la seconde partie, nous étudions séparément les points importants de la méthode de propagation. Dans cette partie, nous développons l'approche adoptée et tentons de la replacer par rapport aux critères existant par ailleurs. Pour cloturer ce chapitre, un bilan permet de résumer la méthode de propagation mise au point dans le cadre de cette étude.



## PLAN DU CHAPITRE III

---

<b>III.1 Méthodologie de l'approche adoptée</b> . . . . .	<b>69</b>
III.1.1 Quelles hypothèses? . . . . .	69
III.1.2 Un schéma en trois temps . . . . .	69
<b>III.2 Direction de propagation</b> . . . . .	<b>70</b>
III.2.1 Quelle approche? . . . . .	70
III.2.1.1 Cas élastique-fragile . . . . .	70
III.2.1.2 Extension du cas élastique-fragile au cas élasto- plastique 'quasi-fragile' . . . . .	71
III.2.1.3 Cas élasto-plastique adoucissant indépendant du temps . . . . .	72
III.2.1.4 Cas élasto-viscoplastique adoucissant . . . . .	74
III.2.2 Analyse de bifurcation . . . . .	74
III.2.2.1 Introduction . . . . .	74
III.2.2.2 Calcul de l'opérateur tangent . . . . .	75
III.2.2.3 Identification des plans de localisation . . . . .	78
III.2.2.4 Distribution "multi-modale" . . . . .	78
III.2.2.5 Choix de l'angle . . . . .	80
III.2.2.6 Effets de la viscosité . . . . .	82
<b>III.3 Amorçage de la fissure</b> . . . . .	<b>82</b>
III.3.1 Introduction . . . . .	82
III.3.1.1 Approches classiques . . . . .	82
III.3.1.2 Approche proposée . . . . .	84
III.3.2 Notion d'énergie . . . . .	85
III.3.2.1 Calcul du critère d'amorçage . . . . .	85
III.3.2.2 Evaluation du critère d'amorçage . . . . .	86
<b>III.4 Longueur de propagation</b> . . . . .	<b>88</b>
III.4.1 Introduction . . . . .	88
III.4.2 Méthode par épuisement . . . . .	89
III.4.3 Méthode de controle de la vitesse de fissuration . . . . .	90
<b>III.5 Bilan</b> . . . . .	<b>92</b>
III.5.1 Méthode par épuisement . . . . .	93
III.5.2 Méthode de controle de la vitesse de fissuration . . . . .	93

---

## III.1 Méthodologie de l'approche adoptée

### III.1.1 Quelles hypothèses ?

Le but de cette étude est de coupler un matériau ayant un comportement fortement non linéaire impliquant un adoucissement par endommagement ductile et la méthode des éléments finis étendus. L'approche nécessite donc une stratégie spécifique afin de passer d'un endommagement mécanique continu à une fissure impliquant une discontinuité forte (i.e. du champ de déplacement). D'un autre côté, le manque de données expérimentales sur la transition entre endommagement et la formation d'une fissure nous amène à formuler des hypothèses sur les mécanismes microscopiques conduisant à l'amorçage de la fissure ainsi que des simplifications au niveau du traitement numérique. En particulier, de par la complexité du processus physique amenant à la formation d'une fissure, nous supposons dans notre étude que la transition entre l'étape de coalescence des vides et la création de la fissure est instantanée. Ceci implique donc que l'étape de coalescence des vides n'est pas modélisée en tant que telle mais implicitement par le biais de l'avancée de la fissure.

### III.1.2 Un schéma en trois temps

Lorsque l'on s'intéresse aux méthodes de propagation des fissures, trois questions sont importantes :

- Quand l'amorçage de la fissure a-t-il lieu ?
- Dans quelle direction la fissure se propage-t-elle ?
- Quelle est la longueur du nouvel incrément de propagation ?

Le premier problème est d'identifier des critères en adéquation avec le comportement du matériau. Nous voyons ce point dans la suite du chapitre. Un second problème un peu moins explicite est le couplage des trois problèmes entre eux, c'est à dire est-ce que les trois questions se posent et se résolvent de façon indépendante où sont-elles étroitement liées ?

Le point de vue le plus simple est de considérer que ces trois problèmes n'interagissent pas entre eux. Dans notre étude, nous avons opté pour un couplage

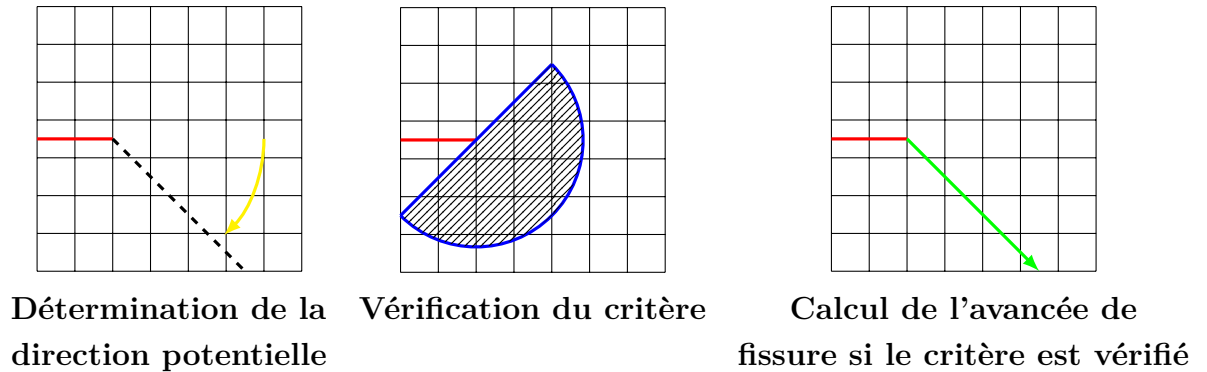


FIGURE III.1 – Schématisation de la méthode de propagation

assez fort entre la direction de propagation de la fissure et le critère d'activation de l'amorçage de la fissure. D'un point de vue schématique (voir figure III.1) cela implique que nous allons dans un premier temps définir dans quelle direction peut éventuellement se propager la fissure. Ensuite suivant cette direction, nous vérifions notre critère et définissons s'il y a amorçage ou non. Pour finir nous calculons la longueur de propagation.

## III.2 Direction de propagation

### III.2.1 Quelle approche ?

Nous allons dans cette sous-section faire état de quelques approches existantes pour définir la direction de propagation en fonction du comportement du matériau. Le but étant de démontrer la difficulté liée au choix du critère qui est fortement couplé au comportement du matériau et qui n'est pas aisé à manipuler.

#### III.2.1.1 Cas élastique-fragile

Dans le cas d'un modèle de comportement de matériau élastique ou élasto-plastique, les critères usuels sont généralement basés sur un état local de contrainte ou de déformation proche de la pointe de la fissure. Ces champs peuvent alors être définis via les éléments finis ou via la mécanique de la rupture comme les facteurs d'intensité des contraintes. Dans le cas de la rupture fragile avec un comportement élastique, on définit de façon assez courante l'angle de propagation en fonction de

ces facteurs en modes I et II, respectivement  $K_I$  et  $K_{II}$  [12] :

$$\theta = 2 \arctan \left( \frac{1}{4} \left[ \frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{8 + \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2} \right] \right) \quad (\text{III.1})$$

### III.2.1.2 Extension du cas élastique-fragile au cas élasto-plastique 'quasi-fragile'

Dans le cas d'un matériau ayant un comportement élasto-plastique avec une plasticité étendue, Haboussa et al [22] proposent une direction de propagation, définie non plus à partir des facteurs d'intensité des contraintes mais en fonction d'un tenseur des contraintes moyenné dans une pastille située en pointe de la fissure. Cette direction de propagation est directement issue de l'équation III.1 en supposant un matériau élasto-plastique quasi-fragile :

$$\theta = 2 \arctan \left( \frac{1}{4} \left[ \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{\tilde{\sigma}_{12}} - \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \sqrt{8 + \left( \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{\tilde{\sigma}_{12}} \right)^2} \right] \right) \quad (\text{III.2})$$

avec  $\tilde{\sigma}$  le tenseur des contraintes projeté dans le plan de la fissure et moyenné au sein d'une pastille. Dans un second papier, pour un comportement matériau identique, Haboussa et al [21] proposent un calcul de la direction de propagation dans le cas de la rupture par cisaillement d'un matériau élasto-plastique à écrouissage positif. Pour ce second problème, il n'y pas de solution analytique et l'équation est donc identifiée via une analyse numérique pour obtenir la direction de propagation sous la forme :

$$\theta = \text{sign}(\tilde{\sigma}_{12}) \frac{\Pi}{4} \arctan \left( \sqrt{\Pi} \left[ \left| \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{\tilde{\sigma}_{12}} \right| \right] \right) \quad (\text{III.3})$$

Il faut noter que ces deux calculs sont basés sur deux concepts différents. Dans le cas de la rupture fragile (pilotee en traction), on suppose une ouverture de type Mode I alors que pour le cas ductile (pilotee en cisaillement) on suppose une ouverture de type Mode II (mode plan) (voir figure III.2).

Il faut cependant préciser qu'un comportement ductile ne va pas forcément engendrer une rupture suivant le Mode II. On peut très bien avoir un matériau élasto-plastique avec une plasticité étendue présentant une direction de propagation qui semble être pilotée en mode ouverture (c'est le cas par exemple de la fissuration

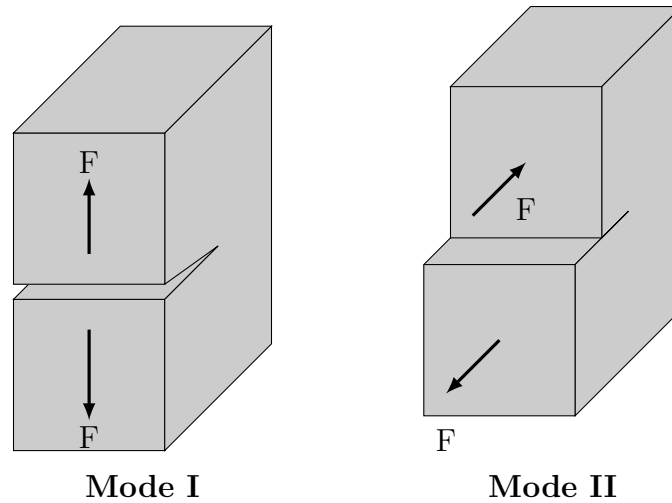


FIGURE III.2 – Illustration des modes de rupture

des éprouvettes de traction axisymétrique avec un fond plat au centre de celles-ci) [35][21]. Dans [21], une méthodologie est notamment proposée afin de passer au cours de l'essai, d'une direction de propagation par exemple définie en mode ouverture à une autre définie via un mode de cisaillement.

### III.2.1.3 Cas élasto-plastique adoucissant indépendant du temps

#### III.2.1.3.1 Cas de l'amorçage piloté par l'état du matériau

Pour plusieurs comportements de matériau, on peut comme vu précédemment se baser sur l'état de contrainte ou de déformation en pointe de fissure. Cependant, dans le cas d'un matériau endommageable avec un comportement du type GTN par exemple, de telles méthodes sont à proscrire. En effet nous avons vu auparavant que le trajet de la macro-fissure dépend directement du trajet de la méso-fissure, c'est à dire la direction le long de laquelle les vides se concentrent. L'état des contraintes ou des déformations (i.e. la valeur absolue des contraintes et déformations) ne semble pas piloter/contrôler la direction de propagation de façon explicite. Même si ces champs ne sont pas représentatifs, il peut sembler intéressant de par leur facilité d'implantation d'un point de vue numérique, de les utiliser tout de même. Cependant la localisation des vides en pointe de fissure provoque une chute des contraintes qui annihile ainsi toute possibilité d'utiliser un champ de contrainte. Une telle classe de matériau nécessite donc des approches différentes. Nous allons

nous attarder sur deux méthodes en particulier et qui sont les plus couramment utilisées en présence d'un modèle de type GTN.

La première méthode [15] [66] propose de représenter physiquement à l'échelle du maillage (macromécanique) ce que nous pouvons voir à l'échelle microscopique. Cette méthode consiste à définir la direction de propagation comme la direction dans laquelle nous observons le plus d'endommagement (dans le cadre de la MEF). Dans les articles cités, l'avancée de la fissure est représentée en supprimant les éléments, de ce fait on ne calcule jamais la direction de propagation car elle est explicite. On peut alors avoir l'idée d'adopter ce type de méthodologie dans le cas de l'utilisation de la XFEM. Cependant, la porosité est fortement liée à la taille de maille et ceci est d'autant plus vrai lors de la présence d'une fissure au sein d'une structure. Le trajet que prend alors la porosité est fortement lié au maillage.

### III.2.1.3.2 Cas de l'amorçage induit par la perte de stabilité de l'état du matériau

Une seconde approche [25][60] consiste à supposer que la fissure se propage le long des plans de localisation de la déformation (conséquence de l'hypothèse d'un amorçage induit par la perte de stabilité de l'état matériel). Cette direction est alors déduite par le biais d'une analyse de bifurcation (dans le sens de Rice [54] et Hill [24], voir également Needleman et Rice [45]). Le but (voir Yamamoto [69] et Besson et al [6]), est alors d'identifier les plans de localisation définis par leur normale  $\underline{g}$  (voir figure III.3) et satisfaisant :

$$\det(\underline{g}^t \underline{\tilde{L}} \underline{g}) = 0 \quad (\text{III.4})$$

La quantité  $\underline{g}^t \underline{\tilde{L}} \underline{g}$  est usuellement nommée tenseur acoustique. L'opérateur tangent  $\underline{\tilde{L}}$  est lui défini comme :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\tilde{L}} : \underline{\dot{\epsilon}} \quad (\text{III.5})$$

Cette méthode a fait ses preuves en termes de résultats sur de nombreux types d'essais. D'un point de vue numérique, cette méthode présente un inconvénient. En effet, le calcul de l'opérateur tangent n'est pas une opération simple à réaliser.

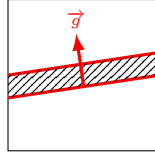


FIGURE III.3 – Schématisation de la localisation de la déformation dans un élément

#### III.2.1.4 Cas élasto-viscoplastique adoucissant

Dans le cas présent, le matériau a un comportement que nous pouvons qualifier d'élasto-viscoplastique endommageable. L'analyse de bifurcation abordée précédemment n'est valable que dans un cas élasto-plastique indépendant du temps [6] car la prise en compte des effets visqueux ne permet pas de vérifier l'équation précédente (voir équation III.4), i.e. annuler le déterminant du tenseur acoustique. De façon générale pour le cas d'un comportement prenant en compte les effets visqueux, on utilise l'analyse des perturbations linéaires (voir Molinari [43]). Le principe de cette méthode est d'injecter dans le système une petite perturbation et d'étudier les conditions pour lesquelles cette perturbation croît (instabilité) ou décroît (stabilité). Cette perturbation est souvent imposée de la forme :

$$\underline{g} = \delta \underline{u} \exp(iq\underline{x} \cdot \underline{p} + \omega t) \quad (\text{III.6})$$

avec  $\delta \underline{u}$  l'amplitude de la perturbation,  $\omega$  la pulsation,  $q$  une longueur caractéristique et  $\underline{p}$  le vecteur d'onde.

Cette méthode de recherche de perte de stabilité a également fait ses preuves dans le cas de matériaux viscoplastiques [6]. Cependant cette approche n'est pas triviale à mettre en oeuvre.

### III.2.2 Analyse de bifurcation

Nous décidons ici d'adopter une démarche pragmatique de manière à rendre opérationnelle la méthodologie dans un contexte industriel. Nous sommes donc amenés à faire des hypothèses et simplifications, parfois fortes.

#### III.2.2.1 Introduction

Précédemment, nous avons en fonction de la classe du matériau, vu quelques méthodes permettant de définir la direction de propagation d'une fissure. Dans le

cas du matériau étudié, on peut donc considérer que la méthode adaptée à notre problème est l'analyse de perturbations linéaires. Cependant, cette méthode n'est pas triviale. Nous préférons utiliser l'analyse de type bifurcation, ce qui va nécessiter ponctuellement certaines modifications, en particulier du modèle de comportement. L'analyse de bifurcation est basée sur l'hypothèse de l'existence de plans de localisation. Celle-ci permet d'identifier les conditions nécessaires (mais pas toujours suffisantes) à l'amorçage de ces plans ainsi que de leur orientation. En pratique, l'analyse nécessite la connaissance de l'opérateur tangent. Nous avons précisé auparavant que la prise en compte des effets visqueux dans le calcul de cet opérateur ne permet pas d'identifier de plans de localisation (car le déterminant du tenseur acoustique ne peut plus être annulé). De plus, la manière dont les effets visqueux sont pris en compte dans le potentiel plastique (voir équation II.19) ne permet pas de calculer l'opérateur tangent de façon classique [25]. Il y a donc finalement un double problème. L'approche retenue consiste à considérer la partie dépendante du temps de la contrainte d'écoulement comme figée à chaque incrément de calcul. Pour le calcul de l'opérateur tangent uniquement, nous allons ainsi réécrire la contrainte d'écoulement (voir équation II.20) comme :

$$\overline{\sigma}_y^*(\kappa, T) = \sigma_y(\kappa, T) + \sigma_{vp}^*(\dot{\kappa}_{inc}, T_{inc}) \quad (\text{III.7})$$

avec  $\overline{\sigma}_y^*$  la contrainte d'écoulement pour le calcul de l'opérateur tangent,  $\sigma_{vp}^*$  la partie dépendante du temps de cette même contrainte vue ici comme une constante et  $(\dot{\kappa}_{inc}, T_{inc})$  respectivement la vitesse de la déformation plastique cumulée et la température pour l'incrément courant. La partie viscoplastique est figée pour chaque incrément. Finalement  $\sigma_{vp}^*$  est vue comme une constante dans la contrainte d'écoulement, ce qui peut être assimilé à une contribution identique au rayon initiale  $R_0$  de la contrainte d'écoulement (voir équation II.21).

### III.2.2.2 Calcul de l'opérateur tangent

L'opérateur tangent est un opérateur reliant les taux de déformations totales aux taux de contraintes. D'un point de vue élastique, cet opérateur se réduit à l'opérateur élastique noté  $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$  tel que :



$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}}^e \quad (\text{III.8})$$

En suivant la règle de normalité, le tenseur des vitesses des déformations plastiques est :

$$\underline{\underline{\dot{\xi}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{III.9})$$

avec  $\dot{\lambda}$  représentant le multiplicateur plastique et  $\Phi_*$  le potentiel plastique de GTN modifié. Ces deux quantités sont définies dans le cas de la viscoplasticité figée. Finalement en reprenant les équations précédentes, l'équation III.5 peut se mettre sous la forme :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \left( \underline{\underline{\dot{\xi}}} - \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}} \quad (\text{III.10})$$

On peut à présent reprendre  $\Phi_*$  qui s'écrit dans le cas de la viscoplasticité figée :

$$\Phi_*(\underline{\underline{\sigma}}, \kappa, T, f) = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\bar{\sigma}_y} \right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(-\frac{3}{2}q_2 \frac{p_m + p_r}{\bar{\sigma}_y}\right) - (1 + q_3 f^2) \quad (\text{III.11})$$

Pour le calcul du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$ , on utilise la relation de cohérence  $\dot{\Phi}_* = 0$ . On identifie alors :

$$\dot{\Phi}_*(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_y, f) = \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial \Phi_*}{\partial \bar{\sigma}_y} \dot{\bar{\sigma}}_y + \frac{\partial \Phi_*}{\partial f} \dot{f} = 0 \quad (\text{III.12})$$

La vitesse de la contrainte d'écoulement  $\dot{\bar{\sigma}}_y$  dans le cas de la viscoplasticité figée s'écrit comme :

$$\dot{\bar{\sigma}}_y = \dot{\sigma}_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial T} \dot{T} \quad (\text{III.13})$$

On peut reformuler  $\dot{\kappa}$  et  $\dot{T}$  (voir équations II.31 et II.32) comme :

$$\dot{\kappa} = \frac{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}}^p}{(1-f)\dot{\bar{\sigma}}_y} \quad (\text{III.14})$$

$$\dot{T} = \frac{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}}^p - r\dot{\kappa}}{\rho C} \quad (\text{III.15})$$

En injectant les équations [III.10,III.13,III.14,III.15], dans l'équation III.12, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\underline{C}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} &= \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\underline{C}} : \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}} - \\ & \frac{\partial \Phi_*}{\partial f} (1-f) \text{Tr}(\dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}}) - \left( \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}_y^*} + B \frac{\partial \Phi_*}{\partial f} \right) \\ & \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial \kappa} \left( \frac{\underline{\sigma} : \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}}}{(1-f) \underline{\sigma}_y^*} \right) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial T} \left( \frac{\underline{\sigma} : \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}}}{\rho C} - \frac{r}{\rho C} \left( \frac{\underline{\sigma} : \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}}}{(1-f) \underline{\sigma}_y^*} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

En reprenant l'équation III.16, on peut alors identifier le multiplicateur plastique qui s'exprime alors comme :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\underline{C}}}{\frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\underline{C}} : \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}} - \frac{\partial \Phi_*}{\partial f} (1-f) \text{Tr}(\frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}}) - \left( \underline{\sigma} : \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}} \right) \zeta} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \quad (\text{III.17})$$

avec  $\zeta$  qui est défini par :

$$\begin{aligned} \zeta &= \left( \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}_y^*} + B \frac{\partial \Phi_*}{\partial f} \right) \\ & \left[ \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial \kappa} \frac{1}{(1-f) \underline{\sigma}_y^*} \right) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial T} \left( \frac{1}{\rho C} - \frac{r}{\rho C} \frac{1}{(1-f) \underline{\sigma}_y^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Si on reprend la formulation de l'équation III.10, on peut alors identifier l'opérateur tangent :

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{C}} - \frac{\left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{n}} \right) \otimes \left( \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{C}} \right)}{\Omega} \quad (\text{III.19})$$

avec  $\underline{\underline{n}}$  et  $\Omega$  qui s'expriment respectivement comme :

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\partial \Phi_*}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{III.20})$$

$$\Omega = \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{n}} - \frac{\partial \Phi_*}{\partial f} (1-f) \text{Tr}(\underline{\underline{n}}) - (\underline{\sigma} : \underline{\underline{n}}) \zeta \quad (\text{III.21})$$

$\underline{\underline{n}}$  représente finalement la direction de l'écoulement.

### III.2.2.3 Identification des plans de localisation

L'identification des plans de localisation revient donc à résoudre le système suivant :

$$\det(\underline{g}^t \underline{\tilde{L}} \underline{g}) = 0 \quad (\text{III.22})$$

avec  $\underline{\tilde{L}}$  l'opérateur tangent identifié précédemment et  $\underline{g}$  la normale au plan de localisation. D'après Ortiz et al [49] dans le cas 2D, l'identification du plan de localisation revient à résoudre :

$$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\text{III.23})$$

avec  $x = \tan \theta$ . Les coefficients  $a_i$  s'écrivent :

$$a_0 = L_{1111}L_{1212} - L_{1112}L_{1211} \quad (\text{III.24})$$

$$a_1 = L_{1111}L_{1222} + L_{1111}L_{2212} - L_{1112}L_{2211} - L_{1122}L_{1211}$$

$$a_2 = L_{1111}L_{2222} + L_{1112}L_{1222} + L_{1211}L_{2212} - L_{1122}L_{1212} - L_{1122}L_{2211} - L_{1212}L_{2211}$$

$$a_3 = L_{1112}L_{2222} + L_{1211}L_{2222} - L_{1122}L_{2212} + L_{1222}L_{2211}$$

$$a_4 = L_{1212}L_{2222} - L_{2212}L_{1222}$$

La normale  $\underline{g}$  est donnée par :

$$\underline{g} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Numériquement, on va balayer l'espace entre 0 et  $\Pi$  en découpant celui-ci en 180 incréments et on va chercher  $f(x) \leq 0$ . Il faut noter qu'il peut y avoir typiquement deux plans possibles.

### III.2.2.4 Distribution "multi-modale"

Bien que ce sujet sera précisé un peu plus tard lorsque nous aborderons la partie concernant le critère de propagation, on peut cependant déjà affirmer que

la distribution de l'endommagement en pointe de fissure est plus ou moins bien rendue en fonction de la taille de maille utilisée. Une approche locale (au niveau de la taille de maille) ne semble donc pas forcément adaptée. Une stratégie différente que nous appelons ici non-locale dont le principe est de moyenner sur plusieurs éléments finis, semble donc plus adéquate. Cette approche a notamment été utilisée par Haboussa et al [22]. Pour évaluer la direction de propagation, nous utilisons une approche identique (voir figure III.4).

