



HAL
open science

Quelques asymptotiques spectrales pour le Laplacien de Dirichlet : triangles, cônes et couches coniques

Thomas Ourmières-Bonafos

► **To cite this version:**

Thomas Ourmières-Bonafos. Quelques asymptotiques spectrales pour le Laplacien de Dirichlet : triangles, cônes et couches coniques. Théorie spectrale [math.SP]. Université de Rennes 1, 2014. Français. NNT : . tel-01074323

HAL Id: tel-01074323

<https://theses.hal.science/tel-01074323>

Submitted on 14 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

Ecole doctorale Matisse

présentée par

Thomas Ourmières-Bonafos

Préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
U.F.R. de Mathématiques

**Quelques
asymptotiques
spectrales pour le
Laplacien de
Dirichlet : triangles,
cônes et couches
coniques**

**Thèse soutenue à Rennes
le 1 octobre 2014**

devant le jury composé de :

Pavel EXNER

Professor, Nuclear Physics Institute (République Tchèque) /
rapporteur

Luc HILLAIRET

Professeur, Université d'Orléans / *rapporteur*

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA

Directeur de recherche CNRS, ENSTA Paristech /
examinatrice

François CASTELLA

Professeur, Université de Rennes 1 / *examineur*

Konstantin PANKRASHKIN

Maître de conférences, Université Paris-Sud / *examineur*

Karel PRAVDA-STAROV

Professeur, Université de Rennes 1 / *examineur*

Monique DAUGE

Directeur de recherche CNRS, Université de Rennes 1 /
directrice de thèse

Nicolas RAYMOND

Maître de conférences, Université de Rennes 1 /
co-directeur de thèse

Table des matières

I	Introduction	1
1	Problèmes étudiés et résultats obtenus	3
1.1	Motivations	3
1.2	Triangles asymptotiquement plats	8
1.2.1	Motivations et questions connexes	8
1.2.2	Le Laplacien de Dirichlet	9
1.2.3	Premières propriétés des valeurs propres	10
1.2.4	Développement asymptotique des valeurs propres	11
1.2.5	Effet tunnel sur un bonnet d'âne	11
1.3	Cônes de petite ouverture	13
1.3.1	Le Laplacien de Dirichlet sur les familles coniques	13
1.3.2	Changement d'échelle du triangle méridien	15
1.3.3	Développement asymptotique des valeurs propres	16
1.3.4	Application au cône sphérique	17
1.4	Couche conique	19
1.4.1	Le Laplacien de Dirichlet dans la couche conique	20
1.4.2	Résultats principaux sur la couche conique	21
1.5	Récapitulatif des différents opérateurs	23
2	Outils standards	25
2.1	Quelques rappels de théorie spectrale	25
2.2	L'approximation harmonique	28
2.3	Opérateurs modèles	29
2.3.1	Opérateur d'Airy	29
2.3.2	Opérateur modèle avec un potentiel en V non symétrique	30
2.4	Stratégie des preuves et organisation de la thèse	32
2.4.1	Les opérateurs de Bessel	32
2.4.2	Approximation de type Born-Oppenheimer	33
2.4.3	Estimées de localisation d'Agmon	36
2.4.4	Construction de quasimodes	37
2.4.5	Réduction à un opérateur tensoriel	38
2.4.6	Organisation de la thèse	38

II	Approximations unidimensionnelles de type Born-Oppenheimer	41
3	Approximation 1D des triangles asymptotiquement plats	43
3.1	Construction de quasimodes	44
3.2	Estimées d'Agmon	46
3.3	Simplicité asymptotique	48
4	Approximation 1D des cônes de petite ouverture	49
4.1	Construction de quasimodes	50
4.2	Estimées de localisation d'Agmon	52
4.3	Simplicité asymptotique	54
5	Approximation 1D pour la couche conique	57
5.1	Quelques propriétés du potentiel effectif	57
5.2	Autour du spectre de l'approximation 1D	60
5.3	Estimées de localisation d'Agmon	64
III	Triangles asymptotiquement plats	67
6	Quasimodes pour les triangles asymptotiquement plats	69
6.1	Ansatz et couche limite	70
6.2	Trois lemmes	71
6.3	Détermination des profils	73
7	Simplicité asymptotique	79
7.1	Estimées de localisation d'Agmon	79
7.2	Approximation des premières fonctions propres par des produits tensoriels	80
7.3	Réduction à l'opérateur tangent	80
8	Simulations numériques pour les triangles	85
8.1	Choix du maillage	85
8.2	Allure des paires propres	85
9	Effet tunnel dans un bonnet d'âne	89
9.1	Estimées de localisation d'Agmon	89
9.2	Structure du spectre	90
10	Simulations numériques pour le bonnet d'âne	95
IV	Cônes de petite ouverture	99
11	Quasimodes pour les cônes de petite ouverture	101
11.1	Ansatz et couche limite	102
11.2	Trois lemmes	102
11.3	Détermination des profils	105

11.4	Nécessité de l'échelle h	107
12	Simplicité asymptotique	111
12.1	Estimées de localisation d'Agmon	111
12.2	Approximations des premières fonctions propres par des produits tensoriels	112
12.3	Réduction à l'opérateur d'Airy	113
13	Simulations numériques pour les cônes de petite ouverture	117
13.1	Structure des fonctions propres dans la limite semiclassique	117
13.2	Comportement pour de plus grands angles d'ouverture	117
V	Couche conique	123
14	Comptage des valeurs propres	125
14.1	Un résultat de Kirsh et Simon	125
14.1.1	Changement d'échelle pour l'opérateur sans potentiel	127
14.1.2	Comptage des valeurs propres pour une perturbation compacte	127
14.1.3	Invariance par perturbation compacte	130
14.1.4	Obtention de l'équivalent	132
14.2	Autour des valeurs propres de la couche conique	133
14.2.1	Reformulation du problème et croissance des valeurs propres	133
14.2.2	Une minoration du nombre de valeurs propres	135
14.2.3	Une majoration du nombre de valeurs propres	136
14.2.4	Obtention de l'équivalent	139
15	Développement asymptotique des valeurs propres	141
15.1	Estimées de localisation d'Agmon	141
15.2	Simplicité asymptotique	142
16	Simulations numériques pour la couche conique	145
VI	Perspectives	153
VI.1	Pour aller plus loin à propos de la couche conique	155
VI.2	La couche quantique définie à l'aide d'un octant	155
VI.3	Le guide fin avec conditions de Robin	155
VI.4	Effet tunnel pour des potentiels non réguliers	156
VII	Annexes	159
A	Quelques applications du principe du min-max	161
B	Autour de la théorie de Sturm-Liouville	163

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Problèmes étudiés et résultats obtenus

La Section 1.1 de ce chapitre présente les idées qui ont motivé cette thèse. On y rappelle essentiellement des résultats connus alors que les sections suivantes décrivent les différents problèmes rencontrés et les résultats obtenus.

1.1 Motivations

La problématique des guides d'ondes et couches quantiques est à l'origine du présent travail. L'étude de ces objets s'est récemment développée parce qu'ils répondent à certaines questions de physique expérimentale. Ainsi, en physique mésoscopique un semi-conducteur peut se modéliser par un opérateur de Schrödinger pour lequel le potentiel subit de forts changements d'amplitude. Les guides d'ondes ou les couches quantiques sont une approximation de ces systèmes où ces grandes fluctuations de potentiel sont remplacées par des conditions de Dirichlet.

C'est le spectre de cet opérateur de Schrödinger qui mobilise notre attention, mais introduisons d'abord quelques notations et définitions.

Notation 1.1 *X désigne un espace de Hilbert réel et \mathcal{L} un opérateur auto-adjoint sur X de domaine $\text{Dom}(\mathcal{L})$.*

Définition 1.2 (Ensemble résolvant) *Soit X un espace de Hilbert réel et \mathcal{L} un opérateur auto-adjoint sur X , son ensemble résolvant, noté $\rho(\mathcal{L})$, est défini comme :*

$$\rho(\mathcal{L}) = \{x \in \mathbb{R} : (\mathcal{L} - x \text{Id}) \text{ est bijectif}\}.$$

Définition 1.3 (Spectre) *Soit X un espace de Hilbert réel et \mathcal{L} un opérateur auto-adjoint sur X , son spectre, noté $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$ est défini comme le complémentaire dans \mathbb{R} de l'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{L})$.*

Définition 1.4 (Spectre discret, spectre essentiel) *Soit X un espace de Hilbert réel et \mathcal{L} un opérateur auto-adjoint sur X , son spectre discret, noté $\mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{L})$, est l'ensemble de ses valeurs propres isolées de multiplicité finie. Le spectre essentiel de \mathcal{L} , noté $\mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L})$, est défini comme :*

$$\mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \mathfrak{S}(\mathcal{L}) \setminus \mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{L}).$$

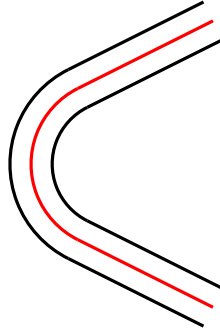


FIG. 1.1 – Exemple de guide d’onde en dimension deux (voir [DLR12]).

Définissons ce que l’on entend par « guide d’onde ». Dans leur article [DE95], Duclos et Exner s’intéressent au spectre du Laplacien de Dirichlet sur des tubes en dimension deux ou trois.

En dimension deux, ces tubes sont construits à partir d’une courbe régulière $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et du repère de Frenet associé (T, N) . Pour un nombre réel $a > 0$ un guide en dimension deux d’épaisseur a est l’image dans \mathbb{R}^2 de l’application

$$f : (\sigma, y) \in \mathbb{R} \times \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \mapsto \gamma(\sigma) + yN(\sigma).$$

La Figure 1.1 illustre cette construction où la courbe rouge est la courbe régulière γ .

De la même manière, en dimension trois, on considère une courbe régulière $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, de repère de Tang associé (T, M_2, M_3) (voir par exemple [KŠ12]). On se donne un ouvert connexe borné \mathcal{T} de \mathbb{R}^2 dans lequel vivent les cordonnées transverses (y_1, y_2) et une fonction régulière de torsion $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Un guide en dimension trois est l’image dans \mathbb{R}^3 de l’application

$$f : (\sigma, y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{T} \mapsto \gamma(\sigma) + y_1(\cos(\theta(\sigma))M_2(\sigma) + \sin(\theta(\sigma))M_3(\sigma)) + y_2(-\sin(\theta(\sigma))M_2(\sigma) + \cos(\theta(\sigma))M_3(\sigma)).$$

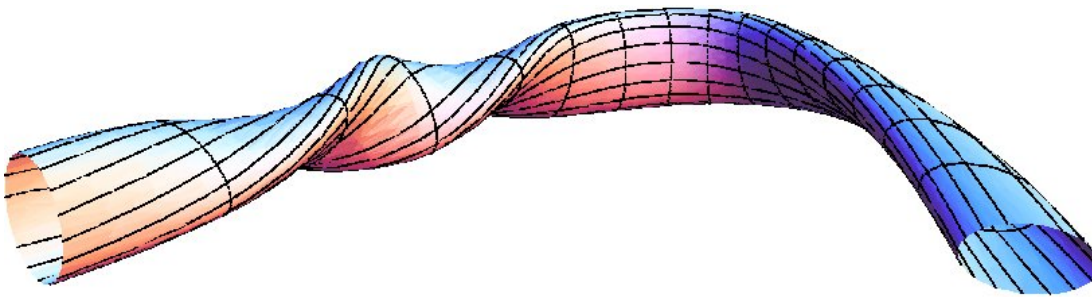


FIG. 1.2 – Exemple de guide d’onde en dimension trois. (Illustration disponible sur le site web <http://gemma.ujf.cas.cz/david/> de D. Krejčířik).

La problématique associée aux guides d’ondes est expliquée dans la revue informelle [Ray12]; on en rappelle ici les idées essentielles. Si on suppose, en dimensions deux et trois, que le guide d’onde est droit à l’infini, c’est-à-dire que la courbure de γ est nulle en dehors d’un compact, alors le spectre essentiel du Laplacien de Dirichlet est $[\lambda, +\infty)$, où λ est la première valeur propre du Laplacien de Dirichlet sur la section transverse \mathcal{T} . En dimension deux λ n’est rien d’autre que la première

valeur propre du Laplacien de Dirichlet sur un segment de longueur a donc $\lambda = \frac{\pi^2}{a^2}$. En fait, c'est un phénomène classique, le spectre essentiel provient de l'allure à l'infini du guide d'onde.

La dichotomie du spectre en spectre essentiel et spectre discret est importante car physiquement, pour les guides d'ondes, le spectre essentiel correspond à des modes de propagation. Le spectre discret est, quant à lui, un effet indésirable car il correspond à des modes piégés, c'est-à-dire localisés dans une partie du guide. Il est donc naturel de se poser la question suivante :

« Existe-t-il du spectre discret sous le seuil du spectre essentiel ? »

Lorsque la réponse est positive nous voulons comprendre ce spectre discret : savoir s'il est en nombre fini ou infini et, s'il est infini, comprendre la nature de l'infinité. Nous voulons également obtenir des approximations de ces valeurs propres.

En dimension deux et en dimension trois (lorsque la section transverse \mathcal{T} est un disque), Duclos et Exner prouvent que si la courbure de γ est non nulle alors il existe une valeur propre sous le seuil du spectre essentiel. L'idée de leur preuve est de trouver une fonction d'énergie plus petite que λ en perturbant une suite de Weyl associée à λ et d'utiliser le principe du min-max.

En dimension quelconque Chenaud, Duclos, Freitas et Krejčířík généralisent, dans [CDFK05], ce résultat à des sections transverses \mathcal{T} autres que le disque.

Venons-en alors à la définition d'une couche. Si Σ est une surface suffisamment régulière de \mathbb{R}^3 on définit, pour $a > 0$, une couche d'épaisseur a comme l'ensemble de \mathbb{R}^3

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \Sigma) < \frac{a}{2}\right\}.$$

À condition que Σ satisfasse certaines propriétés topologiques Duclos, Exner et Krejčířík dans [DEK01] ainsi que Carron, Exner et Krejčířík dans [CEK04] montrent que la courbure induit là encore des valeurs propres sous le seuil du spectre essentiel. Ces résultats s'appliquent lorsque la courbure est suffisamment régulière ce qui exclut le cas des guides d'onde ou de couches à coin. Comme un coin peut être vu comme un point de courbure infinie, il est naturel de se demander si, lorsque la courbe γ ou la surface Σ ont des coins, cette propriété persiste et si on peut estimer ce spectre discret.

L'existence de spectre discret pour le Laplacien de Dirichlet dans des guides d'ondes à coins a déjà fait l'objet d'études en particulier par Exner, Šeba et Štoviček pour un guide d'onde en L où ils montrent qu'il n'y a qu'une seule valeur propre sous le seuil du spectre essentiel (voir [Evv89]). Dans [ABGM91], Avishai, Bessis, Giraud et Mantica prouvent que pour n'importe quel angle d'ouverture le spectre discret est non vide. Ils donnent un développement asymptotique des plus petites valeurs propres pour des angles proches de $\pi/2$. Dans [DLR12] Dauge, Lafranche et Raymond prouvent que pour tout guide d'onde à coin il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres sous le seuil du spectre essentiel. Lorsque l'angle formé par le coin est assez grand, Nazarov et Shanin prouvent dans [NS14] qu'en fait, il n'y en a qu'une seule. Le cas du petit angle a été étudié dans [CLMM93] et dernièrement par Dauge et Raymond dans [DR12] où ils donnent en fonction de l'angle un développement à tout ordre des premières valeurs propres.

Plus précisément, lorsqu'on évoquera dans ce travail un « développement asymptotique à tout ordre », on l'entendra dans le sens de la

Définition 1.5 Soit $\theta > 0$ et $\Lambda(h)$ une fonction de h . On dit que Λ admet un développement à tout ordre en puissances de h^θ s'il existe une suite de réels $(\Gamma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $J \in \mathbb{N}$, il existe

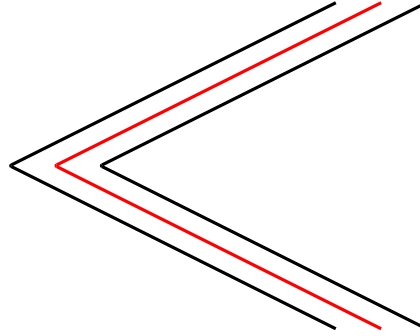


FIG. 1.3 – Un guide d’onde à coin en dimension deux (voir [DLR12]).

$C_J > 0$ et $h_0 > 0$, tels que pour tout $h \in (0, h_0)$

$$\left| \Lambda(h) - \sum_{j=0}^J \Gamma_j h^{j\theta} \right| \leq C_J h^{\theta(J+1)}.$$

On note alors

$$\Lambda(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j \geq 0} \Gamma_j h^{j\theta}.$$

Si de plus la fonction Λ dépend d’un paramètre noté s , on dit que le développement asymptotique est uniforme en s si la constante C_J peut être choisie indépendante de s .

On définit également la notion de paire propre via la

Définition 1.6 Soit X un espace de Hilbert réel et \mathcal{L} un opérateur auto-adjoint sur X . Soit $\lambda \in \mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{L})$, on dit que (λ, ψ) est une paire propre de \mathcal{L} lorsque ψ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

La question des coins dans une couche quantique est abordée par Exner et Tater dans [ET10] pour une couche conique. Récemment, dans [BEL14], Behrndt, Exner et Lotoreichik étudient des questions étroitement liées à propos du spectre d’opérateurs de Schrödinger avec des δ -interactions supportés sur des surfaces coniques. On obtient la couche conique d’Exner et Tater en faisant tourner dans \mathbb{R}^3 la Figure 1.3 autour de la bissectrice de l’angle (voir également la Figure 1.4 pour une représentation dans \mathbb{R}^3). Contrairement à la dimension deux et au guide d’onde à coin étudié par Dauge et Raymond il y a une infinité de valeurs propres sous le seuil du spectre essentiel. Un des objectifs du présent travail est de comprendre la nature de cette infinité en comptant le nombre de valeurs propres sous un seuil (fixé), en deçà de l’infimum du spectre essentiel. C’est cette infinité que quantifie le Théorème 1.18. Nous établissons également, pour de petits angles d’ouverture du cône, un développement asymptotique à deux termes des premières valeurs propres (voir Théorème 1.19).

En fait, dans la limite du petit angle, la géométrie de la couche conique confine les modes dans la tête conique. Donc avant toute chose, pour étudier la couche conique, nous devons nous intéresser au Laplacien de Dirichlet dans un cône de petite ouverture. Cette question est intéressante en elle-même car elle fait écho aux travaux de Borisov et Freitas [BF09] et à ceux de Friedlander et Solomyak [FS09] qui étudient des domaines de \mathbb{R}^2 qui s’aplatissent dans une direction. Afin de définir ce type de

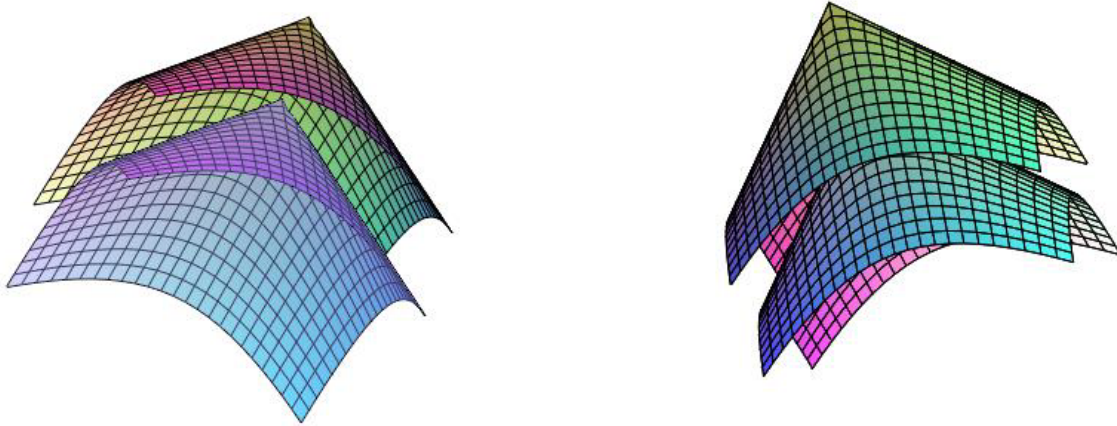


FIG. 1.4 – La couche quantique d’Exner et Tater.

domaines on introduit $a < b \in \mathbb{R}$, une fonction continue f

$$f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}_+$$

telle que f admette un unique maximum et on prend un paramètre $h > 0$. On regarde alors le Laplacien de Dirichlet sur des domaines de la forme (voir Figure 1.5) :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a < x_1 < b, 0 < x_2 < hf(x_1)\}.$$

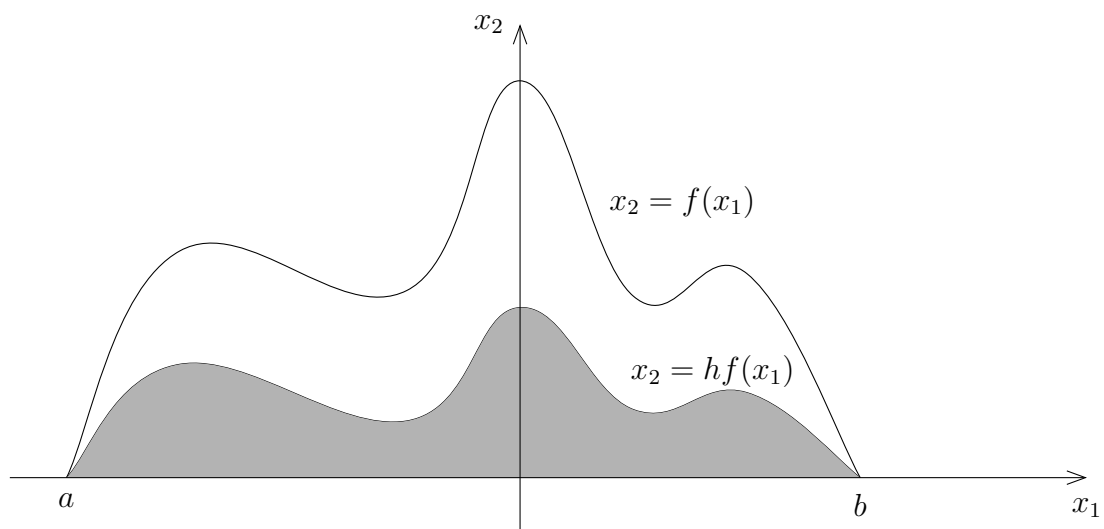


FIG. 1.5 – Exemple de domaine s’aplatissant.

Le but est d’obtenir un développement asymptotique des premières paires propres lorsque le

paramètre h tend vers 0. Comme il est difficile d'obtenir une expression explicite des paires propres du Laplacien de Dirichlet dans un domaine de \mathbb{R}^2 , même simple, on veut obtenir des informations dans la limite h tend vers 0. En fait, il s'agit d'une limite où h joue le rôle de paramètre semi-classique. Obtenir de tels développements asymptotiques permet de comprendre, dans cette limite, la structure du spectre du Laplacien de Dirichlet. Borisov et Freitas obtiennent des quasimodes à tout ordre dans le cas où la fonction f est régulière alors que Friedlander et Solomyak donnent un développement à deux termes pour des fonctions f plus singulières. Toutefois, lorsque la fonction f admet une singularité, la combinaison aux conditions de Dirichlet fait apparaître un phénomène de couche limite. Les valeurs propres et les fonctions propres ont simultanément deux échelles mais, ces échelles ne sont pas visibles aux premiers ordres dans le développement des paires propres. Dans [BF10] Borisov et Freitas étendent en dimension supérieure leurs résultats, toujours pour des domaines réguliers. La question de la singularité conique s'inscrit dans cette lignée.

Dans le même esprit nous nous sommes aperçus qu'il était délicat de donner un développement asymptotique à tout ordre pour les paires propres du Laplacien de Dirichlet dans des triangles asymptotiquement plats. La question spécifique des triangles est abordée par Freitas dans [Fre07, Th. 1] où l'auteur donne une asymptotique à quatre termes pour la première valeur propre du Laplacien de Dirichlet dans des triangles proches de triangles isocèles. Dans [DR12], Dauge et Raymond donnent un développement asymptotique à tout ordre pour le triangle rectangle qui s'aplatit. Nous généralisons ce travail pour tout type de triangle asymptotiquement plat.

1.2 Triangles asymptotiquement plats

On s'intéresse aux paires propres du Laplacien de Dirichlet sur une famille de triangles dont deux des sommets sont fixés alors que la hauteur issue du troisième, notée h , tend vers zéro. On étudie la dépendance des valeurs propres par rapport à cette hauteur. Pour les premières valeurs propres et fonctions propres, on donne un développement asymptotique à tout ordre en puissances de la racine cubique de cette hauteur.

1.2.1 Motivations et questions connexes

Il n'y a que peu de domaines du plan pour lesquels nous avons une expression explicite des paires propres du Laplacien de Dirichlet. Néanmoins, pour des domaines asymptotiquement plats de \mathbb{R}^2 (voir Figure 1.5) on peut trouver, dans cette limite, des développements asymptotiques des fonctions propres et des valeurs propres.

À ce sujet, Borisov et Freitas donnent dans [BF09] une construction de quasimodes à tout ordre en fonction de la hauteur pour des domaines fins réguliers. Plus récemment dans [FS09], Friedlander et Solomyak s'affranchissent de l'hypothèse de régularité du domaine et ils démontrent une asymptotique à deux termes à l'aide de convergences de résolvantes (voir Proposition 2.6, cette méthode est reprise par Krejčířík et Raymond dans [KR13]).

Le résultat de Friedlander et Solomyak s'applique aux triangles, mais avant de s'intéresser à cette asymptotique, on rappelle deux résultats généraux sur les triangles. Dans [McC03], McCartin fournit une expression explicite de la première valeur propre du Laplacien de Dirichlet, notons la μ_1 , pour un triangle équilatéral de hauteur H : $\mu_1(H) = 4\pi^2 H^{-2}$. Hillairet et Judge prouvent dans [HJ11] la simplicité des valeurs propres pour presque tout triangle Euclidien de \mathbb{R}^2 .

Le régime $h \rightarrow 0$ est en fait une limite semi-classique et on utilise les méthodes semi-classiques de Helffer et Sjöstrand [HS84] qui sont peu utilisées pour répondre à ce genre de questions.

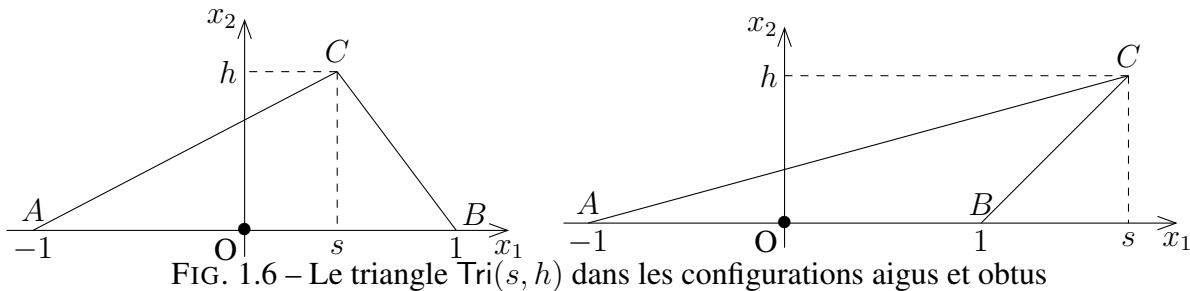
Dans le Chapitre 6 on construit des quasimodes ayant simultanément deux échelles : $h^{2/3}$ et h . L'échelle $h^{2/3}$ est due à une singularité de type $(x \mapsto |x|)$. Pour des domaines réguliers, dans le cas d'un maximum non dégénéré, l'échelle h joue le même rôle (voir le Théorème 1 de [BF09]). En fait, dans notre cas, il y a aussi une couche limite d'échelle h mais qui n'est pas visible aux premiers ordres dans le développement des paires propres. C'est pourquoi cette échelle est absente des développements de fonctions propres de [Fre07] et [FS09]. Toutefois, elle est présente dans le cas du triangle rectangle présenté dans [DR12] ou pour des cônes de petite ouverture (voir le Théorème 1.11 et [OB14]). Une des motivations d'origine de ce travail est de comprendre cette couche limite.

Dans un second temps, dans le Chapitre 7, on prouve que les fonctions propres se localisent près de la hauteur offrant le plus de place. On obtient ensuite la séparation des valeurs propres associées, en projetant les fonctions propres sur le plus petit mode transverse, grâce à la méthode de Feshbach. On utilise des estimées de localisation d'Agmon qui permettent ensuite de considérer des cas avec plusieurs pics (voir Chapitre 9). Par exemple, pour un domaine symétrique à deux pics, que l'on nommera bonnet d'âne, on prouve la décroissance exponentielle des fonctions propres entre les deux pics ce qui induit un effet tunnel : les valeurs propres se couplent par paires exponentiellement proches. Cela rappelle, dans la limite semi-classique $h \rightarrow 0$, le cas de potentiels électriques symétriques étudiés par Helffer [Hel88] et Helffer et Sjöstrand [HS84, HS85]. Cette méthode peut s'appliquer à des domaines asymptotiquement plats avec un nombre fini de pics.

Nous introduisons en sous-Section 1.2.2 les objets que nous allons étudier. Ensuite, en sous-Section 1.2.3, nous prouvons quelques propriétés avant d'énoncer, en sous-Section 1.2.4, le résultat principal sur les triangles. Enfin, en sous-Section 1.2.5, on énonce le résultat relatif au bonnet d'âne.

1.2.2 Le Laplacien de Dirichlet

Soient (x_1, x_2) les coordonnées cartésiennes de l'espace \mathbb{R}^2 et $\mathbf{0} = (0, 0)$ l'origine. On considère l'opérateur de Laplace donné par $-\partial_1^2 - \partial_2^2$. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ on définit $\text{Tri}(s, h)$, l'enveloppe convexe des points de coordonnées $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (s, h)$. On s'intéresse aux valeurs propres du Laplacien de Dirichlet de $-\Delta_{\text{Tri}(s, h)} = -\partial_1^2 - \partial_2^2$ sur le triangle $\text{Tri}(s, h)$ dans le régime $h \rightarrow 0$.



Les valeurs de s déterminent différentes configurations pour le triangle $\text{Tri}(s, h)$:

- $s = 0$ correspond aux triangles isocèles,
- $|s| < 1$ correspond à des triangles aigus (voir la Figure 1.7),
- $|s| = 1$ correspond à des triangles rectangles,
- $|s| > 1$ correspond à des triangles obtus (voir la Figure 1.7).

Puisque $\text{Tri}(s, h)$ est convexe, le domaine de l'opérateur $-\Delta_{\text{Tri}(s, h)}$ est l'espace de fonctions $H^2(\text{Tri}(s, h)) \cap H_0^1(\text{Tri}(s, h))$ (voir [Kon67]). Comme $\text{Tri}(s, h)$ est un domaine borné $-\Delta_{\text{Tri}(s, h)}$ est à résolvante compacte et son spectre est une suite croissante de valeurs propres notées $(\mu_{n, \text{Tri}(s, h)})_{n \geq 1}$.

Afin de transférer la dépendance en h de $-\Delta_{\text{Tri}(s, h)}$ dans les coefficients de l'opérateur, on fait le changement d'échelle suivant :

$$x = x_1 - s; \quad y = \frac{1}{h}x_2.$$

Le triangle $\text{Tri}(s, h)$ devient $\text{Tri}(s)$ et l'opérateur $-h^2\Delta_{\text{Tri}(s, h)}$ devient :

$$\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h) = -h^2\partial_x^2 - \partial_y^2. \quad (1.1)$$

C'est cette expression que l'on utilisera en Partie III. Ses valeurs propres, notées $(\lambda_{n, \text{Tri}(s, h)})_{n \geq 1}$ vérifient :

$$\lambda_{n, \text{Tri}(s)}(h) = h^2\mu_{n, \text{Tri}(s)}(h).$$

1.2.3 Premières propriétés des valeurs propres

On remarque que pour un triangle obtus si, dans la Figure 1.7, on fixe les points A et C en lieu et place des points A et B alors, le régime $h \rightarrow 0$ est équivalent à celui où la hauteur issue de B tend vers zéro. En fait, si on note

$$\tilde{s} = \frac{s}{\sqrt{(1+s)^2 + h^2}}; \quad \tilde{h} = \frac{2h}{\sqrt{(1+s)^2 + h^2}},$$

on a

$$0 < \tilde{s} < 1, \quad \tilde{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

et on obtient

$$\mu_{n, \text{Tri}(s)}(h) = \frac{(s+1)^2 + h^2}{4} \mu_{n, \text{Tri}(\tilde{s})}(\tilde{h}).$$

Le même genre de calculs peut se faire pour $s < -1$. Pour cette raison on se restreint au cas $s \in (-1, 1)$.

À h fixé la question de la régularité de $\mu_{n, \text{Tri}(\cdot)}(h)$ est abordée en Section 2.3.2. Néanmoins on remarque grâce à un simple encadrement par des opérateurs de Dirichlet que l'on a, pour s dans un voisinage de 1 :

$$\mu_{n, \text{Tri}(1)}\left(\frac{2h}{1+s}\right) \leq \mu_{n, \text{Tri}(s)}(h) \leq \frac{4}{(1+s)^2} \mu_{n, \text{Tri}(1)}\left(\frac{2h}{1+s}\right).$$

Comme $\mu_{n, \text{Tri}(1)}(\cdot)$ est continue pour tout $h > 0$ on obtient la continuité à gauche de $\mu_{n, \text{Tri}(\cdot)}(h)$ en $s = 1$. Le même genre de raisonnement donne la continuité à droite et donc la continuité de $\mu_{n, \text{Tri}(\cdot)}(h)$ en $s = 1$.

Avant d'aller plus loin, on remarque que l'on a la minoration suivante pour $\mu_{n, \text{Tri}(s)}(h)$:

Proposition 1.7 *Pour tout $s \in (-1, 1)$ et $h > 0$, on a :*

$$\frac{\pi^2}{h^2} + \frac{\pi^2}{4} \leq \mu_{n, \text{Tri}(s)}(h).$$

Preuve : Le triangle $\text{Tri}(s, h)$ est contenu dans le rectangle $(-1, 1) \times (0, h)$ (voir Figure 1.7) le principe du min-max permet de conclure (voir Proposition 2.1). \square

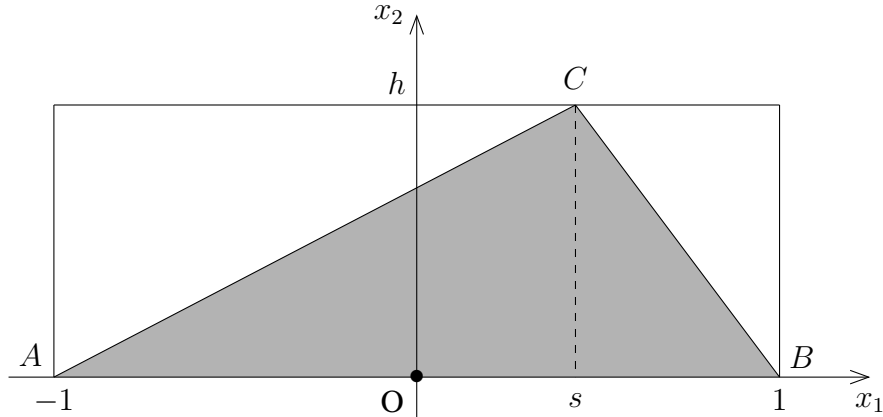


FIG. 1.7 – Inclusion du triangle $\text{Tri}(s, h)$ dans le rectangle $(-1, 1) \times (0, h)$.

1.2.4 Développement asymptotique des valeurs propres

On rappelle que $\mu_{n, \text{Tri}(s)}(h)$ est la n -ième valeur propre du Laplacien de Dirichlet $-\Delta_{\text{Tri}(s, h)}$ sur le domaine géométrique $\text{Tri}(s, h)$. On a un développement asymptotique à tout ordre des valeurs propres $\mu_{n, \text{Tri}(s)}(h)$ dans le régime $h \rightarrow 0$. Plus précisément, les plus petites valeurs propres de $-\Delta_{\text{Tri}(s, h)}$ admettent des développements à tout ordre en puissance de $h^{1/3}$. On prouve ce résultat en Partie III. Dans cette preuve on donne la structure des fonctions propres associées à ces valeurs propres : au premier ordre elles sont presque un produit tensoriel entre la première fonction propre du Laplacien de Dirichlet dans la variable transverse x_2 et, à certaines constantes près, les fonctions propres d'un opérateur modèle dans la variable x_1 . De plus, elles sont localisées près de la hauteur issue de C .

Théorème 1.8 *Pour tout $s \in (-1, 1)$, les valeurs propres de $-\Delta_{\text{Tri}(s, h)}$, notées $\mu_{n, \text{Tri}(s)}(h)$, admettent le développement :*

$$\mu_{n, \text{Tri}(s)}(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h^{-2} \sum_{j \geq 0} \beta_{j, n}(s) h^{j/3},$$

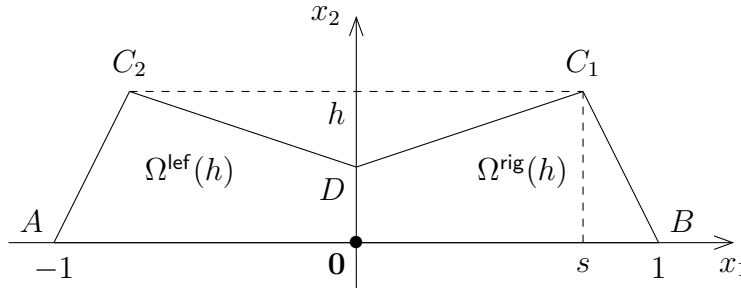
de plus ce développement est uniforme en s pour $s \in [-s_0, s_0]$ ($0 < s_0 < 1$). Les fonctions ($s \mapsto \beta_{j, n}(s)$) sont analytiques sur $(-1, 1)$ et on a : $\beta_{0, n} = \pi^2$, $\beta_{1, n} = 0$ et $\beta_{2, n}(s) = (2\pi^2)^{2/3} \kappa_n(s)$, où les $\kappa_n(s)$ sont les valeurs propres d'un opérateur 1D défini en (2.6). De plus, les fonctions propres contiennent simultanément les deux échelles $h^{2/3}$ et h comme on peut le voir dans l'équation (6.7).

1.2.5 Effet tunnel sur un bonnet d'âne

L'analyse menée tout au long de la Partie III afin de prouver le Théorème 1.8 peut être utilisée afin de comprendre le phénomène d'effet tunnel dans un polygone symétrique.

Soit $s \in (0, 1)$ et $h > 0$, on considère dans \mathbb{R}^2 les points $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C_1 = (s, h)$ et $D = (0, \frac{h}{2})$. Soit $\Omega^{\text{rig}}(h)$ l'enveloppe convexe ouverte des points O , B , C_1 et D . On définit $\Omega^{\text{lef}}(h)$ la réflexion de $\Omega^{\text{rig}}(h)$ par rapport à l'axe des ordonnées. On définit alors $\Omega(h)$ (voir la Figure 1.8) par :

$$\Omega(h) = \Omega^{\text{rig}}(h) \cup \Omega^{\text{lef}}(h) \cup (\mathbf{0}, D).$$

FIG. 1.8 – Le domaine $\Omega(h)$

Soit $(\mu_{n,\Omega}(h))_{n \geq 1}$ la suite croissante de valeurs propres de la réalisation de Dirichlet du Laplacien sur $\Omega(h)$ notée $-\Delta_{\Omega(h)}$. Comme pour le triangle, dans le régime $h \rightarrow 0$, les fonctions propres sont localisées près de la hauteur laissant le plus d'espace. Ici, les fonctions propres sont localisées simultanément près des hauteurs issues de C_1 et C_2 et, grâce aux estimées d'Agmon, décroissent exponentiellement ailleurs. C'est pourquoi les valeurs propres de $-\Delta_{\Omega(h)}$ sont doubles à une différence exponentielle près. On considère alors les réalisations de Dirichlet du Laplacien sur $\Omega^{\text{lef}}(h)$ et $\Omega^{\text{rig}}(h)$ notées respectivement $-\Delta_{\Omega^{\text{lef}}(h)}$ et $-\Delta_{\Omega^{\text{rig}}(h)}$. Par symétrie, ces opérateurs sont isospectraux et on note $(\mu_n(h))_{n \geq 1}$ leurs valeurs propres.

