



**HAL**  
open science

# Ondes internes, de l'instabilité au mélange. Approche expérimentale

Baptiste Bourget

► **To cite this version:**

Baptiste Bourget. Ondes internes, de l'instabilité au mélange. Approche expérimentale. Physique Générale [physics.gen-ph]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2014. Français. NNT : 2014ENSL0912 . tel-01073663

**HAL Id: tel-01073663**

**<https://theses.hal.science/tel-01073663>**

Submitted on 24 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

en vue d'obtenir le grade de :

**Docteur de l'Université de Lyon,  
délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon**

Spécialité : **Physique**

**Laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon**

**École Doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon**

Soutenance prévue le 1<sup>er</sup> Juillet 2014 par :

**Baptiste BOURGET**

## **Ondes internes, de l'instabilité au mélange. Approche expérimentale.**

Directeurs de thèse :

**Philippe ODIER**

Co-encadrant :

**Thierry DAUXOIS**

Après avis de :

M. Patrice LE GAL	Directeur de recherche au CNRS, IRPHE	Rapporteur
M. Nicolas MORDANT	Professeur, LEGI - Université Joseph Fourier	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

M. Jean Marc CHOMAZ	Directeur de recherche au CNRS, LadHyX	Président
M. Thierry DAUXOIS	Directeur de recherche au CNRS, ENS de Lyon	Co-encadrant
M. Patrice LE GAL	Directeur de recherche au CNRS, IRPHE	Rapporteur
M. Nicolas MORDANT	Professeur, LEGI - Université Joseph Fourier	Rapporteur
M. Philippe ODIER	Maître de conférence, ENS de Lyon	Directeur
M. Jacques VANNESTE	Professeur, Université d'Edimbourg	Examinateur



---

# Table des matières

Introduction	1
--------------	---

## Première partie : Généralités sur les ondes de gravité internes

5

<b>1 Les ondes internes de gravité : de la théorie aux océans</b>	<b>5</b>
1.1 Description d'un fluide stratifié en densité . . . . .	6
1.2 Ondes internes linéaires . . . . .	7
1.2.1 Cas d'un fluide parfait . . . . .	8
1.2.2 Cas d'un fluide réel . . . . .	9
1.2.3 Influence des conditions aux limites . . . . .	11
1.3 Les ondes internes à l'échelle du globe . . . . .	12
1.3.1 Stratification de l'atmosphère et des océans . . . . .	12
1.3.2 Génération des ondes internes . . . . .	14
1.3.3 Circulation océanique, mélange et ondes internes . . . . .	15
<b>2 Les ondes internes en laboratoire</b>	<b>19</b>
2.1 Un océan de 30 cm de profondeur . . . . .	20
2.1.1 Mise en place de la stratification . . . . .	20
2.1.2 Mesure de densité . . . . .	22
2.2 Génération des ondes internes . . . . .	23
2.3 Observation des ondes internes . . . . .	26
2.3.1 Vélocimétrie par Imagerie de Particules . . . . .	26
2.3.2 Schlieren Synthétique . . . . .	27
2.3.3 Fluorescence Induite par Laser . . . . .	28

## Deuxième partie : L'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique

33

Introduction	33
--------------	----

<b>3 Observation expérimentale de l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique</b>	<b>39</b>
3.1 Propagation d'ondes planes : observations expérimentales . . . . .	40

3.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	40
3.1.2	Observations directes . . . . .	41
3.1.3	Analyses . . . . .	41
3.2	Théorie de l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique . . . . .	44
3.2.1	Développement . . . . .	44
3.2.2	Variation lente de l'amplitude . . . . .	46
3.2.3	Solutions . . . . .	47
3.2.4	Lieu de résonance et taux de croissance . . . . .	47
3.3	Comparaison à l'expérience . . . . .	49
3.3.1	Vecteurs d'ondes . . . . .	49
3.3.2	Taux de croissance . . . . .	51
3.4	Effet de la fréquence et de l'amplitude de l'onde primaire . . . . .	51
<b>4</b>	<b>À la recherche de la zone centrale</b>	<b>57</b>
4.1	Mise en place du problème . . . . .	58
4.2	Règle de sélection : une histoire de géométrie . . . . .	58
4.2.1	Cas $\omega_0 > \omega_1 > 0$ . . . . .	59
4.2.2	Cas $\omega_1 < 0$ . . . . .	60
4.2.3	Bilan . . . . .	61
4.3	Retour sur l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique . . . . .	62
4.3.1	De la collision à l'instabilité . . . . .	62
4.3.2	Collision d'ondes expérimentale . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Effet de taille finie</b>	<b>67</b>
5.1	Approche expérimentale et numérique . . . . .	68
5.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	68
5.1.2	Méthode numérique . . . . .	68
5.1.3	Observations . . . . .	69
5.2	Théorie . . . . .	71
5.3	Sélection de la triade . . . . .	74
	<b>Bilan sur la l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique</b>	<b>79</b>
	 <b>Troisième partie :</b> <b>Mesure de densité et de vitesse</b> <b>en fluide continûment stratifié</b>	 <b>83</b>
	<b>Introduction</b>	<b>83</b>
<b>6</b>	<b>Fluorescence Induite par Laser (LIF) en fluide stratifié</b>	<b>87</b>
6.1	Fondements théoriques de la Fluorescence Induite par Laser . . . . .	88
6.1.1	Fluorescence induite et linéarité . . . . .	88
6.1.2	Loi de Beer-Lambert . . . . .	89
6.2	Mise en oeuvre expérimentale . . . . .	90
6.2.1	Un fluide stratifié en densité, en Rhodamine... mais homogène en indice optique . . . . .	90
6.2.2	Nappe laser . . . . .	92
6.2.3	Acquisition . . . . .	93
6.3	Observations et analyses . . . . .	94

---

6.3.1	Traitement des images . . . . .	94
6.3.2	Applications . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Densité et vitesse : une association qui retourne !</b>	<b>103</b>
7.1	Réalisation expérimentale . . . . .	104
7.1.1	Calibration des caméras . . . . .	104
7.1.2	Synchronisation des caméras . . . . .	105
7.1.3	Traitements et premières observations . . . . .	107
7.2	Mélange et flux de densité . . . . .	109
7.3	Énergie potentielle et cinétique . . . . .	114
7.4	Retournement et cisaillement . . . . .	116
7.4.1	Échelle de Thorpe . . . . .	116
7.4.2	Nombre de Richardson . . . . .	118
	<b>Bilan sur la mesure de densité et de vitesse en fluide continûment stratifié</b>	<b>121</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>



---

# Introduction

Au cours de trajet en co-voiturages, il y a toujours un instant où la conversation s'oriente sur mon occupation professionnelle. L'énoncé de mon titre de thèse, ou juste de son thème, s'accompagne invariablement d'un regard interrogateur : "Mais pourquoi étudier ces ondes en particulier?". Afin de répondre à cette question, il est nécessaire de replacer ces ondes dans leur contexte océanique. L'étude des aspects fondamentaux des ondes internes de gravité s'inscrit, en effet, dans une démarche de compréhension plus fine des mécanismes permettant le maintien de la circulation thermohaline<sup>1</sup>.

Le schéma le plus simple de cette circulation est le suivant : aux niveaux des pôles les eaux se refroidissent, deviennent ainsi plus denses et tombent par gravité au fond des océans. Ces eaux froides et denses remontent ensuite progressivement en surface où elles sont réchauffées par le soleil et ramenées ensuite vers les pôles. Il semble donc qu'une source chaude et une source froide permettent de mettre en place une circulation globale. Cependant selon le théorème de Sandström [83], il est impossible de générer un mouvement d'ensemble si les sources chaudes et froides se situent à la même altitude, ce qui est le cas pour la terre. Sans autres processus, les océans seraient donc constitués principalement d'eau froide, homogène en densité, recouverte d'une fine couche de surface réchauffée par le soleil. Pour expliquer la différence entre les prédictions du théorème de Sandström et les mesures expérimentales des profils de densité océanique, Munk introduit dans les années soixante [71] la notion de diffusivité thermique turbulente. Il suppose ainsi que l'eau froide est remontée en surface de manière globale par des mouvements turbulents. Cette turbulence permet ainsi d'améliorer le transfert thermique des couches chaudes vers les couches profondes. À partir des profils océaniques de densité, on montre qu'il est nécessaire d'avoir un coefficient de diffusion thermique turbulent 1000 fois supérieur au coefficient de diffusion moléculaire sur l'ensemble des océans.

Cette hypothèse a lancé un grand débat sur le sujet et a fait avancer pendant les quarante années suivantes la compréhension des phénomènes océaniques. Au cours de ces années l'amélioration technologique a, entre autres, permis d'effectuer des mesures directes de ce coefficient de diffusion turbulente à l'aide de capteurs de densité et de vitesse. Ces mesures mettent ainsi en évidence une très grande disparité des valeurs de diffusion turbulente dans l'océan, notamment entre l'intérieur des océans et près des bords [80]. L'eau froide n'est donc pas remontée en surface de manière homogène : des zones semblent beaucoup plus turbulentes que d'autres. De plus, des observations satellites ont permis de porter un nouveau regard sur l'importance des ondes internes océaniques. En effet, ces observations

---

1. La circulation thermohaline désigne l'ensemble des courants océaniques d'eau plus ou moins dense qui traverse les océans du globe.

ont montré qu'une partie non négligeable de l'énergie des marées est transmise aux ondes internes de gravité [23, 24, 25]. Par différents mécanismes l'énergie de ces ondes peut ensuite être convertie en énergie potentielle, ce qui a pour conséquence une remontée des eaux denses vers la surface. Afin d'estimer la contribution des ondes internes au mélange océanique, il est important de déterminer et d'étudier les processus de transfert d'énergie des ondes internes de gravité.

Plusieurs processus répondant à ces critères ont été identifiés :

- les interactions avec la topographie [18, 48, 54, 79],
- les interactions avec des structures méso-échelles telles que des tourbillons ou des courants [82],
- le développement d'instabilités suivi de déferlements [1, 60],

Une meilleure compréhension de ces différents mécanismes est donc indispensable afin d'estimer correctement l'importance des ondes internes dans le maintien de la circulation thermohaline.

Le travail de cette thèse portera principalement sur le troisième mécanisme de transfert d'énergie des ondes internes de gravité évoqué précédemment. Bien que ces objets soient des objets océaniques, nous avons opté pour une approche expérimentale, complétée très ponctuellement par des simulations numériques. Cette approche, comme toute démarche du physicien, permet d'isoler et de contrôler simplement les différents paramètres des ondes internes et ainsi d'identifier clairement les facteurs importants des phénomènes étudiés.

Après une première partie consacrée à une présentation générale des ondes internes de gravité, de la théorie à leur génération expérimentale, nous présenterons dans une seconde partie une étude expérimentale de l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique (PSI). Ce processus consiste en la déstabilisation d'une onde interne de gravité en deux ondes secondaires de vecteurs d'ondes et de pulsations différentes. Cette partie sera l'occasion de présenter les premières études expérimentales de la PSI sur une onde plane. Nous verrons alors que la comparaison de nos résultats expérimentaux aux prédictions théoriques a permis de découvrir certaines limites d'application de la théorie classique de cette instabilité. Nous proposons ensuite un ajustement du modèle théorique, potentiellement intéressant pour l'étude du cas océanique.

Enfin la dernière partie expose une adaptation de la technique expérimentale de Fluorescence Induite par Laser (LIF) à l'étude des fluides continûment stratifiés. Cette technique permet de remonter à la densité du fluide en chaque point d'un plan et à tout instant. Nous avons par ailleurs associé ces champs de densité à des mesures de vitesse, donnant ainsi accès à des grandeurs caractérisant le mélange. Ce travail permet, entre autres, d'observer des déferlements d'ondes internes, et donc de quantifier l'impact de ces déferlements sur une stratification. L'utilisation de cette technique devrait permettre de déterminer plus précisément l'importance relative des différents phénomènes de transfert d'énergie des ondes internes de gravité.

Première partie :

Généralités sur les ondes de gravité  
internes



---

# Les ondes internes de gravité : de la théorie aux océans



Les ondes internes de gravité sont des ondes se propageant dans des milieux stratifiés, c'est-à-dire des milieux dont les propriétés physico-chimiques (température, salinité, densité, quantité de mouvement) varient selon une direction (altitude, profondeur, latitude, longitude...).

On parle de couches de fluide lorsque l'évolution de la densité est brutale, ou bien de stratification continue lorsque l'évolution est douce. L'atmosphère et les océans sont les exemples les plus parlants de tels fluides pour lesquels la densité évolue avec l'altitude ou la

profondeur. Ces deux couches fluides terrestres sont donc des lieux favorables à l'observation des ondes internes de gravité, de leur génération à leur dissipation. Ces ondes permettent le transfert d'énergie sur de grandes distances et à travers les échelles, jouant ainsi un rôle important dans le bilan énergétique océanique et la compréhension de la circulation thermohaline.

Nous verrons dans un premier temps en quoi les fluides stratifiés sont si particuliers et permettent l'apparition de ces ondes. Une étude plus précise des ondes internes sera ensuite détaillée, avant de les présenter à l'échelle du globe et d'expliquer en quoi elles sont un sujet d'étude si intéressant.

## 1.1 Description d'un fluide stratifié en densité

Nous considérons ici un fluide stratifié dont la densité évolue avec la profondeur. L'équilibre mécanique d'un tel fluide repose sur l'équilibre des forces de pression et de pesanteur, traduit par la relation locale de l'hydrostatique

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\bar{\rho}(z)g, \quad (1.1)$$

où  $g$  est la contante de pesanteur,  $\bar{\rho}$  la densité du fluide à l'équilibre et  $P$  la pression au sein du fluide. L'axe  $(Oz)$  est dirigé selon la verticale ascendante<sup>1</sup>.

Une particule fluide<sup>2</sup>, de densité  $\rho_p$ , placée dans un fluide de densité  $\bar{\rho}(z)$  est soumise à la résultante des forces de pression volumique

$$\vec{\Pi} = \bar{\rho}(z)g\vec{e}_z, \quad (1.2)$$

appelée poussée d'Archimède, et à la force volumique de pesanteur  $\rho_p\vec{g}$ . La résultante de ces deux forces s'écrit donc

$$\vec{R} = (\bar{\rho}(z) - \rho_p)g\vec{e}_z. \quad (1.3)$$

Nous observons, à partir de cette expression, qu'une particule fluide de densité plus élevée que le fluide environnant subit une force résultante orientée vers le bas. Une particule moins dense est, quant à elle, entraînée vers le haut, c'est la poussée d'Archimède qui l'emporte. Ce mécanisme permet ainsi de créer une stratification stable au sein de fluides dont la densité n'est pas homogène, les fluides denses venant se placer sous les fluides moins denses.

Nous pouvons également remarquer que la résultante des forces s'annule lorsque la densité de la particule fluide est égale à la densité du fluide. Il y a donc équilibre pour une altitude  $z_1$  telle que  $\bar{\rho}(z_1) = \rho_p$ . Si l'on déplace légèrement la particule fluide de sa position d'équilibre, la dynamique du mouvement est régie par l'équation

$$\rho_p\vec{a} = (\bar{\rho}(z) - \rho_p)g\vec{e}_z. \quad (1.4)$$

Or  $\rho_p = \bar{\rho}(z_1)$ , ainsi pour de petits déplacements  $\delta z$  de la particule fluide autour de  $z_1$  ( $z = z_1 + \delta z$ ), nous obtenons

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = \frac{\bar{\rho}(z_1 + \delta z) - \bar{\rho}(z_1)}{\bar{\rho}(z_1)}g, \quad (1.5)$$

$$= \frac{g}{\bar{\rho}(z_1)} \left. \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right|_{z_1} \delta z, \quad (1.6)$$

$$= -N^2(z_1)\delta z. \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $N$ , appelée pulsation de flottabilité<sup>3</sup>. La particule fluide oscille autour de sa position d'équilibre en  $z = z_1$ , à une pulsation dépendant de la variation de densité autour de cette position d'équilibre.

---

1. Cette définition de l'axe  $(Oz)$  est valable pour tout ce document.

2. Nous supposons que la taille de la particule fluide est petite devant la distance caractéristique des variations de densité.

3. Cette pulsation est également appelée pulsation de Brünt-Väisälä.

De manière plus générale, cette pulsation est définie à l'aide de la valeur moyenne  $\rho_0 = \langle \bar{\rho} \rangle$  de la densité du fluide

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0} \left. \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right|_z . \quad (1.8)$$

Il est à noter que la pulsation de flottabilité est bien définie dans le cas d'une stratification stable, c'est-à-dire lorsque la densité augmente avec la profondeur. Dans ce cas, la dérivée du profil de densité est négative et la grandeur  $N^2$  est bien positive. Cette pulsation est un moyen très simple de caractériser un fluide stratifié. Une grande valeur de pulsation de flottabilité correspond à une variation rapide de la densité selon la verticale, tandis qu'une faible valeur décrit une évolution lente de la densité.

Ce bilan des forces montre très simplement que la moindre perturbation d'une particule fluide au sein d'un fluide stratifié entraîne des oscillations de celle-ci. L'amplitude des oscillations est ensuite atténuée par viscosité. Les fluides stratifiés sont donc propices à des mouvements oscillants dont la force de rappel est la résultante de la poussée d'Archimède et de la pesanteur.

## 1.2 Ondes internes linéaires

Au cours de ce paragraphe, nous allons détailler les conditions permettant aux mouvements oscillatoires décrits précédemment de se propager et de former ainsi des ondes internes de gravité. Nous considérons un fluide stratifié, de pulsation de flottabilité  $N$ , et incompressible. La dynamique de l'écoulement est régie par l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{\bar{\rho}}{\rho} \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{v} , \quad (1.9)$$

l'hypothèse d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 , \quad (1.10)$$

et l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = \kappa \Delta \rho , \quad (1.11)$$

avec  $\vec{v} = (u, v, w)$  la vitesse du fluide,  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide,  $\kappa$  le coefficient de diffusion massique de l'agent stratifiant et  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$  la densité du fluide exprimée comme la somme d'un terme associé à la stratification moyenne  $\bar{\rho}$  et d'un terme associé aux fluctuations de densité  $\rho'$ . Nous obtenons donc un système non linéaire de 5 équations à 5 inconnues.

Afin de simplifier ce problème, nous supposons l'écoulement comme étant bidimensionnel dans le plan  $(xOz)$ . Cette hypothèse permet alors d'introduire la fonction courant  $\psi$  telle que  $\partial_x \psi = -w$  et  $\partial_z \psi = u$ , assurant ainsi l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement. Les équations (1.9) et (1.11) se réécrivent alors

$$\partial_{tz} \psi + J(\partial_z \psi, \psi) = -\frac{1}{\rho} \partial_x P + \nu \partial_z \Delta \psi , \quad (1.12)$$

$$\partial_{tx} \psi + J(\partial_x \psi, \psi) = \frac{\rho'}{\rho} g + \frac{1}{\rho} \partial_z P + \nu \partial_x \Delta \psi , \quad (1.13)$$

$$\partial_t \rho' + J(\rho', \psi) = \kappa \Delta \rho' + \frac{d\bar{\rho}}{dz} \partial_x \psi , \quad (1.14)$$

avec  $J$  un jacobien de définition  $J(f, g) = \partial_x f \partial_z g - \partial_z f \partial_x g$ .

À ce niveau intervient une approximation régulièrement utilisée dans l'étude des fluides stratifiés : l'approximation de Boussinesq. Cette approximation consiste à négliger, dans l'équation de Navier-Stokes, les fluctuations de densité sauf dans le terme de flottabilité. Cela revient à dire que  $\rho' \ll \bar{\rho}$  et que  $\bar{\rho} \approx \langle \bar{\rho} \rangle = \rho_0$ . Expérimentalement nous observons des variations de densité de l'ordre de quelques  $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$  pour des densités voisines de  $1000 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ . Par ailleurs la densité des stratifications utilisées varie de  $1000 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  à  $1030 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ . Il est donc tout à fait justifié d'assimiler  $\rho$  à sa valeur moyenne  $\rho_0$  dans les équations précédentes. Tous les termes en  $\rho$  des équations (1.12) et (1.13) deviennent ainsi des termes en  $\rho_0$ .

Enfin l'opération  $\partial_z(1.12) + \partial_x(1.13)$  permet d'éliminer la pression des équations. Le système se réduit alors aux deux équations suivantes

$$\partial_t(\Delta\psi) + J(\Delta\psi, \psi) - \nu\Delta(\Delta\psi) = \frac{g}{\rho_0}\partial_x\rho', \quad (1.15)$$

$$\partial_t\rho' + J(\rho', \psi) - \kappa\Delta\rho' = -N^2\frac{\rho_0}{g}\partial_x\psi. \quad (1.16)$$

Ce système permet donc de décrire la dynamique non-linéaire d'un fluide stratifié visqueux et dont l'agent stratifiant diffuse au cours du temps. Afin d'étudier la dynamique des ondes internes linéaires, les termes non-linéaires des équations (1.15) et (1.16) sont négligés. Le système linéaire est donc de la forme

$$\partial_t(\Delta\psi) - \nu\Delta(\Delta\psi) = \frac{g}{\rho_0}\partial_x\rho', \quad (1.17)$$

$$\partial_t\rho' - \kappa\Delta\rho' = -N^2\frac{\rho_0}{g}\partial_x\psi. \quad (1.18)$$

Nous cherchons des solutions de type onde plane avec  $\psi = \Psi_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  et  $\rho' = \rho'_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ . Nous noterons pour la suite  $\mathbf{k}$  la norme du vecteur d'onde et  $\vec{k} = \ell\vec{e}_x + m\vec{e}_z$ .

Le système précédent peut alors se réécrire sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{k}^2(i\omega + \nu\mathbf{k}^2) & i\frac{g}{\rho_0}\ell \\ iN^2\frac{\rho_0}{g}\ell & i\omega + \kappa\mathbf{k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \rho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Ce système possède des solutions non nulles si et seulement si le déterminant de la matrice définie dans l'équation précédente est nul. Cette condition s'exprime sous la forme suivante

$$0 = \mathbf{k}^2(i\omega + \nu\mathbf{k}^2)(i\omega + \kappa\mathbf{k}^2) + N^2\ell^2. \quad (1.20)$$

### 1.2.1 Cas d'un fluide parfait

Un fluide parfait est un fluide pour lequel les phénomènes dissipatifs, tels que la diffusion et la viscosité, sont négligés. Dans ce cas, l'équation (1.20) devient

$$\left(\frac{\omega}{N}\right)^2 = \frac{\ell^2}{\mathbf{k}^2} \quad i.e. \quad \frac{\omega}{N} = \pm \frac{|\ell|}{\mathbf{k}}. \quad (1.21)$$

Nous obtenons alors la relation de dispersion des ondes internes. Cette relation de dispersion peut être réécrite en faisant intervenir l'angle  $\theta$ , qui est l'angle formé par la verticale et par le vecteur d'onde (figure 1.1). La relation de dispersion s'écrit alors

$$\frac{\omega}{N} = \pm \sin\theta. \quad (1.22)$$

Ainsi, à une pulsation de l'onde sont associés quatre vecteurs d'ondes différents :  $(\ell, m)$ ,  $(-\ell, m)$ ,  $(\ell, -m)$  et  $(-\ell, -m)$ . Par ailleurs, cette relation de dispersion ne fait pas intervenir directement la longueur d'onde. Par conséquent, pour une fréquence d'excitation donnée, la longueur d'onde des faisceaux d'ondes internes émis est imposée par l'excitation.

Les vitesses de groupe et de phase peuvent être calculées à partir de cette relation de dispersion. Nous obtenons les deux expressions suivantes

$$\vec{c}_\phi = \pm N \frac{|\ell|}{\mathbf{k}^3} (\ell \vec{e}_x + m \vec{e}_z) , \quad (1.23)$$

$$\vec{c}_g = \pm N \frac{\text{sign}(\ell)m}{\mathbf{k}^3} (m \vec{e}_x - \ell \vec{e}_z) , \quad (1.24)$$

où  $\text{sign}(\ell)$  vaut  $+1$  si  $\ell > 0$ , et  $-1$  sinon.

Nous obtenons ici une caractéristique très particulière des ondes internes de gravité : la vitesse de phase est perpendiculaire à la vitesse de groupe et  $c_{\phi z}$  et  $c_{gz}$  sont de signes contraires. Cette caractéristique est illustrée sur la figure 1.1 où l'on présente les quatre faisceaux, ainsi que leur vitesse de phase et de groupe, générés par un corps oscillant verticalement et placé au centre du repère. Par ailleurs la vitesse de phase étant colinéaire au vecteur d'onde, l'angle  $\theta$  correspond à l'angle formé par la verticale et par la vitesse de phase.

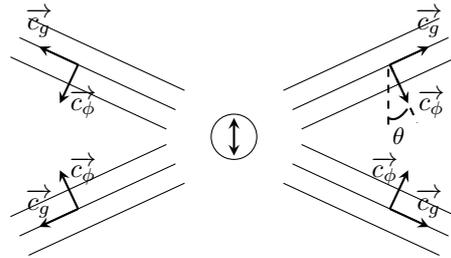


FIGURE 1.1 – Représentation schématique des quatre faisceaux d'ondes internes créés par un corps oscillant à fréquence fixée dans un fluide stratifié.

## 1.2.2 Cas d'un fluide réel

### Effet de la viscosité

La prise en compte de la viscosité dans les équations (1.17) et (1.18) modifie la relation de dispersion des ondes internes donnée précédemment. Nous obtenons en effet la relation suivante

$$\left(\frac{\omega}{N}\right)^2 - i\nu \frac{\mathbf{k}^2}{N} \left(\frac{\omega}{N}\right) - \frac{\ell^2}{\mathbf{k}^2} = 0 . \quad (1.25)$$

Le discriminant de ce polynôme d'ordre 2 en  $\omega/N$  vaut

$$\Delta = -\nu^2 \frac{\mathbf{k}^4}{N^2} + 4 \frac{\ell^2}{\mathbf{k}^2} . \quad (1.26)$$

Il est à noter que ce discriminant peut être positif ou négatif selon les valeurs des composantes horizontales et verticales du vecteur d'onde. Lorsque  $\Delta$  est négatif les racines du polynôme sont alors des imaginaires purs. Cela signifie que l'onde est une onde évanescente et qu'il n'y a pas de propagation possible pour ces vecteurs d'ondes.

La courbe bleue de la figure 1.2 représente, dans l'espace des vecteurs d'ondes, les vecteurs annulant le discriminant. Pour des vecteurs d'ondes situés à l'extérieur de la

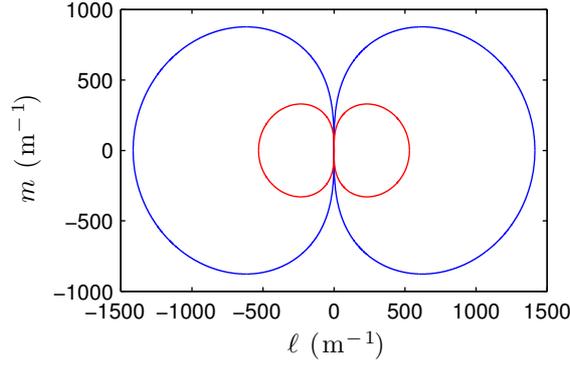


FIGURE 1.2 – La courbe bleue délimite le domaine de propagation des ondes internes pour  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . À l'extérieur de ce domaine les ondes sont évanescentes. La courbe rouge délimite le domaine dans lequel la pulsation dans le cas du fluide parfait et la pulsation dans le cas d'un fluide visqueux ne diffèrent que de 1%.

courbe bleue, les ondes seront évanescentes et pour des vecteurs d'ondes situés à l'intérieur, le discriminant est positif et les solutions du polynôme sont de la forme

$$\omega = \omega_r + i\omega_i, \quad (1.27)$$

$$\text{avec } \omega_r = \pm N \sqrt{\frac{\ell^2}{\mathbf{k}^2} - \frac{\nu^2 \mathbf{k}^4}{4N^2}}, \quad (1.28)$$

$$\text{et } \omega_i = \frac{\nu \mathbf{k}^2}{2}. \quad (1.29)$$

Nous pouvons dans un premier temps remarquer que la partie réelle de  $\omega$  est modifiée par la prise en compte de la viscosité. Cependant, pour des vecteurs d'ondes compris dans le domaine délimité par la courbe rouge de la figure 1.2, la différence relative entre  $\omega_r$  et  $\omega$  (donnée par la relation (1.21)) est inférieure à 1%. Pour toutes les expériences que nous avons effectuées au cours de cette thèse, les vecteurs d'ondes mesurés seront toujours compris dans le domaine délimité par la courbe rouge. Nous retiendrons donc pour la suite la relation de dispersion sans viscosité.

La partie complexe de la pulsation correspond, quant à elle, à l'atténuation visqueuse le long du faisceau. Le coefficient d'atténuation dans la direction de propagation  $\xi = \mathbf{c}_g t$ , avec  $\mathbf{c}_g = N|m|/\mathbf{k}^2$ , vaut

$$\beta = \frac{\nu \mathbf{k}^4}{N 2|m|}, \quad (1.30)$$

$$= \frac{\nu \mathbf{k}^3}{2\sqrt{N^2 - \omega^2}}. \quad (1.31)$$

Deux ondes ayant la même longueur d'onde mais de pulsations différentes n'ont donc pas la même atténuation visqueuse, en effet l'atténuation visqueuse est d'autant plus grande que  $\omega/N$  est proche de 1.

### Effet de la diffusion et de la viscosité

Si l'on tient compte de la diffusion de l'agent stratifiant en plus de la viscosité, la relation de dispersion s'écrit

$$\left(\frac{\omega}{N}\right)^2 - i(\nu + \kappa)\frac{\mathbf{k}^2}{N}\left(\frac{\omega}{N}\right) - \left(\nu\kappa\frac{\mathbf{k}^4}{N^2} + \frac{\ell^2}{\mathbf{k}^2}\right) = 0. \quad (1.32)$$

Le discriminant de ce polynôme du second degré à coefficient complexe devient

$$\Delta = -\nu^2 \left(1 - \frac{1}{Sc}\right)^2 \frac{\mathbf{k}^4}{N^2} + 4 \frac{\ell^2}{\mathbf{k}^2}, \quad (1.33)$$

avec  $Sc = \nu/\kappa$  le nombre de Schmidt comparant les effets visqueux et les effets diffusifs.

Dans le cas de l'eau salée  $Sc \sim 700$ , le discriminant peut donc être, avec une bonne approximation, considéré comme égal au discriminant calculé précédemment. Nous obtenons donc le même domaine de propagation des ondes internes.

Dans toute la suite de ce document, nous ne tiendrons compte que de la viscosité et négligerons les effets de diffusion du sel.

### 1.2.3 Influence des conditions aux limites

Dans le paragraphe précédent, nous avons cherché des solutions de type onde plane, supposant ainsi que le milieu de propagation est infini. C'est loin d'être le cas dans les océans et dans nos expériences où la surface et le fond délimitent le milieu de propagation. Expérimentalement, nous parvenons à limiter le confinement horizontal soit en ayant un domaine de propagation suffisamment long pour que la viscosité atténue fortement l'onde retour, soit en ajoutant des absorbeurs d'onde en fin de cuve, empêchant ainsi la réflexion. Les ondes étant confinées verticalement, il semble alors naturel de raisonner en termes de modes verticaux.

Nous traiterons ici du cas du fluide parfait stratifié avec une pulsation de flottabilité constante sur toute la hauteur de fluide. Les équations (1.17) et (1.18) permettent ainsi d'aboutir à l'équation d'onde

$$\partial_{tt}\Delta\Psi + N^2\partial_{xx}\Psi = 0. \quad (1.34)$$

La prise en compte du confinement vertical conduit à chercher des solutions de la forme  $\Psi = \Psi_0 f(z) \exp(i\omega t - i\ell x)$ . Lorsque l'on injecte cette solution dans l'équation d'onde, nous obtenons une équation différentielle de type oscillateur harmonique

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \ell^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) f(z) = 0. \quad (1.35)$$

Nous supposons par ailleurs que le fluide est compris entre deux plaques rigides en  $z = H/2$  et  $z = -H/2$ , imposant alors des vitesses verticales nulles<sup>4</sup>. Cette condition se traduit alors par les égalités  $f(H/2) = 0$  et  $f(-H/2) = 0$ . Les solutions de l'équation différentielle sur  $f$  sont donc de la forme

$$f_n(z) \propto \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{H}z\right), \quad (1.36)$$

avec  $n$  un nombre entier. Les solutions de l'équation d'onde correspondent à la somme de toutes les solutions  $f_n$  possibles

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(m_n z) \exp(i\omega t - i\ell_n x), \quad (1.37)$$

avec  $m_n = (2n+1)\pi/H$ ,  $\ell_n$  la composante horizontale du vecteur d'onde obtenue à partir de la relation de dispersion (1.21) et  $A_n$  des constantes d'intégration.

---

4. Aucune condition ne porte sur la composante horizontale de la vitesse car nous étudions ici un fluide parfait et donc sans frottement sur les bords.

Ces solutions correspondent à des ondes stationnaires suivant la verticale et propagatives selon l'horizontale. Il est à noter que chaque mode  $n$  peut être vu comme la superposition d'ondes planes de vecteurs d'ondes  $\vec{k}_{n+} = \ell_n \vec{e}_x + m_n \vec{e}_z$  et  $\vec{k}_{n-} = \ell_n \vec{e}_x - m_n \vec{e}_z$ .

Par la suite nous parlerons plus particulièrement de mode-1 pour désigner ce mode-1 vertical. Ce mode, obtenu pour  $n = 0$ , donne un champ de vitesse formant des rouleaux sur toute la hauteur du fluide et dont l'expression est de la forme suivante

$$u = u_0 \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) \cos(\omega t - \ell x) , \quad (1.38)$$

$$w = w_0 \cos\left(\frac{\pi}{H}z\right) \sin(\omega t - \ell x) . \quad (1.39)$$

Enfin la condition d'incompressibilité donne une relation entre  $u_0$  et  $w_0$

$$\ell u_0 = \frac{\pi}{H} w_0 . \quad (1.40)$$

### 1.3 Les ondes internes à l'échelle du globe

L'étude des fluides stratifiés est directement motivée par l'observation des couches fluides de la Terre telles que l'atmosphère ou les océans. Ces deux couches fluides terrestres sont en effet naturellement stratifiées, en température pour l'atmosphère, et en température et salinité pour les océans. Ces milieux sont donc propices à la propagation d'ondes internes.

#### 1.3.1 Stratification de l'atmosphère et des océans

De par sa proximité et sa facilité d'accès, l'atmosphère a été la première des couches fluides terrestres à être étudiée. Des mesures de températures ont pu être effectuées à de nombreuses altitudes, que ce soit par des expéditions sur les différents reliefs ou par des lancers de ballons-sondes. Les résultats de ces mesures ont mis en évidence de grosses disparités de comportement de la température suivant les couches de l'atmosphère. La figure 1.3 présente l'évolution de la température en fonction de l'altitude.

Nous pouvons observer que la température diminue avec l'altitude dans la mésosphère et la troposphère mais qu'elle augmente dans la stratosphère. Il semble surprenant que des évolutions si différentes de température correspondent à chaque fois à des stratifications stables. En réalité, la température n'est pas la grandeur la plus adaptée dans le cas de l'atmosphère, car l'évolution de la pression est également à prendre en compte pour des fluides compressibles. On définit alors une température potentielle correspondant à la température qu'aurait le fluide à une pression de référence après une détente ou une compression adiabatique. La pulsation de flottabilité est alors déterminée à l'aide de ces grandeurs potentielles.

En raison de cette stratification en température potentielle, les ondes internes peuvent être générées par le passage du vent sur des reliefs, comme des îles ou des montagnes. En effet, la formation des ondes internes de gravité en aval d'un obstacle est aisément caractérisée par le nombre de Froude  $Fr$ , qui compare l'énergie cinétique horizontale à l'énergie potentielle nécessaire à l'élévation d'une particule fluide de la hauteur de l'obstacle  $h$

$$Fr = \frac{U}{Nh} . \quad (1.41)$$

Pour des nombres de Froude inférieurs à 1, l'énergie potentielle nécessaire pour élever la particule fluide au dessus de l'obstacle est plus grande que l'énergie cinétique horizontale : les particules fluides contournent l'obstacle ou sont bloquées et ne génèrent pas d'ondes

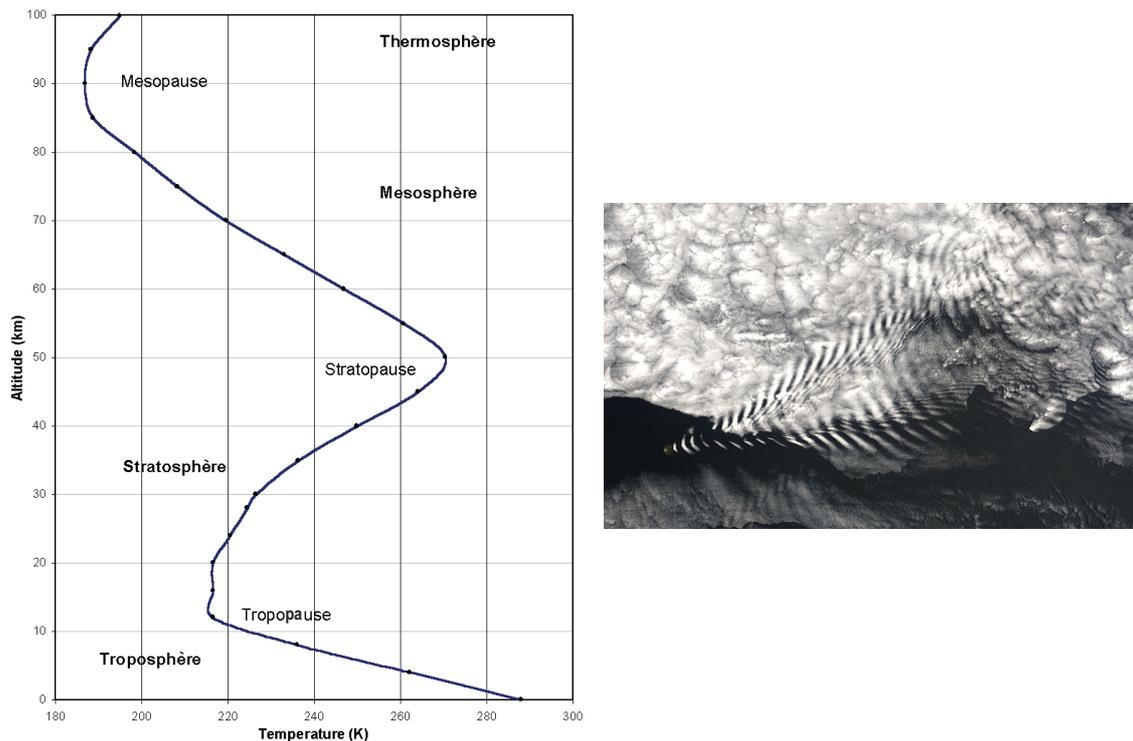


FIGURE 1.3 – À gauche : évolution de la température atmosphérique avec l'altitude. À droite : sillage d'ondes internes atmosphériques à l'arrière de l'île Amsterdam située dans le sud de l'océan Indien.

internes en aval. Par contre pour des nombres de Froude supérieurs à 1, les particules fluides passent au dessus de l'obstacle puis redescendent. Des oscillations peuvent donc apparaître, et ainsi nous pouvons observer la mise en place d'ondes internes de gravité. Si l'on prend l'exemple d'un obstacle d'une hauteur d'environ 1 km, des ondes internes pourront apparaître pour des vents de l'ordre de  $40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ , les pulsations de flottabilité atmosphériques étant de l'ordre de  $10^{-2} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Il est possible de visualiser ces ondes grâce aux nuages qui peuvent se former au niveau des maxima d'amplitude. En effet, ces ondes provoquent des oscillations verticales de l'air de grandes envergures. L'air humide, entraîné à plus haute altitude par ces oscillations, subit une forte chute de température, provoquant la condensation de gouttes d'eau et donc la formation de nuages. L'observation par les satellites permet de visualiser les motifs périodiques formés par les nuages révélant ainsi la présence de ces ondes, comme nous pouvons l'observer sur la figure 1.3. Les ondes de gravité se forment ici dans le sillage de l'île soumise à un vent constant soufflant de la gauche vers la droite.

L'océan, quant à lui, a été plus difficile à explorer et il a fallu attendre l'amélioration technologique des capteurs de densité et de température pour obtenir des informations sur l'évolution verticale de ces grandeurs. Ces mesures ont permis de voir que les océans sont principalement organisés en trois couches. La couche de surface, d'une épaisseur d'une centaine de mètres, est homogène en densité et en température. Cette zone est sujette à un fort mélange par les vents de surface ainsi que par les échanges thermiques avec l'atmosphère. Juste sous cette couche se trouve une zone de forte stratification d'environ 1 km d'épaisseur, appelée pycnoclyne. Cette pycnoclyne inhibe fortement les mouvements verticaux et limite les échanges entre la couche de surface et les couches plus profondes.

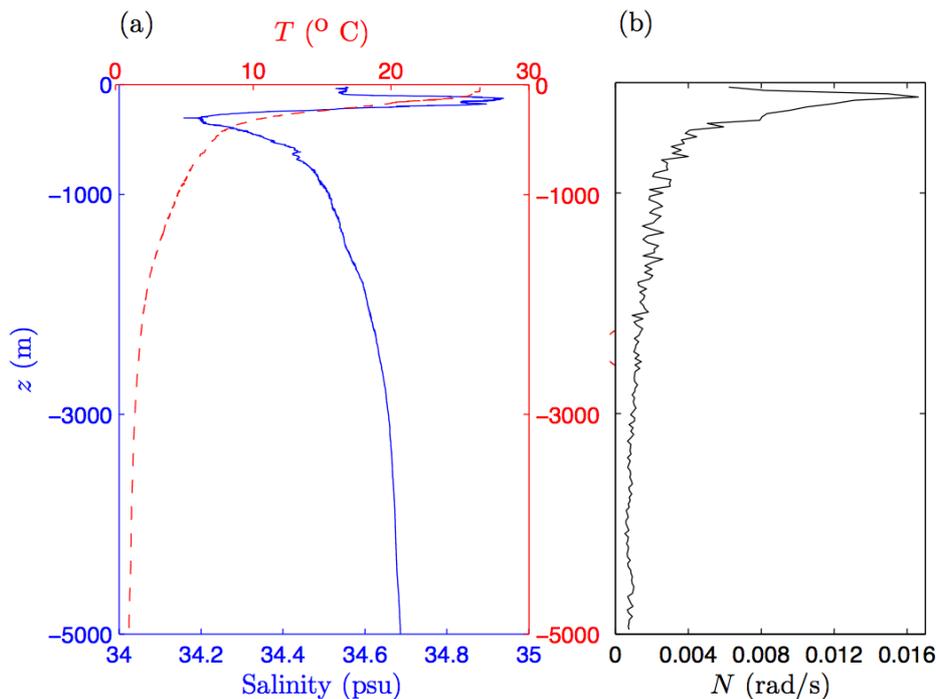


FIGURE 1.4 – (a) Profils de température (courbe rouge en pointillé) et de salinité (courbe bleue en trait plein) en fonction de la profondeur, mesurés aux abords de "Line Islands Ridge" le 4 mai 2011 au sud de l'archipel d'Hawaï pendant une expédition à laquelle ont participé Thierry Dauxois, Sylvain Joubaud et Guilhem Bordes. (b) Profil de la pulsation de flottabilité  $N(z)$  en fonction de la profondeur (extrait de [4]).

Enfin sous la pycnoclyne se trouve une stratification profonde où la densité augmente légèrement avec la profondeur sur quelques kilomètres.

La figure 1.4(a) présente des mesures de températures et de salinité dans l'océan au large d'Hawaï. L'évolution de la pulsation de flottabilité avec la profondeur en est déduite et est présentée sur la figure 1.4(b). La pulsation de flottabilité atteint un maximum dans la pycnoclyne, jusqu'à  $10^{-2}$  rad·s $^{-1}$ , et diminue ensuite dans l'océan profond pour atteindre des pulsations de l'ordre variant de  $10^{-4}$  à  $10^{-3}$  rad·s $^{-1}$ .

### 1.3.2 Génération des ondes internes

Il existe principalement deux mécanismes de génération des ondes internes océaniques : l'un au niveau du fond océanique et le second au niveau de la pycnoclyne. Tout comme la formation d'ondes de gravité dans l'atmosphère, le déplacement de fluide stratifié au dessus d'une topographie permet d'émettre des ondes internes de différentes fréquences selon la taille, la forme de ces topographies et la vitesse de l'écoulement. Ces écoulements peuvent être dus à la marée, à des tourbillons ou encore à des courants. La génération d'ondes internes au niveau de la pycnoclyne est due, quant à elle, à des phénomènes de surface tels que les tempêtes qui agitent fortement la zone homogène présente à la surface de l'océan. Ces forts mouvements sont transmis à la pycnoclyne qui transforme alors ces déplacements de fluide en ondes internes. Ces mécanismes de génération ont été très bien résumés par Garrett *et al.* [30] au moyen de la figure 1.5.

La génération des ondes internes par la marée est un sujet de recherche encore très actif. Que ce soit par une approche expérimentale [22, 36, 51], numérique [75] ou à l'aide

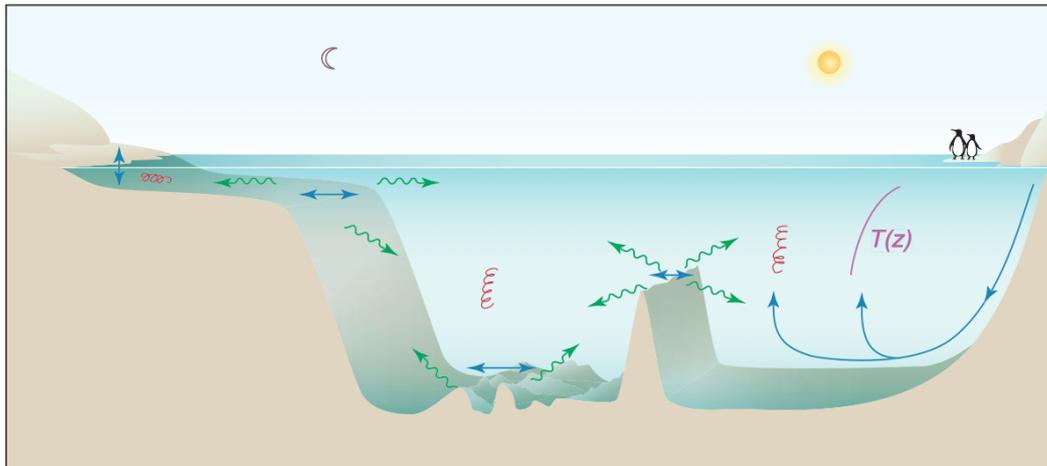


FIGURE 1.5 – À gauche : le mouvement de va et vient imposé par la marée génère des ondes internes au niveau du talus continental ainsi qu’au niveau de topographies en océan profond. Ces ondes peuvent conduire à de la turbulence et au mélange. À droite : les ondes internes peuvent participer à la turbulence et au mélange océanique permettant la remontée des eaux froides formées aux grandes latitudes et le maintien de la circulation à grandes échelles (extrait de [30]).

de mesures *in situ* [24, 25], la connaissance du transfert énergétique entre la marée et les ondes internes est un point clé du budget énergétique océanique. Il apparaît ainsi qu’une partie non négligeable de l’énergie des marées est convertie en ondes internes [94], cette conversion s’effectuant principalement le long des côtes océaniques. Une fois formées, ces ondes peuvent se propager sur de grandes distances et interagir de nouveau avec d’autres topographies ou avec d’autres ondes.

### 1.3.3 Circulation océanique, mélange et ondes internes

La figure 1.5 suggère par ailleurs que les ondes internes vont jouer un rôle dans le mélange océanique nécessaire au maintien de la stratification océanique et à la circulation thermohaline.

Les modèles de circulation océanique, développés à partir de simulations numériques et de mesures océaniques, font intervenir deux cellules de circulations, l’une descendant du pôle nord et la seconde émise à partir du pôle sud [57, 73, 74]. La figure 1.6, tirée de [57], permet de mieux visualiser ces deux cellules.

Cette circulation peut être schématisée par la figure 1.7 (extraite de [74]). Elle synthétise les comportements des courants en fonction des vents de surface, et des transferts thermiques avec l’atmosphère à la surface des océans.

Près de l’équateur, les deux cellules sont l’une au dessus de l’autre. Il est alors nécessaire, à ces latitudes, que du mélange, symbolisé par une flèche rouge, opère afin de maintenir le profil de densité océanique. Les ondes internes sont alors un candidat parfait pour jouer ce rôle. En effet, même si ces ondes sont formées au niveau des côtes, leur capacité à voyager sur de grandes distances<sup>5</sup> leur permet de transiter par ces zones et d’avoir potentiellement un effet sur la stratification.

5. Les ondes internes océaniques ont des longueurs d’ondes variant de 100 m à quelques kilomètres. Il en résulte une distance typique d’atténuation de l’ordre de 50 000 km. Les ondes internes océaniques ne sont donc pas atténuées par viscosité.

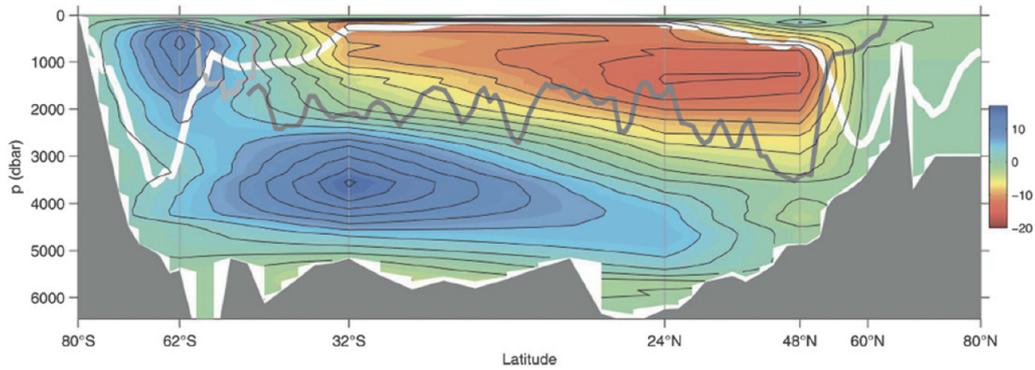


FIGURE 1.6 – En bleu (rouge) sont représentées les zones de circulation dans le sens horaire (antihoraire) de la circulation thermohaline moyennée dans la direction zonale (extrait de [57]).

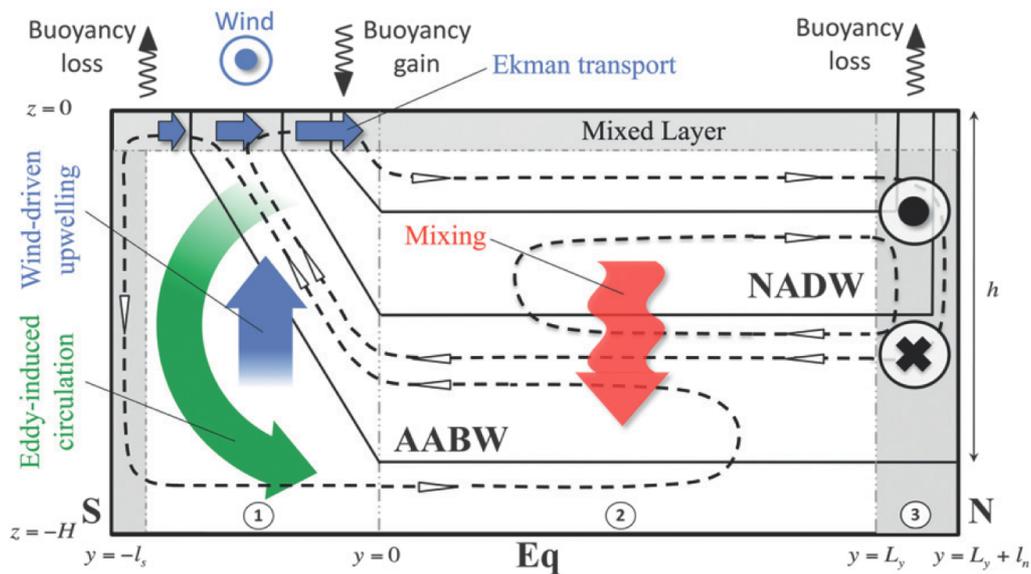


FIGURE 1.7 – Représentation schématique de la circulation thermohaline entre le pôle nord (à droite) et le pôle sud (à gauche) dans un plan méridional. Les lignes en pointillé et fléchées représentent les lignes de courant de la circulation résultante des vents de surface et d'échanges thermiques aux pôles et à l'équateur. Les lignes continues sont des lignes d'isodensité. NADW= North Atlantic Deep Water, AABW= Antarctic Bottom Water (extrait de [74]).