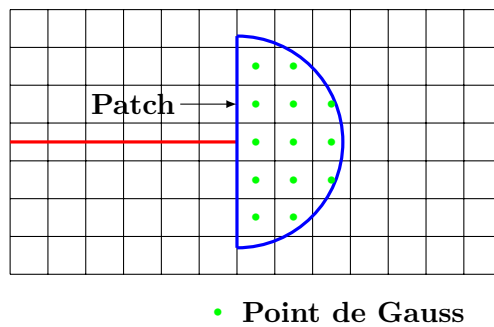


FIGURE III.4 – Illustration de l'approche non-locale dans le calcul de la direction de propagation

La première étape consiste donc à définir une pastille de rayon  $R$  dont l'axe de symétrie est colinéaire à la direction de la fissure existante. Ensuite, pour chaque point de Gauss présent dans cette pastille, nous calculons les normales aux plans potentiels comme défini dans le paragraphe précédent. A partir de ces normales, on peut définir les angles de propagation et on peut obtenir par exemple une distribution semblable à la figure III.5.

L'enjeu consiste donc à classer l'ensemble des résultats afin d'obtenir un jeu de données pour chacun des modes. Chaque mode est assez facile à extraire puisque nous avons toujours un grand écart en terme d'angle entre les différents modes. Nous obtenons donc un jeu de données par mode (voir figure III.6).

A partir de chaque jeu de données, nous réalisons une moyenne donnant les différentes directions de propagation possibles, qui sont dans le cas considéré au nombre de deux valeurs.

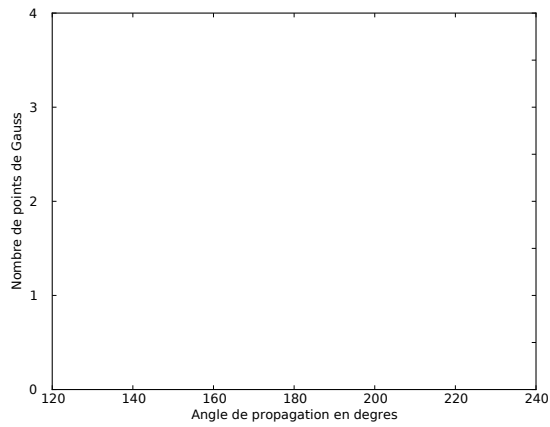


FIGURE III.5 – Exemple d’une distribution possible de l’angle de propagation issue de l’analyse de bifurcation

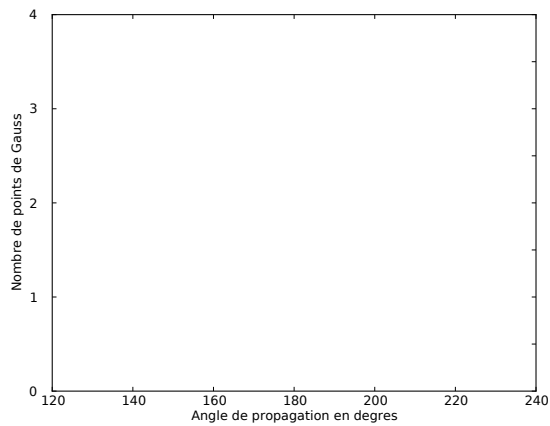


FIGURE III.6 – Detection des différents modes possibles : le regroupement en vert (gauche) correspondant à un premier mode possible et le regroupement en rouge (droite) au second mode possible

### III.2.2.5 Choix de l’angle

La prochaine étape consiste donc à définir l’angle de propagation final. Dans

notre exemple, deux directions possibles sont définies. Dans [25], lorsque l'on se retrouve dans un tel cas, l'angle conduisant à une réponse la moins dissipative est choisi.

Dans notre approche, nous souhaitons nous baser sur le champ des déformations proche de la pointe de fissure pour identifier l'angle adéquat. L'idée est de regarder quelle direction de propagation est la plus en accord avec le champ des déformations. Nous allons donc définir plusieurs étapes qui nous mènent à l'identification de cet angle. La première étape est de définir un tenseur des déformations plastiques moyenné dans la pastille en pointe de fissure. Comme vu au paragraphe précédent, pour tous les points de Gauss présents dans la pastille nous écrivons le tenseur des déformations plastiques relatif à ce point de Gauss. En fonction de la position de ce point par rapport à la pointe de la fissure, nous pondérons ce tenseur. Ceci permet de donner plus de poids aux points de Gauss situés près de la pointe de fissure. Nous obtenons finalement notre tenseur des déformations plastiques moyenné en pointe de fissure tel que :

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\int_{HPast} e^{-\alpha \frac{d^2}{R^2}} \epsilon_{ij}^p(M) dV_M}{\int_{HPast} e^{-\alpha \frac{d^2}{R^2}} dV_M} \quad (\text{III.26})$$

avec  $\tilde{\epsilon}^p$  le tenseur des déformations plastiques moyenné,  $\epsilon^p$  le tenseur des déformations plastiques au point  $M$ ,  $d$  la distance séparant le point  $M$  de la pointe de fissure,  $R$  le rayon de la pastille et  $\alpha$  un coefficient égal à 10. Il faut noter que l'on se base uniquement sur le champ des déformations plastiques car les déformations élastiques sont très petites comparées aux déformations plastiques.

Le champ des déformations plastiques moyenné est alors projeté sur chaque direction de propagation afin d'en ressortir les deux quantités  $\epsilon_{gg}$  et  $\gamma_{gn}$ , tel que :

$$\epsilon_{gg}^i = \underline{g}_i^t \tilde{\epsilon}^p \underline{g}_i \quad (\text{III.27})$$

$$\gamma_{gn}^i = 2 \left( \underline{m}_i^t \tilde{\epsilon}^p \underline{g}_i \right) \quad (\text{III.28})$$

avec  $\epsilon_{gg}^i$  et  $\gamma_{gn}^i$  respectivement la déformation plastique moyennée normale et de cisaillement à la direction de localisation  $i$ ,  $\underline{g}_i$  et  $\underline{m}_i$  respectivement le vecteur normal et tangentiel à la direction de localisation  $i$ . Reprenant le même principe que

celui de Seweryn and Mroz [61] on identifie alors pour chaque angle de propagation une déformation  $Q_i$  définie par :

$$Q_i = \sqrt{\langle \epsilon_{gg}^i \rangle^2 + \left( \frac{\gamma_{gm}^i}{\sqrt{3}} \right)^2} \quad (\text{III.29})$$

La direction pour laquelle  $Q_i$  est maximale, est choisie finalement comme direction de propagation.

### III.2.2.6 Effets de la viscosité

Il faut noter que la méthode utilisant l'analyse de bifurcation comme indicateur de la direction de propagation conduit à de bons résultats comme nous le verrons plus tard lors des applications. Cependant une étude critique nous amène à étudier de plus près les résultats obtenus. Il en ressort alors que pour chaque point de Gauss situé au sein de la pastille d'évaluation de la direction de propagation, nous n'identifions pas forcément un plan de localisation de la déformation. Ceci est d'autant plus vraie que les points sont proches de la pointe de fissure. En effet même pour des charges à faible vitesse, de très grandes vitesses de déformations vont apparaître en pointe de fissure. Ainsi même en considérant un état figé, la viscoplasticité a un effet de régularisation sur l'opérateur tangent annihilant ainsi une possible perte de stabilité de celui-ci. Le fait d'utiliser une pastille permet ainsi d'aller chercher des points de Gauss situés plus loin de la pointe de fissure et où les effets visqueux sont moindres rendant ainsi possible l'identification de plans de localisation.

## III.3 Amorçage de la fissure

### III.3.1 Introduction

#### III.3.1.1 Approches classiques

Lorsque nous sommes en présence d'un matériau fortement ductile et adoucissant, les critères usuellement utilisés dans le cas de matériaux élastiques et

élasto-plastiques écrouissables ne sont plus applicables. On entend par là les critères basés sur les facteurs d'intensité des contraintes d'un point de vue local ou encore le taux de restitution d'énergie de Griffith d'un point de vue global.

Pour un matériau semblable à celui de notre étude, une approche plus classique consiste à utiliser comme critère, des valeurs critiques locales de variables internes, comme par exemple la variable d'endommagement ou encore la déformation plastique de cisaillement (voir Pourmodheji et Mashayekhi [52] et Liever et al [36]). Dans le cas d'un comportement matériau modélisé via un modèle de type GTN, on utilise souvent une porosité à rupture comme critère d'activation de la propagation de la fissure. Cependant, ce type d'approche est fortement sensible à la taille de maille (voir Hambli [23]). On peut constater ce phénomène sur la figure III.7 représentant la porosité moyenne contenue dans l'élément en pointe de fissure, dans le cas d'un chargement type Mode I (voir figure II.17) pour 4 tailles de maille différentes (maillage 1 grossier à maillage 4 fin).

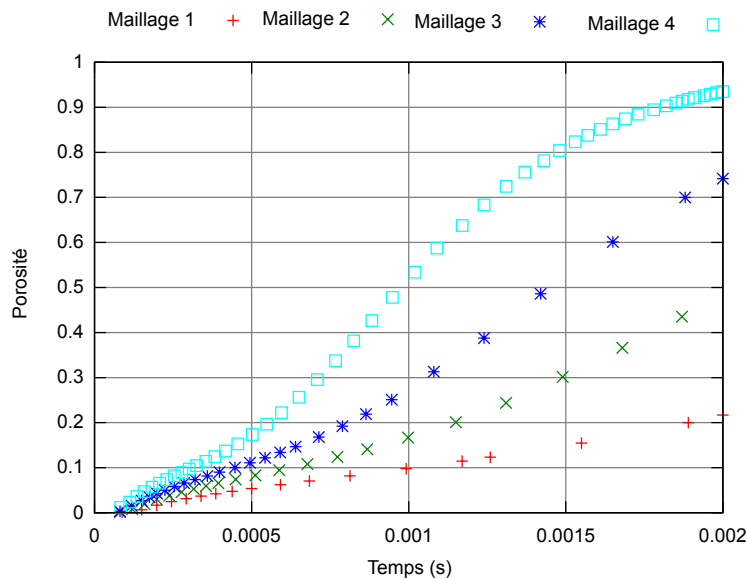


FIGURE III.7 – Effets du maillage sur la porosité moyenne observée au sein de l'élément contenant la pointe de fissure dans le cas d'un chargement type Mode I (maillage 1 grossier à maillage 4 fin)



### III.3.1.2 Approche proposée

D'un point de vue physique, on sait que l'endommagement par croissance et coalescence des cavités est à l'origine de l'amorçage de la fissure. L'approche utilisant une porosité à rupture essaye de reproduire phénoménologiquement ce phénomène mais à une échelle macroscopique [66]. Un problème apparaît alors puisque l'on cherche à représenter ce qui se passe à l'échelle micro via des variables définies elles, à l'échelle macro dans le cadre d'un matériau homogène équivalent. La liaison entre les deux n'est donc pas toujours très réaliste, en tout cas du point de vue de l'amorçage de fissure. Le second point est le choix de la porosité à rupture. Cette porosité est le plus souvent issue d'une corrélation des résultats entre expérimental et numérique. Nous avons également vu précédemment l'influence de la taille de maille sur cette quantité. Il existe cependant des méthodes permettant de régulariser la porosité à rupture en fonction de la taille de maille [23].

Se pose alors la question de la pertinence d'utiliser une porosité à rupture comme critère d'activation de la propagation de la fissure. On peut s'intéresser aux critères utilisés dans le cadre d'un matériau identique à celui de notre étude mais en utilisant une modélisation différente. Prenons par exemple une modélisation du comportement du matériau via un modèle de type Lemaitre [52]. Pour ce type de modèle, on utilisera le plus souvent comme critère d'amorçage, une valeur critique du taux de restitution d'énergie  $Y$ .

Dans une approche semblable à celle utilisée dans le cas d'un modèle de type Lemaitre avec la variable  $Y$ , on souhaite alors introduire dans le critère d'amorçage de fissure, la notion d'énergie via le concept d'énergie stockée. Ce choix est motivé par le fait de se baser sur un critère ayant un sens à une échelle plus globale permettant ainsi de réduire la dépendance à la taille de maille contrairement à une porosité à rupture. D'un point de vue physique, nous supposons ici qu'en-deça d'une valeur critique de l'énergie stockée, les dislocations et la croissance des vides sont capables d'accommoder la déformation et qu'au-delà de cette valeur critique, la propagation de la fissure est le seul mécanisme capable pour le matériau d'accommoder les déformations supplémentaires. La transition entre endommagement diffus et formation de la fissure est donc mise en oeuvre en considérant un critère en énergie stockée critique.

### III.3.2 Notion d'énergie

#### III.3.2.1 Calcul du critère d'amorçage

Dans notre approche, le critère d'amorçage de la fissure est basé sur une valeur critique de d'énergie stockée (voir équation II.14). Il est intéressant de comparer les quantités pouvant être observées dans l'énergie réversible et stockée dans le potentiel d'état (voir équation II.12). On peut alors identifier sur la figure III.8 que l'énergie réversible croît avec une pente très faible et devient assez vite négligeable par rapport à l'énergie stockée. De ce fait dans le critère d'amorçage de la fissure, on ne considère que la partie stockée.

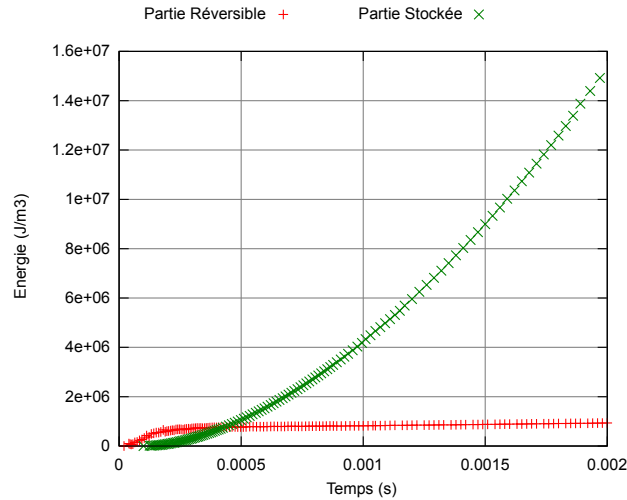


FIGURE III.8 – Comparaison de la quantité d'énergie réversible et d'énergie stockée dans le cas d'un chargement type Mode I et suivant le calcul du critère d'amorçage proposé dans cette étude : pour le cas d'étude présenté sur la figure II.17

D'un point de vue incrémental, la valeur de l'énergie stockée au temps courant (n+1) est déduite de sa valeur au pas précédent (n) tel que :

$$\begin{aligned}\omega_s^{n+1} &= \omega_s^n + \Delta\omega_s \\ \Delta\omega_s &= \frac{\partial\omega_s}{\partial\kappa}\Delta\kappa + \frac{\partial\omega_s}{\partial T}\Delta T = h'(\kappa)g(T)\Delta\kappa + h(\kappa)g'(T)\Delta T\end{aligned}\quad (\text{III.30})$$

L'idée de notre approche comme pour le calcul de la direction de propagation est de calculer l'énergie stockée non pas dans l'élément contenant la pointe de la fissure mais sur un ensemble d'éléments qui se situent près de cette pointe, en l'occurrence dans une pastille. Encore une fois cette méthodologie va permettre d'atténuer les effets du maillage, car cette quantité est moyennée. Le second point important de notre approche est que nous n'allons pas prendre l'énergie stockée au niveau des points de Gauss mais au niveau élémentaire (ce choix permet de pondérer la quantité calculée au sein de la pastille). Cela signifie finalement, que pour chaque élément, nous allons définir une énergie stockée, correspondant à la moyenne de cette quantité calculée aux points de Gauss. Nous obtenons alors notre critère d'amorçage tel que :

$$\begin{aligned} W_{patch} &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^p \omega_s^i A^i \\ A &= \sum_{i=1}^p A^i \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

avec  $W_{patch}$  l'énergie stockée moyennée au sein de la pastille,  $A$  et  $A^i$  respectivement l'aire de la pastille et de l'élément  $i$ ,  $\omega_s^i$  représente l'énergie stockée de l'élément  $i$  et  $p$  représente le nombre d'éléments présents dans la pastille. Ramener l'énergie stockée d'un élément à sa surface présente dans la pastille va permettre de pondérer les éléments entre eux. Dans l'approche présentée, la fissure se propage si :

$$F(W_{patch}) = 1 - \frac{W_c}{W_{patch}} > 0 \quad (\text{III.32})$$

avec  $W_c$  l'énergie critique à partir de laquelle nous allons considérer un amorçage de la fissure.

### III.3.2.2 Evaluation du critère d'amorçage

Afin de mettre en évidence les capacités d'une telle approche, nous étudions l'énergie stockée près de la pointe de la fissure dans le cas d'un chargement de type Mode 1 semblable au cas figure II.17. Nous choisissons arbitrairement un rayon

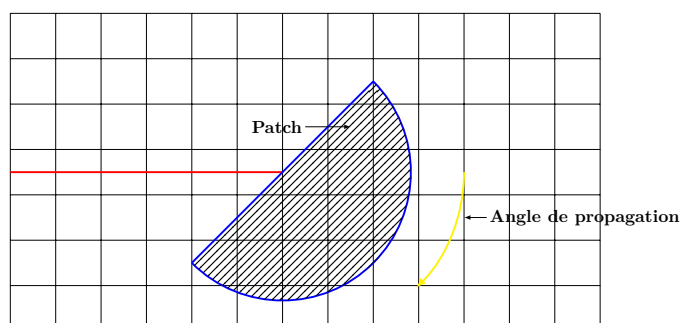


FIGURE III.9 – Forme du patch utilisé pour l'évaluation du critère de propagation

de la pastille de 6.25mm et nous forçons la position de la pastille de manière à être à un angle de  $90^\circ$  par rapport à la fissure. A titre d'information, la pièce fait 100mm de coté. L'évolution de l'énergie stockée obtenue au cours du temps près de la pointe de fissure est indiquée sur la figure III.10.

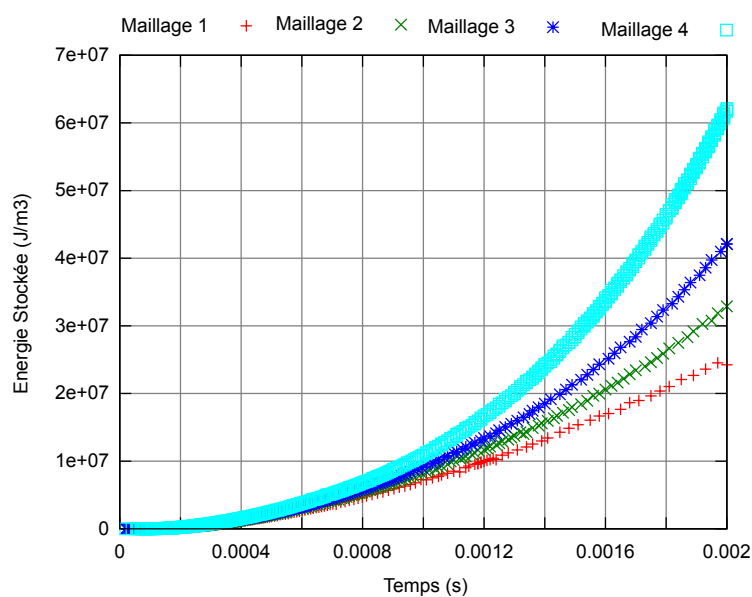


FIGURE III.10 – Evaluation de l'énergie stockée près de la pointe de fissure dans le cas d'un chargement type Mode I : pour le cas d'étude présenté sur la figure II.17

On peut observer sur la figure III.10 une diminution notable de l'influence de

la taille de maille sur l'énergie stockée en pointe de fissure comparé à la porosité présente dans l'élément contenant la pointe de la fissure (voir figure III.7). A noter que même si l'utilisation d'un critère basé sur l'énergie stockée permet de diminuer fortement l'influence de la taille de maille, on remarque tout de même une divergence entre les résultats donnés par les quatre maillages lorsque les chargements appliqués deviennent importants.

## III.4 Longueur de propagation

### III.4.1 Introduction

Nous allons à présent nous intéresser à la longueur de propagation dont va croître la fissure. Dans le cas de la fatigue, il existe de nombreux critères permettant de rendre compte de l'avancée de la fissure au cours du chargement. On peut citer à titre d'exemple le schéma le plus connu, à savoir la loi de Paris [50]. Cependant dans le cas d'un chargement monotone, il existe beaucoup moins d'études portées sur l'avancée de la fissure. Pour la plupart des matériaux, on sait que l'avancée de la fissure se fait de façons différentes, en particulier selon que le chargement est lent ou rapide.

Pour le matériau étudié et pour un chargement lent (statique), la propagation de la fissure semble se faire par à-coups (voir figure I.5). Dans ce cas, la longueur de propagation peut être de l'ordre de la taille de la méso-fissure ( $250\mu\text{m}$ ). La modélisation d'une avancée de fissure d'un tel ordre de grandeur dans le modèle élément fini nous amène alors à considérer une taille de maille fine et on obtient alors à l'échelle d'une structure des maillages avec un nombre d'éléments très important. Il faut donc adapter la propagation de la fissure au modèle élément fini tout en gardant comme objectif de modéliser à une échelle plus grande cette propagation par à-coups.

Dans le cas d'un chargement dynamique, il est beaucoup plus difficile de définir une ligne directrice de l'avancée de la fissure à cause des vitesses mises en jeu. Une approche classique est alors de piloter la vitesse d'avancée de la fissure via des lois empiriques de la forme :

$$\dot{a} = C(K)^p \quad (\text{III.33})$$

avec  $\dot{a}$  la vitesse d'avancée de la fissure,  $C$  et  $p$  des paramètres dépendant du matériau et  $K$  la variable dont dépend la vitesse d'avancée de la fissure. L'avantage de telles lois est qu'elles sont très simples à mettre en oeuvre mais le manque de données expérimentales ne garantit pas la pertinence de la solution ni la valeur des coefficients de la loi.

Dans notre étude, nous souhaitons avant tout mettre en place une méthodologie permettant de reproduire une rupture ductile par endommagement et cela quel que soit le chargement considéré (lent ou rapide).

A partir de ces constats, nous avons choisi dans notre approche d'utiliser deux critères permettant de définir la longueur de propagation, respectivement une propagation par épuisement du critère d'amorçage et une propagation permettant de contrôler la vitesse de fissuration. Le choix de l'utilisation de tel ou tel critère ne dépendra finalement que du choix de l'utilisateur en sachant que dans le cas d'un chargement lent, une approche de propagation basée sur le pilotage en vitesse n'est pas forcément adaptée.

### III.4.2 Méthode par épuisement

Cette approche, couramment utilisée dans la littérature [52][67], consiste à propager la fissure tant que le critère d'amorçage est vérifié (il s'agit d'un modèle par épuisement du critère en quelque sorte). Cette méthodologie est présentée sur la figure III.11.

Dans un premier temps, on définit le plan dans lequel la fissure va se propager (Step 1). Dans ce plan si l'énergie stockée respecte la condition d'amorçage de la fissure, la fissure se propage au sein de l'élément le plus proche (Step 2). Pour ce nouveau front de fissure, nous recommençons la même approche (Step 3 et 4). Finalement, on obtient notre nouvel incrément de fissure jusqu'à épuisement (Step n).

L'avantage de cette méthode par rapport à celle qui est présentée dans le cas d'un chargement dynamique, détaillée dans la section suivante, est que la propagation de la fissure est indépendante du temps. Cette approche ne permet pas de contrôler la vitesse de propagation mais permet en revanche de reproduire potentiellement la bifurcation de la propagation de la fissure dans le cas de pas de temps importants. Cependant d'un point de vue numérique, même si le trajet de fissuration peut

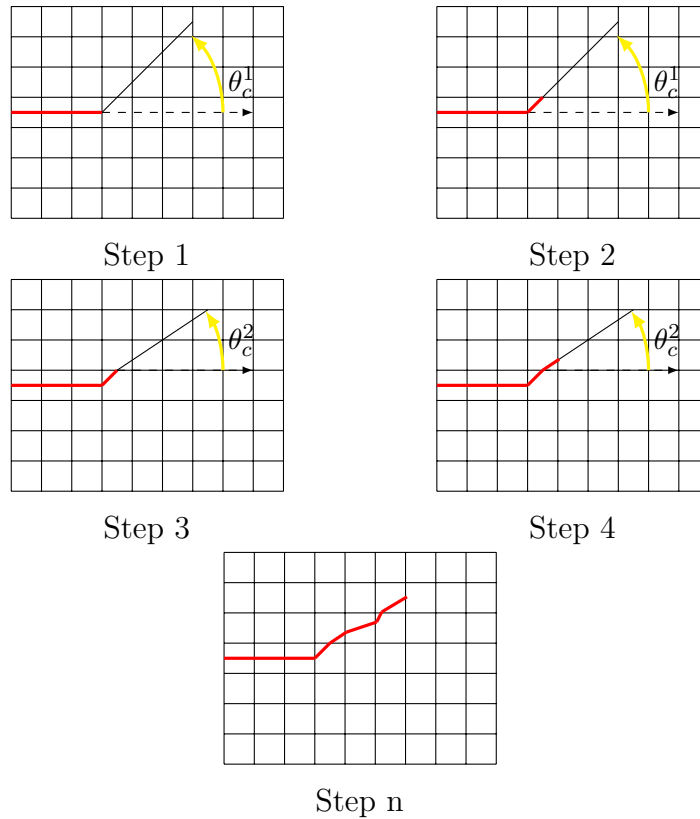


FIGURE III.11 – Illustration de la longueur de propagation de la fissure dans le cas de la propagation élément par élément

sembler réaliste avec des pas de temps assez grands, des informations sont perdues dans le cas où la fissure se propage au travers de nombreux d'éléments en un unique incrément. Pour réduire cet effet, Pourmodheji et Mashayekhi [52] s'assurent de l'équilibrage du système au cours de chaque Step composant le nouvel incrément de propagation. Dans notre approche, du fait de la forte non-linéarité matérielle et de la difficulté de convergence du calcul, cette étape de rééquilibrage du système n'a pas été prise en compte.