Soit l'opérateur $\mathfrak{D}(h) = -\Delta_{\Omega^{\text{lef}}(h)} \oplus -\Delta_{\Omega^{\text{rig}}(h)}$, cet opérateur dédoublé doit être exponentiellement proche de $-\Delta_{\Omega(h)}$. Ses valeurs propres, notées $(\tau_{n,\Omega}(h))_{n \geq 1}$ vérifient, pour tout $j \geq 1$, $\tau_{2j-1,\Omega}(h) = \tau_{2j,\Omega}(h) = \mu_j(h)$. Le Chapitre 9 est consacré à la preuve du

Théorème 1.9 *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et tout $j \in \{1, \dots, N\}$:*

$$|\tau_{j,\Omega}(h) - \mu_{j,\Omega}(h)| \leq C_0 e^{-C/h}.$$

Pour comprendre ce phénomène, nous le reformulons semi-classiquement. Effectuons le changement d'échelle :

$$x = x_1; \quad y = \frac{1}{h} x_2. \quad (1.2)$$

Le domaine $\Omega(h)$ se transforme en $\Omega = \Omega(1)$ et l'opérateur $-\Delta_{\Omega(h)}$ devient :

$$\mathcal{L}_{\Omega}(h) = -h^2 \partial_x^2 - \partial_y^2. \quad (1.3)$$

Nous avons réduit le problème à un problème de nature semi-classique. C'est cette expression de l'opérateur qui est utilisée au Chapitre 9. On note $(\lambda_{\Omega,n}(h))_{n \geq 1}$ ses valeurs propres et elles vérifient :

$$\lambda_{n,\Omega}(h) = h^2 \mu_{n,\Omega}(h).$$

De la même manière, le scaling (1.2) transforme respectivement $\Omega^{\text{lef}}(h)$ et $\Omega^{\text{rig}}(h)$ en $\Omega^{\text{lef}} = \Omega^{\text{lef}}(1)$ et $\Omega^{\text{rig}} = \Omega^{\text{rig}}(1)$. Les opérateurs $-\Delta_{\Omega^{\text{lef}}(h)}$ et $-\Delta_{\Omega^{\text{rig}}(h)}$ deviennent

$$\mathcal{L}_{\Omega^{\text{lef}}}(h) = -h^2 \partial_x^2 - \partial_y^2, \quad \mathcal{L}_{\Omega^{\text{rig}}}(h) = -h^2 \partial_x^2 - \partial_y^2. \quad (1.4)$$

Les valeurs propres de ces deux opérateurs, notées $(\lambda_n(h))_{n \geq 1}$, vérifient :

$$\lambda_n(h) = h^2 \mu_n(h).$$

1.3 Cônes de petite ouverture

On s'intéresse à des cônes finis de hauteur fixée 1 et paramétrés par leur angle d'ouverture. On étudie les paires propres du Laplacien de Dirichlet dans de tels domaines lorsque l'ouverture tend vers 0. On donne un développement asymptotique multi-échelle des paires propres associées aux plus petites valeurs propres de chaque fibre du Laplacien de Dirichlet. Pour ce faire, on étudie leurs approximations de type Born-Oppenheimer (voir Chapitre 4). Les valeurs propres se développent en puissance de la racine cubique de l'ouverture alors que les fonctions propres contiennent simultanément deux échelles.

Le but de la Partie IV est de trouver un développement asymptotique pour des cônes dans le cas limite du petit angle d'ouverture.

Comme un cône peut être vu comme un triangle en dimension trois, ce résultat est lié aux résultats de Freitas [Fre07]. Étant donné qu'un secteur sphérique peut être considéré comme l'union d'un cône et d'une calotte sphérique, nous serons amenés dans notre étude à considérer des constantes liées aux fonctions de Bessel. C'est l'équivalent en dimension trois des secteurs sphériques pour lesquels on voit apparaître les zéros des fonctions trigonométriques.

En sous-Section 1.3.1, nous introduisons les objets que nous allons étudier puis, nous réduisons le problème à l'étude d'une famille d'opérateurs 2D. La sous-Section 1.3.2 reformule de manière semi-classique le problème. En sous-Section 1.3.3 nous énonçons le théorème principal à propos des cônes de petite ouverture. Enfin, en sous-Section 1.3.4, on utilise une conséquence de ce théorème pour traiter le cas d'un cône sphérique.

1.3.1 Le Laplacien de Dirichlet sur les familles coniques

Notons (x_1, x_2, x_3) les coordonnées cartésiennes de l'espace \mathbb{R}^3 et par $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ l'origine. Le Laplacien est donné par $-\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$. On s'intéresse à des domaines délimités par un cône ouvert fini. Pour $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, on introduit le cône $\text{Co}(\theta)$ défini par

$$\text{Co}(\theta) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x_3 < 0 \text{ et } (x_1^2 + x_2^2) \cot^2 \theta < (x_3 + 1)^2\}, \quad (1.5)$$

L'angle θ représente la demi-ouverture du cône. On veut étudier les plus petites valeurs propres du Laplacien de Dirichlet $-\Delta_{\text{Co}(\theta)}$ dans la limite de petite ouverture.

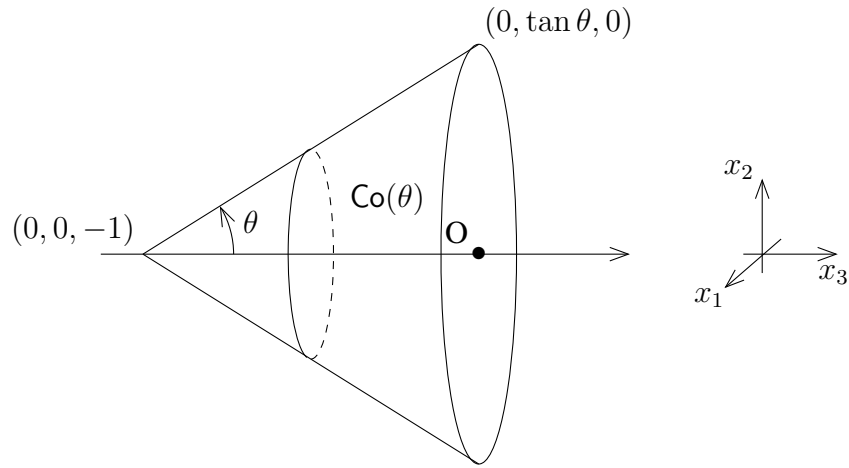
$\text{Co}(\theta)$ est un domaine convexe, on sait alors que $\text{Dom}(-\Delta_{\text{Co}(\theta)}) = H^2(\text{Co}(\theta)) \cap H_0^1(\text{Co}(\theta))$ (voir [Kon67]).

On décrit maintenant la décomposition en fibres du Laplacien de Dirichlet sur le cône $\text{Co}(\theta)$. On utilise les outils développés dans [RS78, Section XIII.16].

On s'intéresse à l'opérateur positif de Laplace sur le cône $\text{Co}(\theta)$ qui s'écrit :

$$-\Delta_{\text{Co}(\theta)} = -\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2.$$

On peut décrire le domaine $\text{Co}(\theta)$ en utilisant les coordonnées cylindriques. Effectuons un changement

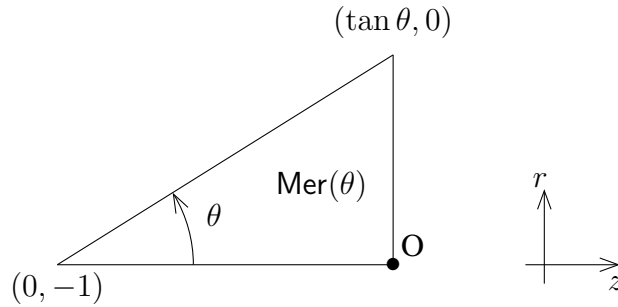
FIG. 1.9 – Le cône $\text{Co}(\theta)$

de variables et introduisons (r, ϕ, z) telles que

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \phi = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad z = x_3. \quad (1.6)$$

Si $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, le domaine en coordonnées cartésiennes $\text{Co}(\theta)$ devient $\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1$, où le triangle méridien $\text{Mer}(\theta)$ est défini par :

$$\text{Mer}(\theta) = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : -1 < z < 0 \text{ et } 0 < r < (z + 1) \tan \theta\}. \quad (1.7)$$

FIG. 1.10 – Le triangle méridien $\text{Mer}(\theta)$

Après changement de variable le Laplacien de Dirichlet s'écrit, sur le domaine géométrique $\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1$, comme l'opérateur :

$$\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1} = -\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) - \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 - \partial_z^2,$$

son domaine se déduisant du changement de variable (1.6).

Soit $\{\frac{1}{2\pi} e^{im\phi} : m \in \mathbb{Z}\}$ une base orthonormale de $L^2(\mathbb{S}^1)$. Une fonction $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ est égale, dans cet espace, à sa série de Fourier :

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ik\phi}, \quad \text{avec } c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f e^{-ik\phi} d\phi.$$

Le domaine $\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1$ est axisymétrique par conséquent on décompose en série de Fourier selon la variable ϕ . On obtient la somme directe en fibrés constants :

$$L^2(\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1, r dr d\phi dz) = L^2(\text{Mer}(\theta), r dr dz) \otimes L^2(\mathbb{S}^1) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} L^2(\text{Mer}(\theta), r dr dz).$$

L'opérateur $\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1}$ se décompose comme

$$\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}^{[m]}, \quad \text{avec } \mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}^{[m]} = -\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) - \partial_z^2 + \frac{m^2}{r^2}, \quad (1.8)$$

où les opérateurs $\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}^{[m]}$ sont les fibres de $\mathcal{H}_{\text{HMer}(\theta)}^{[m]}$ et leurs domaines $\text{Dom}(\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}^{[m]})$ sont implicitement définis par la décomposition. Les fibres $\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}$ sont à résolvante compacte, par conséquent leur spectre $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)})$ est une suite croissante de valeurs propres. On a :

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1}) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}^{[m]}). \quad (1.9)$$

Par conséquent, si $\mu_{n, \text{Mer}}^{[m]}(\theta)$ désigne la n -ième valeur propre de $\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}^{[m]}$, on peut décrire le spectre de la façon suivante :

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1}) = \bigcup_{(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}} \left\{ \mu_{n, \text{Mer}}^{[m]} \right\}.$$

Remarque 1.10 Pour $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}^{[m]})$, on a les conditions de Dirichlet aux frontières $\psi(r, 0) = 0$ et $\psi((z+1) \tan \theta, z) = 0$.

Si $m \neq 0$, pour des raisons d'intégrabilité on a $\psi(0, z) = 0$. On réfère à [BDM99, Chap. II] pour de plus amples informations.

1.3.2 Changement d'échelle du triangle méridien

Pour analyser l'asymptotique $\theta \rightarrow 0$, il est pratique de changer l'échelle du domaine d'intégration afin de passer la dépendance en θ dans les coefficients de l'opérateur. Pour cette raison, on effectue le changement linéaire de coordonnées

$$x = z, \quad y = \frac{1}{\tan \theta} r, \quad (1.10)$$

qui envoie $\text{Mer}(\theta)$ sur $\text{Mer}(\frac{\pi}{4})$. C'est pourquoi on note pour simplifier :

$$\text{Mer} = \text{Mer}\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad (1.11)$$

Ainsi, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}^{[m]}$ est unitairement équivalent à l'opérateur avec pour domaine d'intégration Mer :

$$\mathcal{D}_{\text{Mer}}^{[m]}(\theta) = -\partial_x^2 - \frac{1}{y \tan^2 \theta} \partial_y (y \partial_y) + \frac{m^2}{y^2 \tan^2 \theta}. \quad (1.12)$$

avec les conditions au bord décrites dans la Remarque 1.10. Posons $h = \tan \theta$; après multiplication par $\tan^2 \theta$, on obtient le nouvel opérateur :

$$\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h) = -h^2 \partial_x^2 - \frac{1}{y} \partial_y (y \partial_y) + \frac{m^2}{y^2}. \quad (1.13)$$

Cet opérateur est partiellement semi-classique en x et c'est cette expression que l'on utilise en Partie IV. Ses valeurs propres, notées $(\lambda_{n, \text{Mer}}^{[m]}(h))_{n \geq 1}$ vérifient :

$$\lambda_{n, \text{Mer}}^{[m]}(\tan \theta) = (\tan^2 \theta) \mu_{n, \text{Mer}}^{[m]}(\theta).$$

1.3.3 Développement asymptotique des valeurs propres

D'après la décomposition spectrale établie en (1.9), on note $\mu_{n, \text{Mer}}^{[m]}(\theta)$ la n -ième valeur propre de la m -ième fibre de l'opérateur $\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1}$. Dans le but d'obtenir des informations plus précises sur le comportement de $\mu_{n, \text{Mer}}^{[m]}(\theta)$ on peut dans un premier temps l'étudier numériquement. Les simulations sont faites à partir de l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(\tan \theta)$ défini en (1.12) et nous avons représenté ses valeurs propres notées $\lambda_{n, \text{Mer}}^{[m]}(\tan \theta)$.

La Figure 1.11 suggère que, pour $m = 0, 1, 2$, les valeurs propres convergent vers une certaine limite quand l'ouverture θ va vers 0. Qui plus est cette valeur est proche de $j_{m,1}^2$, où $j_{m,1}$ est le premier zéro de la m -ième fonction de Bessel de première espèce, représenté par les points noirs. Ce résultat doit être relié à celui conjecturé par Exner et Tater (voir [ET10, Figure 2] ainsi que le Théorème 1.19 : pour la couche conique, la valeur $\frac{j_{0,1}^2}{2\pi^2}$ joue un rôle similaire.

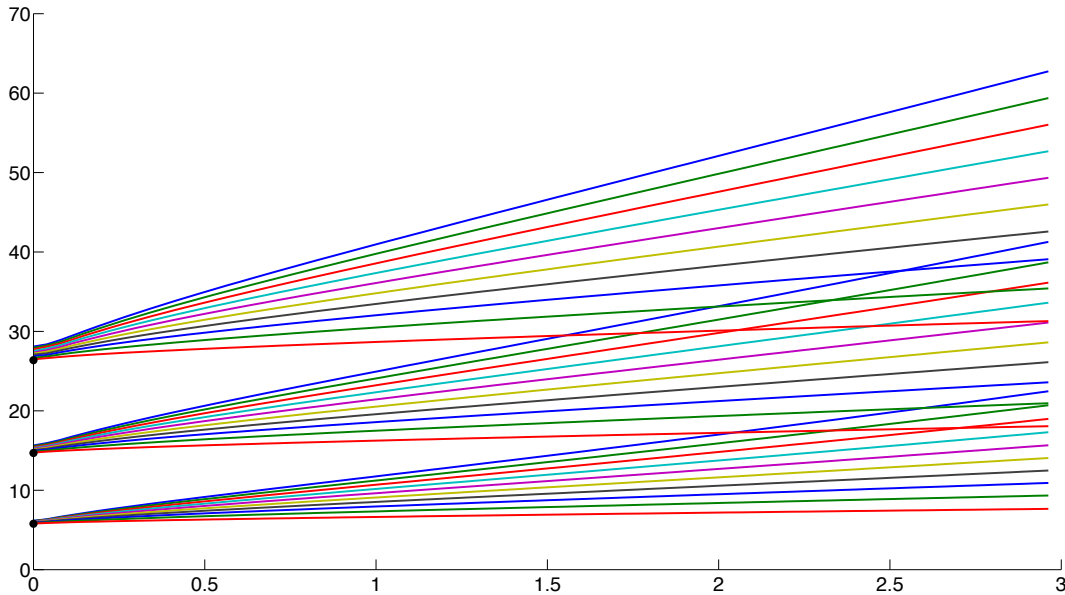


FIG. 1.11 – Cette figure représente la dépendance des dix premières valeurs propres $\lambda_{n, \text{Mer}}^{[m]}(\tan \theta)$ ($m = 0, 1, 2$) en fonction de l'ouverture θ (en degrés). Nous avons calculé chaque valeur propre pour 80 valeurs de θ .

Le résultat principal de ce chapitre n'est pas seulement la convergence des valeurs propres lorsque $\theta \rightarrow 0$ illustrée en Figure 1.11 mais un développement asymptotique complet des plus petites valeurs propres et des fonctions propres associées. En fait, les plus petites paires propres de chaque fibre de $\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1}$ admettent un développement à tout ordre en puissance de $\theta^{1/3}$. On énonce dans un premier temps le résultat pour les opérateurs $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ introduits en (1.13) :

Théorème 1.11 *On rappelle que $z_A(n)$ désigne les zéros de la fonction d'Airy inversée. Les valeurs propres de $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$, notées $\lambda_{n,\text{Mer}}^{[m]}(h)$, admettent comme développement :*

$$\lambda_{n,\text{Mer}}^{[m]}(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \sum_{k \geq 0} \beta_{k,n}^{[m]} h^{k/3} \quad \text{avec } \beta_{0,n}^{[m]} = j_{m,1}^2, \beta_{1,n}^{[m]} = 0, \beta_{2,n}^{[m]} = (j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(n),$$

les termes d'ordre impairs étant nuls pour $j \leq 8$. Les vecteurs propres associés ont un développement en puissances de $h^{1/3}$ comportant les deux échelles $x/h^{2/3}$ et x/h comme on peut le voir en (11.12).

En terme de domaine physique $\text{Mer}(\theta)$, on déduit immédiatement du précédent théorème que les valeurs propres de la m -ième fibre de $-\Delta_{\text{Co}(\theta)}$ ont pour développement :

$$\mu_{n,\text{Mer}}^{[m]} \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\theta^2} \sum_{k \geq 0} \beta_{k,n}^{[m],\Delta} \theta^{k/3} \quad \text{avec } \beta_{0,n}^{[m],\Delta} = j_{m,1}^2, \beta_{1,n}^{[m],\Delta} = 0, \beta_{2,n}^{[m],\Delta} = 2 (j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(n).$$

1.3.4 Application au cône sphérique

Le Théorème 1.11 sur le cône $\text{Co}(\theta)$ est étroitement lié au problème de Dirichlet sur un cône sphérique. On désigne par $\text{Sph}(\theta)$ le cône sphérique de rayon 1 et d'ouverture θ centré en $(0, 0, -1)$ illustré en Figure 1.12. On a

$$-\Delta_{\text{Sph}(\theta)} = -\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2.$$

On effectue le changement de variables

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2}, \quad \alpha = \arccos\left(\frac{x_3 + 1}{\rho}\right), \quad \beta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) & \text{si } x_2 \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) & \text{si } x_2 < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Le domaine $\text{Sph}(\theta)$ devient

$$\widehat{\text{Sph}}(\theta) = \widehat{\text{Circ}}(\theta) \times \mathbb{S}^1,$$

où $\widehat{\text{Circ}}(\theta)$ est le domaine circulaire méridien dans les coordonnées (ρ, α) .

Remarque 1.12 *Si en lieu et place du changement de variables (1.14) nous passons en coordonnées cylindriques comme en (1.6), le secteur circulaire méridien associé $\text{Circ}(\theta)$ est celui de la Figure 1.13. On peut passer de $\widehat{\text{Circ}}(\theta)$ à $\text{Circ}(\theta)$ par le changement de variables*

$$r = \rho \cos \alpha - 1, \quad z = \rho \sin \alpha,$$

qui relie ces deux domaines en s'affranchissant des coordonnées cartésiennes.

Le Laplacien de Dirichlet en coordonnées sphériques, noté $\mathcal{H}_{\widehat{\text{Sph}}(\theta)}$, s'écrit

$$\mathcal{H}_{\widehat{\text{Sph}}(\theta)} = -\frac{1}{\rho^2} \partial_\rho (\rho^2 \partial_\rho) - \frac{1}{\rho^2 \sin \alpha} \partial_\alpha (\sin \alpha \partial_\alpha) + \frac{m^2}{\rho^2 \sin^2 \alpha},$$

sur $L^2(\widehat{\text{Sph}}(\theta), \rho^2 \sin \alpha d\rho d\alpha d\beta)$. Comme en 1.3.1 on a une décomposition en fibrés constants :

$$L^2(\widehat{\text{Sph}}(\theta), \rho^2 \sin \alpha d\rho d\alpha d\beta) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} L^2(\widehat{\text{Circ}}(\theta), \rho^2 \sin \alpha d\rho d\alpha),$$

et $\mathcal{H}_{\widehat{\text{Sph}}(\theta)}$ se décompose en fibres :

$$\mathcal{H}_{\widehat{\text{Sph}}(\theta)} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{\widehat{\text{Circ}}(\theta)}^{[m]},$$

où

$$\mathcal{H}_{\widehat{\text{Circ}}(\theta)}^{[m]} = -\frac{1}{\rho^2} \partial_\rho (\rho^2 \partial_\rho) - \frac{1}{\rho^2 \sin \alpha} \partial_\alpha (\sin \alpha \partial_\alpha) + \frac{m^2}{\rho^2 \sin^2 \alpha},$$

les conditions aux limites se déduisant de la décomposition. Soit (μ, Ψ) une valeur propre de $\mathcal{H}_{\widehat{\text{Circ}}(\theta)}^{[m]}$, telle que $\Psi(\rho, \alpha) = R(\rho)M(\alpha)$. Elle doit satisfaire le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} [\partial_\rho (\rho^2 \partial_\rho) + (c(\theta) - \mu \rho^2)] R(\rho) &= 0, \\ \left[-\frac{1}{\sin \alpha} \partial_\alpha (\sin \alpha \partial_\alpha) + \frac{m^2}{\sin^2 \alpha} \right] M(\alpha) &= c(\theta)M(\alpha), \end{cases} \quad (1.15)$$

où $c(\theta)$ est une constante (dépendante de θ) à trouver.

Remarque 1.13 *On ne s'intéresse pas à la résolution de ces équations. Néanmoins on peut observer que formellement, lorsque $\theta \rightarrow 0$ l'angle α est petit et la dernière équation de (1.15) ressemble à une équation de Bessel. Ce pourrait être une piste afin de trouver une expression asymptotique à tout ordre de μ quand $\theta \rightarrow 0$.*

Cependant, grâce au Théorème 1.11, on a un développement asymptotique fini des valeurs propres de $-\Delta_{\text{Sph}}(\theta)$. Soit $\text{Co}(\theta, \cos \theta)$ l'ensemble $\text{Co}(\theta)$ à une dilatation de rapport $\cos \theta$ près. Dans \mathbb{R}^3 , on a les inclusions ensemblistes

$$\text{Co}(\theta, \cos \theta) \subset \text{Sph}(\theta) \subset \text{Co}(\theta).$$

Soit $\mu_{n, \text{Sph}}(\theta)$ la n -ième valeur propre du Laplacien de Dirichlet sur $\text{Sph}(\theta)$ et $\mu_{n, \text{Co}}(\theta)$ celle sur le cône $\text{Co}(\theta)$, la monotonie du Laplacien de Dirichlet livre :

$$(1 + \tan^2 \theta) \mu_{n, \text{Co}}(\theta) \geq \mu_{n, \text{Sph}}(\theta) \geq \mu_{n, \text{Co}}(\theta). \quad (1.16)$$

Si $\mu_{n, \text{Sph}}^{[m]}(\theta)$ désigne la n -ième valeur propre de la m -ième fibre du Laplacien de Dirichlet, pour de petites valeurs de θ (1.16) livre :

$$(1 + \tan^2 \theta) \mu_{n, \text{Mer}}^{[0]}(\theta) \geq \mu_{n, \text{Sph}}^{[0]}(\theta) \geq \mu_{n, \text{Mer}}^{[0]}(\theta).$$

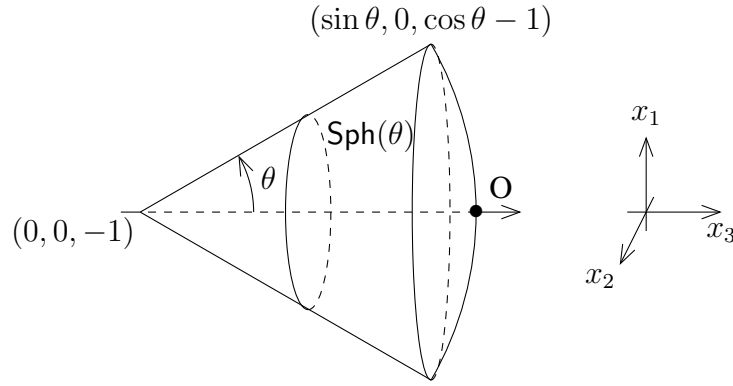


FIG. 1.12 – Le cône sphérique $\text{Sph}(\theta)$

Pour traiter de plus grandes fibres on applique le même argument au secteur circulaire $\text{Circ}(\theta)$ et au triangle méridien $\text{Mer}(\theta)$ car :

$$\text{Mer}(\theta, \cos \theta) \subset \text{Circ}(\theta) \subset \text{Mer}(\theta).$$

Comme pour $m \geq 1$, les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet homogène (voir Remarque 1.10), on a :

$$(1 + \tan^2 \theta) \mu_{n, \text{Mer}}^{[m]}(\theta) \geq \mu_{n, \text{Sph}}^{[m]}(\theta) \geq \mu_{n, \text{Mer}}^{[m]}(\theta).$$

Ces inégalités combinées au Théorème 1.11 donnent les premiers termes de l'asymptotique de $\mu_{n, \text{Sph}}^{[m]}(\theta)$.

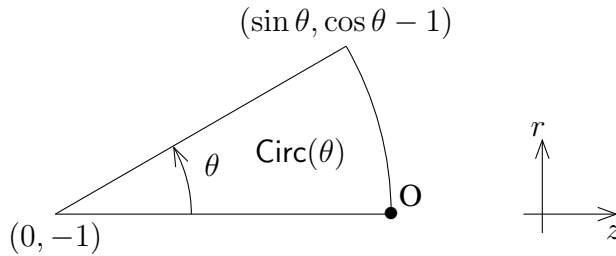


FIG. 1.13 – Secteur circulaire méridien $\text{Circ}(\theta)$

1.4 Couche conique

On s'intéresse à des couches coniques d'épaisseur π construites à partir d'un cône infini dans une direction (voir Figure 1.4). Cette couche conique est paramétrée par son angle d'ouverture. On étudie le spectre du Laplacien de Dirichlet dans de tels domaines. Notre but est de préciser certains résultats de [ET10]. On prouve que pour tout angle d'ouverture il y a une accumulation du nombre de valeurs propres sous le seuil du spectre essentiel. Ce nombre de valeurs propres est de l'ordre du logarithme de la distance au bas du spectre essentiel. Dans le régime de petite ouverture on donne un développement asymptotique à deux termes des plus petites valeurs propres. On démontre que les fonctions propres associées sont localisées dans la tête conique de la couche à une échelle d'ordre de la racine cubique de l'angle d'ouverture au carré et qu'elles pénètrent dans le reste de la couche conique à une échelle impliquant le logarithme de l'angle d'ouverture.

Comme expliqué en Section 1.1 cette étude est motivée par des questions de type guide d'onde. Une question naturelle est d'estimer le nombre de valeurs propres sous un seuil strictement inférieur à l'infimum du spectre essentiel. C'est la question à laquelle on répond au Chapitre 14. On prouve ensuite au Chapitre 15 un développement asymptotique à deux termes des premières valeurs propres lorsque l'angle d'ouverture de la couche conique tend vers 0. Au Chapitre 16, on illustre numériquement certaines propriétés de la couche conique.

En sous-Section 1.4.1 on définit la couche conique et on introduit le Laplacien de Dirichlet associé à cet objet. En sous-Section 1.4.2 on réduit l'étude à un opérateur 2D et on énonce les résultats obtenus.

1.4.1 Le Laplacien de Dirichlet dans la couche conique

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées cartésiennes de l'espace \mathbb{R}^3 et $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ l'origine. L'opérateur de Laplace est donné par $-\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$. On s'intéresse à des couches coniques d'angle d'ouverture θ tel quel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Soit $\text{Lay}(\theta)$ la couche conique définie par :

$$\text{Lay}(\theta) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) < (\cos \theta)^{-2}(\pi + x_3 \sin \theta)^2 & , x_3 > -\pi(\sin \theta)^{-1}, \\ (x_1^2 + x_2^2) > (\cos \theta)^{-2}x_3^2 & , x_3 > 0 \end{cases} \right\}, \quad (1.17)$$

Sur $L^2(\text{Lay}(\theta))$ on considère $-\Delta_{\text{Lay}(\theta)}$, l'opérateur de Laplace en coordonnées cartésiennes avec conditions de Dirichlet aux limites. Lorsque $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ il y a un coin non convexe en $\mathbf{0}$, pour cette raison le domaine de l'opérateur $\Delta_{\text{Lay}(\theta)}$ est différent de $H^2(\text{Lay}(\theta)) \cap H_0^1(\text{Lay}(\theta))$.

On décrit la couche $\text{Lay}(\theta)$ en coordonnées cylindriques : on introduit (r, ϕ, z) tels que

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \phi = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad z = x_3. \quad (1.18)$$

Le domaine cartésien $\text{Lay}(\theta)$ devient $\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1$ où le guide méridien $\text{Gui}(\theta)$ est :

$$\text{Gui}(\theta) = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : -\pi(\sin \theta)^{-1} < z, \max(0, z \tan \theta) < r < z \tan \theta + \pi(\cos \theta)^{-1}\}. \quad (1.19)$$

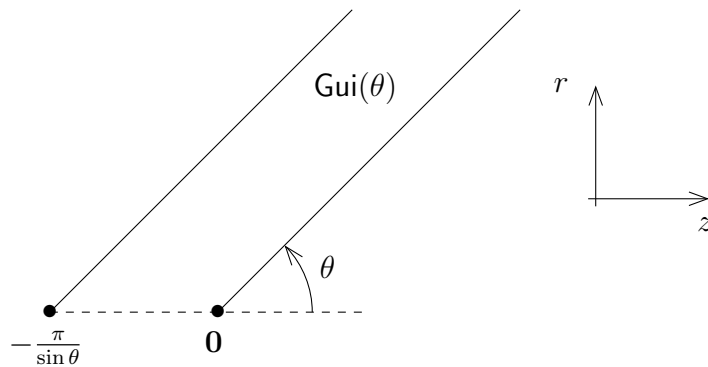


FIG. 1.14 – Le guide méridien $\text{Gui}(\theta)$.

Sur $L^2(\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1, r dr d\phi dz)$ le Laplacien de Dirichlet $-\Delta_{\text{Lay}(\theta)}$ devient :

$$\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1} = -\frac{1}{r}(r\partial_r) - \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 - \partial_z^2,$$

son domaine se déduisant du changement de variables (1.18).

Le domaine géométrique $\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1$ est axisymétrique. Une décomposition en série de Fourier, selon la variable angulaire ϕ , amène à la somme directe de fibrés constants :

$$L^2(\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1, r dr d\phi dz) = L^2((\text{Gui}(\theta), r dr dz) \otimes L^2(\mathbb{S}^1)) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} L^2(\text{Gui}(\theta), r dr dz).$$

L'opérateur $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1}$ se décompose comme :

$$\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}^{[m]}, \quad \text{avec } \mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}^{[m]} = -\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) - \partial_z^2 + \frac{m^2}{r^2}, \quad (1.20)$$

où les $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}^{[m]}$ sont les fibres de $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1}$ et leurs domaines sont définis implicitement par la décomposition.

1.4.2 Résultats principaux sur la couche conique

Dans un premier temps, on énonce la

Proposition 1.14 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $\theta \mapsto \mu_{n, \text{Gui}}(\theta)$ sont croissantes sur $(0, \frac{\pi}{2})$.*

Cette proposition est prouvée en sous-Section 14.2.1 au Chapitre 14. On rappelle maintenant quelques résultats exposés dans [ET10] à propos du spectre de $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1}$. Soit respectivement $\mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1})$ et $\mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1})$ les spectres essentiel et discret de $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1}$.

Proposition 1.15 ([ET10]) *Soit $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, on a :*

$$\mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1}) = [1, \infty), \quad \#(\mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1})) = \infty.$$

Le Lemme de Persson 2.3 permet de justifier la première identité de la Proposition 1.15 : le spectre essentiel est déterminé par la géométrie de $\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1$ à l'infini. Ici, moralement, il s'agit du spectre essentiel pour le Laplacien de Dirichlet entre deux plans à distance π . Cette proposition justifie également l'existence de spectre discret en dessous du spectre essentiel. C'est la structure de ce spectre discret que nous voudrions comprendre, d'abord dans le Chapitre 14 en comptant à θ fixé le nombre de valeurs propres en dessous de 1. Ensuite, dans le Chapitre 15 on donne des développements asymptotiques des premières valeurs propres dans le régime semi-classique $\theta \rightarrow 0$.

Proposition 1.16 ([ET10]) *Pour tout $m \neq 0$, on a $\mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}^{[m]}) = \emptyset$.*

En fait, lorsque $m \neq 0$, toute fonction dans $\text{Dom}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}^{[m]})$ doit satisfaire des conditions d'intégrabilité : elle est nécessairement nulle sur l'axe $r = 0$. Par conséquent, on peut comparer l'opérateur $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}^{[m]}$ à sa réalisation sur une bande de \mathbb{R}^2 .

Grâce à la Proposition 1.16 on sait désormais que pour comprendre $\mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1})$ on peut s'intéresser uniquement à $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}^{[0]}$. Pour simplifier, on enlève l'indice 0 et on restreint l'étude au spectre discret de $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)} = \mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}^{[0]}$. On note $(\mu_{n, \text{Gui}}(\theta))_{n \geq 1}$ les valeurs propres en dessous du spectre essentiel de $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}$.

Le premier théorème que nous démontrons concerne la nature de l'infinité de $\mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)} \times \mathbb{S}^1)$ abordée en Proposition 1.15. Soit $E > 0$, on définit le nombre de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}$ en dessous de $1 - E$ par :

$$\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}) = \#\{\mu_{n,\text{Gui}}(\theta) : \mu_{n,\text{Gui}}(\theta) \leq 1 - E\}.$$

D'une manière générale, on pose la

Définition 1.17 Soit $\nu \in \mathbb{R}$ et \mathcal{L} , un opérateur auto-adjoint borné inférieurement, de forme quadratique associée \mathcal{Q} . On définit $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{L})$ par :

$$\mathcal{N}_\nu(\mathcal{L}) = \#\{\mu \in \mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{L}) : \mu < \nu\}.$$

Lorsque l'on travaille avec la forme quadratique \mathcal{Q} , on note également $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{Q})$ pour $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{L})$.

Le Chapitre 14 est consacré à la preuve du

Théorème 1.18 Pour tout $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ on a :

$$\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cot \theta}{4\pi} |\ln E|.$$

Le Théorème 1.18 montre une accumulation logarithmique du nombre de valeurs propres près du seuil du spectre essentiel.

On rappelle que $j_{0,1}$ désigne le premier zéro de la 0-ième fonction de Bessel de première espèce et par $z_A(n)$ le n -ième zéro de la fonction d'Airy inversée. Dans le Chapitre 15, on prouve le

Théorème 1.19 Soit $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\theta_0 > 0$ tel que pour tout $\theta \in (0, \theta_0)$ on ait le développement :

$$\mu_{n,\text{Gui}}(\theta) = \frac{j_{0,1}^2}{\pi^2} + (2\pi^2)^{2/3} z_A(n) \theta^{2/3} + o(\theta |\ln \theta|^{(1+\varepsilon)/2}), \quad n = 1, \dots, N_0.$$

Le Théorème 1.19 décrit le comportement des premières valeurs propres dans la limite semi-classique $\theta \rightarrow 0$. Ce théorème confirme la convergence de $\mu_{n,\text{Gui}}(\theta)$ vers $j_{0,1}^2 \pi^{-2}$ conjecturée dans [ET10, Figure 2]. Afin de le démontrer, il est plus facile de transférer la dépendance en θ dans les coefficients de l'opérateur, c'est pourquoi on effectue le changement de variables :

$$x = z\sqrt{2} \sin \theta, \quad y = r\sqrt{2} \cos \theta.$$

Le domaine $\text{Gui}(\theta)$ devient

$$\text{Gui} = \text{Gui}(\pi/4) \tag{1.21}$$

et l'opérateur $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}$ est unitairement équivalent à

$$\mathcal{D}_{\text{Gui}}(\theta) = -2 \sin^2 \theta \partial_x^2 - 2 \cos^2 \theta \frac{1}{y} \partial_y (y \partial_y). \tag{1.22}$$

Si on divise par $2 \cos^2 \theta$ et que l'on pose $h = \tan \theta$ on aboutit à

$$\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h) = -h^2 \partial_x^2 - \frac{1}{y} \partial_y (y \partial_y). \quad (1.23)$$

Cet opérateur agit sur $L^2(\text{Gui}, y dx dy)$ et ses valeurs propres en dessous du spectre essentiel, notées $(\lambda_{n, \text{Gui}}(h))_{n \geq 1}$, vérifient :

$$\lambda_{n, \text{Gui}}(\tan \theta) = (2 \cos^2 \theta)^{-1} \mu_{n, \text{Gui}}(\theta).$$

On remarque que le régime semi-classique $\theta \rightarrow 0$ correspond à $h \rightarrow 0$.

1.5 Récapitulatif des différents opérateurs

Nous récapitulons ici les opérateurs associés aux différents problèmes étudiés au long de cette thèse. Nous redonnons chaque opérateur et sa version semi-classique associée. La Table 1.1 est celle associée à la question des triangles asymptotiquement plats alors que la Table 1.2 récapitule les opérateurs concernant le problème d'effet tunnel. La Table 1.3 est celle pour les cônes de petite ouverture et la Table 1.4 correspond au problème de la couche conique.

	Notation	Expression	Domaine	Forme quadratique	Valeurs propres $n \geq 1$
Opérateur	$-\Delta_{\text{Tri}(s,h)}$	$-\partial_1^2 - \partial_2^2$	$\text{Tri}(s, h)$ (Fig. 1.7)	_____	$\mu_{n, \text{Tri}(s)}(h)$
Version semi-classique	$\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$	$-h^2 \partial_x^2 - \partial_y^2$	$\text{Tri}(s)$	$\mathcal{Q}_{\text{Tri}(s)}(h)$	$\lambda_{n, \text{Tri}(s)}(h) = h^2 \mu_{n, \text{Tri}(s)}(h)$

TAB. 1.1 – Récapitulatif des opérateurs pour le problème des triangles asymptotiquement plats.

	Notation	Expression	Domaine	Forme quadratique	Valeurs propres $n \geq 1$
Opérateur	$-\Delta_{\Omega(h)}$	$-\partial_1^2 - \partial_2^2$	$\Omega(h)$ (Fig. 1.8)	_____	$\mu_{n, \Omega}(h)$
Version semi-classique	$\mathcal{L}_{\Omega}(h)$	$-h^2 \partial_x^2 - \partial_y^2$	Ω	_____	$\lambda_{n, \Omega}(h) = h^2 \mu_{n, \Omega}(h)$
Opérateur	$-\Delta_{\Omega^{\text{lef}}(h)}$ $-\Delta_{\Omega^{\text{rig}}(h)}$	$-\partial_1^2 - \partial_2^2$	$\Omega^{\text{lef}}(h)$ $\Omega^{\text{rig}}(h)$	_____	$\mu_n(h)$
Version semi-classique	$\mathcal{L}_{\Omega^{\text{lef}}}(h)$ $\mathcal{L}_{\Omega^{\text{rig}}}(h)$	$-h^2 \partial_x^2 - \partial_y^2$	Ω^{lef} Ω^{rig}	_____	$\lambda_n(h) = h^2 \mu_n(h)$

TAB. 1.2 – Récapitulatif des opérateurs pour l'étude de l'effet tunnel dans un bonnet d'âne.

	Notation	Expression	Domaine	Forme quadratique	Valeurs propres $n \geq 1$
Opérateur 3D cartésien	$-\Delta_{\text{Co}(\theta)}$	$-\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$	$\text{Co}(\theta)$ (1.5)	_____	_____
Opérateur 3D cylindrique	$\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1}$	$-\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) - \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 - \partial_z^2$	$\text{Mer}(\theta) \times \mathbb{S}^1$ (1.7) muni du poids $rdrd\phi dz$	_____	_____
Fibres	$\mathcal{H}_{\text{Mer}(\theta)}^{[m]}$	$-\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{m^2}{r^2} - \partial_z^2$	$\text{Mer}(\theta)$ (1.7) muni du poids $rdrdz$	_____	$\mu_{n,\text{Mer}}^{[m]}(\theta)$
Version semi-classique	$\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ $h = \tan \theta$	$-h^2\partial_x^2 - \frac{1}{y}\partial_y(y\partial_y) + \frac{m^2}{y^2}$	Mer (1.11) muni du poids $ydxdy$	$\mathcal{Q}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$	$\lambda_{n,\text{Mer}}^{[m]}(\tan \theta) = (\tan \theta)^2 \mu_{n,\text{Mer}}^{[m]}(\theta)$

TAB. 1.3 – Récapitulatif des opérateurs pour le problème des cônes de petite ouverture.

