



Contrôle des écoulements par modèles d'ordre réduit, en vue de l'application à la ventilation naturelle des bâtiments

Alexandra Tallet

► To cite this version:

Alexandra Tallet. Contrôle des écoulements par modèles d'ordre réduit, en vue de l'application à la ventilation naturelle des bâtiments. Autre. Université de La Rochelle, 2013. Français. NNT : 2013LAROS408 . tel-01071576

HAL Id: tel-01071576

<https://theses.hal.science/tel-01071576>

Submitted on 6 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

Ecole Doctorale Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Energétique et
Aéronautique (SI-MMEA)

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université de La Rochelle
Discipline : Mécanique des Fluides

Présentée par

Alexandra TALLET

**Contrôle des écoulements par modèles d'ordre réduit, en
vue de l'application à la ventilation naturelle des bâtiments**

Thèse dirigée par Francis ALLARD et Cyrille ALLERY

Soutenue le 8 avril 2013

JURY :

Daniel PETIT	Professeur	ENSMA, Chasseneuil-du-Poitou	Président du jury
Alain BASTIDE	Professeur	PIMENT, Université de la Réunion	Rapporteur
Elena PALOMO	Professeur	TREFLE, Université de Bordeaux	Rapporteur
Francis ALLARD	Professeur	LaSIE, Université de la Rochelle	Examineur
Cyrille ALLERY	Maître de conférences, HDR	LaSIE, Université de la Rochelle	Examineur
Amine AMMAR	Professeur	ENSAM, Angers	Examineur
Aziz HAMDOUNI	Professeur	LaSIE, Université de la Rochelle	Examineur
Cédric LEBLOND	Ingénieur-Docteur	DCNS Research, La Montagne	Examineur

Contrôle des écoulements par modèles d'ordre réduit, en vue de l'application à la ventilation naturelle des bâtiments

Résumé

Afin d'élaborer des stratégies de contrôle des écoulements en temps réel, il est nécessaire d'avoir recours à des modèles d'ordre réduit (ROMs), car la résolution des équations complètes est trop coûteuse en temps de calcul (des jours, des semaines) et en espace mémoire. Dans cette thèse, les modèles réduits ont été construits avec la méthode POD (*Proper Orthogonal Decomposition*). Une méthode de projection basée sur la minimisation des résidus, initiée par les travaux de Leblond et al. [134] a été proposée. Dans certaines configurations, la précision des résultats est significativement augmentée, par rapport à une projection de Galerkin classique. Dans un second temps, un algorithme d'optimisation non-linéaire, à direction de descente basée sur la méthode des équations adjointes, a été couplé avec des modèles réduits utilisant des bases POD. Deux méthodes de construction de base POD ont été employées : soit avec *un* paramètre (un nombre de Reynolds, ...), soit avec *plusieurs* paramètres (plusieurs nombres de Reynolds, ...). Les ROMs obtenus ont été utilisés pour contrôler la dispersion d'un polluant dans une cavité ventilée puis pour contrôler le champ de température dans une cavité entraînée différentiellement chauffée. Le contrôle est réalisé en temps quasi-réel et les résultats obtenus sont plutôt satisfaisants. Néanmoins, ces méthodes sont encore trop coûteuses en espace mémoire pour être aujourd'hui embarquées dans les boîtiers de contrôle utilisés dans le bâtiment. Une autre stratégie de contrôle, s'appuyant sur les contrôleurs actuels a ainsi été développée. Celle-ci permet d'obtenir la température (ainsi que la vitesse) dans la zone d'occupation du bâtiment, en utilisant une décomposition des champs par POD et un algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt. Elle a été validée sur une cavité différentiellement chauffée, puis appliquée sur une cavité ventilée 3D, proche d'un cas réel.

Mots clefs : Décomposition Orthogonale aux valeurs propres (POD), Modèles d'ordre réduit, Contrôle optimal des écoulements, Équations de Navier-Stokes, Ventilation naturelle

Flow control using reduced models, in order to its application in natural ventilation of buildings

Abstract

In order to control flows in real-time, it is necessary to resort to reduced-order models (ROMs) because the classical methods of simulations is too expensive in CPU time (several days, weeks) and memory storage. In this thesis, the ROMs have been built with the POD (Proper Orthogonal Decomposition) technique. First, a projection method based on the minimization of the equations residuals and established starting from the works of Leblond et al. [134] have been developed. In some cases, the results accuracy is significantly increased. Secondly, a direct descent optimization algorithm based on adjoint-equations has been coupled with POD/ROMs. Two construction methods of POD bases has been employed: either with simulations for *only one* parameter (one Reynolds number, ...), or with simulations for *several* parameters (several Reynolds numbers, ...). The obtained ROMs have been applied in order to control the pollutant dispersion and then to control the temperature field in a lid-driven cavity heated by the left. The control is realized in quasi-real time and the results are rather satisfying. Nevertheless, these methods are still too expensive in memory storage to be embedded in the current controllers. Thus, another control strategy has been proposed, using POD and an optimization algorithm (Levenberg-Marquardt). This one enables to obtain the temperature (and the velocity) in the occupation zone of the building and has been validated on the lid-driven cavity heated by the left and applied on a 3D-ventilated cavity, similar to a real case.

Keywords: Proper Orthogonal Decomposition (POD), Reduced Order Model (ROM), Optimal flow control, Navier-Stokes equations, Natural ventilation

Remerciements

C'est avec beaucoup de nostalgie et non sans difficulté que je m'apprête à écrire les dernières pages de ce manuscrit. Ces trois années ont été certes éprouvantes et parfois rudes, j'en garderais un très bon souvenir. J'ai pris mon temps pour écrire ces quelques lignes, car je pense que remercier toutes les personnes, qui ont de près ou de loin contribué à ces travaux, constitue une part importante de ce manuscrit.

En premier lieu, je remercie grandement mes deux directeurs de thèse, Mr Francis Allard et Mr Cyrille Allery. Merci d'avoir fait le pari qu'une "astrophysicienne" pouvait aussi s'intéresser à la POD et aux bâtiments ! J'ai vraiment apprécié de travailler avec vous pendant ces trois années. Un petit mot en particulier pour Cyrille qui m'a supporté (eh oui, je suis un peu têtue, mais des fois ça nous a été particulièrement utile !) quasiment tous les jours depuis octobre 2009. Merci pour ta gentillesse, ta patience, ta disponibilité.

Je remercie également Mr Karim Aït-Mokhtar de m'avoir accueilli au laboratoire LaSIE (anciennement LEPTIAB) durant ces trois années.

Je remercie Mme Elena Palomo Del Barrio et Mr Alain Bastide de m'avoir fait l'honneur de rapporter ces travaux, ainsi que le président du jury Mr Daniel Petit, Mr Amine Ammar, Mr Aziz Hamdouni et Mr Cédric Leblond d'avoir accepté d'examiner ces travaux de thèse.

Merci également à Erwan Liberge, avec qui j'ai partagé mon bureau au tout début de cette thèse, pour ton aide sur la POD, Python, Ymir, Code_Saturne et j'en passe. C'est grâce à toi que j'ai découvert que oui en Linux les packages s'installent automatiquement, plus besoin de faire ça en lignes de commande ! Un merci particulier à Antoine Dumon pour avoir toujours répondu à mes innombrables questions et qui m'a aussi fait découvrir Paraview. Coluchette n'oubliera pas son surnom ... J'ai également une pensée vers tous les membres permanents et non-permanents du LaSIE : professeurs, maîtres de conférence, post-docs, stagiaires, ingénieurs, techniciens, gestionnaires, ... et vers tous les doctorants et docteurs, le paragraphe suivant vous est consacré.

Je remercie tous les membres successifs du bureau 150A (entre autres pour avoir supporter mes conversations interminables avec mon ordinateur) : Nissrine (on a réussi!!!), Mireille et Kevin (rappel : le goûter est à 16h30 !), Malek (on se retrouve à la coupe du monde), Jean-Louis ("si personne ne t'applaudit, applaudis-toi toi-même"), Lisa (notre belle indonésienne), notre nouvelle arrivante Rayan, sans oublier Nazir qui est parti voler vers d'autres horizons depuis quelques temps déjà ... Je n'oublie pas non plus les autres doctorants qui ont participé à cette

aventure (par ordre alphabétique) : Abderrahmane, Adrien G. (que dire ? merci pour tout, les gâteaux, les innombrables Mc Do et tant de choses encore), Antoine M. ("ça casse pas quatre briques à un canard"), Aubin, Axel, Boris, Camille, Kamilia, Ibrahim, Issa, Juslin, Luc, Mahfoud, Marie (on est marqué à vie par Code_Saturne et par Besançon aussi ...), Massi, Marx (et Laura et Marion), Max (ma caricature "trône" à côté de celle d'Adrien), Pierre (& Lolo aussi, tu fais un peu partie du LaSIE toi aussi), Rabah, Rémy (je louche toujours sur ton robot-aspirateur), Salah, Thomas, Vincent, ... et tous ceux que je n'ai pas cité ... MERCI. Et courage à tous ceux qui n'ont pas encore soutenu.

Merci à mes amis et à mon entourage, qui pour certains ne m'ont pas beaucoup vue ces dernières années, mais à qui j'ai beaucoup pensé ... À vous, amis de Boisseuil, de Limoges, de Nice, de Toulouse, de La Rochelle et même de Tahiti.

Je tiens également à remercier ma famille (et ma belle-famille). Ces trois dernières années ont été particulièrement prenantes et intenses et je ne vous ai pas consacré le temps que j'aurais voulu. En particulier, je remercie mes parents qui m'ont toujours épaulée et encouragée, même dans mes choix les plus fous ... Sans vous, tout ça n'aurait pas été possible.

Enfin, les tous derniers mots de ce manuscrit iront à Adrien, qui m'a donné son soutien, son courage et son amour au quotidien. Merci à toi pour tes encouragements, ta patience, tes bons petits plats, tes blagues aussi ... Tu as sans doute plus cru en moi que moi-même ...

La vie de thésard est toujours particulière, mais la vie d'un couple de thésards l'est d'autant plus. Le chapitre de nos thèses est à présent terminé et un nouveau chapitre (le plus beau je pense) est déjà sur le point de s'écrire.

À La Rochelle, le 3 décembre 2013

*À mes parents,
À Adrien et à notre petit bout*

Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciements	v
Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xix
Introduction générale	1
1 Ventilation naturelle	5
1.1 Introduction	6
1.2 Avant-propos sur la ventilation naturelle	6
1.3 Moteurs de la ventilation naturelle	8
1.3.1 Effet du vent	8
1.3.2 Tirage thermique	8
1.4 Stratégies de ventilation naturelle	10
1.4.1 Ventilation naturelle à simple exposition	10
1.4.2 Ventilation naturelle traversante	10
1.4.3 Rafraîchissement nocturne	11
1.5 Confort thermique dans les climats chauds	12
1.5.1 En climat tropical	12
1.5.2 En climat méditerranéen	14
1.5.3 Synthèse de la section	15
1.6 Modélisation de la ventilation naturelle	16
1.6.1 Modèles empiriques	16
1.6.2 Modèles monozones	16
1.6.3 Modèles multizones	16
1.6.4 Modèles zonaux	18
1.6.5 Modèles CFD	19

1.7	Conclusion du chapitre et positionnement du sujet	22
2	Contrôle optimal d'écoulement	23
2.1	Introduction	24
2.2	Problème de contrôle optimal	26
2.2.1	Principe	26
2.2.2	Régularisation	27
2.2.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	27
2.3	Algorithmes d'optimisation à direction de descente, basés sur le gradient	30
2.3.1	Généralités	30
2.3.2	Application à un problème de contrôle optimal d'écoulement	31
2.3.3	Détermination du gradient de la fonctionnelle objectif	32
2.4	Méthodes de recherche linéaire	34
2.4.1	Règles d'Armijo et de Goldstein	34
2.4.2	Règle de Wolfe	35
2.5	Écriture du problème optimal associé à notre étude	35
2.6	Conclusion du chapitre	39
3	Réduction de modèles	41
3.1	Introduction	42
3.2	Réduction de modèles	43
3.2.1	Méthode de troncature équilibrée	43
3.2.2	Décomposition de Voronoï (CVT)	45
3.2.3	Méthodes à paramètres variables	46
3.2.4	Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)	47
3.2.5	Avant-propos sur la POD	48
3.2.6	Limitations des méthodes <i>a posteriori</i>	48
3.3	Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD)	49
3.3.1	Formulation	49
3.3.2	Propriétés de la base POD	50
3.3.3	Méthode POD/Snapshots	50
3.4	POD/ROM obtenu par projection de Galerkin	52
3.4.1	Généralités	52
3.4.2	Construction du modèle d'ordre réduit	53
3.4.3	Méthodes de stabilisation de la POD/Galerkin	54
3.4.4	Traitement du terme de pression	55
3.5	POD/ROM obtenu par projections basées sur la minimisation des résidus	56
3.5.1	MRP1	58
3.5.2	MRP2	60
3.6	Applications	63
3.6.1	Application au cas d'une cavité ventilée isotherme avec polluant	63
3.6.2	Écoulement autour d'un cylindre à bas nombre de Reynolds	71
3.7	Conclusion du chapitre	84

4	Problème de contrôle optimal d'écoulement sous contraintes réduites	85
4.1	Introduction	86
4.2	Problème d'optimisation sous forme réduite	87
4.2.1	Formulation	87
4.2.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	88
4.3	Formulation avec des bases POD construites avec un paramètre	92
4.3.1	Décomposition du champ de vitesses avec la fonction de contrôle	92
4.3.2	Équations de contraintes réduites	92
4.3.3	Équations adjointes réduites	93
4.3.4	Condition d'optimalité	94
4.3.5	Dispersion d'un polluant dans une cavité ventilée	95
4.3.6	Cavité entraînée différentiellement chauffée	100
4.4	Formulation avec des bases POD construites avec plusieurs paramètres	108
4.4.1	Contrôle sur le nombre de Reynolds	108
4.4.2	Contrôle sur le nombre de Reynolds et le nombre de Grashof	128
4.5	Conclusion du chapitre	143
5	Vers le cas réel d'un bâtiment	145
5.1	Introduction	146
5.2	Stratégie de contrôle proposée	147
5.2.1	Procédure "offline"	147
5.2.2	Procédure "online"	148
5.3	Algorithme de Levenberg-Marquardt	151
5.3.1	Algorithme de Newton	151
5.3.2	Algorithme de Gauss-Newton	152
5.3.3	Algorithmes de Levenberg-Marquardt	153
5.4	Cas test : cavité entraînée différentiellement chauffée	154
5.4.1	Description du cas	155
5.4.2	Construction de la base de données	155
5.4.3	Construction des bases POD	155
5.4.4	Détermination de la zone de contrôle et des points de mesure	156
5.4.5	Procédure d'optimisation	157
5.5	Cavité ventilée 3D	159
5.5.1	Description du cas	162
5.5.2	Construction de la base de données	163
5.5.3	Construction des bases POD	164
5.5.4	Détermination de la zone d'occupation et des points de mesure	164
5.5.5	Procédure d'optimisation	168
5.6	Conclusion du chapitre	175
	Conclusion générale	177

Annexes	181
A Description de la classification des climats de Köppen	182
B Confort thermique	183
B.1 Échanges thermiques entre le corps humain et son environnement	184
B.2 Indices de confort thermique	186
C Contrôle linéaire optimal	191
C.1 Définition du système d'état	191
C.2 Propriétés des systèmes d'état	191
C.3 Contrôle LQR	193
C.4 Filtre de Kalman	195
C.5 Contrôle LQG	198
C.6 Théorie du contrôle sur $\mathcal{H}_\infty$ ou Contrôle robuste	200
D Formulation de la Projection de Galerkin associée à une équation de Poisson	204
E Formulation du problème d'optimisation avec un ROM/MRP2	207
E.1 Modèle réduit	207
E.2 Problème d'optimisation réduit	208
Bibliographie	213

Table des figures

1.1	(a) Schéma de l'effet du vent sur un bâtiment, extrait de [177] ; (b) Schéma de l'effet du tirage thermique sur un bâtiment, extrait de [59] ; (c) Schéma des effets combinés du vent et du tirage thermique sur un bâtiment, extrait de [177].	9
1.2	Principe de la ventilation à simple exposition.	10
1.3	Principe de la ventilation traversante.	11
1.4	Exemples de solutions architecturales : conduit (à gauche), atrium (au milieu) et double peau (à droite), extrait de [47].	11
1.5	Zone de confort en climat tropical humide, extrait du guide sur la climatisation naturelle de l'habitat en climat tropical humide [86].	13
1.6	Illustration de la modélisation monozone, extraite de Mora [149].	17
1.7	Illustration de la modélisation multizone, extraite de Mora [149].	17
1.8	Illustration de la modélisation zonale, extraite de Mora [149].	18
1.9	Illustration de la modélisation CFD, extraite de Mora [149].	19
2.1	Schéma de la pièce considérée.	36
2.2	Algorithme de contrôle.	38
3.1	Conditions aux limites de la cavité ventilée étudiée.	64
3.2	Écoulement et dispersion du polluant aux instants $t = 1, 2, 3, 4, 5$ et 10 dans la cavité ventilée isotherme.	65
3.3	Isocontours des champs de pression pour les temps $t = 1, 2, 3, 4$ et 10, dans le cas de la cavité ventilée isotherme.	65
3.4	(a) "Energie" en fonction du nombre de modes pour la cavité ventilée isotherme ; (b) Erreur en fonction du nombre de modes pour la cavité ventilée isotherme.	66
3.5	Modes POD du champ de vitesses pour la cavité ventilée isotherme.	67
3.6	Modes POD du champ de concentration pour la cavité ventilée isotherme.	67
3.7	Modes POD du champ de pression pour la cavité ventilée isotherme.	67
3.8	(a) et (b) Lignes de courant de vitesses respectivement obtenus avec le modèle complet et le modèle réduit ROM/Galerkin ; (c) et (d) Isocontours de concentration respectivement obtenus avec le modèle complet et le modèle réduit ROM/Galerkin ; aux temps $t = 1, 2, 3, 4$ et 10, dans le cas de la cavité ventilée isotherme.	69

3.9	Erreur sur les champs de vitesses et de concentration entre les modèles complet et réduit utilisant la projection de Galerkin, en fonction du temps, pour la cavité ventilée isotherme. .	70
3.10	Erreur sur les champs de vitesses, de concentration et de pression entre les modèles complet et réduit utilisant la projection MRP1 (a) et la projection MRP2 (b), en fonction du temps, pour la cavité ventilée isotherme.	71
3.11	(a) Conditions aux limites de l'écoulement autour du cylindre circulaire; (b) Système de coordonnées utilisé.	72
3.12	(a) Maillage total du domaine fluide; (b) Zoom sur la partie entourant le cylindre.	73
3.13	Vorticité (haut) et isobars (bas) aux temps $t = t_0, T/4$ et $T/2$, de l'écoulement autour du cylindre obtenus avec Code_Saturne.	73
3.14	Magnitude des modes POD de vitesses, dans le cas de l'écoulement autour du cylindre. . .	75
3.15	Isocontours des modes POD de pression, dans le cas de l'écoulement autour du cylindre. . .	76
3.16	Erreur de reconstruction en fonction du nombre de modes; dans le cas de l'écoulement autour du cylindre.	76
3.17	Évolution temporelle de la norme au carré de L^2 du résidu des équations de quantité de mouvement $\mathcal{R}^u$ obtenu pour chaque modèle réduit : (a) pour le temps d'échantillonnage (2T); (b) pour des temps longs (20T).	77
3.18	Erreur en fonction du temps sur le champ de vitesses entre le modèle complet et les différents modèles réduits construits avec : (a) la projection de Galerkin (PG), la projection de Galerkin avec équation de Poisson (PGP), MRP1 et MRP2, sur la période d'échantillonnage; (b) Même figure sans la projection de Galerkin.	78
3.19	Erreur en fonction du temps sur le champ de pression entre le modèle complet et les différents modèles réduits construits avec : la projection de Galerkin avec équation de Poisson (PGP), MRP1 et MRP2, sur la période d'échantillonnage.	79
3.20	Évolution temporelle du coefficient de traînée C_D et du coefficient de portance C_L obtenue avec le modèle complet et les modèles réduits, sur une période d'échantillonnage.	80
3.21	Évolution temporelle du coefficient de portance C_L obtenue avec le modèle complet et les modèles réduits, pour des temps longs.	81
3.22	Valeur moyenne en temps du coefficient de pression C_p en fonction de l'angle θ , provenant du modèle complet (FULL) et des modèles réduits.	82
3.23	Pression instantanée en fonction de l'angle θ , provenant du modèle complet (FULL) et des modèles réduits.	83
4.1	Algorithme de contrôle, utilisant les modèles réduits.	91
4.2	Conditions aux limites de la cavité ventilée étudiée.	95
4.3	(a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle. . .	97
4.4	Comparaison de l'écoulement et de la dispersion du polluant à cinq instants obtenus avec Code_Saturne (référence) et ceux issus de l'algorithme d'optimisation 4; (a) et (b) Lignes de courant de vitesses; (c) et (d) Isocontours de concentration.	98
4.5	Erreur entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et du modèle réduit issu de l'algorithme de contrôle.	99

4.6	<i>Erreur relative entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et du modèle réduit initialisant l'algorithme de contrôle, pour chaque paramètre de contrôle initial.</i>	99
4.7	<i>Conditions aux limites de la cavité entraînée étudiée.</i>	101
4.8	<i>Lignes de courant dans la cavité entraînée étudiée, obtenues avec Code_Saturne, aux instants $t = 1, 3, 5$ et 15.</i>	102
4.9	<i>Isocontours de température dans la cavité entraînée étudiée, obtenues avec Code_Saturne, aux instants $t = 1, 3, 5$ et 15.</i>	102
4.10	<i>(a) "Energie" en fonction du nombre de modes ; (b) Erreur de reconstruction POD pour la cavité entraînée différentiellement chauffée étudiée.</i>	103
4.11	<i>(a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle et (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle.</i>	104
4.12	<i>Comparaison de l'écoulement à trois instants obtenus avec Code_Saturne (référence) et ceux issus de l'algorithme d'optimisation 4 ; (a) et (b) Lignes de courant de vitesses ; (c) et (d) Isocontours de température.</i>	105
4.13	<i>Erreur entre les champs de vitesses et de température obtenus avec le modèle complet et avec le modèle réduit issu de l'algorithme de contrôle.</i>	106
4.14	<i>Erreur entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et du modèle réduit, pour les champs initiant l'algorithme de contrôle.</i>	106
4.15	<i>Lignes de courant (vitesse adimensionnelle U/U_0), issues de Code_Saturne respectivement à $Re = 800 ; 1000 ; 1200$, aux temps $t = 1, 2, 3$ et 10.</i>	115
4.16	<i>Isocontours de concentration (adimensionnelle θ/θ_0), issus de Code_Saturne respectivement à $Re = 800 ; 1000 ; 1200$, aux temps $t = 1, 2, 3$ et 10.</i>	116
4.17	<i>Erreur entre les champs de vitesses et de concentration provenant du modèle complet et ceux issus du modèle réduit à $Re = 950$, pour chaque base POD utilisée (repérée ici par son numéro).</i>	117
4.18	<i>Erreur entre les champs de vitesses et de concentration provenant du modèle complet et ceux issus du modèle réduit à $Re = 1150$, pour chaque base POD utilisée (repérée ici par son numéro).</i>	118
4.19	<i>(a) Nombre de Reynolds en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle, pour le premier cas étudié $Re_{ini1} = 1150/Re_{cib1} = 950$ et pour chaque nombre de paramètre N_α composant la base POD.</i>	119
4.20	<i>(a) Paramètres de contrôle α en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle, pour le deuxième cas étudié $Re_{ini2} = 950/Re_{cib2} = 1150$ et pour chaque nombre de paramètre N_α composant la base POD.</i>	119
4.21	<i>(a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle.</i>	120
4.22	<i>Profils des champs de température et de vitesses, au centre de la cavité et au temps final.</i>	123
4.23	<i>Erreur entre les champs de vitesses et de température provenant du modèle complet et ceux issus du modèle réduit à $Re = 253$, pour chaque base POD utilisée (repérée ici par son numéro).</i>	124

4.24	Erreur entre les champs de vitesses et de température provenant du modèle complet et ceux issus du modèle réduit à $Re = 379$, pour chaque base POD utilisée (repérée ici par son numéro).	124
4.25	(a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle, pour le premier couple étudié $Re_{cib1} = 253/Re_{ini1} = 379$ et pour chaque nombre de paramètre N_α composant la base POD.	125
4.26	(a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle, pour le deuxième couple étudié $Re_{cib2} = 379/Re_{ini2} = 253$ et pour chaque nombre de paramètre N_α composant la base POD.	126
4.27	(a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle. . .	127
4.28	Profils des champs température et de vitesses, au centre de la cavité et au temps final. . . .	136
4.29	Erreurs relatives entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et du modèle réduit, en considérant les quatre configurations étudiées.	136
4.30	Profils des champs température et de vitesse cibles, au centre de la cavité et au temps final. .	138
4.31	Convergence de l'algorithme de contrôle utilisant deux paramètres de contrôle, dans le cas de la cavité entraînée différenciellement chauffée.	139
4.32	Profils des champs de température obtenus avec le modèle complet et avec le modèle réduit à la fin de l'algorithme de contrôle, au centre de la cavité, pour les combinaisons (de haut en bas) : $Re_{cib1} = 221 / Gr_{cib1} = 2.10^6$; $Re_{cib2} = 221 / Gr_{cib2} = 4.10^6$; $Re_{cib3} = 379 / Gr_{cib3} = 2.10^6$ et $Re_{cib4} = 379 / Gr_{cib4} = 4.10^6$	140
4.33	Profils des champs de vitesses obtenus avec le modèle complet et avec le modèle réduit à la fin de l'algorithme de contrôle, au centre de la cavité, pour les combinaisons (de haut en bas) : $Re_{cib1} = 221 / Gr_{cib1} = 2.10^6$; $Re_{cib2} = 221 / Gr_{cib2} = 4.10^6$; $Re_{cib3} = 379 / Gr_{cib3} = 2.10^6$ et $Re_{cib4} = 379 / Gr_{cib4} = 4.10^6$	141
5.1	Schéma de la pièce considérée.	148
5.2	Algorithme de contrôle : les grandeurs en rouge correspondent aux données à embarquer dans le contrôleur, en vert aux mesures, en bleu, aux grandeurs à calculer et en magenta aux paramètres à fixer par l'utilisateur.	150
5.3	Conditions aux limites de la cavité entraînée étudiée.	155
5.4	Schéma représentant la zone de contrôle et les points de mesure, dans la cavité entraînée différenciellement chauffée.	157
5.5	Comparaison des profils de température (gauche) et de vitesse horizontale (droite) dans la zone de contrôle, obtenus avec ceux issus du modèle complet, pour chaque configuration testée.	160
5.6	Différence de température entre la température obtenue et celle issue du modèle complet, pour chaque cible.	161
5.7	Géométrie et conditions aux limites de la cavité ventilée étudiée.	162
5.8	Isocontours de température obtenues avec Code_Saturne, pour chaque vitesse d'entrée d'air et température d'entrée d'air considérées dans la base de données.	165

5.9	<i>Lignes de courant obtenues avec Code_Saturne, pour chaque vitesse d'entrée d'air et température d'entrée d'air considérées dans la base de données.</i>	166
5.10	<i>Points de mesure dans la pièce et zone d'occupation matérialisée par le cube coloré intérieur.</i>	167
5.11	<i>(a) Température moyenne (en °C) dans la zone d'occupation en fonction de la configuration testée, (b) Erreur moyenne de la température moyenne (en °C) dans la zone d'occupation en fonction de la configuration testée.</i>	170
5.12	<i>Vitesse moyenne (en $m.s^{-1}$) dans la zone d'occupation en fonction de la configuration testée.</i>	170
5.13	<i>Isocontours de température dans la zone d'occupation, à $z = 0,5$, pour les configurations 1 à 4.</i>	171
5.14	<i>Isocontours de température dans la zone d'occupation, à $z = 0,5$, pour les configurations 5 à 8.</i>	172
5.15	<i>Lignes de courant dans la zone d'occupation, à $z = 0,5$, pour les configurations 1 à 4. . . .</i>	173
5.16	<i>Lignes de courant dans la zone d'occupation, à $z = 0,5$, pour les configurations 5 à 8. . . .</i>	174
B.17	<i>Interaction thermique entre le corps humain et son environnement.</i>	185
B.18	<i>Zones de confort d'après les travaux de Fauconnier (1 : agréable, 2 : légèrement désagréable, 3 : désagréable, 4 : très désagréable), extrait de [183].</i>	186

Liste des tableaux

1.1	Débits d'air extraits minimaux à atteindre dans le logement, en fonction de son nombre de pièces (Article 3, Arrêté du 24 mars 1982 relatif à l'aération des logements).	7
1.2	Études expérimentales menées sur le confort thermique en ambiance chaude et humide, pour des bâtiments ventilés naturellement (VN) et par air-conditionné (AC). (SI : Singapore Index, ECI : Equatorial Comfort Index, TSI : Tropical Summer Index, ET : Température Effective, HR : Humidité Relative, t_0 : température opérative).	13
1.3	Effets de la vitesse d'air sur le confort, tableau établi par Sangkertadi [183].	14
1.4	Effets de la vitesse d'air intérieur sur les températures du confort en fonction de l'humidité relative, pour une vêtue de 0,45 clo et une activité de 1,0 met, tableau établi par Ernest [77].	14
3.1	Valeurs propres de vitesse, de concentration et de pression en fonction du numéro du mode pour la cavité ventilée isotherme.	65
3.2	Tableau récapitulatif des différentes méthodes de projection utilisées en utilisant les notations des résidus des équations (Eqs 3.41 et 3.43).	71
3.3	Comparaison du nombre de Strouhal et des coefficients hydrodynamiques obtenus avec Code_Saturne et ceux issus de la littérature.	74
3.4	Valeurs propres et "énergie" (RIC) de vitesse et de pression en fonction du numéro de mode i , dans le cas de l'écoulement autour du cylindre.	74
3.5	Comparaison du temps de calcul sur un seul processeur, selon le modèle réduit utilisé, dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre.	77
3.6	Erreur moyennée en temps sur la pression pour chaque modèle réduit.	78
3.7	Comparaison du nombre de Strouhal et des coefficients hydrodynamiques issus du modèle complet et des modèles réduits : MRP2, MRP1 et projection de Galerkin, avec équation de Poisson (PGP), calculés sur des longs temps (40T).	80
4.1	Résumé de l'obtention du système optimal.	89
4.2	Erreurs moyennées en temps entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et du modèle réduit, pour les champs finaux c'est-à-dire les champs obtenus avec l'algorithme de contrôle $Re_{cib} = 1000$ et pour les champs initiaux $Re_{ini1} = 800$ et $Re_{ini2} = 1200$	100

4.3	Erreurs moyennées en temps entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et du modèle réduit, pour les champs finaux c'est-à-dire les champs obtenus avec l'algorithme de contrôle $Re_{cib} = 316$ et pour les champs initiaux $Re_{ini1} = 253$ et $Re_{ini2} = 379$	107
4.4	Classification des bases POD construites pour chaque nombre de paramètre Re_{POD} associé.	114
4.5	Erreur de reconstruction POD en vitesse et en concentration, pour chaque base POD considérée.	115
4.6	Erreur moyennée en temps entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et ceux obtenus avec le modèle réduit (définie par l'équation 4.20).	117
4.7	Comparaison des résultats obtenus avec les modèles réduits construits avec une base POD simple et une base POD mixte, en considérant les modèles réduits construits avec $Re_{ini1} = 800$, $Re_{ini2} = 1200$ et $Re_{cib} = 1000$	121
4.8	Classification des bases POD construites avec chaque paramètre Re_{POD} , correspondant à un nombre de Richardson Ri_{POD}	122
4.9	Erreurs moyennées en temps entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et ceux du modèle réduit, pour chaque base POD considérée.	123
4.10	Erreurs moyennées en temps entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et ceux obtenus par l'algorithme de contrôle, pour chaque base POD considérée.	126
4.11	Comparaison des résultats obtenus avec les modèles réduits construits avec une base POD simple et une base POD mixte, en considérant les modèles réduits construits avec $Re_{ini1} = 379$, $Re_{ini2} = 253$ et $Re_{cib} = 316$	128
4.12	Gamme de Reynolds et de Grashof étudiée (et donc de Richardson), composant la base POD.	135
4.13	Tableau récapitulatif des résultats obtenus en utilisant deux paramètres de contrôle, pour chaque configuration étudiée.	142
4.14	Estimation de l'espace mémoire nécessaire en fonction du nombres de modes POD de vitesses et de température conservés, en ASCII, pour chaque élément de l'algorithme de contrôle 6.	143
5.1	Nombres de Reynolds Re^{data} et de Grashof Gr^{data} (et nombre de Richardson correspondant), composant la base de données considérée, dans le cas de la cavité différentiellement chauffée.	156
5.2	Nombres de Reynolds Re et de Grashof Gr à atteindre par l'algorithme d'optimisation, dans le cas de la cavité différentiellement chauffée.	158
5.3	Tableau récapitulatif des résultats obtenus pour chaque Reynolds cible et Grashof cible, pour la cavité entraînée différentiellement chauffée.	158
5.4	Erreur moyenne en température et en vitesse, pour chaque Reynolds cible et Grashof cible, pour la cavité entraînée différentiellement chauffée.	159
5.5	Valeurs de la vitesse d'entrée d'air et de température d'entrée d'air constituant la base de données.	163
5.6	Erreur de reconstruction POD en vitesses et en température, en fonction du nombre de modes conservés.	167
5.7	Configurations testées.	168
5.8	Nombre d'itérations de l'algorithme d'optimisation, erreur moyenne en température et en vitesses, pour chaque configuration testée.	169

A.9	Classification des climats de Köppen-Geiger, extrait de [159].	182
B.10	Métabolisme en fonction de l'activité [15]	184
B.11	Valeurs de la v�ture (I_{cl}) en fonction de la tenue vestimentaire [15]	184
B.12	Correspondance entre SET^* , sensation et état physiologique, [143, 158]	188
B.13	Correspondance entre SET^* , TSENS et niveau de confort, [96]	188
B.14	Echelle numérique adimensionnelle pour l'ambiance chaude (DISC), [83]	189
B.15	Indices DISC selon les auteurs. ω représente la mouillure cutanée et D_s le débit sudoral. . .	189
B.16	Echelle de sensation thermique selon l'indice PMV	190
C.17	Analogie entre les différents paramètres du contrôle LQR et du filtre de Kalman KDF. . . .	198
C.18	Récapitulatif de la théorie de contrôle linéaire du régulateur LQR et du Filtre de Kalman. .	199
C.19	Récapitulatif de la théorie du contrôle linéaire sur $\mathcal{H}_2$	201
C.20	Récapitulatif de la théorie du contrôle linéaire sur $\mathcal{H}_\infty$	203

Introduction générale

Le secteur du bâtiment¹ (résidentiel et tertiaire) représente environ 44% de la consommation d'énergie finale en France (21% industrie, 32% transports) et est responsable de 25% des émissions nationales de gaz à effet de serre. La Loi Grenelle 2 sur l'énergie et l'environnement a pour objectifs de réduire les consommations énergétiques d'au moins 38% et de diminuer les émissions de gaz à effet de serre de 50% d'ici 2020 [140], en favorisant les énergies renouvelables. Pendant les périodes chaudes, ou dans les climats chauds rencontrés dans les DOM (*Départements d'Outre Mer*), la ventilation naturelle est le premier mode de rafraîchissement des locaux d'habitation. Son utilisation est plus en plus encouragée, en particulier la RTAA-DOM (*Réglementations Thermique Acoustique Aération dans les Départements d'Outre Mer*), basée sur le décret n°2009-424 et ses trois arrêtés d'application du 17 avril 2009, préconise notamment la ventilation naturelle à des fins hygiéniques et de confort thermique.

Cependant pour être efficace, le choix de la ventilation naturelle dans un bâtiment nécessite des considérations spécifiques au stade de la conception du bâtiment. Son implémentation doit tenir compte de : l'emplacement géographique (climat, site, orientation, disposition), des réglementations en terme de qualité d'air et de confort et demande une étude détaillée du bâtiment (forme, inertie, distribution des espaces intérieurs, emplacement et taille des ouvertures) et des ouvertures (type, fonctionnement). Afin de bénéficier au maximum des effets naturels du vent et du tirage thermique, une modélisation du bâtiment peut être également nécessaire pour évaluer en termes statistiques l'efficacité de la stratégie retenue. La mise en œuvre de la ventilation naturelle est donc plus délicate que l'intégration des systèmes actifs de traitement d'air. Elle est également tributaire des conditions climatiques extérieures et du comportement des occupants. Pour toutes ces raisons, le contrôle de la ventilation naturelle est un exercice difficile.

Le principal objectif d'un système de contrôle de la température dans un bâtiment est de pouvoir assurer un certain confort thermique à l'occupant. La majorité des installations contrôlées le sont par une loi de commande simple : de type "tout ou rien", proportionnel (P), proportionnel à action intégrale (PI) ou proportionnel à action intégrale et dérivée (PID). Ces contrôleurs, très utilisés, permettent de réguler la température à l'intérieur d'un bâtiment, mais nécessitent un réglage initial délicat (le système peut devenir instable). De plus, ils ne permettent pas de prendre compte la zone de confort à contrôler, le profil d'occupation, etc. qui sont des paramètres importants pour déterminer le confort thermique à l'intérieur d'un bâtiment. Pour pouvoir tenir compte de ces éléments, les travaux de recherche s'orientent de plus en plus vers un contrôle dit "optimal".

¹Voir par exemple www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr

Un problème de contrôle optimal consiste à amener un système d'un état initial donné à un certain état final souhaité, en agissant sur un ou plusieurs paramètres (appelé(s) commande(s)). Dans notre cas, le problème d'optimisation consiste à atteindre une température cible dans une pièce (partant d'une température intérieure différente), en agissant sur le débit d'air d'entrée de celle-ci, et ceci en temps réel.

Du fait de la complexité d'un bâtiment, son comportement l'est d'autant plus et ne peut être traité que de façon approchée, à l'aide d'une discrétisation spatiale plus ou moins fine. Différentes méthodes de modélisation des écoulements existent et à différentes échelles, leur utilisation dépendant surtout des objectifs du modélisateur. Dans le but de prédire avec précision un écoulement (champ de vitesses, de température, ...), l'usage des modèles CFD (*Computational Fluid Dynamics*) semble être le plus approprié. Cependant, ces modèles (type DNS, LES, ...) nécessitent des maillages très fins et de longs temps de calcul (semaines, mois) et il n'est donc pas possible de faire du contrôle actif d'écoulement en temps réel avec ceux-ci. Une autre solution est l'utilisation de modèles d'ordre réduit.

La réduction de modèle consiste à approximer un champ² $h(\mathbf{x}, t)$ sous la forme :

$$h(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N \chi_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

où $\phi(x)$ sont les fonctions de la base spatiale, $\chi(t)$ les coefficients temporels à déterminer et N la dimension de la base³. Les fonctions $\phi(x)$ peuvent être obtenus en utilisant différentes méthodes telles que les bases de Lagrange, d'Hermite, de Taylor, de Krylov, La méthode la plus utilisée pour déterminer ces fonctions spatiales est la POD (*Proper Orthogonal Decomposition*). La POD consiste à rechercher une base physique orthogonale qui approxime $h(\mathbf{x}, t)$ au mieux en moyenne. Par construction, elle est optimale au sens énergétique. Cela signifie que tout autre ensemble de vecteurs contient moins d'énergie que les N premiers vecteurs propres issus de la POD. Cette propriété laisse espérer qu'un nombre relativement faible N de fonctions propres, suffisent pour reproduire la dynamique de l'écoulement. C'est cette méthode qui est utilisée dans ce manuscrit.

Une fois la base spatiale $\phi(x)$ connue, les coefficients temporels $\chi(t)$ sont alors calculés à partir d'un modèle d'ordre réduit (ROM pour *Reduced-Order Model*) obtenu par projection (généralement de type Galerkin) des équations décrivant les phénomènes physiques (équations de Navier-Stokes, équation de conservation de l'énergie, ...) sur chaque mode $\phi(\mathbf{x})$. Le système d'équations obtenu est un système d'équations différentielles, couplées en $\chi(t)$, qui peut être aisément et rapidement résolu (avec un algorithme de Runge-Kutta, par exemple). Une procédure de contrôle peut être ainsi envisagée.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du projet ANR 4C (*Confort en Climat Chaud sans Climatiser*). Ce projet s'inscrit dans une démarche de développement durable, où le rafraîchissement

²Le champ scalaire ou vectoriel $h(\mathbf{x}, t)$ correspond aux champs de vitesses, de température, de pression, ... selon la physique étudiée.

³Généralement, N est très petit par rapport au nombre de degrés de liberté du problème complet.

passif est favorisé, durant les saisons chaudes du sud de la France métropolitaine et dans les DOM (Départements d'Outre-Mer). L'objectif de ce projet est de *"modéliser, de contrôler et d'optimiser la ventilation naturelle pour limiter l'utilisation des systèmes actifs de traitement de l'air"*. Notre contribution se situe dans la tâche 3 du projet, intitulée contrôle et commande, dont le but est de *"construire des contrôleurs des ouvrants capables de répondre aux exigences du rafraîchissement nocturne, à partir de modèles d'ordre réduit."*

Ce manuscrit s'articule autour de cinq chapitres :

- Le **Chapitre 1** décrit la ventilation naturelle, en particulier dans les climats chauds. Dans une première section, les avantages et inconvénients à l'emploi de la ventilation naturelle sont développés. Puis, les moteurs de la ventilation naturelle, ainsi que les stratégies à mettre en œuvre pour son utilisation sont détaillés. La section suivante relate les moyens à instaurer pour atteindre des conditions de confort thermique acceptable dans les climats chauds. Puis, les différentes méthodes de modélisation d'un bâtiment sont exposées. Enfin, la dernière section permet de positionner notre sujet d'étude.
- Le **Chapitre 2** est dédié à la formulation d'un problème de contrôle optimal d'écoulement. Celui-ci est tout d'abord décrit dans une première section. Les algorithmes d'optimisation à direction de descente, basés sur une méthode du gradient (ou de la plus forte descente) sont ensuite explicités. Ceux-ci nécessitent la connaissance du pas de l'algorithme d'optimisation. Les méthodes de recherche linéaire du pas sont détaillées dans une troisième section. Enfin, le problème de contrôle optimal d'écoulement est défini à partir de notre cas d'étude.
- Le **Chapitre 3** est consacré à la réduction de modèles. Les différentes méthodes couramment utilisées dans la littérature sont en premier lieu décrites. Puis, la méthode POD est explicitée dans une deuxième section. Comme mentionné ci-dessus, une projection des équations considérées sur les modes POD obtenus est ensuite réalisée pour construire les systèmes dynamiques réduits. La méthode la plus employée est la projection de Galerkin. Celle-ci est décrite dans une troisième section. Dans ce manuscrit nous proposons une autre méthode de projection basée sur la minimisation des résidus, établi à partir des travaux de Leblond et al. [134]. La quatrième section de ce chapitre reprend les fondements de la projection de Leblond et al., puis détaille le principe de notre projection. Enfin, la dernière section compare les trois méthodes de projection, sur le cas d'un écoulement dans une cavité ventilée avec un polluant et sur le cas d'un écoulement autour d'un cylindre circulaire dans un canal à bas nombre de Reynolds.
- Le **Chapitre 4** est voué à l'élaboration et à la validation d'un algorithme de contrôle optimal en utilisant des modèles d'ordre réduit. Le problème de contrôle optimal, décrit au Chapitre 2, est tout d'abord reformulé sous forme réduite. Les modèles d'ordre réduit intégrés dans l'algorithme de contrôle ont été développés en construisant la base POD de deux façons :
 - ✓ soit à partir de clichés de l'écoulement obtenus avec *un* paramètre (c'est-à-dire pour un nombre de Reynolds et un nombre de Grashof fixé), c'est une approche classique ;
 - ✓ soit à partir de clichés d'écoulements obtenus avec *plusieurs* paramètres (plusieurs nombres de Reynolds et/ou nombres de Grashof).

Ces modèles sont alors éprouvés sur le cas de la cavité ventilée avec un polluant et sur une cavité entraînée différentiellement chauffée.

- Le **Chapitre 5** présente une stratégie de contrôle à mettre en place, basée sur les contrôleurs existants. Les modèles d'ordre réduits ne sont plus considérés : seul le champ moyen (vitesses, température, ...) est à présent pris en compte. Une base de données d'écoulements avec des paramètres d'entrée variables (vitesse d'air, température) est constituée, afin de prédire les écoulements pour n'importe quel paramètre d'entrée. Pour cela, les champs de vitesses et de température sont décomposés par POD. Le but est alors de déterminer la température dans la zone de confort, simplement avec les mesures de température aux parois dans le bâtiment. Pour cela, le débit d'air d'entrée (inconnu) est recherché avec un algorithme d'optimisation. La connaissance de ce débit et des températures mesurées aux parois et à l'entrée, nous permettra d'évaluer la température dans la zone d'occupation. Cette méthode est appliquée sur le cas de la cavité entraînée différentiellement chauffée, précédemment étudiée, puis sur une cavité ventilée en 3D.

Chapitre 1

Ventilation naturelle

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Avant-propos sur la ventilation naturelle	6
1.3	Moteurs de la ventilation naturelle	8
1.3.1	Effet du vent	8
1.3.2	Tirage thermique	8
1.4	Stratégies de ventilation naturelle	10
1.4.1	Ventilation naturelle à simple exposition	10
1.4.2	Ventilation naturelle traversante	10
1.4.3	Rafrâichissement nocturne	11
1.5	Confort thermique dans les climats chauds	12
1.5.1	En climat tropical	12
1.5.2	En climat méditerranéen	14
1.5.3	Synthèse de la section	15
1.6	Modélisation de la ventilation naturelle	16
1.6.1	Modèles empiriques	16
1.6.2	Modèles monozones	16
1.6.3	Modèles multizones	16
1.6.4	Modèles zonaux	18
1.6.5	Modèles CFD	19
1.7	Conclusion du chapitre et positionnement du sujet	22

1.1 Introduction

Le projet ANR 4C (*Confort en Climat Chaud sans Climatiser*) a pour but d'étudier la ventilation naturelle, à des fins de rafraîchissement dans les climats chauds pour pouvoir garantir des conditions thermiques acceptables aux occupants. Afin de poser le cadre de notre étude, ce premier chapitre est dédié à la description de ce mode de ventilation, en particulier dans les climats chauds. Les avantages et les inconvénients de la ventilation naturelle sont tout d'abord exposés. Puis, les moteurs de la ventilation naturelle sont décrits. Les stratégies de ventilation naturelle (à simple exposition, traversante, rafraîchissement nocturne) sont explicitées dans une troisième section. Les moyens à mettre en œuvre, pour atteindre un confort thermique acceptable dans les climats chauds, sont ensuite détaillés, à travers différentes études expérimentales présentes dans la littérature. Enfin, différentes méthodes de modélisation de la ventilation naturelle sont détaillées dans une dernière section.

1.2 Avant-propos sur la ventilation naturelle

La ventilation remplit essentiellement deux fonctions : hygiénique et de confort thermique. Le premier rôle de la ventilation est d'assurer une bonne qualité de l'air intérieur au sein des bâtiments. Ventiler permet d'apporter un air neuf et d'évacuer l'air vicié, entre autres les odeurs et les polluants qui s'accumulent. Dans un second temps, elle permet d'éviter ou d'éliminer la condensation d'eau. En effet, la présence de vapeur d'eau dans les pièces dites humides (salle de bains, cuisine, ...) peut entraîner le développement de moisissures et ainsi des problèmes de santé pour les occupants (difficultés ou même maladies respiratoires) et de durabilité des matériaux dans le bâtiment. La ventilation permet également d'assurer un certain confort thermique aux occupants en favorisant les échanges thermiques convectifs et évaporatifs. L'augmentation du renouvellement d'air permet aussi d'amplifier les échanges avec l'air extérieur et de refroidir le bâtiment lorsque la température de l'air extérieur est inférieure à celle de l'air intérieur. D'une manière générale, la ventilation agit sur trois paramètres importants du confort : la température d'air, les températures des parois (échanges radiatifs avec le corps humain) et la vitesse d'air (échanges convectifs et évaporatifs directs avec le corps). L'importance respective de ces différentes fonctions dépend des conditions climatiques, des saisons et des régions, des types d'habitat, impliquant ainsi des conditions de ventilation appropriées.

L'utilisation de la ventilation naturelle n'est pas un concept nouveau et les civilisations anciennes ont utilisé une grande partie de leur créativité pour maintenir le confort thermique dans leurs environnements bâtis. La ventilation naturelle est en effet le moyen de rafraîchir l'habitat le plus élémentaire, et encore aujourd'hui le plus commun. Historiquement, la ventilation de la maison se faisait uniquement et naturellement par l'ouverture des fenêtres. L'air conditionné ne fut largement utilisé dans la conception du bâtiment qu'au début du XXe siècle, pour de nombreuses raisons, dont l'une était la disponibilité de "l'énergie pas chère" à cette époque.

En période estivale ou en climat chaud, la ventilation naturelle est considérée comme une stratégie de rafraîchissement à basse énergie et à faible coût (pas de consommation électrique et

pas d'entretien). Elle paraît être une solution attractive en assurant à la fois une bonne qualité de l'air intérieur et des conditions de confort acceptables. Néanmoins pour des considérations hygiéniques, les réglementations dans le bâtiment (propres à chaque pays, voir [38] pour une comparaison des débits imposés en Europe dans le résidentiel) préconisent des débits d'air minimaux dans les locaux (résidentiels, bureaux, commerces, ...). Par exemple en France, l'**arrêté du 24 mars 1982 relatif à l'aération des logements** prescrit, dans l'article 1 :

- une aération générale et permanente ;
- "la circulation de l'air doit pouvoir se faire principalement par entrée d'air dans les pièces principales et sortie dans les pièces de service".

Cet arrêté préconise, dans l'article 3, des débits minimaux pour chaque pièce, que la ventilation soit mécanique ou naturelle. Le Tableau 1.1 répertorie les valeurs minimales à atteindre, en fonction du nombre de pièces principales dans le logement.

Nombre de pièces principales dans le logement	Débits extraits en $m^3.h^{-1}$			
	Cuisine	Salle de bains ou de douches	Autre salle d'eau	Cabinet d'aisances
1	75	15	15	15
2	90	15	15	15
3	105	30	15	15
4	120	30	15	30 (15 si multiple)
5 et plus	135	30	15	30 (15 si multiple)

TABLE 1.1 – Débits d'air extraits minimaux à atteindre dans le logement, en fonction de son nombre de pièces (Article 3, Arrêté du 24 mars 1982 relatif à l'aération des logements).

La ventilation naturelle de confort requiert des débits bien supérieurs pour être efficace. Or, contrôler la ventilation naturelle au sein des bâtiments est difficile. Le dimensionnement du système de ventilation naturelle est ainsi plus délicat que celui d'un système de ventilation mécanique.

Une considération clé dans l'adoption de la ventilation naturelle est le climat. Mais le climat n'est pas nécessairement le principal obstacle à l'utilisation de la ventilation naturelle dans les bâtiments. Le principal problème pourrait être un manque d'outils de conception et de compréhension des principes de la ventilation naturelle. Le choix de la ventilation naturelle dans un bâtiment nécessite des considérations spécifiques à un stade très précoce du processus de conception. Les lignes directrices de conception et les critères généraux pour l'utilisation de la ventilation naturelle impliquent l'examen :

- du site ; emplacement, orientation et disposition des bâtiments sur le site dont l'aménagement paysager
- des exigences en termes de qualité de l'air et de refroidissement par ventilation
- des bâtiments ; forme du bâtiment, distribution des espaces intérieurs, emplacement et taille des ouvertures
- des ouvertures ; sélection des types d'ouverture et de leur fonctionnement

De plus, en zone urbaine, l'utilisation de la ventilation naturelle peut s'avérer délicate. Ghiaus et al. [89] ont réalisé une étude sur le potentiel de la ventilation naturelle en environnement urbain, spécialement dans les rues canyons. Les conditions extérieures sont plutôt défavorables au choix de la ventilation naturelle : vitesse du vent faible, températures extérieures élevées dues à l'îlot de chaleur urbain, bruit et pollution de l'air extérieur. Une conception spécifique des bâtiments dans ce cas est nécessaire pour utiliser la ventilation naturelle, afin d'éviter un lien direct entre l'intérieur et les environnements extérieurs. Pour être efficace, la ventilation naturelle exige également un degré élevé de perméabilité au sein du bâtiment, ce qui peut causer des risques pour la sécurité et des conflits avec la réglementation incendie ou de sécurité.

1.3 Moteurs de la ventilation naturelle

La ventilation naturelle repose sur l'action de deux forces principales : l'effet dynamique du vent et l'écart de température entre l'air extérieur et l'air intérieur, appelé tirage thermique.

1.3.1 Effet du vent

Le vent crée une surpression sur la paroi au vent tout en produisant une dépression sur les parois sous le vent, Figure 1.1(a). Ces différences de pression permettent de mettre en mouvement les masses d'air et varient selon la température, l'altitude, la forme du bâtiment et les obstacles qui entourent le bâtiment. L'air est ainsi balayé à l'intérieur du bâtiment des zones de haute pression vers les zones de basse pression. Lorsque les ouvertures sont placées sur des façades opposées, la ventilation peut être plus efficace, car elle devient traversante. Il se crée alors un écart de pression qui a pour conséquence l'apparition d'un débit d'air traversant.

1.3.2 Tirage thermique

Le tirage thermique repose sur une différence de masse volumique entre l'air intérieur et l'air extérieur d'un bâtiment ou entre deux zones, voir Figure 1.1(b). La masse volumique de l'air dépend de sa température et de son taux d'humidité¹. Ainsi, le fait que les masses volumiques de l'air intérieur et extérieur soient différentes, crée une différence de pression hydrostatique, appelé tirage thermique ou "effet de cheminée".

En réalité, les effets du vent et du tirage thermique agissent simultanément (cf. Figure 1.1(c)). Ils peuvent agir soit de manière combinée, ce qui permet d'accroître les débits de ventilation, soit en opposition ce qui réduit les débits. L'action du vent peut toutefois avoir des effets relativement plus importants que ceux du tirage thermique, notamment pour les bâtiments de faibles hauteurs.

¹La masse volumique de l'air s'écrit :

$$\rho = \frac{1}{R_s T} \left\{ p - \left(\frac{HR \cdot p_{sat}}{100} \right) \left(1 - \frac{R_s}{R_v} \right) \right\}$$

avec R_s et R_v les constantes spécifiques respectives de l'air sec et de l'air humide et p la pression correspondant à la somme des pressions partielles de l'air sec et de l'air humide.

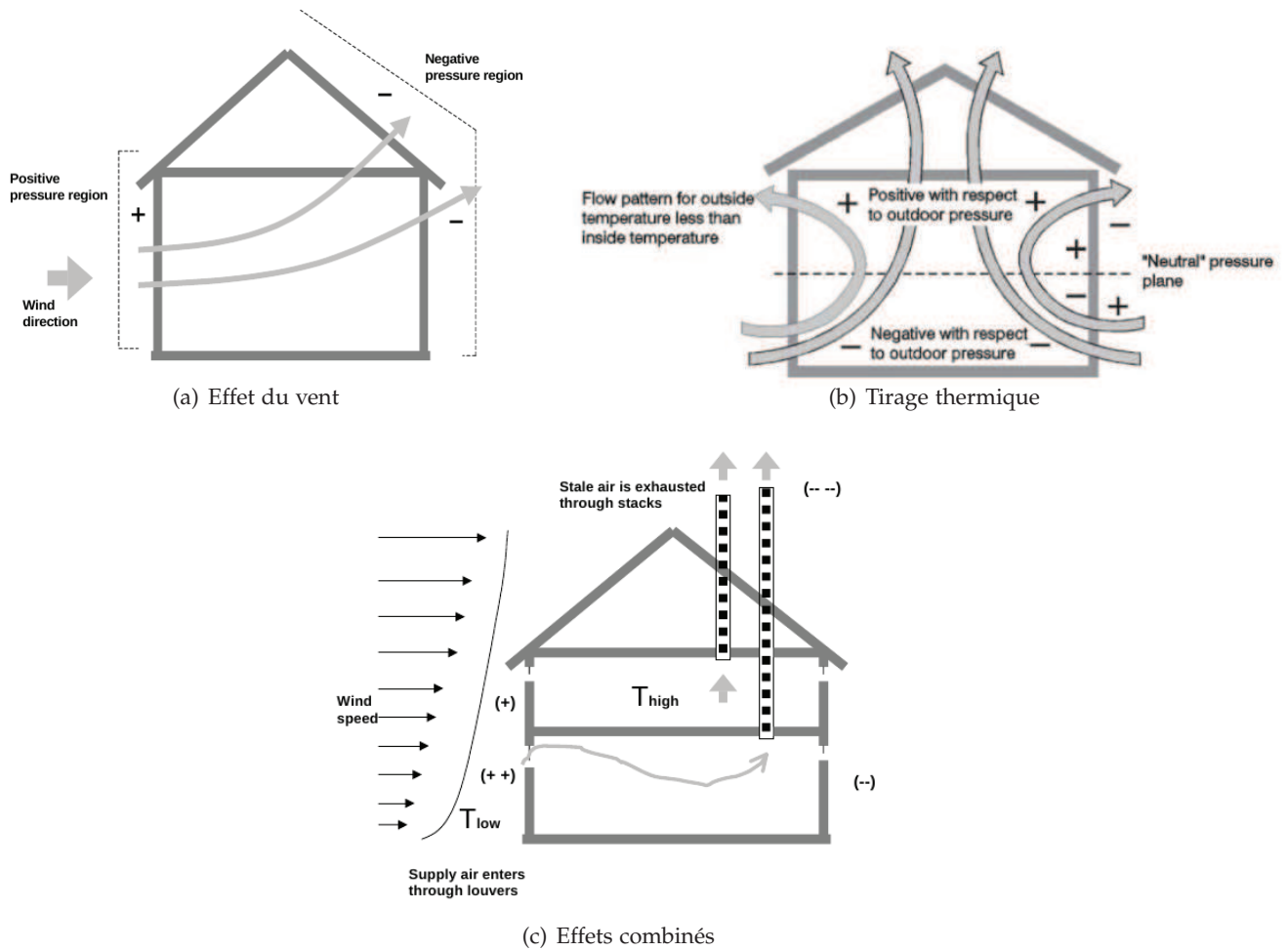


FIGURE 1.1 – (a) Schéma de l'effet du vent sur un bâtiment, extrait de [177] ; (b) Schéma de l'effet du tirage thermique sur un bâtiment, extrait de [59] ; (c) Schéma des effets combinés du vent et du tirage thermique sur un bâtiment, extrait de [177].

1.4 Stratégies de ventilation naturelle

La ventilation naturelle se définit comme étant "à simple exposition", lorsque toutes les ouvertures sont d'un seul côté de l'espace ventilé (Figure 1.2) et "traversante", lorsqu'elles sont disposées de manière opposée (Figure 1.3). Ces deux méthodes sont détaillées dans les deux sous-sections suivantes. La ventilation naturelle peut être également utilisée comme stratégie de rafraîchissement nocturne. Cette dernière stratégie est explicitée par la suite.

1.4.1 Ventilation naturelle à simple exposition

La ventilation naturelle à simple exposition se caractérise par une même ouverture pour l'entrée et la sortie d'air, (Figure 1.2). C'est une méthode très simple et peu onéreuse qui présente en revanche des inconvénients quant à la maîtrise des débits d'aération. En période estivale, le renouvellement d'air peut être insuffisant, entraînant des températures élevées et une qualité d'air médiocre à l'intérieur. Cette stratégie de ventilation est surtout utilisée dans les bâtiments massifs où on ventile pièce par pièce. L'efficacité de ce type de système de ventilation naturelle repose entièrement sur l'action des occupants. Celui-ci est surtout util

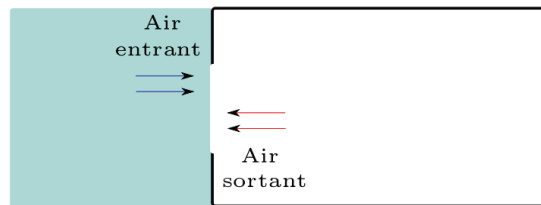


FIGURE 1.2 – Principe de la ventilation à simple exposition.

1.4.2 Ventilation naturelle traversante

Cette méthode repose sur l'existence d'une circulation d'air entre deux ouvertures opposées c'est-à-dire une différence de pression entre les ouvertures, causée par l'effet du vent et du tirage thermique (Figure 1.3). Par conséquent, s'il n'y a aucun obstacle à l'écoulement (portes fermées, par exemple), l'air entre du côté en surpression et sort du côté en dépression. Ainsi, l'utilisation de la ventilation naturelle traversante nécessite une étude architecturale approfondie, afin de profiter au mieux de l'effet du vent et du tirage thermique. Chaque projet est alors unique car il dépend des conditions locales, du type de bâtiment, de son usage et de son occupation.

Il existe deux types de ventilation naturelle traversante : la ventilation traversante horizontale et la ventilation traversante verticale. La ventilation traversante horizontale est dépendante des ressources locales en vent et est surtout adaptée aux zones qui connaissent un vent régulier, telles que les zones tropicales bénéficiant des alizés par exemple. Différents dispositifs de ventilation peuvent également compléter les ouvertures (jalousies, lamelles en allège, grille réglable, ...), qui peuvent être manuels ou automatisés. Pour des bâtiments à étage, la ventilation traversante verticale est souvent privilégiée. Les débits d'air sont alors majoritairement gouvernés par l'effet du tirage thermique. L'air circule depuis les entrées d'air neuf vers les bouches d'extraction qui sont

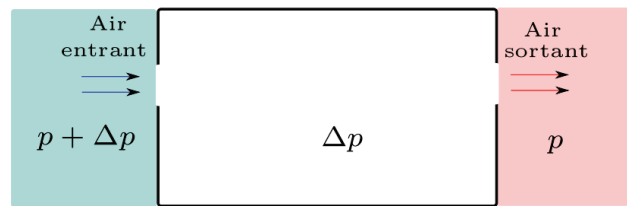


FIGURE 1.3 – Principe de la ventilation traversante.

raccordées à un conduit d'évacuation débouchant en toiture. L'efficacité de ce système dépend essentiellement de la hauteur du conduit vertical : plus le bâtiment est grand, plus les débits d'air seront élevés. Les configurations les plus courantes sont de type conduit, atrium ou double peau, (Figure 1.4). Une attention particulière doit toutefois être portée sur la sécurité incendie en limitant la transmission des fumées, sur le passage des polluants d'un espace à l'autre en étant vigilant sur le positionnement des bouches de prises et d'extraction d'air, ainsi que sur les nuisances sonores que peuvent entraîner ce type de configuration.

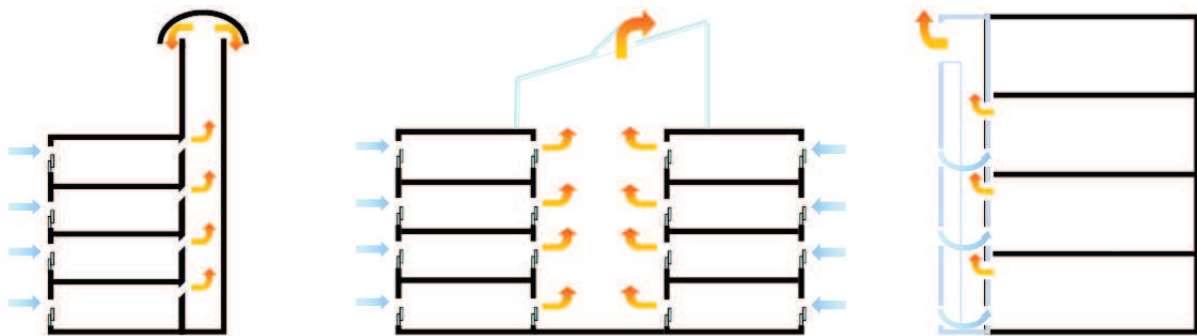


FIGURE 1.4 – Exemples de solutions architecturales : conduit (à gauche), atrium (au milieu) et double peau (à droite), extrait de [47].

1.4.3 Rafrâichissement nocturne

La ventilation naturelle peut être une solution efficace pour rafraîchir passivement un bâtiment la nuit. Les techniques de ventilation naturelle nocturne permettent de refroidir par ventilation la masse thermique du bâtiment lorsque les apports internes et les apports solaires sont au minimum. La ventilation naturelle nocturne utilise alors l'air extérieur comme un dissipateur de chaleur : l'air froid extérieur pénètre la nuit dans le bâtiment, dans lequel la chaleur s'est accumulée durant la journée, et entraîne l'air chaud à sortir du bâtiment. L'efficacité de cette méthode dépend essentiellement de la différence de température entre le jour et la nuit. En d'autres termes, plus la température de l'air diminue pendant la nuit, plus la capacité des systèmes de ventilation nocturne à refroidir le bâtiment est importante, [184]. L'utilisation de la ventilation naturelle nocturne est alors plutôt conseillée dans les climats chauds où les écarts de température jour-nuit sont importants, [128]. Kolokotroni [128] préconise également son utilisation dans des zones climatiques où une humidité spécifique de l'air extérieur ne dépasse pas 15 g/kg d'air sec. Le

concept de ventilation naturelle nocturne est facile à mettre en place, mais une attention particulière doit être portée si les fenêtres restent ouvertes toute la nuit (insécurité, nuisances nocturnes, insectes, ...) et en cas de surventilation entraînant alors un inconfort thermique pour l'occupant.

1.5 Confort thermique dans les climats chauds

Selon le climat considéré, les situations de confort et les moyens à mettre en œuvre pour atteindre une situation de confort diffèrent. La distinction dans cette section est ainsi faite entre le climat tropical et le climat méditerranéen. Les DOM-TOM tels que la Guadeloupe, la Martinique, la Réunion appartiennent à la zone climatique tropicale de savane. Celle-ci correspond au type (Aw), selon la classification de Köppen-Geiger², [132] (Tableau A.9, en Annexe A). Elle se caractérise par une saison pseudo-sèche (février à avril) et une saison humide (juillet à octobre). Dans les Antilles, le vent est assez fort et constant (les alizés) : le seuil de vitesse de 1m.s^{-1} est dépassé de 60 à 80% du temps annuel. Le sud de la France métropolitaine et la Corse possèdent un climat méditerranéen, type (Csa) de la classification de Köppen-Geiger, (Tableau A.9). Il se caractérise par des étés secs et chauds : les précipitations du mois le plus sec sont inférieures à 40mm et la température est supérieure à 22°C. La notion de confort thermique, ainsi que les différents indices de confort thermique présentés dans cette section, sont détaillés en Annexe B.

1.5.1 En climat tropical

De nombreuses études expérimentales ont été menées depuis les années 1960 en climat tropical, pour des bâtiments ventilés naturellement et pour certaines conjointement avec des bâtiments ventilés par air conditionné. Le Tableau 1.2 répertorie les différents auteurs de ces expériences, pour des climats tropicaux selon l'année, le lieu et la température de confort obtenue. La majeure partie des travaux a été réalisée en Asie (Singapour, Indonésie, ...) et donne une température de confort entre 25,9°C à 29,2°C.

Le guide sur la climatisation naturelle de l'habitat en climat tropical humide [86], établi par le CSTB en 1992, indique, à partir des travaux de Dreyfus [69], que par exemple pour une humidité absolue de 17 g/kg d'air sec, la limite supérieure de la zone de confort est obtenue pour 26°C en air calme et environ 30°C pour une vitesse d'air de 1m/s, soit un gain en température effective de 4°C. La Figure 1.5 montre la zone de confort acceptable en climat tropical en fonction de la température de l'air et de la vitesse d'air (pour une humidité absolue de 17 g/kg d'air sec).

Selon Berger [24], l'humidité devient un facteur important d'appréciation du confort lorsque la température de l'air et l'humidité relative dépassent un certain palier (28°C-30°C ; 70-80%).

Dans les zones climatiques tropicales équatoriales où l'amplitude journalière des températures d'air extérieur est faible, la ventilation permet d'augmenter le pouvoir évaporateur de l'ambiance et de diminuer la mouillure. Ainsi, la vitesse de l'air, nécessaire pour atteindre le confort

²D'autres classifications des climats existent telles que celle élaborée par Briggs en 2002 [39], mais ne seront pas détaillées ici, la classification de Köppen-Geiger étant la plus utilisée.

Année	Auteur	Lieu	Type	Température de confort (méthode)	Remarques
1959 1960	Webb, [202] [203]	Singapour	VN	25,9°C (SI)	Développement du SI, Développement de l'ECI
1986	Sharma et al., [187]	Inde	VN	28°C (TSI)	Développement du TSI
1986	Mas Santosa, [146]	Indonésie	VN	27°C $\pm$ 1,4°C	
1991	De Dear et al., [64, 65]	Singapour	VN	26,6°C - HR 75% 27,7°C - HR 35%	
1992	Busch, [46]	Thaïlande	VN AC	27,4°C (ET)	Limite haute 31°C (ET) pour VN
1996	Mallick, [144]	Bangladesh	VN	Non précisée	Zone de confort entre 24°C et 32°C, pour une HR entre 50 et 90 % ($\forall$ la vitesse d'air)
1998	Karyono, [125]	Indonésie	VN AC	26,7°C (t_o)	Pas de différences significatives entre les bâtiments ventilés naturellement et par air conditionné
1998	Kwok, [131]	Hawaï	VN AC	26,8°C (t_o) 27,4 °C (t_o)	Neutralité thermique plus forte pour des bâtiments ventilés par air conditionné
2002 2003	Wong et al, [209] [208]	Singapour	VN VN	28,9°C (t_o) 28,8°C (t_o)	
2004	Feriadi, [79]	Indonésie Singapour	VN VN	29,2°C (t_o) 28,6°C (t_o)	

TABLE 1.2 – Études expérimentales menées sur le confort thermique en ambiance chaude et humide, pour des bâtiments ventilés naturellement (VN) et par air-conditionné (AC). (SI : Singapore Index, ECI : Equatorial Comfort Index, TSI : Tropical Summer Index, ET : Température Effective, HR : Humidité Relative, t_o : température opérative).

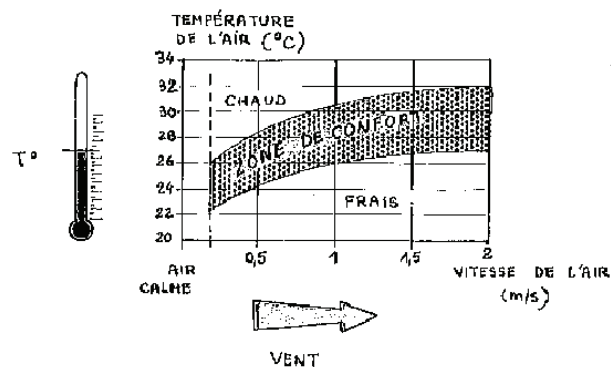


FIGURE 1.5 – Zone de confort en climat tropical humide, extrait du guide sur la climatisation naturelle de l'habitat en climat tropical humide [86].

thermique, augmente avec la température de l'air (son augmentation permet de compenser les effets d'humidité). Néanmoins, une vitesse d'air trop élevée peut susciter également de l'inconfort. A partir d'une vitesse d'air de 1 m.s^{-1} , la ventilation commence à être gênante et à partir de $1,5\text{ m.s}^{-1}$, elle est néfaste pour la santé [183] (Tableau 1.3).

Vitesse	Effet probable
$< 0,25\text{ m.s}^{-1}$	imperceptible
$0,25 - 0,50\text{ m.s}^{-1}$	agréable
$0,50 - 1,00\text{ m.s}^{-1}$	on a constamment conscience du mouvement de l'air
$1,00 - 1,50\text{ m.s}^{-1}$	sensation de courant d'air, légère et gênante
$> 1,50\text{ m.s}^{-1}$	inconfort du point de vue de la santé

TABLE 1.3 – Effets de la vitesse d'air sur le confort, tableau établi par Sangkertadi [183].

Ernest [77] a également souligné que, l'effet de la vitesse d'air sur la température de confort est plus significatif pour une humidité relative basse. Le Tableau 1.4 montre les effets de la vitesse d'air intérieur sur les températures de confort en fonction de l'humidité relative pour une v ture de 0,45 clo et une activité de 1,0 met.

Humidité relative (HR)	Température de confort, pour $v_a = 0,14\text{ m.s}^{-1}$	Température de confort, pour $v_a = 1,00\text{ m.s}^{-1}$	Gain de température d� à la vitesse d'air
50 %	26,3�C	29,4�C	3,1�C
60 %	26,0�C	29,0�C	3,0�C
70 %	25,7�C	28,6�C	2,9�C
80 %	25,4�C	28,2�C	2,8�C
90 %	25,1�C	27,8�C	2,7�C

TABLE 1.4 – Effets de la vitesse d'air intérieur sur les températures du confort en fonction de l'humidité relative, pour une v ture de 0,45 clo et une activité de 1,0 met, tableau établi par Ernest [77].

1.5.2 En climat méditerranéen

Le climat méditerranéen (chaud et sec en été) est un climat uniquement présent dans le pourtour de la Méditerranée : les études expérimentales sur la ventilation naturelle sont donc nettement moins nombreuses dans la littérature. Allard [5] recense un certain nombre d'expérience visant à connaître l'impact du rafraîchissement nocturne par ventilation naturelle dans les climats méditerranéen. Un appartement résidentiel à Catane en Italie (expériences menées par M. Grosso, S. Sciuto et C. Priolo) et un immeuble de bureaux à Athènes en Gr ce (expériences menées par E. Dascalaki et M. Santamouris) ont été ainsi instrument s. Les résultats montrent que l'utilisation de la ventilation naturelle nocturne permet de diminuer les pics de température

de 1-2°C, à l'intérieur des bâtiments considérés. Dans le premier cas (Catane), la température moyenne intérieure est diminuée de 2,7°C. La ventilation naturelle nocturne y est efficace grâce à une configuration de l'appartement adaptée (deux façades opposés avec des ouvertures) et à un climat adéquat (brise de mer, écart élevé de température entre le jour et la nuit). Dans le second cas (Athènes), quatre configurations de ventilation naturelle ont été testées dans l'immeuble. La configuration la plus efficace est celle où les ouvertures sont opposées et sur un étage différent (ventilation traversante horizontale et verticale). Elle privilégie ainsi les effets des vents et du tirage thermique. Un fort écart de température jour-nuit dans cette région contribue également à l'efficacité de la ventilation naturelle.

1.5.3 Synthèse de la section

En climat tropical (Guadeloupe, Martinique, Réunion), le problème d'inconfort est plutôt lié à la forte humidité relative (> 95%) et des températures d'air modérées (> 32°C). L'écart de température jour-nuit faible rend le recours à l'inertie du bâtiment difficile. Des conditions acceptables de confort sont donc délicates à obtenir, et seule l'augmentation de la vitesse d'air à proximité des occupants, permet de contribuer efficacement à réduire la sensation de chaleur. Le guide sur la climatisation naturelle de l'habitat en climat tropical humide [86], préconise alors : d'empêcher la transmission de chaleur des parois chaudes (rayonnement) vers l'intérieur en isolant les parois ; de stopper le rayonnement solaire direct ou diffus en mettant en place des écrans solaires et d'augmenter la vitesse d'air au voisinage des occupants.

En climat méditerranéen, la recherche du confort thermique par ventilation naturelle, contrairement aux zones tropicales, ne se fait pas toute l'année, mais seulement en été lorsque les températures sont élevées et l'hygrométrie est faible. La différence de température entre le jour et la nuit, ainsi qu'un vent quasi-constant rend possible l'utilisation de la ventilation naturelle, à des fins de rafraîchissement. Le contrôle du confort thermique passe alors par une protection solaire du bâtiment et par la ventilation nocturne pour refroidir les parois (§1.4.3), en favorisant une ventilation traversante (§1.4.2).

Les études expérimentales sont nécessaires pour comprendre les phénomènes physiques mis en jeu, afin d'étudier en conditions réelles les effets de la ventilation naturelle sur les conditions de confort des occupants. Toutefois elles ne peuvent être mises en place partout, systématiquement et rapidement. Le coût de ces expériences peut également être un frein à leur implémentation. Une autre solution est le recours à la modélisation de la ventilation naturelle dans les bâtiments. Différentes méthodes de modélisation existent et à différentes échelles, leur utilisation dépendant surtout des objectifs du modélisateur. La section suivante est dédiée à la description des méthodes existantes de modélisation de la ventilation naturelle dans les bâtiments.

1.6 Modélisation de la ventilation naturelle

Du fait de la complexité d'un bâtiment, son comportement l'est d'autant plus et ne peut être traité que de façon approchée, à l'aide d'une discrétisation spatiale (maille ou zone) plus ou moins fine. La précision des résultats dépend alors de la taille de ces mailles et le choix de celle-ci essentiellement des objectifs de l'étude. Cette section est dédiée à donner un aperçu non-exhaustif des différentes méthodes existantes de modélisation de la ventilation naturelle dans les bâtiments et non à les présenter toutes explicitement. Un état de l'art des différents modèles existants et applicables dans l'étude de la ventilation naturelle figure notamment dans [5, 48, 51].

1.6.1 Modèles empiriques

Les modèles empiriques correspondent à une écriture simplifiée des équations de la Mécanique des Fluides (équation de conservation de la masse, équations de quantité de mouvement et équation de conservation de l'énergie), établie à partir d'hypothèses simplificatrices sur la géométrie, les conditions initiales et les conditions aux limites. Celles-ci sont issues, soit de considérations théoriques, soit de données expérimentales. Le modèle qui en découle n'est alors applicable que pour le cas considéré. Deux types de modèles empiriques simplifiés existent : ceux qui prédisent le débit d'air et ceux qui prédisent la vitesse d'air à l'intérieur d'un bâtiment. Parmi la première catégorie, citons par exemple, la méthode *British Standards method* [2] applicable pour la ventilation à simple exposition et traversante, la méthode d'Aynsley [17] pour la ventilation traversante et la méthode de De Gidds et Phaff [66] pour la ventilation à simple exposition. Afin d'estimer la vitesse d'air à l'intérieur des bâtiments, les méthodes suivantes sont fréquemment employées : la méthode de Givoni [92], la méthodologie donnée par le CSTB dans le guide sur la climatisation naturelle de l'habitat en climat tropical humide [86] et le modèle d'Ernest [77]. Bien que fréquemment utilisés dans le monde industriel pour leur simplicité et leur rapidité de calcul, ces modèles restent empiriques et ne peuvent prédire avec précision les champs de vitesses, de température et de pression pour un bâtiment quelconque.

1.6.2 Modèles monozones

Les modèles monozones considèrent que l'intérieur entier d'un bâtiment possède des caractéristiques uniformes (zone ou volume de contrôle), Figure 1.6. Dans ce cas, l'ensemble du bâtiment est caractérisé par un seul jeu de variables (température, pression, concentration, ...). Ces modèles sont très faciles d'utilisation. Ils permettent une évaluation globale des débits d'air échangés avec le milieu extérieur en entrant les caractéristiques de son enveloppe et de se faire une bonne idée du fonctionnement global d'un bâtiment. Allard [5] répertorie les principaux modèles existants. Les modèles basés sur ce concept ont en général vocation à évaluer les consommations énergétiques et ne sont guère adaptés à l'évaluation du confort. Le logiciel CoDyBa développé initialement par Roux [175] est basé sur ce modèle.

1.6.3 Modèles multizones

Dans un modèle multizone, le bâtiment est représenté par un ensemble de nœuds, Figure 1.7. Un nœud représente une zone (le plus souvent une pièce ou l'extérieur), caractérisée par des variables

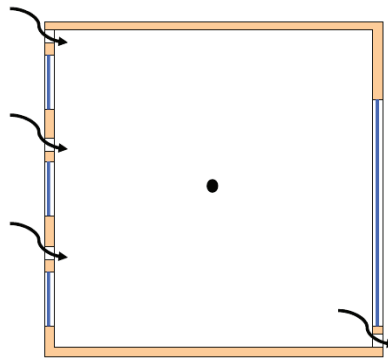


FIGURE 1.6 – Illustration de la modélisation monozone, extraite de Mora [149].

d'état uniformes. Ces zones sont reliées entre elles par des connexions représentant le chemin emprunté par l'air (ouverture de portes et fenêtres, entrée d'air, défauts d'étanchéité de l'enveloppe, ...). Cette modélisation est particulièrement adaptée pour simuler des appartements complets, voire des bâtiments entiers. Elle traite un bâtiment comme un ensemble de zones parfaitement et instantanément mélangées. Ces modèles caractérisent alors les transferts entre l'extérieur et l'intérieur du bâtiment, ainsi qu'entre les différentes zones qui le composent.

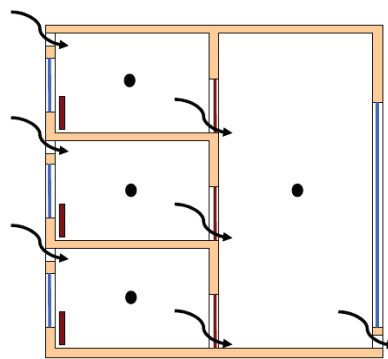


FIGURE 1.7 – Illustration de la modélisation multizone, extraite de Mora [149].

Les modèles multizones sont apparus, dans les années 1980, en réponse à la constatation que les échanges aérauliques avaient une grande influence sur le comportement thermique du bâtiment. Ils permettent de prendre en compte l'écart de température dans les différentes pièces d'un bâtiment et de conjuguer la modélisation thermique avec les mouvements d'air. Un état de l'art, réalisé par Feustel et Dieris [80] ou Axley [16], recense une cinquantaine de modèles de ce type. Deux familles d'outils multizones se sont dégagées. La première avait pour objectifs l'étude de la qualité de l'air dans les bâtiments et l'aide à la conception des systèmes de ventilation. Ainsi, des logiciels tels que COMIS [81] ou CONTAM [200] ont été développés pour la prédiction des écoulements et du transport d'espèces polluantes dans les bâtiments. La deuxième famille avait pour objectif d'affiner la prédiction des transferts de chaleur et ils utilisent des hypothèses très réductrices pour les transferts aérauliques (TRNSYS [127], ...).

Les modèles multizones permettent de décrire le comportement de bâtiments comprenant un grand nombre de zones, pour un temps de calcul et un stockage de données faible. Ils montrent toutefois leurs limites dans le cas d'une forte hétérogénéité de l'air à l'intérieur d'une pièce. De plus, ce type de modèles ne permet pas de prédire les hétérogénéités dans l'ambiance (température, vitesse d'air, ...) d'une zone, ce qui rend difficile l'étude détaillée du confort thermique des occupants.

1.6.4 Modèles zonaux

Les modèles multizones permettent d'avoir une vision globale du comportement aéraulique et thermique d'un bâtiment. Les modèles zonaux constituent une approche intermédiaire entre les modèles multizones et les modèles CFD (pour *Computational Fluid Dynamics*, §1.6.5). La méthode zonale consiste en l'étude d'une zone précise, fractionnée en un ensemble de volumes de contrôle, Figure 1.8.

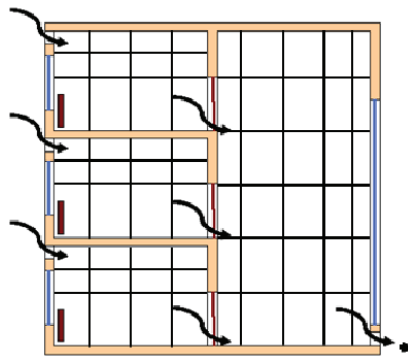


FIGURE 1.8 – Illustration de la modélisation zonale, extraite de Mora [149].

Les modèles zonaux nécessitent la connaissance *a priori* des principaux écoulements moteurs (jets, panaches, couches limites). La description de ces écoulements est faite à partir de lois de comportement établies de manière empirique. La continuité est alors assurée en effectuant un bilan de masse et d'énergie sur chaque volume de contrôle, en considérant les flux aux interfaces. Parmi les travaux sur les modèles zonaux, citons ceux de Musy [151], qui a proposé une génération automatique des modèles appropriés selon la configuration des pièces avec l'environnement orienté objet SPARK, ou de Mora [149] qui a couplé notamment les modèles zonaux avec des modèles multizones.

Bien que les modèles zonaux soient adaptés à l'étude d'un local, ils montrent certaines limites dans le cas de configurations de géométries complexes ou de changement de comportement aéraulique. De plus, ils ne peuvent prédire avec précision le champ de vitesses dans tout le local, ce qui peut être dommageable, car la vitesse est une variable prépondérante de la physique du bâtiment. Ils nécessitent également une bonne connaissance de la configuration représentée et des écoulements dominants.

1.6.5 Modèles CFD

Les modèles CFD sont employés dans de nombreux domaines de l'ingénierie et notamment dans le bâtiment, afin de prédire les écoulements fluides. Ils permettent une évaluation plus détaillée de la distribution spatiale et temporelle des grandeurs physiques de l'écoulement telles que la vitesse d'air, la température, la pression, la concentration en polluant, etc. Ils nécessitent alors un maillage du domaine étudié beaucoup plus fin que les méthodes précédemment citées, Figure 1.9.

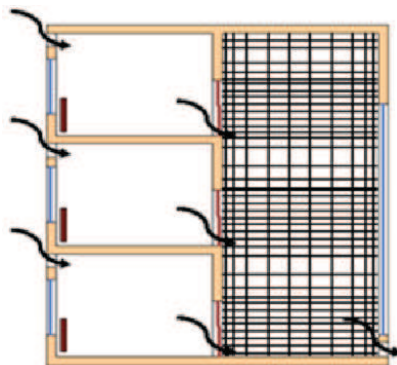


FIGURE 1.9 – Illustration de la modélisation CFD, extraite de Mora [149].

Les modèles CFD permettent de résoudre les équations gouvernant la dynamique du fluide (équations de Navier-Stokes, équation de conservation de l'énergie, ... selon le cas étudié). Ces équations sont discrétisées sur un maillage comportant un nombre suffisant de nœuds, généralement par différences finies, volumes finis ou éléments finis.