Une manière de quantifier et de modéliser le mélange océanique est de définir un coefficient de diffusion turbulente. Ce coefficient compare le flux vertical de densité à la variation verticale de densité. Plus ce nombre est faible et moins il y a de mélange au sein du fluide. Des mesures océaniques de ce coefficient ont été effectuées par Polzin *et al.* [80]. Ils observent que le coefficient de diffusion turbulente est plus important près des topographies que dans des zones sans reliefs. Le mélange y est donc plus intense. Or nous avons vu précédemment que ces zones sont également des lieux privilégiés pour la formation des ondes internes, ce qui semble suggérer un impact des ondes internes sur la turbulence et donc sur le mélange océanique.

Pour ces différentes raisons, il est pertinent d'étudier les différents mécanismes de dis-

sipation des ondes internes de gravité et de chercher à estimer l'impact de ces différents mécanismes sur une stratification.

Enfin, l'étude du cycle de vie des ondes internes est nécessaire afin de mieux estimer la contribution des ondes internes au bilan énergétique globale : de la génération, pour déterminer l'énergie transmise par la marée, à la dissipation, pour comprendre les processus de mélange engendrés par ces ondes. Notre travail expérimental, bien qu'assez loin de la nature océanique de ces ondes, s'inscrit parfaitement dans cette dynamique en cherchant à comprendre, dans un cas idéalisé, comment l'énergie des ondes internes peut se transférer vers des plus petites échelles (deuxième partie) et permettre ainsi le mélange (troisième partie).



---

## Les ondes internes en laboratoire



Trois possibilités complémentaires s'offrent à nous pour étudier les ondes internes. Nous pouvons soit effectuer des mesures *in situ* océaniques ou atmosphériques, soit des simulations numériques, soit développer une approche expérimentale. Nous opterons pour cette dernière approche.

L'approche expérimentale permet de pouvoir contrôler les différents paramètres de ces ondes tels que la fréquence, l'amplitude et la longueur d'onde. Cependant, les ondes internes ne se laissent pas si facilement reproduire en laboratoire. Il faut dans un premier temps être capable de créer un fluide continûment stratifié et de contrôler ce profil de densité. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, sans stratification les ondes internes ne peuvent exister. Ensuite, en raison de la particularité de la relation de dispersion des ondes internes, qui associe à une fréquence quatre faisceaux possibles, la génération d'un faisceau bien contrôlé demande un certain savoir-faire. Enfin, nous devons être capable d'observer ces ondes internes et de mesurer des grandeurs pertinentes. Plusieurs techniques sont alors possibles, permettant chacune de remonter à des grandeurs différentes (densité, vitesse, gradient de densité).

Ce chapitre sera donc l'occasion de détailler les différentes étapes expérimentales relatives aux fluides stratifiés, de la formation d'une stratification, à l'observation des ondes internes, en passant par le dispositif de génération de celles-ci.

## 2.1 Un océan de 30 cm de profondeur

### 2.1.1 Mise en place de la stratification

Les ondes internes ne peuvent se propager sans un fluide stratifié. L'étude expérimentale de ces ondes repose donc sur notre capacité à réaliser et à contrôler différents profils de densité. Expérimentalement, il est plus simple de modifier la densité du fluide en jouant sur la concentration en sel plutôt que sur la température. En effet, en raison des dimensions de nos expériences, le rayonnement thermique par les cotés de la cuve est non négligeable. De plus la température diffuse plus rapidement que le sel. Il devient alors difficile, dans ce cas, de contrôler durablement le profil de densité.

Nous utiliserons donc du sel afin d'obtenir des densités comprises entre  $1000 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  et  $1030 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ . Cette gamme de densité possède deux avantages. Le premier est qu'il est justifié d'identifier  $\bar{\rho}$  à  $\rho_0$  dans l'expression de la pulsation de flottabilité, la variation maximale de densité correspondant à moins de 2% de la densité moyenne. Ensuite, cette gamme de concentration permet d'obtenir des stratifications linéaires donnant une pulsation de flottabilité de l'ordre d'un  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , la hauteur de fluide étant de l'ordre de 30 cm. Les phénomènes ondulatoires les plus rapides ont ainsi une période de l'ordre de 6 s. Ainsi une fréquence d'acquisition de 2 Hz permet d'obtenir une bonne résolution temporelle des phénomènes oscillant. De plus cette échelle de temps permet de faire des expériences sur plus de deux cents oscillations de l'onde mère en une vingtaine de minutes.

Enfin, afin de contrôler parfaitement la propagation des ondes internes dans nos expériences, il est préférable d'avoir la même pulsation de flottabilité  $N$  en chaque point du fluide. Comme

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}, \quad (2.1)$$

une pulsation de flottabilité constante est équivalente (dans l'approximation où  $\overline{\rho(z)} \approx \rho_0$ ) à une évolution linéaire de la densité avec la profondeur. Il est possible d'obtenir une telle stratification à l'aide de la méthode des deux bacs [29, 77] schématisée par la figure 2.1.

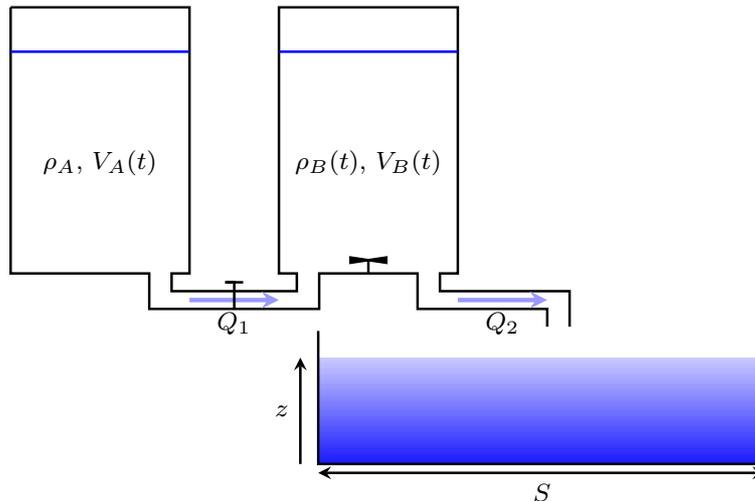


FIGURE 2.1 – Représentation schématique de la méthode des deux bacs.

Un bac  $A$  de densité fixe  $\rho_A$  se déverse dans un bac  $B$  avec un débit  $Q_1$ . Le bac  $B$ , sous agitation constante et de densité  $\rho_B(t)$ , se déverse dans la cuve expérimentale avec un débit  $Q_2$ .

La conservation de la masse nous donne

$$\frac{d(\rho_B(t)V_B(t))}{dt} = \rho_A Q_1 - \rho_B(t) Q_2 . \quad (2.2)$$

Par ailleurs, la conservation du volume s'écrit

$$\frac{dV_B(t)}{dt} = Q_1 - Q_2 , \quad (2.3)$$

d'où

$$V_B(t) = (Q_1 - Q_2)t + V_B(0) . \quad (2.4)$$

En combinant les équations (2.2) et (2.4), nous obtenons une équation différentielle sur  $\rho_B$

$$\frac{d\rho_B(t)}{dt} = Q_1 \frac{\rho_A - \rho_B(t)}{(Q_1 - Q_2)t + V_B(0)} . \quad (2.5)$$

Par séparation des variables et intégration, nous obtenons

$$\rho_B(t) = \rho_A - (\rho_A - \rho_B(0)) \left( 1 + \frac{Q_1 - Q_2}{V_B(0)} t \right)^{Q_1/(Q_2 - Q_1)} . \quad (2.6)$$

Par ailleurs, nous pouvons effectuer le remplissage soit par le haut (à l'aide d'un flotteur), soit par le bas de la cuve expérimentale. Ainsi, le fluide injecté à un instant  $t$  est positionné, à la fin du remplissage, à l'altitude

$$z(t) = \frac{Q_2}{S} t \quad (2.7)$$

dans le cas d'un remplissage par le haut et à

$$z(t) = h - \frac{Q_2}{S} t \quad (2.8)$$

dans le cas d'un remplissage par le bas avec  $h = (V_A(0) + V_B(0))/S = 2V_B(0)/S$  la hauteur de la stratification finale<sup>1</sup>.

Finalement en combinant ces dernières équations, nous obtenons l'évolution de la densité de la cuve expérimentale en fonction de la hauteur

$$\rho_B(z) = \rho_A - (\rho_A - \rho_B(0)) \left( 1 + \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} \frac{S}{V_B(0)} z \right)^{Q_1/(Q_2 - Q_1)} , \quad (2.9)$$

dans le cas d'un remplissage par le haut et

$$\rho_B(z) = \rho_A - (\rho_A - \rho_B(0)) \left( 1 + \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} \frac{S}{V_B(0)} (h - z) \right)^{Q_1/(Q_2 - Q_1)} , \quad (2.10)$$

dans le cas d'un remplissage par le bas.

D'après ces deux expressions, une stratification linéaire est obtenue si et seulement si  $Q_1 = Q_2/2$ . Deux méthodes permettent de s'assurer de cette relation entre  $Q_1$  et  $Q_2$  : soit les deux débits sont contrôlés indépendamment à l'aide de deux pompes péristaltiques, soit seul  $Q_2$  est imposé et  $Q_1$  est obtenu en mettant les deux bacs en vase communicant. La relation entre  $Q_1$  et  $Q_2$  est alors assurée si les bacs  $A$  et  $B$  possèdent la même section.

1. Nous supposons que  $V_A(0) = V_B(0)$  afin de simplifier les expressions.

Lorsque  $Q_1 = Q_2/2$ , la densité en fonction de  $z$  est de la forme

$$\begin{aligned} \rho_B(z) &= \rho_B(0) + (\rho_A - \rho_B(0)) \frac{S}{2V_B(0)} z && \text{pour un remplissage par le haut,} \\ \rho_B(z) &= \rho_A - (\rho_A - \rho_B(0)) \frac{S}{2V_B(0)} z && \text{pour un remplissage par le bas.} \end{aligned}$$

Les densités des bacs  $A$  et  $B$  doivent donc être ajustées en fonction du type de remplissage. Si l'on effectue un remplissage par le haut (bas), nous devons avoir  $\rho_A < \rho_B(0)$  ( $\rho_B(0) < \rho_A$ ), afin que la densité décroisse avec  $z$ . Une stratification d'une trentaine de centimètres de hauteur est ainsi obtenue en quatre heures.

### 2.1.2 Mesure de densité

Une bonne connaissance de la pulsation de flottabilité passe par une mesure précise de la densité. Afin de connaître la densité des bacs  $A$  et  $B$ , nous utilisons un densimètre AntonPaar DMA 35. Ce densimètre est constitué d'un capillaire rempli du fluide à étudier. Un système électro-mécanique permet de faire vibrer ce capillaire et de mesurer la fréquence de résonance du système capillaire/fluide. La fréquence de résonance dépendant de la masse de l'ensemble, il suffit de connaître le volume du capillaire pour déterminer la densité du fluide. Cet appareil fournit des mesures de densités comprises entre 0 et  $3 \text{ kg}\cdot\text{L}^{-1}$  avec une précision de  $0.001 \text{ kg}\cdot\text{L}^{-1}$  et une répétabilité de  $0.0005 \text{ kg}\cdot\text{L}^{-1}$ .

Cette technique fournit donc une mesure précise de la densité, mais si l'on veut déterminer l'évolution de cette grandeur pour un fluide stratifié de 30 cm de hauteur, il devient rapidement fastidieux de prélever du fluide à chaque altitude et de mesurer la densité du fluide prélevé. De plus, la résolution spatiale de la mesure du profil de densité est limitée par la position de nos points de mesure. La mesure de la stratification s'effectue donc à l'aide d'une sonde conductimétrique, qui mesure la résistivité électrique du fluide se trouvant entre deux plaques conductrices. La résistivité du fluide dépendant des ions présents dans la solution, un étalonnage permet d'associer à une valeur de résistivité une valeur de densité.

La sonde conductimétrique est placée au bout d'une tige en acier inoxydable que l'on plonge progressivement dans le fluide stratifié à l'aide d'un moteur pas à pas. La mesure de la résistivité s'effectue en continu pendant la descente de la sonde. Nous obtenons alors une mesure du profil de densité, dont nous présentons un exemple sur la figure 2.2.

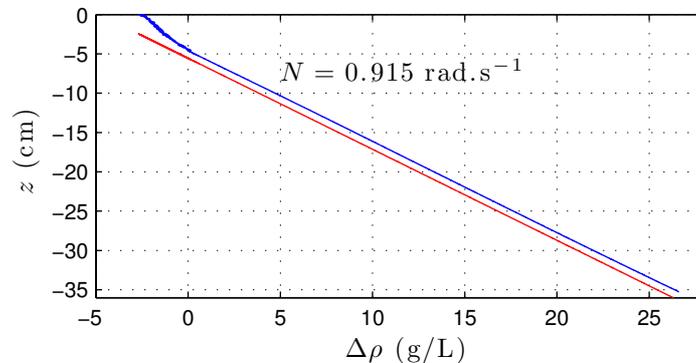


FIGURE 2.2 – Profil de densité mesuré à l'aide de la sonde conductimétrique en bleu, avec  $\Delta\rho = \rho - 1000$ . En rouge : modélisation linéaire du profil, décalée d'un centimètre vers le bas. La pulsation de flottabilité  $N$  est déterminée à partir de la pente du modèle linéaire.

La pulsation de flottabilité est alors obtenue en modélisant cette courbe par une loi linéaire. La pente de la modélisation multipliée par  $-\rho_0/g$  permet d'obtenir le carré de la pulsation de flottabilité. Nous pouvons remarquer que, sur notre mesure, la partie haute du profil est moins stratifiée que le reste de la colonne d'eau. L'un des effets responsables de cette homogénéisation est, comme dans les océans, les mouvements d'air en surface, qui mélangent peu à peu la couche supérieure du fluide. D'autres phénomènes tels que la diffusion ou les effets de remplissage influent également sur le profil de densité au niveau de la surface et du fond.

Finalement, la mesure conductimétrique de la densité permet de contrôler de manière précise la qualité de la stratification réalisée à l'aide de la méthode des deux bacs et d'estimer la pulsation de flottabilité.

## 2.2 Génération des ondes internes

Nous venons de voir comment créer un fluide stratifié et comment mesurer la pulsation de flottabilité de ce fluide. Il ne reste alors plus qu'à générer les ondes internes. La méthode historique repose sur un cylindre oscillant placé au sein du fluide stratifié. L'oscillation du cylindre impose un mouvement oscillatoire au fluide en contact et génère ainsi des ondes internes de gravité. Ce dispositif a permis les premières observations expérimentales des quatre faisceaux d'ondes internes associées à une fréquence d'oscillation, et donc les premières vérifications expérimentales de la relation de dispersion [35, 69].

Au cours de cette thèse, nous avons exclusivement utilisé le générateur d'ondes internes développé au laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon par Gostiaux *et al.* [37], caractérisé par Mercier *et al.* [67] et amélioré par Bordes [4], qui permet de ne générer qu'un seul des quatre faisceaux. Le principe général de ce générateur est de transformer, à l'aide d'un arbre à cames, une rotation, générée par un moteur, en un mouvement oscillant horizontal<sup>2</sup>, dont l'amplitude et la phase sont réglables à l'aide de disques percés amovibles.

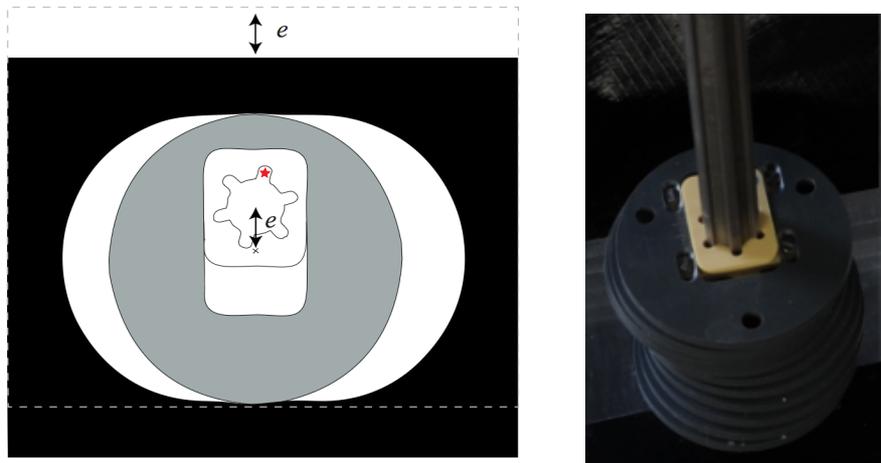


FIGURE 2.3 – À gauche : représentation du système de disques et de plaques permettant de transformer un mouvement de rotation en une translation unidirectionnelle. La partie blanche peut être déplacée afin de changer l'excentricité  $e$  et donc l'amplitude de la translation de la plaque noire. À droite : photo d'un empilement de disques sur un arbre.

La partie gauche de la figure 2.3 représente un disque (partie grise et blanche) que l'on place sur l'axe de rotation. La position de la partie blanche étant réglable, l'axe de rotation

2. ou vertical suivant la disposition du générateur.

ne passe pas nécessairement par le centre du disque gris. Lors de la mise en rotation, la plaque noire permet d'obtenir un mouvement oscillatoire unidirectionnel, dont l'amplitude correspond à l'écart entre le centre du disque et l'axe de rotation. Ce système permet ainsi d'obtenir un déplacement horizontal oscillant d'amplitude  $e$ , variant entre 0 et 1.5 cm.

Le deuxième atout de ce système est de pouvoir déphaser les disques entre eux. Dans ce cas pour une même excentricité, chaque plaque effectuera le même déplacement mais déphasé dans le temps. Par exemple, il est simple de générer un déphasage de  $60^\circ$  entre deux plaques successives. En effet, l'arbre possède 6 ergots disposés tous les  $60^\circ$ . Ainsi pour obtenir ce déphasage, il suffit de décaler l'encoche étoilée (figure 2.3) d'un ergot sur l'arbre (sur la droite ou sur la gauche) par rapport au disque précédent.

Pour plus de flexibilité, nous avons fait réaliser par l'atelier de Mécanique du Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon, plusieurs jeux de disques permettant d'obtenir différents déphasages. Nous disposons ainsi de trois types de disques présentés sur la figure 2.4 :

- le disque A, dont l'encoche signalée par une étoile est alignée avec la direction de translation
- le disque B dont l'encoche étoilée est décalée d'un angle de  $15^\circ$  par rapport à la direction de translation, rendant ce disque non symétrique par rapport à la direction de translation
- le disque C dont l'encoche étoilée est décalée d'un angle de  $30^\circ$  par rapport à la direction de translation.

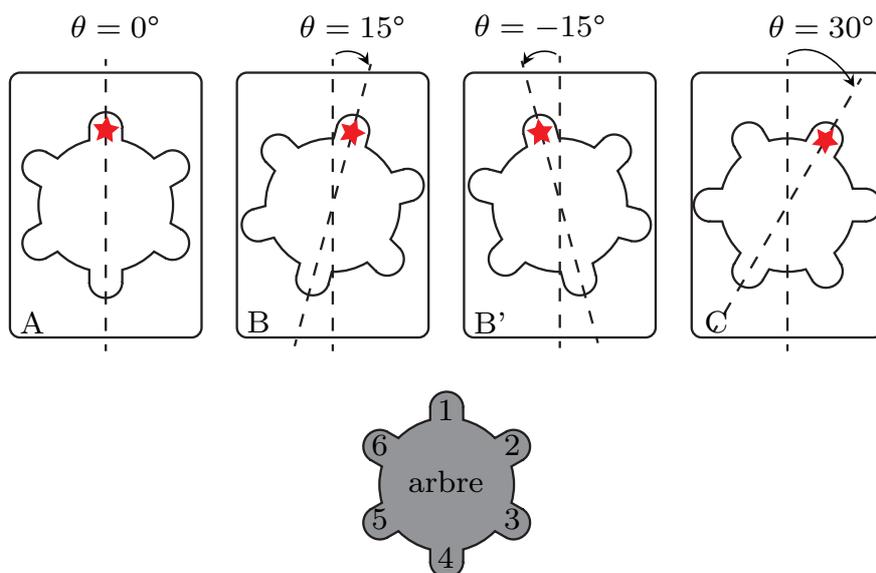


FIGURE 2.4 – Représentation des 3 jeux de disques disponibles. B' est obtenu en retournant le disque B.  $\theta$  est l'angle entre la direction d'oscillation de la plaque et l'encoche la plus proche. En bas : Numérotation des ergots de l'arbre à came.

### Génération d'onde plane

Le dispositif décrit précédemment permet d'imposer des conditions limites de vitesse au fluide stratifié. Selon la configuration expérimentale, la condition limite peut porter soit sur la composante horizontale soit sur la composante verticale en positionnant le générateur respectivement verticalement ou horizontalement. Dans le cas d'une onde plane, les deux

composantes de la vitesse ont pour expressions

$$u = \Psi_0 m \sin(\omega t - \ell x - mz) , \quad (2.11)$$

$$v = -\Psi_0 \ell \sin(\omega t - \ell x - mz) . \quad (2.12)$$

Ainsi, si l'on place le générateur verticalement, nous imposons la vitesse horizontale qui a pour expression en  $x = 0$

$$u = \Psi_0 m \sin(\omega t - mz) . \quad (2.13)$$

Nous remarquons alors que pour chaque plaque, la vitesse est oscillante, d'amplitude  $\Psi_0 m$ , mais que toutes ces vitesses sont déphasées en fonction de la position.

La pulsation est imposée par la vitesse de rotation de l'arbre, mais la dépendance spatiale est obtenue à l'aide des déphasages entre les disques. Le tableau 2.1 donne les différents empilements de disques possibles permettant de réaliser une longueur d'onde pour les cinq ondes planes que l'on peut générer avec ce système.

$\lambda = 3$	A(1) A(3) A(5)
	B(1) B(3) B(5)
	C(1) C(3) C(5)
$\lambda = 6$	A(1) A(2) A(3) A(4) A(5) A(6)
	B(1) B(2) B(3) B(4) B(5) B(6)
	C(1) C(2) C(3) C(4) C(5) C(6)
$\lambda = 8$	A(1) B(2) C(3) B'(3) A(4) B(5) C(6) B'(6)
$\lambda = 12$	A(1) C(2) A(2) C(3) A(3) C(4) A(4) C(5) A(5) C(6) A(6) C(1)
	B(1) B'(1) B(2) B'(2) B(3) B'(3) B(4) B'(4) B(5) B'(5) B(6) B'(6)
$\lambda = 24$	A(1) B'(1) C(2) B(2) A(2) B'(2) C(3) B(3) A(3) B'(3) C(4) B(4) . . . .

TABLE 2.1 – Empilement des disques à réaliser pour obtenir une longueur d'onde de 3, 6, 8, 12 ou 24 disques. Une ligne du tableau correspond à une manière de réaliser la longueur d'onde. La lettre correspond au type de disque à utiliser et le chiffre entre parenthèse à l'ergot sur lequel l'encoche étoilée doit être placée. Dans le cas de  $\lambda = 24$ , seule la moitié de la longueur d'onde a été décrite. La seconde moitié est obtenue avec le même enchaînement de disque en remplaçant  $j$ , le numéro de l'ergot, par  $j + 3$  modulo 6.

### Génération d'un mode vertical

Nous avons vu au cours du paragraphe 1.2.3 qu'un mode-1 est une superposition de deux ondes planes, permettant d'obtenir une onde stationnaire suivant la verticale (et donc sur toute la hauteur du fluide) mais propagative suivant l'horizontale. Nous avons également vu que le champ de vitesse est de la forme

$$u = u_0 \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) \cos(\omega t - \ell x) , \quad (2.14)$$

$$w = w_0 \cos\left(\frac{\pi}{H}z\right) \sin(\omega t - \ell x) , \quad (2.15)$$

avec  $H$  la hauteur du fluide, et  $\ell$  la composante horizontale du vecteur d'onde déduit de  $\omega$  et de  $m = \pi/H$  en utilisant la relation de dispersion des ondes internes.

Si l'on place le générateur verticalement, en  $x = 0$ , nous imposons la vitesse horizontale au fluide. Cette vitesse est une fonction sinusoidale du temps dont l'amplitude varie avec

la hauteur. Cependant, le sinus change de signe en  $z = 0$ , ce qui équivaut à un déphasage de  $\pi$  entre la partie des  $z$  négatifs et la partie des  $z$  positifs. Il suffit alors d'utiliser des disques de même phase, de changer l'excentricité de chaque disque de sorte à obtenir le profil d'une demi-période d'un sinus et de changer la phase en  $z = 0$  afin d'imposer les conditions limites d'un mode-1.

Il est également possible de générer des modes d'ordre supérieur, en prenant garde aux différents changements de phase.

Finalement, ce dispositif permet de générer différents types d'ondes internes : des ondes planes au mode vertical en passant par des faisceaux auto-similaires tels que le faisceau de Thomas-Stevenson [67] non détaillé ici.

## 2.3 Observation des ondes internes

Désormais, nous disposons d'un fluide linéairement stratifié et d'un générateur capable d'imposer les conditions limites adéquates à la propagation d'ondes internes. Il ne reste alors plus qu'à observer la propagation de ces ondes. En réalité, cette dernière étape n'est pas aussi simple que l'observation d'ondes de surface ou d'ondes à l'interface entre deux couches de fluides. Dans un fluide continûment stratifié, les ondes internes se propagent dans l'ensemble du fluide et il a fallu attendre l'amélioration des outils informatiques pour parvenir à effectuer des mesures quantitatives sur ces ondes. Les différentes méthodes, que nous allons détailler dans les paragraphes suivants, permettent de réaliser ces observations.

### 2.3.1 Vélométrie par Imagerie de Particules

La technique de Vélométrie par Imagerie de Particules (PIV) est une technique permettant de mesurer le champ de vitesse d'un écoulement. Pour cela, des particules de verre réfléchissantes sont introduites dans le fluide<sup>3</sup> et sont éclairées par une nappe laser. Les particules de PIV sont entraînées par les mouvements de fluide, marquant ainsi les lignes de courant de l'écoulement. Ces particules sont légèrement plus denses que le fluide ( $\rho_p = 1.1 \text{ kg}\cdot\text{L}^{-1}$ ), elles sédimentent donc au cours des expériences. Cependant, la vitesse de sédimentation reste faible devant les vitesses de déplacement engendrées par les ondes internes, ce qui permet de négliger cet effet.

La position des particules au cours du temps est repérée par une caméra. Deux images successives sont comparées afin de déterminer leur déplacement et d'en déduire ainsi la vitesse du fluide. Nous utilisons, pour cela, un algorithme de PIV [85]. Chaque image est divisée en blocs de taille réglable. La taille des blocs est choisie en tenant compte de la taille des particules et de l'ensemencement du fluide afin que dans chaque bloc un motif aisément reconnaissable soit formé par les particules. L'objectif de l'algorithme est alors de parvenir à déterminer la position du motif dans l'image suivante. Pour cela des coefficients de corrélation sont calculés, et le maximum de ces coefficients signale la nouvelle position du motif. Cet algorithme permet ainsi de déterminer le déplacement des particules pendant un temps  $\Delta t$  défini par la fréquence d'acquisition des images.

Deux paramètres sont donc importants pour cette technique d'observation. Tout d'abord, l'ensemencement du fluide en particules de PIV doit être suffisant pour avoir assez de particules par blocs lors de l'analyse. Ensuite, l'intervalle de temps entre deux images doit être

---

3. Soit les particules de PIV sont réparties dans les deux bacs de remplissage avant la mise en place de la stratification, soit le fluide stratifié estensemencé par le dessus et la diffusion et le poids des particules permettent d'obtenir un ensemencement homogène au bout de quelques heures.

contrôlé précisément pour remonter aux valeurs de vitesse. Ces deux paramètres doivent donc faire l'objet d'une attention particulière lors de nos expériences.

### 2.3.2 Schlieren Synthétique

La concentration en sel affecte aussi bien la densité du fluide que son indice optique. La technique de Schlieren Synthétique exploite cet impact du sel sur l'indice optique [17, 90]. La traversée d'un milieu non-homogène en indice optique, s'accompagne d'une déviation du rayon lumineux vers les zones de plus fort indice. Pour des expériences bi-dimensionnelles, il est possible de remonter aux gradients d'indice optique par une mesure de l'angle de déviation. Le montage expérimental permettant ces mesures est décrit sur la figure 2.5.

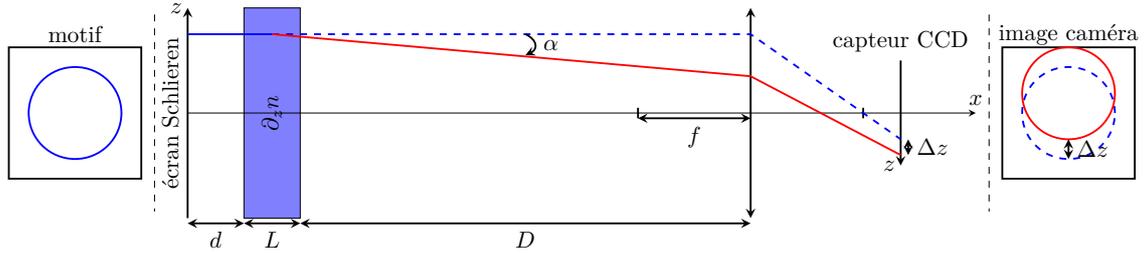


FIGURE 2.5 – Schéma du dispositif expérimental pour l'acquisition des images de Schlieren Synthétique. Les rayons lumineux sont issus d'un écran lumineux devant lequel est placé un motif (ici un cercle). La caméra est modélisée par l'association d'une lentille de distance focale  $f$  et d'un capteur CCD. La mise au point est faite sur l'écran Schlieren. Le fluide stratifié en indice optique décale le cercle de  $\Delta z$  vers le haut, l'image sur le capteur CCD étant inversée par rapport à l'objet.

Une caméra, modélisée par l'association d'une lentille de distance focale  $f$  et d'un capteur CCD, filme un motif placé au niveau d'un écran lumineux, que nous nommerons par la suite l'écran Schlieren. Entre cet écran et la caméra est placée une cuve remplie d'un fluide stratifié en densité et donc en indice optique, déviant les rayons lumineux issus du motif d'un angle  $\alpha$ . Cet angle est relié au gradient d'indice optique par la relation

$$\alpha = \frac{L}{n} \frac{dn}{dz}, \quad (2.16)$$

$$= \frac{L}{n} \frac{dn}{d\rho} \frac{d\rho}{dz}. \quad (2.17)$$

Nous pouvons noter que sur la gamme de concentration en sel considérée, l'indice optique de la solution est une fonction affine de la densité avec  $d\rho/dn = 4.1 \text{ g}\cdot\text{cm}^3$ .

Par conséquent, cette déviation provoque un déplacement apparent  $\Delta z$  de l'image du motif sur la plaque CCD de la forme

$$\Delta z = \alpha f \frac{d + L/2}{d + L + D - f}. \quad (2.18)$$

Cette déviation est obtenue dans l'approximation des faibles angles et en comparant la position verticale du cercle bleu obtenue sans le gradient d'indice et la position verticale du cercle rouge obtenue avec le gradient d'indice.

Finalement, la mesure du déplacement en pixel,  $\Delta p = \Delta z/r$  où  $r$  est la taille physique d'un pixel, permet de remonter au gradient de densité  $\partial_z \rho$  par la relation

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = r \Delta p \frac{d\rho}{dn} \frac{n}{L} \frac{d + L + D - f}{f(d + L/2)}. \quad (2.19)$$

Lors de la propagation des ondes internes, le gradient de densité est localement modifié, provoquant une modification locale du gradient d'indice optique et donc une modification du motif observé par la caméra. La comparaison d'une image à un instant  $t$  à une image du fluide au repos (pas d'ondes internes) permet de déterminer les modifications locales du gradient de densité induit par les ondes internes. Nous avons ainsi accès aux quantités

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = \frac{\partial \rho(t)}{\partial x} - \frac{\partial \rho(0)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = \frac{\partial \rho(t)}{\partial z} - \frac{\partial \rho(0)}{\partial z} . \quad (2.20)$$

La mesure du déplacement du motif entre ces deux instants repose sur le même algorithme que pour la PIV. Ainsi, afin d'avoir une bonne résolution des déplacements de fluide, le motif utilisé est un ensemble de points sombres placés aléatoirement.

Finalement, cette technique, très simple à mettre en place, permet des mesures précises<sup>4</sup> de gradient de densité induit par les ondes internes de gravité.

### 2.3.3 Fluorescence Induite par Laser

La technique de Fluorescence Induite par Laser (LIF) est une technique non intrusive de mesure de concentration au sein d'un écoulement. Cette technique repose sur l'utilisation d'un composé fluorescent. La lumière réémise par le colorant n'a pas la même longueur d'onde que la lumière excitatrice et son intensité dépend de la concentration en colorant. La mesure de l'intensité lumineuse réémise permet donc de remonter aux valeurs de concentrations en colorant. Nous utiliserons pour nos expériences la Rhodamine 6G dont les spectres d'absorption et de réémission sont donnés sur la figure 2.6.

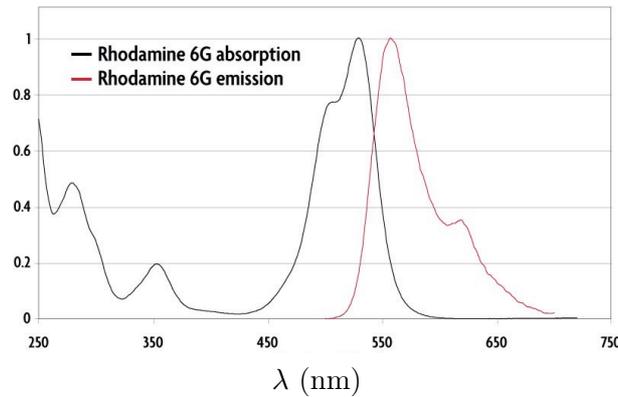


FIGURE 2.6 – Spectre d'absorption de la Rhodamine 6G en noir et de réémission en rouge en fonction de la longueur d'onde.

Nous observons que la longueur d'onde de fluorescence est différente de la longueur correspondant au maximum d'absorption. Cette propriété permet alors de pouvoir différencier, à l'aide de filtre optique, la lumière issue du colorant de la lumière excitatrice.

Cette technique a été largement utilisée pour l'étude de jets turbulents dans des fluides homogènes [72] ou stratifiés [19], mais peu de travaux ont été effectués afin de connaître la densité en chaque point d'un fluide continûment stratifié. Une première approche, effectuée par Hopfinger *et al.* [41], consiste à placer des lignes de colorants uniformément réparties dans le fluide stratifié. Cette technique permet ainsi de visualiser les déplacements des isopycnes très facilement et donc de détecter la présence d'ondes de gravité, mais ne permet pas de remonter à des valeurs de concentrations et donc de densité en tout point du fluide.

4. tant que l'écoulement reste bi-dimensionnel et linéaire.

Plus récemment Troy *et al.* [93], ou encore Odier *et al.* [76] ont adapté cette technique dans l'étude d'écoulement de fluides composés de plusieurs couches de densités différentes. Nous proposons, dans le chapitre 6, une adaptation de cette technique à des fluides continûment stratifiés permettant la mesure de la densité du fluide en chaque point au cours du temps.



Deuxième partie :

L'Instabilité Paramétrique  
Sous-harmonique



## Introduction

Un ingrédient essentiel de la circulation thermohaline est le mécanisme par lequel l'eau plus dense produite aux pôles peut être remontée en surface afin de boucler la circulation globale. La remontée de ces eaux vers la surface s'accompagnant d'une augmentation de l'énergie potentielle, un apport énergétique est donc indispensable. Cet apport est assuré par le mélange turbulent, induit principalement par le vent et les marées [70, 71]. Un moyen possible de passer des mouvements d'ensemble au mélange turbulent est le déferlement des ondes internes de gravité [86]. Ces ondes présentes dans les océans permettent un transfert des grandes échelles vers les petites échelles, où l'énergie est en partie dissipée sous forme de chaleur et en partie convertie en énergie potentielle par le mélange diapycnal, *i.e.* à travers les isopycnes.

Les mécanismes détaillés de dissipation de l'énergie des ondes internes de gravité sont toujours débattus. L'instabilité paramétrique sous-harmonique est l'un des processus majeurs [1, 60] proposé en compétition avec la réflexion des ondes [18], la diffusion par des structures de grande taille [82] ou de petite taille au fond des océans [48, 54, 79]. L'importance relative de ces quatre processus de dissipation doit être estimée et comparée précisément. La description la plus réaliste est sans doute une combinaison de ces différents processus, mais l'approche usuelle du physicien (identification des processus en jeux puis analyse de chacun indépendamment les uns des autres) est certainement appropriée ici dans un premier temps.

L'instabilité paramétrique sous-harmonique (PSI) est le mécanisme résonant par lequel une onde primaire est instable pour des perturbations infinitésimales, transférant de l'énergie à deux ondes secondaires par le terme non-linéaire quadratique de l'équation de Navier-Stokes. Ces trois ondes satisfont des conditions de résonance temporelle et spatiale suivante

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_1 \pm \omega_2 , \\ \vec{k}_0 &= \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 .\end{aligned}$$

Initialement, ces résonances non-linéaires d'ondes ont été étudiées uniquement pour les ondes de gravité de surface faisant intervenir quatre ondes de fréquences et de vecteurs d'ondes différentes. Dans les années 60, McGoldrick [64] montre que des interactions triadiques peuvent se produire dans le cas d'ondes capillaires, en raison du terme dû à la tension superficielle dans la relation de dispersion des ondes. Il détermine par ailleurs l'expression des amplitudes des différentes ondes en jeu dans le cas visqueux et non-visqueux. Dans le même temps, Ball [2] montre que ces interactions peuvent être la source d'ondes internes de gravité. En effet, dans un fluide composé de deux couches de fluides de densité différentes, une onde capillaire de surface peut se déstabiliser sous la forme d'une nouvelle onde capillaire et d'une onde de gravité se propageant au niveau du saut de densité. Il est possible de se convaincre de ce fait par un raisonnement graphique représenté sur la figure 1. Sur cette figure sont représentées les relations de dispersion d'une onde de gravité (cône centré sur le point A) et d'une onde capillaire (cône centré sur 0), dans les coordonnées  $\nu$ ,  $m_x$  et  $m_y$  correspondant à la fréquence de l'onde et aux composantes horizontales du vecteur d'ondes. Le point A représentant l'onde primaire, l'intersection des deux cônes fournit les solutions aux conditions de résonance temporelle et spatiale. Dans le cas présenté sur la figure nous voyons qu'il est possible de générer des ondes de gravité interne à partir d'une onde de surface. Ball développe par ailleurs les équations permettant d'aboutir à l'évolution temporelle des amplitudes des trois ondes mises en jeu.

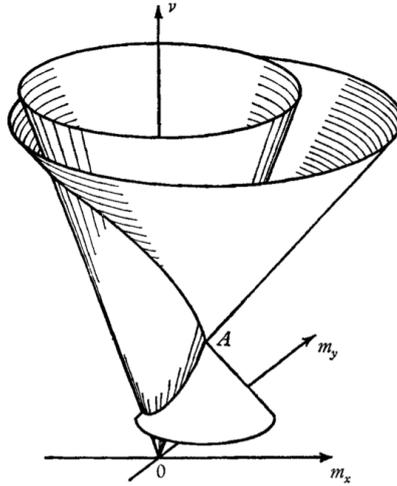


FIGURE 1 – Représentation schématique des conditions de résonance dans l'espace  $(\nu, m_x, m_y)$ , avec  $\nu$  la fréquence des ondes et  $(m_x, m_y)$  les composantes du vecteur d'onde. Une onde de surface représentée en A, peut se déstabiliser en une onde de surface, dont la relation de dispersion est représentée par le cône centré en 0, et en une onde interne, dont la relation de dispersion est représentée par le cône centré en A. Cette interaction n'est possible qu'au niveau de l'intersection des deux cônes, formant ainsi l'espace des solutions du problème (extrait de [2]).

Par ce travail, les ondes internes de gravité font leur première apparition sur le sujet de couplage non-linéaire. Par la suite Davis [20] puis Hasselman [38] montrent que "le couplage non-linéaire entre deux composantes infinitésimales 1 et 2 et une composante finie 0 dont les vecteurs d'ondes et les fréquences vérifient les conditions de résonance est instable pour la somme et neutralement stable pour la différence" toujours pour des ondes internes se propageant au niveau de saut de densité.

Il est alors naturel de chercher à étudier le couplage d'ondes internes de gravité dans les fluides continûment stratifiés. Les premières études dans de tels fluides ont été effectuées par McEwan à la fin des années 60. Il est ainsi l'un des premiers à développer les calculs théoriques des interactions triadiques pour des ondes internes et accompagne ces prédictions par des mesures expérimentales [61, 62, 63]. Il étudie dans un premier temps la propagation et la déstabilisation d'un mode vertical. Le mode est créé en bord de cuve par une planche oscillant faiblement autour d'un axe horizontal situé à mi-hauteur de la cuve. La propagation des ondes est observée soit par des lignes de colorant régulièrement réparties dans le fluide stratifié, repérant ainsi les lignes d'isodensité, soit par ombroscopie. La figure 2 tirée de [61] montre la déstabilisation du mode observée par ombroscopie. Nous observons clairement l'apparition de nouveaux motifs sur le mode primaire.

Ces expériences ont ensuite été reprises par Benielli et Sommeria en 1998 [3], le mode étant, cette fois-ci, généré par des oscillations de l'ensemble de la cuve. Dans ce cas, la fréquence des oscillations de la cuve doit être soigneusement ajustée afin d'obtenir les modes propres du fluide et éviter ainsi la superposition de plusieurs modes. La visualisation des ondes par des lignes de colorant est accompagnée d'une mesure locale de la densité par une sonde conductimétrique. Ces mesures mettent en évidence un seuil d'apparition de l'instabilité légèrement supérieur aux prédictions. En raison de la technique d'observation des ondes, il est cependant difficile d'obtenir des mesures quantitatives des ondes secondaires.

Dans le même temps, des simulations numériques de modes sont effectuées par Bouruet-Aubertot *et al.* [8]. Ces simulations de l'évolution temporelle d'un mode dans un fluide

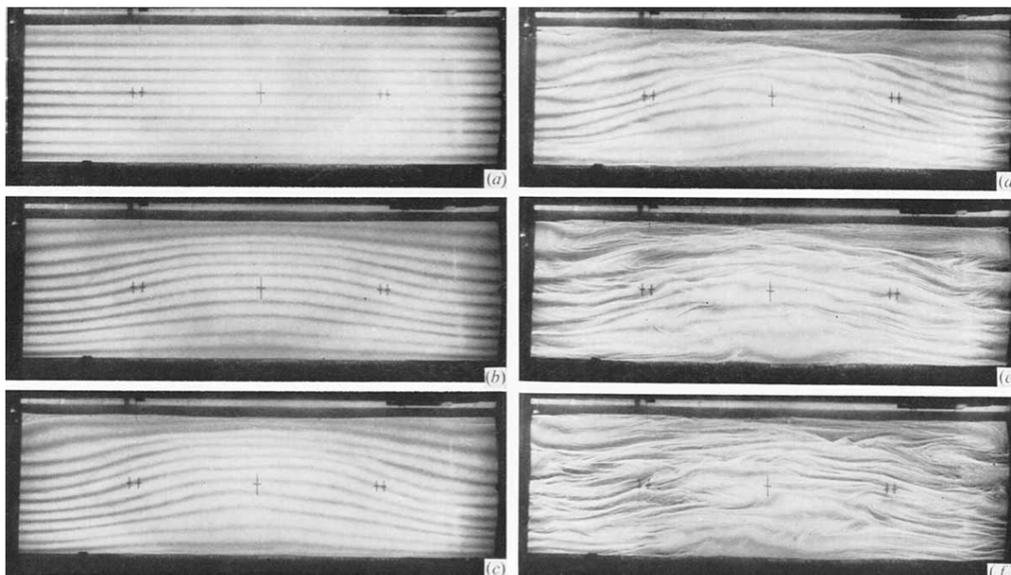


FIGURE 2 – Instantanées de la propagation d’un mode pour  $t = 0$  (a),  $t = 20T_0$  (b),  $t = 45T_0$  (c),  $t = 55T_0$  (d),  $t = 60T_0$  (e),  $t = 65T_0$  (f) (extrait de [61]).

stratifié permettent des mesures de taux de croissance et des vecteurs d’ondes des ondes secondaires et de comparer ces mesures à la théorie non-visqueuse. Par ailleurs, au cours de ce travail, Bouruet-Aubertot *et al.* représentent les solutions des conditions de résonance temporelle et spatiale sous la forme d’une courbe dans le plan défini par la composante horizontale  $\ell$  et verticale  $m$  du vecteur d’onde d’une des deux ondes secondaires. Cette représentation, plus simple que la représentation en trois dimensions proposée par Ball, sera réutilisée dans la suite de ce manuscrit (figure 3.5). Les taux de croissance pour le cas non-visqueux sont calculés en chaque point de la courbe de résonance, permettant ainsi de situer les maxima sur la courbe de résonance. Ce travail de simulation a ensuite été repris par Carnevale *et al.* [11] afin d’étudier l’évolution du spectre spatial au cours de temps, visualisant en particulier les transferts d’énergie entre les échelles.

Le travail expérimental sur les modes verticaux des ondes internes a récemment été repris par Joubaud *et al.* [49]. En effet le développement du générateur d’onde décrit à la section 2.2 permet d’imposer aisément les conditions limites correspondant à un mode vertical à amplitude et fréquence contrôlées. Dans ce travail, la propagation du mode est observé par la technique de Schlieren Synthétique permettant ainsi de remonter plus précisément que précédemment à des mesures de vecteurs d’ondes et de fréquences. Par ailleurs des outils de traitement de signaux, tels que le spectre temps-fréquence ou le filtrage de Hilbert, permettent de différencier clairement les différentes ondes présentes dans l’écoulement. En particulier la figure 3, extraite de [49], illustre parfaitement l’intérêt de ces traitements de filtrage. Cette figure présente le champs de gradient de densité à  $t = 40T$ , avec  $T$  la période du forçage, associé aux trois fréquences présentes dans l’écoulement. Nous pouvons ainsi observer trois ondes de vecteurs d’ondes et de direction de propagation différents. L’étude de la phase permet alors de remonter à des mesures de vecteurs d’ondes.

Ces dernières observations montrent un léger écart entre les prédictions théoriques et les observations expérimentales en ce qui concerne la valeur des vecteurs d’ondes secondaires. Par ailleurs, il apparaît que l’onde primaire ne se déstabilise pas en dessous d’une certaine valeur de fréquence, ce qui n’avait pas été signalé auparavant. Cependant, la question du

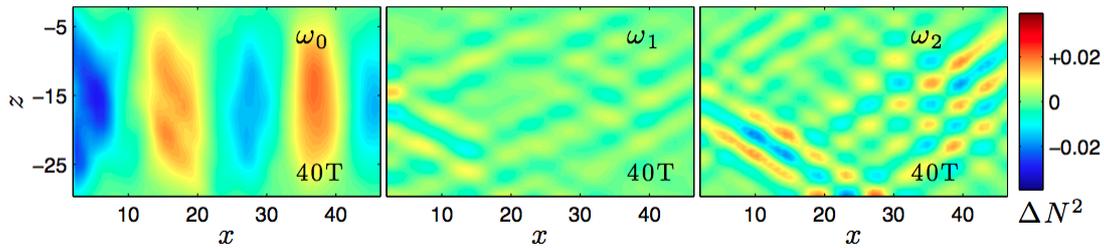


FIGURE 3 – Champs de gradient de densité filtrés aux trois fréquences intervenant dans l’interaction triadique à  $t = 40T$ , avec  $T$  la période de l’onde mère (extrait de [49]).

transfert d’énergie entre les ondes n’est pas abordée et l’impact de la fréquence et de l’onde mère sur la sélection des ondes secondaires n’est pas étudié.

Tous ces travaux ont à chaque fois pris pour sujet d’études des modes et non des ondes planes, objets qui sont pourtant utilisés pour la résolution des équations et la prédiction des ondes secondaires. Ce choix est essentiellement dû à la difficulté expérimentale de générer un faisceau d’onde plane monochromatique en fréquence ainsi qu’en longueur d’onde.

Les expériences sur des faisceaux d’ondes ont tout d’abord été effectuées par Mc Ewan en 1977 [63] puis repris par Clark et Sutherland en 2010 [13]. Ces expériences permettent d’observer par ombroscopie (McEwan) ou par Schlieren Synthétique (Clark) la déstabilisation d’un faisceau, généré par un disque oscillant. Par ailleurs, Clark accompagne ces expériences par des simulations numériques de faisceau d’ondes internes et observe également l’apparition de sous-harmoniques à la fréquence moitié de la fréquence primaire.

Ces expériences et simulations mettent donc en évidence qu’un faisceau composé de la superposition de plusieurs vecteurs d’ondes peut se déstabiliser par l’intermédiaire de l’instabilité paramétrique sous-harmonique. Ces travaux se rapprochent donc des prédictions par le fait d’étudier une onde plane, mais ne sont pas encore optimaux en raison de la non monochromaticité du faisceau généré par le disque oscillant.

Ainsi les premières études de cette instabilité sur une onde plane monochromatique furent des études numériques réalisées par Koudella *et al.* [53] en 2006. Dans ce travail, ils effectuent des simulations numériques d’une onde plane monochromatique d’extension infinie et déterminent ainsi les lieux privilégiés d’apparition de cette instabilité tout en observant les transferts d’énergie entre les différentes échelles.

Récemment, ce mécanisme d’interaction triadique a été observé dans un domaine assez proche des ondes internes de gravité : les ondes inertielles. Ces ondes, comme nous l’avons évoqué au cours de la première partie, se propagent dans les fluides stratifiés en quantité de mouvement, c’est à dire des fluides en rotation et sans stratification en densité. Les ondes inertielles possèdent des propriétés très proches de celles des ondes internes, tels que l’orthogonalité de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase, et une relation de dispersion liant une direction de propagation à la fréquence des oscillations. En 2012, Bordes *et al.* [5] effectuent ainsi une étude expérimentale de la PSI sur ces ondes inertielles. Cette étude a par ailleurs été possible grâce au générateur décrit dans la première partie permettant la génération contrôlée d’un faisceau d’ondes inertielles monochromatique et composé d’un seul vecteur d’onde. Les champs de vitesse obtenus par des mesures de PIV sont ensuite filtrés aux différentes fréquences afin de séparer les différentes ondes et de mesurer les vecteurs d’ondes associés. La comparaison de ces mesures aux prédictions dans le cas de la théorie visqueuse montre un très bon accord pour des fréquences de l’onde primaire supérieure à  $0.8f$  avec  $f$  le double de la fréquence de rotation de la table tournante. Pour des fréquences comprises entre  $0.65f$  et  $0.8f$  les prédictions et les mesures ne sont plus

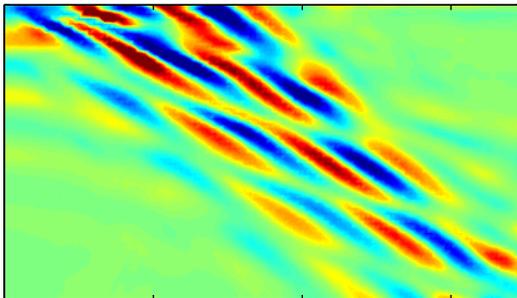
en accord et en dessous de ces fréquences, le faisceau primaire est stable contrairement aux prévisions. Pour expliquer ces différences avec la théorie, l'hypothèse d'une mauvaise génération de l'onde primaire est avancée. En effet, dans le cas des ondes inertielles, le fluide possède trois composantes de vitesses. Le générateur d'onde n'impose un déplacement au fluide que selon une direction. Il a alors été difficile de générer convenablement des faisceaux à différentes amplitudes et différentes fréquences. Il est alors naturel de chercher à effectuer la même étude dans le cas des ondes internes de gravité, les conditions limites imposées par le générateur étant plus conforme au cas des ondes internes de gravité en deux dimensions.