	Notation	Expression	Domaine	Forme quadratique	Valeurs propres $n \geq 1$
Opérateur 3D cartésien	$-\Delta_{\text{Lay}(\theta)}$	$-\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$	$\text{Lay}(\theta)$ (1.17)	_____	_____
Opérateur 3D cylindrique	$-\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1}$	$-\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) - \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 - \partial_z^2$	$\text{Gui}(\theta) \times \mathbb{S}^1$ (1.19) muni du poids $rdrd\phi dz$	_____	_____
Fibre $m = 0$	$\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}$	$-\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) - \partial_z^2$	$\text{Gui}(\theta)$ (1.19) muni du poids $rdrdz$	$\mathcal{Q}_{\text{Gui}(\theta)}$	$\mu_{n,\text{Gui}}(\theta)$
Version semi-classique	$\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$ $h = \tan \theta$	$-h^2\partial_x^2 - \frac{1}{y}\partial_y(y\partial_y)$	Gui (1.21) muni du poids $ydxdy$	$\mathcal{Q}_{\text{Gui}}(h)$	$\lambda_{n,\text{Gui}}(\tan \theta) = (\sqrt{2} \cos \theta)^{-2} \mu_{n,\text{Gui}}(\theta)$

TAB. 1.4 – Récapitulatif des opérateurs pour le problème de la couche conique.

Chapitre 2

Outils standards

2.1 Quelques rappels de théorie spectrale

Dans ce qui suit X désigne un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$. On considère un opérateur auto-adjoint \mathcal{L} sur X . On énonce dans un premier temps le principe du min-max qui permet de caractériser le bas du spectre d'un opérateur (voir [RS78, Chap. XIII] et [LB03, Propositions 6.16 et 13.1]).

Proposition 2.1 (Principe du min-max) *Soit \mathcal{L} un opérateur auto-adjoint borné inférieurement, \mathcal{Q} sa forme quadratique et $\text{Dom}(\mathcal{Q})$ son domaine de forme. On définit le n -ième quotient de Rayleigh comme*

$$\mu_n(\mathcal{L}) = \sup_{\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1} \in \text{Dom}(\mathcal{Q})} \inf_{\substack{\Psi \in \text{vect}(\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})^\perp \\ \Psi \in \text{Dom}(\mathcal{Q}) \setminus \{0\}}} \frac{\mathcal{Q}(\Psi)}{\|\Psi\|^2} = \inf_{\Psi_1, \dots, \Psi_n \in \text{Dom}(\mathcal{Q})} \sup_{\substack{\Psi \in \text{vect}(\Psi_1, \dots, \Psi_n) \\ \Psi \in \text{Dom}(\mathcal{Q}) \setminus \{0\}}} \frac{\mathcal{Q}(\Psi)}{\|\Psi\|^2}. \quad (2.1)$$

On a l'alternative (i) ou (ii) :

- (i) Si les valeurs propres sont triées dans l'ordre croissant et comptées avec multiplicité, μ_n est la n -ième valeur propre de \mathcal{L} . De plus, l'opérateur \mathcal{L} n'a que du spectre discret dans l'intervalle $(-\infty, \mu_n(\mathcal{L})]$.
- (ii) $\mu_n(\mathcal{L})$ est le bas du spectre essentiel de \mathcal{L} . Dans ce cas, $\mu_j(\mathcal{L}) = \mu_n(\mathcal{L})$ pour tout $j \geq n$.

En pratique, pour \mathcal{L} un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et \mathcal{Q} sa forme quadratique associée de domaine de forme $\text{Dom}(\mathcal{Q})$, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et un espace vectoriel $V \subset \text{Dom}(\mathcal{Q})$ de dimension n tel que pour tout $\Psi \in V$ on ait

$$\mathcal{Q}(\Psi) \leq a \|\Psi\|^2,$$

alors on en déduit que

$$\mu_n(\mathcal{L}) \leq a.$$

On rappelle deux résultats qui caractérisent le spectre essentiel d'un opérateur. Le premier est une caractérisation séquentielle *via* les suites de Weyl (voir [RS78] et [LB03, Chapitre 10]).

Proposition 2.2 (Critère de Weyl) *Un nombre réel λ appartient à $\mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L})$ si et seulement si il existe*

une suite $(\Psi_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\text{Dom}(\mathcal{L})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \|\Psi_n\| = 1, \\ \|(\mathcal{L} - \lambda)\Psi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \\ \Psi_n \text{ tend faiblement vers } 0. \end{cases}$$

Soit \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$), on considère le cas $X = L^2(\mathcal{U})$. En pratique, pour construire une suite de Weyl, on est amené à construire des bosses glissantes dans une direction infinie de \mathcal{U} . En un certain sens, le spectre essentiel se comprend comme le spectre venant de l'infini et c'est ce que dit la proposition suivante (voir [FH10, Appendix B], [Per60] et [Ray, Th. 5.5.]).

Proposition 2.3 (Lemme de Persson) *Soit \mathcal{U} un ouvert non borné de \mathbb{R}^d à bord lipschitzien et V un potentiel à valeurs réelles positives. Alors le bas du spectre essentiel de la réalisation de Dirichlet sur \mathcal{U} de $\mathcal{L} = -\Delta + V$ est donné par :*

$$\inf \mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \Sigma(\mathcal{L}),$$

où

$$\Sigma(\mathcal{L}) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \Sigma_R(\mathcal{L})$$

avec

$$\Sigma_R(\mathcal{L}) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U} \cap \mathcal{B}(0, R))} \left(\frac{\int_{\mathcal{U}} |\nabla \psi(x)|^2 + V(x)|\psi(x)|^2 dx}{\int_{\mathcal{U}} |\psi(x)|^2 dx} \right).$$

La caractérisation du bas du spectre de la Proposition 2.1 nous permet d'interpréter le bas du spectre essentiel comme le bas du spectre de la réalisation de Dirichlet de \mathcal{L} sur des domaines de plus en plus éloignés de l'origine.

Maintenant, on se propose d'obtenir une formule de localisation en utilisant des partitions de l'unité. Pour cela on s'inspire de [CFKS87]. Soit \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^*$), on se place dans le cas où $X = L^2(\mathcal{U})$. On se donne une suite de points x_j (finie ou non) dans \mathcal{U} et on introduit la partition de l'unité suivante :

$$\sum_j \chi_{j,R}^2 = 1,$$

où $\chi_{j,R}$ est une fonction troncature régulière supportée dans la boule de centre x_j et de rayon R . De plus, on peut construire une telle partition de l'unité telle que :

$$\sum_j \|\nabla \chi_{j,R}\|^2 \leq CR^{-2}, \quad \text{avec } C > 0.$$

Proposition 2.4 (Formule de localisation IMS) *Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^d à bord lipschitzien et V un potentiel borné inférieurement à valeurs réelles. Alors si \mathcal{L} désigne la réalisation de Dirichlet sur \mathcal{U} de $-\Delta + V$ et \mathcal{Q} la forme quadratique associée, pour $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{Q})$ on a :*

$$\mathcal{Q}(\psi) = \sum_j \mathcal{Q}(\chi_{j,R}\psi) - \sum_j \|\nabla \chi_{j,R}\psi\|^2$$

L'intérêt principal de cette formule est de réduire l'étude de la forme quadratique \mathcal{Q} , modulo un terme de reste, à celles de formes quadratiques localisées sur le support des fonctions troncatures.

On énonce ensuite un théorème qui s'avère être un outil puissant pour localiser le spectre d'un opérateur :

Proposition 2.5 (Théorème spectral) *Soit \mathcal{L} un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et $\text{Dom}(\mathcal{L}) \subset X$ son domaine. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Psi \in \text{Dom}(\mathcal{L})$ on a*

$$\text{dist}(\lambda, \mathfrak{S}(\mathcal{L})) \|\Psi\| \leq \|(\mathcal{L} - \lambda)\Psi\|$$

Par conséquent, pour un nombre réel λ , si on trouve une fonction normalisée $\Psi \in \text{Dom}(\mathcal{L})$ qui, pour $\varepsilon > 0$, vérifie

$$\|(\mathcal{L} - \lambda)\Psi\| \leq \varepsilon \quad (2.2)$$

alors

$$\text{dist}(\lambda, \mathfrak{S}(\mathcal{L})) \leq \varepsilon.$$

Lorsque l'on souhaite utiliser la Proposition 2.5 on cherche une fonction propre approchée (aussi nommée quasimode) de l'opérateur \mathcal{L} , c'est-à-dire qui vérifie une équation de type (2.2) pour un ε suffisamment petit. On en déduit l'existence d'un élément de $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$ à distance ε de λ .

On conclut cette section en énonçant un résultat qui permet de contrôler la différence entre deux résolvantes à l'aide des formes bilinéaires associées (voir [KŠ12, Prop. 5.3]). La comparaison des résolvantes se ramène à celle des formes bilinéaires associées. On peut comparer notre méthode avec la méthode de comparaison des résolvantes. En effet, par la suite, on comparera souvent deux formes quadratiques afin d'obtenir des encadrements des valeurs propres. Moralement, la comparaison des formes bilinéaires s'inscrit dans le même esprit.

Proposition 2.6 (Convergence en norme de la résolvante) *Soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 deux opérateurs auto-adjoints positifs sur l'espace de Hilbert X tels que \mathcal{L}_1^{-1} et \mathcal{L}_2^{-1} soient bornés sur X . Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 leurs formes bilinéaires associées, on suppose que $\text{Dom}(\mathcal{B}_1) = \text{Dom}(\mathcal{B}_2)$. Supposons également qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\phi, \psi \in \text{Dom}(\mathcal{B}_1)$ on ait*

$$|\mathcal{B}_1(\phi, \psi) - \mathcal{B}_2(\phi, \psi)| \leq \eta \sqrt{\mathcal{Q}_1(\psi)} \sqrt{\mathcal{Q}_2(\phi)},$$

avec $\mathcal{Q}_j(\varphi) = \mathcal{B}_j(\varphi, \varphi)$, pour $j = 1, 2$ et $\varphi \in \text{Dom}(\mathcal{B}_1)$. Alors on a :

$$\|\mathcal{L}_1^{-1} - \mathcal{L}_2^{-1}\| \leq \eta \|\mathcal{L}_1^{-1}\|^{1/2} \|\mathcal{L}_2^{-1}\|^{1/2}.$$

En pratique, on l'utilise pour comparer la résolvante d'un opérateur \mathcal{L}_1 à celle d'un opérateur \mathcal{L}_2 dont on connaît le spectre. Pour $\mu \in \rho(\mathcal{L})$ (où $\rho(\mathcal{L})$ est l'ensemble résolvant de \mathcal{L}) et $\varepsilon > 0$ on montre des inégalités de type

$$\|(\mathcal{L}_1 - \mu)^{-1} - \mathcal{L}_2^{-1}\| \leq \varepsilon.$$

À l'aide du Théorème spectral 2.5 on montre que, si $\lambda_{k,j}$ ($k = 1, 2$) est la j -ième valeur propre de \mathcal{L}_j , on a :

$$|(\lambda_{1,j} - \mu)^{-1} - \lambda_{2,j}^{-1}| \leq \varepsilon.$$

2.2 L'approximation harmonique

Afin de mieux saisir la philosophie des idées développées par la suite, on se propose de rappeler brièvement une idée générale d'analyse semi-classique pour des opérateurs de Schrödinger avec potentiel électrique : l'approximation harmonique. On se place en dimension un, on trouvera plus de détails dans [CFKS87, Chap. 11], [DS99] ou [Sim83].

Soit $l(h)$ la réalisation auto-adjointe sur \mathbb{R} de

$$-h^2\partial_x^2 + v(x), \quad (2.3)$$

où v est une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty,$$

et admettant un unique minimum en 0 tel que

$$v(0) = 0, v''(0) > 0.$$

Faisons alors le changement d'échelle :

$$x = h^{1/2}z.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, on est ramené à étudier :

$$h(-\partial_z^2 + h^{-1}v(h^{1/2}z)).$$

On fait alors un développement de Taylor de v en 0, formellement l'opérateur s'écrit :

$$h\left(-\partial_z^2 + \frac{v''(0)}{2}z^2\right) + \sum_{j=3}^{+\infty} v_j z^j h^{j/2}. \quad (2.4)$$

Quand $h \rightarrow 0$ le terme dominant est l'oscillateur harmonique. Si l'on s'intéresse aux premières paires propres, on est amené à les chercher formellement sous la forme :

$$\lambda_n(h) = h \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{n,j} h^{j/2}, \quad \psi_n^h = \sum_{j=0}^{+\infty} \phi_{n,j} h^{j/2}. \quad (2.5)$$

En résolvant formellement l'équation aux valeurs propres on peut choisir pour $\beta_{n,0}$ la n -ième valeur propre de l'oscillateur harmonique à savoir

$$\beta_{n,0} = (2n+1) \sqrt{\frac{v''(0)}{2}}$$

et pour $\Phi_{n,0}$ une fonction propre associée. Par la suite, nous utiliserons ce type de construction lorsque le potentiel v admet un minimum singulier.

2.3 Opérateurs modèles

Dans la section précédente le terme dominant dans le développement (2.4) est l'oscillateur harmonique. Cet opérateur modèle détermine le premier terme du développement asymptotique (2.5). Dans les chapitres suivants, nous rencontrerons d'autres opérateurs modèles qui jouent un rôle similaire à celui de l'oscillateur harmonique. C'est ces derniers que nous nous proposons de décrire dans cette section.

2.3.1 Opérateur d'Airy

L'opérateur d'Airy est la réalisation de Dirichlet sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ de l'opérateur :

$$l_{\text{Ai}} = -\partial_x^2 + x.$$

Cet opérateur positif est à résolvante compacte et son spectre est une suite croissante de valeurs propres. On note Ai la fonction d'Airy de première espèce. Elle vérifie :

$$-\text{Ai}'' + x\text{Ai} = 0.$$

On note $z_{\text{Ai}}(n)$ le n -ième zéro de la fonction d'Airy Ai . Si (λ, ψ) est une paire propre de l_{Ai} alors :

$$-\psi'' + (x - \lambda)\psi = 0.$$

On en déduit qu'il existe une constante c telle que :

$$\psi(x) = c \text{Ai}(x - \lambda).$$

Par conséquent le spectre de l'opérateur d'Airy est

$$\mathfrak{S}(l_{\text{Ai}}) = \{-z_{\text{Ai}}(n), n \geq 1\}.$$

On notera $\text{A}(x) = \text{Ai}(x)$ la fonction d'Airy inversée et $z_{\text{A}}(n) = -z_{\text{Ai}}(n)$ ses zéros. Elle vérifie

$$-\text{A}'' - x\text{A} = 0,$$

et on définit l'opérateur d'Airy inversé comme la réalisation de Dirichlet sur $L^2(\mathbb{R}_-)$ de l'opérateur :

$$l_{\text{A}} = -\partial_x^2 - x.$$

On mentionne également la fonction d'Airy de seconde espèce Bi . Elle n'est pas dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ mais intervient lorsque l'on s'intéresse à la réalisation de Dirichlet de l_{Ai} sur des intervalles bornés (a, b) . On note $\text{B}(x) = \text{Bi}(-x)$ la fonction d'Airy de seconde espèce inversée.

On sait de plus que la fonction d'Airy de première espèce Ai est à décroissance exponentielle. On en profite pour définir les espaces de Sobolev de fonctions à décroissance exponentielle :

Définition 2.7 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit les espaces

$$H_{\text{exp}}^k(\mathcal{D}) = \{f \in L^2(\mathcal{D}) : \exists \gamma > 0, c > 0, e^{c|u|^\gamma} f \in H^k(\mathcal{D})\},$$

où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$) et est infini dans la direction u .

2.3.2 Opérateur modèle avec un potentiel en V non symétrique

Sur $L^2(\mathbb{R})$, on considère l'opérateur

$$l_s^{\text{mod}}(u; \partial_u) = -\partial_u^2 + v_s^{\text{mod}}(u), \quad \text{avec } v_s^{\text{mod}}(u) = \left(\frac{1}{1+s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u) + \frac{1}{1-s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \right) |u|. \quad (2.6)$$

Le paramètre s introduit une dissymétrie du potentiel effectif v_s^{mod} .

La différence avec l'opérateur étudié par Dauge et Raymond dans [DR12, Sec. 3] ou au Chapitre 4 réside dans le fait que cet opérateur n'est pas un opérateur d'Airy inversé avec condition de Dirichlet en $u = 0$. Le potentiel effectif v_s^{mod} est la combinaison d'un opérateur d'Airy inversé sur \mathbb{R}_- et d'un opérateur d'Airy sur \mathbb{R}_+ . La dissymétrie du potentiel effectif et les conditions de transmissions en $u = 0$ compliquent l'étude : nous n'avons pas une expression explicite des valeurs propres de l_s^{mod} en terme de zéros d'une fonction d'Airy.

L'allure du potentiel effectif v_s^{mod} permet d'affirmer (voir [RS78, Th. XIII.67]) que le spectre de l'opérateur l_s^{mod} est constitué d'une suite croissante de valeurs propres :

$$\mathfrak{S}(l_s^{\text{mod}}) = (\kappa_n(s))_{n \geq 1}$$

Remarque 2.8 Pour $s = 0$, l'opérateur modèle est $l_0^{\text{mod}} = -\partial_u + |u|$ et ses valeurs propres sont, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{cases} \kappa_{2n+1}(0) = z'_A(n+1), \\ \kappa_{2n+2}(0) = z_A(n+1). \end{cases}$$

Nous allons prouver que les valeurs propres $\kappa_n(s)$ sont simples. Avant cela, rappelons un lemme de type Sturm-Liouville :

Lemme 2.9 Soit $I = [u_0, \infty)$ ($I = (-\infty, u_0]$). Soit Ψ une fonction de classe C^2 à valeurs réelles et q une fonction positive sur I . On suppose que Ψ vérifie l'équation de Sturm-Liouville

$$\Psi''(u) = q(u)\Psi(u)$$

où $\Psi \in L^2(I)$ et $\Psi \neq 0$. Alors $\Psi(u)\Psi'(u) < 0$ pour tout $u \in I$ ($\Psi(u)\Psi'(u) > 0$ pour tout $u \in I$).

On en déduit la

Proposition 2.10 Pour tout $s \in (-1, 1)$ les valeurs propres de l_s^{mod} sont simples.

Preuve : Fixons $s \in (-1, 1)$ et appliquons le Lemme 2.9 en utilisant

$$q(u) = 2\pi^2 \left(\frac{1}{1+s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u) + \frac{1}{1-s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \right) |u| - \kappa_n(s)$$

et

$$I = \left[\frac{\kappa_n(s)}{2\pi^2} (1-s), \infty \right).$$

Si $\Psi_n(u, s)$ désigne la fonction propre associée à $\kappa_n(s)$ elle vérifie

$$-\partial_u^2 \Psi_n(u, s) + \left(2\pi^2 \left(\frac{1}{1+s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(u) + \frac{1}{1-s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \right) |u| - \kappa_n(s) \right) \Psi_n(u, s) = 0.$$

L'équation est d'ordre 2 donc la multiplicité de $\kappa_n(s)$ est au plus 2. Si les deux fonctions propres associées $\Psi_n^{[1]}, \Psi_n^{[2]}$ sont dans $L^2(I)$ elles vérifient $\Psi_n^{[1]'}(u, s) \Psi_n^{[1]}(u, s) < 0$ et $\Psi_n^{[2]'}(u, s) \Psi_n^{[2]}(u, s) < 0$ sur I . Ceci est impossible car on peut résoudre l'équation différentielle avec comme condition initiale en $u_0 = \frac{\kappa_n(s)}{2\pi^2}(1-s)$, $\Psi(u_0, s) = 1$ et $\Psi'(u_0, s) = 1$. On en déduit immédiatement que l'espace propre associé à $\kappa_n(s)$ est de dimension 1, ce qui conclut la démonstration. \square

Nous nous intéressons désormais à la régularité de ces valeurs propres. La famille $(l_s^{\text{mod}})_{s \in (-1,1)}$ est une famille analytique de type (A) (voir [Kat66]). Couplé avec la Proposition 2.10 on obtient la

Proposition 2.11 *Pour tout $n \geq 1$ les fonctions $(s \mapsto \kappa_n(s))$ sont analytiques sur $(-1, 1)$. De plus, il existe une fonction propre T_s^n associée à $\kappa_n(s)$, telle que les fonctions $(s \mapsto T_s^n \in \text{Dom}(l_s^{\text{mod}}))$ soient analytiques sur $(-1, 1)$.*

Caractérisation des valeurs propres $(\kappa_n(s))_{n \geq 1}$ On a la

Proposition 2.12 *Les valeurs propres $(\kappa_n(s))_{n \geq 1}$ vérifient l'équation implicite suivante en (s, κ) :*

$$\sqrt[3]{1+s} A(-(1+s)^{2/3} \kappa) A'(-(1-s)^{2/3} \kappa) + \sqrt[3]{1-s} A(-(1-s)^{2/3} \kappa) A'(-(1+s)^{2/3} \kappa) = 0, \quad (2.7)$$

Preuve : Soit (κ, Ψ) une paire propre de l_s^{mod} . On définit :

$$\Psi^\pm = \Psi \mathbb{1}_{\mathbb{R}_\pm}.$$

Afin de résoudre l'équation

$$l_s^{\text{mod}} \Psi = \kappa \Psi, \quad (2.8)$$

on considère cette équation pour $u < 0$ et $u > 0$. Pour $u < 0$ l'équation (2.8) s'écrit

$$\left(-\partial_u^2 - \frac{1}{1+s} u - \kappa \right) \Psi^- = 0.$$

C'est une équation d'Airy inversée. Pour des raisons d'intégrabilité la fonction d'Airy de seconde espèce n'apparaît pas dans l'expression de Ψ^- et on a :

$$\Psi^-(u) = \alpha^- A((1+s)^{-1/3}(u + \kappa(1+s))), \quad (2.9)$$

avec $\alpha^- \in \mathbb{R}$.

Pour $u > 0$ la même démarche donne :

$$\Psi^+(u) = \alpha^+ \text{Ai}((1-s)^{-1/3}(u - \kappa(1-s))), \quad (2.10)$$

avec $\alpha^+ \in \mathbb{R}$.

La fonction propre Ψ est dans le domaine $\text{Dom}(I_s^{\text{mod}})$ de l'opérateur modèle I_s^{mod} . En particulier $\Psi \in H^2(\mathbb{R})$ et satisfait les conditions de transmissions :

$$\begin{cases} \Psi^-(0) &= \Psi^+(0), \\ \partial_u \Psi^-(0) &= \partial_u \Psi^+(0), \end{cases}$$

qui deviennent

$$\begin{cases} \alpha^- \mathbf{A}((1+s)^{2/3} \kappa) - \alpha^+ \mathbf{A}((1-s)^{2/3} \kappa) &= 0, \\ \alpha^- (1-s)^{1/3} \mathbf{A}'(-(1+s)^{2/3} \kappa) + \alpha^+ (1+s)^{1/3} \mathbf{A}'(-(1-s)^{2/3} \kappa) &= 0. \end{cases}$$

Les $\kappa_n(s)$ sont les valeurs pour lesquelles le système est lié et on obtient l'équation implicite (2.7). \square

Grâce aux expressions explicites (2.9) et (2.10) ainsi qu'aux propriétés de la fonction d'Airy de première espèce on a la

Proposition 2.13 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction propre \mathbb{T}_s^n appartient à $H_{\text{exp}}^2(\mathbb{R})$.*

Afin de comprendre la régularité de $(s \mapsto \kappa_n(s))$ près de $s = 1$, on fait le changement de variable $\sigma = (1-s)^{1/3}$ dans l'équation (2.7). Elle devient :

$$(2 - \sigma^3)^{1/3} \mathbf{A}((2 - \sigma^3)^{2/3} \kappa) \mathbf{A}'(\sigma^2 \kappa) + \sigma \mathbf{A}(\sigma^2 \kappa) \mathbf{A}'((2 - \sigma^3)^{2/3} \kappa) = 0,$$

qui est régulière près de $\sigma = 0$.

La même étude pour $s > 1$ donne l'équation implicite

$$4^{1/6} \mathbf{A}\left(\frac{4}{(s+1)^{4/3}} \kappa\right) \mathbf{A}'\left(\left(\frac{4(s-1)}{(s+1)^2}\right)^{2/3} \kappa\right) + (1+s)^{1/3} (s-1)^{1/3} \mathbf{A}\left(\left(\frac{4(s-1)}{(s+1)^2}\right)^{2/3} \kappa\right) \mathbf{A}'\left(\frac{4}{(s+1)^{4/3}} \kappa\right) = 0$$

qui montre le même comportement pour $\kappa_n(s)$ quand $s > 1$. On remarque que κ_n est continue en $s = 1$ avec $\kappa_n(1) = 2^{-2/3} z_A(n)$. Néanmoins κ_n a une singularité cubique à gauche et à droite de $s = 1$. À l'aide des équations implicite (à la fois pour $s < 1$ et $s > 1$) on a représenté en Figure 2.3.2 la dépendance en s de κ_n pour $n = 1, 2, 3$. On constate la singularité cubique en $s = 1$.

2.4 Stratégie des preuves et organisation de la thèse

Dans cette section, on se propose d'expliquer les principes qui seront utilisés dans les preuves des Théorèmes 1.8, 1.11 et 1.19.

2.4.1 Les opérateurs de Bessel

On s'attarde sur quelques propriétés des opérateurs de Bessel qui interviendront dans la construction d'opérateurs 1D (voir [AS66] pour plus de détails). En particulier, dans les Chapitres 4 et 5, nous aurons besoin de comprendre le spectre des opérateurs de Bessel. Soient $0 \leq a < 1$, on considère sur

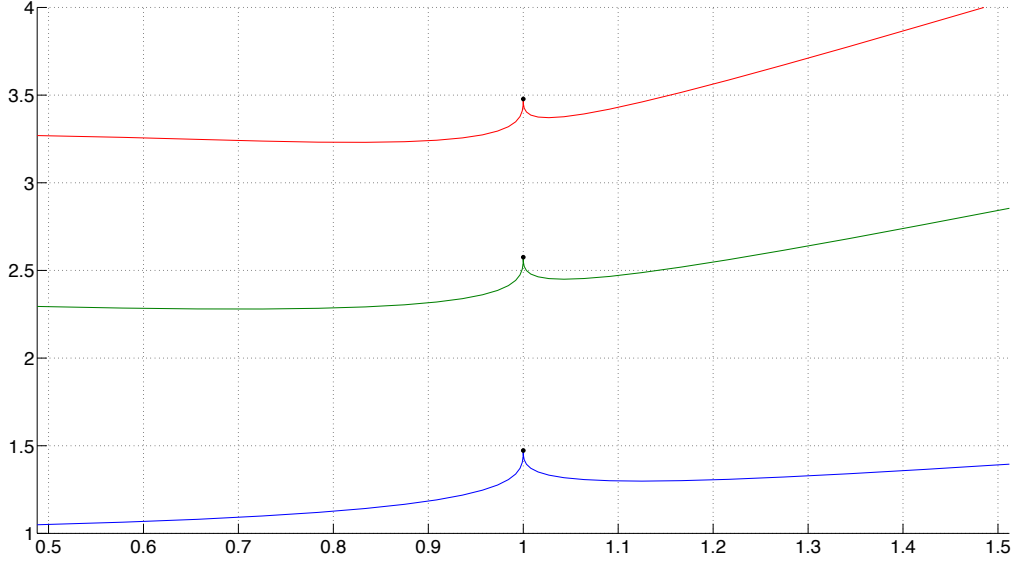


FIG. 2.1 – Cette figure représente κ_n en fonction de s pour $n = 1, 2, 3$. Les points noirs représentent les valeurs $2^{-2/3}z_A(n)$ pour $n = 1, 2, 3$.

$L^2((a, 1), y dy)$ la réalisation de Dirichlet en $y = 1$ de l'opérateur :

$$l_{\text{Bess}}^{[m]} = -\frac{1}{y} \partial_y (y \partial_y) + \frac{m^2}{y^2}.$$

Cet opérateur positif est à résolvante compacte et son spectre est une suite croissante de valeurs propres. On note J_m et Y_m les fonctions de Bessel d'ordre m de première et seconde espèce. Elles vérifient :

$$y^2 J_m'' + y J_m' + (y^2 - m^2) J_m = 0, \quad y^2 Y_m'' + y Y_m' + (y^2 - m^2) Y_m = 0.$$

Si (λ, ψ) est une paire propre de $l_{\text{Bess}}^{[m]}$ alors :

$$y^2 \psi'' + y \psi' + (\lambda y^2 - m^2) \psi = 0$$

On en déduit l'existence de deux constantes c et d telles que :

$$\psi(y) = c J_m(\sqrt{\lambda} x) + d Y_m(\sqrt{\lambda} x).$$

Lorsque $a = 0$, pour que ψ soit dans le domaine de $l_{\text{Bess}}^{[m]}$ on a nécessairement $d = 0$. On note $j_{m,n}$ le n -ième zéro de la m -ième fonction de Bessel de première espèce. Si $a = 0$ le spectre du m -ième opérateur de Bessel est $\{j_{m,n}^2 : n \geq 1\}$.

2.4.2 Approximation de type Born-Oppenheimer

Soit \mathcal{U} un domaine ouvert de \mathbb{R}^2 , comme expliqué aux Sections 1.2, 1.3 et 1.4, après quelques transformations géométriques, les opérateurs qui interviennent dans les problèmes étudiés sont de la

forme :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)(x, y; \partial_x, \partial_y) = -h^2 \partial_x^2 + l_{\mathcal{U},x}^{\text{trans}}(y; \partial_y), \quad (2.11)$$

où $l_{\mathcal{U},x}^{\text{trans}}$ est un opérateur auto-adjoint dans la variable transverse y . Soit dx $m(dy)$ une mesure sur \mathcal{U} , on s'intéresse à la réalisation de Dirichlet (sur tout ou partie du bord $\partial\mathcal{U}$ de l'ouvert \mathcal{U}) de $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$. Pour chaque problème, les opérateurs présentés en (1.1), (1.13) et (1.23) ont bien l'allure de l'opérateur (2.11). On note (quand elle existe) $\lambda_{n,\mathcal{U}}(h)$ la n -ième valeur propre de l'opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$. Notre objectif est de comprendre le comportement des plus petites paires propres de l'opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$, opérateur partiellement semi-classique en la variable x , dans le régime $h \rightarrow 0$.

Afin de mieux appréhender l'analyse semi-classique de l'opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$ on dérive un opérateur en dimension un de l'expression (2.11). Pour cela, on considère à x fixé l'ensemble de réels :

$$I_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathcal{U}\}.$$

Dans les cas étudiés I_x est un intervalle borné. On regarde l'opérateur transverse $l_{\mathcal{U},x}^{\text{trans}}$ sur $L^2(I_x, m(dy))$ avec conditions aux limites issues du problème en dimension deux (par exemple, si $(x, \inf_y I_x) \in \partial\mathcal{U}$ est un point où il y a une condition de Dirichlet pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$ alors cette condition de Dirichlet se transmet en $\inf_y I_x$ pour l'opérateur transverse $l_{\mathcal{U},x}^{\text{trans}}$). Supposons que l'opérateur transverse $l_{\mathcal{U},x}^{\text{trans}}$ possède une plus petite valeur propre notée $v_{\mathcal{U}}(x)$. D'après le principe du min-max on a, au sens des formes quadratiques, l'inégalité suivante :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h) \geq -h^2 \partial_x^2 + v_{\mathcal{U}}(x). \quad (2.12)$$

Notons $J = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathcal{U}\}$. Grâce à la minoration (2.12) il semble judicieux, pour comprendre l'opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$, de s'intéresser sur $L^2(J)$ à l'opérateur en dimension un :

$$l_{\mathcal{U}}(h) = -h^2 \partial_x^2 + v_{\mathcal{U}}(x). \quad (2.13)$$

Cet opérateur est en fait construit dans l'esprit de l'approximation de Born-Oppenheimer (voir [BO27, CDS81, KMSW92, Mar89, Mar07, Jec14]). Cet opérateur 1D est un opérateur de Schrödinger semi-classique avec potentiel électrique. En fait, les développements asymptotiques de ses valeurs propres donnent la structure des premiers termes des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$.

On se restreint au cas où le potentiel effectif $v_{\mathcal{U}}$ admet un unique minimum global. Lorsque $h \rightarrow 0$, on sait que le minimum du potentiel effectif $v_{\mathcal{U}}$ dicte le comportement des plus petites paires propres de l'opérateur $l_{\mathcal{U}}(h)$. Dans les cas étudiés ici, le potentiel n'est pas dérivable en son minimum : on ne peut pas appliquer *stricto sensu* la méthode d'approximation harmonique décrite en Section 2.2. Toutefois, lorsque le potentiel effectif $v_{\mathcal{U}}$ admet un développement asymptotique à gauche et à droite près du point de minimum, on peut considérer des opérateurs modèles associés issus des premiers termes de ces développements.

Par exemple, lorsque le potentiel effectif $v_{\mathcal{U}}$ peut être approché linéairement au point de minimum, on obtient alors le développement suivant :

$$v_{\mathcal{U}}(x) \underset{x \rightarrow 0^\pm}{=} v_{\mathcal{U}}(0) + v'_{\mathcal{U}}(0^\pm)x + \mathcal{O}(x^2).$$

	Version semi-classique	Born-Oppenheimer	Opérateur tangent	Opérateur modèle
Notation	$\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$	$l_{\text{Tri}(s)}(h)$	$l_s^{\text{tan}}(h)$	l_s^{mod}
Expression	$-h^2\partial_x^2 - \partial_y^2$	$-h^2\partial_x^2 + v_{\text{Tri}(s)}(x),$ $v_{\text{Tri}(s)}(x) = \begin{cases} \frac{(1+s)^2}{(x+1+s)^2}\pi^2, x < 0, \\ \frac{(1-s)^2}{(x-(1-s))^2}\pi^2, 0 < x. \end{cases}$	$-h^2\partial_x^2 + v_s^{\text{tan}}(x),$ $v_s^{\text{tan}}(x) = \pi^2 + \begin{cases} \frac{2\pi^2}{1+s} x , x < 0, \\ \frac{2\pi^2}{1-s} x , x > 0. \end{cases}$	$-\partial_x^2 + v_s^{\text{mod}}(x)$ $v_s^{\text{mod}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+s} x , x < 0, \\ \frac{1}{1-s} x , x > 0. \end{cases}$
Domaine	$\text{Tri}(s)$	$(-1-s, 1-s)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Forme quadratique	$\mathcal{Q}_{\text{Tri}(s)}(h)$	$q_{\text{Tri}(s)}(h)$	_____	_____
Valeurs propres $n \geq 1$	$\lambda_{n, \text{Tri}(s)}(h)$	$\hat{\lambda}_{n, \text{Tri}(s)}(h)$	$\pi^2 + (2\pi^2)^{2/3}\kappa_n(s)h^{2/3}$	$\kappa_n(s)$

TAB. 2.1 – Récapitulatif des opérateurs pour le problème des triangles asymptotiquement plats.

	Version semi-classique	Born-Oppenheimer	Opérateur tangent	Opérateur modèle
Notation	$\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$	$l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$	$l_{\text{Mer}}^{[m], \text{tan}}(h)$	l_A
Expression	$-h^2\partial_x^2 - \frac{1}{y}\partial_y(y\partial_y) + \frac{m^2}{y^2}$	$-h^2\partial_x^2 + v_{\text{Mer}}^{[m]}(x),$ $v_{\text{Mer}}^{[m]}(x) = \frac{j_{m,1}^2}{(x+1)^2}$	$-h^2\partial_x^2 + j_{m,1}^2 - 2j_{m,1}^2x$	$-\partial_x^2 - x$
Domaine	Mer muni du poids $ydxdy$	$(-1, 0)$	\mathbb{R}_-	\mathbb{R}_-
Forme quadratique	$\mathcal{Q}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$	$q_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$	_____	_____
Valeurs propres $n \geq 1$	$\lambda_{n, \text{Mer}}^{[m]}(h)$	$\hat{\lambda}_{n, \text{Mer}}^{[m]}(h)$	$j_{m,1}^2 + 2(j_{m,1}^{2/3})^2 z_A(n)h^{2/3}$	$z_A(n)$

TAB. 2.2 – Récapitulatif des opérateurs pour le problème des cônes de petite ouverture.

Si on approche $l_{\mathcal{U}}(h)$ par son opérateur tangent en 0 on a :

$$l_{\mathcal{U}}^{\text{tan}}(h) = -h^2\partial_x^2 + v_{\mathcal{U}}(0) + \begin{cases} v'_{\mathcal{U}}(0^-)x, x < 0 \\ v'_{\mathcal{U}}(0^+)x, x > 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Cet opérateur tangent est étroitement lié à l'opérateur d'Airy. Ces opérateurs modèles jouent un rôle similaire à celui joué par l'oscillateur harmonique lorsque le potentiel effectif est de classe \mathcal{C}^2 en son minimum.

Tableaux illustratifs des approximations de type Born-Oppenheimer On complète ici les Tables 1.1, 1.3 et 1.4 en y explicitant leurs différentes approximations de type Born-Oppenheimer et les modèles tangents associés. La Table 2.1 est celle liée au problème des triangles asymptotiquement plats, la Table 2.2 correspond aux cônes de petite ouverture et la Table 2.3 au problème de la couche conique.

	Version semi-classique	Born-Oppenheimer
Notation	$\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$	$l_{\text{Gui}}(h)$
Expression	$-h^2\partial_x^2 - \frac{1}{y}\partial_y(y\partial_y)$	$-h^2\partial_x^2 + v_{\text{Gui}}(x)$ $v_{\text{Gui}}(x) = \begin{cases} \frac{j_{m,1}^2}{(x+\pi\sqrt{2})^2}, & -\pi\sqrt{2} < x < 0, \\ \text{voir Section 5.1 pour } x > 0. \end{cases}$
Domaine	Gui muni du poids $y dx dy$	$(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$
Forme quadratique	$\mathcal{Q}_{\text{Gui}}(h)$	_____
Valeurs propres $n \geq 1$	$\lambda_{n,\text{Gui}}(h)$	$\hat{\lambda}_{n,\text{Gui}}(h)$

TAB. 2.3 – Récapitulatif des opérateurs pour le problème de la couche conique.

2.4.3 Estimées de localisation d'Agmon

On s'intéresse encore à $l_{\mathcal{U}}(h)$ défini en (2.13). On note $\text{Dom}(l_{\mathcal{U}}(h))$ son domaine et $q_{\mathcal{U}}(h)$ sa forme quadratique associée. Si $\text{Dom}(q_{\mathcal{U}}(h))$ désigne le domaine de forme de l'opérateur $l_{\mathcal{U}}(h)$, pour tout $\psi \in \text{Dom}(q_{\mathcal{U}}(h))$ on a :

$$q_{\mathcal{U}}(h)(\psi) = \int_J h^2 |\partial_x \psi|^2 + v_{\mathcal{U}}(x) |\psi|^2 dx.$$

On énonce la formule d'IMS suivante qui permet d'obtenir une localisation des fonctions propres en multipliant par une exponentielle (voir [Hel88]).

Proposition 2.14 *Soit $\psi \in \text{Dom}(l_{\mathcal{U}}(h))$ et Φ une fonction lipschitzienne sur \mathbb{R} alors :*

$$q_{\mathcal{U}}(h)(e^{\Phi/h}\psi) = \langle e^{2\Phi/h} l_{\mathcal{U}}(h)\psi, \psi \rangle_{L^2(J)} + \|\phi' e^{\Phi/h}\psi\|_{L^2(J)}^2.$$

On remarque que si ψ est une valeur propre de $l_{\mathcal{U}}(h)$ l'identité de la Proposition 2.14 devient

$$q_h(e^{\Phi/h}\psi) = \lambda \|\psi\|_{L^2(J)}^2 + \|\phi' e^{\Phi/h}\psi\|_{L^2(J)}^2.$$

Ce type d'identité est très utile pour localiser les premières fonctions propres de $l_{\mathcal{U}}(h)$. La preuve de cette proposition repose sur une intégration par partie du commutateur de $e^{\Phi/h}$ et $l_{\mathcal{U}}(h)$. Ce résultat est étroitement lié à la Proposition 2.4 où l'on aurait remplacé la partition de l'unité par un poids exponentiel.