### III.4.3 Méthode de contrôle de la vitesse de fissuration

Dans l'approche dynamique, à contrario de l'approche élément par élément, nous cherchons à contrôler la vitesse de propagation de la fissure. En dynamique, en

règle générale, on calcule cette vitesse via la loi phénoménologique de Kanninen [30]. Initialement cette loi a été appliquée dans un cas purement élastique et dépend du facteur d'intensité des contraintes dynamique  $K_I^D$ . La vitesse d'avancée de la fissure s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{a} = c_r \left( 1 - \frac{K_{IC}}{K_I^D} \right)^q \quad (\text{III.34})$$

avec  $c_r$  la vitesse des ondes de Rayleigh propre au matériau,  $q$  est un paramètre matériau et  $K_{IC}$  le facteur d'intensité des contraintes critique. On peut remarquer que la vitesse d'avancée de la fissure tend à saturer vers la vitesse des ondes de Rayleigh. Cette approche est étendue par Haboussa et al [22] au cas d'un comportement élasto-plastique.

La vitesse d'avancée, c'est à dire la loi d'évolution que suit l'avancée de la fissure et les constantes de cette loi sont fortement liées au comportement du matériau. Or, il y a très peu de données expérimentales dans le cas de chargements dynamiques et notamment en ce qui concerne le DH36, sur la vitesse d'avancée lors de la fissuration. En raison de ce manque de données expérimentales, nous avons, dans le cas de l'approche dynamique décrit la vitesse de la fissuration via la loi phénoménologique de Kanninen adaptée à notre approche (comme l'avaient fait auparavant Haboussa et al [22] dans le cas de leur approche). La vitesse  $\dot{a}$  est alors définie par :

$$\dot{a} = C_r F(W_{patch}) = C_r \left( 1 - \frac{W_c}{W_{patch}} \right) \quad (\text{III.35})$$

D'un point de vue numérique, le nouvel incrément de fissure  $\Delta a$  durant l'incrément de temps courant  $\Delta t$  est déduit de :

$$\Delta a = C_r \left( 1 - \frac{W_c}{W_{patch}} \right) \Delta t \quad (\text{III.36})$$

Dépendant du pas de temps courant, la fissure peut se situer à l'intérieur de l'élément contenant précédemment la pointe de la fissure ou, couper un ou plusieurs éléments. Comme vu dans le chapitre 2, dans notre approche de la X-FEM, la pointe de fissure doit s'arrêter sur le coté d'un élément. Pour que la propagation de la fissure soit effective, il faut que le nouvel incrément de fissure coupe entièrement l'élément contenant précédemment la pointe de la fissure. Si tel n'est pas le cas, l'avancée de la fissure  $\Delta a_t$  calculée durant le pas de temps courant est stockée



comme variable. Lors du pas de temps suivant, nous calculons l'avancée de la fissure  $\Delta a_{t+1}$  tel que :

$$\Delta a_{t+1} = C_r \left(1 - \frac{W_c}{W_{patch}}\right) \Delta t + \Delta a_t \quad (\text{III.37})$$

Dès que l'accumulation des différentes avancées de la fissure permet de couper l'élément contenant la pointe de la fissure alors la propagation de cette dernière peut-être représentée. Sur la figure III.12 on peut voir la méthode utilisée dans le cas où l'avancée de la fissure mène à la propagation au travers de plusieurs éléments.

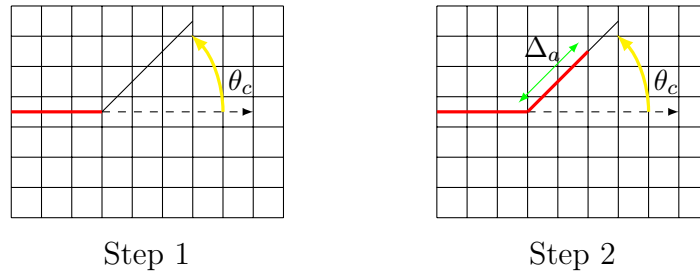


FIGURE III.12 – Illustration de la longueur de propagation de la fissure dans le cas d'une approche dynamique : Step 1 : Détermination du plan de propagation et Step 2 : Calcul de l'avancée de la fissure

Cette approche permet de contrôler la vitesse de propagation de la fissure. Cependant elle ne permet pas de reproduire la potentielle bifurcation de la fissure. C'est le cas par exemple lorsque la fissure se propage au travers de plusieurs éléments pour un unique incrément.

### III.5 Bilan

Dans les deux approches, l'étape de calcul d'une éventuelle propagation se fait en post-traitement de l'incrément courant. Ainsi la propagation de la fissure, si elle a lieu, affecte le maillage à l'incrément suivant. Finalement, cela veut dire que l'équilibrage du système ne se fait pas immédiatement mais au pas de temps suivant. Il n'y a donc, dans la version actuelle du couplage endommagement ductile - X-FEM, pas de couplage entre propagation de la fissure et cet équilibrage.

### III.5.1 Méthode par épuisement

Comme énoncé précédemment, l'analyse de la propagation s'effectue en post-traitement après que le logiciel Abaqus ait convergé vers une solution pour l'incrément actuel du problème ' $[M]\ddot{U} + [K]U = F$ '. Dans un premier temps (voir Figure III.13), on définit une pastille perpendiculaire au dernier incrément de fissure. Via tous les points de Gauss présents dans cette pastille, on calcule la direction de propagation de la fissure par le biais d'une analyse de bifurcation. Ensuite dans la direction identifiée, on définit une seconde pastille de rayon identique au premier. On calcule l'énergie stockée dans cette pastille et on vérifie si cette quantité est supérieure ou non à une valeur critique. Si ce n'est pas le cas, le post-traitement est terminé, sinon la fissure se propage au travers de l'élément contenant la pointe de la fissure. Nous identifions alors un nouvel élément qui fera office d'élément contenant le front de fissure. Pour ce nouveau front, on reprend les mêmes étapes (calcul de la direction de propagation, calcul du critère d'amorçage de la fissure, ...). Il faut noter que dans le cas où aucun point de Gauss ne permet de vérifier l'analyse de bifurcation, on ne propage pas la fissure et on interrompt alors le post-traitement.

### III.5.2 Méthode de contrôle de la vitesse de fissuration

Pour l'approche dynamique (voir Figure III.14), on retrouve des étapes identiques à celles identifiées dans le cas de l'approche élément par élément jusqu'au calcul de la longueur de propagation. Donc le cas où nous avons amorçage de la fissure, on calcule via loi de Kanninen modifiée le nouvel incrément de fissure au pas courant  $\Delta_{a_n}$  et on le somme à l'incrément de fissure identifié au pas précédent  $\Delta_{a_{n-1}}$  (si il existe), pour obtenir le nouvel incrément de fissure  $\Delta_a$ . Si cette avancée de fissure est suffisante pour couper l'élément contenant la pointe de la fissure on met alors à jour les enrichissements dans le maillage, sinon on stocke  $\Delta_a$  comme nouvel incrément au pas de temps courant. Dans les deux cas, on stoppe par la suite le post-traitement.

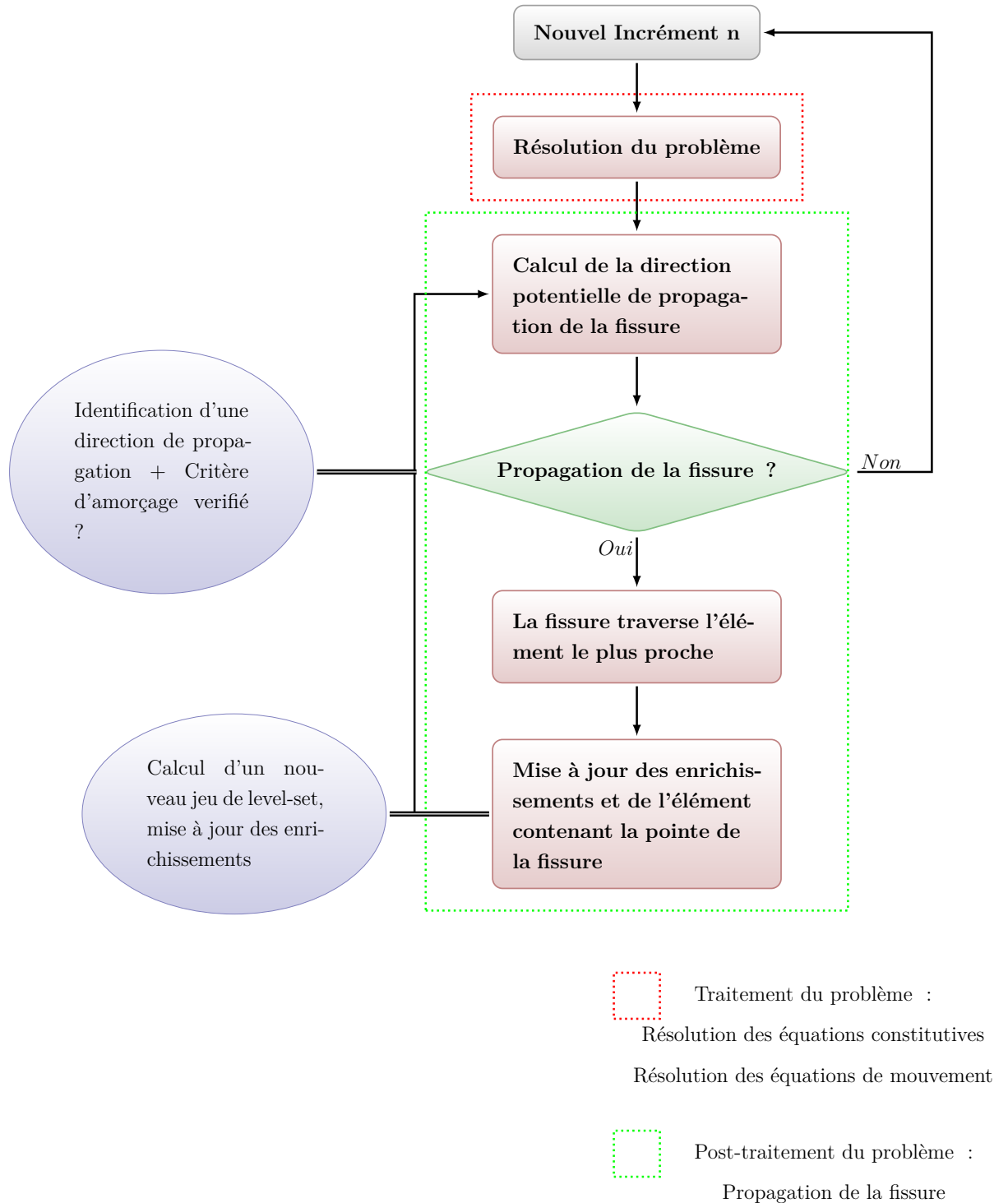


FIGURE III.13 – Algorithme pour la mise en oeuvre de la méthode d'épuisement

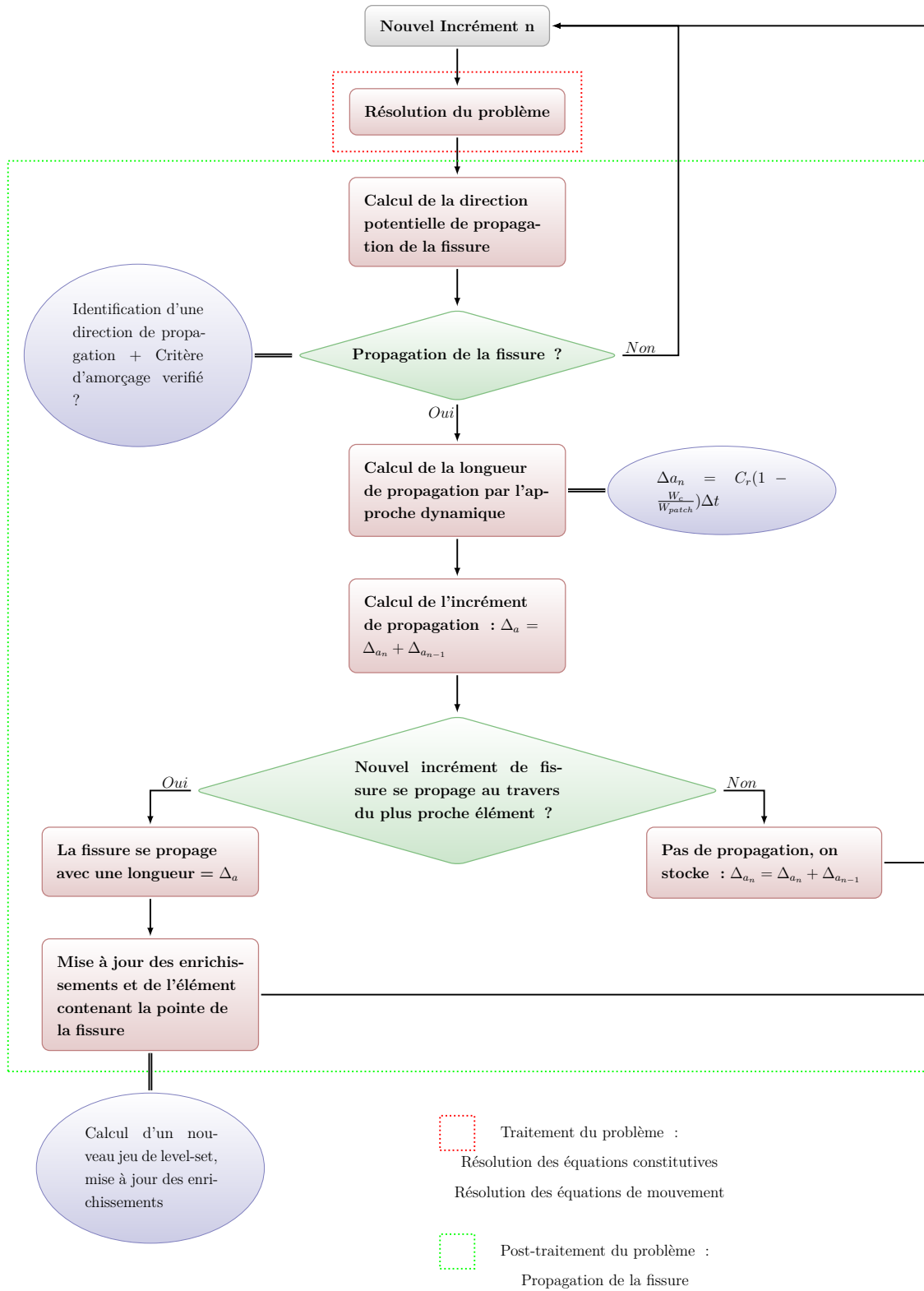


FIGURE III.14 – Algorithme pour la mise en oeuvre de la méthode de contrôle de la vitesse de fissuration



# Chapitre IV

## Application

Nous avons abordé dans le second chapitre, la modélisation du comportement du matériau ainsi que celui de la fissure. Dans le troisième chapitre, nous avons vu la méthode de propagation mise au point dans cette étude et permettant de modéliser une rupture ductile par endommagement. Le but de ce quatrième chapitre est d'appliquer la méthode à deux cas, permettant ainsi de réaliser une étude critique de cette dernière.

Les problèmes étudiés dans plusieurs configurations ont permis de tester, que ce soit en terme de vitesses de chargements ou encore de conditions d'amorçage de fissure, le couplage endommagement ductile et X-FEM présenté dans cette étude. Les résultats obtenus sont comparés à des simulations numériques via une méthode basée sur un critère local, en attendant de pouvoir mener une comparaison vis-à-vis de résultats expérimentaux non disponibles à ce jour.

Pour conclure ce chapitre, une discussion permet de dresser un bilan global des résultats obtenus et notamment de faire ressortir les points forts et les limites du modèle mis en place dans cette étude.

## PLAN DU CHAPITRE IV

---

<b>IV.1 Modélisation de la fissuration dans un matériau ductile endommageable</b>	<b>99</b>
IV.1.1 Modèles de l'étude	99
IV.1.2 Méthode basée sur un critère local	100
IV.1.3 Bilan	101
<b>IV.2 Epreuve plate fissurée en son centre</b>	<b>102</b>
IV.2.1 Problème posé	102
IV.2.2 Méthode basée sur un critère local (MFCRIT)	105
IV.2.3 Méthode de propagation par épuisement du critère d'amorçage (MPUI)	106
IV.2.4 Méthode de propagation par contrôle de la vitesse de fissuration (MCVF)	112
IV.2.5 Discussion	114
<b>IV.3 Epreuve à deux entailles asymétriques fissurée</b>	<b>117</b>
IV.3.1 Problème posé	118
IV.3.2 Méthode basée sur un critère local (MFCRIT)	119
IV.3.3 Méthode de propagation par épuisement du critère d'amorçage (MPUI)	121
IV.3.4 Discussions	125
<b>IV.4 Bilan</b>	<b>127</b>

---

<b>MPUI</b>	Méthode de propagation par épuisement du critère d'amorçage (méthode mise en place dans cette étude)
<b>MCVF</b>	Méthode de propagation par contrôle de la vitesse de fissuration (méthode mise en place dans cette étude)
<b>MFCRIT</b>	Méthode de propagation basée sur une porosité critique provoquant une perte de résistance de l'élément - "element deletion" dans Abaqus (méthode comparative)

TABLE IV.1 – Tableau récapitulatif des acronymes des différents modèles

## **IV.1 Modélisation de la fissuration dans un matériau ductile endommageable**

Les acronymes des différents modèles sont résumés dans le tableau IV.1.

### **IV.1.1 Modèles de l'étude**

Nous avons utilisé des éléments quadrangles avec l'hypothèse des déformations planes et avec un schéma de résolution dynamique implicite. La modélisation du comportement du matériau et de la fissure abordées dans le cadre du chapitre II ont été implantées via des routines utilisateurs, UMAT et UEL respectivement dans le code de calcul par éléments finis Abaqus. La propagation de la fissure est réalisée en utilisant les méthodes définies dans le chapitre III, respectivement MPUI et MCVF (voir tableau IV.1). Dans le cas de chargements lents, la longueur de propagation de la fissure est définie uniquement en utilisant la méthode par épuisement (MPUI) étant donné que pour de telles vitesses, l'approche dynamique n'a pas de sens. Pour ce qui est des chargements rapides, la longueur de propagation est définie via les deux méthodes (MPUI et MCVF).

La méthode de propagation nécessite deux caractéristiques : le rayon de la pastille et le critère d'amorçage de la fissure. Le rayon de la pastille est supposé dans un premier temps indépendant par rapport aux dimensions de la pièce étudiée. A contrario le critère d'amorçage de la fissure est une caractéristique dépendante du matériau. Cette quantité doit être déterminée par corrélation d'essais expérimentaux et numériques, pour une taille de pastille donnée. Dans notre étude,



nous n'avons pas pu réaliser ce type de démarche, ce qui implique que nous devons choisir une valeur d'amorçage de la fissure et de rayon de pastille arbitraire. Pour les deux problèmes étudiés, nous avons défini une taille de pastille (rayon égal à 5mm).

La valeur du critère d'amorçage a été définie en utilisant l'évolution de l'énergie stockée près de la pointe de fissure (voir figure III.10) ainsi que l'évolution de la porosité au sein de l'élément contenant la pointe de la fissure (voir figure III.7), obtenues dans le cas d'un chargement type Mode I. Il a ainsi été fait le choix d'utiliser deux critères d'amorçage différents, respectivement de valeur égale à  $1MJ/m^3$  et  $4MJ/m^3$ . Le choix de l'utilisation de deux valeurs différentes est motivé par la non connaissance a priori d'une valeur déterminée expérimentalement. Ainsi nous allons étudier l'influence du choix du critère d'amorçage sur la réponse donnée par le modèle. La première valeur choisie correspond quant à elle à l'énergie stockée à partir de laquelle celle-ci dépasse la valeur de l'énergie réversible.

### IV.1.2 Méthode basée sur un critère local

Afin de comparer les résultats obtenus avec le modèle mis en place dans cette étude, nous avons donc également utilisé une méthode de propagation de la fissure basée sur un critère local, que nous nommons 'MFCRIT'. Le principe de cette méthode est de retourner à Abaqus des contraintes nulles lorsqu'un point d'intégration de cet élément respecte un critère. Dans notre cas, celui-ci est une porosité critique. Cette méthode permet de représenter grossièrement la propagation de la fissure.

Nous avons utilisé des éléments quadrangles à intégration complète, dans le cadre de l'hypothèse des déformations planes. Le comportement matériau des éléments (défini dans le chapitre 2) a été codé via une routine utilisateur.

La porosité critique choisie doit dépendre du matériau ainsi que de la taille de maille. Afin d'être en accord avec le critère d'amorçage défini précédemment et afin de simplifier les calculs, deux porosités à rupture égales respectivement à 0.03 et 0.1 ont été utilisées, correspondant à des valeurs usuelles de la littérature.

	Eprouvette plate fissurée en son centre	Eprouvette doublement entaillée fissurée
Chargement lent (1m/s)	MPUI	MPUI
	MFCRIT	MFCRIT
Chargement rapide (10m/s)	MPUI	
	MCVF ( $C_r=3016\text{m/s}$ )	
	MFCRIT	

TABLE IV.2 – Tableau récapitulatif de l'utilisation des différents modèles pour les deux cas étudiés

Comme pour le modèle de cette étude, un schéma de résolution dynamique implicite a été utilisé.

### IV.1.3 Bilan

#### Caractéristiques matériaux

Pour des raisons de confidentialité, les caractéristiques du matériau ne sont pas données.

Pour ce qui est des barres utilisées pour le cas du chargement rapide, nous leur avons attribué un comportement purement élastique, avec des caractéristiques tel que :

- $E = 200\text{GPa}$
- $\nu = 0.33$
- $\rho = 7800\text{kg/m}^3$

Afin d'être le plus clair possible sur les méthodes que nous utilisons dans ce chapitre, nous résumons dans le tableau IV.2, les configurations d'utilisation des différents modèles.

#### Caractéristiques des modèles

Les caractéristiques des modèles sont résumés dans le tableau IV.3.

$W_c$ (critère d'amorçage de la fissure)	1 et 4 MJ/m <sup>3</sup>
Rayon de la pastille	5mm
$f_c$ (porosité critique à rupture)	0.03 et 0.10

TABLE IV.3 – Tableau récapitulatif des caractéristiques des modèles de l'étude

### Caractéristiques des maillages

Trois tailles de mailles ont été utilisées dans nos deux cas d'étude. Les maillages 1, 2 et 3 sont respectivement le maillage le plus grossier (1mm), intermédiaire (0.5mm) et le plus fin (0.3mm). La valeur indiquée correspond à la taille de maille moyenne dans la zone où se propage la fissure.

## IV.2 Eprouvette plate fissurée en son centre

On considère ici une éprouvette dont le chargement préalable a provoqué une fissure en son centre. On s'intéresse alors à la réponse de cette éprouvette lorsqu'elle subit un chargement supplémentaire. Pour ne pas surcharger cette partie, plusieurs figures sont reportées en annexe. Les figures en question ne sont pas précédées d'un chiffre romain.

### IV.2.1 Problème posé

Dans un premier temps, nous étudions le cas d'une éprouvette plate fissurée en son centre (voir figure IV.1) avec épaisseur de 4mm.