Nous présentons donc au cours de cette partie une étude expérimentale et bi-dimensionnelle de l'instabilité paramétrique sous-harmonique à l'aide de la technique de Schlieren Synthétique (ou Strioscopie Synthétique) dans le cas d'ondes internes de gravité monochromatique. Le premier chapitre de cette partie présentera donc les premiers résultats expérimentaux, confirmant fortement les observations de Bordes *et al.* [5]. Puis nous chercherons dans les chapitres suivants à expliquer les différences entre les observations expérimentales et les prévisions de la théorie pour une onde plane d'extension infinie.



---

# Observation expérimentale de l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique



Les ondes internes sont considérées comme un paramètre important dans la compréhension du mélange océanique et du transport de l'énergie. Plusieurs processus peuvent conduire au déferlement des ondes internes, impliquant généralement des interactions non linéaires entre ces ondes. Dans ce chapitre, nous allons étudier l'un de ces mécanismes : l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique (PSI). Cette instabilité fournit un processus efficace de transfert d'énergie des grandes vers

les petites échelles par la déstabilisation d'une onde plane primaire en deux ondes secondaires, de fréquences plus petites et de vecteurs d'ondes différents. Une onde interne, dans les conditions adéquates d'amplitude et de fréquence, pourra ainsi générer deux nouvelles longueurs d'ondes et transférer de l'énergie vers d'autres échelles. Il devient donc important de caractériser cette instabilité pour déterminer son rôle et son importance dans le mélange océanique.

Ce chapitre présente les premières observations expérimentales de cette instabilité sur une onde plane. Nous décrirons dans un premier temps le dispositif expérimental, puis nous verrons les outils à notre disposition permettant de mesurer les grandeurs caractéristiques de ces ondes. Enfin nous détaillerons la théorie de cette instabilité et nous comparerons les prédictions aux résultats expérimentaux. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans *Journal of Fluids Mechanics* [7].

### 3.1 Propagation d'ondes planes : observations expérimentales

#### 3.1.1 Dispositif expérimental

Une cuve de 160 cm de long et de 17 cm de large est remplie d'un fluide linéairement stratifié à l'aide de la méthode des deux bacs décrite au paragraphe 2.1.1. La pulsation de flottabilité est alors constante sur toute la hauteur du fluide. Une onde interne est produite à l'aide du générateur décrit au paragraphe 2.2. Dans le cas de l'expérience décrite ici, nous générons une onde plane de longueur d'onde horizontale de l'ordre de 8 cm (12 disques) et d'amplitude 5 mm<sup>1</sup>. Ce dispositif est placé à l'horizontale, à la surface du fluide stratifié, comme illustré sur le schéma de la figure 3.1.

Dans cette configuration le générateur impose un déplacement vertical au fluide, ainsi la condition limite du fluide portant sur la composante verticale de la vitesse s'écrit

$$w(x, z = 0, t) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t - 2\pi x/\lambda), \quad (3.1)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation d'excitation et  $a$  l'amplitude de déplacement des plaques. Cette amplitude reste constante sur deux longueurs d'ondes puis diminue progressivement, jusqu'à zéro, sur une demi longueur d'onde, afin d'éviter l'émission d'ondes internes parasites au niveau des extrémités du générateur.

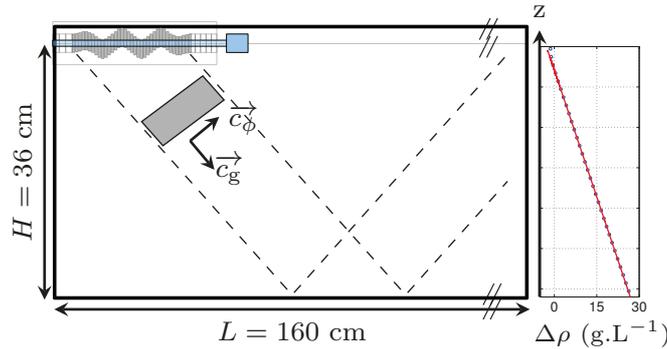


FIGURE 3.1 – Schéma du dispositif expérimental montrant le générateur d'ondes positionné horizontalement à la surface du fluide. Les lignes en pointillé marquent le domaine de propagation de l'onde se propageant de la gauche vers la droite. Les directions de propagation de la phase  $\vec{c}_\phi$  et de l'énergie  $\vec{c}_g$  sont également représentées. Le rectangle gris correspond à la zone dans laquelle s'effectue la mesure du taux de croissance du paragraphe 3.3.2. La courbe de droite montre une mesure de la densité  $\Delta\rho = \rho - 1000$  en fonction de la profondeur  $z$ . Les points correspondent aux mesures expérimentales et la droite est une modélisation linéaire.

Dans cette partie, le déplacement du fluide est mesuré à l'aide de la technique de Schlieren Synthétique décrite au paragraphe 2.3.2. De par son principe, cette technique est très simple à mettre en place et est particulièrement reproductible. En outre, elle permet d'être plus sensible aux petites longueurs d'ondes que la PIV. En effet, nous pouvons montrer à partir de la conservation de la matière 1.11 que la vitesse verticale  $w$  est proportionnelle à la dérivée temporelle de la densité. Si deux ondes, notées 0 et 1, se propagent dans un fluide stratifié, les amplitudes des champs de gradient de densité et des champs de vitesse

1. Les disques du générateur d'ondes ont une excentricité de 5 mm.

sont reliées par la relation suivante

$$\frac{\partial_x \rho_1}{\partial_x \rho_0} = \frac{\mathbf{k}_1 w_1}{\mathbf{k}_0 w_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial_z \rho_1}{\partial_z \rho_0} = \frac{\mathbf{k}_1}{\mathbf{k}_0} \left( \frac{\tan \theta_0}{\tan \theta_1} \right)^2 \frac{u_1}{u_0}. \quad (3.2)$$

Dans le cas de la PSI, nous attendons l'apparition d'ondes possédant des longueurs d'ondes plus petites que la longueur d'onde générée et dont les angles  $\theta$ , formés par la verticale et les vecteurs d'ondes, sont plus petits également. Ainsi les rapports  $\mathbf{k}_1/\mathbf{k}_0$  et  $\tan \theta_0/\tan \theta_1$  sont supérieurs à 1. La technique de Schlieren Synthétique est donc tout à fait indiquée.

### 3.1.2 Observations directes

Dans l'expérience présentée ici, une onde plane est générée à la pulsation  $\omega_0 = 0.74N$  avec une amplitude  $a = 0.5$  cm dans un fluide linéairement stratifié de pulsation de flottabilité  $N = 0.91$  rad·s<sup>-1</sup>. La figure 3.2(a) montre un instantané du champ de gradient vertical de densité obtenu après 10 oscillations du générateur d'ondes. L'onde générée est effectivement une onde plane, composée de 3 longueurs d'ondes, se propageant depuis le coin supérieur gauche vers le coin inférieur droit, tandis que la phase se propage perpendiculairement (du coin inférieur gauche au coin supérieur droit). Quarante oscillations plus tard, une forte perturbation de l'onde plane peut être observée sur la figure 3.2(b). Nous constatons ainsi l'apparition de structures plus petites que la longueur d'onde de l'onde primaire, et réparties sur tout le faisceau, y compris dans des zones où il n'y avait initialement aucun déplacement de fluide (par exemple le coin supérieur gauche de l'image).

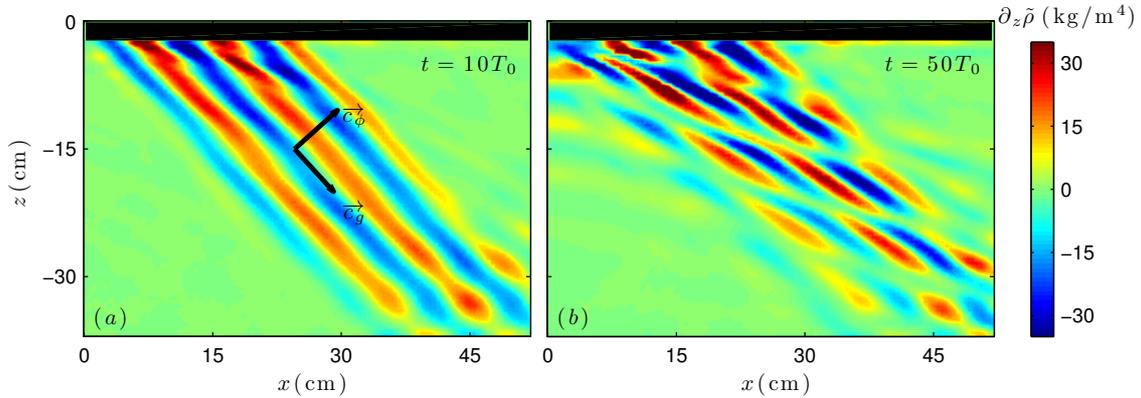


FIGURE 3.2 – Instantané du champ de gradient de densité à  $t = 10T_0$  (a) et  $t = 50T_0$  (b) où  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  est la période de l'onde primaire. L'onde se propage de la gauche vers la droite et du haut vers le bas. Sur la figure de gauche, les directions des vitesses de groupe  $\vec{c}_g$  et de phase  $\vec{c}_\phi$  sont indiquées. L'échelle de couleur est la même pour les deux images. La pulsation de flottabilité est  $N = 0.91$  rad·s<sup>-1</sup>, la pulsation de l'onde est  $\omega_0/N = 0.74$  et le déplacement des plaques du générateur d'ondes est de 0.5 cm.

### 3.1.3 Analyses

Les champs de gradient de densité mesurés sont analysés à l'aide d'un traitement temps-fréquence [28] calculé en chaque point du champ

$$S_r(\omega, t) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} du \partial_r \tilde{\rho}(u, x, z) e^{i\omega u} h(t-u) \right|^2 \right\rangle_{xz}, \quad (3.3)$$

### 3. OBSERVATION EXPÉRIMENTALE DE L'INSTABILITÉ PARAMÉTRIQUE SOUS-HARMONIQUE

où  $h$  représente une fenêtre de lissage de Hamming, homogène à une énergie, et  $r$  la composante  $x$  ou  $z$  du gradient de densité. Dans ce traitement de type transformée de Fourier à temps court, une grande (respectivement petite) fenêtre de lissage assure une bonne résolution fréquentielle (respectivement temporelle) du diagramme temps-fréquence obtenu. Afin d'optimiser le rapport signal sur bruit, les données sont moyennées sur toute la fenêtre d'observation. Dans la suite, nous ne considérerons que l'analyse du gradient vertical de la densité, mais les résultats sont les mêmes pour les gradients horizontaux.

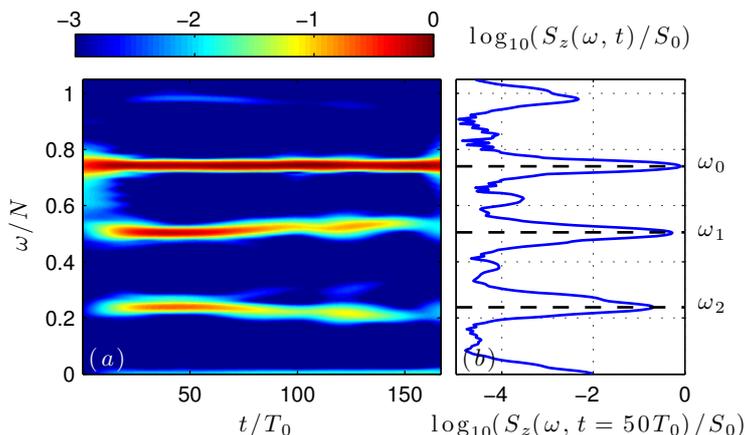


FIGURE 3.3 – (a) Spectre temps-fréquence  $S_z(\omega, t)$  du champ de gradient de densité. (b) Spectre fréquentiel  $S_z(\omega, t = 50T_0)$ . La grandeur  $S_0$  est la moyenne temporelle de la composante fréquentielle associée à l'onde mère  $S_0 = \langle S_z(\omega_0, t) \rangle_t$ .

La figure 3.3(a) montre le spectre temps-fréquence pour l'expérience présentée à la figure 3.2. Nous pouvons clairement observer que pour des temps courts ( $t < 12T_0$ ), seule la pulsation  $\omega_0/N = 0.74$  est présente. Cela correspond à l'onde produite par le générateur d'ondes, que nous appellerons par la suite *onde-mère* ou *onde primaire*. Après 10 oscillations, deux *ondes-filles*, de pulsations  $\omega_1/N = 0.50$  et  $\omega_2/N = 0.24$ , apparaissent et gagnent en amplitude. Afin de mieux voir ces trois pulsations, une coupe verticale pour  $t/T_0 = 50$  du spectre temps-fréquence est présentée sur la figure 3.3(b). Nous pouvons alors constater que ces trois pulsations satisfont à la relation  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ . Nous reviendrons sur ce comportement dans les prochains paragraphes. Il est intéressant de remarquer que les deux pulsations des ondes-filles semblent dériver lentement au cours du temps, tout en respectant la condition de résonance. Par ailleurs, les amplitudes des deux ondes filles semblent décroître après quelques instants.

Deux autres pulsations  $\omega/N = 0$  et  $\omega/N = 0.98$ , ont une contribution non nulle au signal. La première correspond d'une part à un courant moyen généré aux abords du générateur et d'autre part au courant moyen généré par la réflexion de l'onde sur le fond de la cuve. La seconde fréquence,  $\omega/N = 0.98$ , peut être attribuée à l'interaction non linéaire entre les ondes de fréquences  $\omega_2/N = 0.24$  et  $\omega_0/N = 0.74$ .

Afin d'extraire plus d'informations des différentes ondes impliquées dans cet écoulement, nous pouvons filtrer le champ de gradient de densité autour de chacune des trois pulsations  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Cette opération de filtrage est effectuée en utilisant une méthode basée sur la transformée de Hilbert<sup>2</sup>, développée par Mercier *et al.* [66]. Cette méthode consiste tout d'abord au passage dans l'espace de Fourier par une transformée de Fourier

2. La transformée de Hilbert permet d'associer à un signal de type  $A \cos \phi$ , le signal complexe  $A \exp(i\phi)$ . Nous pouvons ainsi déterminer aisément l'amplitude et la phase associée à la pulsation désirée.

en temps, puis un filtrage autour de la fréquence d'intérêt (positive ou négative) et enfin un retour dans l'espace temporel par une transformée de Fourier inverse sur le signal filtré. Le résultat de cette opération sur nos mesures est montré dans la figure 3.4. Les champs de gradient de densité filtrés associés à chaque fréquence sont placés sur la première ligne. En outre, pour les trois cas, un filtrage spatial est aussi effectué pour ne garder qu'un quadrant de l'espace des vecteurs d'onde, comme l'indique la zone grisée en haut de chaque colonne de la figure 3.4. Les vitesses de phase et de groupe étant orthogonales, la direction de propagation est déduite de celle du vecteur d'onde par une rotation de  $90^\circ$ , le sens de rotation étant tel que la composante verticale de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase sont de signes opposés. Pour les deux premières colonnes, cela correspond à une propagation de la gauche vers la droite et du haut vers le bas, tandis que pour la dernière colonne, l'onde se propage de la droite vers la gauche et du bas vers le haut. L'opération de filtrage permet de mettre clairement en évidence trois ondes distinctes, chacune associée à un angle de propagation différent. Comme mentionné précédemment, la transformée de Hilbert permet d'identifier la direction de propagation de chaque onde, montrant ainsi que l'onde de pulsation  $\omega_2$  se propage dans le sens contraire des deux autres ondes. Cela explique alors pourquoi nous observons des gradients de densité non nuls en dehors de l'onde mère dans le coin supérieur gauche de la figure 3.2(b).

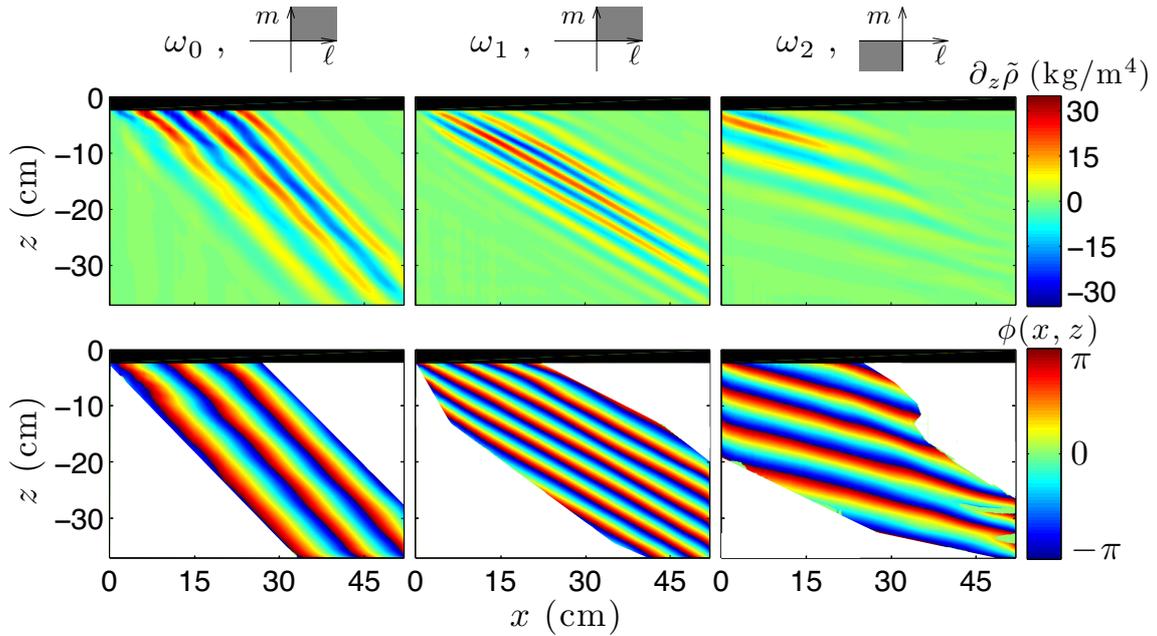


FIGURE 3.4 – Première ligne : onde primaire (gauche) et les deux ondes secondaires (centre et droite) obtenues par la transformée de Hilbert temporelle et spatiale, appliquée au champ de gradient de densité à  $t/T_0 = 50$ . Les zones grisées présentent le domaine  $(\ell, m)$  gardé lors du filtrage spatial pour chaque fréquence. La seconde ligne présente la phase associée à chaque fréquence. La phase n'est représentée que lorsque l'amplitude de l'onde est supérieure à 3% du maximum d'amplitude. Les paramètres expérimentaux sont  $N = 0.91$  rad·s $^{-1}$ ,  $\omega_0 = 0.74N$  et  $a = 0.5$  cm.

Cette technique d'analyse permet ainsi l'extraction de la phase  $\phi_i$  du signal pour une fréquence donnée. Cette phase est de la forme

$$\phi_i(t, x, z) = \omega_i t \pm \ell_i x \pm m_i z, \quad (3.4)$$

où  $(\ell_i, m_i)$  sont les composantes horizontales et verticales du vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ . La deuxième ligne de la figure 3.4 montre les phases pour chaque pulsation à  $t = 50 T_0$ . Nous observons des lignes parallèles à la direction de propagation pour chaque onde, correspondant à une phase se propageant dans la direction perpendiculaire. À un instant  $t$  fixé et à une position  $x$  (resp.  $z$ ), la phase est linéaire avec la position  $z$  (resp.  $x$ ). Les composantes  $\ell_i$  and  $m_i$  de chaque vecteur d'onde peuvent alors être obtenues en dérivant  $\phi_i(t, x, z)$  selon  $z$  (resp.  $x$ ). Une seconde méthode consiste à calculer un spectre 2D spatial des champs filtrés de la première ligne de la figure 3.4. Pour l'expérience présentée à la figure 3.2, nous obtenons  $(\ell_1 + \ell_2)/\ell_0 = 0.89 \pm 0.17$  and  $(m_1 + m_2)/m_0 = 0.99 \pm 0.07$ . Les erreurs de mesures sont obtenues en comparant les deux techniques de mesures. Il est intéressant de constater que les trois vecteurs d'ondes satisfont une condition de résonance spatiale :  $\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$  (en tenant compte des erreurs de mesures expérimentales). Nous pouvons remarquer que l'erreur la plus grande est sur la mesure de la composante horizontale  $\ell$  des vecteurs d'ondes en raison du fait que la projection des phases sur une horizontale ne permet de visualiser qu'une ou deux longueurs d'ondes, la direction de propagation des ondes filles étant plus horizontale que verticale. Le rapport signal sur bruit de la mesure est par conséquent moins bon.

Ces premières observations expérimentales permettent donc de constater que les deux ondes filles générées par l'onde primaire sont le résultat d'une résonance triadique. Nous allons dans les paragraphes suivants étudier analytiquement les conditions pour lesquelles une telle triade peut se développer.

## 3.2 Théorie de l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique

Afin d'obtenir une prédiction de l'évolution temporelle de l'amplitude des ondes secondaires et de l'onde primaire, nous partons des équations de conservation de la masse et de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide stratifié sans diffusion. Nous supposons ensuite que trois ondes de pulsations et de vecteurs d'ondes différents se propagent simultanément dans le fluide stratifié. La superposition de ces trois ondes fait alors apparaître des conditions de résonance qui permettront finalement d'obtenir un système d'équations différentielles régissant l'évolution temporelle de l'amplitude de ces trois ondes.

### 3.2.1 Développement

La dynamique bi-dimensionnelle (dans les coordonnées  $x, z$ ) d'un fluide dans l'approximation de Boussinesq est donnée par le système suivant

$$\partial_t b + J(b, \psi) = -N^2 \partial_x \psi, \quad (3.5)$$

$$\partial_t \Delta \psi + J(\Delta \psi, \psi) = \partial_x b + \nu \Delta^2 \psi, \quad (3.6)$$

où  $\psi$  est la fonction courant,  $b \equiv g\rho/\bar{\rho}$  la flottabilité et  $J$  un jacobien défini de la manière suivante :  $J(f_1, f_2) = \partial_x f_1 \partial_z f_2 - \partial_z f_1 \partial_x f_2$ . Le champ de vitesse peut s'exprimer en fonction de la fonction courant  $\vec{v} = (-\partial_z \psi, 0, \partial_x \psi)$  où la convention de signe choisie est celle fréquemment utilisée en océanographie.

Nous cherchons des solutions de la forme

$$b = \sum_{j=0}^2 R_j(t) e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t)} + c.c., \quad (3.7)$$

$$\psi = \sum_{j=0}^2 \Psi_j(t) e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t)} + c.c.. \quad (3.8)$$

En injectant ces solutions dans les équations (3.5) et (3.6), nous obtenons

$$\sum_{j=0}^2 [\dot{R}_j - i\omega_j R_j + iN^2 \ell_j \Psi_j] e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t)} + c.c. = -J(b, \psi), \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=0}^2 [-\mathbf{k}_j^2 (\dot{\Psi}_j - i\omega_j \Psi_j) - i\ell_j R_j - \nu \mathbf{k}_j^4 \Psi_j] e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t)} + c.c. = -J(\Delta\psi, \psi), \quad (3.10)$$

où  $\dot{R}$  représente la dérivée temporelle de  $R$ .

Le cas linéaire de l'équation (3.9) permet d'obtenir une relation liant  $R_j$  et  $\Psi_j$  appelée la relation de polarisation

$$R_j = \frac{N^2 \ell_j}{\omega_j} \Psi_j \quad \text{pour } j = 0, 1 \text{ ou } 2. \quad (3.11)$$

De la même manière, le cas linéaire et non visqueux de l'équation (3.10) permet de retrouver la relation de dispersion des ondes internes

$$\omega_j = s_j N \frac{|\ell_j|}{\sqrt{\ell_j^2 + m_j^2}}, \quad (3.12)$$

où  $s_j = \pm 1$  définit le signe de l'onde  $j$ .

Par ailleurs ce système linéaire est forcé par le terme de droite des équations (3.9) et (3.10). Après quelques manipulations, le jacobien peut se réécrire sous la forme

$$J(b, \psi) = \sum_{p=0}^2 \sum_{q \neq p} [(-\ell_p m_q + m_p \ell_q) R_p \Psi_q] e^{i[(\vec{k}_p + \vec{k}_q) \cdot \vec{r} - (\omega_p + \omega_q)t]} - [(-\ell_p m_q + m_p \ell_q) R_p \Psi_q^*] e^{i[(\vec{k}_p - \vec{k}_q) \cdot \vec{r} - (\omega_p - \omega_q)t]} + c.c., \quad (3.13)$$

$$J(\Delta\psi, \psi) = \sum_{p=0}^2 \sum_{q \neq p} [(\ell_p m_q - m_p \ell_q) \mathbf{k}_p^2 \Psi_p \Psi_q] e^{i[(\vec{k}_p + \vec{k}_q) \cdot \vec{r} - (\omega_p + \omega_q)t]} - [(\ell_p m_q - m_p \ell_q) \mathbf{k}_p^2 \Psi_p \Psi_q^*] e^{i[(\vec{k}_p - \vec{k}_q) \cdot \vec{r} - (\omega_p - \omega_q)t]} + c.c.. \quad (3.14)$$

Nous remarquons alors que si nous multiplions l'équation (3.9) par  $e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}$ , avec  $r = 0, 1$  ou  $2$ , il apparaît un terme sans exponentielle complexe. Par contre, dans la partie de droite, les termes sans exponentielles n'apparaissent que si les ondes vérifient les conditions de résonance spatiale et de résonance temporelle

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \quad (3.15)$$

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \quad (3.16)$$

En utilisant ces conditions de résonance et la relation de polarisation, le jacobien peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} J(b, \psi) = & -(\ell_1 m_2 - m_1 \ell_2) N^2 \left( \frac{\ell_1}{\omega_1} - \frac{\ell_2}{\omega_2} \right) \Psi_1 \Psi_2 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \\ & + (\ell_0 m_2 - m_0 \ell_2) N^2 \left( \frac{\ell_0}{\omega_0} - \frac{\ell_2}{\omega_2} \right) \Psi_0 \Psi_2^* e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t)} \\ & + (\ell_0 m_1 - m_0 \ell_1) N^2 \left( \frac{\ell_0}{\omega_0} - \frac{\ell_1}{\omega_1} \right) \Psi_0 \Psi_1^* e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)} \\ & + \text{NRT}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

où NRT sont les termes non résonants qui ne sont pas pertinents dans l'étude des résonances d'ondes. De la même manière, nous pouvons réécrire le second jacobien de l'équation (3.14)

$$\begin{aligned} J(\Delta\psi, \psi) = & (\ell_1 m_2 - m_1 \ell_2)(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)\Psi_1\Psi_2 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \\ & - (\ell_0 m_2 - m_0 \ell_2)(\mathbf{k}_0^2 - \mathbf{k}_2^2)\Psi_0\Psi_2^* e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t)} \\ & - (\ell_0 m_1 - m_0 \ell_1)(\mathbf{k}_0^2 - \mathbf{k}_1^2)\Psi_0\Psi_1^* e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)} \\ & + \text{NRT}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

En injectant ce résultat dans l'équation (3.10), nous obtenons trois relations entre  $\Psi_r$  et  $R_r$  pour chaque phase  $\exp[i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)]$  dans laquelle  $r = 0, 1$  ou  $2$

$$R_0 = \frac{i}{\ell_0} \left[ \mathbf{k}_0^2 (\dot{\Psi}_0 - i\omega_0 \Psi_0) + \nu \mathbf{k}_0^4 \Psi_0 - \gamma_0 \alpha_0 \Psi_1 \Psi_2 \right], \quad (3.19)$$

$$R_1 = \frac{i}{\ell_1} \left[ \mathbf{k}_1^2 (\dot{\Psi}_1 - i\omega_1 \Psi_1) + \nu \mathbf{k}_1^4 \Psi_1 - \gamma_1 \alpha_1 \Psi_0 \Psi_2^* \right], \quad (3.20)$$

$$R_2 = \frac{i}{\ell_2} \left[ \mathbf{k}_2^2 (\dot{\Psi}_2 - i\omega_2 \Psi_2) + \nu \mathbf{k}_2^4 \Psi_2 - \gamma_2 \alpha_2 \Psi_0 \Psi_1^* \right], \quad (3.21)$$

où  $\gamma_0 = +1$ ,  $\gamma_{1,2} = -1$  et  $\alpha_r = (\ell_p m_q - m_p \ell_q)(\mathbf{k}_p^2 - \mathbf{k}_q^2)$ , avec  $p, q, r = 0, 1, 2$  ou n'importe quelle permutation circulaire.

### 3.2.2 Variation lente de l'amplitude

Les résultats expérimentaux laissent à penser que l'amplitude  $\Psi$  varie lentement par rapport à la période de l'onde primaire. Nous pouvons donc considérer que  $|\dot{\Psi}_j| \ll |\omega_j \Psi_j|$ , ce qui conduit, par dérivation de l'équation (3.11), à

$$\dot{R}_j \approx \frac{\omega_j}{\ell_j} \mathbf{k}_j^2 \dot{\Psi}_j. \quad (3.22)$$

Finalement l'utilisation de cette approximation et des équations (3.19), (3.20) et (3.21) dans l'équation (3.9) permet d'obtenir les trois équations d'amplitude suivantes

$$\begin{aligned} \frac{i}{\ell_0} \left[ (N^2 \ell_0^2 - \omega_0^2 \mathbf{k}_0^2) \Psi_0 - 2i\omega_0 \mathbf{k}_0^2 \dot{\Psi}_0 - i\omega_0 \nu \mathbf{k}_0^4 \Psi_0 + i\omega_0 s_0 \alpha_0 (\Psi_1 \Psi_2) \right] \\ = (\ell_1 m_2 - m_1 \ell_2) N^2 \left( \frac{\ell_1}{\omega_1} - \frac{\ell_2}{\omega_2} \right) \Psi_1 \Psi_2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\ell_r} \left[ (N^2 \ell_r^2 - \omega_r^2 \mathbf{k}_r^2) \Psi_r - 2i\omega_r \mathbf{k}_r^2 \dot{\Psi}_r - i\omega_r \nu \mathbf{k}_r^4 \Psi_r + i\omega_r s_r \alpha_r (\Psi_0 \Psi_p^*) \right] \\ = -(\ell_0 m_p - m_0 \ell_p) N^2 \left( \frac{\ell_0}{\omega_0} - \frac{\ell_p}{\omega_p} \right) \Psi_0 \Psi_p^*, \end{aligned} \quad (3.24)$$

avec  $r = 1, 2$  et  $p = 2, 1$ .

Par ailleurs, chaque onde satisfait la relation de dispersion,  $N^2 \ell_r^2 = \omega_r^2 \mathbf{k}_r^2$ . Nous obtenons alors après quelques réarrangements

$$\dot{\Psi}_0 = \frac{\ell_1 m_2 - m_1 \ell_2}{2\omega_0 \mathbf{k}_0^2} \left[ s_0 \omega_0 (\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2) + \ell_0 N^2 \left( \frac{\ell_1}{\omega_1} - \frac{\ell_2}{\omega_2} \right) \right] \Psi_1 \Psi_2 - \frac{\nu}{2} \mathbf{k}_0^2 \Psi_0, \quad (3.25)$$

qui peut être simplifié sous la forme

$$\dot{\Psi}_0 = I_0 \Psi_1 \Psi_2 - \frac{\nu}{2} \mathbf{k}_0^2 \Psi_0. \quad (3.26)$$

Les mêmes calculs pour les ondes 1 et 2 mènent à

$$\dot{\Psi}_1 = -I_1 \Psi_0 \Psi_2^* - \frac{\nu}{2} \mathbf{k}_1^2 \Psi_1, \quad (3.27)$$

$$\dot{\Psi}_2 = -I_2 \Psi_0 \Psi_1^* - \frac{\nu}{2} \mathbf{k}_2^2 \Psi_2, \quad (3.28)$$

où

$$I_r = \frac{\ell_p m_q - m_p \ell_q}{2\omega_r \mathbf{k}_r^2} \left[ \omega_r (\mathbf{k}_p^2 - \mathbf{k}_q^2) + \ell_r N^2 \left( \frac{\ell_p}{\omega_p} - \frac{\ell_q}{\omega_q} \right) \right]. \quad (3.29)$$

### 3.2.3 Solutions

Supposons que  $\Psi_0$  correspond à l'onde primaire, que son amplitude est constante au cours du temps et que  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont négligeables<sup>3</sup> devant  $\Psi_0$ . Nous pouvons alors combiner les équations (3.27) et (3.28) pour obtenir une équation différentielle sur  $\Psi_1$

$$\ddot{\Psi}_1 = I_1 I_2 \Psi_0^2 \Psi_1 - \frac{\nu^2}{4} \mathbf{k}_2^2 \mathbf{k}_1^2 \Psi_1 - \frac{\nu}{2} (\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2) \dot{\Psi}_1. \quad (3.30)$$

Les solutions de l'équation (3.30) sont de la forme  $\Psi_{1,2}(T) = A_{1,2} e^{\sigma_+ T} + B_{1,2} e^{\sigma_- T}$  avec le taux de croissance  $\sigma_{\pm}$  de la forme

$$\sigma_{\pm} = -\frac{\nu}{4} (\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2) \pm \sqrt{\frac{\nu^2}{16} (\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)^2 + I_1 I_2 |\Psi_0|^2}. \quad (3.31)$$

Un bruit de faible amplitude induit ainsi la croissance de deux ondes secondaires. Finalement, une onde plane peut se déstabiliser par un mécanisme d'excitation paramétrique. Le taux de croissance de l'instabilité est une fonction des vecteurs d'ondes et des pulsations par l'intermédiaire de  $I_1$  et de  $I_2$ , mais dépend également de l'amplitude de l'onde primaire et de la viscosité  $\nu$ .

### 3.2.4 Lieu de résonance et taux de croissance

Par la suite, nous considérons que seule l'onde primaire  $\Psi_0$ , de pulsation donnée  $\omega_0$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_0(\ell_0, m_0)$  et de signe  $s_0$ , est présente initialement dans le système, tandis que  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont au niveau du bruit. Les deux ondes secondaires  $(s_1, \omega_1, \vec{k}_1)$  et  $(s_2, \omega_2, \vec{k}_2)$  forment une interaction triadique avec l'onde primaire et doivent donc être déterminées en utilisant les conditions de résonance (3.15) et (3.16). En utilisant la relation de dispersion des ondes internes, les conditions de résonance peuvent se réécrire sous la forme d'une seule équation

$$s_0 \frac{|\ell_0|}{\sqrt{\ell_0^2 + m_0^2}} = s_1 \frac{|\ell_1|}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2}} + s_2 \frac{|\ell_0 + \ell_1|}{\sqrt{(\ell_0 + \ell_1)^2 + (m_0 + m_1)^2}}. \quad (3.32)$$

Pour une onde primaire donnée  $(s_0, \ell_0, m_0)$ , les solutions de cette équation pour chaque combinaison de signes  $(s_0, s_1, s_2)$  sont une courbe dans le plan  $(\ell_1, m_1)$ , représentée sur la figure 3.5. Sans perdre en généralité, nous pouvons choisir le signe de l'onde primaire  $s_0 = +1$ . Il est alors nécessaire de considérer quatre combinaisons de signes pour le couple  $(s_1, s_2) : (-, -), (+, -), (-, +)$  et  $(+, +)$ . Nous pouvons immédiatement remarquer qu'il

3. Cette hypothèse est valable au moins au début de l'expérience où les ondes secondaires sont uniquement présentes sous forme de bruit de fond.

### 3. OBSERVATION EXPÉRIMENTALE DE L'INSTABILITÉ PARAMÉTRIQUE SOUS-HARMONIQUE

ne pourra y avoir de solutions pour la combinaison  $(-, -)$  car cela conduit à un terme strictement positif à gauche égal à la somme de deux termes négatifs à droite. Par ailleurs les combinaisons  $(+, -)$  et  $(-, +)$  sont neutralement stables, *i.e.* la partie réelle du taux de croissance  $\sigma$  est toujours nulle dans le cas non visqueux et négative sinon. Nous nous concentrerons donc sur la combinaison  $(+, +)$  dans la suite de cette section.

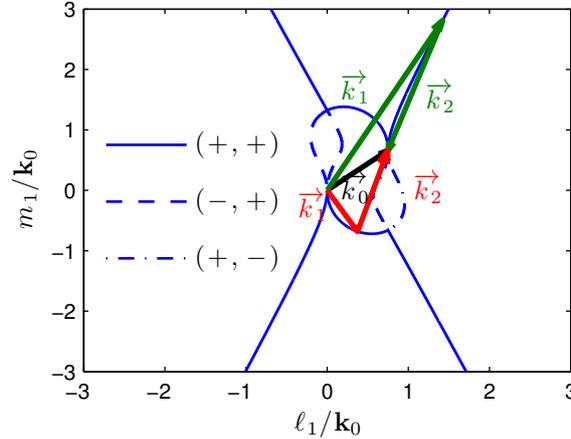


FIGURE 3.5 – Les courbes bleues représentent les positions  $(\ell_1, m_1)$  satisfaisant l'équation (3.32) pour les trois combinaisons de signes, avec un vecteur d'onde  $\vec{k}_0 = (\ell_0, m_0)$  donné. La courbe en trait continu représente le cas où le taux de croissance peut être positif, tandis que les courbes en traitillé représentent les cas où la partie réelle du taux de croissance est toujours négative dans le cas visqueux et nulle sinon. Deux exemples de triade résonante  $(\vec{k}_0, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$  sont placés sur la figure.

La figure 3.5 représente les solutions de l'équation (3.32) dans le plan  $(\ell_1, m_1)$ . Chaque point de la courbe en trait plein représente une position de l'extrémité du vecteur  $\vec{k}_1$  qui vérifie l'équation (3.32) avec  $s_0 = s_1 = s_2 = +1$ . Nous obtenons alors  $\vec{k}_2$  directement par construction. Il suffit en effet de fermer le triangle. Pour une valeur donnée de  $m_1$ , nous pouvons distinguer trois parties distinctes de la courbe  $(+, +)$  suivant que  $\ell_1/\ell_0 > 1$ ,  $\ell_1/\ell_0 < 0$  ou  $0 < \ell_1/\ell_0 < 1$ . La distinction de ces trois domaines sera utile pour la suite afin de localiser plus simplement la position du maximum de taux de croissance.

Les taux de croissance théoriques  $\sigma$  sont tracés en fonction de  $\mathbf{k}_1/\mathbf{k}_0$  et de  $\omega_1/\omega_0$  pour la combinaison  $(+, +)$  sur la figure 3.6. Les différents types de lignes permettent de distinguer les trois régions définies précédemment. Par ailleurs deux courbes sont tracées par région, correspondant aux différents signes de  $m_1$  (partie supérieure et inférieure de la figure 3.5).

Il est à noter que dans les deux figures, la courbe en trait plein ( $\ell_1/\ell_0 > 1$ ) et la courbe en traitillé ( $\ell_1/\ell_0 < 0$ ) atteignent le même maximum. De plus, nous pouvons remarquer sur la figure 3.6(b) que les maxima sont obtenus pour  $\omega_1 = 0.37 \omega_0$  (courbe en traitillé) et pour  $\omega_1 = 0.63 \omega_0$  (courbe en trait plein), deux pulsations dont la somme est égale à 1. Plus généralement, la figure 3.6(b) montre que les courbes en trait plein et en traitillé sont symétriques par rapport à  $\omega/\omega_0 = 0.5$ .

Ceci montre que si  $\vec{k}_1$  est sélectionné sur la courbe en trait plein,  $\vec{k}_2$  sera sélectionné sur la courbe en traitillé et inversement. En raison de cette symétrie, nous décidons pour la suite de définir le vecteur  $\vec{k}_1$  comme étant le vecteur sélectionné sur la courbe en trait plein et ainsi le vecteur  $\vec{k}_2$  est obtenu sur la courbe en traitillé. Par contre, nous pouvons

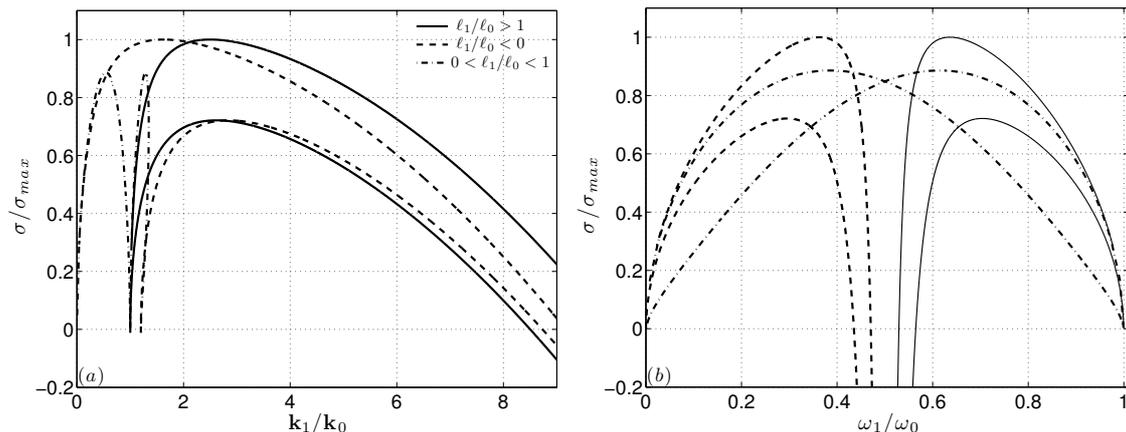


FIGURE 3.6 – Taux de croissance  $\sigma$  calculé à partir de l'équation (3.31), comme une fonction de la norme  $\mathbf{k}_1$  pour la figure (a) et comme une fonction de la pulsation  $\omega_1$  pour la figure (b). Les trois parties de la courbe (+, +) ont été superposées. Le vecteur d'onde  $\vec{k}_0$  est choisi arbitrairement tout comme son amplitude  $\Psi_0/\nu = 100$ . On rappelle que  $\mathbf{k}_0$  et  $\omega_0$  sont respectivement la norme du vecteur d'onde de l'onde primaire et sa pulsation.

remarquer que la courbe constituée de traits et de points possèdent deux maxima. Les deux ondes filles sont dans ce cas sélectionnées dans la même zone ( $0 < l_1/l_0 < 1$ ).

Pour toutes ces courbes, les taux de croissance deviennent négatifs lorsque  $\mathbf{k}_1 \rightarrow \infty$  en raison de la viscosité qui dissipe les petites longueurs d'ondes. Il est à noter que le taux de croissance est positif pour un grand nombre de vecteurs d'ondes et que la courbe est plate au niveau du maximum, ce qui tend à montrer que cette instabilité n'est pas très sélective dans ce régime de paramètres. Les valeurs de  $\mathbf{k}_1$  correspondant aux grandes valeurs de taux de croissance sont de l'ordre du nombre d'onde  $\mathbf{k}_0$  de l'onde mère, indiquant que la viscosité joue un rôle significatif dans la sélection de la triade résonante, en empêchant les grands nombres d'ondes d'apparaître. Pour la pulsation considérée, le taux de croissance maximal est obtenu pour  $\mathbf{k}_1 = 2.5 \mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{k}_2 = 1.62 \mathbf{k}_0$ .

### 3.3 Comparaison à l'expérience

#### 3.3.1 Vecteurs d'ondes

Au cours du paragraphe 3.1, nous avons observé que les valeurs expérimentales de pulsations et de vecteurs d'ondes satisfont aux conditions de résonance spatiale (3.15) et temporelle (3.16). Le développement théorique effectué au paragraphe 3.2 nous donne la dépendance du taux de croissance avec le vecteur d'onde d'une des deux ondes secondaires (la seconde est alors définie par les conditions de résonance). Nous pouvons désormais vérifier si les vecteurs d'ondes que nous observons correspondent au maximum de taux de croissance prédit par la théorie. Pour des raisons pédagogiques, la valeur de  $\Psi_0$  utilisée pour calculer les taux de croissance de la figure 3.2 avait été choisie arbitrairement, afin de mettre en avant le cas où les deux ondes filles possédaient des vecteurs d'ondes plus grands que l'onde primaire. Nous observions alors un transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles. Le vecteur  $\vec{k}_0$  était également choisi de manière arbitraire.

Dans ce paragraphe, nous utiliserons les valeurs expérimentales de  $\vec{k}_0$  et de  $\Psi_0$ . Cette dernière grandeur est mesurée en utilisant la norme de la transformée de Hilbert du champ de gradient de densité de l'onde primaire, calculée dans la même zone utilisée pour la

### 3. OBSERVATION EXPÉRIMENTALE DE L'INSTABILITÉ PARAMÉTRIQUE SOUS-HARMONIQUE

mesure du taux de croissance. La figure 3.7(a) montre les lieux de résonance (courbe bleue) calculés de la même manière que pour la courbe bleue de la figure 3.5 en utilisant cette fois-ci la valeur expérimentale de  $\vec{k}_0$  et de  $\omega_0/N$ . Les trois flèches correspondent aux mesures expérimentales des trois vecteurs d'ondes. Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 3.1, nous pouvons observer que la condition de résonance spatiale est bien vérifiée. La figure 3.7(b) représente l'évolution du taux de croissance avec  $\mathbf{k}_1$ . En comparant les figures 3.6(a) et 3.7(b), il est intéressant de constater que la diminution de l'amplitude de la fonction courant de l'onde primaire d'un facteur 3 favorise les vecteurs d'ondes filles pour lesquelles  $0 < \ell_1/\ell_0 < 1$  par rapport au cas  $\ell_1/\ell_0 > 1$ .

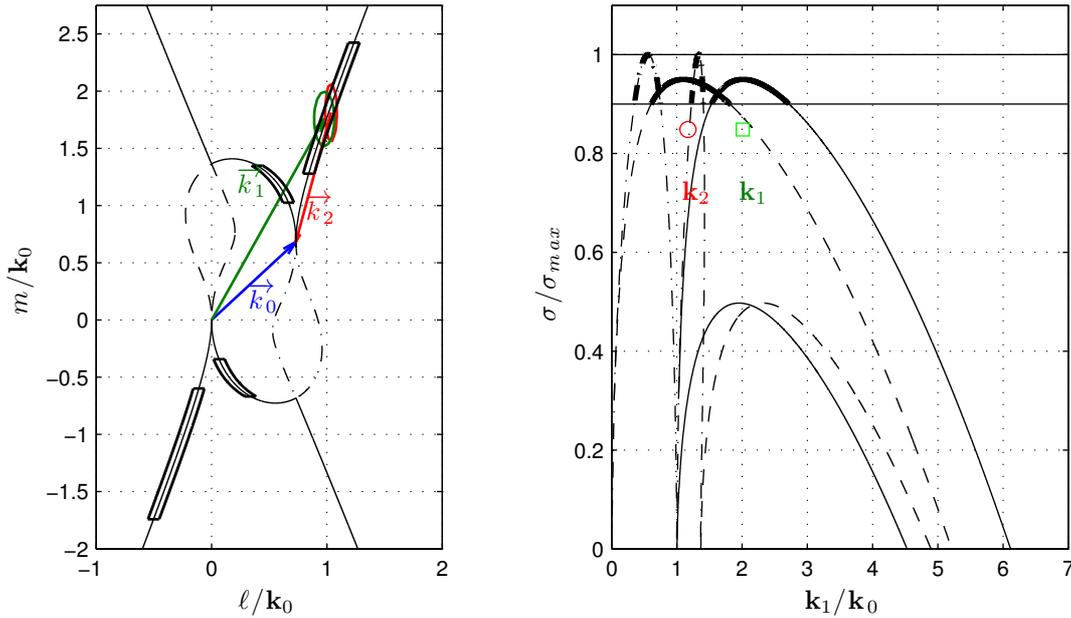


FIGURE 3.7 – (a) La courbe en trait plein représente la position de l'extrémité des vecteurs  $\vec{k}_1$  solutions de l'équation (3.32) dans le cas où le vecteur d'onde de l'onde primaire  $\vec{k}_0$  correspond à l'expérience détaillée précédemment, *i.e.*  $\ell_0 = 75 \pm 2 \text{ m}^{-1}$ ,  $m_0 = 70 \pm 2 \text{ m}^{-1}$  et  $\omega_0/N = 0.74$ . Les trois vecteurs d'ondes représentent les mesures expérimentales des trois vecteurs d'onde  $\vec{k}_0$  (noir),  $\vec{k}_1$  (rouge) et  $\vec{k}_2$  (vert). Les encadrés noirs marquent les régions correspondant aux vecteurs d'ondes possédant un taux de croissance compris entre 90% et 100% du maximum. (b) Taux de croissance  $\sigma$ , calculé à partir de l'équation (3.31), en fonction du nombre d'onde, dans le cas de l'expérience présentée précédemment ( $\vec{k}_0$ ,  $\omega_0 = 0.74$  et  $\Psi_0/\nu = 33$ ). Les deux lignes horizontales marquent le maximum du taux de croissance et 90% du maximum. Les mesures expérimentales du taux de croissance sont placées en fonction des vecteurs d'ondes mesurés  $\mathbf{k}_1$  (carré rouge) et  $\mathbf{k}_2$  (cercle vert). L'erreur expérimentale sur la mesure du taux de croissance étant très grande (de l'ordre de 25%), nous ne représentons pas les barres d'erreurs pour ces deux points pour la clarté de la figure.

En accord avec la théorie, les ondes secondaires générées par l'instabilité doivent être celles possédant le plus grand taux de croissance. Toutefois une instabilité se développe à partir du faible bruit présent au début de l'expérience et en raison des conditions expérimentales (génération de l'onde, stratification) toutes les fréquences spatiales et temporelles ne sont pas présentes avec la même intensité. De plus comme nous pouvons l'observer sur la figure 3.7(b), la courbe du taux de croissance, dans le cas où  $0 < \ell_1/\ell_0 < 1$ , est très

piquée et présente ainsi une très forte sensibilité au nombre d'onde. Pour ces raisons, nous pouvons introduire un critère de sélection moins contraignant que seulement le maximum de taux de croissance : nous supposons que les nombres d'ondes possédant un taux de croissance compris entre 90% et 100% du maximum peuvent être observés.

Ce critère de sélection est illustré sur la figure 3.7(b) par des lignes plus épaisses et les positions de ces solutions sont représentées sur la figure 3.7(a) par un encadré noir. Il est intéressant de noter que pour ces valeurs d'amplitude, de vecteurs d'ondes et de fréquences de l'onde mère, ce critère de sélection permet de sélectionner des vecteurs dans différentes zones de la courbe de résonance. En prenant en compte les erreurs de mesures sur les vecteurs d'ondes, nous observons que les vecteurs d'ondes expérimentaux sont situés dans cette zone de prédiction et en particulier sur la branche extérieure de la courbe de résonance. Le taux de croissance de cette zone est plus faible que pour la zone intérieure, mais la courbe du taux de croissance présente ici un plateau, ce qui n'est pas le cas pour la zone intérieure.

### 3.3.2 Taux de croissance

Nous allons désormais comparer les valeurs expérimentales et théoriques du taux de croissance. La détermination expérimentale du taux de croissance  $\sigma$  est obtenue en calculant un spectre temps-fréquence d'une zone comprise dans le faisceau de l'onde mère, comme nous l'avons définie dans la figure 3.1 (zone grisée). Ensuite l'évolution temporelle de chaque composante fréquentielle est tracée. La figure 3.8 montre le logarithme de l'amplitude du spectre temps-fréquence pour chaque pulsation en fonction du temps. Le taux de croissance correspond alors à la pente de la partie de croissance de l'amplitude. Il est à noter que l'amplitude de l'onde mère n'est pas constante sur tout le faisceau en raison de l'atténuation visqueuse. Pour cette raison, la position de la fenêtre de mesure du taux de croissance va influencer la mesure de  $\sigma$ . Nous avons alors estimé l'impact de cet effet en déplaçant la fenêtre de mesure et en relevant les différentes valeurs des taux de croissance. Par ailleurs la largeur de la fenêtre de lissage a également un fort impact sur la précision temporelle et donc sur la détermination du taux de croissance.