Afin d'obtenir une simplicité asymptotique pour les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$ nous avons besoin de comprendre où se localisent ses fonctions propres. Nous utiliserons des estimées de localisation d'Agmon (voir [Agm82, Agm85]) dans le cadre semi-classique (voir [DS99, Chapitre 6] et [HS84]). Grâce à l'équation (2.12) les estimées pour l'approximation $l_{\mathcal{U}}(h)$ se transmettent à $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$. D'après le Proposition 2.14, si ψ est une fonction propre de $l_{\mathcal{U}}(h)$ associée à la valeur propre λ cette

équation devient :

$$\int_J h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 + (v_{\mathcal{U}}(x) - \lambda - \Phi'(x)^2) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx = 0.$$

Ensuite, dans une zone d'énergie fixée, on choisit une bonne fonction Φ comme sous-solution de l'équation eikonale

$$v_{\mathcal{U}}(x) - \lambda - \Phi'(x)^2 = 0.$$

En particulier, dans $L^2(J)$, on va pouvoir contrôler la norme de $e^{\Phi/h} \psi$ par celle de ψ . On obtient selon la fonction Φ , une échelle de localisation (qui dépend du paramètre semi-classique h) pour les fonctions propres de $l_{\mathcal{U}}(h)$. Si le potentiel $v_{\mathcal{U}}$ admet un unique minimum non dégénéré les premières fonctions propres sont localisées dans un voisinage d'ordre h autour du point de minimum. En revanche, lorsque le minimum n'est plus quadratique mais linéaire la taille de ce voisinage est d'ordre $h^{2/3}$ autour du point de minimum (voir Figure 2.2). Les estimées de localisation d'Agmon justifient la décroissance exponentielle des fonctions propres en dehors d'un voisinage du minimum.

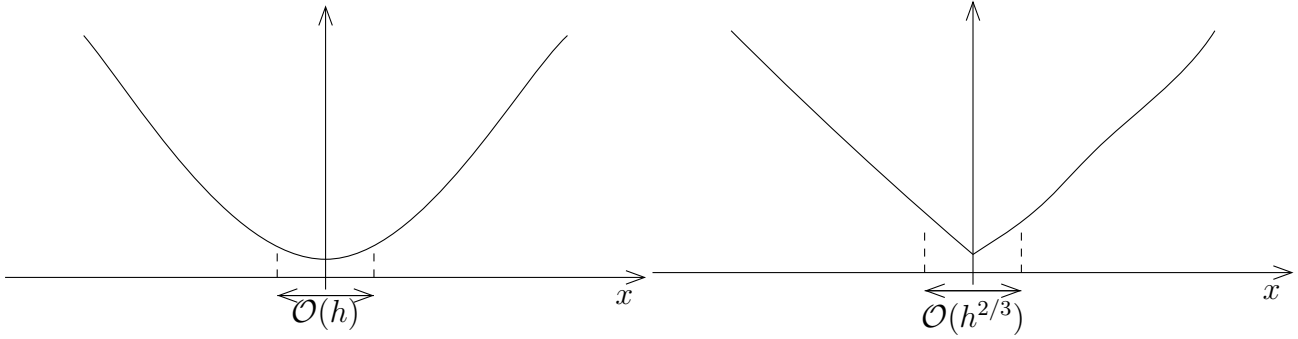


FIG. 2.2 – Échelles de localisations des fonctions propres selon le type de minimum du potentiel $v_{\mathcal{U}}$.

2.4.4 Construction de quasimodes

Le but de cette étape est de construire des quasimodes suffisamment précis pour $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$. Plus exactement on veut appliquer le Théorème spectral 2.5 et pour cela on cherche des couples (λ, ψ) tels que

$$\|(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h) - \lambda)\psi\| \leq \varepsilon \|\psi\|,$$

avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

On construit de tels quasimodes à l'aide d'un procédé d'homogénéisation comportant plusieurs échelles de localisation. En suivant l'idée de l'approximation harmonique présentée en Section 2.2 on développe l'opérateur en séries formelles et on cherche des paires propres vérifiant une certaine structure. Le choix des échelles est assez compliqué et est en partie guidé par l'échelle sous-jacente au problème de type Born-Oppenheimer associé.

À cette étape on prouve qu'il existe une paire propre de $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}(h)$ proche du n -ième quasimode construit *via* l'Ansatz. On doit encore prouver que la valeur propre associée est bien la n -ième valeur propre.

2.4.5 Réduction à un opérateur tensoriel

Nous utilisons ici une projection de Feshbach (voir [Fes58, Fes62]) afin d'établir la simplicité asymptotique des valeurs propres. On en fait ici une présentation très formelle afin d'en dégager les idées essentielles. Le but est de comparer la forme quadratique $Q_U(h)$ de $\mathcal{L}_U(h)$ à celle de l'opérateur tangent défini en (2.14), que l'on note $q_U^{\text{tan}}(h)$.

On fixe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et on note simplement $\lambda_1(h), \dots, \lambda_{N_0}(h)$ les N_0 premières valeurs propres de $\mathcal{L}_U(h)$ et on note $\psi_1, \dots, \psi_{N_0}$ des fonctions propres normalisées associées telles que $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$ si $i \neq j$. On définit :

$$\mathcal{S}_{N_0}(h) = \text{vect}(\psi_1, \dots, \psi_{N_0}).$$

Par définition les fonctions ψ_i ($i = 1, \dots, N_0$) sont orthogonale dans $L^2(\mathcal{U}, dx m(dy))$ mais aussi pour la forme quadratique $Q_U(h)$. Pour $\psi \in \mathcal{S}_{N_0}(h)$, grâce à l'équation (2.12), on a :

$$\int_{\mathcal{U}} h^2 |\partial_x \psi|^2 + v_U(x) |\psi|^2 dx m(dy) \leq Q_U(h)(\psi) \leq \lambda_{N_0}(h) \|\psi\|^2.$$

Dans plusieurs cas étudiés v_U sera une fonction convexe, par conséquent on a :

$$Q_U^{\text{tan}}(h)(\psi) = \int_{\mathcal{U}} h^2 |\partial_x \psi|^2 + v'_U(0^-) x |\psi|^2 \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} + v'_U(0^+) x |\psi|^2 \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} dx m(dy) \leq (\lambda_{N_0}(h) - v_U(0)) \|\psi\|^2 \quad (2.15)$$

Nous aimerions appliquer le principe du min-max 2.1 ; toutefois, comme ψ est à deux variables, les espaces variationnels ne s'y prêtent pas. On introduit donc le projecteur de Feshbach Π tel que :

$$\Pi \psi = \langle \psi, \mathbf{t}_x \rangle_y \mathbf{t}_x \quad (2.16)$$

où \mathbf{t}_x est une fonction propre normalisée de l'opérateur transverse $l_{U,x}^{\text{trans}}(y; \partial_y)$ associée à $v_U(x)$. À l'aide de (2.15) on obtient :

$$Q_U^{\text{tan}}(h)(\Pi \psi) \leq (\lambda_{N_0}(h) - v_U(0) + \varepsilon(h)) \|\Pi \psi\|^2$$

où $\varepsilon(h)$ est contrôlé à l'aide des estimées d'Agmon présentées en sous-Section 2.4.3. Si $\chi(x)$ est une fonction troncature choisie convenablement, on se ramène ensuite au problème en dimension un en considérant des fonctions tests de la forme $\chi \langle \psi, \mathbf{t}_x \rangle_y$, ce qui donne :

$$q_U^{\text{tan}}(h)(\chi \langle \psi, \mathbf{t}_x \rangle_y) \leq (\lambda_{N_0}(h) - v_U(0) + \varepsilon(h)) \|\Pi \psi\|^2.$$

On conclut en appliquant le principe du min-max présenté en Proposition 2.1.

2.4.6 Organisation de la thèse

La Partie II est consacrée à l'étude des différentes approximations de type Born-Oppenheimer issues des opérateurs introduits en (1.1), (1.13) et (1.23). On y prouve également des estimées de localisation d'Agmon pour les opérateurs 1D considérés.

La Partie III est consacrée à la preuve des Théorèmes 1.8 et 1.9. Le Chapitre 6 est dédié à une construction de quasimodes alors que le Chapitre 7 utilise une méthode de Feshbach afin d'obtenir le résultat. Au Chapitre 8, on présente des résultats numériques. On conclut cette partie par les Chapitres

9 et 10 qui sont dédiés à un phénomène d'effet tunnel dans des géométries proches de celles du triangle, on y prouve notamment le Théorème 1.9.

La Partie IV est essentiellement la preuve du Théorème 1.11. Elle a la même structure que la précédente partie : le Chapitre 11 est une construction de quasimodes et le Chapitre 12 permet d'obtenir une simplicité asymptotique *via* une projection de Feshbach. On conclut par le Chapitre 13 et des résultats numériques associés au problème du cône.

La Partie V traite du problème de la couche conique. Le Théorème 1.18 est prouvé dans le Chapitre 14, ce résultat n'étant pas de nature semi-classique les techniques employés sont différentes. En revanche le Chapitre 15 est voué à un résultat de nature semi-classique : la preuve du Théorème 1.19. On conclut cette partie par le Chapitre 16 qui illustre numériquement le problème.

La Partie VI présente de potentielles perspectives de recherche, dans la continuité des travaux présentés, alors que la Partie VII est constituée des annexes.

Deuxième partie

Approximations unidimensionnelles de type Born-Oppenheimer

Chapitre 3

Approximation 1D des triangles asymptotiquement plats

Dans ce chapitre, on étudie l'approximation de Born-Oppenheimer de l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ défini en (1.1). On rappelle qu'il est défini sur $L^2(\text{Tri}(s))$ et que son expression est

$$\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h) = -h^2 \partial_x^2 - \partial_y^2.$$

En appliquant la procédure décrite en sous-Section 2.4.2, on construit l'opérateur $l_{\text{Tri}(s)}(h)$, défini sur $L^2(-1-s, 1-s)$, par :

$$l_{\text{Tri}(s)}(h) = -h^2 \partial_x^2 + v_{\text{Tri}(s)}(x), \quad \text{avec } v_{\text{Tri}(s)}(x) = \begin{cases} \frac{(1+s)^2}{(x+1+s)^2} \pi^2, & \text{pour } -1-s < x < 0, \\ \frac{(1-s)^2}{(x-(1-s))^2} \pi^2, & \text{pour } 0 < x < 1-s. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans la limite $h \rightarrow 0$, on sait que le minimum du potentiel effectif $v_{\text{Tri}(s)}$ dirige le comportement des paires propres associées aux plus petites valeurs propres de $l_{\text{Tri}(s)}(h)$. Ce minimum est atteint en $x = 0$ donc on approche le potentiel effectif $v_{\text{Tri}(s)}$ par ses tangentes à gauche et à droite. On obtient l'opérateur tangent

$$l_s^{\text{tan}}(h) = -h^2 \partial_x^2 + v_s^{\text{tan}}(x), \quad \text{avec } v_s^{\text{tan}} = \pi^2 + 2\pi^2 \left(\frac{1}{1+s} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x) + \frac{1}{1-s} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \right) |x|. \quad (3.2)$$

Afin de se ramener à une forme canonique on fait le changement d'échelle $x = \frac{h^{2/3}}{(2\pi^2)^{1/3}} u$ et on a :

$$l_s^{\text{tan}}(h)(x; \partial_x) \sim \pi^2 + (2\pi^2)^{2/3} h^{2/3} l_s^{\text{mod}}(u; \partial_u), \quad (3.3)$$

où l'opérateur modèle l_s^{mod} , sur $L^2(\mathbb{R})$, est défini en (2.6).

Le changement d'échelle (3.3) réduit la compréhension de l'opérateur tangent $l_s^{\text{tan}}(h)$ à l'étude de l'opérateur modèle l_s^{mod} , indépendant du petit paramètre h .

Le but de ce chapitre est de donner un développement asymptotique à tout ordre, dans le régime semi-classique $h \rightarrow 0$, des premières valeurs propres de $l_{\text{Tri}(s)}(h)$. On prouve la

Proposition 3.1 *Soit $s_0 \in (0, 1)$. Pour tout $s \in [-s_0, s_0]$ et tout $h > 0$, les valeurs propres de $l_{\text{Tri}(s)}(h)$,*

notées $\hat{\lambda}_{n, \text{Tri}(s)}(h)$, se développent comme :

$$\hat{\lambda}_{n, \text{Tri}(s)}(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j \geq 0} \hat{\beta}_{j,n}(s) h^{2j/3},$$

uniformément en s . Les fonctions $(s \mapsto \hat{\beta}_{j,n}(s))$ sont analytiques sur $(-1, 1)$ et on a : $\hat{\beta}_{0,n}(s) = \pi^2$ et $\hat{\beta}_{1,n}(s) = (2\pi^2)^{2/3} \kappa_n(s)$, où les $\kappa_n(s)$ sont les valeurs propres de l'opérateur modèle défini en 2.6.

3.1 Construction de quasimodes

Pour démontrer la Proposition 3.1 nous allons dans un premier temps construire des quasimodes pour l'opérateur $l_{\text{Tri}(s)}(h)$.

Proposition 3.2 *Pour tout $s_0 \in (0, 1)$ et tout $N_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $s \in [-s_0, s_0]$ et $h \in (0, h_0)$ on ait :*

$$\text{dist}(\mathfrak{S}(l_{\text{Tri}(s)}(h)), \pi^2 + h^{2/3}(2\pi^2)^{2/3}\kappa_n(s)) \leq Ch^{4/3}, \quad n = 1, \dots, N_0.$$

De plus C et h_0 ne dépendent pas de s .

Preuve : On effectue le changement d'échelle $u = h^{-2/3}x$. On cherche des quasimodes $(\beta_{s,h}, \psi_{s,h})$ sous la forme de séries

$$\beta_{s,h} \sim \sum_{j \geq 0} \hat{\beta}_j(s) h^{2j/3} \quad \text{et} \quad \psi_{s,h} \sim \sum_{j \geq 0} \Psi_{s,j}(u) h^{2j/3}$$

pour résoudre $l_{\text{Tri}(s)}(h)\psi_{s,h} = \beta_{s,h}\psi_{s,h}$ au sens des séries formelles. Un développement de Taylor en $x = 0$ du potentiel effectif $v_{\text{Tri}(s)}$ donne :

$$l_{\text{Tri}(s)}(h)(h^{2/3}u; h^{-2/3}\partial_u) \sim \pi^2 + h^{2/3} (2\pi^2)^{2/3} l_s^{\text{mod}}((2\pi^2)^{1/3}u; (2\pi^2)^{-1/3}\partial_u) + \sum_{j \geq 2} v_{\text{Tri}(s)}^{[j]}(u) u^j h^{2j/3}, \quad (3.4)$$

avec

$$v_{\text{Tri}(s)}^{[j]} = \frac{v_{\text{Tri}(s)}^{(j)}(0^-)}{j!} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(u) + \frac{v_{\text{Tri}(s)}^{(j)}(0^+)}{j!} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u),$$

$v_{\text{Tri}(s)}^{(j)}(0^-)$ et $v_{\text{Tri}(s)}^{(j)}(0^+)$ étant respectivement les j -ième dérivées à gauche et à droite de $v_{\text{Tri}(s)}$. On identifie ensuite chaque terme dans le développement. Ainsi, on obtient $\hat{\beta}_0(s) = \pi^2$ et en collectant les termes d'ordre $h^{2/3}$ on a :

$$\left(l_s^{\text{mod}}((2\pi^2)^{1/3}u; (2\pi^2)^{-1/3}\partial_u) - (2\pi^2)^{-2/3} \hat{\beta}_1(s) \right) \Psi_{s,0} = 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir $\hat{\beta}_1(s) = (2\pi^2)^{2/3} \kappa_n(s)$ et $\Psi_{s,0} = \mathbb{T}_s^n((2\pi^2)^{1/3}u)$. Pour $J \geq 0$, les termes d'ordre $h^{2J/3}$ donnent :

$$\left(l_s^{\text{mod}}((2\pi^2)^{1/3}u; (2\pi^2)^{-1/3}\partial_u) - (2\pi^2)^{-2/3}\hat{\beta}_1(s) \right) \Psi_{s,J-1} = (2\pi^2)^{-2/3} \sum_{j=2}^J (\hat{\beta}_j(s) - v_{\text{Tri}(s)}^{[j]}u^j) \Psi_{s,J-j}. \quad (3.5)$$

Grâce à l'alternative de Fredholm, il existe une solution $\Psi_{s,J-1}$ si et seulement si :

$$\hat{\beta}_J(s) = \langle v_{\text{Tri}(s)}^{[J]}u^J \Psi_{s,0}, \Psi_{s,0} \rangle + \sum_{j=2}^J \langle (\hat{\beta}_j(s) - v_{\text{Tri}(s)}^{[j]}u^j) \Psi_{s,J-k}, \Psi_{s,0} \rangle. \quad (3.6)$$

$\hat{\beta}_J(s)$ et $\Psi_{s,J-1}$ sont construits. Grâce à (3.6), $\hat{\beta}_J(s)$ est analytique sur $(-1, 1)$. $\Psi_{s,J-1}$ l'est aussi : on utilise une méthode de Grushin en introduisant l'opérateur $\mathfrak{L}_s^{\text{mod}}$ défini sur $\text{Dom}(l_s^{\text{mod}}) \times \mathbb{C}$ par

$$\mathfrak{L}_s^{\text{mod}} = \begin{bmatrix} \left(l_s^{\text{mod}}((2\pi^2)^{1/3}u; (2\pi^2)^{-1/3}\partial_u) - (2\pi^2)^{-2/3}\hat{\beta}_1(s) \right) & \Psi_{s,0} \\ \langle \cdot, \Psi_{s,0} \rangle & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{L}_s^{\text{mod}}$ est analytique en s et inversible sur $(-1, 1)$. L'équation (3.5) se réécrit comme

$$\mathfrak{L}_s^{\text{mod}} \begin{bmatrix} \Psi_{s,J-1} \\ 0 \end{bmatrix} = (2\pi^2)^{-2/3} \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^J (\hat{\beta}_j(s) - v_{\text{Tri}(s)}^{[j]}u^j) \Psi_{s,J-j} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On inverse le système et on obtient une expression analytique de $\Psi_{s,J-1}$. Pour conclure on considère une fonction troncature régulière χ vérifiant :

$$\chi(x) = 1 \quad \text{pour } x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \quad \text{et} \quad \chi(x) = 0 \quad \text{pour } |x| \geq \frac{1}{2}.$$

On définit ensuite

$$\chi_s(x) = \chi\left(\frac{x}{1-s}\right). \quad (3.7)$$

Pour $J \geq 0$ on construit le quasimode $(\beta_{s,h}^{[J]}, \psi_{s,h}^{[J]})$ avec :

$$\beta_{s,h}^{[J]} = \sum_{j=0}^J \hat{\beta}_j(s) h^{2j/3} \quad \text{et} \quad \psi_{s,h}^{[J]}(x) = \chi_s(x) \sum_{j=0}^J \Psi_{s,j}(h^{-2/3}x) h^{2j/3}.$$

La fonction troncature permet à $\psi_{s,h}^{[J]}$ d'être dans le domaine de l'opérateur $l_{\text{Tri}(s)}(h)$, de plus par construction $(x \mapsto \Psi_{s,j}(h^{-2/3}x)) \in H_{\text{exp}}^2(\mathbb{R})$. On en déduit que pour tout $h_0 > 0$ il existe une constante $C(n, J, s_0, h_0)$ telle que pour tout $h \in (0, h_0)$ et tout $s \in [-s_0, s_0]$, on ait :

$$\left\| (l_{\text{Tri}(s)}(h) - \beta_{s,h}^{[J]}) \psi_{s,h}^{[J]} \right\| \leq C(n, J, s_0, h_0) h^{2(J+1)/3}.$$

On conclut en appliquant le théorème spectral ce qui achève la démonstration. \square

3.2 Estimées d'Agmon

On se propose ici de démontrer des estimées de localisation d'Agmon semi-classiques pour l'opérateur $l_{\text{Tri}(s)}(h)$. Elles permettent d'avoir une localisation *a priori* des fonctions propres. Soit (λ_s, ψ_s) une paire propre de l'opérateur $l_{\text{Tri}(s)}(h)$. Dans l'esprit de la Proposition 2.14, pour une fonction lipschitzienne Φ on a la formule IMS :

$$\int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi_s)|^2 + v_{\text{Tri}(s)}(x) |e^{\Phi/h} \psi_s|^2 - |\Phi' e^{\Phi/h} \psi_s|^2 - \lambda_s |e^{\Phi/h} \psi_s|^2 dx = 0. \quad (3.8)$$

On sait que $\lambda_s \geq \pi^2 = \min_x (v_{\text{Tri}(s)}(x))$, combiné à la Proposition 3.2 on déduit que pour $s_0 \in (0, 1)$ les N_0 plus petites valeurs propres de $l_{\text{Tri}(s)}(h)$ vérifient, pour $s \in [-s_0, s_0]$:

$$|\lambda_s - \pi^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}, \quad (3.9)$$

où Γ_0 est une constante positive qui dépend de N_0 et s_0 . On définit $I^\pm = (-1 - s, 1 - s) \cap \{x \in \mathbb{R}_\pm\}$.

Nous prouvons des estimées près de $x = 0$ et de $x = -1 - s$ et $x = 1 - s$. Dans un soucis simplificateur, on note

$$s_- = 1 + s; \quad s_+ = s - 1. \quad (3.10)$$

Les plus petites fonctions propres de $l_{\text{Tri}(s)}(h)$ vérifient les deux estimées de localisation d'Agmon suivantes :

Proposition 3.3 *Soit $s_0 \in (0, 1)$. Soient $\Gamma_0 > 0$ et $\rho_0 \in (0, \pi)$. Il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $\eta_0 > 0$ tels que pour tout $s \in [-s_0, s_0]$, $h \in (0, h_0)$ et toute paire propre (λ_s, ψ_s) de $l_{\text{Tri}(s)}(h)$ vérifiant $|\lambda_s - \pi^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}$, on ait :*

$$\int_{-1-s}^{1-s} e^{\Phi_1 h^{-1}} (|\psi_s|^2 + |h^{2/3} \partial_x \psi_s|^2) dx \leq C_0 \|\psi_s\|^2 \text{ et } \int_{-1-s}^{1-s} e^{\Phi_2 h^{-1}} (|\psi_s|^2 + |h \partial_x \psi_s|^2) dx \leq C_0 \|\psi_s\|^2,$$

où $\Phi_1 = \Phi_1^- \mathbb{1}_{I_-} + \Phi_1^+ \mathbb{1}_{I_+}$ et $\Phi_2 = \Phi_2^- \mathbb{1}_{I_-} + \Phi_2^+ \mathbb{1}_{I_+}$ avec

$$\Phi_1^\pm(x) = \frac{\eta_0}{\sqrt{|s_\pm|}} |x|^{3/2} \text{ et } \Phi_2^\pm(x) = -\rho_0 |s_\pm| \ln \left(1 + \frac{x}{s_\pm} \right).$$

Preuve : On prouve d'abord la première inégalité. La convexité de $v_{\text{Tri}(s)}$ combinée à l'équation (3.8) donne :

$$\int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi_s)|^2 dx + \sum_{j=\pm} \int_{I_j} \left(\pi^2 + \frac{2\pi^2}{|s_j|} |x| - \Phi'(x)^2 - \lambda_s \right) |e^{\Phi/h} \psi_s|^2 dx \leq 0.$$

L'équation (3.9) donne :

$$\int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi_s)|^2 dx + \sum_{j=\pm} \int_{I_j} \left(\frac{2\pi^2}{|s_j|} |x| - \Phi'(x)^2 - Ch^{2/3} \right) |e^{\Phi_s} \psi_s|^2 dx \leq 0.$$

On est amené à prendre

$$\Phi_1^\pm(x) = \eta_\pm \frac{1}{\sqrt{|s_\pm|}} |x|^{3/2},$$

où η_\pm doit être choisi suffisamment petit. On aboutit à :

$$\int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_x (e^{\Phi_1^\pm/h} \psi_s)|^2 dx + \sum_{j=\pm} \int_{I_j} \left(\left(2\pi^2 - \frac{9}{4} \eta_j^2 \right) \frac{|x|}{|s_j|} - Ch^{2/3} \right) |e^{\Phi_1^\pm/h} \psi_s|^2 dx \leq 0.$$

Pour η_\pm suffisamment petit, il existe $\tilde{\eta}_\pm > 0$ tel que :

$$\int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_x (e^{\Phi_1^\pm/h} \psi_s)|^2 dx + \sum_{j=\pm} \int_{I_j} \left(\frac{\tilde{\eta}_\pm}{|s_\pm|} |x| - Ch^{2/3} \right) |e^{\Phi_1^\pm/h} \psi_s|^2 dx \leq 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on définit les ensembles

$$I_\pm^1 = \{x \in I_\pm : \frac{\tilde{\eta}_\pm}{|s_\pm|} |x| - Ch^{2/3} \geq \varepsilon h^{2/3}\}, \quad I_\pm^2 = \{x \in I_\pm : \frac{\tilde{\eta}_\pm}{|s_\pm|} |x| - Ch^{2/3} \leq \varepsilon h^{2/3}\}.$$

On découpe l'intégrale et on a :

$$\int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_x (e^{\Phi_1^j/h} \psi_s)|^2 dx + \varepsilon h^{2/3} \sum_{j=\pm} \int_{I_j^1} |e^{\Phi_1^j/h} \psi_s|^2 dx \leq Ch^{2/3} \sum_{j=\pm} \int_{I_j^2} |e^{\Phi_1^j/h} \psi_s|^2 dx,$$

où $\Phi_1 = \sum_{j=\pm} \Phi_1^j \mathbb{1}_{I_j}$. Finalement, on obtient :

$$\int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_x (e^{\Phi_1^\pm/h} \psi_s)|^2 dx + \varepsilon h^{2/3} \sum_{j=\pm} \int_{I_j} |e^{\Phi_1^j/h} \psi_s|^2 dx \leq (C + \varepsilon) h^{2/3} \sum_{j=\pm} \int_{I_j^2} |e^{\Phi_1^j/h} \psi_s|^2 dx.$$

Lorsque $x \in I_\pm^2$, Φ_1^\pm est bornée. Lorsque $s \in [-s_0, s_0]$ cette borne peut être choisie uniformément en s et cela démontre la première inégalité.

Pour la deuxième inégalité grâce à (3.8) et (3.9) on a :

$$\int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi_s)|^2 dx + \sum_{j=\pm} \int_{I_j} \left(\pi^2 \left(1 - \frac{x}{|s_j|} \right)^{-2} - \pi^2 - \Phi'(x)^2 - Ch^{2/3} \right) |e^{\Phi/h} \psi_s|^2 dx \leq 0.$$

On est amené à prendre

$$\Phi_2^\pm(x) = \rho |s_\pm| \ln \left(1 \pm \frac{x}{s_\pm} \right),$$

avec $\rho \in (0, \pi)$ de telle manière que

$$\int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_x (e^{\Phi_2/h} \psi_s)|^2 dx + \sum_{j=\pm} \int_{I_j} (\pi^2 - \rho^2) \left(\left(1 - \frac{x}{|s_j|}\right)^{-2} - \pi^2 - Ch^{2/3} \right) |e^{\Phi_2^j/h} \psi_s|^2 dx \leq 0.$$

Ensuite, on procède comme dans la preuve de la première inégalité : soit $\varepsilon > 0$ on définit les ensembles

$$I_{\pm}^1 = \{x \in I_{\pm} : (\pi^2 - \rho^2) \left(\left(1 \pm \frac{1}{s_{\pm}}\right)^{-2} - \pi^2 - Ch^{2/3} \right) \geq \varepsilon\},$$

$$I_{\pm}^2 = \{x \in I_{\pm} : (\pi^2 - \rho^2) \left(\left(1 \pm \frac{1}{s_{\pm}}\right)^{-2} - \pi^2 - Ch^{2/3} \right) \leq \varepsilon\}.$$

On conclut alors comme précédemment. □

3.3 Simplicité asymptotique

Soit $s_0 \in (0, 1)$ et $N_0 \in \mathbb{N}^*$. On considère les N_0 premières valeurs propres de $l_{\text{Tri}(s)}(h)$ notées plus simplement $\lambda_n(s, h) = \hat{\lambda}_{n, \text{Tri}(s)}(h)$. Pour $n \in \{1, \dots, N_0\}$ on choisit une fonction normalisée $\psi_{s,n}$ dans l'espace propre associé à $\lambda_n(s, h)$ telle que $\langle \psi_{s,n}, \psi_{s,m} \rangle = 0$ quand $n \neq m$. On introduit alors l'espace

$$\mathcal{S}_{N_0}(s, h) = \text{vect}(\psi_{s,1}, \dots, \psi_{s,N_0}).$$

À l'aide de l'équation aux valeurs propres $l_{\text{Tri}(s)}(h)\psi_{s,n} = \lambda_n(s, h)\psi_{s,n}$, on sait que les $\psi_{s,n}$ sont orthogonaux pour la forme quadratique $q_{\text{Tri}(s)}(h)$ associée à $l_{\text{Tri}(s)}(h)$ et donc, pour tout $\psi \in \mathcal{S}_{N_0}(s, h)$ on a :

$$q_{\text{Tri}(s)}(h)(\psi) \leq \lambda_{N_0}(s, h) \|\psi\|^2.$$

Les estimées de localisation de la Proposition 3.3 donnent

$$q_{\text{Tri}(s)}(h)(\chi_s \psi) \leq (\lambda_{N_0}(s, h) + \mathcal{O}(h^\infty)) \|\chi_s \psi\|^2,$$

où χ_s est définie en (3.7). On utilise ensuite la convexité du potentiel et on a :

$$\langle l_s^{\text{tan}}(h)(\chi_s \psi), \chi_s \psi \rangle \leq (\lambda_{N_0}(s, h) + \mathcal{O}(h^\infty)) \|\chi_s \psi\|^2.$$

L'espace $\chi_s \mathcal{S}_{N_0}(s, h)$ est de dimension N_0 , par conséquent on peut appliquer le principe du min-max (voir 2.1) et on obtient, pour tout $s \in [-s_0, s_0]$:

$$\pi^2 + (2\pi^2)^{2/3} \kappa_{N_0}(s) \leq \lambda_{N_0}(s, h) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Cette minoration, combinée à la Proposition 3.2 termine la preuve de la Proposition 3.1.

Chapitre 4

Approximation 1D des cônes de petite ouverture

Dans ce chapitre, on étudie l'approximation de Born-Oppenheimer de l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ défini en (1.13). On rappelle qu'il est défini sur $L^2(\text{Mer}, y dx dy)$ et que son expression est

$$\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h) = -h^2 \partial_x^2 - \frac{1}{y} \partial_y (y \partial_y) + \frac{m^2}{y^2}.$$

En appliquant la procédure décrite en sous-Section 2.4.2, on construit l'opérateur $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$, défini sur $L^2(-1, 0)$ par

$$l_{\text{Mer}}^{[m]}(h) = -h^2 \partial_x^2 + v_{\text{Mer}}^{[m]}(x), \quad \text{avec } v_{\text{Mer}}^{[m]}(x) = \frac{j_{m,1}^2}{(x+1)^2}. \quad (4.1)$$

Dans la limite $h \rightarrow 0$, on sait que le minimum du potentiel effectif $v_{\text{Mer}}^{[m]}$ dirige le comportement des paires propres associées aux plus petites valeurs propres de $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$. Ce minimum est atteint en $x = 0$ donc on approche le potentiel effectif par sa tangente en $x = 0$. On obtient sur $L^2(\mathbb{R}_-)$ l'opérateur tangent $l_{\text{Mer}}^{\text{tan}}(h)$ avec condition de Dirichlet en $x = 0$:

$$l_{\text{Mer}}^{\text{tan}}(h) = -h^2 \partial_x^2 + j_{m,1}^2 - 2j_{m,1}^2 x.$$

Afin de se ramener à un opérateur d'Airy inversé on fait le changement d'échelle $x = \frac{h^{2/3}}{(2j_{m,1}^2)^{1/3}} u$ et on a :

$$l_{\text{Mer}}^{\text{tan}}(h)(x; \partial_x) \sim j_{m,1}^2 + (2j_{m,1}^2)^{2/3} h^{2/3} l_{\text{A}}(u; \partial_u). \quad (4.2)$$

Le but de ce chapitre est de donner un développement asymptotique à tout ordre, dans le régime semi-classique $h \rightarrow 0$, des premières valeurs propres de $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$. On prouve la

Proposition 4.1 *Les valeurs propres de $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$, notées $\hat{\lambda}_{n,\text{Mer}}^{[m]}(h)$, se développent comme :*

$$\hat{\lambda}_{n,\text{Mer}}^{[m]}(h) \sim \sum_{j \geq 0} \hat{\beta}_{j,n}^{[m]} h^{2j/3},$$

où on a $\hat{\beta}_{0,n}^{[m]} = j_{m,1}^2$ et $\hat{\beta}_{1,n}^{[m]} = (2j_{m,1}^2)^{2/3} z_{\text{A}}(n)$.

4.1 Construction de quasimodes

Pour démontrer la Proposition 4.1 nous allons dans un premier temps construire des quasimodes pour l'opérateur $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$.

Proposition 4.2 *Pour tout $N_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ on ait :*

$$\text{dist}\left(\mathfrak{S}(l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)), j_{m,1}^2 + h^{2/3}(2j_{m,1}^2)^{2/3}z_{\text{A}}(n)\right) \leq Ch^{4/3}, \quad n = 1, \dots, N_0.$$

Preuve : Comme illustré en (4.2), l'échelle sous-jacente à un opérateur de type Airy est $h^{2/3}$. On effectue donc le changement d'échelle $u = h^{-2/3}x$. On cherche des quasimodes (λ_h, ψ_h) sous la forme de séries

$$\lambda_h \sim \sum_{j \geq 0} \hat{\beta}_j h^{2j/3} \quad \text{et} \quad \psi_h(x) \sim \sum_{j \geq 0} \Psi_j(u) h^{2j/3}$$

afin de résoudre $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)\psi_h = \lambda_h\psi_h$ au sens des séries formelles. Un développement de Taylor en $x = 0$ du potentiel effectif $v_{\text{Tri}(s)}$ donne :

$$l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(h^{2/3}u; h^{-2/3}\partial_u) \sim j_{m,1}^2 + h^{2/3}(2j_{m,1}^2)^{2/3}l_{\text{A}}((2j_{m,1}^2)^{1/3}u; (2j_{m,1}^2)^{-1/3}\partial_u) + \sum_{j \geq 2} \frac{(v_{\text{Mer}}^{[m]})^{(j)}(0)}{j!} u^j h^{2j/3}. \quad (4.3)$$

On identifie alors chaque terme dans le développement.

Termes en h^0 Les termes d'ordre h^0 livrent $\hat{\beta}_0 = j_{m,1}^2$.

Termes en $h^{2/3}$ Les termes d'ordre $h^{2/3}$ livrent :

$$\left(l_{\text{A}}((2j_{m,1}^2)^{1/3}u; (2j_{m,1}^2)^{-1/3}\partial_u) - (2j_{m,1}^2)^{-2/3}\hat{\beta}_1\right)\Psi_0 = 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir $\hat{\beta}_1 = (2j_{m,1}^2)^{2/3}z_{\text{A}}(n)$ et $\Psi_0 = \text{A}((2j_{m,1}^2)^{1/3}u)$.

Termes en $h^{4/3}$ Les termes d'ordre $h^{4/3}$ livrent :

$$\left(l_{\text{A}}((2j_{m,1}^2)^{1/3}u; (2j_{m,1}^2)^{-1/3}\partial_u) - (2j_{m,1}^2)^{-2/3}\hat{\beta}_1\right)\Psi_1 = \hat{\beta}_2\Psi_0 - \frac{(v_{\text{Mer}}^{[m]})''(0)}{2}u^2\Psi_0,$$

avec $\Psi_1(0) = 0$. L'alternative de Fredholm donne $\hat{\beta}_2 = 2^{-1}(v_{\text{Mer}}^{[m]})''(0)\langle u^2\Psi_0, \Psi_0 \rangle$. $\hat{\beta}_2$ est donc déterminé et il existe une unique solution $\Psi_1 \in L^2(\mathbb{R}_-)$ telle que $\langle \Psi_1, \Psi_0 \rangle = 0$.

Termes d'ordres supérieurs On peut continuer à construire $(\hat{\beta}_j, \Psi_j)$ pour tout j en itérant le procédé de construction. Cette construction dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Considérons alors la fonction troncature régulière χ^g telle que :

$$\chi^g(x) = 1 \quad \text{pour } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad \text{et} \quad \chi^g(x) = 0 \quad \text{pour } x \leq -\frac{3}{4}.$$

On introduit pour tout $J \geq 0$ le quasimode $(\beta_h^{[J]}, \psi_h^{[J]})$ avec :

$$\beta_h^{[J]} = \sum_{j=0}^J \hat{\beta}_j h^{2j/3} \quad \text{et} \quad \psi_h^{[J]}(x) = \chi^{\mathfrak{g}}(x) \sum_{j=0}^J \Psi_j \left(\frac{x}{h^{2/3}} \right) h^{2j/3}. \quad (4.4)$$

Par construction $\psi_h^{[J]}$ est dans le domaine $\text{Dom}(l_{\text{Mer}}^{[m]}(h))$ de l'opérateur $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$. Grâce aux propriétés de décroissance des fonctions d'Airy, pour tout $h_0 > 0$ il existe une constance $C(n, J, h_0) > 0$ telle que pour tout $h \in (0, h_0)$:

$$\|(l_{\text{Mer}}^{[m]}(h) - \beta_h^{[J]})\psi_h^{[J]}\| \leq C(n, J, h_0)h^{2(J+1)/3}.$$

On applique ensuite le théorème spectral qui assure l'existence de quasimodes à tout ordre donc prouve en particulier la Proposition 4.2. \square

La Proposition 4.2 se réécrit en disant que pour tout $N_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ il existe $k(n, h) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|\hat{\lambda}_{k(n,h), \text{Mer}}^{[m]} - \beta_{n,h}^{[m,J]}| \leq Ch^{2(J+1)/3}, \quad n = 1, \dots, N_0,$$

où $\beta_{n,h}^{[m,J]}$ correspond, pour l'opérateur $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$, à la construction de $\beta_h^{[J]}$ défini en (4.4) avec $\hat{\beta}_1 = (2j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(n)$. On peut en déduire une majoration de la n -ième valeur propre de $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$, ce qui est énoncé dans la

Proposition 4.3 Soit $N_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ on ait :

$$0 \leq \hat{\lambda}_{n, \text{Mer}}^{[m]}(h) \leq \beta_{n,h}^{[m,J]} + Ch^{2(J+1)/3}.$$

Preuve : La première inégalité est vraie car l'opérateur est positif. D'après la Proposition 4.2 on sait qu'il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $h \in (0, h_0)$ il existe $k(n, h)$ satisfaisant

$$\hat{\lambda}_{k(n,h), \text{Mer}}^{[m]}(h) \leq \beta_{n,h}^{[m,J]} + Ch^{2(J+1)/3}.$$

On prouve en trois étapes que pour tout $h \in (0, h_0)$, $n \geq k(n, h)$. Fixons $h \in (0, h_0)$ on montre d'abord que

$n \mapsto k(n, h)$ **est injective** Supposons qu'il existe $n_1 \neq n_2$ tels que $k(n_1, h) = k(n_2, h)$. D'après la Proposition 4.2 on a

$$|\beta_{n_1,h}^{[m,J]} - \beta_{n_2,h}^{[m,J]}| - 2Ch^{2(J+1)/3} \leq |\hat{\lambda}_{k(n_1,h), \text{Mer}}^{[m]}(h) - \hat{\lambda}_{k(n_2,h), \text{Mer}}^{[m]}(h)| \leq 2Ch^{2(J+1)/3}.$$

Quitte à prendre h assez petit, il existe $\tilde{C} > 0$ tel que

$$\tilde{C}|z_A(n_1) - z_A(n_2)|h^{2/3} \leq |\beta_{n_1,h}^{[m,J]} - \beta_{n_2,h}^{[m,J]}| - 2Ch^{2(J+1)/3}.$$

On combine les inégalités et on aboutit à

$$\tilde{C}|z_A(n_1) - z_A(n_2)| \leq 2Ch^{2J/3},$$

ce qui est absurde pour h suffisamment petit.

