



HAL
open science

Analyse spectrale des signaux chaotiques

Kais Feltekh

► **To cite this version:**

Kais Feltekh. Analyse spectrale des signaux chaotiques. Réseaux et télécommunications [cs.NI]. INSA de Toulouse; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2014. Français. NNT : 2014ISAT0018 . tel-01071919

HAL Id: tel-01071919

<https://theses.hal.science/tel-01071919>

Submitted on 7 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA de Toulouse)*
Cotutelle internationale *l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT de Tunis)*

Présentée et soutenue le *12/09/2014* par :

FELTEKH KAIS

Analyse spectrale des signaux chaotiques.

JURY

Sylvie MARCOS	Directrice de Recherche au LSS-CNRS	Présidente
Jean-Pierre CANCES	Professeur de l'université de Limoges	Rapporteur
Monia TURKI	Professeur à l'ENIT	Rapporteur
Slimane BEN MILED	Maître de Conférences à l'UTM	Examineur
Danièle FOURNIER-PRUNARET	Professeur à l'INSA de Toulouse	Directrice
Safya BELGHITH	Professeur à l'ENIT	Directrice

École doctorale et spécialité :

EDSYS : Automatique, Signal, Productique, Robotique 4200046

Unité de Recherche :

UPR8001 Laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes (LAAS)

Directeur(s) de Thèse :

Danièle Fournier-Prunaret, Safya Belghith et Zouhair Ben Jemaa

Rapporteurs :

Jean-Pierre CANCES et Monia TURKI



THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR, TUNISIE

École nationale d'ingénieurs de Tunis - ED-STI

ET

L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE, FRANCE

Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse - EDSYS

présenté par

Kais FELTEKH

Titre de la thèse :

Analyse spectrale des signaux chaotiques

Thèse dirigée par : Safya Belghith Directrice de thèse

Danièle Fournier-Prunaret Directrice de thèse

Zouhair Ben Jemaa Co-encadrant

Soutenue le 12/09/2014
devant le Jury d'Examen :

<i>Présidente</i>	Sylvie MARCOS	Directrice de Recherche au LSS-CNRS
<i>Rapporteur</i>	Jean-Pierre CANCES	Professeur de l'université de Limoges
<i>Rapporteur</i>	Monia TURKI	Professeur à l'ENIT de Tunis
<i>Examineur</i>	Slimane BEN MILED	Maître de Conférences à l'UTM de Tunis
<i>Directrice</i>	Safya BELGHITH	Professeur à l'ENIT de Tunis
<i>Directrice</i>	Danièle FOURNIER-PRUNARET	Professeur à l'INSA de Toulouse

Je dédie cette thèse à mon grand-père, Habib

Remerciements

Cette thèse s’inscrit dans le cadre en cotutelle entre l’Ecole Nationale d’Ingénieur de Tunis (ENIT) relevant de l’Université de Tunis El Manar et l’Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA) relevant de l’Université de Toulouse. J’ai effectué les travaux de recherche au sein du Laboratoire de Systèmes de Communications (Sys’Com) en coopération avec le Laboratoire d’Analyse et d’Architecture des systèmes (LAAS) du CNRS.

Tout d’abord, je remercie toutes celles et tous ceux qui ont contribué à la préparation et la rédaction de ma thèse. Bien évidemment, il m’est difficile de remercier tout le monde, chacun par son nom car c’est grâce à l’aide de nombreuses personnes que j’ai pu mener cette thèse à son terme.

Je remercie Monsieur Jean-Pierre CANCES et Madame Monia TURKI d’avoir accepté de relire cette thèse et d’en être rapporteurs. La version finale de ce manuscrit a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses. Je tiens à remercier Madame Sylvie MARCOS d’avoir accepté d’être présidente du jury. Je remercie également tous les membres du jury d’avoir accepté d’assister à la présentation de ce travail.

Je remercie grandement ma directrice de thèse Madame Safya BELGHITH de m’avoir accepté et encadré tout au long de la préparation de ma thèse. Je suis ravi d’avoir pu travailler en sa compagnie car en plus de son appui scientifique, elle a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l’élaboration de mes travaux en Master et en Doctorat.

Je remercie chaleureusement ma directrice de thèse, Madame Danièle FOURNIER-PRUNARET, qui, malgré ses nombreuses occupations, a été un support scientifique avec un côté humain dont je garderai un long souvenir. Je lui suis également reconnaissant de m’avoir assuré un encadrement rigoureux tout au long de ces années, tout en me donnant toutefois la possibilité de trouver par moi-même mon cheminement personnel.

Je remercie vivement Monsieur Zouhair Ben Jemaa, Maître Assistant à L’ENIT

pour son suivi et son soutien lors de la réalisation de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance, pour les encouragements, les conseils et la confiance qu'il m'a toujours témoignés. Je remercie tous les thésards de Tunis et de Toulouse pour la bonne ambiance de travail mais également pour les nombreux bons moments passés ensemble.

Durant mes séjours à l'INSA, j'ai rencontré plusieurs personnes sympathiques avec qui j'ai partagé de bons moments : Leonel, Hang Ma et Hassen. Je n'oublie pas Mr Taha pour son aide durant les années de thèse et je remercie Joëlle et Thierry pour leur disponibilité.

J'adresse un grand merci à mon père et ma mère qui ont été pour moi des étoiles lumineuses tout au long du chemin et qui ont été présents lorsque j'en ai eu besoin. Je remercie mon frère Ramzi, ma sœur et toute ma famille pour leur amour sincère et leur soutien sans faille au cours de ces années.

Je tiens, particulièrement, à exprimer ma gratitude à mon épouse (ma source d'inspiration) que je remercie infiniment pour avoir accepté de me suivre, de me soutenir et de partager mes responsabilités pendant cette aventure.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	iii
Table des figures	vii
Abréviation	xi
Introduction Générale	1
1 Systèmes dynamiques discrets	3
1.1 Introduction	3
1.2 Système dynamique discret	4
1.2.1 Points fixes	5
1.2.2 Orbites périodiques	6
1.2.3 Trajectoires irrégulières	8
1.2.4 Bifurcation	9
1.2.5 Caractérisation des solutions d'un système dynamique discret	10
1.3 Indices de chaos	12
1.4 Densité de probabilité invariante d'une transformation chaotique . . .	13
1.5 Analyse spectrale	19
1.5.1 Densité spectrale de puissance	21
1.5.2 Etude spectrale de la logistique	22
1.6 Conclusion	24
2 Etude spectrale de quelques transformations linéaires par mor-	
ceaux	25
2.1 Introduction	25
2.2 Skew Tent Map $F(\cdot)$	25
2.2.1 Densité de probabilité	26
2.2.2 Exposant de Lyapunov	29
2.2.3 Auto-corrélation	29

2.2.4	Densité spectrale de puissance	33
2.2.5	Bande passante	33
2.3	PWLM-1 Maps $G(\cdot)$	35
2.3.1	Bifurcation et exposant de Lyapunov	36
2.3.2	Etude spectrale	37
2.4	PWLM-2 Maps $H(\cdot)$	39
2.4.1	Densité de probabilité	40
2.4.2	Exposant de Lyapunov et bifurcation	44
2.4.3	Auto-corrélation	45
2.4.4	Densité Spectrale de Puissance	50
2.4.5	Bande passante	51
2.5	Conclusion	53
3	Etude spectrale d'une transformation linéaire par morceaux avec deux paramètres	55
3.1	Introduction	55
3.2	PWLM-3 Maps $T(\cdot)$	56
3.2.1	Points fixes	58
3.2.2	Cycle d'ordre-2	59
3.2.3	Cycle d'ordre-3	61
3.3	Courbes de bifurcation	63
3.4	Calcul analytique de la DSP pour $\beta = -\Phi$	65
3.4.1	Densité de probabilité	66
3.4.2	Exposants de Lyapunov	67
3.4.3	Calcul de l'auto-corrélation	67
3.4.4	Densité spectrale de puissance de T_1	72
3.5	Simulation de l'auto-corrélation et du spectre pour différents paramètres.	74
3.6	Conclusion	79
4	Application Radar	81
4.1	Introduction	81
4.2	Système radar	82
4.2.1	L'importance de la bande passante dans les radars	87
4.2.2	Fonction d'ambiguïté	88
4.3	Fonction d'ambiguïté de quelques transformations chaotiques	90

4.3.1	La logistique	90
4.3.2	Tent Map	90
4.3.3	PWLM-1 Maps $G(\cdot)$	91
4.3.4	PWLM-3 Maps $T(\cdot)$	92
4.4	Multiplexage et séparation des signaux chaotiques	95
4.5	Conclusion	97
Conclusion Générale et Perspectives		99
Bibliographie		101
Publications		107
Résumé		109
Abstract		111

Table des figures

1.1	L'origine attire toutes conditions initiales dans $[0, 1]$	6
1.2	Le point fixe stable $\frac{(\beta-1)}{\beta}$ attire toutes les conditions initiales dans $[0, 1]$	6
1.3	Le point fixe $\frac{(\beta-1)}{\beta}$ est instable.	7
1.4	(a) Evolution de la suite x_n pour $\beta = 3.5$ et $x_0 = 0.8$; (b) Evolution de la suite x_n pour $\beta = 3.56$ et $x_0 = 0.8$	8
1.5	Evolution de la suite x_n pour $\beta = 4$ et $x_0 = 0.8$	9
1.6	(a) Diagramme de bifurcation de la logistique; (b) Exposant de Lyapunov	11
1.7	Aspect aléatoires à long terme de la logistique pour $\beta = 4$	12
1.8	Sensibilité à la condition initiale de la logistique pour deux condition initiale $x_0 = 0.8$ et $x_0 = 0.8000001$	13
1.9	Spectre à large bande de la logistique pour $\beta = 4$	13
1.10	Orbite et histogramme de la transformation logistique avec deux conditions initiales différentes $x_0 = 0.4$ et $x_0 = 0.2$	14
1.11	La transformation inverse de l'intervalle $[0, x]$ par la transformation $L^{-1}(\cdot)$ nous donne $[0, x_1] \cup [x_2, 1]$	17
1.12	Evolution de la densité par la transformation $L(x)$	17
1.13	Orbite et histogramme de la transformation logistique pour différents paramètres	18
1.14	Evolution de la DSP pour la transformation logistique	23
2.1	Transformation skew tent map avec $(\beta = -0.9)$, $(\beta = 0)$ et $(\beta = 0.9)$	26
2.2	La transformation inverse de l'intervalle $[-1, x]$ par la transformation $F^{-1}(\cdot)$ nous donne $[-1, x_1] \cup [x_2, 1]$	27
2.3	Evolution de la densité par la transformation $F(x)$	28
2.4	Séquences chaotiques et histogrammes de la transformation Tent Map pour différent paramètre β	28
2.5	Exposant de Lyapunov de skew tent map lorsque $\beta \in (-1, 1)$	29

2.6	L'évolution de la transformation $F(x)$ vers $F^2(x), F^3(x), \dots, F^k(x)$ [1].	30
2.7	L'évolution d'une petite partie de la transformation (a) $F^k(x)$ vers (b) $F^{k+1}(x)$ [1]	31
2.8	Auto-corrélation de la skew tent map [1]	32
2.9	Densité spectrale de puissance de la skew tent map [1].	33
2.10	Densité spectrale de puissance de la skew tent map [1].	34
2.11	Transformation chaotique (2.29) avec $(\beta = 1, \Phi = 0.35)$, $(\beta = 1, \Phi = 0.44)$ et $(\beta = 0.8, \Phi = 0.9)$	35
2.12	(a) Diagramme de bifurcation pour $\beta = 1, \Phi \in [0, 2]$; (b) Exposant de Lyapunov en fonction de Φ	36
2.13	(a) Diagramme de bifurcation pour $\Phi = 0.9, \beta \in [0, 2]$; (b) Exposant de Lyapunov en fonction de β	37
2.14	$\Phi = 0.35, \beta = 1$	38
2.15	(a) $\Phi = 0.15; \beta = 1$; (b) $\Phi = 0.44; \beta = 1$; (c) $\Phi = 0.9; \beta = 1.9$; (d) $\Phi = 0.9; \beta = 0.8$	39
2.16	Transformation chaotique PWLM-2 avec $(\beta = 0.2)$, $(\beta = 0.5)$ et $(\beta = 0.9)$	40
2.17	La transformation inverse de l'intervalle $[-1, x]$ par la transformation $H(\cdot)$ nous donne $[-1, x_1] \cup [x_2, x_3]$	41
2.18	Evolution de la densité pour la transformation linéaire par morceaux avec différentes valeurs de β	42
2.19	Orbites et histogrammes de la transformation linéaire par morceaux avec plusieurs valeurs du paramètre β et diverses conditions initiales x_0 , c'est à dire pour $x(n, \beta, x_0)$	43
2.20	(a) Diagramme de bifurcation de la transformation (2.32), avec un nombre d'itérations $N = 10000$ en éliminant un transitoire de 5000 itérations. (b) Exposant de Lyapunov estimé avec le logiciel AnT 4.669 pour $N = 10000$. (c) Exposant de Lyapunov déterminé par l'équation (2.40).	45
2.21	Représentations de $H^k(x)$ et $H^{k+1}(x)$	46
2.22	Auto-corrélation en fonction de β	50
2.23	Densité spectrale de puissance $S(w)$ pour différentes valeurs de β	51
2.24	Bande passante de (2.32) en fonction de β	52
3.1	Représentation de la fonction PWLM-3 en fonction des valeurs de Φ et β	57

3.2	Courbes de bifurcation dans le plan de paramètre (Φ, β) de (3.2). Re-présentation de quelques courbes de bifurcation collision de frontière $(S_k^i, k = 1, 2, 3, i = 1, 2, 3, 4, 5. \dots\dots\dots$	58
3.3	L'ordre des cycles est détecté numériquement ce qui donne la bifurcation collision de frontière de la famille de fonction $T(\cdot)$. Les couleurs et les numéros correspondent à l'existence d'orbites périodiques stables dans des régions spécifiques. \dots\dots\dots	65
3.4	L'intervalle $[-1, x]$ est donné par l'inverse de T_1 , (a) : si $x \geq 0$, (b) : si $x < 0$. \dots\dots\dots	66
3.5	(a) Simulation du diagramme de bifurcation de la transformation T_1 avec un nombre d'itérations $N = 10000$ et un transitoire de 5000 itérations. (b) L'estimation des exposants de Lyapunov avec le logiciel AnT 4.669 avec N=10000. \dots\dots\dots	68
3.6	Auto-corrélation pour T_1 lorsque $\beta = -\Phi$. \dots\dots\dots	73
3.7	Densité spectrale de puissance de T_1 lorsque $\beta = -\Phi$. \dots\dots\dots	74
3.8	Les lignes $D_i, i = 1, 2, 3, 4$ choisies pour effectuer les simulations. \dots\dots	74
3.9	Simulation avec $\Phi = 0$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance. \dots	75
3.10	Simulation pour $\Phi = 0.62$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance. \dots\dots\dots	76
3.11	Simulation pour $\beta = 1$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance. \dots	76
3.12	Simulation pour $\beta = \Phi$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance. \dots	77
3.13	Simulation pour $\beta = \Phi - 0.03$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance. \dots\dots\dots	78
4.1	Schéma opérationnel d'un radar [2]. \dots\dots\dots	84
4.2	Fonction d'ambiguïté de la logistique pour différents paramètres β . \dots	91
4.3	Fonction d'ambiguïté de la skew tent map pour différents paramètres β . \dots\dots\dots	92
4.4	Fonction d'ambiguïté de la transformation PWLM-1 pour différents paramètres β et Φ . \dots\dots\dots	93

4.5	Fonction d'ambiguïté de la transformation PWLM-3 pour différents paramètres β et Φ	94
4.6	Simulation pour différents transformations (Skew tent map, PWLM-1, PWLM-2 et la somme $s_n = (x_n + y_n + z_n)/3$) : (1) Orbite; (2) Densité spectrale de puissance; (3) Fonction d'ambiguïté.	96

Abréviation

BP	Bande passante
DSP	Densité spectrale de puissance
FA	Fonction d'ambiguïté
FP	Frobenius-Perron
PWLM	Piecewise Linear Map
Radar	RAdio Detection And Ranging
SAC	Séquence d'autocorrélation
SCI	Sensibilité aux conditions initiales
TFTD	Transformée de Fourier à Temps Discret

Introduction Générale

En 1948, Shannon a introduit le concept général d'entropie de l'information, ce qui lui a permis d'évaluer la quantité d'information maximale qu'on pouvait transmettre dans un canal donné. Il a également montré qu'en utilisant une stratégie de codage numérique adéquat, il était possible de transmettre les informations de façon que le récepteur soit en mesure de restaurer le message original bruité sans perte d'information, sous réserve de réduire la vitesse de transmission des informations [3]. Dans les années 1980, L.O. Chua a réalisé un circuit électrique permettant d'obtenir des signaux chaotiques [4].

Les signaux chaotiques sont des signaux bornés, apériodiques et qui possèdent une sensibilité aux conditions initiales (SCI) [5]. La SCI signifie qu'une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial x_0 va être rapidement amplifiée pour obtenir deux signaux très différents. En s'appuyant sur ces travaux, le chaos a fait l'objet de nombreuses applications dans plusieurs domaines scientifiques dont les télécommunications qui ont donné lieu à beaucoup de travaux de recherche ces dernières années (par exemple, en traitement de la voix [6, 7] ou la cryptographie [8, 9] ou l'accès multiple par répartition en code [10, 11]). Des travaux récents pour la sécurisation des données par le chaos ont été orientés vers la conception de nouveaux algorithmes qui assurent une sécurité fiable tout en minimisant le coût du temps de calcul et la perte d'information.

Au cours des dernières années, plusieurs travaux se sont intéressés à l'analyse spectrale des différentes transformations chaotiques en raison de l'insuffisance de fréquences disponibles pour les communications et des bandes des fréquences limitées dans les médias guidées. Une grande partie de la technologie existante est basée sur le multiplexage en fréquence et la bande passante du signal transmis qui est un paramètre essentiel pour la planification d'un système de communication. D'après les publications existantes, les signaux chaotiques sont caractérisés par une séquence d'autocorrélation (SAC) impulsive et ils sont à large bande de fréquence [12–15]. Mais, il y a quelques travaux qui ont pu déterminer analytiquement l'autocorrélation

et le spectre de quelques transformations chaotiques [1, 16], des spectres passe bas et passe haut ont été obtenus.

Le but de cette thèse est d'étudier la densité spectrale de puissance (DSP) des signaux chaotiques générés par certaines fonctions unidimensionnelles. Les transformations étudiées sont la logistique [17] et quelques transformations linéaires par morceaux (PWLM-1, PWLM-2 et PWLM-3). La transformation logistique a été choisie puisqu'elle est utilisée dans plusieurs applications comme le tatouage, la cryptographie et les télécommunications. Le choix des transformations linéaire par morceaux est lié au comportement chaotique varié des signaux générés par ces transformations. De plus, les fonctions linéaires par morceaux peuvent avoir une densité uniforme invariante, ce qui simplifie les calculs analytiques et le problème des estimations. D'autre part, l'étude des caractéristiques spectrales des signaux chaotiques a été peu abordée, ce qui est la principale motivation de nos travaux de thèse. Dans nos travaux de thèse, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques à temps discret [5].

Le présent mémoire est structuré en quatre chapitres :

Le chapitre 1 regroupe les définitions des concepts utilisés tout au long de ce manuscrit. Nous introduisons quelques notions importantes pour les signaux chaotiques comme l'exposant de Lyapunov, le diagramme de bifurcation, la densité de probabilité et la DSP en donnant l'exemple de la transformation logistique.

Le chapitre 2 donne les calculs analytiques de l'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance de la transformation skew tent map. Ensuite, nous avons étudié la transformation PWLM-1 (Piecewise Linear Map) en simulant la SAC et la DSP. Les propriétés de la transformation PWLM-2 sont données analytiquement avec un nombre de pentes plus complexe.

Le chapitre 3, à travers l'étude de la PWLM-3, permet de trouver une relation entre le spectre et l'existence des orbites périodiques au-delà de la bifurcation de collision de frontière qui a donné naissance au chaos.

Le chapitre 4 présente le système Radar (RAdio Detection And Ranging) et donne les différents composants d'émission et de réception. Nous simulons la fonction d'ambiguïté (FA) des transformations étudiées dans ce manuscrit en faisant varier les paramètres de bifurcation. Nous proposons un multiplexage fréquentiel des transformations chaotiques en déterminant la fonction d'ambiguïté du signal multiplexé.

Une conclusion générale et les perspectives de ce travail sont données dans le dernier chapitre.

Chapitre 1

Systèmes dynamiques discrets

1.1 Introduction

Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps de telle façon qu'il soit déterministe et son avenir ne dépend que du passé ou du présent [5]. Ces systèmes ont commencé à être étudiés à partir du dix-huitième siècle, avec le développement des techniques de résolution d'équations différentielles [5]. Avec les techniques trouvées, le comportement asymptotique d'une solution limite peut converger vers un point fixe, vers une solution périodique ou vers une oscillation quasi-périodique. Une solution quasi-périodique se produit dans des systèmes contenant des fréquences naturelles incommensurables entre elles, c'est à dire dont le rapport est un nombre irrationnel [5].

À la fin du dix-neuvième siècle, le Français H. Poincaré a introduit l'étude des propriétés qualitatives des solutions grâce à des techniques géométriques et topologiques. Certaines de ces études ont conduit à la définition du terme "chaos" quelques décennies plus tard. Les trajectoires qui décrivent certains corps du système solaire ont les caractéristiques d'un signal chaotique : apériodiques et sensibles aux conditions initiales [5]. Depuis, des nombreuses études ont été réalisées sur les systèmes dynamiques présentant un comportement chaotique. Certains concernent la convection de Rayleigh-Bénard en 1916 [5], le modèle de turbulences de Lorenz en 1963 [18] et les travaux du physicien Mitchell Feigenbaum en 1978 [19].

Le premier travail qui a introduit le mot "chaos" avec cette signification était celui de Li and Yorke [20]. Actuellement, un grand nombre de chercheurs dans des domaines de recherche très différents utilisent des signaux chaotiques. De nombreuses applications peuvent être trouvées dans [14, 19].

Ce chapitre présente les principaux concepts liés aux systèmes dynamiques et aux signaux chaotiques. Sont également introduites les nomenclatures et les définitions utilisés dans les chapitres suivants. Nous introduisons les concepts liés aux systèmes unidimensionnels à temps discret dans la section 1.2. Dans la section 1.3, nous présentons les notions de base sur les signaux chaotiques discrets et nous introduisons les notions de diagramme de bifurcation et d'exposant de Lyapunov. Dans la section 1.4 nous rappelons ce qu'est une densité de probabilité. Dans la section 1.5, la densité spectrale de puissance est rappelée.

1.2 Système dynamique discret

Cette section introduit les concepts fondamentaux des systèmes dynamiques unidimensionnels à temps discret et les notations qui sont utilisés tout au long de ce travail. Ces définitions sont issues des références [5, 21]. Nous considérons un système dynamique constitué d'un ensemble d'états possibles tel que l'état actuel peut être déterminé en fonction des états précédents. Un tel système est appelé "Map" lorsqu'il est à temps discret. Une map unidimensionnel $F(\cdot)$ est une fonction définie sur un domaine $U \subset \mathbb{R}$. Cette map définit un système dynamique qui est représenté par :

$$X_{n+1} = F(X_n, \beta) \tag{1.1}$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $X_n \in \mathbb{R}^p$, $p = 1, 2, \dots$ tel que p est la dimension de la transformation (1.1) et β est un vecteur de paramètres réels. L'espace \mathbb{R}^p est appelé espace d'état.

La solution de cette transformation ponctuelle (1.1) est donnée par la limite d'une suite de points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ avec X_0 une condition initiale ; les points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ forment une orbite ou trajectoire discrète de phase. Les transformations ponctuelles peuvent posséder différentes types de singularités [22].

Dans notre cas, nous sommes intéressés par les transformations unidimensionnelles avec $p = 1$.

Exemple : La logistique

La transformation logistique est un exemple très classique [5], elle est définie de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ par :

$$x_{n+1} = L(x(n)) = \beta x(n)(1 - x(n)) \tag{1.2}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (0, 1)$ et $\beta \in (0, 4)$.

1.2.1 Points fixes

Un point fixe est défini par :

$$x^* = F(x^*, \beta) \quad (1.3)$$

Par rapport à la stabilité, un point fixe d'une transformation peut être classé comme :

- asymptotiquement stable ou attractif.
- instable ou répulsif.

S'il y a un $\Delta > 0$ tel que pour chaque x_0 au voisinage de $N_\Delta(x^*) \triangleq (x^* - \Delta, x^* + \Delta)$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x_0) = x^*$, alors x^* est asymptotiquement stable.

S'il existe un $\Delta > 0$ tel que pour chaque $x_0 \in N_\Delta(x^*)$ avec $x_0 \neq x^*$, $F^k(x_0) \notin N_\Delta(x^*)$ pour certains $k \in \mathbb{N}$, alors x^* est instable.

La stabilité du point fixe peut presque toujours être vérifiée à l'aide de $F'(x^*)$. Pour un point x proche de x^* , le développement de Taylor de $F(x)$ autour de x^* nous donne :

$$\begin{aligned} F(x) &\approx F(x^*) + F'(x^*)(x - x^*) \Rightarrow F(x) - F(x^*) \approx F'(x^*)(x - x^*) \\ &\Rightarrow |F(x) - x^*| \approx |F'(x^*)| |(x - x^*)| \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si $|F'(x^*)| < 1$, à chaque itération par F , $F(x)$ et $F(x^*) = x^*$ se rapprochent à une vitesse de l'ordre de $|F'(x^*)|$, alors x^* est asymptotiquement stable.

Si $|F'(x^*)| > 1$, les orbites divergent avec une vitesse de l'ordre de $|F'(x^*)|$, alors x^* est instable.

Si $|F'(x^*)| = 1$, rien ne peut être dit concernant la stabilité du point fixe en se basant uniquement sur $|F'(x^*)|$.

Exemple : La logistique

Lorsque $\beta \in [0, 1)$, la transformation logistique possède un point fixe attractif $x^* = 0$ pour toute condition initiale comprise entre 0 et 1. La récurrence logistique est illustrée dans la Figure 1.1a. Dans la Figure 1.1b, en prenant $\beta = 0.7$ et $x_0 = 0.8$, la suite x_n converge rapidement vers la valeur $x^* = 0$.

Si $\beta \in [1, 3)$, la logistique est illustrée dans la Figure 1.2a ; on obtient une convergence rapide vers un point fixe $x^* = \frac{(\beta-1)}{\beta}$ car la dérivée en x^* est inférieure à 1. Dans la Figure 1.2b, en prenant $\beta = 1.4$ et $x_0 = 0.8$, la suite x_n converge rapidement vers la valeur $x^* = 0.285$.

Lorsque $3 < \beta$, le point fixe $x^* = \frac{(\beta-1)}{\beta}$ devient instable puisque $|L'(x)| > 1$ [5].

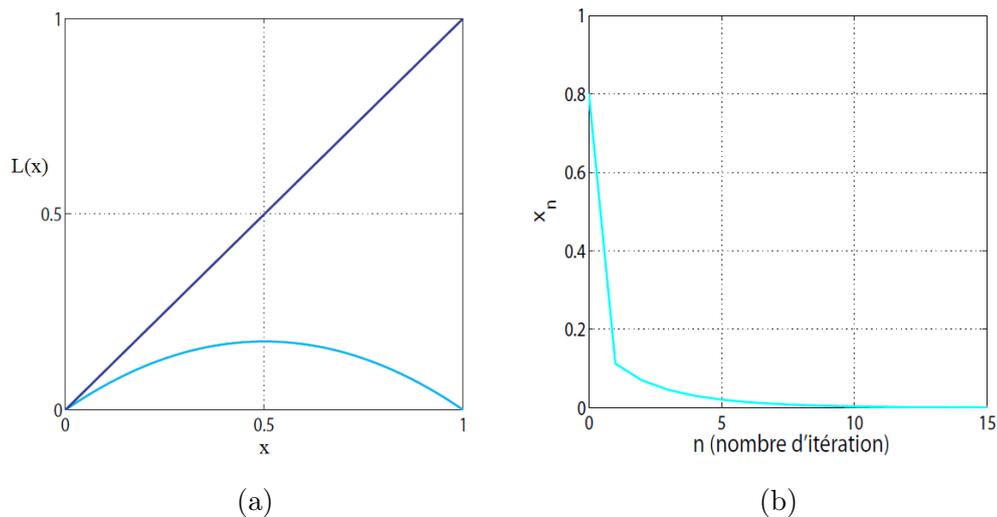


FIGURE 1.1 – L’origine attire toutes conditions initiales dans $[0, 1]$.

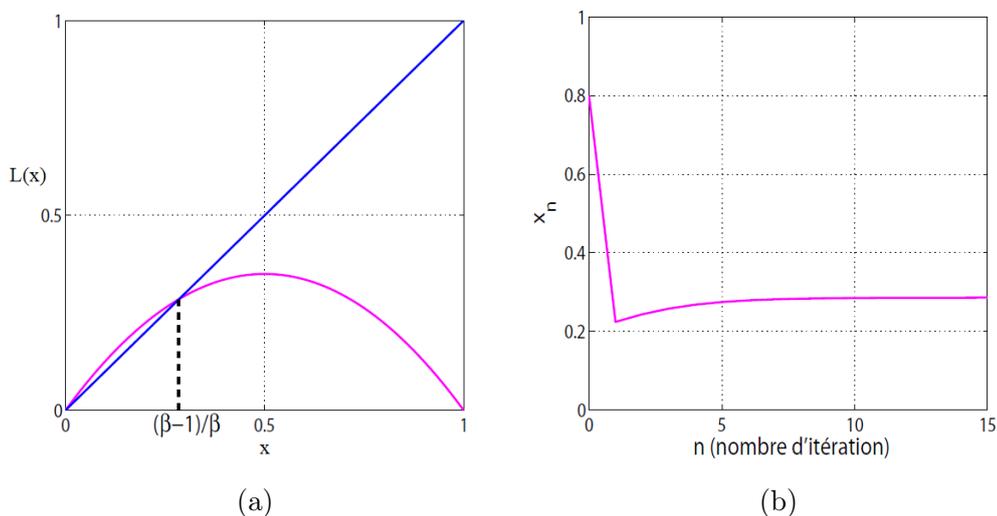
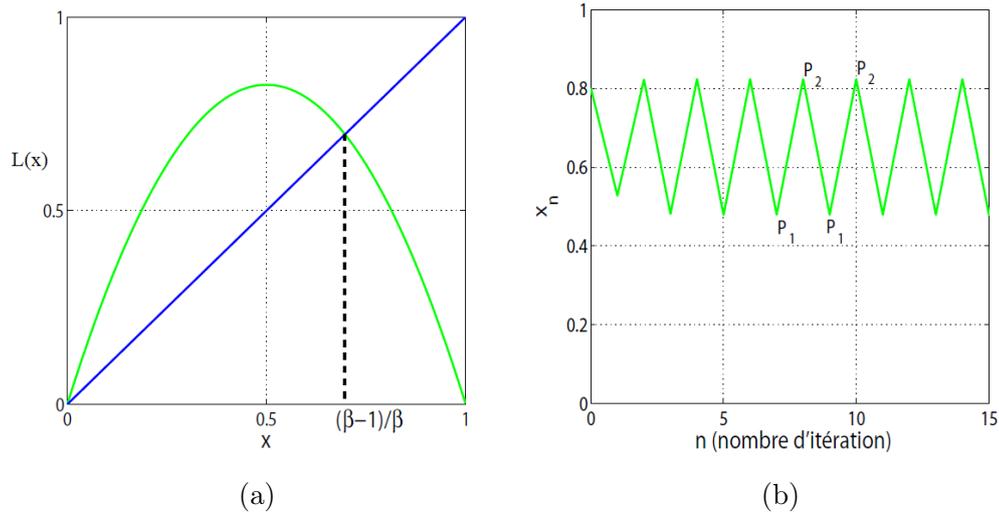


FIGURE 1.2 – Le point fixe stable $\frac{(\beta-1)}{\beta}$ attire toutes les conditions initiales dans $[0, 1]$.

1.2.2 Orbites périodiques

Certaines transformations gênèrent des orbites périodiques, c’est à dire que les points qui composent sa trajectoire forment un ensemble fini de valeurs différentes qui se répètent au fil des itérations. Par exemple, si nous avons $F(x_1^*) = x_2^*$ et $F(x_2^*) = x_1^*$ alors l’orbite est périodique de période-2 et la trajectoire est composée des points $\{x_1^*, x_2^*, x_1^*, x_2^* \dots\}$. Nous pouvons l’écrire à l’aide de cette equation :

$$F^k(x^*) = x^* \tag{1.5}$$


 FIGURE 1.3 – Le point fixe $\frac{(\beta-1)}{\beta}$ est instable.

En ce cas x^* est un point périodique de période k , étant donné que k est le plus petit entier pour lequel 1.5 soit valide. Notons que x^* est un point fixe de $F^k(\cdot)$. Les points qui sont proches de l'orbite périodique peuvent être attirés ou repoussés par l'orbite, de la même façon qu'un point fixe de $F(\cdot)$. Soit $F(\cdot)$ une transformation et soit X^* un point périodique de période k de cette transformation, les orbites périodiques de période k sont :

- asymptotiquement stables si x^* est attractif pour la transformation $F^k(\cdot)$
- instables si x^* est instable pour la transformation $F^k(\cdot)$.

Soit l'orbite de période k constitué des points $\{x_1^*, x_2^* \dots x_k^*\}$. L'application de la règle de dérivation en chaîne nous donne :

$$\begin{aligned}
 (F^k)'(x_1^*) &= (F(F^{k-1}))'(x_1^*) = F'(F^{k-1}(x_1^*)) (F^{k-1})'(x_1^*) \\
 &= F'(F^{k-1}(x_1^*)) F'(F^{k-2}(x_1^*)) \dots F'(x_1^*) \\
 &= F'(x_k^*) F'(x_{k-1}^*) \dots F'(x_1^*)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Nous pouvons raisonner de la même manière que pour la stabilité du point fixe, c'est-à-dire si $|F'(x_1^*) F'(x_2^*) \dots F'(x_k^*)| < 1$, l'orbite $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ est asymptotiquement stable. Si $|F'(x_1^*) F'(x_2^*) \dots F'(x_k^*)| > 1$, les orbites proches divergent et l'orbite (x_1^*, \dots, x_k^*) est instable. Si $|F'(x_1^*) F'(x_2^*) \dots F'(x_k^*)| = 1$, rien ne peut être dit à propos de la stabilité.

Exemple : La logistique

Si $\beta \in (3, 1 + \sqrt{6})$, la trajectoire converge vers un cycle d'ordre-2 (P_1, P_2) , comme dans la Figure 1.3. Lorsque β dépasse la valeur de $1 + \sqrt{6} \approx 3.45$, le cycle d'ordre-2

devient instable et nous obtenons un cycle d'ordre-4 (P_1, P_2, P_3, P_4), puis un cycle d'ordre-8 (P_1, \dots, P_8) qui sont illustrés dans la Figure 1.4. Pour des valeurs de β un peu plus grandes, la détermination des points périodiques de $L(x)$ devient de plus en plus compliquée. De nouvelles orbites périodiques apparaissent lorsque β augmente de 3.45 à 4. On obtient une succession périodiques attractives d'ordre $2^n, n = 1, 2, 3, \dots$; un tel phénomène est appelé "Cascade de doublements de période".

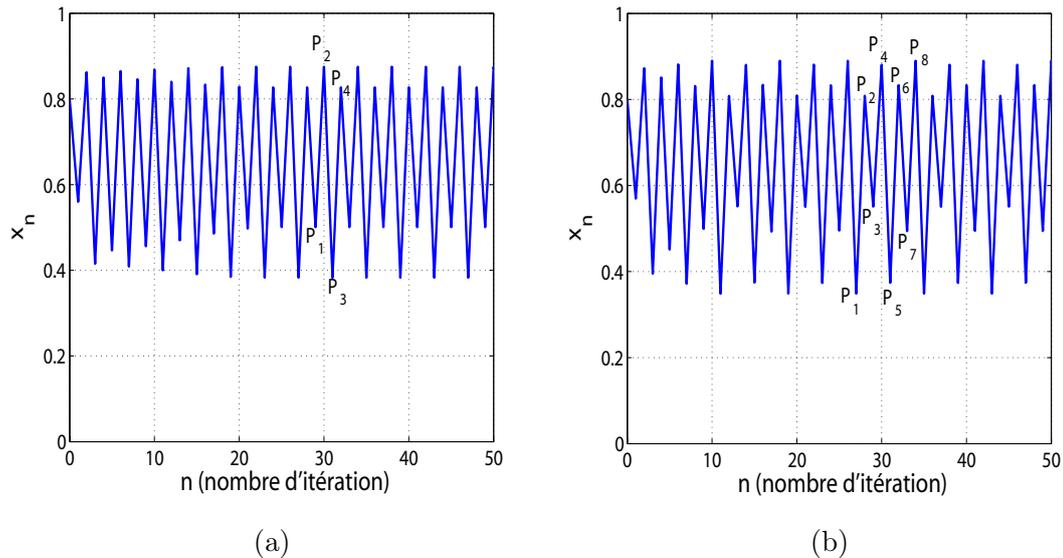


FIGURE 1.4 – (a) Evolution de la suite x_n pour $\beta = 3.5$ et $x_0 = 0.8$; (b) Evolution de la suite x_n pour $\beta = 3.56$ et $x_0 = 0.8$

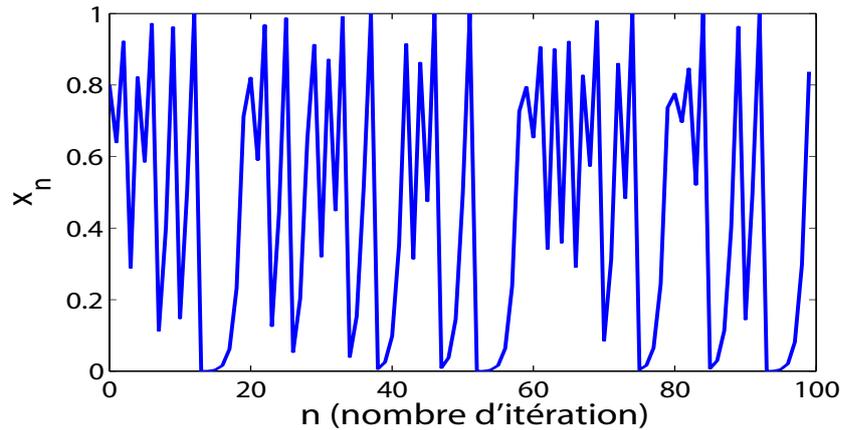
1.2.3 Trajectoires irrégulières

Lorsque la trajectoire ne passe jamais par deux points deux fois, on dit qu'on est en présence d'une trajectoire irrégulière.

Exemple : La logistique

Pour une valeur critique $\beta \geq \beta_c$ avec $\beta_c = 3.57$, la suite x_n ne présente plus une structure ordonnée [23], la suite x_n nous apparaît comme cycle d'ordre infini et nous obtenons des orbites différentes pour chaque condition initiale x_0 . Pour des valeurs de $\beta < \beta_c$, la suite converge vers un ensemble fini de points quelle que soit la valeur de $x_0 \in]0, 1]$. Pour $\beta \geq \beta_c$ le système devient aperiodique.