Pour déterminer la valeur théorique du maximum du taux de croissance, il est indispensable de connaître l'amplitude de la fonction courant  $\Psi_0$  de l'onde primaire. Cette amplitude ne peut être obtenue directement depuis l'amplitude des oscillations des cames du générateur en raison de l'existence d'un facteur de conversion entre le profil imposé et l'amplitude de l'onde générée, décrit par [67]. Ce facteur n'est pas très bien déterminé et dépend fortement de la fréquence. En effet, les plaques du générateur ont un mouvement vertical alors que les ondes formées se propagent avec un angle dépendant de la fréquence. Pour cette raison,  $\Psi_0$  doit être mesurée expérimentalement, introduisant alors une erreur expérimentale dans les prédictions. Nos mesures conduisent à une valeur théorique du taux de croissance de  $\sigma = 0.153 \pm 0.005 \text{ s}^{-1}$ , tandis que la mesure expérimentale donne  $\sigma = 0.13 \pm 0.04 \text{ s}^{-1}$ . Les prédictions sont donc à l'intérieur des barres d'erreurs des mesures expérimentales.

## 3.4 Effet de la fréquence et de l'amplitude de l'onde primaire

Jusqu'à présent les résultats expérimentaux présentés correspondent à une amplitude, une fréquence et un vecteur d'onde de l'onde primaire donnés. Il semble alors approprié d'étudier l'effet de ces différents paramètres sur la sélection des ondes secondaires.

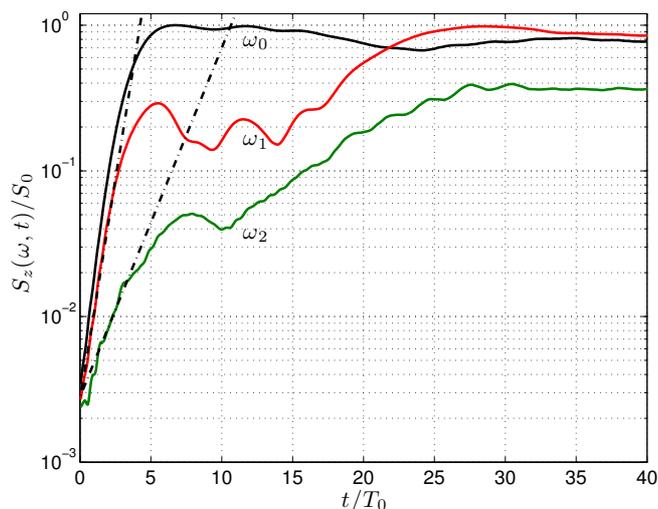


FIGURE 3.8 – Amplitude du spectre temps-fréquence  $S_z(\omega, t)$ , normalisée par  $S_0$ , de l'onde primaire  $\omega_0$  et des ondes secondaires  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Les lignes en traitillé sont des modélisations linéaires dont la pente fournit le taux de croissance  $\sigma$ . La quantité  $S_0$  est la moyenne temporelle de la plus importante composante fréquentielle  $S_0 = \langle S_z(\omega_0, t) \rangle_t$ .

Tout d'abord, nous pouvons constater numériquement que la norme du vecteur d'onde de l'onde mère  $\mathbf{k}_0$  n'a aucun effet sur la sélection des ondes secondaires. La variation de ce paramètre laisse inchangée la forme des courbes de taux de croissance en fonction de  $\mathbf{k}_1/\mathbf{k}_0$  ou de  $\omega_1/\omega_0$  (Fig. 3.6). Le seul effet d'une augmentation de  $\mathbf{k}_0$  est une augmentation globale des taux de croissance. Pour cette raison, il n'a pas été nécessaire d'effectuer une étude expérimentale systématique de la dépendance du taux de croissance avec  $\mathbf{k}_0$ .

Nous allons désormais nous concentrer sur l'effet de la pulsation de l'onde mère  $\omega_0$  sur la sélection des ondes filles. La figure 3.9 montre l'évolution des normes des vecteurs d'ondes des ondes secondaires  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  normalisées par  $\mathbf{k}_0$  en fonction de  $\omega_0/N$ . Les courbes en trait plein correspondent aux vecteurs d'ondes situés sur la partie extérieure de l'espace des solutions ( $\ell_1 > \ell_0$ ). L'autre paire de courbes (pointillé) correspond aux vecteurs d'ondes situés sur la zone centrale ( $0 < \ell_1 < \ell_0$ ). Ces courbes sont obtenues pour une valeur de  $\Psi_0$  correspondant à l'expérience présentée précédemment (paragraphe 3.1). Nous pouvons observer que lorsque les vecteurs d'ondes sont sélectionnés sur la partie centrale de l'espace des solutions, un seul des deux vecteurs d'ondes possède une norme supérieure à  $\mathbf{k}_0$ . Le nombre d'onde associé à la seconde onde de gravité est, quant à lui, inférieur, ce qui signifie donc un transfert à la fois vers les grandes et les petites échelles. Par contre, lorsque les vecteurs d'ondes sont sélectionnés sur la partie extérieure, il existe une plage de fréquences (pour  $\omega_0/N > 0.67$ ) sur laquelle les deux vecteurs d'ondes secondaires ont des normes supérieures à  $\mathbf{k}_0$ . En effet la courbe continue noire croise l'ordonnée 1 pour  $\omega_0/N = 0.67$ . Pour des pulsations supérieures la sélection des ondes-filles sur la zone extérieure permet un transfert vers les petites échelles uniquement.

Parmi ces deux jeux de vecteurs d'ondes, celui dont le taux de croissance est le plus grand est représenté par une ligne épaisse. Nous pouvons alors observer une fréquence critique ( $\omega_0/N = 0.77$ ) pour laquelle l'instabilité passe brutalement d'un régime à l'autre.

Comme nous l'avons précisé, tous ces calculs ont été effectués pour une amplitude de la fonction courant  $\Psi_0$  fixée. Lorsque cette amplitude varie, nous observons alors une variation de la pulsation critique. La figure 3.10 montre l'évolution de cette pulsation critique en

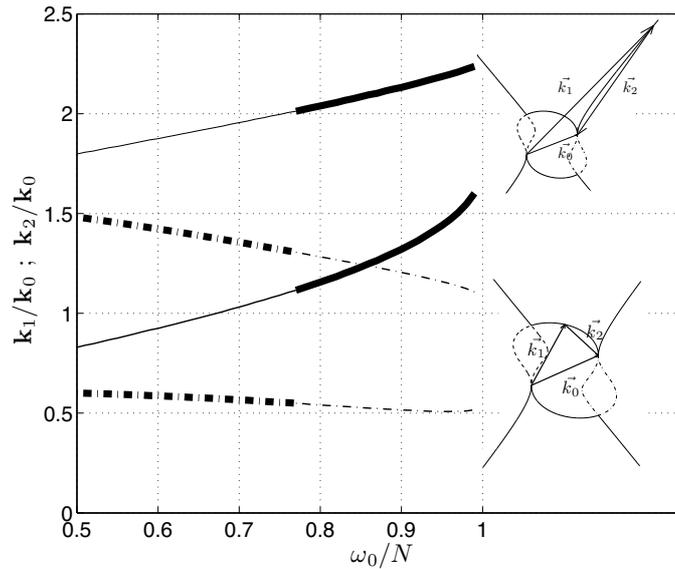


FIGURE 3.9 – Évolution de  $k_1/k_0$  et  $k_2/k_0$  avec la pulsation  $\omega_0$  pour une amplitude donnée. La ligne continue correspond au cas où les ondes secondaires sont sélectionnées sur la partie extérieure (voir illustration dans le coin supérieur droit). La ligne en pointillé correspond au cas où les ondes secondaires sont sélectionnées dans la partie centrale (illustration dans le coin inférieur droit). Le taux de croissance est maximal lorsque la courbe est en trait épais.

fonction de l'amplitude normalisée par la viscosité (ligne en trait plein). Au dessus de cette courbe, les vecteurs d'ondes des ondes secondaires sont sélectionnés sur la partie extérieure de l'espace des solutions, tandis que pour la partie inférieure de la figure, les vecteurs d'ondes sont sélectionnés sur la partie centrale.

Sur cette même figure, nous superposons les points expérimentaux obtenus pour différentes valeurs de  $\omega_0$  et de  $\Psi_0$ , montrant dans quels cas l'instabilité paramétrique sous-harmonique a été observée. Pour produire cette série de points, nous avons utilisé trois valeurs d'amplitudes différentes (excentricité des cames de 0.1, 0.5 et 0.75 cm). Ces trois séries correspondent aux trois séries de symboles noirs quasiment alignés selon une verticale. Il est à noter que l'amplitude de l'onde mère est calculée à partir des mesures des champs de gradient de densité, ce qui explique pourquoi ces séries de points ne sont pas parfaitement verticales, pour une même excentricité.

Nous pouvons remarquer que l'instabilité est observée pour de grandes amplitudes, principalement au dessus de la courbe de transition. L'étude plus approfondie des deux points pour lesquels nous observons l'instabilité pour de plus faibles pulsations a permis de montrer que ces deux expériences correspondent à des cas où l'instabilité est sélectionnée sur les branches extérieures de l'espace des solutions. Ce comportement peut être expliqué par l'incertitude sur la sélection fréquentielle que nous avons évoquée au paragraphe 3.3.1.

Nous en déduisons que la PSI ne peut se développer dans notre configuration expérimentale que lorsque les deux longueurs d'ondes filles sont inférieures à celle de l'onde mère. Aucune cascade d'énergie vers les grandes échelles n'est alors permise. La raison de ce comportement pourrait être le nombre trop faible de longueurs d'ondes constituant le faisceau généré par le générateur d'ondes.

Pour les amplitudes plus faibles, aucune déstabilisation n'a été observée pendant l'enregistrement, même pour les expériences situées au dessus de la ligne continue de la figure 3.10. L'équation (3.31) montre que les solutions instables ne sont possibles que lorsque

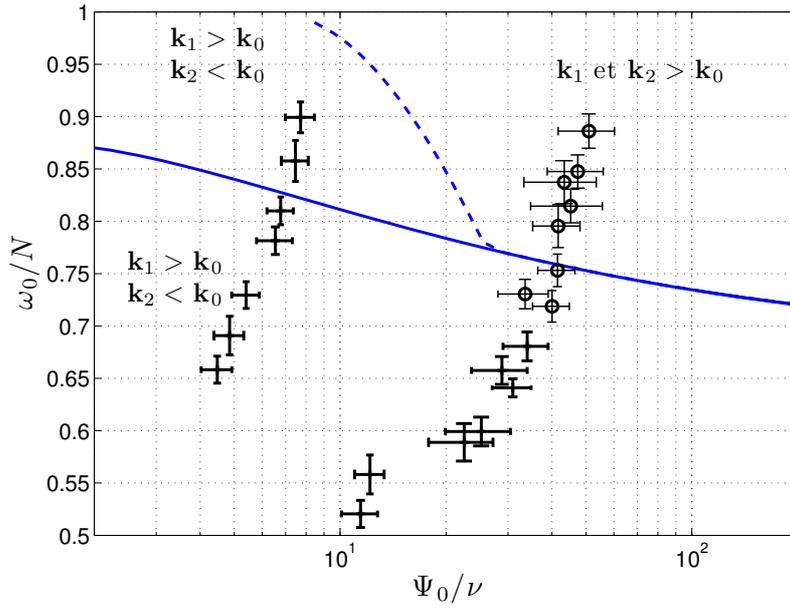


FIGURE 3.10 – Diagramme de phase montrant la dépendance de la PSI avec la fréquence d'excitation et l'amplitude de l'onde mère. La ligne continue représente pour chaque amplitude la transition entre le cas où les ondes secondaires sont sélectionnées sur la partie extérieure de l'espace des solutions et le cas où les ondes secondaires sont sélectionnées sur la partie centrale. La ligne en pointillé représente la pulsation seuil en dessous de laquelle le transfert d'énergie vers les grandes échelles est possible. Les symboles correspondent aux points expérimentaux, avec les erreurs de mesures : (o) PSI observée, (+) pas de PSI apparente.

l'amplitude de l'onde mère est supérieure à un seuil visqueux donné par  $\nu/2\sqrt{\mathbf{k}_1^2\mathbf{k}_2^2/(I_1I_2)}$ . Cependant l'amplitude de l'onde mère reste un à deux ordres de grandeurs supérieure à la valeur de ce seuil. Le seuil visqueux ne peut donc expliquer ici la stabilité du faisceau.

Ce comportement peut à nouveau être mis en relation avec la valeur attendue des longueurs d'ondes des ondes filles. En effet, comme nous l'avons vu précédemment sur la figure 3.9 la courbe continue noire la plus basse croise l'ordonnée 1 à une pulsation donnée. Cela implique que pour des pulsations inférieures, bien que les ondes secondaires soient sélectionnées sur la zone extérieure de l'espace des solutions, un transfert des petites vers les grandes échelles est possible. Nous avons calculé théoriquement cette pulsation seuil comme une fonction de l'amplitude de l'onde mère. Cette dépendance est présentée sur la figure 3.10 par la ligne en pointillé. La série d'expériences à faible amplitude, pour laquelle aucune déstabilisation n'a été observée, se situe à gauche de cette ligne, ce qui signifie qu'une des deux ondes secondaires prédites possède une longueur d'onde plus grande que celle de l'onde primaire. Tout comme pour les faibles fréquences, cela peut expliquer pourquoi nous n'observons pas de déstabilisation.

Finalement, la seule région de ce diagramme de phase où l'énergie n'est transmise que vers les petites échelles, correspond au coin supérieur droit du domaine (au dessus de la ligne continue et de la ligne en pointillé). Cette zone correspond à la seule zone où nous observons la PSI.

## Conclusion

En utilisant la technique de Schlieren Synthétique pour un fluide linéairement stratifié, nous avons observé la formation, à partir d'une onde primaire, de deux ondes secondaires de fréquences et de longueurs d'ondes plus petites. Le mécanisme en jeu est une interaction non-linéaire à 3 ondes, vérifiant une condition de résonance temporelle pour les trois pulsations  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$  et une condition de résonance spatiale pour les trois vecteurs d'ondes  $\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ . Cette interaction résonante peut être étudiée analytiquement, permettant ainsi d'obtenir des prédictions théoriques qui peuvent être comparées à nos mesures (spectre temps-fréquence, transformée de Hilbert). Un bon accord a été observé pour les vecteurs d'ondes tout comme pour les taux de croissance.

La présence de PSI pour les ondes internes océaniques a été récemment confirmée par de nombreuses simulations numériques aux conditions réalistes (par exemple [32], [40], [60]). Ces simulations ont été suivies par de très intéressantes mesures océaniques pointant la présence de PSI dans les océans. Nous pouvons en particulier citer les mesures effectuées près de Hawaï [1], [12] ou [81].

Cependant, dans l'océan, les échelles spatiales sont beaucoup plus grandes, réduisant ainsi l'effet de la viscosité par rapport à nos expériences. Afin d'illustrer ce point, considérons une onde océanique typique mesurée à partir d'observations *in situ* d'isothermes (voir la figure 1 de [10] ou encore la figure 6.13 de [88]). Ces oscillations possèdent une amplitude d'environ 20 m avec une période d'une demi-journée. Les ondes internes océaniques possèdent des longueurs d'ondes variant entre 100 m et 10 km [31, 55, 87]. Nous prendrons comme valeur typique 1 km. Comparées à nos expériences, les ondes internes océaniques possèdent une amplitude de la fonction courant  $\Psi_0/\nu$  plus grande d'environ 4 ordres de grandeurs. Nous utilisons alors ces valeurs pour calculer les taux de croissance en fonction de  $\mathbf{k}_1/\mathbf{k}_0$  et de  $\omega_1/\omega_0$  (figure 3.11). Comme nous pouvons l'observer sur la figure 3.11(a), le mode le plus instable correspond à la situation où les normes des vecteurs d'ondes de deux ondes secondaires sont beaucoup plus grandes (10 à 20 fois plus grandes pour cet exemple) que la norme du vecteur d'onde de l'onde mère. Nous pouvons ainsi dire que  $\vec{k}_1 \simeq \vec{k}_2$ , ce qui implique que  $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_0/2$ , comme nous pouvons l'observer sur la figure 3.11(b). Cela explique pourquoi cette interaction résonante a pris l'appellation d'"Instabilité Paramétrique Sous-Harmonique", en raison de la ressemblance avec les instabilités paramétriques qui apparaissent en particulier sur des pendules pesants dont l'extrémité est fixée à un système oscillant.

Dans notre cuve expérimentale, aux dimensions ridiculement petites devant celles de l'océan, nous observons que la viscosité joue un rôle plus important sur la sélection des modes instables. En effet, en raison de la viscosité,  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  sont du même ordre de grandeur que  $\mathbf{k}_0$ . Par ailleurs, un deuxième effet de la viscosité est de permettre deux comportements différents pour cette instabilité. Tout d'abord, l'instabilité peut générer deux ondes secondaires, dont les longueurs d'ondes sont plus petites que celle de l'onde primaire. Nous observons ainsi un transfert d'énergie vers les petites échelles, comme ce que nous observons au sein des océans. Mais, lorsque  $\Psi_0/\nu$  est assez faible, l'instabilité génère deux ondes secondaires dont l'une d'entre elles possède une longueur d'onde plus grande que l'onde mère. Dans ce cas, le transfert d'énergie s'effectue à la fois vers les grandes et les petites échelles. Cependant, nous n'avons jamais observé expérimentalement ce comportement, bien qu'il soit prédit par l'étude analytique. Il est possible que la largeur finie du faisceau limite le développement des ondes dont la longueur d'onde est plus grande que la longueur d'onde de l'onde mère. Il serait alors intéressant d'effectuer des simulations numériques afin de vérifier ce comportement.

### 3. OBSERVATION EXPÉRIMENTALE DE L'INSTABILITÉ PARAMÉTRIQUE SOUS-HARMONIQUE

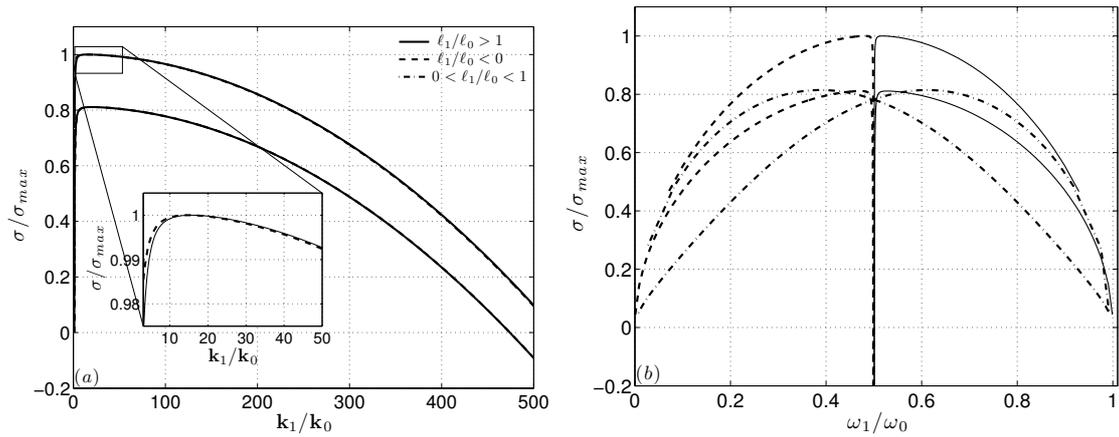
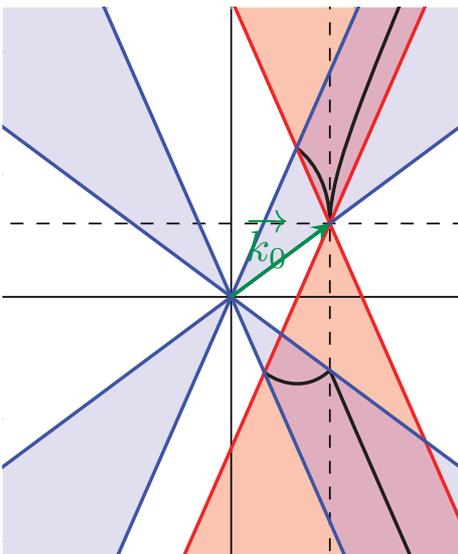


FIGURE 3.11 – Taux de croissance  $\sigma$  en fonction de la norme du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1$  (a) et en fonction de la pulsation  $\omega_1$  (b) pour des paramètres océaniques.

Un autre point à explorer est la localisation de la naissance de deux ondes filles. Dans toutes les expériences que nous avons effectuées, l'instabilité apparaît dans une région proche du générateur. Cela est compréhensible, puisque l'onde a une amplitude plus grande près du générateur et est donc plus instable. Ensuite l'instabilité se développe sur toute la zone d'observation.

En plus de l'importance du mécanisme de dissipation d'ondes, un effet sur le fluide stratifié peut être attendu. En effet, l'onde primaire pourrait donner lieu à travers cette instabilité à deux ondes secondaires dont l'amplitude et la fréquence sont au-dessus du seuil de retournement. La stratification pourra ainsi évoluer par ces événements de mélange, et influencer la propagation des ondes en favorisant, si cette rétroaction s'avère positive, d'autres retournements et donc plus de mélange.

## À la recherche de la zone centrale



Une première question se pose au vu de nos expériences sur l'instabilité paramétrique sous-harmonique : pourquoi n'observe-t-on pas de déstabilisation du faisceau lorsque la prédiction sélectionne des vecteurs d'ondes sur la zone interne de l'espace des solutions ? Au cours d'une présentation à une école d'hiver des travaux détaillés dans le chapitre 3, Philip Marcus, professeur au département d'ingénierie mécanique à l'Université de Californie (Berkeley), pointa une possible sélection supplémentaire non prise en compte par la résolution du système et qui rendrait impossible ce régime de l'instabilité.

Ces règles de sélection ayant été l'objet d'une publication [47], nous nous proposons ici d'effectuer une relecture de cet article dans l'espoir de trouver la réponse à ce blocage expérimental.

Nous détaillerons donc dans un premier temps les notations du problème puis nous verrons comment interpréter ces règles de sélection très mathématiques. Par ailleurs ces règles sont déterminées pour l'étude de collision d'ondes, nous verrons donc comment transcrire ces règles à l'étude de la PSI. Enfin, nous étudierons quelle réponse apportent ces règles à nos observations expérimentales.

## 4.1 Mise en place du problème

Nous étudions ici la collision de deux ondes internes, de pulsations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  et de vecteurs d'ondes  $\vec{k}_0$  et  $\vec{k}_1$ , et de la possible génération d'une troisième onde  $(\omega_2, \vec{k}_2)$ . Ces trois ondes vérifient les conditions de résonance temporelle et spatiale

$$\omega_0 + \omega_1 = \omega_2, \quad (4.1)$$

$$\vec{k}_0 + \vec{k}_1 = \vec{k}_2, \quad (4.2)$$

et chaque onde vérifie la relation de dispersion des ondes internes.

Tout comme Jiang *et al.* [47], nous supposons pour toute la suite de l'étude que  $\omega_0 > |\omega_1|$ . Il ne reste que deux cas à étudier :  $\omega_1$  positive ou négative.

### Définition des quadrants

Les deux ondes incidentes se rencontrent à l'origine du repère. Le plan  $(x0z)$  est divisé en quatre quadrants définis sur la figure 4.1. Ces quadrants permettent d'associer une notation simple à une direction et un sens du vecteur d'onde de l'onde incidente (figure 4.1(a) et 4.1(b)) ou émise (figure 4.1(c)). Nous noterons les quadrants des ondes émises à l'aide de chiffres romains afin de bien différencier les notations pour les ondes émises et les ondes incidentes.

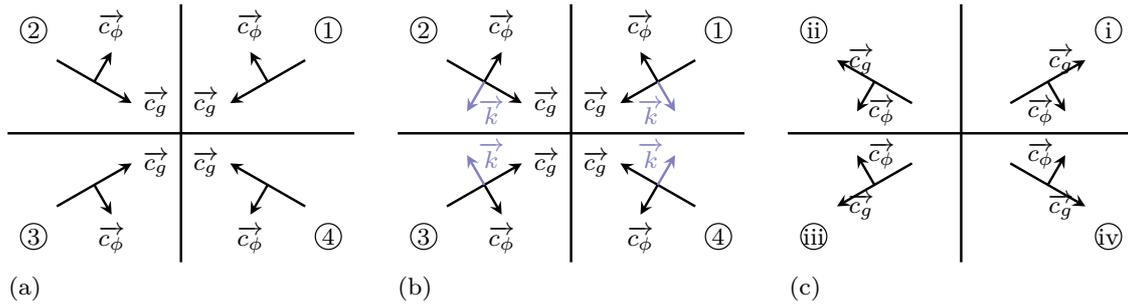


FIGURE 4.1 – (a) Définition des quadrants pour des ondes incidentes de fréquence positive. Dans ce cas la vitesse de phase et le vecteur d'onde sont de même sens. (b) Définition des quadrants pour des ondes incidentes de fréquence négative. Dans ce cas, la vitesse de phase et le vecteur d'onde sont de sens opposés. (c) Définition des quadrants pour une onde émise de fréquence positive.

Il est à noter que selon le signe de la fréquence de l'onde incidente, cette dernière n'aura pas le même vecteur d'onde. Dans toute la suite, nous supposons que l'onde 0 est issue du quadrant (1) et est de fréquence positive (cas de la figure 4.1(a)).

## 4.2 Règle de sélection : une histoire de géométrie

La collision de deux ondes internes de gravité ne mène pas nécessairement à la formation d'une troisième onde interne. En effet, le fait de satisfaire aux conditions de résonance temporelle et spatiale ne garantit pas que la pulsation et le vecteur d'onde vérifient la relation de dispersion des ondes internes. Afin de déterminer dans quel cas cette troisième onde peut être générée, Jiang *et al.* [47] étudient attentivement les équations dérivant des conditions de résonance et, par des analyses de signe, parviennent à déterminer les cas permettant la génération d'une onde interne.

Nous proposons ici une approche totalement géométrique de cette analyse, permettant d'aboutir aux mêmes résultats. Pour cela nous allons distinguer le cas où  $\omega_1$  est positive du cas où  $\omega_1$  est négative.

#### 4.2.1 Cas $\omega_0 > \omega_1 > 0$

Comme nous l'avons vu précédemment, nous supposons que l'onde 0 appartient au premier quadrant et que  $\omega_0$  est positive. La première étape de la résolution graphique est de tracer, dans un repère orthonormé  $(\mathcal{R}_0)$ , le vecteur  $\vec{k}_0$ . La pointe de ce vecteur définit alors l'origine d'un second repère  $(\mathcal{R}_1)$  associé au vecteur  $\vec{k}_1$  (lignes pointillées de la figure 4.2(a)). En raison de la condition de résonance spatiale, l'extrémité du vecteur  $\vec{k}_1$  construit dans  $(\mathcal{R}_1)$  correspond à l'extrémité du vecteur  $\vec{k}_2$  dans  $(\mathcal{R}_0)$  (figure 4.2(a)).

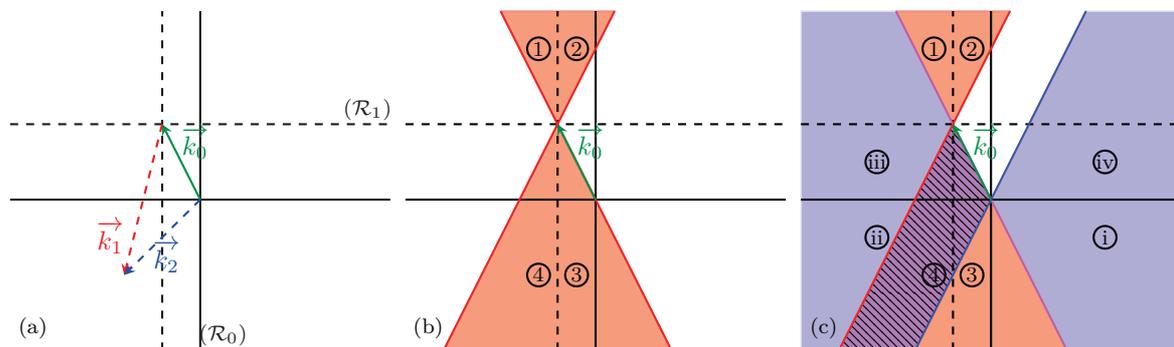


FIGURE 4.2 – Les trois étapes de construction des graphiques.

Grâce aux inégalités entre les pulsations des deux ondes incidentes, nous pouvons définir un domaine "d'existence" pour  $\vec{k}_1$ . En effet  $0 < \omega_1 < \omega_0$ , ainsi  $\vec{k}_1$  ne pourra être situé que dans un domaine compris entre les droites formant un angle

$$\theta_0 = \left| \arcsin \left( \frac{\omega_0}{N} \right) \right| \quad (4.3)$$

avec la verticale du repère  $\mathcal{R}_1$  (droites rouges). Nous avons ainsi les relations d'équivalences suivantes

$$|\omega_i| < |\omega_0| \quad \Leftrightarrow \quad \theta_i < \theta_0, \quad (4.4)$$

$$|\omega_i| > |\omega_0| \quad \Leftrightarrow \quad \theta_i > \theta_0. \quad (4.5)$$

avec  $i = 1, 2$ .

Puisque  $\omega_1 < \omega_0$ , le vecteur  $\vec{k}_1$  doit donc être plus vertical que  $\vec{k}_0$ , et se situe ainsi dans le domaine orange de la figure 4.2(b). Les numéros dans chaque partie du domaine orange désignent le quadrant d'origine de l'onde de vecteur d'onde  $\vec{k}_1$ .

Enfin comme  $\omega_1$  est positive, nous obtenons la dernière relation  $\omega_0 < \omega_2$ . Nous pouvons alors en déduire un domaine "d'existence" pour  $\vec{k}_2$ . Cette fois ci, puisque  $\omega_0 < \omega_2$ ,  $\theta_2 \in [\theta_0, \pi/2]$ , nous obtenons alors le domaine bleu délimité par les droites bleues (figure 4.2(c)). Les chiffres romains désignent le quadrant dans lequel l'onde 2, émise du centre du repère  $\mathcal{R}_0$ , se propage.

L'onde 2 peut donc se former si les deux conditions précédentes sont vérifiées, ce qui graphiquement correspond à la superposition des domaines orange et bleu (zone hachurée

de la figure 4.2(c)). Finalement une onde pourra être générée à la condition nécessaire que la pointe du vecteur  $\vec{k}_0 + \vec{k}_1$  appartienne au domaine hachuré<sup>1</sup>.

### Lecture du graphique

Pour déterminer les règles de sélection, il suffit alors de regarder les différents quadrants pour l'onde 1 et de chercher si dans ce quadrant il existe une zone hachurée :

- Prenons le cas où l'onde 1 provient du quadrant (1) (tout comme l'onde 0). Sur le graphique ce cas correspond à la zone orange en haut à gauche (entre la droite rouge et la ligne verticale en pointillé). Dans ce domaine il n'y pas de recouvrement avec le domaine bleu, il n'y a donc pas d'interaction triadique résonante possible.
- Nous obtenons le même résultat si l'onde 1 provient du domaine (2), car les droites bleue et rouge sont parallèles.
- Etudions le cas où l'onde 1 est issue du domaine (3), ce qui correspond au domaine orange situé le plus en bas à droite (domaine entre la droite rouge et la verticale en pointillé). Nous observons dans ce cas une zone hachurée qui s'étend sur le domaine (iii) et (ii) de l'onde émise. Ainsi dans le cas où  $1 \in (3)$  il peut y avoir une interaction triadique et l'onde 2 appartient soit au quadrant (ii) soit au quadrant (iii).
- En raisonnant de la même manière, si  $1 \in (4)$  alors  $2 \in (ii)$  ou (iii).

Nous pouvons résumer ces observations sous la forme du tableau suivant

$\vec{k}_0$	$\vec{k}_1$	$\vec{k}_2$
1	1	$\emptyset$
1	2	$\emptyset$
1	3	ii ou iii
1	4	ii ou iii

#### 4.2.2 Cas $\omega_1 < 0$

Dans le cas où la pulsation est négative, le raisonnement est exactement le même. Il est cependant nécessaire de porter attention au domaine à partir duquel l'onde 1 est émise et à quel vecteur d'onde cela correspond, comme nous l'avons vu sur la figure 4.1(b). Nous allons alors distinguer le cas où  $\omega_1$  est supérieure à  $-\omega_0/2$ , du cas où  $\omega_1$  est inférieure à  $-\omega_0/2$ .

**Cas**  $-\omega_0/2 \leq \omega_1 < 0$

Le domaine orange ( $|\omega_1| \leq \omega_0/2$ ) est alors délimité par des droites formant un angle

$$\theta_{max} = \arcsin\left(\frac{\sin \theta_0}{2}\right) \quad (4.6)$$

avec la verticale. Par ailleurs, nous avons dans ce cas :  $\omega_2 \in [\omega_0/2, \omega_0]$ . Ainsi le domaine bleu est délimité par les droites bleues formant soit un angle  $\theta_{max} = \theta_0$  avec la verticale soit un angle

$$\theta_{min} = \arcsin\left(\frac{\sin \theta_0}{2}\right). \quad (4.7)$$

Ces conditions géométriques sont alors résumées sur la figure 4.3. Le cas où  $|\omega_1| = \omega_0/2$  (et donc  $|\omega_2| = \omega_0/2$ ) correspond aux intersections des droites bleues et rouges. Ces

---

1. Nous verrons par la suite que cette condition n'est qu'une condition nécessaire. Les conditions d'apparition sont en réalité plus sélectives.

intersections ont été marquées par des disques noirs. Par ailleurs nous pouvons, de la même manière que précédemment, résumer les résultats sous la forme d'un tableau.

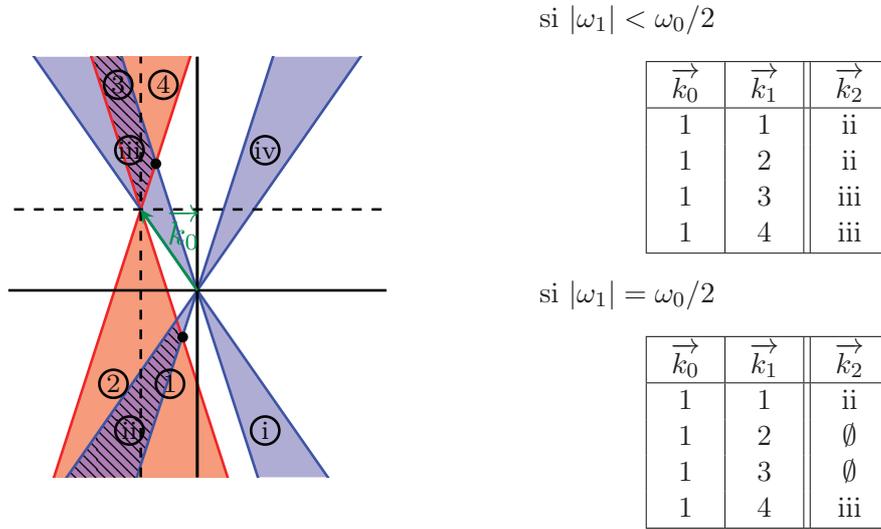


FIGURE 4.3 – Obtention des règles de sélection dans le cas où  $-\omega_0/2 \leq \omega_1 < 0$ . Le cas  $\omega_1 = -\omega_0/2$  est représenté par les disques noirs.

**Cas**  $-\omega_0 < \omega_1 < -\omega_0/2$

Nous supposons désormais que  $|\omega_1| > \omega_0/2$ . Cette inégalité implique que  $\omega_2 < \omega_0/2$ . Les domaines bleus ( $\omega_2 \in [0, \omega_0/2]$ ) et orange ( $\omega_1 \in [-\omega_0, -\omega_0/2]$ ) sont alors inversés par rapport au cas précédent, comme nous pouvons l'observer sur la figure 4.4.

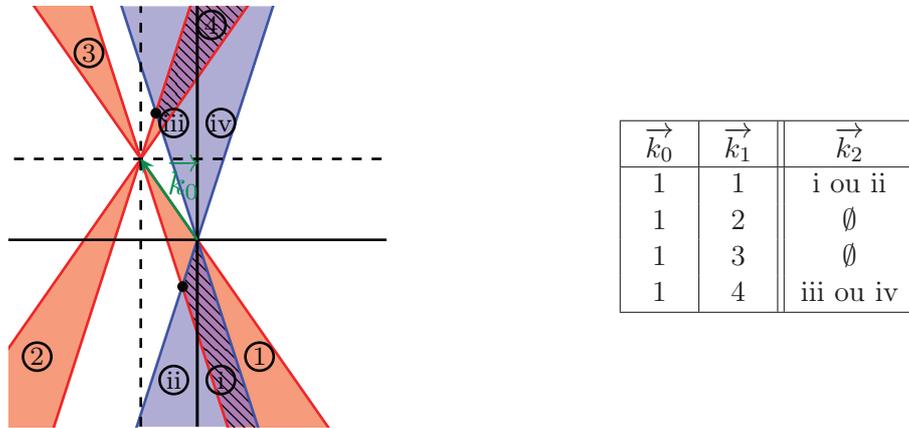


FIGURE 4.4 – Obtention des règles de sélection dans le cas où  $-\omega_0 < \omega_1 < -\omega_0/2$ . Les disques noirs sont, par construction, les mêmes que sur la figure 4.3

### 4.2.3 Bilan

Nous pouvons donc réunir toutes ces règles de sélection en un seul tableau identique à celui présenté dans l'article de Jiang *et al.* [47], avec pour paramètre  $\chi = \omega_1/\omega_0$  (Table 4.1).

Nous obtenons donc exactement les mêmes résultats sans passer par des hypothèses de signes de formules mathématiques. Il semblerait donc que ces règles de sélection ne soient que des contraintes géométriques puisqu'à aucun moment nous n'avons utilisé d'autre

sgn( $\chi$ )		1	2	3	4
+1		$\emptyset$	$\emptyset$	ii ou iii	ii ou iii
-1	$ \chi  < 0.5$	ii	ii	iii	iii
-1	$ \chi  = 0.5$	ii	$\emptyset$	$\emptyset$	iii
-1	$ \chi  > 0.5$	i ou ii	$\emptyset$	$\emptyset$	iii ou iv

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des règles de sélection dans le cas où l’onde (0) appartient au domaine (1) et où l’onde (1) appartient au domaine donné par la première ligne. Le paramètre  $\chi = \omega_1/\omega_0$  permet de différencier les différents cas évoqués précédemment.

relation que les deux conditions de résonance ainsi que la relation de dispersion pour la détermination des angles limites.

Cette résolution graphique simple permet donc de retrouver les règles de sélection. Nous allons maintenant appliquer ce raisonnement au cas de la PSI et comparer ces règles aux solutions du système.

### 4.3 Retour sur l’Instabilité Paramétrique Sous-harmonique

#### 4.3.1 De la collision à l’instabilité

Il est intéressant de constater à quel point l’étude du problème de la collision de deux ondes est équivalent à l’étude de la PSI. En effet, nous avons

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 = \omega_2 \\ \vec{k}_0 + \vec{k}_1 = \vec{k}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \omega'_1 + \omega_2 \\ \vec{k}_0 = \vec{k}'_1 + \vec{k}_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

avec  $\omega'_1 = -\omega_1$  et  $\vec{k}'_1 = -\vec{k}_1$ .

Nous avons vu au cours du paragraphe 3.2.4 que l’instabilité possède un taux de croissance positif uniquement lorsque  $\omega'_1$  et  $\omega_2$  sont positives. Ainsi l’étude de la PSI est équivalente à l’étude de la collision de deux ondes dans le cas où  $\omega_1$  est négative. Par ailleurs, comme  $\vec{k}'_1 = -\vec{k}_1$ , l’origine et l’extrémité de ces deux vecteurs sont inversées l’une par rapport à l’autre. Le raisonnement graphique est ainsi légèrement modifié, la zone orangée correspondant désormais à la zone accessible par l’origine du vecteur  $\vec{k}'_1$ , dont l’extrémité est fixée à l’origine du repère  $\mathcal{R}_1$ .

La figure 4.5(a) présente la détermination du domaine d’existence dans le cas où  $\omega'_1 < \omega_0/2$  (*i.e.*  $-\omega_0/2 \leq \omega_1 < 0$ ) et la figure 4.5(b) dans le cas  $\omega_0/2 < \omega'_1 < \omega_0/2$  (*i.e.*  $-\omega_0 < \omega_1 < -\omega_0/2$ ). À ce raisonnement graphique sont superposées les solutions du système composé des deux conditions de résonance spatiale et temporelle et des relations de dispersion des trois ondes (courbe en trait continu noir). Le système est résolu à chaque fois en imposant la condition sur le domaine d’existence de  $\omega'_1$ .

Nous observons que les solutions sont toujours situées dans le domaine de superposition des domaines bleu et rouge. Par ailleurs la figure 4.5(c) présente l’ensemble des solutions du système. Cette courbe se superpose exactement à l’association des deux courbes noires des figures 4.5(a) et (b). Les règles de sélection n’apportent ainsi aucune information supplémentaire sur la possibilité de développement de l’instabilité par rapport à la résolution du système.

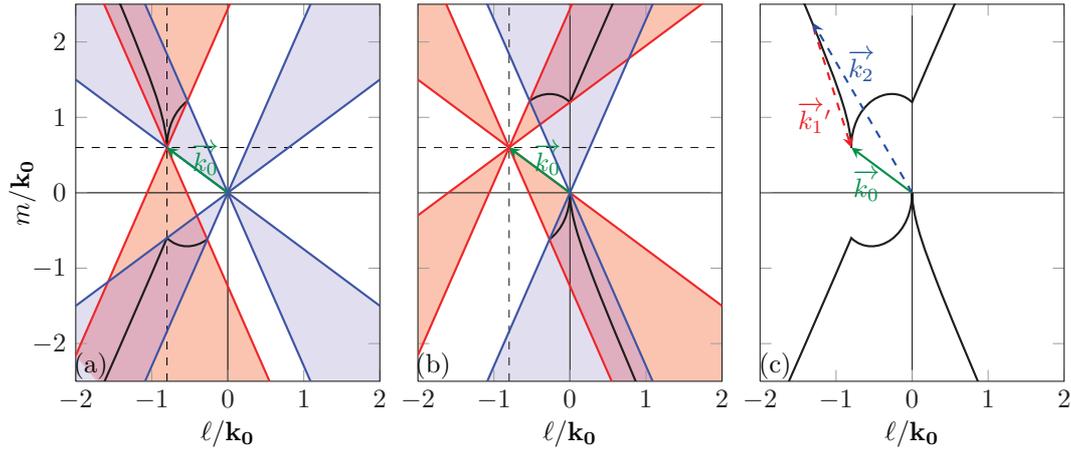


FIGURE 4.5 – (a) Superposition des contraintes géométriques et des solutions du système (ligne noire) pour  $0 < \omega'_1 < \omega_0/2$ . (b) Superposition des contraintes géométriques et des solutions du système (ligne noire) pour  $\omega_0/2 < \omega'_1 < \omega_0$ . (c) La ligne noire représente la mise en commun des solutions calculées dans les deux cas précédents.

### 4.3.2 Collision d'ondes expérimentale

La piste de règles de sélection supplémentaires ne semble donc pas apporter de réponse à notre problème. Cependant, ces réflexions nous ont conduits à réaliser quelques expériences de collision d'ondes, dans le but d'observer une interaction résonante dans la zone centrale des lieux de résonance ( $0 < l_1 < l_0$ ). Pour effectuer ces expériences, nous avons utilisé deux générateurs d'ondes, générant chacun une onde plane de longueur d'onde et de fréquence différentes (figure 4.6).

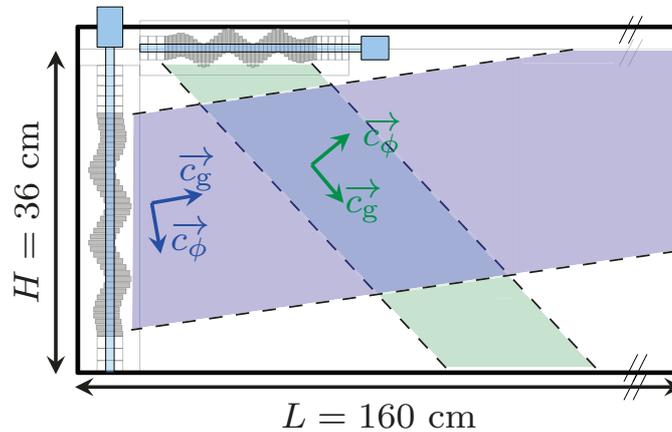


FIGURE 4.6 – Schéma du dispositif expérimental de collision d'ondes. Le faisceau vert correspond à l'onde de pulsation  $\omega_0$  et le faisceau bleu à l'onde de pulsation  $\omega_2$  pour cette expérience. Le générateur associé à l'onde bleue peut être placé sur la droite de la cuve afin d'avoir une onde se propageant de la droite vers la gauche.

Ces deux générateurs sont, par ailleurs, disposés de manière à rendre possible une collision des deux faisceaux générés. Dans certaines configurations, aucune onde n'est générée lors de la collision. Par exemple, sur la partie gauche de la figure 4.7, nous pouvons observer sur le spectre temps-fréquence que seules les fréquences associées aux deux générateurs sont

présentes. Il n'y a pas d'apparition d'une troisième onde. La mesure des vecteurs d'ondes de ces deux ondes par un spectre bi-dimensionnel (dernière ligne de la figure 4.7) montrent alors qu'il n'existe pas d'onde permettant de satisfaire les conditions de résonance temporelle et spatiale pour ce couple d'onde. En effet, les solutions sont représentées par la courbe blanche superposée aux spectres 2D et nous pouvons observer que le vecteur d'onde de l'onde de pulsation  $\omega_1$  est en dehors de cette courbe. Cette configuration ne permet donc pas la génération d'une troisième onde par interaction non-linéaire.

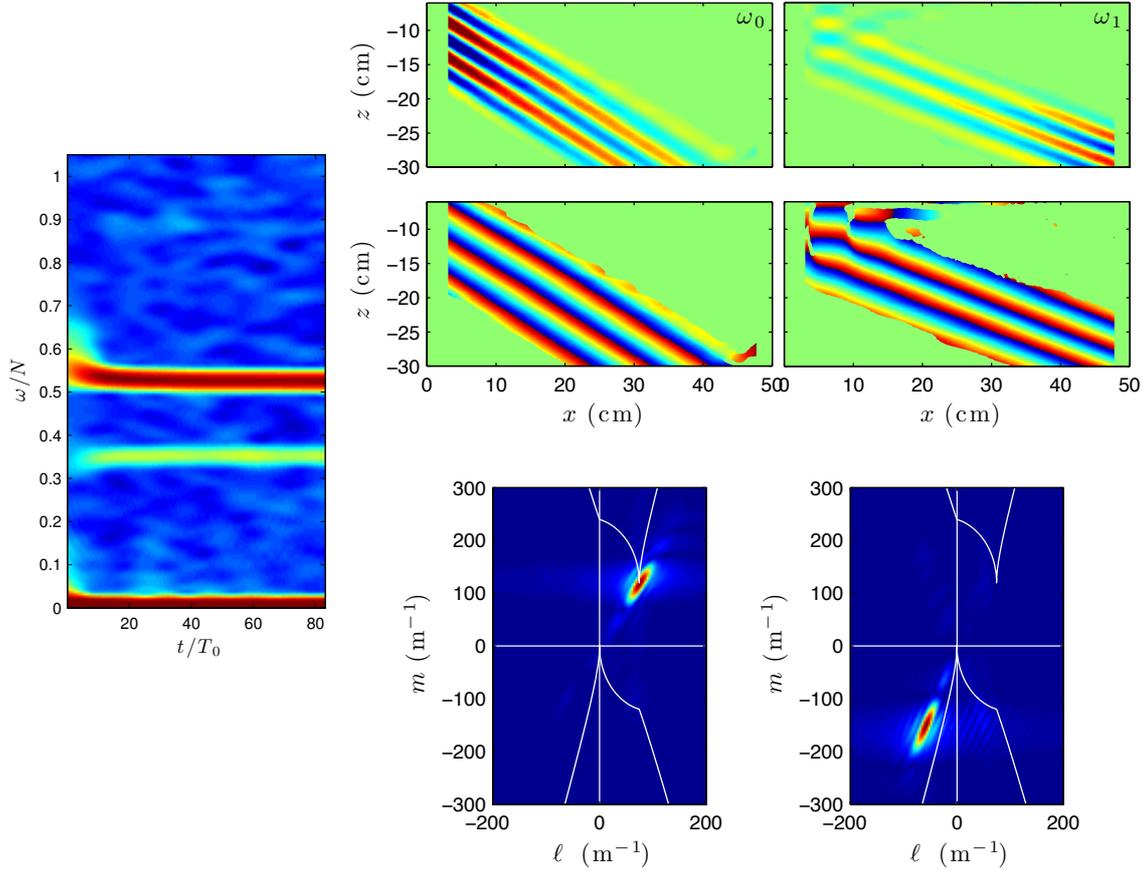


FIGURE 4.7 – À gauche : spectre temps-fréquence d'une expérience de collision d'onde. Les fréquences des deux ondes mises en jeu sont  $\omega_0/N = 0.52$  et  $\omega/N = 0.35$ . À droite : résultat du filtre aux fréquences des deux ondes en jeu. La dernière ligne présente les spectres bi-dimensionnels calculés à partir des images de la première ligne. La ligne blanche superposée aux spectres bi-dimensionnels correspond aux solutions des conditions de résonance temporelle et spatiale calculées à partir de l'onde primaire de pulsation  $\omega_0$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_0$ .

Cependant, en préparant correctement les deux générateurs et les pulsations, nous avons été en mesure d'observer la génération d'une interaction triadique sur la zone centrale.

La figure 4.8 présente les champs de gradient de densité filtrés aux pulsations  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ainsi que la phase associée à ces champs. Ces pulsations ont été mesurées à l'aide d'un spectre temps-fréquence, permettant de s'assurer également que ces trois fréquences vérifient la condition de résonance temporelle. Enfin, la dernière ligne de cette figure présente le spectre bi-dimensionnel des champs filtrés. Le maximum du spectre 2D (zone en rouge) permet ainsi d'obtenir une mesure des vecteurs d'ondes associés à chaque onde.

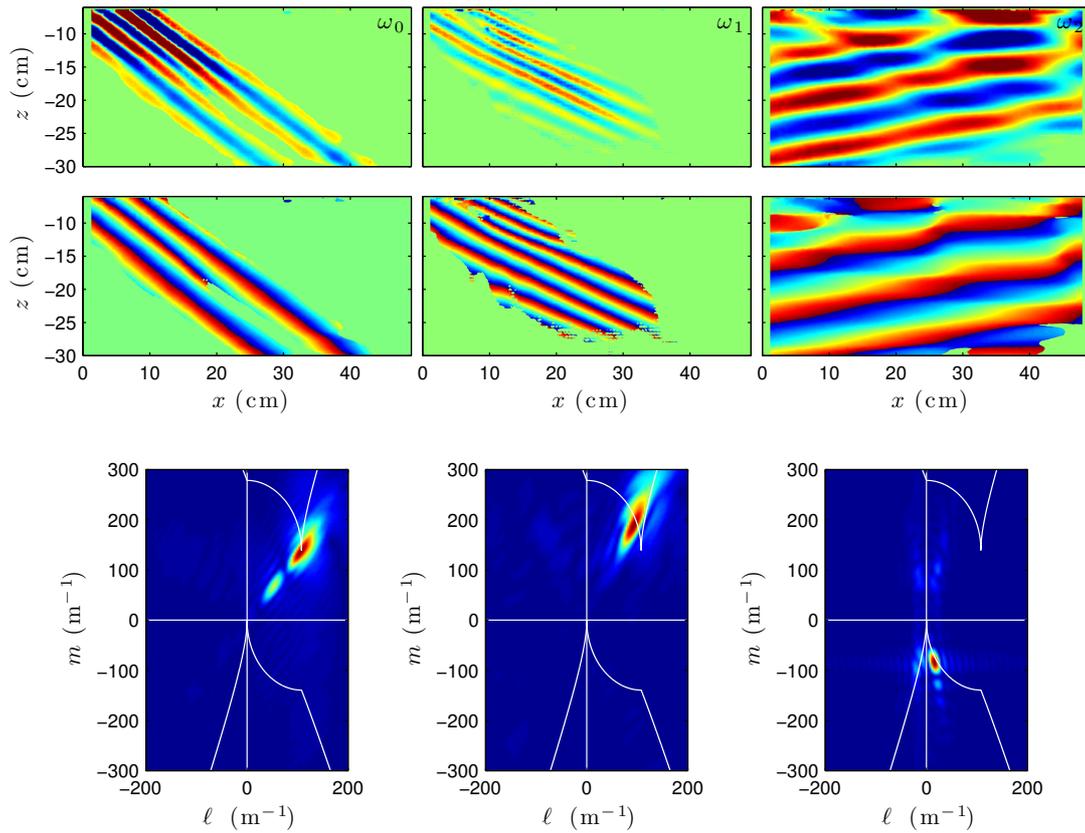


FIGURE 4.8 – Première ligne : champs de gradient de densité obtenus après filtrage de Hilbert pour chaque fréquence. Seconde ligne : phase des images de la première ligne. La dernière ligne expose les spectres bi-dimensionnels calculés à partir des images de la première ligne. À ces spectres est superposé l'ensemble des lieux de résonance de l'interaction triadique pour une onde primaire de pulsation  $\omega_0$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}_0$  (ligne blanche).