Etant donné la symétrie de l'éprouvette, seule la moitié de celle-ci est modélisée. Nous étudions le modèle dans deux configurations de vitesses de chargements :

- $V_{char} = 1m/s$  (chargement lent)
- $V_{char} = 10m/s$  (chargement rapide)

Dans le cas du chargement lent ( $V=1m/s$ ) (voir figure IV.1 a)), l'idée est de simuler un essai de traction avec une vitesse de chargement constante. Ainsi on modélise l'éprouvette plate fissurée et on pose les conditions aux limites afin de se rapprocher des conditions que l'on retrouve sur une machine de traction, c'est à dire encastrement sur l'extrémité inférieure de l'éprouvette et chargement avec une

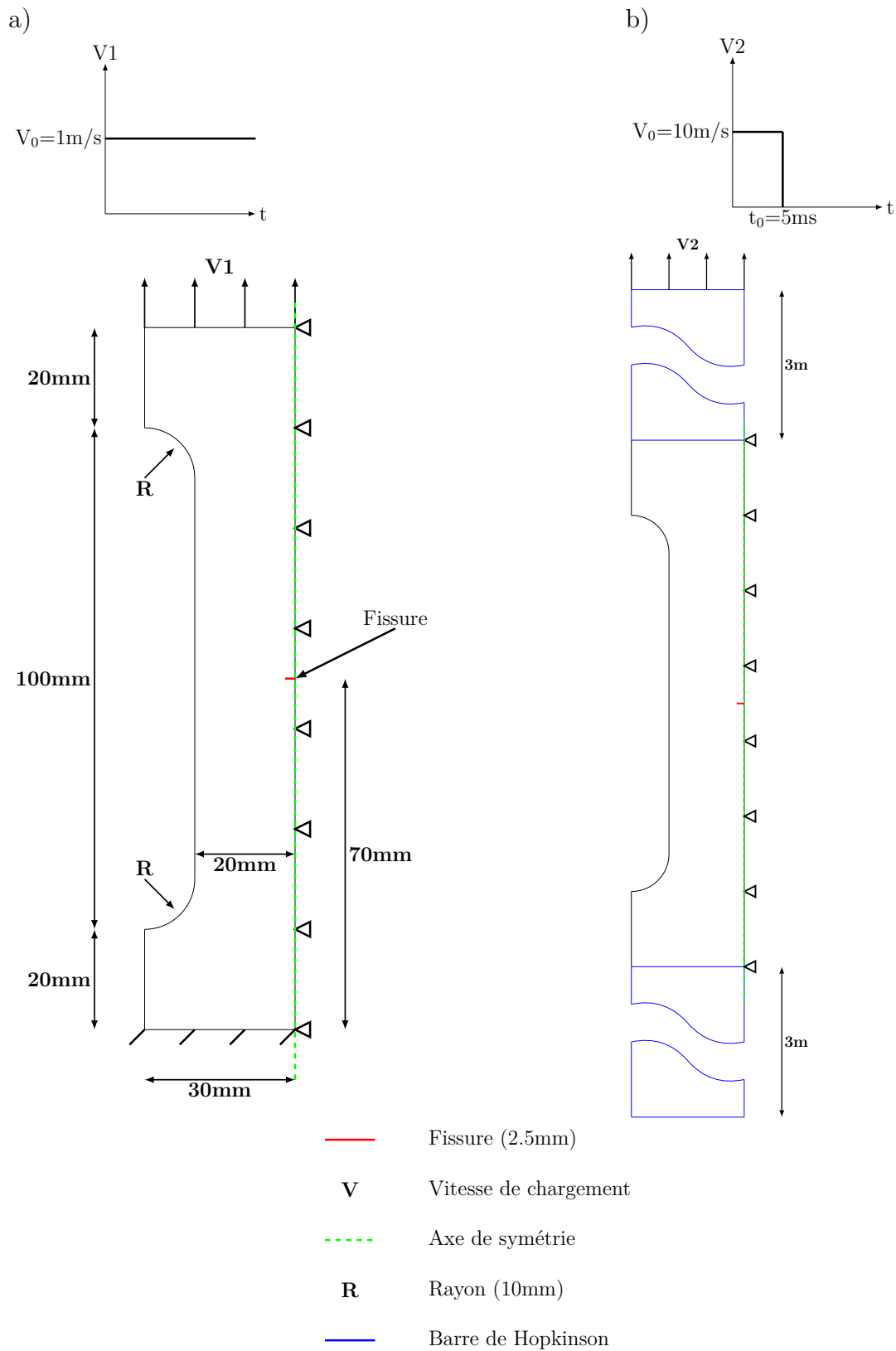


FIGURE IV.1 – Modélisation de l'éprouvette plate fissurée : a) Chargement lent et b) Chargement rapide

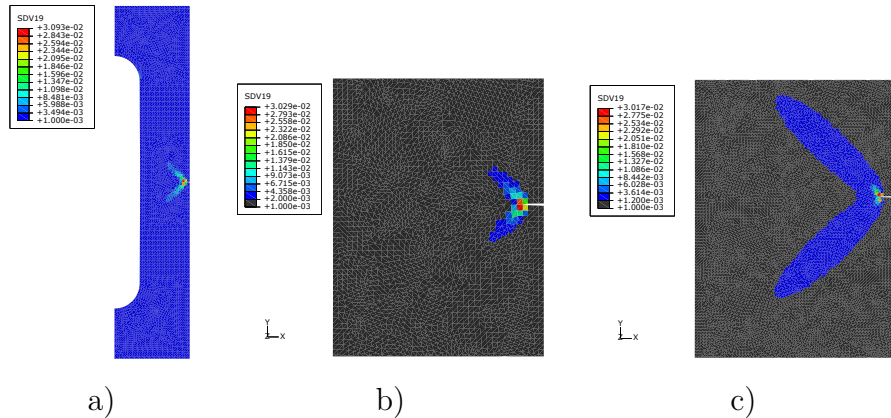


FIGURE IV.2 – Représentation de la répartition de la porosité de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

vitesse constante sur l'extrémité supérieure.

Dans le cas du chargement rapide ( $V=10\text{m/s}$ ) (voir figure IV.1 b)), l'idée est de simuler un essai de traction dynamique via des barres d'Hopkinson. Ainsi nous modélisons les deux barres (longueur = 3m) et nous imposons une liaison en translation parfaite entre celles-ci et l'éprouvette. Nous soumettons un chargement en vitesse de type échelon sur l'extrémité de la barre du haut (barre d'entrée) et l'extrémité de la seconde barre (barre de sortie) est laissée libre.

Afin d'analyser les résultats obtenus, une comparaison avec la MFCRIT est réalisée.

Si on se base sur la mécanique de la rupture, pour ce type d'essai dans le cas du chargement lent, on se situe alors dans le cas d'un chargement en Mode I. Dans le cas d'une rupture fragile, on s'attend à ce que la fissure se propage horizontalement. Dans le cadre de notre étude, nous avons représenté sur la figure IV.2, la répartition de la porosité dans l'éprouvette dans le cas de l'utilisation de la MFCRIT (avant rupture du premier élément) dans le cas du chargement lent.

On peut voir sur la figure IV.2 que la porosité tend à se localiser dans deux directions formant un angle de  $\pm 135^\circ$  environ avec la fissure.

#### Influence de la vitesse de chargement

Dans le cas d'un chargement plus rapide (voir figure A.1), on retrouve des résultats identiques.

### IV.2.2 Méthode basée sur un critère local (MFCRIT)

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux résultats obtenus avec la MFCRIT.

#### *i) Angle de propagation*

##### *a) Résultats : cas du chargement lent et pour une porosité critique de 0.03*

Sur la figure IV.3, nous montrons l'état des éprouvettes après rupture.

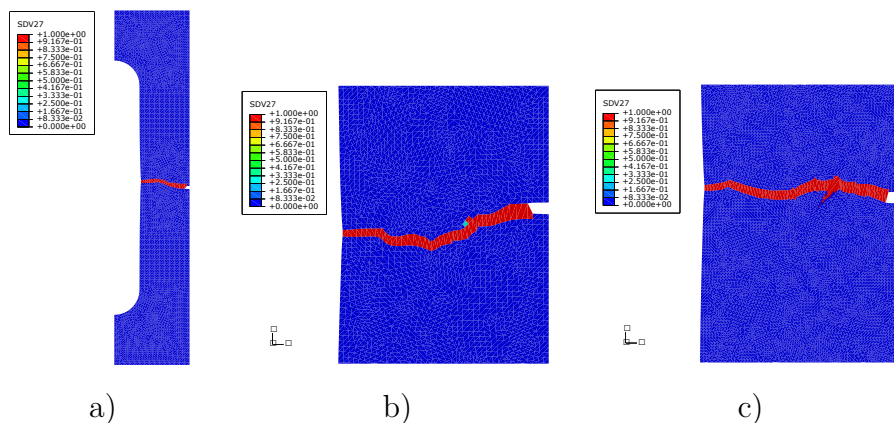


FIGURE IV.3 – Angle de propagation de la fissure de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT et  $f_c = 0.03$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

Nous pouvons voir sur la figure IV.3, que pour de telles tailles de maille, la fissure tend à se propager avec un angle de  $180^\circ$  par rapport à l'axe X. Dans le cas de la MFCRIT, il semble alors que la progression de la fissuration ne suive pas les directions de localisation de la porosité.

#### *b) Influence de la valeur de la porosité critique*

Dans le cas d'une valeur d'une porosité critique plus importante (0.1), nous avons pu remarquer des résultats identiques (voir figure A.14).

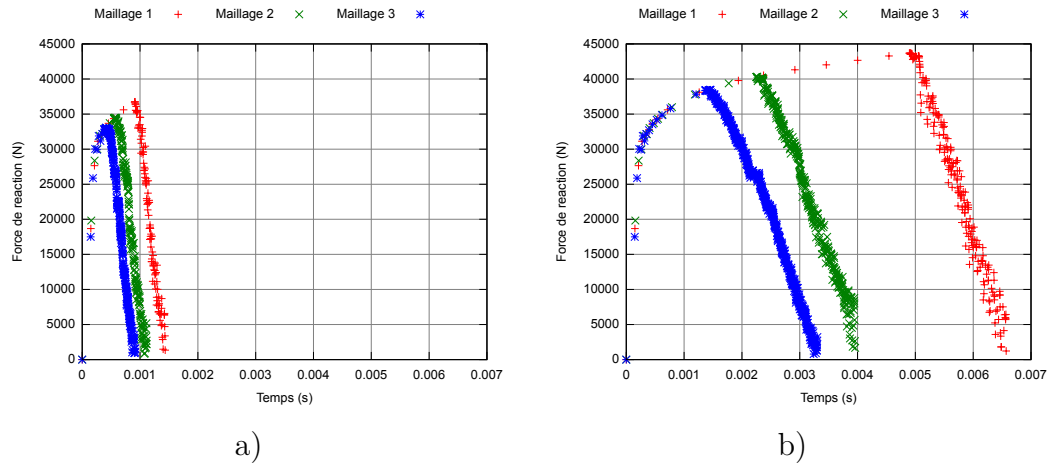


FIGURE IV.4 – Evolution de la force de réaction de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT : a)  $f_c = 0.03$  et b)  $f_c = 0.1$

### c) *Influence de la vitesse de chargement*

Dans le cas d'une vitesse de chargement plus importante (10m/s), nous pouvons remarquer des résultats identiques (voir figures A.15 et A.16).

### ii) *Amorçage et vitesse de la fissure*

Sur la figure IV.4, nous avons donc tracé l'évolution de la force de réaction de l'éprouvette dans le cas du chargement lent.

On peut observer dans un premier temps que la diminution de la taille de maille provoque un amorçage de la fissure plus rapide.

Le second point important est la vitesse de propagation de la fissure représentée via la chute de la force de réaction. On remarque une bonne répétabilité en terme de chute de cette force quelle que soit la taille de maille utilisée ainsi qu'une chute lente.

## IV.2.3 Méthode de propagation par épuisement du critère d'amorçage (MPUI)

Nous allons dans un second temps nous intéresser aux résultats obtenus en utilisant la méthode de propagation de la fissure par épuisement du critère (MPUI).

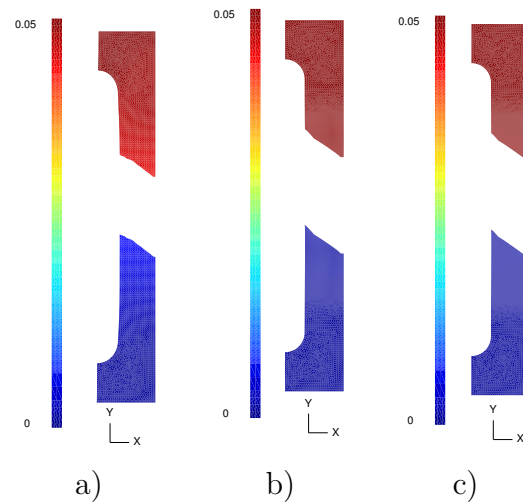


FIGURE IV.5 – Champ de déplacement suivant Y de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

### *i) Angle de propagation*

#### *a) Résultats : cas du chargement lent et pour une énergie stockée critique de $1MJ/m^3$*

Nous avons tracé sur la figure IV.5, l'état des éprouvettes après rupture.

Sur la figure IV.5, on peut noter que la fissure tend à se propager dans une direction identique (angle d'environ  $140^\circ$  par rapport à l'axe X).

Dans un second temps, nous nous intéressons aux directions de propagation possibles lors de la progression de la fissuration (voir figure IV.6).

Sur la figure IV.6, on peut noter que dans chaque cas nous détectons deux angles de propagation possibles. On peut noter en se reportant aux figures IV.2 et A.1, que ces directions tendent à s'accomoder aux plans dans lesquelles la porosité se localise. On ne remarque pas de bifurcation marquée (changement de direction) de la fissuration au cours du chargement.

#### *b) Influence de la valeur de l'énergie stockée critique*

Dans le cas d'une valeur de l'énergie stockée critique plus importante ( $4MJ/m^3$ ), nous remarquons des résultats identiques que ce soit en terme de la direction de propagation de la fissure (voir figure A.2) où lors du calcul des angles de propagation



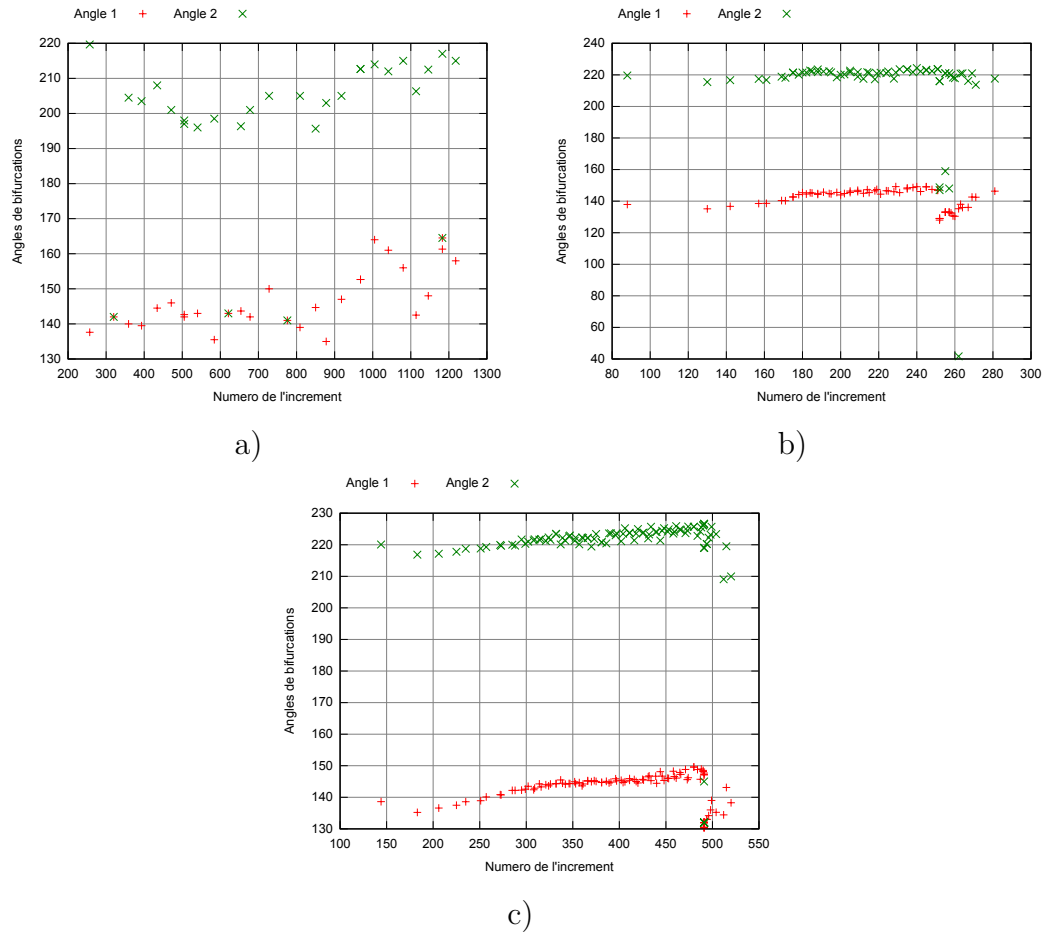


FIGURE IV.6 – Angles par rapport à X de propagation potentiels de fissuration de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

possibles lors de l'analyse de bifurcation (voir figure A.5).

c) Influence de la vitesse de chargement

Dans le cas d'une vitesse de chargement plus importante (10m/s), nous avons remarqué que la fissure ne s'était pas propagée dans le cas du maillage le plus grossier. En ce qui concerne les deux maillages les plus fins, nous observons encore une fois les mêmes phénomènes que précédemment (voir figures A.3, A.4, A.6 et A.7).

**ii) Evolution de l'énergie stockée**

a) Résultats : cas du chargement lent et pour une énergie stockée critique de  $1MJ/m^3$

Sur la figure IV.7, nous avons tracé l'évolution de l'énergie stockée (voir équation III.31) au cours de la propagation de la fissure. A noter que cette énergie est calculée uniquement lorsqu'une direction de propagation est identifiée.

Dans un premier temps, sur la figure IV.7, on peut noter pour le cas du maillage le plus grossier que pendant un temps assez important nous n'arrivons pas à définir de direction de propagation. Ce phénomène est dû à la difficulté d'identifier une direction de propagation pour une taille de maille trop grossière.

Dans un second temps, pour les maillages 2 et 3 (voir figure IV.7), on peut remarquer une évolution de l'énergie stockée en dents-de-scie, avec chaque chute représentant une avancée de la fissure. On peut également noter que la première chute est plus importante que les autres. Ce phénomène est dû au fait que pour atteindre la première propagation de la fissure, nous avons une porosité qui se concentre essentiellement autour de la pointe de la fissure. Par la suite, la porosité est plus diffuse et les à-coups sont atténués. Cependant, on peut remarquer pour ces deux maillages que nous dépassons quelquefois la valeur de l'énergie stockée critique. Ce phénomène est dû au fait que par instant, nous n'arrivons pas à identifier de direction de propagation. On dépasse alors le critère d'amorçage jusqu'à l'identification d'une direction de propagation.

b) Influence de la valeur de l'énergie stockée critique

Dans le cas d'une valeur de l'énergie stockée critique plus importante ( $4MJ/m^3$ ), nous avons pu remarquer des résultats identiques (voir figure A.8).

c) Influence de la vitesse de chargement

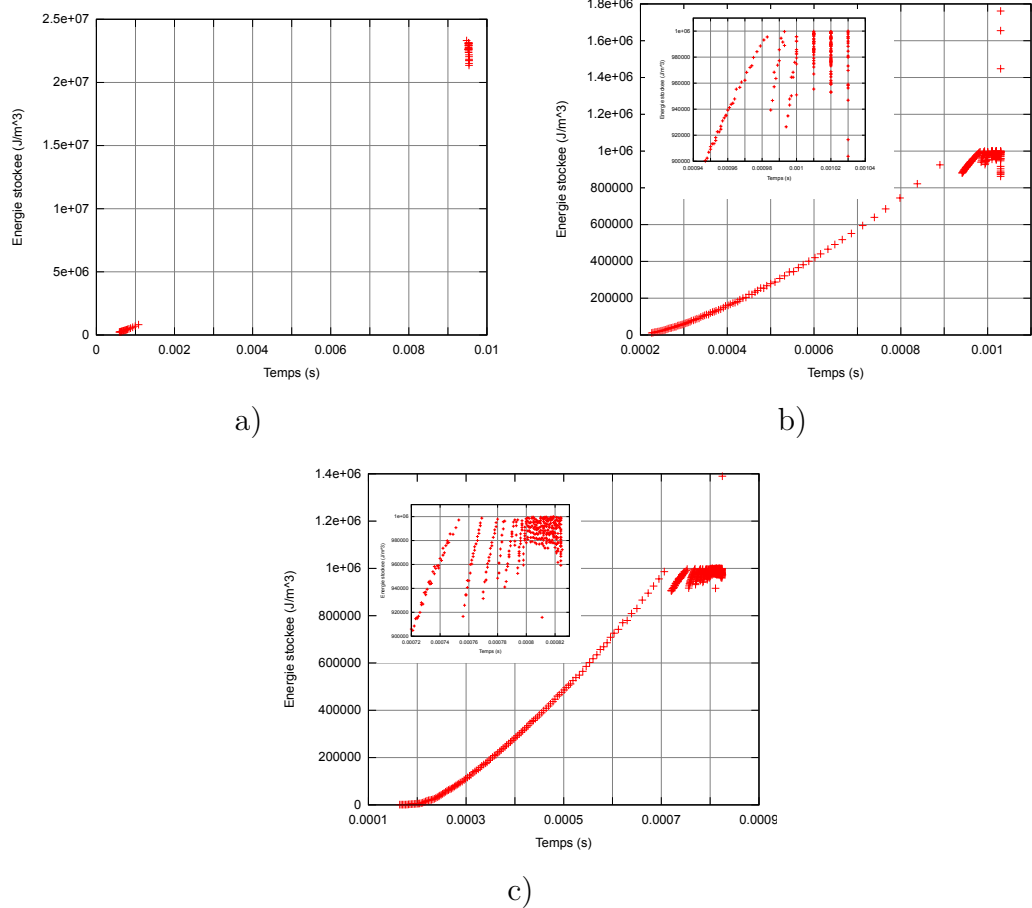


FIGURE IV.7 – Evolution de l'énergie stockée de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

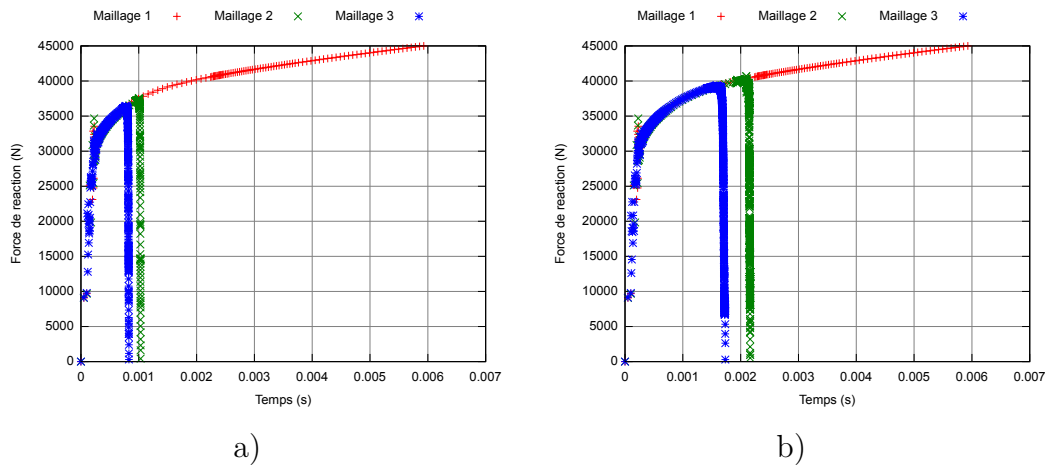


FIGURE IV.8 – Evolution de la force de réaction de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI : a)  $W_c = 1MJ/m^3$  et b)  $W_c = 4MJ/m^3$

Dans le cas d'une vitesse de chargement plus importantes (10m/s) (voir figures A.9 et A.10), il nous est impossible via l'analyse de bifurcation d'obtenir une propagation de la fissure dans le cas du maillage le plus grossier (maillage1).

### iii) Amorçage et vitesse de la fissure

Sur la figure IV.8, nous avons donc tracé l'évolution de la force de réaction de l'éprouvette dans le cas du chargement lent.

On observe dans un premier temps que la diminution de la taille de maille provoque un amorçage de la fissure plus rapide avec une tendance à la convergence pour les maillages plus fins. On observe une grande différence entre les résultats donnés par le maillage 1 et le maillage 2. Cette différence est expliquée par la difficulté d'identifier une direction de propagation de la fissure qui conduit alors à un délai dans l'amorçage de cette dernière.

Le second point important est la vitesse de propagation de la fissure représentée via la chute de la force de réaction. On remarque une bonne répétabilité en terme de chute de cette force quelle que soit la taille de maille utilisée. On remarque que notre modèle provoque une chute brutale de la force de réaction. Cette chute brutale est sans doute peu réaliste.

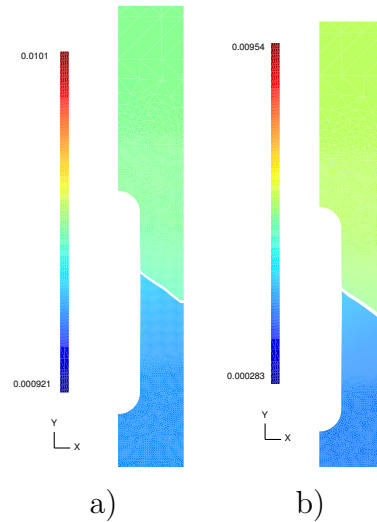


FIGURE IV.9 – Champ de déplacement suivant Y de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MCVF et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3

#### IV.2.4 Méthode de propagation par contrôle de la vitesse de fissuration (MCVF)

Nous allons à présent nous intéresser aux résultats obtenus en utilisant la méthode de propagation basée sur le contrôle de la vitesse de fissuration (MCVF). On rappelle que cette méthode a été utilisée uniquement dans le cas du chargement rapide.