La Figure 1.5 présente l'évolution de la suite dans le cas où β est supérieur à la valeur critique β_c . Le système décrit par la transformation logistique se trouve dans un régime aperiodique, c-à-d contrairement aux exemples précédents, la suite


 FIGURE 1.5 – Evolution de la suite x_n pour $\beta = 4$ et $x_0 = 0.8$

ne converge ni vers un point fixe ni vers une solution périodique [23]. Nous pouvons remarquer que le paramètre β joue un grand rôle dans l'évolution de la dynamique vers le chaos, ce paramètre est appelé paramètre de bifurcation.

1.2.4 Bifurcation

Un des problèmes fondamentaux pratiques de la dynamique non linéaire est l'étude des bifurcations dans l'espace des paramètres. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système quand le paramètre Φ traverse une valeur critique Φ_b . Une bifurcation peut correspondre à l'apparition ou la disparition de nouvelles singularités, un changement dans la stabilité du système ou dans la forme d'un attracteur chaotique.

La Figure 1.6(a) illustre le comportement des orbites de la logistique en variant le paramètre β entre $(0, 4)$. Ce diagramme de bifurcation est généré par ordinateur en répétant la procédure suivante :

- Choisir une valeur de β en commençant par $\beta = 0$.
- Choisir x_0 au hasard dans $(0, 1)$.
- Calculer l'orbite $L(x_0)$.
- Ignorer les 100 premières itérations et tracer l'orbite commençant par l'itération 101.
- Incrémenter β .

Après 100 itérations, les points tracés convergent vers un point fixe ou un cycle d'ordre- n ou un attracteur étrange. Le diagramme de bifurcation nous permet de voir la naissance, l'évolution et la disparition des points d'attractions [5].

1.2.5 Caractérisation des solutions d'un système dynamique discret

Certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux petites variations de leur condition initiale. Ces variations peuvent rapidement prendre d'énormes proportions. Le mathématicien russe Alexander Lyapunov a introduit une quantité permettant de mesurer la vitesse à laquelle ces petites variations peuvent s'amplifier. Cette quantité appelée "exposant de Lyapunov" mesure le degré de sensibilité d'un système dynamique. Plus formellement, nous disons que l'orbite $x(n, x_0)$ est sensible aux variations des conditions initiales s'il existe $d > 0$ telle que toute la région $N_\Delta(x_0)$ contient un point x vérifiant $|F^k(x) - F^k(x_0)| \geq d$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Une façon pratique et opérationnelle pour vérifier la sensibilité aux conditions initiales des orbites se fait par la détermination de l'exposant de Lyapunov λ . L'exposant de Lyapunov mesure la vitesse moyenne de divergence entre deux orbites proches. Comme dans l'évaluation de la stabilité des orbites périodiques, le calcul de h se fait via (1.6). Si la limite existe, le nombre de Lyapunov est défini par :

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=0}^{N-1} |F'(x(n))| \right)^{\frac{1}{N}} \quad (1.7)$$

Si $h > 1$, les orbites proches divergent avec une vitesse d'environ h , ainsi l'orbite $x(n)$ possède une sensibilité à la condition initiale. Si h existe alors l'exposant de Lyapunov λ est défini par :

$$\lambda = \ln(h) \quad (1.8)$$

La multiplication de N termes peut conduire à un nombre trop grand ou trop petit pour être calculé, aussi nous considérons le logarithme népérien. L'insertion de l'équation (1.7) dans (1.8) donne :

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln(|F'(x(n))|) \right) \quad (1.9)$$

Comme nous l'avons déjà écrit, lorsque $h > 1$, il y a une SCI. Donc, l'orbite présente une SCI si $\lambda = \ln(h) > 0$.

Si l'orbite $\{x_1, x_2, \dots\}$ du transformation $F(\cdot)$ satisfait $F'(x_i) \neq 0$ pour tout i et converge asymptotiquement vers l'orbite périodique $\{y_1, y_2, \dots\}$, alors les deux orbites ont des exposants de Lyapunov identiques en supposant que les deux existent (le résultats est démontré dans [5]).

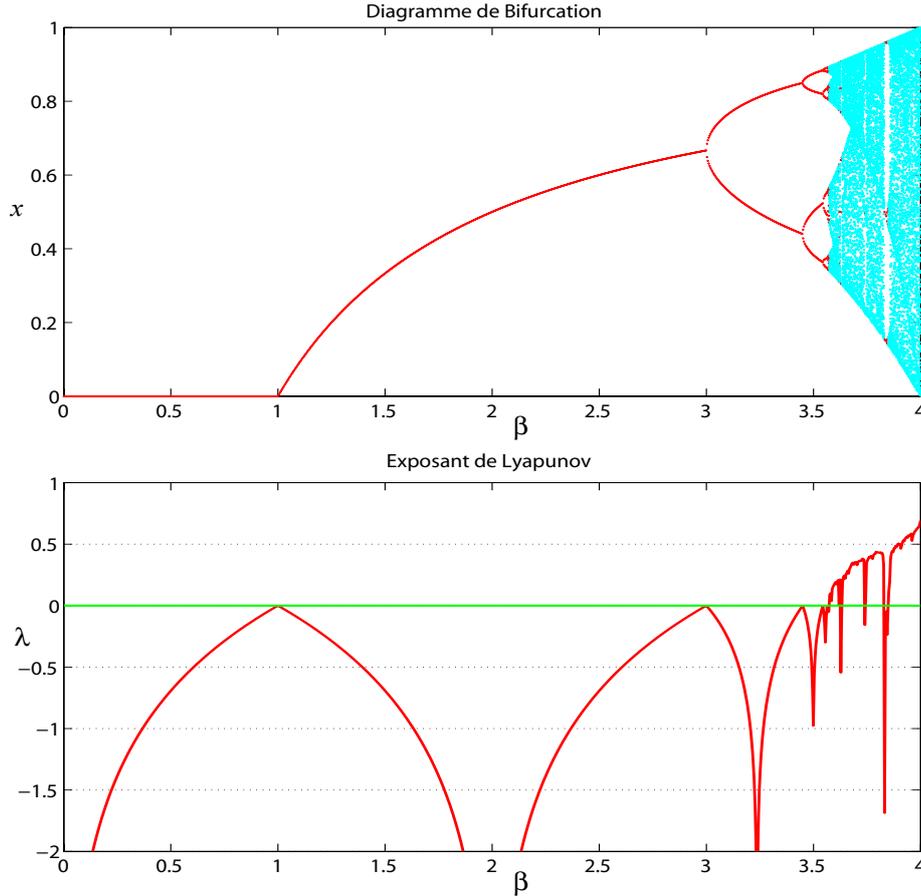


FIGURE 1.6 – (a) Diagramme de bifurcation de la logistique ; (b) Exposant de Lyapunov

Nous pouvons changer la sommation de l'équation 1.9 par une intégrale si la transformation $F(\cdot)$ est ergodique [24]. Dans ce cas, l'exposant de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \ln |F'(x(n))| \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln |F'(x(n))| FP^*(\rho(x)) dx \end{aligned} \quad (1.10)$$

avec $FP^*(\rho(x))$ la densité de probabilité invariante.

Une autre notion importante pour l'étude des signaux chaotiques est la conjugaison.

Définition 1. Les transformations $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont conjuguées si elles sont liées par la relation suivante $C \circ F(\cdot) = G(\cdot) \circ C$ avec C bijective et continue [5].

Les signaux générés par des transformations conjuguées possèdent les mêmes

caractéristiques en termes dynamiques. Si une orbite a un certain exposant de Lyapunov, alors les orbites générés par une transformation conjuguée possèdent le même exposant de Lyapunov. Si un signal est périodique, alors le signal conjugué est également périodique avec la même période. Ainsi, si les propriétés d'une transformation sont difficiles à déterminer, il vaut mieux utiliser un modèle plus pratique à l'aide d'une transformation conjuguée.

1.3 Indices de chaos

Le chaos est un comportement d'un système non linéaire caractérisé principalement par [14] :

1. Aspect aléatoires à long terme : la trajectoire du système dans l'espace ne converge pas vers les points fixes (état stable), vers les orbites périodiques ou vers des solutions quasi-périodiques lorsque le temps tend vers l'infini.

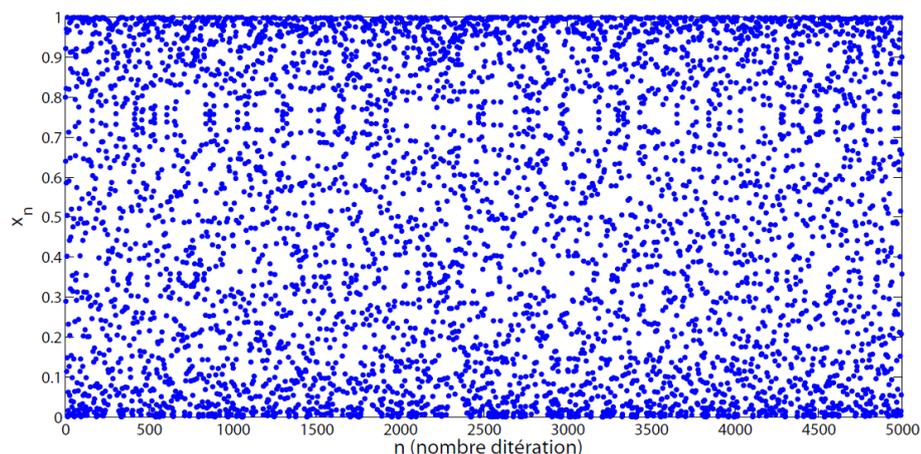


FIGURE 1.7 – Aspect aléatoires à long terme de la logistique pour $\beta = 4$

2. Sensibilité aux conditions initiales (SCI) : deux trajectoires, issues de deux conditions initiales aussi proches, divergent à long terme. La SCI est une des plus importantes caractéristiques des signaux chaotiques puisque la prévision d'un signal chaotique est très difficile sans la condition initiale. Dans un système pratique, ce n'est pas possible de prédire le comportement du système avec précision après un court laps de temps si on n'a pas une connaissance exacte de la condition initiale [19]. Par conséquent, il est toujours possible de trouver un point suffisamment proche de la condition initiale x_0 dont les orbites liées sont relativement éloignées de $x(n, x_0)$ après quelques itérations (Figure 1.8).

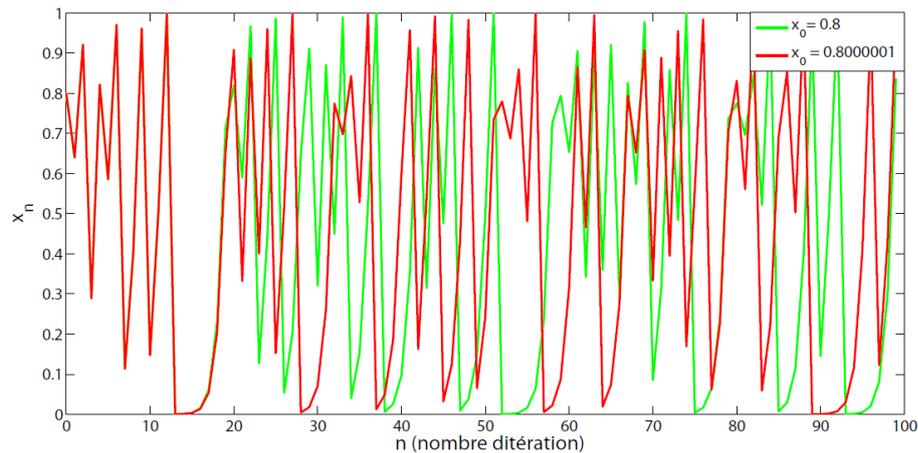


FIGURE 1.8 – Sensibilité à la condition initiale de la logistique pour deux condition initiale $x_0 = 0.8$ et $x_0 = 0.8000001$

3. Spectre à large bande : le spectre de Fourier d'un signal chaotique est un spectre à large bande, analogue à celui d'un bruit blanc.

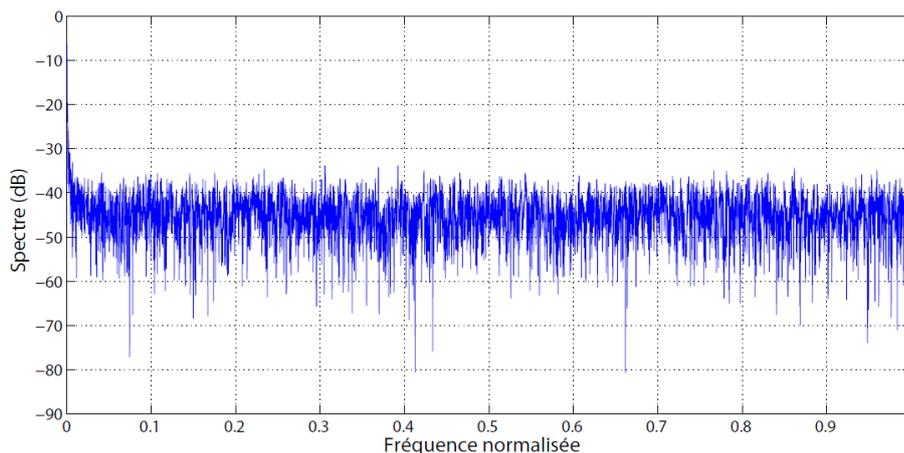


FIGURE 1.9 – Spectre à large bande de la logistique pour $\beta = 4$

1.4 Densité de probabilité invariante d'une transformation chaotique

Une autre notion qui peut être utilisée pour caractériser les signaux chaotiques est la densité de probabilité. Puisque les signaux chaotiques sont caractérisés par la SCI, on ne peut pas prédire le signal après une courte période de temps [19]. Ainsi, dans les systèmes pratiques, il est intéressant de considérer ces signaux comme aléatoires [24, 25]. Pour cela, il est extrêmement utile de connaître la probabilité de

visite de chaque intervalle, c.à.d. la densité invariante du signal dans l'intervalle U . L'orbite chaotique d'une transformation quelconque, avec des conditions initiales différentes, donne des comportements distincts dans le domaine temporel. D'autre part, les points qui composent chaque trajectoire sont distribués à peu près de la même manière dans le domaine U [24]. La densité invariante peut être construite en simulant plusieurs histogrammes avec différentes conditions initiales et ensuite en faisant la moyenne de plusieurs orbites.

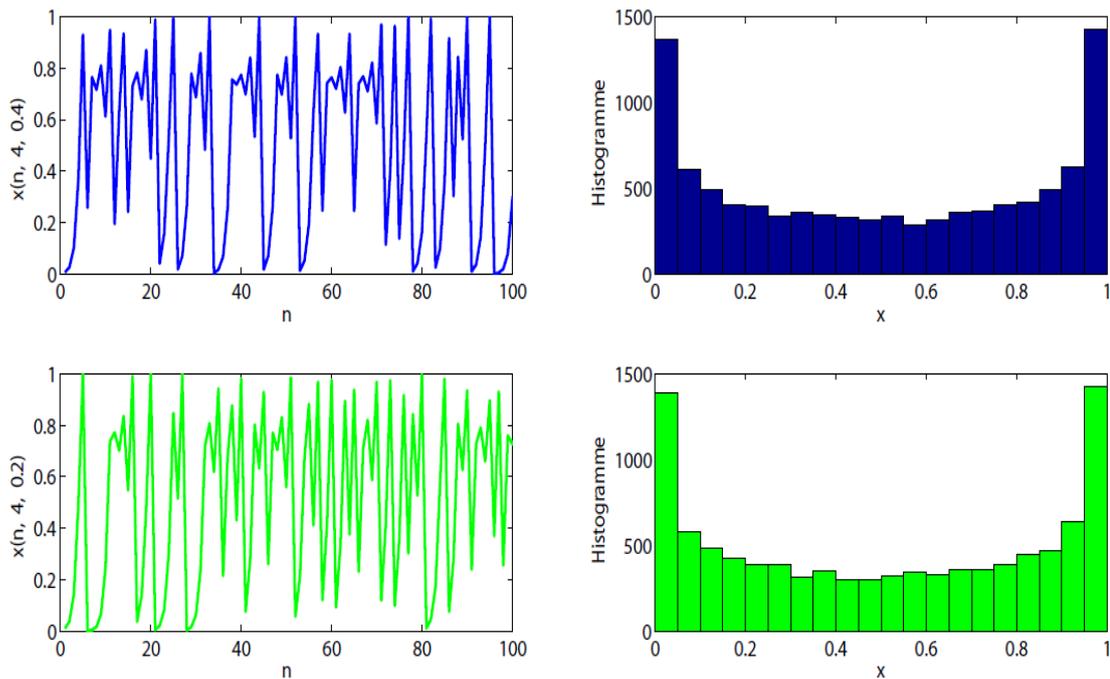


FIGURE 1.10 – Orbite et histogramme de la transformation logistique avec deux conditions initiales différentes $x_0 = 0.4$ et $x_0 = 0.2$

Un histogramme représente la fréquence d'apparition des valeurs qui constituent la trajectoire le long de l'intervalle U . L'intervalle U est divisé en N_b intervalles de même longueur disjoints. Donc, l' i^{eme} intervalle de U (en éliminant le point $+1$) est donné par l'équation suivante :

$$U_i = \left[\frac{2(i-1)}{N_b} - 1, \frac{2i}{N_b} - 1 \right] \quad \text{avec } i = 1, \dots, N_b \quad (1.11)$$

Sur chaque intervalle, une barre représente les valeurs observées [24] et donne une représentation de la densité invariante de cette transformation. La Figure 1.10 illustre le concept de densité invariante de la transformation logistique. Pour différentes conditions initiales, les signaux ont des comportements différents dans le temps,

mais la répartition des points qui composent ces orbites ont des distributions similaires dans l'intervalle $[0, 1]$, comme le montre la Figure 1.10. La propriété de la densité invariante permet d'étudier les signaux chaotiques comme des fonctions échantillonnées d'un processus stochastique [24]. Prenant K conditions initiales distribués sur l'intervalle U et en faisant une itération de chaque condition à l'aide de la transformation $F(\cdot)$, alors on obtient K nouveaux points. Pour déterminer la densité initiale et finale, il est intéressant d'utiliser la fonction indicatrice I_Δ d'un ensemble $\Delta \subset U$ définie par [24] :

$$I_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Delta; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.12)$$

Considérant tout intervalle $\Delta_0 \subset U$ et un ensemble de K conditions initiales $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0K}$, alors la fonction de densité $\rho_0(u)$ est estimée par :

$$\int_{\Delta_0} \rho_0(u) du \simeq \frac{1}{K} \cdot \sum_{j=1}^K I_{\Delta_0} \cdot x_{0j} \quad (1.13)$$

et pour une densité $\rho_1(u)$, les valeurs $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1K}$ sont itérées par la fonction $F(\cdot)$, on obtient :

$$\int_{\Delta} \rho_1(u) du \simeq \frac{1}{K} \cdot \sum_{j=1}^K I_\Delta \cdot x_{1j} \quad (1.14)$$

pour tout $\Delta \subset U$.

Pour trouver une relation entre ρ_1 et ρ_0 , il est nécessaire d'introduire le concept de fonction inverse d'un intervalle $\Delta \subset U$ en utilisant la transformation $F(\cdot)$.

La fonction inverse d'un intervalle $F^{-1}(\Delta)$ est l'ensemble des points dont l'image par F appartient à Δ .

Donc

$$F^{-1}(\Delta) = \{x | F(x) \in \Delta\} \quad (1.15)$$

Ainsi, pour tout $\Delta \subset U$

$$x_{1j} \in \Delta \text{ si et seulement si } x_{0j} \in F^{-1}(\Delta) \quad (1.16)$$

alors,

$$I_\Delta(F(x)) = I_{F^{-1}(\Delta)}(x) \quad (1.17)$$

avec (1.16), on peut réécrire l'équation (1.14) comme suit :

$$\int_{\Delta} \rho_1(u) du \simeq \frac{1}{K} \cdot \sum_{j=1}^K I_{F^{-1}(\Delta)}(x_{0j}) \quad (1.18)$$

En utilisant les deux equations (1.13) et (1.18), nous obtenons :

$$\int_{\Delta} \rho_1(u) du = \int_{F^{-1}(\Delta)} \rho_0(u) du \quad (1.19)$$

Soit l'intervalle $\Delta \subset U$, avec $\Delta = [a, x]$, nous obtenons une représentation explicite de ρ_1 . Dans ce cas, l'équation (1.19) devient :

$$\int_a^x \rho_1(u) du = \int_{F^{-1}([a,x])} \rho_0(u) du \quad (1.20)$$

En dérivant par rapport à x , nous obtenons :

$$\rho_1(x) = \frac{d}{dx} \int_{F^{-1}([a,x])} \rho_0(u) du \quad (1.21)$$

Il est clair que ρ_1 dépend de ρ_0 , ce qui est indiqué par $\rho_1 = FP(\rho_0)$. De manière plus générale, l'équation (1.21) peut être réécrite sous la forme :

$$FP(\rho(x)) = \frac{d}{dx} \int_{F^{-1}([a,x])} \rho(u) du \quad (1.22)$$

L'équation (1.22) définit l'opérateur de Frobenius-Perron FP associé à la transformation $F(\cdot)$. Il est beaucoup utilisé dans l'étude de l'évolution des densités qui peuvent s'approcher de la densité invariante [24].

Exemple : La logistique

Pour appliquer l'opérateur de Frobenius-Perron (1.22) sur la transformation logistique tel que $\beta = 4$, il faut commencer par trouver la transformation inverse de l'intervalle $[0, x] \subset [0, 1]$:

$$L^{-1}([0, x]) = [0, x_1] \cup [x_2, 1] \quad (1.23)$$

avec $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-x}}{2}$. Les valeurs x_1 et x_2 peuvent être obtenues grâce aux équations de la transformation $L(x)$ comme l'indique la Figure 1.11. En

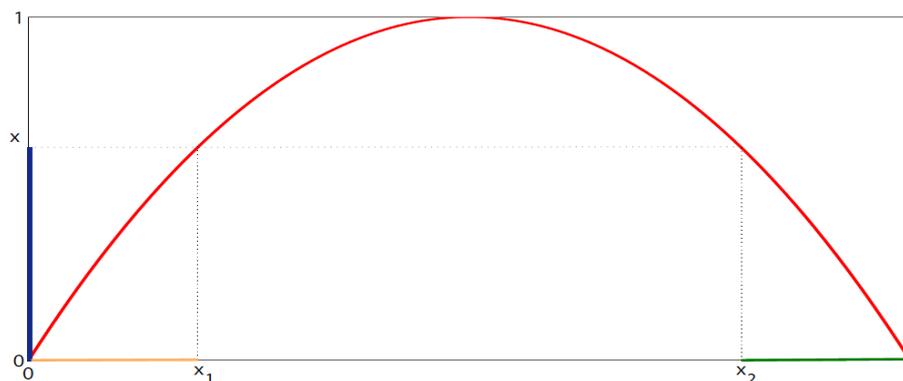


FIGURE 1.11 – La transformation inverse de l'intervalle $[0, x]$ par la transformation $L^{-1}(\cdot)$ nous donne $[0, x_1] \cup [x_2, 1]$

appliquant l'opérateur de Frobenius Perron sur la logistique :

$$\begin{aligned}
 FP(\rho(x)) &= \frac{d}{dx} \int_0^{x_1} \rho(u) du + \frac{d}{dx} \int_{x_2}^1 \rho(u) du \\
 &= \frac{d}{dx} \left[Q\left(\frac{1 - \sqrt{1-x}}{2}\right) - Q(0) + Q(1) - Q\left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left[\rho\left(\frac{1 - \sqrt{1-x}}{2}\right) + \rho\left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

avec Q une primitive.

Nous choisissons la densité initiale $\rho(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$. Alors,

$$FP(\rho(x)) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \tag{1.25}$$

Ainsi,

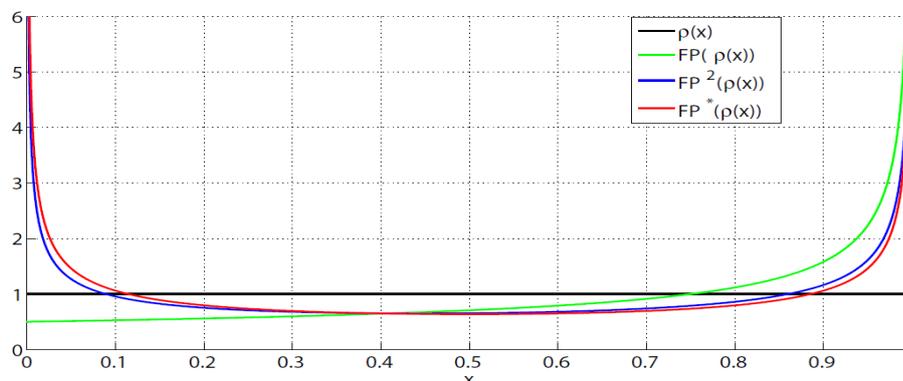


FIGURE 1.12 – Evolution de la densité par la transformation $L(x)$.

$$\begin{aligned}
 FP^2(\rho(x)) &= \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x}}} + \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}}} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{1-x}} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}} \right]
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

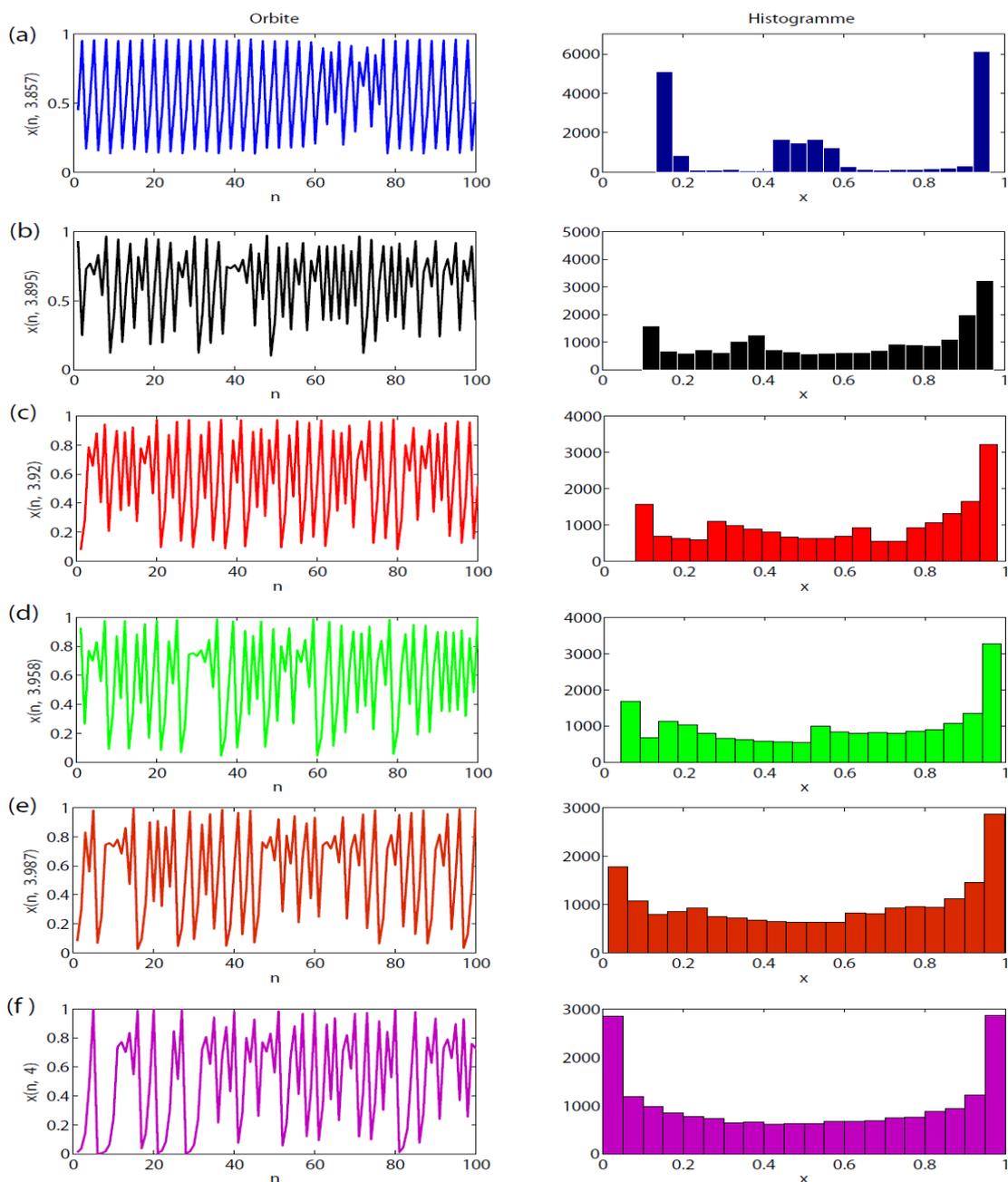


FIGURE 1.13 – Orbite et histogramme de la transformation logistique pour différents paramètres

La Figure 1.12 illustre l'évolution de la densité sur l'intervalle $[0, 1]$ pour la transformation logistique $L(x)$ en initialisant avec la densité uniforme. Lorsqu'on utilise l'équation (1.24) avec $\rho(x) = 1$, alors nous obtenons $FP(\rho(x)) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$. Au bout de quelques itérations, nous pouvons conclure que la densité $FP^*(\rho(x))$ est invariante.

$$FP^*(\rho(x)) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad \text{si } 0 < x < 1 \quad (1.27)$$

La Figure 1.13 illustre les séquences chaotiques et les histogrammes de la transformation logistique avec différents paramètres β . Ces simulations ont été réalisées pour différents conditions initiales avec l'intervalle $U = [0, 1]$ divisé en 20 intervalles de même longueur. On peut observer que les séquences chaotiques possèdent différents comportements dans le domaine temporel, ainsi l'histogramme pour $\beta = 4$ possède la même allure de courbe que la densité $FP^*(\rho(x))$ de la Figure 1.12.

1.5 Analyse spectrale

Les recherches de Pecora et Carroll sur la synchronisation chaotique ont été le point de départ pour les applications de la synchronisation dans le domaine des télécommunications [26]. Grâce à ces recherches, beaucoup d'applications possibles ont vu le jour dans la modélisation analogique et la codification numérique, la cryptographie et plusieurs autres applications qui sont citées dans les références [12–14]. Un exemple intéressant d'application pratique de signaux chaotiques dans le domaine des télécommunications est l'étalement de spectre à séquence directe (DS-SS). Puisque les signaux sont à large bande et dépendent de la sensibilité aux conditions initiales, il est possible de générer des séquences infinies avec une faible intercorrélacion qui peut être maîtrisée dans les systèmes conventionnels pour certaines situations [13, 27].

Un facteur fondamental doit être connu pour la conception des systèmes de communication, c'est le spectre des signaux utilisés et en particulier la bande passante occupée. Avec le grand nombre de systèmes sans fil actuellement utilisés, la disponibilité des fréquences de transmission et réception devient de plus en plus rare pour les communications sans fil. En particulier, des limites liées à la bande passante du signal existent.

Malgré la grande quantité de travaux publiés, il y a peu d'études concernant les caractéristiques spectrales des signaux chaotiques. La densité spectrale de puissance des signaux chaotiques est illustrée graphiquement dans quelques travaux, mais il

n'y a pas d'études détaillées systématiques. Par exemple, l'article [28] présente la densité spectrale de puissance des signaux chaotiques à temps continu, généré par des circuits électriques du troisième ordre, vu à travers un analyseur de spectre. La même étude est donnée dans [29] pour des signaux générés par des circuits électriques du quatrième ordre. Dans [30] on observe des diagrammes de DSP de signaux modulés en temps continu en utilisant des signaux chaotiques. Dans [31] des signaux chaotiques sont utilisés comme séquences chaotiques d'étalement par la technique DS-SS. Dans [14] la DSP des signaux chaotiques est étudiée en utilisant la DS-SS pour des signaux à temps discret. Dans [32], les auteurs présentent sous forme de graphiques la DSP des signaux modulés à l'aide de chaos qui sont utilisés dans la communication de systèmes optiques. Dans [33], une étude propre de la DSP des signaux chaotiques avec intermittence.

Dans [16], S.Tsekeridou et al ont détaillé le calcul de l'auto-corrélation et du spectre de signaux issus de la Transformation Bernoulli pour une utilisation dans le tatouage. Le tatouage avec la transformation Bernoulli peut être généré avec des propriétés spectrales bien définies pour résister aux attaques passe-bas. Dans [34], M.Eisencraft et al. ont étudié la Skew Tent Map avec un seul paramètre. Ils ont constaté que lorsque le paramètre de bifurcation varie alors il y a des modifications du spectre entre passe-bas, large-bande et passe-haut. Ensuite, ils ont appliqué ces résultats à de la modulation et démodulation. Dans [1], M.Eisencraft et al. ont obtenu des expressions analytiques de la séquence d'auto-corrélation (SAC), de la densité spectrale de puissance (DSP) et de la bande passante de signaux chaotiques générés par la Skew Tent Map. Ils ont déduit que la bande passante dépend des exposants de Lyapunov (la bande passante est plus large lorsque l'exposant de Lyapunov augmente).

L'analyse spectrale des signaux est utilisée dans plusieurs domaines pour extraire l'information et vérifier la distribution d'énergie ou de puissance dans le domaine fréquentiel [7]. Des modèles spectraux sont utilisés dans de nombreux processus de modulation, traitement de la parole, compression et reconnaissance vocale [6]. En médecine, l'analyse spectrale des électrocardiogrammes et des électroencéphalogrammes peut fournir des informations utiles au diagnostic [7]. L'analyse spectrale des signaux est cruciale dans le domaine des télécommunications. Les spectres doivent être connus et bien définis, en raison de l'insuffisance des fréquences disponibles pour la communication et la limitation des bandes de fréquences dans les médias guidées. Pour étudier le spectre d'un signal chaotique, on peut le considérer comme un signal en temps discret à la fois déterministe et aléatoire. Les principales

références utilisées pour le calcul du spectre d'un signal chaotique sont [7, 35, 36].

1.5.1 Densité spectrale de puissance

Dans la partie pratique du domaine de l'ingénierie des systèmes, les signaux sont considérés comme étant aléatoires. Dans d'autres cas, le signal utile est ajouté à un signal non désiré et qui est considéré comme aléatoire (bruit). Ces signaux peuvent être évalués grâce à la moyenne, la variance et la corrélation [25]. Mathématiquement, ce signal est décrit comme étant une séquence aléatoire qui se compose d'un ensemble de réalisations possibles et tel que chaque signal a une probabilité d'occurrence [7, 37]. Ces séquences forment un processus stochastique ou aléatoire. La TFTD d'un signal aléatoire n'existe pas puisque le signal ne possède pas une énergie finie. Un signal aléatoire a généralement une puissance moyenne finie, alors il peut être caractérisé par $S(w)$ une densité spectrale de puissance moyenne (DSP) [7]. La moyenne d'un processus aléatoire est prise sur l'ensemble de fonctions échantillonnées. Si, de plus, les moyennes temporelles sont identiques aux moyennes d'ensemble on dit que le processus est ergodique. Dans ces conditions, le phénomène est entièrement décrit par une seule réalisation.

Les signaux chaotiques générés par une transformation linéaire par morceaux peuvent être considérés comme issus d'un processus stochastique ergodique. Pour une valeur fixe de β , une fonction peut être associée à une condition initiale x_0 pour générer une séquence chaotique par itérations de $F(\cdot)$. Alors, la détermination de la séquence d'auto-corrélation peut permettre de calculer la DSP [1, 38]. L'auto-corrélation $R(k)$ d'un entier k est défini par :

$$R(k) \equiv E[x(n)x(n+k)] \quad k \geq 0, \forall n \geq 0. \quad (1.28)$$

Afin de simplifier la notation en calculant l'auto-corrélation, nous définissons [1] :

$$x(n) = X \quad \text{and} \quad x(n+k) = F^k(X) = Y \quad (1.29)$$

sachant que $F^k(X)$ est le k^{eme} itéré de la fonction F appliquée à X . La densité de probabilité conjointe $p(X, Y)$ est donnée par :

$$p(X, Y) = FP^*(\rho(X))\delta(Y - F^k(X)) \quad (1.30)$$

où $\rho(X)$ est une densité invariante de la fonction $F(\cdot)$ et δ est une impulsion de

Dirac [1].

$$\begin{aligned}
 R(k) = E[XY] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 XY p(X, Y) dX dY \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 XY FP^*(\rho(X)) \delta(Y - F^k(X)) dX dY
 \end{aligned}
 \tag{1.31}$$

La densité spectrale de puissance $S(w)$ est définie comme étant la transformée de Fourier à temps discret de la fonction d'auto-corrélation $R(k)$. En calculant la TFTD de l'équation (1.31), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 S(w) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(k) e^{-jwk} \\
 &= R(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} R(k) (e^{-jwk} + e^{-jwk})
 \end{aligned}
 \tag{1.32}$$

1.5.2 Etude spectrale de la logistique

Dans cette section nous nous intéressons à quelques simulations numériques pour analyser les résultats obtenus avec différents paramètres $\beta \in [3.857, 4]$. Nous pouvons déduire des Figures 1.13 et 1.14 que si $\beta = 3.857$, l'orbite chaotique s'approche du cycle-3 et nous pouvons constater que le spectre possède un pic. Lorsque β augmente, nous pouvons voir que l'allure de l'histogramme s'approche de la densité invariante $FP^* = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, l'auto-corrélation est modifiée (oscillation, puis un seul pic au centre) et la DSP devient de plus en plus à large bande.

Dans le but de calculer le spectre de la logistique avec la méthode détaillée dans le deuxième chapitre, nous avons essayé d'appliquer la méthode de calcul sur la logistique mais nous avons mis en évidence des difficultés en raison de la densité invariante qui n'est pas uniforme sur tout l'intervalle $[0, 1]$ lorsque le paramètre de bifurcation β varie. De ce problème est venue l'idée de réaliser une approximation logistique de la tent map. Nous avons utilisé le théorème d'interpolation pour trouver une transformation chaotique qui varie sur le même intervalle que celle du skew tent map, mais nous n'avons pas obtenu la transformation souhaitée pour terminer les calculs du spectre.