Ces modèles ont été utilisés, pour étudier la qualité de l'air intérieur, le confort thermique, les performances des systèmes de ventilation (mécaniques ou naturels), ... , dans de nombreux types de bâtiments tels que des résidences, des locaux commerciaux, des écoles, des usines, etc. ([3, 50, 87, 194]). Deux types d'études de la ventilation naturelle sont ici plus particulièrement considérées : celles visant à prédire le confort thermique dans un bâtiment et celles étudiant la dispersion d'un polluant (et donc déterminer la qualité de l'air intérieur). La prédiction de ce type d'écoulements peut se faire par simulation numérique directe appelée DNS (*Direct Numerical Simulation*), par simulation des grandes échelles appelée LES (*Large Eddy Simulation*) ou par simulation RANS (*Reynolds Average Navier-Stokes*) qui utilise les équations de Navier-Stokes moyennées en temps. Ces trois méthodes mettent en œuvre des procédures de résolution différentes des équations de Navier-Stokes en régime turbulent.

DNS

L'approche DNS consiste à résoudre explicitement les échelles de l'écoulement, sans introduire d'hypothèse particulière. Aucune modélisation des équations d'origine est alors nécessaire. Cette technique requiert un maillage du domaine extrêmement fin pour capturer l'énergie des plus petites échelles. L'approche DNS reste applicable pour la recherche fondamentale et la compréhension du mécanisme d'un écoulement pour des nombres de Reynolds modérés. En effet, pour

des nombres élevés de Reynolds (caractéristiques des écoulements rencontrés dans le bâtiment), le nombre de points du maillage nécessaire pour résoudre toutes les échelles, est incompatible avec la capacité des ordinateurs actuels. Cette technique est la plus précise des modèles CFD, mais c'est aussi la plus coûteuse en temps de calcul et en stockage mémoire. Par conséquent, la DNS est encore à l'heure actuelle difficilement applicable à des fins industrielles.

RANS

La méthode RANS consiste à moyenner en temps les équations de Navier-Stokes. Chaque variable instationnaire du problème se décompose en une partie fluctuante et une partie moyenne. Les champs fluctuants n'apparaissent alors que dans le tenseur de Reynolds et le flux de chaleur turbulent. La modélisation de ce tenseur est faite en résolvant des équations supplémentaires, appelées équations de turbulence : cela va du simple modèle algébrique (modèle de longueur de mélange à zéro équation [165], ...), en passant par le modèle à deux équations (modèle standard $k - \epsilon$ [133], modèle $k - \omega$ [204], ...), à toute une famille d'équations de transport pour les contraintes de Reynolds et une variable d'échelle supplémentaire (par exemple $R_{ij} - \epsilon$).

De nombreuses études dans le bâtiment ont vu alors le jour en utilisant les modèles RANS. Quelques exemples sont cités ici, par ordre chronologique. En 1994, Gan et al. [85] emploient le modèle standard $k - \epsilon$, associé aux indices de confort de Fanger [78], afin de prédire le confort thermique dans des pièces ventilées mécaniquement ou naturellement. Mora [149] compare les prédictions de vitesses et de température obtenues par modèle zonal et modèle $k - \epsilon$ aux mesures expérimentales, dans le cas d'une cavité ventilée chauffée par le bas. Bastide et al. [21] utilisent également un modèle $k - \epsilon$ pour déterminer le confort thermique et réduire la facture énergétique, en climat chaud, dans des bâtiments ventilés naturellement par des larges ouvertures. Zhang et al. [216] étudient l'écoulement et la dispersion d'un polluant dans une enceinte 2D.

L'approche RANS est le modèle CFD le plus populaire dans l'industrie, en raison de son faible temps de calcul et son application pour des nombres de Reynolds élevés, mais c'est aussi le plus empirique.

LES

L'approche LES repose sur l'hypothèse que l'écoulement peut se séparer en grandes et petites échelles, [67]. Les grandes échelles sont alors résolues explicitement et l'effet des plus petites est modélisé. La différence entre les deux échelles se fait grâce à une longueur de coupure. Les échelles supérieures à la longueur de coupure sont alors résolues, alors que les échelles inférieures à celle-ci sont modélisées. De nombreux modèles de sous-maille existent dans la littérature. Un état de l'art détaillé se trouve par exemple, dans Sagaut [180]. Le premier modèle de turbulence à voir le jour et le plus connu est le modèle de Smagorinsky [191], développé dans les années 1960. Sont venus ensuite parmi les plus connus ; le modèle de Bardina [19] en 1980, puis le modèle mixte Smagorinsky-Bardina [20] en 1983, le modèle de Smagorinsky dynamique [88, 138] au début des années 1990, le modèle WALE (*Wall Adapting Local Eddy-viscosity*) [152]

à la fin des années 1990 ou plus récemment les modèles invariants [170, 171, 4]. En terme de coût de calcul, la LES est à mi-chemin entre la DNS et les modèles RANS, et est motivée par les limitations de chacune de ces approches.

De nombreux auteurs ont étudié, avec succès, l'écoulement de l'air à l'intérieur et à l'extérieur des bâtiments avec la LES, tels que Davidson et Nielsen [63], Emmerich et McGrattan [76], Zhang et Chen [215], Jiang et Chen [122], ... Zhai et al. [213] proposent un aperçu des modèles de turbulence les plus couramment utilisés pour simuler l'écoulement à l'intérieur d'un bâtiment. Ceux-ci sont classés en huit catégories composées des modèles RANS (modèles à zéro équation, à deux équations, à trois équations et les modèles de contraintes de Reynolds), d'un modèle LES utilisant le modèle de sous-maille de Smagorinsky dynamique et enfin d'un modèle hybride combinant RANS et LES, appelé DES pour *Detached Eddy Simulation*). Zhang et al. [217] comparent ces différents modèles à des résultats expérimentaux ; en convection forcée et en convection mixte dans une cavité ventilée, ainsi qu'en convection naturelle dans une large cavité fermée différentiellement chauffée et dans une cavité ouverte représentant une pièce en feu. Ils observent ainsi que les simulations en LES permettent généralement d'obtenir des résultats plus précis que celles réalisées avec des modèles RANS, mais avec un temps de calcul 10 à 100 fois plus élevé (ce qui est tout à fait cohérent, puisque le maillage est plus fin).

La LES produit des résultats précis pour des débits d'air autour des bâtiments, comme le mentionne Murakami [150]. L'étude de la ventilation naturelle nécessite une prédiction précise des débits d'air à la fois à l'intérieur et à l'extérieur. Ce modèle est donc un candidat idéal pour l'étude de la ventilation naturelle.

Limitations

Les modèles CFD permettent d'obtenir avec précision le champ de vitesses, de température, etc. . Cependant ces méthodes restent très coûteuses en temps de calcul (semaines, mois) et en espace mémoire. Elles sont également restreintes à l'étude de phénomènes établis ou limités dans le temps (simulations sur des temps très courts, hors de l'échelle du temps réel). Une alternative est l'utilisation de modèles d'ordre réduit, qui permettent de conserver le caractère physique des équations considérées (équations de Navier-Stokes, convection-diffusion, ...) tout en diminuant considérablement le temps de calcul. La réduction de modèles consiste à approximer un champ $h(\mathbf{x}, t)$ sous la forme³ :

$$h(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N \chi_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

où $\phi(x)$ sont les fonctions de la base spatiale, $\chi(t)$ les coefficients temporels à déterminer et N la dimension de la base⁴. La première étape en réduction de modèles repose sur la construction de la base spatiale $\phi(x)$. Celle-ci peut être obtenue en utilisant différentes méthodes qui donnent par la suite le nom de la base. Une fois la base spatiale $\phi(x)$ connue, les coefficients temporels $\chi(t)$

³ Le champ scalaire ou vectoriel $h(\mathbf{x}, t)$ correspond aux champs de vitesses, de température, de concentration, de pression, ... selon la physique étudiée.

⁴ N est très petit par rapport au nombre de degrés de liberté du problème complet.

sont alors calculés à l'aide d'une projection des équations décrivant les phénomènes physiques (ici équations de Navier-Stokes, équation de convection-diffusion) sur chaque fonction $\phi(\mathbf{x})$. Les différentes techniques de réduction de modèles sont décrites en détails dans le Chapitre 3.

1.7 Conclusion du chapitre et positionnement du sujet

Dans ce Chapitre, l'intérêt de l'utilisation de la ventilation naturelle dans les bâtiments, à des fins hygiéniques et de rafraîchissement, a été mis en exergue. Elle permet de procurer à moindre coût (peu d'entretien par rapport à un système de ventilation mécanique) des conditions de confort acceptables aux occupants, que ce soit dans des climats chauds et humides (principalement en augmentant la vitesse au voisinage des occupants) ou dans des climats méditerranéens (rafraîchissement nocturne du bâtiment). Cependant, elle nécessite des considérations spécifiques, au moment de la conception du bâtiment (climat, emplacement du site, positionnement des ouvertures, réglementations à respecter, ...). En admettant que ceci soit réalisé, un autre point clé est le contrôle de la ventilation naturelle, qui s'avère particulièrement délicat. En effet, celle-ci est affectée par les conditions climatiques extérieures et le comportement des occupants, ce qui explique pourquoi la ventilation mécanique est le plus souvent favorisée (plus facile à contrôler).

Les études expérimentales sont souvent longues, fastidieuses, onéreuses et ne peuvent pas être mises en œuvre partout et sur chaque bâtiment. L'orientation vers la modélisation de la ventilation naturelle dans les bâtiments est donc indispensable. Ce chapitre a passé en revue les différents types de modèles existants : modèles empiriques, monozones, multizones, zonaux et CFD. Les modèles CFD sont les seuls à pouvoir donner avec précision les champs considérés (vitesse, température, concentration, ...), mais requièrent des temps de calcul prohibitifs, un stockage de données important, pour avoir finalement la dynamique de l'écoulement sur un temps très court.

Dans ce manuscrit, nous avons donc choisi d'utiliser des modèles d'ordre réduit, qui permettent des temps de calcul adaptés à la physique du bâtiment (temps quasi-réel). L'utilisation de ce type de modèles laisse alors envisager la possibilité d'un contrôle des écoulements. L'objectif de cette thèse est alors de construire, à l'aide de modèles réduits, des contrôleurs numériques capables de contrôler les écoulements dans une pièce.

Chapitre 2

Contrôle optimal d'écoulement

Sommaire

2.1	Introduction	24
2.2	Problème de contrôle optimal	26
2.2.1	Principe	26
2.2.2	Régularisation	27
2.2.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	27
2.3	Algorithmes d'optimisation à direction de descente, basés sur le gradient	30
2.3.1	Généralités	30
2.3.2	Application à un problème de contrôle optimal d'écoulement	31
2.3.3	Détermination du gradient de la fonctionnelle objectif	32
2.3.3.1	Méthode par les sensibilités	32
2.3.3.2	Méthode par l'équation adjointe	33
2.4	Méthodes de recherche linéaire	34
2.4.1	Règles d'Armijo et de Goldstein	34
2.4.2	Règle de Wolfe	35
2.5	Écriture du problème optimal associé à notre étude	35
2.6	Conclusion du chapitre	39

2.1 Introduction

Généralités

A l'origine, la mise au point de systèmes de commande dans le bâtiment avait pour objectif la minimisation des coûts engendrés par la consommation d'énergie. Des thermostats ont alors été mis en place pour contrôler la température à l'intérieur d'une pièce [136]. Afin d'éviter les changements fréquents entre les deux états d'un thermostat, des thermostats avec une zone morte ont été introduits et utilisés. Ce type de contrôle est appelé contrôle "tout ou rien" avec zone morte. Toutefois, les dépassements de température ne sont pas évités, ce qui entraînent une augmentation de la consommation d'énergie. Afin de résoudre le problème, les concepteurs ont utilisé des contrôleurs type PID (pour *Proportional-Integrate-Derivative*) [136]. Bien que ces contrôleurs améliorent la situation, un mauvais choix des gains du régulateur PID peut rendre tout le système instable. Par conséquent, les concepteurs ont maintenant recours à des techniques de contrôle optimal [201, 212, 129]. Basés sur celles-ci, des modèles de contrôle prédictif [82, 107, 108] ou adaptatif [62] ont été appliqués pour améliorer le confort thermique dans le bâtiment. La modélisation des bâtiments est faite généralement avec des modèles multizones (§1.6.3), en utilisant une analogie électrique des transferts aérauliques.

Contrôle optimal

Un problème de contrôle optimal consiste à amener un système d'un état initial donné à un certain état final souhaité, en agissant sur un ou plusieurs paramètres (appelé(s) commande(s)). Dans la pratique de très nombreux problèmes de contrôle sont rencontrés dans toutes les disciplines : par exemple, garer sa voiture, piloter un avion ou un satellite, optimiser les flux d'information d'un réseau, réguler un thermostat, raffiner un pétrole, contrôler une épidémie, etc. Dans ce travail, on cherche à contrôler un écoulement.

Le contrôle des écoulements constitue encore aujourd'hui un vaste sujet de recherche et cela, dans de nombreux domaines (aéronautique, aérospatial, nucléaire, ...). Les premières recherches datent de la théorie de la couche limite par Prandtl, en 1904. Durant la seconde guerre mondiale, puis pendant la guerre froide, les études sur le contrôle d'écoulement fleurissent, principalement à des fins militaires. Cependant, ces études restent majoritairement expérimentales et coûteuses. Il a fallu attendre le développement des méthodes CFD (§1.6.5) et l'avènement de la théorie du contrôle pour reconsidérer le problème de contrôle d'écoulement.

Les stratégies de contrôle d'écoulement peuvent être classées en deux catégories : le contrôle passif et le contrôle actif. La première technique consiste essentiellement à jouer sur la géométrie de l'obstacle (forme de profil d'aile, ...) ou sur la physique (propriétés du fluide, ...). La deuxième utilise des informations relatives à l'écoulement (via des capteurs) pour adapter son action. La mise en place d'un tel contrôle nécessite une variation d'un certain nombre de paramètres (vitesse de soufflage/aspiration, flux de chaleur, paramètres de formes, ...) en fonction du temps : c'est une loi de contrôle. Le contrôle actif des écoulements peut se faire en boucle ouverte

(la loi de contrôle est fixée et n'est pas réactualisée selon son effet sur l'écoulement) ou en boucle fermée (la loi de contrôle varie selon l'évolution de l'écoulement et l'action du contrôle est en permanence modifiée).

Pour résoudre numériquement un problème de contrôle, différentes techniques existent selon le caractère linéaire/non-linéaire des équations associées¹. Pour un écoulement laminaire les équations de Navier-Stokes sont linéarisables, il est possible d'utiliser des méthodes de contrôle linéaire par feedback dans l'espace des états [218]. Cette approche est principalement utilisée dans la recherche du retardement de la transition vers la turbulence. En effet, les méthodes visant à empêcher un écoulement laminaire de déstabiliser sont privilégiées par rapport à celles qui essaient de contrôler un écoulement instable (souvent plus judicieux et moins coûteux). Elles ont été appliquées notamment pour contrôler un écoulement de Poiseuille dans un canal [31, 123, 32], un écoulement cisailé dans un canal [112, 54], ainsi qu'un écoulement de couche limite [53].

Lorsque l'écoulement est turbulent, les équations de Navier-Stokes ne sont plus linéarisables et le recours à la théorie du contrôle linéaire n'est plus possible. Un problème d'optimisation non-linéaire est alors formulé et résolu à l'aide de méthodes d'optimisation non-linéaire, [102, 36]. La méthode la plus utilisée est celle basée sur les équations adjointes [106, 25, 104]. Cette approche a été notamment utilisée pour contrôler par simulation numérique directe (DNS) un écoulement de canal turbulent [33, 34] et pour contrôler le sillage d'un cylindre en régime laminaire [109, 114, 167, 214]. Un état de l'art plus détaillé sur le contrôle des écoulements se trouve, par exemple, dans [58].

Ce chapitre est dédié à la description d'un problème de contrôle optimal d'écoulement. Celui-ci est posé tout d'abord dans une première section (§2.2). Le principe y est explicité (§2.2.1, §2.2.2). Puis la méthode des multiplicateurs de Lagrange, permettant de passer d'un problème d'optimisation sous contraintes à un problème d'optimisation sans contrainte est détaillée (§2.2.3). Le système optimal ainsi formé ne peut généralement pas se résoudre directement (trop coûteux en temps de calcul, [105]), celui-ci est usuellement résolu en utilisant des algorithmes d'optimisation, basés sur une méthode à direction de descente. Ceux-ci sont décrits dans une deuxième section (§2.3). En Mécanique des Fluides, deux types d'approches sont habituellement employées : la méthode par les sensibilités (§2.3.3.1) et la méthode de l'équation adjointe (§2.3.3.2). Ces algorithmes nécessitent la détermination du pas de l'algorithme. Celui-ci est recherché de manière linéaire, généralement selon les règles d'Armijo, de Goldstein ou de Wolfe (§2.4). Enfin, dans une dernière section, le problème de contrôle optimal d'écoulement associé à notre cas d'étude est explicité.

¹Les méthodes de contrôle optimal associées à une stratégie de réduction de modèles sont détaillées dans le Chapitre 4.

2.2 Problème de contrôle optimal

Tout problème de contrôle optimal d'écoulement s'écrit mathématiquement, avec les éléments suivants [139, 103] :

- *Des variables d'état $\mathbf{x}$* qui définissent les grandeurs caractéristiques du problème. Il peut s'agir de la vitesse, la température, la concentration d'un polluant, la pression, ...
- *Des paramètres de contrôle $\mathbf{c}$* . En pratique, selon que le contrôle soit aux frontières ou distribué, ces variables apparaîtront soit comme conditions initiales ou aux limites du problème, soit directement comme terme source dans les équations d'état.
- *Une fonctionnelle coût ou objectif $\mathcal{J}$* qui définit les objectifs que l'on souhaite atteindre. Il peut s'agir d'amortir des perturbations en un temps minimal, de stabiliser une température, d'approcher l'écoulement d'un état désiré, Cette fonctionnelle est une fonction explicite des variables d'état et peut également dépendre des paramètres de contrôle $\mathbf{c}$ (cf. §2.2.2).
- *Des contraintes physiques $\mathcal{F}$* du problème qui traduisent l'évolution des variables d'état en fonction des paramètres de contrôle en respectant les lois de la physique. En Mécanique des Fluides, elles peuvent représenter les équations de Navier-Stokes, les équations de conservation d'énergie, etc.

2.2.1 Principe

Le problème suivant est considéré :

Trouver $\mathbf{x}(t)$ solution de

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\mathbf{x}(t)$ sont les variables d'état ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$) et $\mathbf{c}(t)$ le vecteur de contrôle ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}^M$). L'objectif est de trouver la valeur de contrôle $\mathbf{c}$ qui permet d'atteindre une valeur cible. La fonctionnelle objectif suivante, qui reflète la qualité du contrôle, est définie par :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{L}[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}(t), t] dt \quad (2.2)$$

où Φ est une fonction à valeurs réelles dépendant de l'état final et $\mathbf{L}$ est une fonction à valeurs réelles dépendant des variables d'état, de contrôle et du temps. t_0 représente l'instant initial et t_f l'instant final. Φ désigne une contrainte sur l'état final du système et $\mathbf{L}$ est souvent appelée Lagrangien. Dès que Φ et $\mathbf{L}$ ont été définies, l'objectif est de trouver le contrôle optimal c'est-à-dire la valeur de contrôle $\mathbf{c}$, pour $t_0 \leq t \leq t_f$, qui donne une valeur minimum de la fonction coût $\mathcal{J}$ sous l'hypothèse que le vecteur d'état $\mathbf{x}$ obéit à l'équation d'état (Eq 2.1).

Le **problème de minimisation** à résoudre est ainsi le suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{c} \text{ pour lesquels } \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \text{ soit minimisée à condition que } \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0 \quad (2.3)$$

2.2.2 Régularisation

De nombreux problèmes d'optimisation sont mal posés dans le sens où aucune solution avec contrôle borné existe. C'est souvent le cas lorsque la fonctionnelle objectif à minimiser ne dépend pas explicitement des paramètres de contrôle². Pour éviter cela, le problème d'optimisation est régularisé, en s'arrangeant pour limiter le coût numérique lié au contrôle. Deux méthodes peuvent alors être utilisées pour diminuer la taille du contrôle :

- Ajouter une contrainte supplémentaire aux contraintes physiques ; c'est le Principe de Pontryagin (voir [164]) :

$$\|\mathbf{c}\| \leq \kappa \quad \text{avec } \kappa > 0$$

- Modifier la fonctionnelle objectif en ajoutant un terme de pénalité, [103, 104] :

$$\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}) + \omega \|\mathbf{c}\|^\sigma$$

avec ω et σ des constantes choisies selon le problème étudié. Le paramètre ω quantifie l'importance du coût du contrôle. Si ω est faible, alors le coût lié au contrôle n'est pas une priorité dans sa mise en œuvre pratique, et l'on parle dans ce cas de régularisation de la fonctionnelle objectif. Si ω est élevé, alors le coût lié au contrôle est primordiale et l'on parle de pénalisation de la fonctionnelle objectif. Le paramètre σ est choisi selon la norme utilisée.

2.2.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Lorsque le système d'état (Eq 2.1) n'est pas linéaire³ ou ne peut être linéarisé, des méthodes adaptées à l'optimisation non-linéaire [102, 36] doivent être appliquées. L'emploi de la méthode lagrangienne, appelée aussi méthode des multiplicateurs de Lagrange, est généralement favorisé [23]. Cette méthode traite le problème de contrôle (Eq 2.3) comme un problème d'optimisation *sans* contrainte pour lequel une fonctionnelle de Lagrange est définie. Le minimum, si il existe, est un point "stationnaire" de cette fonctionnelle de Lagrange. Le principe consiste à introduire les multiplicateurs de Lagrange ξ (appelés également variables adjointes) pour prendre en compte implicitement les contraintes $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ du problème. Le contrôle est alors obtenu en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles couplées, appelé système optimal.

La **fonctionnelle de Lagrange** est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \xi) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) - (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \xi) \quad (2.4)$$

où $(\bullet, \bullet)$ est le produit scalaire dont la définition dépend du problème étudié.

Le **problème d'optimisation sans contrainte** est alors :

Trouver $\mathbf{x}, \mathbf{c}$ et ξ tels que la fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \xi)$ présente un extrémum c'est-à-dire $\delta\mathcal{L} = 0$ et donc :

²Dans ce cas, la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ de l'équation 2.2 s'écrit $\mathcal{J}(\mathbf{x})$.

³La théorie du contrôle linéaire est explicitée en Annexe C. Celle-ci reprend les bases de la théorie du contrôle linéaire dans $\mathcal{H}_2$, en détaillant les principes du contrôle LQR, de l'estimateur de Kalman et du contrôle LQG, puis la théorie du contrôle linéaire dans $\mathcal{H}_\infty$.

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{c}} \delta \mathbf{c} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \delta \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (2.5)$$

En supposant par la suite, les variables $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}$ et $\boldsymbol{\xi}$ indépendantes⁴, les dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ doivent être identiquement nulles dans toutes les directions admissibles $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}$ et $\boldsymbol{\xi}$, c'est-à-dire quelles que soient les variations $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{c}$ et $\delta \boldsymbol{\xi}$. Il en découle la relation suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{c}} \delta \mathbf{c} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \delta \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (2.6)$$

Ces relations sont des conditions nécessaires et suffisantes de détermination d'un extrémum local de $\mathcal{L}$, mais ne sont que nécessaires pour l'obtention d'un extrémum global. Il se peut que l'algorithme reste donc piégé sur une solution locale. Des méthodes d'optimisation "globale" existent, citons par exemple les algorithmes génétiques [94, 199]. Toutefois, leur utilisation dans les problèmes de contrôle des écoulements demeurent très coûteuses en temps de calcul [186] et hors de portée des applications en temps réel. C'est pour cela que les méthodes d'optimisation "locale" sont encore souvent privilégiées.

L'annulation des dérivées de Fréchet de la fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}$ (Eq 2.6), suivant les directions $\delta \boldsymbol{\xi}$, $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{c}$, permet d'accéder au système d'optimisation sans contrainte.

Annulation de la dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables adjointes $\boldsymbol{\xi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \delta \boldsymbol{\xi} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi} + \varepsilon \delta \boldsymbol{\xi}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-(\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \boldsymbol{\xi} + \varepsilon \delta \boldsymbol{\xi}) + (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-(\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \varepsilon \delta \boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} \end{aligned}$$

En annulant cette dérivée, il résulte :

$$(\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \delta \boldsymbol{\xi}) = 0$$

Ce qui correspond à l'équation de contrainte ou équation d'état du problème d'optimisation :

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0} \quad (2.7)$$

Annulation de la dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables d'état $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x} + \varepsilon \delta \mathbf{x}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathcal{J}(\mathbf{x} + \varepsilon \delta \mathbf{x}, \mathbf{c}) - \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\varepsilon} - \frac{(\mathcal{F}(\mathbf{x} + \varepsilon \delta \mathbf{x}, \mathbf{c}), \boldsymbol{\xi}) - (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \right) \right\} \end{aligned}$$

⁴Cette hypothèse est en toute rigueur fausse, puisque les variables $\mathbf{x}$ et $\mathbf{c}$ sont liées par les contraintes physiques $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0$.

En annulant cette dérivée, il résulte :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \right) = 0$$

et en utilisant la définition des opérateurs adjoints⁵ :

$$\left(\delta \mathbf{x}, \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \right) - \left(\delta \mathbf{x}, \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \boldsymbol{\xi} \right) = 0$$

L'équation adjointe suivante est alors obtenue :

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \boldsymbol{\xi}} \quad (2.8)$$

Annulation de la dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables de contrôle $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{c}} \delta \mathbf{c} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c} + \varepsilon \delta \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{c} + \varepsilon \delta \mathbf{c}) - \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\varepsilon} - \frac{(\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c} + \varepsilon \delta \mathbf{c}), \boldsymbol{\xi}) - (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}} \delta \mathbf{c} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} \delta \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi} \right) \right\} \end{aligned}$$

En annulant cette dérivée, il résulte :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}} \delta \mathbf{c} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} \delta \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi} \right) = 0$$

et en utilisant la définition des opérateurs adjoints :

$$\left(\delta \mathbf{c}, \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}} \right)^* \right) - \left(\delta \mathbf{c}, \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} \right)^* \boldsymbol{\xi} \right) = 0$$

La condition d'optimalité, appelée aussi équation de stationnarité, est alors obtenue :

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}} \right)^* = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} \right)^* \boldsymbol{\xi}} \quad (2.9)$$

Résumé Les conditions nécessaires (Eqs 2.7, 2.8 et 2.9) forment un système couplé d'équations aux dérivées partielles, appelé **système optimal**, résumé ci-dessous. Les solutions de ce système sont composées des paramètres de contrôle optimaux $\mathbf{c}_{opt}$, des variables d'état optimales $\mathbf{x}_{opt}$ et des variables adjointes optimales $\boldsymbol{\xi}_{opt}$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0 & \text{Équation d'état} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \boldsymbol{\xi} = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* & \text{Équation adjointe} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{c}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} \right)^* \boldsymbol{\xi} = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}} \right)^* & \text{Condition d'optimalité} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

⁵ Rappel : Pour tout $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0$, l'opérateur adjoint A^* est défini par rapport au produit scalaire $(\bullet, \bullet)$ tel que $(A\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_1, A^*\mathbf{x}_0)$.

Pour la plupart des problèmes de contrôle d'écoulement, il n'est pas possible de résoudre le système optimal couplé (Eq 2.10) directement, car il est très coûteux en temps de calcul [105]. Ainsi, des algorithmes d'optimisation ont été développés pour pouvoir le résoudre (méthode par les sensibilités §2.3.3.1 et méthode par l'équation adjointe §2.3.3.2).

2.3 Algorithmes d'optimisation à direction de descente, basés sur le gradient

2.3.1 Généralités

Un problème d'optimisation sans contrainte consiste à minimiser une fonctionnelle $\mathcal{J}(\mathbf{c})$, où $\mathcal{J} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est supposée régulière et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, tel que :

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\mathbf{c}) \quad (2.11)$$

Ce problème peut également être formulé comme :

$$\text{Trouver } \mathbf{c}_{opt} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathcal{J}(\mathbf{c}_{opt}) \leq \mathcal{J}(\mathbf{c}), \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad (2.12)$$

Ce type de problème est généralement résolu par des algorithmes d'optimisation dits de descente. Ces algorithmes, de type itératif, consistent à approcher une solution par la récurrence :

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + w_k d_k \quad (2.13)$$

où w_k est appelé le pas à effectuer le long de la direction de descente d_k et k représente une itération de l'algorithme considéré. $d_k \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente de $\mathcal{J}$ en $\mathbf{c}_k$ si :

$$\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) \cdot d_k < 0 \quad (2.14)$$

Ainsi par définition de la dérivée, si d_k est une direction de descente alors :

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}_k + w_k d_k) < \mathcal{J}(\mathbf{c}_k), \text{ pour tout } w_k > 0 \text{ suffisamment petit} \quad (2.15)$$

et donc $\mathcal{J}$ décroît strictement dans la direction d_k : $\mathcal{J}_{k+1} < \mathcal{J}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Pour utiliser une méthode à direction de descente, il faut donc déterminer deux choses :

- la direction de descente d_k . La méthode employée pour la calculer, donne le nom alors à l'algorithme,
- le pas w_k . Il est généralement recherché de manière linéaire (cf. §2.4) et il va gérer la vitesse de convergence ainsi que la stabilité de l'algorithme [198] :
 - si il est trop petit, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le minimum peut devenir très important.
 - si il est trop grand, l'algorithme peut osciller autour du minimum sans converger.

Les algorithmes de descente requièrent la connaissance de la fonctionnelle $\mathcal{J}(\mathbf{c})$, de son gradient $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c})$ et dans certains cas, de la hessienne $\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c})$. Dans ce chapitre, seules les méthodes basées sur le gradient (appelées aussi méthodes de la plus forte descente) sont décrites⁶. Ces méthodes, simples à implémenter, consistent à chercher la solution dans la direction opposée au gradient de la fonctionnelle objectif. La direction de descente est alors définie en fonction du gradient de la fonctionnelle telle que :

$$d_k = -\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) \quad (2.16)$$

L'algorithme d'optimisation non-linéaire type, pour une méthode de descente basée sur le gradient est décrit par l'Algorithme 1. Avec cette méthode, il suffit "simplement" de calculer le gradient de la fonctionnelle objectif. Néanmoins, cette tâche peut s'avérer compliquée. C'est ce que nous allons voir par la suite.

Algorithme 1: MÉTHODE DE DESCENTE BASÉE SUR LE GRADIENT, DANS LE CAS GÉNÉRAL

Initialisation : $k = 0$, $\mathbf{c}_k = \mathbf{c}_{ini}$;

- 1: Détermination du gradient de la fonctionnelle objectif $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k)$ ($\Rightarrow d_k = -\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k)$)
- 2: Détermination d'un pas $w_k > 0$ par recherche linéaire
- 3: Détermination de $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + w_k d_k$
- 4: Incrémentation $k = k + 1$

Retour à l'étape 1 si le critère de convergence $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) < \epsilon$ n'est pas satisfait

Remarque Une variante de la méthode du gradient, appelée méthode du gradient conjugué, a été développée par Hestenes et Steifel, en 1952, pour la minimisation de fonctionnelles quadratiques. L'algorithme d'optimisation est le même que l'Algorithme 1, mais une étape supplémentaire est introduite. Après l'étape 3, une nouvelle direction de descente est calculée telle que :

$$d_{k+1} = -\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_{k+1}) + \beta_{k+1} d_k \quad (2.17)$$

où le terme β_{k+1} est fonction du gradient de la fonctionnelle et peut être calculé selon différentes méthodes : Fletcher-Reeves ($\beta_{k+1}^{FR} = \frac{\nabla \mathcal{J}_{k+1}^T \nabla \mathcal{J}_{k+1}}{\nabla \mathcal{J}_k^T \nabla \mathcal{J}_k}$), Polack-Ribière ($\beta_{k+1}^{PR} = \frac{\nabla \mathcal{J}_{k+1}^T (\nabla \mathcal{J}_{k+1} - \nabla \mathcal{J}_k)}{\nabla \mathcal{J}_k^T \nabla \mathcal{J}_k}$),

2.3.2 Application à un problème de contrôle optimal d'écoulement

La méthode des multiplicateurs de Lagrange (§2.2.3) permet de passer d'un problème d'optimisation sous contraintes à un problème de contrôle sans contrainte. Le système optimal à résoudre est alors composé des équations de contrainte (Eq 2.7), des équations adjointes (Eq 2.8) et de la condition d'optimalité (Eq 2.9). L'algorithme d'optimisation est celui décrit par l'Algorithme 2. L'étape 1 est une étape de résolution; cela requiert, pour des valeurs données du paramètre de contrôle, les solutions des équations qui régissent le fluide, telles que la vitesse, la température, la pression, etc. . Ainsi, chaque itération de l'algorithme d'optimisation

⁶Ils existent également des méthodes de second ordre (utilisant la dérivée seconde de la fonctionnelle objectif $\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c})$), elles seront détaillées dans le Chapitre 5.

nécessite au moins une solution des équations considérées. Pour compléter l'algorithme d'optimisation, il faut spécifier comment est déterminé le gradient de la fonctionnelle objectif à l'étape 3.

Algorithme 2: PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL D'ÉCOULEMENT

Initialisation : $k = 0$ et les paramètres de contrôle sont initialisés à $\mathbf{c}_{ini}$;

- 1: Résoudre les équations de contraintes (Eq 2.7), afin d'obtenir les variables d'état $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(\mathbf{c}_k)$;
- 2: Résoudre les équations adjointes (Eq 2.8), afin d'obtenir les variables adjointes ξ_k ;
- 3: Évaluer la direction de descente $d_k = -\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k)$, grâce à la condition d'optimalité (Eq 2.9) ;
- 4: Déterminer le pas $w_k > 0$ par recherche linéaire ;
- 5: Déterminer les nouveaux paramètres de contrôle $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + w_k d_k$;
- 6: Incrémentation $k = k + 1$

Retour à l'étape 1 si le critère de convergence $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) < \epsilon$ n'est pas satisfait.

Deux approches sont habituellement employées pour déterminer le gradient de la fonctionnelle objectif⁷, à l'étape 3 de l'Algorithme 2, en contrôle d'écoulement [103, 104, 105] : la méthode des sensibilités ou la méthode de l'équation adjointe. Elles sont décrites dans la sous-section suivante.

2.3.3 Détermination du gradient de la fonctionnelle objectif

2.3.3.1 Méthode par les sensibilités

L'expression du gradient de la fonctionnelle objectif par rapport aux variables de contrôle $\mathbf{c}$ s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\mathbf{c}} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}} \quad (2.18)$$

La fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ dépend explicitement de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{c}$, les dérivées partielles $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}}$ et $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}}$ seront donc "faciles" à calculer. En revanche, le terme de sensibilité $\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}}$ est difficile à évaluer. Il existe deux approches pour estimer ce terme :

- **par différences finies :**

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{c}) - \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{c}})}{\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}}} \quad (2.19)$$

où $\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{c}})$ est solution de $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = 0$ et $\tilde{\mathbf{c}}$ des paramètres de contrôle proche de $\mathbf{c}$. Mais, cette méthode est coûteuse en temps de calcul et manque de précision.

- **par résolution de système linéaire :**

En différenciant l'équation d'état $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} d\mathbf{c} = 0$$

⁷Une approximation par différences finies du gradient de la fonctionnelle objectif est généralement à exclure, étant donné le nombre important d'évaluations à réaliser.

soit

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} = 0$$

L'équation dite des sensibilités est alors obtenue :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{c_k} \left. \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} \right|_{c_k} = - \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} \right|_{c_k} \quad (2.20)$$

Finalement, les sensibilités sont obtenues par résolution de ce système linéaire. Mais, il est alors nécessaire de résoudre autant de systèmes linéaires qu'il y a de paramètres de contrôle. Toutefois, cette approche est plus performante que celle par les différences finies car le calcul des sensibilités est plus exacte par résolution de systèmes linéaire [105]. C'est pour cela que cette méthode est utilisée préférentiellement. L'étape 3 de l'Algorithme 2 consiste donc d'après la méthode des sensibilités à rajouter les deux sous-étapes suivantes :

a : Déterminer le terme de sensibilité $\left. \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} \right|_k$ via l'équation des sensibilités :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{c_k} \left. \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} \right|_{c_k} = - \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} \right|_{c_k}$$

b : Déterminer le gradient de la fonctionnelle objectif :

$$\left. \frac{d\mathcal{J}}{d\mathbf{c}} \right|_k = \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \right|_k \left. \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} \right|_k + \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}} \right|_k$$

2.3.3.2 Méthode par l'équation adjointe

En utilisant les propriétés d'un opérateur adjoint pour l'équation adjointe

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \boldsymbol{\xi} = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi}^* \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (2.21)$$

et la définition du gradient de la fonctionnelle objectif,

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\mathbf{c}} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}}$$

il découle l'expression suivante :

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\mathbf{c}} = \boldsymbol{\xi}^* \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}}$$

Or $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0$, d'où $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{c}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} = 0$ et donc :

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\mathbf{c}} = -\boldsymbol{\xi}^* \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{c}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{c}} \quad (2.22)$$

L'avantage en utilisant cette méthode est de résoudre *une seule fois* un système linéaire. En effet, l'équation 2.21 est indépendante du nombre de paramètres de contrôle. De plus, quand les

conditions d'optimalité sont réalisées (Eq 2.9), $d\mathcal{J}/dc = 0$ est exactement vérifié. L'étape 3 de l'Algorithme 2 consiste donc, avec la méthode de l'équation adjointe, à résoudre l'équation 2.22.

Ces méthodes⁸ sont faciles à implémenter et présentent un faible coût de calcul par itération. Cependant, il faut garder à l'esprit que la vitesse de convergence de ces algorithmes peut être faible (car la convergence est linéaire) et que des oscillations numériques peuvent apparaître, lorsque le gradient de la fonctionnelle objectif tend vers zéro, [198].

2.4 Méthodes de recherche linéaire

L'utilisation des méthodes à direction de descente nécessite la recherche du pas de descente $w_k > 0$, après avoir déterminé une direction de descente d_k (Algorithme 1). La recherche linéaire doit aboutir à deux objectifs : faire décroître la fonctionnelle $\mathcal{J}$ suffisamment et empêcher que le pas soit trop petit. L'objectif de l'algorithme de descente étant de minimiser $\mathcal{J}$, il semble naturel de déterminer le pas w_k comme solution du problème :

$$\min_{w \geq 0} h_k(w) \quad (2.23)$$

où $h_k(w) = \mathcal{J}(c_k + wd_k)$, avec $w \in \mathbb{R}$. C'est la règle de Cauchy et le pas correspondant est appelé *pas de Cauchy* ou *pas optimal*, [90]. Dans certains cas, il est préférable de choisir le premier minimum local de h_k :

$$w_k = \inf \{w \geq 0 : h'_k(c) = 0, h_k(c) < h_k(0)\} \quad (2.24)$$

C'est la règle de Curry et le pas correspondant est appelé *pas de Curry*, [90]. Ces méthodes sont qualifiées de recherche linéaire "exacte", mais ne sont utilisées que dans des cas particuliers ; par exemple lorsque h_k est quadratique. Dans le cas général, il peut ne pas exister de pas de Cauchy ou de Curry et la résolution exacte du problème (Eq 2.23) peut demander un temps de calcul trop grand, sans forcément assurer la convergence de l'algorithme. D'autres méthodes dites "inexactes" ont alors été développées telles que les règles d'Armijo, de Goldstein ou de Wolfe. Elles sont décrites ci-dessous.

2.4.1 Règles d'Armijo et de Goldstein

La *condition d'Armijo* (ou *de décroissance linéaire*) consiste à demander que la fonctionnelle $\mathcal{J}$ décroisse autant qu'une portion $\delta_1 \in]0, 1[$. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\mathcal{J}(c_k + w_k d_k) \leq \mathcal{J}(c_k) + \delta_1 w_k (\nabla \mathcal{J}_k, d_k) \quad (2.25)$$

où $(\bullet, \bullet)$ est le produit scalaire dans la norme considérée. La constante δ_1 ne doit pas être choisie en fonction des données du problème, elle peut donc être délicate à déterminer. D'autre part, si le pas est trop petit cela peut conduire à une fausse convergence. C'est pour cela qu'Armijo

⁸Des méthodes de second ordre (utilisation de la dérivée seconde de la fonctionnelle objectif), utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange ont également été développées. Cependant, elles restent encore très peu utilisées. Elles ne seront pas détaillées ici. Le lecteur pourra se référer par exemple aux travaux de Yamazaki, [211].

[12] ou Goldstein [95] ont mis en place des techniques dite de rebroussement. La technique de rebroussement d'Armijo consiste à déterminer un pas initial $w_k = \tau^i$ où $\tau \in]0, 1[$ et i représente le plus petit entier naturel positif tel que la condition d'Armijo (Eq 2.25) soit satisfaite. Si le pas w_k ne vérifie pas la condition d'Armijo (Eq 2.25), on rebrousse chemin en essayant des pas plus petits $\tau, \tau^2, \dots$. Typiquement, τ est choisi dans l'intervalle $[10^{-2}, 10^{-1}]$. L'Algorithme 3 illustre la méthode d'Armijo à rebroussement.

Algorithme 3: MÉTHODE D'ARMIGO À REBROUSSEMENT

Initialisation : $i = 1$, choisir $w_k^i > 0$ et $\tau \in]0, \frac{1}{2}[$;
 Tant que la condition d'Armijo (Eq 2.25) n'est pas vérifiée avec $w_k = w_k^i$;
 1: Choisir $w_k^{i+1} \in [\tau w_k^i, (1 - \tau)w_k^i]$;
 2: Incrémentation : $i = i + 1$;

Le pas obtenu avec cette méthode est appelé *pas d'Armijo*. L'inconvénient de cette technique de rebroussement est qu'elle choisit le pas w_k plus petit que le pas w_k^i . Afin d'éviter que le pas soit trop proche de zéro et aussi une fausse convergence, une condition supplémentaire associée à la condition d'Armijo (Eq 2.25) doit être ajoutée. Une première manière de faire est la *règle de Goldstein* qui consiste à déterminer le pas $w_k > 0$ telle que :

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}_k + w_k d_k) \geq \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) + \delta'_1 w_k (\nabla \mathcal{J}_k, d_k) \quad (2.26)$$

où δ'_1 est une nouvelle constante à choisir dans l'intervalle $]\delta_1, 1[$. C'est cette inégalité qui empêche le pas d'être trop petit. En revanche, il peut être difficile de trouver un *pas de Goldstein* en un nombre fini d'itérations.

2.4.2 Règle de Wolfe

Une autre solution permettant de forcer le pas à ne pas être trop petit est d'ajouter en plus de la condition d'Armijo (Eq 2.25), la *condition de Wolfe* [207]. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$(\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k + w_k d_k), d_k) \geq \delta_2 (\nabla \mathcal{J}_k, d_k) \quad (2.27)$$

Les constantes δ_1 et δ_2 sont choisies telles que $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$. Le pas obtenu est alors appelé *pas de Wolfe*.

2.5 Écriture du problème optimal associé à notre étude

Le problème de contrôle considéré dans ce manuscrit consiste à retrouver le champ scalaire cible $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t)$ correspondant à un paramètre de contrôle cible α_{cib} . Le champ scalaire cible représente soit une température à atteindre dans une pièce, soit une concentration en polluant à disperser le plus rapidement possible. L'objectif est alors de minimiser l'écart entre la température (resp. la concentration) réelle et la température (resp. la concentration) désirée dans une pièce, en agissant sur le débit d'air d'entrée q_v (cf. Figure 2.1).

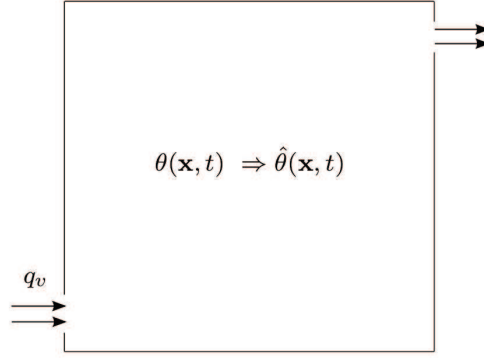


FIGURE 2.1 – Schéma de la pièce considérée.

Afin de contrôler le débit d'air d'entrée, il est possible de jouer soit sur la vitesse d'entrée, soit sur la section de passage. En pratique, c'est la section de passage qui change. En numérique, il est plus aisé de faire varier la vitesse d'entrée (même maillage). Celle-ci s'écrit dès lors :

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = \alpha U_0 \mathbf{e}_x \quad (2.28)$$

Le **problème de contrôle optimal** considère les éléments suivants :

- les *variables d'état* qui représentent le champ de vitesses $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et le champ scalaire (concentration ou température) $\theta(\mathbf{x}, t)$;
- les *paramètres de contrôle* α , ici ils correspondent à la vitesse d'entrée d'air ;
- la *fonctionnelle objectif* $\mathcal{J}(\theta, \alpha)$ qui s'écrit désormais telle que⁹ :

$$\mathcal{J}(\theta, \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\theta - \hat{\theta})^2 d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta|_T - \hat{\theta}|_T)^2 d\mathbf{x} + \frac{\omega}{2} \alpha^2 \quad (2.29)$$

où T représente le temps final et Ω le domaine fluide considéré ;

- les *équations de contrainte* qui correspondent aux équations gouvernant la dynamique du fluide (voir Eq 2.30, au paragraphe suivant).

Pour un écoulement incompressible et un fluide newtonien, les équations de Navier-Stokes décrivent la dynamique du fluide. Afin de décrire la dynamique de la température (resp. d'une concentration), une équation de convection-diffusion (obtenue par conservation de l'énergie et hypothèses simplificatrices) est introduite. Le système d'équations obtenu s'écrit alors :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + g\beta(\theta - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \theta &= \gamma \Delta \theta \end{cases} \quad (2.30)$$

⁹La fonctionnelle objectif est régularisée (cf. §2.2.2) par le terme de pénalité ω dans la norme euclidienne.

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ représente la vitesse du fluide, $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ la température (ou la concentration) du fluide et $p = p(\mathbf{x}, t)$ la pression. ρ et ν correspondent respectivement à la masse volumique et la viscosité cinématique. Le nombre de Reynolds est défini tel que : $Re = U_0 H/\nu$, où U_0 est la vitesse d'entrée et H la hauteur considérée.

- Dans le cas d'écoulement anisotherme, l'approximation de Boussinesq¹⁰ [37] est ajoutée dans les équations de quantité de mouvement (dernier terme), et assure le couplage vitesse/température. g , β , θ_{ini} et γ correspondent respectivement à la constante de gravité, au coefficient d'expansion, à la température initiale dans le domaine considéré et à la diffusivité thermique. Les nombres adimensionnels suivants sont définis pour caractériser un écoulement anisotherme : le nombre de Grashof $Gr = g \beta H^3 (\theta_c - \theta_f)/\nu^2$, le nombre de Richardson $Ri = Gr/Re^2$, le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\gamma$ et le nombre de Rayleigh $Ra = Gr Pr$.

- Dans le cas d'écoulement isotherme où le scalaire est pris passif (concentration d'un polluant par exemple), γ représente à présent le coefficient de diffusion du polluant, souvent appelé D . Le terme de Boussinesq n'est pas considéré ($\beta = 0$). Le nombre adimensionnel qui caractérise l'écoulement est alors le nombre de Schmidt, défini tel que : $Sc = \nu/D$.

Les équations 2.30 sont munies des conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ et } \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

et les conditions aux limites dépendent du problème étudié.

L'algorithme de contrôle à suivre est décrit sur la Figure 2.2. Les équations de contraintes, (typiquement dans notre cas les équations de Navier-Stokes et une équation de convection-diffusion), les équations adjointes associées, ainsi que le gradient de la fonctionnelle objectif doivent être résolus à chaque itération de l'algorithme de contrôle. Ces étapes, matérialisées par la partie encadrée sur la Figure 2.2, s'avèrent être coûteuses en temps de calcul. En effet, rien que la résolution des équations de Navier-Stokes avec des méthodes classiques (type DNS, LES, ...) peut nécessiter des jours, voire des semaines de temps de calcul. Il faut en plus résoudre les équations adjointes associées et ceci plus d'une dizaine de fois, voire plus. L'algorithme de contrôle, résumé sur la Figure 2.2, mettrait des mois avant d'atteindre la cible souhaitée. La capacité des ordinateurs actuels ne permet donc pas de réaliser un contrôle en temps réel avec de telles méthodes.

Une alternative est l'utilisation de modèles d'ordre réduit, bien connus en Mécanique des Fluides, qui permettent de conserver le caractère physique des équations considérées tout en diminuant considérablement le temps de calcul. Ces modèles sont décrits dans le Chapitre 3. Le problème de contrôle optimal d'écoulement est alors reformulé sous forme réduite : ceci est réalisé dans le Chapitre 4.

¹⁰L'approximation de Boussinesq est obtenue en négligeant les variations de masse volumique ρ , excepté dans le terme de gravité à l'origine du phénomène de thermoconvection.

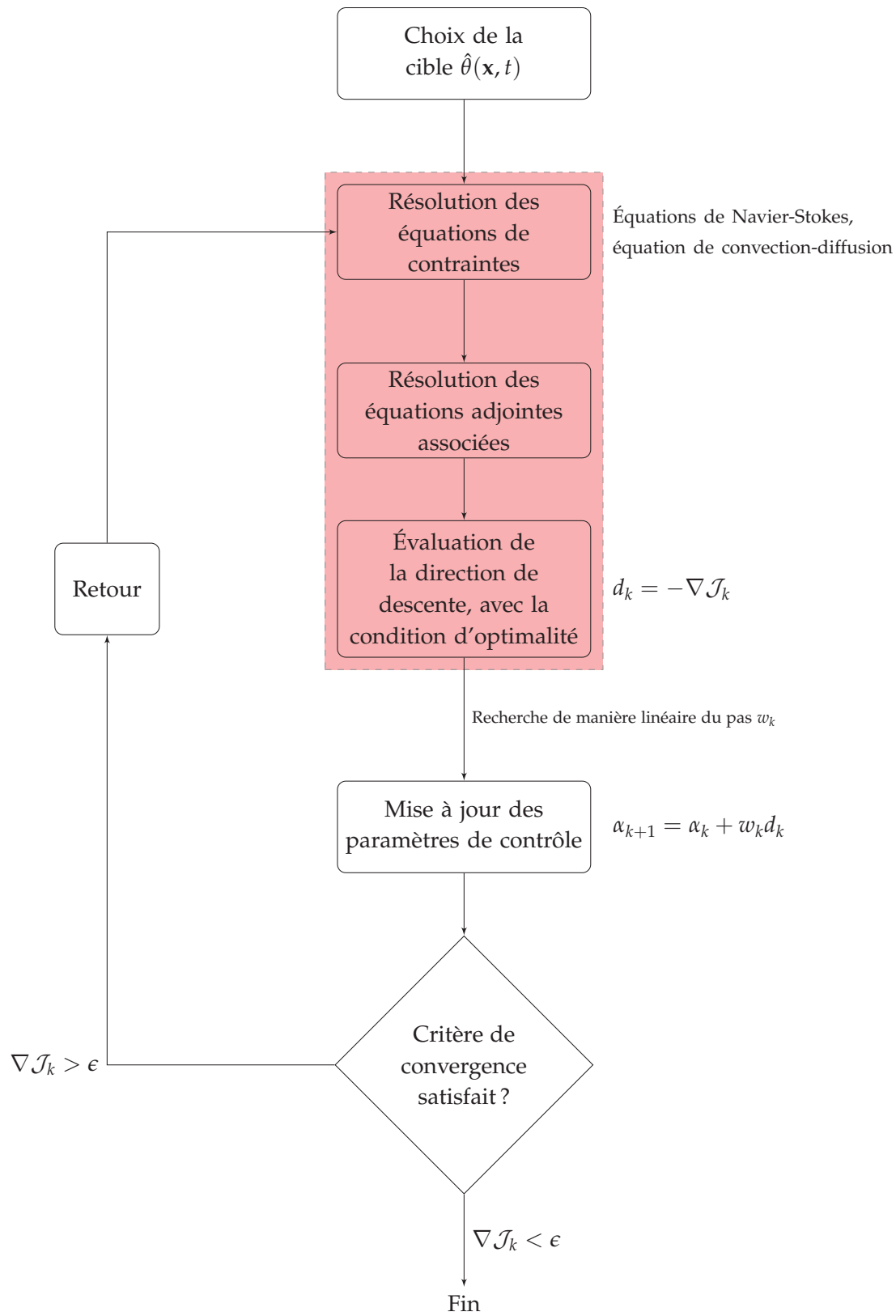


FIGURE 2.2 – Algorithme de contrôle.

2.6 Conclusion du chapitre

Dans ce Chapitre, le problème de contrôle optimal d'écoulement a été posé. Afin de pouvoir le résoudre, celui-ci a été mis sous la forme d'un problème d'optimisation sans contrainte, avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le système optimal obtenu, composé des équations de contraintes, des équations adjointes et de la condition d'optimalité, ne peut pas être résolu directement, car il est trop coûteux en temps de calcul [105]. Les méthodes des sensibilités et de l'équation adjointe, utilisant un algorithme d'optimisation à direction de descente basé sur le gradient, ont alors été développées. La méthode par l'équation adjointe est la moins coûteuse en temps de calcul : c'est celle-ci qui sera donc employée dans la suite de ce manuscrit. Les algorithmes à direction de descente nécessitent la connaissance du pas de l'algorithme. Il est recherché généralement de manière linéaire. Dans la suite de ce manuscrit, nous utiliserons la règle d'Armijo qui est la plus simple à implémenter.

La résolution du problème de contrôle optimal avec des méthodes classiques de simulation type DNS, LES, etc. semble difficilement applicable pour faire du contrôle actif des écoulements en temps réel. Il est alors indispensable de réduire considérablement la dimension du problème. Un compromis possible est l'utilisation de modèles d'ordre réduit, couramment employés en Mécanique des Fluides. Le Chapitre suivant est dédié aux différentes techniques de réduction de modèles existantes.

Chapitre

3

Réduction de modèles

Sommaire

3.1	Introduction	42
3.2	Réduction de modèles	43
3.2.1	Méthode de troncature équilibrée	43
3.2.2	Décomposition de Voronoï (CVT)	45
3.2.3	Méthodes à paramètres variables	46
3.2.4	Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)	47
3.2.5	Avant-propos sur la POD	48
3.2.6	Limitations des méthodes <i>a posteriori</i>	48
3.3	Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD)	49
3.3.1	Formulation	49
3.3.2	Propriétés de la base POD	50
3.3.3	Méthode POD/Snapshots	50
3.4	POD/ROM obtenu par projection de Galerkin	52
3.4.1	Généralités	52
3.4.2	Construction du modèle d'ordre réduit	53
3.4.3	Méthodes de stabilisation de la POD/Galerkin	54
3.4.4	Traitement du terme de pression	55
3.5	POD/ROM obtenu par projections basées sur la minimisation des résidus	56
3.5.1	MRP1	58
3.5.2	MRP2	60
3.6	Applications	63
3.6.1	Application au cas d'une cavité ventilée isotherme avec polluant	63
3.6.2	Écoulement autour d'un cylindre à bas nombre de Reynolds	71
3.7	Conclusion du chapitre	84

3.1 Introduction

Le problème d’optimisation complet, exposé dans le chapitre précédent, ne peut pas se résoudre en temps réel. Pour pouvoir envisager un contrôle actif de la température en temps réel, nous proposons dans ce manuscrit l’utilisation de modèles d’ordre réduit, qui permettent de réduire significativement le temps de calcul.

La réduction de modèles consiste à approximer un champ $h(\mathbf{x}, t)$ sous la forme¹ :

$$h(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N \chi_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

où $\phi(x)$ sont les fonctions de la base spatiale, $\chi(t)$ les coefficients temporels à déterminer et N la dimension de la base². La première étape en réduction de modèles repose sur la construction de la base spatiale $\phi(x)$. Celle-ci peut être obtenue en utilisant différentes méthodes qui donnent par la suite le nom de la base. Citons par exemple, la méthode de troncature équilibrée (*balanced truncation*) [148], les méthodes de Krylov [100], la méthode CVT (*Centroidal Voronoi Tessellation*) [43], les méthodes utilisant les sous-espace de Lagrange [160, 119], de Taylor [160], d’Hermite [119], les méthodes MIM (*Méthodes d’Identification Modale*) [91] ou bien la Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD pour *Proper Orthogonal Decomposition*) [124, 141].

La méthode la plus utilisée en Mécanique des Fluides pour déterminer la base spatiale est la POD. La POD consiste à rechercher une base physique orthogonale qui approxime $h(\mathbf{x}, t)$ au mieux en moyenne. Elle est, par construction, optimale au sens énergétique : tout autre ensemble de vecteurs contient moins d’énergie que les N premiers vecteurs propres issus de la POD. Cette propriété laisse espérer qu’un nombre relativement faible N de fonctions propres, suffisent pour reproduire la dynamique de l’écoulement. Une fois la base spatiale $\phi(x)$ connue, il reste à déterminer les coefficients temporels $\chi(t)$. Ils sont calculés à l’aide d’un modèle d’ordre réduit (appelé par la suite ROM, pour *Reduced Order Model*), obtenu par projection des équations gouvernant la mécanique des fluides sur les modes POD associés $\phi(\mathbf{x})$. Classiquement, c’est la projection de Galerkin qui est employée. Le système obtenu est un système d’équations différentielles, couplées en $\chi(t)$ de taille réduite N , qui est rapide à résoudre (par exemple avec un algorithme de Runge-Kutta). L’approche POD/Galerkin présente cependant plusieurs inconvénients.

En effet, l’intérêt de la construction d’un système dynamique est de garder un nombre relativement faible de modes propres issus de la POD, afin de limiter le temps de calcul. Les N_{modes} premiers modes les plus énergétiques sont alors uniquement conservés, mais ce sont les petites échelles qui sont responsables de la dissipation énergétique. La non-prise en compte de ces petites échelles peut rendre ainsi le système dynamique instable, voire même le faire diverger.

En plus des problèmes de stabilité que peut engendrer la POD/Galerkin, le traitement du terme de pression présent dans les équations de quantité de mouvement n’est pas trivial. Afin de

¹ Le champ scalaire ou vectoriel $h(\mathbf{x}, t)$ correspond aux champs de vitesses, de température, de concentration, de pression, ... selon la physique étudiée.

² N est très petit par rapport au nombre de degrés de liberté du problème complet.

pallier à ces inconvénients, Leblond et al. [134] ont proposé de construire le modèle réduit en utilisant une autre méthode de projection, basée sur la minimisation des résidus. Cette approche consiste tout d'abord à chercher une base POD de vitesses et une base POD de pression. Le ROM est alors obtenu en cherchant les coefficients temporels de vitesses et de pression, qui minimisent au sens des moindres carrés les résidus associés aux équations de quantité de mouvement et à une équation de Poisson. Cette méthode de projection est appelée par la suite MRP1 (pour *Minimization Residual Projection 1*). Dans ce chapitre, nous proposons une variante de cette méthode, qui ne nécessite pas l'ajout d'une équation de Poisson. Le ROM obtenu par cette nouvelle approche est nommée MRP2 (pour *Minimization Residual Projection 2*).

Ce Chapitre débute par un aperçu des différentes méthodes de réduction de modèles utilisées en Mécanique des Fluides, §3.2. Il se poursuit avec une description détaillée de la méthode POD, §3.3. Les différentes techniques de construction des modèles réduits (projection de Galerkin, projections MRP1 et MRP2) sont ensuite présentées dans les sections §3.4.1 et §3.5. Enfin dans une dernière partie (§3.6), les résultats obtenus avec les modèles réduits, associés aux différentes techniques de projection sont confrontés sur le cas d'un écoulement dans une cavité ventilée isotherme, puis sur l'écoulement autour d'un cylindre circulaire.

3.2 Réduction de modèles

3.2.1 Méthode de troncature équilibrée

La méthode de troncature équilibrée (*balanced truncation* en anglais) est une méthode de réduction des systèmes linéaires initialement développée pour des problèmes issus de l'automatique et du contrôle. Elle est introduite par Moore [148] dans le but de construire des modèles réduits qui conservent la stabilité asymptotique. Le but de la troncature équilibrée est d'éliminer les états les moins contrôlables et les moins observables simultanément.

Soit le système dynamique linéaire suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur d'état d'entrée appartenant à $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de contrôle, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ le vecteur d'état de sortie. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ représente la matrice du système dynamique, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice d'entrée, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ la matrice de sortie et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ la matrice de retour.

L'objectif de la réduction de modèles est d'obtenir un système linéaire similaire, mais d'ordre nettement inférieur $N \ll n$, tel que :

$$\mathcal{S}_r : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_r\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}\mathbf{c}(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

où $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{N \times m}$, $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{r \times N}$ et $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^N$. La dimension des entrées $\mathbf{c}(t)$ et sorties $\mathbf{y}(t)$ reste inchangée (ainsi que celle de la matrice associée $\mathbf{D}$).

Au préalable, il est nécessaire de vérifier certaines propriétés du système d'état $\mathcal{S}$ (Eq 3.2) : sa contrôlabilité et son observabilité, [29]. Pour déterminer la contrôlabilité et l'observabilité d'un système linéaire, les matrices grammiennes de contrôlabilité $\mathcal{P}$ et d'observabilité $\mathcal{Q}$ sont définies telles que³ :

$$\mathcal{P} = \int_0^\infty e^{-t\mathbf{A}} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-t\mathbf{A}^T} dt \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} = \int_0^\infty e^{t\mathbf{A}^T} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{t\mathbf{A}} dt \quad (3.4)$$

où $\mathbf{A}^T$ représente la matrice transposée de $\mathbf{A}$. En pratique, les matrices grammiennes sont calculées comme les solutions des équations de Lyapunov suivantes :

$$\mathbf{A}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathcal{Q} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = 0 \quad (3.5)$$

Le système linéaire $\mathcal{S}$ (Eq 3.2) est supposé contrôlable et observable. Il est dit *équilibré* si et seulement si [148], les matrices grammiennes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ vérifient :

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.6)$$

où $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n > 0$. σ_i représentent la racine carrée des valeurs propres λ_i de la matrice $\mathcal{P}\mathcal{Q}$, appelées aussi *valeurs singulières* de Hankel : $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathcal{P}\mathcal{Q})}$, pour $i = 1, \dots, n$.

Comme le système $\mathcal{S}$ est supposé contrôlable et observable, il existe une matrice de transformation $\mathbf{T}$, telle que le système $\mathcal{S}$ décrit par $(\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1})$ soit équilibré [93]. Une base réduite $\mathbf{T}_r$ peut alors être construite, à partir des N vecteurs propres associés aux N valeurs propres σ_i les plus élevées (d'où le nom de troncature équilibrée). Une projection du système $\mathcal{S}$ est alors réalisée sur la base réduite $\mathbf{T}_r$, qui conduit au système d'ordre réduit suivant :

$$\mathcal{S}_r : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{T}_r \mathbf{A} \mathbf{T}_r^{-1} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{T}_r \mathbf{B} \mathbf{c}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{T}_r^{-1} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D} \mathbf{c}(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

où $\mathbf{T}_r \in \mathbb{R}^{N \times n}$ et $\mathbf{x}_r(t)$ est défini tel que $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{T}_r \mathbf{x}(t)$. Par analogie avec le système d'ordre réduit (Eq 3.3), on a :

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{T}_r \mathbf{A} \mathbf{T}_r^{-1}, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{T}_r \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{C} \mathbf{T}_r^{-1} \quad (3.8)$$

Le modèle réduit ainsi obtenu est stable et l'erreur engendrée par la troncature est bornée. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\|\mathcal{S} - \mathcal{S}_r\|_\infty \leq 2 \sum_{i=N+1}^n \sigma_i \quad (3.9)$$

Cependant, la méthode de troncature équilibrée reste lourde à mettre en oeuvre numériquement, principalement à cause de la résolution des équations de Lyapunov (Eq 3.5), [101]. D'autre part, cette approche ne s'applique qu'à des systèmes linéaires. Pour une utilisation en Mécanique des Fluides, le système considéré doit donc être linéarisable.

³Ceci n'est valable que pour un système LTI (pour *Linear Time-Invariant*), c'est-à-dire que si les matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$, définies dans le système $\mathcal{S}$ (Eq 3.2), sont indépendantes du temps. De plus, ici le temps initial est défini tel que $t_0 = 0$. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à l'Annexe C, §C.2.

Willcox et Peraire [205] proposent un modèle réduit dit équilibré, combinant la méthode de troncature équilibrée et la décomposition orthogonale aux valeurs propres (cf. §3.3), appelé par la suite BPOD (pour *Balanced Proper Orthogonal Decomposition*). Ce modèle est comparé sur deux exemples (dont un traitant le cas d'un profil d'aile NACA 0012) à un modèle réduit POD "classique". Les résultats obtenus avec le modèle réduit BPOD sont plus proches du modèle complet utilisé, que ceux issus du modèle réduit avec POD simple. De la même façon, Rowley [176] et Ilak et Rowley [116] introduisent la décomposition orthogonale aux valeurs propres équilibrée. Ils comparent, dans le cas d'un écoulement linéaire dans un canal, leur modèle basé sur la décomposition orthogonale aux valeurs propres équilibrée aux modèles POD et de troncature équilibrée. Là encore, ils obtiennent des résultats plus précis avec le modèle combinant POD et troncature équilibrée. Néanmoins, le temps de calcul entre les différents modèles n'est pas mentionné dans tous ces travaux : il est ainsi aisé de penser que les méthodes combinant POD et troncature équilibrée sont plus coûteuses en temps de calcul qu'un modèle construit avec une POD "classique". De plus, ces méthodes n'ont été traitées que dans le cas de problèmes linéaires. Dans le but de contrôler un écoulement non-linéaire et en temps réel, cette méthode semble donc difficilement applicable.

3.2.2 Décomposition de Voronoï (CVT)

La décomposition de Voronoï, connue sous l'acronyme CVT (pour *Centroidal Voronoi Tessellation*) est une méthode basée sur le diagramme de Voronoï, développée par le mathématicien du même nom. Soit un ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{R}^P$ composé par M clichés (appelés aussi Snapshots) de l'écoulement étudié : $\Omega = \{u_m\}_{m=1}^M$. Une famille $\{V_k\}_{k=1}^N$ est définie comme une *partition de Voronoï* (ou *diagramme de Voronoï*) de Ω , si $\{V_k\}_{k=1}^N$ est une subdivision d'ensembles disjoints de Ω , soit pour $k = 1, \dots, N$:

$$\begin{cases} V_k \subset \Omega \\ V_k \cap V_i = \emptyset, \text{ pour } k \neq i \\ \bigcup_{i=1}^N V_i = \bar{\Omega} \end{cases} \quad (3.10)$$

Soit une famille de fonctions $\{\Phi_k\}_{k=1}^N$, appartenant à $\bar{\Omega}$. La *région de Voronoï* associée aux fonctions Φ_k est définie telle que :

$$V_k = \{\mathbf{u} \in \Omega : |\mathbf{u} - \Phi_k| < |\mathbf{u} - \Phi_i|, \text{ pour } i = 1, \dots, N ; i \neq k\} \quad (3.11)$$

où $|\bullet|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^P$. Les fonctions $\{\Phi_k\}_{k=1}^N$ sont alors appelés les *générateurs* de Voronoï.

La CVT consiste donc à construire la région de Voronoï, associée aux clichés de l'écoulement, où les générateurs $\{\Phi_k\}_{k=1}^N$ sont recherchés tels que l'énergie CVT (ou énergie du diagramme de Voronoï) soit minimal :

$$E(\Phi) = \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{u} \in V_i} |\mathbf{u} - \Phi_i|^2 \quad (3.12)$$

La recherche des générateurs $\{\Phi_k\}_{k=1}^N$ peut se faire efficacement par des algorithmes de descente, pour ne citer que ceux-ci (voir par exemple, [70] pour plus de détails).

La décomposition de Voronoï est une méthode utilisée principalement en compression de données et en traitement d'images (par exemple, voir [70, 71]). Plus récemment, cette méthode a été appliquée sur la résolution des équations de Navier-Stokes par Burkardt et al. [43]. Ils comparent celle-ci avec un modèle réduit construit avec une base POD, sur le cas d'un écoulement dans un canal en forme de T. Les résultats sont équivalents pour des bases de même dimension. De la même façon, dans un deuxième article, Burkardt et al. [44] confrontent la POD et la CVT, dans le cas d'une cavité ventilée. Les solutions obtenues, là encore, restent similaires avec des bases POD et CVT de taille identique. Dans ces deux articles, Burkardt et al. montrent que généralement le calcul de la base CVT est plus rapide que celui de la base POD.

3.2.3 Méthodes à paramètres variables

Les méthodes à paramètres variables permettent, dans le cas de problème à plusieurs paramètres, de construire une base évoluant en fonction de ces paramètres. Soit le problème non-linéaire stationnaire et paramétré suivant :

$$\mathcal{F}(\lambda, x) = 0 \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}, x \in X \quad (3.13)$$

où λ représente un paramètre physique, par exemple le nombre de Reynolds ou la viscosité et X un espace polynomial.

Le choix de la méthode de la base d'ordre réduit est alors différent selon les cas considérés. Nous allons reprendre ici les sous-espaces de Lagrange, de Hermite et de Taylor.

Sous-espace de Lagrange

Dans ce cas, les éléments de la base sont solutions du problème non-linéaire 3.13 à différentes valeurs λ_j du paramètre λ . Le sous-espace de Lagrange X_L est donné par :

$$X_L = \text{span} \left\{ x^j | x^j = x(\lambda_j), j = 1, \dots, M \right\}$$

Cette méthode est utilisée généralement pour les problèmes structuraux. L'avantage de cette méthode est de pouvoir réactualiser la base en fonction des variations du paramètre λ [119].

Sous-espace d'Hermite

Les éléments de la base sont solutions ainsi que leurs premières variations du problème non-linéaire 3.13 à différentes valeurs λ_j du paramètre λ . Le sous-espace d'Hermite X_H s'écrit :

$$X_H = \text{span} \left\{ y^j = y(\mu_j) \text{ et } \frac{\partial y}{\partial \mu} |_{\mu=\mu_j}, j = 1, \dots, M \right\}$$

Ito et Ravindran [119] ont utilisé les bases réduites de Lagrange et d'Hermite pour construire un modèle réduit des équations de Navier-Stokes. Ils ont testé leur modèle sur le cas d'un écoulement dans une cavité entraînée par le haut et le cas d'un écoulement dans un canal. Partant d'une base réduite générée avec plusieurs nombres de Reynolds (compris entre $Re = 100$ et $Re = 700$),

leur objectif est de construire un système dynamique avec un nombre de Reynolds différent (en l'occurrence $Re = 1200$). Leurs résultats sont plutôt encourageants et les auteurs remarquent qu'ils sont meilleurs avec un sous-espace d'Hermite qu'avec un sous-espace de Lagrange.

Sous-espace de Taylor

Dans ce cas, on suppose qu'à une valeur de μ (μ^*), la solution du problème 3.13 et ses dérivations d'ordre M sont connues. Le sous-espace est alors :

$$X_T = \text{span} \left\{ y_j \mid y_j = \frac{\partial^j y}{\partial \mu^j} \Big|_{\mu=\mu^*}, j = 0, \dots, M \right\}$$

où y^j est obtenu par différentiations successives de (3.13).

3.2.4 Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

Historique

La Décomposition en Valeurs Singulières (*Singular Value Decomposition* en anglais et souvent notée SVD) est un outil important de factorisation de matrices, introduite par Beltrami et Jordan dans les années 1870. Eckart et Young, en 1936 étendent la méthode pour les matrices rectangulaires et complexes. Avant 1965, aucune méthode efficace de calcul de cette décomposition était connue. Golub et Kahan proposèrent le premier algorithme de résolution efficace en 1965. Une variante de cet algorithme a été publiée par Golub et Reinsch en 1970, qui est encore communément utilisée aujourd'hui.

Principe

Soit A une matrice réelle de dimension $(N \times M)$, la décomposition SVD est un algorithme de factorisation qui permet d'estimer A , comme le produit de trois matrices particulières U, Σ et V telles que :

$$A = U \Sigma V^T \quad (3.14)$$

où $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $V^T \in \mathbb{R}^{M \times M}$ sont des matrices orthogonales⁴ et $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times M}$ est une matrice diagonale. Les matrices U et V contiennent respectivement les vecteurs singuliers gauche et droit de A : $U = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N)$ et $V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_M)$. La matrice Σ contient les éléments, appelés valeurs singulières de A , $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ où $p = \min(N, M)$. Elles sont rangées conventionnellement par ordre décroissant.

Problème aux valeurs propres

Considérons la décomposition SVD de A (Eq 3.14) et multiplions les deux membres de cette équations par A^T à droite :

$$AA^T = (U \Sigma V^T)(U \Sigma V^T)^T = (U \Sigma V^T)(V \Sigma U^T) \quad (3.15)$$

⁴ V^T désigne la matrice transposée de V .

Etant donné que V est une matrice orthogonale ($V^T V = \mathbb{I}$), l'égalité suivante est alors obtenue :

$$AA^T = U\Sigma^2 U^T \quad (3.16)$$

En multipliant cette équation à droite par U , le problème aux valeurs propres suivant apparaît :

$$AA^T U = \Sigma^2 U \quad (3.17)$$

(U, Σ^2) représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice AA^T de dimension $(N \times N)$. Le même raisonnement peut être fait en multipliant la décomposition SVD de A (Eq 3.14) par A^T à gauche. (V, Σ^2) représente alors la décomposition aux valeurs propres de la matrice $A^T A$ de dimension $(M \times M)$.

Il est alors aisé de remarquer que si $M \ll N$, la résolution du problème aux valeurs propres lié à la matrice $A^T A$ sera bien moins coûteuse en temps de calcul que celui lié à la matrice AA^T .

3.2.5 Avant-propos sur la POD

La décomposition de Karhunen-Loève [124] et [141] est une technique efficace qui permet d'approximer un système de dimension élevée par un autre de dimension nettement plus faible. Cette méthode consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux (vecteurs propres) représentatifs des réalisations les plus probables. Elle a été développée dans de nombreux domaines avec des noms propres aux domaines d'application. Dans le domaine de la reconnaissance de forme et l'imagerie [126, 166], mais aussi de l'analyse de données ou même l'étude de l'activité neuronale [192], la décomposition de Karhunen-Loève est connue sous le nom d'ACP (*Analyse en Composantes Principales*). Dans le domaine de la mécanique des fluides, la décomposition de Karhunen-Loève est connue sous le nom de POD (*Proper Orthogonal Decomposition* en anglais ou *Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres*) .

Historiquement, la POD a été introduite en Mécanique des Fluides, par Lumley [142] comme une méthode d'analyse de données permettant d'identifier et d'extraire les structures cohérentes d'un écoulement. A partir du milieu des années 1980, la POD est utilisée pour construire des systèmes dynamiques réduits [14] et est devenue la méthode de réduction de modèle la plus utilisée. Les nombreux types d'écoulement étudiés par des modèles d'ordre réduit obtenus par POD, ces trente dernières années, ont montré que la méthode donne des résultats satisfaisants dans de nombreux cas. C'est cette méthode qui est utilisée par la suite. Elle est décrite plus en détails dans la section suivante (§3.3).

3.2.6 Limitations des méthodes *a posteriori*

Il est important de noter que le principal inconvénient de la méthode POD (ainsi que toutes les méthodes décrites dans cette section) est qu'elle nécessite un échantillonnage de l'écoulement : c'est une méthode *a posteriori*. De plus, les bases réduites obtenues sont valables uniquement sur une plage de temps et une gamme de paramètres données, liées à l'échantillonnage effectué. Afin de s'affranchir de ces limitations, de nouvelles techniques, dites *a priori*, telles que l'APR (*A Priori Reduction*) [178, 179, 196, 197, 7, 10] et la PGD (*Proper Generalized Decomposition*) [8, 9, 55,

56, 72, 74, 73, 155], ont été développées ces dernières années. Ce sont des méthodes itératives de construction de la base qui ne nécessitent aucun échantillonnage de l'écoulement au préalable.

3.3 Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD)

3.3.1 Formulation

Soit l'ensemble $\mathcal{P}$ composé de M clichés $h(\mathbf{x}, t_i)$, caractéristiques du phénomène étudié et pris à différents instants t_i :

$$\mathcal{P} = \{h(\mathbf{x}, t_1) \dots h(\mathbf{x}, t_M)\} \quad (3.18)$$

Les fonctions $h(\mathbf{x}, t_i)$ appartiennent à un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$. La méthode POD est une méthode statistique qui permet d'approximer l'ensemble $\mathcal{P}$ composé d'un très grand nombre de données aléatoires $\{h(\mathbf{x}, t_i)\}_{i=1}^M$, par une base ϕ de faible dimension m , composée de fonctions déterministes $\{\phi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^m$ de $\mathcal{H}$. Pour cela, on cherche la fonction ϕ_1 qui approxime de façon optimale en moyenne les réalisations $\{h(\mathbf{x}, t_i)\}_{i=1}^M$. Elle vérifie donc le problème suivant :

$$\max_{\phi_1 \in \mathcal{H}} \langle (h, \phi_1)^2 \rangle \quad \text{avec } (\phi_1, \phi_1) = 1 \quad (3.19)$$

où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est l'opérateur moyenne temporelle et $(\bullet, \bullet)$ le produit scalaire, dans la norme considérée. Ce processus de maximisation peut être répété dans l'espace orthogonal à la fonction ϕ_1 et ainsi de suite, afin d'obtenir la base Φ . La fonction ϕ_l pour $2 \leq l \leq m$ est ainsi solution du problème de maximisation suivant :

$$\begin{cases} \max_{\phi_l \in \mathcal{H}} \left\langle \left(\phi_l, h - \sum_{i=1}^{l-1} (h, \phi_i) \phi_i \right)^2 \right\rangle \\ (\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq l \end{cases} \quad (3.20)$$

Comme les fonctions sont orthogonales entre elles ce problème de maximisation s'écrit, pour $1 \leq l \leq m$:

$$\max_{\phi_l \in \mathcal{H}} \langle (h, \phi_l)^2 \rangle \quad \text{avec } (\phi_i, \phi_l) = \delta_{il} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq l \quad (3.21)$$

Ce problème de maximisation se ramène alors à un problème de détermination de valeurs propres, en utilisant la théorie du calcul des variations. Le problème à résoudre est alors le suivant :

$$\langle (\phi, h) h \rangle = \lambda \phi \quad (3.22)$$

où λ sont les valeurs propres du problème. Si on suppose que l'espace $\mathcal{H}$ correspond à l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable dans le domaine Ω , le produit scalaire est défini par :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Dans ce cas, le problème (Eq 3.22) s'écrit sous la forme d'une intégrale de Fredholm :

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \phi(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

où $\mathcal{R}$ est la matrice de corrélation spatiale définie par : $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle h(\mathbf{x}'), h(\mathbf{x}) \rangle$.

3.3.2 Propriétés de la base POD

Le tenseur de corrélation spatiale $\mathcal{R}$ est symétrique et défini positif. D'après la théorie d'Hilbert-Schmidt, l'équation 3.23 possède un ensemble de solutions orthogonales dénombrables $\phi_n(\mathbf{x})$, associées à des valeurs propres λ_n réelles et positives, telles que :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m > 0 \quad (3.24)$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres possèdent les propriétés suivantes :

- Par construction, les vecteurs propres spatiaux ϕ^n sont orthogonaux et peuvent être normalisés :

$$(\phi^n, \phi^m) = \int_{\Omega} \phi^n(x) \phi^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{nm}$$

- Toute réalisation du champ aléatoire $h(\mathbf{x}, t)$ peut s'écrire sur la base de fonctions propres déterministes ϕ au sens de L^2 :

$$h(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi^n(t) \phi^n(\mathbf{x})$$

- Les coefficients aléatoires $\chi^n(t)$, projections de $h(\mathbf{x}, t)$ sur $\phi^n(\mathbf{x})$, sont déterminés de la façon suivante :

$$\chi^n(t) = (h(\bullet, t), \phi^n)$$

- Ces coefficients sont incorréllés et leurs valeurs moyennes sont les valeurs propres λ^n :

$$\langle \chi^n(t), \chi^m(t) \rangle = \delta_{nm} \lambda^n$$

- Par construction, la POD est optimale au sens de l'énergie : la base POD est plus énergétique que n'importe quelle autre base de dimension égale, [30].
- Les fonctions propres ϕ^n vérifient les conditions aux limites et respectent les symétries de l'écoulement. Si $h(\mathbf{x}, t)$ représente le champ de vitesses, les modes POD ϕ^n sont à divergence nulle pour un écoulement incompressible.
- La POD peut être également vue comme une généralisation de la décomposition de Fourier, lorsque les directions de l'écoulement ne peuvent plus être supposées homogènes ou périodiques.

3.3.3 Méthode POD/Snapshots

La résolution du problème aux valeurs propres (Eq 3.23) est cependant souvent coûteuse en temps de calcul⁵, lorsque les clichés sont issus de simulations numériques. Afin de diminuer la taille du problème à résoudre, Sirovich [190], introduit la méthode dite des "Snapshots". Celle-ci repose sur l'hypothèse d'ergodicité : *l'évolution d'un système aléatoire au cours du temps apporte*

⁵La dimension de ce problème est de $4 \times n_1 \times n_2$ en 2D et de $9 \times n_1 \times n_2 \times n_3$ en 3D, où n_i représente le nombre de points de maillage dans la direction x_i .

la même information qu'un ensemble de réalisations. Au lieu d'utiliser un "maillage" spatial, un "maillage" temporel est employé, ce qui permet de réduire considérablement la dimension du problème. La méthode des Snapshots est décrite ci-dessous.

Considérons une fonction propre de la décomposition orthogonale ϕ et cherchons les coefficients χ^k tels que :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \chi^k h(\mathbf{x}, t_k) \quad (3.25)$$

où M est le nombre de réalisations nécessaires et $h(\mathbf{x}, t_i)$ pour $i = 1, \dots, M$ les réalisations de l'écoulement. Le pas de temps entre deux temps consécutifs t_i et t_{i+1} doit être suffisamment grand pour que les clichés soient incorréllés. Sous l'hypothèse d'ergodicité, on a :

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(\mathbf{x}, t_i) h(\mathbf{x}', t_i) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(\mathbf{x}, t_i) h(\mathbf{x}', t_i) \quad (3.26)$$

Ainsi, en remplaçant les équations (Eqs 3.25 et 3.26) dans l'intégrale de Fredholm (Eq 3.23) et par définition du produit scalaire dans L^2 , on obtient :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{1}{M} (h(t_k), h(t_i)) \chi^k h(\mathbf{x}, t_i) = \lambda \sum_{k=1}^M \chi^k h(\mathbf{x}, t_k)$$

Une condition suffisante, pour que $\chi^k, k = 1, \dots, M$ soit solution de l'équation (Eq 3.23), s'écrit :

$$\sum_{k=1}^M \frac{1}{M} (h(t_k), h(t_i)) \chi^k = \lambda \chi^i \text{ pour } i = 1, \dots, M \quad (3.27)$$

Le problème aux valeurs propres de dimension initiale N (nombre de noeuds) devient par la **méthode des Snapshots** un problème de dimension M (nombre de clichés) que l'on peut écrire sous la forme d'une intégrale de Fredholm :

$$\int_T \mathcal{C}(t, t') \chi(t') dt' = \lambda \chi(t), \quad \text{avec} \quad \mathcal{C}(t, t') = (h(t'), h(t)) \quad (3.28)$$

Les coefficients temporels $\chi(t)$ sont les vecteurs propres associés au problème aux valeurs propres, donnée par l'équation 3.28. La base POD $\phi(\mathbf{x})$ est obtenue à l'aide de l'équation 3.25, une fois le problème aux valeurs propres résolu.

La méthode des Snapshots permet de réduire le temps de calcul, lorsque le nombre de points dans l'espace est bien supérieur au nombre d'échantillons temporels. Elle est plutôt utilisée dans le cas de simulations numériques et la méthode classique pour traiter des données expérimentales. Les propriétés des fonctions propres dans la base POD/Snapshots sont similaires à celles de la POD classique (cf. §3.3.2).

3.4 POD/ROM obtenu par projection de Galerkin

3.4.1 Généralités

Pour un fluide newtonien et incompressible, la dynamique du fluide est régie par les équations de Navier-Stokes et la température par une équation de convection-diffusion. Celles-ci sont couplées par une approximation de Boussinesq⁶. Ce système d'équations s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & (3.29a) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + g\beta(\theta - \theta_{ini})\mathbf{e}_y & (3.29b) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \theta &= \gamma \Delta \theta & (3.29c) \end{cases}$$

sous les conditions initiales $\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ et $\theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x})$. Les conditions aux limites dépendent du cas étudié. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ représente la vitesse du fluide, $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ la température du fluide et $p = p(\mathbf{x}, t)$ la pression. ρ , ν , g , β , θ_{ini} et γ représentent respectivement la masse volumique, la viscosité cinématique, la constante de gravité, le coefficient d'expansion, la température initiale dans le domaine considéré et la diffusivité thermique.

Le champ de vitesses, le champ scalaire et le champ de pression sont tout d'abord décomposés en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \theta(\mathbf{x}, t) = \bar{\theta}(\mathbf{x}) + \theta'(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}) + p'(\mathbf{x}, t) \quad (3.30)$$

où $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, $\bar{\theta}(\mathbf{x})$ et $\bar{p}(\mathbf{x})$ correspondent aux champs moyens définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{T} \int_T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt \quad , \quad \bar{\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_T \theta(\mathbf{x}, t) dt \\ \bar{p}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{T} \int_T p(\mathbf{x}, t) dt \end{aligned} \quad (3.31)$$

La décomposition POD est effectuée sur la partie fluctuante du champ de vitesses et du champ scalaire :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N^u} a_i(t) \Phi_i^u(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \theta'(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N^\theta} b_i(t) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}) \quad (3.32)$$

$\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$ correspondent respectivement aux coefficients temporels de vitesse et du champ scalaire. N^u et N^θ représentent respectivement le nombre de modes POD tronqué (modes les plus "énergétiques") associé à la vitesse et au champ scalaire. Ils sont de dimension nettement réduite par rapport au nombre de degré de liberté du problème complet (quelques dizaines $\ll$ des centaines voire des millions).

⁶Dans ce manuscrit, les équations de quantité de mouvement sont toujours écrites sous cette hypothèse, sauf mention indiquée. En effet, le champ scalaire $\theta(\mathbf{x}, t)$ peut également représenter un scalaire passif, comme une concentration. Dans ce cas, on considère que $\beta = 0$.

Les modes POD de vitesse $\Phi^u(\mathbf{x})$ sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres (Eq 3.28), où la matrice de corrélation est celle associée au champ de vitesses $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Ils sont par définition orthogonaux, vérifient les conditions aux limites et sont à divergence nulle : l'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ est alors vérifiée automatiquement. Les modes POD du champ scalaire $\Phi^\theta(\mathbf{x})$ sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres (Eq 3.28), où la matrice de corrélation est celle associée au champ scalaire $\theta(\mathbf{x}, t)$. Ils sont par définition orthogonaux et vérifient les conditions aux limites.