$n \mapsto k(n, h)$ est croissante Soit $n \in \mathbb{N}^*$, regardons la différence entre $\hat{\lambda}_{k(n+1, h), \text{Mer}}^{[m]}(h)$ et $\hat{\lambda}_{k(n, h), \text{Mer}}^{[m]}(h)$:

$$\beta_{n+1, h}^{[m, J]} - \beta_{n, h}^{[m, J]} - 2Ch^{2(J+1)/3} \leq \hat{\lambda}_{k(n+1, h), \text{Mer}}^{[m]}(h) - \hat{\lambda}_{k(n, h), \text{Mer}}^{[m]}(h)$$

En particulier pour h assez petit, il existe $\tilde{C} > 0$ tel que

$$0 \leq \tilde{C}(z_A(n+1) - z_A(n))h^{2/3} \leq \hat{\lambda}_{k(n+1, h), \text{Mer}}^{[m]}(h) - \hat{\lambda}_{k(n, h), \text{Mer}}^{[m]}(h)$$

On en déduit que $k(n+1, h) > k(n, h)$. □

Récurrence On montre par récurrence que $n \leq k(n, h)$. Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $1 \leq k(1, h)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $n \leq k(n, h)$. On a $n \geq k(n, h) < k(n+1, h)$ et on sait que $n < n+1$ donc $n+1 \leq k(n+1, h)$, ce qui termine la preuve.

4.2 Estimées de localisation d'Agmon

On se propose ici de démontrer des estimées de localisation d'Agmon semi-classiques pour l'opérateur $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$. Elles permettent d'avoir une localisation *a priori* des fonctions propres. Soit (λ, ψ) une paire propre de l'opérateur $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$. Dans l'esprit de la Proposition 2.14, pour une fonction lipschitzienne Φ on a la formule IMS :

$$\int_{-1}^0 h^2 |\partial_x(e^{\Phi/h}\psi)|^2 + v_{\text{Mer}}^{[m]}(x)|e^{\Phi/h}\psi|^2 - |\Phi'e^{\Phi/h}\psi|^2 - \lambda|e^{\Phi/h}\psi|^2 dx = 0. \quad (4.5)$$

On sait que $\lambda \geq j_{m,1}^2 = \min_x(v_{\text{Mer}}^{[m]}(x))$, combiné à la Proposition 4.2 on sait que les N_0 plus petites valeurs propres de $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ vérifient :

$$|\lambda - j_{m,1}^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}, \quad (4.6)$$

où Γ_0 est une constante positive qui dépend de N_0 .

Nous prouvons des estimées près de $x = 0$ et $x = -1$. Les plus petites fonctions propres de $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ vérifient les deux estimées de localisation d'Agmon suivantes

Proposition 4.4 Soient $\Gamma_0 > 0$ et $\rho_0 \in (0, j_{m,1})$. Il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $\eta_0 > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et toute paire propre (λ, ψ) de $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ vérifiant $|\lambda - j_{m,1}^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}$, on ait :

$$\int_{-1}^0 e^{\Phi_1/h} (|\psi|^2 + |h^{2/3}\partial_x\psi|^2) dx \leq C_0 \|\psi\|^2 \text{ et } \int_{-1}^0 e^{\Phi_2/h} (|\psi|^2 + |h\partial_x\psi|^2) dx \leq C_0 \|\psi\|^2,$$

avec

$$\Phi_1(x) = \eta_0|x|^{3/2} \text{ et } \Phi_2(x) = -\rho_0 \ln(1+x).$$

Preuve : On prouve d'abord la première inégalité. La convexité de $v_{\text{Mer}}^{[m]}$ combinée à l'équation (4.5) donne :

$$\int_{-1}^0 h^2 |\partial_x(e^{\Phi/h}\psi)|^2 + (j_{m,1}^2 + 2j_{m,1}^2|x| - \Phi'(x)^2 - \lambda)|e^{\Phi/h}\psi|^2 dx \leq 0.$$

L'équation (4.6) donne :

$$\int_{-1}^0 h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 + (2j_{m,1}^2 |x| - \Phi'(x)^2 - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx \leq 0.$$

On est amené à prendre

$$\Phi(x) = \eta |x|^{3/2},$$

où η doit être choisi suffisamment petit. On aboutit à :

$$\int_{-1}^0 h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 + ((2j_{m,1}^2 - \frac{9}{4}\eta^2) |x| - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx \leq 0.$$

Pour η suffisamment petit, il existe $\tilde{\eta} > 0$ tel que

$$\int_{-1}^0 h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 + (\tilde{\eta} |x| - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx \leq 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on définit les ensembles

$$I^1 = \{x \in (-1, 0) : \tilde{\eta} |x| - \Gamma_0 h^{2/3} \geq \varepsilon h^{2/3}\}, \quad I^2 = \{x \in (-1, 0) : \tilde{\eta} |x| - \Gamma_0 h^{2/3} \leq \varepsilon h^{2/3}\}.$$

On découpe l'intégrale et on a :

$$\int_{-1}^0 h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 dx + \varepsilon h^{2/3} \int_{I^1} |e^{\Phi_1/h} \psi|^2 dx \leq \Gamma_0 h^{2/3} \int_{I^2} |e^{\Phi_1/h} \psi|^2 dx.$$

Finalement, on obtient :

$$\int_{-1}^0 h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 dx + \varepsilon h^{2/3} \int_{-1}^0 |e^{\Phi_1/h} \psi|^2 dx \leq (\Gamma_0 + \varepsilon) h^{2/3} \int_{I^2} |e^{\Phi_1/h} \psi|^2 dx.$$

Lorsque $x \in I^2$, Φ_1 est bornée ce qui démontre la première inégalité.

Pour la deuxième inégalité grâce à (4.5) et (4.6) on a

$$\int_{-1}^0 h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 + (j_{m,1}^2 (1+x)^{-2} - j_{m,1}^2 - \Phi'(x)^2 - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx \leq 0.$$

On est amené à prendre

$$\Phi_2(x) = \rho \ln(1+x),$$

avec $\rho \in (0, j_{m,1})$ de telle manière que

$$\int_{-1}^0 h^2 |\partial_x (e^{\Phi_2/h} \psi)|^2 + ((j_{m,1}^2 - \rho)(1+x)^{-2} - j_{m,1}^2 - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi_2/h} \psi|^2 dx \leq 0.$$

Ensuite, on procède comme dans la preuve de la première inégalité : soit $\varepsilon > 0$ on définit les ensembles

$$I^1 = \{x \in (-1, 0) : (j_{m,1}^2 - \rho)(1+x)^{-2} - j_{m,1}^2 - \Gamma_0 h^{2/3} \geq \varepsilon\},$$

$$I^2 = \{x \in (-1, 0) : (j_{m,1}^2 - \rho)(1+x)^{-2} - j_{m,1}^2 - \Gamma_0 h^{2/3} \leq \varepsilon\}.$$

On conclut alors comme précédemment. \square

Remarque 4.5 La Proposition 4.4 est aussi vérifiée pour toute combinaison linéaire finie ψ de fonctions propres de $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ vérifiant (4.6).

4.3 Simplicité asymptotique

Soit $N_0 \in \mathbb{N}^*$. On considère les N_0 premières valeurs propres de $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ notées plus simplement $\lambda_n(h) = \hat{\lambda}_{n, \text{Mer}}^{[m]}(h)$. Pour $n \in \{1, \dots, N_0\}$ on choisit une fonction normalisée ψ_n dans l'espace propre associé à $\lambda_n(h)$ telle que $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = 0$ quand $n \neq m$. On introduit alors l'espace

$$\mathcal{S}_{N_0} = \text{vect}(\psi_1, \dots, \psi_{N_0}).$$

À l'aide de l'équation aux valeurs propres $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)\psi_n = \lambda_n(h)\psi_n$, on sait que les ψ_n sont orthogonales pour la forme quadratique $q_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ associée à $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ et donc, pour tout $\psi \in \mathcal{S}_{N_0}(h)$ on a :

$$q_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\psi) \leq \lambda_{N_0}(h) \|\psi\|^2.$$

Pour obtenir la minoration nous allons prouver la

Proposition 4.6 Soit $N_0 \in \mathbb{N}^*$, $\psi \in \mathcal{S}_{N_0}(h)$, on a

$$j_{m,1}^2 + (2j_{m,1}^2)^{2/3} h^{2/3} z_A(n) \leq \lambda_{N_0}(h) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, on introduit la fonction troncature régulière χ telle que :

$$\begin{cases} \chi(x) = 0 & \text{si } |x+1| \leq \varepsilon_0, \\ \chi(x) = 1 & \text{si } |x+1| \geq 2\varepsilon_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Dans la preuve de la Proposition 4.6 nous aurons besoin du

Lemme 4.7 Soient $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\psi \in \mathcal{S}_{N_0}(h)$, on a :

$$\|\chi\psi\|^2 = (1 + \mathcal{O}(h^\infty)) \|\psi\|^2.$$

Preuve du lemme : Soit $\psi \in \mathcal{S}_{N_0}(h)$, on a

$$\|\psi\|^2 = \|(\chi + (1 - \chi))\psi\|^2 = \|\chi\psi\|^2 + \|(1 - \chi)\psi\|^2 + \|\sqrt{2\chi(1 - \chi)}\psi\|^2.$$

Regardons le deuxième terme :

$$\|(1 - \chi)\psi\|^2 = \int_{-1}^0 (1 - \chi(x))^2 |\psi(x)|^2 dx = \int_{-1}^0 (1 - \chi(x))^2 e^{-\Phi_1/h} e^{\Phi_1/h} |\psi(x)|^2 dx.$$

En prenant en compte le support de $1 - \chi$ et la Proposition 4.4, on obtient :

$$\|(1 - \chi)\psi\|^2 \leq C e^{-\Phi_1(1-2\varepsilon_0)/h} \|\psi\|^2$$

et donc $\|(1 - \chi)\psi\|^2 = \|\psi\|^2 \mathcal{O}(h^\infty)$. Le troisième terme se traite de la même manière pour des raisons de support. \diamond

Prouvons alors la Proposition 4.6 :

Preuve : Soit $\psi = \sum_{j=1}^{N_0} \alpha_j \psi_j \in \mathcal{S}_{N_0}(h)$. Si $b_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ désigne la forme bilinéaire associée à $q_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ on a :

$$q_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\chi\psi) \leq \lambda_{N_0}(h) \sum_{j=1}^{N_0} \alpha_j^2 \|\chi\psi_j\|^2 + \sum_{j=1}^{N_0} \alpha_j^2 \|\chi'\psi_j\|^2 + \sum_{j \neq i} \alpha_j \alpha_i b_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\chi\psi_j, \chi\psi_i). \quad (4.8)$$

Soit $j \in \{1, \dots, N_0\}$. On sait que $\|\chi\psi_j\|^2 \leq \|\psi_j\|^2$ donc pour le premier terme on a :

$$\sum_{j=1}^{N_0} \alpha_j^2 \|\chi\psi_j\|^2 \leq \|\psi\|^2.$$

Pour le deuxième terme on regarde

$$\|\chi'\psi_j\|^2 = \int_{-1}^0 |\chi'(x)|^2 |\psi_j(x)|^2 dx = \int_{-1}^0 |\chi'(x)|^2 e^{\Phi_1/(2h)} e^{-\Phi_1/(2h)} |\psi_j(x)|^2 dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz livre

$$\|\chi'\psi_j\|^2 \leq \|\chi' e^{-\Phi_1/(2h)} \psi_j\| \|e^{\Phi_1/(2h)} \psi_j\|.$$

La Proposition 4.4 donne $\|\chi'\psi_j\|^2 = \mathcal{O}(h^\infty)$. Il reste donc à étudier les termes

$$b_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\chi\psi_j, \chi\psi_i) = \int_{-1}^0 h^2 \partial_x(\chi\psi_i) \partial_x(\chi\psi_j) + v_{\text{Mer}}^{[m]}(x) \chi^2 \psi_i \psi_j dx,$$

qui se développent en :

$$b_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\chi\psi_j, \chi\psi_i) = h^2 \{I + II + III + IV\} + \int_{-1}^0 v_{\text{Mer}}^{[m]}(x) \chi^2 \psi_i \psi_j dx,$$

avec :

$$I = \int_{-1}^0 \chi'^2 \psi_i \psi_j dx, \quad II = \int_{-1}^0 \chi' \chi \psi_i' \psi_j dx, \quad III = \int_{-1}^0 \chi' \chi \psi_i \psi_j' dx, \quad IV = \int_{-1}^0 \chi^2 \psi_j' \psi_i' dx.$$

Il ne reste plus qu'à étudier chaque terme. On a

$$I = \int_{-1}^0 \chi'(x)^2 e^{-\Phi_1/(2h)} e^{\Phi_1/(2h)} \psi_j(x) \psi_i(x) dx \leq \|\chi'^2 e^{-\Phi_1/(2h)} \psi_j\| \|e^{\Phi_1/(2h)} \psi_i\| \leq C e^{-\Phi_1(1-2\varepsilon_0)/(2h)},$$

et donc $I = \mathcal{O}(h^\infty)$. Regardons le terme II :

$$II = h^{-4/3} \int_{-1}^0 h^{4/3} e^{\Phi_1/(2h)} \psi_i'(x) \chi(x) \chi'(x) e^{-\Phi_1/(2h)} \psi_j(x) dx \leq h^{-4/3} C e^{-\Phi_1(1-2\varepsilon_0)/(2h)},$$

ainsi $h^2 II = \mathcal{O}(h^\infty)$ le terme III étant le même en permutant j en i on a également $h^2 III = \mathcal{O}(h^\infty)$. Regardons alors le terme IV :

$$\begin{aligned} h^2 IV & \underset{\text{par intégration par partie}}{=} -h^2 \int_{-1}^0 \chi^2 \psi_j'' \psi_i dx - 2h^2 \int_{-1}^0 \chi \chi' \psi_j' \psi_i dx \\ & = \int_{-1}^0 \chi^2 \psi_i (\lambda_j(h) \psi_j - v_{\text{Mer}}^{[m]}(x) \psi_j) dx - 2h^2 \int_{-1}^0 \chi \chi' \psi_j' \psi_i dx \\ & = \lambda_j(h) \int_{-1}^0 \chi^2 \psi_i \psi_j dx - \int_{-1}^0 \chi^2 v_{\text{Mer}}^{[m]}(x) \psi_i \psi_j dx - 2h^2 \int_{-1}^0 \chi \chi' \psi_j' \psi_i dx. \end{aligned}$$

Le deuxième terme se compense avec celui apparaissant dans la définition de $b_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\chi\psi_j, \chi\psi_i)$ alors que le dernier se traite comme II et III . Pour le premier comme Ψ_i et Ψ_j sont orthogonales dans $L^2(-1, 0)$:

$$\int_{-1}^0 \chi^2 \Psi_i \Psi_j dx = \int_{\chi \neq 1} (\chi^2 - 1) \Psi_i \Psi_j dx.$$

Le support de $(1 - \chi^2)$ permet de dire que $b_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\chi\psi_j, \chi\psi_i) = \mathcal{O}(h^\infty)$. On remarque que :

$$\sum_{j \neq i} \alpha_j \alpha_i = 2 \sum_{1=j < i = N_0} \alpha_j \alpha_i \leq \sum_{1=j < i = N_0} (\alpha_j^2 + \alpha_i^2) \leq C \|\psi\|^2.$$

Par conséquent, l'équation (4.8) devient

$$q_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\chi\psi) \leq (\lambda_{N_0}(h) + \mathcal{O}(h^\infty)) \|\psi\|^2$$

et d'après le Lemme 4.7 on a :

$$q_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\chi\psi) \leq (\lambda_{N_0}(h) + \mathcal{O}(h^\infty)) \|\chi\psi\|^2.$$

La convexité du potentiel effectif $v_{\text{Mer}}^{[m]}$ donne

$$\langle (-h^2 \partial_x^2 - 2j_{m,1}^2 x + j_{m,1}^2) \chi\psi, \chi\psi \rangle \leq (\lambda_{N_0}(h) + \mathcal{O}(h^\infty)) \|\chi\psi\|^2.$$

L'espace $\chi \mathcal{S}_{N_0}(h)$ est de dimension N_0 , par conséquent on peut appliquer le principe du min-max 2.1 et on obtient

$$j_{m,1}^2 + (2j_{m,1}^2)^{2/3} h^{2/3} z_A(n) \leq \lambda_{N_0}(h) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

□

Cette minoration permet d'obtenir la simplicité asymptotique et permet de conclure la démonstration de la Proposition 4.1.

Chapitre 5

Approximation 1D pour la couche conique

Dans ce chapitre, on étudie l'approximation de Born-Oppenheimer de l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$ défini en (1.23). On rappelle qu'il est défini sur $L^2(\text{Gui}, ydx dy)$ et que son expression est

$$\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h) = -h^2 \partial_x^2 - \frac{1}{y} \partial_y (y \partial_y).$$

En appliquant la procédure décrite en sous-Section 2.4.2, on construit l'opérateur $l_{\text{Gui}}(h)$, défini sur $L^2(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$ par

$$l_{\text{Gui}}(h) = -h^2 \partial_x^2 + v_{\text{Gui}}(x),$$

Contrairement aux Chapitres 3 et 4 nous n'avons pas une expression explicite du potentiel effectif $v_{\text{Gui}}(x)$ sur tout $(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$. Il s'obtient en remplaçant l'opérateur transverse $l_{\text{Gui},x}^{\text{trans}} = -\frac{1}{y} \partial_y (y \partial_y)$ dans l'expression de $\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$ par sa plus petite valeur propre, à x fixé, sur le segment $(\max(0, x), x + \pi\sqrt{2})$. Pour $x \in (-\pi\sqrt{2}, 0)$ on obtient une expression explicite similaire à celle du potentiel $v_{\text{Mer}}^{[m]}$ du Chapitre 4 :

$$v_{\text{Gui}}(x) = \frac{j_{0,1}^2}{(x + \pi\sqrt{2})^2}.$$

On montre en Section 5.1 que le potentiel effectif v_{Gui} est continu sur $(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$ et admet un minimum en $x = 0$. Dans la limite $h \rightarrow 0$ on sait que le minimum du potentiel effectif v_{Gui} dirige le comportement des paires propres associées aux plus petites valeurs propres de $l_{\text{Gui}}(h)$. Par conséquent on doit comprendre le comportement du potentiel effectif v_{Gui} en $x = 0$, c'est pourquoi on montre qu'il admet une singularité logarithme en $x = 0^+$. Ces résultats sont ensuite utilisés en Section 5.2 pour comprendre le spectre de l'opérateur $l_{\text{Gui}}(h)$ et enfin, en Section 5.3, on prouve des estimées de localisation d'Agmon.

5.1 Quelques propriétés du potentiel effectif

$l_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}$ est un opérateur sur $L^2((\max(0, x), x + \pi\sqrt{2}), ydy)$ et sa forme quadratique $q_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}$ s'écrit, pour tout ψ dans son domaine $\text{Dom}(q_{\text{Gui},x}^{\text{trans}})$:

$$q_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}(\psi) = \int_{\max(0,x)}^{x+\pi\sqrt{2}} |\partial_y \psi|^2 y dy.$$

$l_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}$ est à résolvante compacte, ce qui assure, pour tout $x > -\pi\sqrt{2}$, l'existence de $v_{\text{Gui}}(x)$. De plus, on remarque que $q_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}$ est définie positive donc $v_{\text{Gui}} \geq 0$.

Avant de s'intéresser précisément au comportement de v_{Gui} près de $x = 0^+$ on prouve deux propositions qui illustrent le comportement du potentiel effectif v_{Gui} sur \mathbb{R}_+ .

Proposition 5.1 *Le potentiel effectif v_{Gui} est continu et croissant sur \mathbb{R}_+ .*

Preuve : On pose le changement de variable

$$\hat{y} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}(y + \pi\sqrt{2} - x)$$

qui transforme la forme quadratique $q_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}$ en $\hat{q}_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}$ définie, pour tout $\hat{\psi}$ dans son domaine $\text{Dom}(\hat{q}_{\text{Gui},x}^{\text{trans}})$, par :

$$\hat{q}_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}(\hat{\psi}) = \pi\sqrt{2} \int_1^2 |\partial_{\hat{y}} \hat{\psi}| (\pi\sqrt{2}\hat{y} - \pi\sqrt{2} + x) d\hat{y}.$$

D'après le principe du min-max 2.1, on en déduit que v_{Gui} est continu sur \mathbb{R}_+ . Pour prouver la croissance de v_{Gui} , on remarque que $\text{Dom}(\hat{q}_{\text{Gui},x}^{\text{trans}})$ ne dépend pas de x , donc pour $x_1 \leq x_2$ et tout $\hat{\psi} \in \text{Dom}(\hat{q}_{\text{Gui},x_1}^{\text{trans}})$, on a :

$$\hat{q}_{\text{Gui},x_1}^{\text{trans}}(\hat{\psi}) \leq \hat{q}_{\text{Gui},x_2}^{\text{trans}}(\hat{\psi}).$$

Le principe du min-max livre $v_{\text{Gui}}(x_1) \leq v_{\text{Gui}}(x_2)$. □

Proposition 5.2 *On a :*

$$\left| v_{\text{Gui}}(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{x + \pi\sqrt{2}} \right).$$

En particulier, on a $v_{\text{Gui}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Preuve : Afin d'obtenir la limite en $+\infty$ on procède par encadrement : on compare la forme quadratique $q_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}$ à celle du Laplacien de Dirichlet sur le segment $(x, x + \pi\sqrt{2})$:

$$\frac{x}{x + \pi\sqrt{2}} \frac{\int_x^{x+\pi\sqrt{2}} |\partial_y \psi|^2 dy}{\int_x^{x+\pi\sqrt{2}} |\psi|^2 dy} \leq \frac{q_x^{\text{trans}}(\psi)}{\int_x^{x+\pi\sqrt{2}} |\psi|^2 y dy} \leq \frac{x + \pi\sqrt{2}}{x} \frac{\int_x^{x+\pi\sqrt{2}} |\partial_y \psi|^2 dy}{\int_x^{x+\pi\sqrt{2}} |\psi|^2 dy}.$$

Le principe du min-max permet de conclure. □

On montre maintenant que le potentiel effectif v_{Gui} est continu en $x = 0$. La Proposition 5.1 nous assure alors qu'il a un minimum atteint en $x = 0$. On a la

Proposition 5.3 *Le potentiel effectif v_{Gui} vérifie :*

$$v_{\text{Gui}}(x) - j_{0,1}^2 (\pi\sqrt{2})^{-2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} j_{0,1} |c_0| |\ln x|^{-1},$$

avec $c_0 = \frac{\pi}{2} \frac{Y_0(j_{0,1})}{J_0'(j_{0,1})} < 0$.

Preuve : Soit $\zeta(x) = (x + \pi\sqrt{2})^{-1}$. On effectue le changement de variable

$$\tilde{y} = \zeta(x)y.$$

L'opérateur transverse $l_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}$ devient $\tilde{l}_{\text{Gui},x}^{\text{trans}} = -\frac{\zeta(x)^2}{\tilde{y}}\partial_{\tilde{y}}(\tilde{y}\partial_{\tilde{y}})$ sur $L^2(\varepsilon(x), 1)$ avec $\varepsilon(x) = x(x + \pi\sqrt{2})^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. On cherche des paires propres $(\tilde{\lambda}, \tilde{\psi})$ de $\tilde{l}_{\text{Gui},x}^{\text{trans}}$. On aboutit à l'équation de Bessel

$$\tilde{y}\partial_{\tilde{y}}^2\tilde{\psi} + \partial_{\tilde{y}}\tilde{\psi} + \tilde{\lambda}\zeta(x)^{-2}\tilde{\psi} = 0,$$

ce qui donne, avec $A, B \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{\psi}(\tilde{y}) = AJ_0(\tilde{\lambda}^{1/2}\zeta(x)^{-1}\tilde{y}) + BY_0(\tilde{\lambda}^{1/2}\zeta(x)^{-1}\tilde{y}).$$

Les conditions de Dirichlet s'écrivent $\tilde{\psi}(\varepsilon(x)) = \tilde{\psi}(1) = 0$. Nécessairement A et B sont non nuls. En effet, supposons que $B = 0$, $\tilde{\psi} \neq 0$ donc $A \neq 0$ et les conditions de Dirichlet donnent

$$J_0(\tilde{\lambda}^{1/2}\zeta(x)^{-1}\varepsilon(x)) = J_0(\tilde{\lambda}^{1/2}\zeta(x)^{-1}) = 0.$$

Les zéros de la fonction de Bessel de première espèce sont isolés donc il existe $p, k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\tilde{\lambda}^{1/2}\zeta(x)^{-1}\varepsilon(x) = j_{0,k}, \quad \tilde{\lambda}^{1/2}\zeta^{-1}(x) = j_{0,p}.$$

On aboutit à $\varepsilon(x) = \frac{j_{0,k}}{j_{0,p}}$ ce qui fixe la valeur de $\varepsilon(x)$ et qui est absurde. Par conséquent $B \neq 0$ et le cas $A = 0$ se traite identiquement. Finalement les conditions de Dirichlet donnent

$$J_0(\tilde{\lambda}^{1/2}\zeta(x)^{-1}\varepsilon(x))Y_0(\tilde{\lambda}^{1/2}\zeta(x)^{-1}) = J_0(\tilde{\lambda}^{1/2}\zeta(x)^{-1})Y_0(\tilde{\lambda}^{1/2}\zeta^{-1}(x)\varepsilon(x)).$$

Par définition, le potentiel effectif v_{Gui} vérifie

$$J_0(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}\varepsilon(x))Y_0(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}) = J_0(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1})Y_0(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta^{-1}(x)\varepsilon(x)). \quad (5.1)$$

On sait que $v_{\text{Gui}} > 0$ et grâce aux Propositions 5.1 et 5.2 v_{Gui} est borné. On en déduit

$$v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0. \quad (5.2)$$

Le membre de gauche de (5.1) est borné et comme $Y_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ on a

$$J_0(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0. \quad (5.3)$$

Les seuls points d'accumulations possibles de $(v_{\text{Gui}}(x))_x$ sont les $j_{0,p}^2(2\pi^2)^{-2}$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On peut le voir en prenant la limite dans le membre de gauche de (5.3). Néanmoins grâce aux Propositions 5.1 et 5.2 $v_{\text{Gui}}(x) \leq \frac{1}{2}$ et pour tout $p \geq 2$, $j_{0,p}(2\pi)^{-2} > \frac{1}{2}$. Le potentiel effectif v_{Gui} est donc continu en $x = 0$ car :

$$v_{\text{Gui}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{j_{0,1}^2}{2\pi^2}.$$

Les zéros de J_0 étant simples, on sait que $J'(j_{0,1}) \neq 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} J_0(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}) &\underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} (v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1} - j_{0,1})J'(j_{0,1}), \\ Y_0(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}\varepsilon(x)) &\underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2}v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}\varepsilon(x)\right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

De plus, on a :

$$J_0(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}\varepsilon(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1, \quad Y_0(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} Y_0(j_{0,1}). \quad (5.5)$$

Les équations (5.1), (5.4) et (5.5) donnent :

$$\ln\left(\frac{1}{2}v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1}\varepsilon(x)\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{Y_0(j_{0,1})}{(v_{\text{Gui}}(x)^{1/2}\zeta(x)^{-1} - j_{0,1})J'_0(j_{0,1})}.$$

v_{Gui} étant borné, cela achève la démonstration. \square

Les Propositions 5.1, 5.2 et 5.3 permettent de tracer l'allure du potentiel effectif v_{Gui} (voir Figure 5.1).

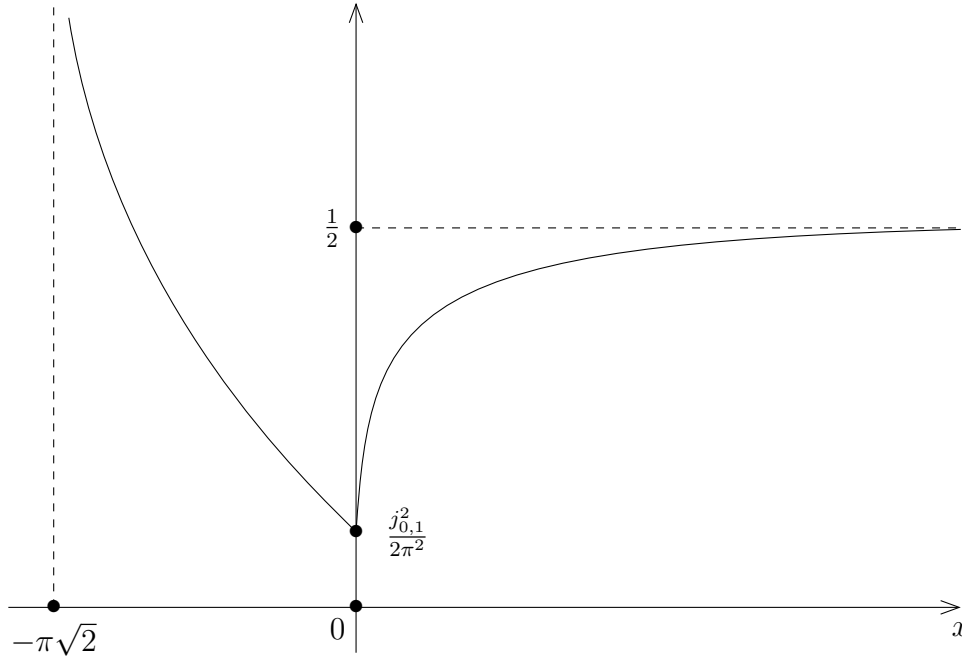


FIG. 5.1 – Allure du potentiel v_{Gui}

5.2 Autour du spectre de l'approximation 1D

Le but de cette partie est d'obtenir des informations sur le spectre de l'opérateur $l_{\text{Gui}}(h)$. On prouve la

Proposition 5.4 On a l'inclusion $[\frac{1}{2}, +\infty) \subset \mathfrak{S}_{\text{ess}}(l_{\text{Gui}}(h))$.

On choisit de le démontrer en utilisant le critère de Weyl présenté en Proposition 2.2. Nous pouvons voir plus immédiatement ce résultat en utilisant le Lemme de Persson 2.3.

Preuve : On va exhiber une suite de Weyl associée à la valeur $\frac{1}{2}$ pour l'opérateur $l_{\text{Gui}}(h)$. On considère une fonction $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$ telle que

$$\text{supp}\chi = [1, 2], \|\chi\|^2 = 1.$$

On définit la suite de fonctions $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\chi_n(x) = \chi(n^{-1}x)$. Par définition on a :

$$\text{supp}\chi_n = [n, 2n], \|\chi_n\|^2 = n.$$

On pose $\Psi_n = n^{-1/2}\chi_n$, on montre que cette suite converge faiblement vers 0 dans $L^2(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$. Pour des considérations de support, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$ on a :

$$\int_{-\pi\sqrt{2}}^{+\infty} \Psi_n \varphi dx = \int_n^{2n} \Psi_n \varphi dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit $\varphi \in L^2(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_0^\infty(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$ telle que $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| \leq \varepsilon$. On sait que

$$|\langle \Psi_n, \varphi \rangle| = |\langle \Psi_n, \varphi - \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \rangle| \leq |\langle \Psi_n, \tilde{\varphi} \rangle| + |\langle \Psi_n, \varphi - \tilde{\varphi} \rangle|,$$

or $|\langle \Psi_n, \tilde{\varphi} \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par Cauchy-Schwarz $|\langle \Psi_n, \varphi - \tilde{\varphi} \rangle| \leq \varepsilon$. On en déduit la convergence faible de Ψ_n vers 0 : $\Psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ensuite, on prouve que

$$\|(l_{\text{Gui}}(h) - \frac{1}{2})\Psi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On sait que

$$\|(l_{\text{Gui}}(h) - \frac{1}{2})\Psi_n\| \leq h^2 \|\partial_x^2 \Psi_n\| + \|(v_{\text{Gui}} - \frac{1}{2})\Psi_n\|,$$

or :

$$\|\partial_x^2 \Psi_n\|^2 = \frac{1}{n} \int_n^{2n} |\partial_x^2 (\chi(n^{-1}x))|^2 dx = \frac{1}{n^5} \int_n^{2n} |\chi''(n^{-1}x)|^2 dx \leq \frac{1}{n^4} \|\chi''\|_\infty^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour l'autre terme on a :

$$\|(v_{\text{Gui}} - \frac{1}{2})\Psi_n\|^2 = \int_n^{2n} |v_{\text{Gui}}(x) - \frac{1}{2}|^2 |\Psi_n(x)|^2 dx.$$

D'après la Proposition 5.2, pour $\varepsilon > 0$ et tout x assez grand on a $|v_{\text{Gui}}(x) - \frac{1}{2}| \leq \sqrt{\varepsilon}$. Donc pour n assez grand $\|(v_{\text{Gui}} - \frac{1}{2})\Psi_n\|^2 \leq \varepsilon$ et ainsi $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie le critère de Weyl :

$$\|\Psi_n\| = 1, \quad \Psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \|(l_{\text{Gui}}(h) - \frac{1}{2})\Psi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et $\frac{1}{2} \in \mathfrak{S}_{\text{ess}}(l_{\text{Gui}}(h))$.

Pour conclure, on montre que pour tout $r > 0$, $\frac{1}{2} + r^2 \in \mathfrak{S}_{\text{ess}}(l_{\text{Gui}})(h)$. Fixons $r > 0$ et considérons la suite de fonctions $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\Phi_n(x) = e^{irxh^{-1}} \Psi_n(x)$. Φ_n vérifie $\|\Phi_n\| = 1$ et $\Phi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, de plus

$$\|(l_{\text{Gui}}(h) - (\frac{1}{2} + r^2))\Phi_n\| \leq \|(-h^2\partial_x^2 - r^2)\Phi_n\| + \|(v_{\text{Gui}} - \frac{1}{2})\Phi_n\|.$$

On a $\|(v_{\text{Gui}} - \frac{1}{2})\Psi_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et pour l'autre terme on a

$$(-h^2\partial_x^2 - r^2)\Phi_n(x) = -\left(\frac{2irh}{n\sqrt{n}}e^{irxh^{-1}}\chi'(n^{-1}x) + \frac{h^2}{n^2\sqrt{n}}e^{irxh^{-1}}\chi''(n^{-1}x)\right),$$

ce qui donne

$$\|(-h^2\partial_x^2 - r^2)\Phi_n\|^2 \leq \frac{4r^2h^2}{n^2}\|\chi'\|_\infty^2 + \frac{h^2}{n^4}\|\chi''\|_\infty^2 + \frac{4rh^3}{n^3}\|\chi'\|_\infty\|\chi''\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Finalement, $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie le critère de Weyl et donc pour tout $r > 0$, $\frac{1}{2} + r^2 \in \mathfrak{S}_{\text{ess}}(l_{\text{Gui}})(h)$. \square

La proposition suivante détermine exactement le spectre essentiel de l'opérateur $l_{\text{Gui}}(h)$:

Proposition 5.5 *On a $\mathfrak{S}_{\text{ess}}(l_{\text{Gui}}(h)) = [\frac{1}{2}, +\infty)$.*

La preuve s'articule autour d'un argument perturbatif : on voit l'opérateur $l_{\text{Gui}}(h)$ comme la perturbation compacte d'un opérateur dont on sait minorer le spectre. Le spectre essentiel étant invariant par perturbation compacte on en déduit la Proposition 5.5. Fixons $\lambda \in ((\pi\sqrt{2})^{-2}j_{0,1}^2, \frac{1}{2})$ et considérons l'application

$$c_\lambda(x) = \begin{cases} v_{\text{Gui}}(x) & \text{si } x \in \{v_{\text{Gui}} > \lambda\}, \\ \lambda & \text{si } x \in \{v_{\text{Gui}} \leq \lambda\}. \end{cases}$$

On remarque que :

$$l_{\text{Gui}}(h) = -h^2\partial_x^2 + c_\lambda(x) + (v_{\text{Gui}}(x) - c_\lambda(x)).$$

On a le

Lemme 5.6 *L'opérateur de multiplication*

$$\begin{cases} \text{Dom}(l_{\text{Gui}}(h)) & \rightarrow L^2(-\pi\sqrt{2}, +\infty) \\ \psi & \mapsto (v_{\text{Gui}}(x) - c_\lambda(x))\psi \end{cases}$$

est compact.

Preuve du lemme : Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $\text{Dom}(l_{\text{Gui}}(h))$, elle est aussi bornée dans $H^1(-\pi\sqrt{2}, +\infty)$.

De plus le support $\text{supp}(v_{\text{Gui}} - c_\lambda) = \{v_{\text{Gui}} \leq \lambda\}$ et est compact.

L'injection $H^1(\{v_{\text{Gui}} \leq \lambda\}) \hookrightarrow L^2(\{v_{\text{Gui}} \leq \lambda\})$ est compacte, à extraction près, il existe

$\psi \in L^2(\{v_{\text{Gui}} \leq \lambda\})$ telle que

$$\psi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \psi \text{ dans } L^2(\{v_{\text{Gui}} \leq \lambda\}).$$

Cette convergence est aussi vraie dans $\text{Dom}(l_{\text{Gui}}(h))$. On a

$$\|(v_{\text{Gui}} - c_\lambda)(\psi_n - \psi)\|^2 \leq \|v_{\text{Gui}} - c_\lambda\|_{L^\infty}^2 \int_{\{v_{\text{Gui}} \leq \lambda\}} |\psi_n(x) - \psi(x)|^2 dx,$$

donc

$$\|(v_{\text{Gui}} - c_\lambda)(\psi_n - \psi)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

◇

Maintenant, on prouve la Proposition 5.5.

Preuve : Le spectre essentiel est invariant par perturbation compacte donc :

$$\mathfrak{S}_{\text{ess}}(-h^2 \partial_x^2 + c_\lambda) = \mathfrak{S}_{\text{ess}}(l_{\text{Gui}}(h)).$$

Le principe du min-max 2.1 donne :

$$\lambda \leq \inf \mathfrak{S}(-h^2 \partial_x^2 + c_\lambda) \leq \inf \mathfrak{S}_{\text{ess}}(-h^2 \partial_x^2 + c_\lambda).$$

Ceci est vrai pour tout $\lambda \in ((\pi\sqrt{2})^{-2} j_{0,1}^2, \frac{1}{2})$ donc on peut conclure

$$\frac{1}{2} \leq \inf \mathfrak{S}_{\text{ess}}(-h^2 \partial_x^2 + c_\lambda) = \inf \mathfrak{S}_{\text{ess}}(l_{\text{Gui}}(h)).$$

□

On termine cette section en justifiant que, dans la limite semi-classique $h \rightarrow 0$, le spectre discret de l'opérateur $l_{\text{Gui}}(h)$ est non vide. On a la

Proposition 5.7 *Pour tout $N_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in (0, h_0)$*

$$\#\mathfrak{S}_{\text{disc}}(l_{\text{Gui}}(h)) \geq N_0.$$

De plus les N_0 premières valeurs propres de $l_{\text{Gui}}(h)$, notée $\hat{\lambda}_{n,\text{Gui}}(h)$, vérifient :

$$\hat{\lambda}_{n,\text{Gui}}(h) \leq (\pi\sqrt{2})^{-2} \hat{\lambda}_{n,\text{Mer}}^{[0]}(h) \text{ et } |\hat{\lambda}_{n,\text{Gui}}(h) - (\pi\sqrt{2})^{-2} j_{0,1}^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3},$$

où Γ_0 est une constante positive qui dépend de N_0 .