D'après les simulations des spectres obtenus dans la Figure 1.14, nous pouvons déduire que l'allure du spectre se transforme d'une large bande à un autre type de

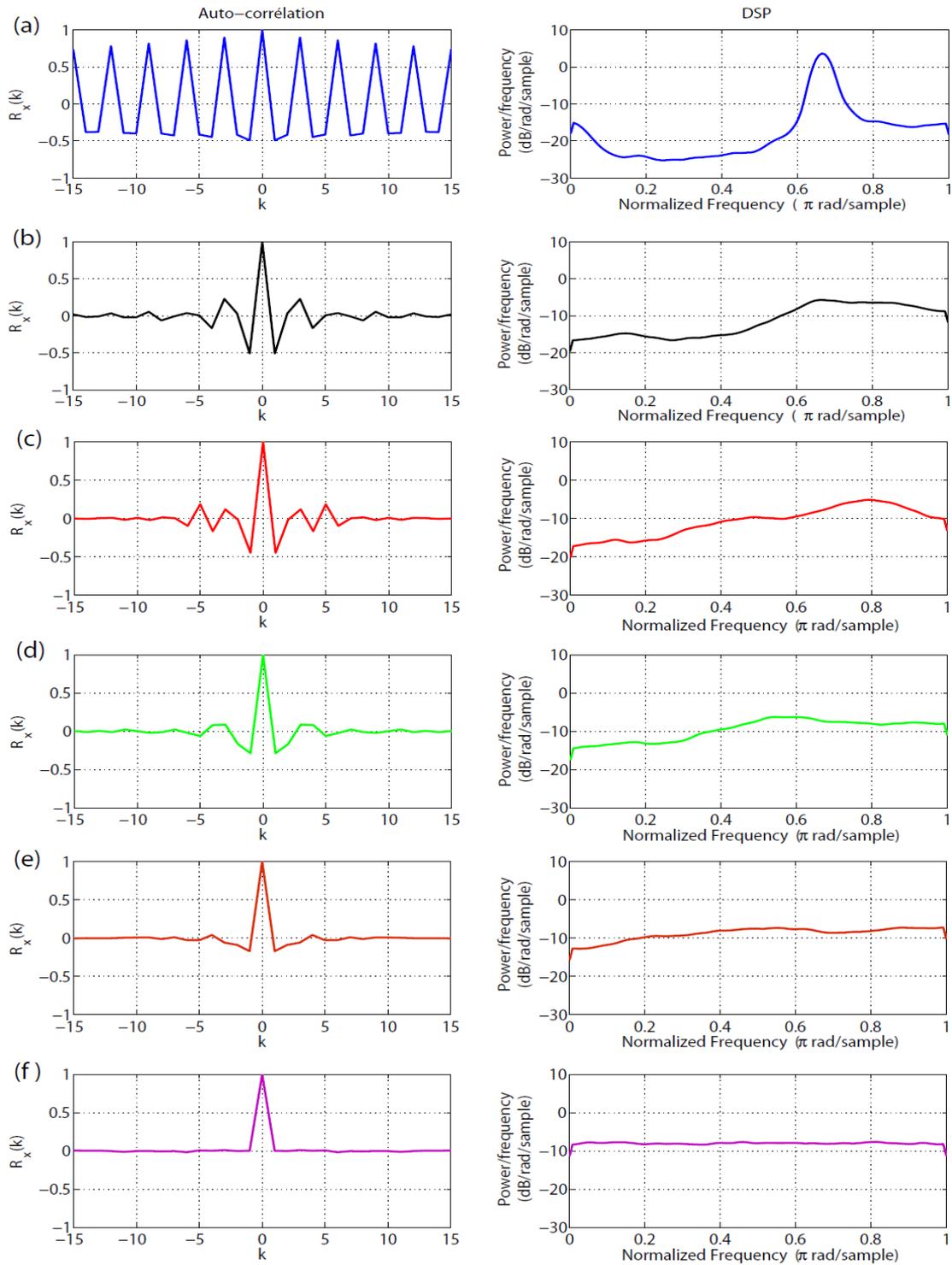


FIGURE 1.14 – Evolution de la DSP pour la transformation logistique

spectre lorsque le paramètre de bifurcation β varie ce qui explique l'apparition du spectre passe bande lorsque β s'approche de 3.857. Le point 3.857 correspond au cycle-3 dans le diagramme de bifurcation 1.6.

1.6 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'introduire quelques notions sur les systèmes dynamiques chaotiques, les caractéristiques du chaos et également d'étudier le spectre des signaux obtenus à partir d'un système dynamique discret. Les travaux [1, 34] nous ont donné l'idée de chercher d'autres types de transformation qui ont les mêmes caractéristiques que la skew tent map et d'essayer de calculer leur spectre. Dans le chapitre suivant, nous étudions plusieurs types de transformations linéaires par morceaux dont le but est de généraliser les résultats obtenus dans [1, 34] ou de trouver d'autres types de spectre comme un passe bande et un coupe bande.

Chapitre 2

Etude spectrale de quelques transformations linéaires par morceaux

2.1 Introduction

La méthode de calcul du spectre proposée dans les travaux [1, 34] et présentée dans la section 2.2 nous a motivé pour trouver d'autres types de transformations chaotiques et faire des recherches concernant le spectre et la bande passante dont le but de généraliser les résultats obtenus ou d'obtenir d'autres types de spectres. Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à des transformations linéaires par morceaux dépendant d'un seul paramètre. Puisque la méthode de calcul proposée dans [1] ne peut être appliquée que sur des transformations linéaires par morceaux, alors nous avons utilisé la même méthode de calcul. Dans la section 2.2, nous détaillons les calculs d'auto-corrélation et de densité spectrale de puissance appliquée à une skew tent map [1]. Ensuite, nous étudions plusieurs types de transformations linéaires par morceaux.

2.2 Skew Tent Map $F(\cdot)$

La fonction skew tent map est étudiée dans [1, 34] et elle est définie par $F :]-1, 1[\rightarrow]-1, 1[:$

$$x_{n+1} = F(x(n)) \tag{2.1}$$

avec

$$F(x(n)) = \begin{cases} \frac{2x+1-\beta}{\beta+1} & \text{if } -1 < x_n < \beta; \\ \frac{2x-1-\beta}{\beta-1} & \text{if } \beta \leq x_n < 1; \end{cases} \quad (2.2)$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (-1, 1)$ et $\beta \in (-1, 1)$.

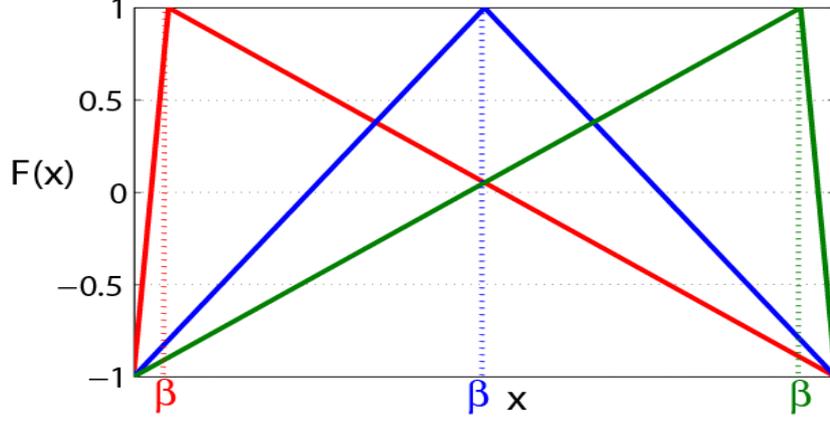


FIGURE 2.1 – Transformation skew tent map avec $(\beta = -0.9)$, $(\beta = 0)$ et $(\beta = 0.9)$.

2.2.1 Densité de probabilité

Pour déterminer la densité de probabilité, nous appliquons l'opérateur de Frobenius-Perron (1.22) à la fonction skew tent map [1]. Il faut commencer par déterminer la transformation inverse de l'intervalle $[-1, x] \subset U$:

$$F^{-1}([-1, x]) = [-1, x_1] \cup [x_2, 1] \quad (2.3)$$

avec $x_1 = \frac{(\beta+1)x+(\beta-1)}{2}$ et $x_2 = \frac{(\beta-1)x+(\beta+1)}{2}$. Les valeurs x_1 et x_2 peuvent être obtenues grâce aux équations de la transformation $F(x)$ comme l'indique la Figure 2.2.

En appliquant l'opérateur de Frobenius Perron à la tent map, nous obtenons :

$$\begin{aligned} FP(\rho(x)) &= \frac{d}{dx} \int_{-1}^{x_1} \rho(u) du + \frac{d}{dx} \int_{x_2}^1 \rho(u) du \\ &= \frac{d}{dx} [Q(x_1) - Q(-1) + Q(1) - Q(x_2)] \\ &= \frac{d}{dx} \left[Q \left(\frac{(\beta+1)x+(\beta-1)}{2} \right) - Q(-1) + Q(1) \right. \\ &\quad \left. - Q \left(\frac{(\beta-1)x+(\beta+1)}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} [(\beta+1)\rho(x_1) + (1-\beta)\rho(x_2)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

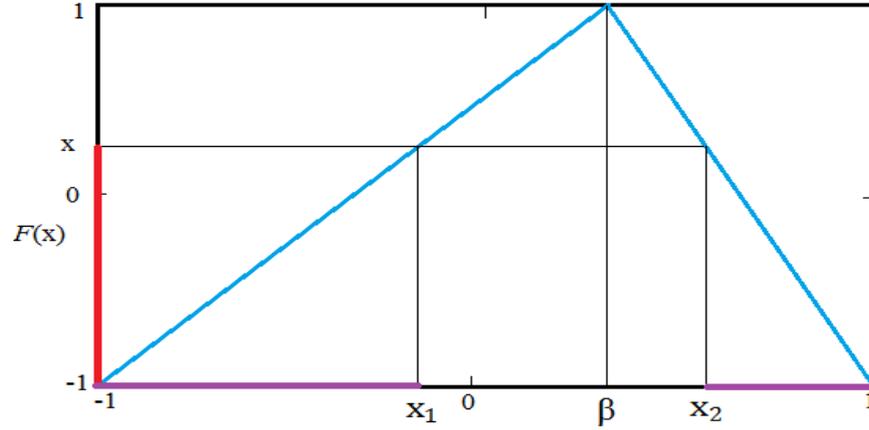


FIGURE 2.2 – La transformation inverse de l'intervalle $[-1, x]$ par la transformation $F^{-1}(\cdot)$ nous donne $[-1, x_1] \cup [x_2, 1]$.

Avec $\beta = 0$, nous obtenons la transformation tent map suivante :

$$F_0(x(n)) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } -1 < x_n < 0; \\ 2x - 1 & \text{if } 0 \leq x_n < 1; \end{cases} \quad (2.5)$$

Dans ce cas $x_1 = \frac{\beta-1}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\beta}{2}$. Nous choisissons la densité initiale $\rho(x) = \frac{3}{2}x^2$. Alors,

$$\begin{cases} \rho(x_1) = \frac{3}{2}x_1^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}(x-1)^2 \\ \rho(x_2) = \frac{3}{2}x_2^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}(x-1)^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

d'où

$$\begin{aligned} FP(\rho(x)) &= \frac{1}{2} [\rho(x_1) + \rho(x_2)] \\ &= \frac{3}{8}(x-1)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

ainsi,

$$\begin{aligned} FP^2(\rho(x)) &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{8}(x_1-1)^2 + \frac{3}{8}(x_2-1)^2 \right] \\ &= \frac{3}{32} [x^2 - 2x + 5] \end{aligned} \quad (2.8)$$

La Figure 2.3 illustre la répartition de la densité sur l'intervalle $U = [-1, 1]$ par la transformation Tent Map $F(x)$. Lorsqu'on utilise l'équation (2.4) avec $\rho(x) = 1/2$, nous obtenons $FP(\rho(x)) = 1/2$. Donc, nous pouvons conclure que la densité $FP^*(\rho(x))$ est invariante. Ainsi, il est à noter que la densité uniforme est invariante.

$$FP^*(\rho(x)) = \frac{1}{2} \quad \text{si } -1 < x < 1 \quad (2.9)$$

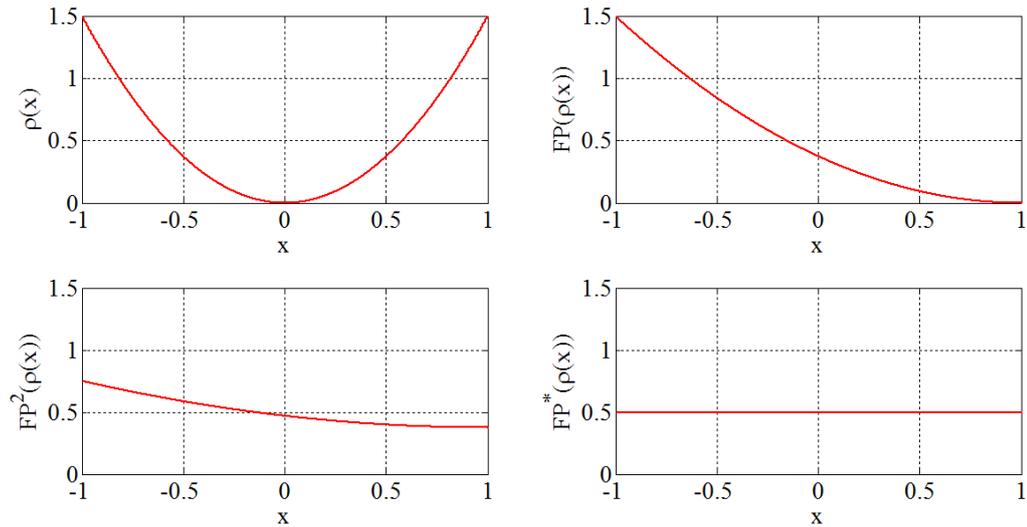


FIGURE 2.3 – Evolution de la densité par la transformation $F(x)$.

La Figure 2.4 illustre les séquences chaotiques et les histogrammes de la transformation tent map avec différents paramètres β . Ces simulations ont été réalisées avec différentes conditions initiales. Nous pouvons observer que les séquences chaotiques possèdent des comportements différents dans le domaine temporel. La répartition des points est uniforme dans l'intervalle U , donc nous obtenons la densité uniforme $FP^*(\rho(x))$.

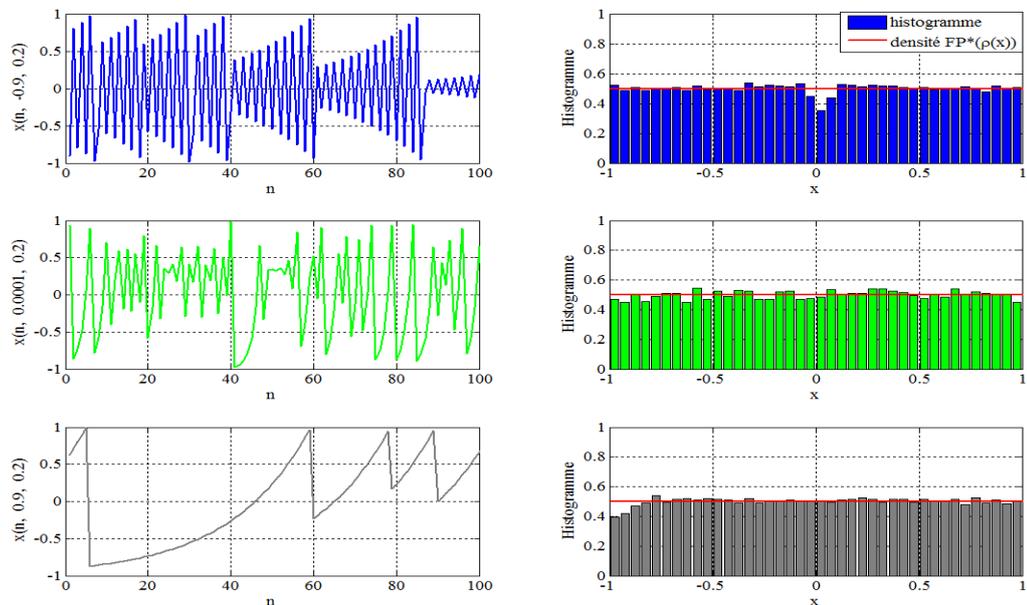


FIGURE 2.4 – Séquences chaotiques et histogrammes de la transformation Tent Map pour différent paramètre β .

2.2.2 Exposant de Lyapunov

La séquence générée par (2.2) est chaotique si $\{x_1, x_2, \dots\}$ n'est pas asymptotiquement périodique et l'exposant de Lyapunov est positif [5]. Lorsque $F(\cdot)$ est linéaire par morceaux, il est possible de calculer analytiquement l'exposant de Lyapunov. Nous pouvons utiliser l'équation (1.10) pour déterminer l'exposant de Lyapunov, puisque la transformation $F(\cdot)$ est ergodique [1, 24].

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln(|F'(x(n))|) dx \\
 &= \int_{-1}^{\beta} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{\beta+1}\right) dx + \int_{\beta}^1 \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{1-\beta}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{\beta+1}\right)(\beta+1) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{1-\beta}\right)(1-\beta) \\
 &= \frac{\beta+1}{2} \ln\left(\frac{2}{\beta+1}\right) + \frac{1-\beta}{2} \ln\left(\frac{2}{1-\beta}\right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

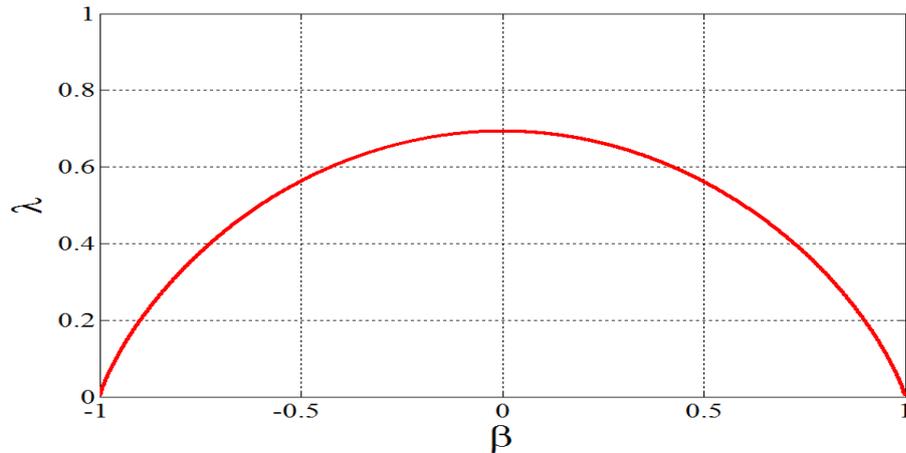


FIGURE 2.5 – Exposant de Lyapunov de skew tent map lorsque $\beta \in (-1, 1)$.

2.2.3 Auto-corrélation

La transformation $F(\cdot)$ est composée de deux segments linéaires. L'image de ces segments appartient à $(-1, 1)$ donc F^k est représenté par 2^k segments. La Figure 2.6 montre les courbes $F^2(x)$, $F^3(x)$, ..., $F^k(x)$.

La m^{eme} solution de l'équation $F^k(x) = 1$ est représentée par $a_k(m)$, lorsque $1 \leq m \leq 2^{k-1}$. La m^{eme} solution de l'équation $F^k(x) = -1$ est représentée par

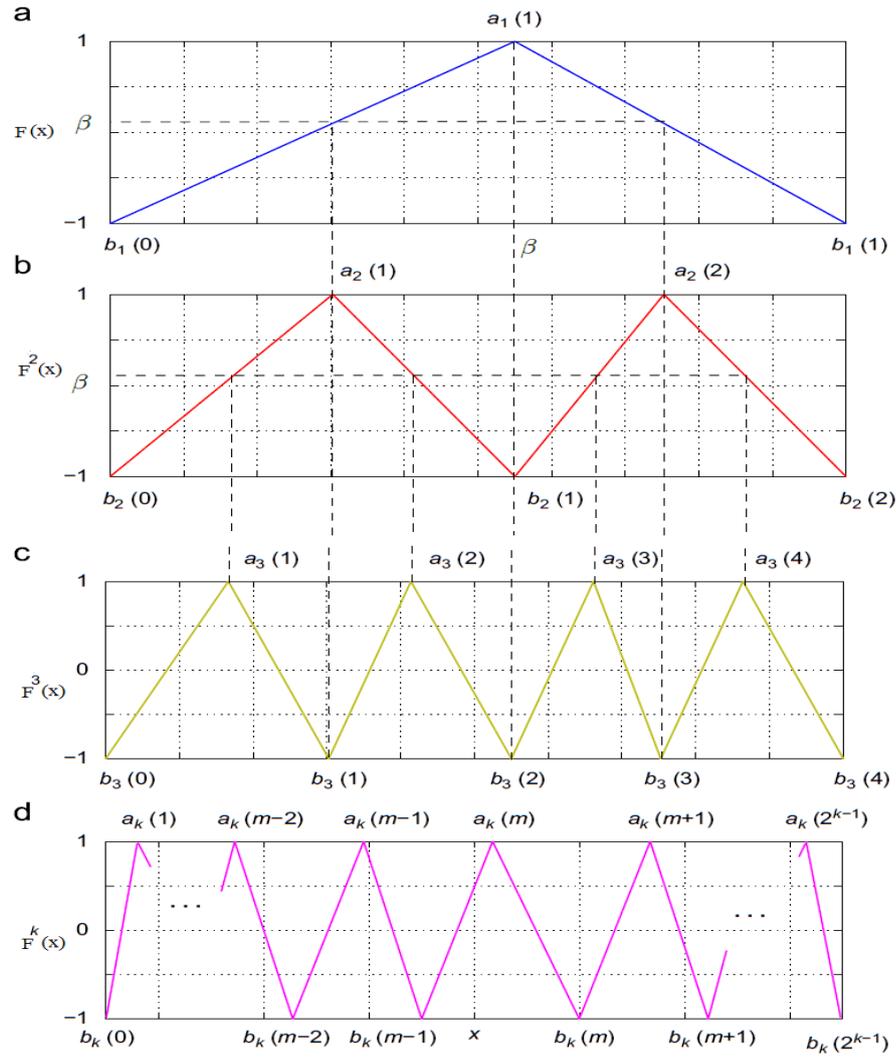


FIGURE 2.6 – L'évolution de la transformation $F(x)$ vers $F^2(x)$, $F^3(x)$, ..., $F^k(x)$ [1].

$b_k(m)$, lorsque $0 \leq m \leq 2^{k-1}$. La pente de la droite $(b_k(m-1), a_k(m))$ est donnée par :

$$y = \frac{2x - a_k(m) - b_k(m-1)}{a_k(m) - b_k(m-1)} \quad (2.11)$$

et la pente de la droite $(a_k(m), b_k(m))$ est donnée par :

$$y = \frac{2x - a_k(m) - b_k(m)}{a_k(m) - b_k(m)} \quad (2.12)$$

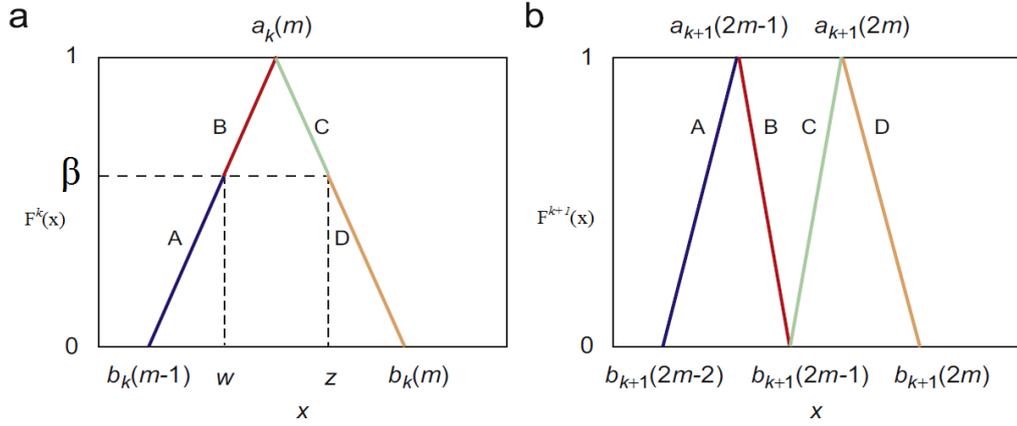


FIGURE 2.7 – L'évolution d'une petite partie de la transformation (a) $F^k(x)$ vers (b) $F^{k+1}(x)$ [1]

L'insertion des équations (2.11) et (2.12) dans l'équation (1.31) donne :

$$\begin{aligned}
 R(k) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x F^k(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \left[\int_{b_k(m-1)}^{a_k(m)} x \left(\frac{2x - a_k(m) - b_k(m-1)}{a_k(m) - b_k(m-1)} \right) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{a_k(m)}^{b_k(m)} x \left(\frac{2x - a_k(m) - b_k(m)}{a_k(m) - b_k(m)} \right) dx \right] \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Pour déterminer une expression analytique, il faut résoudre les deux intégrales de l'équation (2.13). Nous obtenons :

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} [(a_k(m) - b_k(m-1))^2 - (a_k(m) - b_k(m))^2] \quad (2.14)$$

L'évolution de la transformation $F^k(x)$ vers $F^{k+1}(x)$ est illustrée dans la Figure 2.7, avec w et z racines de $F^k(x) = \beta$. Pour déterminer w et z , nous utilisons les deux équations (2.11) et (2.12), alors :

$$w = \frac{\beta + 1}{2} (a_k(m) - b_k(m-1)) + b_k(m-1) \quad (2.15)$$

$$z = \frac{\beta + 1}{2} (a_k(m) - b_k(m)) + b_k(m) \quad (2.16)$$

Puisque $R(k+1)$ est donné par :

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{2^k} [(a_{k+1}(m) - b_{k+1}(m-1))^2 - (a_{k+1}(m) - b_{k+1}(m))^2] \quad (2.17)$$

Les relations suivantes sont déduites de la Figure 2.7, d'où :

$$\begin{aligned}
 b_{k+1}(2m-2) &= b_k(m-1) \\
 a_{k+1}(2m-1) &= w \\
 b_{k+1}(2m-1) &= a_k(m) \\
 a_{k+1}(2m) &= z \\
 b_{k+1}(2m) &= b_k(m)
 \end{aligned}$$

En utilisant ces équations, la détermination de $R(k+1)$ en fonction de $R(k)$ devient plus facile, alors :

$$\begin{aligned}
 R(k+1) &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} [(a_{k+1}(2m) - b_{k+1}(2m-1))^2 - (a_{k+1}(2m) - b_{k+1}(2m))^2] \\
 &\quad + [(a_{k+1}(2m-1) - b_{k+1}(2m-2))^2 - (a_{k+1}(2m-1) - b_{k+1}(2m-1))^2] \\
 &= \frac{\beta}{12} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} [(a_k(m) - b_k(m-1))^2 - (a_k(m) - b_k(m))^2]
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Donc

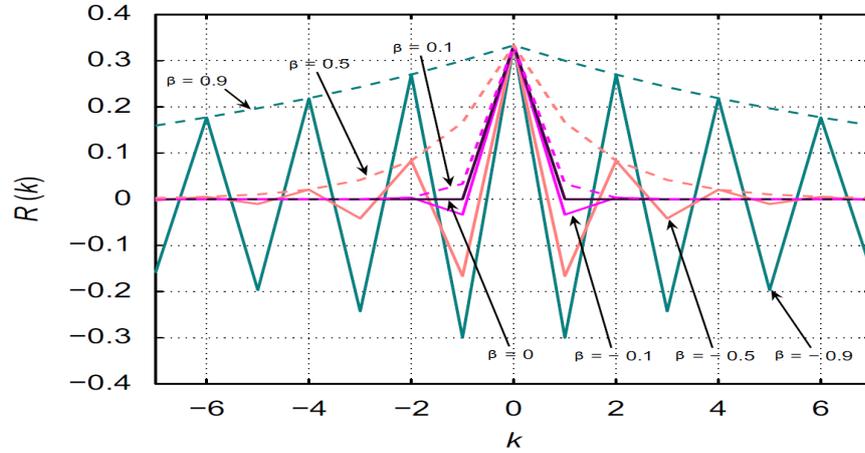


FIGURE 2.8 – Auto-corrélation de la skew tent map [1]

$$R(k+1) = \beta R(k) \tag{2.19}$$

Avec $R(0) = P = \frac{1}{3}$ et P puissance moyenne.

Nous avons :

$$R(k) = \frac{1}{3} \beta^{|k|} \tag{2.20}$$

2.2.4 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance $S(w)$ est définie comme étant la transformée de Fourier à temps discret de la fonction d'auto-corrélation $R(k)$. En calculant la TFTD de l'équation (2.20), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 S(w) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3} \beta^{|k|} e^{-jwk} \\
 &= R(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \beta^k (e^{-jwk} + e^{jwk}) \\
 &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \beta^k (\cos(-wk) + j \sin(-wk) + \cos(wk) + j \sin(wk)) \quad (2.21) \\
 &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3} \beta^k \cos(wk) \\
 &= \frac{1 - \beta^2}{3(1 + \beta^2 - 2\beta \cos(w))}
 \end{aligned}$$

La Figure 2.9 montre que la variation du paramètre β implique un changement d'allure de la DSP. Donc, la DSP $S(w)$ peut occuper les basses ou les hautes fréquences. La DSP des signaux générés par des transformations pour des valeurs opposées de β présente une symétrie par rapport à $w = \frac{\pi}{2}$.

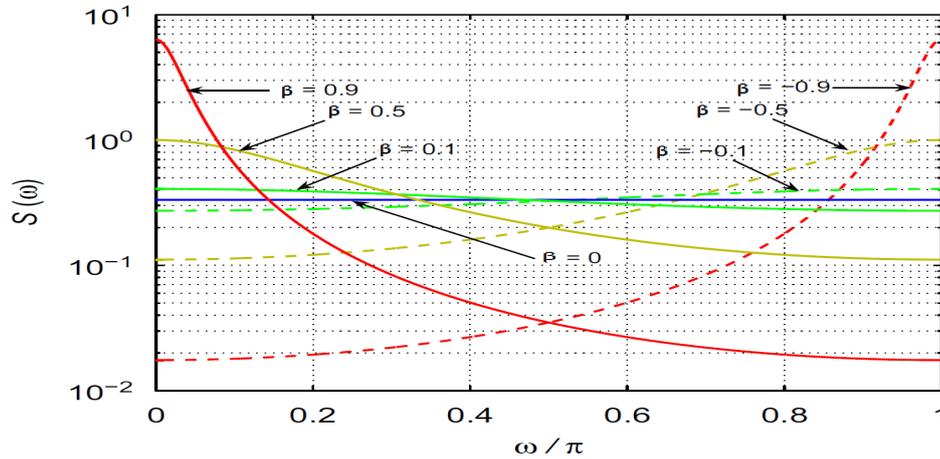


FIGURE 2.9 – Densité spectrale de puissance de la skew tent map [1].

2.2.5 Bande passante

Parmi les caractéristiques des transformations chaotiques, nous pouvons déterminer la bande passante pour différentes valeurs de β . La bande passante essentielle

est définie par $r = 95\%$ de la DSP du signal [1]. Pour calculer la bande passante BP , nous utilisons le théorème de Parseval, lorsque la puissance du signal se concentre dans les basses fréquences :

$$\int_0^{BP} S(w)dw = r \cdot \int_0^{\pi} S(w)dw \quad (2.22)$$

Nous utilisons Maple pour calculer la primitive de $S(w)$. Alors, nous obtenons :

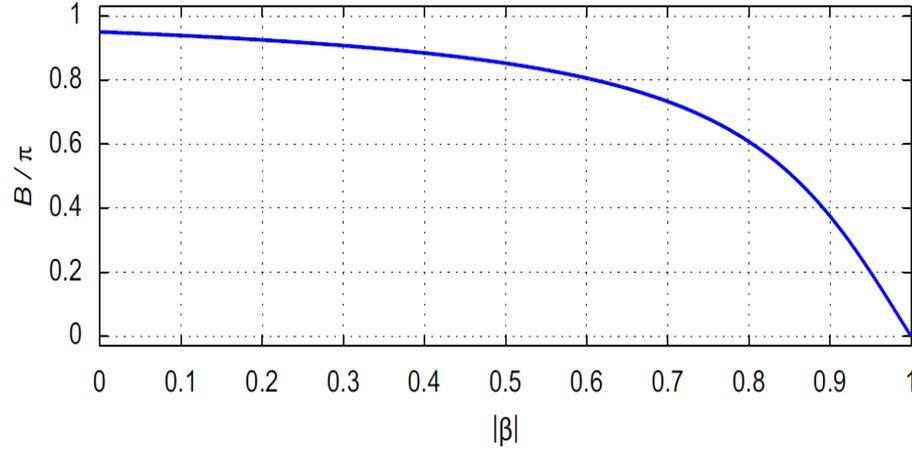


FIGURE 2.10 – Densité spectrale de puissance de la skew tent map [1].

$$\begin{aligned} \int S(w)dw &= \int \frac{1 - \beta^2}{3(1 + \beta^2 - 2\beta \cos(w))} dw \\ &= \frac{2(1 - \beta^2)}{3} \frac{\arctan\left(\frac{(1+2\beta+\beta^2)\tan(\frac{w}{2})}{\sqrt{(1+2\beta+\beta^2)(1-2\beta+\beta^2)}}\right)}{\sqrt{(1+2\beta+\beta^2)(1-2\beta+\beta^2)}} \\ &= \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{(1+2\beta+\beta^2)\tan(\frac{w}{2})}{\sqrt{(\beta^2-1)^2}}\right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} S(w)dw &= \left[\frac{2}{3} \arctan\left(\frac{(1+2\beta+\beta^2)\tan(\frac{w}{2})}{\sqrt{(\beta^2-1)^2}}\right) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \quad (2.24)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{BP} S(w)dw &= \left[\frac{2}{3} \arctan\left(\frac{(1+2\beta+\beta^2)\tan(\frac{w}{2})}{\sqrt{(\beta^2-1)^2}}\right) \right]_0^{BP} \\ &= \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{(1+2\beta+\beta^2)\tan(\frac{BP}{2})}{\sqrt{(\beta^2-1)^2}}\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

En insérant (2.24) et (2.25) dans l'équation (2.22), nous obtenons :

$$\frac{2}{3} \arctan \left(\frac{(1 + 2\beta + \beta^2) \tan \left(\frac{BP}{2} \right)}{\sqrt{(\beta^2 - 1)^2}} \right) = r \frac{\pi}{3} \quad (2.26)$$

Après simplification, nous obtenons :

$$BP = 2 \arctan \left[\tan \left(\frac{r\pi}{2} \right) \left| \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right| \right] \quad (2.27)$$

L'équation (2.27) donne la bande passante de la skew tent map pour un paramètre β donné. Ainsi, le choix du paramètre de bifurcation β permet de déterminer la bande passante pour des applications précises.

2.3 PWLM-1 Maps $G(\cdot)$

Nous étudions la transformation PWLM-1 proposée par P. Chargé et al [39], cette transformation est définie de $[-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ par :

$$x_{n+1} = G(x(n)) \quad (2.28)$$

avec

$$G(x) = \text{sign}(x) ((2 \bmod(\beta |x| + \Phi, 1)) - 1) \quad (2.29)$$

où $n \in \mathbb{N}$, $x \in (-1, 1)$ et $\Phi, \beta \in [0, 2]$. La Figure 2.11 montre la fonction $G(\cdot)$ avec variation des paramètres β et Φ .

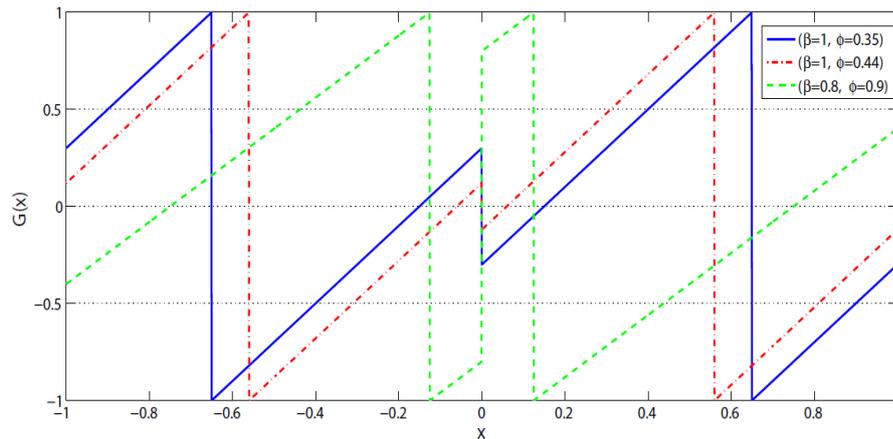
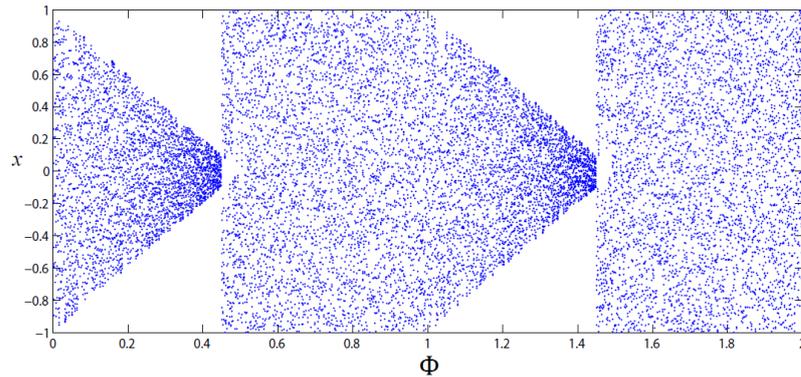


FIGURE 2.11 – Transformation chaotique (2.29) avec $(\beta = 1, \Phi = 0.35)$, $(\beta = 1, \Phi = 0.44)$ et $(\beta = 0.8, \Phi = 0.9)$.

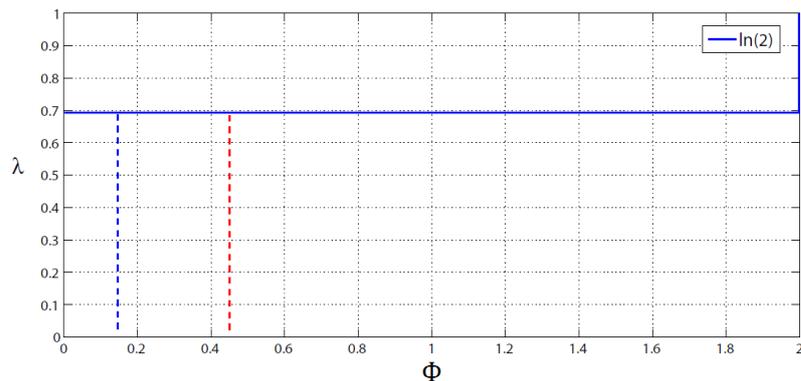
2.3.1 Bifurcation et exposant de Lyapunov

Une étude des exposants de Lyapunov est présentée dans [39], les exposants de Lyapunov dépendent seulement du paramètre β comme l'indique l'équation suivante :

$$\lambda = \ln(2\beta) \quad (2.30)$$



(a)



(b)

FIGURE 2.12 – (a) Diagramme de bifurcation pour $\beta = 1$, $\Phi \in [0, 2]$; (b) Exposant de Lyapunov en fonction de Φ .

Dans la Figure 2.12, le paramètre β est fixe mais Φ varie dans l'intervalle $[0, 2]$, nous pouvons constater que l'attracteur change d'allure et que l'exposant de Lyapunov reste constant. Dans la Figure 2.13, nous fixons le paramètre Φ et nous varions β sur l'intervalle $[0, 2]$, nous obtenons un attracteur étrange avec une allure différente et l'exposant de Lyapunov augmente lorsque β augmente.