3.4.2 Construction du modèle d'ordre réduit

Les décompositions du champ de vitesses, du champ scalaire et du champ de pression (Eqs 3.30, 3.31 et 3.32) sont tout d'abord introduites dans les équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion (Eq 3.29). Les modes POD de vitesses $\Phi^u(\mathbf{x})$ étant à divergence nulle, l'équation de continuité est exactement vérifiée. Pour obtenir le modèle d'ordre réduit, une projection de Galerkin des équations de quantité de mouvement et de convection-diffusion est effectuée, respectivement sur les bases POD de vitesses $\Phi^u(\mathbf{x})$ et du champ scalaire $\Phi^\theta(\mathbf{x})$. Le système d'équations différentielles, vérifiées par les coefficients temporels de vitesse $\mathbf{a}(t) = [a_1 \cdots a_{N^u}]^T$ et du champ scalaire $\mathbf{b}(t) = [b_1 \cdots b_{N^\theta}]^T$, s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} C_{ijk} a_j a_k + \sum_{j=1}^{N^u} (D_{ij} + A_{ij}) a_j + \sum_{j=1}^{N^\theta} B_{ij} b_j + E_i + F_i \quad (3.33)$$

pour $i = 1, \dots, N^u$

$$\frac{db_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{ijk}^\theta a_j b_k + \sum_{j=1}^{N^\theta} (D_{ij}^\theta + B_{ij}^\theta) b_j + \sum_{j=1}^{N^u} A_{ij}^\theta a_j + E_i^\theta \quad (3.34)$$

pour $i = 1, \dots, N^\theta$

Les coefficients du système dynamique réduit, lié aux équations de quantité de mouvement (Eq 3.33), s'écrivent tels que :

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= - \left(\Phi_i^u, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right) \\ D_{ij} &= - \left(\Phi_i^u, [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right) \\ A_{ij} &= \nu \left(\Phi_i^u, \Delta \Phi_j^u \right) \\ B_{ij} &= g\beta \left(\Phi_i^u, \Phi_j^\theta \mathbf{e}_y \right) \\ E_i &= \left(\Phi_i^u, \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} + g\beta(\bar{\theta} - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y \right) \\ F_i &= -\frac{1}{\rho} \left(\Phi_i^u, \nabla p' \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Il apparaît alors un terme de pression F_i qui n'est pas possible de décomposer de manière directe sur la base POD. Le traitement de ce terme n'est pas aisé : ce sujet sera abordé dans la section §3.4.4.

Les coefficients du système dynamique réduit, lié à l'équation de convection-diffusion (Eq 3.34), sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 C_{ijk}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^\theta \right) \\
 D_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^\theta \right) \\
 B_{ij}^\theta &= \gamma \left(\Phi_i^\theta, \Delta \Phi_j^\theta \right) \\
 A_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) \\
 E_i^\theta &= \left(\Phi_i^\theta, \gamma \Delta \bar{\theta} - [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\theta} \right)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Après avoir calculés les coefficients des systèmes dynamiques (Eqs 3.35 et 3.36), les équations différentielles (Eqs 3.33 et 3.34) sont intégrées en temps avec un algorithme classique de type Runge-Kutta (d'ordre 4 par exemple). La résolution des modèles réduits est alors très rapide, de l'ordre de quelques minutes contre des semaines, voire des mois pour un modèle complet.

3.4.3 Méthodes de stabilisation de la POD/Galerkin

Afin de limiter le temps de calcul, l'intérêt de la construction d'un système dynamique est de garder un nombre relativement faible de modes propres issus de la POD. Les N_{modes} premiers modes les plus énergétiques sont alors uniquement conservés, mais ce sont les petites échelles qui sont responsables de la dissipation énergétique. La non-prise en compte de ces petites échelles peut rendre le système instable. Par conséquent, il est souvent nécessaire de modéliser les échanges d'énergies dus aux modes non-résolus. Différentes techniques ont été développées pour pallier à ce problème. On peut distinguer d'une part, les approches visant à améliorer la structure et le contenu de la base tronquée des modes POD sans modifier la forme du modèle réduit obtenu par projection de Galerkin et d'autre part, celles qui modifient le modèle réduit, soit en le complétant par l'introduction de termes supplémentaires, soit en corrigeant les coefficients.

L'introduction d'une viscosité artificielle a été une des premières solutions adoptées pour stabiliser le système. Plusieurs stratégies ont été déployées pour introduire ce terme. La plus simple est d'introduire une viscosité artificielle μ_a , telle que : $\mu_{corr} = \mu + \mu_a$, où μ est la viscosité physique. Une variante de cette méthode, utilisée initialement par Rempfer [172], consiste à attribuer à chaque mode un certain niveau de dissipation : la viscosité additionnelle attribuée au i -ième mode POD est donnée par $\mu_{a,i} = i \times cste$ où $cste$ est une constante déterminée de façon empirique après une série d'essais. La correction introduite agit sur l'ensemble des termes diffusifs du modèle d'ordre réduit. L'ajout d'une viscosité turbulente de type Heisenberg est également utilisée, notamment par Podvin et al. [162] ou Ukeiley et al. [195]. Sirisup et Karniadakis [189] introduisent quant à eux, une viscosité spectrale évanescence pour stabiliser le modèle d'ordre réduit à long terme.

Cazemier et al. [49] ont alors proposé une autre méthode pour tenir compte des modes POD négligés en introduisant un terme d'amortissement linéaire par l'intermédiaire de considérations

énergétiques. L'idée est de déterminer ce terme en imposant que la moyenne du taux de variation de l'énergie dans la direction de chaque mode POD est conservée. Iollo et al. [117, 118] suggèrent de définir la POD dans l'espace de Sobolev normé $\mathcal{H}_1$, afin d'introduire la partie dissipative directement dans le produit scalaire.

Une autre façon de stabiliser le modèle POD-Galerkin consiste à calibrer les coefficients a_k afin de retrouver la dynamique initiale. Le principe est d'utiliser l'information temporelle issue des Snapshots et de minimiser l'erreur entre les simulations DNS et le modèle réduit utilisé. Couplet et al [60] ont cherché ainsi à optimiser tous les coefficients du modèle d'ordre réduit.

Rempfer [174], quant à lui, propose de compléter la base POD avec des éléments appartenant au noyau de l'opérateur de corrélation associé à la POD et de procéder à une analyse de Floquet permettant de déterminer éventuellement les modes propres instables dans la base POD générée.

Bergmann et al. [28] construisent quant à eux une base spatiale globale POD : $\Phi = (\Phi^u, \Phi^p)^T$ pour les champs à la fois de vitesse et de pression. Les champs fluctuants sont approximatés par : $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N^u} a_i(t) \Phi_i^u(\mathbf{x})$ et $p'(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N^p} a_i(t) \Phi_i^p(\mathbf{x})$. Les coefficients temporels $a_i(t)$ sont identiques pour la vitesse et la pression. Après introduction de ces décompositions dans les équations de Navier-Stokes, une projection de Galerkin de ces équations sur la base POD $\Phi(\mathbf{x})$ est réalisée. Étant donné que ce problème dispose de plus d'inconnues que d'équations, l'équation de continuité est pénalisée avec un coefficient arbitraire, appelé α . Une fois la projection de Galerkin de ces équations sur la base POD $\Phi(\mathbf{x})$ effectuée, les résidus générés par les décompositions POD sont introduits.

3.4.4 Traitement du terme de pression

En plus des problèmes de stabilité que peut engendrer la POD/Galerkin, le traitement du terme de pression $F_i = -\frac{1}{\rho} (\Phi_i^u, \nabla p')$ n'est pas trivial. Étant donné que les modes POD de vitesse sont à divergence nulle par construction, ce terme peut alors s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$(\Phi_i^u, \nabla p') = \int_{\Omega} \Phi_i^u \cdot \nabla p' d\Omega = \int_{\Gamma} p' \Phi_i^u \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \text{pour } i = 1, \dots, N^u \quad (3.37)$$

Le terme de pression F_i ne dépend donc pas uniquement de la valeur de la pression sur les bords Γ . Si le champ fluctuant de vitesse est nul aux bords, alors $\Phi_i^u|_{\Gamma} = 0$ et le terme de pression F_i s'annule exactement. En revanche si le champ fluctuant de vitesse n'est pas nul aux frontières, le terme F_i doit être pris en compte, alors qu'il est bien souvent négligé. Il a été montré que dans certains cas, par exemple pour les écoulements cisailés [153], la prise en compte de ce terme est nécessaire afin d'obtenir une bonne précision sur le champ de vitesses.

Ainsi plusieurs méthodes ont été développées ces vingt dernières années afin de surmonter ce problème. Ces techniques visent alors soit à modéliser [14], soit à faire disparaître le terme de pression. Rempfer [173] utilise une formulation en vorticité du système dynamique pour éliminer le terme de pression. L'inconvénient de cette méthode est que les coefficients associés au modèle réduit contiennent des dérivées d'ordre 3, ce qui peut nuire à la précision du modèle réduit. Une

autre approche, toujours visant à s'affranchir du terme de pression, a été mis en place par Allery [6]. Il propose une formulation en contrainte du système dynamique dans laquelle les conditions aux limites en vitesse sont transformées en conditions aux limites en contrainte. Cette technique est employée en interaction fluide-structure, notamment par Liberge et Hamdouni [137].

Galletti et al. [84] relient, quant à eux, le terme de pression aux coefficients temporels de vitesse avec le modèle linéaire suivant : $-\left(\Phi_j^u, \nabla p\right) = C_{ij} a_i(t)$. Les coefficients C_{ij} sont obtenus par minimisation de la fonctionnelle $J' = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{n=1}^N (\dot{a}_i(t_n) - \hat{\dot{a}}_i(t_n))^2$ où $\dot{a}_i(t_n)$ correspond à l'équation différentielle réduite en vitesse et $\hat{\dot{a}}_i(t_n)$ à la dérivation temporelle des coefficients temporels de vitesse obtenus par POD. Noack et al. [153] proposent de leur côté de modéliser la pression par : $p = \sum_{j=1}^{N''} \sum_{k=1}^{N''} p_{jk} a_j a_k$ où chaque coefficient p_{jk} est obtenu en résolvant une équation de Poisson associée à des conditions aux limites de type Neumann.

3.5 POD/ROM obtenu par projections basées sur la minimisation des résidus

L'utilisation des méthodes basées sur la minimisation des résidus des équations est courante dans la communauté des éléments finis [121] et a été récemment introduite, en réduction des problèmes linéaires paramétriques [41, 42]. Leblond et al. [134] ont étendu cette technique à la réduction des équations non-linéaires de Navier-Stokes. Cette méthode, nommée ici MRP1, consiste à construire un modèle d'ordre réduit par POD en minimisant les résidus relatifs aux équations de Navier-Stokes et de Poisson. Une variante de cette méthode, appelée ici MRP2, est ensuite proposée. Elle consiste à construire un modèle d'ordre réduit uniquement à partir de la minimisation du résidu des équations de quantité de mouvement. Dans un premier temps, les étapes communes aux méthodes de projection MRP1 et MRP2 sont détaillées. Puis, les deux méthodes de projection sont présentées tour à tour.

En premier lieu, une discrétisation temporelle des équations de quantité de mouvement et de convection-diffusion (Eq 3.29) par un schéma d'Euler est réalisée⁷. Tous les termes sont pris implicites, à l'exception des termes d'advection et de Boussinesq⁸ :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} & = 0 & (3.38a) \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + [\mathbf{u}^n \cdot \nabla] \mathbf{u}^n + \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} - g\beta(\theta^n - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y & = 0 & (3.38b) \\ \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\delta t} + [\mathbf{u}^n \cdot \nabla] \theta^n - \gamma \Delta \theta^{n+1} & = 0 & (3.38c) \end{cases}$$

où δt est le pas de temps défini par $\delta t = T/N_t$, N_t le nombre de pas de temps temporels. L'exposant n correspond au n -ième pas de temps et $n+1$ est considéré tel que $t^{n+1} = t^n + \delta t$.

⁷La méthode peut être également appliquée avec un autre schéma de discrétisation temporelle.

⁸La projection basée sur la minimisation des résidus (MRP) est présentée ici sous la forme dimensionnelle des équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion. Leblond et al. [134] les donnent sous leur forme adimensionnelle.

Le champ de vitesses, le champ scalaire et le champ de pression se décomposent en une partie moyenne et une partie fluctuante selon les équations 3.30 et 3.31. La décomposition POD est réalisée sur la partie fluctuante des champs considérés (Eq 3.32), y compris sur le champ fluctuant de pression. En notation discrète, ces décompositions s'écrivent :

$$\mathbf{u}'^n(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{N^u} a_i^n \Phi_i^u(\mathbf{x}) \quad , \quad \theta'^n(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{N^\theta} b_i^n \Phi_i^\theta(\mathbf{x}) \quad (3.39)$$

$$p'^n(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{N^p} c_i^n \Phi_i^p(\mathbf{x}) \quad (3.40)$$

avec N^p le nombre de modes tronqué de la pression, c^n le coefficient temporel lié à la pression et $\Phi^p(\mathbf{x})$ la base spatiale POD de pression.

La seconde étape consiste à remplacer ces décompositions dans les équations discrétisées (Eq 3.38). Étant donné que les modes POD de vitesses sont à divergence nulle par construction, l'équation de continuité discrétisée (Eq 3.38a) est automatiquement satisfaite. Comme les décompositions POD données par ces équations sont des approximations du champ fluctuant, un résidu apparaît dans chacune des équations résultantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N^u} a_i^{n+1} [\mathbb{I} - \delta t \nu \Delta] \Phi_i^u + \delta t \sum_{i=1}^{N^p} c_i^{n+1} \Delta \Phi_i^p - g(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) = \mathcal{R}_{n+1}^u \\ \sum_{i=1}^{N^\theta} b_i^{n+1} [\mathbb{I} - \delta t \gamma \Delta] \Phi_i^\theta - l(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) = \mathcal{R}_{n+1}^\theta \end{array} \right. \quad (3.41)$$

où $\mathbb{I}$ est l'identité. $\mathcal{R}_{n+1}^u$ et $\mathcal{R}_{n+1}^\theta$ représentent respectivement les résidus relatifs à l'équation de quantité de mouvement et à l'équation de convection-diffusion au pas de temps $n + 1$. Les quantités vectorielles $\mathbf{a}^n$ et $\mathbf{b}^n$ regroupent respectivement les coefficients temporels de vitesse et du champ scalaire, au pas de temps n , tels que : $\mathbf{a}^n = (a_1^n \cdots a_{N^u}^n)^T$ et $\mathbf{b}^n = (b_1^n \cdots b_{N^\theta}^n)^T$. Les fonctions $g(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)$ et $l(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)$ s'expriment comme :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) &= -\delta t \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} a_j^n a_k^n [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u + \sum_{j=1}^{N^u} a_j^n \Phi_j^u \\ &\quad - \delta t \sum_{j=1}^{N^u} a_j^n \left([\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right) + \delta t g\beta \sum_{j=1}^{N^\theta} b_j^n \Phi_j^\theta \mathbf{e}_y \\ &\quad + \delta t \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \delta t [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{\rho} \nabla \bar{p} + \delta t g\beta (\bar{\theta} - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y \\ l(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) &= -\delta t \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^\theta} a_j^n b_k^n [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^\theta - \delta t \sum_{j=1}^{N^\theta} b_j^n [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^\theta \\ &\quad - \delta t \sum_{j=1}^{N^u} a_j^n [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\theta} + \sum_{j=1}^{N^\theta} b_j^n \Phi_j^\theta \\ &\quad - \delta t [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\theta} + \delta t \gamma \Delta \bar{\theta} \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.5.1 MRP1

Pour fermer le système (cinq équations pour quatre inconnues), Leblond et al. [134] proposent alors d'introduire la divergence de l'équation de quantité de mouvement discrétisée et réduite, correspondant ainsi à une équation de Poisson⁹ :

$$\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N^p} c_i^{n+1} \Delta \Phi_i^p - \tilde{h}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) = \mathcal{R}_{n+1}^p \quad (3.43)$$

où la fonction $\tilde{h}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)$ s'exprime telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) = & - \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} a_j^n a_k^n \nabla \cdot \left\{ [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right\} - \nabla \cdot \{ [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \} - \frac{1}{\rho} \Delta \bar{p} \\ & - \sum_{j=1}^{N^u} a_j^n \nabla \cdot \left\{ [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right\} + g\beta \sum_{j=1}^{N^\theta} b_j^n \frac{\partial \Phi_j^\theta}{\partial y} + g\beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Le résidu $\mathcal{R}_{n+1}^p$ apparaît puisque la décomposition POD du champ de pression est une approximation du champ total (Eq 3.40). Un résidu global $\mathcal{R}_{n+1}(\alpha^{n+1})$ peut alors être défini tel que :

$$\mathcal{R}_{n+1}(\alpha^{n+1}) = \left(\mathcal{R}_{n+1}^u, \mathcal{R}_{n+1}^\theta, \mathcal{R}_{n+1}^p \right)^T, \quad \text{où} \quad \alpha^{n+1} = (\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{b}^{n+1}, \mathbf{c}^{n+1})^T \quad (3.45)$$

Afin de minimiser ce résidu, la fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}(\alpha^{n+1})$ est introduite :

$$\mathcal{L}(\alpha^{n+1}) = \|\mathcal{R}_{n+1}(\alpha^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.46)$$

Ainsi, les coefficients temporels α^{n+1} sont cherchés tels que la fonctionnelle $\mathcal{L}(\alpha^{n+1})$ soit minimale. Ils doivent alors satisfaire la condition d'optimalité suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial \alpha^{n+1}} \cdot \delta \alpha^{n+1} = 0 \quad (3.47)$$

Plus précisément, les variations de la fonctionnelle $\mathcal{L}(\alpha^{n+1})$ s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial a_i^{n+1}} \cdot \delta a_i^{n+1} = 2 \int_{\Omega} \begin{pmatrix} [\mathbb{I} - \delta t \nu \Delta] \Phi^u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{R}_{n+1} d\Omega \delta a_i^{n+1} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial b_i^{n+1}} \cdot \delta b_i^{n+1} = 2 \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ [\mathbb{I} - \delta t \gamma \Delta] \Phi^\theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{R}_{n+1} d\Omega \delta b_i^{n+1} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial c_i^{n+1}} \cdot \delta c_i^{n+1} = 2 \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{\delta t}{\rho} \nabla \Phi_i^p \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \Delta \Phi_i^p \end{pmatrix} \cdot \mathcal{R}_{n+1} d\Omega \delta c_i^{n+1} \quad (3.50)$$

⁹En fait, l'ajout de l'équation de Poisson n'est pas nécessaire. Ce point sera traité dans la section suivante §3.5.2.

La condition d'optimalité (Eq 3.47) permet d'obtenir alors le modèle d'ordre réduit suivant :

$$\begin{cases} ([\mathbb{I} - \delta t \nu \Delta] \Phi_i^u, \mathcal{R}_{n+1}^u) = 0 & i = 1, \dots, N^u \\ ([\mathbb{I} - \delta t \gamma \Delta] \Phi_i^\theta, \mathcal{R}_{n+1}^\theta) = 0 & i = 1, \dots, N^\theta \\ \delta t (\nabla \Phi_i^p, \mathcal{R}_{n+1}^p) + (\Delta \Phi_i^p, \mathcal{R}_{n+1}^p) = 0 & i = 1, \dots, N^p \end{cases} \quad (3.51)$$

où $(\bullet, \bullet)$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. Les nouveaux modes de projection sont notés, par la suite Ψ_i^u et Ψ_i^θ , et sont définis comme :

$$\Psi_i^u = [\mathbb{I} - \delta t \nu \Delta] \Phi_i^u \quad \text{et} \quad \Psi_i^\theta = [\mathbb{I} - \delta t \gamma \Delta] \Phi_i^\theta \quad (3.52)$$

En injectant les définitions des résidus (Eqs 3.41 et 3.43), le modèle d'ordre réduit à résoudre peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{pu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{n+1} \\ \mathbf{b}^{n+1} \\ \mathbf{c}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) \\ \mathbf{L}^1(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) \\ \mathbf{H}^1(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

avec les termes de gauche définis tels que :

$$\begin{aligned} M_{ij}^{uu} &= (\Psi_i^u, \Psi_j^u) & i, j = 1, \dots, N^u \\ M_{ij}^{up} &= \delta t (\Psi_i^u, \nabla \Phi_j^p) & i = 1, \dots, N^u \text{ et } j = 1, \dots, N^p \\ M_{ij}^{pu} &= \frac{\delta t}{\rho} (\nabla \Phi_i^p, \Psi_j^u) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\ M_{ij}^{\theta\theta} &= (\Psi_i^\theta, \Psi_j^\theta) & i, j = 1, \dots, N^\theta \\ M_{ij}^{pp} &= (\Delta \Phi_i^p, \Delta \Phi_j^p) + \delta t (\nabla \Phi_i^p, \nabla \Phi_j^p) & i, j = 1, \dots, N^p \end{aligned} \quad (3.54)$$

et les termes de droite :

$$\begin{aligned} G_i^1 &= \sum_{j=1}^{N_u} A_{ij} a_j^n + \delta t \left(\sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N_u} C_{ijk} a_j^n a_k^n + \sum_{j=1}^{N_u} D_{ij} a_j^n + \sum_{j=1}^{N_\theta} F_{ij} b_j^n + E_i \right) \\ H_i^1 &= \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N_u} C_{ijk}^p a_j^n a_k^n + \sum_{j=1}^{N_u} D_{ij}^p a_j^n + \sum_{j=1}^{N_\theta} F_{ij}^p b_j^n + E_i^p \\ &\quad + \delta t \sum_{j=1}^{N_u} \tilde{A}_{ij} a_j^n + \delta t^2 \left(\sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N_u} \tilde{C}_{ijk} a_j^n a_k^n + \sum_{j=1}^{N_u} \tilde{D}_{ij} a_j^n + \sum_{j=1}^{N_\theta} \tilde{F}_{ij} b_j^n + \tilde{E}_i \right) \\ L_i^1 &= \sum_{j=1}^{N_\theta} A_{ij}^\theta b_j^n + \delta t \left(\sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N_\theta} C_{ijk}^\theta a_j^n b_k^n + \sum_{j=1}^{N_\theta} D_{ij}^\theta b_j^n + \sum_{j=1}^{N_u} F_{ij}^\theta a_j^n + E_i^\theta \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

avec les coefficients du système dynamique réduit :

$$\begin{aligned}
C_{ijk} &= - \left(\Psi_i^u, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right) & i, j, k = 1, \dots, N^u \\
D_{ij} &= - \left(\Psi_i^u, [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right) & i, j = 1, \dots, N^u \\
A_{ij} &= \left(\Psi_i^u, \Phi_j^u \right) & i, j = 1, \dots, N^u \\
F_{ij} &= g\beta \left(\Psi_i^u, \Phi_j^\theta \mathbf{e}_y \right) & i = 1, \dots, N^u \text{ et } j = 1, \dots, N^\theta \\
E_i &= \left(\Psi_i^u, \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} + g\beta(\bar{\theta} - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y \right) & i = 1, \dots, N^u \\
\\
\tilde{C}_{ijk} &= - \left(\nabla \Phi_i^p, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j, k = 1, \dots, N^u \\
\tilde{D}_{ij} &= - \left(\nabla \Phi_i^p, [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
\tilde{A}_{ij} &= \left(\nabla \Phi_i^p, \Phi_j^u \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
\tilde{F}_{ij} &= g\beta \left(\nabla \Phi_i^p, \Phi_j^\theta \mathbf{e}_y \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^\theta \\
\tilde{E}_i &= \left(\nabla \Phi_i^p, \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} + g\beta(\bar{\theta} - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y \right) & i = 1, \dots, N^p \\
\\
C_{ijk}^p &= - \left(\Delta \Phi_i^p, \nabla \cdot \left\{ [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right\} \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j, k = 1, \dots, N^u \\
D_{ij}^p &= - \left(\Delta \Phi_i^p, \nabla \cdot \left\{ [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right\} \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
F_{ij}^p &= g\beta \left(\Delta \Phi_i^p, \frac{\partial \Phi_j^\theta}{\partial y} \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^\theta \\
E_i^p &= \left(\Delta \Phi_i^p, \nabla \cdot \left\{ -[\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right\} - \Delta \bar{p} + g\beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) & i = 1, \dots, N^p \\
\\
C_{ijk}^\theta &= - \left(\Psi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^\theta \right) & i, k = 1, \dots, N^\theta \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
D_{ij}^\theta &= - \left(\Psi_i^\theta, [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^\theta \right) & i, j = 1, \dots, N^\theta \\
A_{ij}^\theta &= \left(\Psi_i^\theta, \Phi_j^\theta \right) & i, j = 1, \dots, N^\theta \\
F_{ij}^\theta &= - \left(\Psi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) & i = 1, \dots, N^\theta \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
E_i^\theta &= \left(\Psi_i^\theta, \gamma \Delta \bar{\theta} - [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) & i = 1, \dots, N^\theta
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Le système matriciel réduit (Eq 3.53), de taille $N^u + N^\theta + N^p$, peut alors être facilement résolu. Les coefficients matriciels (Eq 3.54) ainsi que les coefficients du système dynamique réduit (Eq 3.56) sont calculés une *seule* fois en amont.

3.5.2 MRP2

La méthode de projection MRP2, que nous proposons dans ce manuscrit, est décrite à présent. Également basée sur le principe de minimisation des résidus, cette méthode s'affranchit de l'équation de Poisson (Eq 3.43) utilisée avec la projection MRP1. Un résidu global est tout d'abord défini dépendant uniquement des résidus de quantité de mouvement et de convection-diffusion (Eq 3.41) :

$$\mathcal{R}_{n+1}(\alpha^{n+1}) = \left(\mathcal{R}_{n+1}^u, \mathcal{R}_{n+1}^\theta \right)^T \text{ où } \alpha^{n+1} = (\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{b}^{n+1}, \mathbf{c}^{n+1})^T \tag{3.57}$$

Les coefficients temporels α^{n+1} doivent minimiser la fonctionnelle de Lagrange suivante :

$$\mathcal{L}(\alpha^{n+1}) = \|\mathcal{R}_{n+1}(\alpha^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \mathcal{R}_{n+1}(\alpha^{n+1}) \cdot \mathcal{R}_{n+1}(\alpha^{n+1}) d\Omega \quad (3.58)$$

et satisfaire la condition d'optimalité suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial a_i^{n+1}} \cdot \delta a_i^{n+1} = \frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial b_i^{n+1}} \cdot \delta b_i^{n+1} = \frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial c_i^{n+1}} \cdot \delta c_i^{n+1} = 0 \quad (3.59)$$

Les variations de la fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}(\alpha^{n+1})$ sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial a_i^{n+1}} \cdot \delta a_i^{n+1} &= 2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{R}_{n+1}^u}{\partial a_i^{n+1}} \cdot \mathcal{R}_{n+1}^u d\Omega \delta a_i^{n+1} \\ &= 2 \int_{\Omega} [\mathbb{I} - \delta t \nu \Delta] \Phi_i^u \cdot \mathcal{R}_{n+1}^u d\Omega \delta a_i^{n+1} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial b_i^{n+1}} \cdot \delta b_i^{n+1} &= 2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{R}_{n+1}^\theta}{\partial b_i^{n+1}} \cdot \mathcal{R}_{n+1}^\theta d\Omega \delta b_i^{n+1} \\ &= 2 \int_{\Omega} [\mathbb{I} - \delta t \gamma \Delta] \Phi_i^\theta \cdot \mathcal{R}_{n+1}^\theta d\Omega \delta b_i^{n+1} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\alpha^{n+1})}{\partial c_i^{n+1}} \cdot \delta c_i^{n+1} &= 2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{R}_{n+1}^u}{\partial c_i^{n+1}} \cdot \mathcal{R}_{n+1}^u d\Omega \delta c_i^{n+1} \\ &= 2 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i^p \cdot \mathcal{R}_{n+1}^u d\Omega \delta c_i^{n+1} \end{aligned} \quad (3.62)$$

qui conduisent à l'expression du modèle réduit obtenu par la projection MRP2, pour $n = 0, \dots, N_T - 1$:

$$\begin{cases} ([\mathbb{I} - \delta t \nu \Delta] \Phi_i^u, \mathcal{R}_{n+1}^u) = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, N^u \\ ([\mathbb{I} - \delta t \gamma \Delta] \Phi_i^\theta, \mathcal{R}_{n+1}^\theta) = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, N^\theta \\ (\nabla \Phi_i^p, \mathcal{R}_{n+1}^u) = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, N^p \end{cases} \quad (3.63)$$

En notant $\Psi_i^u = [\mathbb{I} - \delta t \nu \Delta] \Phi_i^u$ et $\Psi_i^\theta = [\mathbb{I} - \delta t \gamma \Delta] \Phi_i^\theta$ ainsi qu'en substituant les expressions des résidus (Eq 3.41) dans le système précédent, le modèle réduit prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\Psi_i^u, \sum_{j=1}^{N^u} a_j^{n+1} \Psi_j^u + \frac{\delta t}{\rho} \sum_{j=1}^{N^p} c_j^{n+1} \nabla \Phi_j^p \right) &= (\Psi_i^u, g(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)) \\ &\text{pour } i = 1, \dots, N^u \end{aligned} \right. \quad (3.64a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\Psi_i^\theta, \sum_{i=1}^{N^\theta} b_i^{n+1} \Psi_i^\theta \right) &= (\Psi_i^\theta, l(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)) \\ &\text{pour } i = 1, \dots, N^\theta \end{aligned} \right. \quad (3.64b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\nabla \Phi_i^p, \sum_{j=1}^{N^u} a_j^{n+1} \Psi_j^u + \delta t \sum_{j=1}^{N^p} c_j^{n+1} \nabla \Phi_j^p \right) &= (\nabla \Phi_i^p, g(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)) \\ &\text{pour } i = 1, \dots, N^p \end{aligned} \right. \quad (3.64c)$$

Il peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{pu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{n+1} \\ \mathbf{b}^{n+1} \\ \mathbf{c}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^2(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) \\ \mathbf{L}^2(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) \\ \mathbf{H}^2(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

où les termes de gauche sont donnés par :

$$\begin{aligned} M_{ij}^{uu} &= (\Psi_i^u, \Psi_j^u) & i, j &= 1, \dots, N^u \\ M_{ij}^{up} &= \frac{\delta t}{\rho} (\Psi_i^u, \nabla \Phi_j^p) & i &= 1, \dots, N^u ; j = 1, \dots, N^p \\ M_{ij}^{pu} &= (\nabla \Phi_i^p, \Psi_j^u) & i &= 1, \dots, N^p ; j = 1, \dots, N^u \\ M_{ij}^{\theta\theta} &= (\Psi_i^\theta, \Psi_j^\theta) & i, j &= 1, \dots, N^\theta \\ M_{ij}^{pp} &= (\nabla \Phi_i^p, \nabla \Phi_j^p) & i, j &= 1, \dots, N^p \end{aligned} \quad (3.66)$$

Les termes de droite s'expriment tels que :

$$\begin{aligned} G_i^2 &= \sum_{j=1}^{N^u} A_{ij} a_j^n + \delta t \left(\sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} C_{ijk} a_j^n a_k^n + \sum_{j=1}^{N^u} D_{ij} a_j^n + \sum_{j=1}^{N^\theta} F_{ij} b_j^n + E_i \right) \\ &\quad \text{pour } i = 1, \dots, N^u \\ L_i^2 &= \sum_{j=1}^{N^\theta} A_{ij}^\theta b_j^n + \delta t \left(\sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{ijk}^\theta a_j^n b_k^n + \sum_{j=1}^{N^\theta} D_{ij}^\theta b_j^n + \sum_{j=1}^{N^u} F_{ij}^\theta a_j^n + E_i^\theta \right) \\ &\quad \text{pour } i = 1, \dots, N^\theta \\ H_i^2 &= \sum_{j=1}^{N^u} \tilde{A}_{ij} a_j^n + \delta t \left(\sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} \tilde{C}_{ijk} a_j^n a_k^n + \sum_{j=1}^{N^u} \tilde{D}_{ij} a_j^n + \sum_{j=1}^{N^\theta} \tilde{F}_{ij} b_j^n + \tilde{E}_i \right) \\ &\quad \text{pour } i = 1, \dots, N^p \end{aligned} \quad (3.67)$$

où les coefficients $C_{ijk}, D_{ij}, A_{ij}, F_{ij}, E_i, C_{ijk}^\theta, D_{ij}^\theta, A_{ij}^\theta, F_{ij}^\theta, E_i^\theta, \tilde{C}_{ijk}, \tilde{D}_{ij}, \tilde{A}_{ij}, \tilde{F}_{ij}$ et $\tilde{E}_i$ sont les mêmes que ceux définis par l'équation 3.56.

Il est alors à remarquer que les deux premières équations du système matriciel (Eqs 3.64a et 3.64b) sont identiques à celles obtenues par la projection MRP1, (Eq 3.53). La troisième en revanche est différente : seulement la projection des modes Ψ_i^u sur l'équation de quantité de mouvement est considérée. Il n'apparaît plus de projection du laplacien des modes de pression $\Delta \Phi_p$ sur l'équation de Poisson, comme c'est le cas avec la méthode de projection MRP1. "L'ordre" de différentiation en espace de cette troisième équation est donc inférieur avec la projection MRP2. Avec cette méthode, il y a ainsi moins de coefficients à calculer et donc la réactualisation à chaque itération du terme H_i^2 est moins coûteuse que le terme H_i^1 (cf. Eq 3.55).

Le système matriciel obtenu (Eq 3.65), de taille $N^u + N^\theta + N^p$, peut alors être facilement résolu. Les termes matriciels, ainsi que les coefficients dynamiques, sont calculés une *seule* fois au préalable. Les coefficients temporels $\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{b}^{n+1}$ et $\mathbf{c}^{n+1}$ sont alors déterminés de manière itérative, ce qui est très rapide.

Remarque Si la base spatiale de vitesse n'est pas à divergence nulle¹⁰, les coefficients temporels γ^{n+1} doivent également minimiser le résidu lié à l'équation de continuité. Le résidu global serait défini tel que :

$$\mathcal{R}_{n+1}(\gamma^{n+1}) = \left(\mathcal{R}_{n+1}^{\nabla \cdot \mathbf{u}}, \mathcal{R}_{n+1}^{\mathbf{u}}, \mathcal{R}_{n+1}^{\theta} \right)^T \quad (3.68)$$

Le modèle d'ordre réduit serait alors composé du système d'équations (Eq 3.64) avec le terme supplémentaire suivant : $\sum_{j=1}^{N^u} (\nabla \cdot \Phi_j^u) (\nabla \cdot \Phi_j^u) a_j^{n+1}$, du côté gauche de l'équation 3.64a.

3.6 Applications

Cette section est dédiée à la comparaison des méthodes de projection précédemment explicitées, à travers deux exemples isothermes : l'écoulement dans une cavité ventilée avec un polluant et l'écoulement autour d'un cylindre. Les coefficients temporels sont résolus à partir des équations (Eqs 3.33, 3.53 et 3.65), respectivement pour les méthodes de projection de Galerkin, MRP1 et MRP2.

Les modèles réduits obtenus avec ces trois projections ont été implémentés dans *Code_Saturne*¹¹, afin d'utiliser les outils de construction des différents opérateurs présents dans ce code.

3.6.1 Application au cas d'une cavité ventilée isotherme avec polluant

Description

La cavité considérée est carrée de longueur L et comprend une entrée et une sortie, représentée sur la Figure 3.1. Le fluide qui s'y écoule est considéré newtonien et incompressible, dans un volume Ω de frontières $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_e \cup \Gamma_s$, pour $t \in]0, T]$. Γ_p représente les frontières aux parois, Γ_e à l'entrée et Γ_s à la sortie.

Le champ scalaire $\theta(\mathbf{x}, t)$ est pris passif : il représente dans ce cas une concentration en polluant. Les équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \theta &= D \Delta \theta \end{cases} \quad (3.69)$$

où D représente le coefficient de diffusion. Ces équations sont munies des conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ et } \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}) \quad (3.70)$$

¹⁰Les modes POD de vitesse sont à divergence nulle par construction, mais si la base spatiale est obtenue avec une autre méthode, cette propriété peut ne pas être conservée.

¹¹*Code_Saturne* est un code CFD open source développé par EDF R&D, basé sur une approche Volumes Finis, [57].

ainsi que des conditions aux limites :

$$\theta|_{\Gamma \setminus \Gamma_s} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \theta|_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.71)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = U_0 \mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_p} = \mathbf{0} \quad (3.72)$$

Une condition type "outlet" est imposée en sortie sur la vitesse. Le nombre de Reynolds $Re = U_0 L/\nu$, est fixé à 1000 et le nombre de Schmidt $Sc = \nu/D$ à 1. La valeur initiale du champ de concentration θ_0 , consiste en un disque centré de rayon $L/10$ au milieu du domaine fluide.

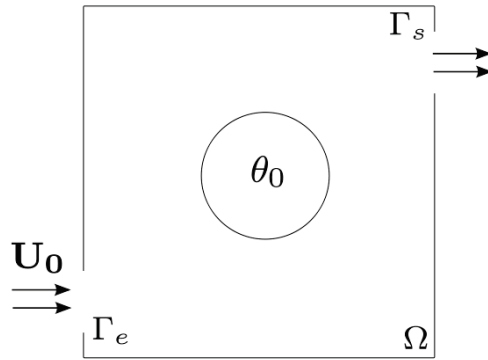


FIGURE 3.1 – Conditions aux limites de la cavité ventilée étudiée.

L'écoulement dans la cavité, à différents instants, est obtenu avec *Code_Saturne*, en utilisant un maillage 100×100 et est représenté sur la Figure 3.2. Le fluide s'écoule de l'entrée vers la sortie. La formation d'un tourbillon central est observée dès les premiers instants. Trois autres tourbillons situés en haut à gauche, en bas à gauche et en bas à droite se forment au fur et à mesure. La concentration du polluant, initialement située au centre de la cavité, se disperse petit à petit et s'évacue vers la sortie. Au temps final, le polluant est totalement évacué (les valeurs des isocontours sont quasi-nulles). De même, les isocontours de pression, obtenus avec *Code_Saturne*, sont représentés sur la Figure 3.3 à cinq instants.

Construction des bases réduites

Ici 250 clichés, issus de *Code_Saturne*, régulièrement répartis entre $t = 0$ et $t = 10$ (l'écoulement considéré est transitoire) ont été pris pour construire les bases POD de vitesse, de concentration et de pression. Le Tableau 3.1 représente les valeurs propres de vitesse, de concentration et de pression en fonction du numéro du mode, notées λ_i . Les valeurs propres λ_i , rangées par ordre décroissant, décroissent rapidement avec le nombre de modes i .

La Figure 3.4(a) représente "l'énergie" de l'écoulement en fonction du numéro du mode définie par :

$$\frac{\sum_{i=1}^{N^{modes}} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{N^{snap}} \lambda_i} \times 100 \quad (3.73)$$

Cinq modes POD suffisent pour capturer plus de 90% de l'énergie de l'écoulement. A nombre de modes égal (exemple pour cinq modes), le "RIC" associé est plus élevé pour la pression

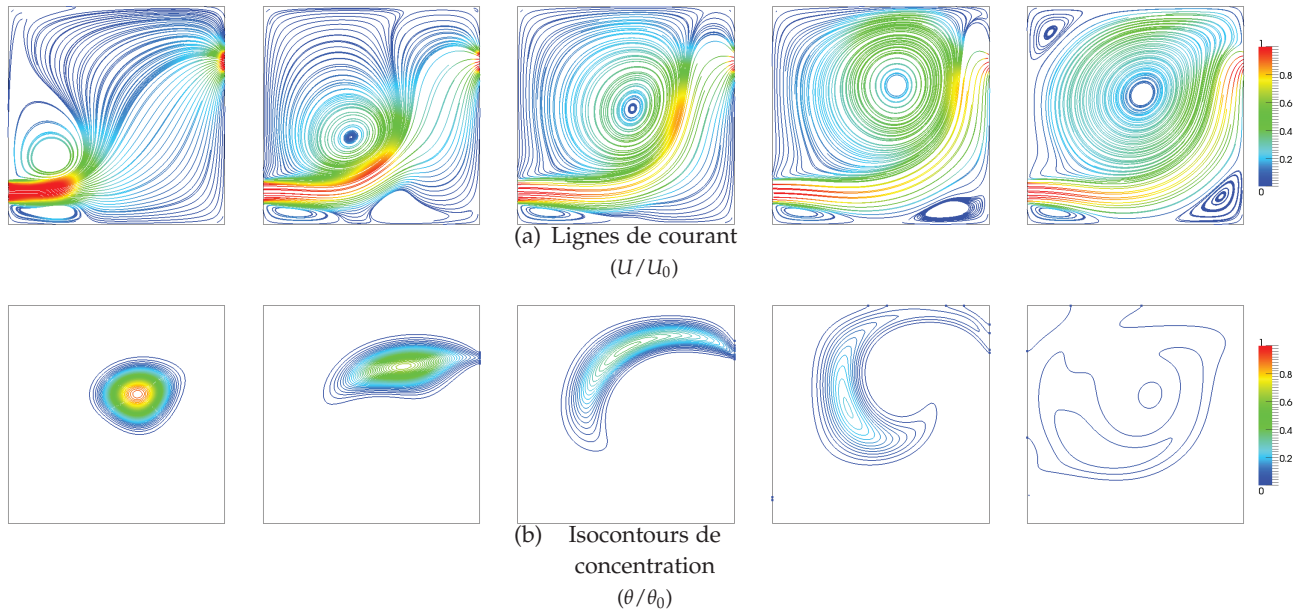


FIGURE 3.2 – Écoulement et dispersion du polluant aux instants $t = 1, 2, 3, 4, 5$ et 10 dans la cavité ventilée isotherme.

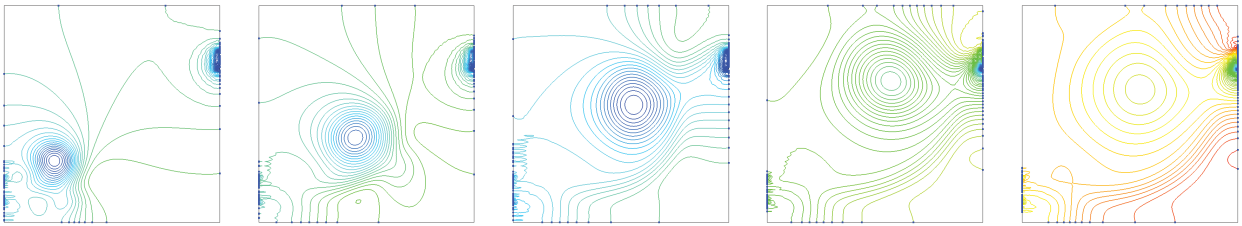


FIGURE 3.3 – Isocontours des champs de pression pour les temps $t = 1, 2, 3, 4$ et 10 , dans le cas de la cavité ventilée isotherme.

Numéro du mode	Valeurs propres de vitesse	Valeurs propres de concentration	Valeurs propres de pression
1	$1,540517 \cdot 10^{-2}$	$2,055900 \cdot 10^{-3}$	$8,276643 \cdot 10^{-2}$
2	$3,550548 \cdot 10^{-3}$	$1,094037 \cdot 10^{-3}$	$1,471011 \cdot 10^{-3}$
3	$2,055176 \cdot 10^{-3}$	$4,879423 \cdot 10^{-4}$	$4,044014 \cdot 10^{-4}$
4	$1,119987 \cdot 10^{-3}$	$3,053057 \cdot 10^{-4}$	$2,783725 \cdot 10^{-4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	$3,085297 \cdot 10^{-8}$	$3,792435 \cdot 10^{-9}$	$3,176471 \cdot 10^{-9}$

TABLE 3.1 – Valeurs propres de vitesse, de concentration et de pression en fonction du numéro du mode pour la cavité ventilée isotherme.

(99,99%) que pour la vitesse et la concentration (resp. 93 et 91%). Cette figure associée au Tableau 3.1 montre que les premières valeurs propres contiennent la majorité de l'énergie de l'écoulement.

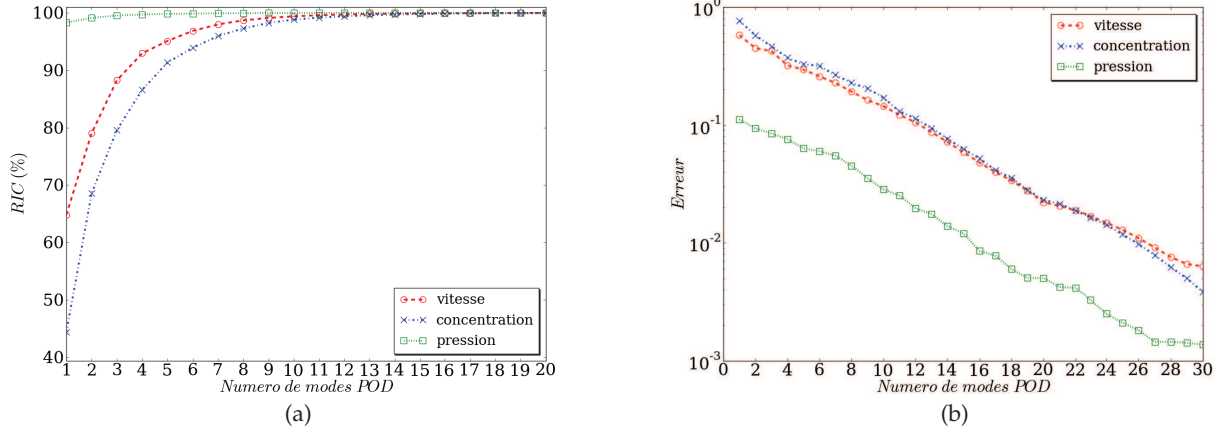


FIGURE 3.4 – (a) "Energie" en fonction du nombre de modes pour la cavité ventilée isotherme ; (b) Erreur en fonction du nombre de modes pour la cavité ventilée isotherme.

Les modes de vitesses $\Phi_i^u(\mathbf{x})$ et de concentration $\Phi_i^c(\mathbf{x})$ et de pression $\Phi_i^p(\mathbf{x})$ sont illustrés sur les Figures (3.5 et 3.6) et 3.7). Les premiers modes reproduisent l'essentiel de la physique du phénomène étudié (cf. Fig 3.2). Ainsi, plus le numéro du mode est élevé, plus les petites échelles de l'écoulement sont impliquées.

L'erreur de reconstruction pour les champs de vitesses et de concentration est tracée sur la Figure 3.4(b) en fonction du nombre de modes tronqués et est définie par :

$$e(N_{modes}) = \frac{\left\| \int_{\Omega} \left[h(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=1}^{N_{modes}} \chi_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \right]^2 d\mathbf{x} \right\|_{\infty}}{\left\| \int_{\Omega} [h(\mathbf{x}, t)]^2 d\mathbf{x} \right\|_{\infty}} \quad (3.74)$$

où $\|\bullet\|_{\infty}$ est la norme infinie¹². Cette figure montre que l'erreur de reconstruction sur la vitesse, la concentration et la pression diminue fortement avec le nombre de modes. En prenant 30 modes POD, l'erreur de reconstruction sur la vitesse et sur la concentration est inférieure à 10⁻², et sur la pression de l'ordre de 10⁻⁸. Ainsi, plus le nombre de modes est élevé, plus l'erreur de reconstruction est faible.

Il a été montré ici que peu de modes suffisent pour reproduire la physique de l'écoulement. Les bases spatiales POD étant à présent connues, il faut à présent déterminer les coefficients temporels associés. Ainsi ils sont calculés par résolution des modèles réduits obtenus, dans un premier temps par projection de Galerkin, puis par projection MRP1 et MRP2.

¹² $\|f(t)\|_{\infty} = \sup f(t)$

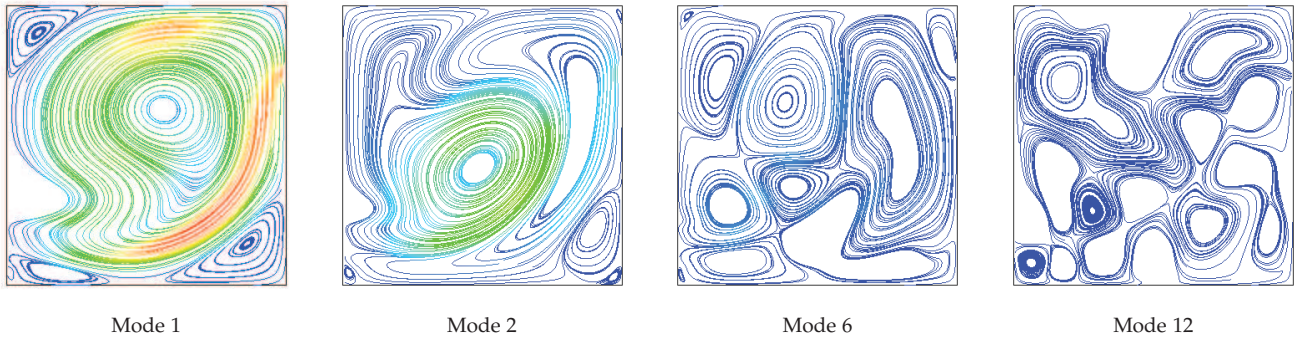


FIGURE 3.5 – Modes POD du champ de vitesses pour la cavité ventilée isotherme.

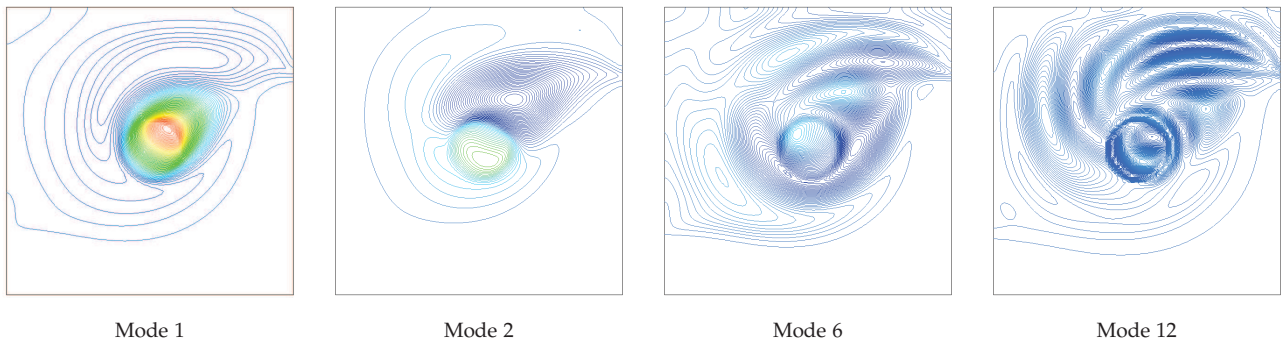


FIGURE 3.6 – Modes POD du champ de concentration pour la cavité ventilée isotherme.

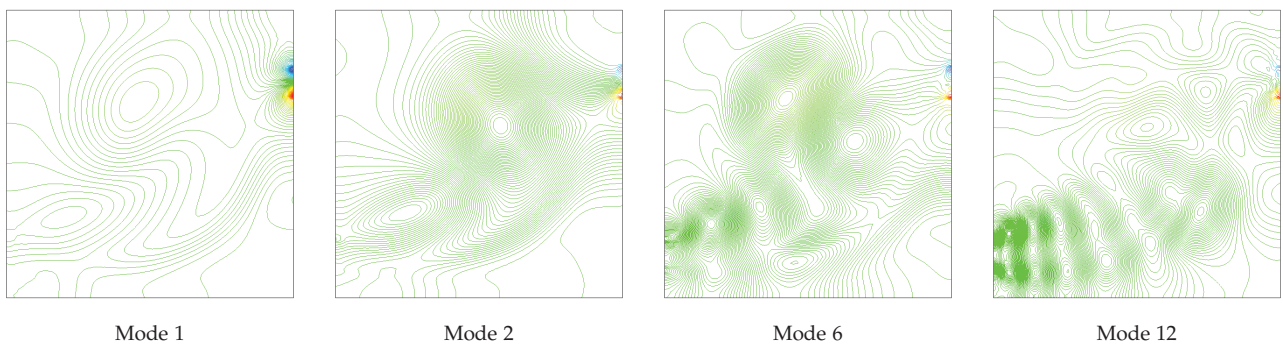


FIGURE 3.7 – Modes POD du champ de pression pour la cavité ventilée isotherme.

ROM obtenu par projection de Galerkin

Comme mentionné ci-dessus, peu de modes sont nécessaires pour capturer la quasi-totalité de "l'énergie" de l'écoulement et assurer une bonne erreur de reconstruction ($< 10^{-2}$). En l'occurrence, 15 modes de vitesse et 14 modes de concentration sont gardés ici. Les systèmes dynamiques réduits correspondent aux équations (Eqs. 3.33 et 3.34) en prenant θ comme un scalaire passif et $\beta = 0$. Le terme de pression $F_i = -\frac{1}{\rho} (\Phi_i'', \nabla p')$ est négligé dans ce cas, mais comme le champ de vitesses n'est pas nul aux bords en entrée et en sortie, ce terme ne s'annule pas exactement (cf. §3.4.4).

Les lignes de courant de vitesses et les isocontours de concentration ont été tracés à cinq instants sur la Figure 3.8, avec le modèle complet (ici *Code_Saturne*) et le modèle réduit par POD/Galerkin. Le modèle réduit reproduit bien la dynamique du fluide et la dispersion du polluant simulées par le modèle complet. Des différences sont toutefois observables au niveau des zones de recirculation dans les coins inférieurs ainsi qu'une intensité de couleur différente pour les vecteurs vitesses, en particulier à l'instant $t = 1$. Il est à remarquer la présence de petites structures dans le modèle réduit qui ne sont pas présentes dans le modèle complet. Mais ces isocontours peuvent être considérés comme résiduels au vu de l'échelle de couleur.

Enfin, l'erreur sur les champs de vitesses et de concentration entre les modèles complet et réduit est tracée en fonction du temps sur la Figure 3.9. Celle-ci est définie par l'expression suivante¹³ :

$$err(t) = \frac{\|f_{FULL}(\mathbf{x}, t) - f_{ROM}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(\Omega)}}{\|f_{FULL}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(\Omega)}} \times 100 \quad (3.75)$$

Une erreur de l'ordre de 4% est observée en fonction du temps pour la vitesse et comprise entre 4 et 18 % pour la concentration. Malgré la négligence du terme de pression fluctuant dans ce cas, le modèle réduit construit à partir d'une projection de Galerkin donne donc des résultats plutôt satisfaisants.

ROM obtenu par projections basées sur la minimisation du résidu

15 modes de vitesse, 14 modes de concentration et 9 modes de pression sont conservés pour construire les modèles réduits utilisant une projection basée sur la minimisation des résidus. Les coefficients temporels de vitesse $\mathbf{a}^{n+1}$, de concentration $\mathbf{b}^{n+1}$ et de pression $\mathbf{c}^{n+1}$ sont calculés à partir des systèmes matriciels (Eq 3.53) pour MRP1 et (Eq 3.65) pour MRP2. Le scalaire θ est pris passif et β est nul. Comme mentionné au paragraphe précédent les conditions aux bords de la cavité ventilée ne sont pas homogènes, le terme de pression $(\Phi_i'', \nabla p')$ ne s'annule pas. En utilisant les projections basées sur la minimisation des résidus, la pression est considérée comme une variable tout comme la vitesse et la concentration. Ces modèles réduits permettent alors de s'affranchir du problème du traitement de ce terme de pression.

L'erreur sur la vitesse, la concentration et la pression entre le modèle complet et les deux modèles réduits (MRP1 et MRP2), définie par l'équation (Eq 3.75) est tracée sur la Figure 3.10. Concernant

¹³ f représente le champ de vitesses, de concentration, de température ou de pression, selon le cas étudié.

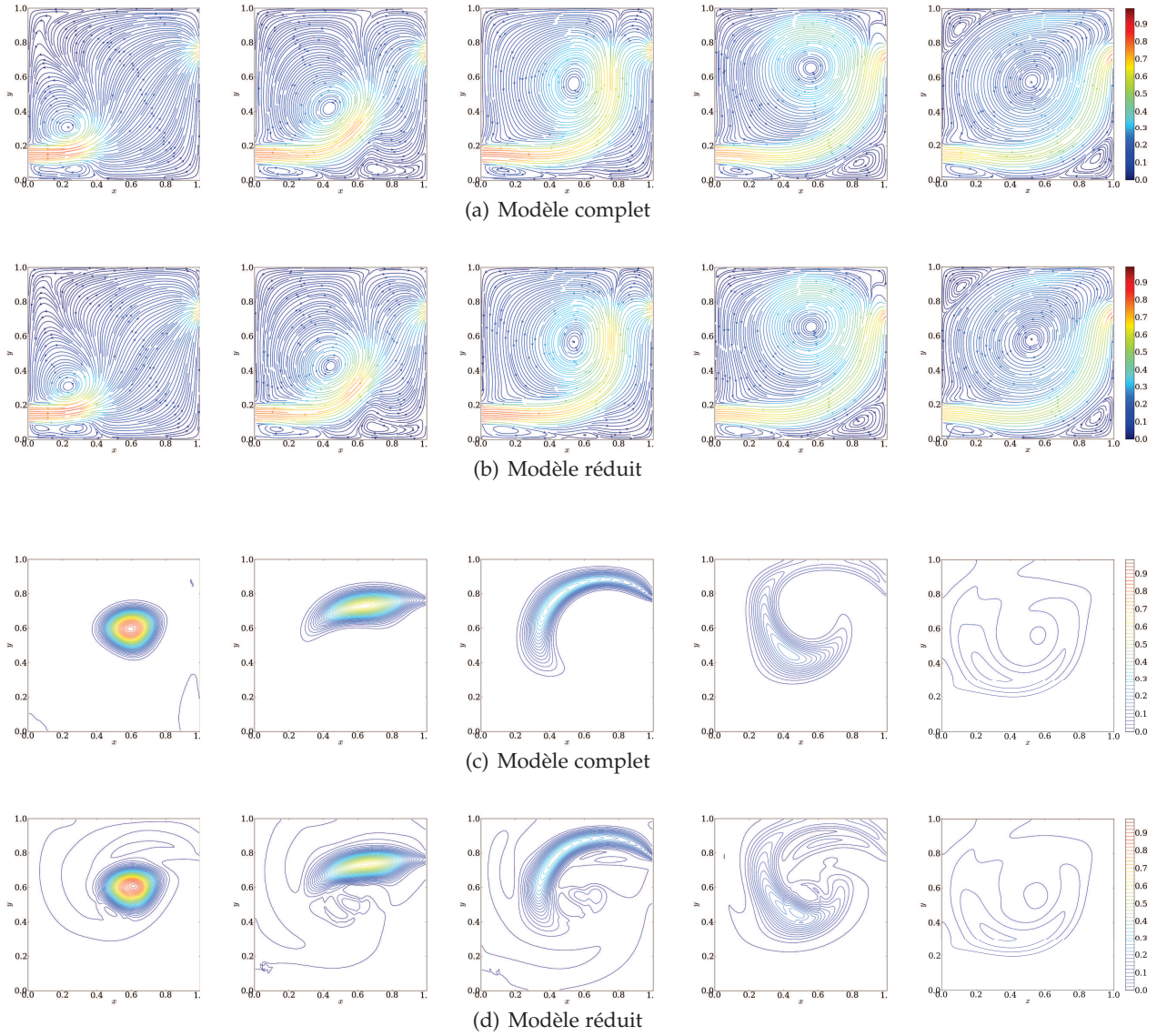


FIGURE 3.8 – (a) et (b) Lignes de courant de vitesses respectivement obtenus avec le modèle complet et le modèle réduit ROM/Galerkin ; (c) et (d) Isocontours de concentration respectivement obtenus avec le modèle complet et le modèle réduit ROM/Galerkin ; aux temps $t = 1, 2, 3, 4$ et 10 , dans le cas de la cavité ventilée isotherme.

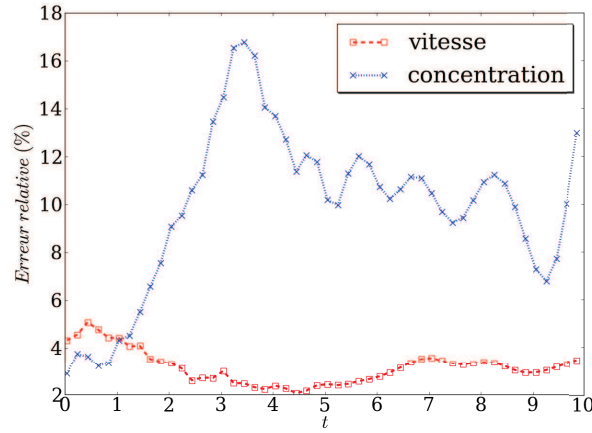


FIGURE 3.9 – Erreur sur les champs de vitesses et de concentration entre les modèles complet et réduit utilisant la projection de Galerkin, en fonction du temps, pour la cavité ventilée isotherme.

la vitesse et la concentration, les deux modèles donnent globalement des résultats similaires. L'erreur sur la vitesse est de l'ordre de 4% et sur la concentration comprise entre 3 et 17%. Les résultats obtenus ici sont très proches de ceux trouvés avec le modèle réduit par projection de Galerkin, (cf. Figure 3.9). Ceci est plutôt logique puisque la partie du domaine, où le terme $(\Phi_i^u, \nabla p')$ est non-nul, est relativement petite (entrée et sortie) et donc ce terme a peu d'influence. Par la suite, les trois modèles réduits sont comparés sur un cas où le terme $(\Phi_i^u, \nabla p')$ est non-nul sur toute la frontière (§3.6.2). En ce qui concerne la pression, les deux modèles réduits MRP1 et MRP2 donnent des erreurs bien différentes. L'erreur avec MRP1 est comprise entre 10 et 20%, alors que le modèle utilisant la projection MRP2 permet d'obtenir une erreur sur la pression inférieure à 4%. Le modèle réduit basé sur la projection MRP2 semble être donc plus performant dans ce cas, permet de s'affranchir du problème lié au terme de pression $(\Phi_i^u, \nabla p')$ et d'accéder à la pression avec une bonne précision ($< 4\%$).

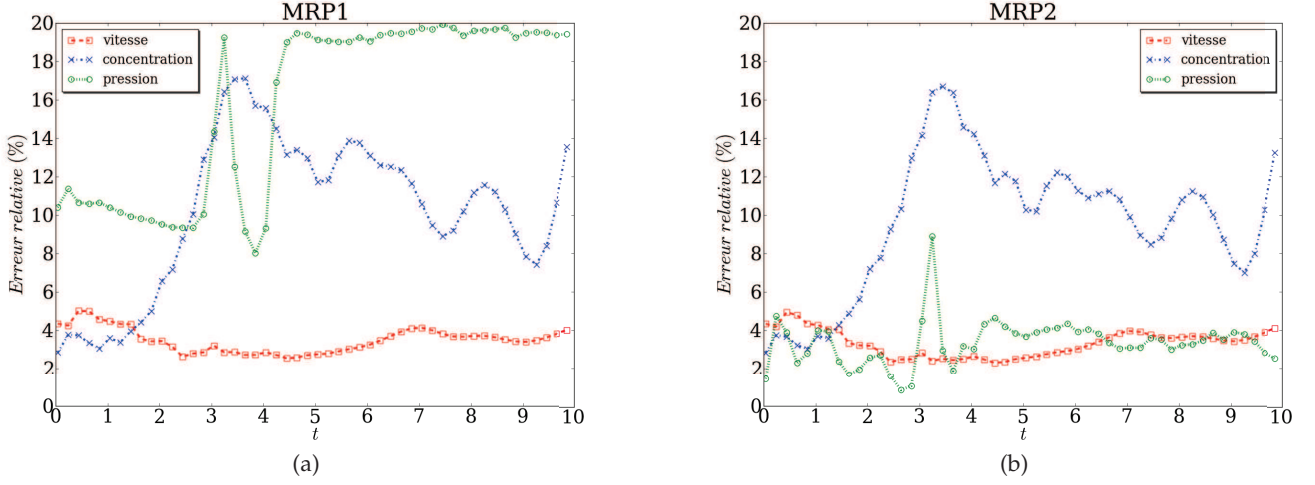


FIGURE 3.10 – Erreur sur les champs de vitesses, de concentration et de pression entre les modèles complet et réduit utilisant la projection MRP1 (a) et la projection MRP2 (b), en fonction du temps, pour la cavité ventilée isotherme.

3.6.2 Écoulement autour d'un cylindre à bas nombre de Reynolds

Les modèles réduits, obtenus par projection de Galerkin, MRP1 et MRP2, sont à présent confrontés, sur le cas d'un écoulement isotherme autour d'un cylindre. Par souci de comparaison, la projection de Galerkin est également développée en utilisant le même schéma de discrétisation temporelle que les projections basées sur la minimisation du résidu. Le terme de pression est de plus rendu explicite en ajoutant une équation de Poisson. Cette approche est nommée par la suite, PGP (pour *Projection de Galerkin avec équation de Poisson*) et est décrite dans l'Annexe D. Le Tableau 3.2 répertorie les différentes méthodes de projection employées ici.

Galerkin	PGP
$\begin{cases} (\Phi^u, \mathcal{R}_{n+1}^u) = 0 \\ (\Phi^\theta, \mathcal{R}_{n+1}^\theta) = 0 \\ \text{avec } (\Phi^u, \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1}) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} (\Phi^u, \mathcal{R}_{n+1}^u) = 0 \\ (\Phi^\theta, \mathcal{R}_{n+1}^\theta) = 0 \\ (\Phi^p, \mathcal{R}_{n+1}^p) = 0 \end{cases}$
MRP1	MRP2
$\begin{cases} (\Psi^u, \mathcal{R}_{n+1}^u) = 0 \\ (\Psi^\theta, \mathcal{R}_{n+1}^\theta) = 0 \\ \frac{\delta t}{\rho} (\nabla \Phi^p, \mathcal{R}_{n+1}^u) \\ + (\Delta \Phi_i^p, \mathcal{R}_{n+1}^p) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} (\Psi^u, \mathcal{R}_{n+1}^u) = 0 \\ (\Psi^\theta, \mathcal{R}_{n+1}^\theta) = 0 \\ \frac{1}{\rho} (\nabla \Phi^p, \mathcal{R}_{n+1}^u) = 0 \end{cases}$

TABLE 3.2 – Tableau récapitulatif des différentes méthodes de projection utilisées en utilisant les notations des résidus des équations (Eqs 3.41 et 3.43).

Ce cas d'étude a été choisi ici, car le champ de pression joue un rôle crucial. En effet, le terme de pression ($\Phi_i'', \nabla p'$) ne s'annule pas dans les équations du modèle réduit (cf. §3.4.4, Eq 3.37). Il doit donc être traité de manière rigoureuse (ne plus être négligé), afin d'augmenter la précision du modèle réduit. De plus, l'accès à la pression permet de pouvoir calculer les efforts exercés par le fluide sur le cylindre, ce qui peut être intéressant en Interaction-Fluide-Structure (IFS).

Description

L'écoulement d'un fluide isotherme dans un canal, autour d'un cylindre circulaire de diamètre D , est ici considéré cf. Figure (3.11). Le domaine d'étude est un domaine rectangulaire Ω de frontières Γ , de hauteur $H = 20D$ et de longueur $L = 28D$. Le centre du cylindre est situé à $8D$ de la frontière gauche et à $H/2$ de la paroi basse. Une vitesse d'intensité U_∞ est appliquée sur la frontière gauche Γ_{in} et une condition de sortie est imposée sur la paroi droite Γ_{out} . Des conditions de symétrie sont imposées sur les parois horizontales du canal.

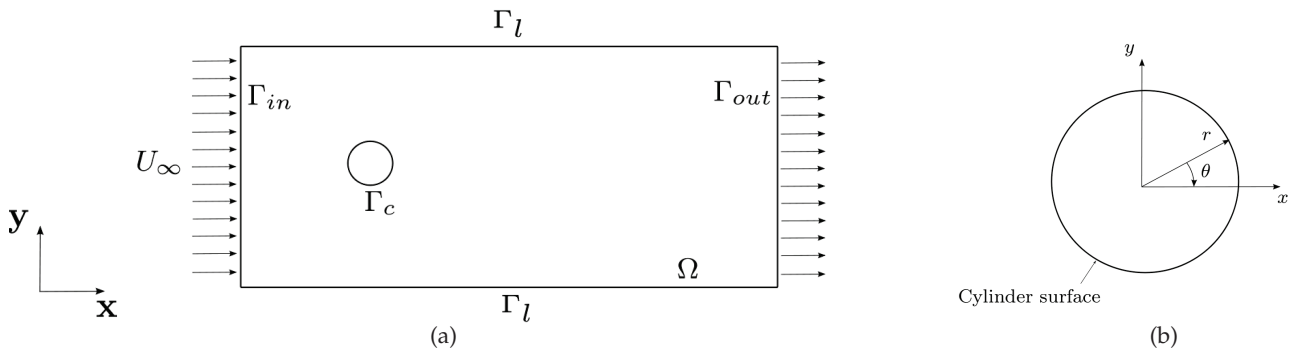


FIGURE 3.11 – (a) Conditions aux limites de l'écoulement autour du cylindre circulaire; (b) Système de coordonnées utilisé.

Le fluide est supposé isotherme et incompressible et sa dynamique est régie par les équations de Navier-Stokes, sans le terme de Boussinesq (Eqs 3.29a et 3.29b). Le nombre de Reynolds $Re = U_\infty D / \nu$ est fixé à 100. L'écoulement autour du cylindre est obtenu avec *Code_Saturne*, en utilisant le maillage de M. Pomarède [163]. Le maillage est non-uniforme, raffiné près du cylindre et comprend 64 892 nœuds (voir Figures 3.12(a) et 3.12(b)). Le pas de temps est fixé à 0,025.

La vorticité et les isobars sont représentés sur la Figure 3.13, à trois instants. L'écoulement est périodique (de période $T = 37,75s$) et présente des détachements tourbillonnaires, dans le sillage arrière du cylindre. Ces résultats sont conformes à ceux obtenus par la littérature, [110, 154, 161, 163].

Afin de comparer nos résultats de manière quantitative, le nombre de Strouhal et les coefficients hydrodynamiques (coefficients de traînée et de portance) sont calculés. Le nombre de Strouhal est défini par : $St = f_s D / U_\infty$ où f_s représente la fréquence d'oscillation de l'écoulement. Les

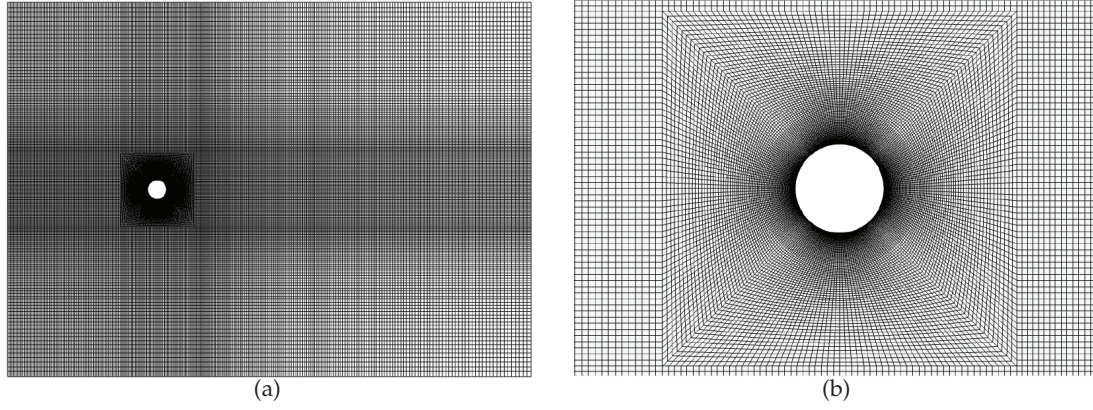


FIGURE 3.12 – (a) Maillage total du domaine fluide; (b) Zoom sur la partie entourant le cylindre.

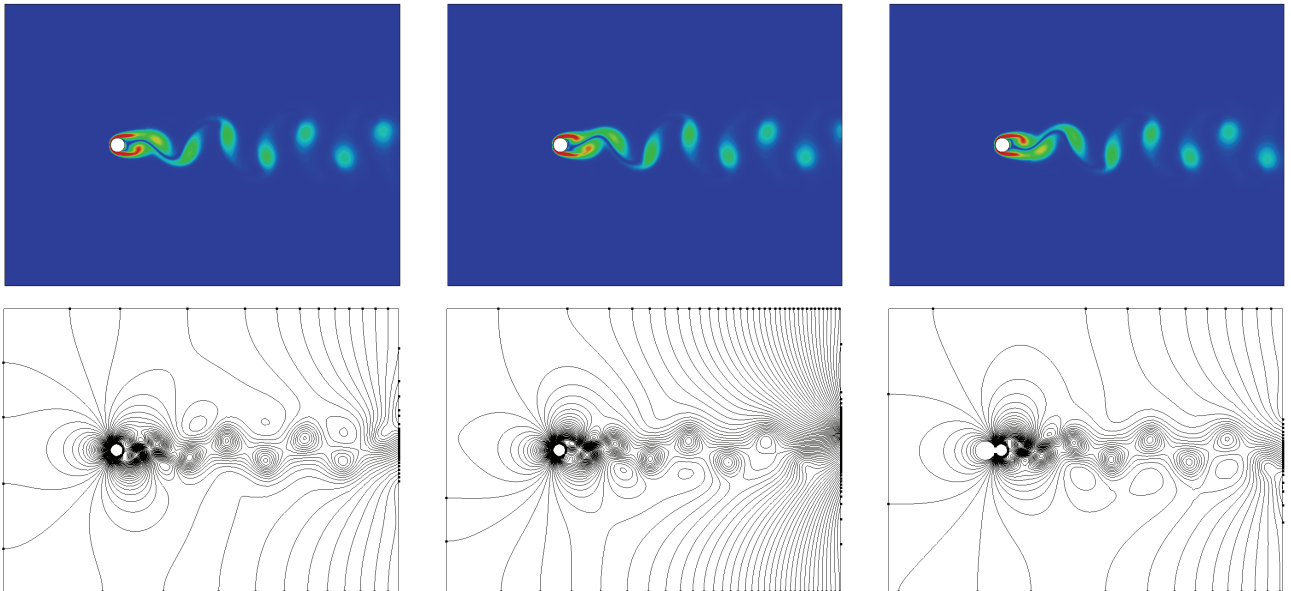


FIGURE 3.13 – Vorticité (haut) et isobars (bas) aux temps $t = t_0, T/4$ et $T/2$, de l'écoulement autour du cylindre obtenus avec Code_Saturne.

coefficients de traînée C_D et de portance C_L sont donnés par les expressions suivantes :

$$C_D = \frac{F_D}{0,5 \rho U_\infty^2 D} \quad ; \quad C_L = \frac{F_L}{0,5 \rho U_\infty^2 D} \quad (3.76)$$

où F_D et F_L représentent respectivement les forces de traînée et de portance exercées par le fluide sur le cylindre et ρ est la masse volumique du fluide. Le nombre de Strouhal St , la valeur moyenne du coefficient de traînée $\bar{C}_D$ ainsi que les valeurs du coefficient de portance maximale $C'_{L,max}$ et RMS (*Root Mean Square*) obtenus avec *Code_Saturne* sont comparés avec ceux de la littérature dans le Tableau 3.3. Ces différentes quantités sont très proches de celles de la littérature, ce qui permet de valider nos simulations avec le modèle complet et donc de pouvoir construire une base POD à partir de ces simulations.

	Résultats présents	Henderson, [110]	Norberg, [154]	Placzek, [161]
St	0,166	0,165	0,164	0,168
$\bar{C}_D$	1,391	1,335	-	1,374
$C'_{L,max}$	0,318	-	-	0,327
$C'_{L,rms}$	0,227	-	0,227	0,226

TABLE 3.3 – Comparaison du nombre de Strouhal et des coefficients hydrodynamiques obtenus avec *Code_Saturne* et ceux issus de la littérature.

Construction des bases réduites

300 clichés, régulièrement répartis entre $t = 0$ et $t = 2T$, ont été choisis pour construire les bases POD des champs de vitesses et de pression. Les premières valeurs propres de vitesse et de pression sont répertoriées dans le Tableau 3.4. Les valeurs propres λ_i sont faibles et décroissent rapidement avec le nombre de modes. "L'énergie" de l'écoulement (RIC), définie par l'équation 3.73, est également consignée dans le Tableau 3.4. Plus de 99 % de l'énergie de l'écoulement est représentée avec 5 modes de vitesse et 5 modes de pression.

Numéro du mode i	Vitesse		Pression	
	λ_i	RIC (%)	λ_i	RIC (%)
1	$4,273132 \cdot 10^{-10}$	51,85	$1,922147 \cdot 10^{-7}$	99,88
2	$3,625139 \cdot 10^{-10}$	95,84	$1,471430 \cdot 10^{-10}$	99,96
3	$1,237148 \cdot 10^{-11}$	97,35	$4,053980 \cdot 10^{-11}$	99,98
4	$1,251712 \cdot 10^{-11}$	98,87	$1,796011 \cdot 10^{-11}$	99,99
5	$4,033456 \cdot 10^{-12}$	99,35	$9,211020 \cdot 10^{-12}$	99,99
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	$1,871985 \cdot 10^{-16}$	99,99	$1,029932 \cdot 10^{-14}$	99,99

TABLE 3.4 – Valeurs propres et "énergie" (RIC) de vitesse et de pression en fonction du numéro de mode i , dans le cas de l'écoulement autour du cylindre.

Les premiers modes POD de vitesse et de pression sont représentés sur les Figures 3.14 et 3.15. Celles-ci montrent bien que les premiers modes reproduisent les grandes structures de l'écoulement (cf. Fig 3.13), alors que les modes élevés sont relatifs aux petites échelles.

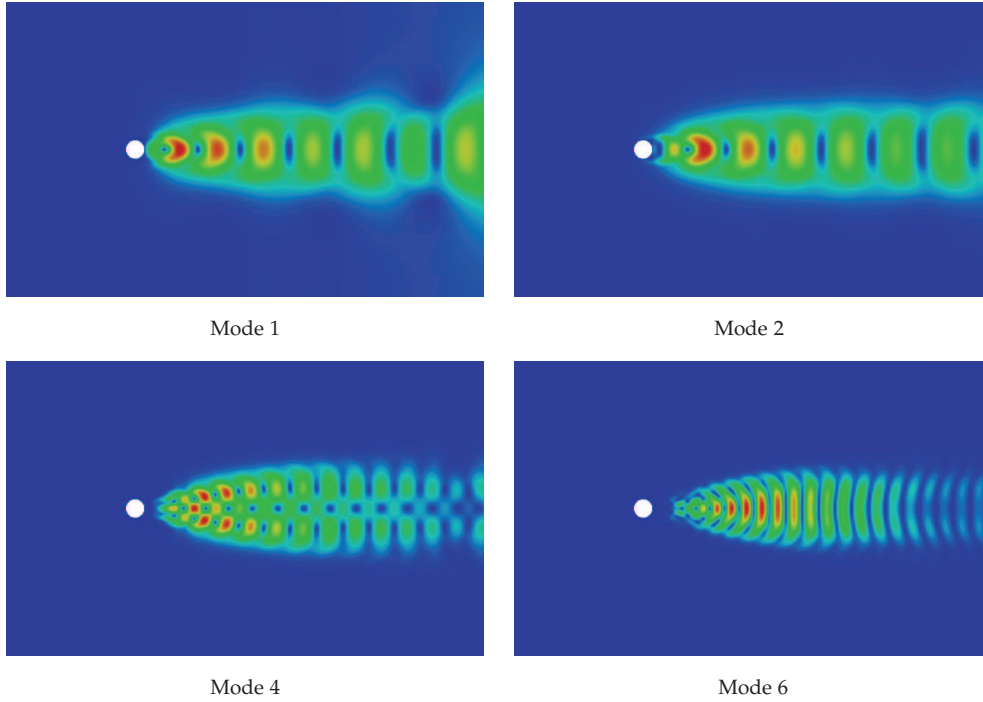


FIGURE 3.14 – *Magnitude des modes POD de vitesses, dans le cas de l'écoulement autour du cylindre.*

L'erreur de reconstruction définie via l'équation 3.74 pour les champs de vitesses et de pression est tracée sur la Figure 3.16. Cette figure montre que l'erreur de reconstruction décroît avec le nombre de modes utilisés. En prenant 15 modes POD, l'erreur sur la vitesse est inférieure 10^{-2} et celle sur la pression inférieure à 10^{-3} .

Comparaison des modèles réduits

Dans ce cas d'étude, les conditions aux bords n'étant pas homogènes, le terme de pression ($\Phi_i'', \nabla p'$) ne s'annule pas (§3.4.4). La projection de Galerkin (Eq 3.33), est utilisée afin d'étudier l'influence du traitement du terme de pression sur la prédiction de la vitesse. Pour rappel, cette projection ne considère pas d'équation de Poisson et le terme ($\Phi_i'', \nabla p'$) est négligé. De plus, afin d'évaluer le côté prédictif des différents modèles réduits considérés ici, ils sont étudiés sur la période d'échantillonnage ($2T$) et sur des longs temps ($40T$).

Huit modes de vitesse et de pression sont gardés pour construire les modèles d'ordre réduit. Le temps de calcul CPU varie selon le modèle réduit utilisé. Le Tableau 3.5 montre le temps de calcul CPU en fonction de la projection utilisée. La projection de Galerkin est la méthode la plus rapide : c'est celle en effet, qui comporte le moins de coefficients dynamiques à calculer. Néanmoins, elle ne prend pas en compte le champ de pression. Le temps de calcul est plus

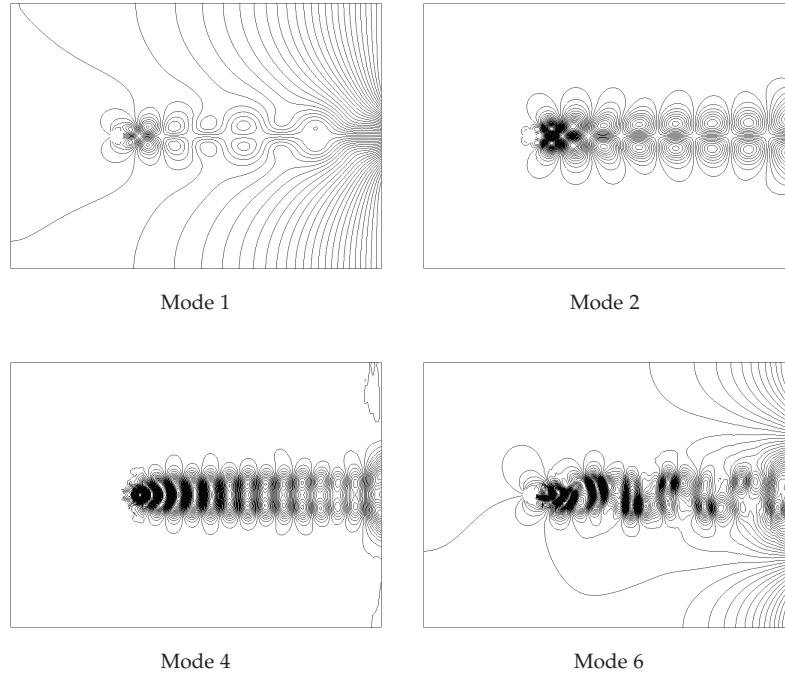


FIGURE 3.15 – Isocontours des modes POD de pression, dans le cas de l'écoulement autour du cylindre.

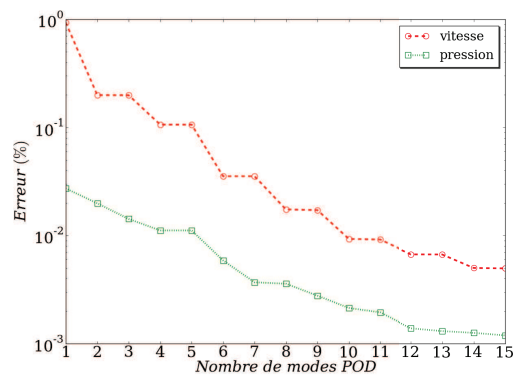


FIGURE 3.16 – Erreur de reconstruction en fonction du nombre de modes ; dans le cas de l'écoulement autour du cylindre.

important avec les modèles utilisant la PGP et la projection MRP1. Le modèle MRP2 est trois fois plus rapide que ces derniers. Cette différence est due à l'absence de coefficients dynamiques à calculer sur l'opérateur divergence avec cette projection.

	MRP2	MRP1	PGP	Galerkin
Temps CPU	51s	2min39s	2min22s	34s

TABLE 3.5 – Comparaison du temps de calcul sur un seul processeur, selon le modèle réduit utilisé, dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre.

Un des avantages des modèles réduits (hormis la projection de Galerkin), développés ici, est de pouvoir accéder au résidu des équations de quantité de mouvement $\mathcal{R}^u$. L'évolution temporelle de la norme au carré de L^2 de ce résidu est tracée pour chaque modèle réduit, sur la Figure 3.17. Quelque soit la projection utilisée, le résidu est très faible ($< 1.10^{-8}$). Cependant, il est encore plus petit lorsque les projections par minimisation du résidu sont employées.

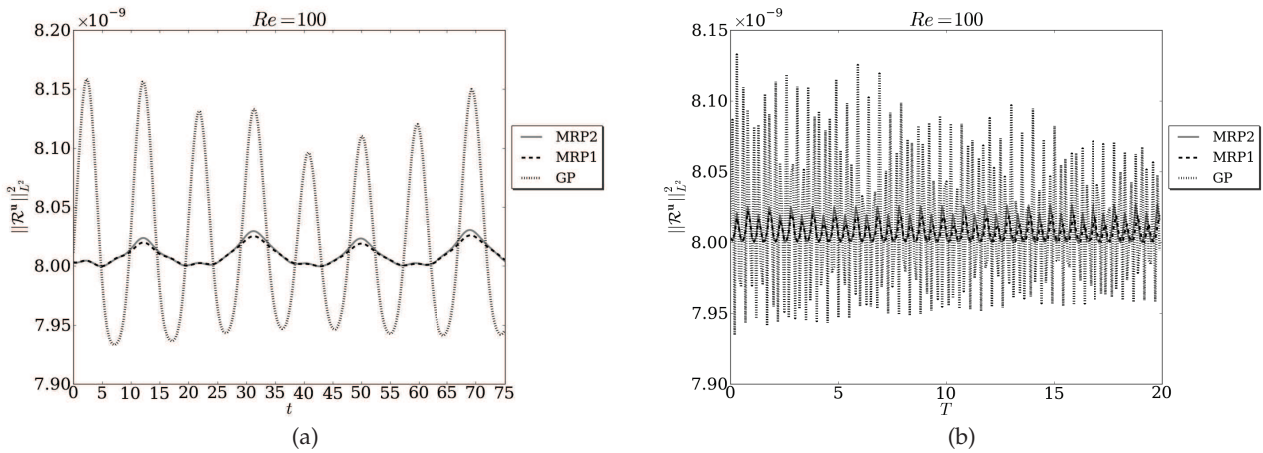


FIGURE 3.17 – Évolution temporelle de la norme au carré de L^2 du résidu des équations de quantité de mouvement $\mathcal{R}^u$ obtenu pour chaque modèle réduit : (a) pour le temps d'échantillonnage ($2T$); (b) pour des temps longs ($20T$).