Pour cette expérience, nous avons généré les fréquences  $\omega_0$  et  $\omega_2$ . L'onde de fréquence  $\omega_1$  est le résultat de l'interaction triadique.

Par ailleurs, les lieux de résonance de l'interaction triadique sont donnés par la courbe blanche superposée aux spectres bi-dimensionnels. Il est alors clair que l'interaction triadique observée se situe sur la zone centrale de l'espace des solutions, puisque les maxima des spectres 2D se superposent à cette courbe. Nous sommes ainsi capables d'observer une interaction triadique résonante sur la zone centrale de l'espace des solutions du système.

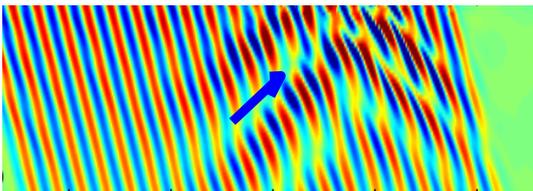
## Conclusion

Nous avons vu, au cours de ce chapitre, que la collision d'ondes internes et la PSI sont des cas extrêmement proches. Ainsi l'étude des règles de sélection définies dans le cas de collision d'ondes a permis de confirmer que la résolution du système non-linéaire permet de prendre correctement en compte toutes les contraintes dues aux conditions de résonance et à la relation de dispersion des ondes.

De plus, l'approche collisionnelle a permis l'observation d'une interaction triadique dans le régime où  $0 < \ell_1 < \ell_0$ . Nous pouvons ainsi affirmer que le fait de ne pas observer le régime de la PSI, pour lequel les vecteurs d'ondes secondaires sont sélectionnés dans la zone centrale, n'est pas dû à une particularité de l'interaction résonante que nous aurions oubliée. Nous devons donc désormais chercher quelles sont les différences entre le dispositif expérimental et la théorie développée au cours du chapitre 3 qui permettront d'expliquer ces observations expérimentales.

---

## Effet de taille finie



Comme nous l'avons vu précédemment, la sélection des ondes secondaires issues de l'instabilité paramétrique sous-harmonique dépend théoriquement de la fréquence et de l'amplitude de l'onde mère. Cependant, nous avons pu constater des écarts significatifs entre les observations expérimentales et les prédictions, la principale différence entre notre dispositif expérimental et la théorie étant la largeur du faisceau. En effet, dans nos expériences, mais également dans les océans [21, 36, 56], les faisceaux d'ondes internes possèdent un petit nombre de longueurs d'ondes, alors que la théorie est développée pour un faisceau d'onde plane d'extension infinie. Nous pouvons donc nous demander quel est l'impact de ce paramètre sur le développement de la PSI [89].

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats expérimentaux et numériques mettant en évidence un effet important de la largeur du faisceau sur l'instabilité triadique. Nous verrons dans un premier temps le dispositif expérimental utilisé ainsi que le cadre des simulations numériques. Puis nous détaillerons la théorie de la PSI prenant en compte la largeur finie du faisceau de l'onde primaire. Enfin nous décrirons les différentes prédictions de cette théorie que nous comparerons aux observations expérimentales et numériques.

## 5.1 Approche expérimentale et numérique

### 5.1.1 Dispositif expérimental

Une cuve de 160 cm de large, de 17 cm de profondeur est remplie d'un fluide linéairement stratifié avec une pulsation de flottabilité constante  $N$  sur toute la hauteur du fluide (36 cm). Une onde interne est générée à l'aide du générateur d'ondes, décrit dans le paragraphe 2.2 [37, 67]. Le générateur est placé horizontalement à la surface du fluide stratifié tout comme dans le chapitre 3.

La largeur du faisceau  $W$  peut être changée de  $\lambda_0$  à  $5 \lambda_0$ , avec  $\lambda_0$  la longueur d'onde de l'onde générée. Par ailleurs la longueur d'onde horizontale  $\ell_0$  peut également être modifiée, ainsi que l'amplitude de déplacement des plaques  $a$  (voir paragraphe 2.2), et la pulsation de l'onde mère  $\omega_0$ .

### 5.1.2 Méthode numérique

En plus de ces expériences, des simulations numériques 2D avec le logiciel commercial Comsol Multiphysics ont été effectuées en collaboration avec Patrice Meunier<sup>1</sup> et Michael Le Bars<sup>2</sup>. Nous effectuons la résolution du système d'équations composé de la condition d'incompressibilité du fluide, de l'équation de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq et de l'équation de conservation de la masse pour un fluide newtonien, en tenant compte de la diffusion du sel. Le maillage est constitué d'éléments triangulaires de Lagrange de type  $P_2 - P_3$  (c'est à dire quadratique pour le champ de pression mais cubique pour le champ de vitesse et de densité).

Le nombre total de degrés de liberté est supérieur à 2 millions. L'avance en temps est régie par un solveur IDA (Implicite Differential-Algebraic) et à chaque pas de temps, le système est résolu avec le solveur direct linéaire pour matrices creuses PARDISO. Le nombre de Schmidt, qui compare la diffusion du sel et la viscosité cinématique, est fixé à  $Sc = 10$  afin d'approcher le plus possible la valeur de  $Sc = 700$  du fluide expérimental. Afin d'éviter la formation d'une onde réfléchie au niveau de la frontière inférieure du domaine de simulation, une couche d'atténuation est ajoutée après la zone d'intérêt, dans laquelle la viscosité et la diffusion augmentent exponentiellement avec la profondeur. En outre, nous n'imposons aucune contrainte sur les bords de domaine (sauf à la surface où l'onde est générée), et le flux à travers les bords est nul.

Par ailleurs, afin de simuler la génération par le générateur d'ondes expérimental, la vitesse et la densité sont simultanément imposées à chaque pas de temps au niveau de la frontière supérieure du domaine. Ces champs imposés correspondent à une onde de gravité linéaire. Il est à noter qu'à  $t = 0$ , le faisceau d'onde plane linéaire, solution du problème visqueux, est imposé dans tout le domaine. L'onde primaire est donc présente sur toute la hauteur du fluide à  $t = 0$  de la simulation.

L'approche numérique permet une plus grande liberté quant au choix de la largeur du faisceau de l'onde primaire. Nous pourrions ainsi étudier la propagation de faisceau d'onde plane composé de plus de  $5 \lambda_0$ . Les paramètres utilisés pour les expériences et les simulations présentées dans ce chapitre sont résumés dans le tableau 5.1.

---

1. Chercheur CNRS à l'IRPHE, Marseille.

2. Chercheur CNRS à l'IRPHE, Marseille.

Exp.	$N$ (rad·s <sup>-1</sup> )	$\omega_0/N$	$\ell_0$ (m <sup>-1</sup> )	$\psi_0/\nu$	$W$	Approche
I	0.89	0.85	110	16.9	1 à 5 $\lambda_0$	Expérimentale
II	0.89	0.85	110	16.9	2 à 3 $\lambda_0$	Numérique
III	0.91	0.74	75	33	3 $\lambda_0$	Expérimentale
IV	0.91	0.74	75	33	3 $\lambda_0$	Numérique
V	0.91	0.74	75	33	20 $\lambda_0$	Numérique

TABLE 5.1 – Paramètres expérimentaux et numériques des différentes expériences évoquées au cours de ce chapitre :  $N$  est la pulsation de flottabilité en rad·s<sup>-1</sup>,  $\omega_0$  la pulsation de l'onde mère,  $\ell_0$  la composante horizontale du vecteur d'onde de l'onde mère,  $\psi_0$  l'amplitude de la fonction courant et  $W$  la largeur du faisceau primaire.

### 5.1.3 Observations

À l'aide du dispositif décrit précédemment, de nombreuses expériences ont pu être effectuées afin d'observer le comportement de la PSI en fonction de la fréquence, de l'amplitude et de la largeur du faisceau. Nous pouvons rassembler toutes ces expériences sur un même graphique (figure 5.1). Sur cette figure, les ronds représentent des expériences pour lesquelles le faisceau primaire se déstabilise en deux ondes secondaires. Les croix, quant à elle, représentent des expériences sans PSI détectable.

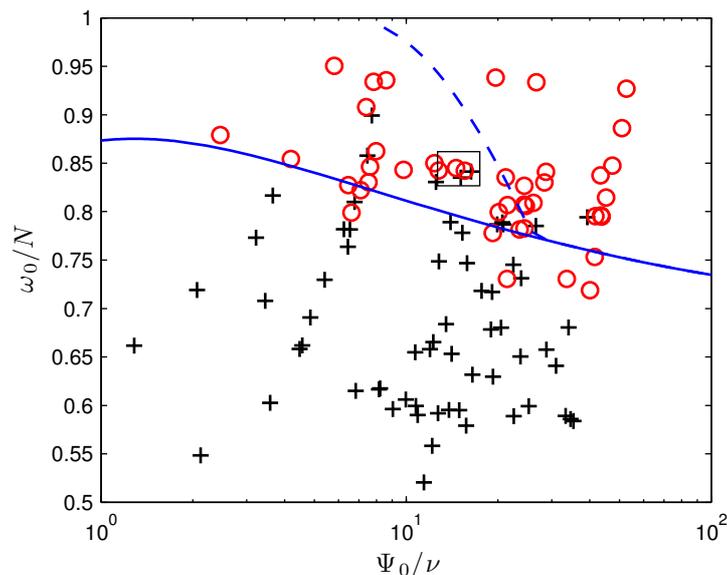


FIGURE 5.1 – Représentation des expériences effectuées en fonction de la pulsation de l'onde mère  $\omega_0$ , normalisée par la pulsation de flottabilité  $N$ , et de l'amplitude de la fonction courant de l'onde mère  $\Psi_0$ , normalisée par la viscosité  $\nu$ . La ligne continue représente pour chaque amplitude la transition entre le cas où les ondes secondaires sont sélectionnées sur la partie extérieure de l'espace des solutions et le cas où les ondes secondaires sont sélectionnées sur la partie centrale. La ligne en pointillé représente la pulsation seuil en dessous de laquelle le transfert d'énergie vers les grandes échelles est possible. Les cercles rouges représentent les expériences présentant de la PSI, les croix noirs des expériences stables.

Pour rappel, cet espace peut être divisé en trois parties :

- une zone en haut à droite, correspondant à un transfert vers les petites échelles uniquement,
- une zone en haut à gauche située sous la ligne en pointillé et au-dessus de la ligne continue, correspondant à des ondes secondaires sélectionnées sur la zone extérieure de l'espace des solutions mais dont le transfert d'énergie s'effectue à la fois vers les petites et les grandes échelles,
- une zone située sous la ligne continue, pour laquelle les ondes secondaires sont sélectionnées sur la zone centrale correspondant également à un transfert vers les petites et les grandes échelles.

Il est alors clair que, malgré la variation de la taille du faisceau, de l'amplitude et de la fréquence, la zone intérieure de l'espace des solutions, correspondant à la partie située sous la courbe continue bleue, n'est jamais observable. Les expériences présentant de la PSI sous la ligne continue correspondent à des ondes secondaires sélectionnées sur la partie extérieure et non sur la partie centrale. En revanche, le cas où les ondes secondaires sont sélectionnées sur la partie extérieure de la triade et permettant un transfert simultané vers grandes et petites échelles (sous la courbe en pointillée bleu) est observable. L'apparition de l'instabilité est alors fortement dépendante de la largeur du faisceau primaire.

Nous allons, par la suite, nous concentrer principalement sur l'étude des expériences I, correspondant aux points situés dans le rectangle noir de la figure 5.1, et des simulations associées II. Nous nous intéresserons en particulier à l'étude des expériences et des simulations pour un faisceau primaire de largeur  $2\lambda_0$  et  $3\lambda_0$ . Les figures 5.2(a) et 5.2(c) présentent l'évolution temporelle du gradient vertical de densité mesuré en un point du champ expérimental (expérience I) pour  $W = 2\lambda_0$  et  $W = 3\lambda_0$ , tandis que les figures 5.2(b) and 5.2(d) montrent l'évolution temporelle de la même grandeur obtenue par des simulations numériques (expérience II).

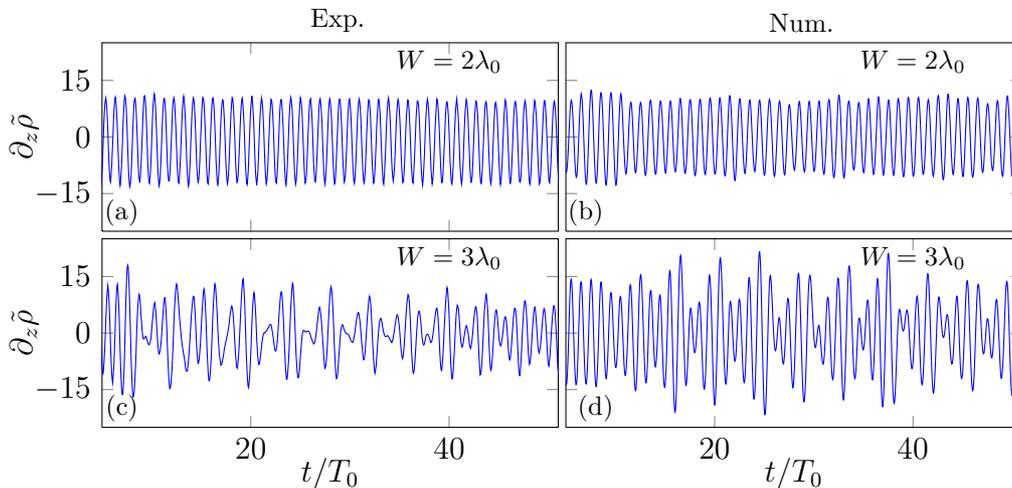


FIGURE 5.2 – Évolution temporelle de l'amplitude de  $\partial_z \tilde{\rho}$ , en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-4}$ , mesurée en un point situé à 4.5 cm sous le générateur pour différentes largeurs du faisceau :  $W = 2\lambda_0$  (première ligne) et  $3\lambda_0$  (seconde ligne) pour les expériences I et II ( $\omega_0/N = 0.85$ ,  $\ell_0 = 110 \text{ m}^{-1}$ ,  $\psi_0/\nu = 16.9$ ). Les résultats expérimentaux correspondent à la colonne de gauche et les résultats numériques à la colonne de droite.

Les résultats expérimentaux et numériques présentent un très bon accord, conduisant tous deux à la même observation : alors que pour un faisceau de largeur  $W = 2\lambda_0$  (figures 5.2(a,b)), la régularité du signal atteste de l'absence d'une résonance triadique, le

cas où  $W = 3\lambda_0$  (figures 5.2(c,d)) présente une modulation du signal typique de l'apparition de nouvelles fréquences dans le système.

Par ailleurs, pour les expériences avec  $W = 4\lambda_0$  et  $5\lambda_0$ , l'instabilité est également observée. Il est à noter que pour ces paramètres les ondes secondaires observées sont sélectionnées sur la partie extérieure de l'espace des solutions décrit au paragraphe 3.2.4, mais qu'une des deux ondes secondaires possède une longueur d'onde plus grande que la longueur d'onde de l'onde primaire. Lorsque l'instabilité se développe (pour  $W > 3\lambda_0$ ) nous observons un transfert vers les grandes et les petites échelles. Les résultats numériques et expérimentaux révèlent ainsi pour la première fois le rôle important de la largeur du faisceau sur le développement ou non de l'instabilité.

## 5.2 Théorie

Afin de comprendre cette observation, il est essentiel de se rendre compte que la théorie de la PSI développée au cours du chapitre 3 et par Koudella *et al.* [53] est obtenue pour une onde plane dont l'extension spatiale est infinie. Nous proposons donc ici de prendre en compte la largeur du faisceau de l'onde primaire, avec pour idée directrice, le fait que les deux ondes secondaires puissent sortir de la zone d'interaction définie par l'onde primaire [63]. Dès que les ondes secondaires ont quitté cette région, elles ne peuvent plus interagir avec l'onde primaire et le transfert d'énergie est stoppé. Le raisonnement qui va suivre repose alors sur un simple bilan d'énergie.

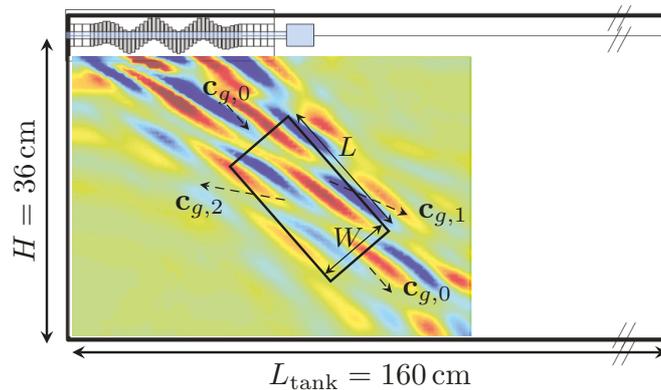


FIGURE 5.3 – Schéma du dispositif expérimental. Le générateur est disposé à l'horizontale à la surface du fluide stratifié. L'image de fond présente un cas classique de propagation et de déstabilisation d'une onde interne émise par le générateur et se propageant vers le coin inférieur droit de la cuve. Le rectangle penché de longueur  $L$  et de largeur  $W$  correspond à la zone de contrôle utilisée dans le modèle théorique.

Afin d'effectuer ce bilan d'énergie, nous définissons une zone de contrôle contenue dans le faisceau de l'onde primaire. Cette zone de contrôle est présentée sur la figure 5.3 à l'aide du rectangle penché dans la direction de l'onde primaire. Afin de simplifier le développement, nous supposons qu'il n'y a pas d'atténuation spatiale de l'onde primaire dans ce domaine, *i.e.* les énergies surfaciques  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_2$  des différentes ondes sont considérées constantes dans la zone de contrôle. Ainsi, la variation temporelle de l'énergie de l'onde primaire dans ce domaine est uniquement due à :

1. les interactions non-linéaires qui transfèrent de l'énergie depuis l'onde primaire vers les ondes secondaires notées  $\Gamma_{int}(i, j)$  où  $i$  et  $j$  désignent les deux autres ondes de la

- triade,
2. la viscosité,
  3. le flux entrant et sortant de l'onde primaire.

Ces contributions s'écrivent alors sous la forme suivante

$$\frac{dE_0}{dt}LW = \Gamma_{int}(1, 2) - \nu \mathbf{k}_0^2 E_0 LW + E_{in} W \mathbf{c}_{g,0} - E_0 W \mathbf{c}_{g,0} , \quad (5.1)$$

avec  $E_{in}$  l'énergie de surface injectée par le générateur et  $\mathbf{c}_{g,0} = (N^2 - \omega_0^2)^{1/2}/\mathbf{k}_0$  la norme de la vitesse de groupe de l'onde primaire.

Les deux ondes secondaires n'ayant pas la même direction de propagation que l'onde mère, elles sortent du domaine à la fois par les côtés de longueur  $L$  et les côtés de longueur  $W$ . Nous supposons, par ailleurs, que l'instabilité se développe de la même manière dans l'ensemble du faisceau. Ainsi la quantité d'énergie des ondes filles pénétrant dans la zone de contrôle par le coté de longueur  $W$  est exactement la même que celle sortant du domaine par le coté de longueur  $W$ . Finalement, seule la perte d'énergie par les cotés de longueur  $L$  sont à prendre en compte. Ces hypothèses permettent d'écrire l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de l'énergie  $E_i$  dans la zone de contrôle

$$\frac{dE_i}{dt}LW = \Gamma_{int}(0, j) - \nu \mathbf{k}_i^2 E_i LW - E_i W |\vec{c}_{g,i} \cdot \vec{e}_{k_0}| , \quad (5.2)$$

avec  $i = 1, 2, j = 2, 1$  et le module de la vitesse de groupe  $\mathbf{c}_{g,i} = (N^2 - \omega_i^2)^{1/2}/\mathbf{k}_i$ .

Le premier terme de cette équation représente le terme d'interaction non-linéaire avec les autres ondes de la triade, tandis que le troisième terme rend compte de l'énergie sortant du domaine par les côtés de longueurs  $L$ , *i.e.* une énergie émise selon la direction définie par  $\vec{k}_0$ . Nous obtenons finalement le système

$$\dot{E}_0 = \Gamma_{int}(1, 2) - \nu \mathbf{k}_0^2 E_0 + \frac{\mathbf{c}_{g,0}}{L} (E_{in} - E_0) , \quad (5.3)$$

$$\dot{E}_1 = \Gamma_{int}(0, 2) - \nu \mathbf{k}_1^2 E_2 - E_1 \frac{|\vec{c}_{g,1} \cdot \vec{e}_{k_0}|}{W} , \quad (5.4)$$

$$\dot{E}_2 = \Gamma_{int}(0, 1) - \nu \mathbf{k}_2^2 E_2 - E_2 \frac{|\vec{c}_{g,2} \cdot \vec{e}_{k_0}|}{W} . \quad (5.5)$$

Comme  $E_i \propto \mathbf{k}_i^2 \Psi_i \Psi_i^*$ , et  $E_{in} \propto \mathbf{k}_0^2 \Psi_{in} \Psi_{in}^*$ , avec  $\Psi_{in}$  l'amplitude de la fonction courant entrant dans la zone de contrôle, le système peut se réécrire en terme de  $\Psi_i$  et d'un nouveau terme d'interaction  $\gamma_{int}(i, j)$

$$2\Psi_0^* \dot{\Psi}_0 = \gamma_{int}(1, 2) - \nu \mathbf{k}_0^2 \Psi_0^* \Psi_0 + \frac{\mathbf{c}_{g,0}}{L} (\Psi_{in}^* \Psi_{in} - \Psi_0^* \Psi_0) , \quad (5.6)$$

$$2\Psi_1^* \dot{\Psi}_1 = \gamma_{int}(0, 2) - \nu \mathbf{k}_1^2 \Psi_1^* \Psi_1 - \Psi_1^* \Psi_1 \frac{|\vec{c}_{g,1} \cdot \vec{e}_{k_0}|}{W \mathbf{k}_1^2} , \quad (5.7)$$

$$2\Psi_2^* \dot{\Psi}_2 = \gamma_{int}(0, 1) - \nu \mathbf{k}_2^2 \Psi_2^* \Psi_2 - \Psi_2^* \Psi_2 \frac{|\vec{c}_{g,2} \cdot \vec{e}_{k_0}|}{W \mathbf{k}_1^2} . \quad (5.8)$$

Lorsque l'on fait tendre  $W$  vers l'infini, nous devons retrouver le même système que celui obtenu au cours du paragraphe 3.2.2. Cette limite permet ainsi d'identifier les termes d'interactions, qui s'expriment finalement de la manière suivante

$$\gamma_{int}(i, j) = (-1)^{\delta_{k_0}} 2|I_k| \{ \delta_{k_0} \Psi_0^* \Psi_1 \Psi_2 + (1 - \delta_{k_0}) \Psi_0 \Psi_1^* \Psi_2^* \} ,$$

avec

$$I_k = \frac{\ell_i m_j - m_j \ell_i}{2\omega_k \mathbf{k}_k^2} \left[ \omega_k (\mathbf{k}_i^2 - \mathbf{k}_j^2) + \ell_k N^2 \left( \frac{\ell_i}{\omega_i} - \frac{\ell_j}{\omega_j} \right) \right], \quad (5.9)$$

et  $i, j, k = 0, 1, 2$ . Le système se réécrit alors sous la forme

$$\dot{\Psi}_0 = -|I_0| \Psi_1 \Psi_2 - \frac{\nu}{2} \mathbf{k}_0^2 \Psi_0 + F, \quad (5.10)$$

$$\dot{\Psi}_1 = +|I_1| \Psi_0 \Psi_2^* - \left( \frac{\nu}{2} \mathbf{k}_1^2 + \frac{|\vec{c}_{g,1} \cdot \vec{e}_{k_0}|}{2W} \right) \Psi_1, \quad (5.11)$$

$$\dot{\Psi}_2 = +|I_2| \Psi_0 \Psi_1^* - \left( \frac{\nu}{2} \mathbf{k}_2^2 + \frac{|\vec{c}_{g,2} \cdot \vec{e}_{k_0}|}{2W} \right) \Psi_2, \quad (5.12)$$

avec  $F = \mathbf{c}_{g,0} (\Psi_{in}^* \Psi_{in} - \Psi_0^* \Psi_0) / (2L \Psi_0^*)$  un terme de forçage. Ce terme correspond ainsi à la différence d'énergie entrante et sortante de l'onde mère dans la zone de contrôle. Nous pouvons remarquer que sans énergie entrante, tous les termes de l'équation différentielle serait négatif et l'amplitude de l'onde mère ne ferait que décroître. Ce terme de forçage est donc indispensable pour conserver une amplitude constante.

Les solutions pour  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  peuvent être aisément obtenues en effectuant l'hypothèse que  $\Psi_0$  est constant au cours du temps. Nous obtenons ainsi des solutions exponentiellement croissantes dont le taux de croissance est de la forme

$$\sigma_{\pm} = -\frac{1}{4} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \pm \sqrt{\frac{1}{16} (\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + |I_1| |I_2| |\Psi_0|^2}, \quad (5.13)$$

où  $\Sigma_i = \nu \mathbf{k}_i^2 + \sigma_{adv}(\mathbf{k}_i)$  et où  $\sigma_{adv}(\mathbf{k}_i) = |\vec{c}_{g,i} \cdot \vec{e}_{k_0}| / W$  est l'inverse d'un temps d'advection caractérisant le transport d'énergie en dehors du faisceau de l'onde mère par les ondes secondaires.

Nous observons immédiatement que, lorsque  $\sigma_{adv}$  est grand, le taux de croissance est fortement modifié par rapport à la théorie d'une onde plane infinie. Trois paramètres vont influencer sur la valeur de  $\sigma_{adv}$  :

1. La taille du faisceau  $W$ .  $\sigma_{adv}$  variant comme l'inverse de la largeur du faisceau, le taux de croissance sera d'autant plus modifié que le faisceau est fin. Par contre, il est à noter que lorsque  $W$  tend vers l'infini,  $\sigma_{adv}$  tend vers 0 et nous retrouvons alors le taux de croissance de l'équation (3.31).
2. La direction de propagation des ondes secondaires. En effet plus les ondes secondaires sont perpendiculaires au faisceau primaire, plus il y a d'énergie perdue par les bords de longueur  $L$ , et ainsi le taux de croissance de l'instabilité est fortement impacté.
3. La vitesse de groupe des ondes secondaires. Outre la direction de la vitesse de groupe, sa norme influe également sur le taux de croissance. Par ailleurs, il est à noter que la vitesse de groupe est inversement proportionnelle à la norme du vecteur d'onde. Ainsi pour de petites valeurs de  $\mathbf{k}_i$ , la vitesse de groupe augmente, renforçant ainsi l'effet de largeur finie.

Nous pouvons attendre, en particulier, un effet important lorsque  $\vec{k}_i$  est quasiment perpendiculaire à  $\vec{k}_0$  et est de norme faible, cette configuration maximisant ainsi l'effet des deux derniers paramètres présentés ci dessus. En outre,  $\sigma_{adv}$  est plus faible pour de faibles stratifications  $N$  (petite vitesse de groupe) à  $\mathbf{k}$  et  $\omega$  fixés, ce qui implique une plus forte instabilité dans les océans où les stratifications sont plus faibles que dans nos expériences.

Pour les expériences I et II présentées sur la figure 5.2, le modèle décrit précédemment prédit que le taux de croissance est une fonction croissante de  $W$ . Par ailleurs, pour un faisceau infiniment large, le seuil visqueux de la PSI vaut  $\Psi_0 / \nu = 0.2$  tandis que pour  $W =$

$2\lambda_0$ , le maximum de taux de croissance devient négatif pour des amplitudes inférieures à  $\Psi_0/\nu < 4.4$ . Néanmoins, en raison de la durée finie de nos expériences, même si l'instabilité se développe il est possible de ne pas la percevoir si l'amplitude des deux ondes secondaires est trop faible. En effet, si la durée totale de l'expérience est faible ou de l'ordre de l'inverse du taux de croissance des ondes secondaires, ces dernières garderont une amplitude trop faible pour être détectable par la technique de Schlieren Synthétique mise en place. Nous établissons alors un critère sur le taux de croissance maximum et le temps de l'expérience : les ondes secondaires seront détectables si le temps de l'expérience est supérieur à trois fois l'inverse du taux de croissance. Avec ce critère, lorsque  $W = 2\lambda_0$  l'instabilité peut seulement être observée pour  $\Psi_0/\nu > 8.5$ . Cette valeur est du même ordre de grandeur que l'amplitude des expériences I et II. L'écart entre la prédiction et les observations peut venir du fait que le modèle ne prend pas en compte la dépendance spatiale de l'amplitude de l'onde primaire et que la mesure de l'amplitude est effectuée proche du générateur, ce qui peut surestimer expérimentalement l'amplitude de l'onde primaire.

Cette nouvelle analyse révèle ainsi un effet important sur le développement de l'instabilité qui avait été totalement occulté jusqu'à présent. Lorsque le faisceau devient plus fin, le seuil de la PSI, initialement dû à la viscosité, est déplacé vers de plus grandes amplitudes de forçage et peut ainsi bloquer le développement de l'instabilité.

### 5.3 Sélection de la triade

Nous allons, au cours de ce paragraphe, montrer que la largeur du faisceau mère, dans certaines conditions, peut, non pas bloquer la déstabilisation, mais modifier la sélection des ondes secondaires. Afin d'observer cet effet, nous allons nous concentrer sur les expériences correspondant aux expériences III, IV et V du tableau 5.1. Les champs de gradient de densité expérimentaux et numériques des expériences III et IV, sont présentés sur la figure 5.4(a) et 5.4(b). Nous observons un bon accord qualitatif entre la simulation et l'expérience, avec une déstabilisation du faisceau dans les deux cas.

Les paramètres pour ces expériences étant les mêmes que pour l'expérience décrite au cours du chapitre 3, la triade prédite par la théorie classique est composée d'une onde dont la longueur d'onde est plus grande que la longueur d'onde de l'onde mère et d'une seconde de longueur d'onde plus petite. Dans ce cas, le transfert énergétique s'effectue à la fois des grandes vers les petites échelles et des petites vers les grandes échelles. Cependant, cette prédiction n'est pas vérifiée et nous observons une triade dont les vecteurs d'ondes des ondes secondaires sont sélectionnés sur la partie extérieure de l'espace des solutions, alors que la prédiction prévoit des vecteurs secondaires sélectionnés sur la partie centrale (voir paragraphe 3.3). Nous n'observons alors qu'un transfert vers les petites échelles que ce soit pour l'expérience ou la simulation numérique. Cet effet est-il dû à la largeur du faisceau de l'onde mère, discriminant le régime de l'instabilité correspondant à la zone intérieure ?

Afin de vérifier le rôle de ce paramètre, nous utilisons des résultats numériques, permettant d'accéder à des faisceaux beaucoup plus larges qu'expérimentalement. La figure 5.4(c) présente le résultat de l'expérience V, *i.e.* pour les mêmes jeux de paramètres que les expériences III et IV mais avec un faisceau beaucoup plus large ( $W = 20\lambda_0$ ). Nous observons alors que le faisceau primaire est toujours instable, mais que les ondes secondaires semblent différentes du cas à  $W = 3\lambda_0$ . Pour quantifier cette différence, nous effectuons une transformée de Hilbert [66] ainsi qu'une transformée de Fourier spatiale pour mesurer les différents vecteurs d'ondes présents dans le champ de gradient de densité numérique. Les vecteurs d'ondes obtenus ainsi sont présentés sur les figures 5.5(a) et 5.5(b). Comme auparavant les

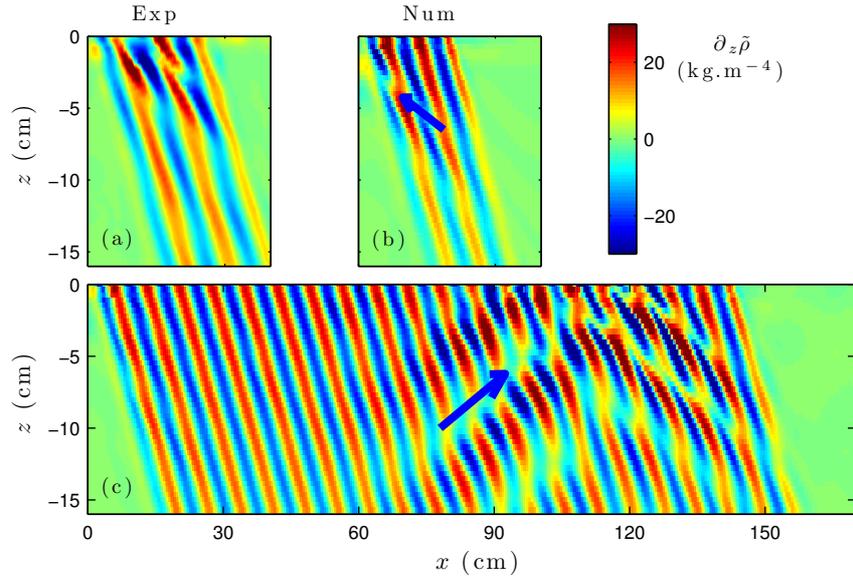


FIGURE 5.4 – Gradient de densité verticale pour les expériences III et IV ( $\omega_0/N = 0.74$ ,  $\ell_0 = 66 \text{ m}^{-1}$ ,  $\psi_0/\nu = 33$ ). (a) Champ expérimental avec  $W = 3\lambda_0$ . (b) Champ numérique avec  $W = 3\lambda_0$ . (c) Champ numérique avec  $W = 20\lambda_0$ . Les deux flèches bleues représentent la direction de la vitesse de groupe de l'onde secondaire la plus visible.

lignes noires de ces figures représentent les lieux théoriques de résonance de l'interaction triadique pour l'extrémité de  $\vec{k}_1$ .

Nous pouvons observer une différence très nette entre ces deux figures. En effet, pour  $W = 3\lambda_0$ , une seule triade est détectable et le vecteur d'onde  $\vec{k}_1$  appartient à la branche extérieure de l'espace des solutions ( $\ell_1 > \ell_0$ ). Les longueurs d'ondes des deux ondes secondaires sont plus petites que celle de l'onde primaire. En revanche, pour  $W = 20\lambda_0$ , la formation de deux triades distinctes est observée. La première en pointillé ( $\vec{k}_{1,e}$ ) est positionnée sur une branche extérieure<sup>3</sup> de l'espace des lieux de résonance. Cette triade est similaire à celle observée dans le cas  $W = 3\lambda_0$ . La seconde triade en trait plein ( $\vec{k}_{1,c}$ ) est située sur la partie centrale<sup>4</sup> de l'espace des solutions  $0 < \ell_1 < \ell_0$ . Dans ce cas une des deux ondes filles possède une longueur d'onde plus grande que la longueur d'onde de l'onde mère, la seconde est, quant à elle, plus petite.

Ces observations peuvent être expliquées par le modèle prenant en compte la largeur finie du faisceau primaire. En effet, ce modèle prédit une évolution du taux de croissance en fonction de la largeur du faisceau  $W$  présentée sur la figure 5.5(c). Le taux de croissance a été calculé pour un vecteur  $\vec{k}_1$  sur la partie centrale et pour un vecteur  $\vec{k}_1$  sur la branche extérieure. Nous représentons ici le maximum pour chacune de ces deux zones. Le cercle correspond au maximum situé sur la zone externe et la croix au maximum de la zone centrale. Une transition entre ces deux régimes est prédite pour  $W_c \approx 7\lambda_0$ . Pour  $W < W_c$ , le mode le plus instable est situé sur la partie externe de l'espace des solutions tandis que pour des faisceaux primaires plus larges le mode le plus instable est obtenu sur la partie centrale, bien que, dans ce cas,  $\vec{k}_1$  soit quasiment perpendiculaire à  $\vec{k}_0$  augmentant ainsi  $\sigma_{adv}$ .

3. d'où l'indice "e"

4. d'où l'indice "c"

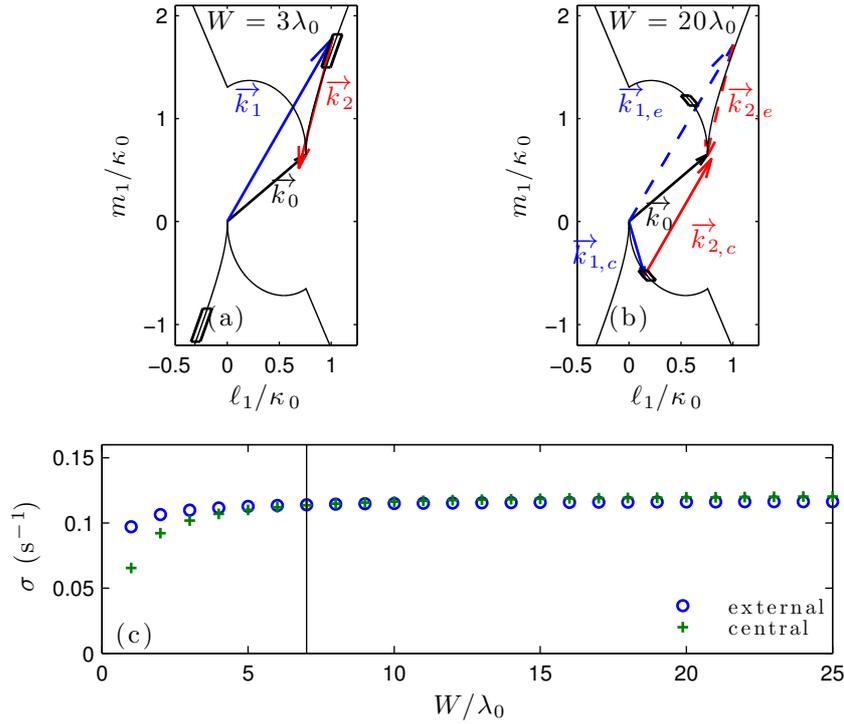


FIGURE 5.5 – (a) Les trois vecteurs sont les mesures des trois vecteurs d’ondes pour le cas numérique  $W = 3\lambda_0$  (expérience IV). (b) Les cinq vecteurs sont les mesures des vecteurs d’ondes pour le cas numérique  $W = 20\lambda_0$  (expérience V). Pour (a) et (b), la ligne continue noire représente les lieux de résonance pour l’onde secondaire  $\vec{k}_1$  pour un  $\vec{k}_0$  donné. Les rectangles représentent la position des maxima de taux de croissance prédits par le nouveau modèle de taille finie. (c) Evolution du taux de croissance en fonction de la largeur du faisceau, calculé à partir du modèle de taille finie. La transition entre la sélection d’une triade extérieure et d’une triade intérieure est obtenue aux alentours de  $W = 7\lambda_0$  (ligne verticale).

Au cours de la simulation numérique, la triade sélectionnée sur la zone centrale apparaît en premier, puis, après quelques périodes de l’onde mère, la triade extérieure apparaît à son tour, ce qui est en accord avec les valeurs relatives des taux de croissance à  $W = 20\lambda_0$ . Ces simulations numériques confirment donc l’influence de la largeur du faisceau sur la sélection des ondes secondaires. Ce nouvel effet explique ainsi pourquoi le transfert d’énergie s’effectue principalement des grandes vers les petites échelles pour des faisceaux fins.

## Conclusion

Nos observations expérimentales ont donc permis de mettre en avant l’importance de la taille du faisceau primaire, paramètre dont l’effet n’avait jusqu’à présent jamais été observé ni expérimentalement ni numériquement. Ces observations ont ensuite été confirmées par des simulations numériques et le développement d’une théorie prenant en compte ce paramètre. Bien qu’ignoré jusqu’à présent, ce paramètre a un fort impact sur l’instabilité. En effet, la largeur finie de l’onde primaire a deux effets opposés sur la déstabilisation de l’onde interne primaire :

- la génération des deux ondes secondaires peut être totalement bloquée, réduisant ainsi fortement le transfert d'énergie et donc la dissipation de l'onde mère,
- lorsque l'onde primaire peut se déstabiliser, les petites longueurs d'ondes, plus dissipatives, sont favorisées, augmentant ainsi la perte d'énergie de l'onde primaire.

Par ailleurs nous n'avons étudié ici que l'effet de la largeur du faisceau et non de la forme du faisceau. En effet, dans notre cas, nous générons un faisceau possédant  $n$  longueurs d'ondes d'amplitude constante et deux demi-longueurs d'ondes sur les bords dont l'amplitude décroît progressivement. Ce profil permet de générer des faisceaux sans ondes parasites. Cependant d'autres profils, tels que le profil de Thomas-Stevenson ou encore un profil gaussien, sont possibles et influent également sur la sélection des ondes secondaires<sup>5</sup>.

Il n'a cependant pas échappé à notre analyse que la force de Coriolis présente dans le cas océanique modifie de manière significative la prédiction. En effet, la vitesse de groupe des ondes gravito-inertielles, proportionnelle à  $\sqrt{(\omega^2 - f^2) \cdot (N^2 - \omega^2)}/(\omega \mathbf{k})$  [34], décroît avec le paramètre de Coriolis  $f$ . La rotation réduit ainsi la capacité des ondes secondaires à s'échapper du faisceau primaire, augmentant ainsi la possibilité de déstabilisation de l'onde. Par ailleurs, à la latitude critique, la vitesse de groupe s'annule, ce qui permet de retrouver les prédictions théoriques pour une onde plane d'extension spatiale infinie.

Cette nouvelle théorie prenant en compte la largeur finie du faisceau primaire est donc de première importance, en particulier lors de l'étude de mesures d'ondes internes océaniques [21, 36, 56]. Dans l'océan, les longueurs d'ondes sont plus grandes de quelques ordres de grandeurs, le nombre de Reynolds est également plus grand, rendant ainsi les effets de viscosité négligeables. Cela signifie que la largeur du faisceau est le seul paramètre de contrôle du taux de croissance de l'instabilité.

En conclusion, les effets de taille finie modifient significativement le transfert d'énergie entre les échelles et devraient être pris en compte dans les analyses de turbulence d'onde [9, 58, 59] (dans lesquelles les ondes internes d'extension infinie sont les objets classiquement utilisés) afin d'obtenir des prédictions plus réalistes.

---

5. L'influence de ce paramètre a été étudiée par Hussain et Akylas et décrite dans un article soumis à Journal of Fluids Mechanics.



---

## Bilan sur l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique

Cette partie a été l'occasion d'exposer les premiers travaux expérimentaux sur l'instabilité paramétrique sous-harmonique sur une onde plane interne de gravité. À l'aide de traitement spatial et temporel, nous avons pu mesurer les fréquences et les vecteurs d'ondes des ondes secondaires et comparer ces mesures aux prédictions théoriques. Grâce à la flexibilité de notre générateur d'ondes internes, de nombreuses expériences ont pu être réalisées en faisant varier différents paramètres et il est apparu un écart systématique entre les observations expérimentales et les prédictions. En effet, nous n'avons jamais pu observer la génération spontanée d'ondes secondaires sélectionnées sur la zone centrale de l'espace des solutions. De plus, ces expériences ont mis en avant une dépendance de l'apparition de l'instabilité paramétrique avec la largeur du faisceau d'onde interne primaire, dépendance qui n'apparaît à aucun moment dans le modèle théorique.

Nous avons alors développé un nouveau modèle théorique de la PSI prenant en compte la largeur finie du faisceau primaire. Ce modèle nous a permis de montrer que le nombre de longueurs d'ondes qui compose le faisceau primaire conditionne à la fois le développement de l'instabilité, et la sélection du mode le plus instable et de confirmer ainsi nos observations expérimentales.

Ce travail expérimental, numérique et théorique apporte une meilleure compréhension de l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique et met en exergue les paramètres clés à prendre en compte pour la mise à l'échelle océanique.



Troisième partie :

Mesure de densité (LIF)  
et de vitesse (PIV)  
en fluide continûment stratifié



## Introduction

Les ondes internes de gravité sont présentes dans les océans, en raison de la stratification en salinité et en température des eaux océaniques. Comme nous l'avons évoqué précédemment, ces ondes sont générées à la fois par l'interaction de la marée et des courants avec la topographie sous-marine et par le vent à la surface des océans [70]. Par ailleurs ces ondes peuvent voyager sur de grandes distances et, par des mécanismes de déferlement [86], participer au mélange océanique. Cependant, il est difficile de connaître précisément ces mécanismes pour principalement deux raisons :

- le mélange s'effectue à des échelles trop petites pour les simulations de la circulation globale,
- les mesures océaniques in-situ ne permettent pas d'obtenir d'informations spatiales suffisamment étendues pour quantifier le mélange sur de grandes surfaces.

Toutefois, le mélange par les ondes internes est important, puisqu'il est l'un des mécanismes permettant de convertir de l'énergie cinétique en énergie potentielle. Ce transfert permet de maintenir la stratification abyssale et de contrer l'accumulation d'eau froide et dense au niveau du plancher océanique causée par les courants de gravité [54, 94].

Plusieurs études expérimentales ont été faites sur le mélange induit par le déferlement des ondes internes de gravité. Nous pouvons citer, entre autres, les travaux de Ivey [46] à la fin des années 80 qui mesure une augmentation de l'énergie potentielle d'un fluide stratifié lors de la réflexion d'une onde interne de gravité sur une pente dont l'angle est proche de l'angle de propagation des ondes. Pour obtenir cette variation, des mesures ponctuelles de la stratification sont effectuées, puis l'énergie potentielle est déduite de ces mesures. La réflexion des ondes internes proche de l'angle critique est donc une source de mélange.

Puis dans les années 90, Thorpe observe dans un tube oscillant autour d'un axe horizontal que les ondes internes peuvent induire des retournements conduisant à des déferlements [92]. Ces retournements sont observés à l'aide de lignes de colorant uniformément réparties dans le fluide stratifié. La figure 1 présente l'évolution temporelle d'une isodensité lors d'un retournement du fluide stratifié. Nous pouvons observer l'apparition d'une structure en forme de  $Z$  inversé typique du retournement, puis lors du retour à l'équilibre la ligne d'isodensité semble plus large qu'à l'instant initial, évoquant ainsi l'impact d'un tel phénomène sur la stratification.

Enfin, Hebert *et al.* [39] étudient l'évolution verticale d'une ligne de colorant horizontale dans un fluide stratifié parcouru par un mode vertical. Cette mesure permet alors de déterminer la diffusion verticale induite par les ondes en fonction par exemple de l'amplitude de l'onde générée. Ils observent ainsi que la diffusion verticale de la ligne de colorant est augmentée lorsque le fluide est sujet à de nombreux retournements induits par les ondes secondaires générées à partir du mode primaire. Ces quelques expériences mettent en avant l'intérêt que porte le monde scientifique à la détermination de l'évolution de la densité au cours du temps.

Cependant, une caractérisation directe d'événements de mélange implique une mesure précise du flux vertical de la flottabilité  $g/\rho_0\langle\rho'w'\rangle$ , induit par les ondes de gravité, où  $\rho_0$  est la densité moyenne,  $g$  la constante de gravitation,  $\rho'$  et  $w'$  les fluctuations de la densité et du champ de vitesse, tandis que  $\langle\cdot\rangle$  correspond à une moyenne d'ensemble ou temporelle. Ainsi cette quantité ne peut être déterminée par une simple mesure de densité : le champ de vitesse doit également être mesuré. Pour les mesures de vitesse, la technique de PIV est la technique classiquement utilisée. En ce qui concerne le champ de densité, nous pouvons mesurer ponctuellement la densité à l'aide d'une sonde conductimétrique mais cette méthode ne permet d'obtenir l'évolution de la densité qu'en un point et non

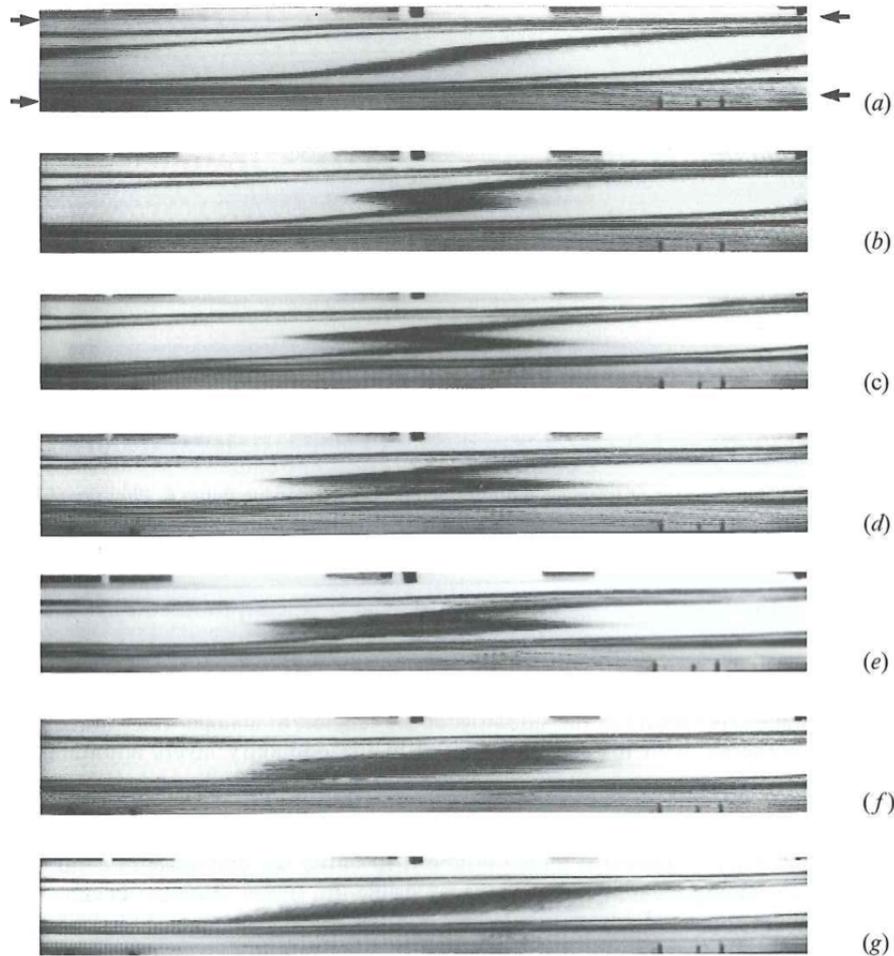


FIGURE 1 – Évolution temporelle d'une isodensité repérée par du colorant (ligne sombre) lors d'un retournement (extrait de [92]).

sur toute la hauteur du fluide. Il est également possible de mesurer la stratification après l'expérience mais cette méthode ne permet d'obtenir que le résultat du mélange et non l'évolution temporelle. Par ailleurs, nous avons vu que le Schlieren Synthétique permet d'accéder facilement au champ de gradient de densité induit par les ondes internes de gravité. Cependant, cette technique devient inopérante dès que des mécanismes de mélange se mettent en place. En effet, les mouvements de fluide deviennent alors 3-D et les rayons lumineux issus de l'écran Schlieren sont alors déviés de manière beaucoup trop complexe pour que l'on puisse remonter à des gradients de densité.

Comme nous l'avons vu au cours du paragraphe 2.3, une autre méthode de mesure du champ de densité est la Fluorescence Induite par Laser (LIF) [50]. Son principe est le suivant : le fluide stratifié estensemencé avec un colorant fluorescent, de manière à avoir une relation de proportionnalité entre la concentration et la densité. Le fluide est ensuite éclairé par une nappe laser à la longueur d'onde d'excitation du colorant. L'intensité lumineuse émise par le colorant est alors proportionnelle à la concentration en colorant et donc à la densité. En filmant le fluide, l'échelle de gris de chaque pixel permet de déterminer la concentration locale en colorant et, en s'assurant que la diffusivité du colorant est proche de celle de l'agent stratifiant, nous nous assurons que le colorant est bien un marqueur de

la densité.