##### *i) Angle de propagation*

###### *a) Résultats : énergie stockée critique de $1MJ/m^3$*

Nous avons tracé sur la figure IV.9, l'état des éprouvettes après rupture.

Sur la figure IV.9, on peut noter dans un premier temps que la fissure ne s'est pas propagée dans le cas du chargement dynamique pour le maillage le plus grossier comme dans le cas de l'utilisation de la MPUI pour un chargement identique. Ceci est logique puisque les deux méthodes utilisent la même stratégie pour identifier l'angle de propagation de la fissure.

La fissure tend à se propager dans une direction identique (angle d'environ  $145^\circ$  par rapport à l'axe X), comme pour le cas de la MPUI.

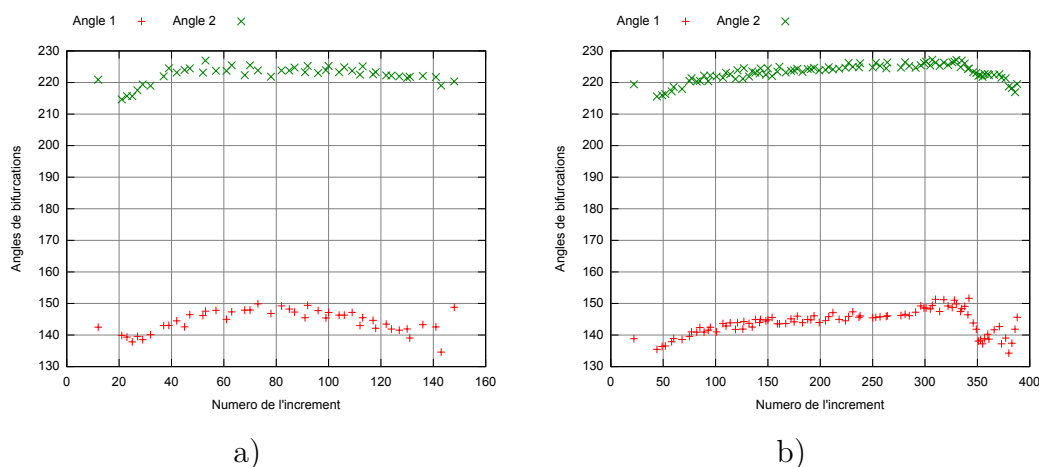


FIGURE IV.10 – Angles par rapport à X de propagation potentiels de fissuration dans le cas de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MCVF et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3

Dans un second temps, nous nous intéressons aux directions de bifurcations possibles lors de la propagation de la fissure (voir figure IV.10).

Sur la figure IV.10, on peut noter que dans chaque cas nous détectons deux angles de propagation possibles (comme pour la MPUI).

#### *b) Influence de la valeur de l'énergie stockée critique*

Dans le cas d'une valeur de l'énergie stockée critique plus importante ( $4MJ/m^3$ ), nous avons pu remarquer des résultats identiques (voir figures A.11 et A.12).

#### *ii) Evolution de l'énergie stockée*

##### *a) Résultats : énergie stockée critique de $1MJ/m^3$*

Sur la figure IV.11, nous avons tracé l'évolution de l'énergie stockée au cours de la propagation de la fissure. Il faut noter que cette énergie est calculée uniquement lorsqu'une direction de propagation est identifiée.

On remarque sur la figure IV.11, que dans le cas de l'utilisation d'une propagation de la fissure via la loi de Kanninen on dépasse alors le critère d'amorçage (propre à la méthode de propagation). Pour le cas du maillage 2, on remarque que l'énergie stockée atteinte pour propager la fissure s'élève. Ceci est dû à la difficulté d'identifier une direction de propagation, conjuguée également avec une dépendance

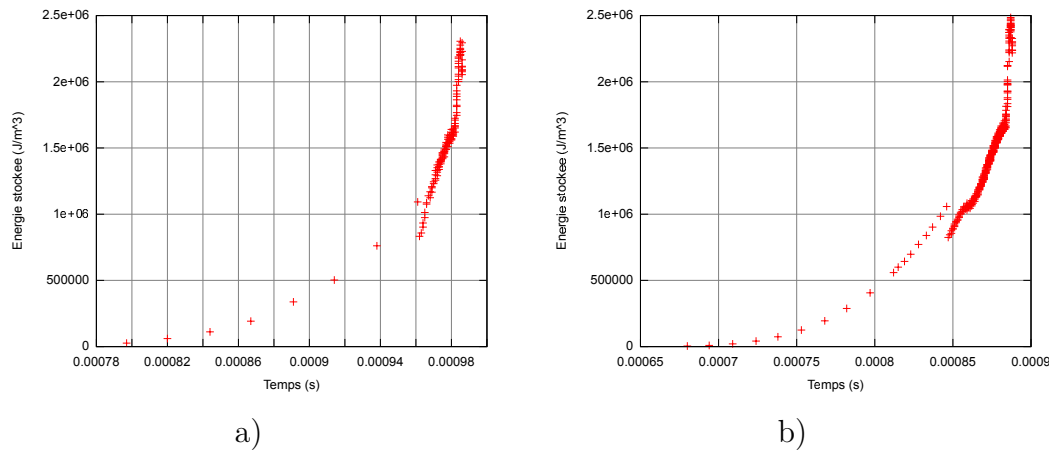


FIGURE IV.11 – Evolution de l'énergie stockée de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MCVF et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3

au pas de temps courant.

*b) Influence de la valeur de l'énergie stockée critique*

Dans le cas d'une valeur de l'énergie stockée critique plus importante ( $4MJ/m^3$ ), nous avons pu remarquer des résultats identiques (voir figure A.13).

## IV.2.5 Discussion

Afin de tester les deux modèles mis en place dans cette étude (MPUI et MCVF), nous avons étudié le cas d'une éprouvette plate fissurée en son centre. Trois résultats importants ont pu être indentifiés et ont permis une étude critique :

- L'angle de propagation de la fissure
- L'évolution de l'énergie stockée
- L'évolution de la force de réaction

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à l'angle de propagation. Nous remarquons que lorsque la fissure a pu s'amorcer la fissure tend à se propager avec un angle d'environ  $145^\circ$  par rapport à l'axe X et cela, quelle que soit la taille

de maille, la vitesse de chargement, le critère d'amorçage ou encore la méthode de propagation de la fissure utilisée (MPUI ou MCVF). Lorsque l'on s'intéresse à la distribution de la porosité lors de l'amorçage de la fissure, on remarque que celle-ci tend à se localiser dans deux directions  $\pm 135^\circ$  par rapport à l'axe X. Les modèles MPUI et MCVF, tendent comme attendu à propager la fissure dans les directions dans lesquelles la porosité se localise. A contrario, en utilisant une porosité à rupture (MFCRIT), la fissure tend à se propager suivant un angle proche de  $180^\circ$  par rapport à l'axe X et ne suivant en aucun cas ces directions de localisation.

Le deuxième point est l'évolution de l'énergie stockée. Nous observons plusieurs phénomènes très intéressants qui montrent la limite de la méthode de propagation mise au point dans cette étude. D'une part, nous observons que la taille de maille ainsi que la vitesse de chargement jouent un rôle prépondérant dans la détection d'une direction de localisation via l'analyse de bifurcation. En effet, dans le cas du maillage le plus grossier et du chargement quasi-statique, il a pu être observé une difficulté à identifier une direction de propagation de la fissure retardant ainsi son amorçage. Pour le chargement rapide et pour cette taille de maille, l'amorçage de la fissure n'a pas pu se réaliser faute d'identifier une direction de propagation. D'autre part, nous avons pu observer deux modes d'évolutions de l'énergie stockée, dépendant de la méthode de propagation (MPUI ou MCVF). Dans le cas de la MPUI, nous ne dépassons (sauf si aucune direction de propagation n'a été détectée) pas le critère d'amorçage. A contrario, dans le cas de la MCVF, l'énergie stockée dépasse très largement le palier d'amorçage de la fissure. Ce phénomène est dû à la méthode de propagation (MCVF) où l'incrément de fissure doit couper entièrement l'élément contenant la pointe de fissure pour pouvoir mettre à jour les enrichissements (et donc représenter une propagation de la fissure).

Le dernier point est l'évolution de la force de réaction. Nous observons là encore plusieurs phénomènes intéressants. D'une part, nous observons une bonne concordance de l'amorçage de la fissure entre les deux modèles de l'étude (MPUI et MCVF) et une approche classique (MFCRIT). On peut également remarquer que la diminution de la taille de maille provoque un amorçage plus rapide de la fissure. D'autre part et c'est là que les deux modèles MPUI et MCVF divergent de MFCRIT, en terme de vitesse de propagation de la fissure, nous observons que les modèles de l'étude ont tendance à faire chuter rapidement la force de réaction. A contrario, le modèle basé sur la suppression d'élément (MFCRIT) a tendance à



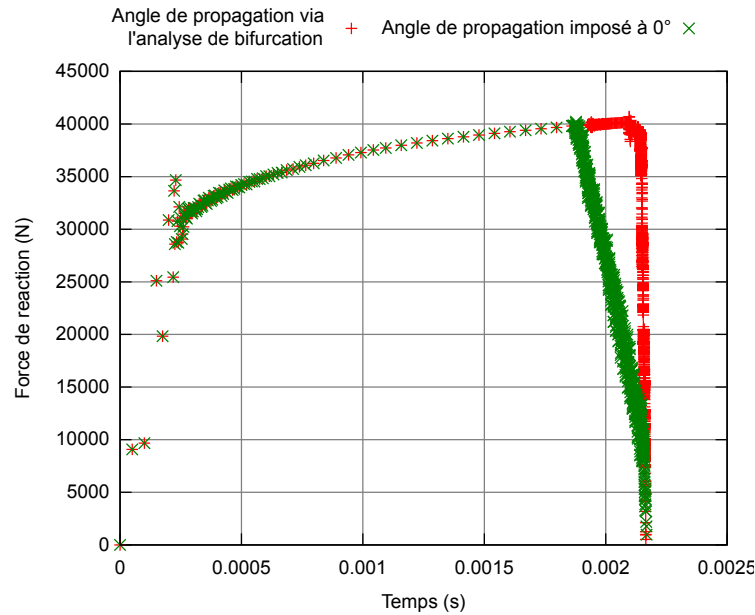


FIGURE IV.12 – Evolution de la force de réaction de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI ( $W_c = 4MJ/m^3$ ) et l'utilisation du maillage 2, dans le cas d'un angle de propagation imposé à  $180^\circ$  et d'un angle défini via l'analyse de bifurcation

faire chuter plus doucement celle-ci. Il semble néanmoins que cette différence soit due à la direction de propagation de la fissure. Nous avons donc pour vérifier ce phénomène, simulé l'éprouvette plate fissurée dans la configuration suivante :

- Maillage 2
- Energie stockée critique de  $4MJ/m^3$
- Utilisation de la MPUI
- On impose un angle de propagation de  $180^\circ$  par rapport à l'axe X (activation de la propagation uniquement si un angle a pu être défini via l'analyse de bifurcation)
- Vitesse de chargement de 1m/s

Il ressort alors (voir figure IV.12) qu'une propagation en dehors des plans de localisation de la porosité provoque une chute de la force de réaction moins brutale

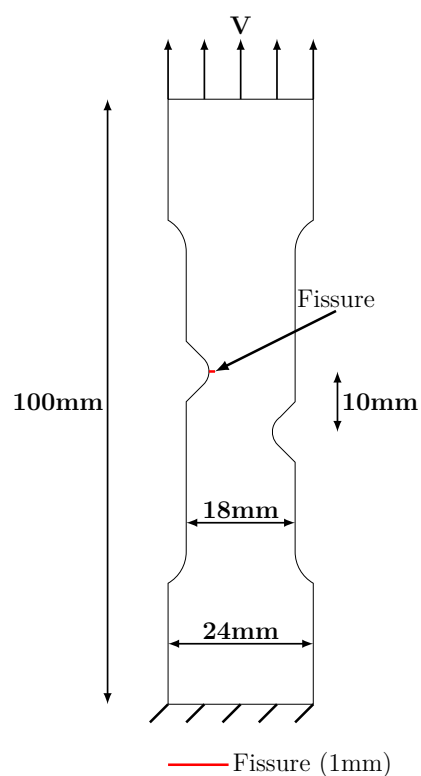


FIGURE IV.13 – Modélisation de l'éprouvette doublement entaillée fissurée

mais encore loin des résultats identifiés à partir de la MFCRIT. Cela nous amène à penser que cette chute brutale de la force de réaction est typique de la méthode de propagation mise en place dans cette étude (MPUI) et non de la direction de propagation.

### IV.3 Eprouvette à deux entailles asymétriques fissurée

Dans un second temps, nous avons étudié le cas d'une éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée (voir figure IV.13) avec une épaisseur de 2mm.

### IV.3.1 Problème posé

Contrairement au cas test précédent, nous avons étudié le modèle uniquement pour un chargement lent ( $V_{char} = 1m/s$ ). Comme pour l'éprouvette plate fissurée, l'idée est de simuler un essai de traction avec une vitesse de chargement constante.

Afin d'analyser les résultats obtenus via la MPUI, une comparaison avec la MFCRIT est réalisée. A terme, une comparaison avec des résultats expérimentaux est prévue.

Dans le cadre de notre étude, nous avons représenté sur la figure IV.14, la répartition de la porosité dans l'éprouvette dans le cas de l'utilisation de la MFCRIT (avant rupture du premier élément).

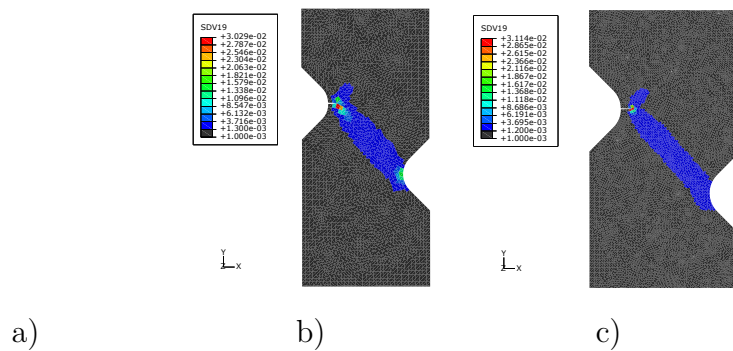


FIGURE IV.14 – Représentation de la répartition de la porosité de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

On peut voir sur la figure IV.14 que la porosité tend à se localiser dans deux directions formant un angle de  $\pm 45^\circ$  environ avec la fissure.

### IV.3.2 Méthode basée sur un critère local (MFCRIT)

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux résultats obtenus avec la MFCRIT.

#### *i) Angle de propagation*

##### *a) Résultats : cas du chargement lent et pour une porosité critique de 0.03*

Sur la figure IV.15, nous montrons l'état des éprouvettes après rupture.

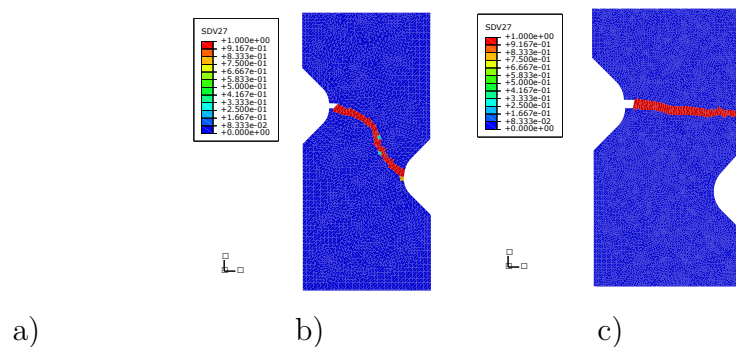


FIGURE IV.15 – Angle de propagation de la fissure de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT et  $f_c = 0.03$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

Nous pouvons voir sur la figure IV.15, que pour le maillage le plus grossier la fissure se propage dans la direction de la seconde entaille. En raffinant le maillage, la propagation de la fissure tend à se propager à  $0^\circ$ . Pour analyser ce phénomène, on peut s'intéresser à l'état de fissuration pour les différents maillages au cours du calcul (voir figure IV.16).

On remarque alors pour les maillages les plus grossiers (maillages 1 et 2), qu'une seconde fissure s'amorce au niveau de l'entaille non fissurée à l'état initial. Ceci provoque alors une fissuration finale qui joint les deux entailles. Dans le cas du maillage le plus fin, nous n'observons pas ce phénomène et seule la fissure initiale se propage et provoquant ainsi une fissuration qui ne rejoint pas la seconde entaille.

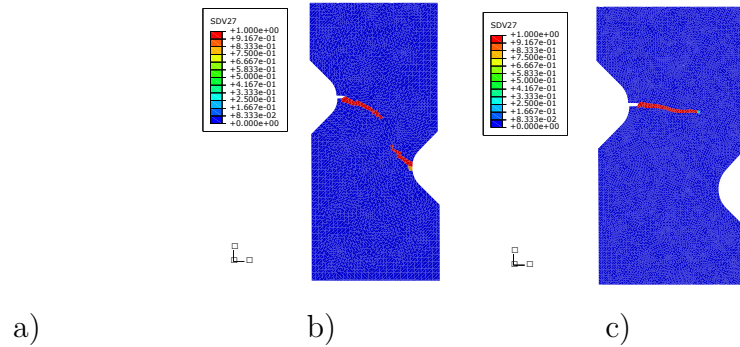


FIGURE IV.16 – Direction de propagation de la fissure de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT et  $f_c = 0.03$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

#### *b) Influence de la valeur de la porosité critique*

Dans le cas d'une valeur d'une porosité critique plus importante (0.1), nous avons pu remarquer des phénomènes identiques (voir figures A.17 et A.18) avec quelques nuances. Pour le cas du maillage 2, nous observons alors que seule la fissure initiale s'est propagée. En conclusion, une porosité critique plus importante tend à propager la fissure initiale en dehors de la zone de la seconde entaille non fissurée.

#### *ii) Amorçage et vitesse de la fissure*

Sur la figure IV.17, nous avons donc tracé l'évolution de la force de réaction de l'éprouvette dans le cas du chargement lent.

On peut observer dans un premier temps que la diminution de la taille de maille provoque un amorçage de la fissure plus rapide avec une réduction de l'influence de ce phénomène pour une porosité critique plus faible.

Le second point important est la vitesse de propagation de la fissure représentée via la chute de la force de réaction. On remarque une bonne répétabilité en terme de chute de cette force quelle que soit la taille de maille utilisée et avec une chute lente.

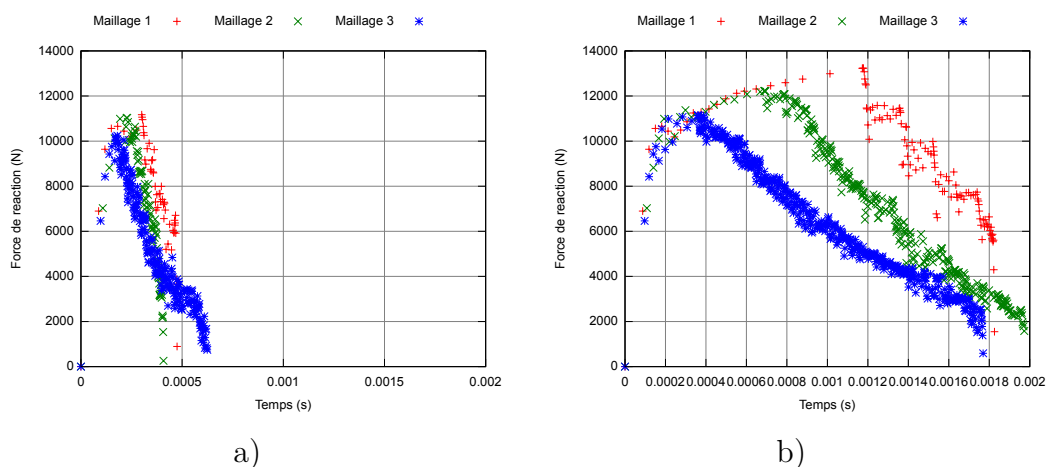


FIGURE IV.17 – Evolution de la force de réaction de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT : a)  $f_c = 0.03$  et b)  $f_c = 0.1$

### IV.3.3 Méthode de propagation par épuisement du critère d'amorçage (MPUI)

Nous allons à présent nous intéresser aux résultats obtenus en utilisant la méthode de propagation de la fissure par épuisement du critère (MPUI).

#### i) Angle de propagation

a) Résultats : cas du chargement lent et pour une énergie stockée critique de  $1MJ/m^3$

Nous avons tracé sur la figure IV.18, l'état des éprouvettes après rupture.

Sur la figure IV.18, on peut noter que la fissure tend à se propager vers la seconde entaille. Il faut noter que le déplacement de corps rigide de la partie haute de l'éprouvette vers la gauche est simplement un artefact numérique due à l'absence de conditions aux limites suivant l'axe X sur l'arête du dessus.

Dans un second temps, nous nous intéressons aux directions de propagation possibles lors de la progression de la fissuration (voir figure IV.19).

Sur la figure IV.19, on peut noter que dans chaque cas nous détectons deux angles de propagation possibles. On peut noter sur la figure IV.14, que ces directions tendent à s'accomoder aux plans dans lesquelles la porosité se localise.

b) Influence de la valeur de l'énergie stockée critique

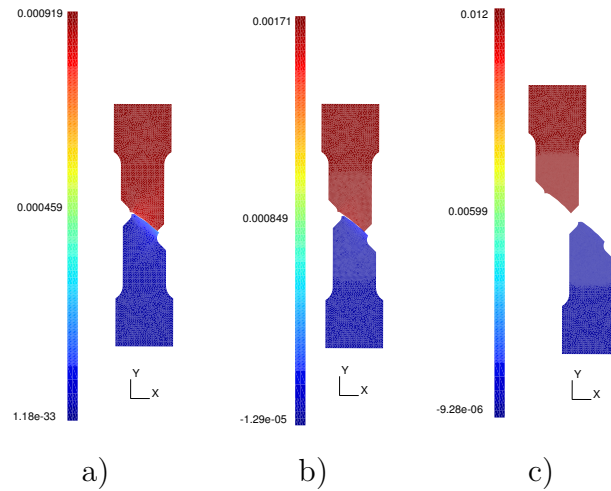


FIGURE IV.18 – Champ de déplacement suivant Y de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

Dans le cas d'une valeur de l'énergie stockée critique plus importante ( $4MJ/m^3$ ), nous avons pu remarquer des résultats identiques que ce soit en terme de la direction de propagation de la fissure (voir figure A.19) où lors du calcul des angles de propagation possibles lors de l'analyse de bifurcation (voir figure A.20).

### *ii) Evolution de l'énergie stockée*

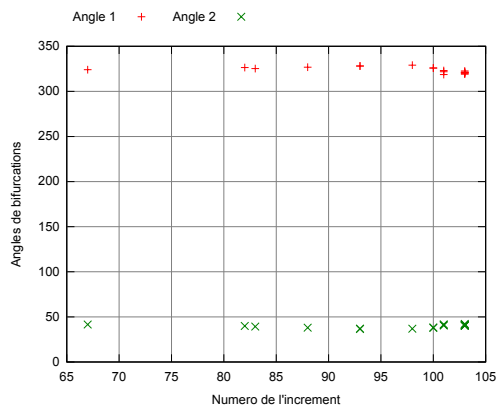
#### *a) Résultats : cas du chargement lent et pour une énergie stockée critique de $1MJ/m^3$*

Sur la figure IV.20, nous avons tracé l'évolution de l'énergie stockée (voir équation III.31) au cours de la propagation de la fissure. A noter que cette énergie est calculée uniquement lorsqu'une direction de propagation est identifiée.

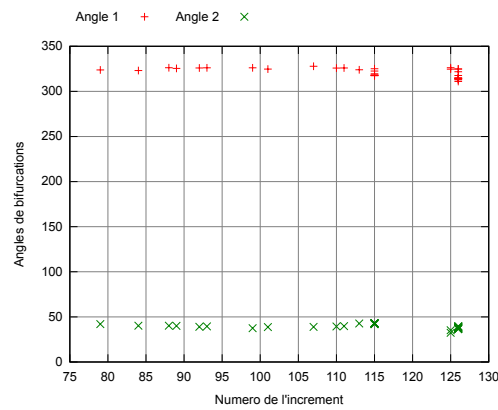
On peut remarquer sur la figure IV.20, une évolution de l'énergie stockée en dents-de-scie. On note que nous dépassons quelquefois la valeur de l'énergie stockée critique. Ce phénomène est dû au fait que par instant, nous n'arrivons pas à identifier de direction de propagation et donc que la fissure ne se propage pas. On dépasse alors le critère d'amorçage jusqu'à identification d'une direction de propagation.