L'erreur entre les champs de vitesses issus du modèle complet et ceux obtenus par les différents modèles d'ordre réduit, définie par l'équation 3.75, est tracée sur la Figure 3.18(a). L'erreur sur la vitesse entre le modèle complet et le modèle réduit utilisant la projection de Galerkin est plus importante que celles des autres modèles réduits (au moins 10 fois plus). Le fait de négliger le terme de pression a donc un réel impact sur la prédiction de la vitesse. Il est donc important de modéliser le terme $(\Phi_i^u, \nabla p')$ pour augmenter la précision des modèles réduits.

La Figure 3.18(b) représente l'erreur entre le modèle complet et les modèles réduits, mais seulement pour les méthodes de projection par Galerkin (PGP), MRP1 et MRP2. Celle-ci montre que l'erreur pour le modèle de Galerkin est plus grande qu'avec MRP1 (environ trois fois), elle-même

plus grande que MRP2 (environ 1,5 fois plus).

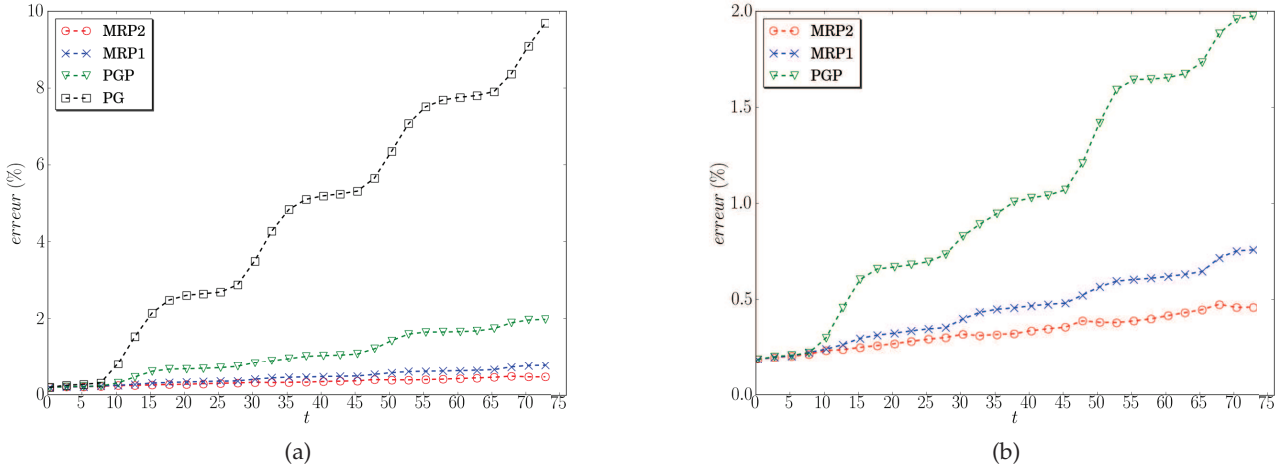


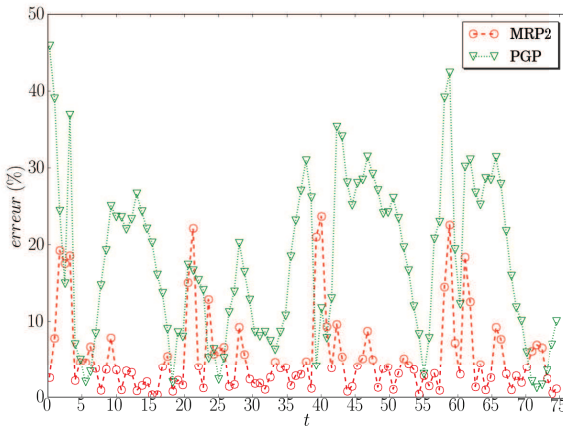
FIGURE 3.18 – Erreur en fonction du temps sur le champ de vitesses entre le modèle complet et les différents modèles réduits construits avec : (a) la projection de Galerkin (PG), la projection de Galerkin avec équation de Poisson (PGP), MRP1 et MRP2, sur la période d'échantillonnage ; (b) Même figure sans la projection de Galerkin.

De la même façon, l'erreur entre le champ de pression issu du modèle complet et provenant des modèles réduits $err(t)$, définie par l'équation 3.75, est tracée sur la Figure 3.19. La pression obtenue par le modèle réduit par projection de Galerkin PGP semble moins précise que celle résultante du modèle réduit utilisant la projection MRP1, elle-même moins précise que celle issue de la projection MRP2, Figures 3.19(a) et 3.19(b). Afin de quantifier cela, l'erreur moyennée en temps sur la pression est déterminée, pour chaque projection, telle que : $\bar{err} = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} err(t) dt$ et est consignée dans le Tableau 3.6. En effet, la méthode par projection MRP2 permet de quasiment doubler la précision de la pression par rapport à MRP1 et de tripler la précision par rapport à la projection de Galerkin PGP.

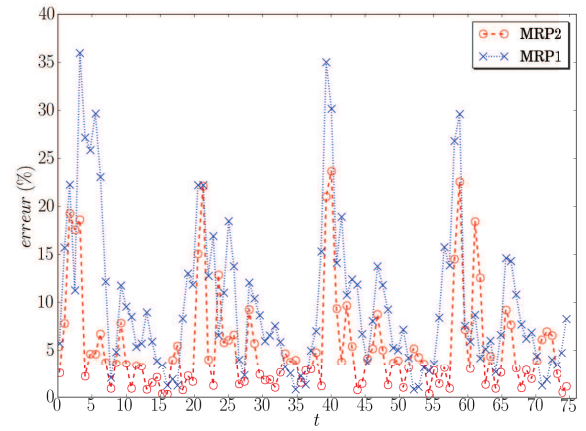
Erreur moyenne	
PGP	17,5 %
MRP1	9,63 %
MRP2	5,32 %

TABLE 3.6 – Erreur moyennée en temps sur la pression pour chaque modèle réduit.

La connaissance de la pression permet d'avoir rapidement accès aux forces qu'exerce le fluide sur les parois du cylindre et ainsi, aux coefficients hydrodynamiques (St , $\bar{C}_D$, $C'_{L,max}$, $C'_{L,rms}$, ...). Les valeurs obtenues pour chacun des modèles réduits sont répertoriées dans le Tableau



(a) MRP2 vs PGP



(b) MRP2 vs MRP1

FIGURE 3.19 – Erreur en fonction du temps sur le champ de pression entre le modèle complet et les différents modèles réduits construits avec : la projection de Galerkin avec équation de Poisson (PGP) , MRP1 et MRP2, sur la période d'échantillonnage.

3.7 et comparées à celles du modèle complet¹⁴. Comme la projection de Galerkin classique sans équation de Poisson, ne permet pas d'accéder au champ de pression, les coefficients hydrodynamiques ne peuvent alors être déterminés, de façon réduite, avec cette méthode. Les quantités en italique représentent l'erreur relative entre le modèle complet et le modèle réduit considéré. Globalement, les valeurs calculées avec les modèles réduits sont proches de celles du modèle complet. Chacun des modèles réduits retrouve la même valeur moyenne du coefficient de traînée ($\bar{C}_D$) que le modèle complet. Le modèle réduit par projection de Galerkin présente de plus larges erreurs sur les coefficients St , $C'_{L,max}$ et $C'_{L,rms}$ (entre 3,6 et 17,8%), que les autres modèles qui donnent des erreurs inférieures à 2%. A noter que la méthode de projection MRP2 permet de retrouver ces coefficients avec une précision inférieure à 1,3%.

L'évolution temporelle du coefficient de traînée C_D et du coefficient de portance C_L est tracée sur la Figure 3.20 sur une période de l'échantillonnage, pour le modèle complet et les modèles réduits. Quelque soit le modèle réduit utilisé, l'évolution de ces coefficients est semblable à celle du modèle complet. Néanmoins, le modèle réduit construit à partir d'une projection de Galerkin PGP est le plus éloigné du modèle complet. De même, l'évolution temporelle du coefficient de portance C_L est tracée sur la Figure 3.21, pour des longs temps. Les modèles réduits issus d'une projection basée sur la minimisation du résidu sont capables de prédire l'écoulement, hors la période de l'échantillonnage. Ce n'est pas le cas avec le modèle réduit construit avec la projection de Galerkin PGP.

Afin de continuer la comparaison entre les différentes méthodes de projection, la valeur moyenne en temps du coefficient de pression en fonction de l'angle θ (cf. Figure 3.11) est tracée sur la

¹⁴Les efforts sont calculés en considérant les champs de vitesses et de pression obtenus avec les différents modèles réduits. Pour cela, les outils présents dans *Code_Saturne* ont été utilisés.

	FULL	MRP2	MRP1	PGP
$\bar{C}_D$	1,391	1,391	1,391	1,391
St	0,166	0,165 0,60%	0,163 1,8%	0,160 3,6%
$C'_{L,max}$	0,318	0,322 1,3%	0,320 0,63%	0,287 9,7%
$C'_{L,rms}$	0,227	0,227 -	0,224 1,3%	0,184 17,8%

TABLE 3.7 – Comparaison du nombre de Strouhal et des coefficients hydrodynamiques issus du modèle complet et des modèles réduits : MRP2, MRP1 et projection de Galerkin, avec équation de Poisson (PGP), calculés sur des longs temps (40T).

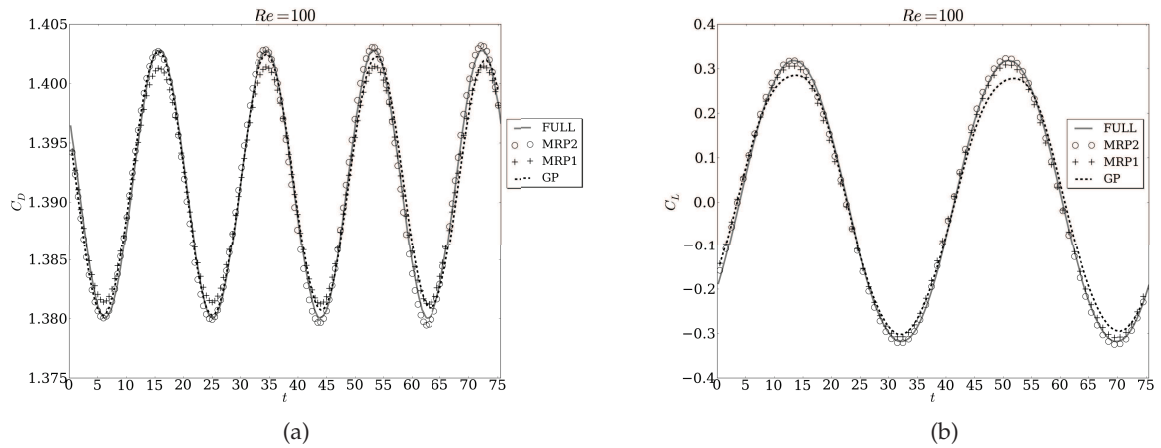
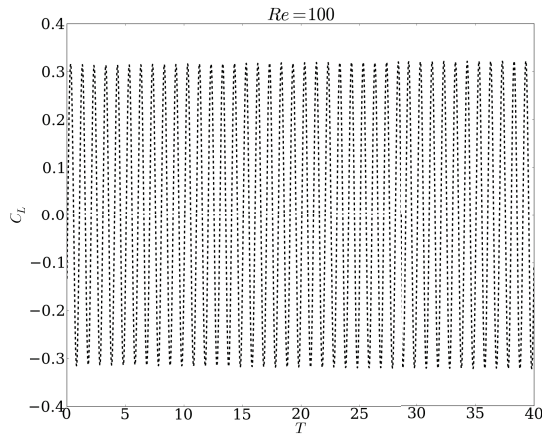
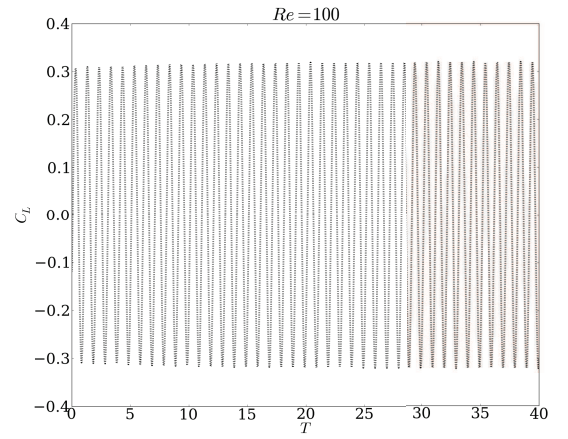


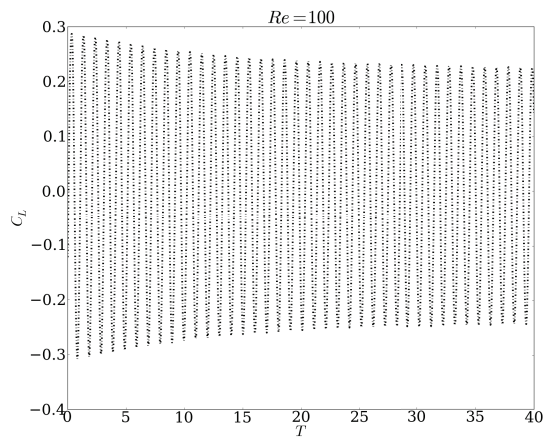
FIGURE 3.20 – Évolution temporelle du coefficient de traînée C_D et du coefficient de portance C_L obtenue avec le modèle complet et les modèles réduits, sur une période d'échantillonnage.



(a) MRP2



(b) MRP1



(c) PGP

FIGURE 3.21 – Évolution temporelle du coefficient de portance C_L obtenue avec le modèle complet et les modèles réduits, pour des temps longs.

Figure 3.22 pour chaque modèle. Le coefficient de pression est défini comme :

$$C_p = \frac{p - P_\infty}{0,5 \rho U_\infty^2} \quad (3.77)$$

où P_∞ est la pression en amont du cylindre. Il est à noter que les résultats obtenus avec le modèle complet sont semblables à ceux de la littérature, par exemple [147]. Les résultats issus des trois modèles d'ordre réduit sont identiques à ceux du modèle complet et aucune différence est observée entre eux.

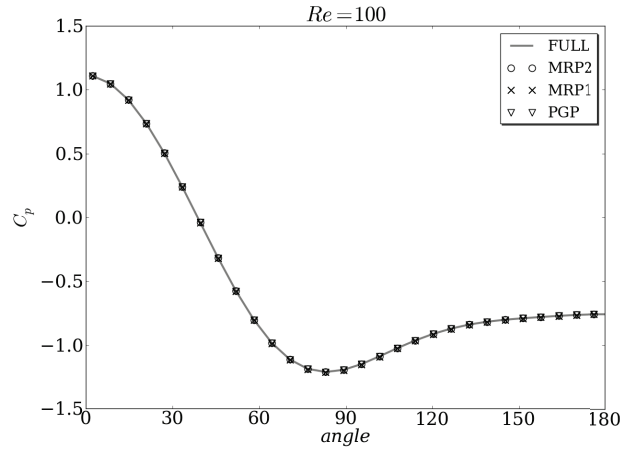


FIGURE 3.22 – Valeur moyenne en temps du coefficient de pression C_p en fonction de l'angle θ , provenant du modèle complet (FULL) et des modèles réduits.

Pour aller plus loin, la pression instantanée en fonction de l'angle θ est tracée pour chaque modèle sur la Figure 3.23. Les modèles réduits utilisant une projection basée sur la minimisation du résidu sont là encore, plus précis que celui utilisant la projection de Galerkin PGP.

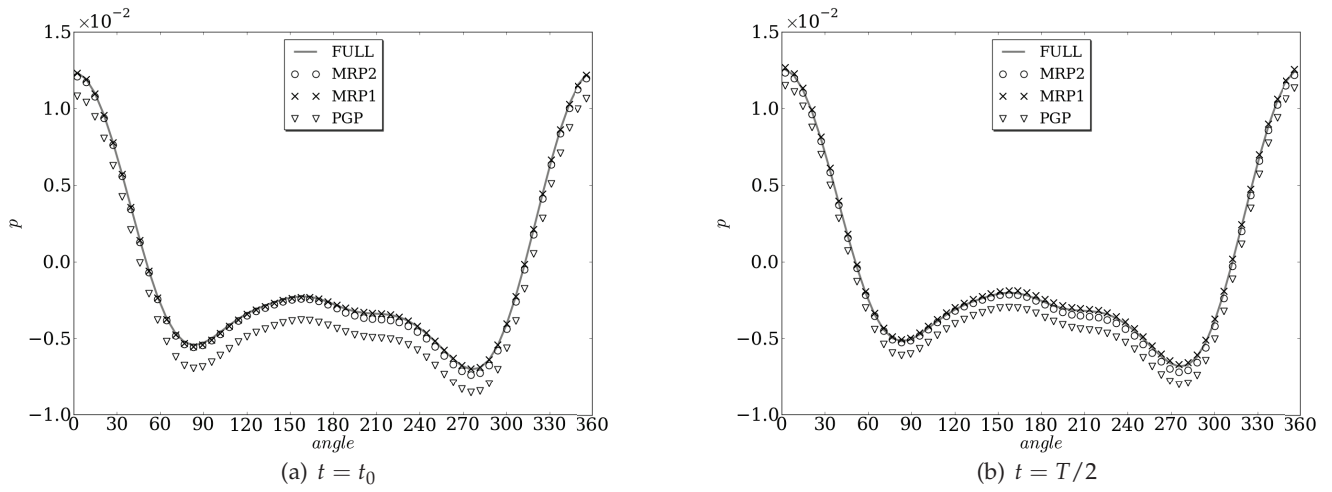


FIGURE 3.23 – Pression instantanée en fonction de l'angle θ , provenant du modèle complet (FULL) et des modèles réduits.

3.7 Conclusion du chapitre

Dans ce Chapitre, différentes techniques de réduction de modèles ont tout d'abord été explicitées. En raison de son optimalité au sens énergétique, nous avons choisi d'utiliser la POD pour construire nos modèles réduits. Ceux-ci sont alors obtenus par projection des équations de Navier-Stokes (resp. de l'équation de convection-diffusion) sur les modes POD de vitesses (resp. les modes POD du champ scalaire considéré). Trois méthodes de projection ont été ici employées : la projection de Galerkin (méthode très courante) et deux approches basées sur la minimisation des résidus. La première méthode MRP1 est celle développée par Leblond et al. [134]. Nous avons proposé une variante de cette méthode, appelée MRP2, qui permet également d'accéder au champ de pression, mais cette fois-ci sans ajouter une équation de Poisson (l'ordre du schéma de différentiation spatiale est ainsi diminué).

Les modèles réduits obtenus ont été confrontés sur deux cas tests : l'écoulement dans une cavité ventilée avec un polluant et l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à bas nombre de Reynolds. Dans le premier cas, les trois modèles réduits présentent des résultats très similaires en vitesse et en concentration. L'utilisation de la projection MRP2 dans la construction du ROM permet d'accroître la précision sur le champ de pression par rapport au ROM/MRP1 (environ trois fois plus). Dans le deuxième cas, nous avons vu que le terme de pression $(\Phi_i'', \nabla p')$ joue un rôle important sur la précision du champ de vitesses : le modèle réduit utilisant la projection de Galerkin (Eq 3.33) produit une erreur sur le champ de vitesses, plus de cinq fois supérieure à celle obtenue avec les autres modèles réduits. Le fait de négliger le champ de pression instantané peut donc être critique sur ce type de problèmes. D'autre part, les différents éléments étudiés (erreurs, coefficients hydrodynamiques, ...) ont montré que le modèle réduit par projection de Galerkin avec équation de Poisson est moins précis que ceux utilisant une projection basée sur la minimisation des résidus. La comparaison entre les modèles MRP1 et MRP2 a montré que généralement MRP2 présente de meilleurs résultats.

Dans le Chapitre suivant, le problème de contrôle optimal d'écoulement, décrit dans le Chapitre 2, est reformulé sous forme réduite. Pour construire les modèles réduits, nous avons choisi par la suite d'utiliser la projection de Galerkin. En effet, les résultats entre les trois modèles réduits développés ici (projection de Galerkin, MRP1, MRP2) sont quasi-similaires sur le cas de la cavité ventilée, cas très proche de notre cas d'étude. Le cas d'une cavité entraînée différentiellement chauffée sera également traitée : le terme $(\Phi_i'', \nabla p')$ s'annule exactement (cavité fermée). La méthode de projection n'aura donc pas d'influence sur ce cas-là, (cf. [193]).

Problème de contrôle optimal d'écoulement sous contraintes réduites

Sommaire

4.1 Introduction	86
4.2 Problème d'optimisation sous forme réduite	87
4.2.1 Formulation	87
4.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange	88
4.3 Formulation avec des bases POD construites avec un paramètre	92
4.3.1 Décomposition du champ de vitesses avec la fonction de contrôle	92
4.3.2 Équations de contraintes réduites	92
4.3.3 Équations adjointes réduites	93
4.3.4 Condition d'optimalité	94
4.3.5 Dispersion d'un polluant dans une cavité ventilée	95
4.3.6 Cavité entraînée différenciellement chauffée	100
4.4 Formulation avec des bases POD construites avec plusieurs paramètres	108
4.4.1 Contrôle sur le nombre de Reynolds	108
4.4.1.1 Équations de contraintes réduites	109
4.4.1.2 Équations adjointes réduites	111
4.4.1.3 Condition d'optimalité	111
4.4.1.4 Dispersion d'un polluant dans une cavité ventilée	113
4.4.1.5 Cavité entraînée différenciellement chauffée	121
4.4.2 Contrôle sur le nombre de Reynolds et le nombre de Grashof	128
4.4.2.1 Problème d'optimisation réduit	129
4.4.2.2 Cavité entraînée différenciellement chauffée	134
4.5 Conclusion du chapitre	143

4.1 Introduction

Le problème de contrôle optimal d'écoulement a été décrit dans le Chapitre 2. L'utilisation des méthodes de simulation classique des écoulements (DNS, LES, ...) ne permet cependant pas, à l'heure actuelle, de pouvoir contrôler un écoulement en temps réel. Une autre méthode est ainsi envisagée : la réduction de modèles, décrite dans le Chapitre 3. Les modèles réduits, associés à un problème de contrôle optimal d'écoulement sont utilisés depuis une quinzaine d'années, sur diverses applications (suppression de l'instationnarité du sillage autour d'un profil d'aile, contrôle des instabilités dans les écoulements de couche limite, minimisation du coefficient de traînée autour d'un cylindre, ...). Deux méthodes se distinguent : les méthodes utilisant la théorie du contrôle linéaire (cf. Annexe C) et celles basées sur l'optimisation non-linéaire (§2.2).

Dans le cadre du contrôle linéaire, des modèles d'ordre réduits ont été construits par projection sur les modes globaux (correspondant aux vecteurs propres du problème linéarisé), afin de contrôler les instabilités dans les écoulements de couche limite [188, 75]. La plupart des travaux dans la littérature utilise des modèles réduits construits avec une base POD. Citons par exemple, les travaux de Samimy et al. [181, 182] et de Barbagallo et al. [18] qui ont consisté à contrôler les instabilités au-dessus d'un écoulement dans une cavité ouverte. Dans le domaine du bâtiment, Palomo Del Barrio et al. [157] et Sempey [185] ont utilisé des modèles d'ordre réduit pour contrôler la température à l'intérieur des bâtiments. Palomo Del Barrio et al. emploient la méthode de troncature équilibrée associée à un contrôle PID, puis à un contrôle optimal LQ (*Linear Quadratic*). Les deux approches fournissent des résultats convaincants. Sempey, quant à lui, utilise la POD avec un contrôle LQG. Dans cette approche, seule l'équation de la chaleur est prise en compte et le champ de vitesses est considéré comme connu et fixe. Cela est physiquement contraignant, mais constitue une première avancée dans le contrôle des écoulements anisothermes dans le bâtiment.

L'optimisation non-linéaire d'écoulement à partir d'un modèle d'ordre réduit a été proposée par Graham et al. [97, 98] dans le cas d'un écoulement autour d'un cylindre à bas nombre de Reynolds ($Re = 100$). Ils proposent dans cette étude une méthodologie pour la construction d'un modèle incluant des conditions aux limites non homogènes nécessaires à la prise en compte d'une loi de contrôle instationnaire. Le modèle ainsi construit est alors appliqué pour le calcul d'une loi de contrôle permettant de supprimer l'instationnarité du sillage. Ito et Ravindran [119] ont employés des modèles réduits construits à partir des bases de Lagrange ou d'Hermite, pour contrôler les conditions aux limites d'une cavité entraînée et un écoulement dans un canal avec une marche (deux configurations de marche ont été testées). Les modèles d'ordre réduit basés sur une méthode POD ont été plus tard utilisés par Ravindran [169, 168], pour contrôler la recirculation d'un écoulement dans un canal, ou par Bergmann [27] pour déterminer une loi de contrôle optimale de la traînée générée par l'écoulement autour d'un cylindre. Cependant, ces travaux ne considèrent pas le couplage vitesse/température.

Dans ce Chapitre, nous proposons une stratégie de contrôle de la température (ou de la concentration), en utilisant un modèle d'ordre réduit basé sur la POD. Pour cela, les systèmes dynamiques réduits construits par POD et projection de Galerkin sont associés à un contrôle optimal non-

linéaire. La même démarche peut être appliquée avec une projection basée sur la minimisation des résidus, [193]. Celle-ci est détaillée en Annexe E. Dans une première section, le problème de contrôle optimal d'écoulement est reformulé sous forme réduite. Le paramètre de contrôle correspond à la vitesse d'air d'entrée (et ainsi au nombre de Reynolds) et/ou à la température imposée sur une paroi (et ainsi au nombre de Grashof). Le problème d'optimisation réduit est résolu avec un algorithme d'optimisation, basé sur la méthode de l'équation adjointe (§2.3.3.2), car c'est la plus simple à mettre en œuvre, [105]. Afin de rendre explicite l'influence des paramètres de contrôle, le champ de vitesses est décomposé selon la méthode de la fonction de contrôle, développée par Graham [97, 98]. Deux approches de construction de la base POD sont considérées ici : à partir de clichés de l'écoulement effectué avec une valeur du nombre de Reynolds (et/ou du nombre de Grashof) ou à partir de clichés de l'écoulement effectué avec plusieurs valeurs du nombre de Reynolds (et/ou du nombre de Grashof). Les différentes méthodes proposées, après avoir été décrites, sont testées sur le contrôle de la dispersion de polluant dans une cavité ventilée et sur le contrôle de la température à l'intérieur d'une cavité entraînée différentiellement chauffée (en utilisant un ou deux paramètres de contrôle).

4.2 Problème d'optimisation sous forme réduite

Le problème de contrôle considéré ici consiste à atteindre une température cible (ou une concentration cible), à l'intérieur du domaine d'étude en agissant, à l'aide d'un paramètre de contrôle α , sur les conditions aux limites (intensité des vitesses, température sur une paroi). Le problème d'optimisation complet, décrit à la section §2.5, se formule ainsi : trouver α tel que la fonctionnelle objectif¹ $\mathcal{J}(\theta, \alpha)$:

$$\mathcal{J}(\theta, \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\theta - \hat{\theta})^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta|_T - \hat{\theta}|_T)^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{\omega}{2} \alpha^2 \quad (4.1)$$

soit minimisée sous la contrainte de la dynamique du fluide et de la dynamique du champ scalaire (Eq 2.30). T représente le temps final et Ω le domaine fluide considéré. Comme mentionné dans le Chapitre 2, la résolution du problème d'optimisation complet n'est pas possible, à l'heure actuel, en temps réel. Les modèles réduits, développés au Chapitre 3 plutôt que les équations complètes, vont ainsi être utilisés, afin de diminuer le temps de calcul. Le problème d'optimisation est ainsi reformulé, dans cette section, sous forme réduite.

4.2.1 Formulation

Le champ scalaire cible $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t)$ est décomposé en une partie moyenne $\bar{\theta}(\mathbf{x})$ et une partie fluctuante, sur laquelle une POD est réalisée² :

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}, t) \approx \bar{\theta}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N^{\theta}} \hat{b}_i(t) \Phi_i^{\theta}(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

¹La fonctionnelle objectif est régularisée (cf. §2.2.2) par le terme de pénalité ω dans la norme euclidienne. ω est pris par la suite égal à 10^{-7} .

²Le champ de vitesses et le champ scalaire sont également décomposés par POD. Le lecteur est renvoyé au Chapitre 3, §3.4.1.

où $\hat{\mathbf{b}}(t)$ correspond aux coefficients temporels relatifs au champ scalaire cible.

Le problème d'optimisation réduit consiste à retrouver le coefficient temporel $\hat{\mathbf{b}}(t)$ lié au champ scalaire cible $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t)$ ³, obtenu avec le paramètre de contrôle cible α_{cib} . Il s'écrit avec les éléments suivants :

- les *variables d'état* qui correspondent aux coefficients temporels du champ de vitesses $\mathbf{a}(t)$ et du champ scalaire $\mathbf{b}(t)$;
- le *paramètre de contrôle* α ;
- la *fonctionnelle objectif* $\mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha)$, qui s'écrit :

$$\mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^\theta} \int_0^T (b_i - \hat{b}_i)^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^\theta} (b_i|_T - \hat{b}_i|_T)^2 + \frac{\omega}{2} \alpha^2 \quad (4.3)$$

- les *équations de contraintes réduites*, associées respectivement aux équations de quantité de mouvement et de convection-diffusion, notées par la suite :

$$\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

Le **problème d'optimisation réduit** à résoudre est alors :

$$\min_{\alpha} \mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha) \quad \text{sous les contraintes} \quad \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

4.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Ce problème réduit sous contraintes est alors converti en un problème d'optimisation sans contrainte, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (cf. §2.2.3). Les multiplicateurs de Lagrange (ou variables adjointes) ξ et ζ sont ici respectivement associés aux équations $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0}$ et $\mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0}$. La fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \xi, \zeta)$ alors introduite, s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \xi, \zeta) &= \mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha) - \sum_{j=1}^{N^u} \int_0^T \xi_j \mathcal{N}_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) dt \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N^\theta} \int_0^T \zeta_j \mathcal{M}_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

Un minimum local de cette fonctionnelle est recherchée et l'annulation des dérivées de Fréchet de celle-ci conduit à l'obtention du système optimal. Ainsi, un minimum local de $\mathcal{L}$, $\delta \mathcal{L} = 0$ est atteint si :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta_j} \delta \zeta_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta a_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_j} \delta b_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0 \quad (4.7)$$

³Le coefficient temporel $\hat{\mathbf{b}}(t)$ lié au champ scalaire cible $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ est construit avec le paramètre cible α_{cib} , soit en projetant le champ scalaire cible (issu du modèle complet) sur la base POD associée $(\hat{b}_i(t) = ((\hat{\theta}_{\text{FULL}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\theta}(\mathbf{x})), \Phi_i^\theta(\mathbf{x}))_{L^2(\Omega)}, \text{ pour } i = 1, \dots, N^\theta)$, soit en résolvant les systèmes dynamiques réduits considérés.

Annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ selon les variables adjointes

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables adjointes ξ et ζ renvoie les contraintes du problème originel, en l'occurrence les équations de contraintes réduites $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0}$ et $\mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0}$.

Annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ selon les variables d'état

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les coefficients temporels $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$ conduit, après intégration par parties en temps, aux équations adjointes notées $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \xi, \zeta) = \mathbf{0}$ et $\mathcal{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \xi, \zeta) = \mathbf{0}$, qui sont en fait des équations aux dérivées partielles en ξ et ζ .

Annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ selon les variables de contrôle

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant la variable de contrôle α donne les conditions d'optimalité du système, c'est-à-dire le gradient de la fonctionnelle objectif $\nabla_{\alpha} \mathcal{J}$. La direction de descente $d_k = -\nabla_{\alpha} \mathcal{J}$ de l'algorithme d'optimisation peut ainsi être déterminée.

Résumé

Les équations de contraintes $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0}$ et $\mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = \mathbf{0}$, les équations adjointes $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \xi, \zeta) = \mathbf{0}$ et $\mathcal{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \xi, \zeta) = \mathbf{0}$ et la condition d'optimalité $\nabla_{\alpha} \mathcal{J}$ obtenues forment le *système optimal*, voir Tableau 4.1. Les solutions de ce système sont composées du paramètre de contrôle optimal α_{opt} , des variables optimales $\mathbf{a}_{opt}, \mathbf{b}_{opt}$ et des variables adjointes optimales ξ_{opt}, ζ_{opt} . Le système est alors résolu par un algorithme classique de descente en utilisant la méthode de l'équation adjointe (cf. §2.3.3.2).

Annulation des dérivées de Fréchet selon	
les variables adjointes	→ Équations de contraintes réduites
les variables d'état	→ Équations adjointes réduites
les paramètres de contrôle	→ Conditions d'optimalité

TABLE 4.1 – Résumé de l'obtention du système optimal.

L'algorithme de contrôle est alors le suivant :

- Résolution du système optimal réduit ;
- Détermination de la direction de descente ;
- Recherche du pas de l'algorithme de manière linéaire (avec l'algorithme d'Armijo, Algo. 3) ;
- Détermination des nouveaux paramètres de contrôle ;
- Si le critère de convergence n'est pas satisfait, retour à la première étape.

La Figure 4.1 résume la démarche de contrôle suivie tout au long de ce chapitre. Les étapes colorées représentent celles qui diffèrent par rapport à un algorithme de contrôle, utilisant les équations complètes (cf. Figure 2.2, §2.5). La première étape consiste à construire les bases POD, à partir de clichés de l'écoulement obtenus par simulations numériques (ici, avec *Code_Saturne*). Cette étape peut s'avérer coûteuse en temps de calcul (simulations à réaliser, construction des bases), mais elle est réalisée une *seule* fois, avant la procédure de contrôle. Deux méthodes sont ici employées pour construire les bases POD :

- soit à partir de clichés de l'écoulement obtenus avec un paramètre (nombre de Reynolds ou nombre de Grashof), §4.3 ;
- soit à partir de clichés d'écoulements obtenus avec plusieurs paramètres (nombre de Reynolds et/ou nombre de Grashof), §4.4.

Une fois les bases POD obtenues, la cible à atteindre $\hat{\mathbf{b}}$ (correspondant au scalaire cible $\hat{\theta}$) est déterminée (Eq 4.2).

Les expressions des équations de contraintes, des équations adjointes et de la condition d'optimalité, varient en fonction de la méthode de construction des bases POD utilisée. Celles-ci seront explicitées dans les deux sections suivantes.

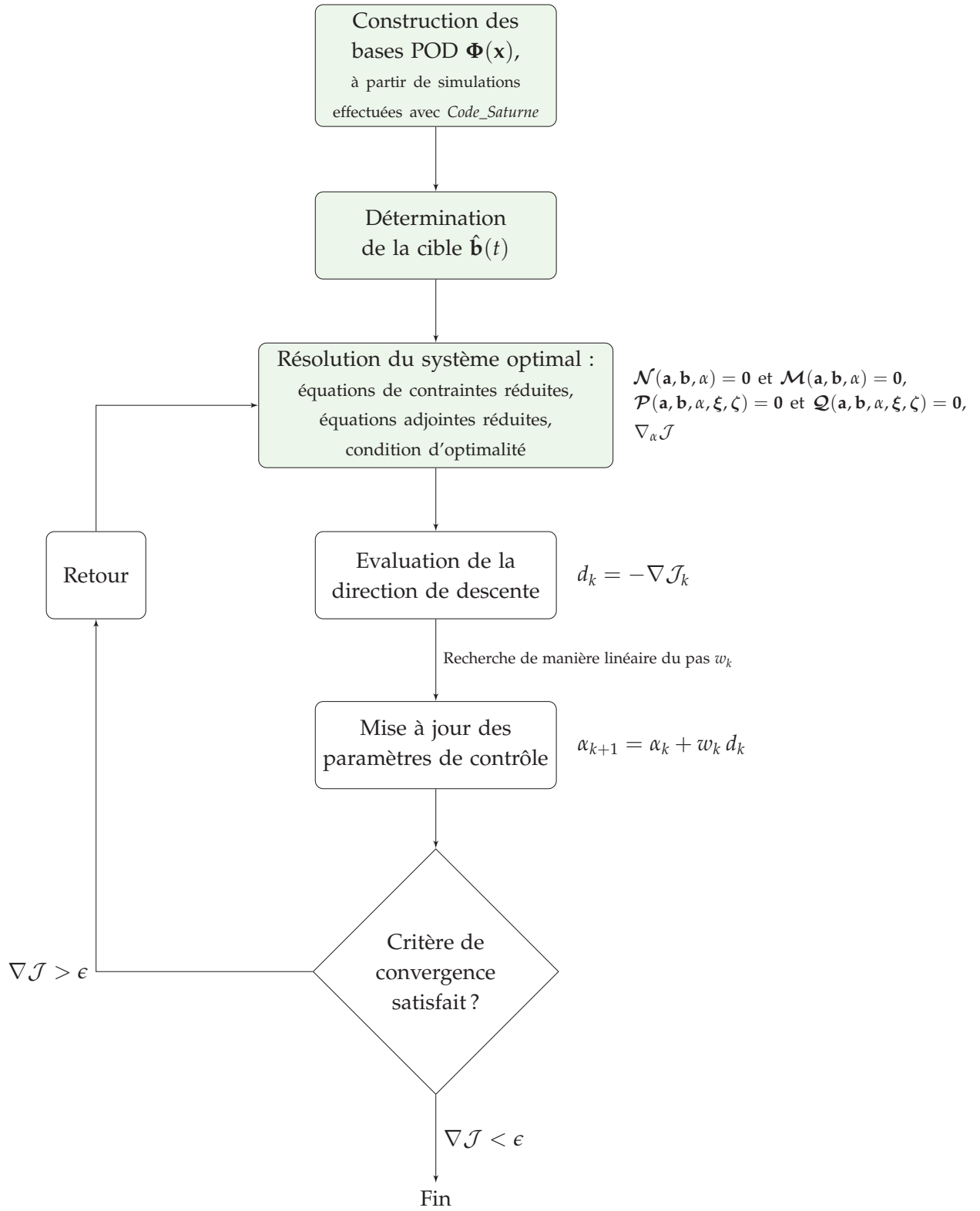


FIGURE 4.1 – Algorithme de contrôle, utilisant les modèles réduits.

4.3 Formulation avec des bases POD construites avec un paramètre

Dans un premier temps, les bases POD sont construites avec *un* paramètre : la vitesse d'entrée ou de manière équivalente, le nombre de Reynolds. Ainsi les clichés nécessaires à la construction de ces bases sont réalisés pour un écoulement à une vitesse d'entrée donnée (correspondant à un nombre de Reynolds donné, nommé Re_{POD}).

4.3.1 Décomposition du champ de vitesses avec la fonction de contrôle

Le champ de vitesses $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est décomposé, dans le but de faire apparaître le paramètre de contrôle α dans les équations des systèmes dynamiques réduits, selon la méthode de la fonction de contrôle, développée par Graham [97, 98] :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \quad (4.8)$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{u}_s(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

Le champ $\mathbf{u}_s(\mathbf{x})$ est une solution du problème issue des clichés de l'écoulement. Dans les cas transitoires traités ici, le champ $\mathbf{u}_s(\mathbf{x})$ correspond à la solution à temps grand des équations de Navier-Stokes. Le champ $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ est défini comme $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \alpha \mathbf{u}_s(\mathbf{x})$. La POD est effectuée sur le champ fluctuant $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ (cf. §3.4.1), telle que :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N^u} a_i(t) \Phi_i^u(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

Par la suite et par souci de clarté, seule la projection de Galerkin est considérée. Cependant, la méthode peut également être employée avec une projection basée sur la minimisation des résidus. La méthodologie relative à la projection MRP2 est développée dans l'Annexe E et dans [193].

4.3.2 Équations de contraintes réduites

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables adjointes ξ et ζ conduisent aux équations de contraintes réduites. Les systèmes dynamiques réduits sont quasiment les mêmes que ceux décrits à la section §3.4, mais le champ de vitesses est décomposé à présent selon la méthode de la fonction de contrôle (Eq 4.8). Des termes supplémentaires apparaissent alors dans les équations 3.33 et 3.34. Le modèle réduit, dépendant désormais du paramètre de contrôle α , s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} C_{ijk} a_j a_k + \sum_{j=1}^{N^u} (D_{ij} + \alpha \tilde{D}_{ij} + A_{ij}) a_j + \sum_{j=1}^{N^\theta} B_{ij} b_j + E_{i1} + \alpha E_{i2} \\ \quad + \alpha^2 E_{i3} + E_{i4} \\ \frac{db_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{ijk}^\theta a_j b_k + \sum_{j=1}^{N^\theta} (D_{ij}^\theta + \alpha \tilde{D}_{ij}^\theta + B_{ij}^\theta) b_j + \sum_{j=1}^{N^u} A_{ij}^\theta a_j + \alpha E_{i1}^\theta + E_{i2}^\theta \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Les coefficients du système dynamique réduit, associé aux équations de quantité de mouvement, sont ici donnés par :

$$\begin{aligned}
C_{ijk} &= - \left(\Phi_i^u, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right) \\
D_{ij} &= - \left(\Phi_i^u, [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \tilde{\mathbf{u}} \right) \\
\tilde{D}_{ij} &= - \left(\Phi_i^u, [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \mathbf{u}_s \right) \\
A_{ij} &= \nu \left(\Phi_i^u, \Delta \Phi_j^u \right) \\
B_{ij} &= g\beta \left(\Phi_i^u, \Phi_j^\theta \mathbf{e}_y \right) \\
E_{i1} &= \left(\Phi_i^u, \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} - [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \tilde{\mathbf{u}} \right) \\
E_{i2} &= \left(\Phi_i^u, \nu \Delta \mathbf{u}_s - [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \tilde{\mathbf{u}} - [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \mathbf{u}_s \right) \\
E_{i3} &= \left(\Phi_i^u, -[\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \mathbf{u}_s \right) \\
E_{i4} &= g\beta \left(\Phi_i^u, (\bar{\theta} - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y \right) - \frac{1}{\rho} \left(\Phi_i^u, \nabla \bar{p} \right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

et les coefficients du système dynamique réduit de convection-diffusion par :

$$\begin{aligned}
C_{ijk}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^\theta \right) \\
D_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^\theta \right) \\
\tilde{D}_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \Phi_j^\theta \right) \\
B_{ij}^\theta &= \gamma \left(\Phi_i^\theta, \Delta \Phi_j^\theta \right) \\
A_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) \\
E_{i1}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) \\
E_{i2}^\theta &= \left(\Phi_i^\theta, \gamma \Delta \bar{\theta} - [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\theta} \right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.3.3 Équations adjointes réduites

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les coefficients temporels $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$ conduit, après intégration par parties en temps, aux équations adjointes suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{d\zeta_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} (C_{jik} + C_{jki}) a_k \zeta_j + \sum_{j=1}^{N^u} (D_{ji} + \alpha \tilde{D}_{ji} + A_{ji}) \zeta_j \\ &+ \sum_{j=1}^{N^\theta} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{jik}^\theta \zeta_j b_k + \sum_{j=1}^{N^u} A_{ji}^\theta \zeta_j \end{aligned} \right. \quad \text{pour } i = 1, \dots, N^u$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{d\zeta_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{kji}^\theta a_j \zeta_k + \sum_{j=1}^{N^\theta} (D_{ji}^\theta + \alpha \tilde{D}_{ji}^\theta + B_{ji}^\theta) \zeta_j + \sum_{j=1}^{N^u} B_{ji} \zeta_j \\ &+ (b_i - \hat{b}_i) \end{aligned} \right. \quad \text{pour } i = 1, \dots, N^\theta$$

(4.14)

avec comme conditions finales :

$$\begin{aligned}
\zeta_i(T) &= 0, & \text{pour } i = 1, \dots, N \\
\zeta_i(T) &= b_i(T) - \hat{b}_i(T), & \text{pour } i = 1, \dots, N^\theta
\end{aligned}$$

4.3.4 Condition d'optimalité

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant la variable de contrôle α donne les conditions d'optimalité du système. L'expression suivante du gradient de la fonctionnelle objectif, en fonction du paramètre de contrôle α est alors obtenue :

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} \mathcal{J} &= \omega \alpha \\ &+ \sum_{i=1}^{N^{\theta}} \int_0^T \zeta_i \left\{ \sum_{j=1}^{N^{\theta}} \tilde{D}_{ij}^{\theta} b_j + E_{i1}^{\theta} \right\} dt + \sum_{i=1}^{N^u} \int_0^T \tilde{\zeta}_i \left\{ \sum_{j=1}^{N^u} \tilde{D}_{ij} a_j + E_{i2} + 2\alpha E_{i3} \right\} dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

Les équations de contraintes (Eq 4.11), les équations adjointes (Eq 4.14) et la condition d'optimalité (Eq 4.15) obtenues forment le *système optimal*, associé à un modèle d'ordre réduit par POD construit avec un paramètre. Ce système optimal réduit est alors résolu par un algorithme classique de descente en utilisant la méthode de l'équation adjointe, décrit à la sous-section §2.3.3.2. L'Algorithme 4 reprend la stratégie suivie.

Algorithme 4: MÉTHODE DE DESCENTE BASÉ SUR LE GRADIENT, COUPLÉE AVEC UN MODÈLE POD/ROM À UN PARAMÈTRE

Initialisation : $k = 0$, $\alpha_k = \alpha_{ini}$;

- 1: Connaissant α_k , résoudre $\mathcal{N}_k = \mathbf{0}$ et $\mathcal{M}_k = \mathbf{0}$ (Eq 4.11)
 $\rightarrow \mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$
 - 2: Connaissant α_k , $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$, résoudre $\mathcal{P}_k = 0$ et $\mathcal{Q}_k = 0$ (Eq 4.14)
 $\rightarrow \xi_k$ et ζ_k
 - 3: Évaluer la direction de descente avec la condition d'optimalité (Eq 4.15)
 $\rightarrow d_k = -\nabla_{\alpha} \mathcal{J}_k$
 - 4: Déterminer les nouveaux paramètres de contrôle
 $\rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k + w_k d_k$
 où le pas w_k est déterminé par recherche linéaire,
 par détermination d'un pas d'Armijo par rebroussement (§2.4.1, Algorithme 3)
 - 5: Évaluer le critère de convergence ($\|\nabla_{\alpha} \mathcal{J}\| < \varepsilon$).
 Si critère de convergence non satisfait, retour à l'étape 1.
-

Cet algorithme d'optimisation est appliqué dans les sous-sections suivantes pour contrôler la dispersion d'un polluant dans une cavité ventilée (§4.3.5) et pour contrôler la température à l'intérieur d'une cavité entraînée différentiellement chauffée (§4.3.6).

4.3.5 Dispersion d'un polluant dans une cavité ventilée

La première configuration étudiée dans ce chapitre consiste à contrôler la dispersion d'un polluant dans une cavité carrée ventilée isotherme, en agissant sur l'intensité de la vitesse d'entrée. La cavité ventilée étudiée ici est celle traitée au chapitre précédent (§3.6.1). Pour rappel, celle-ci est représentée sur la Figure 4.2 et est décrite ci-dessous.

Description

La cavité considérée est carrée de longueur L et comprend une entrée et une sortie. Le fluide qui s'y écoule est considéré newtonien et incompressible, dans un volume Ω de frontières $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_e \cup \Gamma_s$, pour $t \in]0, T]$. Γ_p représente les frontières aux parois, Γ_e à l'entrée et Γ_s à la sortie.

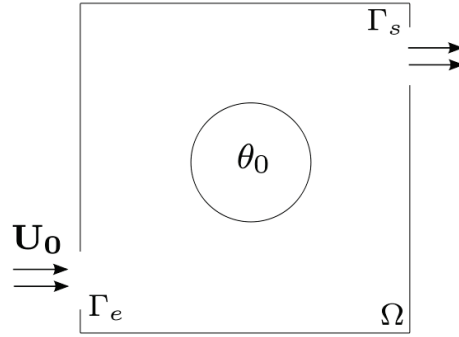


FIGURE 4.2 – Conditions aux limites de la cavité ventilée étudiée.

Le champ scalaire $\theta(\mathbf{x}, t)$ est pris passif : il représente dans ce cas une concentration en polluant. Les équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion sont données par l'expression suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \theta &= \gamma \Delta \theta \end{cases} \quad (4.16)$$

où ρ , ν et γ représente respectivement la masse volumique, la viscosité cinématique et le coefficient de diffusion. Ces équations sont munies des conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ et } \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}) \quad (4.17)$$

ainsi que des conditions aux limites :

$$\theta|_{\Gamma \setminus \Gamma_s} = 0 \quad (4.18)$$

$$\nabla \theta|_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = \alpha U_0 \mathbf{e}_x \quad (4.19)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_p} = \mathbf{0}$$

Une condition type "outlet" est imposée sur la vitesse en sortie. Le but est ici de contrôler la dispersion d'un polluant dans la cavité ventilée, en agissant sur la vitesse d'entrée $\mathbf{u}|_{\Gamma_e}$ (Eq 4.19), par l'intermédiaire du paramètre de contrôle α , et en conséquence, sur le nombre de Reynolds qui vaut alors $Re = \alpha U_0 L / \nu$.

Construction des bases POD

Les clichés⁴ nécessaires à la construction des bases POD de vitesse et de concentration, ont été obtenus en prenant $\alpha_{\text{POD}} = 1$ soit $Re_{\text{POD}} = 1000$: c'est le même cas que celui étudié dans la sous-section §3.6.1. 15 modes POD de vitesse et 14 modes POD de concentration sont conservés (de la même façon qu'à la sous-section §3.6.1).

Problème d'optimisation réduit

Une fois les modèles réduits obtenus, le problème de contrôle réduit est posé tel que l'écart entre les coefficients temporels liés à la concentration intérieure $\mathbf{b}(t)$ et à la concentration cible $\hat{\mathbf{b}}(t)$ soit minimal sous les équations de contraintes réduites (Eq 4.11, sans les termes liés à l'approximation de Boussinesq). Le coefficient temporel $\hat{\mathbf{b}}(t)$ lié à la concentration cible $\hat{\theta}_{FULL}(\mathbf{x})$ est construit avec le paramètre de contrôle cible $\alpha_{\text{cib}} = 1$, ce qui correspond à un nombre de Reynolds cible⁵ $Re_{\text{cib}} = 1000$. Deux champs "initiaux" sont testés, pour initialiser l'algorithme de contrôle : $\alpha_{\text{ini1}} = 0,8$ et $\alpha_{\text{ini2}} = 1,2$, soit respectivement $Re_{\text{ini1}} = 800$ et $Re_{\text{ini2}} = 1200$.

Le paramètre de contrôle tend vers la cible et la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ tend vers zéro, en moins de 6 itérations (cf. Figure 4.3(b)). La Figure 4.3(a) montre l'évolution du nombre de Reynolds en fonction de l'algorithme de contrôle. Pour les deux nombres de Reynolds initiaux ($Re_{\text{ini1}} = 800$ et $Re_{\text{ini2}} = 1200$), l'algorithme de contrôle permet de converger vers le nombre de Reynolds cible $Re_{\text{cib}} = 1000$, très rapidement, en environ une minute sur un processeur. Le même algorithme d'optimisation avec un modèle complet nécessiterait environ 15 heures pour faire 10 itérations, ce qui n'est pas applicable pour faire du contrôle actif en temps réel.

Les champs instantanés de vitesses et de concentration issus du modèle complet pour $Re = 1000$ et ceux obtenus avec l'algorithme d'optimisation réduit sont représentés sur la Figure 4.4 à différents instants. Les résultats obtenus sont très proches de la cible : peu de différences sont observables. L'algorithme d'optimisation permet de retrouver la dynamique du fluide et la dispersion du polluant attendues.

Pour quantifier cela, l'erreur relative entre les champs de vitesses et de concentration, définie par l'équation 3.75 (§3.6.1), provenant du modèle complet et ceux issus du modèle réduit obtenus à la fin de l'algorithme d'optimisation est représentée sur la Figure 4.5, pour les deux valeurs initiales testées. Les erreurs sont de l'ordre de celles obtenues avec le modèle réduit sans contrôle (§3.6.1,

⁴250 Snapshots obtenus à l'aide de *Code_Saturne* en utilisant un maillage de 100×100 et régulièrement répartis entre $t = 0$ et $t = 10$, ont été pris pour construire les bases POD du champ de vitesses et du champ de concentration.

⁵Le nombre de Reynolds cible est identique au nombre de Reynolds Re_{POD} avec lequel la base POD a été construite.

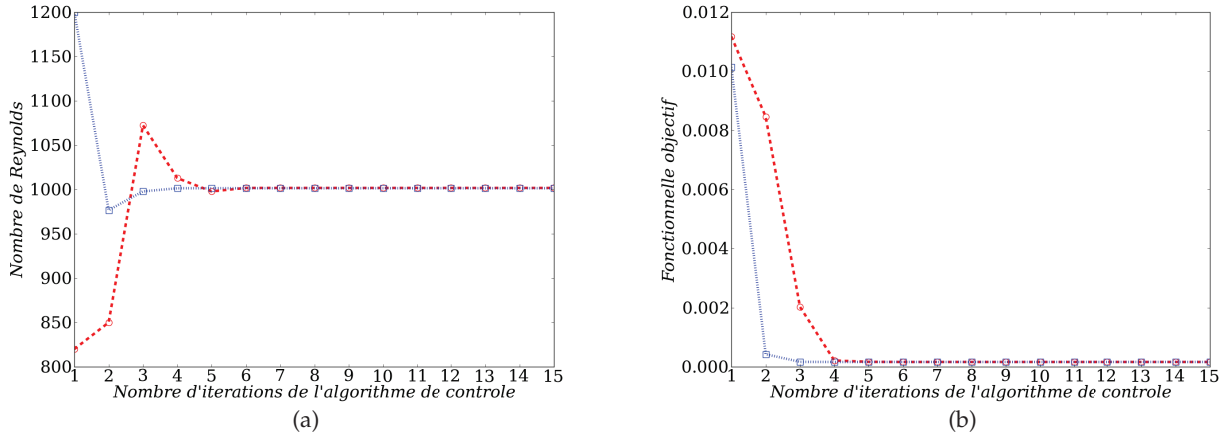


FIGURE 4.3 – (a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle.

Figure 3.9) : en moyenne⁶, l'erreur est de 4% en vitesse et de 10% en concentration (voir Tableau 4.2).

Remarque Les erreurs en vitesse et en concentration sont quasiment identiques quelque soit le champ initial utilisé. En effet, l'algorithme de contrôle vers le même nombre de Reynolds (cf. Figure 4.3(a)). Le modèle réduit étant construit avec ce même nombre de Reynolds, les erreurs commises sont similaires.

Validité de la base POD

Les champs utilisés pour initialiser l'algorithme ont été obtenus en résolvant le modèle réduit (Eq 4.11). Une question se pose alors : les champs initiaux sont-ils représentatifs de l'écoulement réel issu du modèle complet ? En d'autres termes, quelle est la validité de la base POD lorsque le paramètre de contrôle est modifié, sachant que celle-ci a été construite avec le nombre de Reynolds cible ?

Pour quantifier cela, l'erreur relative entre les champs de vitesses et de concentration, issus du modèle complet⁷ et du modèle réduit, est tracée sur la Figure 4.6, pour $Re_{ini1} = 800$ et $Re_{ini2} = 1200$. L'erreur est supérieure à 20% voire plus, dans les deux cas. Une erreur moyenne en vitesse et en concentration est obtenue de l'ordre de 30 %, si l'algorithme est initialisé avec $Re_{ini1} = 800$ et de l'ordre de 20 % avec $Re_{ini2} = 1200$ (cf. Tableau 4.2).

⁶L'erreur relative moyennée en temps est définie de la manière suivante :

$$\overline{err} = \frac{1}{T} \int_0^T err(t) dt \quad (4.20)$$

où $err(t)$ correspond à l'erreur relative en fonction du temps (Eq 3.75).

⁷Pour cela, de nouvelles simulations ont été réalisées avec *Code_Saturne* pour les nombres de Reynolds $Re = 800$ et $Re = 1200$.

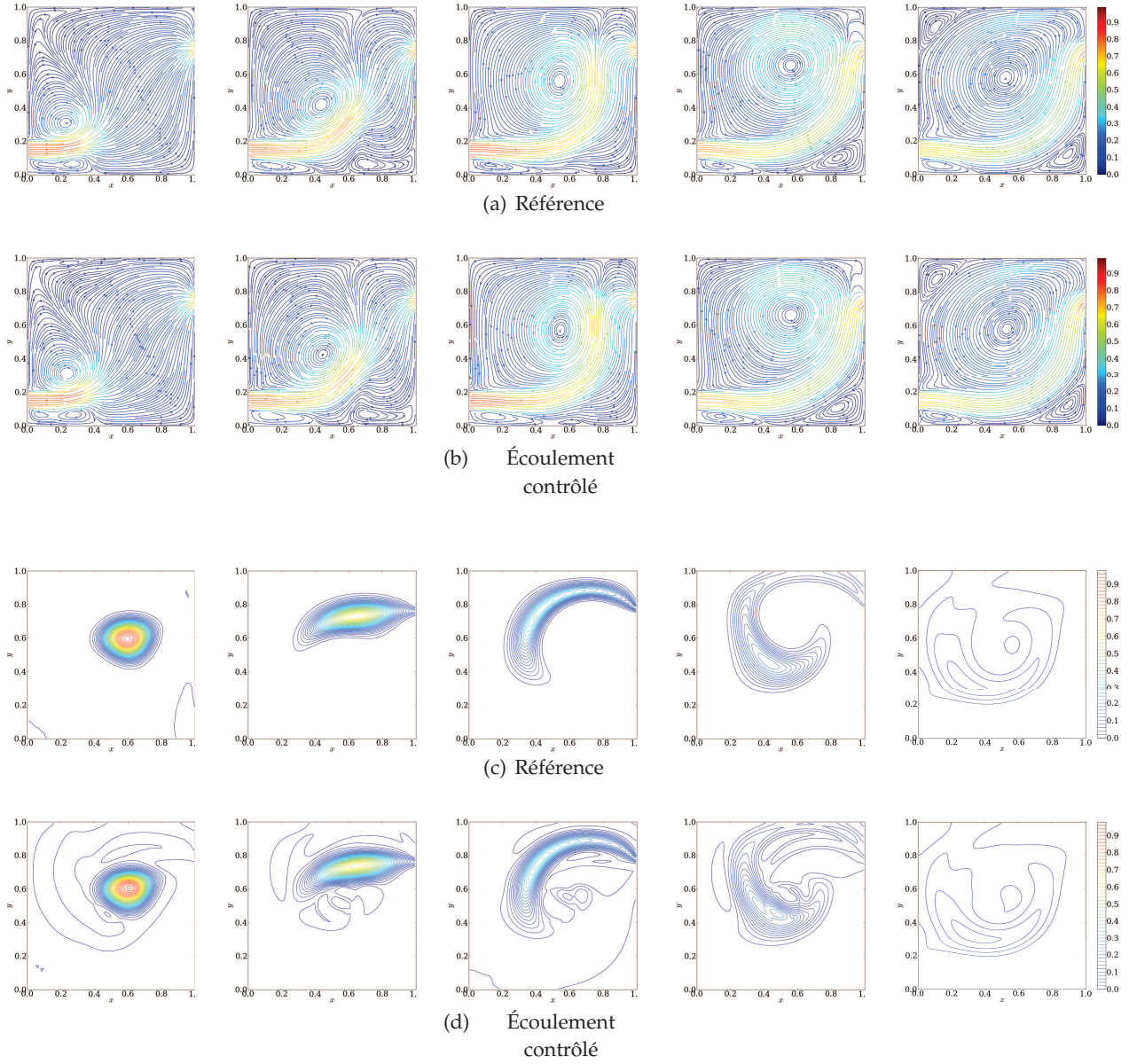


FIGURE 4.4 – Comparaison de l'écoulement et de la dispersion du polluant à cinq instants obtenus avec Code_Saturne (référence) et ceux issus de l'algorithme d'optimisation 4 ; (a) et (b) Lignes de courant de vitesses ; (c) et (d) Isocontours de concentration.

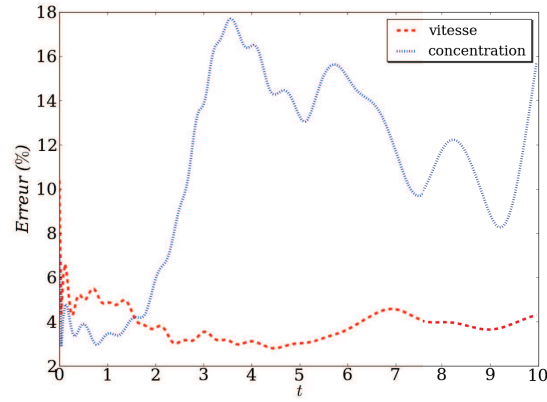
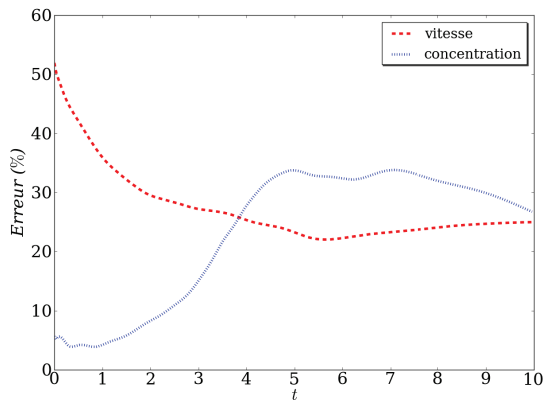
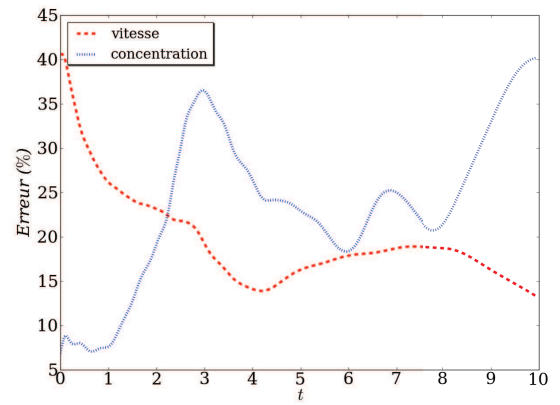


FIGURE 4.5 – Erreur entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et du modèle réduit issu de l'algorithme de contrôle.



(a) $Re_{ini1} = 800$



(b) $Re_{ini2} = 1200$

FIGURE 4.6 – Erreur relative entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et du modèle réduit initialisant l'algorithme de contrôle, pour chaque paramètre de contrôle initial.

Ces premiers résultats permettent de valider l'algorithme de contrôle utilisé. Il apparait cependant que les bases POD ne sont pas assez robustes : l'erreur commise sur les champs initiaux (obtenus avec un nombre de Reynolds différent de celui pris pour la construction des bases POD) est de l'ordre de 25%, alors que l'on pourrait espérer une erreur inférieure à 11. Une autre stratégie est ainsi employée pour remédier à cela dans la section §4.4.

ROM construit avec	Erreur moyenne en vitesse	Erreur moyenne en concentration
$Re_{cib} = 1000$	3,8%	10,9%
$Re_{ini1} = 800$	31,6%	27,8%
$Re_{ini2} = 1200$	19,6%	23,5%

TABLE 4.2 – Erreurs moyennées en temps entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et du modèle réduit, pour les champs finaux c'est-à-dire les champs obtenus avec l'algorithme de contrôle $Re_{cib} = 1000$ et pour les champs initiaux $Re_{ini1} = 800$ et $Re_{ini2} = 1200$.

4.3.6 Cavité entraînée différentiellement chauffée

Dans un second temps et afin de valider nos algorithmes d'optimisation avec un scalaire "non-passif" (température), le contrôle est réalisé sur une cavité entraînée par le haut, différentiellement chauffée, décrite sur la Figure 4.2. Le but est de contrôler le champ de température dans la cavité entraînée, en agissant sur la vitesse d'entraînement et par conséquence, sur le nombre de Reynolds.

Description

Le fluide est considéré newtonien et incompressible, dans un volume Ω de frontières Γ , pour $t \in]0, T]$. Les conditions aux limites sont données sur la Figure 4.7 : les parois horizontales Γ_h sont prises adiabatiques et il est imposé une température chaude θ_c sur la paroi gauche Γ_g et une température froide θ_f sur la paroi droite Γ_d . La cavité est entraînée par une vitesse d'entraînement $\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = U_0 \mathbf{e}_x$ sur la paroi haute Γ_e .

La dynamique du fluide et la température sont régies respectivement par les équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion, couplées par l'approximation de Boussinesq :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + g\beta(\theta - \theta_{ini}) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \theta &= \gamma \Delta \theta \end{cases} \quad (4.21)$$

où g , β et θ_{ini} représente respectivement la constante de gravité, le coefficient de dilatation thermique et la température initiale dans la cavité. Les propriétés du fluide sont supposées constantes, exceptées pour le terme de poussée qui intervient dans les équations de quantité de mouvement

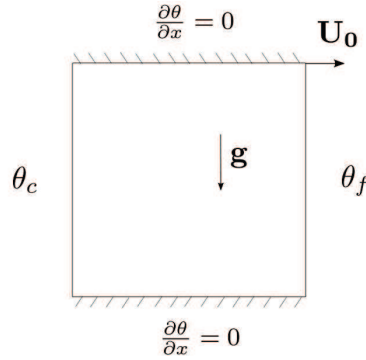


FIGURE 4.7 – Conditions aux limites de la cavité entraînée étudiée.

(approximation de Boussinesq). Ces équations sont munies des conditions initiales suivantes, sur le champ de vitesses $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ et de température $\theta(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}) \quad (4.22)$$

ainsi que des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \theta|_{\Gamma_g} &= \theta_c \\ \theta|_{\Gamma_d} &= \theta_f \\ \theta|_{\Gamma_h} &= 0 \\ \nabla \theta|_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_e} &= \alpha U_0 \mathbf{e}_x \\ \mathbf{u}|_{\Gamma/\Gamma_e} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

Une condition type "outlet" est imposée en sortie sur la vitesse.

Le contrôle est réalisé sur la vitesse d'entraînement, selon l'équation 4.24 et donc sur le nombre de Reynolds $Re = \alpha U_0 L / \nu$, pour un nombre de Grashof égal à $Gr = 1.10^6$.

Construction des bases POD

300 clichés obtenus à l'aide de *Code_Saturne* en utilisant un maillage de 100×100 et régulièrement répartis entre $t = 0$ et $t = 15$, ont été pris pour construire les bases POD du champ de vitesses et du champ de température. Ces clichés ont été pris en considérant un nombre de Reynolds $Re_{\text{POD}} = 316$ ($\alpha_{\text{POD}} = 1$) et donc un nombre de Richardson $Ri_{\text{POD}} = 10$. Conformément aux résultats de la littérature [52], la formation d'un tourbillon central aplati est observée, due à l'interaction entre les forces de flottabilité et les forces de cisaillement (cf. Figure 4.8). La température est stratifiée horizontalement et les valeurs initiales de température aux parois sont conservées, Figure 4.9.

Très peu de modes suffisent pour représenter plus de 99% de l'énergie de l'écoulement (cf. Figure 4.10(a)). L'erreur de reconstruction définie via l'équation 3.74 sur les champs de vitesses et de

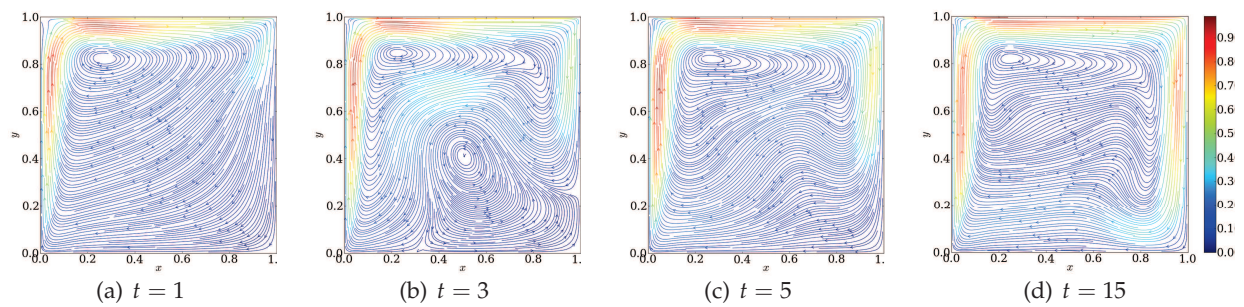


FIGURE 4.8 – Lignes de courant dans la cavité entraînée étudiée, obtenues avec `Code_Saturne`, aux instants $t = 1, 3, 5$ et 15.

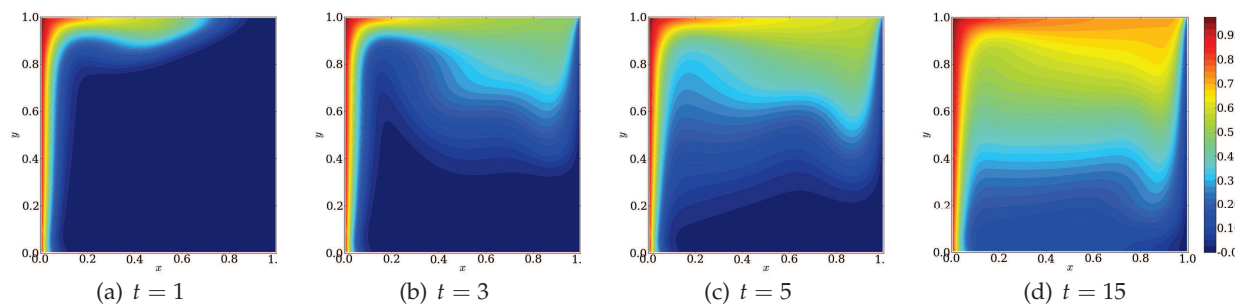


FIGURE 4.9 – Isocontours de température dans la cavité entraînée étudiée, obtenues avec `Code_Saturne`, aux instants $t = 1, 3, 5$ et 15.

température est tracée sur la Figure 4.10(b). Cette figure montre que l'erreur de reconstruction décroît avec le nombre de modes utilisé. En prenant 30 modes POD, l'erreur sur la vitesse et la température est de l'ordre de 10^{-3} . Par la suite, 12 modes de vitesse et 16 modes de température sont conservés, ce qui correspond à une erreur de 3.10^{-2} sur la vitesse et de 9.10^{-3} sur la température.

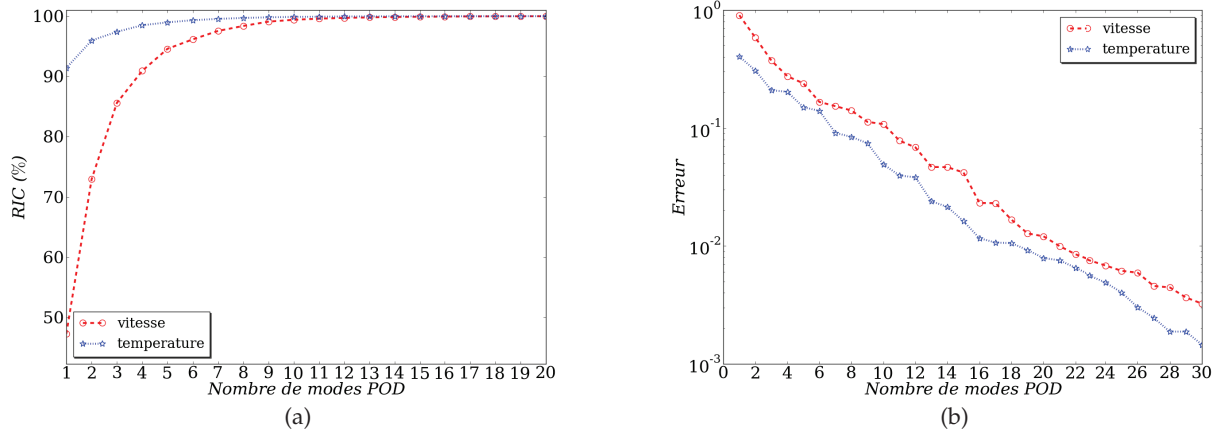


FIGURE 4.10 – (a) "Energie" en fonction du nombre de modes ; (b) Erreur de reconstruction POD pour la cavité entraînée différentiellement chauffée étudiée.

Problème d'optimisation réduit

Une fois les modèles réduits⁸ obtenus (Eq 4.11), le problème de contrôle réduit est posé tel que l'écart entre la température intérieure et la température cible soit minimal sous les contraintes réduites. L'algorithme de contrôle utilisé est celui décrit par l'Algorithme 4.

Le coefficient temporel $\hat{\mathbf{b}}(t)$ lié à la température cible $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ est construit avec le paramètre de contrôle cible $\alpha_{\text{cib}} = 1$, correspondant à un nombre de Reynolds $Re_{\text{cib}} = 316$ (soit $Ri_{\text{cib}} = 10$). Le paramètre de contrôle cible α_{cib} considéré est identique au paramètre α_{POD} , avec lequel les bases POD ont été construites.

Deux champs différents sont testés pour initialiser l'algorithme d'optimisation, construits avec le modèle réduit (Eq 4.11) correspondant à $\alpha_{\text{ini1}} = 0,8$ et $\alpha_{\text{ini2}} = 1,2$, soit $Re_{\text{ini1}} = 253$ et $Re_{\text{ini2}} = 379$ (respectivement $Ri_{\text{ini1}} = 16$ et $Ri_{\text{ini2}} = 7$). Partant d'un champ obtenu avec un nombre de Reynolds différent, le but est de converger, à l'aide de l'algorithme d'optimisation réduit, vers le champ cible en jouant sur le nombre de Reynolds.

Le paramètre de contrôle tend vers la cible et la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ tend vers zéro (Fig. 4.11(b)), en moins de 10 itérations. La Figure 4.11(a) montre l'évolution du nombre de Reynolds,

⁸Il peut être noté que les vecteurs de la base POD de vitesses étant nuls aux bords et à divergence nulle par construction, les termes de pression ne sont plus présents dans le système dynamique réduit.

en fonction de l'algorithme de contrôle. Quelque soit le nombre de Reynolds initial ($Re_{ini1} = 253$ et $Re_{ini2} = 379$), l'algorithme converge très rapidement (environ une minute sur un processeur) vers le nombre de Reynolds cible ($Re_{cib} = 316$). Il est alors à noter que le même algorithme d'optimisation en utilisant le modèle complet mettrait environ 70 heures (quasiment 3 jours) pour faire 10 itérations et le double pour faire 20 itérations, ce qui n'est pas du tout applicable pour faire du contrôle actif en temps réel.

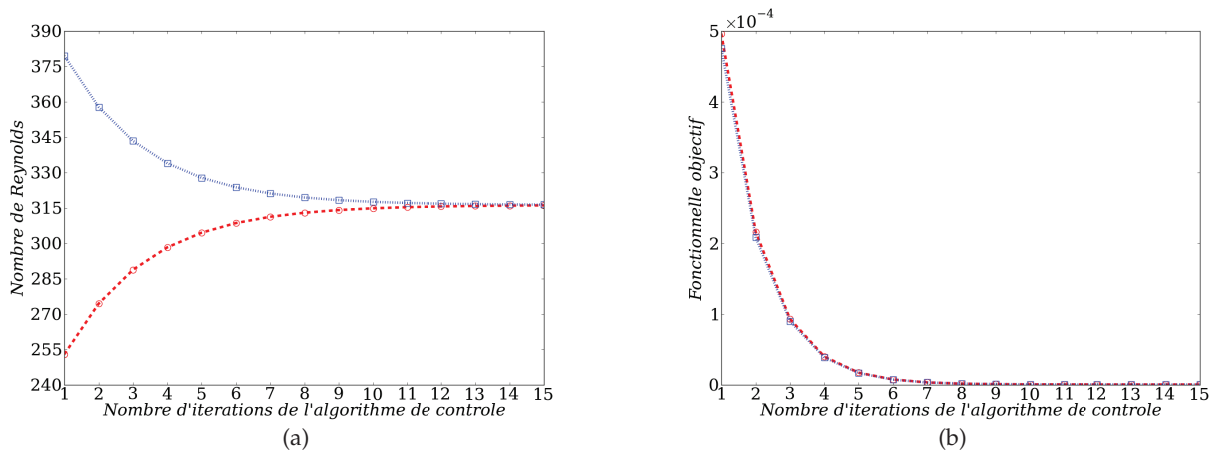


FIGURE 4.11 – (a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle et (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle.

Les champs instantanés de vitesses et de température pour les nombres de Reynolds cible (obtenus avec un modèle complet) et prédits par l'algorithme d'optimisation sont illustrés sur la Figure 4.12, à différents instants. Les champs obtenus par l'algorithme d'optimisation retrouvent bien la dynamique du fluide attendue. Afin de quantifier cela, l'erreur entre les champs cibles (provenant du modèle complet) et les champs issus du modèle réduit obtenus à la fin de l'algorithme d'optimisation est représentée sur la Figure 4.13. L'erreur moyenne est d'environ de 4% en température et de 6% en vitesses⁹ (Tableau 4.3). Ces observations montrent l'efficacité de nos algorithmes d'optimisation avec un couplage vitesse-température.

Validité de la base POD

Comme mentionné à la section §4.3.5, les champs utilisés pour initialiser l'algorithme de contrôle ont été obtenus à partir des systèmes dynamiques (Eq 4.11), construits à partir d'une base POD générée avec le nombre de Reynolds cible. La base POD peut donc n'être plus valable pour les nombres de Reynolds initiaux. L'erreur relative entre les champs de vitesses et de température,

⁹La remarque faite à la sous-section §4.3.5 reste vraie : les erreurs en vitesse et en température sont quasiment identiques quelque soit le champ initial utilisé.

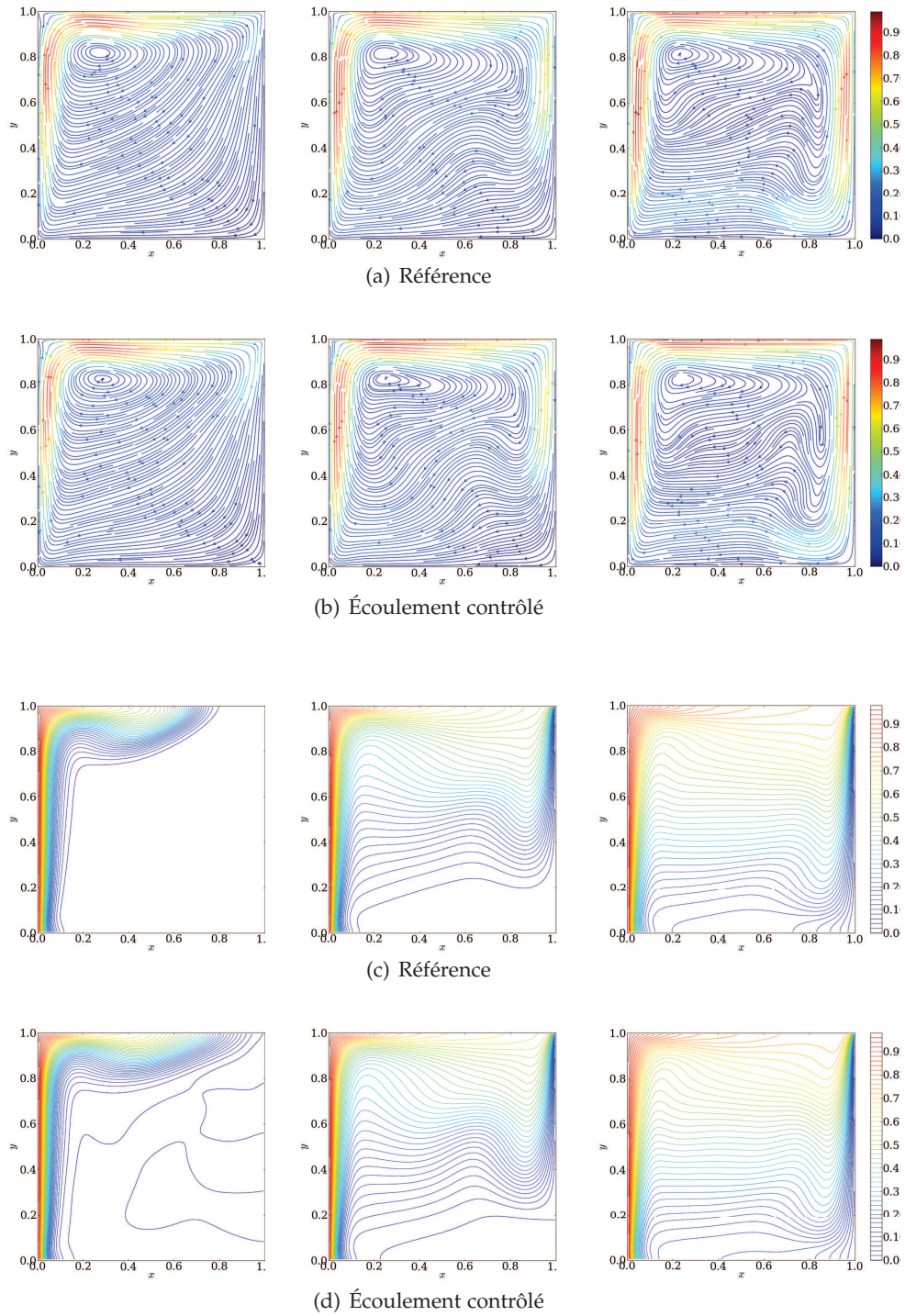


FIGURE 4.12 – Comparaison de l'écoulement à trois instants obtenus avec Code_Saturne (référence) et ceux issus de l'algorithme d'optimisation 4; (a) et (b) Lignes de courant de vitesses; (c) et (d) Isocontours de température.

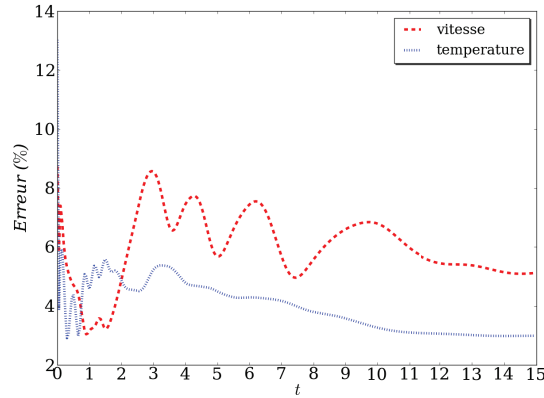
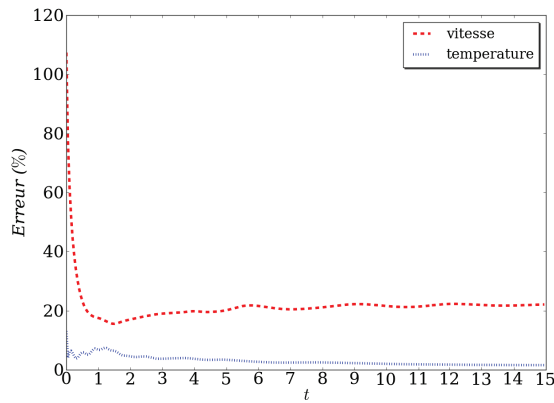
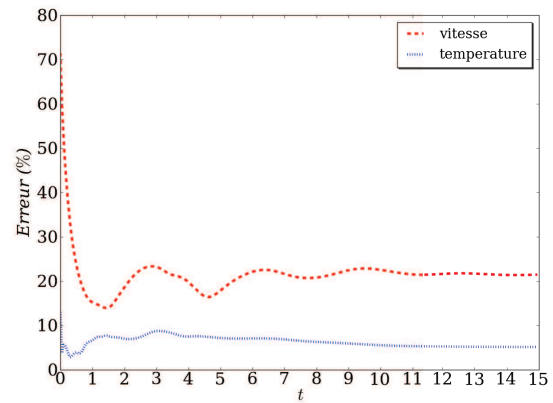


FIGURE 4.13 – Erreur entre les champs de vitesses et de température obtenus avec le modèle complet et avec le modèle réduit issu de l'algorithme de contrôle.

définie par l'équation 3.75, issus du modèle complet¹⁰ et du modèle réduit, est tracée sur la Figure 4.6, pour $Re_{ini1} = 253$ et $Re_{ini2} = 379$. Une erreur importante entre les champs de vitesses est notifiée aux instants initiaux. L'erreur moyennée en temps (Eq 4.20) est d'environ 20 % en vitesse et inférieure à 6 % en température, cf. Tableau 4.3.



(a) $Re_{ini1} = 253$



(b) $Re_{ini2} = 379$

FIGURE 4.14 – Erreur entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et du modèle réduit, pour les champs initiant l'algorithme de contrôle.

¹⁰Pour cela, de nouvelles simulations ont été réalisées avec *Code_Saturne* pour les nombres de Reynolds $Re = 253$ et $Re = 379$.

ROM construit avec	Erreur moyenne en vitesse	Erreur moyenne en température
$Re_{cib} = 316$	5,97%	3,96%
$Re_{ini1} = 253$	21,6%	2,99%
$Re_{ini2} = 379$	21,5%	6,29%

TABLE 4.3 – Erreurs moyennées en temps entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et du modèle réduit, pour les champs finaux c'est-à-dire les champs obtenus avec l'algorithme de contrôle $Re_{cib} = 316$ et pour les champs initiaux $Re_{ini1} = 253$ et $Re_{ini2} = 379$.