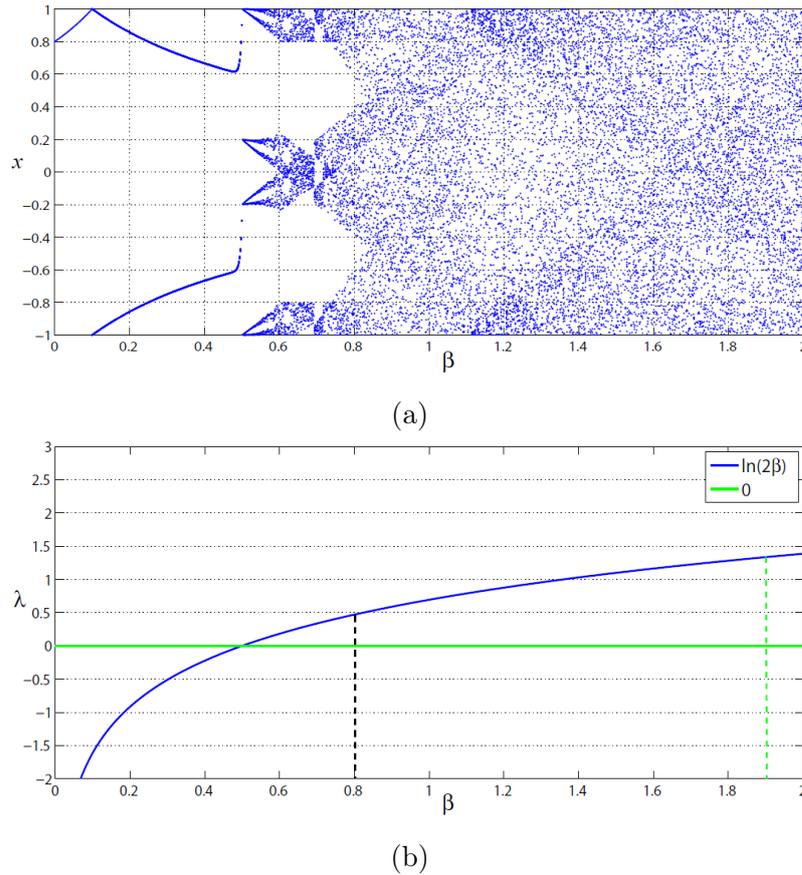


FIGURE 2.13 – (a) Diagramme de bifurcation pour $\Phi = 0.9$, $\beta \in [0, 2]$; (b) Exposant de Lyapunov en fonction de β .

2.3.2 Etude spectrale

Les Figures 2.14 et 2.15 montrent les orbites, l’histogramme, la séquence d’auto-corrélation et la densité spectrale de puissance avec un nombre d’itérations $N = 20000$. La Figure 2.14 est obtenue pour des paramètres $\Phi = 0.35$ et $\beta = 1$ et un changement de la condition initiale. Nous remarquons que le changement d’état initial donne les mêmes allures d’histogramme, d’auto-corrélation et de densité spectrale de puissance. Ce résultat est normal car l’attracteur chaotique reste le même quelle que soit la condition initiale.

Dans la Figure 2.15, nous avons utilisé une couleur pour chaque ligne. Dans la première ligne avec une couleur bleue ($\beta = 1$, $\Phi = 0.15$), nous pouvons remarquer que les valeurs de x varient à l’intérieur d’un intervalle plus petit que $[-1, 1]$, la séquence d’auto-corrélation possède une impulsion de Dirac en 0 et le spectre correspond à un passe-bas. Dans la Figure 2.12 et pour les paramètres considérés, le diagramme

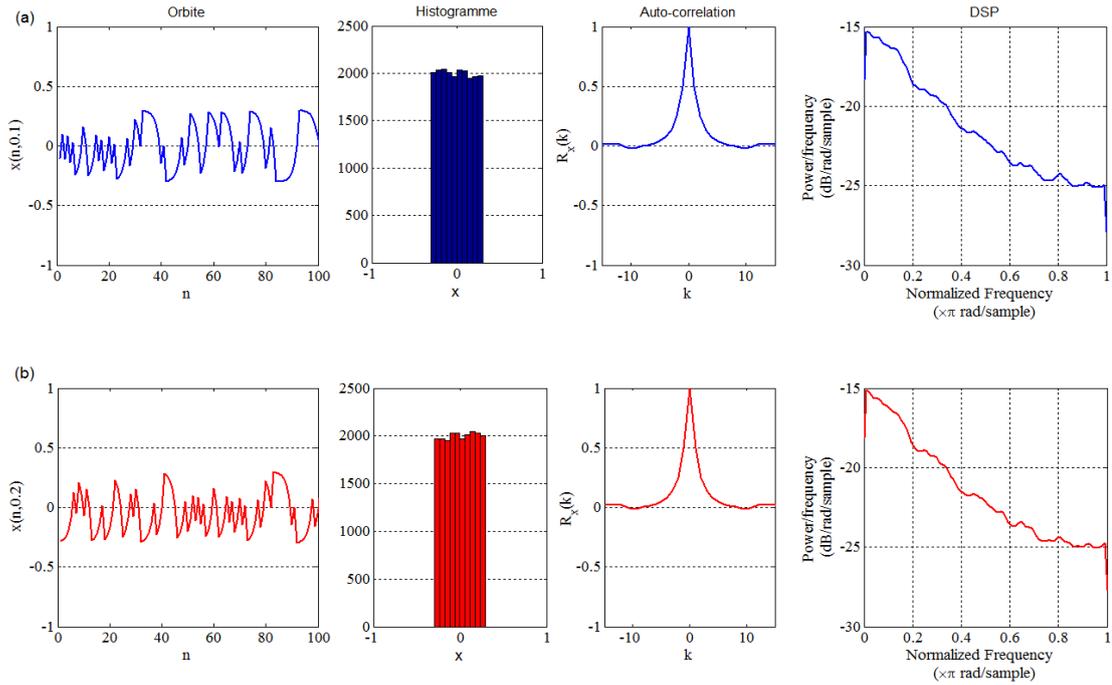


FIGURE 2.14 – $\Phi = 0.35, \beta = 1$.

de bifurcation montre que l'attracteur chaotique occupe l'intervalle $[-0.7, 0.7]$.

Dans la deuxième ligne de la Figure 2.15, nous avons simulé les courbes rouges pour $\beta = 1$ et $\Phi = 0,44$, la répartition des points est donnée dans deux intervalles et le nombre de valeurs x est très faible quand x_n est proche de zéro. Dans la Figure 2.12, on peut voir un trou autour de la valeur $x = 0$. La SAC a une impulsion positive et deux impulsions négatives, le spectre est passe-haut.

Dans la troisième ligne de la Figure 2.15, nous avons choisi $k = 1.9$, $\Phi = 0.9$ et les courbes sont tracées en vert. Les points sont distribués dans tout l'intervalle $[-1, 1]$ (Figure 2.13). La SAC a un pic positif qui tend vers zéro très rapidement. Ce signal chaotique est à large bande.

Dans la quatrième ligne, nous avons trouvé une séquence chaotique avec un spectre passe bande. La SAC de cette séquence a deux impulsions négatives à $R(k) \simeq -0.4$ et les valeurs x sont réparties sur trois intervalles (Figure 2.13).

Après plusieurs simulations, nous avons constaté que la bande passante ne dépend pas des exposants de Lyapunov pour la transformation étudiée. En effet, nous avons fixé β et nous avons fait varier Φ et nous avons obtenu différentes courbes de DSP avec différents types de bandes passantes.

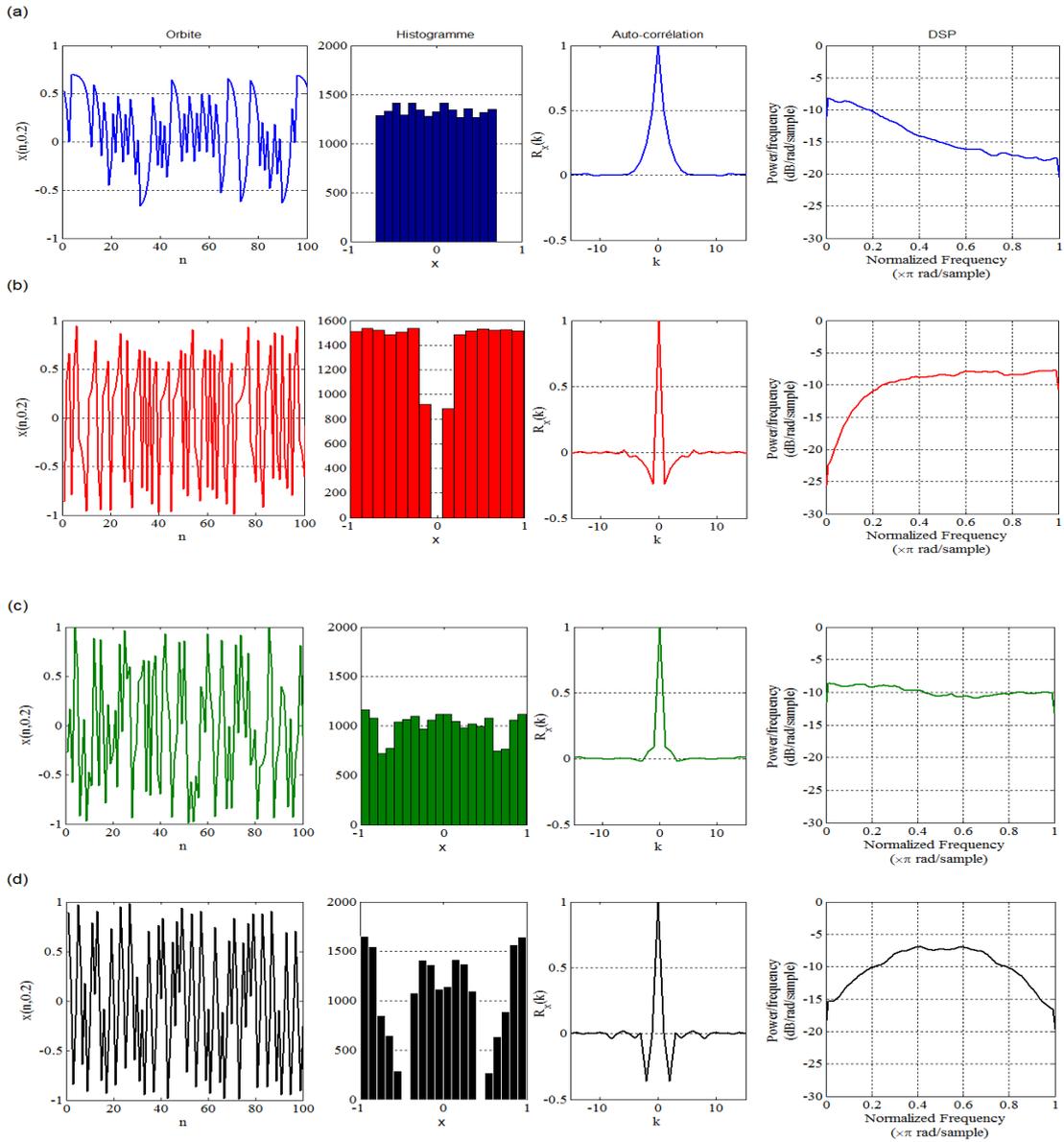


FIGURE 2.15 – (a) $\Phi = 0.15; \beta = 1$; (b) $\Phi = 0.44; \beta = 1$; (c) $\Phi = 0.9; \beta = 1.9$; (d) $\Phi = 0.9; \beta = 0.8$

2.4 PWLM-2 Maps $H(\cdot)$

La transformation linéaire par morceaux PWLM-2 est définie de $[-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ par :

$$x_{n+1} = H(x(n), \beta) \quad (2.31)$$

où

$$H(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-\beta} + \frac{\beta+1}{1-\beta} & \text{if } -1 \leq x \leq -\beta; \\ -\frac{x}{\beta} & \text{if } -\beta < x \leq \beta; \\ \frac{2x}{1-\beta} - \frac{\beta+1}{1-\beta} & \text{if } \beta < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.32)$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in (-1, 1)$ et $\beta \in (0, 1)$.

La Figure 2.16 montre la fonction $H(\cdot)$ pour différentes valeurs du paramètre β .

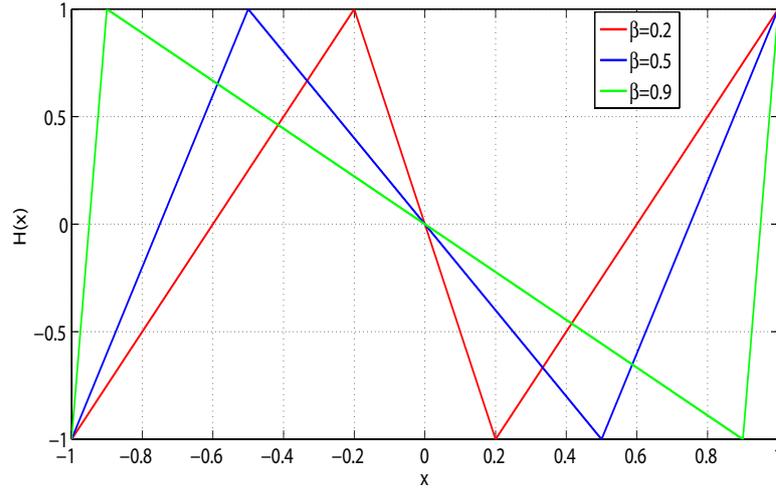


FIGURE 2.16 – Transformation chaotique PWLM-2 avec $(\beta = 0.2)$, $(\beta = 0.5)$ et $(\beta = 0.9)$.

2.4.1 Densité de probabilité

Pour illustrer le concept de l'opérateur de Frobenius Perron, nous appliquons la transformation inverse $H^{-1}(\cdot)$ sur l'intervalle $[-1, x]$, cette étape est illustrée dans la Figure (2.17).

En utilisant la transformation (2.32) :

$$H^{-1}([-1, x]) = [-1, x_1] \cup [x_2, x_3] \quad (2.33)$$

avec,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x(1-\beta)}{2} - \frac{\beta+1}{2} \\ x_2 = -\beta \cdot x \\ x_3 = \frac{x(1-\beta)}{2} + \frac{\beta+1}{2} \end{cases} \quad (2.34)$$

en appliquant l'opérateur de Frobenius Perron (1.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 FP(\rho(x)) &= \frac{d}{dx} \int_{-1}^{x_1} \rho(u) du + \frac{d}{dx} \int_{x_2}^{x_3} \rho(u) du \\
 &= \frac{d}{dx} [Q(x_1) - Q(-1) + Q(x_3) - Q(x_2)] \\
 &= \frac{d}{dx} \left[Q\left(\frac{x.(1-\beta)}{2} - \frac{\beta+1}{2}\right) - Q(-1) + Q\left(\frac{x.(1-\beta)}{2} + \frac{\beta+1}{2}\right) - Q(-\beta.x) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \beta x - \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \beta \cdot \rho \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \beta x - \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad + \beta \cdot \rho(-\beta x) + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \beta x + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \beta \cdot \rho \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \beta x + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

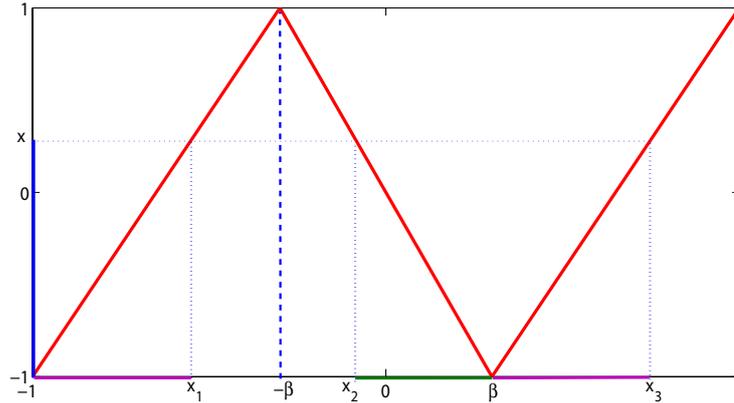


FIGURE 2.17 – La transformation inverse de l'intervalle $[-1, x]$ par la transformation $H(\cdot)$ nous donne $[-1, x_1] \cup [x_2, x_3]$.

Cette équation correspond à l'opérateur de Frobenius Perron de la transformation (1.22) et montre comment $H(\cdot)$ transforme une densité donnée $\rho(\cdot)$ en une autre densité $FP(\rho(\cdot))$.

Nous pouvons prendre une densité initiale $\rho(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2$ telle que $x \in [-1, 1]$, les termes dans les crochets de l'équation précédente sont des constantes. Ainsi, un simple calcul donne :

$$\begin{aligned}
 \rho(x_1) &= \frac{3}{2} x_1^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot (1 - \beta) - \frac{1}{2} \cdot \beta - \frac{1}{2} \right)^2 \\
 \rho(x_2) &= \frac{3}{2} x_2^2 = \frac{3}{2} \cdot \beta^2 \cdot x^2 \\
 \rho(x_3) &= \frac{3}{2} x_3^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot (1 - \beta) + \frac{1}{2} \cdot \beta + \frac{1}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

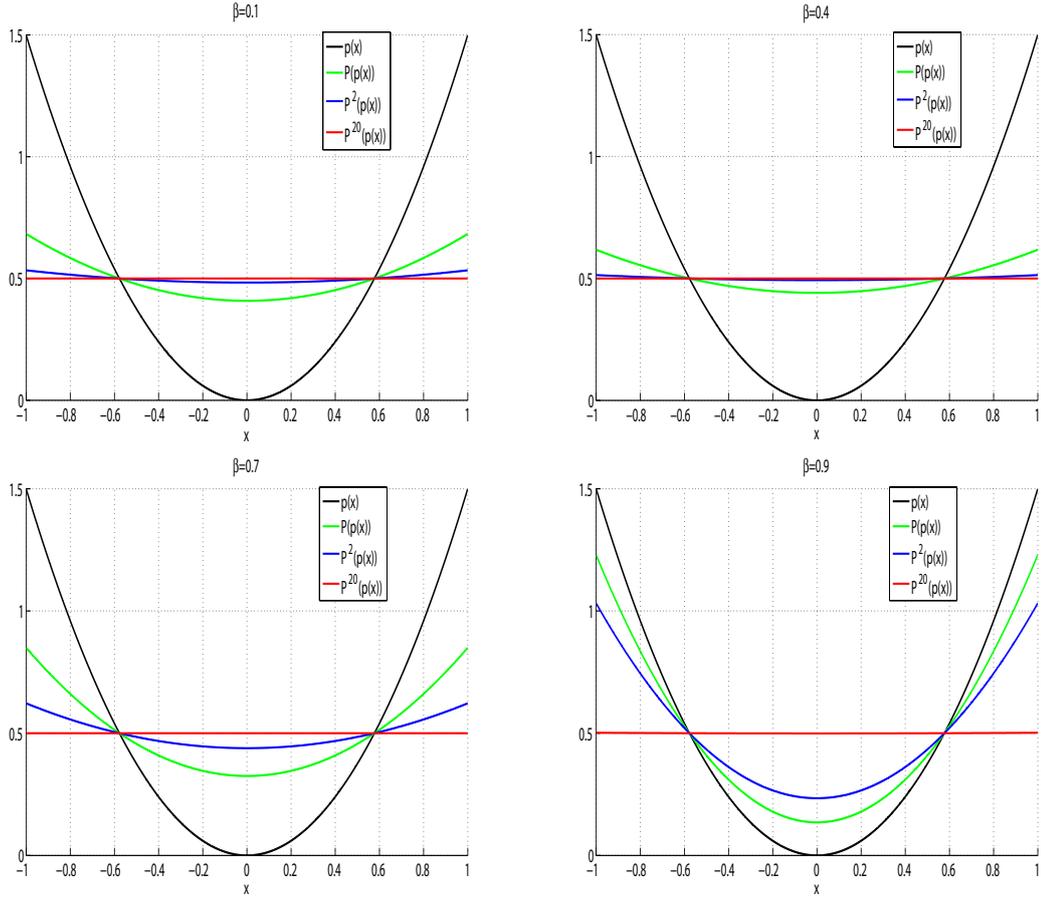


FIGURE 2.18 – Evolution de la densité pour la transformation linéaire par morceaux avec différentes valeurs de β .

Alors,

$$FP(\rho(x)) = \frac{3}{8}.\beta + \frac{9}{8}.\beta^2.x^2 + \frac{9}{8}.\beta^3.x^2 - \frac{9}{8}.\beta.x^2 - \frac{3}{8}.\beta^2 - \frac{3}{8}.\beta^3 + \frac{3}{8}.x^2 + \frac{3}{8} \quad (2.36)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} FP^2(\rho(x)) = & \frac{3}{16}.\beta - \frac{27}{32}.\beta^4.x^2 + \frac{27}{16}.\beta^5.x^2 + \frac{45}{32}.\beta^2.x^2 - \frac{9}{8}.\beta^3.x^2 - \frac{9}{16}.\beta.x^2 - \frac{15}{32}.\beta^2 \\ & + \frac{3}{8}.\beta^3 + \frac{3}{32}.x^2 - \frac{9}{16}.\beta^5 + \frac{9}{32}.\beta^4 - \frac{9}{32}.\beta^6 + \frac{27}{32}.\beta^6.x^2 + \frac{15}{32} \end{aligned} \quad (2.37)$$

La Figure 2.18 illustre la répartition de la densité sur l'intervalle $[-1, 1]$ par la transformation linéaire par morceaux $H(x)$. Lorsque nous utilisons l'opérateur de Frobenius Perron avec $\rho(x) = \frac{3}{2}.x^2$, nous obtenons $FP^*(\rho(x)) = \frac{1}{2}$, tel que :

$$FP^* = \lim_{n \rightarrow \infty} FP^n \quad (2.38)$$

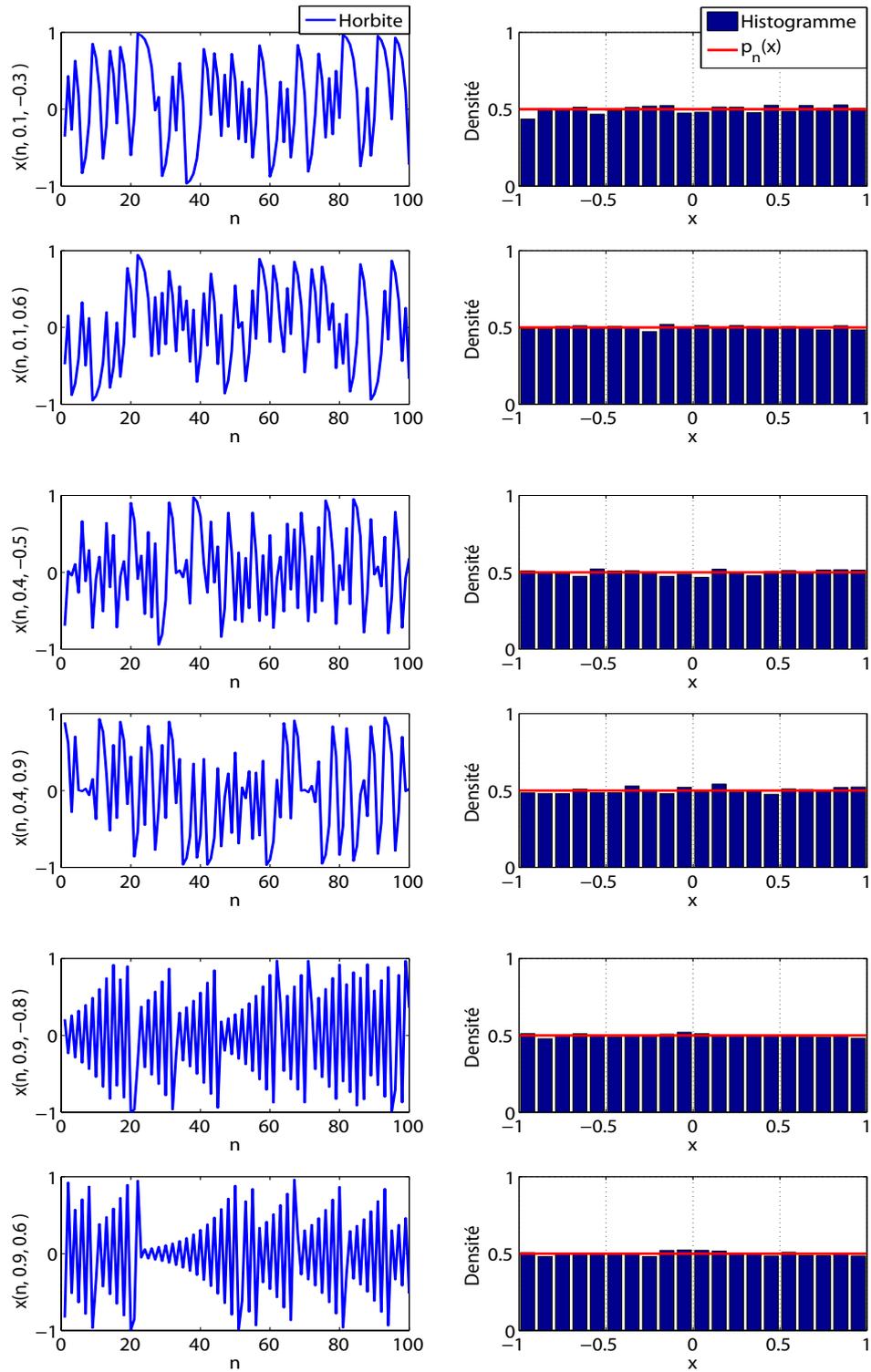


FIGURE 2.19 – Orbits et histogrammes de la transformation linéaire par morceaux avec plusieurs valeurs du paramètre β et diverses conditions initiales x_0 , c'est à dire pour $x(n, \beta, x_0)$.

Nous pouvons conclure que la densité $FP^*(\rho(x))$ est invariante. Ainsi, il est à noter que la densité invariante est uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$. Donc,

$$FP^*(\rho(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.39)$$

La Figure 2.19 illustre des orbites et des histogrammes normalisés de la transformation linéaire par morceaux avec plusieurs valeurs du paramètre β et diverses conditions initiales x_0 . Ces simulations ont été réalisées avec $N = 20000$ itérations de la transformation $H(\cdot)$ pour différentes conditions initiales et l'intervalle U est divisé en 20 intervalles de même longueur. Nous observons que les orbites présentent des comportements différents dans le domaine temporel. La répartition des points dans l'intervalle U est uniforme, ce qui correspond à la densité limite $FP^*(\rho(x))$ de l'opérateur de Frobenius-Perron. Les calculs théoriques de la densité spectrale de puissance sont plus faciles puisque la transformation est linéaire par morceaux et la densité invariante est uniforme.

2.4.2 Exposant de Lyapunov et bifurcation

En étudiant les exposants de Lyapunov et le diagramme de bifurcation de cette transformation, nous avons trouvé que la transformation est chaotique si $\beta \in]0, 1[$, comme le montre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \left| H'(x(n)) \right| dx \\ &= \int_{-1}^{-\beta} \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{2}{1-\beta} \right) dx + \int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) dx + \int_{\beta}^1 \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{1-\beta} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{2}{1-\beta} \right) \cdot (1-\beta) + \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) \cdot (\beta + \beta) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{1-\beta} \right) \cdot (1-\beta) \\ &= 1 - \beta \cdot \ln \left(\frac{2}{1-\beta} \right) + \beta \cdot \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

La Figure 2.20 montre que l'exposant de Lyapunov λ possède un maximum pour $\beta = \sqrt{2} - 1$.

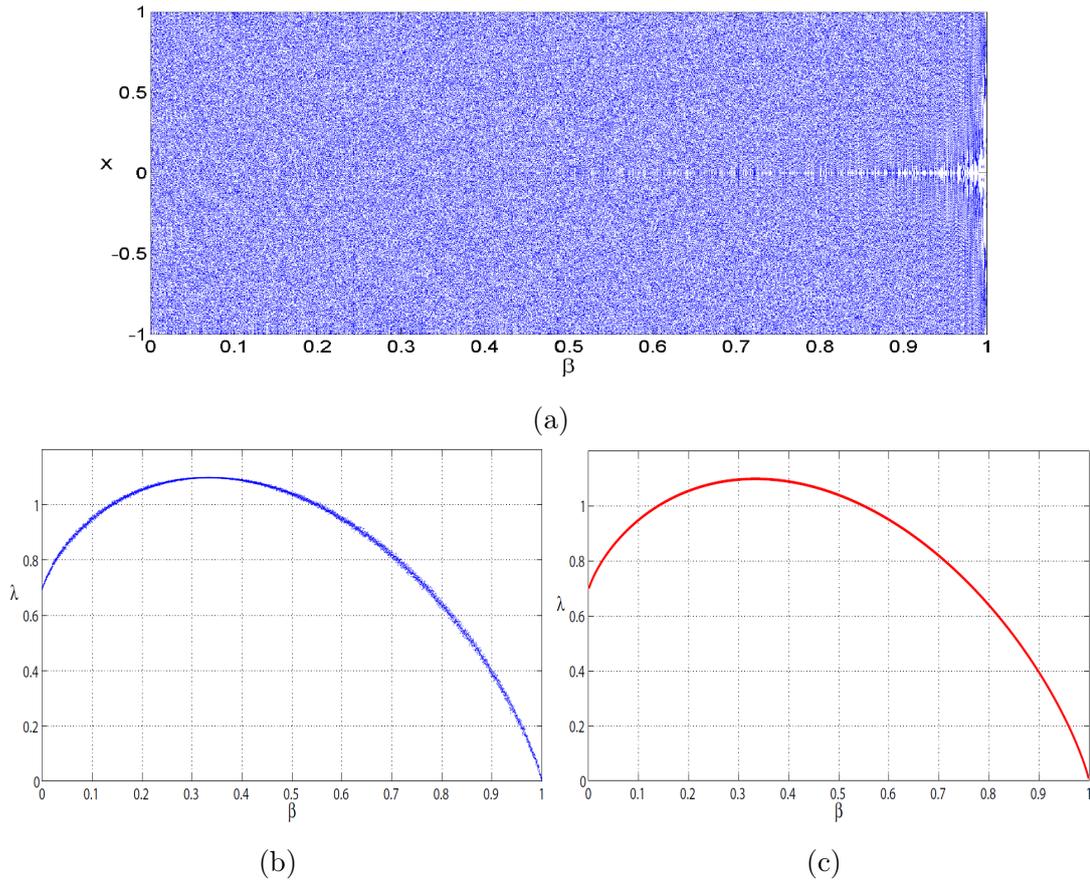


FIGURE 2.20 – (a) Diagramme de bifurcation de la transformation (2.32), avec un nombre d’itérations $N = 10000$ en éliminant un transitoire de 5000 itérations. (b) Exposant de Lyapunov estimé avec le logiciel AnT 4.669 pour $N = 10000$. (c) Exposant de Lyapunov déterminé par l’équation (2.40).

2.4.3 Auto-corrélation

Pour calculer l’auto-corrélation de la transformation (2.32), nous utilisons la même méthode utilisé dans la section 2.2. Nous appliquons l’équation (1.31) sur le PWLM-2 et nous obtenons l’équation suivante :

$$R(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x H^k(x) dx \quad (2.41)$$

avec $FP^*(\rho(x)) = \frac{1}{2}$. La transformation $H(x)$ est composée de trois segments linéaires. L’image de ces segments est dans l’intervalle $[-1, 1]$. La Figure 2.21 montre que lorsque nous appliquons $H \circ H(\cdot)$ le nombre de segments se multiplie par trois. Donc, $H^k(x)$ est composé de 3^k segments. Nous notons que ces segments sont don-

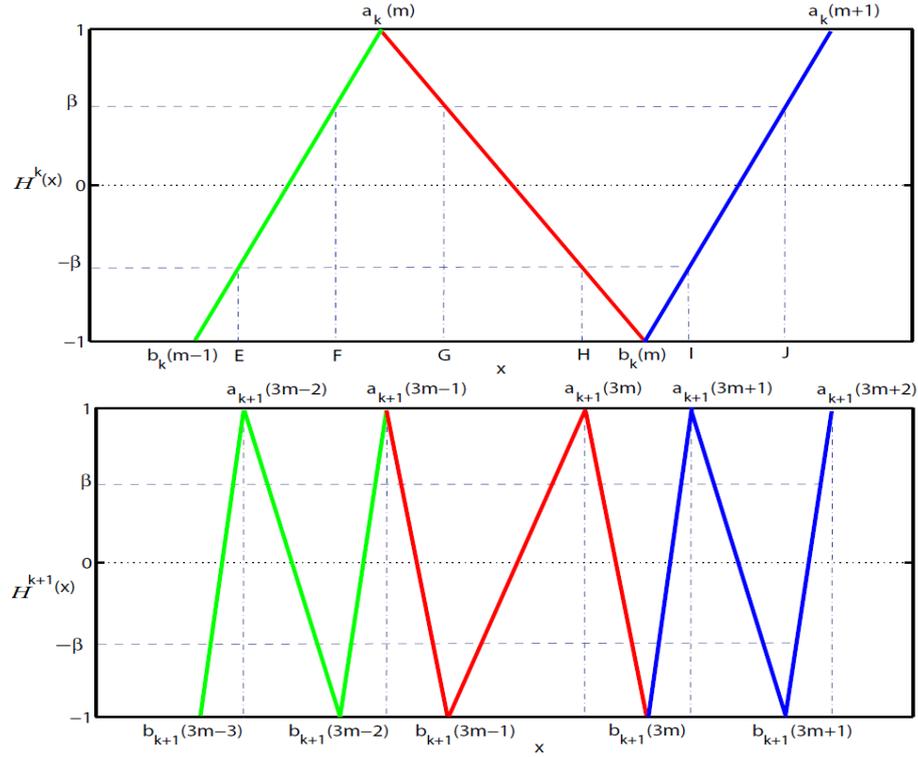


FIGURE 2.21 – Représentations de $H^k(x)$ et $H^{k+1}(x)$.

nés par $[b_k(m-1), a_k(m)]$, $[a_k(m), b_k(m)]$ et $[b_k(m), a_k(m+1)]$ avec $m = 1, \dots, \frac{3^k-1}{2}$. $H^k(\cdot)$ est linéaire dans ces intervalles. Nous commençons par la détermination du segment $y_1^{k,m} = c_1x + d_1$ qui passe par $(a_k(m), 1)$, $(b_k(m-1), -1)$. Nous avons :

$$\begin{cases} -1 = c_1 b_k(m-1) + d_1 \\ 1 = c_1 a_k(m) + d_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-2}{b_k(m-1) - a_k(m)} \\ d_1 = \frac{b_k(m-1) + a_k(m)}{b_k(m-1) - a_k(m)} \end{cases}$$

Le segment linéaire $y_1^{k,m}$ est donné par :

$$y_1^{k,m} = \frac{2x - a_k(m) - b_k(m-1)}{a_k(m) - b_k(m-1)}$$

Nous pouvons déduire l'autre segment $y_2^{k,m} = c_2x + d_2$ qui passe par $(a_k(m), 1)$, $(b_k(m), -1)$ et qui est donné par :

$$\begin{cases} y_1^{k,m} = \frac{2x - a_k(m) - b_k(m-1)}{a_k(m) - b_k(m-1)} & \text{si } b_k(m-1) \leq x \leq a_k(m); \\ y_2^{k,m} = \frac{2x - a_k(m) - b_k(m)}{a_k(m) - b_k(m)} & \text{si } a_k(m) < x \leq b_k(m). \end{cases} \quad (2.42)$$

En utilisant les équations (2.41) et (2.42) :

$$\begin{aligned}
 R(k) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x H^k(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\frac{3^k-1}{2}+1} \left[\int_{b_k(m-1)}^{a_k(m)} x y_1^{k,m} dx \right] + \sum_{m=1}^{\frac{3^k-1}{2}} \left[\int_{a_k(m)}^{b_k(m)} x y_2^{k,m} dx \right]
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Pour déterminer l'expression analytique de $R(k)$, nous devons résoudre les deux intégrales de l'équation (2.43). En calculant ces termes séparément, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \int_{b_k(m-1)}^{a_k(m)} x y_1^{k,m} dx &= \int_{b_k(m-1)}^{a_k(m)} x \frac{2x - a_k(m) - b_k(m-1)}{a_k(m) - b_k(m-1)} dx \\
 &= \int_{b_k(m-1)}^{a_k(m)} \frac{2x^2}{a_k(m) - b_k(m-1)} - x \frac{a_k(m) + b_k(m-1)}{a_k(m) - b_k(m-1)} dx \\
 &= \left[\frac{2x^3}{3(a_k(m) - b_k(m-1))} - \frac{x^2(a_k(m) + b_k(m-1))}{2(a_k(m) - b_k(m-1))} \right]_{b_k(m-1)}^{a_k(m)} \\
 &= \frac{a_k^3(m) - 3a_k^2(m)b_k(m-1) + 3a_k(m)b_k^2(m-1) - b_k^3(m-1)}{6(a_k(m) - b_k(m-1))} \\
 &= \frac{(a_k(m) - b_k(m-1))^3}{6(a_k(m) - b_k(m-1))} \\
 &= \frac{(a_k(m) - b_k(m-1))^2}{6}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

de même pour le deuxième terme :

$$\begin{aligned}
 \int_{a_k(m)}^{b_k(m)} x y_2^{k,m} dx &= \int_{a_k(m)}^{b_k(m)} x \frac{2x - a_k(m) - b_k(m)}{a_k(m) - b_k(m)} dx \\
 &= -\frac{(a_k(m) - b_k(m))^2}{6}
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

En insérant les équations (2.44) et (2.45) dans (2.43), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 R(k) &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\frac{3^k-1}{2}+1} (a_k(m) - b_k(m-1))^2 - \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\frac{3^k-1}{2}} (a_k(m) - b_k(m))^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\frac{3^k-1}{2}} (a_k(m) - b_k(m-1))^2 - \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\frac{3^k-1}{2}} (a_k(m) - b_k(m))^2 \\
 &\quad + \frac{1}{12} \left(a_k\left(\frac{3^k-1}{2} + 1\right) - b_k\left(\frac{3^k-1}{2}\right) \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

La Figure 2.21 donne la représentation de H^k et H^{k+1} . Si $[b_k(m-1), a_k(m)]$ est un intervalle où la transformation H^k est linéaire alors la transformation H^{k+1} est linéaire sur trois segments $[b_{k+1}(3m-3) = b_k(m-1), a_{k+1}(3m-2)]$, $[a_{k+1}(3m-2), b_{k+1}(3m-2)]$ et $[b_{k+1}(3m-2), a_{k+1}(3m-1) = a_k(m)]$. Le même résultat est obtenu avec $[a_k(m), b_k(m)]$ et $[b_k(m), a_k(m+1)]$. Nous utilisons l'équation (2.46) pour déterminer $R(k+1)$ avec :

$$\begin{aligned}
 R(k+1) &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\frac{3^{k+1}-1}{2}+1} (a_{k+1}(m) - b_{k+1}(m-1))^2 - \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\frac{3^{k+1}-1}{2}} (a_{k+1}(m) - b_{k+1}(m))^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\frac{3^{k+1}-1}{2}} [(a_{k+1}(m) - b_{k+1}(m-1))^2 - (a_{k+1}(m) - b_{k+1}(m))^2] \\
 &\quad + \frac{1}{12} \left(a_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-1}{2} + 1\right) - b_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\frac{3^k-1}{2}} [(a_{k+1}(3m) - b_{k+1}(3m-1))^2 - (a_{k+1}(3m) - b_{k+1}(3m))^2 \\
 &\quad + (a_{k+1}(3m-1) - b_{k+1}(3m-2))^2 - (a_{k+1}(3m-1) - b_{k+1}(3m-1))^2 \\
 &\quad + (a_{k+1}(3m-2) - b_{k+1}(3m-3))^2 - (a_{k+1}(3m-2) - b_{k+1}(3m-2))^2] \\
 &\quad + \frac{1}{12} \left[\left(a_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right) - b_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-3}{2}\right) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \left(a_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right) - b_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right) \right)^2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{12} \left[\left(a_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}+1}{2}\right) - b_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right) \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Nous utilisons la Figure 2.21 pour déterminer la relation entre ces termes :

$$\begin{aligned}
 a_{k+1}(3m) &= \frac{-\beta+1}{2}a_k(m) + \frac{\beta+1}{2}b_k(m) \\
 a_{k+1}(3m-1) &= a_k(m) \\
 a_{k+1}(3m-2) &= \frac{-\beta+1}{2}a_k(m) + \frac{\beta+1}{2}b_k(m-1) \\
 b_{k+1}(3m) &= b_k(m) \\
 b_{k+1}(3m-1) &= \frac{\beta+1}{2}a_k(m) + \frac{-\beta+1}{2}b_k(m) \\
 b_{k+1}(3m-2) &= \frac{\beta+1}{2}a_k(m) + \frac{-\beta+1}{2}b_k(m-1) \\
 b_{k+1}(3m-3) &= b_k(m-1)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}+1}{2}\right) &= a_k\left(\frac{3^k+1}{2}\right) \\ a_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right) &= \frac{-\beta+1}{2}a_k\left(\frac{3^k+1}{2}\right) + \frac{\beta+1}{2}b_k\left(\frac{3^k-1}{2}\right) \\ b_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right) &= \frac{\beta+1}{2}a_k\left(\frac{3^k+1}{2}\right) + \frac{-\beta+1}{2}b_k\left(\frac{3^k-1}{2}\right) \\ b_{k+1}\left(\frac{3^{k+1}-3}{2}\right) &= b_k\left(\frac{3^k-1}{2}\right) \end{aligned}$$

En insérant les relations précédentes dans l'équation (2.47), nous obtenons :

$$\begin{aligned} R(k+1) &= \frac{1}{12} \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta + 1}{2} \right) \sum_{m=1}^{\frac{3^k-1}{2}} [(a_k(m) - b_k(m-1))^2 - (a_k(m) - b_k(m))^2] \\ &\quad + \frac{1}{12} \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta + 1}{2} \right) \left(a_k\left(\frac{3^k+1}{2}\right) + b_k\left(\frac{3^k-1}{2}\right) \right)^2 \\ &= \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta + 1}{2} \right) \left[\frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\frac{3^k-1}{2}} [(a_k(m) - b_k(m-1))^2 - (a_k(m) - b_k(m))^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left(a_k\left(\frac{3^k+1}{2}\right) + b_k\left(\frac{3^k-1}{2}\right) \right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta + 1}{2} \right) R(k) \end{aligned} \tag{2.48}$$

Nous pouvons en déduire que :

$$R(k) = R(0) \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta + 1}{2} \right)^{|k|} \tag{2.49}$$

Pour trouver $R(0)$, nous calculons la puissance moyenne P , tel que :

$$R(0) = P = \int_{-1}^1 x^2 F P^*(\rho(x)) dx = \frac{1}{3} \tag{2.50}$$

L'insertion de l'équation (2.50) dans (2.49) donne :

$$R(k) = \frac{1}{3} \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta + 1}{2} \right)^{|k|} \tag{2.51}$$

La Figure 2.22 montre l'auto-corrélation pour différentes valeurs de β . Nous observons qu'il y a un changement d'allure de $R(k)$ lorsque β varie dans l'intervalle $[0, 1]$. $R(k)$ possède une seule impulsion positive lorsque β s'approche de 0 et elle possède plusieurs oscillations si β s'approche de 1. Ces résultats montrent que les signaux chaotiques ne possèdent pas toujours une auto-corrélation impulsive.