Preuve : Au sens des formes quadratiques associées on a l'inégalité suivante :

$$l_{\text{Gui}}(h) \leq (\pi\sqrt{2})^{-2} l_{\text{Mer}}^{[0]}(h) ((\pi\sqrt{2})^{-1} x; \pi\sqrt{2} \partial_x). \quad (5.6)$$

D'après la Proposition 4.1, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in (0, h_0)$

$$(\pi\sqrt{2})^{-2} \hat{\lambda}_{n,\text{Mer}}^{[0]}(h) < \frac{1}{2}, \quad \text{pour } n = 1, \dots, N_0.$$

On applique le principe du min-max 2.1 à l'équation (5.6), on obtient l'existence de valeurs propres $\hat{\lambda}_{n,\text{Gui}}(h)$ telles que :

$$\hat{\lambda}_{n,\text{Gui}}(h) \leq (\pi\sqrt{2})^{-2} \hat{\lambda}_{n,\text{Mer}}^{[0]}(h), \quad \text{pour } n = 1, \dots, N_0.$$

De plus tout $\lambda \in \mathfrak{S}_{\text{disc}}(l_{\text{Gui}}(h))$ vérifie $\lambda \geq \min_x (v_{\text{Gui}}(x)) = (\pi\sqrt{2})^{-2} j_{0,1}^2$. Grâce à (4.6) on obtient

$$|\hat{\lambda}_{n,\text{Gui}}(h) - (\pi\sqrt{2})^{-2} j_{0,1}^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}.$$

□

5.3 Estimées de localisation d'Agmon

On se propose ici de démontrer des estimées de localisation d'Agmon semi-classiques pour l'opérateur $l_{\text{Gui}}(h)$. Elles permettent d'avoir une localisation *a priori* des fonctions propres. D'après la Proposition 5.7, on sait que les plus petites valeurs propres de $l_{\text{Gui}}(h)$ vérifient l'équation :

$$|\hat{\lambda}_{n,\text{Gui}}(h) - j_{0,1}^2 (\pi\sqrt{2})^{-2}| \leq \Gamma_0 h^{2/3}. \quad (5.7)$$

Remarquons d'abord que d'après la Proposition 5.3, pour $0 < \delta < 1$ il existe $r(\delta) > 0$ tel que pour tout $x \in (0, r(\delta))$ on ait :

$$v_{\text{Gui}}(x) \geq j_{0,1}^2 (\pi\sqrt{2})^{-2} + (1 - \delta) \frac{1}{2} j_{0,1} |c_0| |\ln x|^{-1}. \quad (5.8)$$

L'allure du potentiel effectif v_{Gui} conduit à étudier la localisation des fonctions propres sur trois intervalles : $(-\pi\sqrt{2}, 0)$, $(0, r(\delta))$ et $(r(\delta), +\infty)$. On a la

Proposition 5.8 *Soit $\Gamma_0 > 0$. Il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et toute paire propre (λ, ψ) de $l_{\text{Gui}}(h)$ vérifiant $|\lambda - j_{0,1}^2 (\pi\sqrt{2})^{-2}| \leq \Gamma_0 h^{2/3}$, on ait :*

$$\begin{aligned} \int_{-\pi\sqrt{2}}^0 e^{\Phi_1/h} (|\psi|^2 + |h^{2/3} \partial_x \psi|^2) dx &\leq C_0 \|\psi\|^2, \\ \int_0^{r(\delta)} e^{\Phi_2 \sqrt{1-\delta}/h} (|\psi|^2 + |h \partial_x \psi|^2) dx &\leq C_0 \|\psi\|^2, \\ \int_{r(\delta)}^{+\infty} e^{\Phi_3/h} (|\psi|^2 + |h \partial_x \psi|^2) dx &\leq C_0 \|\psi\|^2, \end{aligned}$$

avec

$$\Phi_1(x) = \eta_1 |x|^{3/2}, \quad \Phi_2(x) = \eta_2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|\ln t|}} dt, \quad \Phi_3(x) = \eta_3 (x - r(\delta)) + \eta_2 \sqrt{1-\delta} \int_0^{r(\delta)} \frac{1}{\sqrt{|\ln t|}} dt.$$

Preuve : Dans l'esprit de la Proposition 2.14, on a la formule IMS suivante :

$$\int_{-\pi\sqrt{2}}^0 h^2 |\partial_x \psi|^2 + (v_{\text{Gui}} - \lambda - \Phi'^2) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx = 0.$$

On minore le potentiel v_{Gui} au fond du puit par convexité sur $(-\pi\sqrt{2}, 0)$, par l'estimation (5.8) sur $(0, r(\delta))$ et par $v_{\text{Gui}}(r(\delta))$ sur $(r(\delta), +\infty)$. On a :

$$\int_{-\pi\sqrt{2}}^{+\infty} h^2 |\partial_x \psi|^2 dx + \mathbf{l}_{(-\pi\sqrt{2}, 0)} + \mathbf{l}_{(0, r(\delta))} + \mathbf{l}_{(r(\delta), +\infty)} \leq 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{(-\pi\sqrt{2}, 0)} &= \int_{-\pi\sqrt{2}}^0 \left((2\pi^2)^{-1} j_{0,1}^2 + \frac{j_{0,1}^2}{(\pi\sqrt{2})^3} |x| - \lambda - \Phi'(x)^2 \right) |e^{\Phi(x)/h} \psi|^2 dx, \\ \mathbf{l}_{(0, r(\delta))} &= \int_0^{r(\delta)} \left((2\pi^2)^{-1} j_{0,1}^2 + (1-\delta) \frac{1}{2} j_{0,1} |c_0| |\ln x|^{-1} - \lambda - \Phi'(x)^2 \right) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx, \\ \mathbf{l}_{(r(\delta), +\infty)} &= \int_{r(\delta)}^{+\infty} (v_{\text{Gui}}(r(\delta)) - \lambda - \Phi'(x)^2) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx \end{aligned}$$

On utilise alors l'équation (5.7) ce qui donne :

$$\int_{-\pi\sqrt{2}}^{+\infty} h^2 |\partial_x \psi|^2 dx + \hat{\mathbf{l}}_{(-\pi\sqrt{2}, 0)} + \hat{\mathbf{l}}_{(0, r(\delta))} + \hat{\mathbf{l}}_{(r(\delta), +\infty)} \leq 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{l}}_{(-\pi\sqrt{2}, 0)} &= \int_{-\pi\sqrt{2}}^0 \left(\frac{j_{0,1}^2}{(\pi\sqrt{2})^3} |x| - \Gamma_0 h^{2/3} - \Phi'(x)^2 \right) |e^{\Phi(x)/h} \psi|^2 dx, \\ \hat{\mathbf{l}}_{(0, r(\delta))} &= \int_0^{r(\delta)} \left((1-\delta) \frac{1}{2} j_{0,1} |c_0| |\ln x|^{-1} - \Gamma_0 h^{2/3} - \Phi'(x)^2 \right) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx, \\ \hat{\mathbf{l}}_{(r(\delta), +\infty)} &= \int_{r(\delta)}^{+\infty} (e(\delta) - \Gamma_0 h^{2/3} - \Phi'(x)^2) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx, \end{aligned}$$

avec $e(\delta) = v_{\text{Gui}}(r(\delta)) - (2\pi^2)^{-1} j_{0,1}^2$. On est amené à prendre

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) \mathbf{1}_{(-\pi\sqrt{2}, 0)}(x) + \sqrt{1-\delta} \Phi_2(x) \mathbf{1}_{(0, r(\delta))}(x) + \Phi_3(x) \mathbf{1}_{(r(\delta), +\infty)}(x),$$

où on a, pour des constantes η_1, η_2, η_3 positives :

$$\Phi_1(x) = \eta_1 |x|^{3/2}, \quad \Phi_2(x) = \eta_2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|\ln t|}} dt, \quad \Phi_3(x) = \eta_3 (x - r(\delta)) + \eta_2 \sqrt{1-\delta} \int_0^{r(\delta)} \frac{1}{\sqrt{|\ln t|}} dt.$$

Pour η_1, η_2, η_3 suffisamment petits, il existe $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3$ tels que :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{l}}_{(-\pi\sqrt{2}, 0)} &= \int_{-\pi\sqrt{2}}^0 (\tilde{\eta}_1 |x| - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi(x)/h} \psi|^2 dx, \\ \hat{\mathbf{l}}_{(0, r(\delta))} &= \int_0^{r(\delta)} ((1-\delta) \tilde{\eta}_2 |\ln x|^{-1} - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx, \\ \hat{\mathbf{l}}_{(r(\delta), +\infty)} &= \int_{r(\delta)}^{+\infty} (\tilde{\eta}_3 - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on définit les ensembles

$$\mathcal{E}_{(-\pi\sqrt{2},0)}^1 = \{x \in (-\pi\sqrt{2}, 0) : \tilde{\eta}_1|x| - \Gamma_0 h^{2/3} \geq \varepsilon h^{2/3}\},$$

$$\mathcal{E}_{(-\pi\sqrt{2},0)}^2 = \{x \in (-\pi\sqrt{2}, 0) : \tilde{\eta}_1|x| - \Gamma_0 h^{2/3} \leq \varepsilon h^{2/3}\},$$

$$\mathcal{E}_{(0,r(\delta))}^1 = \{x \in (0, r(\delta)) : (1 - \delta)\tilde{\eta}_2|\ln x|^{-1} - \Gamma_0 h^{2/3} \geq \varepsilon h^{2/3}\},$$

$$\mathcal{E}_{(0,r(\delta))}^2 = \{x \in (0, r(\delta)) : (1 - \delta)\tilde{\eta}_2|\ln x|^{-1} - \Gamma_0 h^{2/3} \leq \varepsilon h^{2/3}\}.$$

On découpe alors les intégrales et on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_0 h^{2/3} \left(\int_{\mathcal{E}_{(-\pi\sqrt{2},0)}^2} |e^{\Phi_1/h}\psi|^2 dx + \int_{\mathcal{E}_{(0,r(\delta))}^2} |e^{\Phi_2\sqrt{1-\delta}/h}|^2 dx \right) &\geq \int_{-\pi\sqrt{2}}^{+\infty} h^2 |\partial_x(e^{\Phi/h}\psi)|^2 \\ &+ \varepsilon h^{2/3} \int_{\mathcal{E}_{(-\pi\sqrt{2},0)}^1} |e^{\Phi_1/h}\psi|^2 dx \\ &+ \varepsilon h^{2/3} \int_{\mathcal{E}_{(0,r(\delta))}^1} |e^{\Phi_2\sqrt{1-\delta}/h}|^2 dx \\ &+ \int_{r(\delta)}^{+\infty} (\tilde{\eta}_3 - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi_3/h}\psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Finalement on aboutit à

$$\begin{aligned} (\varepsilon + \Gamma_0) h^{2/3} \left(\int_{\mathcal{E}_{(-\pi\sqrt{2},0)}^2} |e^{\Phi_1/h}\psi|^2 dx + \int_{\mathcal{E}_{(0,r(\delta))}^2} |e^{\Phi_2\sqrt{1-\delta}/h}|^2 dx \right) &\geq \int_{-\pi\sqrt{2}}^{+\infty} h^2 |\partial_x(e^{\Phi/h}\psi)|^2 \\ &+ \varepsilon h^{2/3} \int_{-\pi\sqrt{2}}^0 |e^{\Phi_1/h}\psi|^2 dx \\ &+ \varepsilon h^{2/3} \int_0^{r(\delta)} |e^{\Phi_2\sqrt{1-\delta}/h}|^2 dx \\ &+ \int_{r(\delta)}^{+\infty} (\tilde{\eta}_3 - \Gamma_0 h^{2/3}) |e^{\Phi_3/h}\psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Les restrictions de Φ_1 à $\mathcal{E}_{(-\pi\sqrt{2},0)}^2$ et Φ_2 à $\mathcal{E}_{(0,r(\delta))}^2$ sont bornées indépendamment de h ce qui conclut la démonstration. \square

Ces estimées de localisation permettent de comprendre à quelles échelles sont localisées les fonctions propres de $l_{\text{Gui}}(h)$. Dans $(-\pi\sqrt{2}, 0)$ elles sont concentrées à une échelle $h^{2/3}$ près du minimum de v_{Gui} . Pour comprendre l'échelle de localisation dans $(0, r(\delta))$ on commence par remarquer que

$$\Phi_2(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \mathcal{O}(x|\ln x|^{-1/2}).$$

On déduit que les fonctions propres seront localisées dans une zone d'ordre $h\sqrt{|\ln h|}$ près du minimum de v_{Gui} . La dernière inégalité assure une décroissance exponentielle des fonctions propres en dehors de la zone $(r(\delta), +\infty)$.

Troisième partie

Triangles asymptotiquement plats

Chapitre 6

Quasimodes pour les triangles asymptotiquement plats

Pour démontrer le Théorème 1.8 nous allons dans un premier temps construire des quasimodes à tout ordre en puissance de $h^{1/3}$ pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ introduit en (1.1). Dans ce chapitre on prouve la

Proposition 6.1 *Soit $s_0 \in [0, 1)$. Pour tout entier $n \geq 1$ il existe des suites $(\beta_{j,n}(s))_{j \geq 0}$ telles que : pour tout $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathbb{N}$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $s \in [-s_0, s_0]$ et tout $h \in (0, h_0)$*

$$\text{dist}\left(\mathfrak{S}(\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)), \sum_{j=0}^J \beta_{j,n}(s) h^{j/3}\right) \leq Ch^{(J+1)/3}, \quad n = 1, \dots, N_0.$$

De plus, les fonctions $(s \mapsto \beta_{j,n}(s))$ sont analytiques sur $(-1, 1)$ et on a : $\beta_{0,n}(s) = \pi^2$, $\beta_{1,n}(s) = 0$, et $\beta_{2,n}(s) = (2\pi^2)^{2/3} \kappa_n(s)$.

Dans un premier temps, on fait un changement de variable qui transforme le triangle $\text{Tri}(s)$ en le rectangle $\text{Rec}(s) = (-1 - s, 1 - s) \times (0, 1)$:

$$\begin{cases} u = x; & t = (1 + s) \frac{y}{x + 1 + s} & \text{pour } -1 - s < x < 0, \\ u = x; & t = -(1 - s) \frac{y}{x - (1 - s)} & \text{pour } 0 < x < 1 - s. \end{cases} \quad (6.1)$$

On rappelle la notation introduite en (3.10) :

$$s_- = 1 + s, \quad s_+ = s - 1.$$

Dans le jeu de coordonnées (u, t) défini en (6.1), on notera respectivement $\mathcal{L}_s^-(h)$ et $\mathcal{L}_s^+(h)$ l'expression de $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ pour $u < 0$ et $u > 0$. On a :

$$\mathcal{L}_s^\pm(h)(u, t; \partial_u, \partial_t) = -h^2 \left(\partial_u^2 - \frac{2t}{u + s_\pm} \partial_u \partial_t + \frac{2t}{(u + s_\pm)^2} \partial_t + \frac{t^2}{(u + s_\pm)^2} \partial_t^2 \right) - \frac{s_\pm}{(u + s_\pm)^2} \partial_t^2. \quad (6.2)$$

Les conditions aux limites sont celles de Dirichlet sur $(-1, 1) \times \{0\}$ et $(-1, 1) \times \{1\}$.

La Proposition 6.1 se démontre en trois étapes. En Section 6.1 on discute de la forme de l'Ansatz choisi pour la construction des quasimodes. Ensuite, la Section 6.2 est consacrée à la preuve de trois lemmes au sujet d'opérateurs qui apparaissent en Section 6.1. On détermine finalement les profils de l'Ansatz en Section 6.3.

6.1 Ansatz et couche limite

On veut construire des quasimodes $(\gamma_{s,h}, \psi_{s,h})$ pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)(x, y; \partial_x, \partial_y)$. Il sera plus aisé de travailler dans le rectangle $\text{Rec}(s)$ avec les opérateurs $\mathcal{L}_s^\pm(h)(u, t; \partial_u, \partial_t)$. On introduit les nouvelles échelles :

$$\alpha = h^{-2/3}u; \quad \beta = h^{-1}u.$$

On cherche des quasimodes $\hat{\psi}_{s,h}(u, t) = \psi_{s,h}(x, y)$. À gauche et à droite, on les cherche de la forme :

$$\psi_s^\pm(u, t) \sim \sum_{j \geq 0} [\Psi_{s,j}^\pm(\alpha, t) + \Phi_{s,j}^\pm(\beta, t)] h^{j/3},$$

associés à la quasi valeur propre :

$$\gamma_{s,h} \sim \sum_{j \geq 0} \beta_j(s) h^{j/3},$$

afin de résoudre l'équation aux valeurs propres au sens des séries formelles. Un Ansatz contenant la seule échelle $h^{2/3}$ n'est pas suffisant pour construire les quasimodes car on peut montrer que le système est surdéterminé (voir l'analogie dans le cas de cônes de petite ouverture en Section 11.4). On développe les opérateurs en puissances de $h^{2/3}$, on obtient les séries formelles :

$$\mathcal{L}_s^\pm(h)(h^{2/3}\alpha, t; h^{-2/3}\partial_\alpha, \partial_t) \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{L}_{s,2j}^\pm h^{j/3}, \quad \text{avec pour terme dominant } \mathcal{L}_{s,0}^\pm = \mathcal{L}_0^\pm = -\partial_t^2,$$

et en puissances de h :

$$\mathcal{L}_s^\pm(h)(h\beta, t; h^{-1}\partial_\beta, \partial_t) \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{N}_{s,3j}^\pm h^{j/3}, \quad \text{avec pour terme dominant } \mathcal{N}_{s,0}^\pm = \mathcal{N}_0^\pm = -\partial_\beta^2 - \partial_t^2,$$

On considère ces opérateurs sur les demies bandes $H_- = (-\infty, 0) \times (0, 1)$ et $H_+ = (0, \infty) \times (0, 1)$. À gauche et à droite, le terme dominant à l'échelle $h^{2/3}$ est, dans la variable transverse t , le Laplacien de Dirichlet sur $(0, 1)$. À l'échelle h le terme dominant est le Laplacien sur une demie bande. Pour ces deux échelles les termes dominants des opérateurs ne dépendent pas de s . Comme $\psi_{s,h}$ n'a pas de saut en $x = 0$, ψ_s^- et ψ_s^+ doivent vérifier, à l'interface $I = \{0\} \times (0, 1)$ et pour tout $t \in (0, 1)$, les deux conditions de transmissions suivantes :

$$\psi_s^-(0, t) = \psi_s^+(0, t) \quad \text{et} \quad (\partial_u - \frac{t}{s_-} \partial_t) \psi_s^-(0, t) = (\partial_u - \frac{t}{s_+} \partial_t) \psi_s^+(0, t),$$

En terme de séries formelles, pour tout $t \in (0, 1)$ et tout $j \geq 0$, ces conditions de transmissions s'écrivent :

$$\Psi_{s,j}^-(0, t) + \Phi_{s,j}^-(0, t) = \Psi_{s,j}^+(0, t) + \Phi_{s,j}^+(0, t), \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
& \partial_\alpha \Psi_{s,j-1}^-(0, t) + \partial_\beta \Phi_{s,j}^-(0, t) - \frac{t}{s_-} \partial_t \Psi_{s,j-3}^-(0, t) - \frac{t}{s_-} \partial_t \Phi_{s,j-3}^-(0, t) \\
& = \partial_\alpha \Psi_{s,j-1}^+(0, t) + \partial_\beta \Phi_{s,j}^+(0, t) - \frac{t}{s_+} \partial_t \Psi_{s,j-3}^+(0, t) - \frac{t}{s_+} \partial_t \Phi_{s,j-3}^+(0, t),
\end{aligned} \tag{6.4}$$

où les termes associés à un indice négatif sont nuls. Enfin, pour vérifier les conditions de Dirichlet sur $\text{Tri}(s)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on impose à notre Ansatz les conditions aux limites :

$$\Psi_{s,j}^\pm(\cdot, 0 \text{ et } 1) = 0; \quad \Phi_{s,j}^\pm(\cdot, 0 \text{ et } 1) = 0. \tag{6.5}$$

6.2 Trois lemmes

Pour commencer la construction de notre Ansatz, nous avons besoin de trois lemmes. On introduit la suite $(\mathfrak{s}_j)_{j \geq 1}$ des fonctions propres associés aux valeurs propres du Laplacien de Dirichlet sur le segment $(0, 1)$. On a $\mathfrak{s}_j(t) = \sqrt{2} \sin(j\pi t)$ et cette fonction propre est associée à la valeur propre $j^2\pi^2$.

Dans les lemmes suivants, l'analyticité des solutions est une conséquence directe de l'analyticité des données.

Lemma 6.2 *Soient $F_s^- = F_s^-(\beta, t)$ et $F_s^+ = F_s^+(\beta, t)$ des fonctions respectivement de $L_{\text{exp}}^2(\mathbf{H}_-)$ et $L_{\text{exp}}^2(\mathbf{H}_+)$, dépendant analytiquement de $s \in (-1, 1)$. Soit $G_s \in H^{3/2}(I) \cap H_0^1(I)$ et $H_s \in H^{1/2}(I)$ des données à l'interface I , dépendantes analytiquement de $s \in (-1, 1)$. Alors, pour tout $s \in (-1, 1)$ il existe deux coefficients ξ_s et δ_s uniques tels que le problème de transmission :*

$$\begin{cases}
(\mathcal{N}_0^\pm - \pi^2)\Phi_s^\pm = F_s^\pm & \text{dans } \mathbf{H}_\pm, \quad \Phi_s^\pm(\cdot, 0 \text{ et } 1) = 0, \\
\Phi_s^-(0, t) - \Phi_s^+(0, t) = G_s(t) + \xi_s \mathfrak{s}_1(t) \\
\partial_\beta \Phi_s^-(0, t) - \partial_\beta \Phi_s^+(0, t) = H_s(t) + \delta_s \mathfrak{s}_1(t),
\end{cases}$$

ait une unique solution (Φ_s^-, Φ_s^+) dans $H_{\text{exp}}^2(\mathbf{H}_-) \times H_{\text{exp}}^2(\mathbf{H}_+)$ et on a

$$\begin{aligned}
\xi_s &= - \int_{-\infty}^0 \langle F_s^-(\beta, \cdot), \mathfrak{s}_1 \rangle_t \beta d\beta - \int_0^{+\infty} \langle F_s^+(\beta, \cdot), \mathfrak{s}_1 \rangle_t \beta d\beta - \langle G_s, \mathfrak{s}_1 \rangle_t, \\
\delta_s &= \int_{-\infty}^0 \langle F_s^-(\beta, \cdot), \mathfrak{s}_1 \rangle_t d\beta - \int_0^{+\infty} \langle F_s^+(\beta, \cdot), \mathfrak{s}_1 \rangle_t d\beta - \langle H_s, \mathfrak{s}_1 \rangle_t.
\end{aligned}$$

De plus ξ_s, G_s et (Φ_s^-, Φ_s^+) dépendent analytiquement de $s \in (-1, 1)$.

Preuve du lemme : On cherche une solution (Φ_s^-, Φ_s^+) que l'on décompose, dans les coordonnées transverses, selon la base des fonctions propres du Laplacien de Dirichlet sur $(0, 1)$:

$$\Phi_s^\pm(\beta, t) = \sum_{j \geq 1} \Phi_{s,j}^\pm(\beta) \mathfrak{s}_j(t).$$

Pour tout $j \geq 1$, les équations suivantes sont satisfaites :

$$(-\partial_\beta^2 + \pi^2(j^2 - 1))\Phi_{s,j}^\pm = \langle F_s^\pm, \mathfrak{s}_j \rangle_t,$$

et on cherche des solutions à décroissance exponentielle. Pour $j = 1$, on trouve :

$$\Phi_{s,1}^-(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} \int_{-\infty}^{\beta_1} \langle F_s^-(\beta_2, \cdot), \mathfrak{s}_1 \rangle_t d\beta_2 d\beta_1, \quad \Phi_{s,1}^+(\beta) = - \int_{\beta}^{+\infty} \int_{\beta_1}^{+\infty} \langle F_s^+(\beta_2, \cdot), \mathfrak{s}_1 \rangle_t d\beta_2 d\beta_1.$$

Grâce aux données à l'interface I on trouve les expressions de ξ_s et δ_s . Pour $j \geq 2$, on résout les équations différentielles. En tenant compte des décroissances exponentielles et des données à l'interface I on prouve le Lemme 6.2. \diamond

Le lemme suivant est une conséquence de l'alternative de Fredholm, on peut le trouver dans [DR12, Sec. 5] ou en Section 11.2 :

Lemme 6.3 Soit $F_s^\pm = F_s^\pm(\alpha, t)$ une fonction de $L_{\text{exp}}^2(\mathbb{H}_\pm)$, dépendant analytiquement de $s \in (-1, 1)$. Alors, il existe des solutions $\Psi_s^\pm \in H_{\text{exp}}^2(\mathbb{H}_\pm)$ telles que :

$$(\mathcal{L}_0^\pm - \pi^2)\Psi_s^\pm = F_s^\pm \quad \text{dans } \mathbb{H}_\pm, \quad \Psi_s^\pm(\alpha, 0 \text{ et } 1) = 0$$

si et seulement si :

$$\langle F_s^\pm(\alpha, \cdot), \mathfrak{s}_1 \rangle_t = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_\pm^*.$$

Dans ce cas, elles s'écrivent :

$$\Psi_s^\pm(\alpha, t) = \Psi_s^{\pm, \perp}(\alpha, t) + g_s^\pm(\alpha) \mathfrak{s}_1(t),$$

avec $\Psi_s^{\pm, \perp} \in H_{\text{exp}}^2(\mathbb{H}_\pm)$. De plus, $\Psi_s^\pm, \Psi_s^{\pm, \perp}$ et g_s^\pm sont analytiques en le paramètre s .

Lemme 6.4 Soit $f_s^- = f_s^-(\alpha) \in L_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_-)$, $f_s^+ = f_s^+(\alpha) \in L_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+)$ et $c_s, \theta_s \in \mathbb{R}$ dépendant analytiquement de $s \in (-1, 1)$. Il existe un unique $\omega(s)$ tel que le système

$$\begin{cases} \left(-\partial_\alpha^2 - \frac{\alpha}{1+s} - \kappa_n(s) \right) g_s^- = f_s^- + \omega(s) \mathbb{T}_s^n & \text{dans } \mathbb{R}_-, \quad g_s^+(0) - g_s^-(0) = c_s \\ \left(-\partial_\alpha^2 + \frac{\alpha}{1-s} - \kappa_n(s) \right) g_s^+ = f_s^+ + \omega(s) \mathbb{T}_s^n & \text{dans } \mathbb{R}_+, \quad (g_s^{\text{rig}})'(0) - (g_s^{\text{lef}})'(0) = \theta_s, \end{cases}$$

ait une unique solution $(g_s^-, g_s^+) \in H_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_-) \times H_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+)$. De plus g_s^-, g_s^+ et $\omega(s)$ dépendent analytiquement du paramètre s .

Preuve du lemme : On pose $g_s = g_s^- \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} + g_s^+ \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$. Au sens des distributions on a :

$$(l_s^{\text{mod}} - \kappa_n(s))g_s = (l_s^{\text{mod}} - \kappa_n(s))(g_s^- \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}) + (l_s^{\text{mod}} - \kappa_n(s))(g_s^+ \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}).$$

Après calculs on trouve :

$$(l_s^{\text{mod}} - \kappa_n(s))g_s = f_s + \omega(s) \mathbb{T}_s^n - \theta_s \delta_0 - c_s \delta_0',$$

où $f_s = f_s^- \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-} + f_s^+ \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ et δ_0 est la masse de Dirac en $\alpha = 0$. On définit alors la fonction m :

$$m(\alpha) = (\theta_s \alpha + c_s) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}.$$

Au sens des distributions on a :

$$m'(\alpha) = \theta_s \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} + c_s \delta_0, \quad m''(\alpha) = \theta_s \delta_0 + c_s \delta_0'.$$

On introduit une fonction troncature régulière χ qui vaut 1 près de 0. Enfin, on définit la fonction auxiliaire $\tilde{g}_s = g_s - \chi m$ et on obtient :

$$(l_s^{\text{mod}} - \kappa_n(s))\tilde{g}_s = f_s + \omega(s)\Gamma_s^n + ((\partial_\alpha^2 \chi)m + 2\theta_s(\partial_\alpha \chi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - v_s^{\text{mod}}(\alpha)\chi m + \kappa_n(s)\chi m). \quad (6.6)$$

Par définition, \tilde{g}_s appartient au domaine de forme de l'opérateur l_s^{mod} . Le membre de droite de l'équation (6.6) est dans $L^2(\mathbb{R})$ donc \tilde{g}_s est aussi dans le domaine de l'opérateur l_s^{mod} . Par conséquent, l'égalité (6.6) est aussi vraie dans $L^2(\mathbb{R})$. On applique l'alternative de Fredholm pour trouver une solution \tilde{g}_s et $\omega(s)$, ce dernier vérifiant :

$$\omega(s) = \langle (v_s^{\text{mod}} - \kappa_n(s))\chi m - (\partial_\alpha^2 \chi)m - 2\theta_s(\partial_\alpha \chi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - f_s, \Gamma_s^n \rangle.$$

Ce qui conclut la preuve du Lemme 6.4. ◇

En Section 6.3, lors de la construction des quasimodes, on utilise une version renormalisée de ce lemme.

6.3 Détermination des profils

On peut maintenant commencer la construction de notre Ansatz.

Termes d'ordre h^0 Écrivons les équations dans les demies bandes :

$$\mathbf{H}_{\pm, \alpha} : -\partial_t^2 \Psi_{s,0}^\pm = \gamma_0(s)\Psi_{s,0}^\pm \quad \mathbf{H}_{\pm, \beta} : -(\partial_t^2 + \partial_\beta^2)\Phi_{s,0}^\pm = \gamma_0(s)\Phi_{s,0}^\pm.$$

Les conditions de transmissions sont :

$$\begin{aligned} (\Psi_{s,0}^- + \Phi_{s,0}^-)(0, t) &= (\Psi_{s,0}^+ + \Phi_{s,0}^+)(0, t), \\ (\partial_\beta \Phi_{s,0}^- - \partial_\beta \Phi_{s,0}^+)(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Grâce aux conditions de Dirichlet (6.5), on a :

$$\gamma_0(s) = \pi^2, \quad \Psi_{s,0}^\pm(\alpha, t) = g_{s,0}^\pm(\alpha)\mathfrak{s}_1(t).$$

On applique alors le Lemme 6.2 avec $F_s^- \equiv 0$, $F_s^+ \equiv 0$, $G_s \equiv 0$ et $H_s \equiv 0$ pour obtenir :

$$\xi_s = 0 \quad \text{et} \quad \delta_s = 0.$$

On en déduit que $\Phi_{s,0}^- \equiv 0$ et $\Phi_{s,0}^+ \equiv 0$ et, puisque $\xi_s = g_{s,0}^+(0) - g_{s,0}^-(0)$, $g_{s,0}^+(0) = g_{s,0}^-(0)$. À cette étape $g_{s,0}^\pm$ n'est pas encore déterminé.

Termes d'ordre $h^{1/3}$ Les équations dans les demies bandes sont :

$$\mathbf{H}_{\pm,\alpha} : (-\partial_t^2 - \pi^2)\Psi_{s,1}^{\pm} = \gamma_1(s)\Psi_{s,0}^{\pm} \quad \mathbf{H}_{\pm,\beta} : (-\partial_t^2 - \partial_\beta^2 - \pi^2)\Phi_{s,1}^{\pm} = 0.$$

Les conditions de transmissions sont :

$$(\Phi_{s,1}^- + \Psi_{s,1}^-)(0, t) = (\Phi_{s,1}^+ + \Psi_{s,1}^+)(0, t),$$

$$(\partial_\alpha \Psi_{s,0}^- + \partial_\beta \Phi_{s,1}^-)(0, t) = (\partial_\alpha \Psi_{s,0}^+ + \partial_\beta \Phi_{s,1}^+)(0, t).$$

On prend aussi en compte les conditions de Dirichlet (6.5). Le Lemme 6.3 donne :

$$\gamma_1(s) = 0, \quad \Psi_{s,1}^{\pm}(\alpha, t) = g_{s,1}^{\pm}(\alpha)\mathfrak{s}_1(t).$$

On applique alors le Lemme 6.2 avec $F_s^- \equiv 0$, $F_s^+ \equiv 0$, $G_s \equiv 0$ et $H_s \equiv 0$, on a :

$$\xi_s = 0, \quad \delta_s = 0.$$

Comme $\xi_s = g_{s,1}^+(0) - g_{s,1}^-(0)$ et $\delta_s = (g_{s,0}^+)'(0) - (g_{s,0}^-)'(0)$ on aboutit à :

$$g_{s,1}^+(0) = g_{s,1}^-(0), \quad (g_{s,0}^+)'(0) = (g_{s,0}^-)'(0).$$

On en déduit également que $\Phi_{s,1}^- \equiv 0$ et $\Phi_{s,1}^+ \equiv 0$.

Termes d'ordre $h^{2/3}$ Les équations dans les demies bandes s'écrivent :

$$\mathbf{H}_{\pm,\alpha} : (-\partial_t^2 - \pi^2)\Psi_{s,2}^{\pm} = -\mathcal{L}_{s,2}^{\pm}\Psi_{s,0}^{\pm} + \gamma_2(s)\Psi_{s,0}^{\pm} \quad \mathbf{H}_{\pm,\beta} : (-\partial_t^2 - \partial_\beta^2 - \pi^2)\Phi_{s,2}^{\pm} = 0$$

où on a :

$$\mathcal{L}_{s,2}^{\pm} = \frac{2\alpha}{s_{\pm}}\partial_t^2 - \partial_\alpha^2.$$

Les conditions de transmissions sont :

$$(\Psi_{s,2}^- + \Phi_{s,2}^-)(0, t) = (\Psi_{s,2}^+ + \Phi_{s,2}^+)(0, t),$$

$$\partial_\alpha \Psi_{s,1}^-(0, t) + \partial_\beta \Phi_{s,2}^-(0, t) = \partial_\alpha \Psi_{s,1}^+(0, t) + \partial_\beta \Phi_{s,2}^+(0, t).$$

On prend en compte les conditions de Dirichlet (6.5). Ensuite, on applique une version renormalisée du Lemme 6.3. Par conséquent, il existe une solution $(\Psi_{s,2}^-, \Psi_{s,2}^+)$ si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} \left(-\partial_\alpha^2 - \frac{2\alpha\pi^2}{1+s} - \gamma_2(s) \right) g_{s,0}^-(\alpha) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_-, & g_{s,0}^+(0) - g_{s,0}^-(0) = 0 \\ \left(-\partial_\alpha^2 + \frac{2\alpha\pi^2}{1-s} - \gamma_2(s) \right) g_{s,0}^+(\alpha) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+, & (g_{s,0}^+)'(0) - (g_{s,0}^-)'(0) = 0. \end{cases}$$

Ceci nous conduit à choisir :

$$\gamma_2(s) = (2\pi^2)^{2/3}\kappa_n(s); \quad g_{s,0}(\alpha) = \mathbb{T}_s^n((2\pi^2)^{1/3}\alpha),$$

avec $g_{s,0}^\pm(\alpha) = \mathbb{T}_s^n((2\pi^2)^{1/3}\alpha)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_\pm}(\alpha)$. En particulier, cela détermine la fonction inconnue de l'étape précédente (ce choix de $g_{s,0}$ donne une expression explicite de $\Psi_{s,0}^\pm$). On est amené à prendre :

$$\Psi_{s,2}^\pm(\alpha, t) = \Psi_{s,2}^{\pm,\perp}(\alpha, t) + g_{s,2}^\pm(\alpha)\mathfrak{s}_1(t),$$

avec $\Psi_{s,2}^{+,\perp} \equiv 0$ et $\Psi_{s,2}^{-,\perp} \equiv 0$. Finalement on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} (-\partial_t^2 - \partial_\beta^2 - \pi^2)\Phi_{s,2}^\pm = 0 \text{ sur } \mathbb{H}_\pm, \\ \Phi_{s,2}^\pm(\cdot, 0 \text{ et } 1) = 0, \\ \Phi_{s,2}^-(0, t) - \Phi_{s,2}^+(0, t) = (g_{s,2}^+(0) - g_{s,2}^-(0))\mathfrak{s}_1(t) \\ \partial_\beta\Phi_{s,2}^-(0, t) - \partial_\beta\Phi_{s,2}^+(0, t) = ((g_{s,1}^+)'(0) - (g_{s,1}^-)'(0))\mathfrak{s}_1(t). \end{cases}$$

On applique alors le Lemme 6.2 avec $F_s^- \equiv 0$, $F_s^+ \equiv 0$, $G_s \equiv 0$ et $H_s \equiv 0 = ((g_{s,1}^+)'(0) - (g_{s,1}^-)'(0))\mathfrak{s}_1(t)$. On obtient :

$$\xi_s = g_{s,2}^+(0) - g_{s,2}^-(0) = 0, \quad \delta_s = (g_{s,1}^+)'(0) - (g_{s,1}^-)'(0) = 0,$$

ce qui donne $\Phi_{s,2}^+ \equiv 0$, $\Phi_{s,2}^- \equiv 0$.

Termes d'ordre h Les équations dans les demies bandes sont :

$$\mathbb{H}_{\pm,\alpha} : (-\partial_t^2 - \pi^2)\Psi_{s,3}^\pm = \gamma_3(s)\Psi_{s,0}^\pm \quad \mathbb{H}_{\pm,\beta} : (-\partial_t^2 - \partial_\beta^2 - \pi^2)\Phi_{s,3}^\pm = 0$$

Les conditions de transmissions sont :

$$(\Psi_{s,3}^- + \Phi_{s,3}^-)(0, t) = (\Psi_{s,3}^+ + \Phi_{s,3}^+)(0, t),$$

$$\partial_\alpha\Psi_{s,2}^-(0, t) + \partial_\beta\Phi_{s,3}^-(0, t) - \frac{t}{s_-}\partial_t\Psi_{s,0}^-(0, t) = \partial_\alpha\Psi_{s,2}^+(0, t) + \partial_\beta\Phi_{s,3}^+(0, t) - \frac{t}{s_+}\partial_t\Psi_{s,0}^+(0, t).$$

On prend aussi en compte les conditions de Dirichlet (6.5). Le Lemme 6.3 donne :

$$\gamma_3(s) = 0, \quad \Psi_{s,3}^\pm(\alpha, t) = g_{s,3}^\pm(\alpha)\mathfrak{s}_1(t).$$

On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} (-\partial_t^2 - \partial_\beta^2 - \pi^2)\Phi_{s,3}^\pm = 0 \text{ sur } \mathbb{H}_\pm, \\ \Phi_{s,3}^\pm(\cdot, 0 \text{ et } 1) = 0 \\ \Phi_{s,3}^-(0, t) - \Phi_{s,3}^+(0, t) = (g_{s,3}^+(0) - g_{s,3}^-(0))\mathfrak{s}_1(t) \\ (\partial_\beta\Phi_{s,3}^- - \partial_\beta\Phi_{s,3}^+)(0, t) = ((g_{s,2}^+)'(0) - (g_{s,2}^-)'(0))\mathfrak{s}_1(t) + g_{s,0}^+(0)\left(\frac{t\pi}{1-s} + \frac{t\pi}{1+s}\right)\cos(\pi t). \end{cases}$$

Ensuite on applique le Lemme 6.2 avec $F_s^- \equiv 0$, $F_s^+ \equiv 0$, $G_s \equiv 0$ et

$H_s(t) = g_{s,0}^+(0) \left(\frac{t\pi}{1-s} + \frac{t\pi}{1+s} \right) \cos(\pi t)$ et on obtient :

$$\xi_s = g_{s,3}^+(0) - g_{s,3}^-(0) = 0, \quad \delta_s = (g_{s,2}^+)'(0) - (g_{s,2}^-)'(0) = -\frac{2\sqrt{2}\pi}{1-s^2} \mathbb{T}_s^n(0) \langle t \cos(\pi t), \mathfrak{s}_1 \rangle_t.$$

Cela détermine $\Phi_{s,3}^-$ et $\Phi_{s,3}^+$ qui ne sont pas nécessairement nuls.

Récurrence Supposons que, pour tout $0 \leq k \leq n$, on puisse écrire $\Psi_{s,k}^\pm(\alpha, t) = \Psi_{s,k}^{\pm,\perp}(\alpha, t) + g_{s,k}^\pm(\alpha) \mathfrak{s}_1(t)$ et que $(g_{s,k}^\pm)_{0 \leq k \leq n-3}$, $(\Psi_{s,k}^{\pm,\perp})_{0 \leq k \leq n-1}$ soient déterminées. Supposons que $g_{s,n-2}^-(0) - g_{s,n-2}^+(0)$, $(g_{s,n-2}^-)'(0) - (g_{s,n-2}^+)'(0)$, $(\gamma_k(s))_{0 \leq k \leq n}$ et $(\Phi_{s,k}^\pm)_{0 \leq k \leq n-2}$ soient déjà connues. Enfin, on suppose que $g_{s,n-1}^-(0) - g_{s,n-1}^+(0)$, $\Phi_{s,n-1}^\pm$ sont connues une fois que $g_{s,n-2}^-$ et $g_{s,n-2}^+$ sont déterminées et que toutes ces fonctions sont à décroissance exponentielle avec une dépendance analytique en $s \in (-1, 1)$.