Synthèse de la section

Ces premiers cas tests isotherme et anisotherme permettent de valider notre algorithme de contrôle : il converge rapidement vers la cible, en temps quasi-réel (ordre de la minute). Néanmoins, le modèle réduit construit avec un nombre de Reynolds donné (Re_{POD}) n'est plus forcément valable pour un autre nombre de Reynolds. En effet, la capacité des modes POD à approximer un état d'un système complexe est dépendante de l'information originellement contenue dans l'ensemble des clichés utilisés pour générer les fonctions de la base. La base POD peut ne plus être valable si un ou plusieurs paramètres est modifié. Une seule et même base ne peut alors pas être employée sur une gamme de température, de vitesse d'entrée de l'air, ... ou une géométrie différentes. Dans la section suivante, la méthode de la fonction de contrôle est également employée, mais cette fois-ci, les modèles réduits sont construits en utilisant une base POD, qualifiée de "mixte", car elle est obtenue à partir de clichés d'écoulements avec non plus *un* paramètre, mais *plusieurs* paramètres.

4.4 Formulation avec des bases POD construites avec plusieurs paramètres

Comme mentionné précédemment, les bases POD ne sont plus valables si un ou plusieurs paramètre(s) est modifié. Afin de contourner ce problème, nous avons construits ici les bases POD, à partir de clichés d'écoulements simulés avec *plusieurs* valeurs de vitesse d'entrée α_{POD} (et donc plusieurs nombres de Reynolds Re_{POD}). Ceci va permettre d'enrichir l'information contenue dans les bases POD et donc de pouvoir espérer obtenir des modèles réduits plus précis. Dans cette section, le contrôle est effectué tout d'abord avec un paramètre de contrôle (vitesse d'entrée ou nombre de Reynolds), §4.4.1. Après description du système optimal obtenu (équations de contraintes réduites, équations adjointes réduites, condition d'optimalité), la méthodologie employée est appliquée sur les cas tests précédemment étudiés à la section §4.3 : la cavité ventilée isotherme et la cavité entraînée différentiellement chauffée. Les résultats sont ensuite comparés à ceux obtenus avec des bases POD construites avec un seul paramètre. Puis dans un second temps, le contrôle est réalisé avec deux paramètres de contrôle : la vitesse d'entrée et la température aux parois (c'est-à-dire sur le nombre de Reynolds et le nombre de Grashof), §4.4.2. La méthode employée est explicitée, puis appliquée au cas de la cavité entraînée différentiellement chauffée.

4.4.1 Contrôle sur le nombre de Reynolds

Chaque grandeur (vitesse, température, concentration, ...) dépend à présent explicitement des N_α paramètres α : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \alpha)$ et $\theta(\mathbf{x}, t, \alpha)$. Le champ de vitesses est décomposé, suivant la méthode de la fonction de contrôle, en un champ moyen et un champ fluctuant, dépendant chacun du paramètre α :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \alpha) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \alpha) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t, \alpha) \quad (4.25)$$

Le champ scalaire θ est également décomposé de la même façon :

$$\theta(\mathbf{x}, t, \alpha) = \bar{\theta}(\mathbf{x}, \alpha) + \theta'(\mathbf{x}, t, \alpha) \quad (4.26)$$

Les valeurs moyennes sont définies par :

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{1}{T} \int_T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \alpha) dt \quad (4.27)$$

$$\bar{\theta}(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{1}{T} \int_T \theta(\mathbf{x}, t, \alpha) dt \quad (4.28)$$

La POD est réalisée sur les champs fluctuants :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t, \alpha) \approx \sum_{i=1}^{N^u} a_i(t, \alpha) \Phi_i^u(\mathbf{x}) \quad (4.29)$$

$$\theta'(\mathbf{x}, t, \alpha) \approx \sum_{i=1}^{N^\theta} b_i(t, \alpha) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}) \quad (4.30)$$

avec $\mathbf{a}(t, \alpha)$ et $\mathbf{b}(t, \alpha)$ les coefficients temporels, respectifs à la vitesse et au champ scalaire, dépendent désormais de α . Les modes POD du champ de vitesses $\Phi_i^u(\mathbf{x})$ et du champ scalaire

$\Phi_i^\theta(\mathbf{x})$ sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres donné par l'équation 3.28 (cf. §3.3.3). Par la suite et pour éviter toute confusion, les paramètres inclus dans l'échantillonnage, sont notés $\alpha_{\text{POD}} = [\alpha_{\text{POD}}^1 \dots \alpha_{\text{POD}}^{N_\alpha}]^T$, où N_α représente le nombre de paramètres α_{POD}^n utilisés.

4.4.1.1 Équations de contraintes réduites

Seul le cas de la projection de Galerkin est considéré ici, mais la même méthodologie peut également être employée avec la projection MRP2. Après introduction des expressions du champ de vitesses (Eq 4.25) et du champ scalaire (Eq 4.26) dans les équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion (Eq 3.29), puis projection de Galerkin de celles-ci, sur les bases POD de vitesses $\Phi^u(\mathbf{x})$ et du champ scalaire $\Phi^\theta(\mathbf{x})$, le modèle d'ordre réduit s'exprime de la manière suivante, pour un α donné :

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} C_{ijk} a_j a_k + \sum_{j=1}^{N^u} (D_{ij}(\alpha) + A_{ij}) a_j + \sum_{j=1}^{N^\theta} B_{ij} b_j + E_{i1}(\alpha) + E_{i2}(\alpha) \\ &+ E_{i3}(\alpha) + E_{i4}(\alpha) \end{aligned} \quad (4.31)$$

pour $i = 1, \dots, N^u$

$$\begin{aligned} \frac{db_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{ijk}^\theta a_j b_k + \sum_{j=1}^{N^\theta} (D_{ij}^\theta(\alpha) + B_{ij}^\theta) b_j + \sum_{j=1}^{N^u} A_{ij}^\theta(\alpha) a_j + E_{i1}^\theta(\alpha) + E_{i2}^\theta(\alpha) \end{aligned} \quad (4.32)$$

pour $i = 1, \dots, N^\theta$

Les coefficients des systèmes dynamiques faisant apparaître le champ moyen $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \alpha)$ ou $\bar{\theta}(\mathbf{x}, \alpha)$, c'est-à-dire D_{ij} , E_{i1} , E_{i2} , E_{i3} , E_{i4} , D_{ij}^θ , A_{ij}^θ , E_{i1}^θ et E_{i2}^θ , dépendent alors intrinsèquement du paramètre de contrôle α . Ils sont déterminés en utilisant une interpolation de Lagrange des grandeurs moyennes (ainsi que des opérateurs associés $\nabla \bar{f}$ et $\Delta \bar{f}$) du champ considéré¹¹, tels que :

$$\bar{f}(\alpha) = \sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{f}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \quad (4.34)$$

Les coefficients du système dynamique réduit de quantité de mouvement sont alors définis de la

¹¹La pression moyenne est définie comme les champs moyens de vitesse et du champ scalaire (Eqs 4.25 et 4.26), telle que :

$$\bar{p}(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{1}{T} \int_T p(\mathbf{x}, t, \alpha) dt \quad (4.33)$$

manière suivante :

$$\begin{aligned}
C_{ijk} &= - \left(\Phi_i^u, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right) \\
A_{ij} &= \nu \left(\Phi_i^u, \Delta \Phi_j^u \right) \\
B_{ij} &= g\beta \left(\Phi_i^u, \Phi_j^\theta \mathbf{e}_y \right) \\
D_{ij} &= - \left(\Phi_i^u, \left[\sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \cdot \nabla \right] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \right) \\
E_{i1} &= \nu \left(\Phi_i^u, \sum_{n=1}^{N_\alpha} \Delta \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \right) \\
E_{i2} &= - \left(\Phi_i^u, \left[\sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \cdot \nabla \right] \sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \right) \\
E_{i3} &= -\frac{1}{\rho} \left(\Phi_i^u, \sum_{n=1}^{N_\alpha} \nabla \bar{p}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \right) \\
E_{i4} &= g\beta \left(\Phi_i^u, \left(\sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{\theta}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} - \theta_{ini} \right) \mathbf{e}_y \right)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

et les coefficients du système dynamique réduit de convection-diffusion par :

$$\begin{aligned}
C_{ijk}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^\theta \right) \\
B_{ij}^\theta &= \gamma \left(\Phi_i^\theta, \Delta \Phi_j^\theta \right) \\
D_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, \left[\sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \cdot \nabla \right] \Phi_j^\theta \right) \\
A_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{\theta}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \right) \\
E_{i1}^\theta &= \gamma \left(\Phi_i^\theta, \sum_{n=1}^{N_\alpha} \Delta \bar{\theta}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \right) \\
E_{i2}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, \left[\sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \cdot \nabla \right] \sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{\theta}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \right)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Étant donné que les coefficients $D_{ij}, E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}, E_{i4}, D_{ij}^\theta, A_{ij}^\theta, E_{i1}^\theta$ et E_{i2}^θ dépendent explicitement du paramètre de contrôle α , ils doivent être mis à jour à chaque itération de l'algorithme de contrôle¹².

Au début de cette section, il a été notifié que l'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables adjointes ξ et ζ conduisent aux équations de contraintes réduites. Les équations 4.31 constituent donc les équations de contraintes réduites, liées au système optimal couplé à un modèle réduit construit avec des bases POD "mixtes".

4.4.1.2 Équations adjointes réduites

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les coefficients temporels **a** et **b** conduit, après intégration par parties en temps, aux équations adjointes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\tilde{\zeta}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} (C_{jik} + C_{jki}) a_k \tilde{\zeta}_j + \sum_{j=1}^{N^u} (D_{ji}(\alpha) + A_{ji}) \tilde{\zeta}_j + \sum_{j=1}^{N^\theta} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{jik}^\theta \tilde{\zeta}_j b_k \\ \quad + \sum_{j=1}^{N^u} A_{ji}^\theta(\alpha) \tilde{\zeta}_j \\ \\ -\frac{d\zeta_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{kji}^\theta a_j(t, \alpha) \zeta_k + \sum_{j=1}^{N^\theta} (D_{ji}^\theta(\alpha) + B_{ji}^\theta) \zeta_j + \sum_{j=1}^{N^u} B_{ji} \zeta_j \\ \quad + (b_i - \hat{b}_i) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{pour } i = 1, \dots, N^u \\ \\ \text{pour } i = 1, \dots, N^\theta \end{array} \quad (4.38)$$

avec comme conditions finales :

$$\begin{array}{ll} \tilde{\zeta}_i(T, \alpha) &= 0, & \text{pour } i = 1, \dots, N \\ \zeta_i(T, \alpha) &= b_i(T, \alpha) - \hat{b}_i(T, \alpha), & \text{pour } i = 1, \dots, N^\theta \end{array}$$

4.4.1.3 Condition d'optimalité

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables de contrôle α donne les conditions d'optimalité du système. Le gradient de la fonctionnelle objectif, en fonction du paramètre de

¹² Le calcul de ces coefficients peut s'avérer coûteux en temps et en stockage, dans le cas de maillages très fins. Ils peuvent cependant être déterminés en amont, en-dehors de la boucle de contrôle. Prenons par exemple le cas de E_{i1} , il peut également s'écrire de la manière suivante :

$$E_{i1} = \nu(\Phi_i^\mu, \Delta \bar{\mathbf{u}}(\alpha)) = \sum_{n=1}^{N_\alpha} E_{i1}(\alpha_{\text{POD}}^n) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{(\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m)}{(\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m)} \quad \text{avec } E_{i1}(\alpha_{\text{POD}}^n) = \nu(\Phi_i^\mu, \Delta \bar{\mathbf{u}}(\alpha_{\text{POD}}^n)) \quad (4.37)$$

contrôle α s'exprime alors tel que :

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} \mathcal{J} &= \omega \alpha + \sum_{i=1}^{N^u} \int_0^T \zeta_i \left\{ \sum_{j=1}^{N^u} \tilde{D}_{ij}(\alpha) a_j + \tilde{E}_{i1}(\alpha) + \tilde{E}_{i2}(\alpha) + \tilde{E}_{i3}(\alpha) + \tilde{E}_{i4}(\alpha) \right\} dt \\ &+ \sum_{i=1}^{N^{\theta}} \int_0^T \zeta_i \left\{ \sum_{j=1}^{N^{\theta}} \tilde{D}_{ij}^{\theta}(\alpha) b_j + \sum_{j=1}^{N^u} \tilde{A}_{ij}^{\theta}(\alpha) a_j + \tilde{E}_{i1}^{\theta}(\alpha) + \tilde{E}_{i2}^{\theta}(\alpha) \right\} dt \end{aligned} \quad (4.39)$$

Les coefficients relatifs aux gradients de la fonctionnelle objectif, par rapport au paramètre de contrôle α dépendent des champs moyens de vitesses, de température et de pression. Chaque grandeur moyenne $\bar{f}(\alpha)$ est donc dérivée par rapport à α , de la manière suivante :

$$\frac{\partial \bar{f}(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{f}_n \kappa_n(\alpha) \quad \text{où } \kappa_n(\alpha) = \frac{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_{\alpha}} \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{N_{\alpha}} (\alpha - \alpha_{\text{POD}}^l) \right]}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_{\alpha}} (\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m)} \quad (4.40)$$

Les coefficients lié au gradient de la fonctionnelle objectif, par rapport à α s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ij} &= - \left(\Phi_i^u, \left[\sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\mathbf{u}}_n \kappa_n(\alpha) \cdot \nabla \right] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\mathbf{u}}_n \kappa_n(\alpha) \right) \\ \tilde{E}_{i1} &= \nu \left(\Phi_i^u, \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \Delta \bar{\mathbf{u}}_n \kappa_n(\alpha) \right) \\ \tilde{E}_{i2} &= - \left(\Phi_i^u, \left[\sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\mathbf{u}}_n \kappa_n(\alpha) \cdot \nabla \right] \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_{\alpha}} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} + \left[\sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_{\alpha}} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \cdot \nabla \right] \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\mathbf{u}}_n \kappa_n(\alpha) \right) \\ \tilde{E}_{i3} &= -\frac{1}{\rho} \left(\Phi_i^u, \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \nabla \bar{p}_n \kappa_n(\alpha) \right) \\ \tilde{E}_{i4} &= g\beta \left(\Phi_i^u, \left(\sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\theta}_n \kappa_n(\alpha) - \theta_{ini} \right) \mathbf{e}_y \right) \\ \tilde{D}_{ij}^{\theta} &= - \left(\Phi_i^{\theta}, \left[\sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\mathbf{u}}_n \kappa_n(\alpha) \cdot \nabla \right] \Phi_j^{\theta} \right) \\ \tilde{A}_{ij}^{\theta} &= - \left(\Phi_i^{\theta}, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\theta}_n \kappa_n(\alpha) \right) \\ \tilde{E}_{i1}^{\theta} &= \gamma \left(\Phi_i^{\theta}, \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \Delta \bar{\theta}_n \kappa_n(\alpha) \right) \\ \tilde{E}_{i2}^{\theta} &= - \left(\Phi_i^{\theta}, \left[\sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\mathbf{u}}_n \kappa_n(\alpha) \cdot \nabla \right] \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\theta}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_{\alpha}} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} + \left[\sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\mathbf{u}}_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_{\alpha}} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \cdot \nabla \right] \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{\theta}_n \kappa_n(\alpha) \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Tous ces coefficients dépendent explicitement du paramètre de contrôle α . Ils doivent donc être recalculés à chaque itération de l'algorithme de contrôle¹³.

Les équations de contraintes (Eq 4.31), les équations adjointes (Eq 4.38) et la condition d'optimalité (Eq 4.39) obtenues forment le *système optimal*, couplé à un modèle réduit construit avec une base POD "mixte". Le système est alors résolu par un algorithme classique de descente en utilisant la méthode de l'équation adjointe (cf. §2.3.3.2). L'algorithme d'optimisation réduit est alors l'Algorithme 5.

Algorithme 5: MÉTHODE DE DESCENTE BASÉE SUR LE GRADIENT, COUPLÉE AVEC UN MODÈLE ROM/POD "MIXTE"

Initialisation : $k = 0$, $\alpha_k = \alpha_{ini}$;

- 1: Connaissant α_k , mettre à jour les coefficients dépendant de α_k (Eqs 4.35, 4.36 et 4.41)
 - 2: Une fois ces coefficients calculés, résoudre $\mathcal{N}_k = 0$ et $\mathcal{M}_k = 0$ (Eq 4.31)
 $\rightarrow \mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$
 - 3: Connaissant α_k , $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$, résoudre $\mathcal{P}_k = 0$ et $\mathcal{Q}_k = 0$ (Eq 4.38)
 $\rightarrow \boldsymbol{\xi}_k$ et $\boldsymbol{\zeta}_k$
 - 4: Évaluer la direction de descente avec la condition d'optimalité (Eq 4.39)
 $\rightarrow d_k = -\nabla_{\alpha} \mathcal{J}_k$
 - 5: Déterminer les nouveaux paramètres de contrôle
 $\rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k + w_k d_k$
 où le pas w_k est déterminé par recherche linéaire,
 par détermination d'un pas d'Armijo par rebroussement (§2.4.1)
 - 6: Évaluer le critère de convergence ($\|\nabla_{\alpha} \mathcal{J}\| < \varepsilon$).
 Si critère de convergence non satisfait, retour à l'étape 1.
-

Cet algorithme d'optimisation est appliqué dans les sous-sections suivantes pour contrôler la dispersion d'un polluant dans une cavité ventilée (§4.4.1.4) et pour contrôler la température à l'intérieur d'une cavité entraînée différentiellement chauffée (§4.4.1.5).

4.4.1.4 Dispersion d'un polluant dans une cavité ventilée

Le cas étudié ici est celui décrit à la section §4.3.5. Le but est toujours de contrôler la dispersion du polluant dans la cavité ventilée, décrite sur la Figure 4.2, en agissant sur la vitesse d'entrée $\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = \alpha U_0 \mathbf{e}_x$ et donc sur le nombre de Reynolds $Re = \alpha U_0 L / \nu$.

Construction des bases POD sur une gamme de Reynolds

Les clichés, nécessaires à la construction des bases POD, sont issus de simulations à différents nombres de Reynolds compris entre 800 et 1200. Afin de déterminer l'influence du nombre de paramètres N_{α} utilisés dans la construction des bases POD, quatre configurations de bases POD ont été testées :

¹³La note de bas de page 12 est valable également ici.

- La première a été construite avec des simulations pour $\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [800 \ 1200]^T$
(soit respectivement $\alpha_{\text{POD}} = [0,8 \ 1,2]^T$);
- La deuxième avec des simulations pour $\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [800 \ 1000 \ 1200]^T$
(soit respectivement $\alpha_{\text{POD}} = [0,8 \ 1,0 \ 1,2]^T$);
- La troisième avec des simulations pour $\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [800 \ 1000 \ 1100 \ 1200]^T$
(soit respectivement $\alpha_{\text{POD}} = [0,8 \ 1,0 \ 1,1 \ 1,2]^T$);
- La quatrième avec des simulations pour $\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [800 \ 900 \ 1000 \ 1100 \ 1200]^T$
(soit respectivement $\alpha_{\text{POD}} = [0,8 \ 0,9 \ 1,0 \ 1,1 \ 1,2]^T$).

Elles sont répertoriées dans le Tableau 4.4 et seront, par la suite, identifiées avec leurs numéros. 125 clichés, pour chaque paramètre α_{POD}^n ($n = 1, \dots, N_\alpha$), ont été utilisés pour construire les bases POD de vitesses et de concentration, en utilisant la méthode décrite au paragraphe §4.4.1.

Les Figures 4.15 et 4.16 représentent respectivement les lignes de courant et les isocontours de concentration dans la cavité ventilée pour chaque nombre de Reynolds considéré, obtenus avec *Code_Saturne* et à différents instants. Des différences entre les simulations sont observées principalement dans les zones de recirculation (coins inférieurs et coin supérieur gauche), Figure 4.15. L'intensité de la vitesse est également différente dans la cavité. La Figure montre 4.16 que plus le nombre de Reynolds est élevé, plus le polluant est dispersé rapidement. Au temps final, le polluant est totalement évacué.

Bases POD n°	Nombre de paramètres N_α	Nombre de Reynolds associé	Temps CPU
1	2	$\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [800 \ 1200]^T$	3min 49s
2	3	$\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [800 \ 1000 \ 1200]^T$	5min 58s
3	4	$\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [800 \ 1000 \ 1100 \ 1200]^T$	8min 45s
4	5	$\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [800 \ 900 \ 1000 \ 1100 \ 1200]^T$	12min 24s

TABLE 4.4 – Classification des bases POD construites pour chaque nombre de paramètre Re_{POD} associé.

Le temps de calcul nécessaire à la construction des bases POD est différent suivant le nombre de paramètres N_α considéré, voir Tableau 4.4. Évidemment, plus le nombre de paramètres est élevé, plus le temps CPU est grand.

L'erreur de reconstruction POD en vitesse et en concentration (Eq 3.74), en fonction du nombre de modes POD conservé, est répertoriée dans le Tableau 4.5, pour chacune des bases POD considérées. Pour le même nombre de modes conservés (vitesse ou concentration), celle-ci augmente avec le nombre de paramètres. Ainsi plus la base POD contient d'informations (c'est-à-dire plus le nombre de paramètres N_α est élevé), plus le nombre de modes à conserver est grand, ce qui paraît tout à fait cohérent.

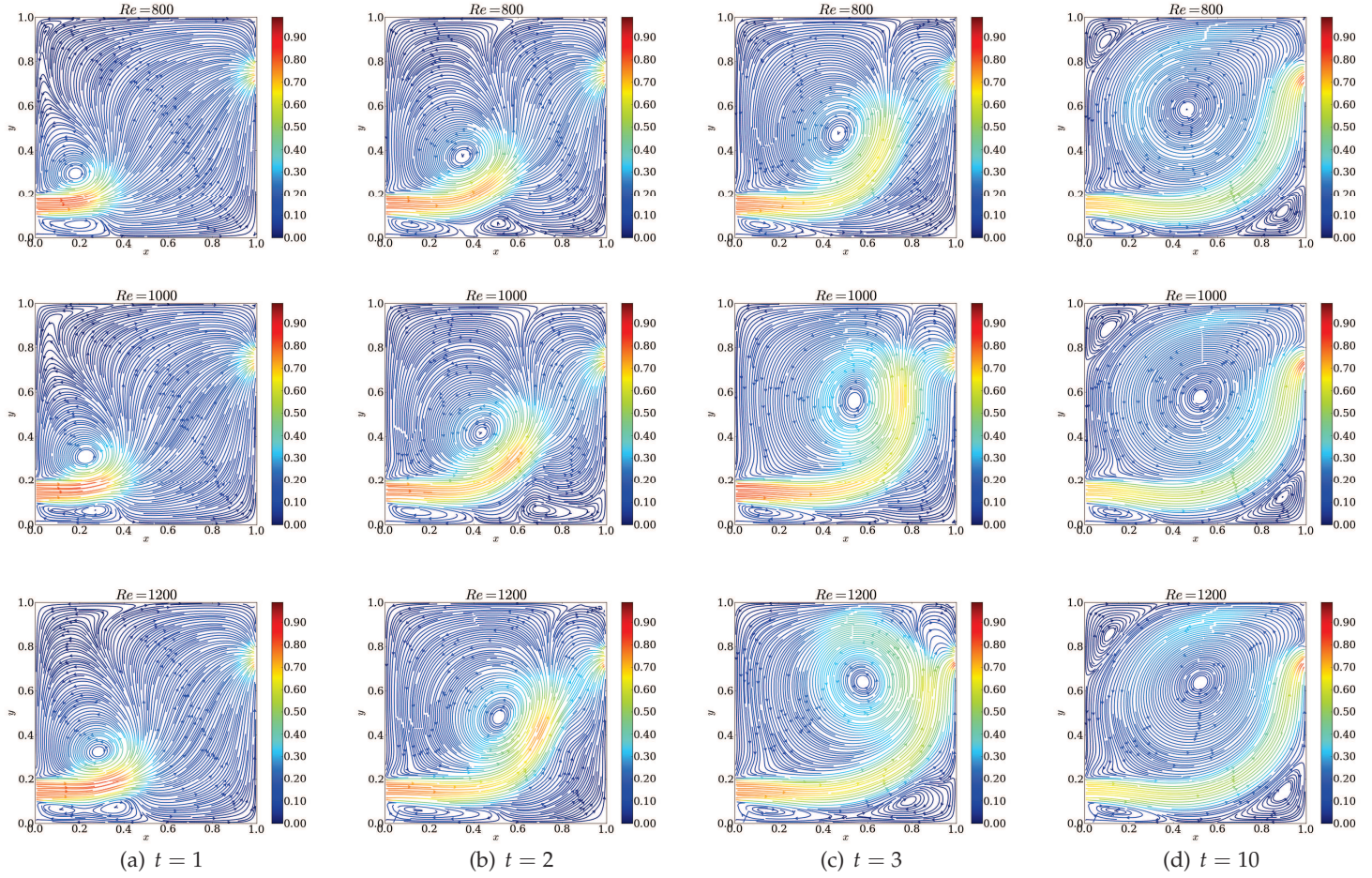


FIGURE 4.15 – Lignes de courant (vitesse adimensionnelle U/U_0), issues de Code_Saturne respectivement à $Re = 800 ; 1000 ; 1200$, aux temps $t = 1, 2, 3$ et 10 .

Nb de modes	Base POD n°1		Base POD n°2		Base POD n°3		Base POD n°4	
	vitesse	concentration	vitesse	concentration	vitesse	concentration	vitesse	concentration
1	$5,46.10^{-1}$	$7,63.10^{-1}$	$5,44.10^{-1}$	$7,71.10^{-1}$	$5,46.10^{-1}$	$7,76.10^{-1}$	$5,44.10^{-1}$	$7,75.10^{-1}$
5	$2,89.10^{-1}$	$3,09.10^{-1}$	$2,81.10^{-1}$	$3,37.10^{-1}$	$2,88.10^{-1}$	$3,45.10^{-1}$	$2,81.10^{-1}$	$3,42.10^{-1}$
10	$1,44.10^{-1}$	$1,73.10^{-1}$	$1,35.10^{-1}$	$2,01.10^{-1}$	$1,38.10^{-1}$	$2,08.10^{-1}$	$1,35.10^{-1}$	$2,05.10^{-1}$
15	$8,11.10^{-2}$	$9,86.10^{-2}$	$8,90.10^{-2}$	$1,12.10^{-2}$	$8,44.10^{-2}$	$1,19.10^{-1}$	$8,29.10^{-2}$	$1,17.10^{-2}$
20	$5,22.10^{-2}$	$6,12.10^{-2}$	$5,90.10^{-2}$	$8,10.10^{-2}$	$6,13.10^{-2}$	$8,57.10^{-2}$	$6,06.10^{-2}$	$8,71.10^{-2}$
25	$2,91.10^{-2}$	$4,24.10^{-2}$	$4,01.10^{-2}$	$5,99.10^{-2}$	$4,29.10^{-2}$	$6,54.10^{-2}$	$4,30.10^{-2}$	$6,35.10^{-2}$
30	$1,84.10^{-2}$	$2,75.10^{-2}$	$2,73.10^{-2}$	$4,05.10^{-2}$	$3,09.10^{-2}$	$4,38.10^{-2}$	$3,11.10^{-2}$	$4,65.10^{-2}$

TABLE 4.5 – Erreur de reconstruction POD en vitesse et en concentration, pour chaque base POD considérée.

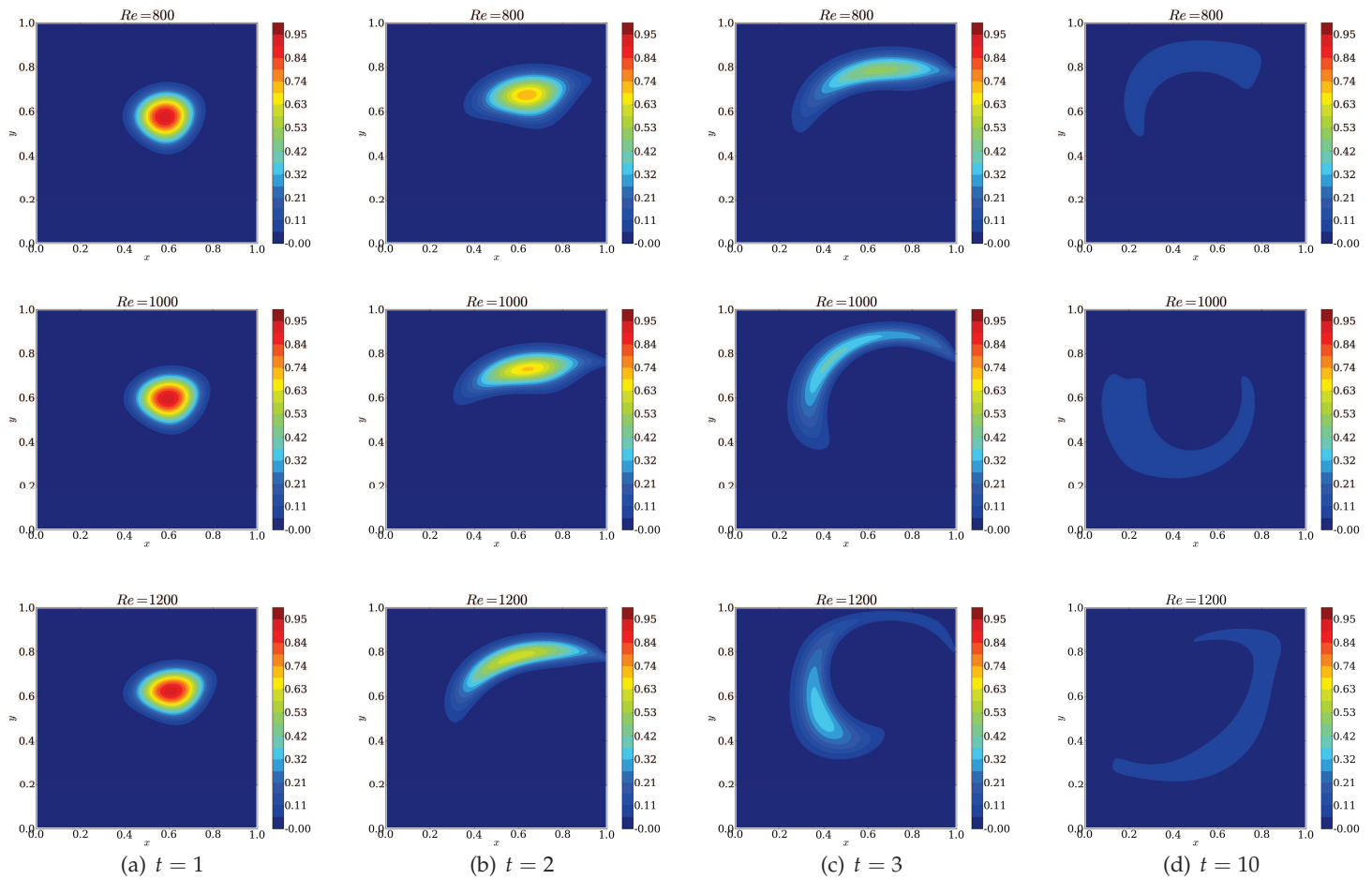


FIGURE 4.16 – Isocontours de concentration (adimensionnelle θ/θ_0), issus de *Code_Saturne* respectivement à $Re = 800 ; 1000 ; 1200$, aux temps $t = 1, 2, 3$ et 10.

Modèle réduit

Avant d'entamer une procédure de contrôle, la pertinence du modèle réduit, constitué des équations 4.31 (en prenant $\beta = 0$, puisque le scalaire est passif) et 4.32 est éprouvée en prenant des valeurs de α , n'appartenant pas à l'échantillonnage : $\alpha = 0,95$, puis $\alpha = 1,15$ (respectivement $Re = 950$ et $Re = 1150$). Pour chaque base POD considérée (Tableau 4.4), 21 modes POD de vitesse et 17 modes POD de concentration sont conservés. L'erreur entre les champs de vitesses et de concentration provenant du modèle complet¹⁴ et ceux obtenus avec le modèle réduit est représentée sur les Figures 4.17 et 4.18. Contrairement à ce qu'on aurait pu penser, les résultats sont relativement similaires quelque soit le nombre de paramètres utilisés. L'erreur en vitesses est de l'ordre de 6-7% et environ de 18% en concentration (cf. Tableau 4.6). Ces résultats sont plutôt satisfaisants : le modèle réduit est capable dans ce cas, de reproduire avec pertinence un écoulement à un nombre de Reynolds différent de ceux avec lesquels la base POD a été construite.

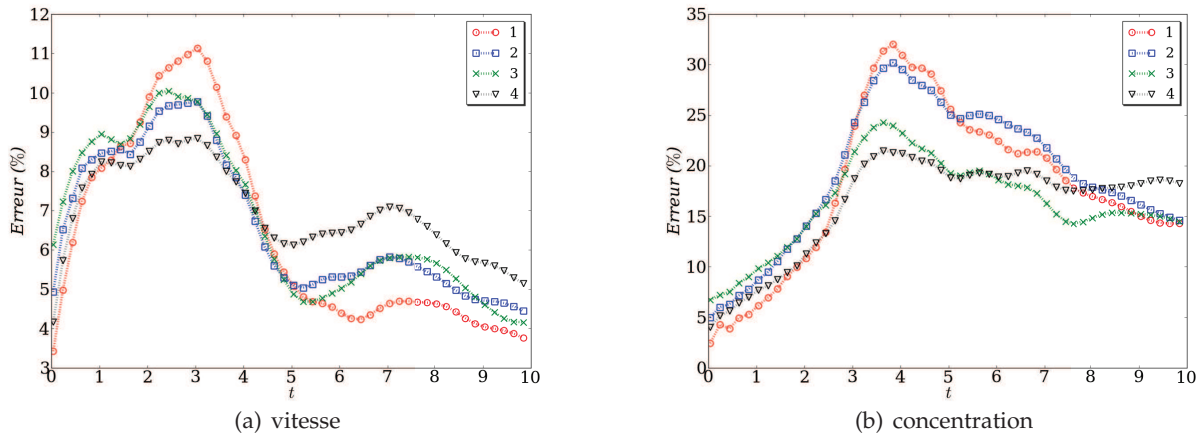


FIGURE 4.17 – Erreur entre les champs de vitesses et de concentration provenant du modèle complet et ceux issus du modèle réduit à $Re = 950$, pour chaque base POD utilisée (repérée ici par son numéro).

Bases POD n°	Erreur moyenne en vitesse		Erreur moyenne en concentration	
	$Re = 950$	$Re = 1150$	$Re = 950$	$Re = 1150$
1	6,44 %	6,53 %	18,1 %	18,5 %
2	6,64 %	6,53 %	19,2 %	19,4 %
3	6,76 %	5,73 %	16,3 %	18,4 %
4	7,00 %	6,18 %	16,2 %	19,9 %

TABLE 4.6 – Erreur moyennée en temps entre les champs de vitesses et de concentration issus du modèle complet et ceux obtenus avec le modèle réduit (définie par l'équation 4.20).

¹⁴Pour cela, de nouvelles simulations ont été réalisées avec *Code_Saturne* pour les nombres de Reynolds $Re = 950$ et $Re = 1150$, afin de pouvoir comparer les résultats du modèle complet et du modèle réduit.

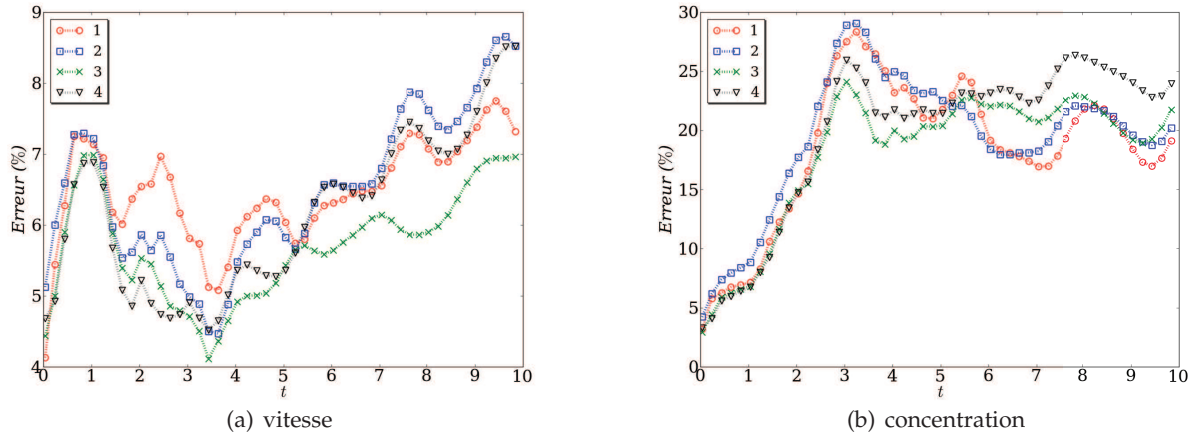


FIGURE 4.18 – Erreur entre les champs de vitesses et de concentration provenant du modèle complet et ceux issus du modèle réduit à $Re = 1150$, pour chaque base POD utilisée (repérée ici par son numéro).

Problème d'optimisation réduit

A partir des bases POD construites précédemment, le problème d'optimisation réduit décrit à la section §4.4.1 est considéré. Le système optimal est composé des équations de contraintes 4.31 ($\beta = 0$, puisque le scalaire est passif) et 4.32, des équations adjointes qui correspondent aux équations 4.38 et de la condition d'optimalité, déterminée par l'équation 4.39. L'algorithme de contrôle utilisé est celui décrit par l'Algorithme 5.

Le coefficient temporel $\hat{\mathbf{b}}(t)$ lié à la concentration cible $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ est construit avec le paramètre de contrôle cible α_{cib} (resp. Re_{cib}). Deux champs cibles sont ici considérés : $Re_{\text{cib1}} = 950$ et $Re_{\text{cib2}} = 1150$, qui n'appartiennent pas à l'échantillonnage. Deux champs de concentration différents, construits avec le modèle réduit (Eqs 4.31 et 4.32, sont employés pour initialiser l'algorithme d'optimisation :

- cas 1 : $Re_{\text{ini1}} = 1150$, $Re_{\text{cib1}} = 950$
- cas 2 : $Re_{\text{ini2}} = 950$, $Re_{\text{cib2}} = 1150$

Ces deux configurations permettent de tester l'algorithme d'optimisation dans le sens montant et dans le sens descendant.

L'algorithme de contrôle converge très rapidement, de l'ordre de la minute sur un processeur. Les paramètres de contrôle tendent vers la cible en moins de 8 itérations, quelque soit la base POD considérée (cf. Figures 4.19(a) et 4.20(a)). Les fonctionnelles objectifs $\mathcal{J}$ pour chaque configuration sont tracées sur les Figures 4.19(b) et 4.20(b). Elles tendent vers zéro en moins de 8 itérations.

Ces premiers résultats sur la cavité ventilée isotherme sont plutôt encourageants pour la suite.

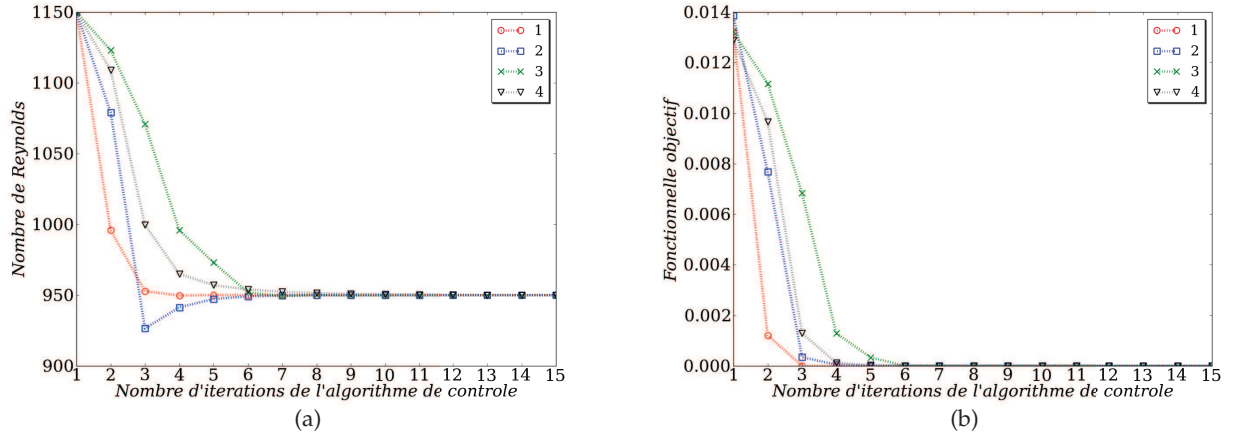


FIGURE 4.19 – (a) Nombre de Reynolds en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle, pour le premier cas étudié $Re_{ini1} = 1150/Re_{cib1} = 950$ et pour chaque nombre de paramètre N_α composant la base POD.

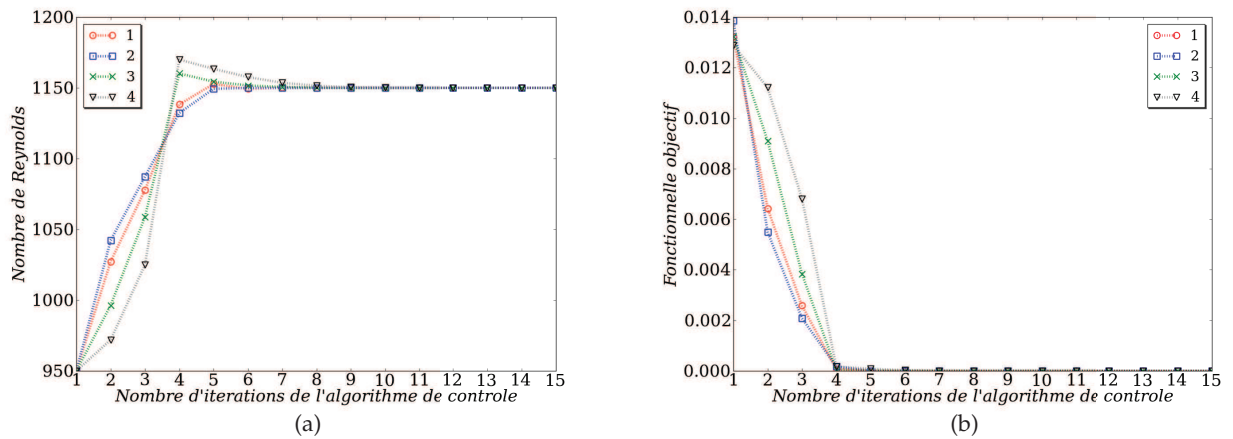


FIGURE 4.20 – (a) Paramètres de contrôle α en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle, pour le deuxième cas étudié $Re_{ini2} = 950/Re_{cib2} = 1150$ et pour chaque nombre de paramètre N_α composant la base POD.

Comparaison avec le modèle réduit utilisant une base POD "simple"

Dans un second temps, la méthode employée ici est comparée avec celle utilisant un ROM construit avec une base POD avec un *seul* paramètre (§4.3). Pour cela, *cinq* paramètres sont ici considérés pour construire les bases POD de vitesses et de concentration¹⁵. Ils correspondent aux nombres de Reynolds suivants : $\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [800 \ 900 \ 1000 \ 1100 \ 1200]$ (Cas n°4).

L'algorithme d'optimisation est testé ici en prenant les mêmes valeurs initiales $\alpha_{\text{ini1}} = 0,8$ et $\alpha_{\text{ini2}} = 1,2$, soit respectivement $Re_{\text{ini1}} = 800$ et $Re_{\text{ini2}} = 1200$, qu'à la sous-section §4.3.5. La cible est construite avec le paramètre de contrôle cible $\alpha_{\text{cib}} = 1$ (soit $Re_{\text{cib}} = 1000$).

L'algorithme de contrôle converge très rapidement, en environ une minute sur un processeur. Les paramètres de contrôle tendent vers la cible en une douzaine d'itérations, (cf. Figure 4.21(a)). La fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ est tracée sur la Figure 4.21(b) et tend vers zéro en 9 itérations.

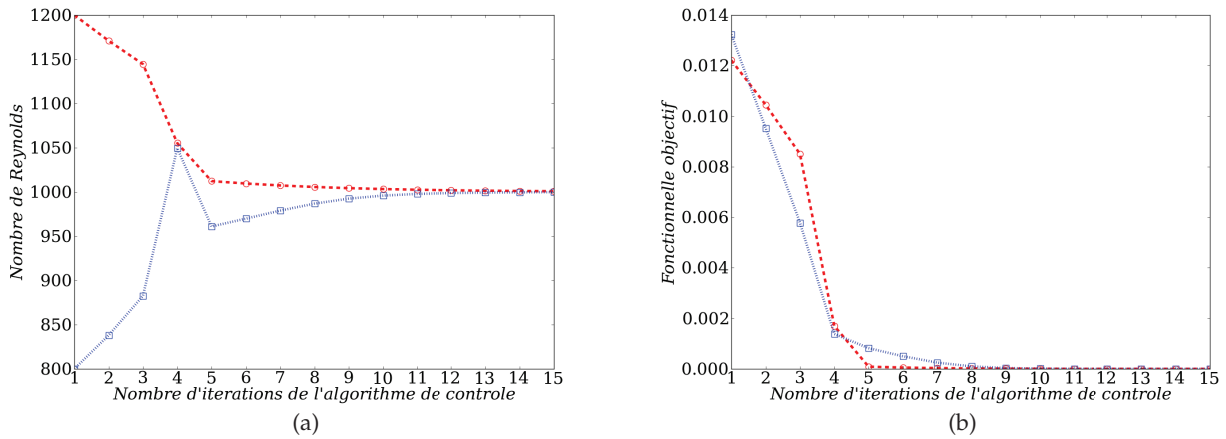


FIGURE 4.21 – (a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle.

Le Tableau 4.7 montre les erreurs moyennées en temps (Eq 4.20) pour chaque grandeur et pour chaque méthode, en considérant les modèles réduits construits avec $Re_{\text{ini1}} = 800$ et $Re_{\text{ini2}} = 1200$. Quelque soit le nombre de Reynolds initial, l'erreur en vitesses et en concentration obtenue avec les bases POD mixtes est inférieure à celle obtenue avec la modèle ROM/POD "simple" : d'un facteur 3 en vitesse et d'un facteur 1,5 en concentration.

De la même façon, l'erreur moyenne entre les champs cibles (provenant du modèle complet) et les champs issus du modèle réduit obtenus à la fin de l'algorithme d'optimisation est consignée dans le Tableau 4.7. Contrairement aux erreurs entre les champs initiaux, l'erreur entre les champs finaux issus du modèle complet et du modèle réduit obtenu avec une base POD simple est légè-

¹⁵Ce choix est arbitraire : la même étude aurait pu être faite avec deux, trois ou quatre paramètres. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, le nombre de paramètres utilisés n'a qu'une très faible influence sur les résultats obtenus.

ROM construits avec une	Erreur moyenne en vitesse			Erreur moyenne en concentration		
	Re_{ini1}	Re_{ini2}	Re_{cib}	Re_{ini1}	Re_{ini2}	Re_{cib}
base POD simple	31,6%	19,6%	3,85%	27,8%	23,5%	10,9%
base POD mixte	9,67%	6,58%	6,59%	19,3%	21,2%	17,0%

TABLE 4.7 – Comparaison des résultats obtenus avec les modèles réduits construits avec une base POD simple et une base POD mixte, en considérant les modèles réduits construits avec $Re_{ini1} = 800$, $Re_{ini2} = 1200$ et $Re_{cib} = 1000$.

rement inférieure à celle entre les champs finaux issus du modèle complet et du modèle réduit obtenu avec une base POD mixte, en vitesse et en concentration. Ce dernier constat est en fait cohérent, puisque le modèle réduit ROM/POD "simple" est utilisé en considérant une base POD pour un nombre de Reynolds $Re = Re_{cib} = 1000$.

4.4.1.5 Cavité entraînée différenciellement chauffée

Afin de tester notre algorithme d'optimisation avec un couplage vitesse/température, la cavité carrée entraînée par le haut et chauffée par la gauche, décrite à la section §4.3.5, est à présent étudiée de la même façon. L'objectif est toujours de contrôler le champ de température à l'intérieur de la cavité, en agissant sur la vitesse d'entraînement de celle-ci.

Construction des bases POD sur une gamme de Reynolds

Les clichés, nécessaires à la construction des bases POD, sont issus de simulations à différents nombres de Reynolds compris entre 158 et 474 et en considérant un nombre de Grashof fixé à 1.10^6 (le nombre de Richardson varie donc de 4 à 40). Toujours dans le but de déterminer l'influence du nombre de paramètres N_α utilisés dans la construction des bases POD, trois configurations de bases POD ont été testées :

- La première a été construite avec des simulations à $\mathbf{Re}_{POD} = [158 \ 474]^T$ (soit respectivement $\alpha = [0,5 \ 1,5]^T$);
- La deuxième avec des simulations à $\mathbf{Re}_{POD} = [158 \ 316 \ 474]^T$ (soit respectivement $\alpha = [0,5 \ 1,0 \ 1,5]^T$);
- La troisième avec des simulations à $\mathbf{Re}_{POD} = [158 \ 284 \ 316 \ 348 \ 474]^T$ (soit respectivement $\alpha = [0,5 \ 0,9 \ 1,0 \ 1,1 \ 1,5]^T$).

Elles sont répertoriées¹⁶, dans le Tableau 4.8. 150 clichés, pour chaque paramètre α_{POD}^n ($n = 1, \dots, N_\alpha$), ont été utilisés pour construire les bases POD de vitesse et de température, en utilisant la méthode décrite au paragraphe §4.4.1.

¹⁶Ces valeurs ont été choisies de manière arbitraire. Une multitude de configurations peut être envisagée.

La Figure 4.22 illustre les profils de température et de vitesses au centre de la cavité et au temps final, pour chaque nombre de Reynolds considéré. Ceux-ci sont bien différents d'un nombre de Reynolds à l'autre.

Bases POD	N_α	Nombre de Reynolds	Nombre de Richardson	Temps CPU
1	2	$\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [158 \ 474]^T$	$\mathbf{Ri}_{\text{POD}} = [40 \ 4]^T$	4min 36s
2	3	$\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [158 \ 316 \ 474]^T$	$\mathbf{Ri}_{\text{POD}} = [40 \ 10 \ 4]^T$	7min 31s
3	5	$\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [158 \ 284 \ 316 \ 348 \ 474]^T$	$\mathbf{Ri}_{\text{POD}} = [40 \ 12 \ 10 \ 8 \ 4]^T$	19min 10s

TABLE 4.8 – Classification des bases POD construites avec chaque paramètre Re_{POD} , correspondant à un nombre de Richardson Ri_{POD} .

Le temps de calcul nécessaire à la construction des bases POD est différent suivant le nombre de paramètres N_α considéré, voir Tableau 4.8. Évidemment, plus le nombre de paramètres est élevé, plus le temps CPU est grand.

L'examen de l'erreur de reconstruction POD en fonction du nombre de modes POD conservé (non répertoriée ici), pour chaque nombre de paramètres N_α utilisé aboutit à la même conclusion que précédemment (§4.4.1.4) : plus le nombre de paramètres est élevé, plus le nombre de modes à conserver est grand.

Modèle réduit

La pertinence du modèle réduit en anisotherme (Eqs 4.31 et 4.32) est tout d'abord examinée en prenant des valeurs de α , n'appartenant pas à l'échantillonnage : $\alpha = 0,80$, puis $\alpha = 1,20$ (respectivement $Re = 235/Ri = 18$ et $Re = 379/Ri = 7$). Pour chaque configuration, 20 modes POD de vitesse et 18 modes POD de température sont conservés. Pour cela, l'erreur entre les champs de vitesses et de température provenant du modèle complet¹⁷ et ceux issus du modèle réduit est représentée respectivement sur les Figures 4.23 et 4.24. L'erreur obtenue en vitesse et en température est de l'ordre de 6-7% (Tableau 4.9). Un léger écart est observé entre les différentes bases POD testées : l'erreur est plus importante pour $N_\alpha = 2$ que pour $N_\alpha > 2$. L'erreur pour $N_\alpha = 3$ est légèrement supérieure à celle pour $N_\alpha = 5$. Dans ce cas, l'augmentation du nombre de paramètres permet d'augmenter (un peu) la précision du modèle réduit.

Problème d'optimisation réduit

A partir des bases POD construites, le problème d'optimisation réduit décrit à la section §4.4.1 est considéré. Le système optimal est composé des équations de contraintes 4.31 et 4.32, des équations adjointes 4.38 et de la condition d'optimalité, déterminée par l'équation 4.39.

¹⁷De nouvelles simulations ont ainsi été réalisées avec *Code_Saturne* pour les nombres de Reynolds $Re = 235$ et $Re = 379$, afin de pouvoir comparer les résultats du modèle complet et du modèle réduit.

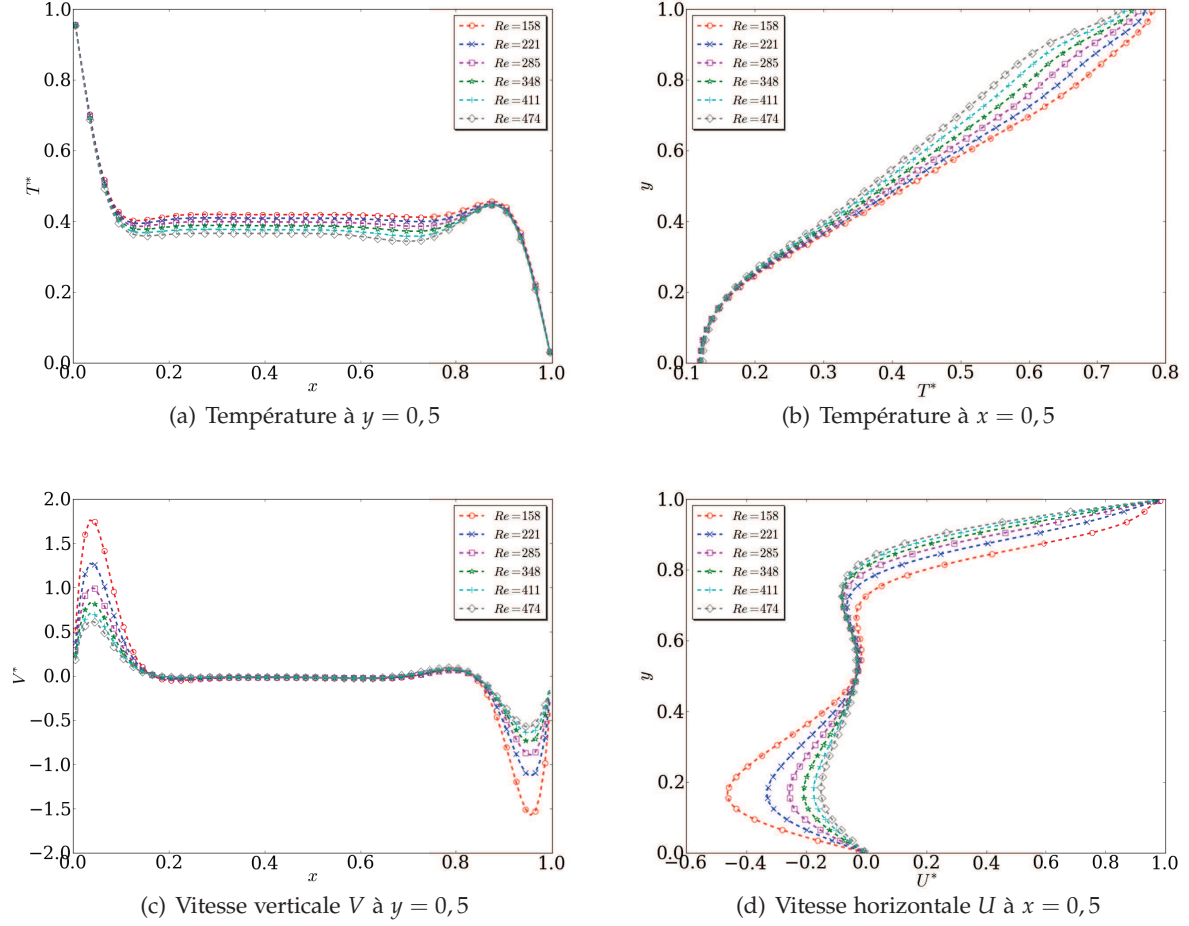


FIGURE 4.22 – Profils des champs de température et de vitesses, au centre de la cavité et au temps final.

Bases POD n°	Nombre de paramètres N_α	Erreur moyenne en vitesse		Erreur moyenne en température	
		$Re = 253$	$Re = 379$	$Re = 253$	$Re = 379$
1	2	7,75 %	8,45 %	4,13 %	4,95 %
2	3	6,42 %	7,34 %	3,52 %	4,28 %
3	5	6,13 %	7,11 %	3,42 %	4,33 %

TABLE 4.9 – Erreurs moyennées en temps entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et ceux du modèle réduit, pour chaque base POD considérée.

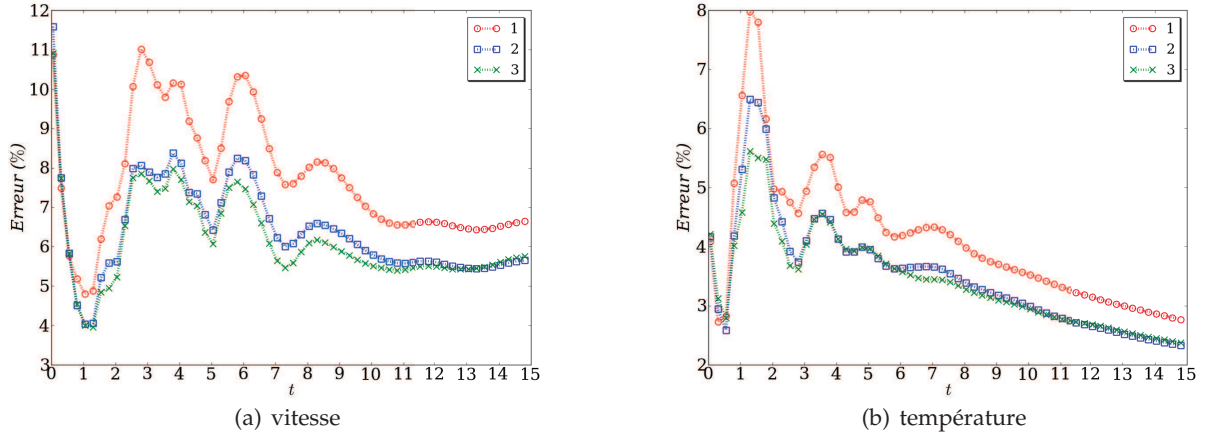


FIGURE 4.23 – Erreur entre les champs de vitesses et de température provenant du modèle complet et ceux issus du modèle réduit à $Re = 253$, pour chaque base POD utilisée (repérée ici par son numéro).

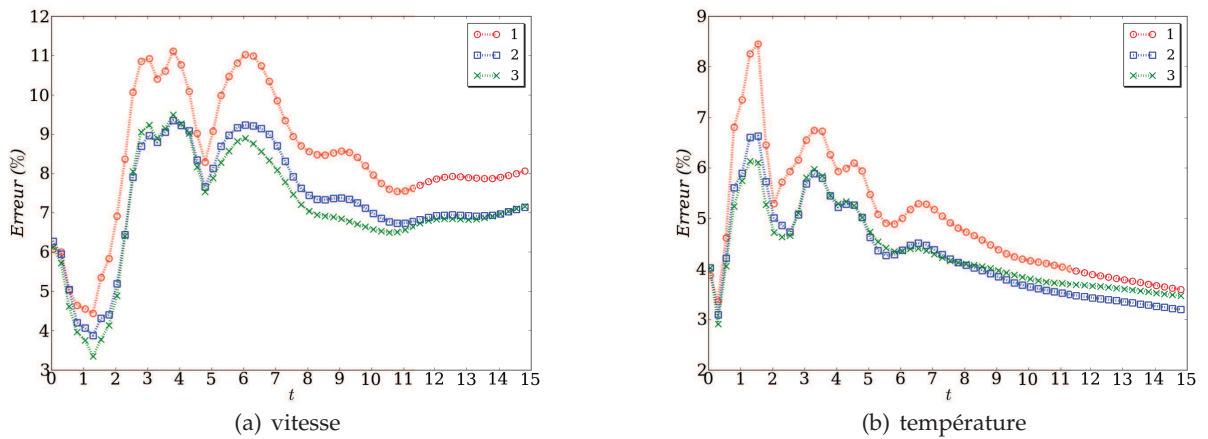


FIGURE 4.24 – Erreur entre les champs de vitesses et de température provenant du modèle complet et ceux issus du modèle réduit à $Re = 379$, pour chaque base POD utilisée (repérée ici par son numéro).

L'algorithme de contrôle utilisé est celui décrit par l'Algorithme 5.

Le coefficient temporel $\hat{\mathbf{b}}(t)$ lié à la température cible $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ est construit avec le paramètre de contrôle cible α_{cib} . Deux champs cibles sont ici considérés : $Re_{\text{cib1}} = 253$ et $Re_{\text{cib2}} = 379$ (correspondant à $Ri_{\text{cib1}} = 16$ et $Ri_{\text{cib2}} = 7$), qui n'appartiennent pas à l'échantillonnage. Deux champs de température différents, construits avec le modèle réduit (Eqs 4.31 et 4.32), sont utilisés pour initialiser l'algorithme d'optimisation :

- cas 1 : $Re_{\text{ini1}} = 379$, $Re_{\text{cib1}} = 253$
- cas 2 : $Re_{\text{ini2}} = 253$, $Re_{\text{cib2}} = 379$

Ces deux configurations étudiées permettent de tester l'algorithme d'optimisation 5 dans le sens montant et dans le sens descendant.

L'algorithme de contrôle converge très rapidement, de l'ordre de la minute sur un processeur. Les paramètres de contrôle tendent vers la cible en une dizaine d'itérations, quelque soit la base POD considérée (cf. 4.25(a) et 4.26(a)). L'algorithme de contrôle converge cependant plus rapidement pour le couple $Re_{\text{cib1}} = 253/Re_{\text{ini1}} = 379$ que pour le couple $Re_{\text{cib2}} = 379/Re_{\text{ini2}} = 253$: huit itérations sont nécessaires dans le premier cas, contre onze itérations dans le second. Les fonctionnelles objectifs $\mathcal{J}$ pour chaque configuration sont tracées sur les Figures 4.25(b) et 4.26(b). Elles tendent vers zéro en moins de 11 itérations.

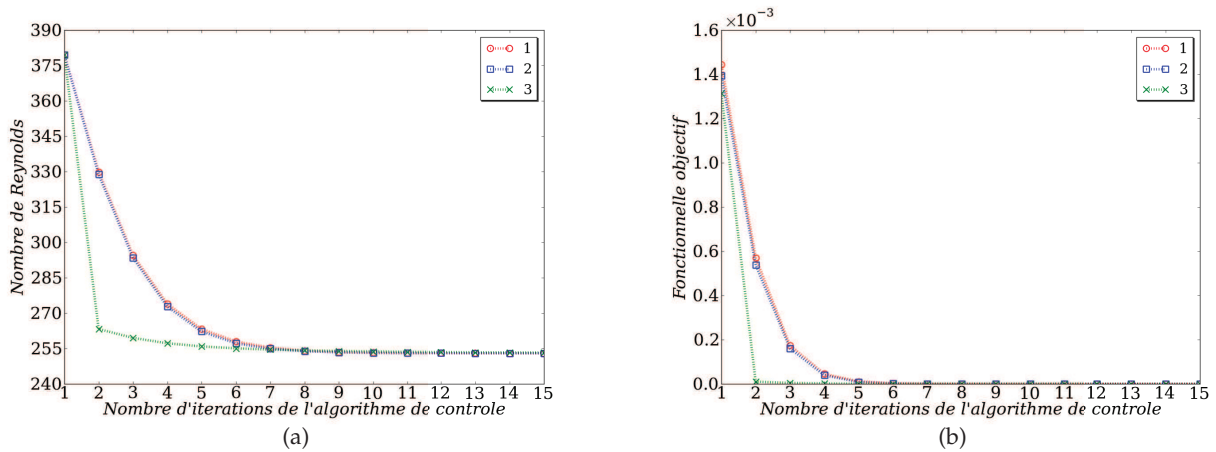


FIGURE 4.25 – (a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle, pour le premier couple étudié $Re_{\text{cib1}} = 253/Re_{\text{ini1}} = 379$ et pour chaque nombre de paramètre N_α composant la base POD.

L'erreur moyennée en temps (Eq 4.20), entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et ceux obtenus par l'algorithme de contrôle, est répertoriée dans le Tableau 4.10. L'erreur est relativement faible : environ 6-7% en vitesse et 4% en température. Il est à remarquer que l'erreur est légèrement plus faible, en utilisant cinq paramètres pour construire la base POD (Base POD n°3).

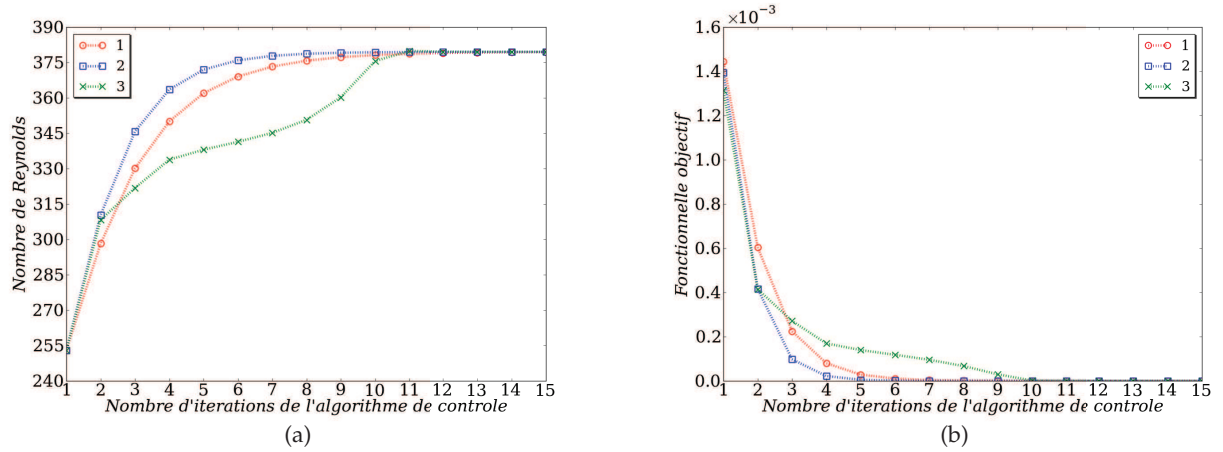


FIGURE 4.26 – (a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle, pour le deuxième couple étudié $Re_{cib2} = 379/Re_{ini2} = 253$ et pour chaque nombre de paramètre N_α composant la base POD.

Bases POD n°	Erreur moyenne en vitesse		Erreur moyenne en température	
	Cas 1	Cas 2	Cas 1	Cas 2
1	7,75 %	8,45 %	4,13 %	4,95 %
2	6,42 %	7,34 %	3,52 %	4,28 %
3	6,13 %	7,11 %	3,42 %	4,33 %

TABLE 4.10 – Erreurs moyennées en temps entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et ceux obtenus par l'algorithme de contrôle, pour chaque base POD considérée.

Comparaison avec le modèle réduit utilisant une base POD "simple"

La méthode employée ici est comparée avec celle utilisant un ROM construit avec une base POD construite avec un *seul* paramètre (§4.3). La POD est effectuée ici à partir de snapshots issues de simulations effectuées avec *cinq* paramètres, c'est-à-dire avec $\mathbf{Re}_{\text{POD}} = [158 \ 284 \ 316 \ 348 \ 474]^T$, puisque cette configuration a permis dans la section précédente d'obtenir les meilleurs résultats.

L'algorithme d'optimisation 5 est testé ici en prenant les valeurs initiales $Re_{\text{ini1}} = 253$ et $Re_{\text{ini2}} = 379$ (correspondant à $Ri_{\text{ini1}} = 16$ et $Ri_{\text{ini2}} = 7$). La cible est construite avec le paramètre de contrôle cible $Re_{\text{cib}} = 316$ ($Ri_{\text{cib}} = 10$). C'est le même cas que celui étudié à la sous-section §4.3.6, pour une base POD "simple".

L'algorithme de contrôle converge rapidement, en environ 1-2 minute(s) sur un processeur. Les paramètres de contrôle tendent vers la cible en une quinzaine d'itérations, (cf. Figure 4.27(a)). La fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ est tracée sur la Figure 4.27(b) et tend vers zéro en 10 itérations. Cependant, l'algorithme de contrôle converge légèrement plus rapidement avec un modèle réduit construit avec les bases POD simples (en 12 itérations contre 15, cf. Figure 4.11(a)), chose qui avait déjà été observée lors de l'étude de la cavité ventilée isotherme.

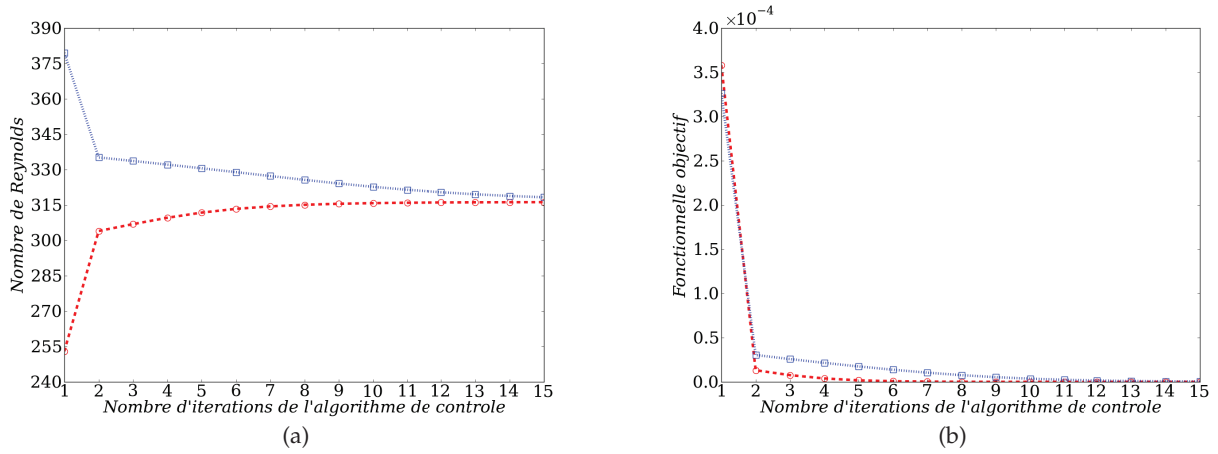


FIGURE 4.27 – (a) Nombre de Reynolds Re en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle ; (b) Fonctionnelle objectif en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de contrôle.

Le Tableau 4.11 montre les erreurs moyennées en temps (Eq 4.20) pour chaque grandeur et pour chaque méthode de construction de la base POD, respectivement pour les configurations initiales ($Re_{\text{ini1}} = 253$ et $Re_{\text{ini2}} = 379$). L'erreur pour le champ de vitesses obtenue avec les bases POD mixtes est bien inférieure (d'un facteur 3) à celle obtenue avec les bases POD simples. L'erreur pour le champ de température est également inférieure avec la méthode des bases "mixtes" pour $Re_{\text{ini2}} = 379$, mais elle est du même ordre de grandeur pour $Re_{\text{ini1}} = 253$. De même, le Tableau 4.11 répertorie les erreurs moyennées en temps, entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et ceux obtenus par le modèle réduit à la fin de l'algorithme de contrôle.

Les valeurs obtenues sont quasi-identiques (à 0,5 point près). En conclusion, la méthode utilisant les bases POD mixtes permet de diminuer l'erreur entre le modèle complet et le modèle réduit, également dans le cas de la cavité entraînée différentiellement chauffée.

ROM construit avec une	Erreur moyenne en vitesse			Erreur moyenne en température		
	Re_{ini1}	Re_{ini2}	Re_{cib}	Re_{ini1}	Re_{ini2}	Re_{cib}
base POD simple	21,6%	21,5%	5,97%	2,99%	6,29%	3,96%
base POD mixte	6,13%	7,11%	6,47%	3,42%	4,33%	3,82%

TABLE 4.11 – Comparaison des résultats obtenus avec les modèles réduits construits avec une base POD simple et une base POD mixte, en considérant les modèles réduits construits avec $Re_{ini1} = 379$, $Re_{ini2} = 253$ et $Re_{cib} = 316$.

Remarque La même méthode peut être également employée, en agissant non plus sur la vitesse d'entraînement pour contrôler le champ de température, mais sur les conditions aux limites en température telles que :

$$\theta|_{\Gamma_g} = \alpha\theta_c \quad (4.42)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = U_0 \quad (4.43)$$

Le problème d'optimisation réduit développé à la section §4.4.1 reste le même, seules les conditions aux limites changent. Les résultats sont similaires à ceux obtenus ci-dessus et ne sont pas présentés dans ce manuscrit, par souci de redondance.

4.4.2 Contrôle sur le nombre de Reynolds et le nombre de Grashof

Dans cette partie, la même méthodologie est employée qu'à la section précédente en rajoutant les paramètres de contrôle σ , en plus des paramètres α . Typiquement, cela peut correspondre à un contrôle sur les conditions aux limites en vitesses et en température. La méthodologie proposée est décrite ci-dessous.

Chaque grandeur (vitesse, température, concentration, ...) dépend explicitement des paramètres α et σ , et s'écrit ainsi sous la forme : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \alpha, \sigma)$ et $\theta(\mathbf{x}, t, \alpha, \sigma)$. Le champ de vitesses et le champ scalaire sont décomposés en un champ moyen et un champ fluctuant, dépendant de α et σ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \alpha, \sigma) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \alpha, \sigma) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t, \alpha, \sigma) \\ \theta(\mathbf{x}, t, \alpha, \sigma) &= \bar{\theta}(\mathbf{x}, \alpha, \sigma) + \theta'(\mathbf{x}, t, \alpha, \sigma) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les valeurs moyennes sont déterminées de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \alpha, \sigma) = \frac{1}{T} \int_T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \alpha, \sigma) dt \quad (4.45)$$

$$\bar{\theta}(\mathbf{x}, \alpha, \sigma) = \frac{1}{T} \int_T \theta(\mathbf{x}, t, \alpha, \sigma) dt \quad (4.46)$$

La POD est réalisée sur les champs fluctuants :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}) \approx \sum_{i=1}^{N^u} a_i(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}) \Phi_i^u(\mathbf{x}) \quad (4.47)$$

$$\theta'(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}) \approx \sum_{i=1}^{N^\theta} b_i(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}) \quad (4.48)$$

avec $\mathbf{a}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma})$ et $\mathbf{b}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma})$ les coefficients temporels respectifs à la vitesse et au champ scalaire, dépendant désormais des conditions aux limites de vitesses $\boldsymbol{\alpha}$ et de celles propres au champ scalaire $\boldsymbol{\sigma}$. Les modes POD du champ de vitesses $\Phi_i^u(\mathbf{x})$ et du champ scalaire $\Phi_i^\theta(\mathbf{x})$ sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres donné par l'équation 3.28. Par la suite, les paramètres inclus dans la base POD sont notés $\boldsymbol{\alpha}_{\text{POD}} = [\alpha_{\text{POD}}^1 \dots \alpha_{\text{POD}}^{N_\alpha}]^T$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\text{POD}} = [\sigma_{\text{POD}}^1 \dots \sigma_{\text{POD}}^{N_\sigma}]^T$, où N_α et N_σ représentent respectivement le nombre de paramètres α_{POD}^n et σ_{POD}^m utilisés.

4.4.2.1 Problème d'optimisation réduit

Le problème de contrôle considéré ici consiste à retrouver le coefficient temporel $\hat{\mathbf{b}}(t)$ obtenu avec les paramètres de contrôle cibles α_{cib} et σ_{cib} . Le problème d'optimisation réduit s'écrit dans ce cas avec les éléments suivants :

- les *variables d'état* qui correspondent aux coefficients temporels réduits $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$,
- les *paramètres de contrôle* α et σ ,
- la *fonctionnelle objectif réduite* $\mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha, \sigma)$, qui dépend à présent du paramètre de contrôle σ :

$$\mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha, \sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^\theta} \int_0^T (b_i - \hat{b}_i)^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^\theta} (b_i|_T - \hat{b}_i|_T)^2 + \frac{\omega_1}{2} \alpha^2 + \frac{\omega_2}{2} \sigma^2 \quad (4.49)$$

où ω_1 et ω_2 correspondent aux termes de pénalité de la fonctionnelle objectif (cf. §2.2.2, pour plus de détails).

- les *équations de contraintes réduites*, notées ici $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma) = 0$ et $\mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma) = 0$.

Le problème d'optimisation réduit est alors le suivant :

$$\min_{\alpha, \sigma} \mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha, \sigma) \text{ sous les contraintes } \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma) = 0 \text{ et } \mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma) = 0 \quad (4.50)$$

Ce problème est converti en un problème d'optimisation sans contrainte en utilisant les multiplicateurs de Lagrange ξ et ζ , respectivement associés à l'équation de quantité de mouvement et à l'équation de convection-diffusion. L'expression de la fonctionnelle de Lagrange est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) &= \mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha, \sigma) - \sum_{j=1}^{N^u} \int_0^T \xi_j \mathcal{N}_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma) dt \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N^\theta} \int_0^T \zeta_j \mathcal{M}_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma) dt \end{aligned} \quad (4.51)$$

Un minimum local de $\mathcal{L}$, $\delta\mathcal{L} = 0$ est atteint si :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_i} \delta\xi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\zeta_j} \delta\zeta_j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_i} \delta a_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b_j} \delta b_j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} \delta\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma} \delta\sigma = 0$$

et les dérivées de Fréchet de la fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})$ sont annulées suivant les directions $\delta\boldsymbol{\xi}$ et $\delta\boldsymbol{\zeta}$, $\delta\mathbf{a}$ et $\delta\mathbf{b}$, ainsi que suivant les paramètres de contrôle $\delta\alpha$ et $\delta\sigma$.

Équations de contraintes réduites

L'ajout du paramètre de contrôle σ fait apparaître des termes supplémentaires qui ont modifié l'expression des coefficients des systèmes dynamiques. Le modèle réduit considéré est donc différent de celui obtenu dans la section §4.4.1. Il est décrit ci-dessous.

Après introduction des expressions du champ de vitesses (Eq 4.25) et du champ scalaire (Eq 4.26) dans les équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion (Eq 3.29), puis projection de Galerkin de celles-ci, sur les bases POD de vitesses $\Phi^u(\mathbf{x})$ et du champ scalaire $\Phi^\theta(\mathbf{x})$, le modèle d'ordre réduit s'exprime de la manière suivante, pour un α et un σ donné :

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} C_{ijk} a_j a_k + \sum_{j=1}^{N^u} (D_{ij}(\alpha, \sigma) + A_{ij}) a_j + \sum_{j=1}^{N^\theta} B_{ij} b_j + E_{i1}(\alpha, \sigma) + E_{i2}(\alpha, \sigma) \\ &+ E_{i3}(\alpha, \sigma) + E_{i4}(\alpha, \sigma) \end{aligned} \quad (4.52)$$

pour $i = 1, \dots, N^u$

$$\begin{aligned} \frac{db_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{ijk}^\theta a_j b_k + \sum_{j=1}^{N^\theta} (D_{ij}^\theta(\alpha, \sigma) + B_{ij}^\theta) b_j + \sum_{j=1}^{N^u} A_{ij}^\theta(\alpha, \sigma) a_j + E_{i1}^\theta(\alpha, \sigma) + E_{i2}^\theta(\alpha, \sigma) \end{aligned} \quad (4.53)$$

pour $i = 1, \dots, N^\theta$

Les coefficients des systèmes dynamiques indépendants des paramètres de contrôle C_{ijk} , A_{ij} , B_{ij} , C_{ijk}^θ et B_{ij}^θ restent identiques à ceux définis dans la section §4.4.1 (cf. (Eqs 4.35 et 4.36)). Les coefficients des systèmes dynamiques D_{ij} , E_{i1} , E_{i2} , E_{i3} , E_{i4} , D_{ij}^θ , A_{ij}^θ , E_{i1}^θ et E_{i2}^θ dépendent intrinsèquement des paramètres de contrôle α et σ et sont donc modifiés. Ils sont déterminés en utilisant une interpolation de Lagrange à deux paramètres, des grandeurs moyennes (ainsi que des opérateurs associés $\nabla \bar{f}$ et $\Delta \bar{f}$) du champ considéré, telle que :

$$\bar{f}(\alpha, \sigma) = \sum_{n=1}^{N_\alpha} \bar{f}(\alpha_{\text{POD}}^n, \sigma) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_\alpha} \frac{\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m}{\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m} \left\{ \sum_{k=1}^{N_\sigma} \bar{f}(\alpha_{\text{POD}}^n, \sigma_{\text{POD}}^k) \prod_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^{N_\sigma} \frac{\sigma - \sigma_{\text{POD}}^l}{\sigma_{\text{POD}}^k - \sigma_{\text{POD}}^l} \right\} \quad (4.54)$$

Les coefficients modifiés du système dynamique réduit des équations de quantité de mouvement

s'expriment tels que :

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= - \left(\Phi_i^u, [\bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) \right) \\
E_{i1} &= \nu (\Phi_i^u, \Delta \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)) \\
E_{i2} &= - (\Phi_i^u, [\bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)) \\
E_{i3} &= - \frac{1}{\rho} (\Phi_i^u, \nabla \bar{p}(\alpha, \sigma)) \\
E_{i4} &= g\beta (\Phi_i^u, (\bar{\theta}(\alpha, \sigma) - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

et les coefficients modifiés du système dynamique réduit de convection-diffusion par :

$$\begin{aligned}
D_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) \cdot \nabla] \Phi_j^\theta \right) \\
A_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\theta}(\alpha, \sigma) \right) \\
E_{i1}^\theta &= \gamma (\Phi_i^\theta, \Delta \bar{\theta}(\alpha, \sigma)) \\
E_{i2}^\theta &= - (\Phi_i^\theta, [\bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) \cdot \nabla] \bar{\theta}(\alpha, \sigma))
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Les équations 4.52 constituent donc les équations de contraintes réduites, liées au système optimal couplé à un modèle réduit construit avec une base POD "mixte" pour deux paramètres de contrôle.

Équations adjointes réduites

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les coefficients temporels $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ conduit, après intégration par parties en temps, aux équations adjointes pour les multiplicateurs de Lagrange :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{d\zeta_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} (C_{jik} + C_{jki}) a_k \zeta_j + \sum_{j=1}^{N^u} (D_{ji}(\alpha, \sigma) + A_{ji}) \zeta_j + \sum_{j=1}^{N^\theta} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{jik}^\theta \zeta_j b_k \\ &+ \sum_{j=1}^{N^u} A_{ji}^\theta(\alpha, \sigma) \zeta_j \\ \\ -\frac{d\zeta_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{kji}^\theta a_j \zeta_k + \sum_{j=1}^{N^\theta} (D_{ji}^\theta(\alpha, \sigma) + B_{ji}^\theta) \zeta_j + \sum_{j=1}^{N^u} B_{ji} \zeta_j \\ &+ (b_i - \hat{b}_i) \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} &\text{pour } i = 1, \dots, N^u \\ \\ &\text{pour } i = 1, \dots, N^\theta \end{aligned} \tag{4.57}$$

avec comme conditions finales :

$$\begin{aligned}
\zeta_i(T, \alpha, \sigma) &= 0, & \text{pour } i = 1, \dots, N \\
\zeta_i(T, \alpha, \sigma) &= b_i(T, \alpha, \sigma) - \hat{b}_i(T, \alpha, \sigma), & \text{pour } i = 1, \dots, N^\theta
\end{aligned}$$

Par la suite, les équations adjointes sont notées respectivement, sous la forme :

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \sigma, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) = 0 \tag{4.58}$$

Conditions d'optimalité

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables de contrôle α et σ donne les conditions d'optimalité du système. Autrement dit, les gradients de la fonctionnelle objectif réduite, par rapport à α et σ , peuvent être déterminés et ainsi les directions de descente d_{k1} et d_{k2} respectivement associées. Le gradient de la fonctionnelle objectif, en fonction du paramètre de contrôle α s'exprime alors tel que :

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} \mathcal{J} &= \omega_1 \alpha + \sum_{i=1}^{N^u} \int_0^T \zeta_i \left\{ \sum_{j=1}^{N^u} \tilde{D}_{ij}(\alpha, \sigma) a_j + \tilde{E}_{i1}(\alpha, \sigma) + \tilde{E}_{i2}(\alpha, \sigma) + \tilde{E}_{i3}(\alpha, \sigma) + \tilde{E}_{i4}(\alpha, \sigma) \right\} dt \\ &+ \sum_{i=1}^{N^{\theta}} \int_0^T \zeta_i \left\{ \sum_{j=1}^{N^{\theta}} \tilde{D}_{ij}^{\theta}(\alpha, \sigma) b_j + \sum_{j=1}^{N^u} \tilde{A}_{ij}^{\theta}(\alpha, \sigma) a_j + \tilde{E}_{i1}^{\theta}(\alpha, \sigma) + \tilde{E}_{i2}^{\theta}(\alpha, \sigma) \right\} dt \end{aligned} \quad (4.59)$$

et le gradient de la fonctionnelle objectif, en fonction du paramètre de contrôle σ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} \mathcal{J} &= \omega_2 \sigma + \sum_{i=1}^{N^u} \int_0^T \zeta_i \left\{ \sum_{j=1}^{N^u} \tilde{D}_{ij}(\alpha, \sigma) a_j + \tilde{E}_{i1}(\alpha, \sigma) + \tilde{E}_{i2}(\alpha, \sigma) + \tilde{E}_{i3}(\alpha, \sigma) + \tilde{E}_{i4}(\alpha, \sigma) \right\} dt \\ &+ \sum_{i=1}^{N^{\theta}} \int_0^T \zeta_i \left\{ \sum_{j=1}^{N^{\theta}} \tilde{D}_{ij}^{\theta}(\alpha, \sigma) b_j + \sum_{j=1}^{N^u} \tilde{A}_{ij}^{\theta}(\alpha, \sigma) a_j + \tilde{E}_{i1}^{\theta}(\alpha, \sigma) + \tilde{E}_{i2}^{\theta}(\alpha, \sigma) \right\} dt \end{aligned} \quad (4.60)$$

Les coefficients relatifs aux gradients de la fonctionnelle objectif, par rapport aux paramètres de contrôle α et σ dépendent des champs moyens de vitesses, de température et de pression. Chaque grandeur moyenne $\bar{f}(\alpha, \sigma)$ est donc dérivée par rapport à α et à σ , de la manière suivante :

$$\frac{\partial \bar{f}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} = \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{f}(\alpha_{\text{POD}}^n, \sigma) \frac{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_{\alpha}} \left[\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{N_{\alpha}} (\alpha - \alpha_{\text{POD}}^l) \right]}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_{\alpha}} (\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m)} \left\{ \sum_{k=1}^{N_{\sigma}} \bar{f}(\alpha_{\text{POD}}^n, \sigma_{\text{POD}}^k) \prod_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^{N_{\sigma}} \frac{(\sigma - \sigma_{\text{POD}}^l)}{(\sigma_{\text{POD}}^k - \sigma_{\text{POD}}^l)} \right\} \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial \bar{f}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} = \sum_{n=1}^{N_{\alpha}} \bar{f}(\alpha_{\text{POD}}^n, \sigma) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N_{\alpha}} \frac{(\alpha - \alpha_{\text{POD}}^m)}{(\alpha_{\text{POD}}^n - \alpha_{\text{POD}}^m)} \left\{ \sum_{k=1}^{N_{\sigma}} \bar{f}(\alpha_{\text{POD}}^n, \sigma_{\text{POD}}^k) \frac{\sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^{N_{\sigma}} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{N_{\sigma}} (\sigma - \sigma_{\text{POD}}^j) \right]}{\prod_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^{N_{\sigma}} (\sigma_{\text{POD}}^k - \sigma_{\text{POD}}^l)} \right\} \quad (4.62)$$

Remarque Si $N_{\alpha} = N_{\sigma} = 3$, alors $\frac{\partial \bar{f}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \bar{f}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma}$. Il faut éviter ce cas particulier, afin que les directions de descente d_{k1} et d_{k2} ne soient pas identiques et ainsi, que l'algorithme de contrôle puisse converger vers les deux paramètres de contrôle cibles.