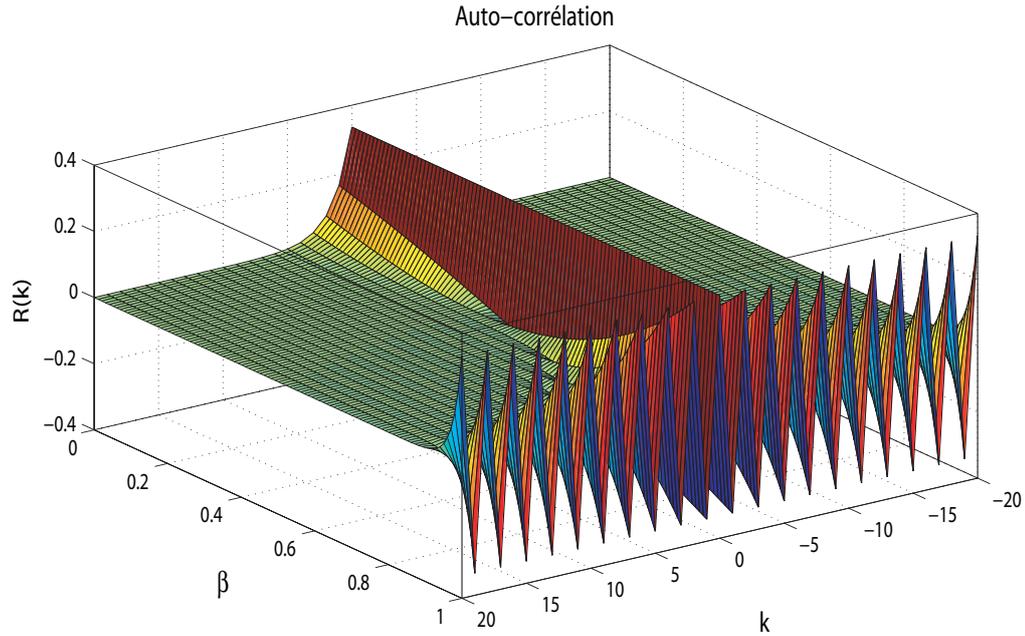


FIGURE 2.22 – Auto-corrélation en fonction de β .

2.4.4 Densité Spectrale de Puissance

En calculant la TFTD de l'équation (2.51), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 S(w) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(k) \cdot e^{-jwk} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta + 1}{2} \right)^{|k|} \cdot e^{-jwk} \\
 &= R(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta + 1}{2} \right)^k \cdot (e^{-jwk} + e^{jwk}) \\
 &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-\beta^2 - 2\beta + 1}{2} \right)^k \cdot \cos(wk) \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{(\beta^2 + 2\beta - 1)(2 \cos(w) + \beta^2 + 2\beta - 1)}{5 + 4\beta^2 \cos(w) + 8\beta \cos(w) - 4 \cos(w) + 2\beta^2 - 4\beta + \beta^4 + 4\beta^3} \\
 &= -\frac{1}{3} \frac{-3 + 2\beta^2 - 4\beta + \beta^4 + 4\beta^3}{5 + 4\beta^2 \cos(w) + 8\beta \cos(w) - 4 \cos(w) + 2\beta^2 - 4\beta + \beta^4 + 4\beta^3}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

La Figure 2.23 montre que le spectre change d'allure passe-bas au passe-haut en passant par un spectre à large bande lorsque β varie dans l'intervalle $[0, 1]$, ces résultats sont similaires aux résultats obtenus dans la section 2.2.

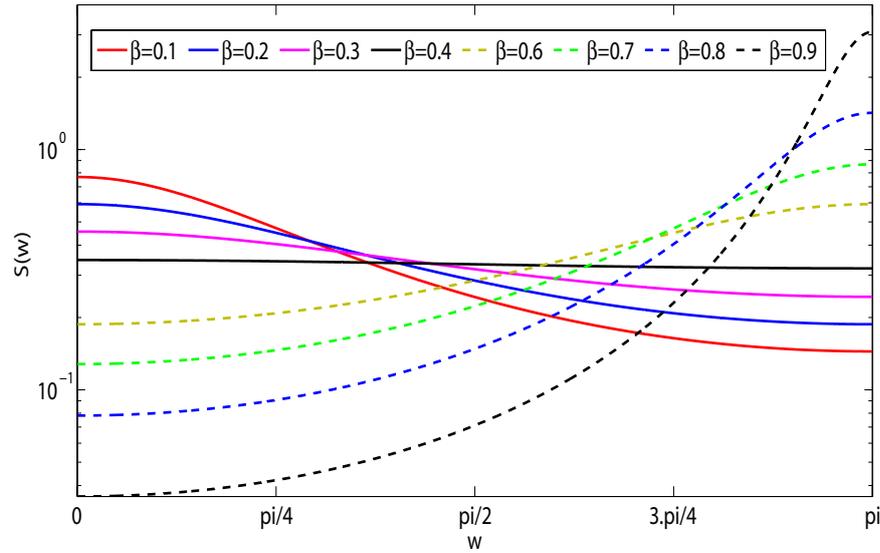


FIGURE 2.23 – Densité spectrale de puissance $S(w)$ pour différentes valeurs de β .

2.4.5 Bande passante

Parmi les caractéristiques de la transformation chaotique PWLM-2, nous déterminons la bande passante pour différentes valeurs de β . Pour calculer la *BP* Bande passante, nous utilisons le théorème de Parseval. Le calcul doit être effectué sur deux intervalles tels que $\beta \in [0, \sqrt{2} - 1]$ pour déterminer BP_1 et $\beta \in [\sqrt{2} - 1, 1]$ pour déterminer BP_2 . Pour cela, nous utilisons l'équation (2.53) pour déterminer BP_1 .

$$\int_0^{BP_1} S(w)dw = r. \int_0^{\pi} S(w)dw \quad (2.53)$$

donc

$$BP_1 = 2 \arctan \left(\frac{csgn \left(\frac{9-2\beta^2-12\beta+\beta^4+4\beta^3}{\sqrt{(\beta^2+2\beta-3)^2(\beta+1)^4}} \right) \tan \left(\frac{1}{2} r. \pi \right) \sqrt{(\beta^2+2\beta-3)^2(\beta+1)^4}}{(9-2\beta^2-12\beta+\beta^4+4\beta^3)} \right) \quad (2.54)$$

Pour déterminer BP_2 , nous pouvons faire de même sur le deuxième intervalle tel que $\beta \in [\sqrt{2} - 1, 1]$ avec la puissance concentrée dans les hautes fréquences :

$$\int_{\pi-BP_2}^{\pi} S(w)dw = r \int_0^{\pi} S(w)dw \quad (2.55)$$

$$BP_2 = 2\pi - 2 \operatorname{arccot} \left(\frac{\operatorname{csgn} \left(\frac{9-2\beta^2-12\beta+\beta^4+4\beta^3}{\sqrt{(\beta^2+2\beta-3)^2(\beta+1)^4}} \right) \tan \left(\frac{\pi}{2} (-1+r) \right) \sqrt{(\beta^2+2\beta-3)^2(\beta+1)^4}}{(9-2\beta^2-12\beta+\beta^4+4\beta^3)} \right) \quad (2.56)$$

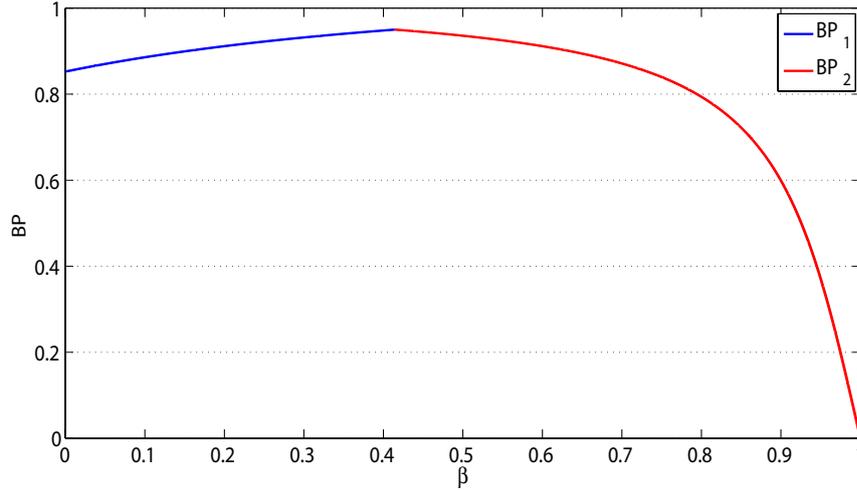


FIGURE 2.24 – Bande passante de (2.32) en fonction de β .

csgn (une fonction signe pour les expressions réelles et complexes) est définie par $((x = \Re(x) + i\Im(x)))$:

$$\operatorname{csgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (0 < \Re(x)) \text{ or } (\Re(x) = 0 \text{ and } 0 < \Im(x)); \\ -1 & \text{if } (\Re(x) < 0) \text{ or } (\Re(x) = 0 \text{ and } \Im(x) < 0); \end{cases} \quad (2.57)$$

La bande passante de la transformation PWLM-2 est donnée par :

$$BP = \begin{cases} \frac{BP_1}{\pi} & \text{if } 0 \leq \beta \leq \sqrt{2} - 1; \\ \frac{BP_2}{\pi} & \text{if } \sqrt{2} - 1 \leq \beta \leq 1 \end{cases} \quad (2.58)$$

La Figure 2.24 montre que la bande passante BP possède un maximum pour $\beta = \sqrt{2} - 1$ et un minimum pour $\beta = 1$. Ainsi, nous obtenons une large bande passante pour les spectres passe bas et différentes bandes passantes pour les spectres passe haut.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié différents types de map (PWLM-1 et PWLM-2). Nous avons commencé par simuler l'autocorrélation et la DSP de la transformation PWLM-1, ensuite nous avons étudié la PWLM-2 en calculant la densité invariante, la SAC et la DSP. Nous avons obtenu différents types de spectre (passe bas, passe haut et large bande). Nous avons mis en évidence que le changement du paramètre de bifurcation permet d'obtenir différentes bandes passantes. Dans le chapitre suivant, nous étudions une transformation linéaire par morceaux avec deux paramètres dans le but de trouver d'autres types de spectre.

Chapitre 3

Etude spectrale d'une transformation linéaire par morceaux avec deux paramètres

3.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre quelques propriétés associées à la bifurcation collision de frontière d'une transformation linéaire par morceaux PWLM définie par trois pentes et dépendant de deux paramètres. Les PWLMs ont un grand intérêt parce que les études précédentes ont montré que le chaos existe dans tous les intervalles de paramètres et il est facile d'obtenir des séquences chaotiques en itérant une telle PWLM.

Nous donnons les expressions analytiques de l'auto-corrélation et de la densité spectrale de puissance (DSP) des signaux chaotiques générés par notre transformation linéaire par morceaux. Mais, il n'est pas évident de déterminer les expressions analytiques de la SAC et de la DSP des transformations linéaires par morceaux. La complexité du calcul augmente avec le nombre de pentes de la transformation. Nous montrons l'existence d'une forte relation entre les paramètres de bifurcations et les différents types de densité spectrale de puissance (passe-bas, passe-haut et passe-bande). Nous constatons également une relation entre le type de spectre et l'ordre des cycles attractifs qui sont situés après la bifurcation de collision de frontière qui conduit au chaos.

3.2 PWLM-3 Maps $T(\cdot)$

Nous étudions la fonction linéaire par morceaux avec deux paramètres, $T : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ donnée par :

$$x_{n+1} = T(x(n), \beta, \Phi) \quad (3.1)$$

et telle que

$$T(x) = \begin{cases} t_1(x) = \frac{x}{\Phi+1} + \frac{1}{\Phi+1}, & \text{si } x \in [\min(-1, \Phi), \Phi] \cap [-1, 1], \\ t_2(x) = \frac{-2x}{-\beta+\Phi} + \frac{\Phi+\beta}{-\beta+\Phi}, & \text{si } x \in [\Phi, \max(\Phi, \beta)] \cap [-1, 1], \\ t_3(x) = -\frac{x}{\beta-1} + \frac{1}{\beta-1}, & \text{si } x \in [\max(\Phi, \beta), \max(\beta, 1)] \cap [-1, 1], \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $x \in (-1, 1)$ et Φ, β deux paramètres réels. Nous considérons plus particulièrement $\Phi \in [-3.5, 1]$ et $\beta \in [-1, 3.5]$. Lorsque les paramètres sont modifiés, nous pouvons obtenir des fonctions différentes à deux ou trois pentes (cf. Figure 3.1). La condition initiale x_0 est choisi dans l'intervalle $(-1, 1)$.

Pour déterminer les points fixes et les cycles- n , nous proposons de simplifier $T(\cdot)$ en utilisant différentes notations T_1, \dots, T_5 selon les valeurs des paramètres Φ et β (cf. Figure 3.1).

Lorsque $-1 < \Phi < \beta < 1$, nous obtenons la transformation T_1 :

$$T_1(x) = \begin{cases} t_1(x), & \text{si } -1 \leq x \leq \Phi, \\ t_2(x), & \text{si } \Phi < x \leq \beta, \\ t_3(x), & \text{si } \beta < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

Si $\beta < \Phi$, nous obtenons la transformation T_2 :

$$T_2(x) = \begin{cases} t_1(x), & \text{si } -1 \leq x \leq \Phi, \\ t_3(x), & \text{si } \Phi < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.4)$$

Si $-1 \leq \beta \leq 1$ et $\Phi \leq -1$, nous obtenons la transformation T_3 :

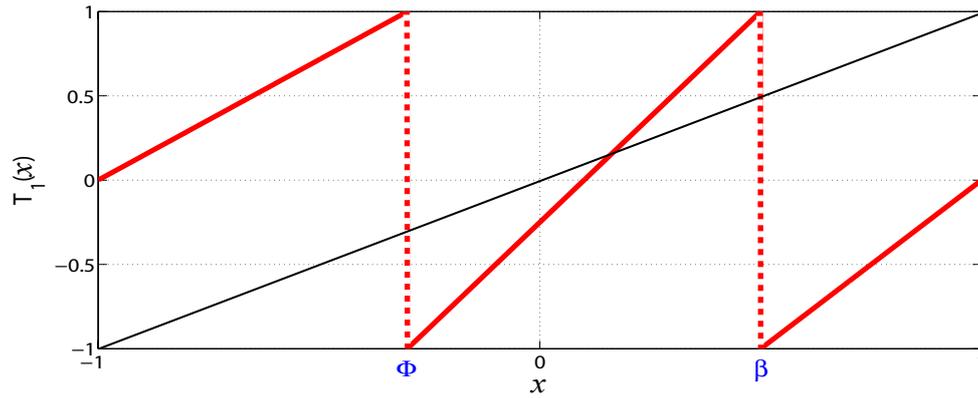
$$T_3(x) = \begin{cases} t_2(x), & \text{si } -1 \leq x \leq \beta, \\ t_3(x), & \text{si } \beta < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

Si $\Phi \leq -1$ et $1 \leq \beta$, nous obtenons la transformation T_4 :

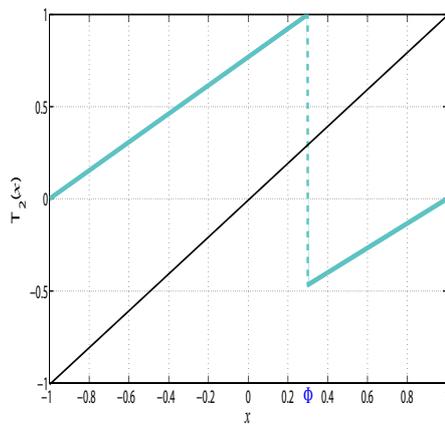
$$T_4(x) = t_2(x), \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1 \quad (3.6)$$

Si $-1 \leq \Phi \leq 1$ et $1 \leq \beta$, nous obtenons la transformation T_5 :

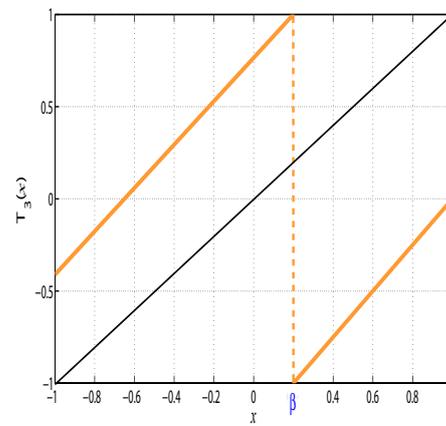
$$T_5(x) = \begin{cases} t_1(x), & \text{si } -1 \leq x \leq \Phi, \\ t_2(x), & \text{si } \Phi < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.7)$$



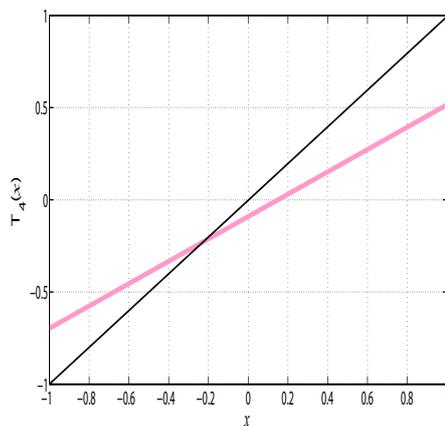
(a) $-1 < \Phi < \beta < 1$



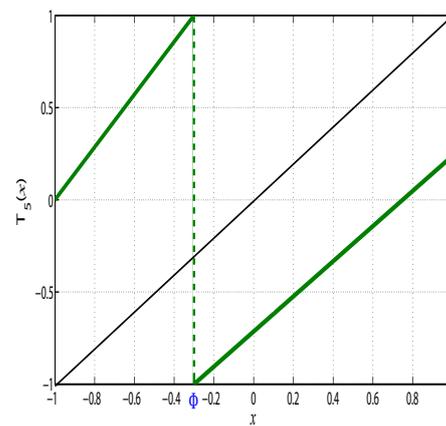
(b) $\beta < \Phi$



(c) $-1 \leq \beta \leq 1$ et $\Phi \leq -1$



(d) $\Phi \leq -1$ et $1 \leq \beta$



(e) $-1 \leq \Phi \leq 1$ et $1 \leq \beta$

FIGURE 3.1 – Représentation de la fonction PWLM-3 en fonction des valeurs de Φ et β .

3.2.1 Points fixes

Pour déterminer la collision de frontière de $T(\cdot)$, nous commençons par déterminer les points fixes. Lorsque $\Phi \in (-3.5, -1)$ et $\beta \in (1, 3.5)$, la fonction $T(\cdot)$ devient :

$$T(x) = T_4(x) = t_2(x) = \frac{-2x}{-\beta+\Phi} + \frac{\Phi+\beta}{-\beta+\Phi}, \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1 \quad (3.8)$$

Un point fixe x_1 satisfait $t_2(x_1) = x_1$, alors :

$$\frac{-2x_1 + \Phi + \beta}{1 - \beta} = x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\Phi + \beta}{3 - \beta} \quad (3.9)$$

Pour assurer l'existence et la stabilité du point fixe x_1 , nous devons avoir :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -1 < T'_4(x_1) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{\Phi+\beta}{2-\beta+\Phi} \leq 1 \\ -1 < \frac{-2}{-\beta+\Phi} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \geq 1 \quad \text{and} \quad \Phi \leq -1 \\ \beta > \Phi - 2 \quad \text{and} \quad \beta > \Phi + 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \geq 1 \\ \Phi \leq -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

en respectant les conditions $\beta > \Phi + 2 \Rightarrow \beta > \Phi - 2$ et $(\beta \geq 1, \Phi \leq -1) \Rightarrow \beta > \Phi + 2$ (Figure 3.2).

Donc, nous pouvons déduire que les courbes de bifurcation collision de frontière des points fixes attractifs sont définies par les lignes S_1^1 et S_1^2 qui correspondent à $\{\beta = 1, \Phi \in (-3.5, -1)\}$ et $\{\Phi = -1, \beta \in (1, 3.5)\}$ (cf. Figure 3.2).

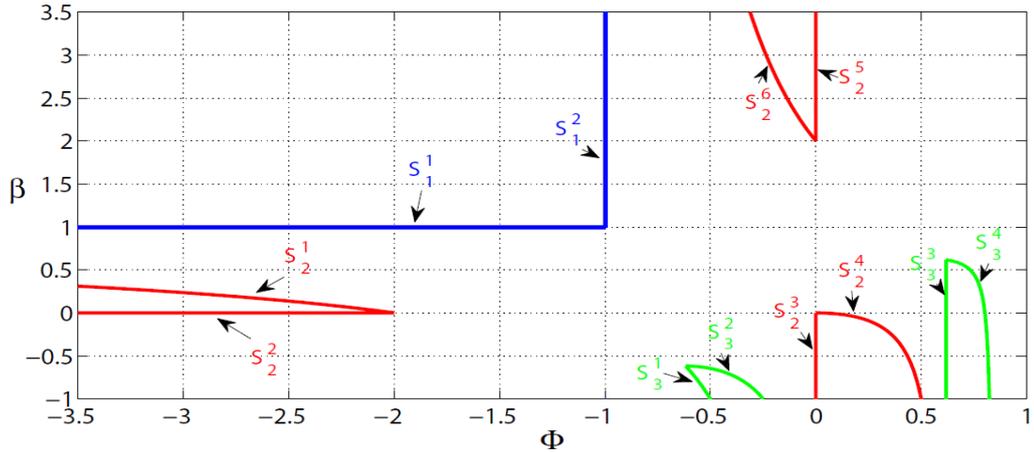


FIGURE 3.2 – Courbes de bifurcation dans le plan de paramètre (Φ, β) de (3.2). Représentation de quelques courbes de bifurcation collision de frontière (S_k^i , $k = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$).

3.2.2 Cycle d'ordre-2

Nous déterminons les points du cycle-2 et la courbe de bifurcation collision de frontière de la fonction $T(\cdot)$:

cas 1 : $\Phi \in (0, 1)$ et $\beta \in (-1, 0)$

$$T^2(x) = T_2^2(x) = \begin{cases} (t_1 \circ t_1)(x) = \frac{x+2+\Phi}{(\Phi+1)^2}, & \text{si } -1 \leq x \leq \Phi^2 + \Phi - 1; \\ (t_3 \circ t_1)(x) = \frac{-x+\Phi}{(\beta-1)(\Phi+1)}, & \text{si } \Phi^2 + \Phi - 1 < x \leq \Phi; \\ (t_1 \circ t_3)(x) = \frac{-x+\beta}{(\beta-1)(\Phi+1)}, & \text{si } \Phi < x \leq 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Le cycle-2 (x_1, x_2) vérifie :

$$\begin{cases} (t_3 \circ t_1)(x_1) = x_1 & \Rightarrow x_1 = \frac{\Phi}{\Phi\beta+\beta-\Phi}, \text{ si } \Phi^2 + \Phi - 1 < x_1 \leq \Phi; \\ (t_1 \circ t_3)(x_2) = x_2 & \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{\Phi\beta+\beta-\Phi}, \text{ si } \Phi < x_2 \leq 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Pour assurer l'existence et la stabilité du cycle-2, nous devons avoir :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \Phi^2 + \Phi - 1 < x_1 \leq \Phi \\ \Phi < x_2 \leq 1 \\ -1 < \left(T_{(\Phi,\beta)}^2\right)'(x) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi^2 + \Phi - 1 < \frac{\Phi}{\Phi\beta+\beta-\Phi} \leq \Phi \\ \Phi < \frac{\beta}{\Phi\beta+\beta-\Phi} \leq 1 \\ -1 < \frac{-1}{(\beta-1)(\Phi+1)} < 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \beta < \frac{\Phi^3+\Phi^2}{(\Phi^2+\Phi-1)(\Phi+1)} \\ \Phi > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donc, nous pouvons déduire que les courbes de bifurcation collision de frontière du Cycle d'ordre-2 (x_1, x_2) sont définies par les lignes $S_2^3 : \{\Phi = 0, \beta < 0\}$ et $S_2^4 : \left\{\beta = \frac{\Phi^3+\Phi^2}{(\Phi^2+\Phi-1)(\Phi+1)}\right\}$ (cf. Figure 3.2).

cas 2 : $\Phi < -1$ et $\beta \in (-1, 1)$.

$$T_{(\Phi,\beta)}^2(x) = T_3^2(x) = \begin{cases} (t_3 \circ t_2)(x) = \frac{2x-2\beta}{(\Phi-\beta)(\beta-1)}, & \text{si } -1 \leq x \leq \beta; \\ (t_2 \circ t_3)(x) = \frac{2x+\beta^2+\Phi\beta-\Phi-\beta-2}{(\Phi-\beta)(\beta-1)}, & \text{si } \beta < x \leq 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Le cycle d'ordre-2 (x_1, x_2) vérifie :

$$\begin{cases} (t_3 \circ t_2)(x_1) = x_1 & \Rightarrow x_1 = \frac{2\beta}{2-(\Phi-\beta)(\beta-1)}, & \text{si } -1 \leq x_1 \leq \beta; \\ (t_2 \circ t_3)(x_2) = x_2 & \Rightarrow x_2 = \frac{-\beta^2-\Phi\beta+\Phi+\beta+2}{2-(\Phi-\beta)(\beta-1)}, & \text{si } \beta < x_2 \leq 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Pour assurer l'existence et la stabilité du cycle-2, alors nous devons avoir :

$$\begin{cases} -1 < x_1 \leq \beta \\ \beta < x_2 \leq 1 \\ -1 < \left(T_{(\Phi,\beta)}^2\right)'(x) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \frac{2\beta}{2-(\Phi-\beta)(\beta-1)} \leq \beta \\ \beta < \frac{-\beta^2-\Phi\beta+\Phi+\beta+2}{2-(\Phi-\beta)(\beta-1)} \leq 1 \\ -1 < \frac{2}{(\Phi-\beta)(\beta-1)} < 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \beta < \frac{\Phi-1+\sqrt{\Phi^2-6\Phi-7}}{2} \\ \Phi < -1 \end{cases}$$

Donc, nous pouvons déduire que les courbes de bifurcation collision de frontière du Cycle d'ordre-2 (x_1, x_2) sont définies par les lignes $S_2^1 : \left\{ \beta = \frac{\Phi-1+\sqrt{\Phi^2-6\Phi-7}}{2} \right\}$ et $S_2^2 : \{\beta = 0, \Phi < -2\}$ (Figure 3.2).

cas 3 : $\Phi \in (-1, 0)$ et $\beta > 1$.

$$T_{(\Phi,\beta)}^2(x) = T_5^2(x) = \begin{cases} (t_2 \circ t_1)(x) = \frac{-2x+\Phi^2+\Phi\beta+\Phi+\beta-2}{(\Phi-\beta)(\Phi+1)}, & \text{si } -1 \leq x \leq \Phi; \\ (t_1 \circ t_2)(x) = \frac{-2x+2\Phi}{(\Phi-\beta)(\Phi+1)}, & \text{si } \Phi < x \leq 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

le cycle d'ordre-2 (x_1, x_2) vérifie :

$$\begin{cases} (t_2 \circ t_1)(x_1) = x_1 & \Rightarrow x_1 = \frac{\Phi^2+\Phi\beta+\Phi+\beta-2}{2+(\Phi-\beta)(\Phi+1)}, & \text{si } -1 \leq x_1 \leq \Phi; \\ (t_1 \circ t_2)(x_2) = x_2 & \Rightarrow x_2 = \frac{2\Phi}{2+(\Phi-\beta)(\Phi+1)}, & \text{si } \Phi < x_2 \leq 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Pour assurer l'existence et la stabilité du cycle-2, nous devons avoir :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} -1 < x_1 \leq \Phi \\ \Phi < x_2 \leq 1 \\ -1 < \left(T_{(\Phi, \beta)}^2\right)'(x) < 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 < \frac{\Phi^2 + \Phi\beta + \Phi + \beta - 2}{2 + (\Phi - \beta)(\Phi + 1)} \leq \Phi \\ \Phi < \frac{2\Phi}{2 + (\Phi - \beta)(\Phi + 1)} \leq 1 \\ -1 < \frac{-2}{(\Phi - \beta)(\Phi + 1)} < 1 \end{array} \right. \quad (3.19) \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta > \frac{\Phi^2 - \Phi + 2}{\Phi + 1} \\ \Phi < 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Nous pouvons déduire que les courbes de bifurcation collision de frontière du Cycle d'ordre-2 (x_1, x_2) sont définies par les lignes $S_2^5 : \{\beta > 2, \Phi = 0\}$ et $S_2^6 : \left\{\beta = \frac{\Phi^2 - \Phi + 2}{\Phi + 1}\right\}$ (cf. Figure 3.2).

3.2.3 Cycle d'ordre-3

Nous déterminons les points du cycle d'ordre-3 et la courbe collision de frontière de la fonction $T(\cdot)$:

cas 1 : $\Phi \in (-1, 1)$ et $\beta < \Phi$:

$$T_{(\Phi, \beta)}^3(x) = T_2^3(x) = \left\{ \begin{array}{l} (t_1 \circ t_3 \circ t_1)(x) = \frac{-x + \Phi\beta + \beta - 1}{(\beta - 1)(\Phi + 1)^2}, \quad \text{si } -1 \leq x \leq \Phi^2(1 - \beta) + \Phi(2 - \beta); \\ (t_3 \circ t_3 \circ t_1)(x) = \frac{x + \Phi\beta + \beta - 2\Phi - 1}{(\beta - 1)^2(\Phi + 1)}, \quad \text{si } \Phi^2(1 - \beta) + \Phi(2 - \beta) < x \leq \Phi; \\ (t_3 \circ t_1 \circ t_3)(x) = \frac{x + \Phi\beta - \Phi - 1}{(\beta - 1)^2(\Phi + 1)}, \quad \text{si } \Phi < x \leq 1 + \Phi - \Phi\beta; \\ (t_1 \circ t_3 \circ t_3)(x) = \frac{x + \beta^2 - \beta - 1}{(\beta - 1)^2(\Phi + 1)}, \quad \text{si } 1 + \Phi - \Phi\beta < x \leq 1. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Le cycle d'ordre-3 (x_1, x_2, x_3) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (t_3 \circ t_3 \circ t_1)(x_1) = x_1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{\Phi\beta + \beta - 2\Phi - 1}{\Phi\beta^2 + \beta^2 - 2\Phi\beta - 2\beta + \Phi}, \quad \text{si } \Phi^2(1 - \beta) + \Phi(2 - \beta) < x_1 \leq \Phi; \\ (t_3 \circ t_1 \circ t_3)(x_2) = x_2 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{\Phi\beta - \Phi - 1}{\Phi\beta^2 + \beta^2 - 2\Phi\beta - 2\beta + \Phi}, \quad \text{si } \Phi < x_2 \leq 1 + \Phi - \Phi\beta; \\ (t_1 \circ t_3 \circ t_3)(x_3) = x_3 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{\beta^2 - \beta - 1}{\Phi\beta^2 + \beta^2 - 2\Phi\beta - 2\beta + \Phi}, \quad \text{si } 1 + \Phi - \Phi\beta < x_3 \leq 1. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Pour assurer l'existence et la stabilité du cycle-3, nous devons avoir :

$$\begin{cases}
 \Phi^2 (1 - \beta) + \Phi (2 - \beta) < x_1 \leq \Phi \\
 \Phi < x_2 \leq 1 + \Phi - \Phi\beta \\
 1 + \Phi - \Phi\beta < x_3 \leq 1 \\
 -1 < \left(T_{(\Phi, \beta)}^3\right)'(x) < 1 \\
 \Phi^2 (1 - \beta) + \Phi (2 - \beta) < \frac{\Phi\beta + \beta - 2\Phi - 1}{\Phi\beta^2 + \beta^2 - 2\Phi\beta - 2\beta + \Phi} \leq \Phi \\
 \Phi < \frac{\Phi\beta - \Phi - 1}{\Phi\beta^2 + \beta^2 - 2\Phi\beta - 2\beta + \Phi} \leq 1 + \Phi - \Phi\beta \\
 1 + \Phi - \Phi\beta < \frac{\beta^2 - \beta - 1}{\Phi\beta^2 + \beta^2 - 2\Phi\beta - 2\beta + \Phi} \leq 1 \\
 -1 < \frac{1}{(\beta - 1)^2(\Phi + 1)} < 1 \\
 \frac{\Phi + 1}{\Phi} < \beta \\
 \beta < \frac{3\Phi + 2\Phi^2 + \sqrt{4\Phi^3 + \Phi^2 - 4\Phi}}{\Phi(\Phi + 1)} \\
 -1 < \Phi < 0
 \end{cases} \quad (3.22)$$

Nous pouvons déduire que les courbes de bifurcation collision de frontière du Cycle d'ordre-3 (x_1, x_2, x_3) sont définies par les lignes $S_3^1 : \left\{ \beta = \frac{\Phi + 1}{\Phi} \right\}$ et $S_3^2 : \left\{ \beta = \frac{3\Phi + 2\Phi^2 + \sqrt{4\Phi^3 + \Phi^2 - 4\Phi}}{\Phi(\Phi + 1)} \right\}$ (Figure 3.2).

cas 2 : $\Phi \in (-1, 1)$ et $\beta < \Phi$:

$$T_{(\Phi, \beta)}^3(x) = T_2^3(x) = \begin{cases}
 (t_1 \circ t_1 \circ t_1)(x) = \frac{x + \Phi^2 + 3\Phi + 3}{(\Phi + 1)^3}, & \text{si } -1 \leq x \leq \Phi^3 + 2\Phi^2 - 2; \\
 (t_3 \circ t_1 \circ t_1)(x) = \frac{-x + \Phi^2 + \Phi - 1}{(\beta - 1)(\Phi + 1)^2}, & \text{si } \Phi^3 + 2\Phi^2 - 2 < x \leq \Phi^2 + \Phi - 1; \\
 (t_1 \circ t_3 \circ t_1)(x) = \frac{-x + \Phi\beta + \beta - 1}{(\beta - 1)(\Phi + 1)^2}, & \text{si } \Phi^2 + \Phi - 1 < x \leq \Phi; \\
 (t_1 \circ t_1 \circ t_3)(x) = \frac{-x + \Phi\beta + 2\beta - \Phi - 1}{(\beta - 1)(\Phi + 1)^2}, & \text{si } \Phi < x \leq 1.
 \end{cases} \quad (3.23)$$

Le cycle d'ordre-3 (x_1, x_2, x_3) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (t_3 \circ t_1 \circ t_1)(x_1) = x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\Phi^2 + \Phi - 1}{\Phi^2 \beta - \Phi^2 + 2\Phi\beta - 2\Phi + \beta}, \text{ si } \Phi^3 + 2\Phi^2 - 2 < x_1 \leq \Phi^2 + \Phi - 1; \\ (t_1 \circ t_3 \circ t_1)(x_2) = x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\Phi\beta + \beta - 1}{\Phi^2 \beta - \Phi^2 + 2\Phi\beta - 2\Phi + \beta}, \text{ si } \Phi^2 + \Phi - 1 < x_2 \leq \Phi; \\ (t_1 \circ t_1 \circ t_3)(x_3) = x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{\Phi\beta + 2\beta - \Phi - 1}{\Phi^2 \beta - \Phi^2 + 2\Phi\beta - 2\Phi + \beta}, \text{ si } \Phi < x_3 \leq 1. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Pour assurer l'existence et la stabilité du cycle-3, nous devons avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^3 + 2\Phi^2 - 2 < x_1 \leq \Phi^2 + \Phi - 1 \\ \Phi^2 + \Phi - 1 < x_2 \leq \Phi \\ \Phi < x_3 \leq 1 \\ -1 < \left(T_{(\Phi, \beta)}^3\right)'(x) < 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi^3 + 2\Phi^2 - 2 < \frac{\Phi^2 + \Phi - 1}{\Phi^2 \beta - \Phi^2 + 2\Phi\beta - 2\Phi + \beta} \leq \Phi^2 + \Phi - 1 \\ \Phi^2 + \Phi - 1 < \frac{\Phi\beta + \beta - 1}{\Phi^2 \beta - \Phi^2 + 2\Phi\beta - 2\Phi + \beta} \leq \Phi \\ \Phi < \frac{\Phi\beta + 2\beta - \Phi - 1}{\Phi^2 \beta - \Phi^2 + 2\Phi\beta - 2\Phi + \beta} \leq 1 \\ -1 < \frac{-1}{(\beta-1)(\Phi+1)^2} < 1 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta < \frac{\Phi^3 + 2\Phi^2 - \Phi - 1}{\Phi^3 + 2\Phi^2 - 2} \\ \Phi > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array} \right.$$

Nous pouvons déduire que les courbes de bifurcation collision de frontière du Cycle d'ordre-3 (x_1, x_2, x_3) sont définies par les lignes $S_3^3 : \left\{ \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \beta < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}$ et $S_3^4 : \left\{ \beta = \frac{\Phi^3 + 2\Phi^2 - \Phi - 1}{\Phi^3 + 2\Phi^2 - 2} \right\}$ (Figure 3.2).