#### *b) Influence de la valeur de l'énergie stockée critique*

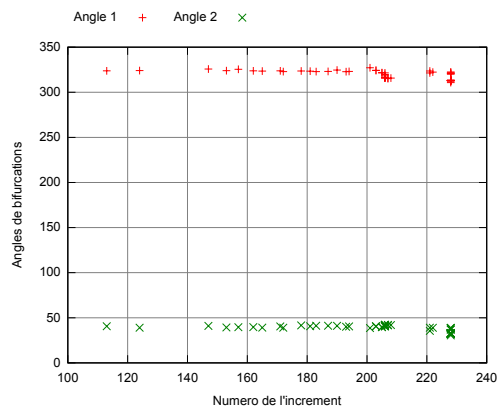
Dans le cas d'une valeur de l'énergie stockée critique plus importante ( $4MJ/m^3$ ),



a)



b)



c)

FIGURE IV.19 – Angles par rapport à X de propagation potentiels de fissuration de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3



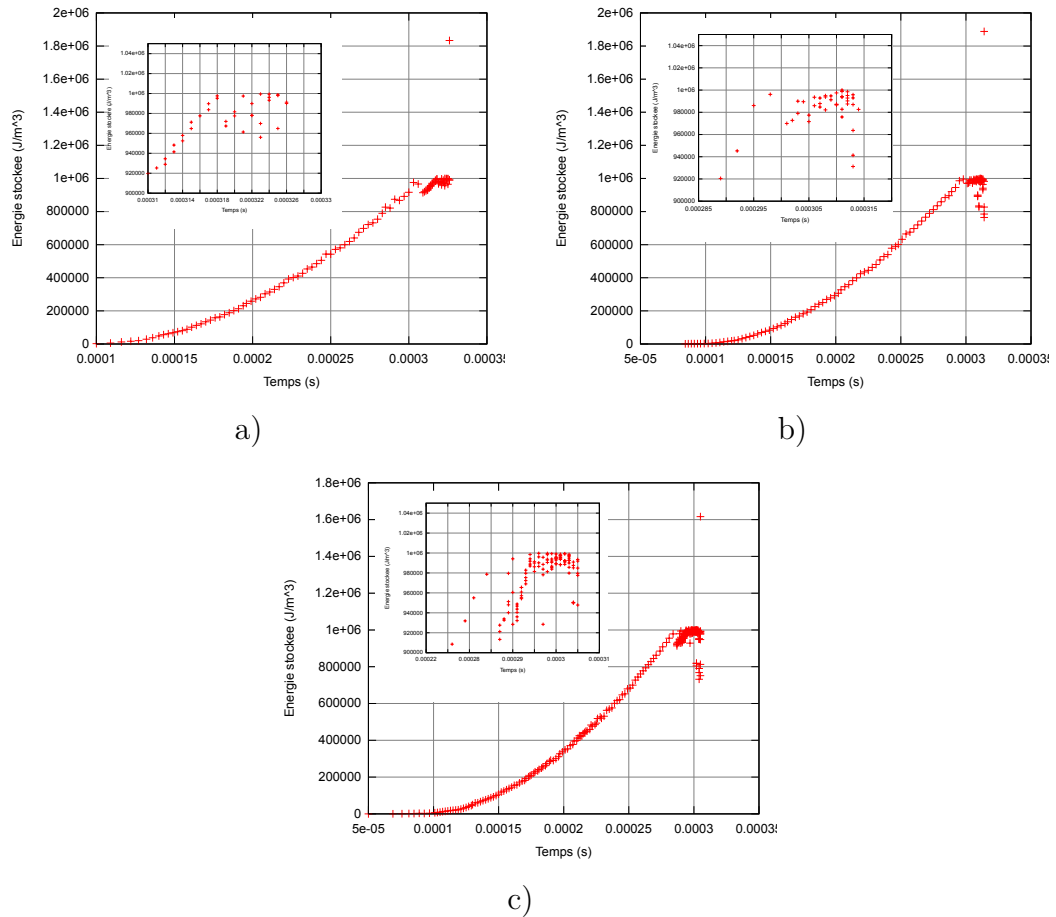


FIGURE IV.20 – Evolution de l'énergie stockée de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

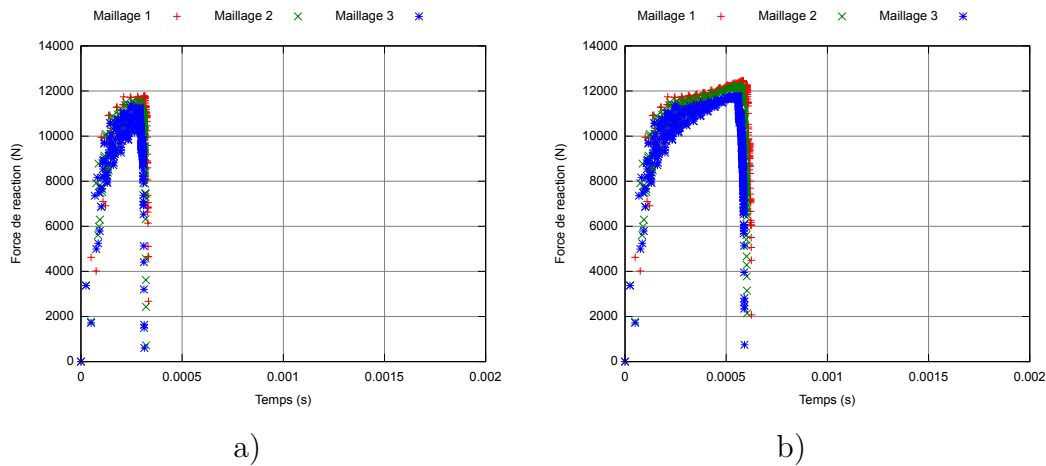


FIGURE IV.21 – Evolution de la force de réaction de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI : a)  $W_c = 1MJ/m^3$  et b)  $W_c = 4MJ/m^3$

nous avons pu remarquer des résultats identiques (voir figure A.21).

### iii) Amorçage et vitesse de la fissure

Sur la figure IV.21, nous avons donc tracé l'évolution de la force de réaction de l'éprouvette dans le cas du chargement lent.

On peut observer un amorçage de la fissure pratiquement équivalent entre les différents maillages, avec une tendance à la convergence pour les maillages plus denses.

Le second point important est la vitesse de propagation de la fissure représentée via la chute de la force de réaction. On note une bonne répétabilité en terme de chute de cette force quelle que soit la taille de maille utilisée. Le modèle MPUI provoque une chute brutale de la force de réaction.

## IV.3.4 Discussions

Nous avons étudié dans un second temps le cas d'une éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée. Trois résultats importants ont pu être indentifiés et ont permis une étude critique :

- L'angle de propagation de la fissure
- L'évolution de l'énergie stockée
- L'évolution de la force de réaction

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à l'angle de propagation. Nous avons pu remarquer pour la MPUI que la fissure se propage en direction de la seconde entaille et cela, quelle que soit la taille de maille, le critère d'amorçage. Lorsque l'on s'intéresse à la distribution de la porosité lors de l'amorçage de la fissure, on remarque que celle-ci tend à se localiser dans deux directions  $\pm 45^\circ$  par rapport à l'axe X. Avec notre modèle (MPUI) et c'est ce que nous recherchions, la fissure tend à suivre les directions dans lesquelles la porosité se localise. Si on s'intéresse à présent à la MFCRIT, on remarque alors une dépendance très forte de la direction de propagation par rapport à la taille de maille et la valeur de la porosité à rupture. En effet, nous avons vu qu'avec une taille de maille grossière la fissure tend à se propager en direction de la seconde entaille alors que pour une taille plus fine, celle-ci a tendance à se propager suivant un angle proche de  $0^\circ$  par rapport à l'axe X et ne suivant en aucun cas ces directions de localisation. Ce phénomène est dû à l'apparition dans le cas d'une taille de maille trop grossière d'une seconde fissure s'amorçant au niveau de l'entaille non fissurée. Les deux fissures se rejoignent alors suivant une des directions dans laquelle la porosité est localisée. En utilisant un maillage plus fin nous réduisons la possibilité de l'amorçage d'une seconde fissure provoquant ainsi une propagation de la pré-fissure en dehors des plans de localisation de la porosité. Une valeur de la porosité plus forte a également tendance à réduire la possibilité de l'amorçage d'une seconde fissure.

Le deuxième point est l'évolution de l'énergie stockée. Contrairement au cas test précédent, dans le cas de la MPUI nous n'avons pas observé de difficultés majeures dans la détection d'une direction de propagation via l'analyse de bifurcation. Par contre, nous avons observé une tendance identique dans l'évolution de l'énergie stockée après la première propagation de la fissure.

Le dernier point est l'évolution de la force de réaction. Nous avons pu observer là encore plusieurs phénomènes intéressants. Pour ce cas test, nous avons observé une influence moins forte de la taille de maille ainsi que de l'énergie stockée critique dans

le cas de la MPUI et de la valeur de la porosité critique dans le cas de la MFCRIT, sur l'amorçage de la fissure. D'autre part et c'est là que la MPUI diverge de MFCRIT, en terme de vitesse de propagation de la fissure, nous avons pu observer que la MPUI a tendance à faire chuter rapidement la force de réaction. A contrario, le modèle basé sur la suppression d'élément (MFCRIT) avait tendance à faire chuter plus doucement celle-ci. L'élément le plus probablement responsable de cette chute instantanée semble être la valeur critique de l'énergie stockée. Nous avons donc pour vérifier ce phénomène, simulé l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans la configuration suivante :

- Maillage 3
- Energie stockée critique de  $4MJ/m^3$ ,  $8MJ/m^3$  et  $10MJ/m^3$
- Utilisation de la MPUI
- Vitesse de chargement de 1m/s

A titre de comparaison, nous avons également simulé l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée sans activer la propagation de la fissure.

On peut voir sur la figure IV.22 qu'en augmentant l'énergie stockée critique, la chute de la force de réaction est moins brutale mais encore loin des résultats identifiés à partir de la MFCRIT.

## IV.4 Bilan

Nous avons cherché dans ce chapitre à tester notre modèle via l'étude de deux configurations d'éprouvettes entaillées (voir figures IV.1 IV.13). Afin de tester les performances de celui-ci, nous avons appliqué deux types de chargement pouvant s'apparenter respectivement à un chargement quasi-statique ( $V=1m/s$ ) et à un chargement dynamique ( $V=10m/s$ ).

La seule inconnue du modèle de propagation en place dans cette étude, si on considère le rayon de la pastille comme fixé (5mm), est la valeur d'énergie stockée à partir de laquelle nous allons considérer un amorçage de la fissure. Pour identifier cette valeur, nous avons dit lors de l'introduction de ce chapitre que nous avions besoin d'expérimentation. En attendant,  $W_c$  est choisie arbitrairement. Afin de

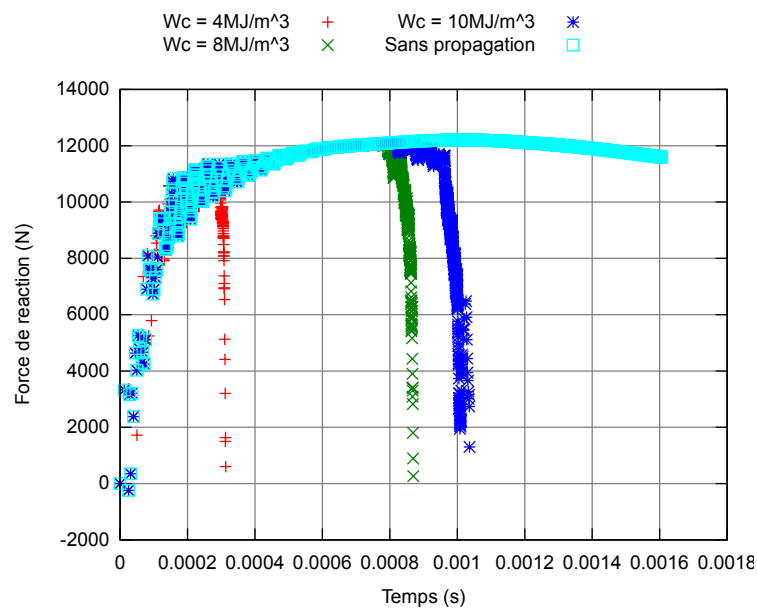


FIGURE IV.22 – Evolution de la force de réaction de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et l'utilisation du maillage 3

réduire l'impact du choix de la valeur de l'énergie critique à amorçage sur nos résultats, nous avons choisi d'utiliser deux valeurs différentes pour notre cas test (1 et 4 MJ/m<sup>3</sup>). L'objectif est avant tout d'observer si le critère d'amorçage joue un rôle important sur nos résultats obtenus et si oui, dans quel sens.

Afin d'étudier les capacités prédictives du modèle, des résultats expérimentaux sont nécessaires. Cependant comme dit au paragraphe précédent, nous n'avons pas en notre possession de résultats expérimentaux et la seule étude comparative restante est donc une analyse numérique. Dans cette optique, une méthode basée sur la suppression d'élément a été utilisée. Cette méthode est la plus usuellement utilisée dans le cadre de la modélisation de la rupture ductile par endommagement au moyen de la méthode des éléments finis standard. La seule inconnue de cette méthode est la porosité à rupture à partir de laquelle nous allons supprimer l'élément endommagé. Afin de réduire encore une fois l'impact du choix de cette valeur sur nos résultats, nous avons choisi d'utiliser deux valeurs différentes pour notre cas test (0.03 et 0.10).

Trois résultats importants ont pu être identifiés et ont permis une étude critique entre les deux méthodes :

- L'angle de propagation de la fissure
- L'évolution de l'énergie stockée
- L'évolution de la force de réaction

Nous avons pu constater au travers des deux cas tests considérés que la porosité avait tendance à se localiser dans deux directions distinctes. Via les modèles de l'étude (MPUI et MCVF), quelle que soit la vitesse de propagation ainsi que la taille de maille, lorsque la fissure se propage, elle suit une des directions dans laquelle la porosité se localise. Lorsque la taille de maille est trop grossière dans le cas d'une vitesse de chargement trop élevée, nous avons pu constater que la recherche de la direction de localisation via l'analyse de bifurcation pose quelques problèmes ralentissant ainsi la propagation de la fissure ou alors ne permettant pas de propager la fissure.

Au niveau de l'évolution de la force de réaction au cours de l'essai, nous avons pu remarquer une tendance de nos modèles à provoquer une chute très rapide de cette

force de réaction.

Nous avons pu comparer nos deux modèles à un modèle basé sur une approche classique (MFCRIT). Avec la MFCRIT, nous avons observé une tendance à propager la fissure en dehors des plans de localisation. Dans le cas de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée, nous avons notamment pu voir une très nette influence de la taille de maille et de la valeur de la porosité critique à rupture dans l'orientation de la propagation de la fissure. Au niveau de l'évolution de la force de réaction, nous avons observé que la MFCRIT provoque une chute douce de cette force.

Des essais expérimentaux doivent être menés afin d'identifier si la chute de la force de réaction que nous obtenons est proche ou non de la réalité. D'un point de vue physique, on sait que le DH36 est un matériau très ductile permettant d'aller à des déformations élevées avant rupture de la structure et que l'avancée de la fissure se fait par à-coups. On peut alors penser que dans un tel cas de figure, la chute de la force de réaction n'est pas instantanée comme notre modèle mais plutôt progressive. Une étude plus approfondie sur la chute de la force de réaction doit alors être menée afin d'identifier les éléments responsables. Dans le cas de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée, nous avons testé plusieurs valeurs critiques de l'énergie stockée (i.e. 4, 8 et 10MJ/m<sup>3</sup>). En augmentant celle-ci, la chute de la force de réaction est moins instantanée que pour une faible valeur mais encore loin d'être progressive. Il faut donc aller plus loin dans l'analyse des causes responsables de ce phénomène.

Pour conclure, on peut également dans le cadre de la méthode de propagation basée sur le principe d'épuisement du critère d'amorçage, aborder le fonctionnement de la propagation de la fissure. Dans notre étude (pour cette méthode), nous propageons la fissure en post-traitement du calcul (pour l'incrément courant) et cela jusqu'à ce que le critère d'amorçage ne soit plus respecté. Pour chaque propagation nous n'avons alors jamais un rééquilibrage des contraintes pour l'incrément courant. Dans notre cas d'étude, nous nous basons sur une énergie stockée (qui n'est donc pas récupérable). Lorsque la fissure se propage, que nous rééquilibrons les contraintes ou non, l'énergie stockée proche du nouveau front de fissure ne diminuera en aucun cas. Du point de vue de l'amorçage de la fissure, le non rééquilibrage ne pose donc pas de problèmes. Cependant au niveau de l'éventuelle direction de propagation

identifiée via l'analyse de bifurcation, cela peut poser quelques erreurs. En effet, le rééquilibrage peut modifier d'une part la position des éléments (et donc des points de Gauss) mais également modifier de façon importante le comportement courant des points de Gauss des éléments provoquant ainsi un changement non négligeable au niveau de l'opérateur tangent.





# Conclusions et Perspectives

## 1 Conclusions

Cette étude porte sur la modélisation de la rupture ductile induite par endommagement d'une structure 2D dans le cas d'une fissure existante.

Dans la modélisation de la macro-fissure et de sa propagation au sein de la structure, trois aspects sont alors très importants :

- La modélisation du comportement du matériau en accord avec ce qui est observé expérimentalement
- La représentation numérique de la macro-fissure
- Le couplage entre la macro-fissure et le modèle permettant de reproduire une rupture ductile induite par endommagement

Un enjeu de cette thèse est la modélisation de phénomènes complexes dans l'optique de les utiliser dans le cadre d'applications industrielles. Pour répondre à cette contrainte, il a été fait le choix d'utiliser le code de calculs par éléments finis industriel, Abaqus. Les trois précédents aspects ont été implantés dans Abaqus via des routines utilisateurs dans le cadre d'une procédure dynamique en utilisant un schéma implicite.

Un modèle de comportement avancé permettant de rendre compte des effets combinés de l'écroutissage isotrope, de l'adoucissement thermique, de la viscoplasticité et de l'endommagement par croissance de cavités, a ainsi été implanté comme matériau utilisateur dans Abaqus (UMAT).

Pour rendre compte des conséquences cinématiques de la présence d'une fissure au sein du maillage, nous avons utilisé la X-FEM adaptée au cas d'un comportement

matériau fortement non linéaire. Là encore la X-FEM a été implantée dans Abaqus via une routine utilisateur (UEL). Nous avons choisi (au début de ce travail) de ne pas utiliser la X-FEM implantée préalablement dans Abaqus pour deux raisons :

- La X-FEM d'Abaqus ne pouvait pas se coupler avec un comportement matériau utilisateur (UMAT) mais uniquement avec des comportements assez simples (élasticité/élasto-plasticité).
- Les critères d'amorçage de la fissure et de directions de propagation (assez simples) ne permettaient pas de reproduire une rupture ductile induite par endommagement.

Le but de notre étude est le couplage d'un comportement matériau avancé (basé sur le modèle de GTN) avec une méthode permettant de traiter numériquement la macro-fissure et sa propagation (X-FEM), afin de reproduire une rupture ductile induite par endommagement. Nous avons dans cette étude proposé une méthode de propagation basée sur des grandeurs moyennées dans une pastille située en pointe de fissure et permettant de reproduire une telle rupture de la structure. Celle-ci a été implantée dans Abaqus via une routine utilisateur. Trois points importants à traiter ont alors émergé :

- Dans quelle direction la fissure se propage-t-elle ?
- Quand l'amorçage de la fissure a-t-il lieu ?
- Quelle est la longueur du nouvel incrément de propagation ?

Considérant que la fissuration est la conséquence de la localisation de l'endommagement durant la phase de coalescence, la direction de propagation est obtenue via l'analyse de bifurcation appliquée à un état viscoplastique figé. Parmi les directions potentielles, celle qui rend maximale une déformation "équivalente" est identifiée comme direction de fissuration. En ce qui concerne l'amorçage de la fissure, nous supposons qu'au-delà d'une certaine valeur d'énergie critique, la déformation ne peut s'accommoder qu'en formant une fissure. Pour calculer la longueur de propagation de la fissure pour un incrément de temps donné, deux méthodes de propagation basées respectivement sur le principe d'épuisement du critère d'amorçage et sur le contrôle de la vitesse de fissuration ont été retenues.

Les résultats sont encourageants du point de vue de la direction de propagation de la fissure. Cependant une dépendance à la taille de maille et à la vitesse de chargement a pu être constatée lors de la recherche de la direction de propagation de la fissure via l'analyse de bifurcation. En ce qui concerne la vitesse de propagation de la fissure observée via l'étude de la force de réaction post-amorçage, nous avons observé une chute brutale de celle-ci. N'ayant pas encore d'essais expérimentaux à notre disposition, nous ne pouvons pas vraiment conclure sur le caractère réaliste ou non de cette chute de la force. Cependant cette chute dans le cas d'une rupture ductile semble un peu trop brusque par rapport à ce que nous pourrions observer expérimentalement. Il faut alors étudier plus précisément la méthode de propagation pour identifier les éléments responsables de ce phénomène et voir si il est possible d'atténuer la vitesse de propagation de la fissure.

## 2 Perspectives

Les enjeux complexes de cette étude qui porte sur le traitement numérique de la fissuration d'une structure navale, nous ont amené à faire des simplifications et des choix. De par les résultats obtenus et en prenant du recul sur la méthode mise en place, nous pouvons distinguer plusieurs points importants qui peuvent être développés suite à cette thèse. Nous les avons classé par ordre de priorité :

### Comparaisons à des essais expérimentaux

Dans notre étude, nous n'avons pas réalisé d'essais expérimentaux. Une campagne expérimentale est donc essentielle pour évaluer quantitativement les capacités prédictives de notre approche.

Elle permettra notamment d'analyser correctement les résultats obtenus en terme de direction de propagation et d'évolution de la force de réaction (notamment sa chute). Une étude également des différents paramètres utilisés dans les méthodes de propagation (rayon de la pastille, valeur critique de l'énergie stockée, identification de l'angle de propagation via les déformations plastiques, vitesse d'avancée de la fissure, ...) permettra de les discriminer. On pourra alors tirer des tendances en fonction des valeurs imposées permettant ainsi un meilleur choix du comportement du matériau à rupture.

Pour analyser le phénomène de chute instantanée de la force de réaction que nous

avons constaté, il faudra étudier un plus grand nombre d'applications. Le but est d'identifier les configurations nous permettant d'observer une chute de la force de réaction plus progressive. Si nous n'arrivons pas à reproduire ce phénomène, un critère d'amorçage basé sur l'énergie stockée n'est peut-être alors pas adapté à ce type de problème ou du moins comme il est formulé pour l'instant.

Un point important sera également de tester le modèle de propagation basé sur le principe d'épuisement du critère d'amorçage, en rééquilibrant le problème à chaque propagation. Cela permettra d'identifier les éventuelles divergences causées au niveau du calcul de la direction de propagation via l'analyse de bifurcation.

### Modélisation numérique du phénomène de méso-fissuration

Dans notre étude, nous avons supposé une transition instantanée entre un endommagement plus ou moins diffus et la formation d'une macro-fissure. Cependant avant la formation de cette fissure, nous observons expérimentalement la formation d'une méso-fissure associée à la coalescence des vides. Le traitement numérique de cette méso-fissure est donc une prochaine étape à notre étude.

D'un point de vue physique, cette méso-fissure représente la zone de coalescence des vides et provoque donc une localisation de la déformation. D'un point de vue mécanique, on considère usuellement celle-ci comme une bande avec deux conditions cinématiques :

- Continuité du champ de déplacement à l'interface entre la bande et le reste de la structure
- Discontinuité du champ de déformation à l'interface entre la bande et le reste de la structure

Pour modéliser cette méso-fissure que l'on qualifie usuellement de discontinuité faible (opposition à la macro-fissure que l'on qualifie de discontinuité forte, voir figure I.6), nous nous sommes intéressés aux travaux de Belytschko et al [5] et de Ortiz et al [49]. Le principe de ces méthodes est de traduire les conséquences cinématiques (continuité du champ de déplacement mais discontinuité du champ de déformation) de la présence d'une discontinuité faible au sein des éléments finis. Dans le cadre de notre étude, nous avons travaillé sur le modèle de Huespe et al [25] (voir figure IV.23). Dans un premier temps, nous avons implanté celui-ci

via une routine utilisateur dans Abaqus en considérant un cas 2D et un matériau élasto-plastique adoucissant. Ce modèle présente deux avantages :

- Réduction de l'influence de la taille de maille sur les résultats numériques en présence de localisation
- Introduction d'une largeur de bande

Pour définir les paramètres de localisation, une condition doit être respectée :

- Continuité des contraintes à l'interface entre la zone que nous considérons comme la méso-fissure et le reste de l'élément

Pour respecter cette condition il faut connaître l'opérateur tangent du matériau. Dans le cas d'un matériau élasto-plastique, le calcul de cet opérateur ne pose pas de problème. Dans leur article, Huespe et al utilisent leur modèle dans le cadre d'un modèle de comportement matériau de type GTN (mais sans prise en compte d'effets visqueux). Encore une fois l'opérateur tangent se calcule facilement. Dans notre cas d'étude, celui-ci n'est pas trivial et pose donc problème. Nous avons donc dans notre travail, défini un opérateur tangent simplifié combiné avec un algorithme de résolution de Newton-Raphson afin de respecter la continuité des contraintes à l'interface (permettant de définir les paramètres de localisation réduits au niveau élémentaire). Le problème posé par notre méthode est alors un temps de calcul plus important pour identifier les degrés de liberté (2 en 2D) associés à la discontinuité faible. Nous avons également observé un problème de convergence dans certains cas.