Les équations dans les demies bandes sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{\pm,\alpha} : \quad & (-\partial_t^2 - \pi^2) \Psi_{s,n}^\pm = \gamma_n(s) \Psi_{s,0}^\pm - \mathcal{L}_{s,n}^\pm \Psi_{s,0}^\pm - \sum_{j=2}^{n-1} (\mathcal{L}_{s,j}^\pm - \gamma_j(s)) \Psi_{s,n-j}^\pm \\ \mathbb{H}_{\pm,\beta} : \quad & (-\partial_t^2 - \partial_\gamma^2 - \pi^2) \Phi_{s,n}^\pm = - \sum_{j=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{s,j}^\pm - \gamma_j(s)) \Phi_{s,n-j}^\pm. \end{aligned}$$

Les conditions de transmissions sont :

$$(\Psi_{s,n}^- + \Phi_{s,n}^-(0, t) = (\Psi_{s,n}^+ + \Phi_{s,n}^+(0, t)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\beta \Phi_{s,n}^- - \partial_\beta \Phi_{s,n}^+)(0, t) &= ((g_{s,n-1}^+)'(0) - (g_{s,n-1}^-)'(0)) \mathfrak{s}_1(t) + (\partial_\alpha \Psi_{s,n-1}^{+,\perp} - \partial_\alpha \Psi_{s,n-1}^{-,\perp})(0, t) \\ &+ \frac{t}{1+s} (\partial_t \Psi_{s,n-3}^{-,\perp} + \partial_t \Phi_{s,n-3}^-)(0, t) + \frac{t}{1-s} (\partial_t \Psi_{s,n-3}^{+,\perp} + \partial_t \Phi_{s,n-3}^+)(0, t) \\ &+ \sqrt{2}\pi \left(\frac{1}{1+s} g_{s,n-3}^-(0) + \frac{1}{1-s} g_{s,n-3}^+(0) \right) t \cos(\pi t). \end{aligned}$$

Pour appliquer le Lemme 6.3 on doit résoudre les équations :

$$\begin{aligned} \left(-\partial_\alpha^2 - \frac{2\alpha}{1+s} \pi^2 - \gamma_2(s) \right) g_{s,n-2}^-(\alpha) &= \gamma_n(s) g_{s,0}^-(\alpha) + f_s^-(\alpha), \\ \left(-\partial_\alpha^2 + \frac{2\alpha}{1-s} \pi^2 - \gamma_2(s) \right) g_{s,n-2}^+(\alpha) &= \gamma_n(s) g_{s,0}^+(\alpha) + f_s^+(\alpha). \end{aligned}$$

On peut appliquer le Lemme 6.4 car f_s^\pm , $g_{s,n-2}^-(0) - g_{s,n-2}^+(0)$ et $(g_{s,n-2}^-)'(0) - (g_{s,n-2}^+)'(0)$ sont connues. Cela livre un unique $\gamma_n(s)$, de plus $g_{s,n-2}^\pm$ sont maintenant déterminées. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on en déduit que les fonctions $\Phi_{s,n-1}^\pm$ sont maintenant déterminées. Le Lemme 6.3 détermine $\Psi_{s,n}^{\pm,\perp}$ de manière unique et on a :

$$\Psi_{s,n}^\pm(\alpha, t) = \Psi_{s,n}^{\pm,\perp}(\alpha, t) + g_{s,n}^\pm(\alpha) \mathfrak{s}_1(t).$$

Le système est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{N}_{s,0}^{\pm} - \pi^2)\Phi_{s,n}^{\pm} = F_s^{\pm}, \text{ sur } \mathbf{H}_{\pm}, \\ \Phi_{s,n}^{\pm}(\cdot, 0 \text{ et } 1) = 0, \\ \Phi_{s,n}^{-}(0, t) - \Phi_{s,n}^{+}(0, t) = (\Psi_{s,n}^{+, \perp} - \Psi_{s,n}^{-, \perp})(0, t) + (g_{s,n}^{-}(0) - g_{s,n}^{+}(0))\mathfrak{s}_1(t). \\ \partial_{\beta}\Phi_{s,n}^{-}(0, t) - \partial_{\beta}\Phi_{s,n}^{+}(0, t) = H_s(t) + ((g_{s,n-1}^{+})'(0) - (g_{s,n-1}^{-})'(0))\mathfrak{s}_1(t), \end{array} \right.$$

où H_s est connu. On applique le Lemme 6.2 ce qui détermine $g_{s,n}^{-}(0) - g_{s,n}^{+}(0)$, $(g_{s,n-1}^{+})'(0) - (g_{s,n-1}^{-})'(0)$, $\Phi_{s,n}^{-}$ et $\Phi_{s,n}^{+}$.

Dès lors, on peut prouver la Proposition 6.1.

Preuve : La construction précédente nous incite à introduire

$$\widehat{\psi}_{s,h}^{[J]}(u, t) = \sum_{j=0}^{J+2} (\Psi_{s,j}^{\pm}(uh^{-2/3}, t) + \Phi_{s,j}^{\pm}(uh^{-1}, t))h^{j/3} - u\chi^{\pm}(uh^{-1})R_{J,s,h}^{\pm}(p), \text{ pour } u \in \mathbb{R}_{\pm}. \quad (6.7)$$

où les termes correcteurs

$$R_{J,s,h}^{\pm}(t) = \partial_{\alpha}\Psi_{s,J+2}^{\pm}(0, t)h^{J/3} - \frac{t}{s_{\pm}} \sum_{j=J}^{J+2} (\partial_t\Psi_{s,j}^{\pm}(0, t) + \partial_t\Phi_{s,j}^{\pm}(0, t))$$

sont ajoutés pour que $\widehat{\psi}_{s,h}^{[J]}$ satisfasse les conditions de transmissions (χ^{\pm} sont deux fonctions troncature régulières valant 1 près de 0). Par construction $\psi_{s,h}^{[J]}$ définie par

$$\psi_{s,h}^{[J]}(x, y) = \chi(u)\widehat{\psi}_{s,h}^{[J]}(u, t)$$

appartient au domaine de l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$. Grâce à la décroissance exponentielle, pour tout $s_0 \in (-1, 1)$, $J \in \mathbb{N}$ on obtient l'existence de $h_0 > 0$, $C(J, s_0, h_0) > 0$ tels que pour tout $s \in [-s_0, s_0]$ et tout $h \in (0, h_0)$:

$$\left\| (\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h) - \sum_{j=0}^J \gamma_j(s)h^{j/3})\psi_{s,h}^{[J]} \right\| \leq C(J, s_0, h_0)h^{(J+1)/3}.$$

On conclut en invoquant le théorème spectral 2.5. □

Chapitre 7

Simplicité asymptotique

La Proposition 6.1 nous donne une majoration des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$. Pour obtenir une minoration et démontrer le Théorème 1.8 on utilise des estimées d'Agmon qui localisent les fonctions propres de $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ dans $\text{Tri}(s)$. Cette localisation permet de se ramener à l'opérateur en dimension un étudié au Chapitre 3.

7.1 Estimées de localisation d'Agmon

Afin de prouver le Théorème 1.8 nous avons besoin d'estimées de localisation d'Agmon semi-classiques pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$. Grâce aux Propositions 1.7 et 6.1 on remarque que pour $s_0 \in (0, 1)$ les N_0 plus petites valeurs propres λ_s de $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ vérifient pour tout $s \in [-s_0, s_0]$:

$$|\lambda_s - \pi^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}, \quad (7.1)$$

où Γ_0 est une constante positive dépendant de N_0 et s_0 . On définit $\text{Tri}^\pm(s) = \text{Tri}(s) \cap \{x \in \mathbb{R}_\pm\}$. Par définition du potentiel effectif (3.1), pour toute fonction $\psi \in \text{Dom}(\text{Tri}(s))$ on a :

$$\int_{\text{Tri}(s)} h^2 |\partial_x \psi|^2 + |\partial_y \psi|^2 dx dy \geq \int_{\text{Tri}(s)} h^2 |\partial_x \psi|^2 + v_{\text{Tri}(s)}(x) |\psi|^2 dx dy.$$

On peut alors reprendre la preuve de la Proposition 3.3 et on obtient la

Proposition 7.1 *Soit $s_0 \in [0, 1)$. Soient $\Gamma_0 > 0$ et $\rho_0 \in (0, \pi)$. Il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $\eta_0 > 0$ tels que pour tout $s \in [-s_0, s_0]$, $h \in (0, h_0)$ et toute paire propre (λ_s, ψ_s) de $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ vérifiant $|\lambda_s - \pi^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}$, on ait :*

$$\int_{\text{Tri}^\pm(s)} e^{\Phi_1^\pm(x)/h} (|\psi_s|^2 + |h^{2/3} \partial_x \psi_s|^2) dx dy \leq C_0 \|\psi_s\|^2 \text{ et } \int_{\text{Tri}^\pm(s)} e^{\Phi_2^\pm(x)/h} (|\psi_s|^2 + |h \partial_x \psi_s|^2) dx dy \leq C_0 \|\psi_s\|^2,$$

avec

$$\Phi_1^\pm(x) = \frac{\eta_0}{\sqrt{|s_\pm|}} |x|^{3/2} \text{ et } \Phi_2^\pm(x) = -\rho_0 |s_\pm| \ln \left(1 + \frac{x}{s_\pm} \right).$$

Dans le régime $h \rightarrow 0$, la Proposition 7.1 localise les fonctions propres de $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ dans un voisinage de $\text{Tri}(s) \cap \{x = 0\}$ et nous donne des estimées de décroissance en dehors de cet ensemble. Ces

estimées justifient que les projetés de Feshbach-Grushin des vraies fonctions propres de $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ soient des bons quasimodes pour l'opérateur tangent $l_s^{\text{tan}}(h)$ défini en (3.2).

7.2 Approximation des premières fonctions propres par des produits tensoriels

Dans cette section on travaille avec l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Rec}(s)}(h)$ défini à gauche et à droite par $\mathcal{L}_s^\pm(h)$ (voir (6.2)). On considère les N_0 premières valeurs propres de $\mathcal{L}_{\text{Rec}(s)}(h)$ (notées simplement $\lambda_{s,n}(h)$). Dans chaque espace propre correspondant on choisit une fonction normalisée $\hat{\psi}_{s,n}$ telle que $\langle \hat{\psi}_{s,n}, \hat{\psi}_{s,p} \rangle = 0$ si $n \neq p$. On introduit :

$$\widehat{\mathcal{S}}_{s,N_0}(h) = \text{span}(\hat{\psi}_{s,1}, \dots, \hat{\psi}_{s,N_0}).$$

On suit ensuite les idées de [DR12, Sec. 4.3] et on définit la forme quadratique :

$$Q_{\text{Rec}(s)}^0(\hat{\psi}_s) = \int_{\text{R}_-(s)} (|\partial_t \hat{\psi}_s|^2 - \pi^2 |\hat{\psi}_s|^2) \left(1 + \frac{u}{s_-}\right) du dt + \int_{\text{R}_+(s)} (|\partial_t \hat{\psi}_s|^2 - \pi^2 |\hat{\psi}_s|^2) \left(1 + \frac{u}{s_+}\right) du dt,$$

où $\text{R}_-(s) = \text{Rec}(s) \cap \{u \leq 0\}$ et $\text{R}_+(s) = \text{Rec}(s) \cap \{u \geq 0\}$. On considère la projection :

$$\Pi_0 \hat{\psi}_s(u, t) = \langle \hat{\psi}_s(u, \cdot), \mathfrak{s}_1 \rangle_t \mathfrak{s}_1(t).$$

On peut maintenant énoncer un premier résultat d'approximation :

Proposition 7.2 *Soit $s_0 \in (0, 1)$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $s \in [-s_0, s_0]$, tout $h \in (0, h_0)$ et tout $\hat{\psi}_s \in \widehat{\mathcal{S}}_{s,N_0}(h)$:*

$$0 \leq Q_{\text{Rec}(s)}(\hat{\psi}_s) \leq Ch^{2/3} \|\hat{\psi}_s\|^2$$

et

$$\|(\text{Id} - \Pi_0)\hat{\psi}_s\| + \|\partial_t((\text{Id} - \Pi_0)\hat{\psi}_s)\| \leq Ch^{1/3} \|\hat{\psi}_s\|.$$

De plus $\Pi_0 : \widehat{\mathcal{S}}_{s,N_0} \rightarrow \Pi_0(\widehat{\mathcal{S}}_{s,N_0})$ est un isomorphisme.

Preuve : On utilise le même raisonnement que dans [DR12, Sec 4.3] ou en Section 12.2. \square

7.3 Réduction à l'opérateur tangent

Le but de cette section est de démontrer le Théorème 1.8 en utilisant les projections des vraies fonctions propres $(\Pi_0 \hat{\psi}_{s,n})$ en tant que fonctions tests pour la forme quadratique de l'opérateur modèle. Soit $\hat{\psi} \in \widehat{\mathcal{S}}_{s,N_0}(h)$. Nous avons besoin des deux lemmes suivants afin de contrôler la forme quadratique de l'opérateur modèle testé sur $(\Pi_0 \hat{\psi})$. Ces lemmes découlent de la Proposition 7.1.

Lemma 7.3 Soit $s_0 \in (0, 1)$. Pour tout $\widehat{\psi} \in \widehat{\mathcal{S}}_{s, N_0}$ il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $s \in [-s_0, s_0]$ et tout $h \in (0, h_0)$:

$$\left| h^2 \int_{\mathbb{R}_{\pm}(s)} \partial_u \widehat{\psi}_s \partial_t \widehat{\psi}_s t \left(1 + \frac{u}{s_{\pm}} \right) du dt \right|^2 \leq C h^{4/3} \|\widehat{\psi}_s\|^2,$$

Lemma 7.4 Soit $s_0 \in (0, 1)$ et $\widehat{\psi}_s \in \widehat{\mathcal{S}}_{s, N_0}(h)$. Il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $s \in [-s_0, s_0]$ et tout $h \in (0, h_0)$:

$$\left| \frac{h^2}{s_{\pm}} \int_{\mathbb{R}_{\pm}(s)} |\partial_u \widehat{\psi}_s|^2 |u| du dt \right| \leq C h^{4/3} \|\widehat{\psi}_s\|^2, \quad \left| \frac{1}{s_{\pm}^2} \int_{\mathbb{R}_{\pm}(s)} |\widehat{\psi}_s|^2 |u|^2 du dt \right| \leq C h^{4/3} \|\widehat{\psi}_s\|^2.$$

Ces deux lemmes se prouvent de façon analogue à ceux Section 12.3. On prouve alors la

Proposition 7.5 Soit $s_0 \in (0, 1)$, $\widehat{\psi}_s \in \widehat{\mathcal{S}}_{s, N_0}(h)$. Il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $s \in [-s_0, s_0]$ et $h \in (0, h_0)$ on ait :

$$\mathcal{Q}_s^{\tan}(h)(\widehat{\psi}_s) \leq (\lambda_{s, N_0}(h) - \pi^2) \|\widehat{\psi}_s\|^2 + C h^{4/3} \|\widehat{\psi}_s\|^2,$$

où

$$\mathcal{Q}_s^{\tan}(h)(\widehat{\psi}_s) = \int_{\mathbb{R}_-(s)} h^2 |\partial_u \widehat{\psi}_s|^2 + \frac{2\pi^2}{1+s} |u| |\widehat{\psi}_s|^2 du dt + \int_{\mathbb{R}_+(s)} h^2 |\partial_u \widehat{\psi}_s|^2 + \frac{2\pi^2}{1-s} |u| |\widehat{\psi}_s|^2 du dt.$$

On remarque que $\mathcal{Q}_s^{\tan}(h)$ est, au terme constant près, la forme quadratique de l'opérateur tangent (3.2).

Preuve : Prenons $\psi_s \in \mathcal{S}_{s, N_0}(h)$. Comme les $(\psi_{s, j})_{j \in \{1, \dots, N_0\}}$ sont orthogonales, on a :

$$\mathcal{Q}_{\text{Tri}(s)}(h)(\psi_s) \leq \lambda_{s, N_0}(h) \|\psi_s\|^2,$$

où $\mathcal{Q}_{\text{Tri}(s)}(h)$ désigne la forme quadratique associée à l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$. Par définition, pour tout $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\text{Tri}(s)}(h))$ on a :

$$\mathcal{Q}_{\text{Tri}(s)}(h)(\psi) \geq \int_{\text{Tri}(s)} h^2 |\partial_x \psi|^2 + v_{\text{Tri}(s)}(x) |\psi|^2 dx dy,$$

La dernière inégalité combinée à la convexité du potentiel $v_{\text{Tri}(s)}$ donne :

$$\int_{\text{Tri}(s)} h^2 |\partial_x \psi_s|^2 + 2\pi^2 \left(\frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x)}{1+s} + \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)}{1-s} \right) |x| |\psi_s|^2 dx dy \leq (\lambda_{s, N_0}(h) - \pi^2) \|\psi_s\|^2.$$

On effectue alors le changement de variable (6.1) afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_s^{\tan}(h)(\hat{\psi}_s) &\leq (\lambda_{s,N_0}(h) - \pi^2) \|\hat{\psi}_s\|^2 + \frac{h^2}{s_-} \int_{\mathbb{R}_-(s)} |\hat{\psi}_s|^2 |u| \, du dt + \frac{h^2}{|s_+|} \int_{\mathbb{R}_+(s)} |\hat{\psi}_s|^2 |u| \, du dt \\ &\quad + \frac{2\pi^2}{s_-^2} \int_{\mathbb{R}_-(s)} |\hat{\psi}_s|^2 |u|^2 \, du dt + \frac{2\pi^2}{s_+^2} \int_{\mathbb{R}_+(s)} |\hat{\psi}_s|^2 |u|^2 \, du dt \\ &\quad + 2h^2 \int_{\mathbb{R}_-(s)} t \partial_u \hat{\psi}_s \partial_t \hat{\psi}_s \left(1 + \frac{u}{s_-}\right) \, du dt - 2h^2 \int_{\mathbb{R}_+(s)} t \partial_u \hat{\psi}_s \partial_t \hat{\psi}_s \left(1 + \frac{u}{s_+}\right) \, du dt \end{aligned}$$

Pour avoir la Proposition 7.5 on applique les Lemmes 7.3 et 7.4 en prenant en compte (7.1). \square

Preuve du Théorème 1.8 On applique la Proposition 7.2 au résultat de la Proposition 7.5 ce qui livre :

$$\mathcal{Q}_s^{\tan}(h)(\hat{\psi}_s) \leq (\lambda_{s,N_0}(h) - \pi^2) \|\Pi_0 \hat{\psi}_s\|^2 + Ch^{4/3} \|\Pi_0 \hat{\psi}_s\|^2.$$

Alors, l'équation (7.1) et le Lemme 7.2 donnent :

$$\mathcal{Q}_s^{\tan}(h)(\hat{\psi}_s) \leq (\lambda_{s,N_0}(h) - \pi^2) \|\Pi_0 \hat{\psi}_s\|_{L^2(\text{Rec}(s))}^2 + Ch^{4/3} \|\Pi_0 \hat{\psi}_s\|_{L^2(\text{Rec}(s))}^2.$$

De plus, on a

$$\mathcal{Q}_s^{\tan}(h)(\hat{\psi}_s) = \mathcal{Q}_s^{\tan}(h)(\Pi_0 \hat{\psi}_s) + \mathcal{Q}_s^{\tan}(h)((\text{Id} - \Pi_0) \hat{\psi}_s) + 2\mathcal{B}_s^{\tan}(h)(\Pi_0 \hat{\psi}_s, (\text{Id} - \Pi_0) \hat{\psi}_s),$$

où $\mathcal{B}_s^{\tan}(h)$ est la forme bilinéaire associée à $\mathcal{Q}_s^{\tan}(h)$. On remarque que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_s^{\tan}(h)(\Pi_0 \hat{\psi}_s, (\text{Id} - \Pi_0) \hat{\psi}_s) &= \int_{\mathbb{R}_-(s)} \langle \Pi_0 \left((-h^2 \partial_u^2 + \frac{2\pi^2}{1+s} |u|) \psi_s \right), (\text{Id} - \Pi_0) \hat{\psi}_s \rangle_t \, du dt + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}_+(s)} \langle \Pi_0 \left((-h^2 \partial_u^2 + \frac{2\pi^2}{1-s} |u|) \psi_s \right), (\text{Id} - \Pi_0) \hat{\psi}_s \rangle_t \, du dt = 0. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\mathcal{Q}_s^{\tan}(h)(\Pi_0 \hat{\psi}_s) \leq (\lambda_{s,N_0}(h) - \pi^2) \|\Pi_0 \hat{\psi}_s\|_{L^2(\text{Rec}(s))}^2 + Ch^{4/3} \|\Pi_0 \hat{\psi}_s\|_{L^2(\text{Rec}(s))}^2.$$

Maintenant la conclusion est classique. On note $\pi_0 \hat{\psi}_s = \langle \hat{\psi}_s(u, \cdot), \mathfrak{s}_1 \rangle_t$. On considère une fonction troncature régulière χ valant 1 pour $|u| \leq \frac{1}{4}$ et 0 pour $|u| \geq \frac{1}{2}$. On définit $\chi_s(u) = \chi\left(\frac{u}{1-s}\right)$, il vient :

$$q_s^{\tan}(h)(\chi_s \pi_0 \hat{\psi}_s) \leq (\lambda_{s,N_0}(h) - \pi^2) \|\pi_0 \hat{\psi}_s\|^2 + Ch^{4/3} \|\pi_0 \hat{\psi}_s\|^2,$$

où

$$q_s^{\tan}(h)(\varphi) = \int_{-1-s}^{1-s} h^2 |\partial_u \varphi|^2 + 2\pi^2 \left(\frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(u)}{1+s} + \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)}{1-s} \right) |u| |\varphi|^2 \, du.$$

Enfin, on considère l'espace $\widehat{s}_{s,N_0}(h) = \text{vect}(\pi_0\widehat{\psi}_{s,1}, \dots, \pi_0\widehat{\psi}_{s,N_0})$ et on applique le principe du min-max 2.1 sur $\chi_s\widehat{s}_{s,N_0}(h)$ (de dimension N_0) :

$$\pi^2 + (2\pi^2)^{2/3}\kappa_{N_0}(s)h^{2/3} \leq \lambda_{s,N_0}(h).$$

Couplé à la Proposition 6.1, cela conclut la preuve du Théorème 1.8.

Chapitre 8

Simulations numériques pour les triangles

On illustre certaines propriétés théoriques des paires propres de $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ à l'aide de simulations numériques. Les calculs sont effectués sur le domaine géométrique $\text{Tri}(s)$ avec la librairie d'éléments finis Melina++ [LM12].

8.1 Choix du maillage

Le constructeur de maillage qu'on utilise prend en entrée quatre points : A, B, C et D ainsi que le nombre de subdivisions souhaitées. Pour les points A, B et C on choisit les sommets du triangle $\text{Tri}(s)$. Le point D , quant à lui, est un élément du segment $[A, B]$. Nous obtenons donc deux triangles ACD et BCD dans lesquels nous allons créer le même nombre de subdivisions. Cette construction semble pertinente au regard de la couche limite rencontrée dans la construction 6.7.

La Figure 8.1 représente, pour $s = 0.8$, les maillages selon les différentes subdivisions. La colonne hauteur correspond au cas où D est choisi tel que $[CD]$ soit la hauteur de $\text{Tri}(s)$, de la même façon la colonne médiane correspond au cas où D est choisi tel que $[CD]$ soit la médiane de $\text{Tri}(s)$.

Les Figures 8.2 et 8.3 représentent, pour trois subdivisions, les taux de convergences des trois premières valeurs propres vers $2/3$; respectivement dans les cas où le maillage utilise la hauteur ou la médiane. Dans les deux cas, on remarque un décrochage pour de petites valeurs de h . Toutefois, au moins pour la première valeur propre (en bleue), le maillage construit avec la hauteur permet d'aller jusqu'à des valeurs plus petites.

8.2 Allure des paires propres

On utilise un maillage triangulaire avec 4 subdivisions de type hauteur et un degré d'interpolation de 6. Avec $s = 0.8$, la Figure 8.4 représente les quatre premières valeurs propres en fonction du paramètre semi-classique h . Le point noir sur l'axe des ordonnées est la valeur π^2 .

La Figure 8.5 rend compte du terme dominant dans la construction (6.7) : c'est presque un produit tensoriel de la fonction propre de l'opérateur modèle et de la fonction sinus (respectivement le long des abscisses et des ordonnées). Les fonctions propres sont localisées près de la hauteur du triangle ce qui concide avec les estimées d'Agmon 7.1.

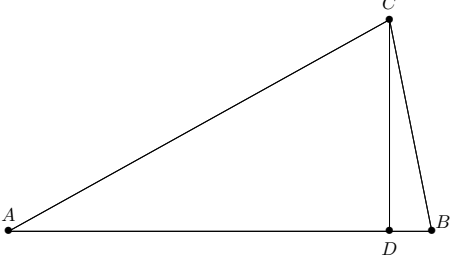
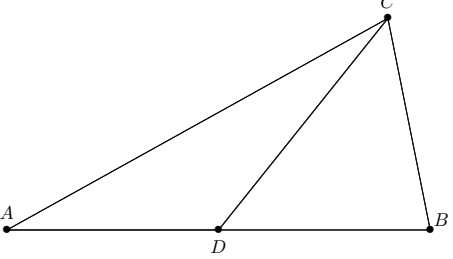
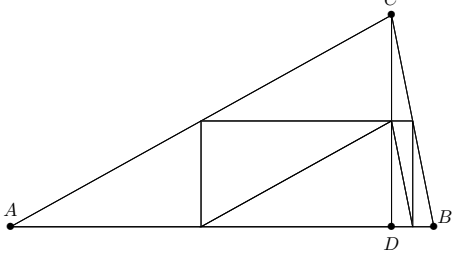
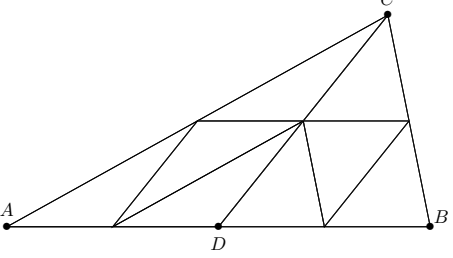
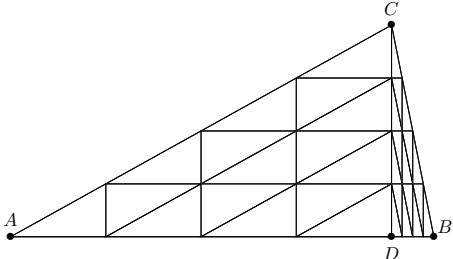
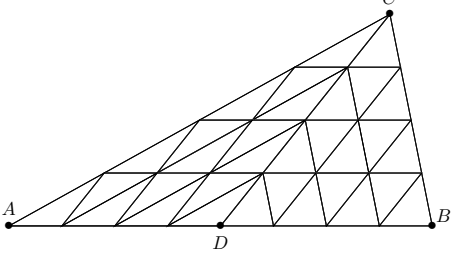
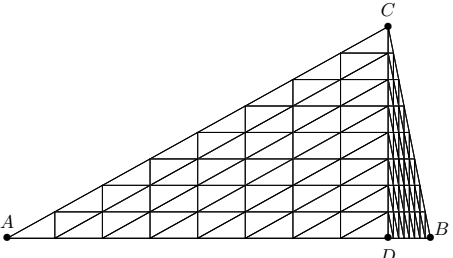
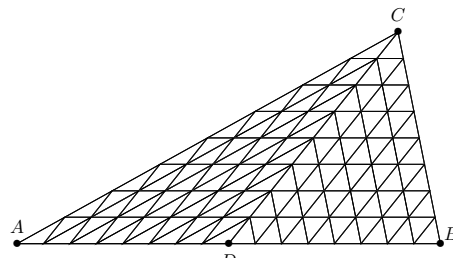
Nombre de subdivisions	Hauteur	Médiane
0		
1		
2		
3		

FIG. 8.1 – Différents maillages du triangle $\text{Tri}(s)$

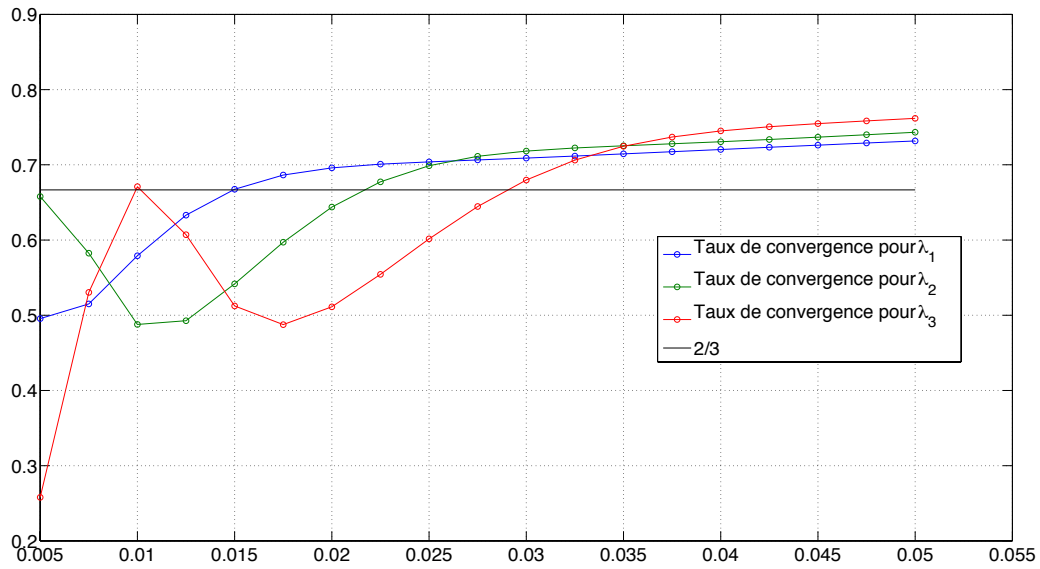


FIG. 8.2 – Taux de convergence vers $2/3$ des trois premières valeurs propres pour un maillage de type hauteur avec $s = 0.8$ et trois subdivisions.

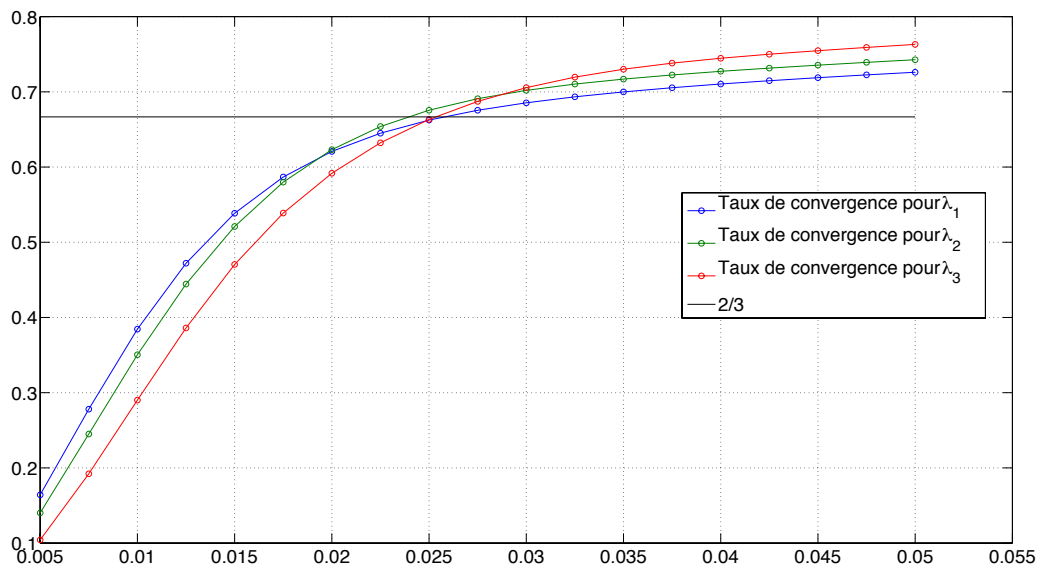
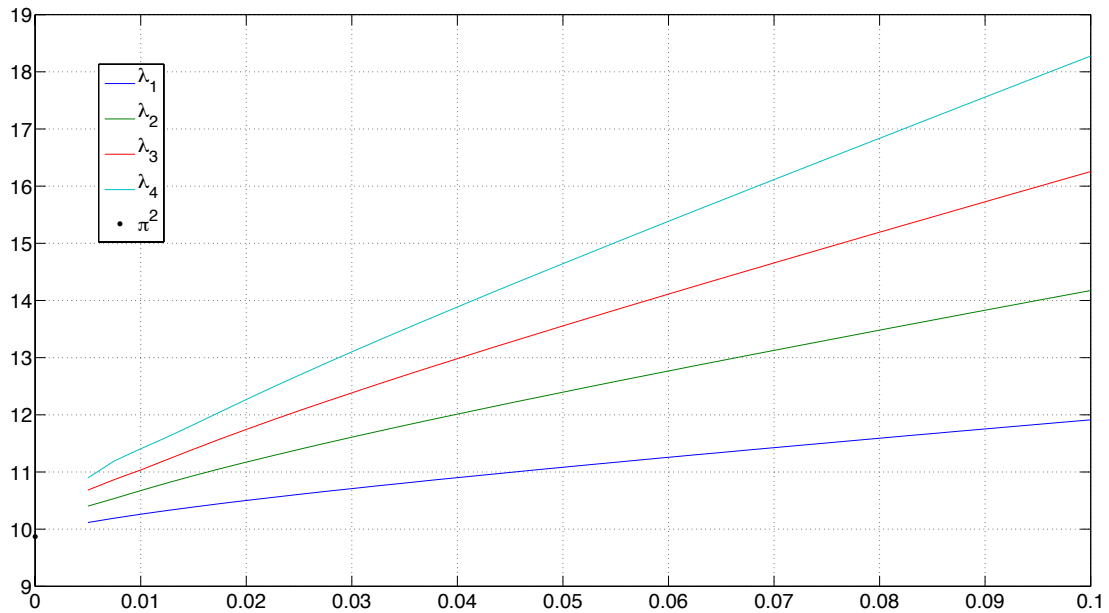
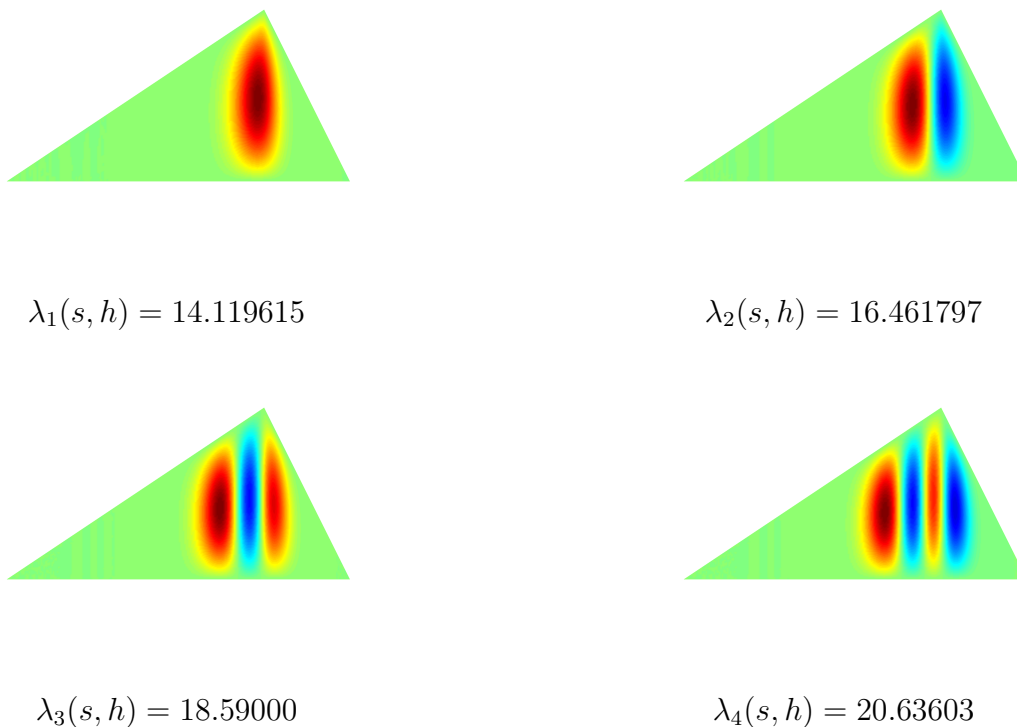


FIG. 8.3 – Taux de convergence vers $2/3$ des trois premières valeurs propres pour un maillage de type médiane avec $s = 0.8$ et trois subdivisions.

FIG. 8.4 – Allure des quatre premières valeurs propres en fonction de h .FIG. 8.5 – Cette figure représente les quatre premières fonctions propres de $\mathcal{L}_{\text{Tri}(s)}(h)$ et leurs valeurs propres correspondantes pour $s = 0.5$ et $h = 0.1$.

Chapitre 9

Effet tunnel dans un bonnet d'âne

Le but de ce chapitre est de prouver le Théorème 1.9. Pour cela, on suit la philosophie de [HS84] à propos de l'effet tunnel. Après avoir prouvé des estimées de localisation d'Agmon dans 9.1 on étudie le "splitting" des valeurs propres dans 9.2.

9.1 Estimées de localisation d'Agmon

Pour mettre en évidence l'effet tunnel nous avons besoin d'estimées de localisation d'Agmon sur Ω pour les fonctions propres des opérateurs $\mathcal{L}_\Omega(h)$, $\mathcal{L}_{\Omega^{\text{lef}}}(h)$ and $\mathcal{L}_{\Omega^{\text{rig}}}(h)$ définis en (1.3) et (1.4).

Estimées d'Agmon pour $\mathcal{L}_\Omega(h)$ entre les deux pics

Proposition 9.1 *Soit $\Gamma_0 > 0$. Il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et toute paire propre (ζ, ψ) de $\mathcal{L}_\Omega(h)$ vérifiant $|\zeta - \pi^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}$, on a :*

$$\int_{\Omega \cap \{(-s/2, s/2) \times \mathbb{R}\}} |\psi|^2 + |h^{2/3} \partial_x \psi|^2 dx dy \leq C_0 e^{-C/h} \|\psi\|^2.$$

Preuve : Soit Φ une fonction lipschitzienne, si (ζ, ψ) est une paire propre de $\mathcal{L}_\Omega(h)$, on a la formule IMS (voir Proposition 2.14) :

$$\int_{\Omega} h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 + |e^{\Phi/h} \partial_y \Psi|^2 - |\Phi' e^{\Phi/h} \psi|^2 - \zeta |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx dy = 0.$$

Par conséquent on a :

$$\int_{\Omega} h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 + v_\Omega(x) |e^{\Phi/h} \Psi|^2 - |\Phi' e^{\Phi/h} \psi|^2 - \zeta |e^{\Phi/h} \psi|^2 dx dy \leq 0.$$

On définit les intervalles :

$$\mathcal{I}_1 = (-1, -s), \quad \mathcal{I}_2 = (-s, 0), \quad \mathcal{I}_3 = (0, s), \quad \mathcal{I}_4 = (s, 1).$$

Soit $\Omega_j = \Omega \cap \{\mathcal{I}_j \times \mathbb{R}\}$. Alors, par convexité de v_Ω près de chaque minimum et pour des raisons de symétrie on a :

$$\int_{\Omega} h^2 |\partial_x (e^{\Phi/h} \psi)|^2 dx dy + \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega_j} (\pi^2 + t_j(x) - \zeta - \Phi'(x)^2) |e^{\Phi} \psi|^2 dx dy \leq 0,$$

où on a :

$$t_1(x) = -\frac{2\pi^2}{1-s}(x+s), \quad t_2(x) = \frac{\pi^2}{s}(x+s), \quad t_3(x) = -\frac{\pi^2}{s}(x-s), \quad t_4(x) = \frac{2\pi^2}{1-s}(x-s).$$

On utilise ensuite le même raisonnement que dans la preuve de la Proposition 7.1 et, grâce à la symétrie, on obtient l'existence de $C_0 > 0$ tel que :

$$\int_{\Omega} e^{2\Phi(x)/h} (|\psi|^2 + |h^{2/3} \partial_x \psi|^2) dx dy \leq C_0 \|\psi\|^2, \quad (9.1)$$

avec, pour certains $\eta_1, \eta_2 > 0$:

$$\Phi(x) = \eta_1 |x+s|^{3/2} \mathbf{1}(-1, -s)(x) + \eta_2 |x+s|^{3/2} \mathbf{1}(-s, 0)(x) + \eta_2 |x-s|^{3/2} \mathbf{1}(0, s)(x) + \eta_1 |x-s|^{3/2} \mathbf{1}(s, 1)(x).$$

On a $\mathbf{1}_{(-s/2, s/2)} \Phi \leq \Phi$. De plus, il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que :

$$\tilde{C} \leq \Phi(x), \forall x \in (-s/2, s/2).$$

Combiné à (9.1), cela livre pour une constante $C > 0$:

$$\int_{\Omega \cap \{(-s/2, s/2) \times \mathbb{R}\}} |\psi|^2 + |h^{2/3} \partial_x \psi|^2 dx dy \leq C_0 e^{-C/h} \|\psi\|^2.$$

□

Estimées de localisation d'Agmon pour $\mathcal{L}_{\Omega^{\text{lef}}}(h)$ and $\mathcal{L}_{\Omega^{\text{rig}}}(h)$ De la même façon que pour la Proposition 9.1 et en adaptant la preuve de la Proposition 7.1 on a la

Proposition 9.2 Soit $\Gamma_0 > 0$. Il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et toute paire propre (λ, ψ) de $\mathcal{L}_{\Omega^{\text{lef}}}(h)$ vérifiant $|\lambda - \pi^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}$, on a :

$$\int_{\Omega^{\text{lef}} \cap \{(-s/2, 0) \times \mathbb{R}\}} |\psi|^2 + |h^{2/3} \partial_x \psi|^2 dx dy \leq C_0 e^{-C/h} \|\psi\|^2.$$

La proposition s'adapte pour $\mathcal{L}_{\Omega^{\text{rig}}}(h)$.