Cette technique de mesure de la densité a en particulier été utilisé par Troy *et al.* [93] pour observer le déferlement d'ondes interfaciales se propageant à l'interface entre deux fluides de densité différentes. La figure 2 montre les images obtenues à l'aide de cette technique lors du déferlement d'une telle onde. Il est ainsi possible de visualiser l'évolution de la densité au sein du déferlement et d'en déduire ainsi l'impact sur le saut de densité. Pour cette expérience seul un des deux fluides est ensemencé en colorant.

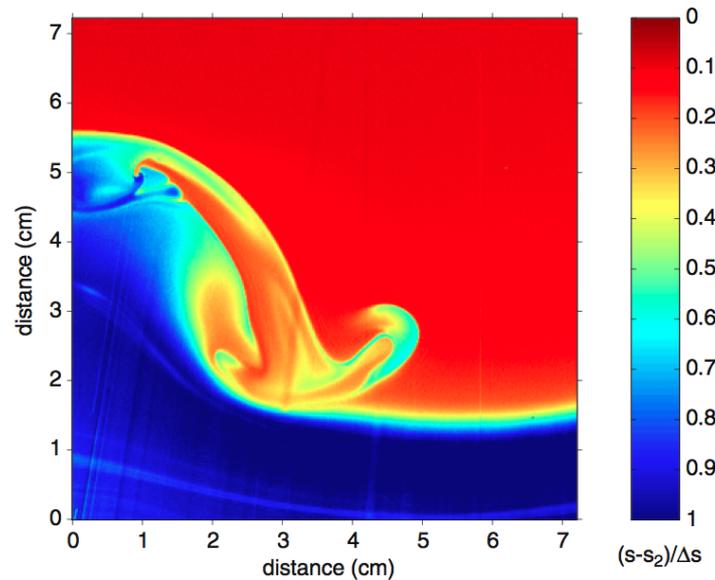


FIGURE 2 – Champ de concentration en colorant obtenu lors du déferlement d'une onde de gravité se propageant à l'interface de deux fluides de densité différentes (extrait de [93]).

Par ailleurs cette technique a été appliquée par Daviero *et al.* [19] à l'étude d'un jet dans un fluide stratifié. Ces observations nécessitent la mise en place d'une technique d'ajustement d'indice optique que nous détaillerons dans la suite de ce manuscrit. Ce travail expérimental permet ainsi d'étudier l'évolution de la concentration en colorant au centre du jet. Une nouvelle fois seul le fluide utilisé pour le jet possède une concentration en colorant non nulle.

Afin de remonter à des grandeurs relatives au mélange, cette technique de LIF peut être associée à des mesures de vitesse par PIV. En effet en utilisant le même laser pour exciter le colorant et pour éclairer les particules de PIV, il est alors possible, à l'aide de filtres colorés, de mesurer la densité et la vitesse au même point et au même instant. Cette association de technique a été largement utilisée pour l'étude de jets turbulent au cours des années 2000, entre autre par Borg *et al.* [6], Feng *et al.* [26] ou encore Hu *et al.* [43]. La figure 3 représente en particulier une mesure simultanée de concentrations et de vitesses, effectuée par Hu *et al.* [43], lors de l'écoulement d'un jet de concentration connue dans un fluide de concentration en colorant nulle. À nouveau un seul des deux fluides est ensemencé en colorant permettant ainsi un bon rapport signal sur bruit. Ces mesures permettent par ailleurs de déterminer des coefficients de diffusion turbulente et de pouvoir comparer les mesures de concentrations et de vitesse à des simulations numériques.

D'autre part des problèmes plus océaniques tels que l'étude des courants de gravité [76], ou de déferlement d'onde internes au niveau d'une topographie [44, 45] ont été étudiés à

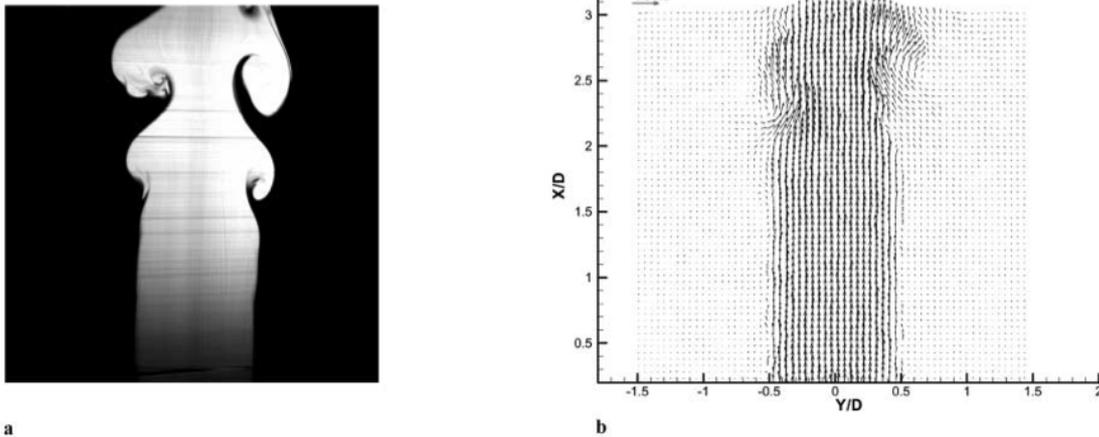


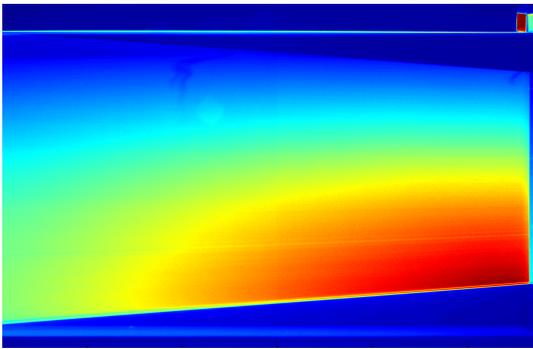
FIGURE 3 – (a) Observation par la technique de LIF d'un jet de fluide marqué par un colorant dans un fluide sans colorant. (b) Observation par la technique de PIV du même jet que pour (a). Les deux mesures ont été effectuées aux même instant (extrait de [43]).

l'aide de cette association de techniques. Ces travaux ont chaque fois eu pour objectif de mesurer des coefficients de diffusion des agents massiques, et des longueurs caractéristiques tels que :

- l'échelle de Thorpe caractérisant la taille typique des retournements au sein de la stratification,
- l'échelle d'Ellison caractérisant le déplacement vertical du fluide,
- l'échelle de Kolmogorov caractérisant la taille des plus petits tourbillons autorisée par la viscosité,
- l'échelle d'Osmidov caractérisant la taille maximale des tourbillons autorisée par la stratification.

Dans tous ces travaux, le colorant n'est placé que dans un des éléments de l'expérience, que ce soit dans le jet ou dans une des deux couches de fluide. Dans le cas de l'étude du mélange par les ondes de gravité dans un fluide continûment stratifié il est nécessaire de connaître l'évolution de la densité en chaque point du fluide. Le colorant doit donc être réparti dans tout le fluide dès le début de l'expérience. Nous proposons donc au cours de cette partie une adaptation de la technique de LIF a un fluide continûment stratifié. Puis nous verrons comment cette technique peut être associée à des mesures de vitesse afin de remonter à des grandeurs de mélange.

# Fluorescence Induite par Laser(LIF) en fluide stratifié



l'image). Une première idée serait de placer à différentes positions dans le fluide des sondes conductimétriques permettant de mesurer la densité au cours du temps. Cette méthode reste cependant assez restreinte en raison de la difficulté technique à créer un réseau suffisamment dense de capteurs sans perturber l'écoulement.

Il est alors naturel de se tourner vers la méthode de Fluorescence Induite par Laser (LIF) développée principalement pour des stratifications discrètes. Cette technique, si elle pouvait être adaptée à un milieu continûment stratifié, permettrait alors d'obtenir un champ de densité sur une grande zone et d'observer ainsi les zones potentielles de mélange.

Nous allons donc dans un premier temps exposer le principe de la LIF, puis nous décrirons sa mise en place expérimentale et les corrections à effectuer sur les mesures. Enfin nous verrons que cette technique permet, tout comme le Schlieren Synthétique ou la PIV, de mesurer certaines grandeurs caractéristiques des ondes internes.

## 6.1 Fondements théoriques de la Fluorescence Induite par Laser

### 6.1.1 Fluorescence induite et linéarité

La fluorescence est la capacité d'un composé organique à absorber des photons, associés à une longueur d'onde  $\lambda_{\text{abs}}$ , et à réémettre une onde lumineuse de longueur d'onde  $\lambda_{\text{flu}}$  différente de  $\lambda_{\text{abs}}$ . La Rhodamine 6G, la Rhodamine B et la Fluorescéine sont les trois composés principalement utilisés pour ce type d'expérience, en fonction de leurs caractéristiques ( $\lambda_{\text{abs}}$ ,  $\lambda_{\text{flu}}$ , coefficient de diffusion ou encore effet de la température sur la fluorescence) :

Colorant	$\lambda_{\text{abs}}$ (nm)	$\lambda_{\text{flu}}$ (nm)	D ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )	Pourcentage par °C
Rh. 6G	525	555	$4.1 \times 10^{-10}$	-
Rh. B	555	580	$4.3 \times 10^{-10}$	-1.8
Fluor.	490	515	$4.2 \times 10^{-10}$	-0.2

TABLE 6.1 – Caractéristiques des différents colorants utilisés en LIF [15, 16, 33] à 20°C. L'effet de la température a été mesuré entre 20 et 60°C et est donné en variation de la fluorescence en % par rapport à la fluorescence mesurée à 20°C.

Nous utiliserons pour nos expériences la Rhodamine 6G pour son indépendance vis-à-vis de la température, et en raison de sa longueur d'onde d'absorption compatible avec le laser que nous utilisons (532 nm).

L'intensité lumineuse  $F$  réémise par une solution fluorescente dépend de l'intensité de la lumière incidente, de la concentration en l'espèce fluorescente, ainsi que de caractéristiques atomiques propres à chaque composé (taux d'absorption, section efficace, rendement quantique, etc...). La fluorescence s'exprime en fonction de l'excitation lumineuse reçue  $I$ , et de la concentration en composé actif  $C$  de la manière suivante

$$F \propto \frac{I}{1 + I/I_{\text{sat}}} C, \quad (6.1)$$

avec  $I_{\text{sat}}$  l'intensité de saturation pour le colorant [78, 84].

La linéarité de la fluorescence de la Rhodamine 6G en fonction de la concentration a été observée par Shan *et al.* [84] jusqu'à des concentrations de  $48 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ . La figure 6.1 montre une série de mesures de fluorescence de solutions de Rhodamine 6G de différentes concentrations éclairées par un laser d'intensité fixée que nous avons effectuée.

Ces mesures permettent alors d'observer un écart à la linéarité pour des concentrations supérieures à  $130 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ . Nous ferons donc en sorte d'avoir, dans toutes nos expériences, une concentration maximale en Rhodamine 6G inférieure à  $100 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$  afin de rester dans le domaine linéaire et conserver ainsi une relation simple entre  $F$  et  $C$ .

Par ailleurs, la relation (6.1) fait apparaître une dépendance non linéaire de la fluorescence avec l'intensité du faisceau incident. Cependant cette fonction peut être considérée comme linéaire dans le cas où l'intensité  $I$  est faible devant l'intensité de saturation. Pour la rhodamine 6G, l'intensité de saturation  $I_{\text{sat}}$  est de  $5 \times 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  [84]. Cette valeur est très grande devant les intensités que l'on peut obtenir expérimentalement avec notre laser. En effet, nous utilisons un laser continu produisant un faisceau gaussien de 2 mm de diamètre et d'une puissance maximale de 2 W, correspondant à une intensité maximale de  $2/(\pi(10^{-3})^2) \approx 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

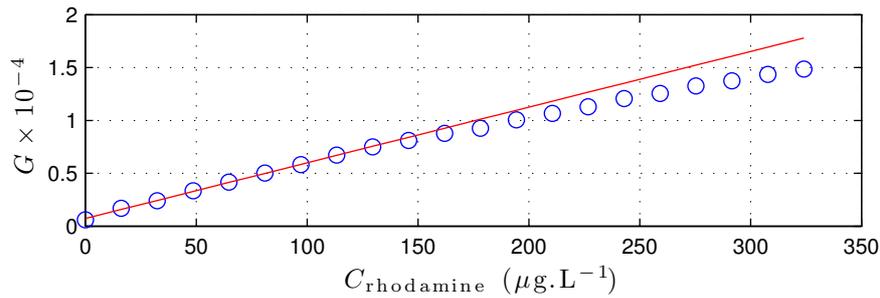


FIGURE 6.1 – Évolution de l'intensité lumineuse d'une solution de Rhodamine 6G en fonction de sa concentration.

Nous pourrions donc supposer, pour la suite de nos expériences, que l'intensité lumineuse réémise par la Rhodamine dans les gammes de concentrations utilisées est donnée par la relation suivante

$$F \propto IC . \quad (6.2)$$

### 6.1.2 Loi de Beer-Lambert

La fluorescence possède une contrepartie : l'énergie réémise par le colorant est prélevée sur le faisceau excitateur. Ainsi l'intensité lumineuse  $I$  du faisceau incident diminue tout au long de son parcours dans le fluide fluorescent. Or, la connaissance de  $I$  en chaque point est indispensable si nous voulons remonter à une valeur de concentration à partir d'une mesure de fluorescence. La loi de Beer-Lambert permet alors de connaître l'évolution de l'intensité lumineuse pour un rayon lumineux se propageant d'un point  $r_0$  à un point  $r$

$$I(r) = I(r_0) \exp \left( -\varepsilon \int_{r_0}^r C(s) ds \right) , \quad (6.3)$$

avec  $\varepsilon$  le coefficient d'absorption de l'espèce absorbante et  $C$  la concentration de l'espèce absorbante le long du trajet optique.

Un système expérimental sera appelé "optiquement fin" [65] s'il vérifie la condition

$$\varepsilon \int_{r_0}^r C(s) ds \ll 1 . \quad (6.4)$$

Dans ce cas, chaque zone du fluide est éclairée avec la même intensité, l'absorption étant négligeable. Dans le cas de nos expériences, la taille de la zone d'observation et les concentrations utilisées ne permettront pas de négliger l'absorption. Il faudra donc en tenir compte dans l'analyse de nos données expérimentales.

En reportant la dépendance de  $I$  avec la distance dans la relation (6.2), nous pouvons alors obtenir l'évolution de la fluorescence le long du trajet optique du faisceau excitateur

$$F(r) \propto I(r_0) \exp \left( -\varepsilon \int_{r_0}^r C(s) ds \right) C(r) . \quad (6.5)$$

Une solution homogène en colorant n'a donc pas une fluorescence homogène.

## 6.2 Mise en oeuvre expérimentale

### Dispositif expérimental

Nous utilisons une cuve de 80 cm de long, 17 cm de largeur et haute de 50 cm, remplie de 32 cm de fluide stratifié linéairement, la pulsation de flottabilité variant entre 0.8 et 1  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le générateur d'ondes décrit au chapitre 2.2 génère un mode-1 se propageant dans la longueur de la cuve de la gauche vers la droite. La propagation est observée à l'aide d'une caméra CCD 16-bits,  $2452 \times 2054$  pixels, à une fréquence d'acquisition pouvant aller jusqu'à 10 Hz. Un miroir oscillant, situé à mi-hauteur de la cuve et à une distance pouvant varier de 100 à 150 cm, permet de créer une nappe laser verticale, illuminant ainsi une coupe verticale du fluide stratifié (figure 6.2).

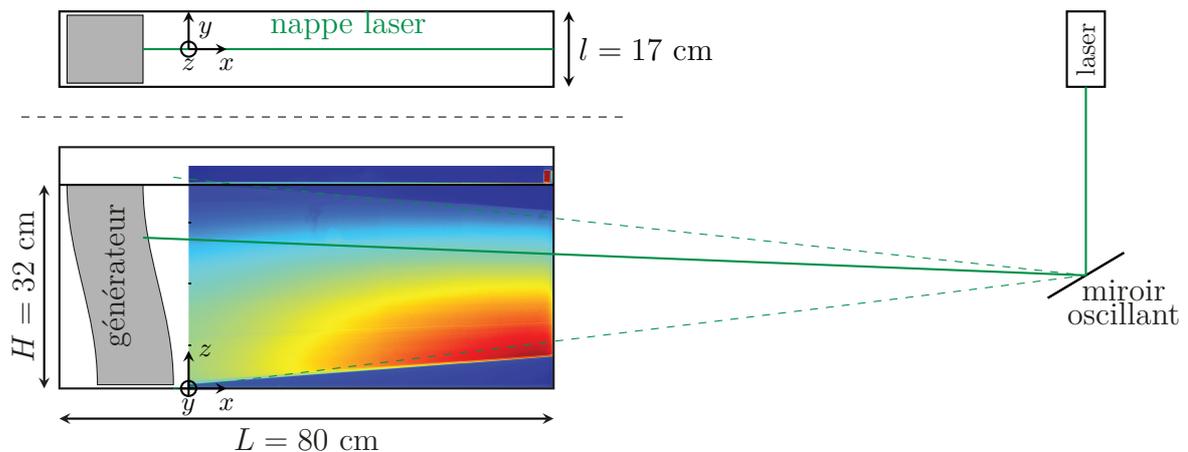


FIGURE 6.2 – Vue de côté (partie basse) et vue de dessus (partie haute) du dispositif expérimental.

Les paragraphes suivants permettront une description plus précise des différents éléments du montage expérimental, de la réalisation de la stratification à l'acquisition du champ de concentration en rhodamine en passant par la formation de la nappe laser.

### 6.2.1 Un fluide stratifié en densité, en Rhodamine... mais homogène en indice optique

Notre objectif étant de mesurer un champ de densité dans un fluide stratifié, nous devons associer à chaque valeur de densité une intensité lumineuse. Pour cela, il suffit de faire correspondre à chaque valeur de densité une concentration en colorant. Nous allons donc réaliser à la fois une stratification en densité (concentration de sel) et une stratification en Rhodamine 6G.

La méthode des deux bacs, décrite dans la section 2.1.1, permet d'obtenir très simplement cette double stratification. En effet, une fois les deux bacs initiaux mis en place (bac A : eau fraîche ou peu dense, bac B : eau plus dense), il suffit alors d'ensemencer le bac A ou le bac B avec le colorant suivant que l'on veuille une concentration en colorant augmentant avec la profondeur (bac B) ou diminuant avec la profondeur (bac A). Cette méthode permet donc d'obtenir une stratification, en sel et en Rhodamine, et d'avoir une relation bijective entre densité et concentration en Rhodamine.

Cependant, une telle stratification n'est pas suffisante pour effectuer des expériences de LIF exploitables. En effet, le fluide est également stratifié en indice optique. La figure 6.3(a) montre l'évolution de l'indice optique d'une solution salée en fonction de la

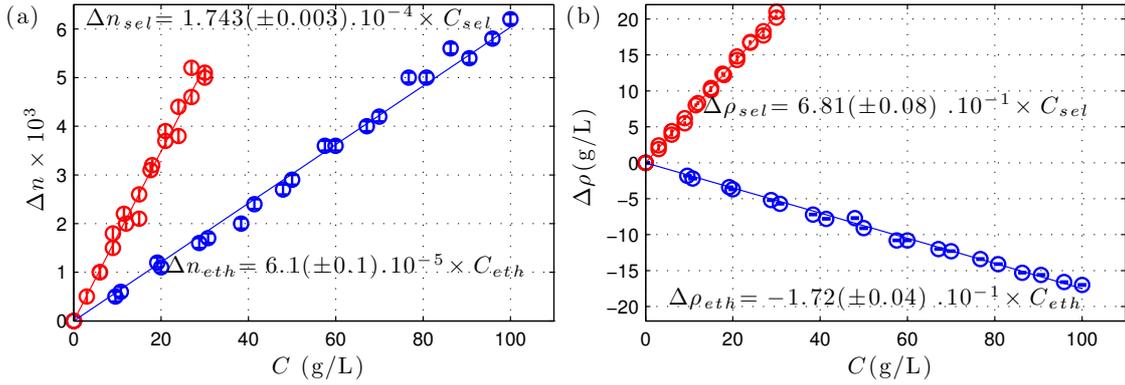


FIGURE 6.3 – (a) Variation de l'indice optique en fonction de la concentration en sel (en rouge) ou en éthanol (en bleu). (b) Variation de la densité en fonction de la concentration en sel (courbe rouge) ou en éthanol (courbe bleue)

concentration (courbe rouge) que nous avons mesurée à l'aide d'un réfractomètre ATAGO précis à  $\pm 10^{-4}$ . Il apparaît que l'indice optique augmente avec la concentration en sel. Il est donc plus grand en bas de la stratification qu'en haut. Cette variation d'indice a pour premier effet de courber les rayons lumineux incidents si ceux-ci n'ont pas parfaitement horizontaux, ce qui peut poser des problèmes de traitement par la suite. Mais, plus important, lorsque du mélange se produit, l'indice optique peut localement varier brutalement, du fait du retournement des isopycnes. Cette variation entraîne alors une focalisation des rayons incidents et donc l'apparition de faisceaux plus ou moins lumineux au sein de la nappe laser, ce qui rend les images très difficiles à traiter. Il devient impératif de mettre en place une stratification en densité mais non en indice optique. On parle alors d'ajustement d'indice, ou de matching d'indice.

Afin de compenser la variation d'indice optique due au sel, nous utilisons de l'éthanol. En effet, l'éthanol possède la propriété de diminuer la densité d'une solution, comme nous pouvons l'observer sur la figure 6.3(b), tout en augmentant son indice optique (figure 6.3(a)). Il est alors possible de réaliser deux solutions de même indice optique mais de densités différentes.

Daviero *et al.* [19] ont montré que le mélange en grande quantité d'une solution concentrée en éthanol et d'une solution en sel de même indice optique ne changeait pas ce dernier. La méthode des deux bacs permet donc de prendre en compte cette contrainte. Il suffit de préparer deux bacs de même indice optique, par exemple :

- Bac A :  $C_{eth} = 40 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  ce qui correspond à une densité de  $991 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  et une variation d'indice optique de  $2.4 \times 10^{-3}$  par rapport à l'indice optique de l'eau.
- Bac B :  $C_{sel} = 14 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  ce qui correspond à une densité de  $1007 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  et une variation d'indice optique de  $2.4 \times 10^{-3}$  par rapport à l'indice optique de l'eau.

Nous obtenons ainsi un  $\Delta \rho$  de  $16 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  sans variation d'indice optique.

Finalement, le fluide expérimental est stratifié pour trois composés :

- le sel dont la concentration augmente avec la profondeur,
- l'éthanol dont la concentration diminue avec la profondeur,
- le colorant dont la concentration peut selon la préparation croître ou décroître avec la profondeur.

### 6.2.2 Nappe laser

Une fois le fluideensemencé, il ne reste alors plus qu'à éclairer ce dernier pour observer la fluorescence. Comme nous voulons observer le fluide sur une grande zone (dans l'idéal toute la hauteur de la stratification), il est nécessaire de créer un éclairage homogène sur une grande surface. Pour cela deux options s'offrent à nous : créer une nappe laser à l'aide d'une lentille divergente, ou utiliser un miroir oscillant qui permet de scanner la zone d'étude et de créer, par moyenne temporelle, une nappe laser.

Malgré une mise en place plus simple de la lentille divergente, il nous a semblé plus pertinent d'utiliser un miroir oscillant principalement pour deux raisons. Tout d'abord, le faisceau laser est un faisceau gaussien ce qui signifie que lorsque la lentille divergente étale le faisceau pour créer la nappe laser, cette gaussienne est également étalée (figure 6.4). Cette inhomogénéité de l'intensité lumineuse est alors difficile à prendre en compte ensuite pour l'analyse des images, d'autant plus que lors d'expériences préliminaires, il est apparu que la gaussienne semblait se déplacer au cours des expériences : le pointé du faisceau laser se déplaçait probablement légèrement au cours du temps ce qui, après le passage par la lentille divergente, avait une influence importante sur la répartition lumineuse. Le profil de l'intensité n'étant pas reproductible sur les images d'une même expérience, il devient difficile d'avoir une analyse pertinente sur toute la durée de l'acquisition. Par ailleurs, il a été montré que la résolution des images était améliorée avec un miroir oscillant [15] en diminuant les effets de flou dus au déplacement du fluide.

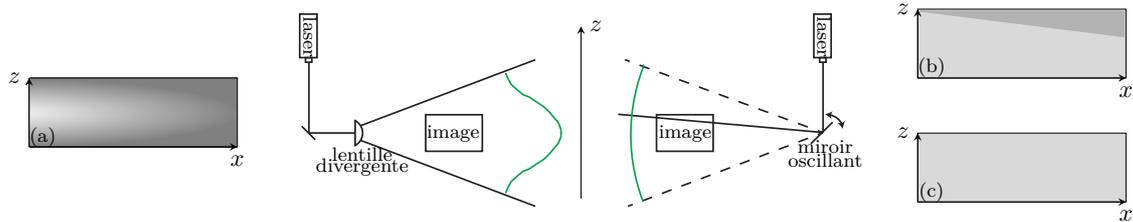


FIGURE 6.4 – Formation de la nappe laser avec une lentille divergente (à gauche) ou un miroir oscillant (à droite). Les lignes vertes représentent la répartition de l'intensité dans la nappe dans chacun des cas. L'encadré (a) représente l'intensité visualisée par la caméra dans la cas d'une nappe laser générée par une lentille divergente. Les encadrés (b) et (c) représentent l'intensité laser observée sur un temps inférieur à une période d'oscillation du miroir (b), ou égal à une période d'oscillation (c).

Pour ces deux raisons, nous avons mis en place un miroir oscillant commandé par un signal analogique. Un signal de contrôle triangulaire assure une vitesse de balayage constante sur toute la zone d'observation et permet ainsi d'illuminer chaque point d'une verticale pendant une même durée de temps au cours d'une période d'oscillation. Cette technique permet d'avoir une répartition d'intensité lumineuse beaucoup plus homogène, la seule variation d'intensité étant alors due à l'atténuation du faisceau le long du trajet optique. Or, dans le cadre de nos expériences, le miroir est situé entre 100 et 150 cm de la zone d'observation, et la nappe laser possède une extension verticale de l'ordre de 40 cm au niveau de l'entrée dans le fluide. Cela signifie qu'au moment de pénétrer dans le fluide stratifié, l'écart maximal de chemin optique entre les différents rayons est de 2 cm, distance sur laquelle l'absorption du faisceau laser par l'air peut être négligée. L'intensité peut donc être considérée comme étant homogène avec une très bonne approximation sur toute la hauteur du fluide.

### 6.2.3 Acquisition

Une caméra ( $2452 \times 2054$  pixels, fonctionnant en 16 bits) placée à environ 250 cm du fluide stratifié, mesure l'intensité lumineuse réémise par la Rhodamine. Un filtre optique passe-haut, de longueur d'onde de coupure 550 nm, est placé devant la caméra pour ne laisser passer que la lumière émise par le colorant (555 nm) et éliminer la longueur d'onde du laser (532 nm). La caméra munie d'une focale fixe de 3.5 cm permet d'obtenir des champs de 40 cm par 60 cm.

Afin de visualiser correctement la fluorescence, il est indispensable d'accorder le temps d'exposition de la caméra aux oscillations du miroir oscillant. En effet, pour que l'éclairage soit homogène, chaque point de l'image doit être illuminé pendant le même temps. Le temps d'exposition de la caméra doit donc être un multiple de la période d'oscillation du miroir (voir illustrations (b) et (c) de la figure 6.4).

Par ailleurs, il est important de n'éclairer le fluide que lors de l'acquisition d'une image. En effet, une solution de colorant fluorescent voit sa concentration diminuer au cours du temps en raison de la dénaturation des molécules par la lumière. On parle alors de photobleaching. L'évolution de la concentration en colorant actif au cours du temps est prédite par la formule

$$C(t) = C_0 \exp(-Q_b \sigma \Phi t) , \quad (6.6)$$

où  $C$  correspond à la concentration en colorant,  $Q_b$  au nombre de molécules détruites par photon absorbé,  $\sigma$  à la section efficace d'absorption et  $\Phi$  au flux de photons traversant la solution.

Au cours d'une période d'oscillation du miroir  $T$ , une zone du fluide stratifié de section carrée  $S = d^2$ , sera éclairée deux fois, ainsi

$$\Phi T = 2 \frac{P \Delta t}{h \nu d^2} , \quad (6.7)$$

où  $P$  est la puissance du faisceau incident,  $\Delta t$  le temps de transit du laser dans la section considérée,  $h$  la constante de Planck et  $\nu$  la fréquence de l'onde lumineuse.

Dans le cadre de nos expériences nous utilisons de la Rhodamine 6G pour laquelle  $Q_b \sigma = 4.5 \times 10^{-22} \text{ cm}^2$  [14], et un faisceau laser de longueur d'onde de 530 nm ( $h\nu = 3.7 \times 10^{-19} \text{ J}$ ) et de 2 W de puissance. La nappe laser possède une hauteur d'environ  $H = 40 \text{ cm}$  au niveau du fluide, ainsi  $\Delta t = Td/H = T/200$ . Nous avons alors pour une période d'oscillation du miroir

$$C(T) = C_0 \exp\left(-\frac{Q_b \sigma 2PTd}{h\nu d^2 H}\right) , \quad (6.8)$$

ce qui donne dans le cas où le miroir oscillant oscille en continu

$$C(t) = C_0 \exp\left(-\frac{Q_b \sigma 2PTd}{h\nu d^2 H} \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right) \quad (6.9)$$

$$= C_0 \exp\left(-\frac{4.5 \times 10^{-22}}{3.7 \times 10^{-19} \times 2} T \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right) \quad (6.10)$$

$$= C_0 \exp\left(-6 \times 10^{-4} \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right) . \quad (6.11)$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  est la fonction partie entière.

Cela signifie que, pour une fréquence de travail du miroir oscillant de 130 Hz, 20% du colorant est dénaturé en seulement 6 minutes.

Par contre, si le miroir n'effectue que  $n$  oscillations par image acquise à une fréquence d'acquisition  $f_{acq} = 2$  Hz,  $C(t)$  devient

$$C(t) = C_0 \exp\left(-\frac{Q_b \sigma}{h\nu} \frac{2PTd}{d^2H} n [tf_{acq}]\right) \quad (6.12)$$

$$= C_0 \exp(-n \times 6 \times 10^{-4} [tf_{acq}] T) . \quad (6.13)$$

Pour la même fréquence du miroir, il faut alors environ 1h30 pour dénaturer 20% du colorant si le miroir effectue 4 oscillations par image acquise. Il est donc crucial de limiter au maximum l'illumination du colorant.

La synchronisation du miroir et de la caméra est assurée par un signal analogique généré par un programme Labview. Ce signal créneau, de fréquence  $f_{acq}$ , est transmis à la caméra qui déclenche l'acquisition lors d'un front montant ainsi qu'à un générateur de fonctions (Agilent). Ce générateur délivre un signal triangulaire composé de  $n$  périodes lors d'un front montant du signal créneau (figure 6.5).



FIGURE 6.5 – Signaux de synchronisation de la caméra et du miroir oscillant.

Nous pouvons ensuite ajuster la fréquence et le nombre d'oscillations en fonction du temps d'exposition de la caméra. Les expériences décrites ultérieurement ont été réalisées avec 3 oscillations du miroir par image à une fréquence d'oscillations de 131 Hz et une fréquence d'acquisition de 2 Hz.

## 6.3 Observations et analyses

### 6.3.1 Traitement des images

Les images de LIF obtenues nécessitent un traitement *a posteriori* pour corriger les effets d'absorption des différents éléments chimiques présents dans le fluide (eau, sel, éthanol et Rhodamine 6G), comme nous pouvons l'observer sur la figure 6.2 où est présentée une image d'un fluide stratifié éclairé par une nappe laser. Ce traitement permettra alors d'obtenir le champ de concentration en colorant puis en densité à chaque instant.

#### Étape préliminaire

Comme nous l'avons vu précédemment, l'intensité lumineuse réémise par la Rhodamine 6G dépend de la concentration en colorant au point observé, mais également de la concentration en espèce chimique absorbante tout le long du chemin optique. La caméra CCD convertissant l'intensité lumineuse en niveaux de gris, nous pouvons exprimer ces derniers sous la forme suivante

$$G_{cam}(x, z, t) = \alpha I(x_0, z_0, t) C_{rhod}(x, z, t) \exp[-\beta(x, z, t)] + G_b(x, z, t) , \quad (6.14)$$

avec  $G_b(x, z, t)$  le niveau de gris de base de la caméra<sup>1</sup>,  $I(x_0, z_0, t)$  la répartition de l'intensité laser à l'entrée du fluide,  $\alpha$  un coefficient de proportionnalité caractérisant l'efficacité de la fluorescence, la sensibilité de la caméra et la fonction de transfert du filtre optique et  $\beta$  le terme d'absorption, défini par

$$\beta(x, z, t) = \int_{r_0}^r (\varepsilon_{\text{rhod}} C_{\text{rhod}}(u, t) + \varepsilon_{\text{sel}} C_{\text{sel}}(u, t) + \varepsilon_{\text{eth}} C_{\text{eth}}(u, t) + \varepsilon_{\text{eau}}) du ,$$

où  $r - r_0$  est la distance parcourue dans le fluide par un rayon lumineux pour atteindre le point de coordonnées  $(x, z)$  depuis  $(x_0, z_0)$ . Dans toute la suite, nous utiliserons la quantité  $G = G_{\text{cam}} - G_b$  pour s'affranchir du niveau de gris de base de la caméra.

Les différentes méthodes de correction de l'absorption, que nous allons présenter, sont basées sur une correction itérative le long des différents faisceaux lumineux traversant le fluide. Nous devons donc, avant toute opération de traitement, déterminer les trajectoires du faisceau laser, ce qui revient en réalité à déterminer précisément la position du miroir oscillant. Cette position est obtenue par une acquisition au cours de laquelle la fréquence de balayage est petite devant la fréquence d'acquisition de la caméra. Nous obtenons, de cette manière, la trajectoire à un instant  $t$  du faisceau laser. En repérant les trajectoires pour différentes inclinaisons du miroir, nous obtenons la position apparente<sup>2</sup> du miroir (figure 6.6).

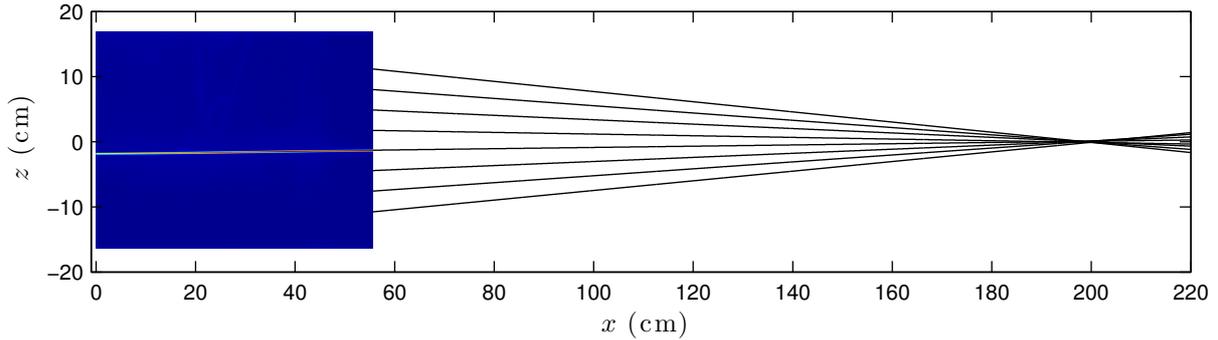


FIGURE 6.6 – À gauche : image du faisceau laser traversant le fluide stratifié à un instant  $t$ . À droite : le prolongement de ces rayons, pour différents instants, converge vers la position apparente du miroir oscillant.

Un calcul d'optique géométrique permet d'écrire, dans l'approximation des faibles angles, que

$$d_{\text{app}} = \frac{n_3}{n_2} e + \frac{n_3}{n_1} d , \quad (6.15)$$

où  $n_1$  est l'indice optique de l'air ( $n_1 = 1$ ),  $n_2$  l'indice optique du PMMA composant les cuves ( $n_2 = 1.49$ ),  $n_3$  l'indice optique du fluide stratifié ( $n_3 = 1.3385$ ),  $d_{\text{app}}$  la distance entre la première colonne de fluide éclairé et la position apparente du miroir,  $d$  la distance entre la cuve et le miroir ( $d = 105$  cm, pour l'expérience décrite ici) et  $e$  l'épaisseur de la cuve ( $e = 6$  cm). L'application numérique donne alors  $d_{\text{app}} = 146$  cm ce qui est très

1. Expérimentalement ce terme, s'il est non négligeable, pourra être estimé en effectuant une acquisition avec le cache de la caméra. Ainsi seul le bruit de la caméra est mesuré et peut, ensuite, être retranché à l'image à un instant  $t$ .

2. En raison des différents indices optiques du PMMA des cuves, de l'air et du fluide stratifié, la position du miroir que nous obtenons n'est pas la position réelle. Mais ce qui nous importe ici est de déterminer la position du point source, qu'elle soit réelle ou apparente.

proche des 145 cm que l'on peut observer entre l'image du fluide et la position apparente expérimentale du miroir sur la figure 6.6.

Une fois cette position déterminée, nous pouvons passer en coordonnées polaires, dont l'origine est la position apparente du miroir. La figure 6.7(a) montre une image d'un fluide stratifié éclairé par une nappe laser et la figure 6.7(b) présente la même image dans les coordonnées  $(r, \theta)$ . Nous remarquons alors que les bords de la nappe laser inclinés sur la figure (a) deviennent horizontaux après changement de coordonnées. Nous avons donc bien, sur chaque horizontale de l'image (b), un faisceau incident. Nous pourrions désormais effectuer la correction de l'absorption sur toutes les lignes de manière simultanée et gagner ainsi en temps de calcul.

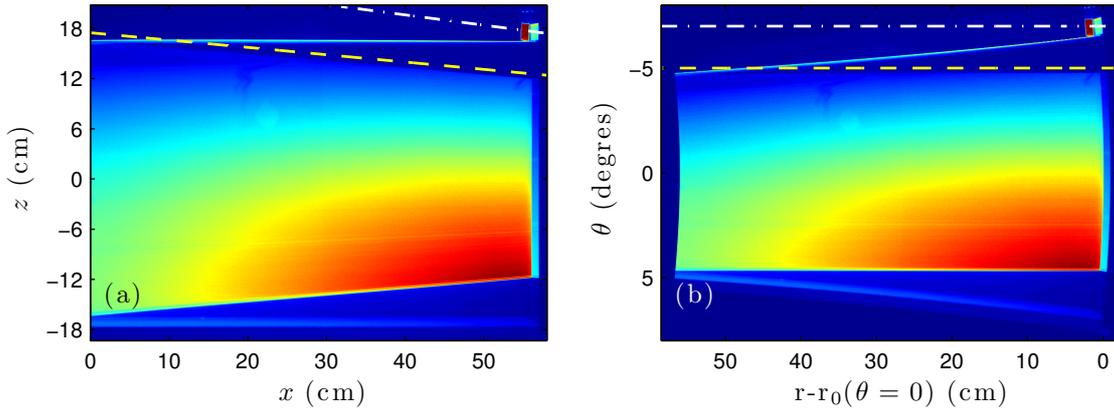


FIGURE 6.7 – (a) Image brute de la stratification éclairée par une nappe laser depuis la droite de l'image. (b) Image brute en coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .  $r_0$ , qui est une fonction de  $\theta$ , est la distance parcourue par le faisceau laser avant de pénétrer dans le fluide. Pour ces deux images, la cellule contenant une concentration en rhodamine fixe et permettant la renormalisation est visible dans le coin supérieur droit. La ligne blanche et la ligne jaune représentent deux rayons lumineux issus du miroir oscillant.

Dans ces coordonnées polaires, les niveaux de gris de la caméra se réécrivent

$$G(r, \theta, t) = \alpha I(r_0, \theta, t) e^{-\beta(r, \theta, t)} C_{\text{rhod}}(r, \theta, t), \quad (6.16)$$

où  $\beta$  garde la même expression que précédemment et où  $r_0$  est le point à partir duquel le rayon pénètre dans le fluide.

Nous pouvons dans un premier temps supposer que  $I(r_0, \theta, t) = f(t) I_s(r_0, \theta)$ . Cette hypothèse revient à dire que la répartition spatiale de l'intensité lumineuse reste la même au cours du temps mais que l'amplitude peut, quant à elle, évoluer en raison de fluctuations de l'intensité laser. Pour prendre en compte cette dépendance temporelle, nous plaçons une solution de concentration fixée dans le champ de la nappe laser (cette solution est visible dans la partie supérieure droite des figures 6.7(a) et (b)). La fluorescence moyenne de cette solution peut alors s'exprimer, en négligeant l'absorption en raison de sa petite taille, sous la forme

$$G_{\text{sol}}(t) = \alpha f(t) \langle I_s(r, \theta) \rangle_{\text{cel}} C_{\text{ref}}, \quad (6.17)$$

où  $C_{\text{ref}}$  est la concentration de la cellule et  $\langle I_s(r, \theta) \rangle_{\text{cel}}$  la moyenne de l'intensité lumineuse excitatrice au niveau de la cellule. Ainsi, la renormalisation de l'image entière s'écrit

$$G_r(r, \theta, t) = \frac{G(r, \theta, t)}{G_{\text{sol}}(t)} = \frac{I_s(r_0, \theta)}{\langle I_s(r_0, \theta) \rangle_{\text{cel}}} \frac{C_{\text{rhod}}(r, \theta, t)}{C_{\text{ref}}} \exp(-\beta(r, \theta, t)). \quad (6.18)$$

Il reste alors à éliminer le terme en  $I_s(r_0, \theta)$  pour pouvoir ensuite corriger l'absorption. Nous proposons par la suite deux méthodes pour déterminer ce terme.

### Première méthode : Comparaison à un fluide homogène

Une première méthode pour déterminer cette répartition spatiale est d'utiliser comme référence l'image d'un fluide homogène en densité et donc en concentration en Rhodamine, dans les mêmes conditions d'observations. La fluorescence renormalisée du fluide homogène s'écrit

$$G_H(r, \theta) = \frac{I_s(r_0, \theta)}{\langle I_s(r_0, \theta) \rangle_{\text{cel}}} \frac{\overline{C_{\text{rhod}}}}{C_{\text{ref}}} \exp(-\overline{\beta}(r)) , \quad (6.19)$$

où

$$\begin{aligned} \overline{\beta}(r) &= \int_{r_0}^r (\varepsilon_{\text{rhod}} \overline{C_{\text{rhod}}} + \varepsilon_{\text{sel}} \overline{C_{\text{sel}}} + \varepsilon_{\text{ethanol}} \overline{C_{\text{ethanol}}} + \varepsilon_{\text{eau}}) du \\ &= (\varepsilon_{\text{rhod}} \overline{C_{\text{rhod}}} + \varepsilon_{\text{sel}} \overline{C_{\text{sel}}} + \varepsilon_{\text{ethanol}} \overline{C_{\text{ethanol}}} + \varepsilon_{\text{eau}}) (r - r_0) . \end{aligned}$$

Les  $\overline{C}$  représentent les concentrations du fluide homogène.

Ainsi en divisant une image à l'instant  $t$  par cette image de référence, nous obtenons la grandeur suivante

$$\begin{aligned} G_{M1}(r, \theta, t) &= \frac{G_r(r, \theta, t)}{G_H(r, \theta)} , \\ &= \frac{C_{\text{rhod}}(r, \theta, t)}{\overline{C_{\text{rhod}}}} \exp(\overline{\beta}(r) - \beta(r, \theta, t)) . \end{aligned} \quad (6.20)$$

La relation entre deux calottes successives de fluide devient, en se limitant au premier ordre,

$$G_{M1}(r + dr, \theta, t) = G_{M1}(r, \theta, t) \frac{C_{\text{rhod}}(r + dr, \theta, t)}{C_{\text{rhod}}(r, \theta, t)} \exp \left[ \left( \frac{\partial \overline{\beta}}{\partial r} - \frac{\partial \beta}{\partial r}(r, \theta, t) \right) dr \right] ,$$

et ainsi

$$C_{\text{rhod}}(r + dr, \theta, t) = C_{\text{rhod}}(r, \theta, t) \frac{G_{M1}(r + dr, \theta, t)}{G_{M1}(r, \theta, t)} \exp \left[ \left( -\frac{\partial \overline{\beta}}{\partial r} + \frac{\partial \beta}{\partial r}(r, \theta, t) \right) dr \right] . \quad (6.21)$$

Il suffit alors de connaître les concentrations moyennes pour les différentes espèces absorbantes ainsi que les valeurs des différents coefficients d'absorption pour pouvoir ensuite remonter aux valeurs de concentrations au cours du temps. Il est à noter que nous n'avons pas besoin de connaître la correspondance intensité lumineuse/concentration en Rhodamine car, avec toutes ces opérations, la première colonne de l'image est, d'après l'équation (6.20), de la forme

$$G_{M1}(r_0, \theta, t) = \frac{C_{\text{rhod}}(r_0, \theta, t)}{\overline{C_{\text{rhod}}}} . \quad (6.22)$$

La connaissance de  $\overline{C_{\text{rhod}}}$  suffit donc à déterminer le champ de concentration. Il est cependant important de commencer l'itération à partir de la première colonne de fluide éclairé pour éviter des effets d'absorption non pris en compte.

### Seconde méthode : comparaison à une prédiction

La détermination du facteur de l'intensité incidente peut également s'effectuer par l'intermédiaire d'une image de la stratification initiale. En effet, à  $t = 0$ , nous connaissons parfaitement la stratification de notre expérience grâce à une mesure conductimétrique de la stratification<sup>3</sup>. Nous pouvons donc prédire de manière théorique l'image que nous sommes censés obtenir. Ce modèle aura alors la forme suivante

$$C_{\text{mod}}(r, \theta) = C_{\text{rhod}}(r, \theta, t = 0) \exp(-\beta_{\text{mod}}(r, \theta)) , \quad (6.23)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_{\text{mod}}(r, \theta) = & \int_{r_0}^r (\tilde{\varepsilon}_{\text{rhod}} C_{\text{rhod}}(u, \theta, 0) + \tilde{\varepsilon}_{\text{sel}} C_{\text{sel}}(u, \theta, 0) \\ & + \tilde{\varepsilon}_{\text{ethanol}} C_{\text{ethanol}}(u, \theta, 0) + \tilde{\varepsilon}_{\text{eau}}) du , \end{aligned} \quad (6.24)$$

et où toutes les grandeurs tildées correspondent aux paramètres ajustables du modèle. Les concentrations sont les concentrations obtenues par la mesure de la stratification.

Si l'on fait le rapport entre l'image renormalisée à  $t = 0$  (équation (6.18) prise en  $t = 0$ ) et ce modèle, nous obtenons alors la formule suivante

$$\begin{aligned} G_{\text{I}}(r, \theta) &= \frac{G_r(r_0, \theta, 0)}{C_{\text{mod}}(r, \theta)} \\ &= \frac{I_s(r, \theta)}{\langle I(r_0, \theta) \rangle_{\text{cel}} C_{\text{ref}}} \exp(\beta_{\text{mod}}(r, \theta) - \beta(r, \theta, 0)) . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Les coefficients du modèle sont alors ajustés de manière à annuler le terme de l'exponentiel. Dans ce cas, l'équation (6.25) devient

$$G_{\text{I}}(r, \theta) = \frac{I_s(r, \theta)}{\langle I(r_0, \theta) \rangle_{\text{cel}} C_{\text{ref}}} . \quad (6.26)$$

Nous avons donc pour chaque instant  $t$

$$\begin{aligned} G_{M2}(r, \theta, t) &= \frac{G_r(r, \theta, t)}{G_{\text{I}}(r, \theta)} , \\ &= C_{\text{rhod}}(r, \theta, t) \exp(-\beta(r, \theta, t)) . \end{aligned} \quad (6.27)$$

et ainsi

$$C_{\text{rhod}}(r + dr, \theta, t) = C_{\text{rhod}}(r, \theta, t) \frac{G_{M2}(r + dr, \theta, t)}{G_{M2}(r, \theta, t)} \exp\left(\frac{\partial \beta}{\partial r}(r, \theta, t) dr\right) . \quad (6.28)$$

Avec cette méthode nous n'avons donc pas à connaître les concentrations dans le fluide homogène, mais seulement les concentrations à l'instant initial, qui sont plus proches des concentrations au cours des expériences. Cette analyse nous a semblé plus pertinente pour l'étude de la propagation des ondes dans le cas d'un faible mélange.

La figure 6.8(a) représente la correction de l'image 6.7(a) d'un fluide stratifié au repos, et les figures (c) et (d) sont obtenues lors de la propagation d'un mode-1.

La représentation de quelques isopycnes (figure 6.8(b)) permet de mieux visualiser l'horizontalité des lignes d'isodensité et donc de s'assurer de la correction de l'absorption.

3. Lors de la calibration de la sonde conductimétrique, il faut alors bien prendre en compte l'effet de l'éthanol qui participe à la conductivité de la solution. Pour cela, la calibration de la sonde s'effectue avec des solutions de sel et d'éthanol et en mesurant leur densité avec un densimètre.

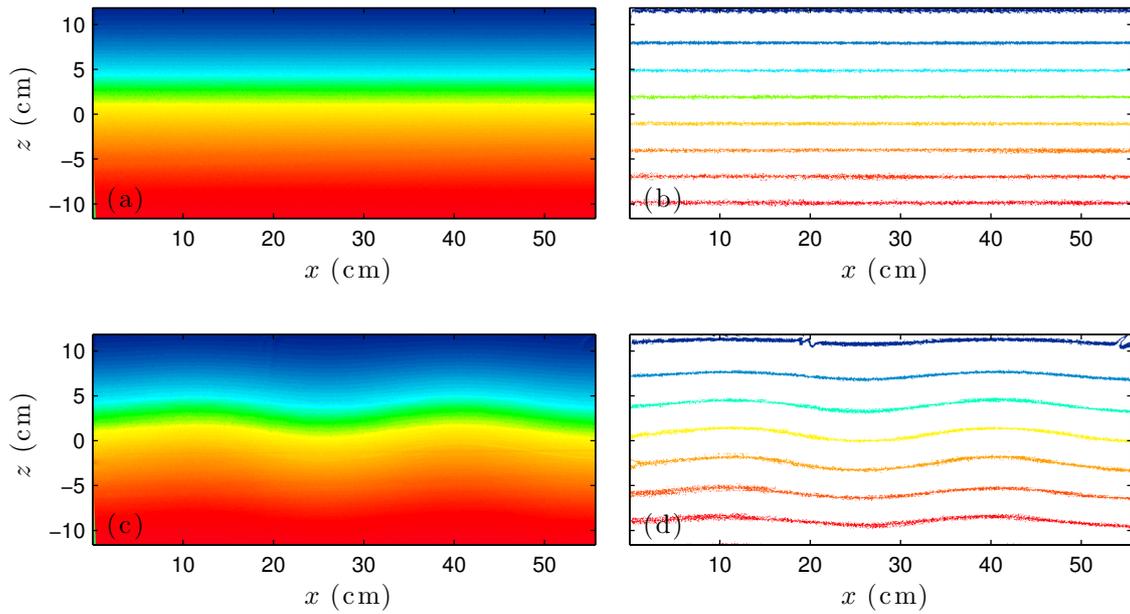


FIGURE 6.8 – (a) Image corrigée de la stratification initiale. (b) Représentation de quelques isopycnas de l’image (a). (c) Image corrigée à un instant  $t$  pendant la propagation d’un mode-1. (d) Représentation de quelques isopycnas de l’image (c).

Ces isopycnas sont obtenues à partir de la figure 6.8(a) (ou (c)) en sélectionnant certaines valeurs de concentration en rhodamine et en mettant les autres concentrations à zéro. Cette sélection permet, par ailleurs de mieux visualiser le déplacement du fluide, comme nous pouvons le constater sur la figure 6.8(d). Sur cette figure, nous pouvons voir les oscillations, des différentes lignes d’isodensité, dues à la propagation du mode-1. La déformation des isopycnas est alors très similaire à la déformation de la surface de l’eau lors de la propagation d’une onde de surface, et toutes les isopycnas ont quasiment la même déformation, en raison des propriétés particulières du mode-1. Ce n’est pas le cas avec une onde plane en raison de l’angle de propagation de l’onde avec l’horizontale, créant ainsi un décalage spatial du motif entre chaque isopycne.