Les coefficients suivants, liés au gradient $\nabla_\alpha \mathcal{J}$ sont alors définis comme :

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{ij} &= - \left(\Phi_i^u, \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \cdot \nabla \right] \Phi_j^u + \left[\Phi_j^u \cdot \nabla \right] \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \right) \\
\tilde{E}_{i1} &= \nu \left(\Phi_i^u, \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \right) \\
\tilde{E}_{i2} &= - \left(\Phi_i^u, \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \cdot \nabla \right] \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) + [\bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) \cdot \nabla] \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \right) \\
\tilde{E}_{i3} &= -\frac{1}{\rho} \left(\Phi_i^u, \frac{\partial \nabla \bar{p}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \right) \\
\tilde{E}_{i4} &= g\beta \left(\Phi_i^u, \left(\frac{\partial \bar{\theta}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} - \theta_{ini} \right) \mathbf{e}_y \right) \\
\tilde{D}_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \cdot \nabla \right] \Phi_j^\theta \right) \\
\tilde{A}_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, \left[\Phi_j^u \cdot \nabla \right] \frac{\partial \bar{\theta}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \right) \\
\tilde{E}_{i1}^\theta &= \gamma \left(\Phi_i^\theta, \frac{\partial \Delta \bar{\theta}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \right) \\
\tilde{E}_{i2}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \cdot \nabla \right] \bar{\theta}(\alpha, \sigma) + [\bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) \cdot \nabla] \frac{\partial \bar{\theta}(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} \right)
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Les coefficients liés au gradient $\nabla_\sigma \mathcal{J}$ s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{ij} &= - \left(\Phi_i^u, \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \cdot \nabla \right] \Phi_j^u + \left[\Phi_j^u \cdot \nabla \right] \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \right) \\
\tilde{E}_{i1} &= \nu \left(\Phi_i^u, \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \right) \\
\tilde{E}_{i2} &= - \left(\Phi_i^u, \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \cdot \nabla \right] \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) + [\bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) \cdot \nabla] \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \right) \\
\tilde{E}_{i3} &= -\frac{1}{\rho} \left(\Phi_i^u, \frac{\partial \nabla \bar{p}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \right) \\
\tilde{E}_{i4} &= g\beta \left(\Phi_i^u, \left(\frac{\partial \bar{\theta}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} - \theta_{ini} \right) \mathbf{e}_y \right) \\
\tilde{D}_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \cdot \nabla \right] \Phi_j^\theta \right) \\
\tilde{A}_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, \left[\Phi_j^u \cdot \nabla \right] \frac{\partial \bar{\theta}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \right) \\
\tilde{E}_{i1}^\theta &= \gamma \left(\Phi_i^\theta, \frac{\partial \Delta \bar{\theta}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \right) \\
\tilde{E}_{i2}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \cdot \nabla \right] \bar{\theta}(\alpha, \sigma) + [\bar{\mathbf{u}}(\alpha, \sigma) \cdot \nabla] \frac{\partial \bar{\theta}(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} \right)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Tous ces coefficients dépendent explicitement des paramètres de contrôle α et σ . Ils doivent donc être mis à jour à chaque itération de l'algorithme de contrôle.

Les équations de contraintes (Eq 4.52), les équations adjointes (Eq 4.57) et les conditions d'optimalité (Eqs 4.59 et 4.60) obtenues forment le *système optimal*, couplé à un modèle réduit construit avec une base POD "mixte" pour deux paramètres de contrôle. L'algorithme d'optimisation réduit est alors l'Algorithme 6.

Algorithme 6: MÉTHODE DE DESCENTE BASÉ SUR LE GRADIENT, COUPLÉ À UN MODÈLE RÉDUIT
CONSTRUIT AVEC UNE BASE POD "MIXTE" POUR DEUX PARAMÈTRES DE CONTRÔLE

Initialisation : $k = 0$, $\alpha_k = \alpha_{ini}$ et $\sigma_k = \sigma_{ini}$;

- 1: Connaissant α_k et σ_k , mettre à jour les coefficients dépendant de α_k et de σ_k (Eqs 4.55, 4.56, 4.63 et 4.64)
 - 2: Une fois ces coefficients calculés, résoudre $\mathcal{N}_k = 0$ et $\mathcal{M}_k = 0$ (Eq 4.52)
→ $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$
 - 3: Connaissant α_k et σ_{POD}^k ainsi que $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$, résoudre $\mathcal{P}_k = 0$ et $\mathcal{Q}_k = 0$ (Eq 4.57)
→ ξ_k et ζ_k
 - 4: Évaluer les deux directions de descente avec les conditions d'optimalité (Eqs 4.59 et 4.60)
→ $d_{k1} = -\nabla_{\alpha} \mathcal{J}_k$
→ $d_{k2} = -\nabla_{\sigma} \mathcal{J}_k$
 - 5: Déterminer les nouveaux paramètres de contrôle
→ $\alpha_{k+1} = \alpha_k + w_{k1} d_{k1}$
→ $\sigma_{k+1} = \sigma_k + w_{k2} d_{k2}$
où les pas w_{k1} et w_{k2} sont déterminés par recherche linéaire,
par détermination d'un pas d'Armijo par rebroussement (§2.4.1)
 - 6: Évaluer les critères de convergence ($\|\nabla_{\alpha} \mathcal{J}\| < \varepsilon_1$ et $\|\nabla_{\sigma} \mathcal{J}\| < \varepsilon_2$).
Si critères de convergence non satisfaits, retour à l'étape 1.
-

4.4.2.2 Cavité entraînée différentiellement chauffée

Le cas étudié ici est celui de la cavité entraînée différentiellement chauffée, décrit à la section §4.3.6. Le champ de température à l'intérieur de la cavité est contrôlé en agissant sur la vitesse d'entraînement de la cavité (et ainsi sur le nombre de Reynolds $Re = \frac{\alpha U_0 L}{\nu}$) et sur la température de la paroi gauche Γ_g (et ainsi sur le nombre de Grashof¹⁸ : $Gr = \frac{g \beta L^3 (\sigma \theta_c - \theta_f)}{\nu^2}$), selon les équations respectives 4.24 et 4.42. Le contrôle est réalisé sur α et σ , mais afin que ce soit plus parlant, on considère ici directement les nombres adimensionnels Re et Gr comme paramètres de contrôle.

¹⁸A nombre de Prandtl Pr constant, le contrôle se fait également sur le nombre de Rayleigh : $Ra = Gr \cdot Pr$.

Construction des bases POD sur une gamme de Reynolds et de Grashof

Les clichés, nécessaires à la construction des bases POD, sont issus de simulations à différents nombres de Reynolds compris entre 158 et 474 et pour chacun d'entre eux un nombre de Grashof compris entre 1.10^6 et 5.10^6 (le nombre de Richardson varie donc de 4 à 200) : $N_\alpha = 3$ et $N_\sigma = 2$, six paramètres sont ainsi utilisés pour construire les bases POD de vitesse et de température, cf. Tableau 4.12. Pour cela, 150 clichés, pour chacun des paramètres α_{POD}^n ($n = 1, \dots, N_\alpha$) associés à chaque paramètre σ_{POD}^m ($m = 1, \dots, N_\sigma$), ont été considérés, en utilisant la méthode décrite au paragraphe §4.4.2.

Nombre de Reynolds Re	Nombre de Grashof Gr	Nombre de Richardson Ri
158	1.10^6	40
	5.10^6	200
316	1.10^6	10
	5.10^6	50
474	1.10^6	4
	5.10^6	22

TABLE 4.12 – Gamme de Reynolds et de Grashof étudiée (et donc de Richardson), composant la base POD.

Les profils de température et de vitesses, au centre de la cavité, pour chacune des configurations étudiées, ont été tracés sur la Figure 4.28. Ceux-ci montrent que la dynamique des six écoulements considérés varie.

Modèle réduit

Afin d'étudier la pertinence du modèle réduit développé ici (Eqs 4.52 et 4.53), celui-ci est testé en utilisant des valeurs Re et Gr , n'appartenant pas à l'échantillonnage. Les quatre couples de Reynolds et de Grashof suivants sont étudiés :

- $Re = 221$; $Gr = 2.10^6$ ($Ri = 41$)
- $Re = 221$; $Gr = 4.10^6$ ($Ri = 82$)
- $Re = 379$; $Gr = 2.10^6$ ($Ri = 14$)
- $Re = 379$; $Gr = 4.10^6$ ($Ri = 28$)

30 modes de vitesse et 16 modes de température sont conservés pour construire le modèle réduit. L'erreur entre les champs de vitesses et de température provenant du modèle complet¹⁹ et ceux issus du modèle réduit est représentée sur la Figure 4.29. L'erreur relative est de l'ordre de 10-15% pour le champ de vitesses et de 3-6% pour le champ de température, quelque soit le couple Re/Gr considéré. Ces résultats nous permettent ainsi d'envisager une procédure de contrôle du champ de température, en agissant sur le nombre de Reynolds et sur le nombre de Grashof. C'est ce qui est fait dans le paragraphe suivant.

¹⁹Pour cela, de nouvelles simulations sont réalisées avec *Code_Saturne* pour $Re = 221/Gr = 2.10^6$; $Re = 221/Gr = 4.10^6$; $Re = 379/Gr = 2.10^6$ et $Re = 379/Gr = 4.10^6$.

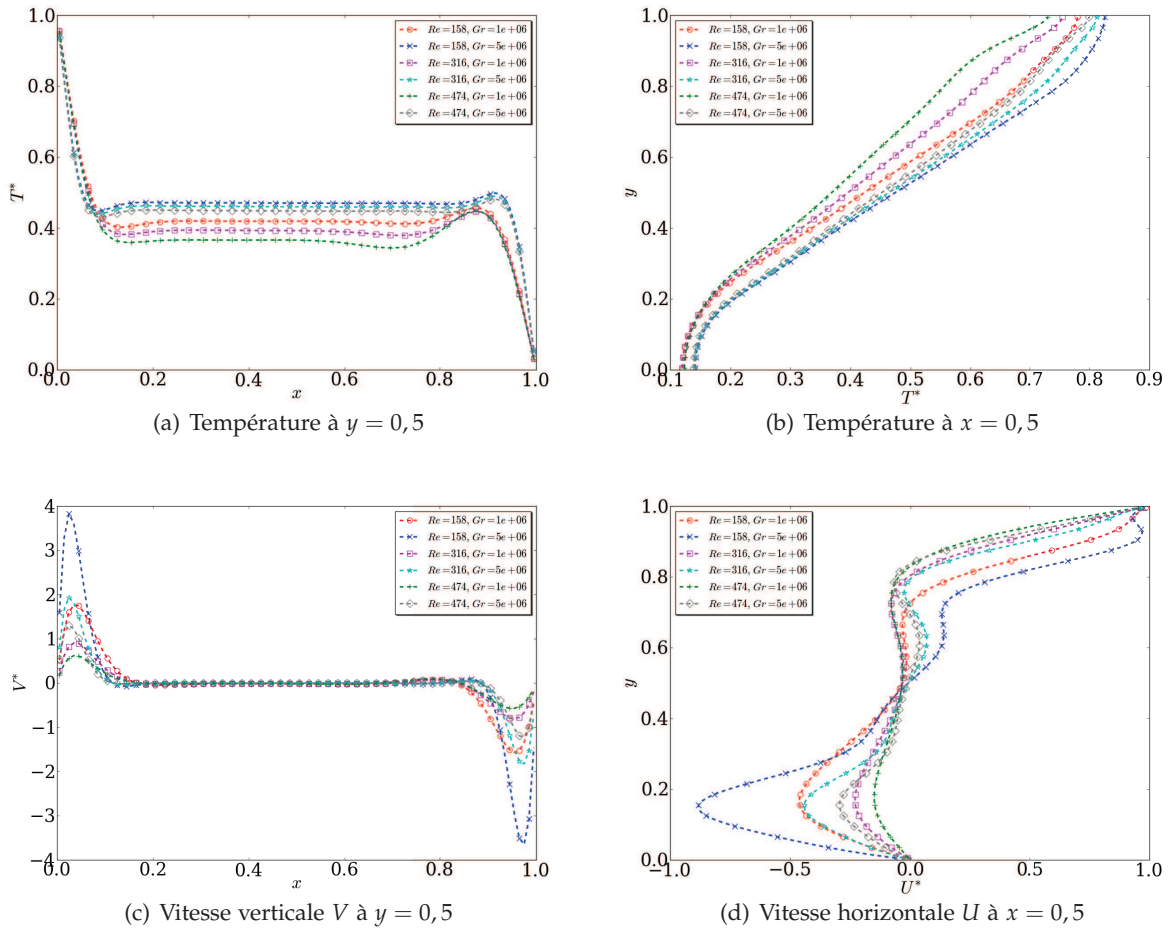


FIGURE 4.28 – Profils des champs température et de vitesses, au centre de la cavité et au temps final.

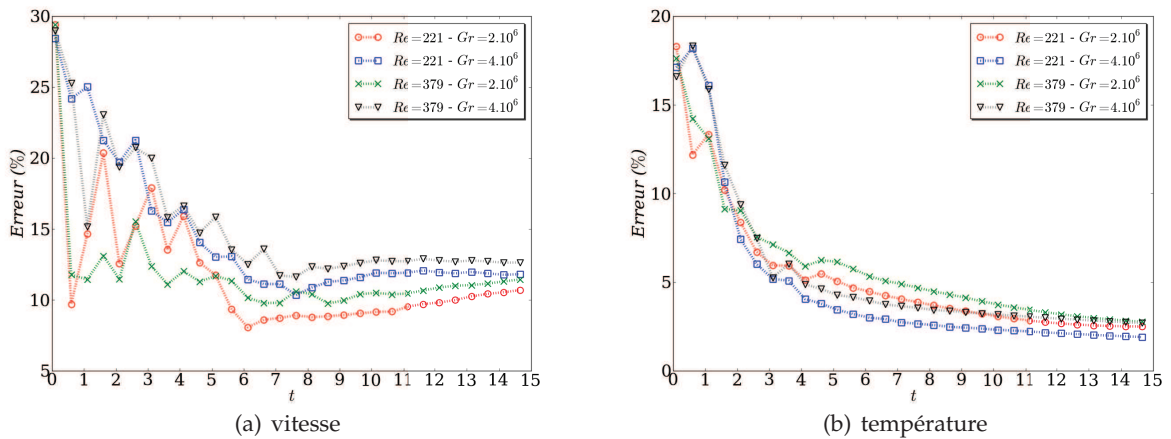


FIGURE 4.29 – Erreurs relatives entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et du modèle réduit, en considérant les quatre configurations étudiées.

Problème d'optimisation réduit

A partir des bases POD construites, le problème d'optimisation réduit, décrit à la section §4.4.2, est considéré en utilisant l'algorithme de contrôle 6. Le coefficient temporel $\hat{\mathbf{b}}(t)$ lié à la température cible $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ est construit avec les paramètres cibles α_{cib} et σ_{cib} (resp. Re_{cib} et Gr_{cib}). Les quatre couples cibles Re_{cib} et Gr_{cib} suivants, sont testés :

1. $Re_{\text{cib1}} = 221$; $Gr_{\text{cib1}} = 2.10^6$ ($Ri_{\text{cib1}} = 41$)
2. $Re_{\text{cib2}} = 221$; $Gr_{\text{cib2}} = 4.10^6$ ($Ri_{\text{cib2}} = 82$)
3. $Re_{\text{cib3}} = 379$; $Gr_{\text{cib3}} = 2.10^6$ ($Ri_{\text{cib3}} = 14$)
4. $Re_{\text{cib4}} = 379$; $Gr_{\text{cib4}} = 4.10^6$ ($Ri_{\text{cib4}} = 28$)

Les profils des champs de température et de vitesses cibles²⁰ sont tracés, au centre de la cavité, sur la Figure 4.30. Ces figures montrent que les quatre configurations cibles sont différentes entre elles et donc que le contrôle est envisageable.

Pour initialiser l'algorithme de contrôle, les écoulements au nombre de Reynolds et au nombre de Grashof suivants, ont été choisis :

1. $Re_{\text{ini1}} = 316$; $Gr_{\text{ini1}} = 3.10^6$ ($Ri_{\text{ini1}} = 30$)
2. $Re_{\text{ini2}} = 316$; $Gr_{\text{ini2}} = 5.10^6$ ($Ri_{\text{ini2}} = 50$)
3. $Re_{\text{ini3}} = 316$; $Gr_{\text{ini3}} = 1.10^6$ ($Ri_{\text{ini3}} = 10$)
4. $Re_{\text{ini4}} = 316$; $Gr_{\text{ini4}} = 3.10^6$ ($Ri_{\text{ini4}} = 30$)

Ceux-ci ont été pris arbitrairement, une multitude de combinaisons étant possible. L'algorithme de contrôle converge en temps quasi-réel (de l'ordre de 2-3 minutes) sur un processeur. Le Tableau 4.13 mentionne les nombres de Reynolds et de Grashof obtenus à l'issu du contrôle : les valeurs sont très proches des cibles. Les paramètres de contrôle tendent vers la cible en 6 à 20 itérations, selon la cible étudiée (Figures 4.31(a) et 4.31(b)). Le nombre d'itérations de l'algorithme nécessaire pour atteindre la cible est donc variable d'un cas à l'autre (Tableau 4.13). Ceci montre que les deux paramètres de contrôle Re et Gr ne convergent pas au même moment. Il est alors à noter que l'algorithme à deux paramètres de contrôle converge moins rapidement que celui à un paramètre, ce qui paraît cohérent. Les fonctionnelles objectifs $\mathcal{J}$ pour chaque configuration cible sont tracées sur la Figure 4.31(c). Elles tendent vers zéro en moins de 15 itérations.

L'algorithme d'optimisation à deux paramètres semble être efficace à la vue des différents éléments exposés ci-dessus. Il reste cependant à vérifier que les champs obtenus sont en accord avec ceux issus du modèle complet. Les profils de température et de vitesse au centre de la cavité, obtenus avec le modèle complet et avec le modèle réduit à la fin de l'algorithme de contrôle, ont été tracés respectivement sur les Figures 4.32 et 4.33. Les profils de température en $x = 0,5$ et en $y = 0,5$, ainsi les profils de vitesse verticale en $y = 0,5$, obtenus sont quasi-identiques à ceux du modèle complet. En revanche, les profils de vitesse horizontale en $x = 0,5$ présentent des différences avec ceux du modèle complet. Ceci peut s'expliquer puisque le contrôle est réalisé sur la température et non sur la vitesse.

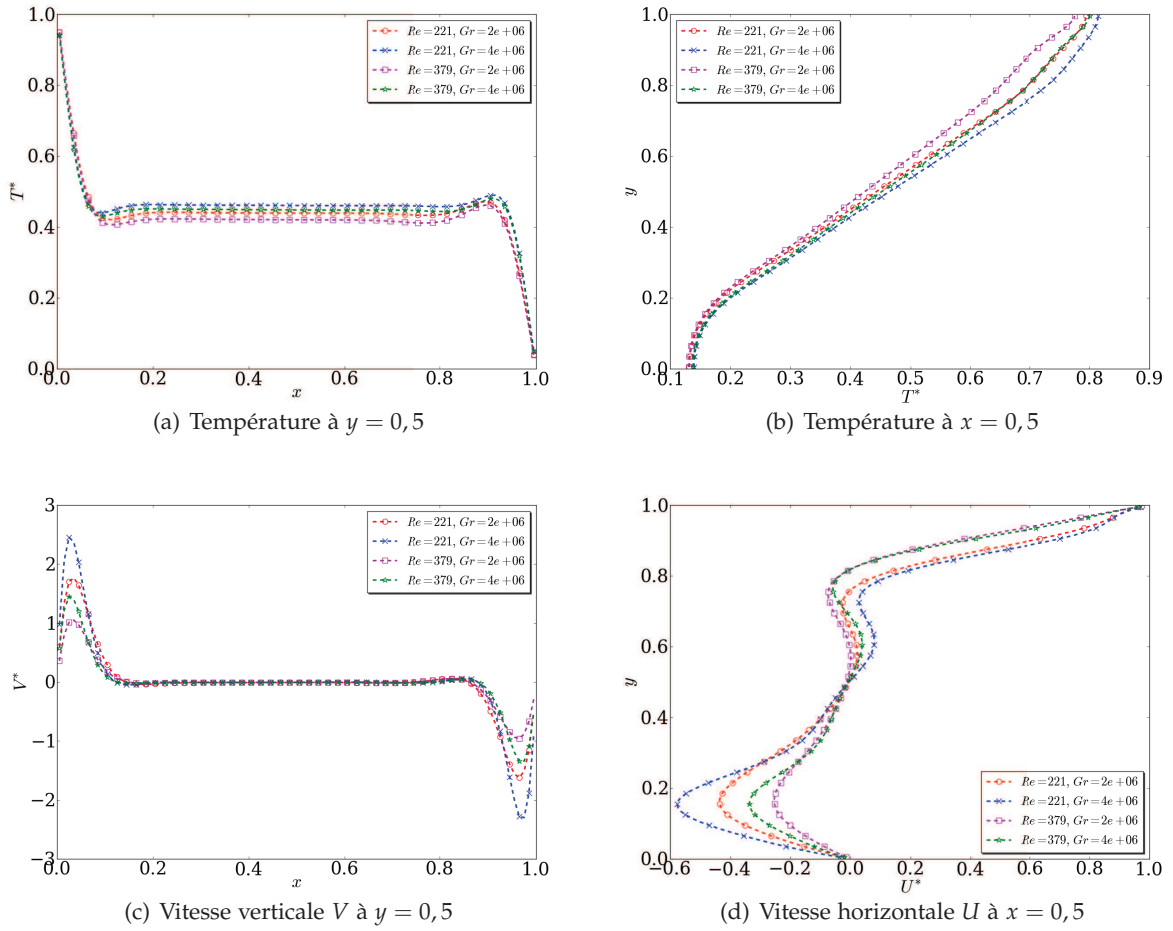


FIGURE 4.30 – Profils des champs température et de vitesse cibles, au centre de la cavité et au temps final.

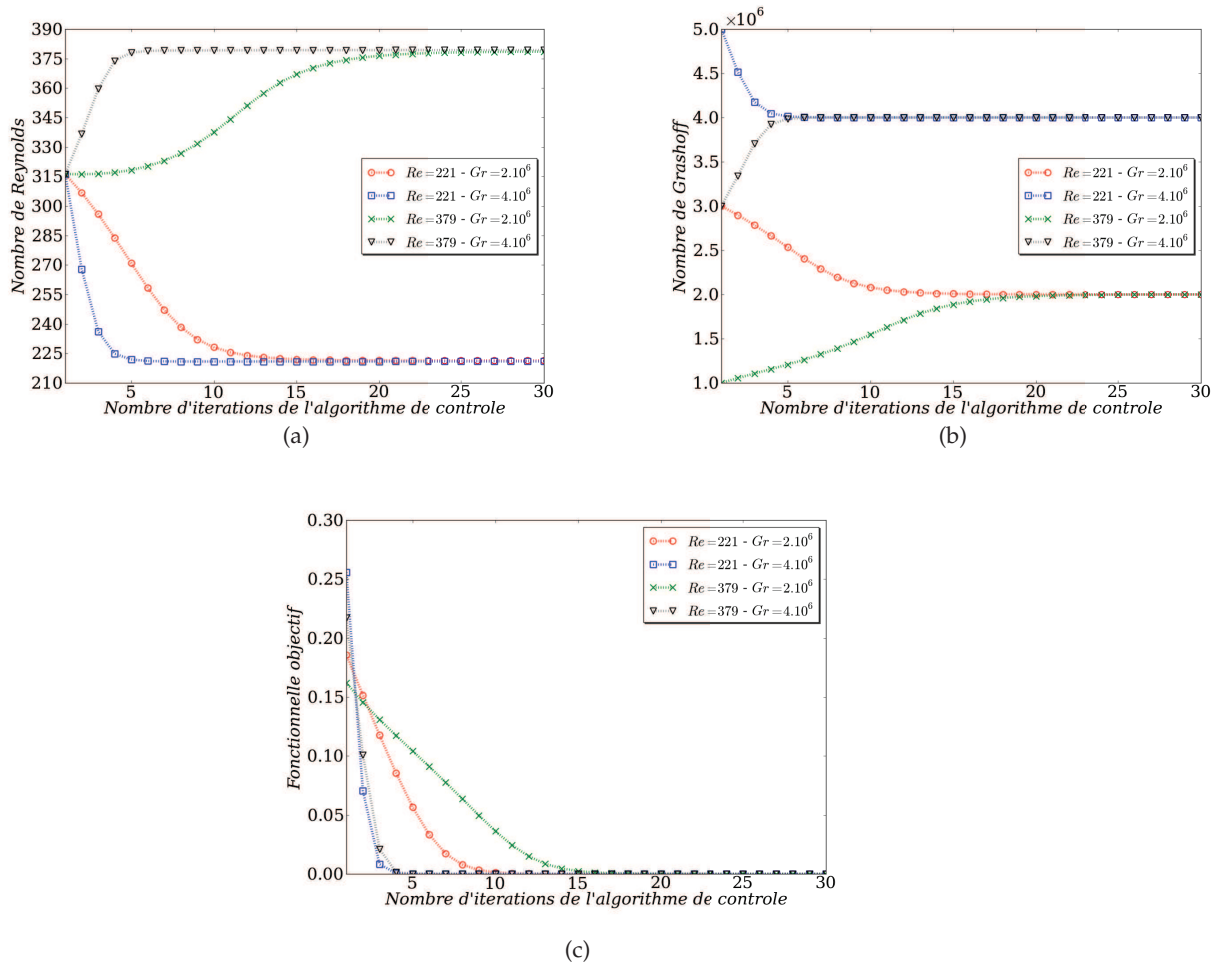


FIGURE 4.31 – Convergence de l'algorithme de contrôle utilisant deux paramètres de contrôle, dans le cas de la cavité entraînée différentiellement chauffée.

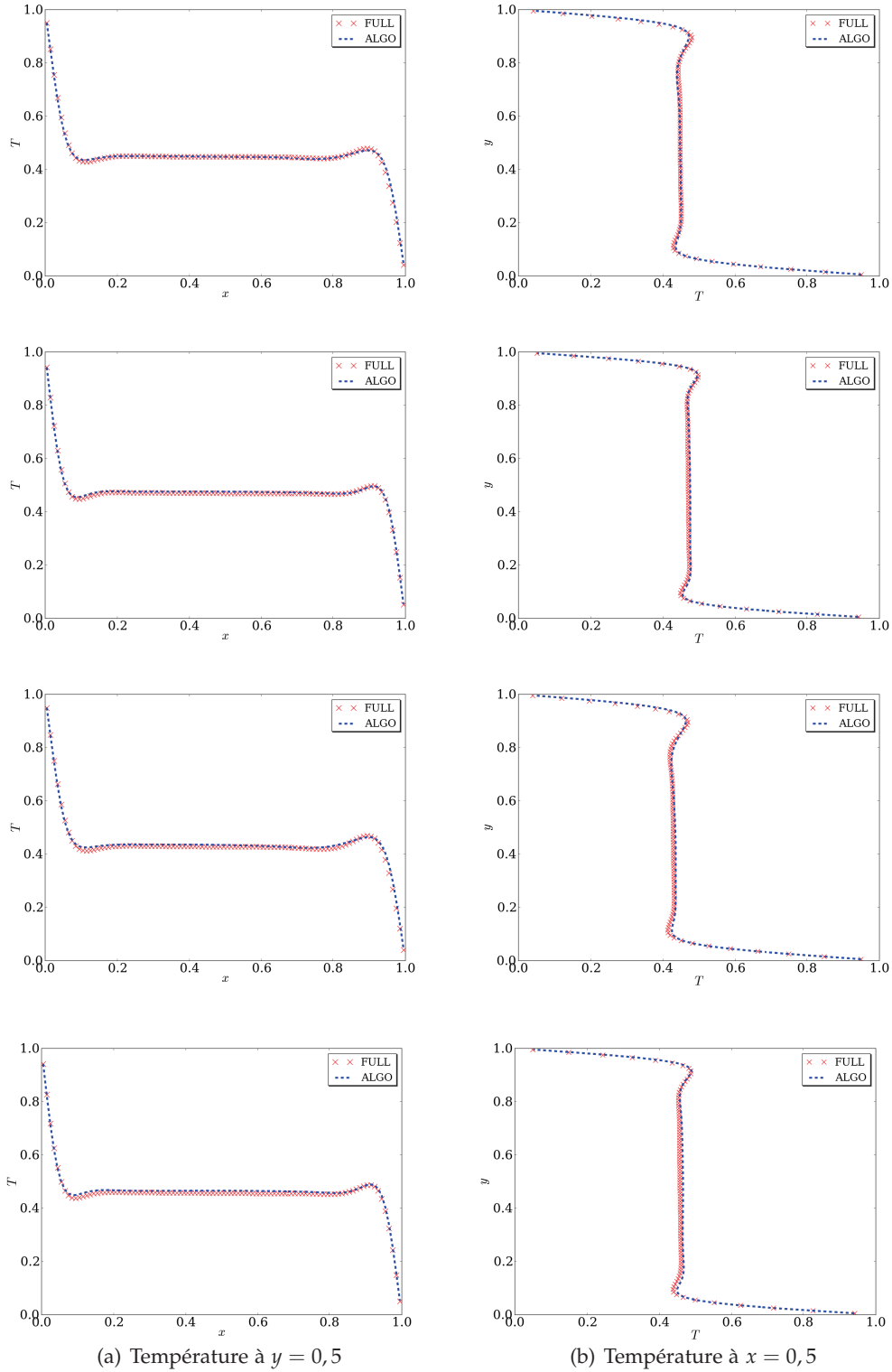


FIGURE 4.32 – Profils des champs de température obtenus avec le modèle complet et avec le modèle réduit à la fin de l'algorithme de contrôle, au centre de la cavité, pour les combinaisons (de haut en bas) : $Re_{cib1} = 221 / Gr_{cib1} = 2.10^6$; $Re_{cib2} = 221 / Gr_{cib2} = 4.10^6$; $Re_{cib3} = 379 / Gr_{cib3} = 2.10^6$ et $Re_{cib4} = 379 / Gr_{cib4} = 4.10^6$.

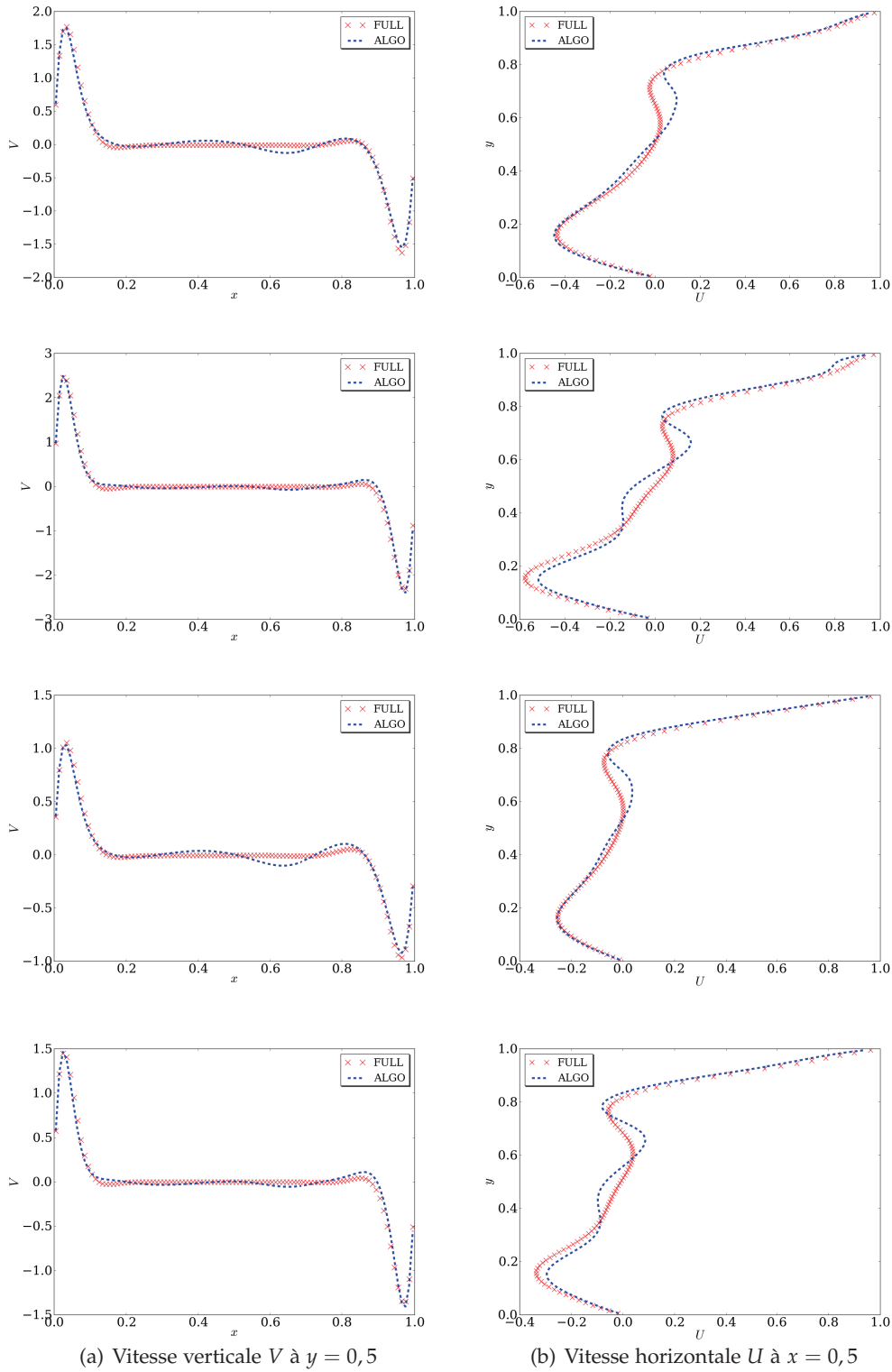


FIGURE 4.33 – Profils des champs de vitesses obtenus avec le modèle complet et avec le modèle réduit à la fin de l'algorithme de contrôle, au centre de la cavité, pour les combinaisons (de haut en bas) : $Re_{cib1} = 221 / Gr_{cib1} = 2.10^6$; $Re_{cib2} = 221 / Gr_{cib2} = 4.10^6$; $Re_{cib3} = 379 / Gr_{cib3} = 2.10^6$ et $Re_{cib4} = 379 / Gr_{cib4} = 4.10^6$.

Pour quantifier cela, l'erreur moyennée en temps (Eq 4.20), entre les champs de vitesses et de température issus du modèle complet et ceux obtenus par l'algorithme de contrôle, est répertoriée dans le Tableau 4.13, pour chaque configuration étudiée. L'erreur est relativement faible : de l'ordre de 6% en température et de 11-13% en vitesses, quelque soit le couple cible considéré.

Reynolds		Grashof		Erreur en	Erreur en	Nb d'itérations de l'algorithme
cible	obtenu	cible	obtenu	température	vitesse	
221	221,4	$2 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^6$	5,15 %	11,7 %	17
221	221,1	$4 \cdot 10^6$	$4,00 \cdot 10^6$	4,74 %	13,8 %	7
379	378,6	$2 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^6$	5,78 %	10,8 %	20
379	379,2	$4 \cdot 10^6$	$4,00 \cdot 10^6$	5,47 %	13,6 %	6

TABLE 4.13 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus en utilisant deux paramètres de contrôle, pour chaque configuration étudiée.

Il a été montré dans cette section que le modèle réduit développé est capable de reproduire des écoulements pour des nombres de Reynolds et de Grashof différents de ceux avec lesquelles les bases POD ont été construites (erreur inférieure à 14%). Dans un deuxième temps, l'algorithme de contrôle proposé, utilisant deux paramètres de contrôle, a été testé sur plusieurs configurations cibles. Il converge en temps quasi-réel (sur un processeur) vers ses cibles.

²⁰Ici le champ de vitesses est montré uniquement à titre indicatif, le contrôle étant réalisé sur la température.

4.5 Conclusion du chapitre

Dans ce Chapitre, un algorithme de descente basé sur le gradient utilisant la méthode des équations adjointes a été couplé avec un modèle réduit construit à partir d'une base POD "simple" (§4.3), puis une base POD "mixte" (§4.4). Ces deux méthodes ont été confrontées sur des cas simples tels qu'une cavité ventilée isotherme et une cavité entraînée différentiellement chauffée. Dans les deux cas, l'algorithme d'optimisation s'avère être rapide (quelques minutes sur un processeur) et fournit des résultats plutôt cohérents. Le modèle réduit construit avec une base POD "mixte" permet d'augmenter significativement la précision des résultats, par rapport à un modèle réduit construit avec une base POD "simple". Ceci s'explique aisément : le modèle réduit construit en utilisant une base POD "mixte" contient plus d'informations, ce qui permet de couvrir une gamme plus large de Reynolds et/ou de Grashof. De plus, ce modèle a l'avantage de pouvoir considérer un paramètre de contrôle n'appartenant pas à l'échantillonnage, tout en obtenant des résultats relativement précis.

Néanmoins ces méthodes sont encore trop coûteuses en espace mémoire pour être aujourd'hui embarqués dans les boîtiers de contrôle utilisés dans le bâtiment. A titre d'exemple, considérons le cas simple de la cavité entraînée différentiellement chauffée, en utilisant le modèle réduit construit à partir des bases POD avec neuf paramètres et un contrôle sur deux paramètres de contrôle (§4.4.2). Le Tableau 4.14 résume l'espace mémoire nécessaire²¹, pour utiliser ce modèle d'ordre réduit, en fonction du nombre de modes POD de vitesses et de température conservés. L'espace mémoire à considérer est alors de 20,2 Mo, en conservant 10 modes POD et de 60,7 Mo pour 30 modes, ce qui est hors de portée des contrôleurs actuels. Les champs moyens de vitesses, de température et de pression et les modes POD de vitesses et de température sont très coûteux en espace mémoire : ils représentent la quasi-totalité de l'espace. Les différents coefficients des systèmes dynamiques considérés (Eqs 4.55, 4.56, 4.63 et 4.64) sont beaucoup moins coûteux : de l'ordre de la dizaine de Ko.

Nombres de modes POD conservés	Coefficients des systèmes dynamiques	Modes POD	Champs moyens	Total
10	11,7 Ko	9,54 Mo	10,7 Mo	20,2 Mo
20	23,4 Ko	19,1 Mo	21,4 Mo	40,5 Mo
30	35,2 Ko	28,6 Mo	32,1 Mo	60,7 Mo

TABLE 4.14 – Estimation de l'espace mémoire nécessaire en fonction du nombres de modes POD de vitesses et de température conservés, en ASCII, pour chaque élément de l'algorithme de contrôle 6.

Un cas réel (géométrie plus complexe, 3D, écoulement turbulent, ...) nécessiterait plus de modes POD à conserver, et donc d'une part un stockage plus important, et d'autre part une résolution plus longue. La convergence des modèles d'ordre réduit peuvent être également altérée, lorsque

²¹Ces estimations ont été réalisées en considérant un codage ASCII : chaque caractère est codé par un octet sur 8 bits. Les différentes grandeurs sont programmées en double précision : elles représentent ainsi au maximum 25 octets.

le nombre de modes POD est trop grand. D'autres solutions sont donc à envisager, pour pouvoir être utilisées dans un bâtiment. Le Chapitre 5 propose ainsi une autre stratégie de contrôle, requérant un stockage de données plus faible. En contrepartie, les résultats obtenus avec cette dernière approche sont moins "riches" (connaissance uniquement du champ moyen) que ceux obtenus dans le Chapitre 4.

Chapitre

5

Vers le cas réel d'un bâtiment

Sommaire

5.1 Introduction	146
5.2 Stratégie de contrôle proposée	147
5.2.1 Procédure "offline"	147
5.2.2 Procédure "online"	148
5.3 Algorithme de Levenberg-Marquardt	151
5.3.1 Algorithme de Newton	151
5.3.2 Algorithme de Gauss-Newton	152
5.3.3 Algorithmes de Levenberg-Marquardt	153
5.4 Cas test : cavité entraînée différentiellement chauffée	154
5.4.1 Description du cas	155
5.4.2 Construction de la base de données	155
5.4.3 Construction des bases POD	155
5.4.4 Détermination de la zone de contrôle et des points de mesure	156
5.4.5 Procédure d'optimisation	157
5.5 Cavité ventilée 3D	159
5.5.1 Description du cas	162
5.5.2 Construction de la base de données	163
5.5.3 Construction des bases POD	164
5.5.4 Détermination de la zone d'occupation et des points de mesure	164
5.5.5 Procédure d'optimisation	168
5.6 Conclusion du chapitre	175

5.1 Introduction

Les modèles d'ordre réduit développés au chapitre précédent ne peuvent pas être utilisés dans les contrôleurs actuels du bâtiment : un cas réel nécessite plus de modes POD (et donc un stockage mémoire plus important) et la résolution des systèmes dynamiques associés se fait en temps quasi-réel (quelques minutes) sur un ordinateur de bureau. Or les boîtiers de contrôle disposent de peu de mémoire et sont limités en puissance de calcul (la résolution des modèles réduits serait alors bien plus longue). D'autres méthodes, qui susciteraient moins de données à embarquer et moins de calculs à effectuer, doivent donc être considérées.

Une autre stratégie de contrôle a donc été déployée dans ce Chapitre : le contrôle est effectué toujours sur la température en agissant sur le débit d'air d'entrée, mais cette fois-ci les systèmes dynamiques ne sont plus considérés. Seul le champ moyen (vitesses, température, ...) est à présent pris en compte. Le problème d'optimisation consiste à trouver le débit d'air d'entrée de la pièce correspondant à la température mesurée, par des capteurs de mesure dans la pièce. Une fois que le débit d'air est connu, on va chercher à agir sur celui-ci pour atteindre la température souhaitée dans la zone d'occupation. L'inconvénient des contrôleurs actuels est que pour obtenir cette température, ils se basent sur des mesures de température sur les parois (positionnés ainsi, pour ne pas être une gêne pour l'occupant) et non sur la température dans la zone de contrôle (appelée aussi zone d'occupation). Or la température aux parois n'est pas la même que celle dans la zone de contrôle. Ce Chapitre propose une approche pour déterminer la température dans la zone d'occupation, tout en utilisant par la suite les boîtiers de contrôle usuels.

Pour cela, une base de données, comprenant les écoulements moyens (vitesse, température, concentration, pression, ...) pour plusieurs valeurs du débit d'air d'entrée et de température d'entrée, est tout d'abord constituée à l'aide de simulations numériques complètes. Chaque champ f considéré est alors décomposé par POD, en fonction des n paramètres γ_i à faire varier et de l'espace $\mathbf{x}$, tel que : $f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_f} a_i^f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \Phi_i^f(\mathbf{x})$. Cette première étape dans la stratégie de contrôle employée, peut s'avérer coûteuse en temps de calcul (simulations complètes à réaliser, bases POD à construire), mais celle-ci est effectuée, une *seule* fois, en amont, hors du processus de contrôle.

L'utilisateur détermine, en premier lieu, la zone à contrôler (correspondant à la zone d'occupation) $\mathbf{x}_{\text{ZONE}}$ et la température souhaitée θ_{UTI} dans cette zone. La température à l'intérieur de la pièce est mesurée à l'aide de capteurs de mesure (thermomètres, thermocouples), aux points $\mathbf{x}_{\text{MES}}$. Seuls les coefficients $a_i^f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ et les bases POD $\Phi_i^f(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$, $\Phi_i^f(\mathbf{x}_{\text{MES}})$ sont embarqués dans les contrôleurs. Le processus de contrôle "online" est alors le suivant :

- a) Mesure de la température intérieure, à l'aide de capteurs de mesure situés généralement près des parois et hors de la zone d'occupation, pour ne pas être une gêne pour l'occupant ;
- b) Mesure de la température d'entrée d'air (γ_1), à l'aide de capteurs de mesure ;
- c) Estimation du débit d'air d'entrée (γ_2), inconnu, avec un algorithme d'optimisation ;
- d) Évaluation de la température dans la zone de contrôle θ_{ZONE} ;

- e) Tant que la température dans cette zone n'est pas égale à la température souhaitée θ_{UTI} , le débit d'air d'entrée est modifié. Cette étape n'est pas réalisée dans ce manuscrit.

La stratégie de contrôle, adoptée dans ce chapitre, est détaillée dans une première section (§5.2). Un bref rappel sur les algorithmes d'optimisation à direction de descente, basés une méthode de second ordre (utilisation de la dérivée seconde de la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$) est ensuite réalisé dans un deuxième temps (§5.3). La procédure d'optimisation développée ici est ensuite appliquée à un cas test (étudié également dans les chapitres précédents) : la cavité entraînée différentiellement chauffée (§5.4). Puis celle-ci est appliquée au cas d'une cavité ventilée tridimensionnelle proche d'une situation réelle, dans une dernière section (§5.5).

5.2 Stratégie de contrôle proposée

5.2.1 Procédure "offline"

Dans un premier temps, la base de données (vitesses, température, ..., selon le problème considéré) est constituée à partir de simulations d'écoulement à plusieurs débits d'air d'entrée q_v^{data} et températures d'air d'entrée, notées $\theta_{\text{ext}}^{\text{data}}$. Les simulations nécessaires à l'établissement de cette base de données, sont ici réalisées avec *Code_Saturne*.

La deuxième étape consiste à décomposer par POD, le champ moyen de vitesses $\mathbf{u}(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}, \mathbf{x})$ et le champ moyen de température $\theta(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}, \mathbf{x})$, tels que :

$$\mathbf{u}(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N^u} a_i^u(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}) \Phi_i^u(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

$$\theta(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N^\theta} a_i^\theta(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

$\mathbf{a}^u(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}})$ et $\mathbf{a}^\theta(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}})$ représentent les coefficients dépendant des paramètres d'entrée q_v^{data} et $\theta_{\text{ext}}^{\text{data}}$, respectivement liés au champ de vitesses et au champ de température. N^u et N^θ correspondent respectivement, au nombre de modes POD conservés pour le champ de vitesses et le champ de température. Les modes POD du champ de vitesses $\Phi_i^u(\mathbf{x})$ et de température $\Phi_i^\theta(\mathbf{x})$ sont obtenus par la méthode des snapshots (cf. §3.3.3).

Seules les données $\mathbf{a}^u(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}})$, $\mathbf{a}^\theta(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}})$, $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{\text{MES}})$, $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{MES}})$, $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$ et $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$ sont alors embarquées dans les contrôleurs : le nombre de données est ainsi considérablement réduit.

Remarque La zone de contrôle et les points de mesure sont à déterminer avant la programmation de l'algorithme de contrôle, pour pouvoir déterminer les bases POD : $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{\text{MES}})$, $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{MES}})$, $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$ et $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$ à embarquer. Ces deux paramètres peuvent cependant être modifiés (changement de la zone d'occupation, déplacement des capteurs de mesure) à la guise du programmeur.

5.2.2 Procédure "online"

La deuxième phase de la procédure de contrôle est dite "online" : elle peut être réalisée à l'infini selon les besoins de l'utilisateur, à partir de la base de données construite en amont. Connaissant la température d'entrée d'air θ_{ext} , ainsi que la température mesurée $\theta_{\text{MES}}(\mathbf{x}_{\text{MES}})$ au niveau des capteurs¹, il va s'agir de contrôler la température dans la zone d'occupation θ_{ZONE} , inconnue, pour atteindre la température souhaitée θ_{UTI} , en opérant sur le débit d'air à l'entrée, qui est également inconnu (cf. Figure 5.1).

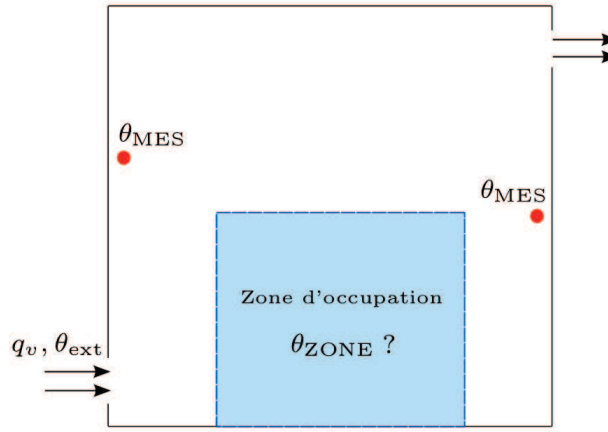


FIGURE 5.1 – Schéma de la pièce considérée.

A partir des mesures de température, la première étape est de déterminer le débit d'air d'entrée dans la pièce. Celui-ci est cherché en posant le problème d'optimisation aux "moindres-carrés" suivant :

$$\min_{q_v, \theta_{\text{ext}}} \mathcal{J}(q_v, \theta_{\text{ext}}, \mathbf{x}_{\text{MES}}) \quad (5.3)$$

où la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ est définie comme :

$$\mathcal{J}(q_v, \theta_{\text{ext}}, \mathbf{x}_{\text{MES}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \left(\theta_{\text{MES}}(\mathbf{x}_{\text{MES},j}) - \underbrace{\sum_{i=1}^{N_\theta} a_i^\theta(q_v, \theta_{\text{ext}}) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{MES},j})}_{=\theta(q_v, \theta_{\text{ext}}, \mathbf{x}_{\text{MES},j})} \right)^2 \quad (5.4)$$

et M constitue le nombre de points de mesure. Le problème d'optimisation (Eq 5.3) est résolu avec un algorithme d'optimisation type Levenberg-Marquardt², décrit à la section suivante.

¹Les capteurs de mesure (thermocouple, thermomètre) sont situés généralement à proximité des parois pour ne pas être une gêne pour l'occupant, et donc sont hors de la zone d'occupation. Cependant, la température à l'intérieur de cette zone n'est pas la même que la température sur les parois : il faut alors l'estimer.

²Comme nous le verrons à la section 5.3, l'algorithme de Levenberg-Marquardt nécessite la détermination du gradient de la fonctionnelle objectif $\nabla_{q_v, \theta_{\text{ext}}} \mathcal{J}$ (puisque il appartient à la famille des algorithmes à direction de descente). La connaissance de la fonctionnelle $\mathcal{J}$, pour différentes valeurs de q_v et θ_{ext} , est donc requise : ceci est réalisé à l'aide d'une interpolation de Lagrange.

Connaissant à présent le débit d'entrée dans la pièce q_v , la température dans la zone d'occupation θ_{ZONE} peut être estimée, en utilisant les données embarquées $\mathbf{a}^\theta(q_v^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}})$ et $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$:

$$\theta_{\text{ZONE}}(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) = \sum_{i=1}^{N^\theta} a_i^\theta(q_v, \theta_{\text{ext}}) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) \quad (5.5)$$

Une fois la température dans la zone d'occupation obtenue, la température moyenne $\bar{\theta}_{\text{ZONE}}$ dans cette zone est calculée³ :

- soit celle-ci n'est pas égale à la température souhaitée θ_{UTI} ; le débit d'air d'entrée est alors modifié (typiquement, à l'aide de contrôleurs sur les ouvrants).
- soit celle-ci est égale à la température souhaitée θ_{UTI} ; l'algorithme de contrôle s'arrête.

La Figure 5.2 résume la stratégie de contrôle employée. Dans un boîtier de contrôle classique, il suffit donc simplement de rajouter les étapes dans le rectangle bleu (après avoir bien évidemment réalisé en amont les calculs "offline", cf. §5.2.1).

Remarque La vitesse de l'air $\mathbf{u}_{\text{ZONE}}(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$ dans la zone de contrôle peut de la même façon être déterminée, selon :

$$\mathbf{u}_{\text{ZONE}}(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) = \sum_{i=1}^{N^\theta} a_i^u(q_v, \theta_{\text{ext}}) \Phi_i^u(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) \quad (5.6)$$

La connaissance de température et de la vitesse de l'air dans la zone d'occupation peut ainsi permettre l'étude du confort thermique d'un occupant dans un bâtiment.

Application à notre étude

Ne disposant pas de données expérimentales, cette stratégie de contrôle est éprouvée à partir de simulations numériques issues de *Code_Saturne*. En pratique, ces simulations ne sont bien évidemment pas réalisées. La température d'air d'entrée est tout d'abord fixée de manière arbitraire. Comme la géométrie ne peut changer à chaque simulation numérique, le débit d'air d'entrée est modifié en jouant sur la vitesse d'air d'entrée $U_0 \mathbf{e}_x$. Le paramètre de contrôle est alors la vitesse d'entrée d'air⁴. La température mesurée par les capteurs $\theta_{\text{MES}}(\mathbf{x}_{\text{MES}})$ est déterminée par simulation numérique complète. La vitesse d'entrée d'air est ensuite cherchée avec un algorithme d'optimisation, type Levenberg-Marquardt. Le principe de cet algorithme est décrit dans la section suivante (§5.3). La température et la vitesse dans la zone d'occupation, obtenues respectivement avec les équations 5.5 et 5.6, sont enfin comparées à celles issues de simulations complètes, afin de valider la démarche suivie.

³Ici le critère d'arrêt de l'algorithme de contrôle correspond à $\|\theta_{\text{UTI}} - \bar{\theta}_{\text{ZONE}}\| < \epsilon$, où ϵ est un paramètre fixé par l'utilisateur.

⁴En pratique, il n'est évidemment pas possible de contrôler la vitesse d'entrée d'air en ventilation naturelle, le contrôle est effectué sur la surface d'ouverture des fenêtres.

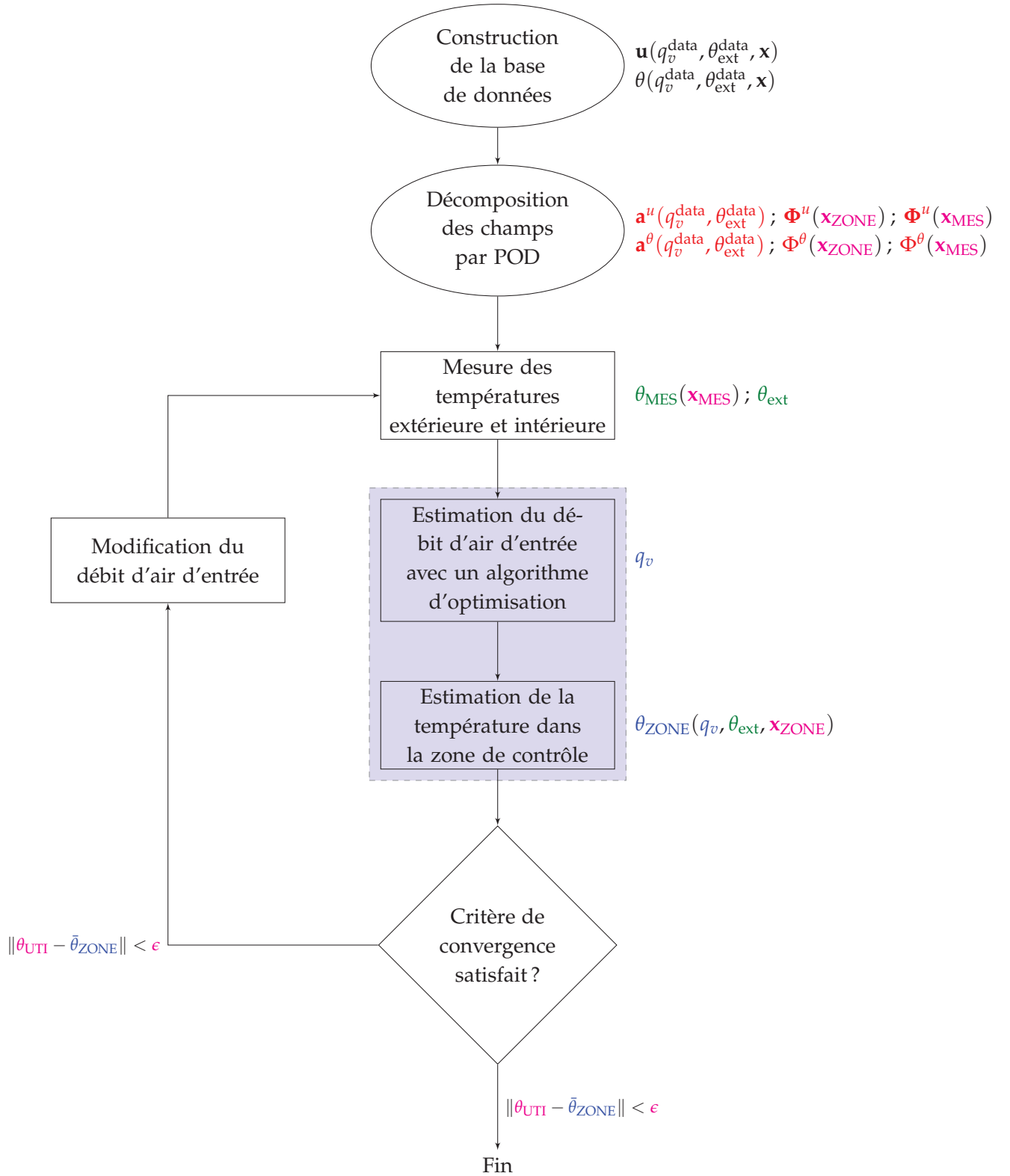


FIGURE 5.2 – Algorithme de contrôle : les grandeurs en rouge correspondent aux données à embarquer dans le contrôleur, en vert aux mesures, en bleu, aux grandeurs à calculer et en magenta aux paramètres à fixer par l'utilisateur.

5.3 Algorithme de Levenberg-Marquardt

Dans un premier temps et pour pouvoir décrire l'algorithme de Levenberg-Marquardt, un rappel sur les algorithmes d'optimisation utilisant une méthode de second ordre, est effectué, en étudiant l'algorithme de Newton, puis l'algorithme de Gauss-Newton. Cette section a pour but de présenter ces différents algorithmes, pour plus de détails le lecteur pourra se référer par exemple à [22, 35].

5.3.1 Algorithme de Newton

Alors que la méthode du gradient (§2.3) utilise une approximation linéaire pour trouver une direction de descente, les méthodes de second ordre utilisent la courbure (dérivée seconde) de la fonctionnelle objectif, pour atteindre le minimum plus rapidement (puisque la convergence est alors quadratique). Au voisinage d'un point $\mathbf{c}_k$, la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ est approchée par la fonction quadratique $q(\mathbf{c})$ donnée par le développement de Taylor d'ordre 2 suivant :

$$q(\mathbf{c}) \approx \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) + (\mathbf{c} - \mathbf{c}_k)^T \nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_k)^T \nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) (\mathbf{c} - \mathbf{c}_k) \quad (5.7)$$

$\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c}_k)$ représente la matrice hessienne définie comme la matrice des dérivées seconde de $\mathcal{J}$. La méthode de Newton consiste à choisir le point $\mathbf{c}$, s'il existe, qui minimise la fonction quadratique q (Eq 5.7). Pour cela, une condition suffisante est que la matrice hessienne $\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c}_k)$ soit définie positive. Le point qui minimise q est alors déterminé par l'équation $\nabla q(\mathbf{c}) = 0$, soit :

$$\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) + (\mathbf{c} - \mathbf{c}_k) \nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) = 0 \quad (5.8)$$

Soit :

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_k - [\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c}_k)]^{-1} \nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) \quad (5.9)$$

L'algorithme de Newton est alors le suivant⁵ :

a) Calculer la direction d_k solution de :

$$[\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c}_k)]^{-1} d_k = -\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) \quad (5.11)$$

b) Déterminer $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + d_k$;

c) Incrémentation : $k = k + 1$;

d) Si critère de convergence non satisfait ($\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) > 0$), retour à l'étape **a**.

⁵Dans le Chapitre 2 (§2.3.1), nous avons vu que les algorithmes de descente consistent à approcher une solution par la relation de récurrence suivante :

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + w_k d_k \quad (5.10)$$

Le pas w_k est pris ici constant et égal à 1.

Pour que cette démarche soit applicable, le Hessien $\nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c}_k)$ doit être inversible à chaque itération. L'intérêt de l'approche de Newton est sa convergence quadratique vers un minimiseur local, si $\mathbf{c}_0$ en est assez proche. Cependant, pour que la méthode converge vers le minimum, le Hessien doit être défini positif. Dans le cas général d'un modèle non-linéaire, cette hypothèse de convergence n'est pas toujours respectée et la méthode peut ne pas converger [22]. En pratique elle est peu employée car elle nécessite, de plus, le calcul du Hessien à chaque itération, ce qui est très coûteux en temps de calcul. La méthode de Newton est surtout à la base du développement de nombreux autres algorithmes, tels que par exemple l'algorithme de Gauss-Newton ou l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

5.3.2 Algorithme de Gauss-Newton

L'utilisation de ce type d'algorithme concerne exclusivement les problèmes d'optimisation non-linéaires sans contrainte. La fonctionnelle à minimiser est d'un type particulier, dit de "moindres-carrés". Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m r_j^2(\mathbf{c}) \quad (5.12)$$

où $\mathbf{c} = (c_1 \dots c_n)^T$ est un vecteur et chaque r_j est une fonction de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ et $m \geq n$. Les r_j correspondent aux résidus. C'est un problème de moindres carrés. Généralement, la fonction vectorielle résidu $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est utilisée. Elle est définie telle que :

$$\mathbf{r}(\mathbf{c}) = (r_1(\mathbf{c}) \dots r_m(\mathbf{c}))^T \quad (5.13)$$

La fonction objectif (Eq 5.12) devient alors :

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \mathbf{r}^T(\mathbf{c}) \mathbf{r}(\mathbf{c}) \quad (5.14)$$

Les dérivées de $\mathcal{J}$ peuvent alors s'écrire en fonction de la matrice jacobienne J de $\mathbf{r}$ définie par : $\frac{\partial r_j}{\partial c_i}$, où $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq i \leq n$. Le gradient de $\mathcal{J}$ est alors :

$$\nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}) = \sum_{j=1}^m r_j(\mathbf{c}) \nabla r_j(\mathbf{c}) = J^T(\mathbf{c}) \mathbf{r}(\mathbf{c}) \quad (5.15)$$

et le Hessien de $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{J}(\mathbf{c}) &= \sum_{j=1}^m \nabla r_j(\mathbf{c}) \nabla r_j(\mathbf{c})^T + \sum_{j=1}^m r_j(\mathbf{c}) \nabla^2 r_j(\mathbf{c}) \\ &= J^T(\mathbf{c}) J(\mathbf{c}) + \sum_{j=1}^m r_j(\mathbf{c}) \nabla^2 r_j(\mathbf{c}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Le second terme est très coûteux en temps de calcul. En pratique, le Hessien est approché par le premier terme uniquement, [35] :

$$H = J^T(\mathbf{c}) J(\mathbf{c}) \quad (5.17)$$

En suivant la méthode de Newton (Eq 5.11), la direction de descente d_k de Gauss-Newton est déterminée comme étant une solution particulière du système linéaire suivant (le pas w_k est également constant et égal à 1) :

$$\left(J^T(\mathbf{c}_k) J(\mathbf{c}_k) \right) d_k = -J^T(\mathbf{c}_k) r(\mathbf{c}_k) \quad (5.18)$$

Si la jacobienne $J(\mathbf{c}_k)$ est injective, alors la direction de descente d_k peut s'exprimer comme :

$$d_k = - \left(J^T(\mathbf{c}_k) J(\mathbf{c}_k) \right)^{-1} J^T(\mathbf{c}_k) r(\mathbf{c}_k) \quad (5.19)$$

Contrairement à l'algorithme de Newton, l'algorithme de Gauss-Newton est un algorithme robuste, car la matrice $J^T(\mathbf{c}) J(\mathbf{c})$ est presque toujours définie positive et ainsi la direction calculée est bien une direction de descente. De plus, cet algorithme n'utilise qu'une seule partie du Hessian de $\mathcal{J}$, ce qui permet d'éviter le calcul des dérivées seconde des résidus qui peut être coûteux en temps de calcul. L'algorithme de Gauss-Newton hérite des mêmes propriétés que l'algorithme de Newton : sa convergence est rapide et il doit être initialisé en un point assez proche d'un minimiseur local.

5.3.3 Algorithmes de Levenberg-Marquardt

La méthode de descente basée sur le gradient (cf. Chapitre 2, §2.3), ainsi que la méthode de Gauss-Newton peuvent être complémentaires, vis-à-vis des avantages respectifs qu'elles procurent :

- Le premier est généralement efficace loin d'un minimum local, lorsque l'algorithme de Gauss-Newton diverge.
- Le second converge très rapidement.

La méthode de Levenberg-Marquardt [135, 145] permet de combiner les avantages de ces deux méthodes. La direction de descente d_k est ici prise telle que⁶ :

$$d_k = - (H + \lambda_k \text{diag}(H))^{-1} \nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) \quad (5.21)$$

où $\lambda_k > 0$ est un facteur d'amortissement. Généralement, celui-ci est déterminé de manière heuristique. H représente une partie approximée au premier ordre du Hessian de $\mathcal{J}$ (Eq 5.17). Cette méthode est bien évidemment applicable que si le Hessian est inversible. Si λ_k est nul, la direction de descente est celle d'un algorithme de Gauss-Newton. A l'inverse quand λ_k tend vers l'infini, la direction est celle de la plus forte descente. L'Algorithme 7 décrit le principe de l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

⁶Initialement, Levenberg [135] avait défini la direction de descente telle que :

$$d_k = - (H + \lambda_k \mathbb{I})^{-1} \nabla \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) \quad (5.20)$$

avec $\mathbb{I}$ représentant la matrice identité. C'est Marquardt [145] qui remplaça quelques années plus tard celle-ci par la diagonale de la matrice H . En effet, cette modification permet de changer le comportement de l'algorithme dans les cas où λ_k est grand, c'est à dire lorsque l'on est proche d'une descente de gradient. On se déplace alors plus vite dans les directions vers lesquelles le gradient est plus fiable, afin d'éviter de passer de nombreuses itérations sur un plateau. C'est pourquoi l'algorithme porte le nom de Levenberg-Marquardt.

Algorithme 7: ALGORITHME DE LEVENBERG-MARQUARDT

- Initialisation : $k = 1$, choisir c_k et λ_k ;
- 1: Calcul du Hessien H et de sa diagonale $\text{diag}(H)$;
 - 2: Détermination de la direction de descente avec l'équation 5.21 ;
 - 3: Détermination des nouveaux paramètres de contrôle : $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + d_k$;
 - 4: Si $\mathcal{J}(\mathbf{c}_{k+1}) < \mathcal{J}(\mathbf{c}_k)$, alors $\lambda_k = \lambda_k / \varepsilon$, sinon $\lambda_k = \lambda_k \times \varepsilon$
(où $\varepsilon > 0$ est défini par l'utilisateur) ;
 - 5: Incrémentation : $k = k + 1$
Si critère de convergence non-satisfait, retour à l'étape 1 ;
-

En pratique cet algorithme permet de converger avec beaucoup moins d'itérations. Mais chaque itération demande plus de calculs, en particulier pour l'inversion du Hessien. Son utilisation se limite donc aux cas où le nombre de paramètres à optimiser n'est pas très élevé (ce qui est notre cas). C'est cet algorithme qui est utilisé dans la suite de ce chapitre.

Remarque Il existe des variantes des algorithmes de Newton, de Gauss-Newton et de Levenberg-Marquardt utilisant une recherche linéaire du pas w_k . Le pas w_k n'est plus pris égal à 1. Ces méthodes requièrent alors une étape supplémentaire, où le pas est recherché de manière linéaire (cf. Chapitre 2, §2.4).

5.4 Cas test : cavité entraînée différentiellement chauffée

Afin de valider progressivement notre stratégie de contrôle, celle-ci a été appliquée tout d'abord sur le cas test de la cavité entraînée différentiellement chauffée, décrite à la section §4.3.6. A partir d'une base de données constituée d'écoulements (vitesses et température) à différentes vitesses d'entraînement et à différentes températures de la paroi chauffée, l'objectif est ici de retrouver la température à l'état stationnaire, dans la zone de contrôle (pour un écoulement différent de ceux inclus dans la base de donnée), après avoir estimées la vitesse d'entraînement et la température de la paroi chauffée, avec un algorithme de Levenberg-Marquardt. Le problème d'optimisation résolu ici revient donc à un problème d'optimisation à deux paramètres (vitesse d'entraînement et température de la paroi chauffée). La température mesurée, ici obtenue par simulation numérique, correspond à la température à atteindre par l'algorithme d'optimisation, en agissant sur la vitesse d'entraînement et la température de la paroi chauffée. La température et la vitesse dans la zone de contrôle sont ensuite déterminés par reconstruction POD. Les champs ainsi obtenus sont alors comparés à des simulations complètes, afin de tester la pertinence de la méthode employée.

5.4.1 Description du cas

Les conditions aux limites sont redonnées sur la Figure 5.3 : les parois horizontales Γ_h sont prises adiabatiques et il est imposé une température chaude θ_c sur la paroi gauche Γ_g et une température froide θ_f sur la paroi droite Γ_d . La cavité est entraînée par une vitesse d'entraînement $\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = U_0 \mathbf{e}_x$ sur la paroi haute Γ_e .

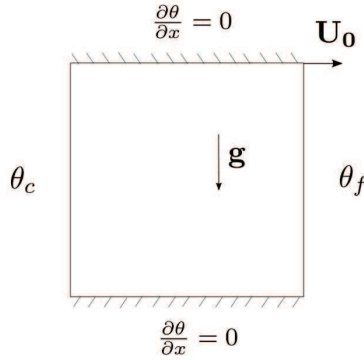


FIGURE 5.3 – Conditions aux limites de la cavité entraînée étudiée.

La base de données est constituée à partir de simulations des écoulements pour différentes valeurs de vitesses d'entraînement (U_0^{data}) à différentes températures (θ_c^{data}) sur la paroi chauffée. Afin que ce cas soit plus parlant, on considère les nombres de Reynolds Re^{data} et de Grashof Gr^{data} comme paramètres de contrôle, au lieu de U_0^{data} et θ_c^{data} .

5.4.2 Construction de la base de données

Les simulations, effectuées pour trois valeurs de nombre de Reynolds associées chacune à trois valeurs de nombre de Grashof (soit neuf écoulements étudiés), sont obtenues avec *Code_Saturne* en utilisant un maillage 100×100 , à l'issue de la phase transitoire. Les nombres de Reynolds Re^{data} et de Grashof Gr^{data} considérés sont répertoriés dans le Tableau 5.1.

5.4.3 Construction des bases POD

A partir de ces simulations, les bases POD de vitesses et de température sont construites, en fonction du nombre de Reynolds, du nombre de Grashof et de l'espace, à l'instant final (état stationnaire), telles que :

$$\mathbf{u}(Re^{\text{data}}, Gr^{\text{data}}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N^u} a_i^u(Re^{\text{data}}, Gr^{\text{data}}) \Phi_i^u(\mathbf{x}) \quad (5.22)$$

$$\theta(Re^{\text{data}}, Gr^{\text{data}}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N^\theta} a_i^\theta(Re^{\text{data}}, Gr^{\text{data}}) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}) \quad (5.23)$$

où N^u et N^θ représentent respectivement le nombre de modes POD conservé en vitesse et en température. Les coefficients dépendant des nombres de Reynolds et de Grashof sont notés

Nombre de Reynolds Re	Nombre de Grashof Gr	Nombre de Richardson Ri
158	1.10^6	40
	5.10^6	200
	1.10^7	400
316	1.10^6	10
	5.10^6	50
	1.10^7	100
474	1.10^6	4
	5.10^6	22
	1.10^7	44

TABLE 5.1 – Nombres de Reynolds Re^{data} et de Grashof Gr^{data} (et nombre de Richardson correspondant), composant la base de données considérée, dans le cas de la cavité différentiellement chauffée.

$\mathbf{a}^u(Re^{data}, Gr^{data})$, $\mathbf{a}^\theta(Re^{data}, Gr^{data})$. Enfin, $\Phi^u(\mathbf{x})$ et $\Phi^\theta(\mathbf{x})$ sont les modes POD de vitesses et de température.

L'erreur de reconstruction, entre le champ de vitesses (resp. de température) issu du modèle complet et celui obtenu par POD, est définie dans la norme $L_2(\Omega)$ telle que :

$$e(N^f) = \frac{\left\| \sqrt{\int_{\Omega} \left(f_{FULL}(Re, Gr, \mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{N^f} \chi_i(Re, Gr) \Phi_i^f(\mathbf{x}) \right)^2 d\Omega} \right\|_{\infty}}{\left\| \sqrt{\int_{\Omega} (f_{FULL}(Re, Gr, \mathbf{x}))^2 d\Omega} \right\|_{\infty}} \quad (5.24)$$

où f représente le champ considéré et $\|\bullet\|_{\infty}$ la norme infinie. Pour par exemple, trois modes de vitesse et de température, l'erreur de reconstruction est respectivement de $4,9.10^{-2}$ et de $3,3.10^{-3}$, ce qui représente une erreur faible. Ainsi, 3 modes de vitesse et 3 modes de température sont conservés par la suite.

5.4.4 Détermination de la zone de contrôle et des points de mesure

Avant de commencer la procédure d'optimisation, il faut déterminer la zone de contrôle, ainsi que la positionnement des capteurs de mesure de température. La Figure 5.4 montre la zone de contrôle choisie. Elle est composée de 60×60 mailles. Les points de mesure de la température sont situés hors de cette zone et à proximité des parois. Ils sont au nombre de trois.

Les données à embarquer dans les contrôleurs sont : $\mathbf{a}^u(Re^{data}, Gr^{data})$, $\mathbf{a}^\theta(Re^{data}, Gr^{data})$, $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{MES})$, $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{MES})$, $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{ZONE})$ et $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{ZONE})$. A titre comparatif⁷, en conservant trois modes

⁷La même méthode qu'au Chapitre 4 est utilisée pour quantifier le stockage mémoire : on considère un codage ASCII où chaque caractère est codé par un octet sur 8 bits. Les différentes grandeurs ($\mathbf{a}^u(Re^{data}, Gr^{data})$, $\mathbf{a}^\theta(Re^{data}, Gr^{data})$, $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{MES})$, $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{MES})$, $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{ZONE})$ et $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{ZONE})$) sont programmées en double précision : elles représentent ainsi au maximum 25 octets.

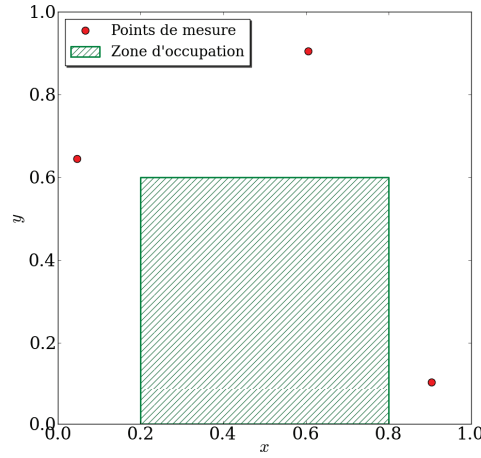


FIGURE 5.4 – Schéma représentant la zone de contrôle et les points de mesure, dans la cavité entraînée différentiellement chauffée.

de vitesses et de température, il suffirait dans ce cas d'embarquer 1,04 Mo de données, soit au moins trente fois moins, qu'en utilisant la méthode décrite au Chapitre 4 (cf. Tableau 4.14).

5.4.5 Procédure d'optimisation

Description du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation considéré ici consiste donc à chercher les nombres de Reynolds et de Grashof correspondants à la température "mesurée" $\hat{\theta}_{\text{MES}}(Re, Gr, \mathbf{x}_{\text{MES}})$, telle que l'écart entre celle-ci et la température $\theta_{\text{ALGO}}(Re, Gr, \mathbf{x}_{\text{MES}})$ soit minimisé au sens des moindres carrés. La fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(Re, Gr, \mathbf{x}_{\text{MES}})$, définie dans la zone de contrôle, est définie telle que :

$$\mathcal{J}(Re, Gr, \mathbf{x}_{\text{MES}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \left(\hat{\theta}_{\text{MES}}(Re, Gr, \mathbf{x}_{j,\text{MES}}) - \underbrace{\sum_{i=1}^{N^\theta} a_i^\theta(Re, Gr) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{j,\text{MES}})}_{=\theta_{\text{ALGO}}(Re, Gr, \mathbf{x}_{\text{MES}})} \right)^2 \quad (5.25)$$

où M est le nombre de points de mesure (ici $M = 3$). Les coefficients $\mathbf{a}^\theta(Re, Gr)$, pour un nombre de Reynolds et un nombre de Grashof donnés, sont obtenus par une interpolation de Lagrange des coefficients $\mathbf{a}^\theta(Re^{\text{data}}, Gr^{\text{data}})$.

Le problème d'optimisation est résolu ici en utilisant un algorithme de Levenberg-Marquardt issu du package python `scipy.optimize.leastsq`⁸. Après avoir obtenu les paramètres Re et Gr qui minimisent la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(Re, Gr, \mathbf{x}_{\text{MES}})$, ceux-ci sont utilisés pour déterminer la

⁸voir <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.leastsq.html>

température et la vitesse dans la zone de contrôle, selon les équations suivantes :

$$\theta(Re, Gr, \mathbf{x}_{\text{ZONE}}) = \sum_{i=1}^{N^\theta} a_i^\theta(Re, Gr) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) \quad (5.26)$$

$$\mathbf{u}(Re, Gr, \mathbf{x}_{\text{ZONE}}) = \sum_{i=1}^{N^u} a_i^u(Re, Gr) \Phi_i^u(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) \quad (5.27)$$

Résultats

Quatre régimes d'écoulement, correspondants à deux valeurs du nombre de Reynolds associées à deux valeurs de nombre de Grashof sont ici considérés⁹. Ces valeurs sont répertoriées dans le Tableau 5.2.

Nombre de Reynolds	Nombre de Grashof
221	2.10 ⁶
	4.10 ⁶
379	2.10 ⁶
	4.10 ⁶

TABLE 5.2 – Nombres de Reynolds Re et de Grashof Gr à atteindre par l'algorithme d'optimisation, dans le cas de la cavité différentiellement chauffée.

Les paramètres de contrôle Re et Gr tendent vers leurs cibles en une trentaine d'itérations (cf. Tableau 5.3). L'algorithme est très rapide : environ trois secondes suffisent pour atteindre la convergence vers les cibles souhaitées. Les champs de température et de vitesses dans la zone de contrôle sont ensuite obtenus avec les équations 5.26 et 5.27.

Reynolds		Grashof		Nb d'itérations de l'algorithme
cible	obtenu	cible	obtenu	
221	217	2.10 ⁶	1,996.10 ⁶	42
221	229	4.10 ⁶	4,005.10 ⁶	23
379	441	2.10 ⁶	2,017.10 ⁶	39
379	409	4.10 ⁶	4,014.10 ⁶	25

TABLE 5.3 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus pour chaque Reynolds cible et Grashof cible, pour la cavité entraînée différentiellement chauffée.

Les profils de température dans la zone de contrôle obtenus, sont comparés avec ceux issus du modèle complet, pour chaque cible, sur les Figures 5.5(a), 5.5(c) et 5.5(e). Ils sont semblables à ceux provenant du modèle complet. De même, les profils de vitesse sont représentés sur les Figures 5.5(b), 5.5(d) et 5.5(f). Quelques différences entre ceux issus du modèle complet et ceux

⁹Ce sont les mêmes cas cibles que ceux étudiés dans le Chapitre précédent, à la section §4.4.2.2.

obtenus sont observées, mais globalement on arrive à retrouver les profils de référence.

La différence de température entre la température obtenue et celle issue du modèle complet, pour chaque cible, est représentée dans la zone de contrôle, sur la Figure 5.6. La différence de température est au maximum de 2%, ce qui montre la pertinence de la méthode employée dans ce cas.

Enfin, l'erreur moyenne dans la zone de contrôle, entre les champs de température et de vitesses issus du modèle complet et ceux obtenus, définie par l'équation¹⁰ :

$$err (\%) = \frac{\|f_{\text{FULL}}(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) - f_{\text{ALGO}}(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})\|_{L^2(\Omega_c)}}{\|f_{\text{FULL}}(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})\|_{L^2(\Omega_c)}} \times 100 \quad (5.28)$$

est répertoriée pour chaque cible, dans le Tableau 5.4. L'erreur est de l'ordre de 1% en température et de 7% en vitesse.

Configurations		Erreur en	Erreur en
Re	Gr	température	vitesse
221	2.10^6	1,27 %	8,03 %
221	4.10^6	0,40 %	6,33 %
379	2.10^6	1,50 %	7,53 %
379	4.10^6	0,41 %	7,19 %

TABLE 5.4 – Erreur moyenne en température et en vitesse, pour chaque Reynolds cible et Grashof cible, pour la cavité entraînée différentiellement chauffée.

Ces premiers résultats étant encourageants, la méthode est employée dans la section suivante sur une cavité ventilée 3D, dans les conditions proches de celles d'un bâtiment.

5.5 Cavité ventilée 3D

La stratégie de contrôle, décrite à la section §5.2, est à présent appliquée sur le cas d'une cavité ventilée anisotherme tridimensionnelle. Comme mentionné précédemment, le but est de pouvoir, à terme, faire un contrôle de la température dans la zone d'occupation, plutôt que sur la température mesurée sur les parois (ce qui est fait actuellement avec des contrôleurs classiques). Seules les étapes visant à obtenir la température dans la zone de contrôle sont ainsi réalisées, la partie contrôle classique est gérée par les boîtiers de contrôle, cf. Figure 5.2.

A partir d'une base de données constituée d'écoulements (vitesses et température) à différentes vitesses d'entrée d'air et pour différentes températures d'entrée d'air, l'objectif est ici de retrouver la température dans la zone de contrôle, après avoir estimé la vitesse d'entrée d'air dans la pièce (initialement inconnue), avec un algorithme de Levenberg-Marquardt. La température mesurée, ici obtenue par simulation numérique, correspond donc à la température à atteindre par l'algorithme d'optimisation, en agissant sur la vitesse d'entrée. La température et la vitesse dans la

¹⁰ f représente le champ de température ou le champ de vitesses et Ω_c le volume de la zone de contrôle.

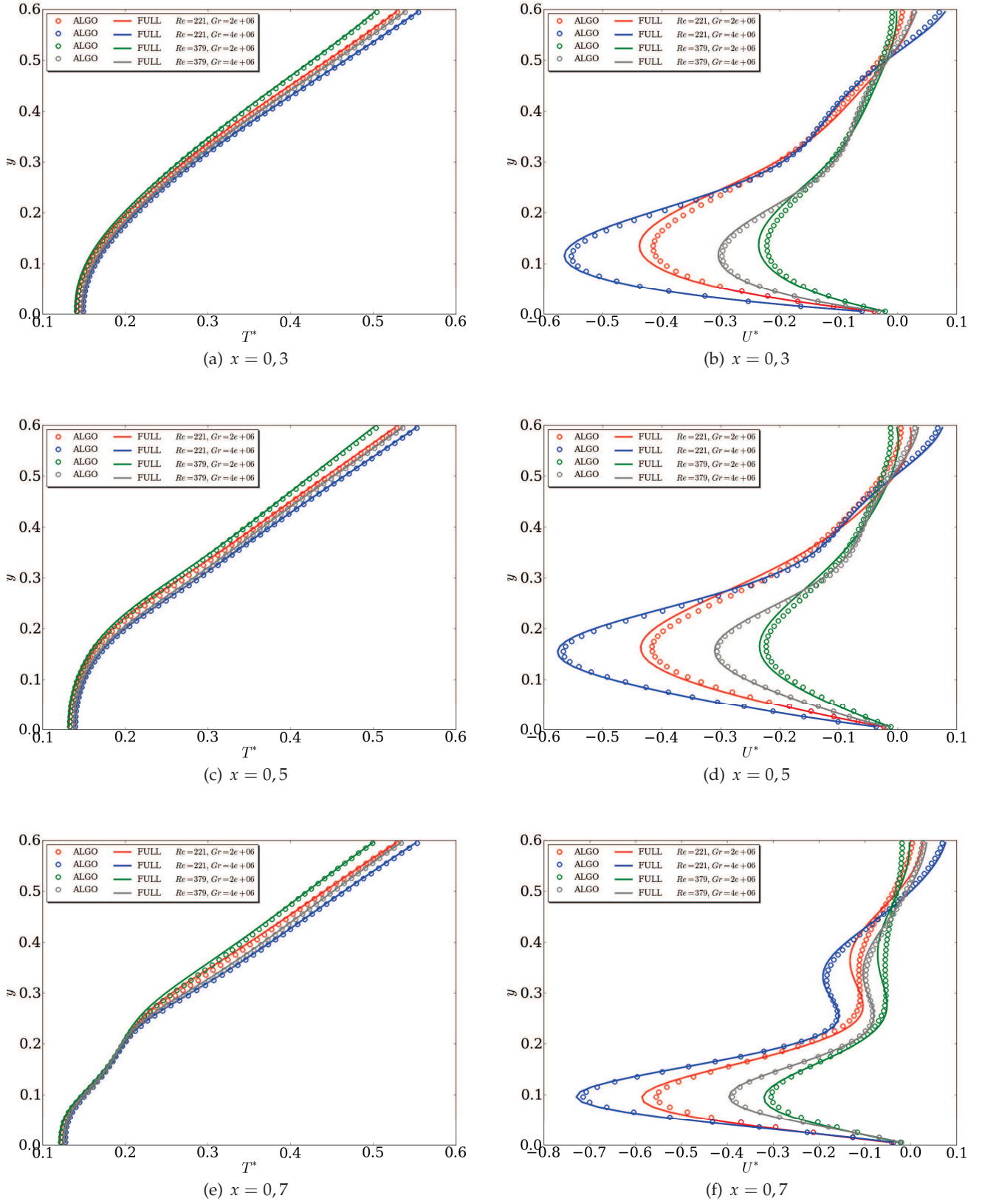


FIGURE 5.5 – Comparaison des profils de température (gauche) et de vitesse horizontale (droite) dans la zone de contrôle, obtenus avec ceux issus du modèle complet, pour chaque configuration testée.