La méthode proposée par Huespe et al [25] semble applicable dans le cadre de nos travaux afin d'enrichir notre modèle. Cependant, un travail important sur l'identification des paramètres de localisation doit encore être mené.

### **X-FEM : Contact**

Dans le cadre de l'étude de la rupture dynamique des matériaux structuraux, des essais ont été menés à l'ISAE. Ces expérimentations portent sur l'essai de type Kalthoff (voir figure IV.24 a)). Le principe est d'envoyer un impacteur à très haute vitesse entre les deux entailles et d'observer le comportement à fissuration du matériau.

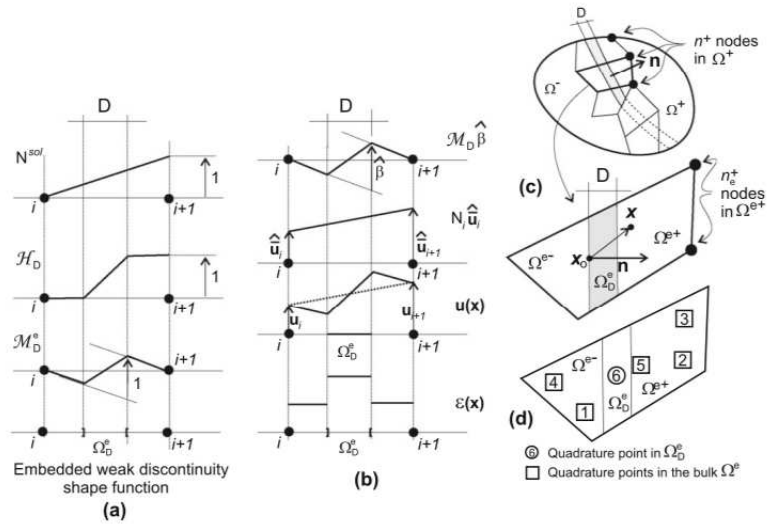


FIGURE IV.23 – Cinématiques de la discontinuité faible utilisées dans la formulation proposée par Huespe et al [25] : a) Fonctions de forme permettant de décrire la discontinuité faible, b) Champs de déplacement et de déformation, c) Elément fini avec une bande (discontinuité faible) indiquant les noeuds  $n_e^+$  et d) La distribution des points de Gauss utilisés pour l’intégration numérique

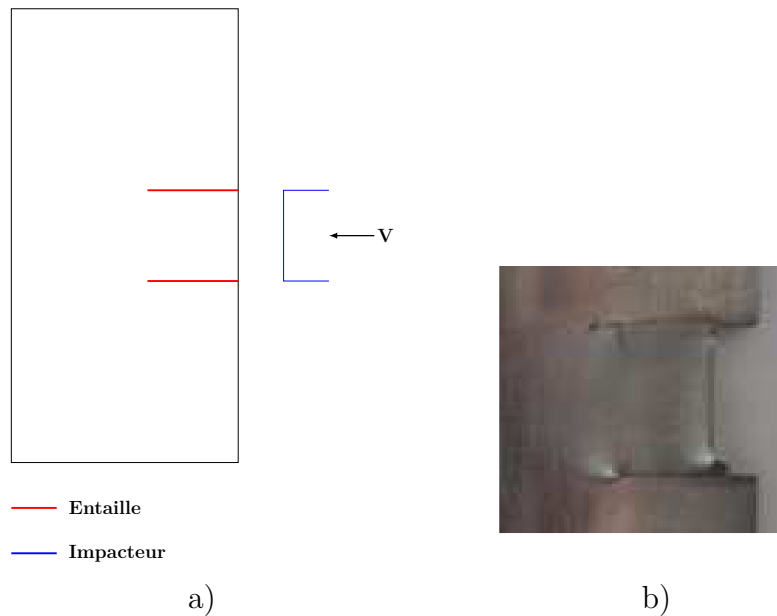


FIGURE IV.24 – a) Schématisation de l’essai de type Kalthoff et b) Résultat d’un essai pour une vitesse d’impact de 150m/s dans le cas de l’acier doux A60

Comme nous pouvons le voir sur la figure IV.24 b), pour des matériaux ductiles la surface en contact avec l'impacteur s'enfonce de manière non négligeable et provoque donc un contact au niveau des deux entailles. Pour que notre méthode soit opérationnelle pour simuler ce test, il faut traiter numériquement le phénomène de contact dans le cadre de la X-FEM. De nombreux travaux sont dédiés à ce couplage et on peut notamment citer deux thèses parlant de ce sujet : Geniault [16] et Siavelis [62]. La première traite du cas du contact dans le cas de petits glissements et est une bonne introduction à la seconde thèse traitant de cas de grands glissements. Les modèles de Geniault et Siavelis sont tout deux basés sur la méthode du Lagrangien augmenté.

Dans notre étude, nous avons dans un premier temps repris le modèle proposé par Geniault et avons essayé de l'implanter dans Abaqus via une routine utilisateur. Dans un cadre élastique et élasto-plastique, nous avons pu reproduire la refermeture d'une fissure (2D). Nous avons par la suite repris le modèle proposé par Siavelis (traitant du cas des grands glissements) et avons encore une fois tenté de l'implanter dans Abaqus via une routine utilisateur. Nous avons pu obtenir des premiers résultats encourageants (dans le cadre d'une fissure restant plane et dans le cas d'un matériau élastique) nous amenant à penser que la technique proposée est utilisable dans notre méthode. Cependant un travail conséquent doit encore être mené.

### **X-FEM : Arrêt de la fissure dans un élément**

Un des inconvénients de notre approche est que la fissure stoppe sur l'arête d'un élément et que durant la propagation de la fissure, le nouvel incrément de fissure doit couper entièrement celui-ci. Une des améliorations possibles serait alors l'utilisation d'au moins une fonction ( $f_1 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ ) permettant ainsi de représenter l'arrêt de la fissure au sein d'un élément. Le coût engendré par cette seule fonction supplémentaire semble alors raisonnable mais encore une fois, ne va pas forcément engendrer de meilleurs résultats. Néanmoins la possibilité de pouvoir stopper la fissure au sein d'un élément rend moins restrictive la méthode de propagation.





# Références bibliographiques

- [1] O. Allix and P. Ladevèze. Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite structures*, 22 :235–242, 1992.
- [2] N. Aravas. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :1395–1416, 1987.
- [3] E. Bechet, H. Minnebo, N. Moes, and B. Burgardt. Improved implementation and robustness study of the x-fem for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64 :1033–1056, 2005.
- [4] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 :601–620, 1999.
- [5] T. Belytschko, J. Fish, and B.E. Engelmann. A finite element with embedded localizations zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70 :59–89, 1988.
- [6] J. Besson, D. Steglich, and W. Brocks. Modeling of crack growth in round bars and plane strain specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :8259–8284, 2001.
- [7] P.O. Bouchard, F. Bay, and Y. Chastel. Numerical modelling of crack propagation : automatic remeshing and comparison of different criteria. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3887–3908, 2003.

- [8] P.O. Bouchard, F. Bay, Y. Chastel, and I. Tovenà. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189 :723–742, 2000.
- [9] R. de Borst. Numerical aspects of cohesive-zone models. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 :1743–1757, 2003.
- [10] R. de Borst. Numerical aspects of cohesive-zone models. *Engineering Fracture Mechanics*, 73 :160–177, 2006.
- [11] T. Elguedj, A. Gravouil, and A. Combescure. Appropriate extended functions for x-fem simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :501–515, 2006.
- [12] F. Erdogan and G.C. Sih. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of basic engineering*, 85 :519–525, 1963.
- [13] M. Fleming, Y.A. Chu, B. Moran, and T. Belytschko. Enriched element-free galerkin methods for singular fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :1483–1504, 1997.
- [14] A.G. Geffroy. *Modélisation numérique de la rupture de structures navales sous l'effet d'explosions au contact*. PhD thesis, Université de Bretagne Sud, 2010.
- [15] A.G. Geffroy, P. Longère, and B. Leblé. Fracture analysis and constitutive modelling of ship structure steel behaviour regarding explosion. *Engineering Failure Analysis*, 18 :670–681, 2011.
- [16] S. Geniault. *Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2006.
- [17] M. Gologanu, J.B. Leblond, and J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids-case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :1723–1754, 1993.
- [18] S. Graff, S. Forest, S. Strudel, J.L. Prioul, P. Pilvin, and J.L. Béchade. Strain localization phenomena associated with static and dynamic strain ageing in notched specimens : experiments and finite element simulations. *Materials Science and Engineering*, pages 181–185, 2004.

- [19] A. Gravouil, N. Moes, and T. Belytschko. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets-part ii : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53 :2569–2586, 2002.
- [20] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part i - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 :2–15, 1977.
- [21] D. Haboussa, T. Elguedj, B. Leblé, and A. Combescure. Simulation of the shear-tensile mode transition on dynamic crack propagation. *International Journal of Fracture*, 178 :195–213, 2012.
- [22] D. Haboussa, D. Grégoire, T. Elguedj, H. Maigre, and A. Combescure. X-fem analysis of the effects of holes or other cracks on dynamic crack propagations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86 :618–636, 2011.
- [23] R. Hambli. Comparison between Lemaitre and Gurson damage models in crack growth simulation during blanking process. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43 :2769–2790, 2001.
- [24] R. Hill. Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10 :1–16, 1962.
- [25] A.E. Huespe, A. Needleman, J. Oliver, and P.J. Sanchez. A finite thickness band method for ductile fracture analysis. *International Journal of Plasticity*, 25 :2349–2365, 2009.
- [26] J.W. Hutchinson. Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16 :13–31, 1968.
- [27] M. Jirasek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 :307–330, 2000.
- [28] G.R. Johnson and W.H. Cook. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains , strain rates, temperatures and pressures. *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 21 :21–48, 1985.

- [29] L.M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Izv. Akad. Nauk. S.S.R. Otd. Tech. Nauk.*, 8 :26–31, 1958.
- [30] M. Kanninen and C.H. Popelar. Advanced fracture mechanics. In *Oxford University Press*, 1985.
- [31] P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard, and M. Salaun. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64 :354–381, 2005.
- [32] J. Lasry. *Calculs de plaques fissurées en flexion avec la méthode des éléments finis étendue (XFEM)*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2009.
- [33] G. Legrain. *Extension de l’approche X-FEM aux grandes transformations pour la fissuration des milieux hyperélastiques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2006.
- [34] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107 :83–89, 1985.
- [35] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. DUNOD, 2001.
- [36] W.B. Lievers, A.K. Pilkey, and M.J. Worswick. The co-operative role of voids and shear bands in strain localization during bending. *Mechanics of Materials*, 35 :661–674, 2003.
- [37] P. Longère and A. Dragon. Inelastic heat fraction evaluation for engineering problems involving dynamic plastic localization phenomena. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 4 :319–349, 2009.
- [38] P. Longère and A. Dragon. Description of shear failure in ductile metals via back stress concept linked to damage-microporosity softening. *Engineering Fracture Mechanics*, 98 :92–108, 2013.
- [39] P. Longère, A.G. Geffroy, B. Leblé, and A. Dragon. Modelling the transition between dense metal and damaged (micro-porous) metal viscoplasticity. *International Journal of Damage Mechanics*, 21 :1020–1063, 2012.

- [40] J.M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :289–314, 1996.
- [41] N. Moes, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [42] N. Moes, A. Gravouil, and T. Belytschko. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets-part i : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53 :2549–2568, 2002.
- [43] A. Molinari. Collective behavior and spacing of adiabatic shear bands. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45 :1551–1575, 1997.
- [44] K. Nahshon and J.W. Hutchinson. Modification of the gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27 :1–17, 2008.
- [45] A. Needleman and J. Rice. Limits to ductility set by plastic flow localization. In *Koistinen, D.P. (Ed.), Mechanics of Sheet Metal Forming ? Plenum Publishing Corporation, New-York*, 1978.
- [46] J. Oliver, A.E. Huespe, M.D.G. Pulido, and E. Samaniego. On the strong discontinuity approach in finite deformation settings. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56 :1051–1082, 2003.
- [47] J. Oliver, A.E. Huespe, and E. Samaniego. A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56 :2135–2161, 2003.
- [48] J. Oliver, A.E. Huespe, and P.J. Sanchez. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities : E-fem vs x-fem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 195 :4732–4752, 2006.
- [49] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 61 :189–214, 1987.

- [50] P.C. Paris. The fracture mechanics approach to fatigue. In *In Fatigue : An interdisciplinary Approach*. Syracuse University Press, 1964.
- [51] P. Perzyna. Stability of flow processes for dissipative solids with internal imperfections. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 35 :848–867, 1984.
- [52] P. Pourmodheji and M. Mashayekhi. Improvement of the extended finite element method for ductile crack growth. *Materials Science and Engineering*, 551 :255–271, 2012.
- [53] B. Prabel, A. Combescure, A. Gravouil, and S. Marie. Level set x-fem non-matching meshes : Application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69 :1553–1569, 2007.
- [54] J.R Rice. The localization of plastic deformation. In *Koiter, W. (Ed.). Amsterdam, North-Holland*, pages 207–220, 1976.
- [55] J.R Rice and G.F. Rosengren. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16 :1–12, 1969.
- [56] G. Rousselier. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design*, 105 :97–111, 1987.
- [57] J. Réthoré, A. Gravouil, and A. Combescure. A stable numerical scheme for the finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :4493–4510, 2004.
- [58] J. Réthoré, A. Gravouil, and A. Combescure. An energy conserving scheme for dynamic crack growth using extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :631–659, 2005.
- [59] M. Saje, J. Pan, and A. Needleman. Void nucleation effects on shear localization in porous plastic solids. Technical report, National Science Foundation, Division of Engineering, 1980.

- [60] P.J. Sanchez, A.E. Huespe, and J. Oliver. On some topics for the numerical simulation of ductile fracture. *International Journal of Plasticity*, 24 :1008–1038, 2008.
- [61] A. Seweryn and Z. Mroz. On the criterion of damage evolution for variable multiaxial stress states. *International Journal of Solids and Structures*, 35 :1589–1616, 1998.
- [62] M. Siavelis. *Modélisation numérique X-FEM de grands glissements avec frottement le long d'un réseau de discontinuités*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2011.
- [63] T. Strouboulis, I. Babuska, and K. Copps. The design and analysis of the generalized finite elements method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181 :43–69, 2000.
- [64] V. Tvergaard. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17 :389–407, 1981.
- [65] V. Tvergaard. On localization in ductile materials containing spherical voids. *International Journal of Fracture*, 18 :237–252, 1982.
- [66] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32 :157–169, 1984.
- [67] J. Mediavilla Varas. *Continuous and discontinuous modelling of ductile fracture*. PhD thesis, TU Eindhoven, 2005.
- [68] X.P. Xu and A. Needleman. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42 :1397–1434, 1994.
- [69] H. Yamamoto. Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials. *International Journal of Fracture*, 14 :347–365, 1978.
- [70] G. Zi and T. Belytschko. New crack-tip elements for xfm and applications to cohesive crack. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57 :2221–2240, 2003.





# Annexe A

## Résultats complémentaires

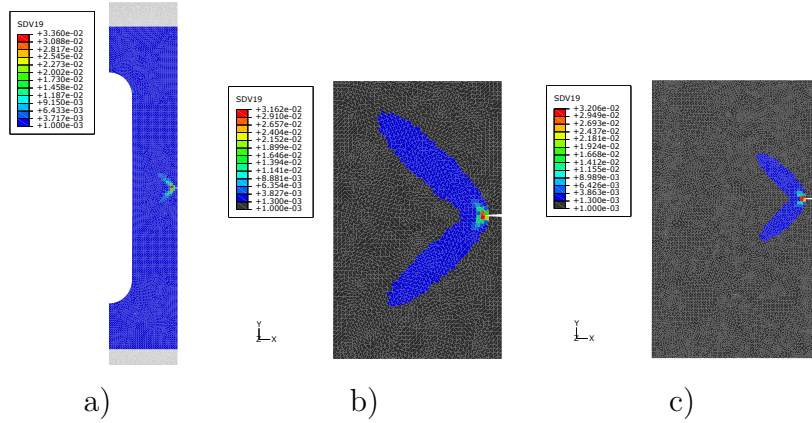


FIGURE A.1 – Représentation de la répartition de la porosité de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MFCRIT : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

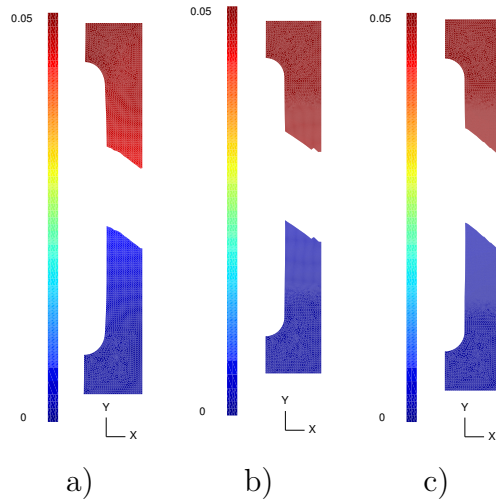


FIGURE A.2 – Champ de déplacement suivant Y de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

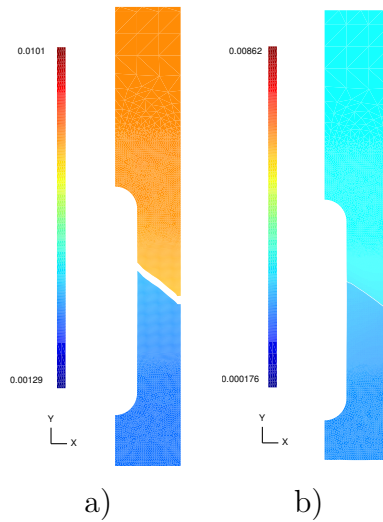


FIGURE A.3 – Champ de déplacement suivant Y de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MPUI et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3

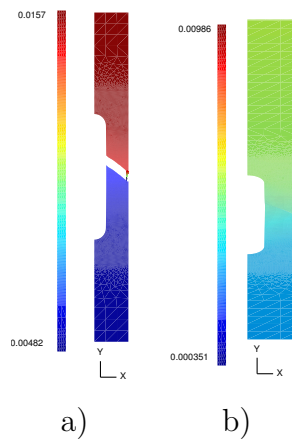
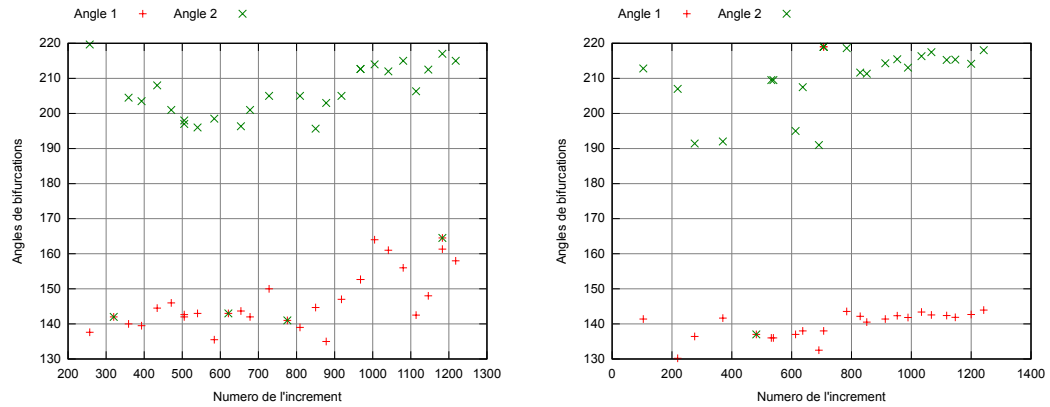
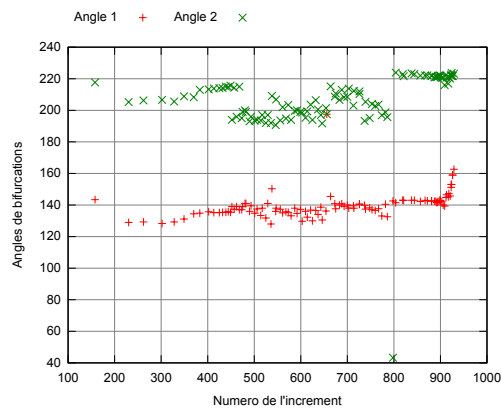


FIGURE A.4 – Champ de déplacement suivant Y de l'éprouvette lisse entaillée dans le cas du chargement dynamique avec la MPUI et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3



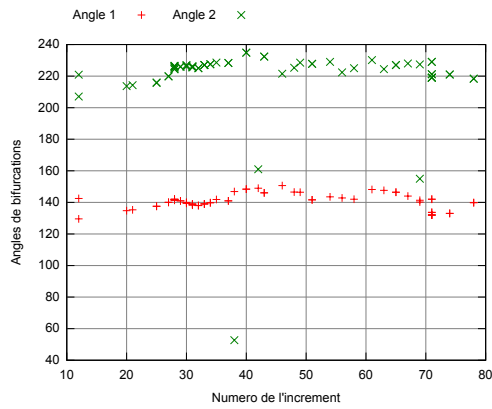
a)

b)

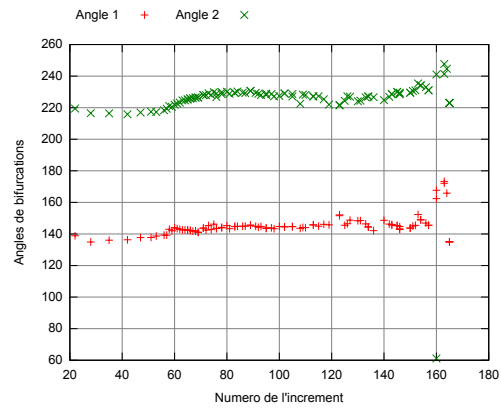


c)

FIGURE A.5 – Angles par rapport à X de propagation potentiels de fissuration dans le cas de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

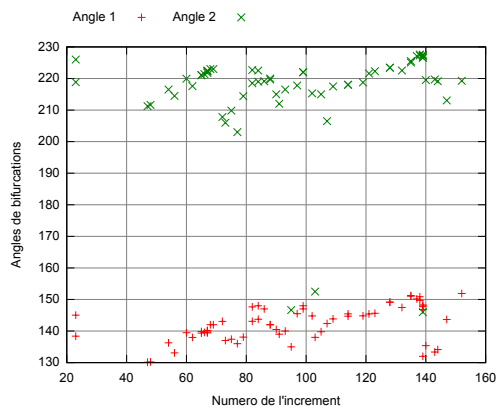


a)

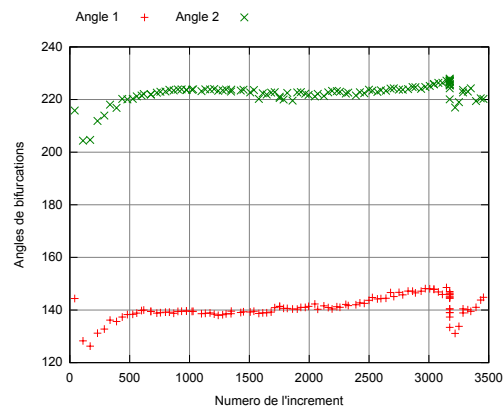


b)

FIGURE A.6 – Angles par rapport à X de propagation potentiels de fissuration de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MPUI et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3



a)



b)

FIGURE A.7 – Angles par rapport à X de propagation potentiels de fissuration de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MPUI et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3