3.3 Courbes de bifurcation

Une bifurcation spécifique qui apparaissent dans les transformations linéaires par morceaux, ce type de bifurcations correspondent à un contact entre un ensemble

invariant et la limite de la région de différentiabilité [40]. Ces bifurcations sont nommées "Bifurcation Collision de Frontière". Le terme bifurcation collision de frontière est apparu pour la première fois dans les publications de Nusse et Yorke [41, 42] et il est maintenant largement connu pour les transformations linéaires par morceaux [43]. Parmi les travaux qui concerne ce type de bifurcation, nous pouvons trouver Leonov qui décrit et donne une relation récursive pour trouver l'expression analytique de la séquence de bifurcation qui se produit dans un plan linéaire par morceaux unidimensionnel avec un point de discontinuité [44]. D'autres études sur les transformations linéaires par morceaux peuvent être trouvés dans [45–47]. D'autres auteurs ont décrit la bifurcation collision de frontière mais en utilisant des différents noms et notations [48, 49].

La Figure 3.3 montre les courbes de bifurcation du transformation (3.2) dans le plan de paramètre (Φ, β) . Une bifurcation spécifique apparaît dans les transformations linéaires par morceaux et correspond à une bifurcation collision de frontière. Ce type de bifurcations correspond à un contact entre un ensemble invariant et la limite de la région différentiable [40].

Dans la Figure 3.3, le chaos est indiqué par la couleur noire et les autres couleurs correspondent à des cycles stables (bleu pt fixe, rouge cycle-2, ...).

Dans la section suivante, nous allons étudier la densité invariante, les exposants de Lyapunov, la séquence d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance des signaux générés par la transformation (3.3) dans le cas $\beta = -\Phi$ et $\Phi \in (-1, 0)$. Nous avons choisi ces paramètres car :

- le chaos existe dans le plan des paramètres et il est indiqué dans la Figure 3.3.
- il est plus facile de calculer l'auto-corrélation lorsque la densité invariante est uniforme. Nous montrons dans la section suivante que la densité de la transformation T_1 est uniforme dans ce cas.
- la variation du paramètre Φ nous permet d'obtenir une région chaotique limitée par les points fixes et le cycle-2.

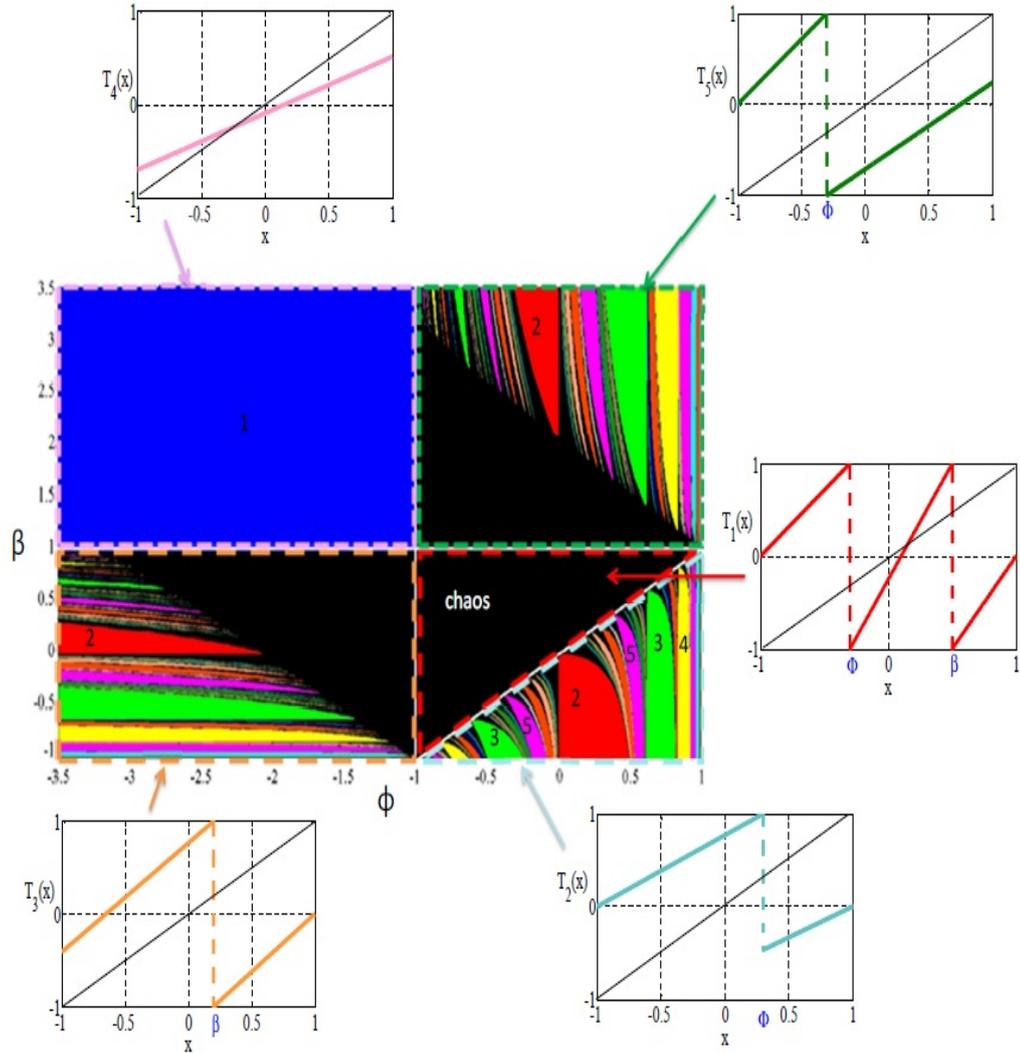


FIGURE 3.3 – L'ordre des cycles est détecté numériquement ce qui donne la bifurcation collision de frontière de la famille de fonction $T(\cdot)$. Les couleurs et les numéros correspondent à l'existence d'orbites périodiques stables dans des régions spécifiques.

3.4 Calcul analytique de la DSP pour $\beta = -\Phi$

Lorsque $\beta = -\Phi$ et $\Phi \in (-1, 0)$, la transformation T_1 devient :

$$T_1(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\Phi+1}, & \text{si } -1 \leq x \leq \Phi, \\ \frac{-x}{\Phi}, & \text{si } \Phi < x \leq -\Phi, \\ \frac{x-1}{\Phi+1}, & \text{si } -\Phi < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.26)$$

Nous déterminons d'abord la densité invariante de la transformation T_1 pour calculer l'auto-corrélation et la DSP.

3.4.1 Densité de probabilité

Pour déterminer la densité invariante de la transformation $T_1(\cdot)$, nous appliquons la transformée inverse de $T_1^{-1}(\cdot)$ sur l'intervalle $[-1, x]$. Afin de déterminer $T_1^{-1}([-1, x])$, il y a deux cas à considérer, comme illustré à la Figure 3.4 :

cas 1 : si $x \geq 0$,

$$T_1^{-1}([-1, x]) = [-1, x_1] \cup [\Phi, x_2] \cup [-\Phi, 1] \quad (3.27)$$

avec T_1 défini par l'équation (3.26), nous avons :

$$\begin{cases} x_1 = x(\Phi + 1) - 1 \\ x_2 = -\Phi x \\ x_3 = x(\Phi + 1) + 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

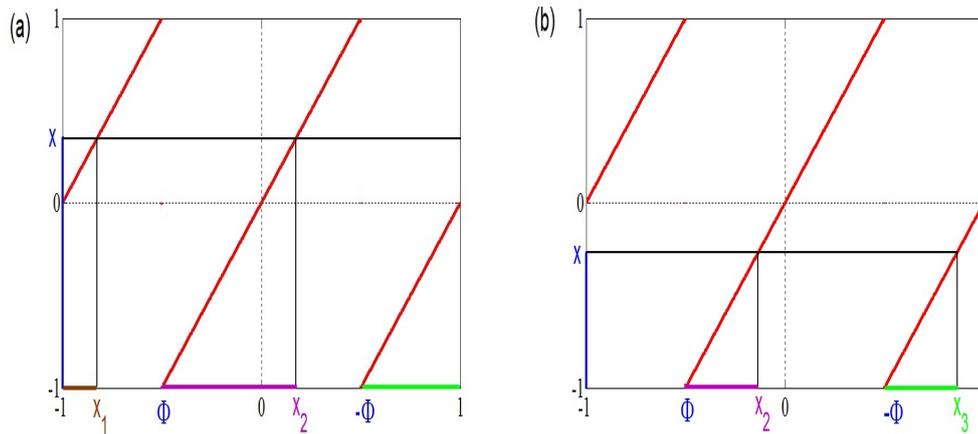


FIGURE 3.4 – L'intervalle $[-1, x]$ est donné par l'inverse de T_1 , (a) : si $x \geq 0$, (b) : si $x < 0$.

Les simulations montrent que $\rho(x) = \frac{1}{2}$ est invariant, nous allons vérifier cette propriété ci-dessous en utilisant l'opérateur de Frobenius-Perron FP :

$$\begin{aligned} FP(\rho(x)) &= \frac{d}{dx} \left[\int_{-1}^{x_1} \rho(u) du + \int_{\Phi}^{x_2} \rho(u) du + \int_{-\Phi}^1 \rho(u) du \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (x_1 + 1) + \frac{1}{2} (x_2 - \Phi) + \frac{1}{2} (1 + \Phi) \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x + 1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

cas 2 : si $x < 0$,

$$T_1^{-1}([-1, x]) = [\Phi, x_2] \cup [-\Phi, x_3] \quad (3.30)$$

En supposant que $\rho(x) = \frac{1}{2}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} FP(\rho(x)) &= \frac{d}{dx} \left[\int_{\Phi}^{x_2} \rho(u) du + \int_{-\Phi}^{x_3} \rho(u) du \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (x_2 - \Phi) + \frac{1}{2} (x_3 + \Phi) \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x+1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Alors $FP(\rho(x)) = \rho(x) \forall x \in [-1, 1]$ et la densité $FP^*(\rho(x)) = \frac{1}{2}$ est invariante par la transformation T_1 .

3.4.2 Exposants de Lyapunov

Nous utilisons l'équation (1.10) pour déterminer l'exposant de Lyapunov de T_1 :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |T_1'(x(n))| dx \\ &= \int_{-1}^{\Phi} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\Phi+1} \right) dx + \int_{\Phi}^{-\Phi} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{-1}{\Phi} \right) dx + \int_{-\Phi}^1 \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\Phi+1} \right) dx \\ &= (\Phi+1) \ln \left(\frac{1}{\Phi+1} \right) - \Phi \ln \left(\frac{-1}{\Phi} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

La Figure 3.5 montre le plan de bifurcations de la transformation T_1 dans lequel plusieurs couleurs indiquent l'ordre des cycles attractifs et la couleur noire indique l'emplacement du chaos. En étudiant les exposants de Lyapunov de la transformation, nous observons que l'équation (3.26) est chaotique quand $\Phi \in (-1, 0)$ ce qui confirme les résultats obtenus dans la Figure 3.5 (a).

3.4.3 Calcul de l'auto-corrélation

Pour calculer l'auto-corrélation de la transformation (3.26), nous proposons une nouvelle méthode de calcul analytique basé sur les travaux de [1, 38]. Alors, nous utilisons l'équation (1.31) puisque la transformation $T_1(\cdot)$ peut être considéré comme

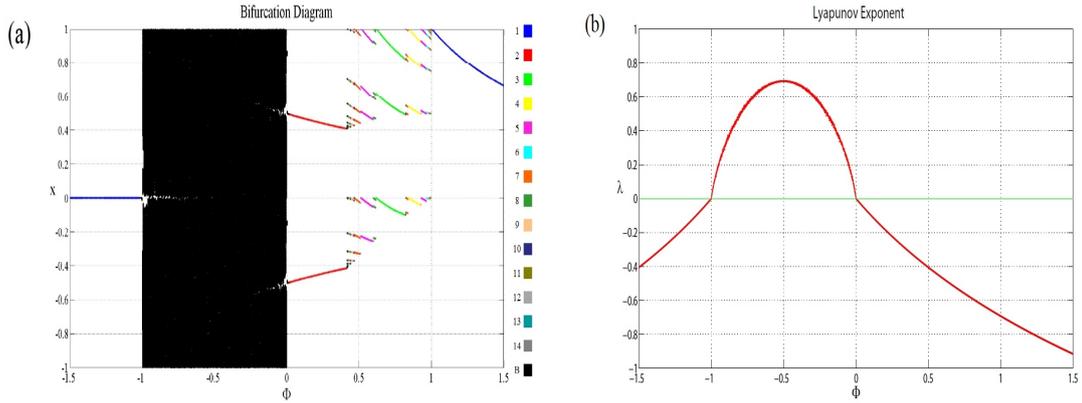


FIGURE 3.5 – (a) Simulation du diagramme de bifurcation de la transformation T_1 avec un nombre d'itérations $N = 10000$ et un transitoire de 5000 itérations. (b) L'estimation des exposants de Lyapunov avec le logiciel AnT 4.669 avec $N=10000$.

fonction à processus stochastique ergodique.

$$R(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 XT_1^k(X)dX \quad (3.33)$$

Pour déterminer l'auto-corrélation $R(k)$, nous allons écrire $R(k+1)$ en fonction de $R(k)$. Ensuite, nous exprimons $R(k)$ en fonction de $R(1)$ et de Φ :

$$\begin{aligned} R(k+1) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 XT_1^{k+1}(X)dX \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 XT_1^k(T_1(X))dX \end{aligned} \quad (3.34)$$

Nous pouvons faire un changement de variable, puisque $T_1(X)$ est une transformation linéaire par morceaux, comme suit :

$$T_1(X) = a_i X + b_i = y \quad \Rightarrow \quad X = \frac{y - b_i}{a_i} \quad (3.35)$$

en supposant que :

$$T_1(X) = \begin{cases} a_1 X + b_1, & \text{if } \alpha_1 \leq X \leq \gamma_1; \\ a_2 X + b_2, & \text{if } \alpha_2 < X \leq \gamma_2; \\ a_3 X + b_3, & \text{if } \alpha_3 < X \leq \gamma_3. \end{cases} \quad (3.36)$$

avec,

$$\begin{array}{llllll}
 i = 1 & a_1 = \frac{1}{\Phi + 1} & b_1 = \frac{1}{\Phi + 1} & \alpha_1 = -1 & \gamma_1 = \Phi \\
 i = 2 & a_2 = \frac{-1}{\Phi} & b_2 = 0 & \alpha_2 = \Phi & \gamma_2 = -\Phi \\
 i = 3 & a_3 = \frac{1}{\Phi + 1} & b_3 = \frac{-1}{\Phi + 1} & \alpha_3 = -\Phi & \gamma_3 = 1
 \end{array}$$

et $a_i\alpha_i + b_i \leq y \leq a_i\gamma_i + b_i$.

Alors,

$$\begin{aligned}
 R(k+1) &= \frac{1}{2} \sum_i \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} XT_1^k(y) dX \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i \int_{a_i\alpha_i+b_i}^{a_i\gamma_i+b_i} \frac{y-b_i}{a_i} T_1^k(y) \frac{dy}{a_i} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} \left[\int_{a_i\alpha_i+b_i}^{a_i\gamma_i+b_i} y T_1^k(y) dy - b_i \int_{a_i\alpha_i+b_i}^{a_i\gamma_i+b_i} T_1^k(y) dy \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[(\Phi+1)^2 \int_0^1 y T_1^k(y) dy + \Phi^2 \int_{-1}^1 y T_1^k(y) dy + (\Phi+1)^2 \int_{-1}^0 y T_1^k(y) dy \right. \\
 &\quad \left. - (\Phi+1) \int_0^1 T_1^k(y) dy + (\Phi+1) \int_{-1}^0 T_1^k(y) dy \right]
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Puisque la fonction T_1 est impaire alors nous pouvons simplifier (3.37) et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 R(k+1) &= \frac{1}{2} \left[(2\Phi^2 + 2\Phi + 1) \int_{-1}^1 y T_1^k(y) dy - 2(\Phi+1) \int_0^1 T_1^k(y) dy \right] \\
 &= (2\Phi^2 + 2\Phi + 1)R(k) - (\Phi+1) \int_0^1 T_1^k(y) dy
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Pour compléter le calcul de $R(k+1)$, nous devons calculer :

$$J_k = \int_0^1 T_1^k(y) dy \tag{3.39}$$

Tout d'abord, nous déterminons la relation entre J_{k+1} et J_k :

$$J_{k+1} = \int_0^1 T_1^{k+1}(y) dy = \int_0^1 T_1^k(T_1(y)) dy. \tag{3.40}$$

Nous utilisons le changement de variable suivant :

$$T_1(y) = a_i y + b_i = x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x - b_i}{a_i} \quad (3.41)$$

avec,

$$\begin{array}{llllll} i = 1 & a_1 = \frac{-1}{\Phi} & b_1 = 0 & \alpha_1 = 0 & \gamma_1 = -\Phi & \\ i = 2 & a_2 = \frac{1}{\Phi + 1} & b_2 = \frac{-1}{\Phi + 1} & \alpha_2 = -\Phi & \gamma_2 = 1 & \end{array}$$

et $a_i \alpha_i + b_i \leq x \leq a_i \gamma_i + b_i$. T_1 est une fonction impaire, donc :

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \int_0^1 T_1^k(T_1(y)) dy \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{a_i \alpha_i + b_i}^{a_i \gamma_i + b_i} T_1^k(x) \frac{dx}{a_i} \\ &= -\Phi \int_{a_1 \alpha_1 + b_1}^{a_1 \gamma_1 + b_1} T_1^k(x) dx + (\Phi + 1) \int_{a_2 \alpha_2 + b_2}^{a_2 \gamma_2 + b_2} T_1^k(x) dx \\ &= -\Phi \int_0^1 T_1^k(x) dx + (\Phi + 1) \int_{-1}^0 T_1^k(x) dx \\ &= -(2\Phi + 1) \int_0^1 T_1^k(x) dx \\ &= -(2\Phi + 1) J_k \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nous pouvons déduire que :

$$J_k = (-1)^{k-1} (2\Phi + 1)^{k-1} J_1 \quad (3.43)$$

Ensuite, nous calculons le premier terme J_1 :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 T_1^1(y) dy \\ &= \int_0^{-\Phi} \frac{-y}{\Phi} dy + \int_{-\Phi}^1 \frac{y-1}{\Phi+1} dy \\ &= -\frac{(2\Phi+1)}{2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

En remplaçant (3.44) dans (3.43), nous obtenons :

$$J_k = (-1)^k \frac{(2\Phi + 1)^k}{2} \quad (3.45)$$

Par conséquent, nous pouvons écrire $R(k + 1)$ comme suit :

$$R(k + 1) = (2\Phi^2 + 2\Phi + 1) R(k) - (\Phi + 1) \frac{(-1)^k (2\Phi + 1)^k}{2} \quad (3.46)$$

Ensuite, nous pouvons déterminer $R(k)$ en utilisant (3.46) :

$$R(k) = (2\Phi^2 + 2\Phi + 1) R(k - 1) - (\Phi + 1) \frac{(-1)^{k-1} (2\Phi + 1)^{k-1}}{2} \quad (3.47)$$

d'où,

$$\begin{aligned} R(2) &= A R(1) + (1 + \Phi) \frac{(2\Phi + 1)}{2} \\ R(3) &= A^2 R(1) + A(1 + \Phi) \frac{(2\Phi + 1)}{2} - (1 + \Phi) \frac{(2\Phi + 1)^2}{2} \\ R(4) &= A^3 R(1) + A^2(1 + \Phi) \frac{(2\Phi + 1)}{2} - A(1 + \Phi) \frac{(2\Phi + 1)^2}{2} + (1 + \Phi) \frac{(2\Phi + 1)^3}{2} \\ &\vdots \\ R(k) &= A^{k-1} R(1) + U(k) \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec $A = 2\Phi^2 + 2\Phi + 1$ et

$$\begin{aligned} U(k) &= (1 + \Phi) \frac{(2\Phi + 1)}{2} [A^{k-2} - A^{k-3}(2\Phi + 1) + A^{k-4}(2\Phi + 1)^2 - A^{k-5}(2\Phi + 1)^3 \\ &\quad + \dots + (-1)^k (2\Phi + 1)^{k-2}] \\ &= (1 + \Phi) \frac{(2\Phi + 1)}{2} \sum_{j=2}^k (-1)^j A^{k-j} (2\Phi + 1)^{j-2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

En substituant (3.49) dans (3.48), nous obtenons :

$$\begin{aligned} R(k) &= (2\Phi^2 + 2\Phi + 1)^{k-1} R(1) \\ &\quad + \frac{(\Phi + 1)(2\Phi + 1)}{2} \sum_{j=2}^k (-1)^j (2\Phi^2 + 2\Phi + 1)^{k-j} (2\Phi + 1)^{j-2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

puis, nous avons :

$$\begin{aligned}
 R(1) &= \int_{-1}^1 XT_1^1(X)\rho(X)dX \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 XT_1^1(X)dX \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{\Phi} \frac{X^2 + X}{\Phi + 1} dX + \frac{1}{2} \int_{\Phi}^{-\Phi} \frac{-X^2}{\Phi} dX + \frac{1}{2} \int_{-\Phi}^1 \frac{X^2 - X}{\Phi + 1} dX \\
 &= \frac{4\Phi^2 + \Phi - 1}{6}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

En insérant (3.51) dans (3.50), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 R(k) &= (2\Phi^2 + 2\Phi + 1)^{k-1} R(1) \\
 &\quad + \frac{(\Phi + 1)(2\Phi + 1)}{2} \sum_{j=2}^k (-1)^j (2\Phi^2 + 2\Phi + 1)^{k-j} (2\Phi + 1)^{j-2} \\
 &= (2\Phi^2 + 2\Phi + 1)^{k-1} \left(\frac{4\Phi^2 + \Phi - 1}{6} \right) \\
 &\quad + \frac{(\Phi + 1)(2\Phi + 1)}{2} \sum_{j=2}^k (-1)^j (2\Phi^2 + 2\Phi + 1)^{k-j} (2\Phi + 1)^{j-2} \\
 &= \frac{(4\Phi + 1)(2\Phi^2 + 2\Phi + 1)^{|k|} + 3(-2\Phi - 1)^{|k|}}{12 + 12\Phi}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

La Figure 3.6 montre l'auto-corrélation pour différentes valeurs de Φ . Nous observons que l'allure de $R(k)$ change lorsque Φ varie dans l'intervalle $(-1, 0)$. $R(k)$ présente une impulsion positive lorsque Φ s'approche de -1 et plusieurs oscillations lorsque Φ s'approche de 0 . Ces résultats montrent que les signaux chaotiques n'admettent pas toujours une auto-corrélation impulsion.

3.4.4 Densité spectrale de puissance de T_1

Pour calculer la DSP $S(w)$, nous utilisons l'équation (1.32). Aussi, nous avons montré déjà qu'une densité invariante est $FP^*(\rho(x)) = \frac{1}{2}$. Donc, nous avons :

$$R(0) = \int_{-1}^1 x^2 FP^*(\rho(x)) dx = \frac{1}{3} \tag{3.53}$$

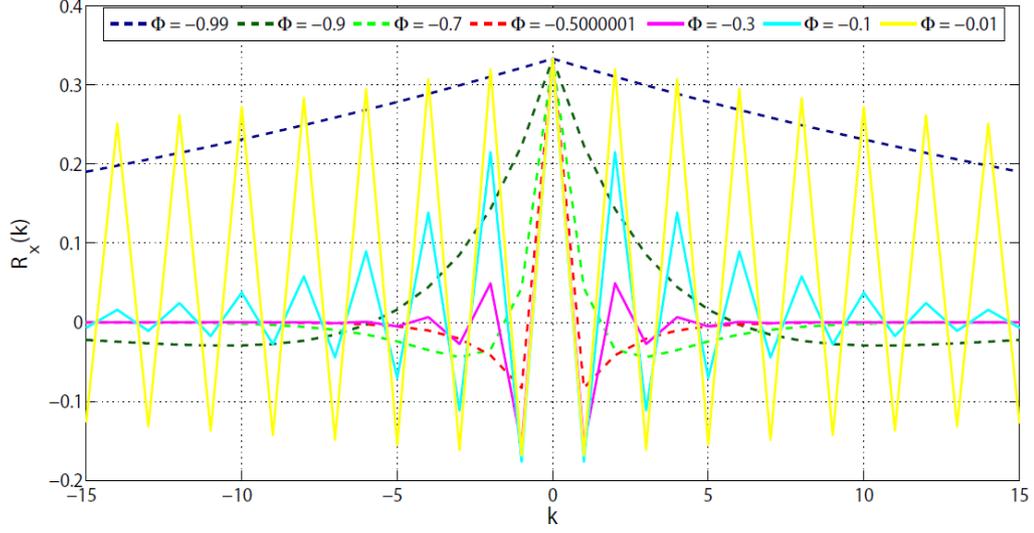


FIGURE 3.6 – Auto-corrélation pour T_1 lorsque $\beta = -\Phi$.

En substituant (3.53) dans (1.32), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 S(w) &= R(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} R(k) (e^{-iwk} + e^{iwk}) \\
 &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(4\Phi + 1)(2\Phi^2 + 2\Phi + 1)^k + 3(-2\Phi - 1)^k}{12 + 12\Phi} (e^{-iwk} + e^{iwk}) \\
 &= \frac{(1 + \Phi)\Phi}{6(2\Phi^2 + 2\cos(w)\Phi + 2\Phi + \cos(w) + 1)} \\
 &\quad * \frac{(8\Phi^4 + 8\cos(w)\Phi^3 + 16\Phi^3 + 6\cos(w)\Phi^2 + 20\Phi^2 + 9\Phi + 3\cos(w)\Phi - 2\cos(w) + 4)}{(-2\Phi^4 - 4\Phi^3 + 2\cos(w)\Phi^2 - 4\Phi^2 + 2\cos(w)\Phi - 2\Phi + \cos(w) - 1)}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

La Figure 3.7 montre que la variation du paramètre Φ dans l'intervalle $[-1, 0]$ peut donner plusieurs types de spectres (passe-bas, passe-haut, large bande et passe bande).

Dans la présente section, un calcul analytique a été effectué uniquement dans le cas $\beta = -\Phi$. Il est impossible de faire le calcul dans le cas général d'où la nécessité de faire les simulations numériques. Nous pouvons remarquer sur la Figure 3.7 que le spectre change d'allure quand Φ s'approche de 0 et -1 . Ainsi, nous proposons de modifier les paramètres de bifurcation pour obtenir les cycles d'ordre n qui sont proches de la bifurcation donnant du chaos.

Dans la section suivante, nous simulons le diagramme de bifurcation, l'exposant de Lyapunov, l'auto-corrélation et la densité spectrale de puissance des signaux générés par la transformation (3.2). Nous cherchons la relation entre les différents

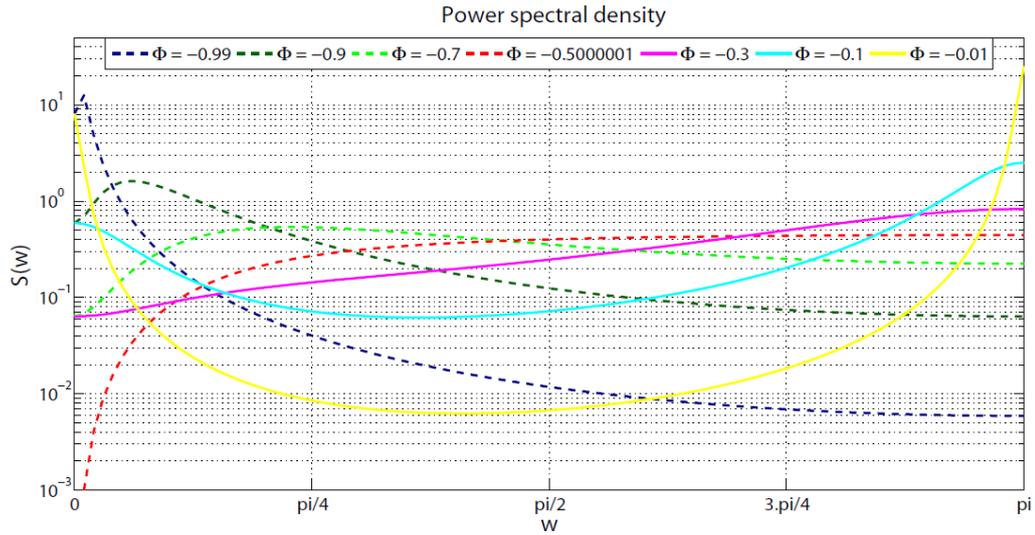


FIGURE 3.7 – Densité spectrale de puissance de T_1 lorsque $\beta = -\Phi$.

types de spectre et les paramètres de bifurcation.

3.5 Simulation de l'auto-corrélation et du spectre pour différents paramètres.

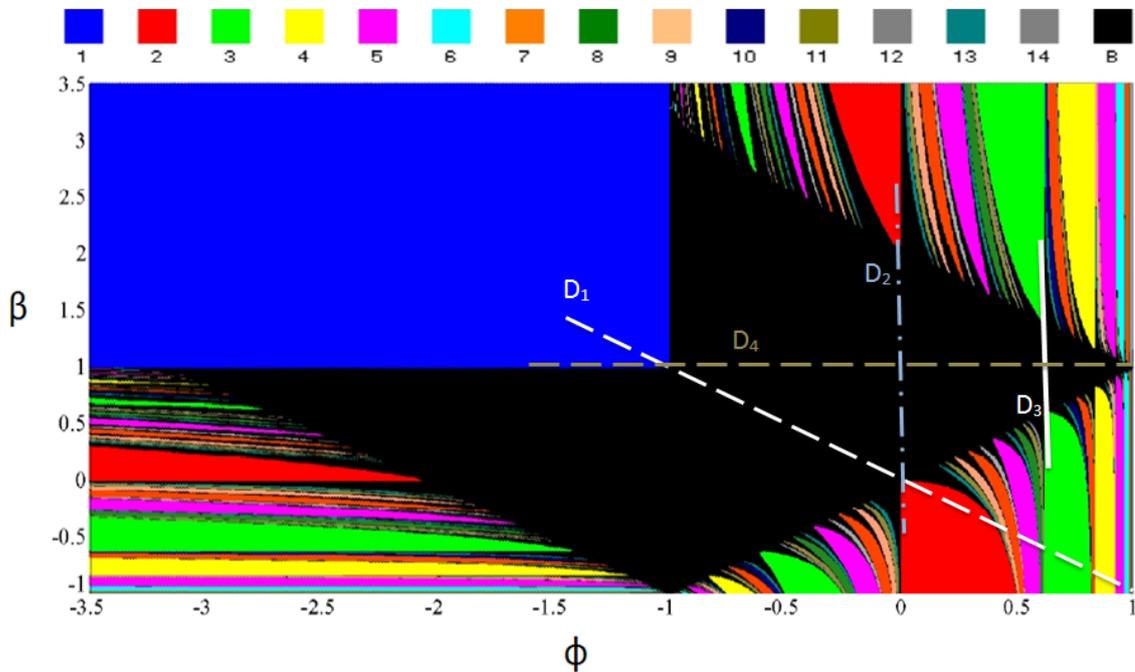


FIGURE 3.8 – Les lignes D_i , $i = 1, 2, 3, 4$ choisies pour effectuer les simulations.

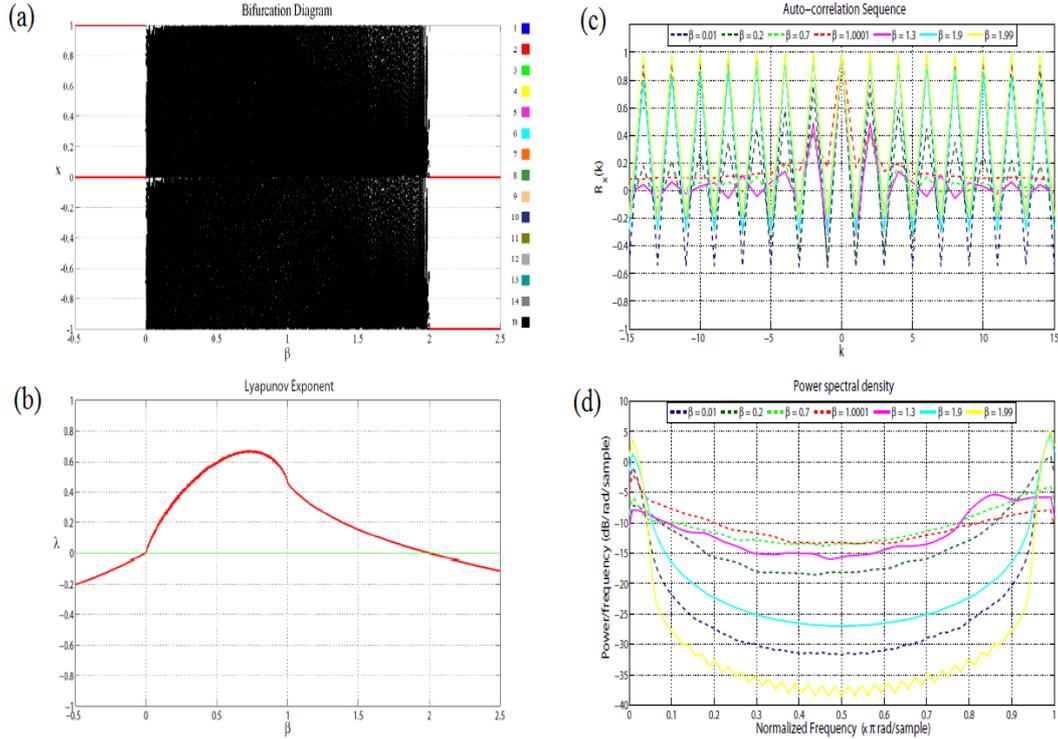


FIGURE 3.9 – Simulation avec $\Phi = 0$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance.

Pour analyser le signal chaotique, nous utilisons le logiciel AnT 4.669 pour simuler les exposants de Lyapunov avec un nombre d'itérations $N = 10000$ et le logiciel MATLAB pour simuler le diagramme de bifurcation (avec un nombre d'itérations $N = 10000$ et un transitoire de 5000 itérations), l'auto-corrélation et le spectre. Ensuite, nous utilisons la méthode de Welch pour déterminer une estimation de la densité spectrale. Cette méthode nécessite de diviser les données des séries temporelles en segments, puis de calculer la modification de périodogramme de chaque segment et enfin de déterminer la moyenne des estimations du DSP.

Les lignes D_1, \dots, D_4 sur la Figure 3.8 montrent les valeurs des paramètres pour lesquelles nous avons fait nos études. Dans les figures suivantes, nous simulons (3.2) avec différentes valeurs des paramètres Φ et β .

Nous avons simulé le cas étudié et analysé dans la section précédente avec $\beta = -\Phi$ pour la transformation $T_{(\Phi, \beta)}$ et qui est indiqué par la ligne D_1 dans la Figure 3.8. Nous avons vérifié les résultats de la SAC et de la DSP obtenus analytiquement, ils sont donnés dans la Figure 3.6 et la Figure 3.7.

Dans le diagramme de bifurcation de la Figure 3.5(a), nous observons que le chaos est limité par la période-1 (quand Φ tend vers -1) et la période-2 (quand Φ

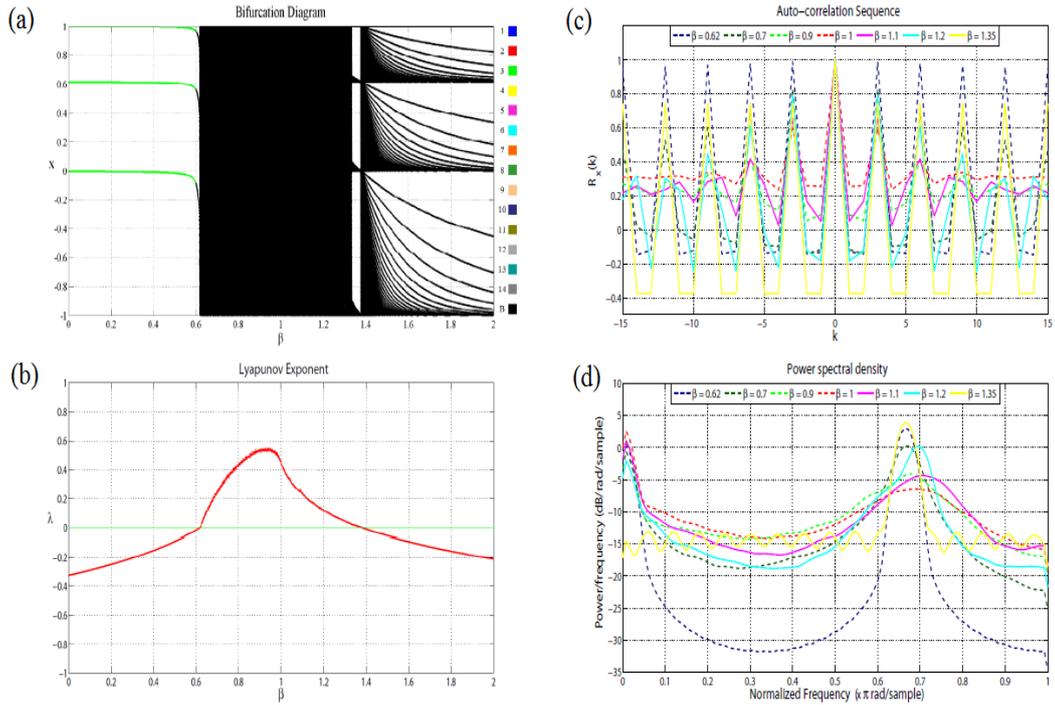


FIGURE 3.10 – Simulation pour $\Phi = 0.62$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance.