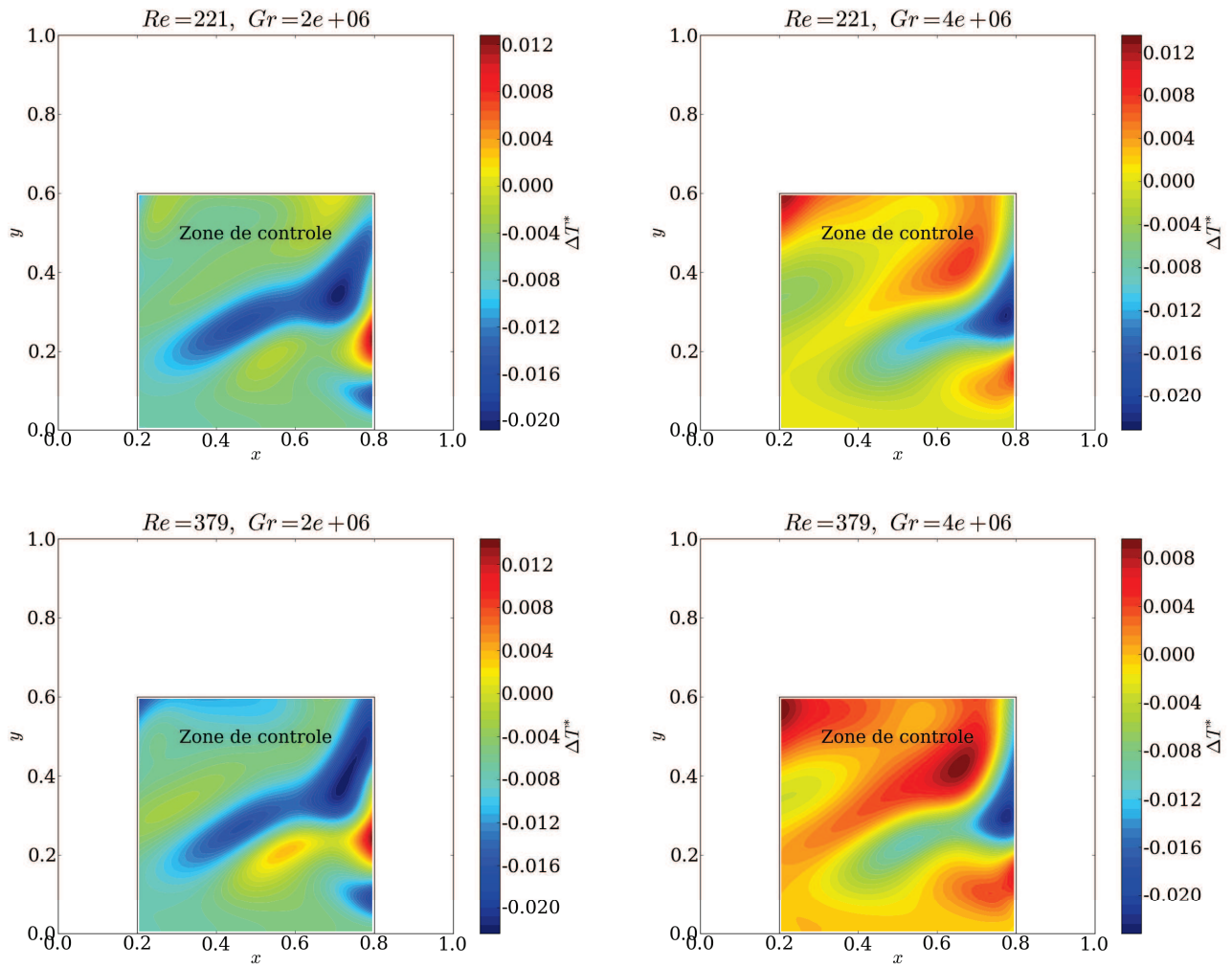


FIGURE 5.6 – Différence de température entre la température obtenue et celle issue du modèle complet, pour chaque cible.

5.5.1 Description du cas

Toutes les parois de la pièce sont à la température $\theta_m = 27^\circ\text{C}$, exceptée la paroi de droite Γ_d qui est à la température $\theta_c = 30^\circ\text{C}$. L'air extérieur rentre à la température θ_{ext} (inférieure aux températures des parois θ_m et θ_c) et à la vitesse $\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = U_0 \mathbf{e}_x$.

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_{\text{ini}}(\mathbf{x}) = 30^\circ\text{C} \quad (5.29)$$
$$\begin{aligned}\theta|_{\Gamma_m} &= \theta_m \\ \theta|_{\Gamma_e} &= \theta_{\text{ext}} \\ \theta|_{\Gamma_d} &= \theta_c\end{aligned}\tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\theta|_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\
\mathbf{u}|_{\Gamma_e} &= U_0 \mathbf{e}_x \\
\mathbf{u}|_{\Gamma \setminus \Gamma_e \cup \Gamma_s} &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Une condition type "outlet" est imposée en sortie sur la vitesse. Le nombre de Reynolds est basé sur la hauteur de l'entrée h , tel que $Re = U_0 h / \nu$. Le nombre de Grashof est défini comme $Gr = g\beta H^3 \Delta\theta / \nu^2$, où $\Delta\theta = \theta_c - \theta_{\text{ext}}$.

5.5.2 Construction de la base de données

La base de données des écoulements, pour cinq valeurs de vitesse d'air d'entrée et pour chacune trois valeurs de température d'air d'entrée (cf. Tableau 5.5), est constituée à partir de simulations numériques effectuées avec *Code_Saturne*, en utilisant un modèle LES. Pour cela, un maillage de $100 \times 100 \times 10$ est utilisé. La gamme de Reynolds et de Grashof considérée s'étend de $Re = 1325$ à $Re = 6623$, pour Gr variant de $1,43 \cdot 10^9$ à $2,58 \cdot 10^9$, ce qui correspond à des nombres de Richardson variant de 58 à 814 et des nombres de Rayleigh de $1,01 \cdot 10^9$ à $1,82 \cdot 10^9$. Les écoulements considérés n'étant pas stationnaires, une moyenne temporelle est réalisée sur les champs de vitesses et de température, à convergence.

Vitesse de l'air en entrée U_0^{data} ($m.s^{-1}$)	Température de l'air en entrée $\theta_{\text{ext}}^{\text{data}}$ ($^{\circ}C$)
0,2	14
	18
	22
0,4	14
	18
	22
0,6	14
	18
	22
0,8	14
	18
	22
1,0	14
	18
	22

TABLE 5.5 – Valeurs de la vitesse d'entrée d'air et de température d'entrée d'air constituant la base de données.

Les différents clichés, obtenus avec *Code_Saturne*, sont illustrés sur les Figures 5.8 et 5.9. La première figure représente les isocontours de température pour chaque vitesse U_0 et température θ_{ext} d'entrée d'air considérée. En toute logique, plus la vitesse d'entrée est élevée et plus la température extérieure est basse, plus la cavité est rafraîchie rapidement. On observe

également une stratification horizontale de la température, plus ou moins importante selon le cas considéré, pour une hauteur supérieure à $0,8H$. La Figure 5.9 représente les lignes de courant dans la cavité pour chaque configuration étudiée. D'autre part, on observe que le jet est, soit orienté vers le haut (majorité des cas), soit orienté vers le bas. Les zones de recirculation, ainsi que leurs nombres varient d'une configuration à l'autre. Enfin, pour les cas :

✓ $U_0 = 0,2m/s, \theta_{\text{ext}} = 14^\circ\text{C}$; ✓ $U_0 = 0,2m/s, \theta_{\text{ext}} = 14^\circ\text{C}$;

✓ $U_0 = 0,4m/s, \theta_{\text{ext}} = 22^\circ\text{C}$; ✓ $U_0 = 0,6m/s, \theta_{\text{ext}} = 14^\circ\text{C}$;

✓ $U_0 = 0,8m/s, \theta_{\text{ext}} = 18^\circ\text{C}$,

la vitesse est quasiment nulle au sommet de la cavité, ce qui correspond, sur la Figure 5.8, à une stratification horizontale de la température.

5.5.3 Construction des bases POD

A partir de ces simulations, les bases POD de vitesses et de température sont construites, en fonction de la vitesse d'air d'entrée U_0^{data} , de la température d'air d'entrée $\theta_{\text{ext}}^{\text{data}}$ et de l'espace, telles que :

$$\mathbf{u}(U_0^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N^u} a_i^u(U_0^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}) \Phi_i^u(\mathbf{x}) \quad (5.32)$$

$$\theta(U_0^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N^\theta} a_i^\theta(U_0^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}}) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}) \quad (5.33)$$

où N^u et N^θ représentent respectivement le nombre de modes POD conservé en vitesse et en température. Les coefficients dépendant de la vitesse d'air d'entrée et de la température d'air d'entrée sont notés $\mathbf{a}^u(U_0^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}})$, $\mathbf{a}^\theta(U_0^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}})$. Enfin, $\Phi^u(\mathbf{x})$ et $\Phi^\theta(\mathbf{x})$ sont les modes POD de vitesses et de température.

Le Tableau 5.6 montre l'erreur de reconstruction, définie selon l'équation 5.24, entre le champ de vitesses (resp. de température) issu du modèle complet et celui obtenu par POD. Pour par exemple, cinq modes de vitesse et cinq de température, l'erreur de reconstruction est respectivement de $1,32 \cdot 10^{-1}$ et de $1,31 \cdot 10^{-3}$, ce qui représente une erreur faible. Ainsi, 5 modes de vitesse et 5 modes de température sont conservés par la suite.

Remarque Pour 15 modes POD de vitesses ou de température conservés, l'erreur est de l'ordre de l'erreur machine ($< 10^{-12}$). Ce résultat est tout à fait cohérent puisque nous avons utilisé 15 clichés pour construire les bases POD.

5.5.4 Détermination de la zone d'occupation et des points de mesure

Avant de commencer la procédure d'optimisation, il faut déterminer la zone de contrôle, ainsi que la positionnement des capteurs de mesure de température. La Figure 5.10 montre la zone d'occupation considérée à l'intérieur de la cavité. Celle-ci¹¹ a pour dimensions $\frac{0,7}{L} \times \frac{0,7}{H} \times \frac{0,7}{P}$ et est composée de $70 \times 70 \times 7$ mailles. Cette zone de contrôle est matérialisée sur les Figures 5.8 et

¹¹Le volume d'occupation a été choisi de manière arbitraire, une autre configuration aurait pu très bien être adoptée.

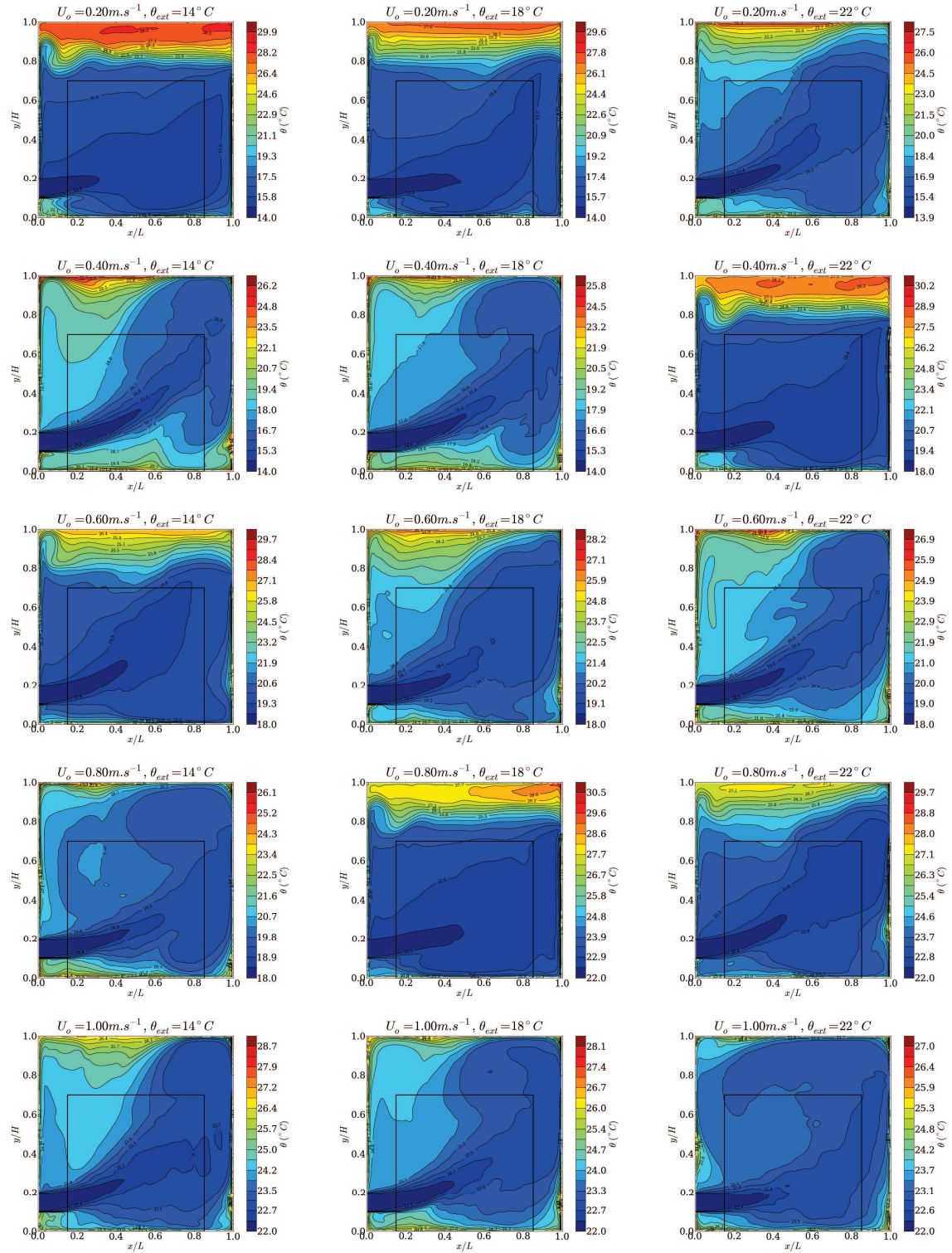


FIGURE 5.8 – Isocontours de température obtenues avec Code_Saturne, pour chaque vitesse d'entrée d'air et température d'entrée d'air considérées dans la base de données.

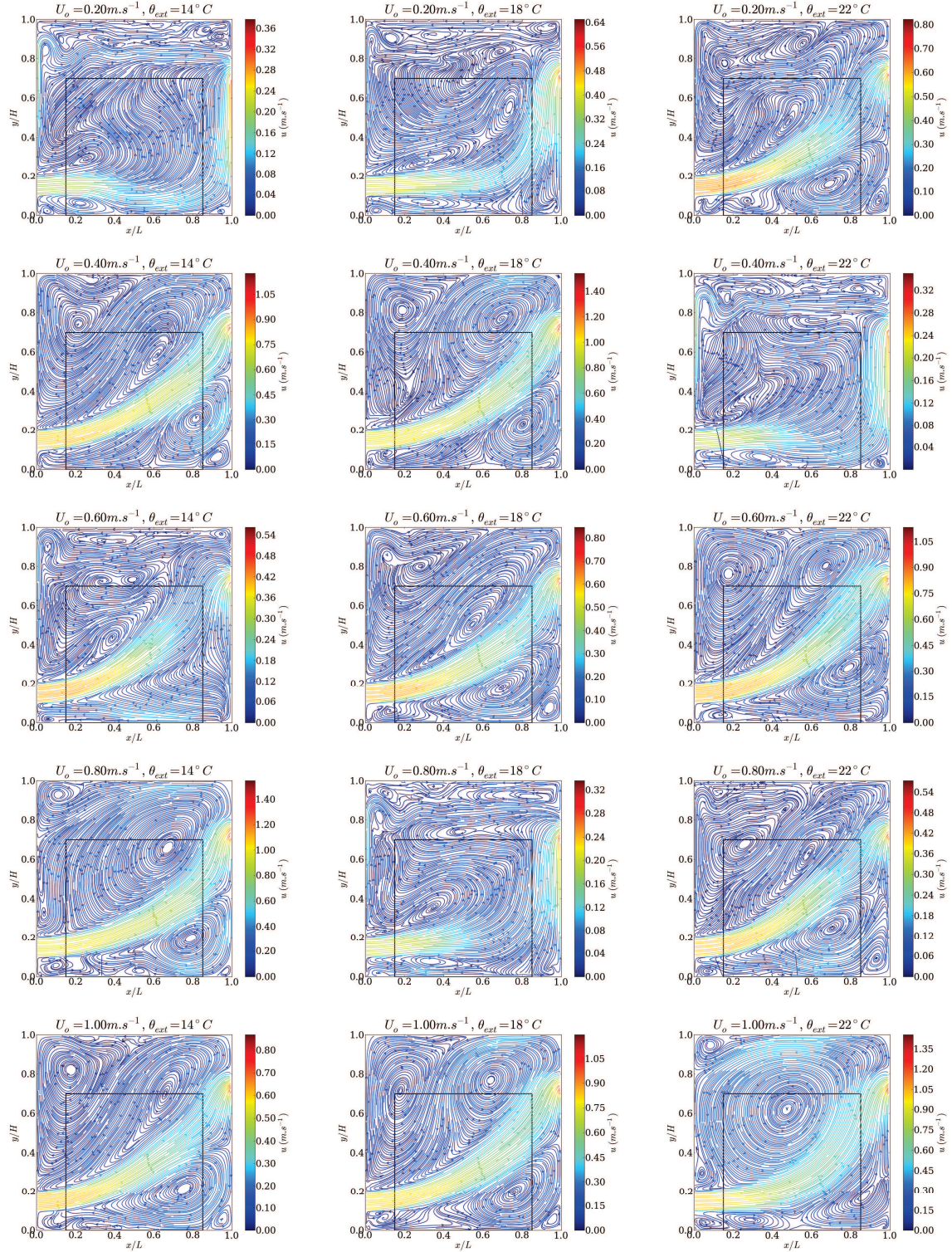


FIGURE 5.9 – Lignes de courant obtenues avec Code_Saturne, pour chaque vitesse d'entrée d'air et température d'entrée d'air considérées dans la base de données.

Nombre de modes	Erreur de reconstruction POD	
	vitesse	température
1	$4,76.10^{-1}$	$3,39.10^{-3}$
2	$2,55.10^{-1}$	$3,09.10^{-3}$
3	$1,80.10^{-1}$	$1,87.10^{-3}$
4	$1,55.10^{-1}$	$1,45.10^{-3}$
5	$1,32.10^{-1}$	$1,31.10^{-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$2,88.10^{-14}$	$9,52.10^{-12}$

TABLE 5.6 – Erreur de reconstruction POD en vitesses et en température, en fonction du nombre de modes conservés.

5.9 par un rectangle noir.

Quatre points de mesure de la température sont situés, hors de la zone de contrôle et à proximité des parois avant et arrière de la cavité, Figure 5.10. Ils ont pour coordonnées : $\mathbf{x}_{\text{MES},1}(\frac{0,105}{L}, \frac{0,905}{H}, \frac{0,950}{P})$, $\mathbf{x}_{\text{MES},2}(\frac{0,905}{L}, \frac{0,205}{H}, \frac{0,950}{P})$, $\mathbf{x}_{\text{MES},3}(\frac{0,905}{L}, \frac{0,905}{H}, \frac{0,050}{P})$ et $\mathbf{x}_{\text{MES},4}(\frac{0,005}{L}, \frac{0,005}{H}, \frac{0,050}{P})$.

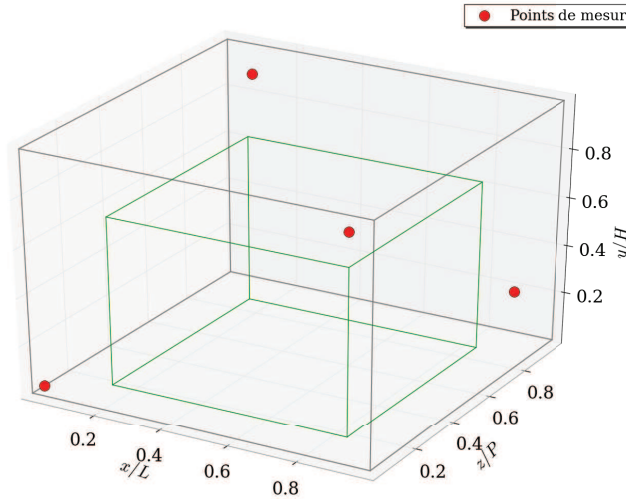


FIGURE 5.10 – Points de mesure dans la pièce et zone d'occupation matérialisée par le cube coloré intérieur.

Les données à embarquer dans les contrôleurs sont : $\mathbf{a}^u(U_0^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}})$, $\mathbf{a}^\theta(U_0^{\text{data}}, \theta_{\text{ext}}^{\text{data}})$, $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{\text{MES}})$, $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{MES}})$, $\Phi_i^u(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$ et $\Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$, ce qui représente 3,2 Mo de données¹² dans ce cas.

¹²Nous avons considéré ici une zone d'occupation de $70 \times 70 \times 7$ mailles. En pratique, il n'est pas nécessaire d'en prendre autant : une sur cinq, sur dix, ..., est suffisante. Moins de données seront alors embarquées. Typiquement en ne conservant qu'un point sur 10, le stockage de données serait de 336 Ko.

5.5.5 Procédure d'optimisation

Description du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation considéré ici consiste donc à chercher la vitesse d'air d'entrée (et connaissant la température d'entrée θ_{ext}) correspondante à la température "mesurée"¹³ au niveau des capteurs $\hat{\theta}_{\text{MES}}(U_0, \theta_{\text{ext}}, \mathbf{x}_{\text{MES}})$, telle que l'écart entre celle-ci et la température $\theta_{\text{ALGO}}(U_0, \theta_{\text{ext}}, \mathbf{x}_{\text{MES}})$ soit minimisé au sens des moindres carrés.

Il est résolu avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt issu du package python `scipy.optimize.leastsq`. Une fois la vitesse d'air d'entrée obtenue U_0 et connaissant la température d'entrée θ_{ext} , la température dans la zone d'occupation θ_{ZONE} , ainsi que la vitesse dans la zone d'occupation $\mathbf{u}_{\text{ZONE}}(\mathbf{x}_{\text{ZONE}})$ sont déterminées par reconstruction POD telle que :

$$\theta_{\text{ZONE}}(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) = \sum_{i=1}^{N^\theta} a_i^\theta(U_0, \theta_{\text{ext}}) \Phi_i^\theta(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) \quad (5.34)$$

$$\mathbf{u}_{\text{ZONE}}(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) = \sum_{i=1}^{N^u} a_i^u(U_0, \theta_{\text{ext}}) \Phi_i^u(\mathbf{x}_{\text{ZONE}}) \quad (5.35)$$

Résultats

Huit régimes d'écoulement, pour cinq vitesses d'entrée d'air et trois températures d'entrée d'air (hors de l'échantillonnage), à atteindre par l'algorithme d'optimisation sont ici testés. Ces valeurs ont été choisies de telle façon à couvrir une large gamme de vitesse (de 0,30 à 0,90 $m.s^{-1}$) et de température (de 15 à 21°C). et sont répertoriées dans le Tableau 5.7. Par la suite, elles seront identifiées en fonction de leur numéro.

Cas n°	U_0	θ_{ext}
1	0,70 $m.s^{-1}$	16°C
2	0,50 $m.s^{-1}$	20°C
3	0,90 $m.s^{-1}$	16°C
4	0,70 $m.s^{-1}$	19°C
5	0,90 $m.s^{-1}$	21°C
6	0,30 $m.s^{-1}$	15°C
7	0,50 $m.s^{-1}$	16°C
8	0,30 $m.s^{-1}$	19°C

TABLE 5.7 – Configurations testées.

Le paramètre de contrôle U_0 tend vers sa cible en 18 à 56 itérations (cf. Tableau 5.8). L'algorithme est très rapide : quelques secondes ($< 10s$) suffisent pour atteindre la convergence vers les cibles

¹³Ici la température cible $\hat{\theta}_{\text{MES}}$ est déterminée en réalisant de nouvelles simulations numériques avec *Code_Saturne*, pour chaque vitesse et température d'air d'entrée considérée. En pratique, cette température est mesurée.

souhaitées. Les champs de température et de vitesses dans la zone de contrôle sont ensuite respectivement obtenus avec les équations 5.34 et 5.35.

Cas n°	Nb d'itérations de l'algorithme	Erreur en température	Erreur en vitesse
1	44	0,12 %	17,96 %
2	28	0,09 %	26,36 %
3	25	0,15 %	21,07 %
4	21	0,10 %	15,54 %
5	56	0,08 %	21,40 %
6	29	0,10 %	37,23 %
7	18	0,11 %	29,05 %
8	19	0,08 %	51,21 %

TABLE 5.8 – Nombre d'itérations de l'algorithme d'optimisation, erreur moyenne en température et en vitesses, pour chaque configuration testée.

Les champs de température dans la zone d'occupation sont tracés sur les Figures 5.13 et 5.14. Les champs reconstruits sont fidèles à ceux obtenus avec un modèle complet : la différence entre les deux n'excède pas 1,6°C, et ceci sur des petites zones. A titre indicatif, les lignes de courant dans la zone d'occupation sont tracées sur les Figures 5.15 et 5.16. Globalement les tendances de l'écoulement sont bien reproduites. En revanche pour des faibles vitesses d'entrée (0,30 m.s⁻¹ ; configurations 6 et 8), notre modèle a dû mal à reproduire l'écoulement (zones de recirculation inexistantes ou mal positionnées, intensités différentes).

Pour quantifier cela, l'erreur moyenne spatiale dans la zone de contrôle, entre les champs de température et de vitesses issus du modèle complet et ceux obtenus, définie par l'équation 5.28 est répertoriée pour chaque cas, dans le Tableau 5.8. L'erreur est de l'ordre de 0,10% en température et 25% en vitesses, ce qui confirme nos premières observations.

Ce qui nous intéresse c'est une valeur moyenne de la température dans la zone d'occupation (pour pouvoir la comparer à la température souhaitée par l'utilisateur θ_{UTI} et agir en fonction sur le débit d'air). Celle-ci est tracée sur la Figure 5.11(a), pour chaque configuration obtenue par reconstruction et avec une simulation complète. D'une part, la température moyenne varie entre 16,5°C et 22,5°C dans la zone d'occupation ; l'écart de température est important (8°C) entre les différentes configurations, ce qui prouve bien l'intérêt d'un contrôle de la température. D'autre part, cette figure montre que la stratégie mise en place permet de retrouver des résultats cohérents, comparés à des simulations complètes : la différence de température moyenne entre les modèles est au maximum de 0,6°C (cf. Figure 5.11(b)).

De la même façon, la vitesse moyenne dans la zone d'occupation est tracée sur la Figure 5.12. Les vitesses moyennes varient de 0,04 à 0,18 m/s. Globalement, le modèle développé ici permet de retrouver la vitesse moyenne obtenue avec des simulations complètes. Seule la configuration n°8

présente un écart important (0,04 m/s) entre le modèle réduit et le modèle complet (mais toute de même acceptable).

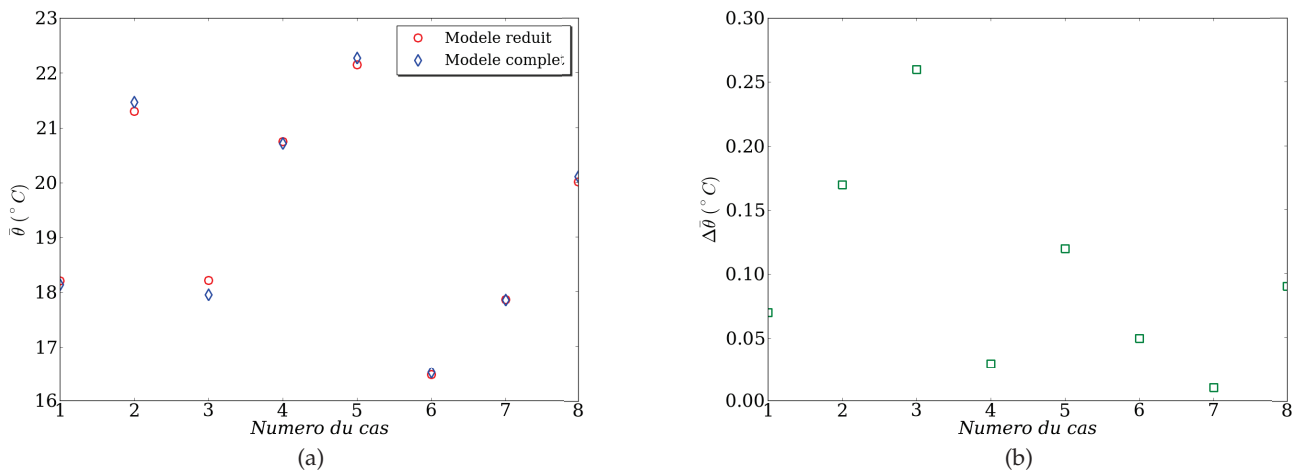


FIGURE 5.11 – (a) Température moyenne (en °C) dans la zone d’occupation en fonction de la configuration testée, (b) Erreur moyenne de la température moyenne (en °C) dans la zone d’occupation en fonction de la configuration testée.

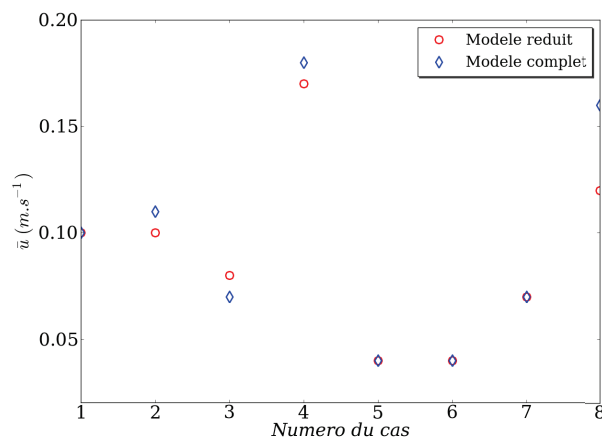


FIGURE 5.12 – Vitesse moyenne (en m.s⁻¹) dans la zone d’occupation en fonction de la configuration testée.

Ces résultats sont plutôt satisfaisants, et laissent espérer qu’une telle stratégie de contrôle pourrait être mise en place sur le cas réel d’un bâtiment.

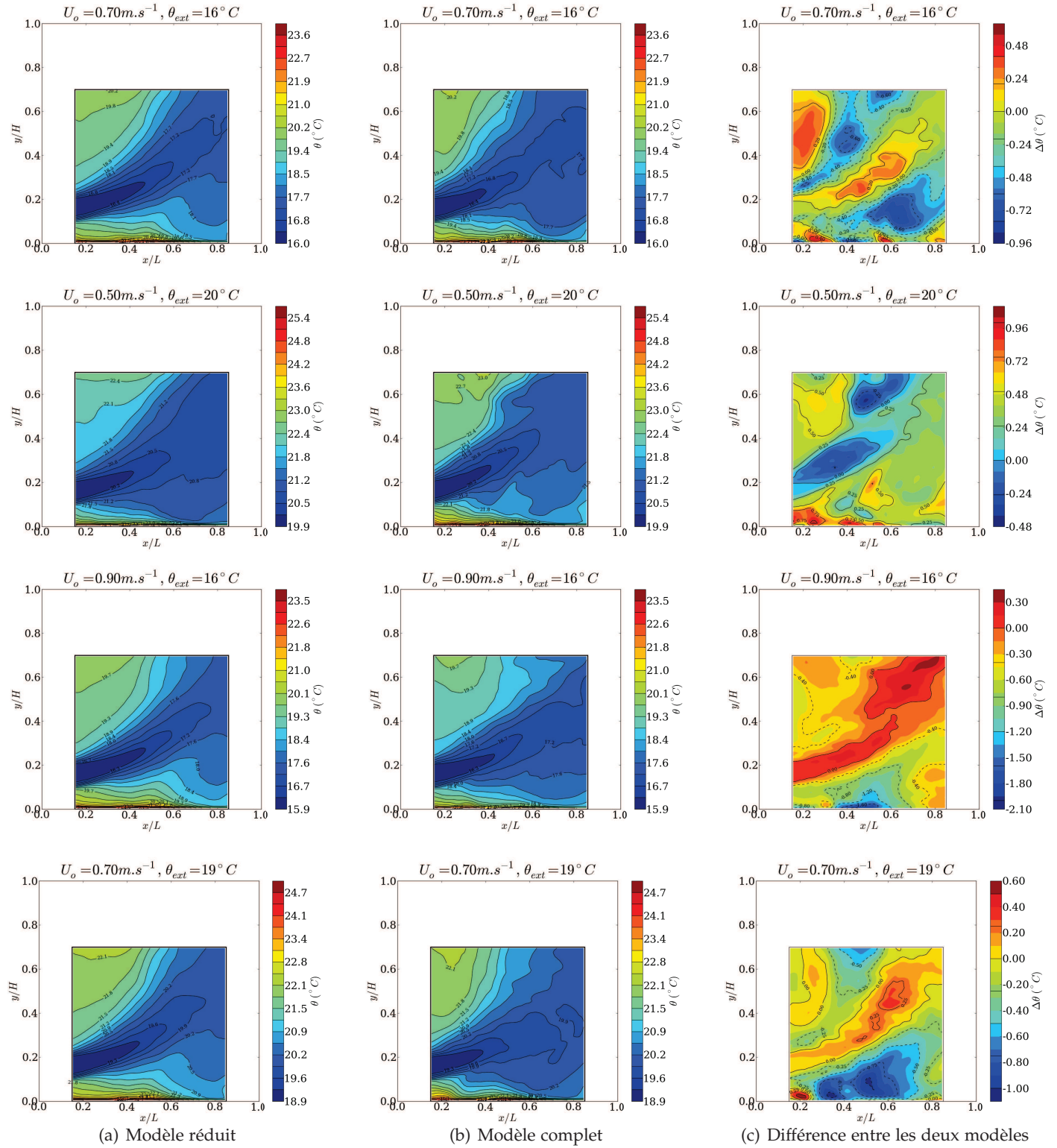


FIGURE 5.13 – Isocontours de température dans la zone d'occupation, à $z = 0,5$, pour les configurations 1 à 4.

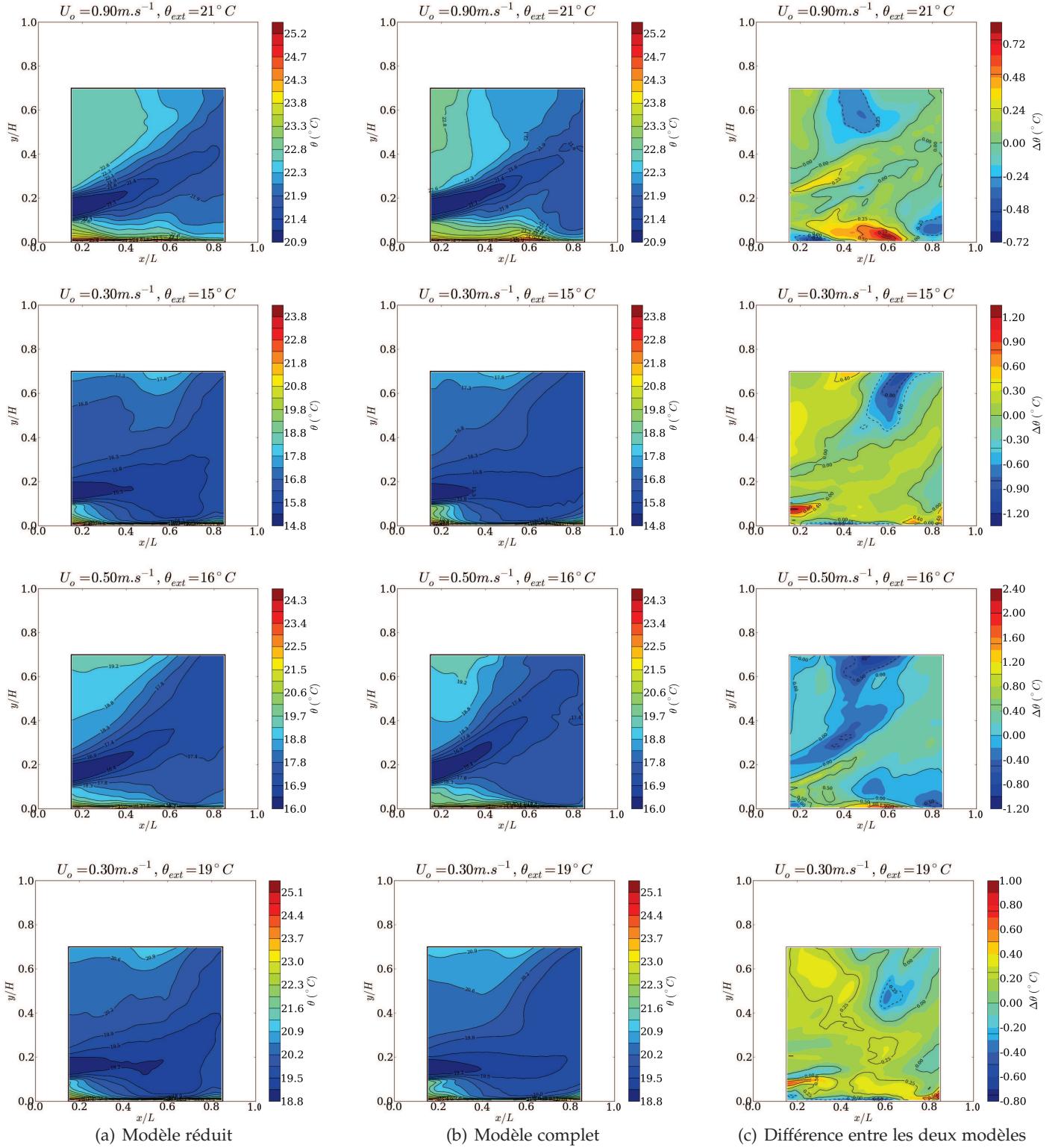
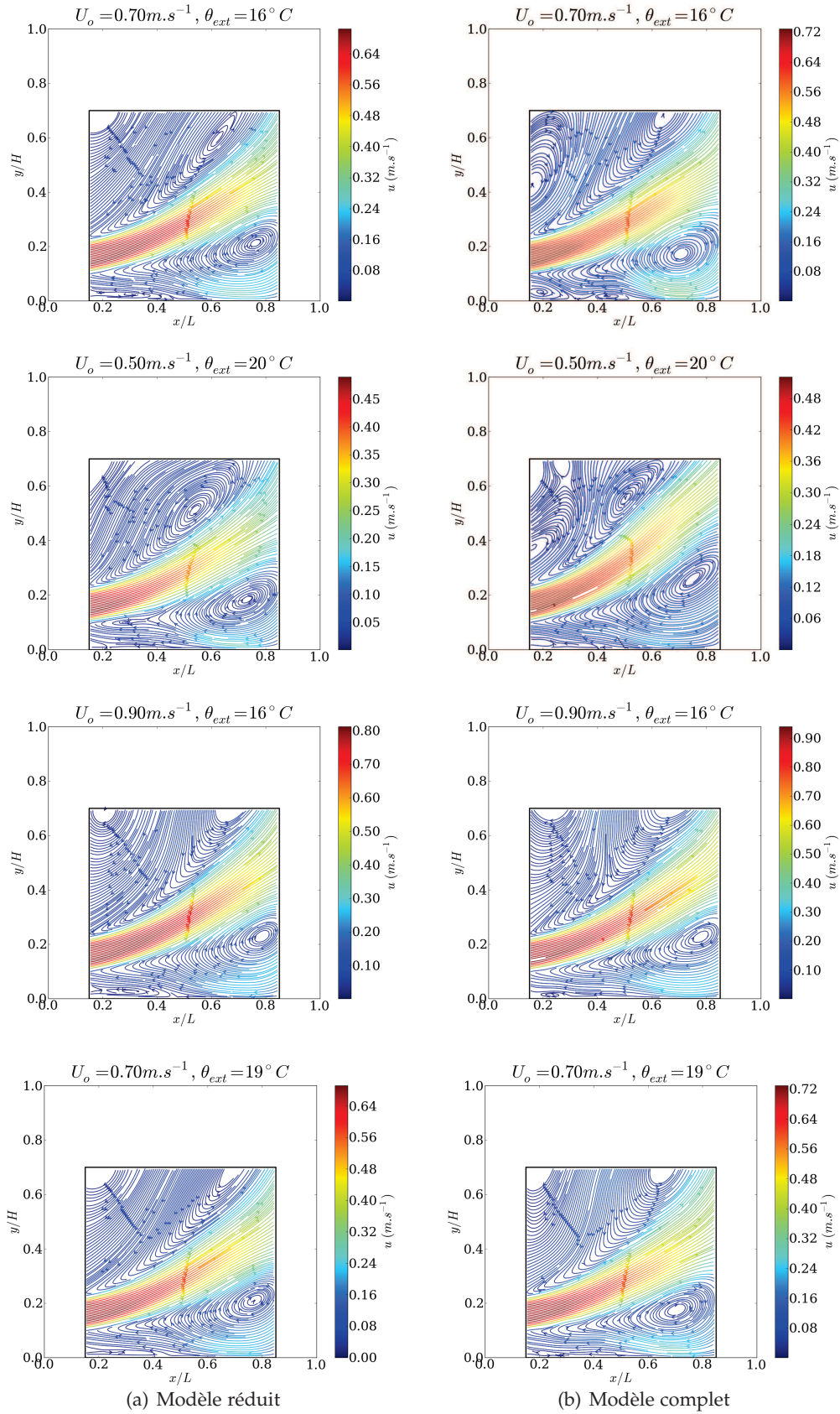
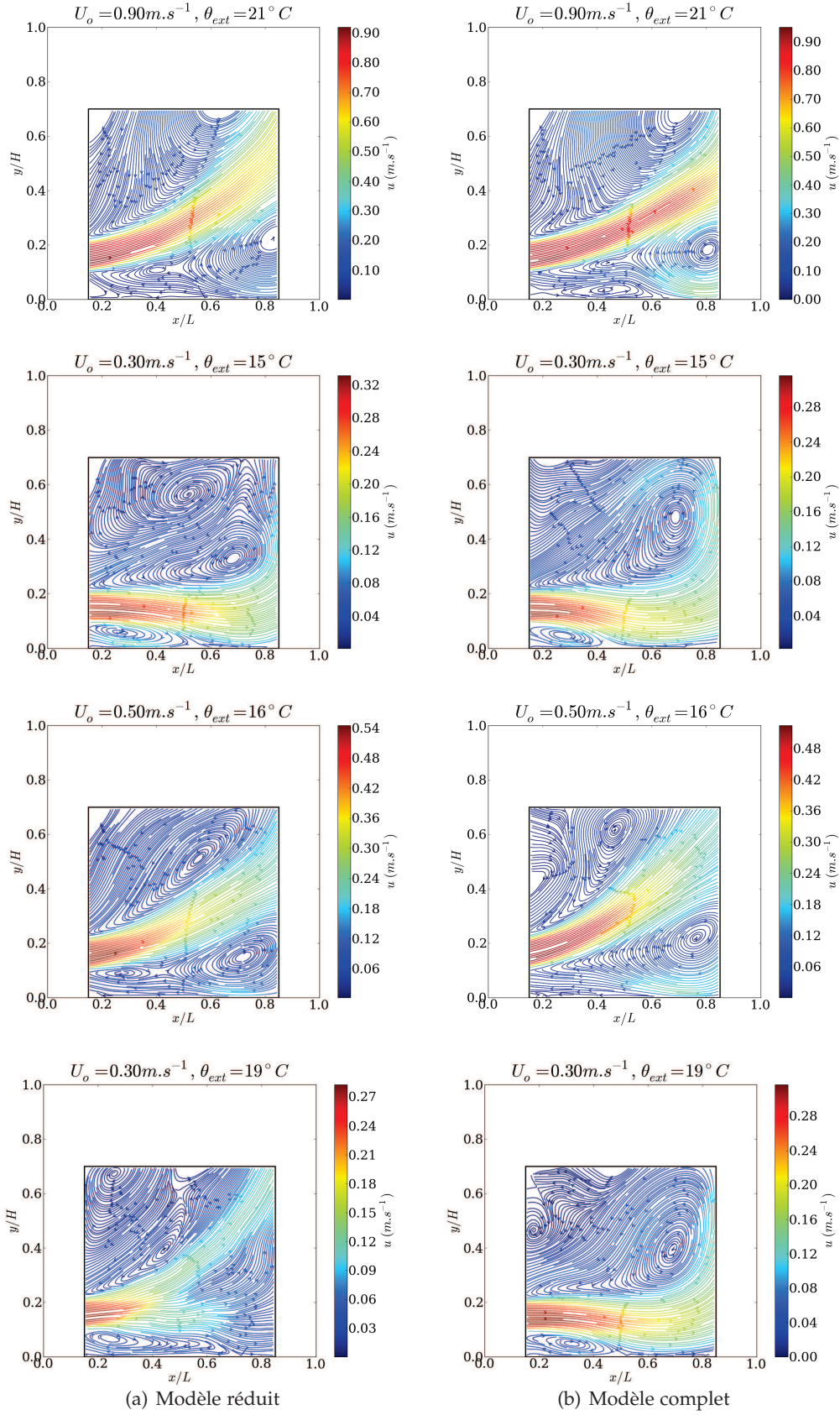


FIGURE 5.14 – Isocontours de température dans la zone d'occupation, à $z = 0,5$, pour les configurations 5 à 8.

FIGURE 5.15 – Lignes de courant dans la zone d'occupation, à $z = 0.5$, pour les configurations 1 à 4.

FIGURE 5.16 – Lignes de courant dans la zone d'occupation, à $z = 0.5$, pour les configurations 5 à 8.

5.6 Conclusion du chapitre

Dans ce dernier Chapitre, nous avons proposé une stratégie de contrôle avec une application directe dans le bâtiment. Celle-ci s'appuie sur les contrôleurs déjà existants. Un des problèmes pour contrôler la température dans un bâtiment est que la température intérieure de la pièce est mesurée au niveau des parois, hors de la zone d'occupation, alors qu'il faudrait justement connaître la température dans cette zone pour pouvoir l'ajuster.

Pour cela, nous avons tout d'abord constitué une base de plusieurs régimes d'écoulement à l'aide de simulations numériques obtenues avec *Code_Saturne*. Les champs de vitesses et de température, dépendant de l'espace, de la vitesse et de la température d'air d'entrée, ont ensuite été décomposés par POD. Puis, nous avons cherché la vitesse d'entrée, à l'aide d'un algorithme d'optimisation (de Levenberg-Marquardt), (et connaissant la température d'entrée d'air) correspondante à la température mesurée avec les capteurs positionnés au niveau des parois (cas similaire à la réalité). Par reconstruction POD, la température dans la zone de contrôle a pu ainsi être obtenu (ainsi que la vitesse).

Cette méthode a tout d'abord été validée avec succès, sur le cas de la cavité différentiellement chauffée : elle est très rapide (environ trois secondes sur un processeur) et nécessite un stockage mémoire faible. Dans un second temps, nous avons considéré une cavité ventilée tridimensionnelle, proche d'un cas réel. Là encore quelques secondes ($< 10s$ sur un processeur) suffisent à obtenir la température et la vitesse dans la zone d'occupation. Huit régimes d'écoulement ont été testés et comparés avec des simulations complètes : les résultats obtenus sont proches du modèle complet (erreur inférieure à 0,2% sur la température).

Pour appliquer la stratégie de contrôle développée ici, il suffirait alors simplement de rajouter dans la programmation des boîtiers de contrôle, l'étape d'estimation de la vitesse d'air (ou du débit d'air en pratique) et l'étape de détermination de la température dans la zone d'occupation. Le contrôle serait alors effectué non plus sur la température mesurée aux parois, mais sur la température dans la zone d'occupation, ce qui faciliterait l'obtention de conditions de confort thermique acceptables, pour les occupants.

Conclusion générale

L'utilisation de la ventilation naturelle, à des fins de rafraîchissement, est motivée par une réduction des coûts engendrés par les systèmes de traitement d'air actifs (air conditionné, climatiseurs) dans les climats chauds (sud de la France métropolitaine et Corse en période estivale, DOM-TOM). Partant de ce constat et devant les difficultés à contrôler la ventilation naturelle, nous avons proposé dans ce manuscrit des stratégies de contrôle en s'appuyant sur des modèles réduits basés sur la POD.

- Le Chapitre 1 a permis de poser les bases de cette étude. Après avoir expliqué les moteurs et les stratégies de ventilation naturelle, une description rapide sur le confort thermique dans les climats tropicaux et méditerranéen a été effectuée, à partir d'expériences présentes dans la littérature. Les études expérimentales permettent de comprendre la physique des phénomènes mis en jeu dans les bâtiments, mais sont souvent fastidieuses, onéreuses, et ne peuvent pas être mises en œuvre systématiquement sur chaque bâtiment. L'orientation vers la modélisation de la ventilation naturelle dans les bâtiments est donc indispensable. Ce chapitre a passé en revue différents types de modèles existants dans la littérature : modèles empiriques, monozones, multizones, zonaux et CFD. Les modèles CFD sont les seuls à prétendre donner avec précision les champs considérés (vitesse, température, concentration, ...), mais requièrent des temps de calcul prohibitifs, un stockage de données important, pour avoir finalement la dynamique de l'écoulement sur un temps très court. Dans ce manuscrit, nous avons donc choisi d'utiliser des modèles d'ordre réduit, qui permettent des temps de calcul adaptés à la physique du bâtiment (temps quasi-réel).

- Le Chapitre 2 est un chapitre consacré à la formulation du problème de contrôle optimal d'écoulement. Le problème initial d'optimisation sous contraintes (équations de Navier-Stokes, équation de convection-diffusion) a été reformulé sous la forme d'un problème d'optimisation sans contrainte, à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Sa résolution se fait à l'aide d'un algorithme de descente basé sur le gradient, généralement avec la méthode de l'équation adjointe. Le problème de contrôle consiste à retrouver le champ scalaire cible $\hat{\theta}(\mathbf{x}, t)$ correspondant au paramètre de contrôle cible α_{cib} . Le champ scalaire cible représente soit une température à atteindre dans une pièce, soit une concentration en polluant à disperser le plus rapidement possible. L'objectif est alors de minimiser l'écart entre la température (resp. la concentration) réelle et la température (resp. la concentration) désirée dans une pièce, en agissant sur le débit d'air d'entrée q_v . Comme mentionné précédemment, cette stratégie de contrôle ne peut être employée avec des modèles CFD (beaucoup trop coûteux en temps de calcul) : il est

donc nécessaire de la coupler avec des modèles d'ordre réduit.

- Le Chapitre 3 a donc été dédié aux modèles d'ordre réduit. Différentes techniques de réduction de modèles, existantes dans la littérature, ont tout d'abord été passées en revue. La décomposition POD étant optimale au sens énergétique, c'est cette méthode que nous avons choisi de retenir dans ces travaux. Après détermination de la base spatiale POD (nécessitant des clichés de l'écoulement), les modèles réduits sont construits par projection des équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion sur les modes POD. Généralement, c'est une projection de type Galerkin qui est utilisée. Cependant, le modèle réduit associé peut s'avérer instable (voire diverger) et le traitement du terme de pression ($(\Phi_i'', \nabla p')$) délicat. Nous avons développé, dans cette étude, une variante de la projection basée sur la minimisation des résidus initialement proposée par Leblond et al. [134], nommée ici respectivement MRP2 et MRP1. Celle-ci permet de modéliser le champ de pression, mais cette fois-ci sans ajouter une équation de Poisson (l'ordre du schéma de différentiation spatiale est ainsi diminué) contrairement au modèle réduit de Leblond et al. Les trois modèles réduits (POD/Galerkin, POD/MRP1 et POD/MRP2) ont été implémentés dans *Code_Saturne*, afin d'utiliser les outils (opérateurs, conditions aux limites) déjà présents dans ce code. Ils ont ensuite été confrontés sur le cas d'une cavité ventilée anisotherme avec polluant et l'écoulement autour d'un cylindre circulaire.

- ✓ Dans le cas du cylindre, le modèle réduit utilisant la projection de Galerkin (Eq 3.33) produit une erreur sur le champ de vitesses, plus de cinq fois supérieure à celle obtenue avec les autres modèles réduits. La comparaison entre les modèles MRP1 et MRP2 a montré que généralement MRP2 présente de meilleurs résultats.

- ✓ Dans le cas de la cavité ventilée avec polluant, les résultats entre les trois ROMs sont similaires : l'influence du terme de pression est donc minime. Notre étude sur le contrôle étant par la suite réalisée uniquement sur les cas de la cavité ventilée ou de cavité fermée (dans ce cas, $(\Phi_i'', \nabla p')$ s'annule exactement), nous avons donc choisi d'utiliser la projection de Galerkin pour construire les modèles d'ordre réduit (moins de termes).

- Le Chapitre 4 a été consacré au couplage entre le problème de contrôle optimal posé dans le Chapitre 2 et les modèles réduits (POD/Galerkin) développés au Chapitre 3. Celui a donc tout d'abord été reformulé sous forme réduite. Afin de rendre explicite les paramètres de contrôle, le champ de vitesses a été décomposé avec la méthode de la fonction de contrôle. Nous avons alors considéré deux méthodes de construction de la base spatiale POD :

- soit à partir de clichés de l'écoulement obtenus avec *un* paramètre (c'est-à-dire à un nombre de Reynolds et un nombre de Grashof fixé), qui a été nommée ici "base POD simple" ;
- soit à partir de clichés d'écoulements obtenus avec *plusieurs* paramètres (plusieurs nombres de Reynolds et/ou nombres de Grashof) ; cette base POD a été appelée dans ce manuscrit "base POD mixte".

Les modèles d'ordre réduit, associés à chacune de ces deux méthodes de construction, ont été ensuite introduits dans une boucle de contrôle non-linéaire. Elles ont été testées sur deux cas tests : la cavité ventilée avec polluant et la cavité entraînée différentiellement chauffée. Dans les deux cas, l'algorithme de contrôle s'avère être rapide (quelques minutes) et fournit des résultats

plutôt cohérents. Le modèle réduit construit avec une base POD "mixte" permet d'augmenter la précision sur la vitesse d'un facteur 3 et d'un facteur 1,5 sur le champ scalaire considéré (concentration ou température), par rapport à un modèle réduit construit avec une base POD "simple". Le contrôle peut ainsi se faire sur une plus large gamme de paramètres (nombres de Reynolds, de Grashoff, ...), contrairement à un modèle d'ordre réduit construit avec une POD à un seul paramètre. Le modèle d'ordre réduit à plusieurs paramètres a de plus l'avantage de pouvoir considérer des paramètres de contrôle n'appartenant pas à l'échantillonnage, tout en obtenant des résultats relativement précis ($< 14\%$ dans le cas de la cavité entraînée). Cependant pour être intégrées dans les boîtiers de contrôle actuels, ces méthodes requièrent encore trop d'espace mémoire (de l'ordre de la dizaine de Mo). Nous avons donc développé dans le chapitre suivant, une autre stratégie de contrôle. En contrepartie, les résultats avec cette méthode sont moins riches (seul l'écoulement moyen est considéré et non des écoulements instantanés) que ceux obtenus dans ce chapitre.

- Le Chapitre 5 a été voué à la recherche d'une autre procédure de contrôle, moins coûteuse en stockage et qui pourrait être mise en place rapidement et directement dans les contrôleurs actuels. L'inconvénient de ces contrôleurs est qu'ils se basent sur des mesures de température sur les parois (positionnés ainsi, pour ne pas être une gêne pour l'occupant) et non sur la température dans la zone d'occupation. Or la température aux parois n'est pas la même que celle dans la zone de contrôle. Afin d'obtenir la température dans la zone de contrôle, nous avons tout d'abord constitué une base de plusieurs régimes d'écoulement à l'aide de simulations numériques obtenues avec *Code_Saturne*. Les champs de vitesses et de température, dépendant de l'espace, de la vitesse et de la température d'air d'entrée, ont ensuite été décomposés par POD. Puis, nous avons cherché la vitesse d'entrée, à l'aide d'un algorithme d'optimisation (de Levenberg-Marquardt), (et connaissant la température d'entrée d'air) correspondante à la température mesurée avec les capteurs positionnés au niveau des parois (cas similaire à la réalité). Par reconstruction POD, la température dans la zone de contrôle a pu ainsi être obtenue (ainsi que la vitesse). Cette méthode a tout d'abord été validée sur le cas test de la cavité entraînée différentiellement chauffée. Les résultats sont convaincants (erreur en température $< 1,5\%$ et en vitesses $< 8\%$), ce qui nous a permis d'envisager un cas plus réaliste : une cavité ventilée 3D possédant une dynamique proche de celle d'une pièce dans un bâtiment ($Re_h \in [1325; 6623]$ et $Ra_h \in [1, 0.10^9; 1, 8.10^9]$). Huit régimes d'écoulement ont été testés et comparés avec des simulations complètes : les résultats obtenus sont proches du modèle de référence (erreur inférieure à $0,2\%$ sur la température). La procédure d'optimisation est très rapide ($< 10s$) et demande un stockage au moins vingt fois moins lourd que les méthodes développées au chapitre précédent. A la vue de ces résultats, une application sur le cas réel d'un bâtiment et une implémentation dans des boîtiers de contrôle peuvent alors être envisagées.

- En perspective de ce travail, nous proposons tout d'abord l'application de la stratégie de contrôle, développée dans le Chapitre 5, dans des conditions réelles du bâtiment. Il suffirait alors simplement de rajouter dans la programmation des boîtiers de contrôle, l'étape d'estimation de la vitesse d'air (ou du débit d'air en pratique) et l'étape de détermination de la température dans la zone d'occupation. Une étude sur le confort thermique des occupants pourrait être ensuite envisagée. Dans cette optique, plutôt que de déterminer un critère d'arrêt sur une température cible dans la zone d'occupation et connaissant la température et la vitesse de l'air dans la zone d'occupation, on pourrait considérer un indice de confort (par exemple, PMV en climat tempéré). Il serait également intéressant d'intégrer un profil d'occupation à notre modèle.

Les résultats obtenus au Chapitre 5 sont effectivement prometteurs, mais le modèle utilisé ne considère qu'un état stationnaire de l'écoulement : la dynamique "temporelle" n'est pas connue. Pour prendre en compte la dynamique, il faut considérer l'approche de contrôle s'appuyant sur les modèles d'ordre réduit, développée au Chapitre 4. Des efforts supplémentaires dans ce sens sont donc à faire. Pour pouvoir espérer les intégrer, il faut augmenter leur domaine de validité. Il serait intéressant de coupler nos algorithmes de contrôle avec des méthodes visant à adapter ou à enrichir les bases POD au fur et à mesure que les paramètres de contrôle évoluent. Des méthodes telles que la PGD ou encore d'interpolation de bases (s'appuyant sur la variété de Grassmann [11]) pourraient alors être considérées. Dans le cas de la PGD, les champs (vitesses, température, ...) seraient donc à décomposer sous la forme suivante :

$$h(\mathbf{x}, t, \alpha_1, \dots, \alpha_q) \approx \sum_{i=1}^N F^i(\mathbf{x}) G^i(t) H_1^i(\alpha_1) \dots H_q^i(\alpha_q) \quad (5.36)$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ représenteraient les q paramètres de contrôle et $F^i(\mathbf{x})$, $G^i(t)$, $H^i(\alpha)$, $\dots$, $H_q^i(\alpha_q)$ des fonctions indépendantes les unes des autres.

Pour finir, les stratégies d'optimisation développées dans ce manuscrit ont été utilisées ici à des fins de contrôle actif des écoulements. Celles-ci pourraient aussi être employées dans la conception d'un bâtiment (forme, espaces intérieurs, positionnement des ouvertures, etc.), afin de bénéficier au mieux de la ventilation naturelle (effet du vent et tirage thermique), ou pour prévoir l'emplacement optimal des capteurs de mesure de température dans une pièce.

Annexes

Table des annexes

A	Description de la classification des climats de Köppen	182
B	Confort thermique	183
B.1	Échanges thermiques entre le corps humain et son environnement	184
B.2	Indices de confort thermique	186
B.2.1	Les indices empiriques	186
B.2.2	Les indices analytiques	187
C	Contrôle linéaire optimal	191
C.1	Définition du système d'état	191
C.2	Propriétés des systèmes d'état	191
C.3	Contrôle LQR	193
C.4	Filtre de Kalman	195
C.5	Contrôle LQG	198
C.6	Théorie du contrôle sur $\mathcal{H}_\infty$ ou Contrôle robuste	200
D	Formulation de la Projection de Galerkin associée à une équation de Poisson .	204
E	Formulation du problème d'optimisation avec un ROM/MRP2	207
E.1	Modèle réduit	207
E.2	Problème d'optimisation réduit	208

A Description de la classification des climats de Köppen

Köppen, climatologue et météorologue est le premier à avoir dressé une cartographie complète des régions climatiques du globe. Avec l'aide du climatologue Geiger, il développe un système de classification basé sur les précipitations et les températures, publié en 1936 [132]. Un climat est ainsi repéré par un code de deux ou trois lettres, Tableau A.9. La première définit le type de climat, la seconde le type de pluviométrie et la troisième les écarts de température durant l'année. La carte de Köppen-Geiger reste aujourd'hui une référence, grâce à ces mises à jour fréquentes.

1ère	2ème	3ème	Description	Critère*
A			TROPICAL	$T_{cold} \geq 18^{\circ}\text{C}$
	f		- Equatorial	$P_{dry} \geq 60\text{mm}$
	m		- Mousson	$\neq (\text{Af}) \ \& \ P_{dry} \geq 100 - \text{MAP}/25$
	w		- Savanne	$\neq (\text{Af}) \ \& \ P_{dry} < 100 - \text{MAP}/25$
B			ARIDE	$\text{MAP} < 10 \times P_{threshold}$
	W		- Desert	$\text{MAP} < 5 \times P_{threshold}$
	S		- Steppe	$\text{MAP} \geq 5 \times P_{threshold}$
		h	- Chaud	$\text{MAT} \geq 18^{\circ}\text{C}$
		k	- Froid	$\text{MAT} < 18^{\circ}\text{C}$
C			TEMPÉRÉ	$T_{hot} > 10^{\circ}\text{C} \ \& \ 0 < T_{cold} < 18^{\circ}\text{C}$
	s		- Été sec	$P_{sdry} < 40\text{mm} \ \& \ P_{sdry} < P_{wwet}/3$
	w		- Hiver sec	$P_{wdry} < P_{swet}/10$
	f		- Sans saison sèche	$\neq (\text{Cs}) \ \text{ou} \ \neq (\text{Cw})$
		a	- Été chaud	$T_{hot} \geq 22^{\circ}\text{C}$
		b	- Été tiède	$\neq (\text{a}) \ \& \ T_{mon10} \geq 4$
		c	- Été froid	$\neq (\text{a}) \ \text{ou} \ (\text{b}) \ \& \ 1 \leq T_{mon10} < 4$
D			CONTINENTAL	$T_{hot} > 10^{\circ}\text{C} \ \& \ T_{cold} \leq 0^{\circ}\text{C}$
	s		- Été sec	$P_{sdry} < 40\text{mm} \ \& \ P_{sdry} < P_{wwet}/3$
	w		- Hiver sec	$P_{wdry} < P_{swet}/10$
	f		- Sans saison sèche	$\neq (\text{Ds}) \ \text{ou} \ \neq (\text{Dw})$
		a	- Été chaud	$T_{hot} \geq 22^{\circ}\text{C}$
		b	- Été tiède	$\neq (\text{a}) \ \& \ T_{mon10} \geq 4$
		c	- Été froid	$\neq (\text{a}) \ \text{ou} \ (\text{b}) \ \text{ou} \ (\text{d}) \ \& \ 1 \leq T_{mon10} < 4$
		d	- Hiver très froid	$\neq (\text{a}) \ \text{ou} \ (\text{b}) \ \& \ T_{cold} < -38^{\circ}\text{C}$
E			POLAIRE	$T_{hot} < 10^{\circ}\text{C}$
	T		- Toundra	$T_{hot} > 0^{\circ}\text{C}$
	F		- Glace	$T_{hot} \leq 0^{\circ}\text{C}$

TABLE A.9 – Classification des climats de Köppen-Geiger, extrait de [159].

* MAP = Mean Annual Precipitation, MAT = Mean Annual Temperature, T_{hot} = température du mois le plus chaud, T_{cold} = température du mois le plus froid, T_{mon10} = nombre de mois où la température est supérieure à 10°C , P_{dry} = précipitation du mois le plus sec de l'année, P_{sdry} = précipitation du mois le plus sec en été, P_{wdry} = précipitation du mois le plus sec en hiver, P_{wwet} = précipitation du mois le plus humide en hiver, $P_{threshold}$ = varie selon les règles suivantes : si 70% de MAP se produit en hiver, alors $P_{threshold} = 2 \times \text{MAT}$, si 70% de MAP se produit en été, alors $P_{threshold} = 2 \times \text{MAT} + 28$, sinon $P_{threshold} = 2 \times \text{MAT} + 14$. L'été (hiver) est défini comme la période la plus chaude (froide) sur six mois.

B Confort thermique

Dans les conditions habituelles, l'homme assure le maintien de sa température corporelle autour de 36,7°C. Cette température est en permanence supérieure à la température de l'air ambiant, aussi un équilibre doit être trouvé afin d'assurer le bien-être de l'individu. Toutefois, la sensation de confort peut aussi être influencée par d'autres éléments comme l'état de santé, l'âge, le sexe, ou l'état psychologique de l'individu. La notion de confort thermique est donc complexe puisqu'elle est essentiellement subjective. De multiples définitions pour le confort thermique existent et il n'est pas aisé d'affirmer laquelle est la plus précise et laquelle traduit le mieux la réponse du corps humain. Fanger [78], en 1970 définit le confort thermique comme un état de satisfaction du corps vis-à-vis de l'environnement thermique. Givoni [92], en 1976 définit le confort thermique comme une absence d'irritation ou d'inconfort dû à la chaleur ou au froid et comme un état agréable. En 1978, O'Callaghan [156] définit le confort thermique comme l'étude de l'impact des effets climatiques sur le corps humain. L'ASHRAE [1], en 2004 donne la définition du confort thermique suivante : "un état de satisfaction du corps vis-à-vis de l'environnement thermique et qui demande une étude subjective".

Les critères de confort les plus couramment utilisés sont basés sur les travaux de Fanger [78]. Ce dernier a développé une théorie selon laquelle le confort thermique dépend de six paramètres ; quatre variables environnementales (température ambiante de l'air, température moyenne de rayonnement, humidité relative, vitesse de l'air) et deux variables comportementales (métabolisme, habillement). Ces six critères sont définis ci-dessous.

Température ambiante de l'air (t_a) La température ambiante de l'air correspond naturellement à la température autour du corps humain. Elle se mesure généralement à l'aide de thermocouples.

Température moyenne de rayonnement ($\bar{t}_r$) La température moyenne de rayonnement est la température des parois d'une enceinte virtuelle pour laquelle la température des parois serait uniforme et les échanges par rayonnement entre cette enceinte et l'homme seraient égaux aux échanges par rayonnement dans l'enceinte réelle.

Humidité relative de l'air (HR) L'humidité relative de l'air correspond au rapport exprimé en pourcentage entre la quantité d'eau contenue dans l'air à la température t_a et la quantité maximale d'eau pouvant être contenue à la même température lorsque l'air est saturé. Cette grandeur s'exprime en pourcentage, en fonction de la pression partielle de vapeur d'eau p_a et la pression de vapeur saturante p_{sat} :

$$HR(\%) = \frac{p_a}{p_{sat}} \quad (B.1)$$

Vitesse de l'air (v_a) La vitesse de l'air influence les échanges de chaleur par convection. Elle s'exprime en $m.s^{-1}$.

Métabolisme (M) Il s'agit de la production de chaleur interne au corps humain permettant de maintenir celui-ci autour de 36,7°C. Une unité appelée "met" a été créée pour caractériser le

métabolisme ($1 \text{ met} = 58,15 \text{ W.m}^{-2}$). Le métabolisme augmente avec l'activité, à titre d'exemple, le Tableau B.10 montre quelques valeurs du métabolisme en fonction de l'activité exercée.

Activité	Métabolisme (M)	
Repos, allongé	46 (W.m^{-2})	0,8 (met)
Relaxé, assis	58	1
Activité sédentaire (bureau, maison, école, ...)	70	1,2
Activité légère, debout (courses, laboratoire, ...)	93	1,6
Activité moyenne, debout (ménage, travail sur machine)	116	2,0
Activité soutenue (bricolage, lourds travaux, ...)	165	2,8

TABLE B.10 – Métabolisme en fonction de l'activité [15]

Vêtire (I_{cl}) L'habillement représente une résistance thermique aux échanges de chaleur entre la surface de la peau et l'environnement. Le niveau d'habillement des occupants est caractérisé par une valeur relative, exprimée en "clo" ($1 \text{ clo} = 0,155 \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$). Le Tableau B.11 donne quelques valeurs de l'habillement en fonction de la tenue vestimentaire portée.

Tenue vestimentaire	Vêtire (I_{cl})	
Nu	0 ($\text{m}^2.\text{K.W}^{-1}$)	0 (clo)
Tenue tropicale type (short, chemise à manches courtes, chaussettes légères et sandales)	0,045	0,3
Tenue d'été légère (pantalon léger, chemise à manches courtes, chaussettes légères et chaussures)	0,08	0,5
Tenue de travail légère (chemise de travail à manches longues, pantalon, chaussettes de laine et chaussures)	0,11	0,7
Tenue d'intérieur pour l'hiver (pantalon, pull-over à manches longues, chaussettes épaisses et chaussures)	0,16	1,0
Tenue de ville traditionnelle (complet avec pantalon, gilet, chemise, chaussettes de laine et grosses chaussures)	0,23	1,5

TABLE B.11 – Valeurs de la vêtire (I_{cl}) en fonction de la tenue vestimentaire [15]

B.1 Échanges thermiques entre le corps humain et son environnement

L'échange de chaleur entre le corps et son environnement se produit avec l'air ambiant et les surfaces environnantes respectivement par convection et par rayonnement. La chaleur du corps s'évacue de plus par évaporation de la sueur et de l'eau contenue dans les poumons. La Figure B.17 montre les différents échanges énergétiques entre le corps humain et son environnement. Le bilan thermique du corps humain s'écrit alors de la manière suivante, [78] :

$$S = M - W + R + C + K - E - RES \quad (\text{B.2})$$

où S est la chaleur thermique dans le corps, c'est-à-dire la différence entre la quantité de chaleur produite et la quantité de chaleur dissipée. Si $S > 0$ la température du corps augmente alors que si $S < 0$ elle diminue. Pour $S = 0$, le corps est thermiquement neutre. M représente le métabolisme, W le travail mécanique, R le rayonnement, C la convection, K la conduction par les vêtements. E et RES représentent respectivement les déperditions par l'évaporation et la respiration. Le phénomène d'évaporation est limité par le débit sudoral¹⁴, puisqu'il n'est pas possible d'évaporer plus de sueur que l'organisme peut en produire. Il est également limité par l'humidité de l'air, puisqu'elle conditionne le gradient de pression de vapeur d'eau. Toutes ces grandeurs s'expriment en $W.m^{-2}$ et sont définies rigoureusement par exemple dans [15].

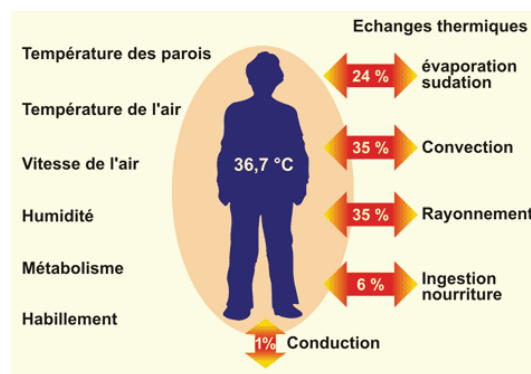


FIGURE B.17 – Interaction thermique entre le corps humain et son environnement.

La température de la peau affecte également les échanges de chaleur entre le corps humain et son environnement de deux façons : en modifiant l'échange de chaleur sèche par convection et rayonnement et en déterminant la capacité d'évaporation du corps sous les conditions ambiantes de pression de vapeur et de vent. Ce dernier point est important en ambiance chaude. La température de la peau est issue des échanges thermiques locaux entre le corps humain et son environnement. Ces échanges sont fonction de l'organisme (physiologiques ou physiques), du microenvironnement (vêtements, ...) et de l'environnement (humidité, température, vitesse de l'air, ...).

La mouillure cutanée est un paramètre important en climat chaud. Elle est définie comme le rapport entre la surface de peau mouillée et la surface de peau totale. La valeur maximale de la mouillure cutanée est égale à 1, elle correspond au cas où toute la surface du corps est mouillée. Généralement, la mouillure cutanée est comprise entre 0,06 et 1, [26]. Deval [68] montre qu'une sensation d'inconfort se manifeste dès que la température dépasse 28-29°C et que la mouillure atteint 25-30%, pour une vitesse d'air de $0,25 m.s^{-1}$. A partir des travaux du CNRS, Fauconnier et son équipe ont estimé des zones de confort en fonction des variations de la mouillure cutanée et du débit sudoral (D_s) (activité et type de vêtement non précisés). Le schéma (Fig B.18) établi par [183], reporte les résultats obtenus. D'après ces résultats, l'individu est dans une situation très désagréable à partir de 25 % de mouillure cutanée.

¹⁴Le débit sudoral correspond au volume (ou masse) de sueur émis en une heure.

Mouillure cutanée	25 %	4	4	4	4
	15 %	3	3	3	4
	6 %	2	2	2	4
		1	2	3	4
		0	50	100	250
		Debit sudoral (g/h)			

FIGURE B.18 – Zones de confort d'après les travaux de Fauconnier (1 : agréable, 2 : légèrement désagréable, 3 : désagréable, 4 : très désagréable), extrait de [183].

B.2 Indices de confort thermique

La plupart des indices de confort thermique ont été développés au milieu du XXème siècle, à la fois empirique et analytique, principalement pour définir les limites de confort. De nombreux indices de confort sont présents dans la littérature, il est répertorié ici de manière non-exhaustive les indices de confort les plus couramment utilisés et applicables pour des climats chauds.

B.2.1 Les indices empiriques

Température opérative t_o La température opérative (appelée également température résultante), introduite par Winslow [206], est définie comme "la température uniforme dans une enceinte virtuelle dans laquelle l'occupant échangerait la même énergie par rayonnement et par convection que dans un environnement réel et non-uniforme". Elle s'écrit en fonction de la température de l'air (t_a) et la température moyenne de rayonnement ($\bar{t}_r$) pondérée par leurs coefficients d'échange de chaleur respectifs (h_c et h_r) :

$$t_o = \frac{h_c t_a + h_r \bar{t}_r}{h_c + h_r} \quad (\text{B.3})$$

Température opérative humide WBGT Il existe également l'indice de température opérative humide WBGT (*Wet Bulb Glob Temperature*), développé par Yaglou et Minard [210] pour estimer la contrainte thermique en ambiance chaude. Cet indice permet de faire une évaluation simplifiée de la contrainte thermique grâce à une analogie physique entre les échanges thermiques du corps humain et ceux d'un dispositif de thermomètres humides et de thermomètres à globe noir. En notant t_w la température humide, l'indice WBGT s'exprime à l'intérieur d'un bâtiment, sous la forme :

$$\text{WBGT} = 0,7 t_w + 0,3 t_o \quad (\text{B.4})$$

Température effective ET^* La température effective notée ET^* , introduite par Houghton et Yaglou [115] puis re-caractérisée par l'ASHRAE [13] est définie comme la température uniforme dans une enceinte virtuelle avec un taux d'humidité relative de 50%, dans laquelle un occupant échangerait la même quantité de chaleur et aurait la même mouillure cutanée que dans une situation réelle. L'indice ET^* prend en compte les effets de la température ($t_a, \bar{t}_r$) et de l'humidité (HR aussi équivalent à p_a). L'ASHRAE [13] a établi des échelles de confort basées sur cet indice pour des sujets ayant une vêtue légère (0,6 clo), une activité sédentaire (≈ 1 met) et dans une ambiance calme ($0,2 m.s^{-1}$).

L'indice de confort équatorial ECI L'indice de confort équatorial (ECI pour *Equatorial comfort index*) est un développement de "l'indice de Singapour" (*Singapore Index (SI)*) introduit par [202]) par Webb en 1960, [203]. Il est défini comme la température d'une atmosphère toujours saturée qui est physiologiquement adaptée au climat en question. Il dépend de l'humidité de l'air et du vent (vitesse de l'air), paramètres climatiques essentiels à prendre en compte pour des climats tropicaux, selon Sangkertadi [183]. En revanche, l'indice ECI ne prend pas en compte le rayonnement et est valable pour un sujet acclimaté au région tropical humide et pour une température supérieure à 24°C. La corrélation de l'indice ECI est donnée par la relation suivante, [146] :

$$Y = 0,501.ECI - 5,234 \quad (B.5)$$

$$\text{avec } ECI = 0,574.t_a + 2,033.p_a - 1,81.v_a^{0,5} + 4,2 \quad (B.6)$$

où Y est la valeur adimensionnelle variant de -3 à 3 associée à l'indice ECI ¹⁵.

Le Tropical Summer Index TSI Le Tropical Summer Index TSI a été développé dans le milieu des années 1980, par Sharma et al. [187], afin de déterminer les conditions de confort acceptables en période chaude-sèche et tiède-humide en Inde. Semblable à l'indice ECI , il est défini comme la température, à air calme et à 50 % d'humidité (l' ECI considère 100 %), qui provoque la même sensation thermique qu'un environnement donné. L'indice TSI est obtenu via la relation linéaire suivante :

$$TSI = 1/3.WBGT + 3/4.GT - 2.v_a^{0,5} \quad (B.7)$$

où GT représente la température du globe, exprimée en °C.

B.2.2 Les indices analytiques

Température standart effective SET^* La température standart effective SET^* (*Standard Effective Temperature*) représente la température sèche équivalente d'une enceinte isotherme à 50 % d'humidité relative, dans laquelle un sujet, portant une vêtue standardisée par rapport à son activité, échangerait la même quantité de chaleur et aurait la même mouillure cutanée que dans l'enceinte réelle dans laquelle il se trouve. La vêtue standardisée est définie par Gagge et al. [83], selon l'équation suivante :

$$I_{cls} = \frac{1,33}{M - W + 0,74} - 0,095 \quad (B.8)$$

¹⁵L'échelle de -3 à 3 est directement liée à celle du PMV, définie par Fanger [78] et explicitée à la section suivante.

L'évaluation du SET^* requiert deux étapes. La première est de trouver la température de la peau et la mouillure cutanée de l'individu à partir du modèle de thermorégulation à deux noeuds de Gagge et al., [83]. La deuxième étape consiste à trouver la température d'un environnement standard qui génère les mêmes valeurs de température et de mouillure à partir de l'analyse des transferts de chaleur du corps. L'indice SET^* est donc fonction du niveau d'activité, des caractéristiques d'isolation des vêtements et des variables physiques de l'environnement. La valeur du SET^* est directement liée à la sensation et non à la température de l'air. La Tableau (B.12) montre la correspondance entre la valeur du SET^* , la sensation thermique et l'état physiologique, [143, 158]. Une échelle de sensation thermique TSENS (*Thermal Sensation Scale*) est reliée au SET^* et au niveau de confort par le Tableau (B.13), établi à partir des travaux de [96] et repris par [183].

SET^* (°C)	Sensation	Etat physiologique d'un individu sédentaire
> 37,5	Extrêmement chaud, inconfortable	Défaillance de la régulation
34,5 – 37,5	Très chaud, très inacceptable	Sueur abondante
30,0 – 34,5	Chaud, inconfortable, inacceptable	Sueur
25,6 – 30,0	Légèrement chaud, légèrement inacceptable	Sueur faible, vasodilatation
22,2 – 25,6	Confortable et acceptable	Neutralité
17,5 – 22,2	Légèrement frais, légèrement inacceptable	Vasoconstriction
14,5 – 17,5	Frais et inacceptable	Refroidissement lent du corps
10,0 – 14,5	Froid et très inacceptable	Frisson

TABLE B.12 – Correspondance entre SET^* , sensation et état physiologique, [143, 158]

SET^*	TSENS		Niveau de confort
40°C			limite de tolérance
	très chaud	→ 4	très inconfortable
35°C	chaud	→ 3	inconfortable
	tiède	→ 2	légèrement inconfortable
30°C	légèrement tiède	→ 1	
	neutre	→ 0	confortable
25°C	légèrement frais	→ -1	
	frais	→ -2	légèrement inconfortable
20°C			
	froid	→ -3	
15°C			
	très froid	→ -4	inconfortable

TABLE B.13 – Correspondance entre SET^* , TSENS et niveau de confort, [96]

Les indices DISC Dans une ambiance où la température et l'humidité de l'air sont élevées (typique des climats tropicaux), la mouillure cutanée (ω) et le débit sudoral sont des facteurs physiologiques importants. L'indice DISC (pour *DISComfort*) est une valeur adimensionnelle fonction de la mouillure cutanée, introduit par Winslow et al. en 1937, [206]. Il varie de 0 à 4 (Tab B.14). D'autres auteurs ont également proposé des corrélations linéaires de l'indice DISC pour un in-

Agréable	Légèrement désagréable	Désagréable	Inconfortable	Intolérable
0	1	2	3	4

TABLE B.14 – Echelle numérique adimensionnelle pour l'ambiance chaude (DISC), [83]

dividu avec une vêtue légère (environ 0,5 clo) et une activité sédentaire (environ 1,1 met). Elles sont répertoriées dans le Tableau (B.15). Sangkertadi [183] compare les résultats de Berglund et

Auteurs	Corrélations linéaires
Berglund et al. [26]	$DISC = 4,13\omega + 0.013$
Cunningham et al. [61]	$DISC = 5,06\omega + 0.09$
Hoeppe et al. [113]	$DISC = 3,6\omega + 0.25$
Sangkertadi [183]	$DISC = 3,9338\omega + 0,0158Ds - 0.3348$

TABLE B.15 – Indices DISC selon les auteurs. ω représente la mouillure cutanée et Ds le débit sudoral.

al. [26], Cunningham et al. [61] et Hoeppe et al. [113] avec ceux obtenus par Fauconnier (Figure B.18). Il observe alors que le modèle proposé par ce dernier est plus sensible aux variations de la mouillure cutanée. En effet, les trois autres modèles [26, 61, 113] montrent que l'individu est dans une zone d'inconfort (indice DISC = 4) à partir de 75 % de mouillure cutanée, alors que Fauconnier obtient 25 %. Enfin, Sangkertadi propose une expression du DISC en fonction de la mouillure cutanée ω et du débit sudoral Ds , établie à partir des résultats expérimentaux en zone tropicale humide de De Dear [64, 65] et de Deval [68].

L'indice PMV L'indice PMV (*Predicted Mean Vote - Vote Moyen Prévisible*) a été introduit par Fanger en 1970, [78]. C'est un indice couramment utilisé mais destiné plutôt à des climats froids et tempérés. Fanger stipule ainsi trois conditions nécessaires pour accéder au confort thermique, [15] :

- Le corps humain doit être en équilibre thermique avec son environnement
- La sensation thermique est liée à la température de la peau et ainsi, la température moyenne de la peau doit être à un niveau approprié
- Il doit y avoir un taux de transpiration préférentiel sachant que le taux de transpiration augmente avec le métabolisme

En appliquant ces trois critères de confort et en utilisant l'équation (Eq. B.2), Fanger obtient une fonction de confort thermique dépendant des quatre paramètres environnementaux et des deux paramètres comportementaux définis auparavant, plus le travail des efforts extérieurs W :

$$f(M, W, I_{cl}, t_a, \bar{t}_r, v_a, p_a) = 0 \quad (B.9)$$

A partir de cette fonction, il introduit le PMV^{16} :

$$PMV = \left(0,303.e^{-0,036M} + 0.028\right) L \quad (B.10)$$

où M est le métabolisme et L représente l'écart dans le bilan thermique entre chaleur produite et perdue. Ainsi, cet indice permet de prévoir la valeur moyenne des votes d'un nombre important de personnes exposées à une même ambiance thermique. Il situe leurs sensations sur une échelle à sept points, allant de très froid à très chaud (Tab. B.16). Il est à noter que l'indice PMV est uniquement applicable lorsque le corps humain est en équilibre thermique avec son environnement.

Très froid	Froid	Légèrement froid	Neutre	Légèrement chaud	Chaud	Très chaud
-3	-2	-1	0	+1	+2	+3

TABLE B.16 – Echelle de sensation thermique selon l'indice PMV

Remarque Le PMV ne permet pas de déterminer le pourcentage de personnes insatisfaites. Il était intéressant, dans une population donnée, de calculer le nombre de personnes insatisfaites correspondant au PMV de confort. Fanger [78] introduit alors un deuxième indicateur : le PPD (*Predicted Percentage of Dissatisfied* - Pourcentage Prévisible d'Insatisfaits) qui est dépendant du PMV :

$$PPD = 100 - 95 \exp \left\{ -(0,03353 PMV^4 + 0,2179 PMV^2) \right\} \quad (B.11)$$

Un PMV nul, soit un $PPD = 5\%$ d'après l'équation (Eq. B.11), correspond aux conditions optimales de neutralité thermique du corps humain : 5% des personnes seront alors toujours insatisfaites thermiquement.

Cependant comme mentionné auparavant, l'indice PMV a été établi pour des climats tempérés et froids. Berger et al. [24] montre que le PMV semble être surestimé pour une humidité faible (< 20 %) et sous-estimé pour une humidité élevée (> 80 %). Il est vrai qu'en climat chaud, un sujet habitué à vivre dans des ambiances chaudes pourra tolérer des températures plus élevées. Jannot et al. [120] considèrent qu'un PMV inférieur à +1,5 est acceptable en zone tropicale.