Dans le cas d’une erreur dans le modèle (coefficients d’absorption, concentrations), les isopycnas perdent leur horizontalité pour la stratification initiale. Cette visualisation permet de se donner également une idée du bruit de la mesure de la concentration. En effet, sur la figure 6.8, la concentration en Rhodamine varie de 0 à  $40 \mu\text{g.L}^{-1}$  et la largeur des isopycnas représentées est de  $0.4 \mu\text{g.L}^{-1}$ , ce qui représente 1% de la variation verticale. Puisque la stratification est linéaire et s’étend sur 32 cm, l’épaisseur de ces lignes doit être de 3.2 mm. Sur ces figures, l’épaisseur des isopycnas est de 4 mm ce qui est très proche de ce que l’on doit observer. Cette différence est à la fois due au bruit de la caméra lors des mesures mais également aux opérations de correction de l’absorption. Ce résultat reste néanmoins très satisfaisant.

### 6.3.2 Applications

Afin de tester cette technique, nous avons cherché à observer la propagation des ondes internes dans un cas déjà étudié de l’apparition de la PSI sur la propagation d’un mode-1 [49]. Nous chercherons donc à mesurer les fréquences et les vecteurs d’ondes des différentes ondes, comme nous avons pu le faire précédemment avec la technique de Schlieren

Synthétique.

Un spectre temps-fréquence du champ de densité est donc réalisé dans un premier temps afin de déterminer les fréquences présentes au cours de notre expérience (figure 6.9(a)). Nous analysons ici une expérience pour laquelle  $N = 0.9 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $\omega_0/N = 0.93$  et pour une amplitude du mode-1 de 0.75 cm.

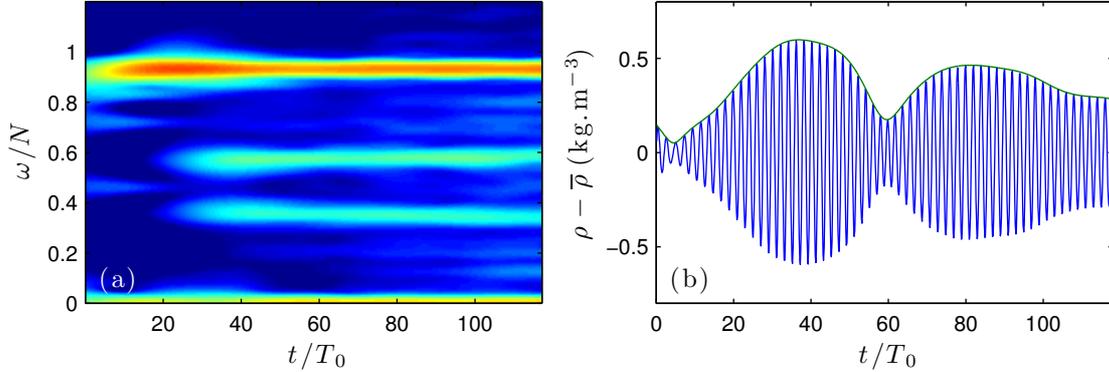


FIGURE 6.9 – (a) Spectre-temps fréquence obtenu à partir du champ de densité. (b) Signal des fluctuations de densité filtré à  $\omega_0$  en bleu. La courbe verte est l'enveloppe de ces fluctuations et représente  $\rho'_0$ .

Nous remarquons sur la figure 6.9(a) qu'aux alentours de 25 périodes de l'onde mère, deux sous-fréquences apparaissent et se développent :  $\omega_1/N = 0.58$  et  $\omega_2/N = 0.34$ . La somme de ces deux sous-fréquences est égale à la fréquence de l'onde mère, ces trois ondes satisfont ainsi une condition de résonance temporelle. Pour s'assurer que ce phénomène correspond à la PSI présentée au cours de la partie 2, nous cherchons à mesurer les vecteurs d'ondes de ces trois ondes.

Pour cela, nous effectuons tout d'abord un fitrage temporel autour de chacune des trois fréquences. Les deux premières lignes de la figure 6.10 représentent la partie réelle et la phase du champ de densité filtré aux différentes fréquences. Un spectre bidimensionnel (2D) est ensuite calculé à partir de ces champs, ce qui permet d'obtenir une mesure des trois vecteurs d'ondes (troisième ligne de la figure 6.10).

Il est à noter que cette méthode ne permet pas de mesurer la composante verticale du vecteur d'onde de l'onde mère. En effet, comme le champ de densité ne prend pas toute la hauteur du fluide, nous n'avons pas suffisamment d'étalement selon la verticale pour obtenir la valeur de cette composante verticale  $m_0$ . Cependant, de par la nature du forçage, nous savons que  $m_0 = \pi/H$ , avec  $H$  la hauteur du fluide. Par ailleurs, les mesures de  $\ell_0$  et  $\omega_0/N$  sont compatibles avec cette valeur de  $m_0$ . Pour les deux ondes filles, ce problème ne se pose pas et nous avons ainsi accès aux deux composantes. En outre, d'autres sous pics d'intensité beaucoup plus faible sont visibles dans les différents cadrans. Ces pics secondaires proviennent des réflexions des ondes sur les bords du domaine.

Pour comparer ces mesures aux prédictions, nous devons mesurer  $\Psi_0$ , l'amplitude de la fonction courant. Cette quantité est liée aux fluctuations de densité par la relation

$$\Psi_0 = \frac{g\omega_0}{N^2\rho\ell_0}\rho'_0, \quad (6.29)$$

où  $\rho'_0$  est l'amplitude des fluctuations de densité  $\rho'$  de l'onde mère,  $\bar{\rho}$  la densité moyenne du fluide stratifié et  $\ell_0$  la composante horizontale du vecteur d'onde de l'onde mère. Cette relation est obtenue à partir de la conservation de masse, en négligeant les termes du second ordre.

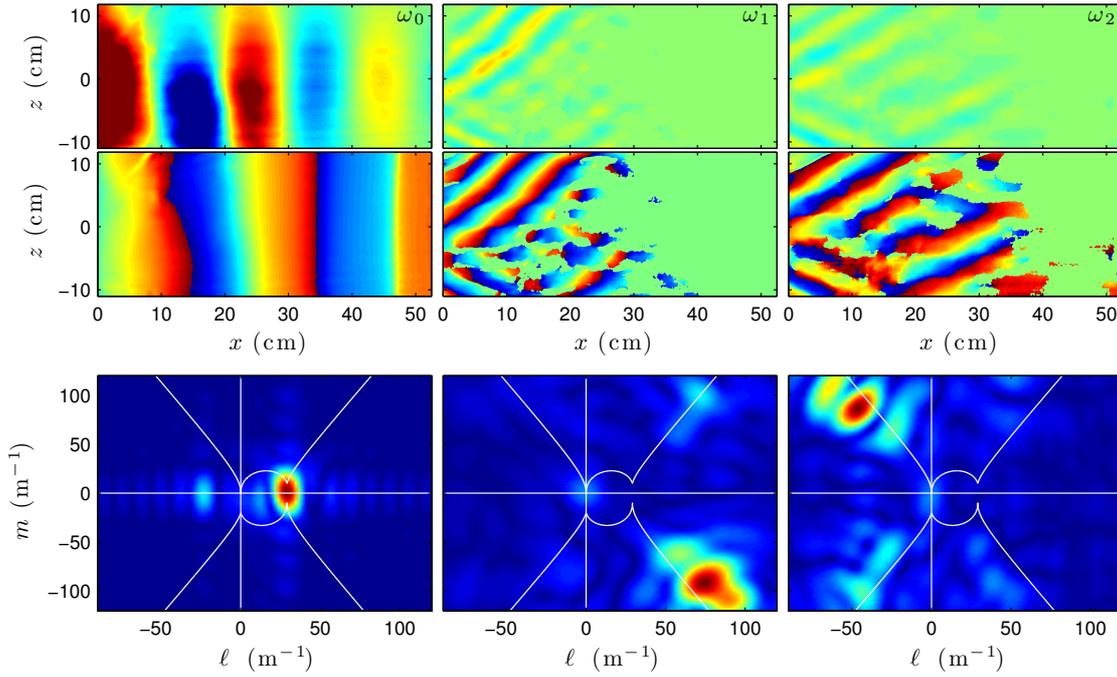


FIGURE 6.10 – Les deux premières lignes montrent les résultats du filtrage du champ de densité pour chaque fréquence présente sur le diagramme temps-fréquence (la partie réelle sur la première ligne et la phase sur la seconde) à  $t = 25T_0$ . La dernière ligne est le résultat d’une transformée de Fourier 2D appliquée au champ de la première ligne où  $\ell$  est la composante horizontale des vecteurs d’ondes et  $m$  la composante verticale. Sur le spectre spatial est superposé l’espace des solutions du système formé par les conditions de résonance temporelle et spatiale ainsi que les relations de dispersion.

La courbe bleue de la figure 6.9(b) montre l’évolution avec le temps des variations de densité associées à l’onde mère  $\rho' = \rho - \bar{\rho}$ . Cette grandeur est obtenue par filtrage temporel du champ de densité autour de la fréquence de l’onde mère. Nous pouvons observer que pour  $t = 0$ , l’amplitude des oscillations est non nulle. Ceci est dû à l’opération de filtrage temporel qui, en fonction de la largeur de la fonction de filtrage, crée des erreurs au début et à la fin de l’expérience. La courbe verte représente l’enveloppe de ces fluctuations et représente ainsi l’évolution temporelle de l’amplitude  $\rho'_0$  des fluctuations de densité. Au moment de l’apparition de l’instabilité (autour de  $25T_0$ ),  $\rho'_0$  vaut  $0.4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , ce qui correspond à  $\Psi_0 = 1.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ . Cette valeur peut alors être utilisée dans le modèle théorique développé au cours du chapitre 3.2 pour prédire les vecteurs d’ondes et les pulsations des ondes filles. La figure 6.11 présente la superposition des mesures expérimentales des différents vecteurs d’ondes et des prédictions théoriques.

Nous observons donc que ces trois ondes présentes dans l’écoulement satisfont une condition de résonance temporelle, comme nous avons pu le constater avec le spectre temps-fréquence, ainsi qu’une condition de résonance spatiale. Par ailleurs, ces mesures sont en bon accord avec les prédictions théoriques lorsque l’on tient compte des erreurs de mesures des vecteurs d’ondes et de l’amplitude de la fonction courant. Enfin, les résultats que nous observons ici sont tout à fait compatibles avec les observations effectuées par la technique de Schlieren Synthétique [49].

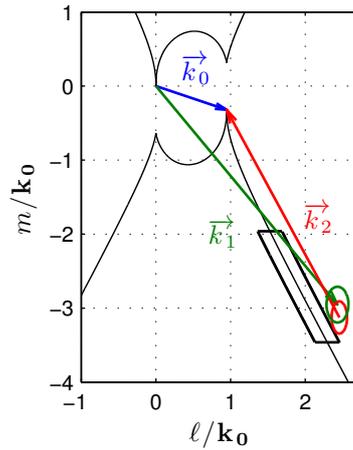
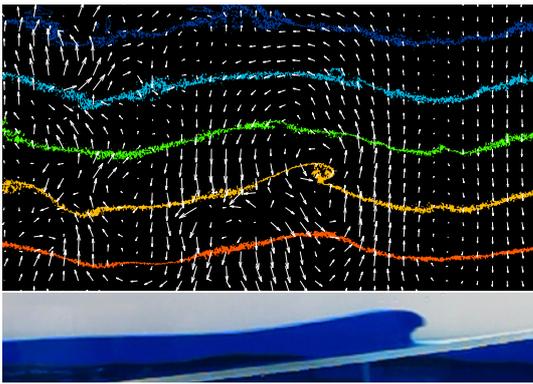


FIGURE 6.11 – Condition de résonance spatiale expérimentale. Les trois vecteurs sont les mesures expérimentales des trois vecteurs d'ondes :  $\vec{k}_0$  en bleu,  $\vec{k}_1$  en vert et  $\vec{k}_2$  en rouge. Les cercles représentent les erreurs expérimentales dues au spectre 2D. La courbe en trait plein représente la position de l'extrémité du vecteur  $\vec{k}_1$  vérifiant les conditions de résonance spatiale et temporelle. La zone encadrée représente les lieux de taux de croissance maximal prédits par la théorie en prenant les valeurs expérimentales de  $\vec{k}_0$  et de  $\Psi_0$  et en prenant en compte les erreurs sur  $\Psi_0$  et une erreur de 1% sur le taux de croissance maximal.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous proposons un dispositif expérimental et une méthode d'analyse permettant d'étendre les champs d'application de la Fluorescence Induite par Laser. En effet, bien que cette technique soit souvent utilisée pour la mesure de densité au sein d'un fluide, son utilisation dans un fluide stratifié n'avait jamais été réalisée. Notre dispositif expérimental nous a permis de mesurer des champs de densité de 60 cm par 30 cm au cours du temps et d'observer ainsi la propagation d'ondes internes et leur déstabilisation par le mécanisme de l'Instabilité Paramétrique Subharmonique. Nous avons ainsi pu utiliser les outils tels que le spectre temps-fréquence ou encore la transformée de Hilbert sur les champs de densité et remonter à des grandeurs caractéristiques des ondes internes. Grâce à cela, la méthode de LIF est, non seulement mise en place, mais également validée.

## Densité et vitesse : une association qui retourne !



L'utilisation de la LIF dans l'observation de la propagation d'ondes internes a permis d'observer, dans certains régimes de fréquences et d'amplitudes, des retournements des isopycnes. Ces retournements apparaissent lorsque du fluide plus dense passe au dessus de fluide moins dense. Dans ce cas, nous observons l'apparition d'un rouleau similaire à ceux que l'on peut observer sur les côtes océaniques. Cette inversion locale de la stratification peut, lorsqu'elle est suivie d'un déferlement, participer au mélange du fluide stratifié. La technique de LIF développée dans le chapitre précédent permet d'observer l'évolution de la densité dans de telles zones, mais la connaissance de la densité est encore insuffisante pour caractériser correctement le mélange. Les mesures de flux de densité ou de longueurs caractéristiques de mélange reposent sur des mesures de densité mais également de vitesse. Nous devons donc compléter notre dispositif expérimental, afin de mesurer des champs de vitesse par PIV simultanément à la mesure du champ de densité.

Ce chapitre exposera ainsi dans un premier temps la mise en place des expériences de PIV-LIF en fluide stratifié, puis nous discuterons des grandeurs caractéristiques mesurables et de leur comportement dans le cas d'un mélange du fluide stratifié.

## 7.1 Réalisation expérimentale

Le dispositif expérimental est sensiblement le même que celui présenté au cours du chapitre 6.2 : une cuve longue de 80 cm, large de 17 cm et haute de 50 cm, remplie d'un fluide linéairement stratifié, est éclairée par une nappe laser générée à l'aide d'un miroir oscillant, contrôlé par un signal analogique. Nous rajoutons cette fois-ci des particules de PIV (sphères creuses de verre), de densité  $\rho_{\text{part}} = 1.1 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et d'une taille moyenne de  $11 \mu\text{m}$ , dans le fluide stratifié. Ces particules étant plus denses que le fluide stratifié, elles sédimentent au cours des expériences, ce qui peut poser problème pour des expériences trop longues. Cependant, les expériences que nous avons effectuées ne dureraient pas plus de 30 min, temps pour lequel la sédimentation des particules de PIV est négligeable.

Le déplacement du fluide est observé par deux caméras CCD : une première caméra pour l'observation de la Rhodamine 6G (16 bits,  $2452 \times 2054$ ) munie d'un filtre passe-haut (longueur d'onde de coupure 550 nm) et une seconde caméra pour l'observation des particules de PIV (8 bits,  $2452 \times 2054$ ) munie d'un filtre passe-bande centré sur la longueur d'onde du laser (530 nm) (figure 7.1). Le filtre passe-haut permet de bloquer la lumière issue du laser et de laisser passer la fluorescence. La caméra associée aux mesures de LIF ne mesure ainsi que le rayonnement issu de la Rhodamine 6G. Le filtre passe-bande, quant à lui, diminue fortement l'intensité lumineuse issue de la rhodamine sans l'atténuer complètement, et laisse passer une grande partie de l'intensité laser réémise par les particules de PIV. La caméra PIV visualise donc principalement les particules de PIV. Enfin les deux caméras sont situées à environ 250 cm du fluide et sont éloignées d'une dizaine de centimètres l'une de l'autre.

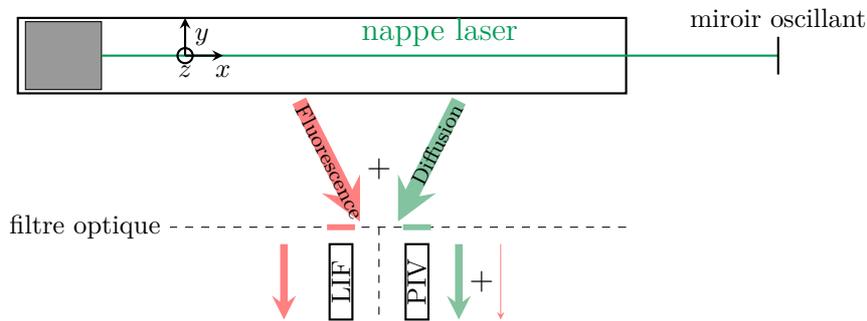


FIGURE 7.1 – Principe des filtres optiques utilisés. Le filtre passe-haut pour les longueurs d'onde (filtre rouge) ne laisse passer que la fluorescence de la rhodamine, le filtre passe-bande (filtre vert) laisse passer la lumière laser diffusée par les particules de PIV et une partie de la fluorescence.

La principale difficulté de ces mesures simultanées de densité et de vitesse, repose sur le terme "simultanée". Il faut en effet s'assurer que les deux caméras observent les mêmes points au même instant. La calibration spatiale et la synchronisation temporelle des caméras sont décrites plus en détails dans les paragraphes suivants.

### 7.1.1 Calibration des caméras

Comme nous l'avons décrit précédemment, nous utilisons deux caméras pour étudier les déplacements du fluide stratifié. La première permet de remonter à la densité en chaque point du fluide et la seconde à la vitesse. Mais il est important pour les analyses ultérieures de pouvoir superposer correctement ces deux champs. Une première méthode consisterait à régler les caméras de manière à ce qu'elles filment exactement la même zone avec le

même nombre de pixels, mais il est très difficile expérimentalement de réaliser un tel réglage au pixel près sans utiliser de dispositif basé sur l'utilisation d'une lame semi-réfléchissante. Cette technique consiste à placer après l'objectif une lame semi-réfléchissante permettant de séparer la lumière incidente sur deux capteurs CCD munis de filtres. Nous pouvons ainsi obtenir au pixel près le même champ avec le même nombre de pixels, mais la lame semi-réfléchissante diminue fortement l'intensité lumineuse, ce qui, dans le cas de nos expériences, devient alors problématique.

Pour contourner cette difficulté expérimentale, nous utilisons une grille de calibration que nous plaçons au niveau de la zone à observer. Cette grille est constituée d'un ensemble de points réguliers placés sur un réseau orthonormé dont les axes sont alignés avec l'horizontale et la verticale. Chaque caméra fournit une image de ce réseau de points, ce qui permet d'identifier dans un premier temps le décalage horizontal et vertical entre les deux images. Par ailleurs, la régularité du réseau dans l'espace réel permet de détecter les distorsions propres à chaque caméra.

En comparant ces images à la grille de l'espace réel, nous obtenons deux transformations :

- $\mathcal{T}_{\text{LIF}}$  qui permet de passer des images de LIF à l'espace réel,
- $\mathcal{T}_{\text{PIV}}$  qui permet de passer des images de PIV à l'espace réel,

ainsi que les transformations inverses.

La figure 7.2 permet de comparer l'image de la caméra associée aux mesures de vitesses avant et après transformation.

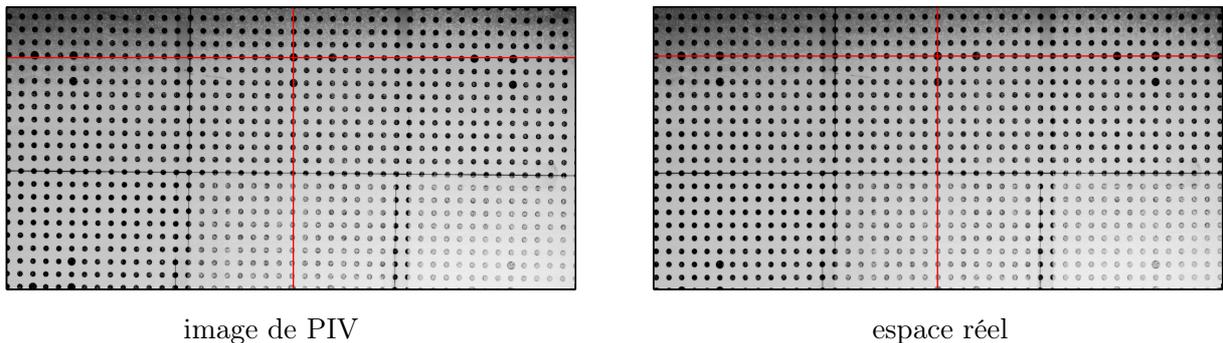


FIGURE 7.2 – À gauche : photo de la grille obtenue par la caméra associée aux mesures de PIV. À droite : résultat de la transformation  $\mathcal{T}_{\text{PIV}}$  appliquée à la photo de gauche.

Nous remarquons que pour l'image brute les points ne sont pas alignés parfaitement avec la verticale et l'horizontale (représentées par les lignes rouges) en raison d'un mauvais positionnement de la caméra. L'application des transformations permet alors de retrouver cet alignement. Cette calibration permet ainsi de projeter les images issues de chaque caméra sur un espace commun, faisant ainsi correspondre spatialement les mesures de densité et de vitesses.

### 7.1.2 Synchronisation des caméras

Le seul calibrage spatial ne suffit pas pour faire correspondre les mesures de densité et de vitesses. Il faut, en effet, s'assurer que ces mesures s'effectuent au même instant. Pour effectuer cette synchronisation, il est nécessaire de se rappeler qu'un champ de vitesse à l'instant  $t$  est obtenu en comparant une image prise à l'instant  $t + \Delta t/2$  et une image prise à l'instant  $t - \Delta t/2$ , alors qu'un champ de densité est obtenu à partir d'une unique image prise à l'instant  $t$ .

Une première manière de régler ce problème est de déclencher les deux caméras en même temps. Nous obtenons alors des images tous les temps  $t_n$ . Nous devons alors comparer les images de PIV des temps  $t_{n+1}$  et  $t_{n-1}$  pour obtenir le champ de vitesse de l'instant  $t_n$  alors que le champ de densité est directement obtenu à partir de l'image prise à l'instant  $t_n$  (figure 7.3).

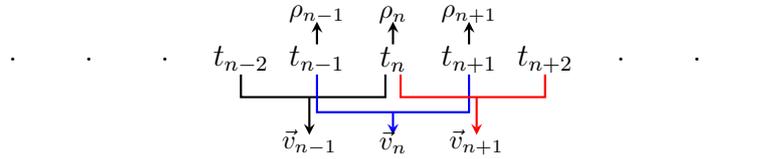


FIGURE 7.3 – Calcul des champs de vitesse et de densité dans le cas où les deux caméras ont la même fréquence d'acquisition.

Cependant, pour que l'algorithme de PIV fournisse un champ de vitesse propre, le déplacement des particules de PIV entre deux images doit être compris entre 10 et 15 pixels. Ce déplacement peut alors être rapidement dépassé si la fréquence d'acquisition n'est pas assez élevée. La synchronisation par déclenchement simultané des deux caméras impose une fréquence d'acquisition deux fois plus grande que la fréquence d'acquisition optimale pour la PIV, en raison de l'utilisation d'une image sur deux (figure 7.3).

Or, il est difficile d'assurer une fréquence d'acquisition élevée et stable en raison de la taille importante des images que l'on doit acquérir<sup>1</sup>. La stabilité de la fréquence d'acquisition étant primordiale pour les champs de vitesse, nous avons opté pour une synchronisation plus élaborée, permettant de régler indépendamment l'intervalle de temps entre deux images de PIV,  $T_{PIV}$ , et l'intervalle de temps entre deux images de LIF,  $T_{LIF}$ .

La figure 7.4 représente les différents signaux utilisés pour commander les deux caméras ainsi que le miroir oscillant. Un programme Labview génère un double créneau permettant de déclencher les acquisitions de la caméra de PIV. Ce signal est également envoyé à un générateur de fonctions Agilent afin de générer un seul créneau dont le front montant est au milieu des deux précédents créneaux. Ce signal est utilisé pour le déclenchement de la caméra de LIF et est sommé au précédent signal afin de déclencher les oscillations du miroir au moment de l'acquisition des images (zones grisées de la figure 7.4).

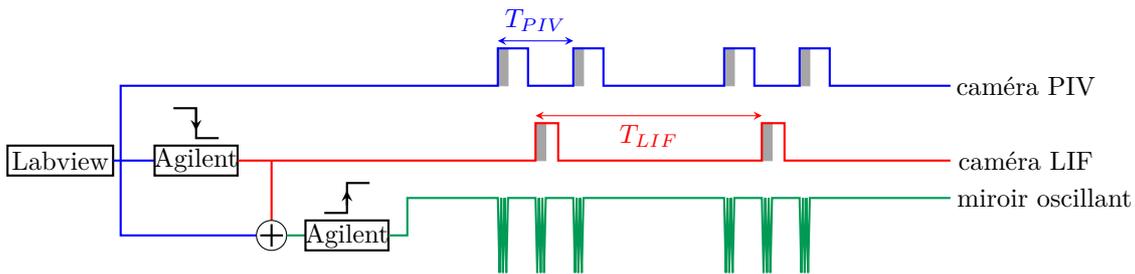


FIGURE 7.4 – Signaux électriques permettant d'acquérir deux images de PIV pour une image de LIF et de contrôler le miroir oscillant.  $T_{PIV}$  et  $T_{LIF}$  sont les périodes associées à chaque caméra.

Ce système de synchronisation permet ainsi de prendre deux images à des temps très proches pour la PIV, tout en ne prenant qu'une image de LIF. Les signaux sont conçus de sorte que l'image de LIF soit prise exactement entre les deux images de PIV. Ce système

1. Pour la LIF, les images que l'on acquiert sont codées en 16 bits, donc beaucoup plus grosses en terme de mémoire et de temps de transfert.

permet ainsi de calculer le champ de vitesse à l'instant  $t$  et de mesurer le champ de densité à  $t$ . Par ailleurs, nous pouvons contrôler indépendamment les temps  $T_{PIV}$  et  $T_{LIF}$ , ce qui n'était pas le cas avant. Enfin, pour éviter le photobleaching évoqué au paragraphe 6.2.3, le miroir est synchronisé avec la somme des deux signaux de contrôle, permettant ainsi un temps d'illumination minimal au cours de l'acquisition.

### 7.1.3 Traitements et premières observations

Les champs de vitesse sont obtenus à l'aide d'un algorithme de PIV (uvmat), sous licence GNU, basé sur les algorithmes de Fincham et Delerce [27, 85]. Deux images sont enregistrées avec un écart temporel de  $T_{PIV} = 1/6$  s tous les  $T_{LIF} = 1/2$  s, permettant d'obtenir entre 15 et 20 champs de vitesse par période de forçage. Les calculs de PIV sont effectués pour chaque paire d'images sur une fenêtre d'interrogation de  $21 \times 21$  pixels tous les 10 pixels. Par ailleurs, le grandissement utilisé lors de nos expériences est d'environ  $40 \text{ pix}\cdot\text{cm}^{-1}$ . Ce traitement permet donc d'obtenir une mesure de vitesse tous les 2.5 mm.

Les champs de densité sont obtenus en utilisant le traitement détaillé au paragraphe 6.3.1. Ce champ pourra être moyenné pour obtenir une mesure de la densité tous les 2.5 mm afin d'accorder la résolution du champ de densité à celle du champ de vitesse. Une fois ces deux champs obtenus, nous utilisons les transformations  $\mathcal{T}_{LIF}$  et  $\mathcal{T}_{PIV}$  pour les superposer dans l'espace réel<sup>2</sup>.

Il est simple dans un premier temps de vérifier que nos deux caméras sont correctement synchronisées et calibrées. Il suffit pour cela d'observer un point du fluide et de tracer l'évolution de la vitesse et de la densité sur une même figure (figure 7.5). Pour une onde plane ou un mode-1, l'utilisation de l'équation de la conservation de la masse permet de montrer que la vitesse verticale se comporte comme la dérivée temporelle de la densité

$$v_z = -\frac{1}{\partial_z \bar{\rho}} \partial_t \rho. \quad (7.1)$$

Les deux courbes doivent donc être en quadrature de phase. La figure 7.5(a) montre l'évolution temporelle de la densité (courbe bleue) et de la vitesse verticale (courbe rouge) en un point du fluide parcouru par un mode-1.

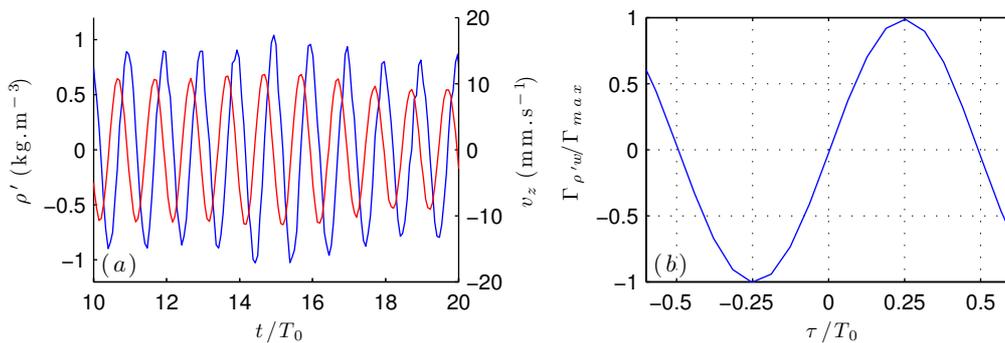


FIGURE 7.5 – (a) En bleu : fluctuations de densité mesurées en un point du fluide en fonction de  $t/T_0$  avec  $T_0$  la période du forçage. En rouge : mesure de la vitesse verticale du fluide au même point. (b) Corrélation croisée de la densité et de la vitesse en fonction de  $\tau/T_0$ .

2. La transformation du champ de vitesse porte non seulement sur les coordonnées des vecteurs mais également sur la valeur de la vitesse.

L'axe des  $z$  étant orienté vers le haut,  $\partial_z \rho$  est négatif. Nous en déduisons donc que la vitesse verticale est du même signe que la dérivée temporelle de la densité. Sur la figure 7.5(a) lorsque la vitesse est positive (courbe rouge), la densité du fluide en un point augmente et atteint son maximum lorsque la vitesse s'annule. Afin de s'assurer de la relation entre les fluctuations de densité  $\rho'$  et la vitesse verticale  $w$ , nous calculons la corrélation croisée  $\Gamma_{\rho'w}(\tau)$  de ces deux grandeurs, définie comme suit

$$\Gamma_{\rho'w}(\tau) = \int \rho'(u)w^*(u - \tau)du . \quad (7.2)$$

La figure 7.5(b) représente l'évolution de cette corrélation croisée normalisée par son maximum entre  $\tau = -T_0/2$  et  $\tau = +T_0/2$ . Le maximum est atteint pour  $\tau = 0.25T_0$  ce qui correspond à un déphasage entre les deux signaux de  $\pi/2$ . La vitesse se comporte donc bien comme la dérivée de la densité et nos mesures de vitesse et de densité s'effectuent au même instant et au même endroit.

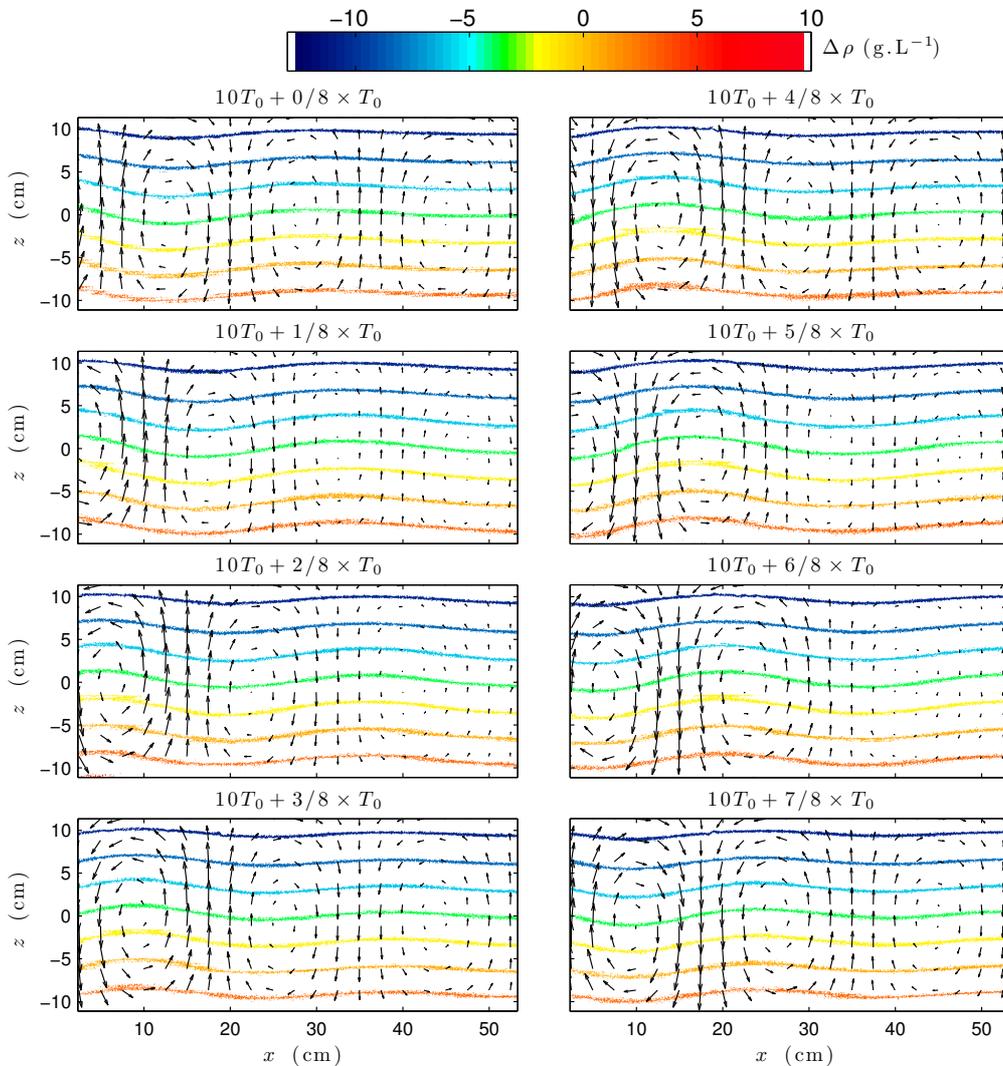


FIGURE 7.6 – Propagation d'un mode-1 sur une période de forçage  $T_0$  avec  $\Delta\rho = \rho - 1000 \text{ g.L}^{-1}$  et une largeur des isopycnes de  $0.2 \text{ g.L}^{-1}$ . L'écart temporel entre 2 images est de  $1/8 T_0$ .

Il est alors possible de superposer l'ensemble du champ de densité et de vitesse. La figure 7.6 présente la superposition du champ de densité et du champ de vitesse dans le cas de la propagation d'un mode-1 et à différents instants. Nous observons ainsi la propagation d'un mode-1 de la gauche vers la droite à la fois par le déplacement des isopycnes et par le déplacement du champ de vitesse (déplacement des rouleaux de vitesse de la gauche vers la droite).

Finalement, après avoir validé la technique de LIF au chapitre précédent, nous avons effectué et validé des mesures simultanées de vitesse et de densité. Nous sommes donc à présent en mesure d'étudier le mélange par les ondes internes dans un cas simple par la technique de PIV-LIF.

## 7.2 Mélange et flux de densité

Le résultat du mélange par les ondes internes peut facilement s'observer en mesurant la stratification avant et après la propagation des ondes. La comparaison des deux stratifications permet ainsi d'observer si la densité a évolué au sein du fluide. La figure 7.7 représente l'évolution de la stratification après la propagation d'un mode-1 instable sur des périodes de temps allant de 45 min à 180 min. Nous observons alors un raidissement de la pente de la stratification, ce qui équivaut à une diminution locale de la pulsation de flottabilité  $N$ . Cette diminution est plus rapide lorsque le mode se déstabilise sous forme de deux ondes secondaires de plus petites longueurs d'ondes (PSI). Ces premières observations permettent de confirmer que l'instabilité paramétrique joue un rôle dans le mélange d'un fluide stratifié par les ondes internes.

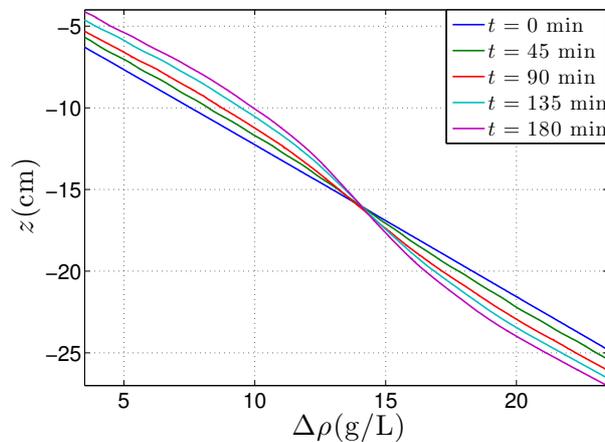


FIGURE 7.7 – Mesure de l'évolution temporelle de la stratification lors de la propagation d'un mode-1.

Cependant, ces mesures ponctuelles de la stratification ne sont pas tout à fait satisfaisantes. En effet, pour effectuer ces mesures nous devons arrêter le générateur, attendre la stabilisation du fluide, puis mesurer la stratification à l'aide de la sonde conductimétrique et enfin reprendre la propagation du mode-1. Ce protocole ne permet donc pas de mesurer l'impact réel de la propagation continue d'une onde interne. En outre, de cette manière nous n'observons que le résultat final et non les processus instantanés de mélange.

La technique de PIV-LIF permet, quant à elle, d'aller plus en avant dans l'étude du mélange en mesurant en temps réel l'évolution de la densité et de la vitesse au sein du

fluide. Grâce à ces mesures nous pouvons, en particulier, déterminer le flux vertical de densité  $\langle \rho' w' \rangle$  où  $\rho'$  correspond aux fluctuations de densité et  $w'$  aux fluctuations de vitesse verticale. Cette grandeur est intéressante à étudier et à mesurer, car c'est un terme qui apparaît naturellement dans les équations. En effet, si l'on étudie l'équation de conservation de la masse dans un cas unidimensionnel et sans diffusion de masse, nous avons

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 . \quad (7.3)$$

Or, pour un écoulement turbulent, la densité et la vitesse peuvent se réécrire comme la somme d'un terme moyen et d'un terme de fluctuations dont la moyenne temporelle est nulle

$$\rho = \langle \rho \rangle + \rho' \quad \text{et} \quad w = \langle w \rangle + w' . \quad (7.4)$$

L'équation (7.3) devient alors

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle w \rangle}{\partial z} = - \frac{\partial \rho' \langle w \rangle}{\partial z} - \frac{\partial \langle \rho \rangle w'}{\partial z} - \frac{\partial \rho' w'}{\partial z} . \quad (7.5)$$

Si l'on effectue une moyenne temporelle de cette équation, les termes s'exprimant comme le produit d'une grandeur moyenne et d'une grandeur fluctuante s'annulent<sup>3</sup>, et l'équation (7.6) devient

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \langle w \rangle}{\partial z} = - \frac{\partial \langle \rho' w' \rangle}{\partial z} . \quad (7.6)$$

Nous obtenons ainsi une équation très similaire à une équation de diffusion avec, à droite de l'égalité, un terme égal à la dérivée spatiale d'un flux. Par analogie avec la loi de Fick, ou encore la loi de Fourier, un coefficient de diffusion turbulente  $\kappa_t$  peut être défini tel que

$$\langle \rho' w' \rangle = -\kappa_t \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} . \quad (7.7)$$

Afin de comparer différentes expériences, il est alors plus pertinent d'utiliser le coefficient de diffusion turbulente  $\kappa_t$ , plutôt que le flux vertical de densité. Par ailleurs, le mélange consistant à abaisser du fluide moins dense ( $w' < 0$  et  $\rho' < 0$ ) ou à élever du fluide plus dense ( $w' > 0$  et  $\rho' > 0$ ), le coefficient de diffusion turbulente est toujours positif<sup>4</sup>. Finalement,  $\kappa_t$  caractérise l'importance du mélange par la turbulence dans l'écoulement considéré : plus ce coefficient est grand et plus la turbulence joue un rôle important dans les processus de mélange.

La mesure de ce coefficient nécessite la détermination des fluctuations de densité et de vitesse. La technique de LIF permettant d'obtenir des champs de densité,  $\rho'$  est obtenu en retirant la composante continue ou lentement variable au champ de densité. Nous obtenons ainsi une grandeur dont la moyenne temporelle est nulle. La technique de PIV fournit, quant à elle, la composante verticale du champ de vitesse  $w$ . Or, l'écoulement considéré ici ne possède pas d'écoulement moyen selon la verticale ainsi,  $w = w'$ . Par la suite nous garderons la notation  $w$  pour désigner les fluctuations de vitesse verticale. Enfin, le produit de ces deux grandeurs est moyenné temporellement pour obtenir  $\kappa_t$ .

Pour les expériences qui nous intéressent ici, la turbulence n'est pas homogène spatialement. En effet, l'onde primaire n'a pas la même amplitude sur toute la zone d'observation, la PSI aura donc tendance à se développer à proximité du générateur. Les processus de

3. Nous supposons ici que la moyenne temporelle et les dérivées spatiales et temporelles commutent (hypothèse d'ergodicité).

4. On rappelle que l'axe des  $z$  est orienté vers le haut, ainsi  $\partial_z \bar{\rho}$  est négatif

mélange seront, par conséquent, plus intenses dans ces régions. Afin d'observer ces zones préférentielles de mélange, nous effectuons une moyenne temporelle du flux vertical de densité sur chaque point de la fenêtre d'observation, et nous obtenons ainsi une carte du coefficient de diffusion turbulente (figures 7.8(a), (b) et (c)).

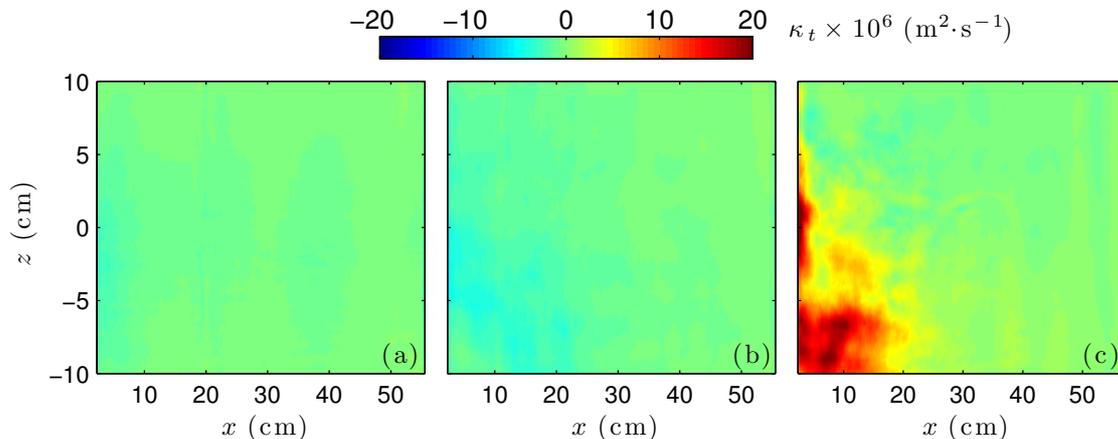


FIGURE 7.8 – Champs de coefficient de diffusion turbulente  $\kappa_t$  en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  pour trois expériences : (a) mode-1 stable, (b) mode-1 instable sans mélange, (c) mode-1 instable provoquant du mélange.

La figure 7.8(a) représente la variation spatiale de  $\kappa_t$  lors de la propagation d'un mode-1 stable;  $\kappa_t$  est homogène et possède des valeurs de l'ordre de  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , valeur qui semble être la valeur la plus petite mesurable avec notre dispositif expérimental. Dans le cas d'un mode-1 instable, mais qui ne provoque aucun mélange sur le temps de l'expérience (figure 7.8(b)), nous observons de faibles variations de  $\kappa_t$ . Il est à noter que ces variations sont négatives, nous verrons par la suite comment ce résultat peut être interprété. Enfin la figure 7.8(c) présente le coefficient de diffusion turbulente obtenu pour un mode-1 instable vis-à-vis de la PSI et ayant entraîné du mélange. Nous observons cette fois ci des valeurs allant jusqu'à  $20 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Par ailleurs ce coefficient est plus intense à proximité du générateur d'ondes, situé sur la gauche de la cuve expérimentale. En effet l'instabilité se développe près du générateur, c'est donc dans cette zone que l'amplitude des ondes secondaires est maximale, ce qui peut provoquer des déferlements et donc du mélange.

Nous observons donc des comportements différents de ce coefficient en fonction des conditions expérimentales. Cependant, un point reste à résoudre : pourquoi obtient-on des valeurs négatives du coefficient de diffusion turbulente? Ces valeurs négatives signifient que la propagation du mode-1 produit un abaissement de fluide dense ou une élévation de fluide moins dense par rapport à la stratification initiale, *i.e.* une augmentation de la stratification. Ce résultat traduit donc un phénomène qui est totalement l'opposé du mélange. Afin de mieux comprendre de tels résultats, nous avons tracé des histogrammes en deux dimensions en fonction de  $\rho'$  et de  $w$ . La figure 7.9 représente en échelle de couleur la récurrence du couple  $(w, \rho')$  en fonction de  $w$  et de  $\rho'$ , lors de la propagation d'un mode-1 stable. La récurrence du couple est mesurée sur une fenêtre de hauteur : la hauteur de la zone d'observation, et de largeur : une longueur d'onde horizontale de l'onde primaire.

Nous observons une ellipse dont les axes sont confondus avec l'horizontale et la verticale. En effet, Comme nous l'avons vu au cours du paragraphe 7.1.3, les fluctuations de densité

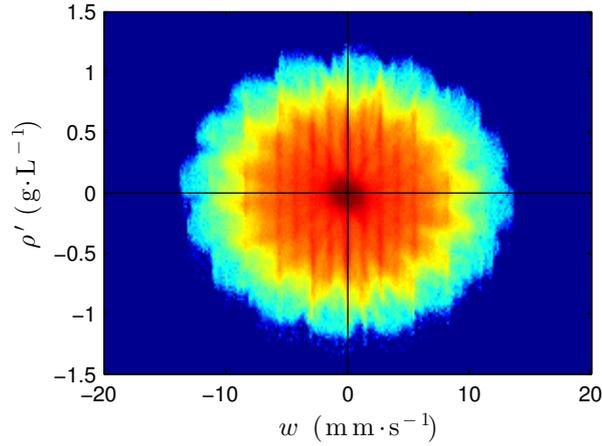


FIGURE 7.9 – Histogramme 2D calculé sur toute la durée de l'expérience dans le cas de la propagation d'un mode-1 stable.

et la vitesse verticale sont reliées par la formule suivante

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{N^2 \rho_0}{g} w. \quad (7.8)$$

La vitesse et la densité sont donc en quadrature de phase et, par conséquent, l'histogramme est en forme d'ellipse dont les axes sont alignés avec l'horizontale et la verticale.

Sur la figure 7.9, nous observons que les petites valeurs de  $\rho'$  et de  $w$  ont une contribution plus importante que les autres valeurs. Deux explications complémentaires permettent de comprendre cette observation. Tout d'abord, l'amplitude de l'onde évolue avec le temps, ainsi le rayon de l'ellipse change au cours du temps, ce qui crée un anneau plutôt qu'une ellipse. Ensuite, en raison de la taille de la cuve, l'onde émise par le générateur se réfléchit en bout de cuve et l'onde réfléchie se superpose ainsi à l'onde incidente. Nous observons alors la mise en place d'une onde stationnaire selon l'horizontale, pour laquelle les noeuds de densité correspondent aux noeuds de vitesse. Dans ce cas, l'histogramme calculé en un instant donné est une droite passant par l'origine du repère, et cette droite tourne au cours du temps à la pulsation  $\omega_0$ . C'est pourquoi l'amplitude de l'histogramme est relativement constante pour  $\rho'$  variant entre  $-0.8$  et  $0.8 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  et  $w$  entre  $-9$  et  $9 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ .

La figure 7.10(a) est l'histogramme 2D calculé dans la zone de  $\kappa_t$  négatif (figure 7.8(b)) et sur toute la durée de l'expérience. Dans ce cas, l'histogramme a la forme d'une ellipse dont les axes sont légèrement inclinés par rapport à l'horizontale et la verticale. Cette rotation a pour conséquence de privilégier les quadrants pour lesquels le produit  $\rho'w$  est négatif, d'où le signe du coefficient de diffusion turbulente. Nous observons par ailleurs, que dans ce cas, le centre du disque a une contribution plus faible qu'une partie de l'histogramme, car pour cette fréquence d'excitation, l'atténuation de l'onde primaire est suffisamment intense pour empêcher la mise en place d'une onde stationnaire selon l'horizontale, contrairement au cas précédent.

Une rotation des axes de l'ellipse correspondant à un déphasage supplémentaire entre les fluctuations de densité et la vitesse, nous avons mesuré l'évolution temporelle du décalage  $\tau/T_0$  (figure 7.10(b)), en calculant la corrélation croisée  $\Gamma_{\rho'w}$ , définie dans la section 7.1.3, à différents instants. Nous obtenons ainsi un décalage temporel moyen de  $\tau = 0.23 T_0$  (ligne verte) ce qui est légèrement différent de la valeur attendue de  $0.25 T_0$  (ligne rouge). Il existe donc un déphasage supplémentaire entre  $\rho'$  et  $w$ . Nous pouvons à l'aide de cette

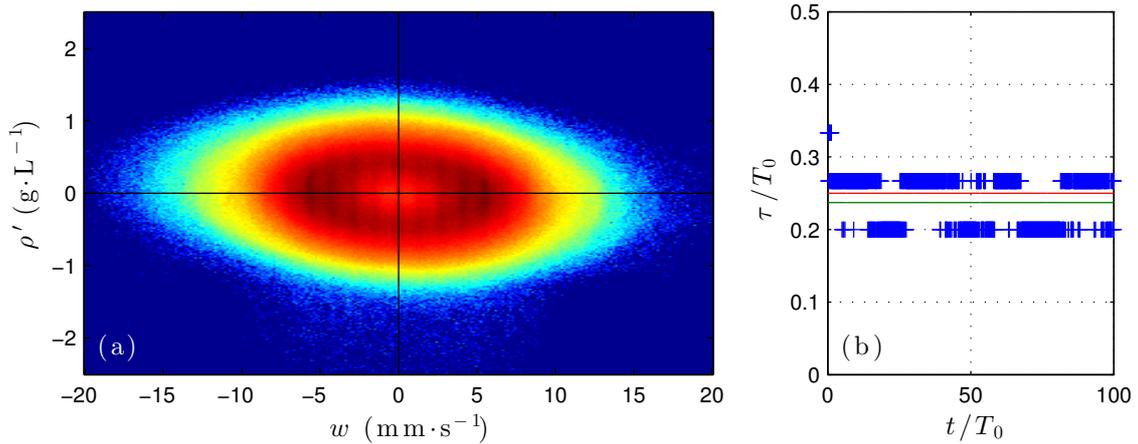


FIGURE 7.10 – (a) Histogramme 2D calculé sur toute la durée de l’expérience sur la zone où  $\kappa_t$  est négatif. (b) Évolution du décalage temporel  $\tau$  entre la densité et la vitesse verticale normalisé par la période de forçage  $T_0$  en fonction de  $t/T_0$ . La ligne horizontale verte signale la valeur moyenne du décalage temporel ( $\tau/T_0 = 0.23$ ). La ligne rouge signale la valeur attendue ( $\tau/T_0 = 0.25$ ).

valeur de déphasage prédire l’ellipse observable dans l’histogramme 2D. Cette prédiction est superposée aux observations expérimentales sur la figure 7.11(a). Nous observons un très bon accord entre les observations et cette prédiction.