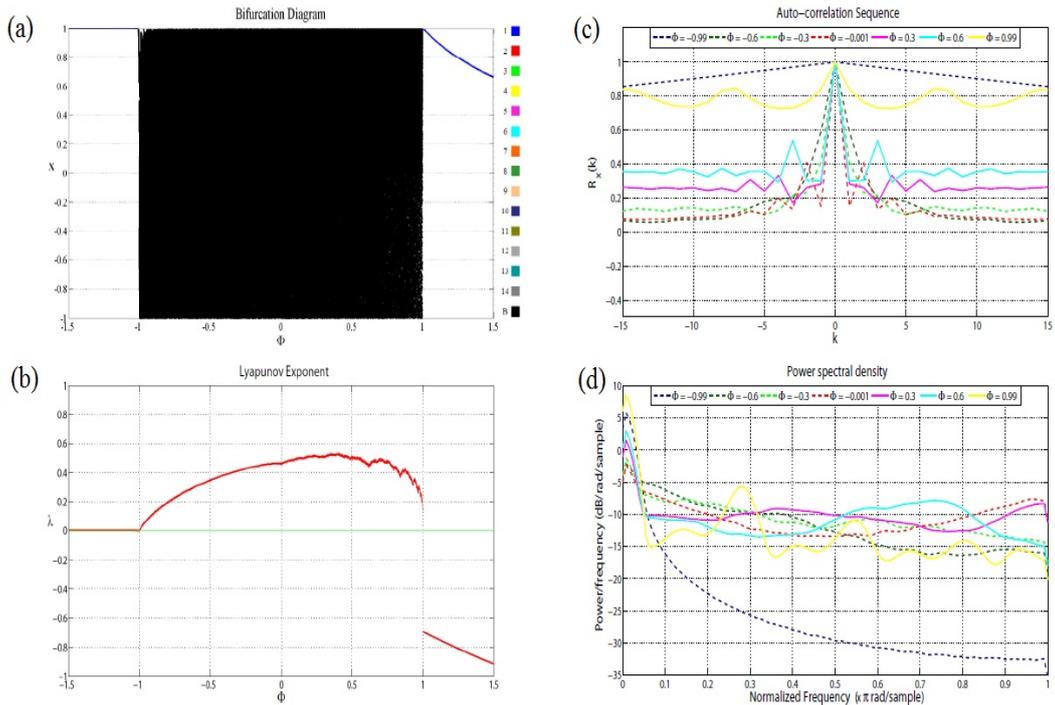


FIGURE 3.11 – Simulation pour $\beta = 1$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance.

tend vers 0). La SAC change de forme quand $\Phi \in (-1, 0)$. Nous avons un spectre passe-bas quand Φ s'approche de -1 et à proximité de l'existence d'un point fixe attractif. Lorsque Φ s'approche de 0 et du cycle de période-2, nous obtenons un spectre passe-bande.

Dans la Figure 3.9, nous avons simulé le diagramme de bifurcation, l'exposant de Lyapunov, l'auto-corrélation et la densité spectrale de puissance pour $\Phi = 0$ et $\beta \in] -0.5, 2.5[$, ce qui correspond à la ligne D_2 dans la Figure 3.8 mais le chaos est limité par $\beta \in]0, 2[$ et il existe un cycle de période-2 hors cet intervalle. Lorsque β varie dans l'intervalle $]0, 2[$, nous observons que l'auto-corrélation oscille, la DSP reste identique quand β varie, le spectre est passe bande quand β s'approche de 0 ou 2, alors que le spectre devient large bande lorsque β tend vers 1.

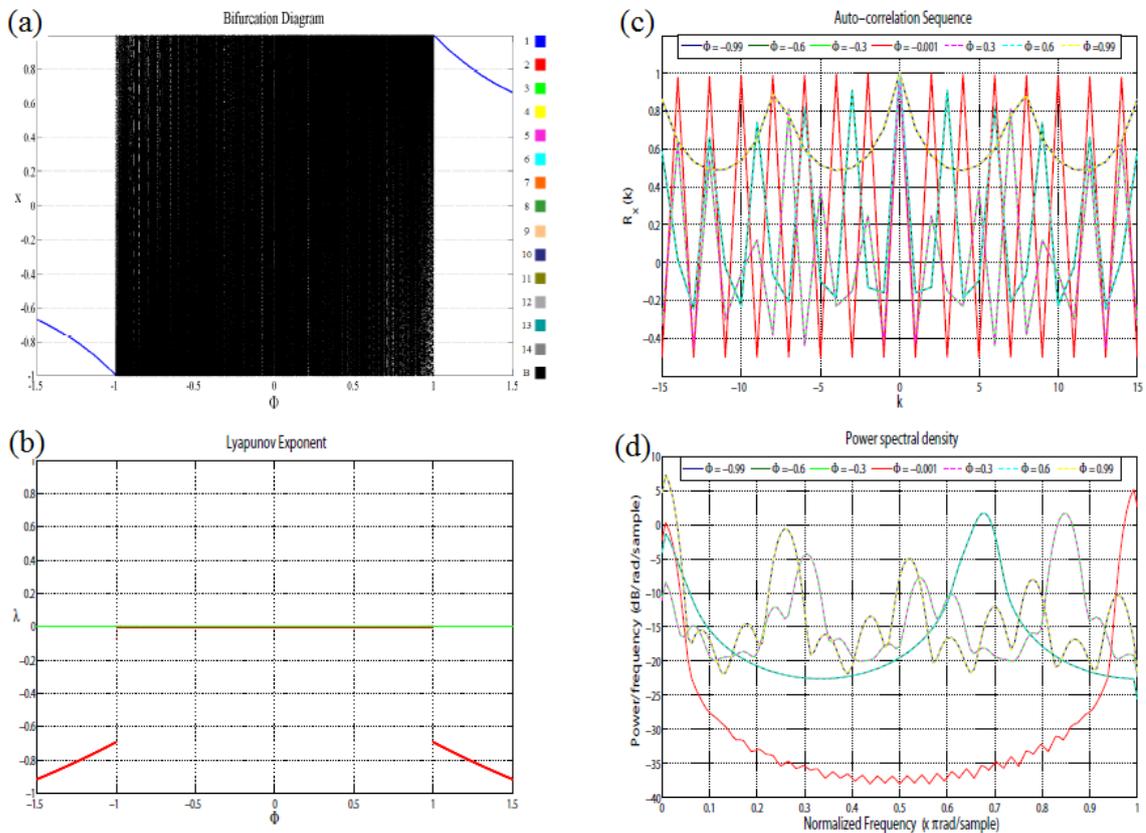


FIGURE 3.12 – Simulation pour $\beta = \Phi$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance.

Maintenant, nous choisissons $\Phi = 0.62$ et $\beta \in]0, 2[$ pour simuler la Figure 3.10, qui correspond à la ligne D_3 dans la Figure 3.8. Le chaos existe quand β varie entre $]0.618, 1.37[$ et lorsque β tend vers 0.6 il existe un cycle de période-3. Nous notons que si β varie dans l'intervalle $]0.618, 1.37[$, l'auto-corrélation présente des oscillations,

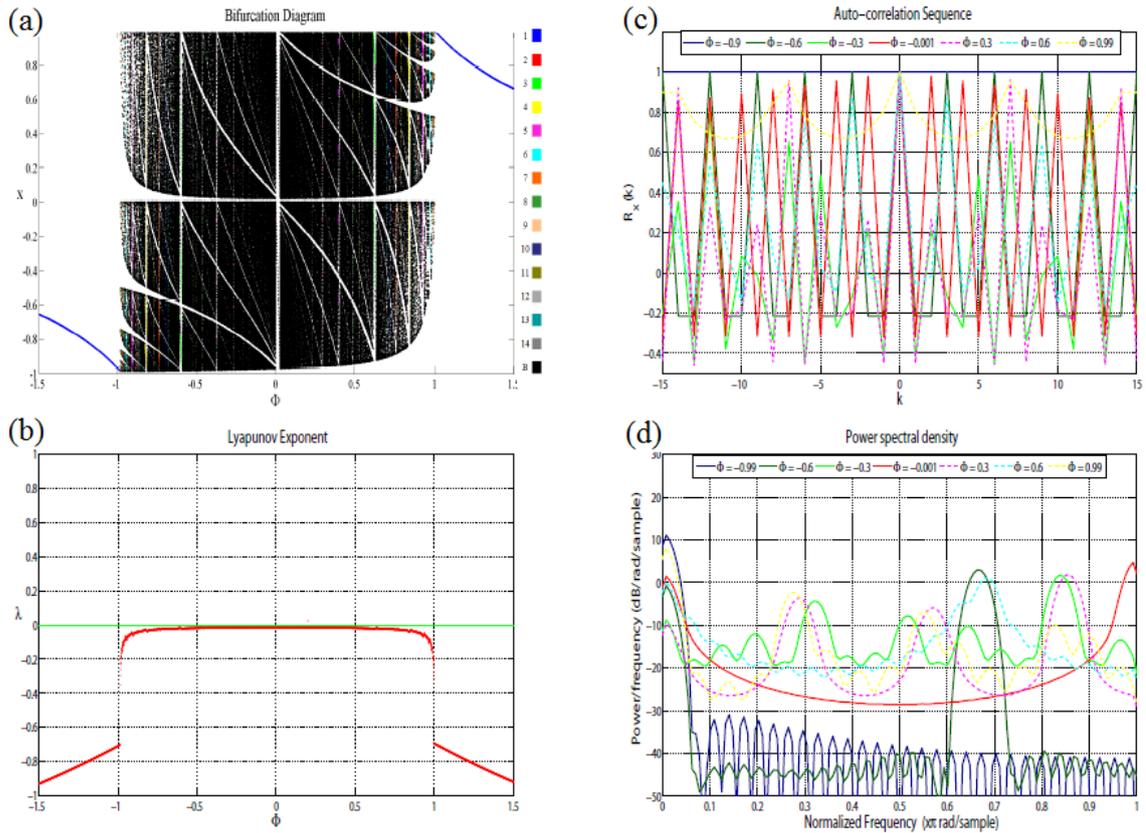


FIGURE 3.13 – Simulation pour $\beta = \Phi - 0.03$ (a) Diagramme de bifurcation, (b) Exposant de Lyapunov, (c) Auto-corrélation, (d) Densité spectrale de puissance.

la DSP a la même allure en variant β et le spectre possède un pic au milieu.

La Figure 3.11 est simulée avec $\beta = 1$ et $\Phi \in]-1.5, 1.5[$, le choix de ces paramètres est représenté par la ligne D_4 dans la Figure 3.8. Dans ce cas, le chaos existe quand Φ varie entre $] -1, 1[$ et il existe un point fixe attractif hors cet intervalle. La DSP a la même allure quand Φ varie et le spectre est passe-bas.

Dans la Figure 3.12, nous avons simulé quelques caractéristiques de la transformation $T_{(\Phi, \beta)}$ avec $\beta = \Phi$. Nous pouvons déduire à partir du diagramme de bifurcation et de l'exposant de Lyapunov que le chaos existe pour $\Phi \in] -1, 1[$. Il existe à la limite d'apparition des cycles, ce qui correspond à l'apparition de différents types de spectre et à l'absence de spectre large bande.

La Figure 3.13 est simulée avec $\beta = \Phi - 0.03$ et $\Phi \in] -1, 1[$. A partir du diagramme de bifurcation et de l'exposant de Lyapunov, nous pouvons conclure qu'il n'y a pas de chaos dans cet intervalle mais il existe plusieurs périodes possibles pour les cycles. Nous concluons ainsi à l'existence de plusieurs types de spectre à cause de l'apparition des cycles lorsque Φ varie dans l'intervalle $(-1, 1)$.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la transformation linéaire par morceaux avec trois pentes différentes et fonction de deux paramètres réels (Φ, β) . Nous avons détaillé et expliqué quelques bifurcations qui se produisent avec cette transformation. Nous avons déduit analytiquement la densité invariante, l'auto-corrélation et la densité spectrale de puissance des signaux chaotiques dans quelques cas particuliers. Nous avons trouvé plusieurs types de bande passante (passe-bas, passe-haut, large bande et passe-bande). Les expressions analytiques présentées dans ce document confirment la possibilité de générer facilement des signaux chaotiques avec une bande passante spécifique et essentielle. Puisque l'augmentation du nombre des pentes augmente la complexité du calcul de la SAC et DSP, alors il est possible d'obtenir plus de choix pour générer des signaux chaotiques utilisables dans des applications potentielles. Nous avons calculé analytiquement l'auto-corrélation avec une nouvelle méthode plus simple qui peut être utilisée pour d'autres transformations linéaires par morceaux à condition d'avoir une densité invariante uniformément répartie. Nous avons également trouvé un nouveau type de spectre (passe bande) par calcul analytique. Dans la section 3.5, nous avons simulé d'autres types de transformation $T_{(\Phi, \beta)}$ et nous pouvons conclure que le spectre dépend de l'existence des orbites périodiques au-delà de la bifurcation de collision de frontière qui a donné naissance au chaos. Si nous avons un point fixe attractif dans la limite nous obtenons un spectre passe-haut ou passe-bas, si la limite est un cycle attractif de période-2, nous obtenons un spectre passe-bande et si la limite est un cycle de période-3 nous obtenons un spectre passe-bas combiné avec un spectre passe bande.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à des applications concernant les systèmes radars. Nous essayons d'appliquer les résultats de nos études spectrales en déterminant quelques caractéristiques du radar comme la fonction d'ambiguïté.

Chapitre 4

Application Radar

4.1 Introduction

Les propriétés du chaos (signaux déterministes et possédant l'allure d'un bruit) ont conduit à envisager plusieurs applications dans le domaine du radar (RADio De-tection And Ranging). Les applications radar actuelles peuvent être classées en trois catégories. Dans la première, nous constatons que certains échos radar ressemblent à des signaux chaotiques plutôt que purement aléatoires et donc la théorie du chaos peut être utilisée pour traiter les signaux radar classiques [50, 51]. La deuxième application consiste à implémenter des signaux radar codées ou modulées avec du chaos [52, 53]. L'objectif principal est de développer des codes flexibles ayant le caractère aléatoire souhaité. Dans la troisième, le chaos est utilisé comme un signal aléatoire continu pour être implémenté dans le signal bruit du radar [54–56]. Les recherches actuelles s'intéressent notamment à la production et à l'analyse des performances des signaux chaotiques [57–60]. Certains prototypes de systèmes radar sont donnés dans [61, 62]. Il est démontré qu'un signal chaotique peut être facilement généré à l'aide de circuit non linéaires simples, avec de larges bandes passantes et de bonnes propriétés de corrélation. Ces propriétés offrent une bonne gamme de résolution et de non ambiguïté [63].

Pour concrétiser et bien utiliser les différents spectres et simulations de la fonction d'ambiguïté obtenue, nous essayons de faire le multiplexage. Ensuite, nous recherchons un effet de multiplexage avec la fonction d'ambiguïté.

4.2 Système radar

Un radar est un capteur électromagnétique pour la détection et la localisation des objets réfléchissants [2]. Son fonctionnement peut être résumé comme suit :

- Le radar émet de l'énergie électromagnétique qui se propage dans l'espace à partir d'une antenne.
- Une partie de l'énergie rayonnée est interceptée par un objet réfléchissant, généralement appelé une cible située à une certaine distance du radar.
- L'énergie intercepté par la cible est réémise dans de nombreuses directions.
- Une partie de l'énergie réémise (ou écho) est retournée et reçue par l'antenne du radar.
- Après l'amplification par le récepteur et à l'aide d'un traitement du signal approprié, une décision est prise à la sortie du récepteur pour savoir si le signal d'écho de cible est pris en compte ou non. A ce moment, l'emplacement et d'autres informations concernant la cible sont acquises.

Une forme d'onde commune émise par un radar est une série d'impulsions rectangulaires relativement étroites. Un exemple d'une forme d'onde d'un radar à moyenne portée qui détecte les avions peut être décrit comme une brève impulsion d'un millièmième de seconde (une microseconde), le temps entre les impulsions est alors d'une milliseconde (de sorte que la fréquence de répétition des impulsions soit un kilohertz), la puissance d'impulsion de l'émetteur radar est d'un million de watts (un mégawatt) ; avec ces chiffres la puissance moyenne de l'émetteur est d'un kilowatt. Une puissance moyenne d'un kilowatt est alors inférieure à la puissance de l'éclairage électrique qui se trouve habituellement dans une salle de classe. Cet exemple radar peut fonctionner dans le milieu de la gamme de fréquences de micro-ondes entre 2.7 et 2.9 GHz, c'est une bande de fréquence typique pour les radars de surveillance civile dans les aéroports. La longueur d'onde est alors d'environ 10 cm. Avec cette antenne, le radar peut détecter les avions sur un intervalle de 50 à 60 milles marins. La puissance de l'écho reçu d'une cible par un radar peut varier sur un large intervalle de valeurs, mais on suppose arbitrairement un signal d'écho typique à 10^{-13} watts. Si la puissance rayonnée est de 10^6 watts (un mégawatt), le rapport de la puissance du signal d'écho d'une cible à la puissance de l'émetteur de radar dans cet exemple est de 10^{-19} , d'où l'écho reçu est de 190 dB de moins que le signal transmis. Cela donne une différence importante entre l'amplitude du signal transmis et le signal détectable d'écho reçu. Les cibles radar peuvent être des avions, des bateaux, des missiles, ainsi que des personnes, des oiseaux ou des caractéristiques

du sol (végétation, montagnes, routes, bâtiments . . .). En plus de mesurer la distance à une cible ainsi que son orientation angulaire, un radar peut aussi détecter la vitesse relative de la cible en déterminant la vitesse de variation (la mesure de la distance en fonction du temps) ou la vitesse radiale de la fréquence doppler décalée du signal d'écho. Si l'emplacement d'une cible en mouvement est mesurée pendant une période de temps, alors la cible peut être déterminée à partir de la vitesse et de sa direction et ensuite une prévision peut être effectuée. Les radars convenablement conçus peuvent déterminer la taille et la forme d'une cible, mais également être capables de reconnaître le type ou la catégorie de cible. La Figure 4.1 est un schéma fonctionnel basique présentant les sous-systèmes qui constituent habituellement un radar.

L'émetteur, qui est représenté comme un amplificateur de puissance, génère une forme d'onde convenable pour être utilisée dans des radars particuliers. Il peut avoir une puissance moyenne plus faible que le milliwatt ou plus grande que le mégawatt. La puissance moyenne est l'une des indications de performance d'un radar, c'est sa puissance en pic. La plupart des radars utilisent une forme d'onde d'impulsion courte afin qu'une seule antenne soit utilisée pour émettre et recevoir le signal à la fois.

Le duplexeur est un dispositif électronique permettant l'utilisation d'une même antenne pour l'émission et la réception du signal. Il s'agit donc d'un commutateur qui relie alternativement l'antenne à l'émetteur puis au récepteur radio.

L'antenne est le dispositif qui permet à l'énergie transmise de se propager dans l'espace, puis recueille l'énergie écho en réception. Il s'agit presque toujours d'une antenne directive qui dirige l'énergie de rayonnement en un faisceau étroit pour concentrer la puissance ainsi que pour déterminer la direction de la cible. Une antenne qui produit un faisceau étroit lors d'une émission directive a généralement une grande surface pour permettre la collecte de signaux d'écho faibles de la cible. L'antenne non seulement concentre l'énergie en émission et collecte l'énergie d'écho lors de la réception, mais agit aussi comme un filtre spatial pour fournir une bonne résolution angulaire entre autres.

Le récepteur amplifie le faible signal reçu à un niveau où sa présence peut être détectée. Le bruit étant une limitation de la capacité d'un radar lors de la décision de détection, il faut prendre soin de s'assurer que le récepteur en produit très peu. Aux fréquences de micro-ondes où la plupart des radars fonctionnent, le bruit qui affecte les performances est habituellement représenté comme un amplificateur à faible bruit (cf Figure 4.1). Pour de nombreuses applications radar, la limitation de détection

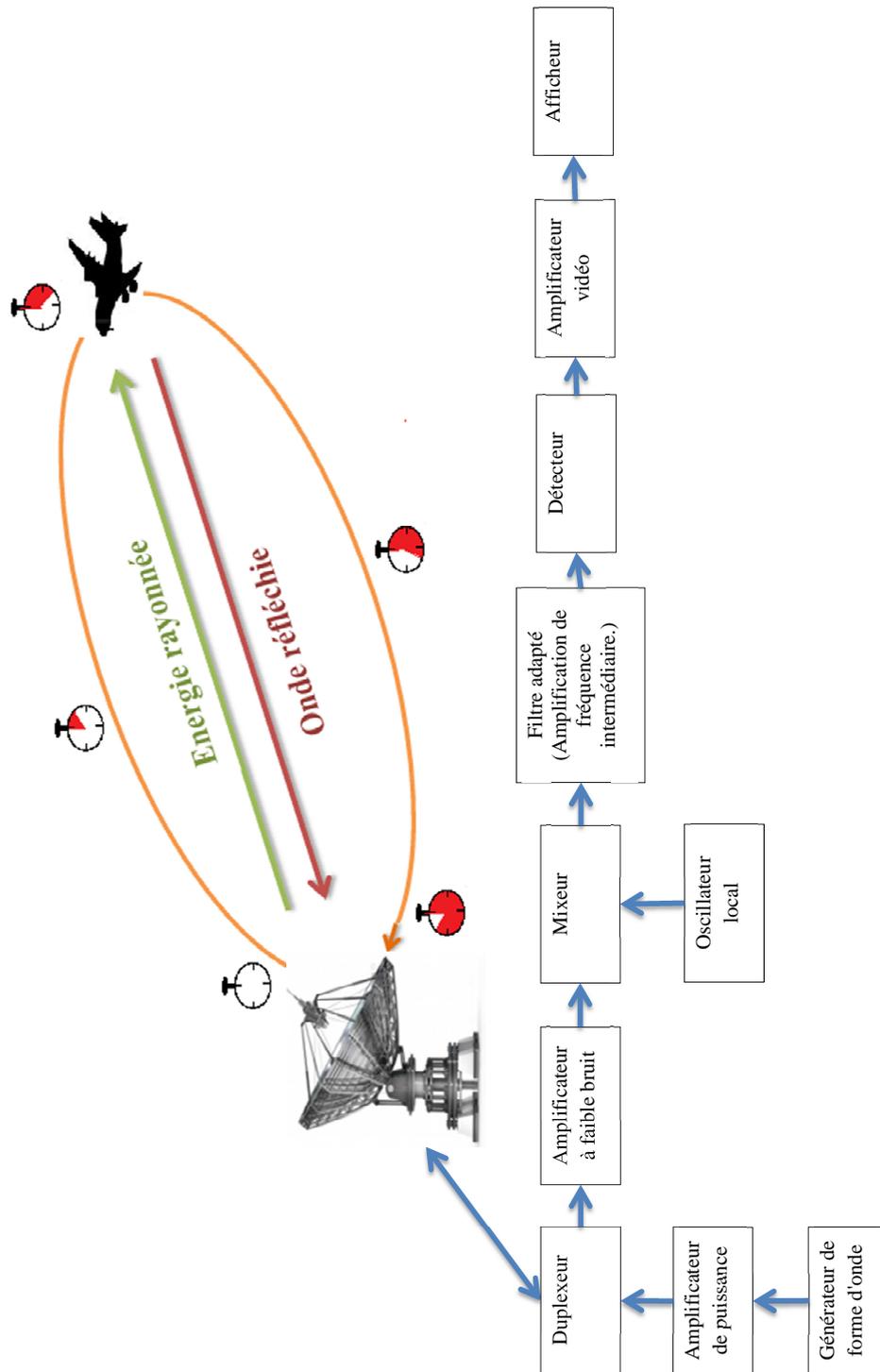


FIGURE 4.1 – Schéma opérationnel d'un radar [2].

est liée à l'écho indésirable de l'environnement. Le récepteur doit avoir une assez grande gamme dynamique de façon à éviter l'encombrement écho défavorable qui affecte la détection des cibles en mouvement. La gamme dynamique d'un récepteur, généralement exprimée en décibels, est définie comme le rapport entre le maximum et le minimum de puissance du signal d'entrée sur laquelle le récepteur peut fonctionner. Le niveau maximum du signal peut être réglé grâce aux effets non linéaires de la réponse du récepteur (par exemple lorsque la puissance de signal est telle que le récepteur commence à saturer), ainsi le signal minimum pourrait être le signal minimum détectable. Le processeur de signal, qui est souvent dans la partie de fréquence intermédiaire du récepteur, peut être décrit comme la partie du récepteur qui sépare le signal souhaité à partir des signaux non désirés qui peuvent dégrader le processus de détection. Il comprend le filtre adapté qui maximise le rapport signal de sortie sur bruit. Il inclut aussi le traitement doppler qui maximise le rapport signal sur l'écho parasite d'une cible en mouvement lorsque l'écho parasite est plus important que le bruit reçu, et il sépare la cible en mouvement d'autres cibles mobiles ou de l'écho parasite. La décision de détection est prise à la sortie du récepteur, c-à-d la cible est déclarée comme étant présente lorsque la sortie du récepteur dépasse un seuil prédéterminé. Si le seuil est réglé trop bas, le bruit du récepteur peut provoquer de fausses alarmes. Si le seuil est trop élevé, les détections de certaines cibles peuvent être manquées. Pour déterminer le niveau du seuil de décision, il faut fixer le seuil de sorte qu'il produit un taux moyen prédéterminé acceptable de fausses alarmes dues aux bruits du récepteur. Une fois la décision de détection est faite, il est possible de déterminer la trajectoire de la cible telle que le lieu d'emplacements des cibles mesurée au cours du temps. Ceci est un exemple de traitement de données. Les informations de détection de cible sont traitées tel que :

- les trajectoires peuvent être affichées pour un opérateur.
- les informations de détection peuvent être utilisées pour guider automatiquement un missile vers une cible.
- la sortie du radar peut être traitée pour fournir d'autres informations concernant la nature de la cible.

Le contrôle radar assure que les différentes parties d'un radar fonctionnent d'une manière coordonnée et en coopération (par exemple : en fournissant des signaux de synchronisation pour différentes parties du radar). L'ingénieur radar a au fil du temps des ressources qui permettent le traitement de l'effet Doppler, la détermination de la bande passante pour mesurer la distance entre le radar et la cible, ainsi que l'espace qui permet d'utiliser une grande antenne pour des performances de longue

portée et des mesures précises.

Les facteurs externes qui affectent la performance du radar incluent les caractéristiques de la cible, le bruit externe qui pourrait entrer via l'antenne, l'écho parasite de la terre ou de la mer, la pluie, les interférences des autres radiations électromagnétiques. Ces facteurs mentionnés sont très importants dans la conception et l'application d'un radar.

Émetteur radar : L'émetteur radar ne doit pas être seulement capable de générer le pic et la puissance moyenne nécessaire pour détecter les cibles désirées à la portée maximale, mais aussi générer une forme d'onde appropriée à l'application particulière. Les émetteurs peuvent être des oscillateurs ou des amplificateurs, ces derniers offrent généralement plus d'avantages.

Antennes de radar : L'antenne relie le radar avec le monde extérieur. Elle concentre l'énergie rayonnée à l'émission, avec un faisceau étroit et directif. Elle recueille l'énergie de l'écho reçu de la cible et fournit une mesure de la direction angulaire.

Types de radars : Il y a plusieurs façons de caractériser un radar, ici nous considérons la caractéristique majeure qui distingue un type de radar d'un autre.

- *Imagerie radar :* il produit une image radar à deux dimensions d'une cible, telle qu'une partie de la surface de la terre. Ces radars sont généralement situés sur une plate-forme mobile.
- *Radar à impulsions :* c'est une méthode bien connue pour détecter les objets grâce à l'émission d'une série répétitive de courtes impulsions d'énergie radar dans l'espace et à la détection de l'énergie qui se réfléchit après la rencontre avec un objet. Pour déterminer la distance de l'objet, le système de radar mesure la durée pendant laquelle une impulsion se déplace vers et à partir de l'objet. Le radar à impulsions est très utilisé dans le trafic aérien, les applications militaires, la surveillance des conditions météorologiques et l'exploration spatiale.
- *Radar à haute résolution :* la haute résolution peut être obtenue dans la mesure de la distance, l'angle, ou les coordonnées de vitesse Doppler. Une grande résolution implique généralement que le radar a une résolution de haute gamme de fréquences. Certains radars à haute résolution ont des résolutions de portée en termes de fractions de mètre, mais également de quelques centimètres.
- *Radar avec compression d'impulsions :* il s'agit d'un radar utilisant une longue impulsion avec modulation interne (habituellement de fréquence ou de modulation de phase) pour obtenir l'énergie d'une impulsion longue avec la résolution

d'une impulsion courte.

- *Radar à ondes continues* : ce radar utilise une onde sinusoïdale continue. Il utilise presque toujours le décalage de fréquence Doppler pour la détection de cibles mobiles ou pour mesurer la vitesse relative d'une cible.
- *Radar à onde continue modulée en fréquence* : ce radar à ondes continues utilise la modulation de fréquence à forme d'onde pour mesurer la distance.
- *Radar de surveillance* : il détecte la présence d'une cible (comme un aéronef ou un navire) et détermine sa position en distance et en angle. Il peut aussi observer la cible sur un intervalle de temps afin d'obtenir sa trajectoire.
- *Visualisation des cibles mobiles* : il s'agit d'un radar à impulsions qui élimine les échos venant des cibles fixes pour ne traiter que les échos des cibles mobiles. Les cibles fixes renvoient un écho radar à la fréquence du signal reçu, alors que les cibles mobiles modifient la fréquence du signal renvoyé. Cet effet est connu sous le nom d'effet Doppler. La différence entre la fréquence reçue et la fréquence renvoyée (telle que perçue par le radar) est fonction de la vitesse de la cible par rapport au radar.

Il y a beaucoup d'autres façons pour décrire les radars suivant l'application considérée ou la gamme de fréquences à laquelle ils opèrent.

4.2.1 L'importance de la bande passante dans les radars

La bande passante représente une information très importante dans de nombreuses applications radar. Il existe deux types de bande passante rencontrés dans les radars. Le premier type est la largeur de bande du signal, qui est la largeur de bande déterminée par la largeur d'impulsions du signal ou par une modulation du signal interne. L'autre est la bande passante accordable. En général, la bande passante du signal d'une impulsion simple à onde sinusoïdale de durée τ est $\frac{1}{\tau}$. La compression d'impulsions aux formes d'onde peut avoir beaucoup plus de bande passante que l'inverse de leur largeur d'impulsion. Une large bande passante est nécessaire pour la détermination de cibles, pour une mesure précise de la portée de la cible et pour différencier un type de cible d'un autre. Une haute résolution de la portée de détection peut également être utile pour réduire les effets de dégradation (reflet dans un radar de poursuite). Elle est également très utile pour la mesure de l'altitude d'un objet. Dans les systèmes militaires, la résolution de haute portée peut être utilisée pour compter le nombre d'avions volant en formation serrée et pour l'identification du type d'avions.

Une bande passante accordable offre la possibilité de changer la fréquence du signal radar sur une large plage du spectre disponible. Elle peut être utilisée pour réduire l'interférence mutuelle entre les radars fonctionnant dans la même bande de fréquences. Si la fréquence de fonctionnement est plus élevée, alors il est plus facile d'obtenir le signal accordable à large bande passante.

Une limitation de disponibilité de la bande passante dans un radar est due au contrôle du spectre par les organismes de réglementation du gouvernement. Après le succès du radar pendant la seconde guerre mondiale, le radar a été autorisé à fonctionner sur environ un tiers du spectre des micro-ondes. Cet espace de spectre a été considérablement réduit au fil des ans avec l'arrivée de nombreuses utilisations commerciales. Ainsi, il est nécessaire de pouvoir attribuer une plus petite bande spectrale en raison du succès de nombreuses applications radar.

4.2.2 Fonction d'ambiguïté

Nous allons maintenant introduire la fonction d'ambiguïté et ses principales propriétés avant de l'étudier dans le cas de signaux chaotiques. La fonction d'ambiguïté (FA) représente la réponse temporelle d'un filtre adapté à un signal d'énergie finie donnée lorsque le signal est reçu avec un retard τ et un décalage Doppler ν par rapport aux valeurs nominales attendus par le filtre [64]. Pour τ et ν deux variables réelles, la fonction d'ambiguïté est définie comme suit :

$$|\chi(\tau, \nu)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t + \tau) \exp(j2\pi\nu t) dt \right| \quad (4.1)$$

où x est l'enveloppe complexe du signal. Lorsque ν est positif alors la cible se déplace vers le radar. Si τ est positif alors il y a une cible proche du radar. La fonction d'ambiguïté est un outil majeur pour l'étude et l'analyse des signaux radar.

Un aperçu de la fonction d'ambiguïté en deux dimensions peut être obtenu à partir des coupes unidimensionnelles. Nous considérons la coupe le long de l'axe de temps, avec $\nu = 0$ dans l'équation (4.1) :

$$|\chi(\tau, 0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t + \tau) dt \right| = |R(\tau)| \quad (4.2)$$

où $R(\tau)$ est la fonction d'auto-corrélation de $x(t)$. D'autre part, l'auto-corrélation est égale à la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de puissance.

Les propriétés importantes de la fonction d'ambiguïté nous serviront à étudier les signaux chaotiques. Nous listons les quatre propriétés principales de la fonction

d'ambiguïté. Les deux premières propriétés supposent que l'énergie E de $x(t)$ est normalisée à l'unité.

Propriété 1 : Le maximum est obtenu en $(0, 0)$.

$$|\chi(\tau, \nu)| \leq |\chi(0, 0)| = 1 \quad (4.3)$$

Cette propriété indique que la fonction d'ambiguïté ne peut pas être supérieure à sa valeur à l'origine (puisque'elle est normalisée à l'unité par la normalisation de l'énergie de signal).

Propriété 2 : Le volume est constant.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu = 1 \quad (4.4)$$

Le volume total qui se trouve sous la surface de l'ambiguïté normalisée (au carré) est égal à l'unité, indépendamment de la forme d'onde du signal. Les propriétés 1 et 2 impliquent que si nous essayons de modifier la fonction d'ambiguïté pour obtenir un pic étroit à l'origine, alors ce pic ne peut pas dépasser la valeur de 1.

Les deux propriétés suivantes s'appliquent à tous les signaux normalisés ou non.

Propriété 3 : La FA présente une symétrie par rapport à l'origine.

$$|\chi(-\tau, -\nu)| = |\chi(\tau, \nu)| \quad (4.5)$$

Donc il suffit d'étudier et de tracer les deux quadrants adjacents de la fonction d'ambiguïté. Les autres quadrants peuvent être déduits à partir de la propriété de symétrie.

Propriété 4 : Effet de la modulation linéaire de fréquence.

Si une enveloppe complexe donnée $u(t)$ a une fonction d'ambiguïté $|\chi(\tau, \nu)|$, à savoir que :

$$u(t) \iff |\chi(\tau, \nu)| \quad (4.6)$$

Alors, en ajoutant une modulation linéaire de fréquence équivalente à une modulation de phase quadratique nous obtenons :

$$u(t) \exp(j\pi kt^2) \iff |\chi(\tau, \nu - k\tau)| \quad (4.7)$$

Cette propriété est à la base d'une technique de compression d'impulsions importante.

De nombreux types de signaux sont utilisés pour diverses applications et systèmes radar. La fonction d'ambiguïté de certains types des signaux radar peut être calculée de manière analytique. Néanmoins, la fonction d'ambiguïté de nombreux signaux est trop compliquée à calculer analytiquement, il est alors possible de la calculer numériquement en utilisant Matlab.

4.3 Fonction d'ambiguïté de quelques transformations chaotiques

Nous étudions la fonction d'ambiguïté pour plusieurs transformations chaotiques comme la logistique, la Tent map et quelques transformations linéaires par morceaux. Nous nous sommes intéressés à l'évolution de la FA lorsque les paramètres de bifurcation évoluent et en lien avec les spectres de ces signaux. En simulant les transformations chaotiques, nous obtenons la FA en $3D$, ensuite la FA pour $\nu = 0$ et enfin les contours de la FA dans le plan (τ, ν) .

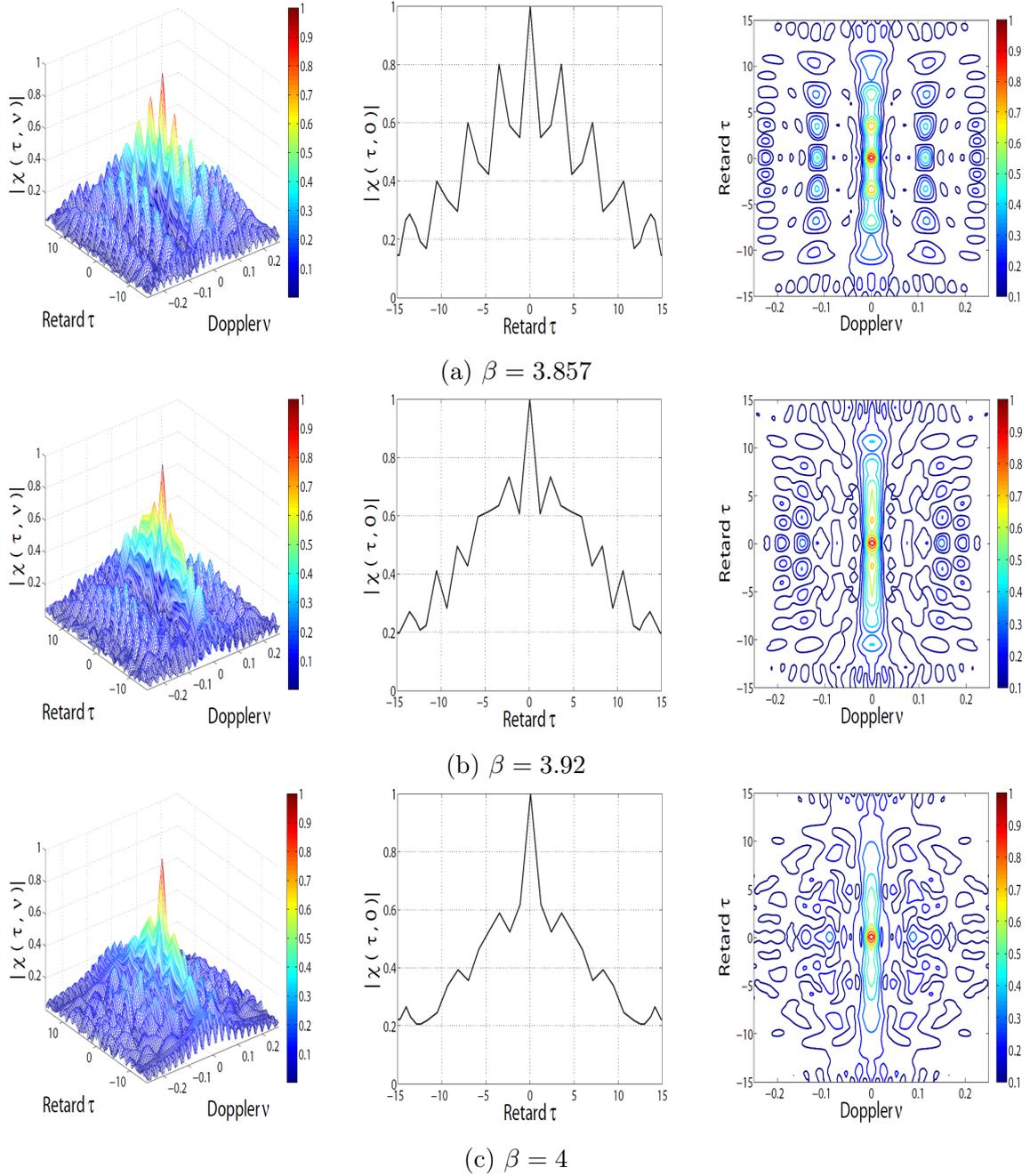
4.3.1 La logistique

La Figure 4.2 présente la FA de la transformation logistique avec différentes valeurs du paramètre β . Lorsque β s'approche de 4, nous constatons qu'il y a une petite variation de la FA bien que la DSP change d'allure et l'exposant de Lyapunov augmente. Le signal chaotique le plus performant est donné pour $\beta = 4$.