Gagge et al. [83] proposent de remplacer dans le calcul du PMV la température opérative par la température effective ET^* , afin de mieux prendre en compte les effets de l'humidité dans les climats chauds et humides. Cet nouvel indice PMV est noté PMV^* . Ainsi, cet indice modifié a une sensibilité plus importante à l'humidité dans la zone chaude, tout en laissant la même valeur dans la zone de neutralité et au-dessous.

¹⁶L'expression complète de l'indice PMV ne sera pas explicitée ici par soucis de clarté et se trouve par exemple dans [15] page 15.

C Contrôle linéaire optimal

Lorsque le système d'état (Eq 2.1) peut s'écrire sous forme linéaire ou est linéarisable, la théorie du contrôle linéaire peut être appliquée. Les méthodes de contrôle linéaire ont été initialement développées par les automaticiens dans le cadre de la théorie du contrôle, [130, 99, 218]. Deux approches peuvent être utilisées : la théorie du contrôle sur $\mathcal{H}_2$, appelée également contrôle optimal et la théorie du contrôle sur $\mathcal{H}_\infty$, appelée également contrôle robuste. La première approche est décrite dans cette section et la deuxième en Annexe C.6, mais ne prétendent pas redémontrer rigoureusement les différentes théories du contrôle linéaire : voir par exemple pour plus de détails, [130, 111] pour le contrôle sur $\mathcal{H}_2$ et [99, 218] pour le contrôle sur $\mathcal{H}_\infty$.

C.1 Définition du système d'état

La théorie du contrôle linéaire a pour objet la détermination d'une loi de contrôle $\mathbf{c}$, utilisant les observables $\mathbf{y}$, telle que les fonctions d'état $\mathbf{x}$ tendent vers 0. Supposons en première approche que le système ne subit aucune perturbation. Les systèmes linéaires, ou linéarisés autour d'un point de fonctionnement (théorème de Hartman-Grobman), peuvent être décrits par un système différentiel vectoriel du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur d'état d'entrée appartenant à $\mathbb{R}^N$, $\mathbf{c}$ le vecteur de contrôle de taille M , $\mathbf{y}$ le vecteur d'état de sortie de taille R . $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ représente la matrice du système dynamique, $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{N \times M}$ la matrice d'entrée, $\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{R \times N}$ la matrice de sortie et $\mathbf{D}(t) \in \mathbb{R}^{R \times M}$ la matrice de retour.

C.2 Propriétés des systèmes d'état

Au préalable, il est nécessaire de vérifier certaines propriétés du système d'état : sa contrôlabilité et son observabilité, [29, 111].

Contrôlabilité Un état est dit *contrôlable* si l'on peut l'amener à une valeur désirée en un temps fini. Dans le cas contraire, on dit qu'il est non contrôlable. Un état est dit *complètement contrôlable* si chaque état $\mathbf{x}$ peut être amené à un état désiré en un temps fini. Ainsi le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

est contrôlable sur un intervalle de temps fini $[t_0, t_f]$ si il existe une variable de contrôle $\mathbf{c}$ qui conduit le système d'un état initial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ à un état final $\mathbf{x}(t_f)$. Il existe deux façons de déterminer la contrôlabilité d'un système :

1. Via la matrice de contrôlabilité définie par :

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

C'est une matrice $N \times N$. Le système est *contrôlable* si et seulement si la matrice $\mathbf{M}_C$ est de *rang maximal*, égal à N .

2. A partir du grammien de la contrôlabilité défini par :

$$\mathbf{W}_C(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \varphi^T(t_0, t) dt \quad (\text{C.15})$$

Le système est *contrôlable* si et seulement si le grammien de contrôlabilité est *défini positif*.

Remarque : Pour un système LTI (*Linear Time-Invariant*), c'est-à-dire que les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ définies dans le système (Eq C.12) sont indépendantes du temps, la matrice de transition est :

$$\varphi(t, \tau) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}$$

Ainsi, le grammien de contrôlabilité devient :

$$\mathbf{W}_C(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_0-t)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-t)} dt$$

Si $t_0 = 0$ alors :

$$\mathbf{W}_C(0, t_f) = \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} dt$$

Observabilité Un système d'ordre N est *observable* si pour chaque état initial inconnu $\mathbf{x}_0$, il existe un temps fini T tel que la connaissance du vecteur $\mathbf{y}$ sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ suffit pour déterminer de manière unique l'état initial $\mathbf{x}_0$. Dans le cas contraire, le système est dit non observable. Ainsi, le système linéaire (Eq C.12)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

est observable si l'état $\mathbf{x}$ peut être déterminé de manière unique à partir des mesures $\mathbf{y}$. Il existe comme pour la contrôlabilité deux méthodes de déterminer l'observabilité du système :

1. Via la matrice d'observabilité définie par :

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

C'est une matrice $N \times N$. Le système est *observable* si et seulement si la matrice $\mathbf{M}_O$ est de *rang maximal*, égal à N .

2. A partir du grammien d'observabilité défini par :

$$\mathbf{W}_O(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi^T(t, t_0) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{C}(t) \varphi(t, t_0) dt \quad (\text{C.17})$$

Le système est *observable* si et seulement si le grammien d'observabilité est *défini positif*.

Remarque : Pour un système LTI et si $t_0 = 0$ alors le grammien d'observabilité devient :

$$\mathbf{W}_O(0, t_f) = \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} dt$$

Le régulateur LQR (*Linear Quadratic Regulator*) qui permet d'accéder au contrôle du système est tout d'abord décrit. Le Filtre de Kalman qui permet d'estimer l'état du système est ensuite explicité. Enfin, la théorie LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) qui combine régulateur LQR et Filtre de Kalman est développée. Afin de simplifier les calculs, $\mathbf{D}(t)$ est considéré à présent nul. Le système d'état (Eq C.12) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

C.3 Contrôle LQR

HYPOTHÈSE : Le système (Eq C.18) ne subit aucune perturbation extérieure et l'état du système peut être déterminé par les mesures $\mathbf{y}$ de manière exacte. Dans ce cas, il y a aucune nécessité à estimer l'état du système (car $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t)$)¹⁷. Le système suivant est considéré :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

La fonctionnelle coût donnée par l'équation 2.2 s'écrit dans la théorie du contrôle linéaire quadratique, avec une pondération finale, de la manière suivante :

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{c}(t), t) dt \quad (\text{C.20})$$

$$\text{où} \quad \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S}(t_f) \mathbf{x}(t_f) \quad (\text{C.21})$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}(t), \mathbf{c}(t), t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{c}^T \mathbf{R}_2(t) \mathbf{c}(t) \right) \quad (\text{C.22})$$

Les termes $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1(t) \mathbf{x}(t)$ et $\frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{R}_2(t) \mathbf{c}(t)$ peuvent être vus respectivement, comme une mesure de l'énergie du système et de l'énergie de contrôle. Les matrices $\mathbf{S}(t_f)$, $\mathbf{R}_1(t)$ et $\mathbf{R}_2(t)$ sont des matrices de pondération. $\mathbf{S}(t_f)$ et $\mathbf{R}_1(t)$ sont définies symétriques semi-positives et $\mathbf{R}_2(t)$ est définie symétrique positive. Celles-ci vont déterminer l'influence de chaque composante individuelle des vecteurs d'état $\mathbf{x}$ ou de contrôle $\mathbf{c}$ sur les autres composantes. Les équations d'état étant linéaires, la fonctionnelle objectif quadratique et le but étant d'amortir des perturbations, la méthode est appelée **LQR** pour *Linear Quadratic Regulator*.

¹⁷ $\hat{\mathbf{x}}(t)$ correspond à l'état estimé du système (cf. §C.4).

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Le contrôle est construit en minimisant la fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}$ définie par l'équation 2.4 et qui devient, après introduction des expressions de la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ (Eq C.20) et du système d'état $\mathcal{F}$ défini par l'équation C.19 :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S}(t_f) \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{c} \right) dt - (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{C.23})$$

En utilisant l'expression du système optimal dans le cadre général (Eq 2.10) définie à la section §2.2.3 et en l'adaptant au contrôle LQR, le système optimal propre à ce dernier est alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{c} & \text{Equation d'état} & (\text{C.24a}) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\xi} - \mathbf{R}_1 \mathbf{x} & \text{Equation adjointe} & (\text{C.24b}) \\ \mathbf{R}_2 \mathbf{c} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\xi} = 0 & \text{Condition d'optimalité} & (\text{C.24c}) \end{cases}$$

D'après la condition d'optimalité (Eq C.24c), le contrôle $\mathbf{c}$ peut être exprimé de la manière suivante :

$$\mathbf{c}(t) = -\mathbf{R}_2^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (\text{C.25})$$

Ainsi, en combinant les équations C.24a, C.24b et C.25, le système matriciel suivant, nommé *équations d'Hamilton*, est obtenu :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{B}(t) \mathbf{R}_2^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ -\mathbf{R}_1(t) & -\mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

Il est possible de démontrer à l'aide de la théorie du calcul des variations que les conditions aux limites sur $\boldsymbol{\xi}$ (voir par exemple [40] ou [111]) sont données par :

$$\boldsymbol{\xi}(t_f) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \quad (\text{C.27})$$

En injectant la définition de $\Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f)$ (Eq C.21), la condition finale suivante sur l'état adjoint est obtenue :

$$\boldsymbol{\xi}(t_f) = \mathbf{S}(t_f) \mathbf{x}(t_f) \quad (\text{C.28})$$

Equation de Riccati

Burl [45] montre que le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\xi}$ doit être proportionnel à l'état $\mathbf{x}$, par une matrice inconnue fonction du temps, nommée ici $\mathbf{P}(t)$:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (\text{C.29})$$

Ainsi, cette dernière équation permet d'obtenir une expression où le vecteur contrôle $\mathbf{c}$ dépend explicitement du vecteur d'état $\mathbf{x}$; le contrôle est en boucle fermée :

$$\mathbf{c}(t) = -\mathbf{R}_2^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (\text{C.30})$$

Il reste cependant à déterminer la matrice $\mathbf{P}(t)$. Pour cela, l'équation (Eq C.29) est tout d'abord dérivée en fonction du temps :

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{C.31})$$

Puis, en insérant les équations d'état (Eq C.24a) et adjointe (Eq C.24b) et en utilisant l'expression du multiplicateur de Lagrange en fonction de $\mathbf{P}(t)$ (Eq C.29), il en résulte l'équation suivante :

$$-\mathbf{R}_1(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t) [\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t)]$$

De plus, en utilisant l'équation sur le contrôle (Eq C.30), cette dernière équation devient :

$$-\mathbf{R}_1(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t) \left[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \left(-\mathbf{R}_2^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \right) \right]$$

Par simplification par $\mathbf{x}(t)$, l'équation de Riccati¹⁸ en $\mathbf{P}(t)$ suivante est obtenue :

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{R}_1(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}_2^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \quad (\text{C.32})$$

avec la condition finale :

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{P}_f$$

Sous certaines conditions, l'équation de Riccati admet une solution unique (voir pour cela [40] et [130]). La résolution de ce système permet d'avoir $\mathbf{P}(t)$ et par la suite la loi de feedback optimale suivante :

$$\mathbf{c}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (\text{C.33})$$

avec $\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}_2^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ la matrice de retour d'état LQR.

Le système de contrôle optimal LQR s'exprime ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)] \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}} \quad (\text{C.34})$$

C.4 Filtre de Kalman

Le système d'équations (Eq C.18) subit à présent des perturbations extérieures : l'état du système ne peut plus être connu exactement, il faut l'estimer. Les équations différentielles d'état et de bruit sont alors résolues récursivement pour trouver un état estimé. Pour cela, un estimateur est utilisé : *le filtre de Kalman*. Les filtres de Kalman sont utilisés dans de nombreux problèmes de contrôle (par exemple pour les systèmes de navigation des avions). Un filtre de Kalman est un système dynamique avec deux entrées vectorielles : le contrôle $\mathbf{c}$ et la mesure $\mathbf{y}$ c'est-à-dire les états connus du système. L'état $\hat{\mathbf{x}}$ de ce filtre est un état estimé de l'état $\mathbf{x}$. Cette partie est destinée à décrire comment utiliser un filtre de Kalman (KDF).

¹⁸Une équation différentielle de Riccati est de la forme : $\dot{y} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, où a, b et c sont des fonctions continues de x .

Le système (Eq C.12) décrit précédemment devient alors après introduction des termes de perturbations :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_2(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

où $\mathbf{v}_1(t)$ représente le vecteur de perturbation extérieure et $\mathbf{v}_2(t)$ le vecteur correspondant au bruit mesuré. Pour pouvoir utiliser le filtre de Kalman, il est nécessaire que le système soit complètement observable.

Une **variable d'erreur** $\mathbf{e}(t)$ qui correspond à la différence entre l'état et l'état estimé, est tout d'abord définie :

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{C.36})$$

Cette erreur est minimisée telle que :

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}(0)} \mathbf{Q}(t) \quad (\text{C.37})$$

avec $\mathbf{Q}(t) = \mathbb{E} \{ \mathbf{e} \mathbf{e}^T \}$ où $\mathbb{E}$ est l'espérance mathématique¹⁹ de $\mathbf{e} \mathbf{e}^T$.

Les conditions initiales pour le vecteur d'état sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \mathbf{x}(t_0) \} &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbb{E} \{ [\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0] [\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0]^T \} &= \mathbf{Q}_0 \end{aligned}$$

Un **estimateur** dans la théorie du contrôle linéaire et optimal peut être construit sous la forme générale suivante :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{M}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{N}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{y}(t) \quad (\text{C.38})$$

où les matrices $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ et $\mathbf{L}(t)$ sont à déterminer par la suite. Or d'après l'équation C.18, le système non bruité dans l'espace des états est :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{C.39})$$

Ainsi, par identification avec l'équation C.38, on a :

$$\mathbf{B}(t) \equiv \mathbf{N}(t) \quad (\text{C.40})$$

En dérivant l'expression de l'erreur et en remplaçant $\dot{\mathbf{x}}(t)$ et $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$ par leurs expressions respectives (Eqs C.38 et C.39), il résulte :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{M}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{N}(t)\mathbf{c}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{y}(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{M}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}(t) [\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_2(t)] \end{aligned}$$

¹⁹L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est :

$$\mathbb{E} \{ X \} = \int_{-\infty}^{+\infty} X.f(X) dX$$

où $f(X)$ est une densité de probabilité associée à X .

soit :

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t)] \mathbf{x}(t) - \mathbf{M}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{v}_2(t) \quad (\text{C.41})$$

En prenant la valeur moyenne des deux côtés de cette équation (par définition $\mathbb{E}(\mathbf{v}_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\mathbf{v}_2) = 0$) et en considérant une erreur non biaisée ($\mathbf{e}(t) = 0$), l'expression suivante est obtenue :

$$[\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t)] \mathbf{x}(t) - \mathbf{M}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) = 0$$

soit :

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t) \quad (\text{C.42})$$

En remplaçant à présent les matrices $\mathbf{M}(t)$ et $\mathbf{N}(t)$ par leurs valeurs respectives (Eqs C.42 et C.40) dans l'équation d'estimation (Eq C.38), l'état estimé optimal est obtenu :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t)] \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{y}(t)$$

soit :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{L}(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (\text{C.43})$$

Or les conditions initiales pour l'erreur sont : $\mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{e}_0$. En réinjectant l'expression de $\mathbf{M}(t)$ dans l'équation sur la dérivée de l'erreur (Eq C.41), il résulte l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= [\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t)] [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] + \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{v}_2(t) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}(t) &= [\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t)] \mathbf{e}(t) + \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{v}_2(t) \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Ce qui peut s'écrire aussi en fonction de la variance du système $\mathbf{Q}(t)$ ²⁰ :

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t)] \mathbf{Q}(t) + \mathbf{Q}(t) [\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t)]^T + \mathbf{V}_1(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{V}_2(t)\mathbf{L}^T(t) \quad (\text{C.45})$$

où $\mathbf{V}_1 = \mathbb{E} \{ \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T \}$ et $\mathbf{V}_2 = \mathbb{E} \{ \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T \}$. La variance $\mathbf{Q}(t)$ a pour condition initiale : $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{Q}_0$. En utilisant l'équation de Riccati pour le problème LQR (voir [111] pour plus de détails), il est possible de trouver une valeur optimale de $\mathbf{L}(t)$ qui minimise l'erreur :

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{V}_2^{-1}(t) \quad (\text{C.46})$$

$\mathbf{L}(t)$ est alors appelée Matrice de gain de Kalman. Ainsi l'équation C.45 est une équation de Riccati en $\mathbf{Q}(t)$:

$$\boxed{\dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{V}_1(t) - \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{V}_2^{-1}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{Q}(t)} \quad (\text{C.47})$$

Le Tableau C.17 présente l'analogie entre le contrôle LQR et du filtre de Kalman : la démarche pour chacune de ces méthodes est identique. Le Tableau C.18 récapitule les différentes caractéristiques du contrôle LQR et du filtre de Kalman.

²⁰voir [111]

LQR	A	B	P	R₁	R₂
KDF	A^T	C^T	Q	V₁	V₂

TABLE C.17 – Analogie entre les différents paramètres du contrôle LQR et du filtre de Kalman KDF.

C.5 Contrôle LQG

Quand le système de contrôle en boucle fermée est composé d'un régulateur LQR et d'un filtre de Kalman (les matrices **K** provenant de la théorie LQR et **L** de la théorie du filtre de Kalman sont alors retenues), il est alors appelé régulateur LQG pour *Linear Quadratic Gaussian*. Le contrôle est alors appelé **contrôle sur $\mathcal{H}_2$** ($\mathcal{H}_2$ signifie *Minimiser le carré d'une norme euclidienne*).

Soit un système où les perturbations **v₁** et **v₂** sont considérées comme des bruits blancs. Le système d'état est alors le même que dans le cas d'un filtre de Kalman :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{v}_1(t) & \text{(C.48a)} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_2(t) & \text{(C.48b)} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 & \text{(C.48c)} \end{cases}$$

L'union d'un régulateur LQR et d'un filtre de Kalman peut se faire en utilisant l'état estimé d'un filtre de Kalman dans un régulateur LQR. Ainsi, dans ce cas :

1. Régulateur LQR :

$$\mathbf{c}(t) = -\mathbf{K}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) \quad \text{(C.49)}$$

où la matrice de gain de retour est :

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}_2^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$$

2. Associé à l'état estimé de Kalman ; cet état est la solution unique de :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{L}(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad \text{(C.50)}$$

où la matrice de gain de Kalman est trouvée par :

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{V}_2^{-1}(t)$$

Le contrôle optimal (ou théorie sur $\mathcal{H}_2$) consiste donc à déterminer les matrices de gain **K(t)** et **L(t)** respectivement par les méthodes du régulateur LQR et du filtre de Kalman (en résolvant les équations de Riccati associées) tout en minimisant la fonctionnelle objectif suivante (donnée ici sans démonstration, voir [130] pour cela) :

$$\mathcal{J}_{LQR} = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}^T \left(\mathbf{R}_1 + \mathbf{K}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{K} \right) \mathbf{x} \right\} \quad \text{(C.51)}$$

En remplaçant les expressions sur le contrôle **c** (Eq C.49) et de la mesure **y** (Eq C.48b) dans l'équation de l'état estimé de Kalman (Eq C.50), on obtient :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)] \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}(t) [\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_2(t)] \quad \text{(C.52)}$$

	LQR	Filtre de Kalman
Système d'état	$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}_2(t) \end{cases}$
Fonctionnelle objectif	$\min_{\mathbf{K}} \mathbb{E} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}^T + \mathbf{c}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{c}^T \}$	$\min_{\mathbf{L}} \mathbb{E} \{ \mathbf{e}^T \mathbf{e}^T \}$
Equation de Riccati	$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{R}_1(t) \\ &\quad - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}_2^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{V}_1(t) \\ &\quad - \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{V}_2^{-1}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{Q}(t) \end{aligned}$
Matrices de gain	$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}_2^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$	$\mathbf{L}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{V}_2^{-1}(t)$
Résultat	$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x}(t)$	$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t)]\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{e}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t)]\mathbf{e}(t) + \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{v}_2(t) \end{cases}$

TABLE C.18 – Récapitulatif de la théorie de contrôle linéaire du régulateur LQR et du Filtre de Kalman.

Le terme $\mathbf{L}(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)]$ représente le “feedback” de l’estimateur basé sur la différence entre la mesure $\mathbf{y}$ et son estimation par le modèle $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)$. Il a pour fonction d’agir sur l’estimation afin de ramener l’état estimé $\hat{\mathbf{x}}$ et l’état $\mathbf{x}$. De plus, en incorporant la notion d’erreur, le système entier peut s’écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t) & 0 \\ \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t) & \mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{L}(t) \\ 0 & \mathbf{L}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{v}_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{C.53})$$

avec $\mathbf{I}$ représentant la matrice identité. La détermination de la matrice de retour $\mathbf{K}(t)$ est alors indépendante des perturbations subies par le système et la détermination de la matrice de Kalman $\mathbf{L}(t)$ ne dépend pas de la manière par laquelle le contrôle $\mathbf{c}$ agit sur l’état $\mathbf{x}$. Ainsi, sur $\mathcal{H}_2$ les problèmes de contrôle et d’estimation sont entièrement découplés : c’est le théorème de séparation [130]. Le principe de séparation permet d’exécuter séparément la conception du système de contrôle et de l’observateur en deux étapes différentes. Le Tableau C.19 reprend la théorie du contrôle linéaire sur $\mathcal{H}_2$.

C.6 Théorie du contrôle sur $\mathcal{H}_\infty$ ou Contrôle robuste

La méthode est très similaire à la théorie du contrôle sur $\mathcal{H}_2$, mais les perturbations ne sont non plus gaussiennes, mais dans le pire “cas possible” pour déstabiliser le système. Les résultats sont donnés ici sans démonstration, le lecteur pourra se référer pour une explication complète de la théorie du contrôle robuste, par exemple à [99, 218]. Le système d’état dans ce cas est alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{w} + \mathbf{B}_1\mathbf{c} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{c} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \end{cases} \quad (\text{C.54})$$

où on a :

- deux entrées $\begin{cases} \text{le vecteur de contrôle } \mathbf{c} \\ \text{le vecteur de perturbations } \mathbf{w} \end{cases}$
- deux sorties $\begin{cases} \text{le vecteur de mesures } \mathbf{y} \\ \text{le vecteur de mesures } \mathbf{z} \end{cases}$

La fonctionnelle objectif à minimiser s’exprime dans ce cas, par :

$$\mathcal{J}_\infty = \inf_{\mathbf{c}} \sup_{\mathbf{w}} \mathbb{E} \{ |\mathbf{z}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - \gamma^2 |\mathbf{w}|^2 \} \quad (\text{C.55})$$

avec γ le paramètre de régulation identique à σ (cf. section 2.2.2). La démarche suivante dans le cas du contrôle robuste, est alors menée :

1. Les équations de Riccati suivantes sont résolues :

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}(\gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^T)\mathbf{P} + \mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(\gamma^{-2}\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2)\mathbf{Q} + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

Système d'état	$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_2(t) \end{cases}$
Fonctionnelle objectif	$\mathcal{J}_{LQR} = \mathbb{E} \{ \mathbf{x}^T (\mathbf{R}_1 + \mathbf{K}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{K}) \mathbf{x} \}$
Equations de Riccati	$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{R}_1(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}_2^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \\ \dot{\mathbf{Q}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(t)^T + \mathbf{V}_1(t) - \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{V}_2^{-1}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{Q}(t) \end{aligned}$
Matrices de gain	$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= \mathbf{R}_2^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \\ \mathbf{L}(t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{V}_2^{-1}(t) \end{aligned}$
Résultat	$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t) & 0 \\ \mathbf{L}(t)\mathbf{C}(t) & \mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -\mathbf{L}(t) \\ 0 & \mathbf{L}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{v}_2(t) \end{bmatrix}$

TABLE C.19 – Récapitulatif de la théorie du contrôle linéaire sur $\mathcal{H}_2$.

2. L'expression des matrices de gain respectivement de retour d'état et de Kalman est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\infty &= -\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \\ \mathbf{L}_\infty &= \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_2^T \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

3. Le système contrôleur/estimateur sur $\mathcal{H}_\infty$ est alors le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{c} &= \mathbf{K}_\infty \hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 \mathbf{c} - \mathbf{L}_\infty (\mathbf{y} - \mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{x}}) \end{cases} \quad (\text{C.58})$$

Contrairement à la théorie sur $\mathcal{H}_2$, les phases de détermination du contrôleur et de l'estimateur sont couplées. De plus, le contrôle robuste est plus stable que le contrôle sur $\mathcal{H}_2$, [99]. Le Tableau C.20 représente un récapitulatif de la théorie du contrôle robuste.

Système d'état	$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{w} + \mathbf{B}_1\mathbf{c} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{c} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \end{cases}$
Fonctionnelle objectif	$\mathcal{J}_\infty = \inf_{\mathbf{c}} \sup_{\mathbf{w}} \mathbb{E} \{ \mathbf{z} ^2 + \mathbf{c} ^2 - \gamma^2 \mathbf{w} ^2 \}$
Equations de Riccati	$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P} (\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{P} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} (\gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2) \mathbf{Q} + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \end{aligned}$
Matrices de gain	$\begin{aligned} \mathbf{K}_\infty &= -\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \\ \mathbf{L}_\infty &= \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_2^T \end{aligned}$
Système contrôleur/estimateur sur $\mathcal{H}_\infty$	$\begin{cases} \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{K}_\infty \hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 \mathbf{c} - \mathbf{L}_\infty (\mathbf{y} - \mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{x}}) \end{cases}$

TABLE C.20 – Récapitulatif de la théorie du contrôle linéaire sur $\mathcal{H}_\infty$.

D Formulation de la Projection de Galerkin associée à une équation de Poisson

La méthode de projection de Galerkin, classiquement employée en Mécanique des Fluides a été décrite dans la section §3.4. Afin de comparer les trois méthodes de projection décrites dans ce manuscrit (Galerkin, MRP1, MRP2), la méthode employée est légèrement différente ici. Tout comme les projections basées sur la minimisation du résidu, les équations gouvernant le fluide (Eq 3.29) sont discrétisées en temps avec un schéma d'Euler explicite, à l'exception des termes d'advection et de Boussinesq :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} & = 0 & \text{(D.59a)} \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + [\mathbf{u}^n \cdot \nabla] \mathbf{u}^n + \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} - g\beta(\theta^n - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y & = 0 & \text{(D.59b)} \\ \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\delta t} + [\mathbf{u}^n \cdot \nabla] \theta^n - \gamma \Delta \theta^{n+1} & = 0 & \text{(D.59c)} \end{cases}$$

où δt est le pas de temps défini par $\delta t = T/N_t$, N_t le nombre de pas de temps temporels et T le temps adimensionnel. L'exposant n correspond au n -ième pas de temps et $n+1$ est considéré tel que $t^{n+1} = t^n + \delta t$.

Le champ de vitesses, le champ scalaire et le champ de pression se décomposent en une partie moyenne (Eqs 3.30 et 3.31) et une partie fluctuante, sur laquelle est faite la POD, (Eq 3.32). La pression fluctuante est également décomposée ici par POD :

$$p'^n(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{N^p} c_i^n \Phi_i^p(\mathbf{x}) \quad \text{(D.60)}$$

avec N^p le nombre de modes tronqué de la pression, c^n le coefficient temporel lié à la pression et $\Phi^p(\mathbf{x})$ la base spatiale POD de pression.

En introduisant ces décompositions et en projetant les équations précédentes (Eq D.59), le modèle d'ordre réduit obtenu par projection de Galerkin s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\Phi_i^u, \sum_{j=1}^{N^u} a_j^{n+1} [I - \delta t \nu \Delta] \Phi_j^u + \frac{\delta t}{\rho} \sum_{j=1}^{N^p} c_j^{n+1} \nabla \Phi_j^p \right) = (\Phi_i^u, \tilde{g}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)) & \text{pour } i = 1, \dots, N^u \\ \left(\Phi_i^\theta, \sum_{j=1}^{N^\theta} b_j^{n+1} [I - \delta t \gamma \Delta] \Phi_j^\theta \right) = (\Phi_i^\theta, \tilde{l}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)) & \text{pour } i = 1, \dots, N^\theta \end{cases} \quad \text{(D.61)}$$

Afin d'obtenir explicitement le terme de pression, l'opérateur divergence est appliqué sur les équations de mouvement (Eq D.59b). Il apparaît alors l'équation de Poisson suivante :

$$\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N^p} c_i^{n+1} \Delta \Phi_i^p = - \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} a_j^n a_k^n \nabla \cdot \{ [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \} + g\beta(\theta - \theta_{ini}) \sum_{j=1}^{N^\theta} b_j^n \frac{\partial \Phi_j^\theta}{\partial y} \quad \text{(D.62)}$$

En projetant cette équation sur les modes POD de pression Φ^p et en notant $\tilde{h}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)$ l'ensemble des termes de droite de l'équation (Eq D.62), l'équation de fermeture suivante est obtenu :

$$\left(\Phi_i^p, \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N^p} c_i^{n+1} \Delta \Phi_i^p \right) = (\Phi_i^p, \tilde{h}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N^p \quad (\text{D.63})$$

Le modèle d'ordre réduit est alors constitué des équations (Eqs D.59 et D.62). En conservant les notations employées pour les résidus (Eqs 3.41 et 3.43) à la section §3.5, le système d'équations réduit peut s'écrire :

$$\begin{cases} (\Phi^u, \mathcal{R}_{n+1}^u) = 0 \\ (\Phi^\theta, \mathcal{R}_{n+1}^\theta) = 0 \\ (\Phi^p, \mathcal{R}_{n+1}^p) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.64})$$

Il peut se mettre plus explicitement sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{n+1} \\ \mathbf{b}^{n+1} \\ \mathbf{c}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) \\ \mathbf{L}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) \\ \mathbf{H}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n) \end{pmatrix} \quad (\text{D.65})$$

où les termes matriciels s'écrivent :

$$\begin{aligned} M_{ij}^{uu} &= (\Phi_i^u, [\mathbb{I} - \delta t \nu \Delta] \Phi_j^u) \quad i, j = 1, \dots, N^u \\ M_{ij}^{up} &= \frac{\delta t}{\rho} (\Phi_i^u, \nabla \Phi_j^p) \quad i = 1, \dots, N^u; j = 1, \dots, N^p \\ M_{ij}^{\theta\theta} &= (\Phi_i^\theta, [\mathbb{I} - \delta t \gamma \Delta] \Phi_j^\theta) \quad i, j = 1, \dots, N^\theta \\ M_{ij}^{pp} &= (\Phi_i^p, \Delta \Phi_j^p) \quad i, j = 1, \dots, N^p \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

et sont calculés une seule fois. Les termes de droite sont calculés à chaque pas de temps et sont définis par :

$$\begin{aligned} G_i &= \sum_{j=1}^{N_u} A_{ij} a_j^n + \delta t \left(\sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N_u} C_{ijk} a_j^n a_k^n + \sum_{j=1}^{N_u} D_{ij} a_j^n + \sum_{j=1}^{N^\theta} F_{ij} b_j^n + E_i \right) \\ &\quad \text{pour } i = 1, \dots, N^u \\ L_i &= \sum_{j=1}^{N_\theta} A_{ij}^\theta b_j^n + \delta t \left(\sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{ijk}^\theta a_j^n b_k^n + \sum_{j=1}^{N^\theta} D_{ij}^\theta b_j^n + \sum_{j=1}^{N^u} F_{ij}^\theta a_j^n + E_i^\theta \right) \\ &\quad \text{pour } i = 1, \dots, N^\theta \\ H_i &= \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N_u} C_{ijk}^p a_j^n a_k^n + \sum_{j=1}^{N_u} D_{ij}^p a_j^n + \sum_{j=1}^{N^\theta} F_{ij}^p b_j^n + E_i^p \\ &\quad \text{pour } i = 1, \dots, N^p \end{aligned} \quad (\text{D.67})$$

et avec les coefficients du système dynamique suivants :

$$\begin{aligned}
 C_{ijk} &= - \left(\Phi_i^u, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right) & i, j, k = 1, \dots, N^u \\
 D_{ij} &= - \left(\Phi_i^u, [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right) & i, j = 1, \dots, N^u \\
 A_{ij} &= \left(\Phi_i^u, \Phi_j^u \right) & i, j = 1, \dots, N^u \\
 F_{ij} &= \left(\Phi_i^u, g\beta(\Phi_j^\theta - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y \right) & i = 1, \dots, N^u; j = 1, \dots, N^\theta \\
 E_i &= \left(\Phi_i^u, \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} + g\beta(\bar{\theta} - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y \right) & i = 1, \dots, N^u \\
 \\
 C_{ijk}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^\theta \right) & i, k = 1, \dots, N^\theta; j = 1, \dots, N^u \\
 D_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^\theta \right) & i, j = 1, \dots, N^\theta \\
 A_{ij}^\theta &= \left(\Phi_i^\theta, \Phi_j^\theta \right) & i, j = 1, \dots, N^\theta \\
 F_{ij}^\theta &= - \left(\Phi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) & i = 1, \dots, N^\theta; j = 1, \dots, N^u \\
 E_i^\theta &= \left(\Phi_i^\theta, \gamma \Delta \bar{\theta} - [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) & i = 1, \dots, N^\theta \\
 \\
 C_{ijk}^p &= - \left(\Phi_i^p, \nabla \cdot \left\{ [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right\} \right) & i = 1, \dots, N^p; j, k = 1, \dots, N^u \\
 D_{ij}^p &= - \left(\Phi_i^p, \nabla \cdot \left\{ [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right\} \right) & i = 1, \dots, N^p; j = 1, \dots, N^u \\
 F_{ij}^p &= \left(\Phi_i^p, g\beta \frac{\partial \Phi_j^\theta}{\partial y} \right) & i = 1, \dots, N^p; j = 1, \dots, N^\theta \\
 E_i^p &= \left(\Phi_i^p, \nabla \cdot \left\{ -[\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\mathbf{u}} \right\} - \frac{1}{\rho} \Delta \bar{p} + g\beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) & i = 1, \dots, N^p
 \end{aligned}
 \tag{D.68}$$

E Formulation du problème d'optimisation avec un ROM/MRP2

E.1 Modèle réduit

Le problème d'optimisation réduit est écrit ici en utilisant la méthode par minimisation du résidu MRP2. Le système matriciel réduit à résoudre est le même que celui obtenu à la section §3.5.2, en rajoutant la décomposition du champ de vitesses par la méthode de la fonction de contrôle (Eq 4.8). Des termes supplémentaires apparaissent alors dans le membre de droite du système matriciel (Eq 3.65) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{pu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{n+1} \\ \mathbf{b}^{n+1} \\ \mathbf{c}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^c(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n, \alpha) \\ \mathbf{L}^c(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n, \alpha) \\ \mathbf{H}^c(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n, \alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{E.69})$$

avec les termes de gauche qui restent identiques (Eq 3.66) et les termes de droite dépendant à présent du paramètre de contrôle α :

$$\begin{aligned} G_i^c &= \sum_{j=1}^{N_u} A_{ij} a_j^n + \delta t \left\{ \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N_u} C_{ijk} a_j^n a_k^n + \sum_{j=1}^{N_u} (D_{ij}^1 + \alpha D_{ij}^2) a_j^n + \sum_{j=1}^{N_\theta} F_{ij} b_j^n \right\} \\ &+ \delta t \{ E_i^1 + \alpha E_i^2 + \alpha^2 E_i^3 + E_i^4 \} \\ &\text{pour } i = 1, \dots, N^u \\ \\ L_i^c &= \sum_{j=1}^{N_\theta} A_{ij}^\theta b_j^n + \delta t \left\{ \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N_\theta} C_{ijk}^\theta a_j^n b_k^n + \sum_{j=1}^{N_\theta} (D_{ij}^{\theta 1} + \alpha D_{ij}^{\theta 2}) b_j^n + \sum_{j=1}^{N_u} F_{ij}^\theta a_j^n + E_i^{\theta 1} + \alpha E_i^{\theta 2} \right\} \\ &\text{pour } i = 1, \dots, N^\theta \\ \\ H_i^c &= \sum_{j=1}^{N_u} \tilde{A}_{ij} a_j^n + \delta t \left\{ \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{k=1}^{N_u} \tilde{C}_{ijk} a_j^n a_k^n + \sum_{j=1}^{N_u} (\tilde{D}_{ij}^1 + \alpha \tilde{D}_{ij}^2) a_j^n + \sum_{j=1}^{N_\theta} \tilde{F}_{ij} b_j^n + \tilde{E}_i^1 + \alpha \tilde{E}_i^2 + \alpha^2 \tilde{E}_i^3 + \tilde{E}_i^4 \right\} \\ &\text{pour } i = 1, \dots, N^p \end{aligned} \quad (\text{E.70})$$

Les coefficients des systèmes dynamiques réduits s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
C_{ijk} &= - \left(\Psi_i^u, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right) & i, j, k = 1, \dots, N^u \\
D_{ij}^1 &= - \left(\Psi_i^u, [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \tilde{\mathbf{u}} \right) & i, j = 1, \dots, N^u \\
D_{ij}^2 &= - \left(\Psi_i^u, [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \mathbf{u}_s \right) & i, j = 1, \dots, N^u \\
A_{ij} &= \left(\Psi_i^u, \Phi_j^u \right) & i, j = 1, \dots, N^u \\
F_{ij} &= \left(\Psi_i^u, g\beta(\Phi_j^\theta \mathbf{e}_y - \theta_{ini}) \right) & i = 1, \dots, N^u \text{ et } j = 1, \dots, N^\theta \\
E_i^1 &= \left(\Psi_i^u, \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} - [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \tilde{\mathbf{u}} \right) & i = 1, \dots, N^u \\
E_i^2 &= \left(\Psi_i^u, \nu \Delta \mathbf{u}_s - [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \tilde{\mathbf{u}} - [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \mathbf{u}_s \right) & i = 1, \dots, N^u \\
E_i^3 &= - \left(\Psi_i^u, [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \mathbf{u}_s \right) & i = 1, \dots, N^u \\
E_i^4 &= \left(\Psi_i^u, g\beta(\bar{\theta} - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} \right) & i = 1, \dots, N^u \\
\\
\tilde{C}_{ijk} &= - \left(\nabla \Phi_i^p, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^u \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j, k = 1, \dots, N^u \\
\tilde{D}_{ij}^1 &= - \left(\nabla \Phi_i^p, [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \tilde{\mathbf{u}} \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
\tilde{D}_{ij}^2 &= - \left(\nabla \Phi_i^p, [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \Phi_j^u + [\Phi_j^u \cdot \nabla] \mathbf{u}_s \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
\tilde{A}_{ij} &= \left(\nabla \Phi_i^p, \Phi_j^u \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
\tilde{F}_{ij} &= \left(\nabla \Phi_i^p, g\beta(\Phi_j^\theta - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y \right) & i = 1, \dots, N^p \text{ et } j = 1, \dots, N^\theta \\
\tilde{E}_i^1 &= \left(\nabla \Phi_i^p, \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} - [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \tilde{\mathbf{u}} \right) & i = 1, \dots, N^p \\
\tilde{E}_i^2 &= \left(\nabla \Phi_i^p, \nu \Delta \mathbf{u}_s - [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \tilde{\mathbf{u}} - [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \mathbf{u}_s \right) & i = 1, \dots, N^p \\
\tilde{E}_i^3 &= - \left(\nabla \Phi_i^p, [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \mathbf{u}_s \right) & i = 1, \dots, N^p \\
\tilde{E}_i^4 &= \left(\nabla \Phi_i^p, g\beta(\bar{\theta} - \theta_{ini}) \mathbf{e}_y - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} \right) & i = 1, \dots, N^p \\
\\
C_{ijk}^\theta &= - \left(\Psi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \Phi_k^\theta \right) & i, k = 1, \dots, N^\theta \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
D_{ij}^{\theta 1} &= - \left(\Psi_i^\theta, [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \Phi_j^\theta \right) & i, j = 1, \dots, N^\theta \\
D_{ij}^{\theta 2} &= - \left(\Psi_i^\theta, [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \Phi_j^\theta \right) & i, j = 1, \dots, N^\theta \\
A_{ij}^\theta &= \left(\Psi_i^\theta, \Phi_j^\theta \right) & i, j = 1, \dots, N^\theta \\
F_{ij}^\theta &= - \left(\Psi_i^\theta, [\Phi_j^u \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) & i = 1, \dots, N^\theta \text{ et } j = 1, \dots, N^u \\
E_i^{\theta 1} &= \left(\Psi_i^\theta, \gamma \Delta \bar{\theta} - [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) & i = 1, \dots, N^\theta \\
E_i^{\theta 2} &= - \left(\Psi_i^\theta, [\mathbf{u}_s \cdot \nabla] \bar{\theta} \right) & i = 1, \dots, N^\theta
\end{aligned} \tag{E.71}$$

Le système matriciel (Eq E.69) est mis sous la forme suivante par la suite :

$$\begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha) = 0 \\ \mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) = 0 \\ \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha) = 0 \end{cases} \tag{E.72}$$

E.2 Problème d'optimisation réduit

Dans le cas du modèle réduit obtenu par MRP2 (cf. §3.5.2), la pression est considérée comme une variable d'état. Des termes supplémentaires vont alors apparaître dans le problème de contrôle

optimal réduit par MRP2. Les variables d'état correspondent désormais aux coefficients temporels de la vitesse $\mathbf{a}(t)$, de la température $\mathbf{b}(t)$ et de la pression $\mathbf{c}(t)$. Le paramètre de contrôle reste α . La fonctionnelle objectif (Eq 4.3) s'écrit à présent en notation discrète en temps²¹ :

$$\mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^\theta} \sum_{n=1}^{N_T} (b_i^n - \hat{b}_i^n)^2 + \frac{\omega}{2} \alpha^2 \quad (\text{E.73})$$

La fonctionnelle de Lagrange est alors introduite en notation discrète en temps et un multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\eta}$, lié à la troisième équation $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha) = 0$, est ajouté :

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = \mathcal{J}(\mathbf{b}, \alpha) - \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{n=1}^{N_T} \xi_j^n \mathcal{N}_j^n(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha) \quad (\text{E.74})$$

$$- \sum_{j=1}^{N^\theta} \sum_{n=1}^{N_T} \zeta_j^n \mathcal{M}_j^n(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha) - \sum_{j=1}^{N^p} \sum_{n=1}^{N_T} \eta_j^n \mathcal{P}_j^n(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha) \quad (\text{E.75})$$

Un minimum local de $\mathcal{L}$ ($\delta \mathcal{L} = 0$) est atteint si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} \delta \xi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta_i} \delta \zeta_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \delta \eta_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta a_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_i} \delta b_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_i} \delta c_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0$$

et les dérivées de Fréchet de la fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta})$ sont annulées suivant les directions $\delta \xi_i^n$, $\delta \zeta_i^n$ et $\delta \eta_i^n$; δa_i^n , δb_i^n et δc_i^n et $\delta \alpha$.

Annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ selon les variables adjointes

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ selon les variables adjointes $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ et $\boldsymbol{\eta}$ renvoie les contraintes du problème original, c'est-à-dire les équations de contraintes réduites avec la projection MRP2 (cf. Eq E.72).

Annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ selon les variables d'état

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ selon les variables d'état δa_i^n , δb_i^n et δc_i^n conduit aux équations adjointes écrites sous la forme matricielle suivante (pour $n = 1, \dots, N_{T-1}$) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{pu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}^n \\ \boldsymbol{\zeta}^n \\ \boldsymbol{\eta}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n, \boldsymbol{\xi}^{n+1}, \boldsymbol{\zeta}^{n+1}, \boldsymbol{\eta}^{n+1}, \alpha) \\ \mathbf{S}(\mathbf{a}^n, \boldsymbol{\xi}^{n+1}, \boldsymbol{\zeta}^{n+1}, \boldsymbol{\eta}^{n+1}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{E.76})$$

²¹ N_T est le nombre de pas de temps défini sur l'intervalle $[0, T]$.

avec les termes de gauche définis par l'équation 3.66 et les termes de droite suivants :

$$\begin{aligned}
 R_i &= \sum_{j=1}^{N^u} A_{ji} \zeta_j^{n+1} + \delta t \sum_{j=1}^{N^u} \sum_{k=1}^{N^u} (C_{jik} + C_{jki}) a_k^n \zeta_j^{n+1} + \delta t \sum_{j=1}^{N^u} (D_{ji}^1 + \alpha D_{ji}^2) \zeta_j^{n+1} \\
 &+ \delta t \sum_{j=1}^{N^\theta} \sum_{k=1}^{N^\theta} C_{jik}^\theta b_k^n \zeta_j^{n+1} + \delta t \sum_{j=1}^{N^\theta} F_{ji}^\theta \zeta_j^{n+1} \\
 &+ \delta t \sum_{j=1}^{N^p} \tilde{A}_{ji} \eta_j^{n+1} + \delta t \sum_{j=1}^{N^p} \sum_{k=1}^{N^u} (\tilde{C}_{jik} + \tilde{C}_{jki}) a_k^n \eta_j^{n+1} \\
 &+ \delta t \sum_{j=1}^{N^p} (\tilde{D}_{ji}^1 + \alpha \tilde{D}_{ji}^2) \eta_j^{n+1} \\
 &\text{pour } i = 1, \dots, N^u \\
 S_i &= \delta t \sum_{j=1}^{N^u} F_{ji} \zeta_j^{n+1} + \sum_{j=1}^{N^\theta} A_{ji}^\theta \zeta_j^{n+1} + \delta t \sum_{j=1}^{N^\theta} \sum_{k=1}^{N^u} C_{jki}^\theta a_k^n \zeta_j^{n+1} + \delta t \sum_{j=1}^{N^\theta} (D_{ji}^{\theta 1} + \alpha D_{ji}^{\theta 2}) \zeta_j^{n+1} \\
 &+ \delta t \sum_{j=1}^{N^p} \tilde{F}_{ji} \eta_j^{n+1} + (b_i^n - \hat{b}_i^n) \\
 &\text{pour } i = 1, \dots, N^\theta
 \end{aligned} \tag{E.77}$$

Les coefficients du système dynamique réduit sont les mêmes que ceux définis auparavant (Eq E.71). Etant donné que le système matriciel réduit (Eq E.76) est défini pour $n = 1, \dots, N_{T-1}$, il faut déterminer les conditions terminales du système d'équations adjointes pour pouvoir le résoudre en remontant le temps. Ces conditions terminales sont données sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{pu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi^T \\ \zeta^T \\ \eta^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T - \hat{\mathbf{b}}^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{E.78}$$

Annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ selon les variables de contrôle

L'annulation des dérivées de Fréchet de $\mathcal{L}$ selon la variable de contrôle α donne les conditions d'optimalité du système. Autrement dit, le gradient de la fonctionnelle objectif réduite par rapport à α peut être déterminé et donc les directions de descente d_k par un algorithme de descente type gradient (cf. §??). L'expression suivante du gradient de la fonctionnelle objectif, en fonction du paramètre de contrôle α , est alors obtenue :

$$\begin{aligned}
 \nabla_\alpha \mathcal{J} &= \omega \alpha + \sum_{n=1}^{N_T} \left\{ \delta t \sum_{i=1}^{N^u} \zeta_i^n \left[\sum_{j=1}^{N^u} D_{ij}^2 a_j^n + E_i^2 + 2\alpha E_i^3 \right] + \delta t \sum_{i=1}^{N^\theta} \zeta_i^n \left[\sum_{j=1}^{N^\theta} D_{ij}^{\theta 2} b_j^n + E_i^{\theta 2} \right] \right\} \\
 &+ \sum_{n=1}^{N_T} \left\{ \sum_{i=1}^{N^p} \eta_i^n \delta t \left(\sum_{j=1}^{N^u} \tilde{D}_{ij}^2 a_j^n + \tilde{E}_i^2 + 2\alpha \tilde{E}_i^3 \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{E.79}$$

Résumé

Les équations de contraintes E.72, les équations adjointes E.76 et la condition d'optimalité (Eq E.79) obtenus forment le *système optimal*. Les solutions de ce système sont composées du para-

mètre de contrôle optimal α_{opt} , des variables optimales $\mathbf{a}_{opt}$, $\mathbf{b}_{opt}$ et $\mathbf{c}_{opt}$ ainsi que des variables adjointes optimales $\boldsymbol{\xi}_{opt}$, $\boldsymbol{\zeta}_{opt}$ et $\boldsymbol{\eta}_{opt}$. Le système est alors résolu par un algorithme classique de descente en utilisant la méthode de l'équation adjointe (cf. §2.3.3.2). L'algorithme d'optimisation réduit est alors l'Algorithme 8.

Algorithme 8: PROJECTION MRP2

Initialisation : $k = 0$, $\alpha_k = \alpha_{ini}$;

- 1: Connaissant α_k , résoudre les équations de contraintes réduites

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{pu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{n+1} \\ \mathbf{b}^{n+1} \\ \mathbf{c}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^c(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n, \alpha) \\ \mathbf{L}^c(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n, \alpha) \\ \mathbf{H}^c(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n, \alpha) \end{pmatrix}$$

- 2: Connaissant α_k , $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ et $\mathbf{c}_k$, résoudre les équations adjointes réduites

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\theta\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{pu} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}^n \\ \boldsymbol{\zeta}^n \\ \boldsymbol{\eta}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{a}^n, \mathbf{b}^n, \boldsymbol{\xi}^{n+1}, \boldsymbol{\zeta}^{n+1}, \boldsymbol{\eta}^{n+1}, \alpha) \\ \mathbf{S}(\mathbf{a}^n, \boldsymbol{\xi}^{n+1}, \boldsymbol{\zeta}^{n+1}, \boldsymbol{\eta}^{n+1}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- 3: Evaluer la direction de descente avec la condition d'optimalité (Eq E.79)

$$\rightarrow d_k = -\nabla_{\alpha} \mathcal{J}_k$$

- 4: Evaluer les nouveaux paramètres de contrôle

$$\rightarrow \alpha_{k+1} = \alpha_k + w_k d_k$$

où le pas w_k est déterminé par recherche linéaire,

par détermination d'un pas d'Armijo par rebroussement (§2.4.1)

- 5: Evaluer le critère de convergence ($\|\nabla_{\alpha} \mathcal{J}\| < \varepsilon$).

Si critère de convergence non satisfait, retour à l'étape 1.

Bibliographie

- [1] ANSI/ASHRAE Standard 55-2004 : *Thermal Environmental Conditions for Human Occupancy*. Atlanta : American Society of Heating, Refrigerating, and Air-Conditioning Engineers, Inc., 2004.
- [2] BS 5925 : *Code of Practice for Design of Buildings : Ventilation principles and designing for natural ventilation*. British Standards Institution, London, 1980.
- [3] I.E. ABDALLA, M. J. COOK, S. J. REES et Z. YANG : Large-eddy simulation of buoyancy-driven natural ventilation in an enclosure with a point heat source. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 21(5-6):231–245, 2007.
- [4] N. AL SAYED : *Modèles LES invariants par groupes de symétries en écoulements turbulents anisothermes*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2011.
- [5] F. ALLARD : *Natural Ventilation in Buildings : A Design Handbook*. James & James Ltd, 1998.
- [6] C. ALLERY : *Contribution à l'identification des bifurcations et à l'étude des écoulements fluides par des systèmes dynamiques d'ordre faible (POD)*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2002.
- [7] C. ALLERY, A. HAMDOUNI, D. RYCKELYNCK et N. VERDON : A priori reduction method for solving the two-dimensionnal Burgers' equations. *Applied Mathematics and Computation*, 217(15):6671–6679, 2011.
- [8] A. AMMAR, B. MOKDAD, F. CHINESTA et R. KEUNINGS : A new family of solvers for some classes of multidimensionnal partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *J. of Non Newtonian Fluid Mechanics*, 139:153–176, 2006.
- [9] A. AMMAR, B. MOKDAD, F. CHINESTA et R. KEUNINGS : A new family of solvers for some classes of multidimensionnal partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. Part II : Transient simulation using space-time separated representations. *J. of Non Newtonian Fluid Mechanics*, 144:98–121, 2007.
- [10] A. AMMAR, D. RYCKELYNCK, F. CHINESTA et R. KEUNINGS : On the reduction of kinetic theory models related to finitely extensible dumbbells. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 134:136–147, 2006.

- [11] D. AMSALLEM et C. FARHAT : Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. *AIAA Journal*, 46:1803–1813, 2008.
- [12] L. ARMIJO : Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, 16(1):1–3, 1966.
- [13] ASHRAE FUNDAMENTALS HANDBOOK : *Ch. 8 : Thermal comfort*, American Society of Heating, Refrigeration and Air-Conditioning Engineers. Atlanta, GA, 2001.
- [14] N. AUBRY, P. HOLMES, J. L. LUMLEY et E. STONE : The dynamics of coherent structures in the wall regions of a turbulent wall layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 192:115–173, 1988.
- [15] H. B. AWBI : *Ventilation of buildings*. Second Edition. SponPress, 2003.
- [16] J. AXLEY : Multizone airflow modeling in buildings : History and theory. *HVAC&R Research*, 13(6):907–928, 2007.
- [17] R. M. AYNSLEY, W. MELBOURN et B. J. VICKERY : *Architectural Aerodynamics*. Applied Science Publishers, London, 1977.
- [18] A. BARBAGALLO, D. SIPP et P.J. SCHMID : Closed-loop control of an open cavity flow using reduced-order models. *Journal of Fluid Mechanics*, 641:1–50, 2009.
- [19] J. BARDINA, J. H. FERZIGER et W. C. REYNOLDS : Improved subgrid scale models for Large Eddy Simulation. *AIAA paper*, 80:1357–1365, 1980.
- [20] J. BARDINA, J. H. FERZIGER et W. C. REYNOLDS : *Improved turbulence models based on Large Eddy Simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows*. Stanford University, 1983.
- [21] A. BASTIDE, P. LAURET, F. GARDE et H. BOYER : Building energy efficiency and thermal comfort in tropical climates : Presentation of a numerical approach for predicting the percentage of well-ventilated living spaces in buildings using natural ventilation. *Energy and Buildings*, 38(9):1093–1103, 2006.
- [22] R. BATTITI : First-and second-order methods for learning : between steepest descent and newton’s method. *Neural computation*, MIT Press, 4:141–166, 1992.
- [23] R. BECKER, H. KAPP et R. RANNACHER : Adaptive finite element methods for optimal control of partial differential equations : basic concepts. *SIAM J. Control Optim.*, 39:113–132, 2000.
- [24] X. BERGER et J. C. DEVAL : About thermal comfort in humid tropical climate. *CLIMA-2000. Indoor Climate, VVS Congres, Copenhagen*, pages 85–89, 1985.
- [25] M. BERGGREN, R. GLOWINSKI et J.-L. LIONS : A computational approach to controllability issues for flow-related models, Part I. *J. Comput. Fluid Dyn.*, 6:237–252, 1996.
- [26] L. BERGLUND et D. J. CUNNINGHAM : Parameters of human discomfort in warm environment. *ASHRAE Transactions*, 92:732–736, 1986.
- [27] M. BERGMANN : *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle (POD) et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d’un cylindre circulaire*. Thèse de doctorat, 2004.

- [28] M. BERGMANN, C.-H. BRUNEAU et A. IOLLO : Enablers for robust POD models. *Journal of Computational Physics*, 228:516–538, 2009.
- [29] M. BERGOUNIOUX : *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*. Dunod, Paris, 2001.
- [30] G. BERKOOZ, P. HOLMES et J. L. LUMLEY : The Proper Orthogonal Decomposition in the analysis of turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 25:539–575, 1993.
- [31] T. R. BEWLEY et R. AGARWAL : *Optimal and robust control of transition*. Summer program, Center for Turbulence Research, 1996.
- [32] T. R. BEWLEY et S. LIU : Optimal and robust control and estimation of linear paths to transition. *J. Fluid Mech.*, 365:305–349, 1998.
- [33] T. R. BEWLEY et P. MOIN : Optimal and robust approaches for linear and nonlinear regulation problems in fluids mechanics. *AIAA Paper*, 1872, 1997.
- [34] T. R. BEWLEY, P. MOIN et R. TEMAM : DNS-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithm. *J. Fluid Mech.*, 447:179–225, 2001.
- [35] M. BIERLAIRE : *Introduction à l'optimisation différentiable*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romande, 2006.
- [36] J. BORGGAARD, J. BURKARDT, M. D. GUNZBURGER et J. PETERSON : *Optimal Design and Control*. Birkhauser, Boston, 1995.
- [37] J. BOUSSINESQ : *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*. Gauthier-Villars, 1903.
- [38] N. BREHLI : Ventilation rates and iaq in national regulations. *REHVA Journal*, pages 24–28, January 2012.
- [39] R. BRIGGS et Z. T. TAYLOR : Climate classification for building energy codes and standards. Rapport technique, Pacific Northwest National Laboratory, 2002.
- [40] A. BRYSON et Y. HO : *Applied optimal control*. Washington DC : Emisphere Publ. Co, 1975.
- [41] T. BUI-THANH : *Model-constrained optimization methods for reduction of parametrized large-scale systems*. Thèse de doctorat, MIT, Cambridge, 2007.
- [42] T. BUI-THANH, K. WILLCOX et O. GHATTAS : Model reduction for large-scale systems with high-dimensional parametric input space. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(6):3270–3288, 2008.
- [43] J. BURKARDT, M. D. GUNZBURGER et H. LEE : POD and CVT-based reduced-order modeling of Navier-Stokes flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1-3):337–355, 2006.
- [44] J. BURKARDT, M. D. GUNZBURGER et H.-C. LEE : Centroidal Voronoi Tessellations-based reduced-order modeling of complex systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(2):459–484, 2006.
- [45] J. B. BURL : *Linear Optimal Control : H_2 and H_∞ Methods*. Addison-Wesley Publishing, 1999.

- [46] J. F. BUSCH : A tale of two populations : thermal comfort in air conditioned and naturally ventilated offices in Thailand. *Energy and Buildings*, (18):235–239, 1992.
- [47] M. CACIOLO : *Analyse expérimentale et simulation de la ventilation naturelle mono-façade pour le rafraîchissement des immeubles de bureaux*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2010.
- [48] M. CACIOLO, D. MARCHIO et P. STABAT : Survey of the existing approaches to assess and design natural ventilation and need for further developments. In *Building in Simulation, Eleventh International IBPSA Conference, Glasgow, Scotland*, pages 220–227, 2009.
- [49] W. CAZEMIER, R. W. C. P. VERSTAPPEN et A. E. P. VELDMAN : Proper Orthogonal Decomposition and low-dimensional models for driven cavity flow. *Physics of Fluids*, 10(7):1685–99, 1998.
- [50] T-J CHANG, H-M KAO et Y-F HSIEH : Numerical study of the effect of ventilation pattern on coarse, fine, and very fine particulate matter removal in partitioned indoor environment. *Journal of the Air and Waste Management Association*, 57(2):179–189, 2007.
- [51] Q. CHEN : Ventilation performance prediction for buildings : A method overview and recent applications. *Building and Environment*, 44(4):848–858, 2009.
- [52] T. S. CHENG et W.-H LIU : Effect of temperature gradient orientation on the characteristics of mixed convection flow in a lid-driven square cavity. *Computers and Fluids*, 39:965–978, 2010.
- [53] M. CHEVALIER, J. HOEPFFNER, E. AKERVIK et D.S. HENNINGSON : Linear feedback control and estimation applied to instabilities in spatially developing boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 588:163–187, 2007.
- [54] M. CHEVALIER, J. HOEPFFNER, T.R. BEWLEY et D.S. HENNINGSON : State estimation in wall-bounded flow systems. Part 2. Turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 552:167–187, 2006.
- [55] F. CHINESTA, A. AMMAR et E. CUETO : Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational methods in Engineering*, 17(4), 2010.
- [56] F. CHINESTA, P. LADEVEZE et E. CUETO : A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational methods in Engineering*, 18(4): 395–404, 2011.
- [57] CODE_SATURNE : A Finite Volume Code for the Computation of Turbulent Incompressible Flows. *Industrial Applications, International Journal on Finite Volumes*, 1, 2004.
- [58] S. S. COLLIS, R. D. JOSLIN, A. SEIFERT et V. THEOFILIS : Issues in active flow control : theory, control, simulation, and experiment. *Progress in Aerospace Sciences*, 40:237–289, 2004.
- [59] P. CONCANNON : Residential ventilation. *AIVC Technical, Note 57*, 2002.

- [60] M. COUPLET, C. BASDEVANT et P. SAGAUT : Calibrated reduced-order (POD) galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics*, 207:192–220, 2005.
- [61] D. J. CUNNINGHAM, L. BERGLUND et A. FOBELTS : Skin wettedness under clothing and its relationship to thermal comfort in men and women. *CLIMA-2000. Indoor Climate, VVS Congres, Copenhagen*, pages 91–95, 1985.
- [62] P.S. CURTIS, G. SHAVIT et K. KREIDER : Neural networks applied to buildings—a tutorial and case studies in prediction and adaptive control. *ASHRAE Transactions*, 102(1), 1996.
- [63] L. DAVIDSON et P. NIELSEN : Large Eddy Simulation of the flow in a three-dimensional ventilation room. In *5th International Conference on Air Distribution in Rooms. ROOMVENT'96*, July 17-19 1996.
- [64] R. DE DEAR, K. G. LEOW et A. AMEEN : Thermal comfort in the humid tropics - part I : climate chambers experiments on thermal acceptability preferences in Singapore. *ASHRAE Transactions*, 92:880–886, 1991.
- [65] R. DE DEAR, K. G. LEOW et A. AMEEN : Thermal comfort in the humid tropics - part II : climate chambers experiments on thermal acceptability preferences in Singapore. *ASHRAE Transactions*, 92:874–879, 1991.
- [66] W. DE GIDDS et H. PHAFF : Ventilation rates and energy consumption due to open windows. *Air Infiltration Review*, 4(1):4–5, 1982.
- [67] J. W. DEARDORFF : A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2):453–480, 1970.
- [68] J. C. DEVAL : *Etude théorique et expérimentale du confort thermique en climat tempéré et en climat chaud*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, 1985.
- [69] J. DREYFUS : *Le confort dans l'habitat en climat tropical*. Editions Eyrolles, Paris, 1960.
- [70] Q. DU, V. FABER et M. D. GUNZBURGER : Centroidal Voronoi Tessellations : Applications and Algorithms. *SIAM Review*, 41(4):637–676, 1999.
- [71] Q. DU et M. D. GUNZBURGER : Grid generation and optimization based on Centroidal Voronoi Tessellations. *Applied Mathematics and Computation*, 133:591–607, 2002.
- [72] A. DUMON : *Réduction dimensionnelle de type PGD pour la résolution des écoulements incompressibles*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2011.
- [73] A. DUMON, C. ALLERY et A. AMMAR : Proper general decomposition (PGD) for incompressible flows in stream-vorticity formulation. *EJCM - Computational methods for coupled fluid and structural problems*, 19(5-6-7):591–617, 2010.
- [74] A. DUMON, C. ALLERY et A. AMMAR : Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 230(4):1387–1407, 2011.

- [75] U. EHRENSTEIN, P.-Y. PASSAGGIA et F. GALLAIRE : Control of a separated boundary layer : Reduced-order modeling using global modes revisited. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 25(1-4):195–207, 2011.
- [76] S. J. EMMERICH et K. B. MCGRATTAN : Application of a Large Eddy Simulation model to study room airflow. *ASHRAE Transactions*, 104:1128–1140, 1998.
- [77] D. R. ERNEST : *Predicting wind-induced indoor air motion, occupant comfort, and cooling loads in naturally ventilated buildings*. Thèse de doctorat, University of California, Berkeley, 1991.
- [78] P. O. FANGER : *Thermal Comfort*. Copenhagen : Danish Technical Press, 1970.
- [79] H. FERIADI : *Thermal comfort for naturally ventilated residential buildings in the tropical climate*. Thèse de doctorat, University of Singapore, 2004.
- [80] H. E. FEUSTEL et J. DIERIS : A survey of airflow models for multizone structures. *Energy and Buildings*, 18(2):79–100, 1992.
- [81] H. E. FEUSTEL et A. RAYNER-HOOSON : COMIS fundamentals. Rapport technique LBNL-28560, Lawrence Berkeley National Laboratory, 1990.
- [82] R.Z. FREIRE, G.H. OLIVEIRA et N. MENDES : Predictive controllers for thermal comfort optimization and energy savings. *Energy and Buildings*, 40(7):1353–1365, 2008.
- [83] A.P. GAGGE, A.P. FOBELT et L. G. BERGLUND : A standard predictive index of human response to the thermal environment. *ASHRAE Trans.*, 92, 1986.
- [84] B. GALLETTI, C. H. BRUNEAU, L. ZANNETTI et A. IOLLO : Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. *J. Fluid Mech.*, 503:161–170, 2004.
- [85] G. GAN et H. B. AWBI : Numerical simulation of the indoor environment. *Building and Environment*, 29(4):449–459, 1994.
- [86] J. GANDEMER : *Guide sur la climatisation naturelle de l'habitat en climat tropical humide - Tome 1 : Méthodologie de prise en compte des paramètres climatiques dans l'habitat et conseils pratiques*. Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB), 1992.
- [87] N. P. GAO, H. ZHANG et J.L. NIU : Investigating indoor air quality and thermal comfort using a numerical thermal manikin. *Indoor and Built Environment*, 16(1):7–17, 2007.
- [88] M. GERMANO, U. PIOMELLI, P. MOIN et W. H. CABOT : A dynamic sub-grid scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids*, A(3):1760–1765, 1991.
- [89] C. GHIAUS, F. ALLARD, M. SANTAMOURIS, C. GEORGAKIS et F. NICOL : Urban environment influence on natural ventilation potential. *Building and Environment*, 41(4):395–406, 2006.
- [90] J. Ch. GILBERT : *Optimisation différentiable - Théorie et Algorithmes*. Syllabus de cours à l'ENSTA, Paris, 2008.

- [91] M. GIRAULT, E. VIDECOQ et D. PETIT : Estimation of time-varying heat sources through inversion of a low order model built with the modal identification method from in-situ temperature measurements. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(1-3):206–219, 2010.
- [92] B. GIVONI : *Man, climate and architecture*. Barking, Essex, Applied Science Publishers, 1976.
- [93] K. GLOVER : All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -errors bounds. *Int. J. Of Control*, 39:1115–1193, 1984.
- [94] D.E. GOLDBERG : *Genetic Algorithms for Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [95] A. A. GOLDSTEIN : On steepest descent. *SIAM Journal on Control*, 3:147–151, 1965.
- [96] G. GOUIN : *Contribution aérodynamique à l'étude de la ventilation naturelle de l'habitat en climat tropical humide*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1984.
- [97] W.R. GRAHAM, J. PERAIRE et K.T. TANG : Optimal control of vortex shedding using low order models. Part. 1. Open-loop model developement. *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg*, 44:945–972, 1999.
- [98] W.R. GRAHAM, J. PERAIRE et K.T. TANG : Optimal control of vortex shedding using low order models. Part. 2. Model-based control. *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg*, 44:973–990, 1999.
- [99] M. GREEN et D. J. N. LIMEBEER : *Linear Robust Control*. Pearson Education, Inc, 1995.
- [100] E. GRIMME : *Krylov Projection Methods for Model Reduction*. Thèse de doctorat, Coordinate Science Laboratory, University of Illinois, 1997.
- [101] S. GUGERCIN et A. C. ANTOULAS : Model Reduction of large-scale systems by least-squares. *Linear Algebra and its Applications*, 415(2-3):290–321, 2006.
- [102] M. D. GUNZBURGER : *Flow Control*. Springer, Berlin, 1995.
- [103] M. D. GUNZBURGER : Sensitivities, adjoints and flow optimization. *Int. J. Meth. Fluids*, 31:53–78, 1999.
- [104] M. D. GUNZBURGER : Adjoint equation-based methods for control problems in incompressible, viscous flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65:249–272, 2000.
- [105] M. D. GUNZBURGER : *Perspectives in Flow Control and Optimization*. Advanced in Design and Control, SIAM, 2003.
- [106] M. D. GUNZBURGER, L. HOU et T. SVOBODNY : Numerical approximation of an optimal control problem associated with the Navier-Stokes equations. *Appl. Math. Lett.*, 2:29–31, 1989.

- [107] I. HAZYUK, C. GHIAUS et D. PENHOUE : Optimal temperature control of intermittently heated buildings using model predictive control : Part I – Building modeling. *Building and Environment*, 51(0):379–387, 2012.
- [108] I. HAZYUK, C. GHIAUS et D. PENHOUE : Optimal temperature control of intermittently heated buildings using model predictive control : Part II – Control algorithm. *Building and Environment*, 51(0):388–394, 2012.
- [109] J.-W. HE, R. GLOWINSKI, R. METCALFE, A. NORLANDER et J. PÉRIAUX : Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder. Part I. Oscillatory cylinder rotation. *J. Comp. Phys.*, 163:83–117, 2000.
- [110] R-D. HENDERSON : Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, 352:65–112, 1997.
- [111] E. HENDRICKS, O. JANNERUP et P. H. SORESENSEN : *Linear Systems Control : Deterministic and Stochastic Methods*. 2008.
- [112] J. HOEPFFNER, M. CHEVALIER, T.R. BEWLEY et D.S. HENNINGSON : State estimation in wall-bounded flow systems. Part 1. Perturbed laminar flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 534:263–294, 2005.
- [113] P. HOEPPE, T. OOHORI, L. BERGLUND, A. FOBELETS et A. GWOSDOW : Vapor resistance of clothing and its effect on human response during and after exercise. *CLIMA-2000. Indoor Climate, VVS Congres, Copenhagen*, pages 97–101, 1985.
- [114] C. HOMESCU, I.M. NAVON et Z. LI : Suppression of vortex shedding for flow around a circular cylinder using optimal control. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 38(1):43–69, 2002.
- [115] F. C. HOUGHTON et C. P. YAGLOU : Determination of the comfort zone. *ASHVE Research Report No. 673 ASHVE Trans.*, 29, 361, 1923.
- [116] M. ILAK et C. W. ROWLEY : Reduced-Order Modelling of channel flow using traveling POD and Balanced POD. In *3rd AIAA Flow Control Conference, San Francisco*, volume 2, pages 864–874, 5-8 June 2006.
- [117] A. IOLLO, A. DERVIEUX, J.A. DÉSIDÉRI et S. LANTERI : Two-stable POD-based approximations to the Navier-Stokes equations. *Comput. Visual. Sci*, 3:61–66, 2000.
- [118] A. IOLLO, S. LANTERI et J.A. DÉSIDÉRI : Stability properties of POD-Galerkin approximations for the compressible Navier-Stokes Equations. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 13:377–396, 2000.
- [119] K. ITO et S. S. RAVINDRAN : A reduced-order method for simulation and control of fluid flow. *J. Comput. Phys.*, 143:403–425, 1998.
- [120] Y. JANNOT et T. DJIAKO : Economie d’énergie et confort thermique dans l’habitat en zone tropicale. *Int. J. Refrig.*, 17(3):166–173, 1994.

- [121] B. JIANG : *The Least-Square Finite Element Method : Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*. Springer, 1998.
- [122] Y. JIANG et Q. CHEN : Study of natural ventilation in buildings by Large Eddy Simulation. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, pages 1155–1178, 2001.
- [123] S. S. JOSHI, J. L. SPEYER et J. KIM : A systems theory approach to the feedback stabilization of infinitesimal and finite-amplitude disturbances in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 332:157–184, 1997.
- [124] K. KARHUNEN : Zur spektraltheorie stochastischer prozesse. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, 34, 1946.
- [125] T.H. KARYONO : Report on thermal comfort and building energy studies in Jakarta-Indonesia. *Building and Environment*, 35:77–90, 1998.
- [126] M. KIRBY et L. SIROVICH : Application of the Karhunen-Loève procedure for the characterization of human faces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(1):103–108, 1990.
- [127] S. A. KLEIN et W. A. BECKMAN : *TRNSYS - A transient simulation program*. ASHRAE Transactions, 82, 623, 1976.
- [128] M. KOLOKOTRONI : Night ventilation in commercial buildings. Annex 28 : Low Energy Cooling, Subtask 1. *IEA. United Kingdom*, pages 7–11, 1995.
- [129] M. KUMMERT, P. ANDRE et J. NICOLAS : Optimal heating control in a passive solar commercial building. *Solar Energy*, 2001(1-6):103–116, 2001.
- [130] H. KWARKERNAAK et R. SIVAN : *Linear Optimal Control Systems*. John Wiley and son, 1972.
- [131] A. G. KWOK : Thermal comfort in tropical classrooms. *ASHRAE Transactions*, 104 (Pt 1B): 1031–1047, 1998.
- [132] W. KÖPPEN : Das geographische System der Climate. *Handbuch der Klimatologie*, edited by : W. Köppen and R. Geiger, 1. C. Gebr, Borntraeger, pages 1–44, 1936.
- [133] B. E. LAUNDER et D. B. SPALDING : The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 3(2):269–289, 1974.
- [134] C. LEBLOND, C. ALLERY et C. INARD : An optimal projection method for the reduced-order modeling of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(33-36):2507–2527, 2011.
- [135] K. LEVENBERG : A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly Journal of Applied Mathematics II*, 2(2):164–168, 1944.
- [136] G.J. LEVERMORE : *Building energy management systems : an application to heating and control*. E & FN SPON, London, 1992.

- [137] E. LIBERGE et A. HAMDOUNI : Reduced order modelling method via Proper Orthogonal Decomposition (POD) for flow around an oscillating cylinder. *Journal of fluids and structures*, 26(2):292–311, 2010.
- [138] D. LILLY : A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids*, A4(3):633–635, 1992.
- [139] J.-L. LIONS : *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [140] Loi Grenelle 2. Loi n°2010-788 du 12 juillet 2010 portant engagement national pour l'environnement, version consolidée du 10 septembre 2011. Journal Officiel de la République Française n°0160 du 13/07/2010, 2010.
- [141] M. LOÈVE : Fonctions aléatoires de second ordre. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 220, 1945.
- [142] J. L. LUMLEY : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, pages 166–178, 1967.
- [143] D. A. MAC INTYRE : *Indoor Climate*. Londres : Applied Science Publishers, 1980.
- [144] F. H. MALICK : Thermal comfort and building design in the tropical climates. *Energy and Buildings*, 23(3):161–167, 1996.
- [145] D. W. MARQUARDT : An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters. *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.
- [146] MAS SANTOSA : *Climatic factors and their influence on the design of buildings in hot humid country with special reference to Indonesia*. Thèse de doctorat, University of Queensland, 1986.
- [147] C. MIN et H. CHOI : Suboptimal feedback control of vortex shedding at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 401:123–156, 1999.
- [148] B. C. MOORE : Principal component analysis in linear systems - controllability, observability and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control* Ac-26, 1:17–32, 1981.
- [149] L. MORA : *Prédiction des performances thermo-aérauliques des bâtiments par association de modèles de différents niveaux de finesse au sein d'un environnement orienté objet*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2003.
- [150] S. MURAKAMI : Overview of turbulence models applied in CWE-1997. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, 74-76:1–24, 1998.
- [151] M. MUSY : *Génération automatique de modèles zonaux pour l'étude du comportement thermo-aéraulique des bâtiments*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 1999.
- [152] F. NICOUUD et F. DUCROS : Subgrid-scale modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62:183–200, 1999.

- [153] B. R. NOACK, P. PAPAS et P. A. MONKEWITZ : The need for a pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 523:339–365, 2005.
- [154] C. NORBERG : Flow around a circular cylinder : aspects of fluctuating lift. *Journal of Fluids and Structures*, 15:459–469, 2001.
- [155] A. NOUY : A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24):1603–1626, 2010.
- [156] P. W. O'CALLAGHAN : *Building for Energy Conservation*. Oxford : Pergamon Press, 1978.
- [157] E. PALOMO DEL BARRIO, G. LEFEBVRE, P. BEHAR et N. BAILLY : Using model size reduction techniques for thermal control applications in buildings. *Energy and Buildings*, 33(1):1–14, 2000.
- [158] K. PARSONS : *Human thermal environment*. 2nd Edition. London : Taylor & Francis, 2003.
- [159] M. C. PEEL, B. L. FINLAYSON et T. A. MCMAHON : Updated world map of the Köppen-Geiger climate classification. *Hydrology and Earth System Sciences*, 4:439–473, 2007.
- [160] J. S. PETERSON : The reduced basis method for incompressible viscous flow calculations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 10(4), 1989.
- [161] A. PLACZEK, J.-F. SIGRIST et A. HAMDOUNI : Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low Reynolds number : Forced and free oscillations. *Computers and Fluids*, 38:80–100, 2008.
- [162] B. PODVIN et J. LUMLEY : A low-dimensional approach for the minimal flow unit. *J. Fluid Mech.*, 362:121–151, 1998.
- [163] M. POMARÈDE : *Investigation et application des méthodes d'ordre réduit pour les calculs d'écoulements dans les faisceaux tubulaires d'échangeurs de chaleur*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2012.
- [164] L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE et E. F. MISHCHENKO : *The mathematical theory of optimal processes*. Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [165] L. PRANDTL : Ueber die ausgebildete turbulenz. In *Proceedings of the 2nd international congress for applied mechanics, Zurich*, pages 62–74, 1926.
- [166] R. J. PRAZENICA, A. J. KURDILA et J. F. VIGNOLA : Spatial filtering and proper orthogonal decomposition of scanning laser Doppler vibrometry data for the non-destructive evaluation of frescoes. *Journal of sound and vibration*, 304:735–751, 2007.
- [167] B. PROTAS et A. STYCZEK : Optimal rotary control of the cylinder wake in the laminar regime. *Phys. Fluids*, 14:2073–2087, 2002.

- [168] S. S. RAVINDRAN : Reduced-order controllers for control of flow past an airfoil. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 50:531–554, 2006.
- [169] S.S. RAVINDRAN : Reduced-order adaptive controllers for fluid flows using POD. *J. of Scientific Computing*, 15:457–478, 2000.
- [170] D. RAZAFINDRALANDY et A. HAMDOUNI : Consequences of symmetries on the analysis and construction of turbulence models. *SIGMA*, 2:52–72, 2006.
- [171] D. RAZAFINDRALANDY et A. HAMDOUNI : Invariant subgrid modelling in large-eddy simulation of heat convection turbulence. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2007.
- [172] D. REMPFER : *Kohärenten structuren und chaos beim laminar-turbulenten Grenzschichtumschlag*. Thèse de doctorat, University of Stuttgart, 1988.
- [173] D. REMPFER : Investigation of boundary layer transition via Galerkin projections on empirical eigenfunctions. *Phys. Fluids*, 8(1):175–188, 1996.
- [174] D. REMPFER : On low- dimensional galerkin models for fluid flow. *Theoret. Comput. fluid Dynamics*, 14:75–88, 2000.
- [175] J.-J. ROUX : *Proposition de modèles simplifiés pour l'étude du comportement thermique des bâtiments*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1984.
- [176] C. W. ROWLEY : Model Reduction for fluids, using Balanced Proper Orthogonal Decomposition. *Int. J. on Bifurcation and Chaos*, 15(3):997–1013, 2005.
- [177] M. RUSSEL, M. SHERMAN et A. RUDD : *Review of Residential Ventilation Technologies*. Lawrence Berkeley National Laboratory, LBNL 57730, 2005.
- [178] D. RYCKELYNCK : An a priori model reduction method for thermomechanical problems. *Comptes Rendus Mecanique*, 330:499–505, 2002.
- [179] D. RYCKELYNCK : A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1):346–366, 2005.
- [180] P. SAGAUT : *Large Eddy Simulation for incompressible flows - An introduction*. Springer-Verlag, Scientific Computation series, 2002.
- [181] M. SAMIMY, M. DEBIASI, E. CARABALLO, A. SERRANI, X. YUAN, J. LITTLE et J.H. MYATT : Feedback control of subsonic cavity flows using reduced-order models. *Journal of Fluid Mechanics*, 579:315–346, 2007.
- [182] M. SAMIMY, M. DEBIASI, E. CARABALLO, A. SERRANI, X. YUAN, J. LITTLE et J.H. MYATT : Reduced-order model-based feedback control of subsonic cavity flows - an experimental approach. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 95:211–229, 2007.
- [183] T. SANGKERTADI : *Contribution à l'étude du comportement thermo-aéraulique des bâtiments en climat tropical humide*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1994.

- [184] M. SANTAMOURIS, A. ARGIROU, E. DASCALAKI, C. BALARAS et A. GAGLIA : Energy characteristics and savings potential in office buildings. *solar Energy*, 52:59–66, 1994.
- [185] A. SEMPEY, C. INARD, C. GHIAUS et C. ALLERY : Fast simulation of temperature distribution in air conditioned rooms by using proper orthogonal decomposition. *Building and Environment*, 44:280–289, 2009.
- [186] T.K. SENGUPTA, K. DEB et S.B. TALLA : Control of flow using genetic algorithm for a circular cylinder executing rotary oscillation. *Computers and Fluids*, 36:578–600, 2007.
- [187] M.R. SHARMA et S. ALI : Tropical Summer Index—a study of thermal comfort of Indian subjects. *Building and Environment*, 21(1):11–24, 1986.
- [188] D. SIPP, A. BARBAGALLO et P. SCHMID : Closed-loop control of an unstable open cavity. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 108:275–289, 2010.
- [189] S. SIRISUP et G. E. KARNIADAKIS : A spectral viscosity method for correcting the long-term behaviour of POD models. *Journal of Computational Physics*, 194:92–116, 2004.
- [190] L. SIROVICH : Turbulence and the dynamics of coherent structure. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV(3):561–590, 1987.
- [191] J. SMAGORINSKY : General circulation experiments with the primitive equations, i. the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91(3):99–164, 1963.
- [192] A. SORNBORGER, C. SAILSTAD, E. KAPLAN et L. SIROVICH : Spatiotemporal analysis of optical imaging data. *NeuroImage*, 18:610–621, 2003.
- [193] A. TALLET, C. LEBLOND et C. ALLERY : Anisothermal flow control by using reduced-order models. *ASME 2012, 11th Biennial Conference On Engineering Systems Design And Analysis, Nantes, France, july 2012*.
- [194] Z. F. TIAN, J. Y. TU, G. H. YEOH et R. K. K. YUEN : Numerical studies of indoor airflow and particle dispersion by Large Eddy Simulation. *Building and Environment*, 42(10):3483–3492, 2007.
- [195] L. UKEILEY, L. CORDIER, R. MANCEAU, J. DELVILLE, M. GLAUSER et J.-P. BONNET : Examination of large-scale structures in a turbulent mixing layer. part 2. dynamical systems model. *J. Fluid Mech.*, 441:67–108, 2001.
- [196] N. VERDON : *Un système dynamique d'ordre réduit basé sur une approche APR-POD pour l'étude de l'interaction écoulement turbulent-particules*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2007.
- [197] N. VERDON, C. ALLERY, C. BEGHEIN, A. HAMDOUNI et D. RYCKELYNCK : Reduced-order modelling for solving linear equations and non-linear equations. *Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(1):43–58, 2011.
- [198] E. VITALE : *Analyse et contrôle des écoulements instationnaires décollés*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.

- [199] M.D. VOSE : *Simple Genetic Algorithm : Foundation and Theory*. MIT Press, Ann Arbor, MI, 1999.
- [200] G. N. WALTON : *CONTAM96 User Manual*. Building and Fire Research Laboratory, National Institute of Standards and Technology, 1997.
- [201] S. WANG et X. JIN : Model-based optimal control of VAV air-conditioning system using genetic algorithms. *Building and Environment*, 35:471–487, 2000.
- [202] C.G. WEBB : An analysis of some observations of thermal comfort in an equatorial climate. *British Journal of Industrial Medicine*, 1959.
- [203] C.G. WEBB : Thermal discomfort in an equatorial climate. *IHVE*, 27:297–303, 1960.
- [204] D. C. WILCOX : Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J.*, 26(11):1299–1310, 1988.
- [205] K. WILLCOX et J. PERAIRE : Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition. *AIAA Journal*, 40(11):2323–2330, 2002.
- [206] C.-E. WINSLOW, L. P. HERRINGTON et A. P. GAGGE : Relation between atmospheric conditions, physiological reactions and sensations of pleasantness. *Am. J. Hygiene*, 26:103–115, 1937.
- [207] P. WOLFE : Convergence conditions for ascent methods. *SIAM Rev*, 11(2):226–235, 1969.
- [208] N. H. WONG et S. S. KHOO : Thermal comfort in classrooms in the tropics. *Energy and Buildings*, 35(4):337–351, 2003.
- [209] N.H WONG, H FERIADI, P.Y LIM, K.W THAM, C SEK HAR et K.W CHEONG : Thermal comfort evaluation of naturally ventilated public housing in singapore. *Building and Environment*, 37(12):1267–1277, 2002.
- [210] C. P. YAGLOU et D. MINARD : Control of heat casualties at military centers. *AMA Archives of Industrial Health*, 16(302), 1957.
- [211] D. YAMAZAKI et M. KAWAHARA : Optimal Control of Temperature in Fluid Flow Using Four Types of Minimization Techniques. *Journal of Algorithms & Computational Technology*, 4:207–230, 2010.
- [212] M. ZAHEER-UDDIN et G.R. ZHENG : Optimal control of time scheduled heating, ventilating and air conditioning processes in buildings. *Energy Conversion and Management*, 41:49–60, 2000.
- [213] Z. ZHAI, Z. ZHANG, W. ZHANG et Q. CHEN : Evaluation of various turbulence models in predicting airflow and turbulence in enclosed environments by CFD : part 1 - summary of prevalent turbulence models. *HVAC&R Research*, 13(6):853–870, 2007.
- [214] H. ZHANG, B.-C. FAN et Z.-H. CHEN : Computations of optimal cylinder flow control in weakly conductive fluids. *Computers and Fluids*, 39(8):1261–1266, 2010.

-
- [215] W. ZHANG et Q. CHEN : Large Eddy Simulation of natural and mixed convection airflow indoors with two simple filtered dynamic subgrid scale models. *Numerical Heat Transfert, Part A : Applications*, 37(5):447–463, 2000.
- [216] Z. ZHANG, X. CHEN, S. MAZUMDAR, T. ZHANG et Q. CHEN : Experimental and numerical investigation of airflow and contaminant transport in an airliner cabin mockup. *Building and Environment*, 44(1):85–94, 2009.
- [217] Z. ZHANG, W. ZHANG, Z. ZHAI et Q. CHEN : Evaluation of various turbulence models in predicting airflow and turbulence in enclosed environments by CFD : part 2 - comparison with experimental data from literature. *HVAC&R Research*, 13(6):871–886, 2007.
- [218] K. ZHOU et J. C. DOYLE : *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1997.