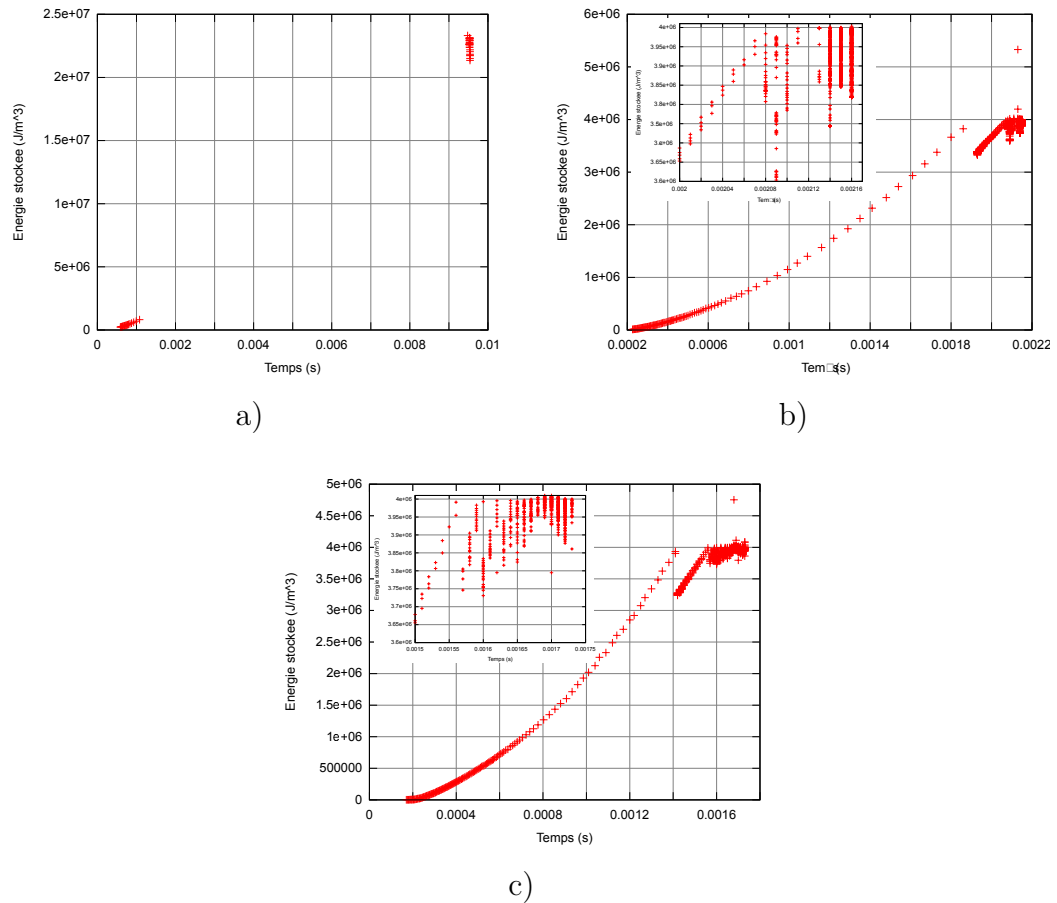


FIGURE A.8 – Evolution de l'énergie stockée de l'éprouvette plate entaillée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 4 \text{ MJ/m}^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

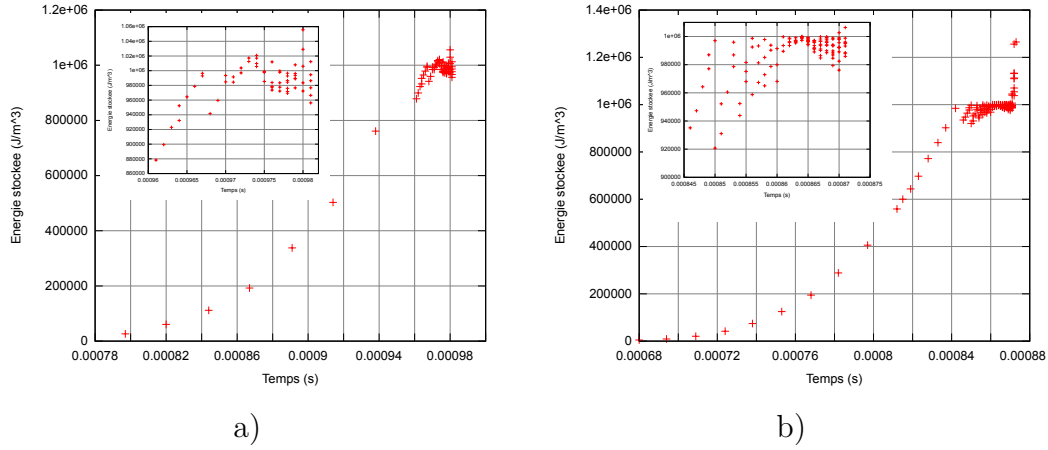


FIGURE A.9 – Evolution de l'énergie stockée de l'éprouvette plate entaillée dans le cas du chargement rapide avec la MPUI et  $W_c = 1MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3

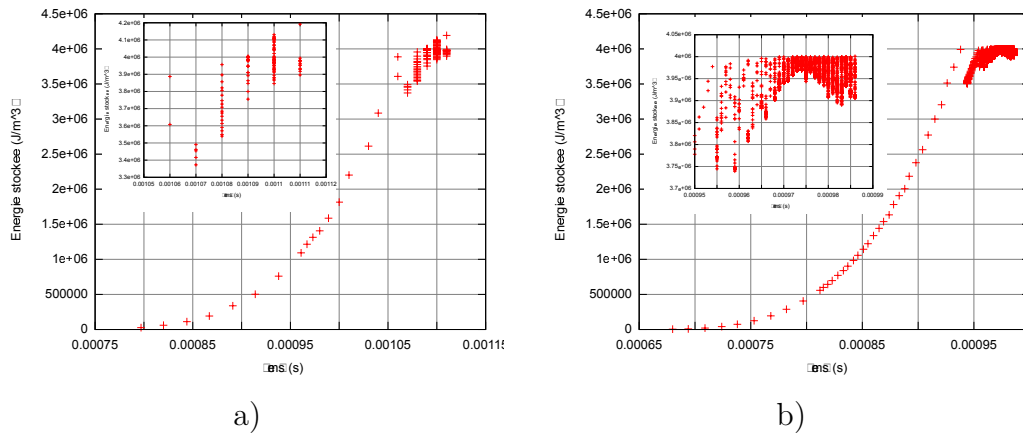


FIGURE A.10 – Evolution de l'énergie stockée de l'éprouvette plate entaillée dans le cas du chargement rapide avec la MPUI et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3



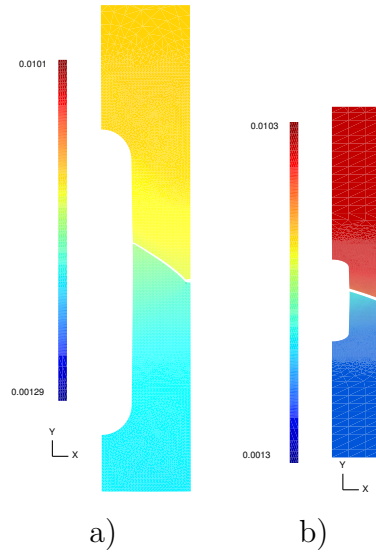


FIGURE A.11 – Champ de déplacement suivant Y de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MCVF et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3

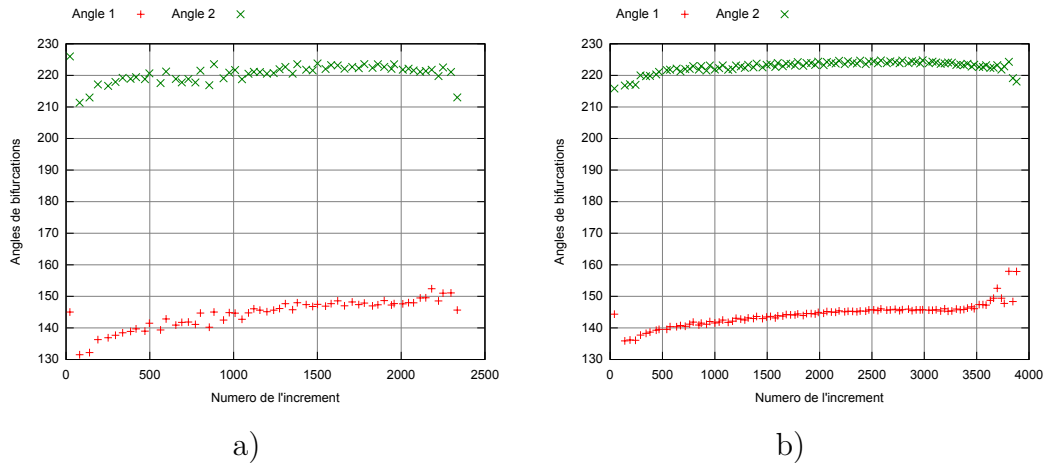


FIGURE A.12 – Angles par rapport à X de propagation potentiels de fissuration de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MCVF et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3

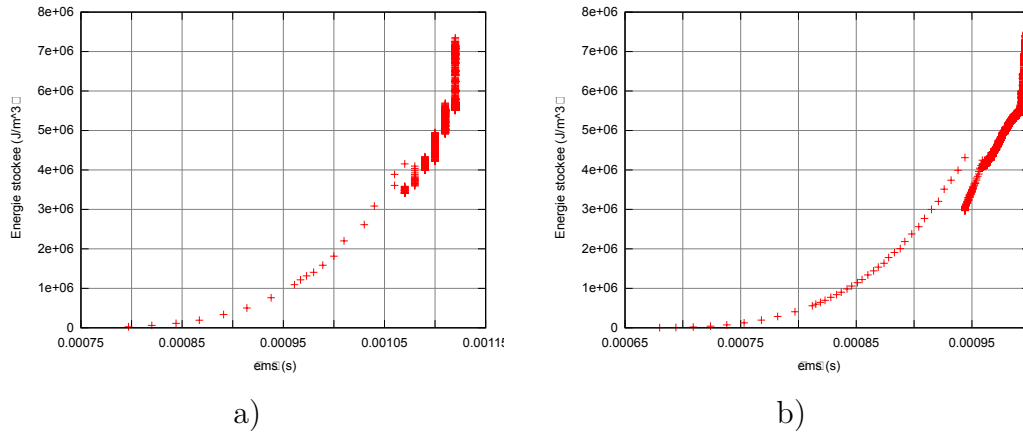


FIGURE A.13 – Evolution de l'énergie stockée de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MCVF et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 2 et b) Maillage 3

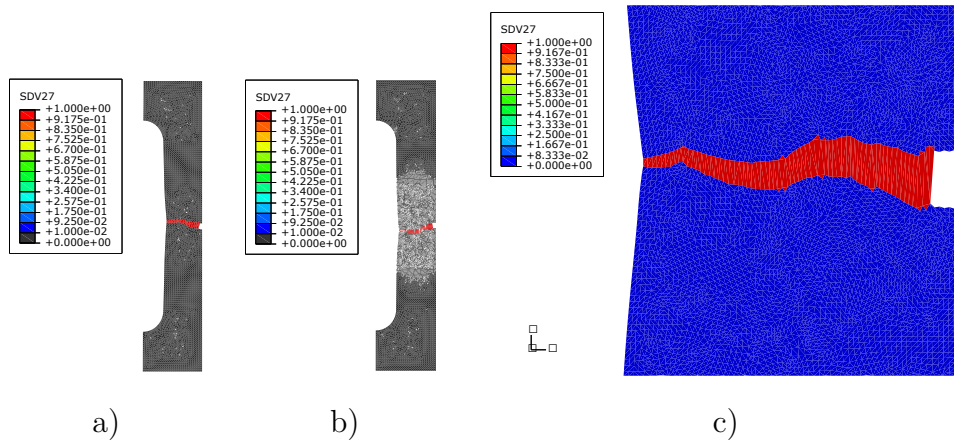


FIGURE A.14 – Angle de propagation de la fissure de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT et  $f_c = 0.1$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

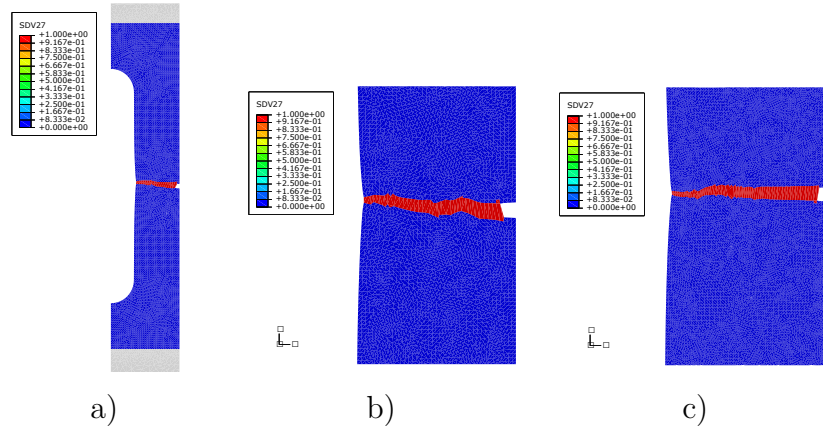


FIGURE A.15 – Angle de propagation de la fissure de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MFCRIT et  $f_c = 0.03$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

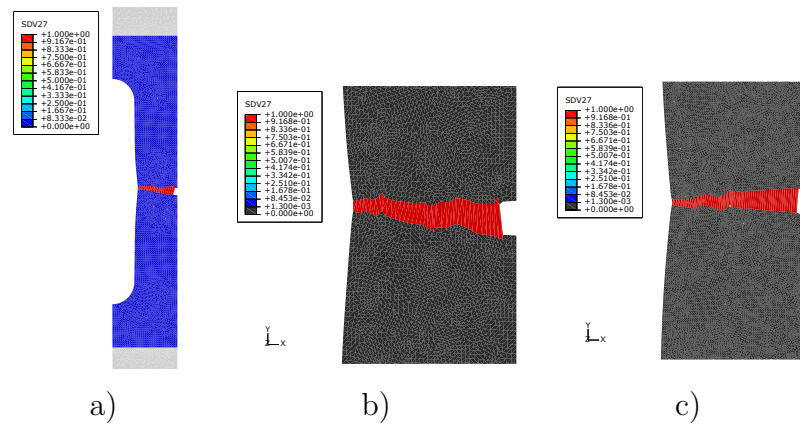


FIGURE A.16 – Angle de propagation de la fissure de l'éprouvette plate fissurée dans le cas du chargement rapide avec la MFCRIT et  $f_c = 0.1$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

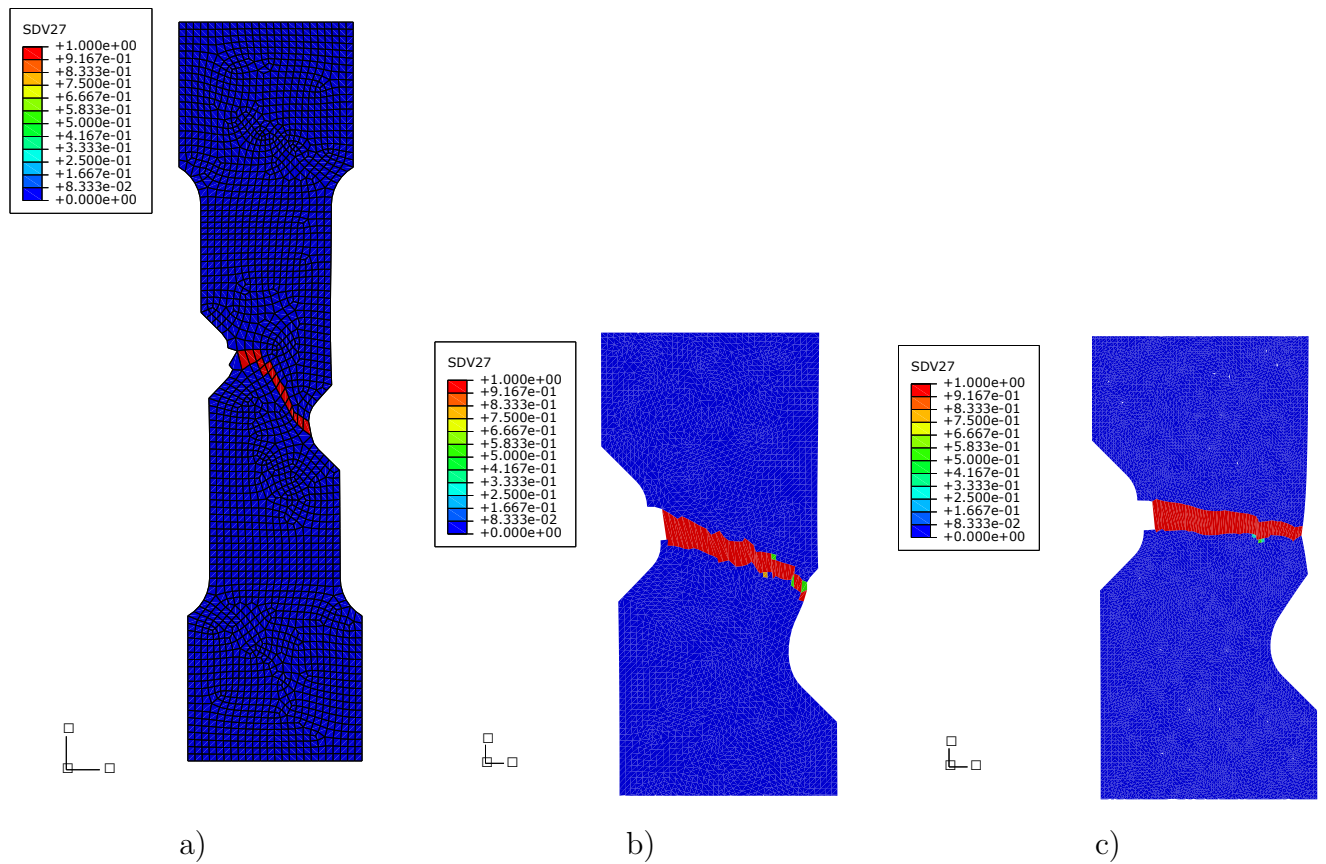


FIGURE A.17 – Angle de propagation de la fissure de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT et  $f_c = 0.1$   
: a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

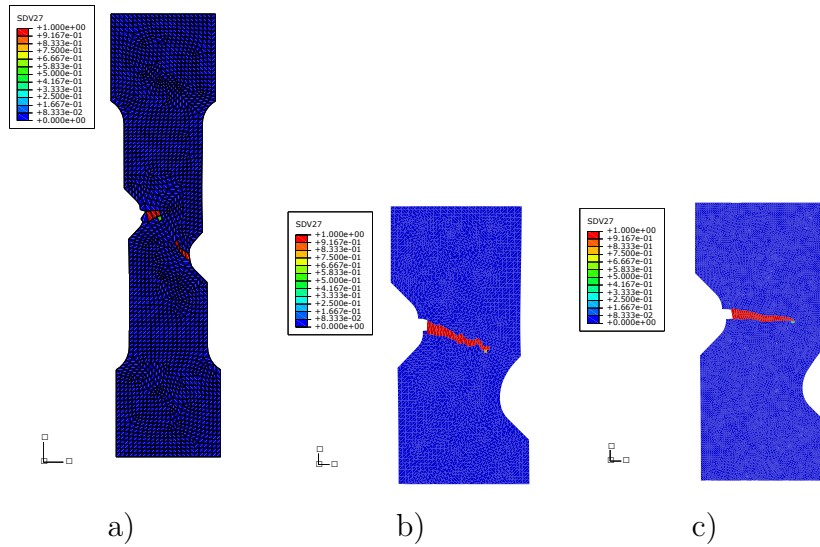


FIGURE A.18 – Direction de propagation de la fissure de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MFCRIT et  $f_c = 0.1$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

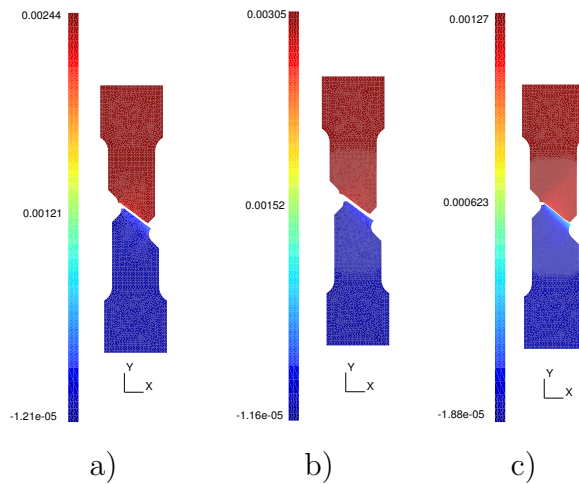
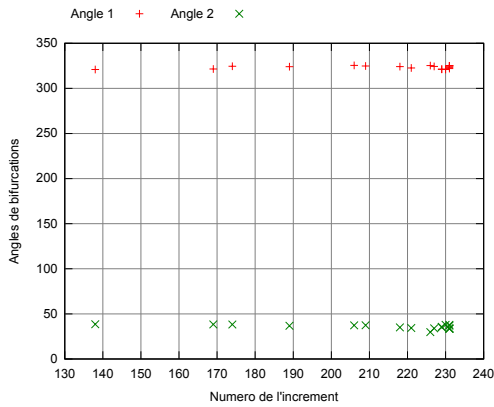
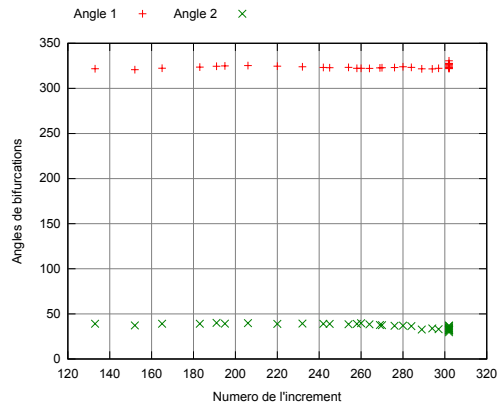


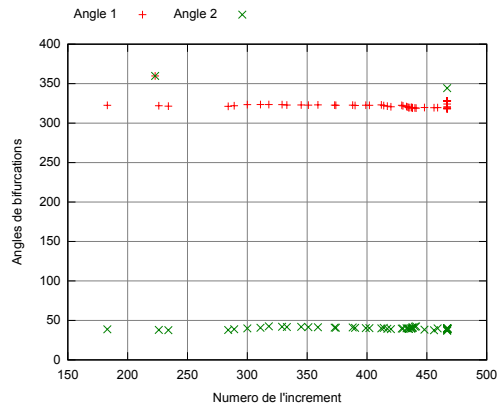
FIGURE A.19 – Champ de déplacement suivant Y de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3



a)



b)



c)

FIGURE A.20 – Angles par rapport à X de propagation potentiels de fissuration de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 4MJ/m^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3

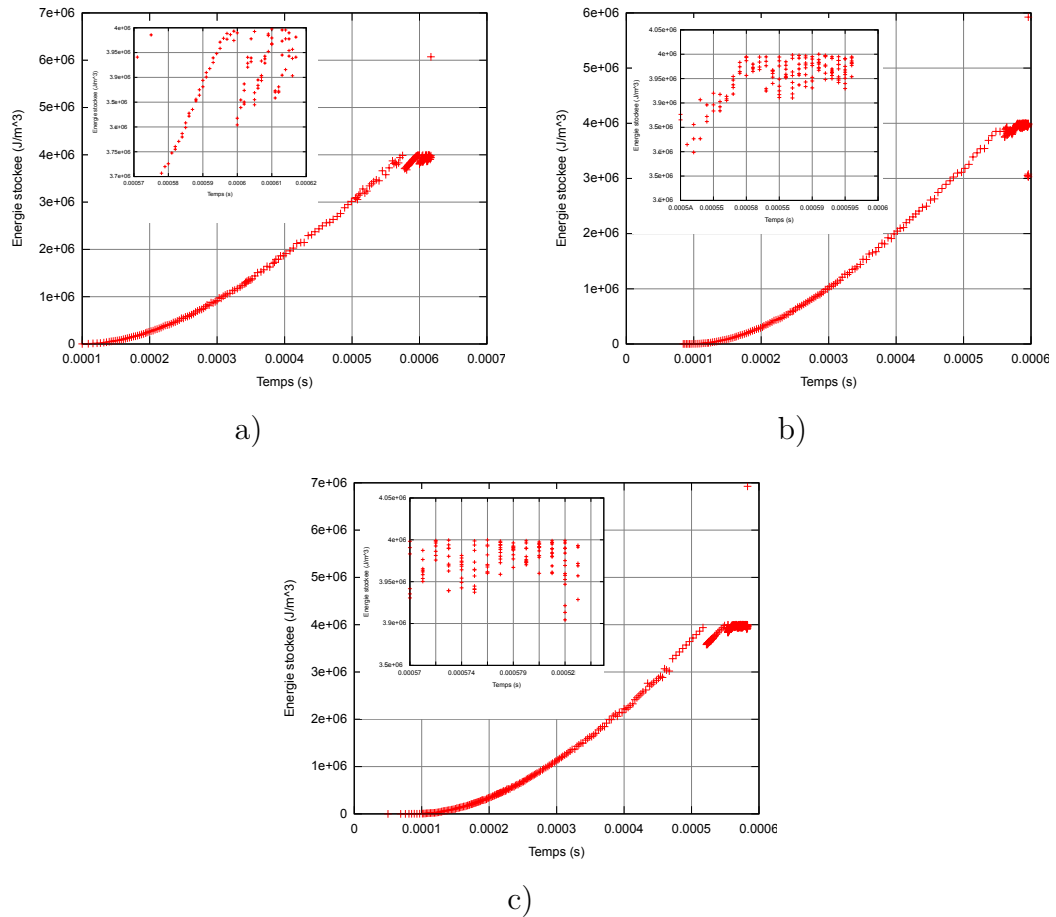


FIGURE A.21 – Evolution de l'énergie stockée de l'éprouvette à deux entailles asymétriques fissurée dans le cas du chargement lent avec la MPUI et  $W_c = 4 \text{ MJ/m}^3$  : a) Maillage 1, b) Maillage 2 et c) Maillage 3