4.3.2 Tent Map

Dans la Figure 4.3, nous obtenons la fonction d'ambiguïté de la skew tent map pour trois valeurs différentes du paramètre. Pour $\beta = -0.9$, plusieurs pics apparaissent dans la Figure 4.3a. Ces pics donnent des fausses alertes de détection. Ainsi, il vaut mieux choisir β dans $(0, 1)$ pour obtenir une bonne FA. Lorsque $\beta = 0.9$, nous observons qu'il y a un seul pic concentré au milieu ce qui facilite la détection précise de la cible avec une DSP passe bas.

Nous avons simulé la FA de la transformation PWLM-2 avec différents paramètres β et nous avons trouvé les mêmes courbes que celles de la skew tent map.


 FIGURE 4.2 – Fonction d’ambiguïté de la logistique pour différents paramètres β .

4.3.3 PWLM-1 Maps $G(\cdot)$

Dans la Figure 4.4, nous avons simulé plusieurs courbes de FA avec différentes valeurs des paramètres β et Φ . Pour $\beta = 1.9$, $\Phi = 0.9$ et $\beta = 1$, $\Phi = 0.44$, nous obtenons deux bonnes FA puisqu’il y a un pic au milieu et les autres pics sont inférieurs à 0.3. Dans ces deux cas, nous avons trouvé que le premier correspond à un spectre large bande et le deuxième à un spectre passe haut.

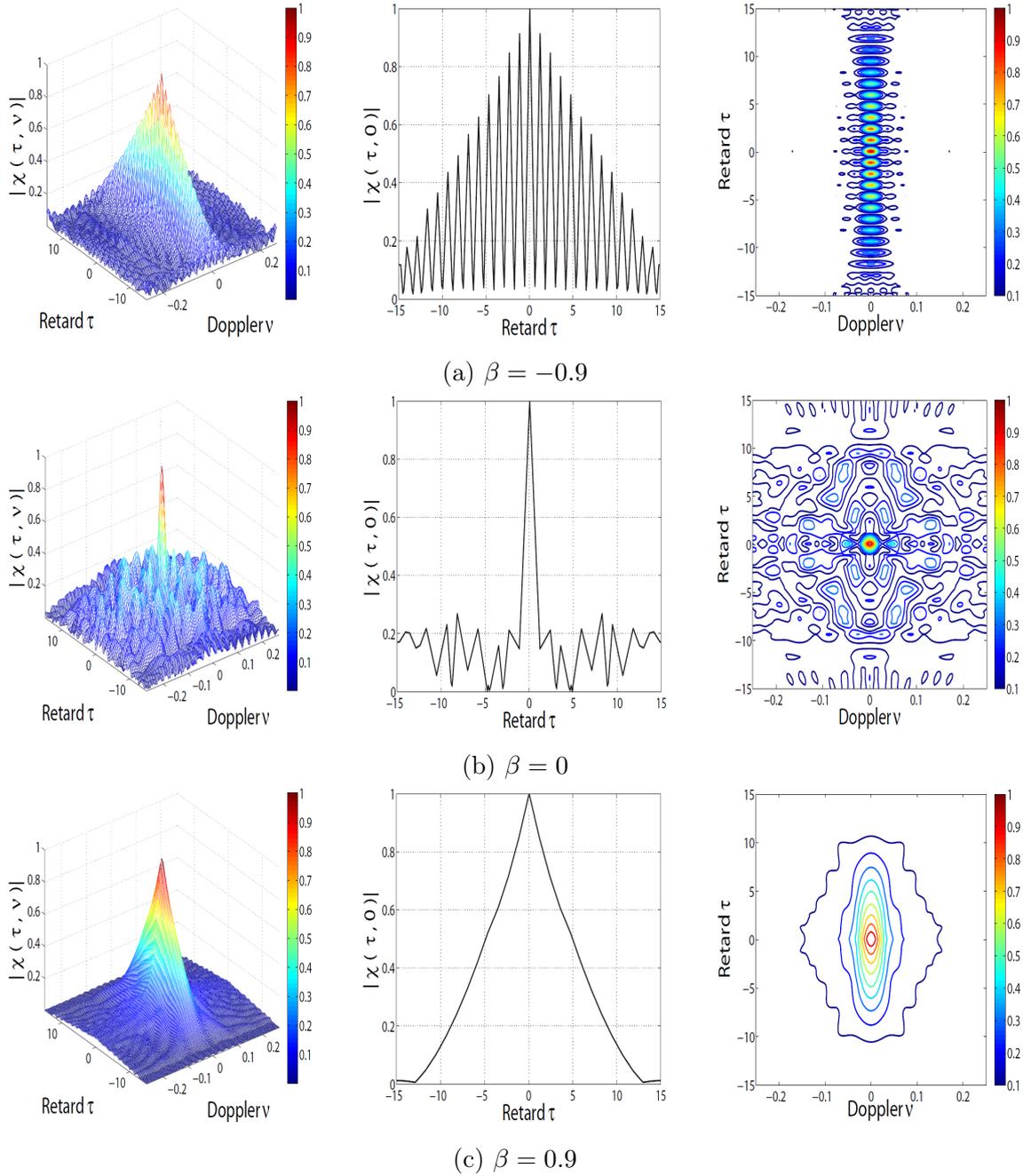


FIGURE 4.3 – Fonction d’ambiguïté de la skew tent map pour différents paramètres β .

4.3.4 PWLM-3 Maps $T(\cdot)$

L’étude de la transformation (3.2) nous a donné un autre type de spectre (coupe-bande). Nous avons voulu étudier la fonction d’ambiguïté en variant Φ entre $(-1, 0)$ avec $\beta = -\Phi$. Nous avons trouvé qu’il n’y a pas des très bonnes FA puisque les pics qui se trouvent à gauche et à droite sont supérieurs à 0.3 d’où la possibilité d’avoir

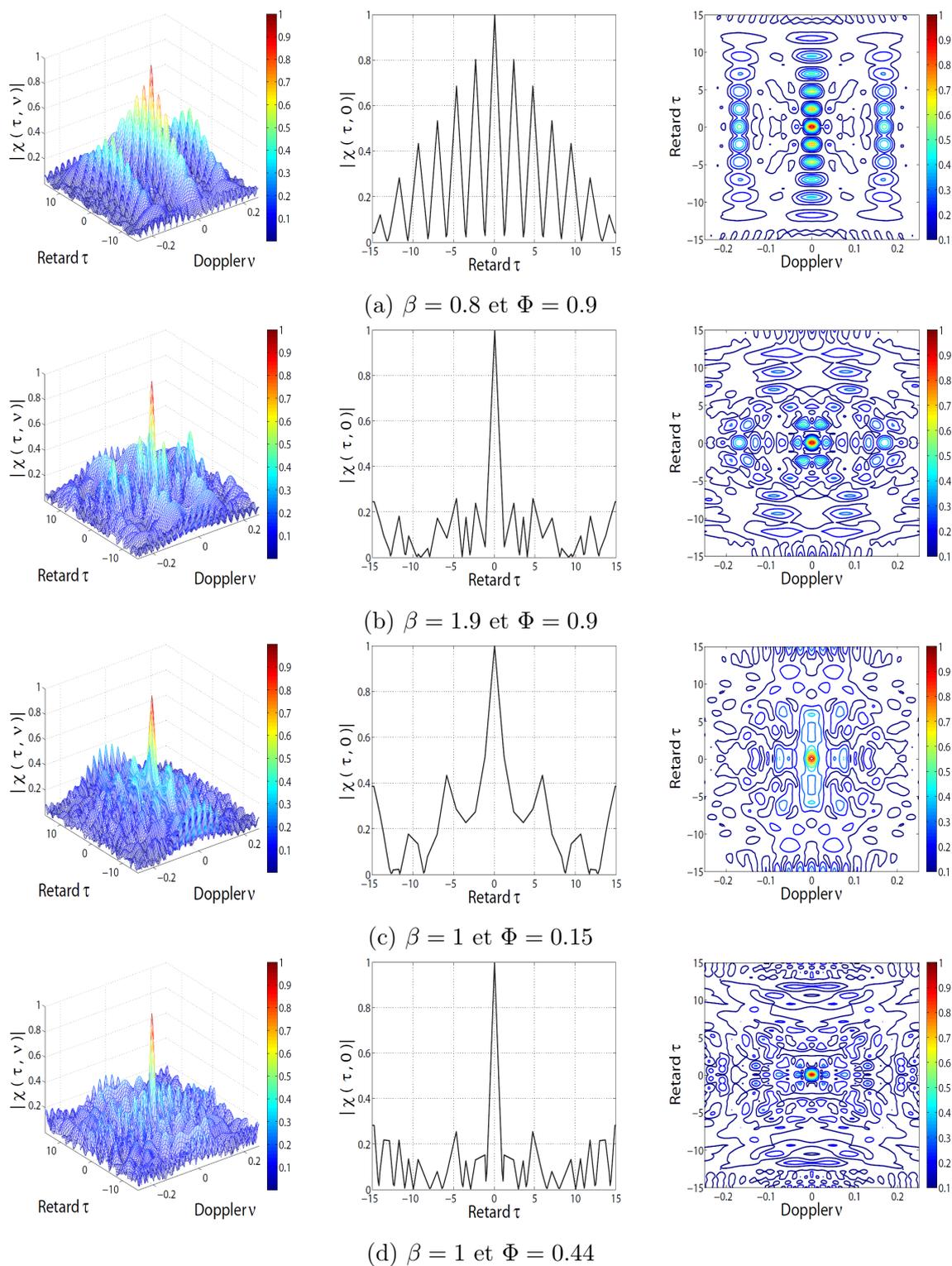


FIGURE 4.4 – Fonction d’ambiguïté de la transformation PWLM-1 pour différents paramètres β et Φ .

de fausses alertes.

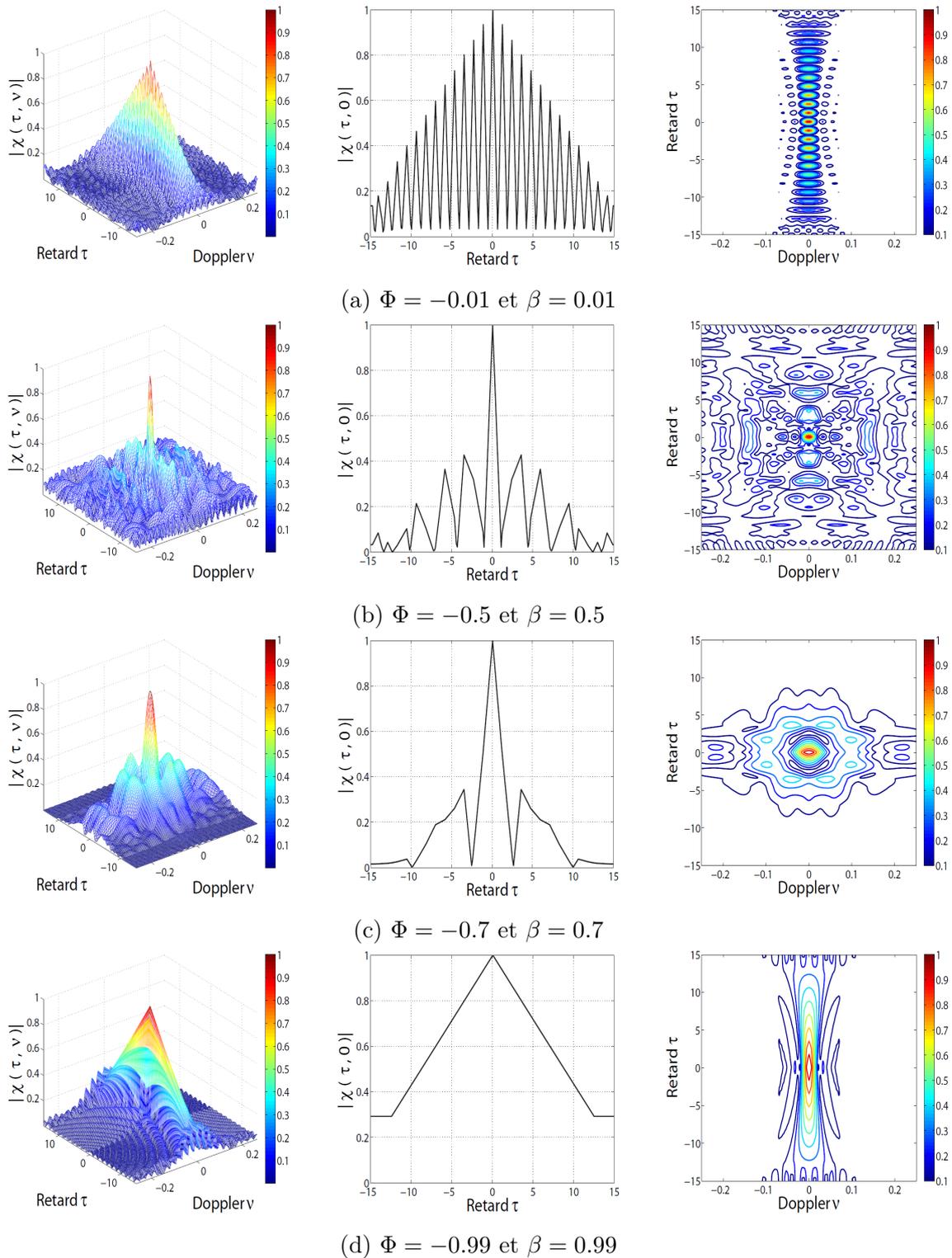


FIGURE 4.5 – Fonction d’ambiguïté de la transformation PWLM-3 pour différents paramètres β et Φ .

4.4 Multiplexage et séparation des signaux chaotiques

Pour passer plusieurs informations à travers un seul support de transmission, nous utilisons la technique de multiplexage. Cette technique permet de partager une même ressource pour plusieurs signaux. Ceci est un exemple simple d'application des résultats obtenus. La possibilité de générer des signaux chaotiques avec une bande passante bien déterminée permet le multiplexage par une modulation numérique en utilisant des supports chaotiques [34]. Nous commençons par choisir trois séquences chaotiques générées avec les transformations (skew tent map, PWLM-1 et PWLM-2) avec des paramètres bien choisis. Dans la Figure 4.6a, nous avons choisi la transformation skew tent map avec $\beta = -0.55$ pour obtenir la séquence chaotique x_n avec un spectre passe bas. Dans la Figure 4.6b, nous avons simulé la transformation PWLM-1 avec $\Phi = 0$ et $\beta = 0.6$ pour générer une séquence chaotique y_n à spectre passe bande. Dans la Figure 4.6c, nous avons cherché une transformation avec un spectre passe haut, c'est le cas de la transformation PWLM-2 qui a donné la séquence z_n pour un paramètre $\beta = 0.05$.

Le choix des transformations et des paramètres est donné après quelques simulations dont le but est d'obtenir un spectre large bande en faisant la somme de ces signaux chaotiques. Nous savons que les signaux des systèmes radars doivent être avec un spectre large bande. La Figure 4.6d montre que $s_n = (x_n + y_n + z_n)/3$ est une séquence chaotique à large bande et qui possède une bonne fonction d'ambiguïté.

Lors de la réception du signal transmis s_n , nous pouvons choisir des filtres convenables pour séparer et régénérer les trois séquences chaotiques. Nous utilisons le filtre passe bas pour retrouver la séquence x_n , le filtre passe bande pour retrouver y_n et le filtre passe haut pour z_n .

L'intérêt d'utiliser plusieurs transformations est d'augmenter le nombre d'informations dans le signal puisque trois transformations peuvent générer trois signaux avec trois informations différentes. Ainsi, nous obtenons un spectre large bande avec une bonne fonction d'ambiguïté, une amélioration peut être obtenue en changeant les paramètres.

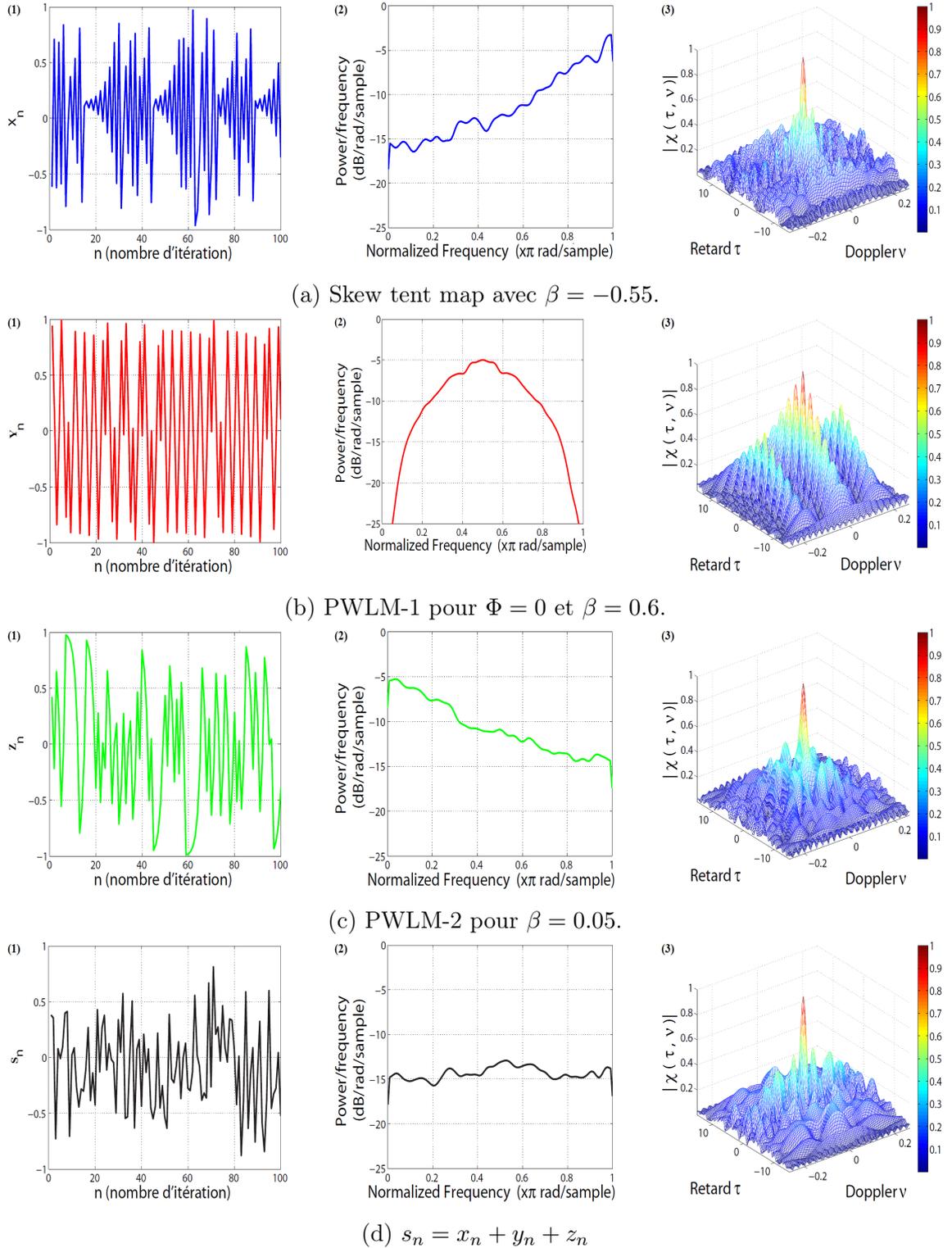


FIGURE 4.6 – Simulation pour différents transformations (Skew tent map, PWLM-1, PWLM-2 et la somme $s_n = (x_n + y_n + z_n)/3$) : (1) Orbite ; (2) Densité spectrale de puissance ; (3) Fonction d’ambiguïté.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques notions sur les systèmes radars. Ensuite, nous avons simulé la fonction d'ambiguïté pour les différentes transformations étudiées dans les chapitres précédents. Nous avons trouvé que le changement des paramètres de bifurcation permet d'obtenir des fonctions d'ambiguïté avec un seul pic lorsque le spectre est à large bande. Nous avons proposé une combinaison de trois transformations pour obtenir un spectre large bande avec une fonction d'ambiguïté plus au moins bonne. Cette combinaison permet de générer un signal difficile à régénérer et d'envoyer plusieurs informations sur le même signal.

Conclusion Générale et Perspectives

La détermination analytique de plusieurs types de spectre à l'aide de transformations chaotiques en changeant les paramètres de bifurcation, constitue la principale contribution de nos travaux de recherche consignés dans ce mémoire.

Cette thèse est divisée en quatre chapitres. Le premier chapitre rappelle les concepts de base pour l'étude des systèmes non linéaires et du chaos. Ce chapitre introduit la densité de probabilité invariante, l'autocorrélation et la DSP d'un processus stochastique ergodique. Il n'est pas possible de calculer analytiquement l'autocorrélation et la DSP de la transformation logistique, puisque la densité de probabilité de la logistique n'est pas uniforme. Le deuxième chapitre est dédié aux récurrences linéaires par morceaux. Nous avons rappelé les calculs analytiques de la DSP appliqués à la skew tent map. En utilisant la transformation PWLM-1, nous avons mis en évidence la possibilité d'obtenir un spectre passe bande. Nous avons montré qu'il est possible d'obtenir des largeurs de bande différentes en changeant les paramètres de bifurcation. Nous avons déterminé la densité de probabilité invariante et l'exposant de Lyapunov pour une transformation linéaire par morceaux PWLM-2 avec trois pentes. Nous avons déterminé analytiquement la SAC, la DSP et la bande passante. Nous avons trouvé les mêmes spectres que pour la skew tent map (passe-bas, passe-haut et large bande). L'étude de la transformation PWLM-2 avec trois pentes augmente la complexité et il est possible d'obtenir un choix de paramètre plus grand pour produire des signaux chaotiques intéressants pour des applications. Dans le chapitre trois, nous avons étudié une transformation linéaire par morceaux avec trois pentes et fonction de deux paramètres réels β et Φ . Nous avons détaillé et expliqué quelques bifurcations qui se produisent dans la transformation PWLM-3. Nous avons calculé analytiquement l'autocorrélation avec une nouvelle méthode plus simple qui peut être utilisé pour d'autres transformations linéaires par morceaux, à condition d'avoir une densité invariante uniformément répartie. Nous avons déduit analytiquement l'autocorrélation et la densité spectrale de puissance des signaux chaotiques dans le cas particulier où $\beta = -\Phi$. Nous avons déterminé ana-

lytiquement le spectre coupe-bande. Les expressions analytiques présentées dans ce chapitre confirment la possibilité de générer facilement des signaux chaotiques avec une bande passante spécifique. Nous avons également conclu que le type du spectre dépend de l'existence des orbites périodiques au-delà de la bifurcation de collision de frontière qui a donné naissance au chaos. Si nous avons un point fixe attractif sur la frontière du chaos nous obtenons un spectre passe-haut ou passe-bas. Si nous avons un cycle attractif de période-2, alors nous obtenons un spectre coupe-bande. Si nous trouvons un cycle de période-3 alors nous obtenons une sommation entre un spectre passe-bas et un spectre passe-bande. Dans le quatrième chapitre, nous avons essayé d'appliquer les résultats trouvés dans les systèmes radars. Nous nous sommes intéressés aux signaux chaotiques générés par la logistique et les transformations linéaires par morceaux en simulant la fonction d'ambiguïté. En modifiant les paramètres de bifurcation, nous constatons que la meilleure fonction d'ambiguïté est obtenue pour un spectre large bande. Nous avons également proposé une combinaison de trois transformations pour obtenir un spectre large bande avec une fonction d'ambiguïté plus au moins bonne. Cette combinaison permet de générer un signal difficile à régénérer et d'envoyer plusieurs informations sur le même signal.

De nombreuses perspectives s'ouvrent à l'issue de ce travail de thèse. Nous pouvons :

- étendre nos résultats à d'autres types de transformations unidimensionnels comme les transformations m-modal (transformation PWLM ou autre) [65].
- chercher une transformation chaotique qui permet d'obtenir des spectres à bande passante sélective (la variation du paramètre de bifurcation nous donne une translation de la bande passante sur tout l'axe de fréquence).
- modéliser en pratique les signaux de la parole, les images et les signaux avec intermittences en utilisant des transformations à temps discret [1] qui génèrent des signaux chaotiques avec leurs spectres.
- essayer de moduler les signaux chaotiques avec la modulation linéaire de fréquence [34, 66] en changeant les spectres et en étudiant la fonction d'ambiguïté [67].

Bibliographie

- [1] M. Eisenkraft, D. M. Kato, and L. H. A. Monteiro. Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Processing*, 90 :385–390, 2010.
- [2] M. I. Skolnik. *Radar Handbook, Third Edition*. The McGraw-Hill Companies, New York, USA, 2008.
- [3] C. Shannon. Communication in the presence of noise. In *Inst. Radio Eng.*, volume 37, pp. 10–21, Jan 1947.
- [4] L. Chua. Dynamic nonlinear networks : State-of-the-art. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 27 :1059–1087, Nov 1980.
- [5] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *An introduction to dynamical systems*. Springer Verlag, New York, USA, 1996.
- [6] L. R. Rabiner and R. W. Schafer. *Digital processing of speech signals*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1978.
- [7] P. Stoica and R. Moses. *Spectral analysis of signals*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 2005.
- [8] R. Rhouma, D. Arroyo, and S. Belghith. A new color image cryptosystem based on a piecewise linear chaotic map. In *6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, pages 1–6, Djerba, Tunisia, March 2009.
- [9] R. Rhouma and S. Belghith. Cryptanalysis of a spatiotemporal chaotic image/video cryptosystem. *Physics Letters A*, 372, no.36 :5790–5794, 2008.
- [10] Z. Ben Jemaa and S. Belghith. Correlation properties of binary sequences generated by the logistic map-application to ds-cdma. In *Systems, Man and Cybernetics, 2002 IEEE International Conference*, volume 1, pages 447–451, Yasmine Hammamet, Tunisia, Oct 2002.
- [11] S. Meherzi, S. Marcos, and S. Belghith. A family of spatiotemporal chaotic sequences outperforming gold ones in asynchronous ds-cdma systems. In *European Signal Processing Conference*, Florence, Italie, September 2006.

-
- [12] M. P. Kennedy, R. Rovatti, and G. Setti. *Chaotic electronics in telecommunications*. CRC Press, Boca Raton, USA, 2000.
- [13] F. C. M. Lau and C. K. TSE. *Chaos-based digital communication systems*. Springer, Berlin, Allemagne, 2003.
- [14] P. Stavroulakis. *Chaos Applications in Telecommunications*. CRC Press, Boca Raton, USA, 2005.
- [15] B. Y. Wang and W. X. Zheng. Adaptive blind channel equalisation in chaotic communications by using nonlinear prediction technique. *Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings*, 153(6) :810–814, December 2006.
- [16] S. Tsekeridou, V. Solachidis, N. Nikolaidis, A. Nikolaidis, A. Tefas, and I. Pitas. Statistical analysis of a watermarking system based on bernoulli chaotic sequences. *Signal Processing*, 81 :1273–1293, 2001.
- [17] R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560) :459–467, 1976.
- [18] E. Lorenz. Deterministic non-periodic flows. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20 :130, 1963.
- [19] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos : With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering*. Westview Press, USA, 1994.
- [20] T. Y. Li and J. A. Yorke. Period three implies chaos. *American Mathematics Monthly*, 82 :985–992, 1975.
- [21] D. M. Kato. Spectrum analysis of chaotic signals generated by one dimensional maps. Master’s thesis, Sao Paulo, 2008.
- [22] J. Xu. *Dynamique chaotique en vue d’applications aux Télécommunications : Etude d’une transformation ponctuelle symétriquement découplée définie à partir d’une fonction sinus carré*. PhD thesis, INSA Toulouse, France, 2008.
- [23] G. Kaddoum. *Contributions à l’amélioration des systèmes de communication multi-utilisateurs par chaos : synchronisation et analyse des performances*. PhD thesis, INSA Toulouse, France, 2008.
- [24] A. Lasota and M. Mackey. *Probabilistic properties of deterministic systems*. Cambridge, Cambridge University, 1985.
- [25] P. Z. Peebles. *Probability, random variables and random signal principles*. McGraw-Hill, New York, USA, 2001.
- [26] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8) :821–824, 1990.

-
- [27] R. Rovatti, G. Mazzini, and G. O. Setti. On the ultimate limits of chaos based asynchronous ds-cdma-i : basic definitions and results. *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 51(7) :1336–1347, 2004.
- [28] T. Matsumoto, L. O. Chua, and M. Komuro. The double scroll. *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 32(8) :798–817, 1985.
- [29] T. Matsumoto and L. O. Chua. Hyper chaos : Laboratory experiment and numerical confirmation. *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 33(11) :1143–1147, 1986.
- [30] K. M. Short. Steps toward unmasking secure communications. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(4) :959–977, 1994.
- [31] T. EL Assad and C. Tarhini. Design and implementation of a chaotic codec. In *European Conference on Wireless Technology*, number 351-354, Paris, France, 2005.
- [32] R. R. C. Reddy, T. Srinivas, and A. Nadarajan. Comparative study between multi level modulations in chaotic optical communications. In *IFIP Int. Wireless and Optical Communication Networks*, Bangalore, India, 2006.
- [33] K. Ullmann and I. L. Caldas. Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 7(11) :1913–1921, 1996.
- [34] M. Eisenkraft and D. M. Kato. Spectral properties of chaotic signals with applications in communications. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 71 :2592–2599, 2009.
- [35] B. P. Lathi. *Modern digital and analog communication systems - Third Edition*. Oxford University Press, New York, USA, 1998.
- [36] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck. *Discrete-time signal processing*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1999.
- [37] S. Haykin and B. V. Veen. *Signals and Systems*. Second Edition, Wiley, 2003.
- [38] H. Sakai and H. Tokumaru. Autocorrelations of a certain chaos. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-28, no.5 :588–599, 1980.
- [39] P. Chargé, D. Fournier, and V. Guglielmi. Features analysis of a parametric pwl chaotic map and its utilization for secure transmissions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38 :1411–1422, 2008.

-
- [40] G. Bischi, L. Gardini, and U. Merlone. Design of one-dimensional chaotic maps with prescribed statistical properties. *Journal of Dynamical Systems & Geometric Theories*, 7, no.2 :101–123, 2009.
- [41] H. E. Nusse and J. A. Yorke. Border-collision bifurcations including period two to period three for piecewise smooth systems. *Physica, D* 57 :39–57, 1992.
- [42] H. E. Nusse and J. A. Yorke. Border-collision bifurcations for piecewise smooth one-dimensional maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5, no.1 :189–207, 1995.
- [43] L. Gardini, D. Fournier-Prunaret, and P. Chargé. Border collision bifurcations in a two-dimensional piecewise smooth map from a simple switching circuit. *American Institute of Physics*, 21, no.2 :1054–1500, 2011.
- [44] F. Tramontana, L. Gardini, V. Avrutin, and M. Schanz. Period adding in piecewise linear maps with two discontinuities. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22, no.3 :1250068 (30 pages), 2012.
- [45] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, and L. O. Chua. Cycles of chaotic intervals in a time-delayed chua’s circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3, no.6 :1557–1572, 1993.
- [46] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, S. I. Vikul, and L. Chua. Bifurcations of attracting cycles from time-delayed chua’s circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5, no.3 :653–671, 1995.
- [47] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, and S. I. Vikul. On period-adding sequences of attracting cycles in piecewise linear maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 9, no.1 :67–75, 1998.
- [48] M. di Bernardo, M. I. Feigen, S. J. Hogan, and M. E. Homer. Local analysis of c-bifurcations in n-dimensional piecewise smooth dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 10, no.11 :1881–1908, 1999.
- [49] M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. Piecewise-smooth dynamical systems theory and applications. In *Springer-Verlag*, London, 2008.
- [50] S. Haykin and X. B. Li. Detection of signals in chaos. In *Proc. IEEE*, volume 83, pages 95–122, 1995.
- [51] H. Leung. Applying chaos to radar detection in an ocean environment : An experimental study. *IEEE Oceanic Engineering Society*, 20 :56–64, 1995.

-
- [52] X. Wu, W. Liu, L. Zhao, and J. S. Su. Chaotic phase codes for radar pulse compression. In *IEEE Radar Conference*, Atlanta, GA, USA, May 2001.
- [53] V. Venkatasubramanian and H. Leung. A novel chaos-based high-resolution imaging technique and its application to through-the-wall imaging. *IEEE Signal Processing Society*, 3 :2873–2878, 2005.
- [54] R. M. Narayanan, J. O. Curtis, Y. Xu, and P. D. Hoffmeyer. Design, performance, and applications of a coherent ultra-wideband random noise radar. *Optical Engineering*, 37(6) :1855–1869, 1998.
- [55] S. R. J. Axelsson. Noise radar for range/doppler processing and digital beamforming using low-bit adc. *IEEE Transactions Geoscience and Remote Sensing*, 41(12) :2703–2720, Dec. 2003.
- [56] I. P. Theron, E. K. Walton, S. Gunawan, and L. Cai. Ultrawide-band noise radar in the vhf/uhf band. *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 47(6) :1080–1084, 1999.
- [57] A. L. Baranovski, W. Schwarz, and A. Mogel. Statistical analysis and design of chaotic switched dynamical systems. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Orlando, FL, May 1999.
- [58] B. C. Flores, E. A. Solis, and G. Thomas. Assessment of chaos-based fm signals for range-doppler imaging. In *IEE Proc.-Radar Sonar Navig.*, volume 150, pages 313–322, Aug 2003.
- [59] A. S. Dmitriev, A. I. Panas, and S. O. Starkov. Ring oscillating systems and their application to the synthesis of chaos generators. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 6 :851–865, 1996.
- [60] S. Callegari, R. Rovatti, and G. Setti. Spectral properties of chaos-based fm signals : theory and simulation results. *IEEE Trans. Circuits Systems*, 50 :3–15, 2003.
- [61] K. A. Lukin. Millimeter wave noise radar applications : theory and experiment. In *MSMW*, Kharkov, Ukraine, June 2001.
- [62] J. M. Liu and F. Y. Lin. Chaotic radar using nonlinear laser dynamics. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 40 :815–820, 2004.
- [63] J. M. Liu and F. Y. Lin. Ambiguity functions of laser-based chaotic radar. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 40 :1732–1738, 2004.
- [64] N. Levanon and E. Mozeson. *Radar Signals*. Wiley-IEEE Press, 1 July 2004.

- [65] E. Campos-Cantóna, R. Femat, and A. N. Pisarchik. A family of multimodal dynamic maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16, no.9 :3457–3462, 2011.
- [66] J. Yang, Z.-K. Qiu, X. Li, and Z.-W. Zhuang. Uncertain chaotic behaviours of chaotic-based frequency- and phase-modulated signals. *IET Signal Processing*, 5, no.8 :748–756, 2011.
- [67] H. Shirzad, S. Asiaban, M. Fakhri, and S. Ahdi. Novel radar signal with chaotic behaviour for better decide on the presence of targets. *International Journal of Natural and Engineering Sciences*, 5 :55–60, 2011.

Publications

Articles de revues internationales :

- K. Feltekh, Z.B. Jemaa, D. Fournier-Prunaret and S. Belghith. Border Collision Bifurcations and Power Spectral Density of Chaotic Signals Generated by One-dimensional Discontinuous Piecewise Linear Maps. *Elsevier, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(8) : 2771 – 2784, August 2014.
- K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret and S. Belghith. Analytical Expressions for Power Spectral Density Issued from One-dimensional Continuous Piecewise Linear Maps with Three Slopes. *Elsevier, Signal Processing*, 94 : 149 – 157, Jan 2014.

Conférences internationales avec actes :

- K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret and S. Belghith. Analysis of Chaotic Signals Issued from One-dimensional Continuous Piecewise Linear Maps with Three Slopes. *ICCS'12, Agadir, Morocco*, 5 – 6 November 2012.
- K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, S. Belghith, and Z.B. Jemaa Comparison of random and deterministic characteristics of chaotic signals issued from a one-dimensional piecewise linear map. *Majorca, Spain*, October 2012.

Conférences nationales sans actes :

- K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret and S. Belghith. Étude spectrale de signaux générés par des fonctions unidimensionnelles. *Congrès EDSYS*, 2012.

Résumé

Au cours des deux dernières décennies, les signaux chaotiques ont été de plus en plus pris en compte dans les télécommunications, traitement du signal ou transmissions sécurisées. De nombreux articles ont été publiés qui étudient la densité spectrale de puissance (DSP) des signaux générés par des transformations spécifiques. La concentration sur la DSP est due à l'importance de la fréquence dans les télécommunications et la transmission sécurisée. Grâce au grand nombre de systèmes sans fil, la disponibilité des fréquences de transmission et de réception est de plus en plus rare pour les communications sans fil. Aussi, les médias guidés ont des limitations liées à la bande passante du signal. Dans cette thèse, nous étudions certaines propriétés associées à la bifurcation collision de frontière pour une transformation unidimensionnelle linéaire par morceaux avec trois pentes et deux paramètres. Nous calculons les expressions analytiques de l'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance des signaux chaotiques générés par les transformations linéaires par morceaux. Nous montrons l'existence d'une forte relation entre les différents types de densité spectrale de puissance (passe-bas, passe-haut ou coupe-bande) et les paramètres de bifurcation. Nous notons également en évidence une relation entre le type de spectre et l'ordre des cycles attractifs. Le type du spectre dépend de l'existence des orbites périodiques au-delà de la bifurcation de collision de frontière qui a donné naissance au chaos. Nous utilisons ensuite les transformations chaotiques pour étudier la fonction d'ambiguïté. Nous combinons quelques transformations chaotiques bien déterminées pour obtenir un spectre large bande avec une bonne fonction d'ambiguïté qui peut être utilisée en système radar.

Mots clés : Transformation linéaire par morceaux, Exposant de Lyapunov, Densité invariante, Autocorrélation, Densité spectrale de puissance, Bande passante, Bifurcation collision de frontière, Systèmes radars, Fonction d'ambiguïté.

Abstract

During the two last decades, chaotic signals have been increasingly considered in telecommunications, signal processing or secure transmissions. Many papers have appeared which study the power spectral density (PSD) of signals issued from some specific maps. This interest in the PSD is due to the importance of frequency in the telecommunications and transmission security. With the large number of wireless systems, the availability of frequencies for transmission and reception is increasingly uncommon for wireless communications. Also, guided media have limitations related to the bandwidth of a signal. In this thesis, we investigate some properties associated to the border-collision bifurcations in a one-dimensional piecewise-linear map with three slopes and two parameters. We derive analytical expressions for the autocorrelation sequence, power spectral density of chaotic signals generated by our piecewise-linear map. We prove the existence of strong relation between different types of the power spectral density (low-pass, high-pass or band-stop) and the parameters. We also find a relation between the type of spectrum and the order of attractive cycles which are located after the border collision bifurcation between chaos and cycles. We use the chaotic transformations to study the ambiguity function. We combine some chaotic transformations well determined to obtain a broadband spectrum with a good ambiguity function that can be used in radar systems.

Key words : Piecewise linear map, Chaos, Lyapunov exponent, Invariant density, Autocorrelation, Power Spectral Density, Bandwidth, Border collision bifurcation, Radar systems, Ambiguity function .