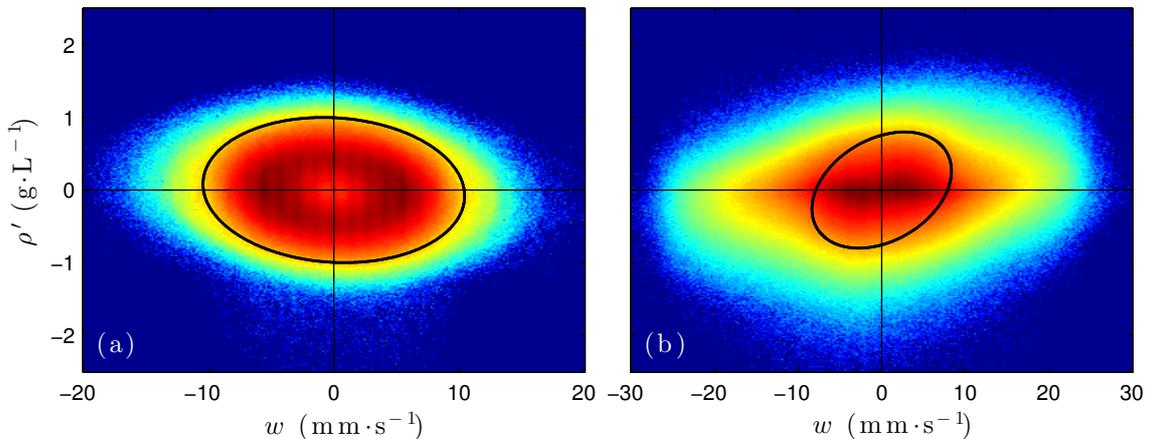


FIGURE 7.11 – (a) Superposition de l’histogramme 2D et de la prédiction (courbe noire) dans le cas de l’expérience avec PSI mais sans mélange. (b) Superposition de l’histogramme 2D et de la prédiction (courbe noire) dans le cas de l’expérience avec PSI et mélange.

Finalement, la valeur négative du coefficient de diffusion turbulente semble provenir ici soit d’un problème de synchronisation temporelle des deux caméras, soit d’un problème d’échantillonnage. En effet, pour cette expérience la période du mode-1 correspond à 15 images, ce qui signifie que le déphasage entre la vitesse et la densité n’est pas un nombre entier d’image. Le décalage passe aléatoirement de 3 à 4 images au cours de l’expérience en fonction de l’échantillonnage, et ce sont ces sauts qui provoquent ce décalage apparent et sont à l’origine d’un coefficient de diffusion turbulente apparent négatif.

Nous avons également effectué ce traitement sur l’expérience présentant du mélange (fi-

gure 7.8(c)). Le résultat de ce traitement est présenté sur la figure 7.11(b). Nous remarquons que l'histogramme change sensiblement de forme, nous observons une ellipse légèrement inclinée mais avec des déformations principalement localisés dans les domaines où le produit  $\rho'w$  est positif. Des événements dans les quadrants ( $w > 0, \rho' > 0$ ) et ( $w < 0, \rho' < 0$ ) semblent se produire plus fréquemment, conduisant ainsi à un coefficient de diffusion turbulente positif. Il est cependant possible qu'un problème du même ordre que précédemment soit présent ici, et il est difficile d'estimer son importance par rapport aux déformations de l'ellipse. Par ailleurs, nous avons représenté sur l'histogramme la prédiction de l'ellipse en fonction du déphasage que nous mesurons entre  $\rho'$  et  $w$ . Cette prédiction n'est, cette fois, pas du tout en accord avec les observations. En effet, lorsque du mélange se produit, la densité et la vitesse verticale ne sont alors plus nécessairement en quadrature de phase, et ainsi le décalage  $\tau$  que nous mesurons ne correspond plus au véritable décalage temporel entre les images des deux caméras.

En conclusion, nous sommes capable d'observer des variations du coefficient de diffusion turbulente, cependant il semble être encore trop tôt pour obtenir des mesures précises de ce coefficient. En effet, nous devons pour cela nous assurer de la synchronisation des deux caméras afin d'éviter les désagréments présentés précédemment. Nous envisageons donc pour les prochaines expériences de mesurer précisément les temps de prise des images en plus de la méthode de déclenchement des caméras. Il pourrait par ailleurs être judicieux de synchroniser l'acquisition des images avec le générateur d'ondes afin d'obtenir un nombre entier d'images pour le décalage temporel entre les fluctuations de densité et la vitesse. Ces deux précautions expérimentales devraient alors permettre de lever le doute sur les valeurs du coefficient de diffusion turbulente.

### 7.3 Énergie potentielle et cinétique

Au cours de la section précédente, nous avons cherché à mesurer directement le mélange par les ondes internes à l'aide du coefficient de diffusion turbulente. Nous pouvons également nous intéresser à l'évolution au cours du temps de l'énergie des ondes internes de gravité et comparer cette énergie à l'énergie théoriquement injectée au fluide par le générateur d'ondes. L'écart entre ces deux grandeurs est alors une signature de la quantité d'énergie transmise au fluide sous forme d'énergie potentielle, ainsi que de la quantité d'énergie dissipée par les ondes internes de gravité.

L'énergie cinétique volumique  $e_c$ , somme de l'énergie cinétique horizontale  $e_{cx}$  et de l'énergie cinétique verticale  $e_{cz}$ , et l'énergie potentielle volumique  $e_p$  s'expriment de la manière suivante

$$e_{cx}(x, z, t) = \frac{1}{2}\bar{\rho}(z)u^2(x, z, t), \quad (7.9)$$

$$e_{cz}(x, z, t) = \frac{1}{2}\bar{\rho}(z)w^2(x, z, t), \quad (7.10)$$

$$e_p(x, z, t) = -\frac{1}{2}\frac{g}{\partial_z\bar{\rho}(z)}\rho'^2(x, z, t), \quad (7.11)$$

où  $\bar{\rho}$  est la stratification initiale,  $u$  la vitesse horizontale,  $w$  la vitesse verticale et  $\rho'$  les fluctuations de densité.

L'énergie totale des ondes internes  $e_t$  est la somme de l'énergie potentielle  $e_p$  et de l'énergie cinétique  $e_c = e_{cx} + e_{cz}$ . La figure 7.12 montre l'évolution temporelle des différentes composantes de l'énergie volumique mesurée au centre du fluide stratifié lors de la propagation d'un mode-1 : (a) stable, (b) instable mais sans mélange, (c) instable et avec

du mélange. Ces mesures ont été effectuées au centre de la stratification, puis une moyenne temporelle glissante sur 4 périodes de forçage est appliquée.

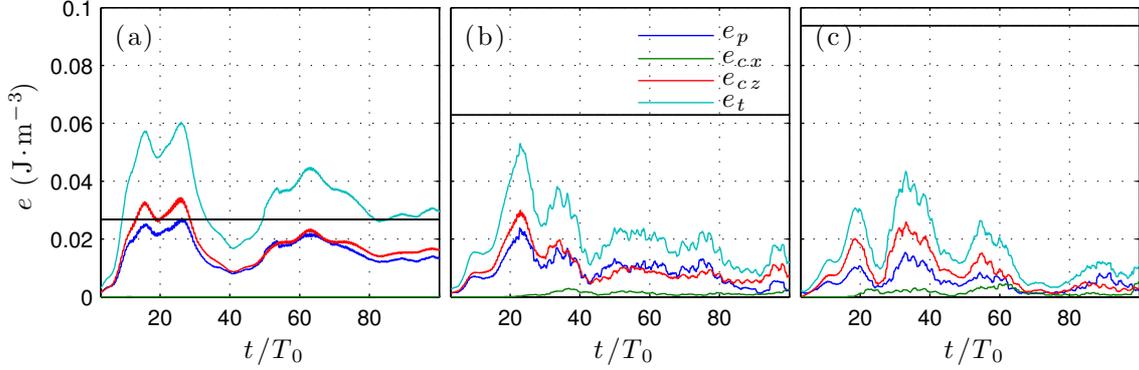


FIGURE 7.12 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique, potentielle et totale pour un point au centre de la cuve expérimentale dans le cas d'un mode-1 stable  $\omega_0/N = 0.88$  (a), instable  $\omega_0/N = 0.93$  (b) et instable et présentant du mélange  $\omega_0/N = 0.93$  (c). La droite horizontale représente  $e_{gen}$  l'énergie cinétique injectée par le générateur au fluide stratifié.

Dans un premier temps, nous pouvons observer que l'énergie cinétique horizontale reste nulle dans le cas (a) car la vitesse horizontale est nulle au centre d'un mode-1. Ce n'est plus le cas pour les figures 7.12(b) et (c) en raison de la déstabilisation de l'onde primaire. Les deux ondes secondaires confèrent une vitesse horizontale au fluide, ce qui se traduit par une augmentation de l'énergie cinétique.

Comme nous l'avons signalé précédemment, il est intéressant de comparer l'énergie volumique totale des ondes internes de gravité à l'énergie cinétique théorique injectée dans le fluide par le générateur. Nous générons ici un mode-1, ainsi la vitesse horizontale du fluide est de la forme

$$u(x, z, t) = a\omega_0 \sin(m_0 z) \sin(\ell_0 x - \omega_0 t), \quad (7.12)$$

avec  $a$  l'amplitude du générateur,  $\omega_0$  la pulsation imposée,  $\ell_0$  et  $m_0$  les composantes horizontales et verticales du vecteur de l'onde mère et où l'axe des  $z$  est orienté vers le haut et défini depuis le centre du mode. L'hypothèse d'incompressibilité du fluide permet de déterminer la composante verticale de la vitesse dans le fluide

$$w(x, z, t) = a\omega_0 \frac{\ell_0}{m_0} \cos(m_0 z) \cos(\ell_0 x - \omega_0 t). \quad (7.13)$$

Pour connaître l'énergie cinétique injectée par le générateur, nous prenons l'expression de la vitesse verticale et horizontale en  $x = 0$  (position du générateur) et nous effectuons une moyenne sur une période pour obtenir l'énergie injectée par période de forçage, ainsi

$$e_{c_{gen}}(z) = \frac{1}{4} \bar{\rho}(z) (a\omega_0)^2 \left( \sin(m_0 z)^2 + \left( \frac{\ell_0}{m_0} \right)^2 \cos(m_0 z)^2 \right). \quad (7.14)$$

Nous remarquons qu'en  $z = 0$  (point de mesure des énergies), seule la partie verticale contribue à l'excitation. Nous pouvons ainsi calculer les valeurs théoriques d'énergie cinétique injectée au fluide par le générateur d'ondes (ligne horizontale noire des figures 7.12(a), (b) et (c)). Dans le cas sans PSI, nous pouvons remarquer que l'énergie du fluide semble

être plus importante que l'énergie injectée. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'onde se réfléchit en bout de cuve, ainsi au point de mesure il y a superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie d'amplitude plus faible que l'onde incidente. C'est pourquoi l'énergie en ce point est comprise entre une et deux fois l'énergie injectée. Ensuite dans les cas où l'instabilité se développe, nous remarquons que l'énergie des ondes est plus faible que l'énergie injectée. Cela s'explique par le fait que la dissipation est plus efficace lors de la présence de l'instabilité, en raison de la présence d'ondes de longueurs d'ondes plus petites. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que l'écart entre l'énergie injectée et les mesures est plus important pour l'expérience comportant du mélange, ce qui est cohérent avec le fait que de l'énergie associée aux ondes est transmis au fluide sous forme d'énergie potentielle, afin d'élever le centre de gravité du fluide stratifié, et que la dissipation est augmentée en raison de l'augmentation de phénomènes à petites échelles.

## 7.4 Retournement et cisaillement

### 7.4.1 Échelle de Thorpe

L'échelle de Thorpe, introduite dans les années soixante-dix [91], représente l'échelle typique des retournements au sein d'un fluide stratifié. La mesure de cette échelle consiste, dans un premier temps, à effectuer une coupe verticale du champ de densité. Puis la densité est réordonnée de manière à obtenir une évolution décroissante de la densité avec la hauteur. Si la stratification est stable, *i.e.* sans retournement, comme sur la figure 7.13(a), le réordonnement (courbe verte) ne modifie pas le profil initial (courbe bleue) sauf pour des petites variations dues au bruit de la mesure. Par contre dans le cas d'un retournement (figure 7.13(b)), des points doivent être déplacés de  $\delta z$  afin d'obtenir une fonction décroissante de la densité.

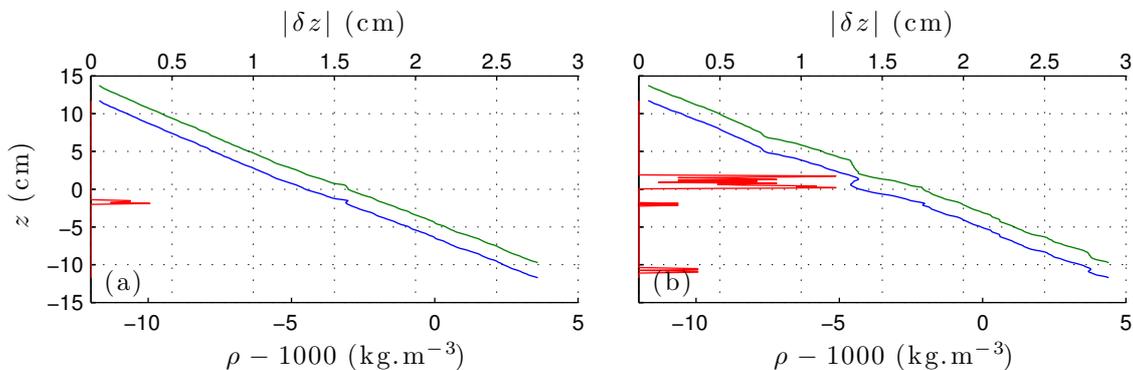


FIGURE 7.13 – En bleu est représentée une coupe verticale du champ de densité. La courbe verte est le résultat du réarrangement décalé de 2 cm vers le haut pour plus de lisibilité. La courbe rouge est la valeur absolue du déplacement vertical calculé sur les deux profils.

La courbe rouge de la figure 7.13 représente l'évolution de  $|\delta z|$  en fonction de  $z$ , pour chaque profil de densité. L'échelle de Thorpe,  $L_T$ , correspond finalement à la valeur moyenne temporelle de ce déplacement

$$L_T = \langle |\delta z| \rangle_t . \quad (7.15)$$

La technique de LIF en fluide stratifié fournissant le champ de densité, nous avons pu mesurer cette échelle en chaque point du fluide et à tout temps. La figure 7.14 présente

l'échelle de Thorpe en chaque point, pour les trois mêmes expériences que précédemment ((a) : mode-1 stable, (b) : mode-1 instable mais pas de mélange, (c) : mode-1 instable et mélange). Sur les figures 7.14(a) et (b), nous observons une ligne quasiment horizontale sur laquelle l'échelle de Thorpe prend une valeur importante. Cette ligne est dû à un faisceau incident légèrement plus intense, qui a pour conséquence de fausser l'estimation de la densité et induit ainsi une erreur dans la mesure de l'échelle de Thorpe. Par ailleurs, nous observons que ces deux figures présentent en bruit de fond des structures tout à fait similaires (traits horizontaux) qui laissent à penser que ces variations sont dues au traitement et non à des retournements. Cependant, sur la figure (b), il apparaît, par dessus ces structures, des variations de la longueur de Thorpe, montrant ainsi que des retournements se produisent dès lors que des ondes planes secondaires sont générées par la PSI.

Enfin nous observons logiquement que l'expérience présentant du mélange présente plus de retournements. De plus, nous pouvons noter à nouveau que ces phénomènes apparaissent préférentiellement à proximité du générateur d'ondes. Cette observation est donc cohérente avec les mesures du coefficient de diffusion turbulente  $\kappa_t$ .

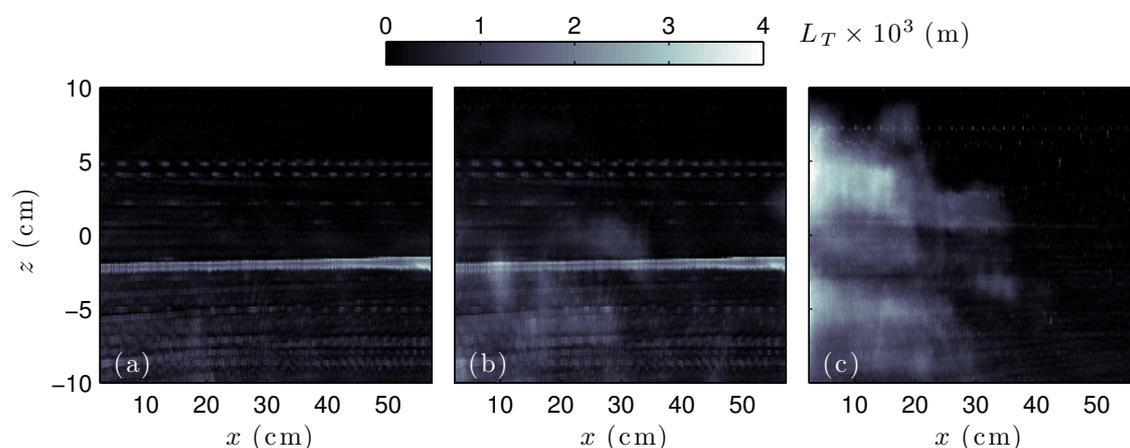


FIGURE 7.14 – (a) Évolution spatiale de la moyenne temporelle de l'échelle de Thorpe pour un mode-1 stable. (b) Évolution spatiale de la moyenne temporelle de l'échelle de Thorpe pour une expérience présentant de la PSI mais sans mélange significatif. (c) Évolution spatiale de la moyenne temporelle de l'échelle de Thorpe pour une expérience présentant de la PSI et du mélange.

Cependant, l'observation d'un retournement des isopycnes, à un instant donné, ne garantit pas le déferlement. En effet, pour qu'il y ait déferlement, le retournement doit durer suffisamment longtemps pour que la gravité l'emporte sur l'inertie et fasse s'écrouler cette inversion de densité. Sutherland introduit à ce sujet la notion d'instabilité convective [88]. Il est alors intéressant de comparer le taux de croissance  $\sigma$  de cette instabilité convective à la pulsation  $\omega$  de l'onde à l'origine de ce retournement. On définit le taux de croissance de l'instabilité convective en fonction de la dérivée de la densité

$$\sigma = \sqrt{\frac{g}{\rho_0} \partial_z \rho}, \quad (7.16)$$

Il est à noter que ce taux de croissance n'est réel et positif que lorsque la densité du fluide diminue avec la profondeur ( $\partial_z \rho > 0$ ), *i.e.* au sein d'un retournement. Dans le cas de la figure 7.13(b), le taux de croissance au niveau du retournement est de l'ordre de  $0.70 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Cette valeur est donc à comparer à  $\omega_1 = 0.52 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et à  $\omega_2 = 0.30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,

les pulsations des deux ondes secondaires générées au cours des expériences. Un taux de croissance plus grand que la pulsation de l'onde signifie que la convection opère plus rapidement que le phénomène oscillatoire associé aux ondes. Ainsi dans le cas présenté sur la figure 7.13(b), le retournement, généré par les ondes secondaires, est suffisamment important pour que l'instabilité convective l'emporte sur le mouvement d'oscillation.

Finalement, le mode-1 ne crée, à lui seul, que très peu de retournement comme le montre la figure 7.13(a). Cependant, la déstabilisation de ce mode permet la génération d'ondes planes secondaires, qui pourront, si leur amplitude est suffisamment grande, générer de telles structures. Enfin, si l'instabilité convective possède un taux de croissance plus grand que la fréquence de ces ondes filles, ces retournements conduisent à des déferlements, et donc à du mélange. Le fait que la PSI génère des ondes filles, de petites longueurs d'ondes et de pulsations plus faibles que la pulsation de l'onde mère, est donc un atout pour aboutir à des déferlements.

#### 7.4.2 Nombre de Richardson

Comme nous l'avons vu précédemment, l'apparition des ondes secondaires augmentent l'énergie cinétique horizontale de l'écoulement et ainsi le cisaillement vertical. Par ailleurs, Kitade *et al.* [52] observent sur des mesures océaniques que les déferlements des ondes internes de gravité se situent dans des zones de fort cisaillement vertical. Il devient donc pertinent d'étudier de manière simultanée ce cisaillement vertical et l'échelle de Thorpe.

Afin d'étudier ce cisaillement, nous utilisons le nombre sans dimension de Richardson qui compare le cisaillement vertical à la stratification du fluide. Ce nombre a pour expression

$$R_i = \frac{N^2}{(\partial_z u)^2} . \quad (7.17)$$

Lorsque le nombre de Richardson est inférieur à 1/4 [42, 68], des instabilités de cisaillement peuvent apparaître dans l'écoulement. Nous avons donc cherché à mesurer ce nombre sans dimension dans nos expériences, afin de déterminer si des instabilités de cisaillement peuvent se développer et participer ainsi au mélange du fluide stratifié.

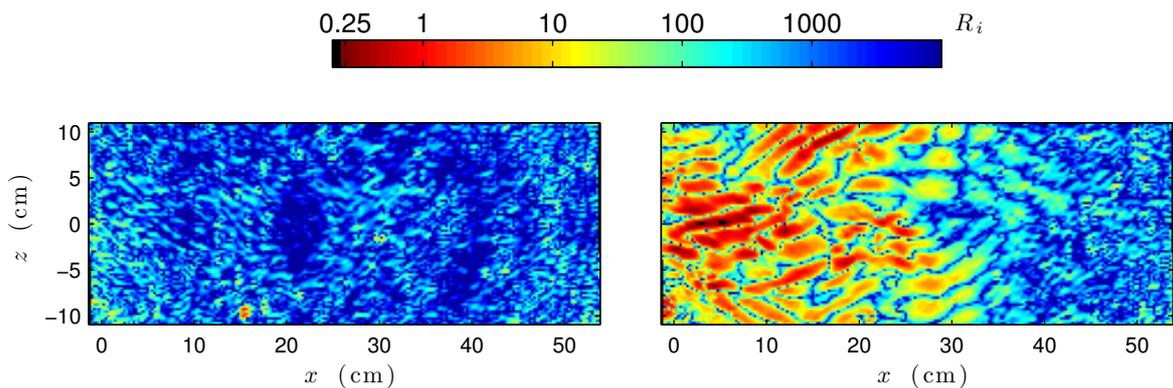


FIGURE 7.15 – Nombre de Richardson calculé pour deux instants différents. A gauche, il n'y a pas encore de PSI et à droite la PSI s'installe progressivement de gauche à droite.

La figure 7.15 présente la variation spatiale du nombre de Richardson  $R_i$  en échelle de couleurs. Le cas sans PSI à gauche possède des valeurs de Richardson de l'ordre de  $6 \times 10^3$ , le mode-1 stable ne créant aucun cisaillement vertical. Par contre, dès lors que l'instabilité paramétrique sous-harmonique se met en place, des ondes planes apparaissent au sein

de l'écoulement et génèrent un cisaillement plus important. C'est pourquoi le nombre de Richardson chute au moment de la mise en place des ondes filles, et dans certaines zones localisées (spatialement et temporellement) ce nombre peut prendre des valeurs inférieures à 0.25, suggérant alors l'apparition d'instabilités de cisaillement.

Ces premières observations confirment ainsi une corrélation entre les ondes secondaires et l'abaissement du nombre de Richardson. Il reste cependant à regarder si les zones de grandes échelles de Thorpe correspondent à des zones où le nombre de Richardson devient inférieur à 0.25. Pour cela, nous définissons la grandeur  $n_{R_i}$  qui correspond, pour un point de la zone d'observation, au nombre de fois où le nombre de Richardson est inférieur à 0.25 au cours de l'expérience. La figure 7.16 représente en échelle de gris la grandeur  $n_{R_i}/T$ , *i.e.* la récurrence de  $R_i < 0.25$  normalisé par le nombre d'images  $T$  de l'expérience. Nous représentons cette grandeur pour un mode-1 instable mais ne provoquant pas de mélange (a), et pour un mode-1 instable et provoquant du mélange (b).

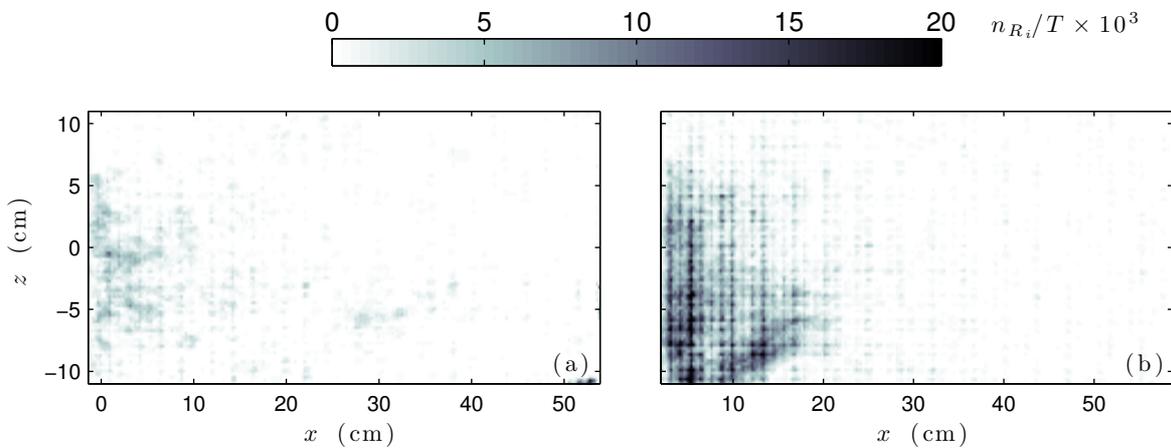


FIGURE 7.16 – Évolution spatiale de  $n_{R_i}/T$  pour un mode-1 instable mais sans mélange (a) et pour un mode-1 instable générant du mélange (b).

Nous remarquons que plus le nombre de Richardson prend des valeurs inférieures à  $1/4$  et plus le mélange est intense. Par ailleurs, nous constatons que  $n_{R_i}/T$  est plus grand à proximité du générateur, ce qui est à nouveau cohérent avec les observations du coefficient de diffusion turbulente et de la longueur de Thorpe. Il est à noter que ces trois grandeurs sont obtenues à partir de mesures différentes :

- $\kappa_t$  est obtenu à partir de  $\rho'$  et de  $w$ ,
- $L_T$  est obtenu à partir de  $\rho$ ,
- $n_{R_i}$  est obtenu à partir de  $u$ , le champ de vitesse horizontal.

Ainsi, le comportement similaire de ces trois grandeurs est bien la signature du mélange par les ondes internes de gravité.

Finalement, nous avons ici deux mécanismes qui s'ajoutent et qui participent au mélange. En effet, la PSI génère des ondes planes de grandes amplitudes et de fréquences suffisamment petites pour que les retournements puissent déferler et, dans le même temps, ces ondes planes génèrent un cisaillement horizontal intense diminuant ainsi le nombre de Richardson jusqu'à des valeurs permettant la génération d'instabilités de cisaillement. La naissance de ces instabilités participe par conséquent à la déstabilisation des retournements et donc à leur effondrement.

### Conclusion

Ce chapitre a permis d'exposer les premiers travaux de mesures simultanées de vitesse et de densité dans un fluide continûment stratifié. Nous avons dans un premier temps exposé les contraintes expérimentales de cette méthode avant d'exposer des résultats préliminaires sur l'étude du mélange par les ondes internes de gravité. Nous avons ainsi pu mesurer des coefficients de diffusivité turbulente et des échelles de Thorpe, caractérisant les retournements au sein du fluide stratifié.

Il reste cependant certains points expérimentaux à optimiser afin d'améliorer la précision de nos mesures. Tout d'abord, en raison de l'absorption par la rhodamine, la mesure de la densité est plus bruitée dans certaines zones de la fenêtre d'observation que dans d'autres. Il peut donc être pertinent de diminuer au maximum ces différences. Nous pouvons jouer sur deux facteurs pour diminuer ces effets d'absorption : la concentration en rhodamine ou l'éclairage du fluide. La première option consisterait donc à abaisser la concentration maximale en rhodamine, diminuant ainsi les effets d'absorption. Cependant, cette technique provoque une diminution du gradient en colorant et donc du gradient en intensité lumineuse. Il faut alors s'assurer que le gain apporté par la diminution de la concentration est supérieur au bruit supplémentaire dû à la diminution du gradient. La deuxième option est d'éclairer le fluide par le dessus ou le dessous, permettant ainsi de raccourcir la distance parcourue par le faisceau laser dans le fluide et donc de diminuer l'absorption. Cette technique présente de nouvelles contraintes expérimentales (interface plane, réflexions etc...) qui doivent être prises en compte pour avoir un protocole opérationnel. Par ailleurs, comme nous l'avons évoqué au cours de ce chapitre, une attention particulière doit être apportée au contrôle de la synchronisation temporelle.

En conclusion, nous avons pu effectuer des premières mesures de densité et de vitesse en fluide stratifié permettant de remonter à des grandeurs caractéristiques pertinentes pour l'étude du mélange par les ondes internes. Certains points expérimentaux sont encore à améliorer, mais ces résultats préliminaires sont encourageants.

---

## **Bilan sur la mesure de densité et de vitesse en fluide continûment stratifié**

Au cours de cette partie, nous avons détaillé une adaptation de la technique de Fluorescence Induite par Laser aux fluides continûment stratifiés. Cette technique permet d'obtenir le champ de densité au cours du temps d'un fluide traversé par une onde de gravité. Des mesures de vecteurs d'ondes et de pulsations ont permis de valider cette technique.

Une fois cette technique mise en place, il a été possible d'associer ces mesures de densité à des mesures de vitesse par une technique de Vélocimétrie par Imagerie de Particule. L'association de ces deux techniques permet de suivre l'évolution de la densité et de la vitesse en chaque point du fluide au cours du temps. Des mesures préliminaires ont montré qu'il était ainsi possible d'accéder à des grandeurs caractéristiques du mélange telles que le coefficient de diffusivité turbulente ou encore l'échelle de Thorpe.

Finalement l'association de ces deux techniques est un premier pas dans la direction de l'étude expérimentale et contrôlée du mélange par les ondes internes de gravité.



---

# Conclusion

L'objectif principal de cette thèse était de mieux comprendre certains mécanismes permettant aux ondes internes de générer du mélange. Afin de répondre à cette problématique, nous avons dans un premier temps étudié précisément l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique.

1. Nous avons effectué les premières observations et mesures expérimentales de cette instabilité sur une onde plane. L'analyse des champs de gradient de densité a permis de mesurer précisément les vecteurs d'ondes et les pulsations des ondes secondaires et de comparer ces mesures aux prédictions. L'ensemble de ces résultats constitue une très belle caractérisation de cette interaction triadique.
2. À l'aide d'expériences et de simulations numériques, nous avons observé pour la première fois un effet prépondérant de la largeur du faisceau primaire sur la sélection des ondes secondaires. La largeur du faisceau primaire peut ainsi soit inhiber totalement l'instabilité, ce qui diminue fortement l'impact de la PSI sur le transfert énergétique vers les petites échelles, soit favoriser la sélection d'ondes secondaires possédant des longueurs d'ondes plus petites. Enfin, nous proposons un nouveau développement théorique pour cette instabilité prenant en compte simplement la largeur du faisceau primaire. L'utilisation de cette théorie semble pertinente pour l'étude de cette instabilité sur les ondes internes océaniques constituées d'un petit nombre de longueurs d'ondes. Les prédictions de la dissipation des ondes internes et de la turbulence d'onde pourraient également être impactées par la prise en compte de cet effet.

Par ailleurs cette thèse a également été l'occasion de travailler sur une adaptation de la technique de Fluorescence Induite par Laser (LIF).

3. Nous avons mis en place une technique de mesure de densité dans les fluides stratifiés. Le traitement des champs de densité obtenus permet de remonter à des mesures de vecteurs d'ondes et de pulsations, tout comme lors de l'utilisation de la technique de Schlieren Synthétique. Par ailleurs, nous avons observé pour des amplitudes suffisamment importantes des retournements et des déferlements d'ondes internes de gravité.
4. Cette technique a été couplée à des mesures de PIV, permettant des mesures simultanées de densité et de vitesse.
5. Un travail préliminaire d'analyse des données de densité et de vitesse a été effectué. La mesure de longueurs caractéristiques ou encore de flux de densité sont possibles et nous avons pu d'ors et déjà observer des corrélations dans le comportement de la longueur de Thorpe, du flux de densité et du nombre de Richardson, lors de mélange.

**Perspectives**

De nombreuses questions restent encore en suspens, que ce soit sur l'étude de la PSI ou sur l'étude du mélange par les ondes internes. Nous pouvons en particulier évoquer les points suivants.

1. Afin obtenir l'expression du taux de croissance de l'instabilité, nous supposons que l'amplitude de l'onde primaire reste constante au cours du temps, ce qui est une hypothèse forte. Des travaux sur la résolution du système différentiel sans utiliser cette hypothèse simplificatrice ont donc démarré. Il serait intéressant de pouvoir comparer de manière précise les résultats expérimentaux aux prédictions de cette théorie et de déterminer précisément l'impact de cette hypothèse sur la sélection des ondes filles.
2. Le travail effectué porte uniquement sur les fluides stratifiés en densité, mais les océans sont à la fois stratifiés en densité et en quantité de mouvement en raison de la rotation de la terre. Il serait donc pertinent d'étudier l'évolution de la PSI pour des fluides stratifiés et en rotation afin de nous rapprocher encore un peu plus des conditions océaniques. Il est à noter que la rotation réduit la vitesse de groupe des ondes et réduit ainsi l'effet de la largeur finie du faisceau primaire. La laboratoire de Physique de l'ENS Lyon s'étant récemment doté d'une table tournante, ces travaux vont être prochainement effectué par un nouveau doctorant : Paco Maurer.
3. Les expériences de PIV-LIF offrent un grand champ de possibilités. En particulier, la mesure des différentes longueurs caractéristiques en fonction de la fréquence et de l'amplitude du forçage permettrait d'éclaircir les idées sur le mélange. Certains points expérimentaux restent cependant à améliorer afin de s'assurer de la validité de nos mesures (échantillonnage, synchronisation des caméras). Par ailleurs ces expériences sont effectuées pour l'instant avec un mode-vertical mais il pourrait être pertinent à terme de passer à l'étude d'une onde plane.

Nous espérons finalement que le travail effectué au cours de ces trois années pourra servir de base pour de nouvelles idées, de nouvelles expériences ou même de nouveaux développements théoriques sur les ondes internes de gravité.

---

# Bibliographie

- [1] M. H. Alford, J. A. MacKinnon, Z. Zhao, R. Pinkel, J. Klymak, and T. Peacock. Internal waves across the Pacific. *Geophysical Research Letters*, 34(24):L24601, 2007.
- [2] F. K. Ball. Energy transfer between external and internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(03):465–478, 1964.
- [3] D. Benielli and J. Sommeria. Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 374:117–144, 1998.
- [4] G. Bordes. *Interactions non-linéaires d’ondes et tourbillons en milieu stratifié ou tournant*. PhD thesis, ENS de Lyon, Juillet 2012.
- [5] G. Bordes, F. Moisy, T. Dauxois, and P. P. Cortet. Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid. *Physics of Fluids*, 24(1):014105, 2012.
- [6] A. Borg, J. Bolinder, and L. Fuchs. Simultaneous velocity and concentration measurements in the near field of a turbulent low-pressure jet by digital particle image velocimetry–planar laser-induced fluorescence. *Experiments in Fluids*, 31(2):140–152, 2001.
- [7] B. Bourget, T. Dauxois, S. Joubaud, and P. Odier. Experimental study of parametric subharmonic instability for internal plane waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 723:1–20, 2013.
- [8] P. Bouruet-Aubertot, J. Sommeria, and C. Staquet. Breaking of standing internal gravity waves through two-dimensional instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 285:265–301, 1995.
- [9] P. Caillol and V. Zeitlin. Kinetic equations and stationary energy spectra of weakly nonlinear internal gravity waves. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 32(2):81–112, 2000.
- [10] J. L. Cairns and G. O. Williams. Internal wave observations from a midwater float, 2. *Journal of Geophysical Research*, 81(12):1943–1950, 1976.
- [11] G. F. Carnevale, M. Briscolini, and P. Orlandi. Buoyancy- to inertial-range transition in forced stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 427:205–239, 2001.
- [12] G. Carter and M. Gregg. Persistent near-diurnal internal waves observed above a site of M2 barotropic-to-baroclinic conversion. *Journal of Physical Oceanography*, 36(6):1136–1146, 2006.

- [13] H. A. Clark and B. R. Sutherland. Generation, propagation, and breaking of an internal wave beam. *Physics of Fluids*, 22(7), 2010.
- [14] J. P. Crimaldi. The effect of photobleaching and velocity fluctuations on single-point lif measurements. *Experiments in Fluids*, 23(4):325–330, 1997.
- [15] J. P. Crimaldi. Planar laser induced fluorescence in aqueous flows. *Experiments in Fluids*, 44(6):851–863, 2008.
- [16] C. T. Culbertson, S. C. Jacobson, and J. M. Ramsey. Diffusion coefficient measurements in microfluidic devices. *Talanta*, 56(2):365–373, 2002.
- [17] S. B. Dalziel, G. O. Hughes, and B. R. Sutherland. Whole-field density measurements by ‘synthetic schlieren’. *Experiments in Fluids*, 28(4):322–335, 2000.
- [18] T. Dauxois and W. R. Young. Near-critical reflection of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 390:271, 1999.
- [19] G. J. Daviero, P. J. W. Roberts, and K. Maile. Refractive index matching in large-scale stratified experiments. *Experiments in Fluids*, 31(2):119–126, 2001.
- [20] R. E. Davis and A. Acrivos. The stability of oscillatory internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(04):723–736, 1967.
- [21] E. M. Dewan, R. H. Picard, R. R. O’Neil, H. A. Gardiner, J. Gibson, J. D. Mill, E. Richards, M. Kendra, and W. O. Gallery. MSX satellite observations of thunderstorm-generated gravity waves in mid-wave infrared images of the upper stratosphere. *Geophysical Research Letters*, 25(7):939–942, 1998.
- [22] P. Echeverri, M. R. Flynn, K. B. Winters, and T. Peacock. Low-mode internal tide generation by topography: an experimental and numerical investigation. *Journal of Fluid Mechanics*, 636:91–108, 10 2009.
- [23] G. D. Egbert. Tidal data inversion: interpolation and inference. *Progress in Oceanography*, 40(1–4):53–80, 1997.
- [24] G. D. Egbert and R. D. Ray. Estimates of M2 tidal energy dissipation from TOPEX/Poseidon altimeter data. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 106(C10):22475–22502, 2001.
- [25] G. D. Egbert and R. D. Ray. Semi-diurnal and diurnal tidal dissipation from TOPEX/Poseidon altimetry. *Geophysical Research Letters*, 30(17), 2003.
- [26] H. Feng, M. G. Olsen, J. C. Hill, and R. O. Fox. Simultaneous velocity and concentration field measurements of passive-scalar mixing in a confined rectangular jet. *Experiments in Fluids*, 42(6):847–862, 2007.
- [27] A. Fincham and G. Delerce. Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids*, 29(1):S013–S022, 2000.
- [28] P. Flandrin. *Time-Frequency/Time-Scale Analysis, Time-Frequency Toolbox for Matlab©*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [29] J. M. H. Fortuin. Theory and application of two supplementary methods of constructing density gradient columns. *Journal of Polymer Science*, 44(144):505–515, 1960.
- [30] C. Garrett. Internal tides and ocean mixing. *Science*, 301(5641):1858–1859, 2003.

- 
- [31] C. J. R. Garrett and W. H. Munk. Space-time scales of internal waves. *Geophysical Fluid Dynamics*, 3(1):225–264, 1972.
- [32] B. Gayen and S. Sarkar. Degradation of an internal wave beam by parametric subharmonic instability in an upper ocean pycnocline. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 118(9):4689–4698, 2013.
- [33] P. O. Gendron, F. Avaltroni, and K. J. Wilkinson. Diffusion coefficients of several rhodamine derivatives as determined by pulsed field gradient–nuclear magnetic resonance and fluorescence correlation spectroscopy. *Journal of Fluorescence*, 18(6):1093–1101, 2008.
- [34] A. E. Gill. *Atmosphere-Ocean Dynamics*, volume 30. Academic press, 1982.
- [35] H. Görtler. Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23(2):65–71, 1943.
- [36] L. Gostiaux and T. Dauxois. Laboratory experiments on the generation of internal tidal beams over steep slopes. *Physics of Fluids*, 19(2):028102, 2007.
- [37] L. Gostiaux, H. Didelle, S. Mercier, and T. Dauxois. A novel internal waves generator. *Experiments in Fluids*, 42(1):123–130, 2007.
- [38] K. Hasselmann. A criterion for nonlinear wave stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(04):737–739, 1967.
- [39] D. Hebert and B. R. Ruddick. Differential mixing by breaking internal waves. *Geophysical Research Letters*, 30(2), 2003.
- [40] T. Hibiya, M. Nagasawa, and Y. Niwa. Nonlinear energy transfer within the oceanic internal wave spectrum at mid and high latitudes. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 107(C11):3207, 2002.
- [41] E. J. Hopfinger, J. B. Flor, J. M. Chomaz, and P. Bonneton. Internal waves generated by a moving sphere and its wake in a stratified fluid. *Experiments in Fluids*, 11(4):255–261, 1991.
- [42] L. N. Howard. Note on a paper of John W. Miles. *Journal of Fluid Mechanics*, 10(4):509–512, 1961.
- [43] H. Hu, T. Kobayashi, T. Saga, S. Segawa, and N. Taniguchi. Particle image velocimetry and planar laser-induced fluorescence measurements on lobed jet mixing flows. *Experiments in Fluids*, 29(1):S141–S157, 2000.
- [44] E. L. Hult, C. D. Troy, and J. R. Koseff. The mixing efficiency of interfacial waves breaking at a ridge: 1. Overall mixing efficiency. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 116(C2):C02003, 2011.
- [45] E. L. Hult, C. D. Troy, and J. R. Koseff. The mixing efficiency of interfacial waves breaking at a ridge: 2. local mixing processes. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 116(C2):C02004, 2011.
- [46] G. N. Ivey and R. I. Nokes. Vertical mixing due to the breaking of critical internal waves on sloping boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 204:479–500, 1989.
- [47] C.-H. Jiang and P. S. Marcus. Selection rules for the nonlinear interaction of internal gravity waves. *Physical Review Letters*, 102:124502, Mar 2009.

- [48] T. M. S. Johnston, M. A. Merrifield, and P. E. Internal tide scattering at the Line Islands ridge Holloway. Internal tide scattering at the line islands ridge. *Journal of Geophysical Research*, 108:3365, 2003.
- [49] S. Joubaud, J. Munroe, P. Odier, and T. Dauxois. Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids. *Physics of Fluids*, 24(4):041703, 2012.
- [50] P. S. Karasso and M. G. Mungal. PLIF measurements in aqueous flows using the Nd:YAG laser. *Experiments in Fluids*, 23(5):382–387, 1997.
- [51] B. King, H. P. Zhang, and H. L. Swinney. Tidal flow over three-dimensional topography in a stratified fluid. *Physics of Fluids*, 21(11):116601, 2009.
- [52] Y. Kitade, M. Matsuyama, and J. Yoshida. Distribution of overturn induced by internal tides and thorpe scale in uchiura bay. *Journal of Oceanography*, 59(6):845–850, 2003.
- [53] C. R. Koudella and C. Staquet. Instability mechanisms of a two-dimensional progressive internal gravity wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 548:165–196, 2006.
- [54] E. Kunze and S. G. L. Smith. The role of small-scale topography in turbulent mixing of the global ocean. *Oceanography*, 17(1):55–64, 2004.
- [55] P. H. LeBlond and L. A. Mysak. *Waves in the Ocean*. Elsevier Sciences, New York, 1978.
- [56] R. C. Lien and M. C. Gregg. Observations of turbulence in a tidal beam and across a coastal ridge. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 106(C3):4575–4591, 2001.
- [57] R. Lumpkin and K. Speer. Global ocean meridional overturning. *Journal of Physical Oceanography*, 37(10):2550–2562, 2007.
- [58] Y. V. Lvov, K. L. Polzin, E. G. Tabak, and N. Yokoyama. Oceanic Internal-Wave Field: Theory of Scale-Invariant Spectra. *Journal of Physical Oceanography*, 40(12):2605–2623, 2010.
- [59] Y. V. Lvov, K. L. Polzin, and N. Yokoyama. Resonant and Near-Resonant Internal Wave Interactions. *Journal of Physical Oceanography*, 42(5):669–691, 2012.
- [60] J. A. MacKinnon and K. B. Winters. Subtropical catastrophe: Significant loss of low-mode tidal energy at  $28.9^\circ$ . *Geophysical Research Letters*, 32(15), 2005.
- [61] A. D. McEwan. Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 50(03):431–448, 1971.
- [62] A. D. McEwan, D. W. Mander, and R. K. Smith. Forced resonant second-order interaction between damped internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 55(04):589–608, 1972.
- [63] A. D. McEwan and R. A. Plumb. Off-resonant amplification of finite internal wave packets. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 2(1):83–105, 1977.
- [64] L. F. McGoldrick. Resonant interactions among capillary-gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 21(2):305–331, 1965.
- [65] L. A. Melton and C. W. Lipp. Criteria for quantitative plif experiments using high-power lasers. *Experiments in Fluids*, 35(4):310–316, 2003.
- [66] M. J. Mercier, N. B. Garnier, and T. Dauxois. Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the hilbert transform. *Physics of Fluids*, 20(8):086601, 2008.

- 
- [67] M. J. Mercier, D. Martinand, M. Mathur, L. Gostiaux, T. Peacock, and T. Dauxois. New wave generation. *Journal of Fluid Mechanics*, 657:308–334, 2010.
- [68] J. W. Miles. On the stability of heterogeneous shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 10:496–508, 1961.
- [69] D. E. Mowbray and B. S. H. Rarity. A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 28(01):1–16, 1967.
- [70] W. Munk and C. Wunsch. Abyssal recipes II: energetics of tidal and wind mixing. *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*, 45(12):1977 – 2010, 1998.
- [71] W. H. Munk. Abyssal recipes. *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, 13(4):707 – 730, 1966.
- [72] J. D. Nash, G. H. Jirka, and D. Chen. Large scale planar laser induced fluorescence in turbulent density-stratified flows. *Experiments in Fluids*, 19(5):297–304, 1995.
- [73] M. Nikurashin and G. Vallis. A theory of deep stratification and overturning circulation in the ocean. *Journal of Physical Oceanography*, 41(3):485–502, 2011.
- [74] M. Nikurashin and G. Vallis. A theory of the interhemispheric meridional overturning circulation and associated stratification. *Journal of Physical Oceanography*, 42(10):1652–1667, 2012.
- [75] J. Nycander. Generation of internal waves in the deep ocean by tides. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 110(C10):C10028, 2005.
- [76] P. Odier, J. Chen, and R. E. Ecke. Entrainment and mixing in a laboratory model of oceanic overflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 746:498–535, 2014.
- [77] G. Oster and M. Yamamoto. Density gradient techniques. *Chemical Reviews*, 63(3):257–268, 1963.
- [78] S. V. Patsayeva, V. I. Yuzhakov, and V. Varlamov. Laser-induced fluorescence saturation for binary mixtures of organic luminophores. In *ICONO '98: Laser Spectroscopy and Optical Diagnostics: Novel Trends and Applications in Laser Chemistry, Biophysics, and Biomedicine*, volume 3732, pages 147–156, 1999.
- [79] T. Peacock, M. Mercier, H. Didelle, S. Viboud, and T. Dauxois. A laboratory study of low-mode internal tide scattering by finite-amplitude topography. *Physics of Fluids*, 21:121702, 2009.
- [80] K. L. Polzin, J. M. Toole, J. R. Ledwell, and R. W. Schmitt. Spatial variability of turbulent mixing in the abyssal ocean. *Science*, 276(5309):93–96, 1997.
- [81] L. Rainville and R. Pinkel. Baroclinic energy flux at the hawaiian ridge: Observations from the r/p flip. *Journal of Physical Oceanography*, 36(6):1104–1122, 2006.
- [82] L. Rainville and R. Pinkel. Propagation of low-mode internal waves through the ocean. *Journal of Physical Oceanography*, 36:1220, 2006.
- [83] J.W. Sandström. Dynamische Versuche mit Meerwasser. *Annals in Hydrodynamic Marine Meteorology*, page 6, 1908.
- [84] J. W. Shan, D. B. Lang, and P. E. Dimotakis. Scalar concentration measurements in liquid-phase flows with pulsed lasers. *Experiments in Fluids*, 36(2):268–273, 2004.

- [85] J. Sommeria. *Uvmat toolbox for matlab*. LEGI/CNRS-UJF-INPG, <http://coriolis.legi.grenoble-inp.fr>.
- [86] C. Staquet and J. Sommeria. Internal gravity waves: From instabilities to turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34:559–593, 2002.
- [87] R. D. Susanto, L. Mitnik, and Q. Zheng. Ocean internal waves observed in the lombok strait. *Oceanography*, 18(4):80–87, 2005.
- [88] B. R. Sutherland. *Internal Gravity Waves*. Cambridge University Press, 2010.
- [89] B. R. Sutherland. The wave instability pathway to turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 724:1–4, 6 2013.
- [90] B. R. Sutherland, S. B. Dalziel, G. O. Hughes, and P. F. Linden. Visualization and measurement of internal waves by 'synthetic schlieren'. Part 1. Vertically oscillating cylinder. *Journal of fluid mechanics*, 390:93–126, 1999.
- [91] S. A. Thorpe. *Turbulence and mixing in a Scottish loch*. Royal Society, 1977.
- [92] S. A. Thorpe. Statically unstable layers produced by overturning internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 260:333–350, 1994.
- [93] C. D. Troy and J. R. Koseff. The generation and quantitative visualization of breaking internal waves. *Experiments in Fluids*, 38(5), 2005.
- [94] C. Wunsch and R. Ferrari. Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36:281–314, 2004.

---

## Résumé

Les ondes internes de gravité jouent un rôle important dans les échanges énergétiques océaniques, en particulier par leur mécanisme d'atténuation. Il est alors crucial de déterminer et de quantifier les différents processus permettant un transfert d'énergie vers les petites échelles et aboutissant ainsi au mélange océanique.

Nous avons, pour cela, étudié précisément l'un de ces mécanismes : l'Instabilité Paramétrique Sous-harmonique (PSI). Cette instabilité permet la génération de deux ondes internes, de fréquence et de vecteurs d'ondes différents, à partir d'une onde primaire, par interaction non-linéaire résonante. L'étude expérimentale de cette instabilité a ainsi permis de mettre en évidence l'importance de certains paramètres (fréquence, amplitude, largeur de faisceau) quant au développement et à la sélection des ondes secondaires. Ces paramètres influent donc sur le transfert énergétique entre les échelles. En outre notre dispositif expérimental a permis de tester les limites de la théorie développée jusqu'à présent et a conduit à l'élaboration d'un nouveau modèle validé expérimentalement et numériquement.

Par ailleurs, nous avons adapté la technique de Fluorescence Induite par Laser (LIF) à des fluides continûment stratifiés afin d'effectuer des mesures simultanées de vitesse (PIV) et de densité (LIF). Cette technique permet ainsi d'étudier expérimentalement l'effet de la propagation et de la déstabilisation des ondes internes de gravité sur une stratification linéaire, et d'accéder à des grandeurs associées au mélange.

---

## Abstract

Internal waves are believed to be of primary importance as they affect energy transfer, especially their dissipation mechanism. Therefore it is crucial to identify and measure the different processes evolving a transfer to smaller scales and leading to oceanic mixing.

We have chosen to focus on one of these mechanisms: the Parametric Subharmonic Instability (PSI). This instability allows the generation from a primary wave of two secondary internal waves, with different frequencies and waves vectors, by nonlinear resonant interaction. The experimental study of this instability has helped to highlight the importance of some parameters (frequency, amplitude, beam width) for the development and the selection of secondary waves. Thus these parameters affect the energy transfer between scales. Moreover, our experimental device was used to test the limits of the theory developed so far and has led to the development of a new model, which has been validated experimentally and numerically.

In addition, we adapted the technique of Laser Induced Fluorescence (LIF) to continuously stratified fluids, with the aim of performing simultaneous measurements of velocity (PIV) and density (LIF). This technique allows us to study experimentally the effect of propagation and destabilization of internal gravity waves on a linear stratification, and to access to quantities related to the mixing.

---