9.2 Structure du spectre

Afin de prouver le Théorème 1.9 on a besoin de la

Proposition 9.3 *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et tout $j \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\lambda_{2j-1, \Omega}(h) \leq C_0 e^{-C/h} + \lambda_j(h), \quad \lambda_{2j, \Omega}(h) \leq C_0 e^{-C/h} + \lambda_j(h).$$

Preuve : Soient χ^{lef} et χ^{rig} des fonctions troncatures régulières telles que $\chi^{\text{lef}}(x) = 1$ pour tout $x \in (-1, -s/2)$ et $\chi^{\text{lef}}(x) = 0$ pour tout $x \in (-s/4, 0)$ et $\chi^{\text{rig}}(x) = \chi^{\text{lef}}(-x)$ pour tout $x \in (-1, 1)$. On prend ψ_j^{lef} et ψ_j^{rig} deux fonctions propres associées à $\lambda_j(h)$, respectivement pour $\mathcal{L}_{\Omega^{\text{lef}}}(h)$ et $\mathcal{L}_{\Omega^{\text{rig}}}(h)$. On définit l'espace de dimension deux $E_j = \text{span}(\chi^{\text{lef}} \psi_j^{\text{lef}}, \chi^{\text{rig}} \psi_j^{\text{rig}}) \subset \text{Dom}(\mathcal{L}_{\Omega}(h))$. Soit $\psi \in E_j$, d'après la Proposition 9.2 il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$:

$$\|(\mathcal{L}(h) - \lambda_j(h))\psi\| \leq C_0 e^{-C/h} \|\psi\|.$$

D'après le théorème spectral il existe $k_1(j, h) \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|\lambda_{k_1(j, h), \Omega}(h) - \lambda_j(h)| \leq C_0 e^{-C/h}.$$

Néanmoins, comme $\dim(E_j) = 2$ on peut trouver un autre $k_2(j, h) \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|\lambda_{k_2(j, h), \Omega}(h) - \lambda_j(h)| \leq C_0 e^{-C/h}.$$

Sans perte de généralité on suppose que $k_1(j, h) < k_2(j, h)$. Maintenant, on prouve en trois étapes que $k_1(j, h) \geq 2j$.

$(j \mapsto k_1(j, h))$ et $(j \mapsto k_2(j, h))$ sont des fonctions injectives Supposons que $k_1(j_1, h) = k_1(j_2, h)$. On a :

$$|\lambda_{j_1}(h) - \lambda_{k_1(j_1, h), \Omega}(h)| \leq C_0 e^{-C/h}, \quad |\lambda_{j_2}(h) - \lambda_{k_1(j_2, h), \Omega}(h)| \leq C_0 e^{-C/h},$$

ce qui donne

$$|\lambda_{j_1}(h) - \lambda_{j_2}(h)| \leq 2C_0 e^{-C/h}.$$

Toutefois, deux valeurs propres distinctes dans le spectre de $\mathfrak{L}(h)$ vérifient $|\lambda_{j_1}(h) - \lambda_{j_2}(h)| \geq \tilde{C} h^{2/3}$, pour un certain $\tilde{C} > 0$. Par conséquent $j_1 = j_2$. La preuve est la même pour $k_2(j, h)$.

$(j \mapsto k_1(j, h))$ et $(j \mapsto k_2(j, h))$ sont des fonctions croissantes Soit $j_2 > j_1$, on a :

$$\lambda_{k_1(j_2, h), \Omega}(h) \geq \lambda_{j_2}(h) - C_0 e^{-C/h}, \quad \lambda_{k_1(j_1, h), \Omega}(h) \leq \lambda_{j_1}(h) + C_0 e^{-C/h}.$$

On obtient :

$$\lambda_{k_1(j_2, h), \Omega}(h) - \lambda_{k_1(j_1, h), \Omega}(h) \geq \lambda_{j_2}(h) - \lambda_{j_1}(h) - 2C_0 e^{-C/h},$$

où le membre de droite est positif pour h assez petit. Nécessairement $k_1(j_2, h) \geq k_1(j_1, h)$ et grâce à la première étape $k_1(j_1, h) > k_1(j_2, h)$. Le même raisonnement fonctionne pour $k_2(j_1, h)$ et $k_2(j_2, h)$. De plus on peut démontrer de la même manière que $\lambda_{k_2(j_1, h), \Omega}(h) < \lambda_{k_2(j_2, h), \Omega}(h)$.

Récurrence Pour $j = 1$ on a $k_2(j, h) > k_1(j, h) \geq 1$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $k_2(j, h) > k_1(j, h) > 2j$. À l'aide des étapes précédentes on a :

$$k_1(j+1, h) > k_2(j, h) > k_1(j, h) \geq 2j.$$

On en déduit que $k_1(j+1, h) \geq 2j+2$. Comme $k_2(j+1, h) > k_1(j+1, h)$, on a $k_2(j+1, h) \geq 2j+3$, ce qui achève la récurrence et démontre la Proposition 9.3. \square

On prouve désormais qu'il y a au plus deux valeurs propres de $\mathcal{L}_\Omega(h)$ à une distance d'ordre $\mathcal{O}(e^{-C/h})$ d'une valeur propre de $\mathfrak{L}(h)$.

Proposition 9.4 Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $C_0 > 0$, $C > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in (0, h_0)$ et tout $j \in \{1, \dots, N\}$:

$$\#\{\lambda_\Omega(h) \in \mathfrak{S}(\mathcal{L}_\Omega(h)); |\lambda_j(h) - \lambda_\Omega(h)| \leq C_0 e^{-C/h}\} \leq 2.$$

Preuve : Supposons qu'il existe $\lambda_{j_1, \Omega}(h) < \lambda_{j_2, \Omega}(h) < \lambda_{j_3, \Omega}(h)$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{L}_\Omega(h))$ tels que, pour tout $p \in \{1, 2, 3\}$, on ait :

$$|\lambda_j(h) - \lambda_{j_p, \Omega}(h)| \leq C_0 e^{-C/h}.$$

On considère la famille de fonctions orthonormales $(\varphi_{j_p})_{p \in \{1, 2, 3\}}$ où, pour $p \in \{1, 2, 3\}$, φ_{j_p} est une fonction propre de $\mathcal{L}_\Omega(h)$ associée à $\lambda_{j_p}(h)$. On définit $\psi_{j_p} = (\chi^{\text{lef}} \varphi_{j_p}, \chi^{\text{rig}} \varphi_{j_p})$ et l'espace $\mathcal{E}_j = \text{span}(\psi_{j_p})_{p \in \{1, 2, 3\}}$. On sera aussi amené à étudier l'espace propre \mathcal{F}_j de $\mathfrak{L}_\Omega(h)$ associée à la valeur propre $\lambda_j(h)$: on note $\Phi_{j,1}$ et $\Phi_{j,2}$ une base orthonormale de \mathcal{F}_j . Prenons $\psi \neq 0 \in \mathcal{E}_j$ tel que, pour $p = 1, 2$, $\langle \psi, \Phi_{j,p} \rangle = 0$. Une telle fonction existe car $\dim(\mathcal{E}_j) = 3$ et, grâce à la Proposition 9.1, on a :

$$\|(\mathfrak{L}(h) - \lambda_j(h))\psi\| \leq C_0 e^{-C/h} \|\psi\|.$$

Le théorème spectral livre $n(j, h) \in \mathbb{N}^*$, avec $n(j, h) \neq j$, tel que

$$|\lambda_{n(j,h)}(h) - \lambda_j(h)| \leq C_0 e^{-C/h}.$$

Finalement, on sait qu'il existe $\tilde{C} > 0$ tel que $|\lambda_{n(j,h)}(h) - \lambda_j(h)| \geq \tilde{C} h^{2/3}$. Pour h suffisamment petit on a une contradiction. \square

Proposition 9.5 Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe $h_0, C_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et tout $j \in \{1, \dots, 2N\}$:

$$|\lambda_{j, \Omega}(h) - \lambda_{n(j,h)}(h)| \leq C_0 e^{-C/h},$$

pour $n(j, h) \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : Soit φ_j une fonction propre de $\mathcal{L}_\Omega(h)$ associée à la valeur propre $\lambda_{j, \Omega}(h)$. Prenons χ^{lef} et χ^{rig} comme dans la preuve de la Proposition 9.3. On définit $\Phi_j = (\chi^{\text{lef}} \varphi_j, \chi^{\text{rig}} \varphi_j) \in \text{Dom}(\mathfrak{L}(h))$ et on a, grâce à la Proposition 9.1 :

$$\|(\mathfrak{L}(h) - \lambda_{j, \Omega}(h))\Phi_j\| \leq C_0 e^{-C/h} \|\Phi_j\|.$$

Le théorème spectral permet de conclure. \square

Preuve du Théorème 1.9 On montre que dans la Proposition 9.5 on a :

$$n(2j - 1, h) \geq j, \quad n(2j, h) \geq j.$$

Comme dans la preuve de la Proposition 9.3, on procède en trois étapes.

$(j \mapsto n(2j - 1, h))$ **et** $(j \mapsto n(2j, h))$ **sont des fonctions injectives** Soient $j_1, j_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $j_1 < j_2$ et

$$n(2j_1 - 1, h) = n(2j_2 - 1, h).$$

On a :

$$\lambda_{2j_2, \Omega}(h) - \lambda_{2j_1, \Omega}(h) \leq 2C_0 e^{-C/h}.$$

Il existe $\tilde{j} \in \mathbb{N}^*$ tel que $2j_1 - 1 < \tilde{j} < 2j_2 - 1$ et on a :

$$\lambda_{\tilde{j}, \Omega}(h) - \lambda_{2j_1, \Omega}(h) \leq \lambda_{2j_2, \Omega}(h) - \lambda_{2j_1, \Omega}(h) \leq 2C_0 e^{-C/h}.$$

Finalement, on obtient :

$$|\lambda_{n(2j_1-1, h)}(h) - \lambda_{\tilde{j}, \Omega}(h)| = |\lambda_{n(2j_1-1, h)}(h) - \lambda_{2j_1-1, \Omega}(h) + \lambda_{2j_1-1, \Omega}(h) - \lambda_{\tilde{j}, \Omega}(h)| \leq 3C_0 e^{-C/h}.$$

Alors, on applique la Proposition 9.4 et on a une contradiction car nous avons trouvé trois valeurs propres exponentiellement proches de $\lambda_{n(2j_1-1, h)}(h)$. La preuve est la même pour $(j \mapsto n(2j - 1, h))$.

$(j \mapsto n(2j - 1, h))$ **et** $(j \mapsto n(2j, h))$ **sont des fonctions croissantes** Soient $j_1, j_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $j_1 < j_2$, on a :

$$\lambda_{n(2j_2-1, h)}(h) - \lambda_{n(2j_1-1, h)}(h) + 2C_0 e^{-C/h} \geq \lambda_{2j_2-1, \Omega}(h) - \lambda_{2j_1-1, \Omega}(h) > 0.$$

Grâce à l'injectivité, pour un certain $\tilde{C} > 0$, on obtient :

$$\text{sgn}(n(2j_2 - 1, h) - n(2j_1 - 1, h)) \tilde{C} h^{2/3} > 0,$$

où sgn est la fonction signe. Nécessairement on a $n(2j_2 - 1, h) > n(2j_1 - 1, h)$.

Induction Pour $j = 1$ on a $n(1, h) \geq 1$ et $n(2, h) \geq 1$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(2j - 1, h) \geq j$ et $n(2j, h) \geq j$. Grâce à l'étape précédente on a :

$$n(2j + 1, h) > n(2j - 1, h) \geq j, \quad n(2j + 2, h) > n(2j, h) \geq j.$$

ce qui conclut la récurrence. Finalement on a :

$$\lambda_j(h) \leq C_0 e^{-C/h} + \lambda_{2j-1, \Omega}(h), \quad \lambda_j \leq C_0 e^{-C/h} + \lambda_{2j, \Omega}(h).$$

Combiné à la Proposition 9.3 on a le Théorème 1.9.

La Figure 9.1 illustre le Théorème 1.9 et met en lumière la localisation du spectre de $\mathcal{L}_\Omega(h)$.

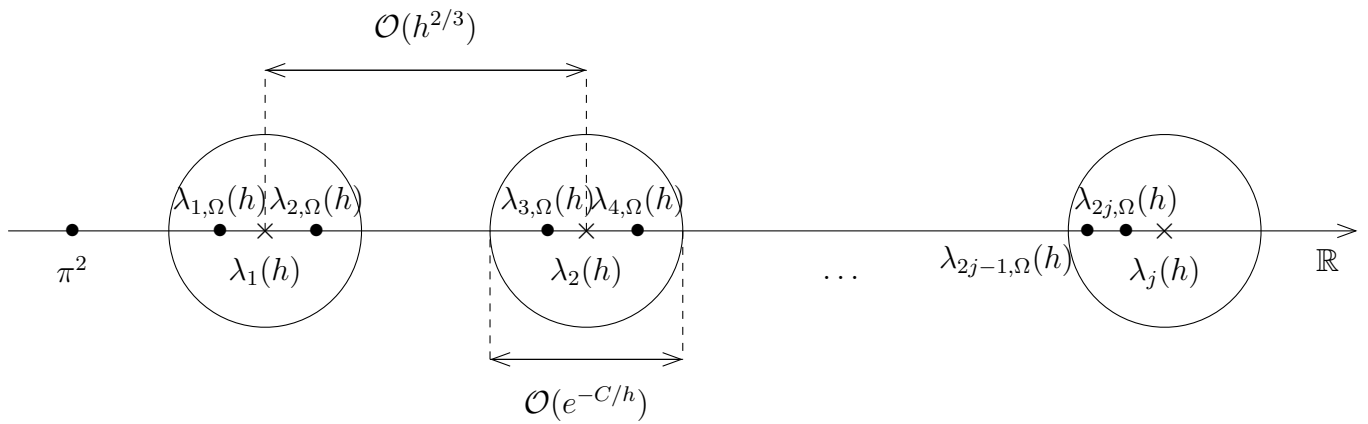


FIG. 9.1 – Repartition de $\mathfrak{S}(\mathcal{L}_\Omega(h))$ autour de $\mathfrak{S}(\mathfrak{L}(h))$

Remarque 9.6 Pour des raisons de symétrie on a en fait pour tout $j \geq 1$, $\lambda_{2j-1,\Omega}(h) < \lambda_j(h)$ et $\lambda_{2j,\Omega}(h) = \lambda_j(h)$.

Chapitre 10

Simulations numériques pour le bonnet d'âne

Afin d'illustrer quelques propriétés des fonctions propres pour le bonnet d'âne on en a calculé certaines. Ces simulations sont effectuées dans le domaine Ω pour l'opérateur $\mathcal{L}_\Omega(h)$. La figure 10 représente les maillages que l'on utilise. Le constructeur de maillage prend en entrée neufs points ainsi que le nombre de subdivisions choisis.

On se place dans le cas où $s = 0.5$, on a utilisé un maillage avec 3 subdivision un degré d'interpolation de 6. La Figure 10.2 illustre le phénomène d'effet tunnel discuté dans le Chapitre 9. On remarque que la localisation des fonctions propres est en accord avec les estimées de localisation d'Agmon de la Section 9.1. De plus une paire de valeurs propres exponentiellement proche est associée à des fonctions propres paires ou impaires par rapport à l'axe des abscisses.

La Figure 10.3 illustre le Théorème 1.9 et la différence exponentiellement proche entre $\zeta_{2j-1}(h)$ et $\zeta_{2j}(h)$ (for $j = 1 \dots 3$). L'interaction est d'ordre $e^{-C/h}$ (pour un certain $C > 0$). Néanmoins pour de petits h il y a un décrochage dans les calculs : le calcul numérique ne peut se faire correctement car la différence entre les valeurs propres est trop proche de zéro. C'est pourquoi on a tracé une approximation linéaire pour de petits h avec le décrochage. Ces approximations vont vers -1 lorsque h va vers 0.

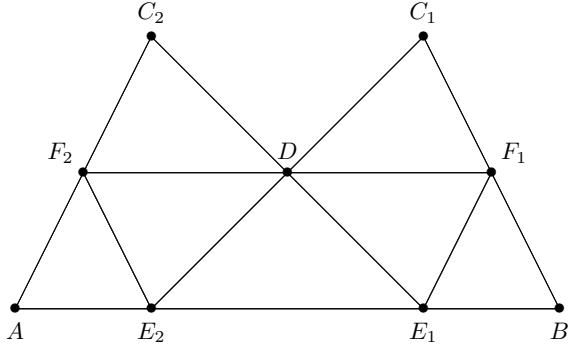
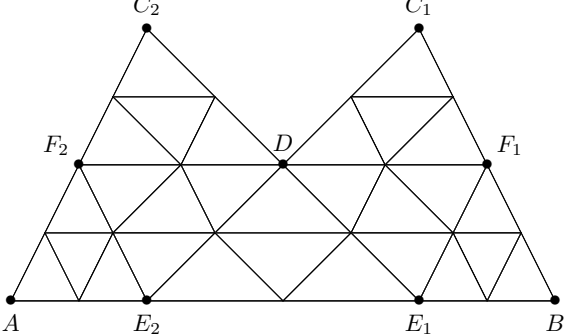
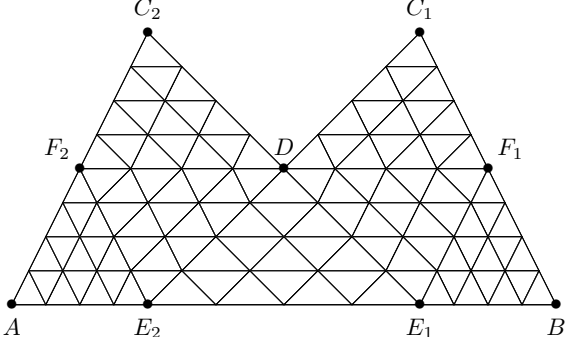
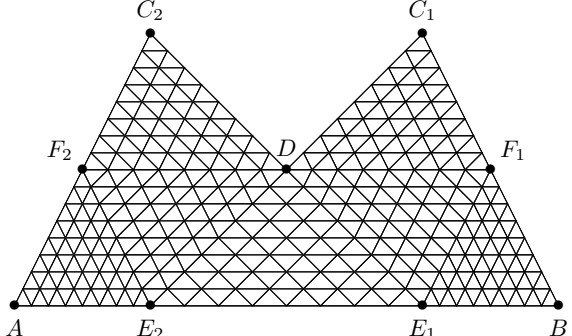
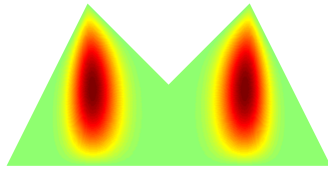
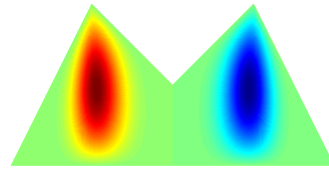
Nombre de subdivisions	Maillage
0	
1	
2	
3	

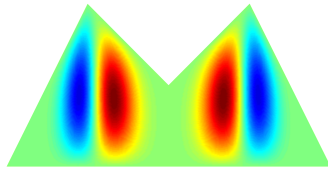
FIG. 10.1 – Maillages pour le bonnet d'âne pour $s = 0.5$.



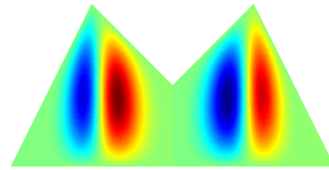
$$\lambda_{1,\Omega}(h) = 12.996729$$



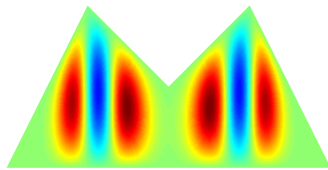
$$\lambda_{2,\Omega}(h) = 12.996730$$



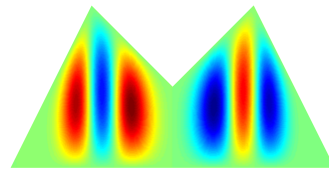
$$\lambda_{3,\Omega}(h) = 17.395903$$



$$\lambda_{4,\Omega}(h) = 17.396014$$



$$\lambda_{5,\Omega}(h) = 21.411375$$



$$\lambda_{6,\Omega}(h) = 21.413785$$

FIG. 10.2 – Simulations pour $s = 0.5$ et $h = 0.15$. Valeurs numériques des six premières valeurs propres. Tracé des fonctions propres associées dans le domaine Ω .

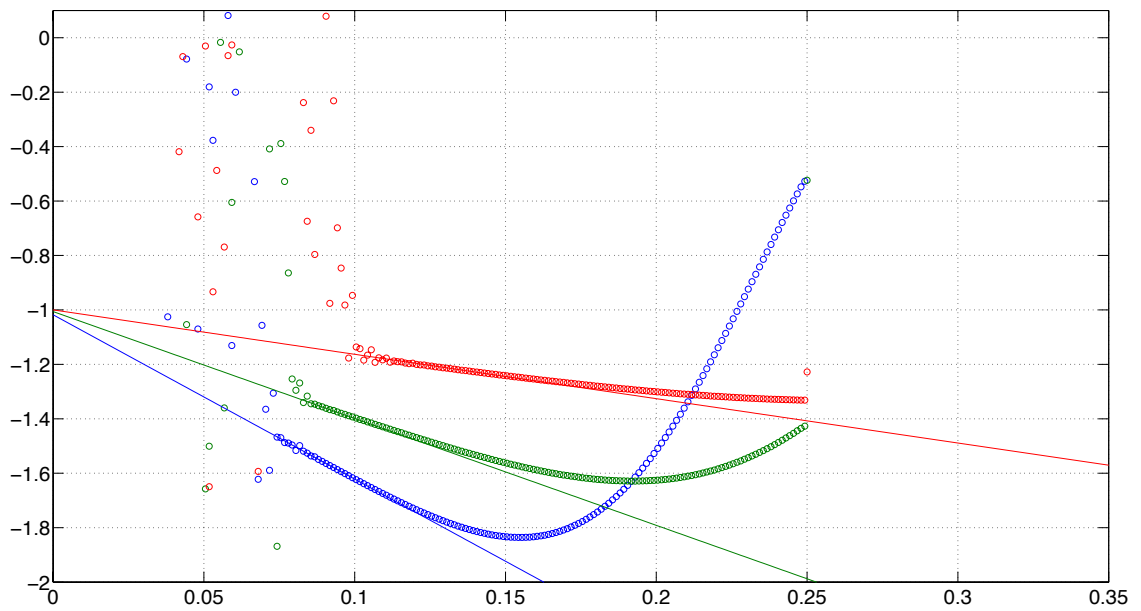


FIG. 10.3 – Différences divisées de $\log_{10}(-\ln(\lambda_{2j,\Omega}(h) - \lambda_{2j-1,\Omega}(h)))$ ($j = 1 \dots 3$) en fonction de h .

Quatrième partie
Cônes de petite ouverture

Chapitre 11

Quasimodes pour les cônes de petite ouverture

Pour démontrer le Théorème 1.11 nous allons construire des quasimodes à tout ordre en puissance de $h^{1/3}$ pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ défini en (1.13). Dans ce chapitre on prouve la

Proposition 11.1 *Pour tout $n \geq 1$, il existe des suites $(\beta_{j,n}^{[m]})_{j \geq 0}$ telles que pour tout $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathbb{N}$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour $h \in (0, h_0)$*

$$\text{dist} \left(\mathfrak{S}_{\text{disc}}(\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)), \sum_{j=0}^J \beta_{j,n}^{[m]} h^{j/3} \right) \leq C h^{(J+1)/3}, \quad n = 1, \dots, N_0. \quad (11.1)$$

De plus, on a : $\beta_{0,n}^{[m]} = j_{m,1}^2$, $\beta_{1,n}^{[m]} = 0$, et $\beta_{2,n}^{[m]} = (2j_{m,1}^2)^{2/3} z_{\mathbb{A}}(n)$.

Dans un premier temps, on fait le changement de variables pour transformer le triangle méridien Mer en le carré Sq = $(-1, 0) \times (0, 1)$:

$$u = x \in (-1, 0), \quad t = \frac{y}{x+1} \in (0, 1). \quad (11.2)$$

L'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ devient :

$$\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)(u, t; \partial_u, \partial_t) = \frac{1}{(u+1)^2} \left(-\frac{1}{t} \partial_t (t \partial_t) + \frac{m^2}{t^2} \right) - h^2 \partial_u^2 - \frac{h^2 t^2}{(u+1)^2} \partial_t^2 + \frac{2h^2 t}{u+1} \partial_t \partial_u - \frac{2h^2 t}{(u+1)^2} \partial_t, \quad (11.3)$$

sur $L^2(\text{Sq}, t(u+1)^2 du dt)$ avec des conditions de Dirichlet sur les faces $\{(0, t) : 0 < t < 1\}$ et $\{(u, 1) : -1 < u < 0\}$. L'équation aux valeurs propres $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h) \psi_h^{[m]} = \lambda_h^{[m]} \psi_h^{[m]}$ devient

$$\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h) \hat{\psi}_h^{[m]} = \lambda_h^{[m]} \hat{\psi}_h^{[m]} \quad \text{avec} \quad \hat{\psi}_h^{[m]}(u, t) = \psi_h^{[m]}(x, y).$$

Dans ce qui suit $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ désigne le produit scalaire sur $L^2((0, 1), t dt)$.

11.1 Ansatz et couche limite

On veut construire des quasimodes $(\beta_h^{[m]}, \psi_h^{[m]})$ pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\partial_x, \partial_y)$. Il sera plus pratique de raisonner dans le carré Sq avec l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)(u, t; \partial_u, \partial_t)$. On introduit les échelles

$$\alpha = h^{-2/3}u \quad \text{and} \quad \beta = h^{-1}u,$$

et on cherche des quasimodes $(\beta_h^{[m]}, \hat{\psi}_h^{[m]})$ de la forme

$$\beta_h^{[m]} \sim \sum_{j \geq 0} \beta_j^{[m]} h^{j/3} \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_h^{[m]}(u, t) \sim \sum_{j \geq 0} \left(\Psi_j^{[m]}(\alpha, t) + \Phi_j^{[m]}(\beta, t) \right) h^{j/3}. \quad (11.4)$$

On veut résoudre $\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)\hat{\psi}_h^{[m]} = \beta_h^{[m]}\hat{\psi}_h^{[m]}$ au sens des séries formelles. Comme on le verra en Section 11.4, un Ansatz à la seule échelle $h^{-2/3}$ ne permet pas de construire des quasimodes pour $\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)$. En développant l'opérateur en puissance de $h^{2/3}$ on a

$$\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)(h^{2/3}\alpha, t; h^{-2/3}\partial_\alpha, \partial_t) \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{L}_{2j}^{[m]} h^{2j/3} \quad \text{avec terme principal} \quad \mathcal{L}_0^{[m]} = -\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) + \frac{m^2}{t^2}, \quad (11.5)$$

et en puissance de h :

$$\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)(h\beta, t; h^{-1}\partial_\beta, \partial_t) \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{N}_{3j}^{[m]} h^j \quad \text{avec terme principal} \quad \mathcal{N}_0^{[m]} = -\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) + \frac{m^2}{t^2} - \partial_\beta^2. \quad (11.6)$$

Dans ce qui suit, pour vérifier la condition de Dirichlet sur $\text{Mer} \setminus (-1, 0) \times \{0\}$ on va imposer à notre Ansatz, pour tout $j \in \mathbb{N}$, les conditions aux limites :

$$\Psi_j^{[m]}(0, t) + \Phi_j^{[m]}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (11.7)$$

$$\Psi_j^{[m]}(\alpha, 1) = 0, \quad \alpha < 0 \quad \text{et} \quad \Phi_j^{[m]}(\beta, 1) = 0, \quad \beta \leq 0. \quad (11.8)$$

Plus précisément, on s'intéresse à la plus basse énergie $\lambda = j_{m,1}^2$ du problème de Dirichlet en 1 pour $\mathcal{L}_0^{[m]}$ sur l'intervalle $(0, 1)$. On doit résoudre le problème de Dirichlet pour les opérateurs $\mathcal{N}_0^{[m]} - j_{m,1}^2$ et $\mathcal{L}_0^{[m]} - j_{m,1}^2$ sur la demie bande

$$\text{Hst} = \mathbb{R}_- \times (0, 1), \quad (11.9)$$

avec des solutions à décroissance exponentielle.

11.2 Trois lemmes

Afin de construire les quasimodes nous aurons besoin des trois lemmes suivants.

Lemme 11.2 On note $b_n^{[m]}$ la n -ième fonction propre normalisée de $\mathcal{L}_0^{[m]}$:

$$b_n^{[m]}(t) = C_n^{[m]} J_m(j_{m,n}t), \quad (C_n^{[m]} \text{ est une constante de normalisation})$$

où J_m est la m -ième fonction de Bessel de première espèce. Soit $F = F(\beta, t)$ une fonction de $L^2_{\text{exp}}(\text{Hst}, t d\beta dt)$ et soit $G \in H^{3/2}((0, 1), t dt)$ une fonction de la variable t avec $G(1) = 0$. Alors il existe un unique $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que le problème

$$\left(\mathcal{N}_0^{[m]} - j_{m,1}^2 \right) \Phi = F, \quad \Phi(\beta, 1) = 0, \Phi(0, t) = G(t) + \gamma b_1^{[m]}(t)$$

ait une unique solution dans $H^2_{\text{exp}}(\text{Hst}, t d\beta dt)$. On a

$$\gamma = - \int_{-\infty}^0 \int_0^1 F(\beta, t) \sigma b_1^{[m]}(t) t dt d\beta - \int_0^1 G(t) b_1^{[m]}(t) t dt. \quad (11.10)$$

Preuve du lemme : Supposons qu'il existe Φ solution, on la décompose dans $L^2((0, 1), t dt)$ sur les fonctions propres de l'opérateur transverse, à savoir les fonctions de Bessel :

$$\Phi(\beta, t) = \sum_{n \geq 1} \Phi_n(\beta) b_n^{[m]}(t).$$

Comme Φ est solution de l'équation, on a, en particulier :

$$\sum_{n \geq 1} \left(-\Phi_n''(\beta) + (j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2) \Phi_n(\beta) \right) b_n^{[m]}(t) = F(\beta, t).$$

En prenant en compte les conditions de Dirichlet, les Φ_n sont donc solutions de :

$$\begin{cases} -\Phi_1''(\beta) = \langle F(\beta, \cdot), b_1^{[m]} \rangle_t, & \Phi_1(0) = \langle G, b_1^{[m]} \rangle_t + \gamma \quad \text{pour } n = 1, \\ -\Phi_n''(\beta) + (j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2) \Phi_n(\beta) = \langle F(\beta, \cdot), b_n^{[m]} \rangle_t, & \Phi_n(0) = \langle G, b_n^{[m]} \rangle_t \quad \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

On résout d'abord pour $n = 1$ et on a :

$$\Phi_1(\beta) = - \int_{-\infty}^{\beta} \int_{-\infty}^{\beta_1} \langle F(v, \cdot), b_1^{[m]} \rangle_t dv d\beta_1 + C\beta + D,$$

où C et D sont des constantes réelles. Comme Φ_1 doit satisfaire des conditions d'intégrabilité $C = D = 0$. Une intégration par partie fournie :

$$\Phi_1(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} \langle F(\beta_1, \cdot), b_1^{[m]} \rangle_t \beta_1 d\beta_1.$$

Par conséquent, Φ_1 est à décroissance exponentielle car F l'est. De plus, pour avoir une solution, γ doit vérifier la relation annoncée.

On résout alors pour $n \geq 2$. On sait que la solution est de la forme :

$$\Phi_n(\beta) = \Phi_{n,\text{SP}}(\beta) + A_n e^{\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2} \beta} + B_n e^{-\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2} \beta},$$

où $\Phi_{n,SP}$ est une solution particulière de l'équation différentielle et A_n et B_n des constantes réelles. Pour des raisons d'intégrabilité $B_n = 0$. On va chercher une solution particulière de la forme

$$\Phi_{n,SP}(\beta) = a_n(\beta)e^{\sqrt{j_{m,n+1}^2 - j_{m,1}^2}\beta}.$$

En l'injectant dans l'équation différentielle satisfaite par Φ_n , on obtient :

$$a_n''(\beta) + 2\sqrt{j_{m,nm}^2 - j_{m,1}^2}a_n'(\beta) = \langle F(\beta, \cdot), b_n^{[m]} \rangle_t e^{-\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2}\beta}.$$

Il s'agit alors de résoudre cette équation différentielle en a_n' . On voit que

$$a_n(\beta) = \frac{1}{\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2}} \int_{-\infty}^{\beta} \langle F(\beta_1, \cdot), b_n^{[m]} \rangle_t e^{-\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2}\beta_1} d\beta_1$$

convient. On obtient alors comme solution :

$$\Phi_n(\beta) = \left(A_n + \frac{1}{\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2}} \int_{-\infty}^{\beta} \langle F(\beta_1, \cdot), b_n^{[m]} \rangle_t e^{-\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2}\beta_1} d\beta_1 \right) e^{\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2}\beta}.$$

La condition aux limites nous permet de conclure que

$$A_n = \langle G, b_n^{[m]} \rangle_t - \frac{1}{\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2}} \int_{-\infty}^0 \langle F(\beta, \cdot), b_n^{[m]} \rangle_t e^{-\sqrt{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2}\beta} d\beta.$$

On a ainsi construit l'unique solution à décroissance exponentielle solution du problème. \diamond

On démontre aussi les deux lemmes suivants liés à l'alternative de Fredholm.

Lemme 11.3 Soit $F = F(\alpha, t)$ une fonction de $L_{\text{exp}}^2(\text{Hst}, tdsdt)$. Alors, il existe une solution Ψ telle que :

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - j_{m,1}^2)\Psi = F \quad \text{dans Hst}, \quad \Psi(\alpha, 1) = 0$$

si et seulement si $\langle F(\alpha, \cdot), b_1^{[m]} \rangle_t = 0$ pour tout $\alpha < 0$. Dans ce cas, $\Psi(\alpha, t) = \Psi^\perp(\alpha, t) + g(\alpha)b_1^{[m]}(t)$ où Ψ^\perp vérifie $\langle \Psi(\alpha, \cdot)^\perp, b_1^{[m]} \rangle_t \equiv 0$ et est aussi à décroissance exponentielle.

Preuve du lemme : Supposons qu'il existe une solution Ψ de

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - j_{m,1}^2)\Psi = F \quad \text{dans Hst}, \quad \Psi(\alpha, 1) = 0.$$

Pour tout $\alpha < 0$, on peut écrire dans $L^2((0, 1), tdt)$:

$$\Psi(\alpha, t) = \sum_{n \geq 1} \Psi_n(\alpha) b_n^{[m]}(t).$$

Comme Ψ vérifie l'équation on obtient :

$$\sum_{n \geq 1} (j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2) \Psi_n(\alpha) b_n^{[m]}(t) = F(\alpha, t).$$

En identifiant dans la base des $(b_n^{[m]})_{n \geq 1}$ on obtient :

$$\begin{cases} \langle F(\alpha, \cdot), b_1^{[m]} \rangle_t = 0 \\ \Psi_n(\alpha) = \frac{1}{j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2} \langle F(\alpha, \cdot), b_n^{[m]} \rangle_t, \quad \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

Par hypothèse, pour $n \geq 2$, Ψ_n est à décroissance exponentielle. Pour Ψ_1 , on peut choisir une fonction à décroissance exponentielle. Réciproquement, si on considère la fonction Ψ ainsi définie, elle est solution du problème.

En posant $g(\alpha) = \Psi_1(\alpha)$ et $\Psi^\perp(\alpha, t) = \sum_{n \geq 2} (j_{m,n}^2 - j_{m,1}^2) \Psi_n(\alpha) \beta_n(t)$, on obtient le résultat annoncé. \diamond

Lemme 11.4 Soit $n \geq 1$. On rappelle que $z_A(n)$ est le n -ième zéro de la fonction d'Airy inversée, et on note

$$a_n^{[m]} = \tilde{C}_n^{[m]} \mathbf{A} \left((2j_{m,1}^2)^{1/3} \alpha + z_A(n) \right) \quad \left(\tilde{C}_n^{[m]} \in \mathbb{R} \text{ étant une constante de normalisation} \right),$$

une fonction propre normalisée de l'opérateur $-\partial_\alpha^2 - 2j_{m,1}^2 \alpha$ avec condition de Dirichlet sur \mathbb{R}_- associée à la valeur propre $(2j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(n)$. Soit $f = f(\alpha)$ une fonction de $L_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_-)$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique $\omega \in \mathbb{R}$ tel que le problème

$$(-\partial_\alpha^2 - 2j_{m,1}^2 \alpha - (2j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(n)) g = f + \omega a_n^{[m]} \quad \text{sur } \mathbb{R}_-, \text{ avec } g(0) = c,$$

ait une unique solution dans $H_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_-)$.

Preuve du lemme : Soit χ une fonction troncature qui vaut 1 près de 0. Si g est solution du problème alors $v = g - c\chi$ est solution de

$$(-\partial_\alpha^2 - 2j_{m,1}^2 \alpha - (2j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(n)) v = \tilde{f}_c + \omega a_n^{[m]}, \quad v(0) = 0$$

où $\tilde{f}_c = f - c \left(-\partial_\alpha^2 \chi + 2j_{m,1}^2 \alpha \chi - (2j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(n) \chi \right)$. \tilde{f}_c est aussi à décroissance exponentielle. D'après l'alternative de Fredholm, on sait qu'il existe une solution v si et seulement si

$$\omega = -\langle \tilde{f}_c, a_n^{[m]} \rangle.$$

Le second membre est à décroissance exponentielle donc la solution l'est aussi. \diamond

11.3 Détermination des profils

On peut maintenant commencer la construction de l'Ansatz (11.4).

Termes d'ordre h^0 Les équations dans Hst livrent :

$$\mathcal{L}_0^{[m]} \Psi_0^{[m]} = \beta_0^{[m]} \Psi_0^{[m]}, \quad \mathcal{N}_0^{[m]} \Phi_0^{[m]} = \beta_0^{[m]} \Phi_0^{[m]}.$$

Avec les conditions aux limites (11.7)-(11.8) pour $j = 0$, on a :

$$\beta_0^{[m]} = j_{m,1}^2, \quad \Psi_0^{[m]}(\alpha, t) = g_0^{[m]}(\alpha)b_1^{[m]}(t).$$

La condition aux limites (11.7) livre : $\Psi_0^{[m]}(0, t) = -g_0^{[m]}(0)b_1^{[m]}(t)$. Le Lemme 11.2 donne :

$$g_0^{[m]}(0) = 0, \quad \Phi_0^{[m]} = 0.$$

La fonction $g_0^{[m]}$ sera déterminée plus tard.

Termes d'ordre $h^{1/3}$ Les équations dans Hst livrent :

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_1^{[m]} = \beta_1^{[m]}\Psi_0^{[m]}, \quad (\mathcal{N}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Phi_1^{[m]} = 0$$

avec les conditions aux limites (11.7)-(11.8) pour $j = 1$. Le Lemme 11.3 donne $\beta_1^{[m]} = 0$ ce qui amène à chercher la fonction sous la forme $\Psi_1^{[m]}(\alpha, t) = g_1^{[m]}(\alpha)b_1^{[m]}(t)$. La condition aux limites (11.7) donne : $\Psi_1^{[m]}(0, t) = -g_1^{[m]}(0)b_1^{[m]}(t)$. Le Lemme 11.2 livre

$$g_1^{[m]}(0) = 0, \quad \Phi_1^{[m]} = 0.$$

Termes d'ordre $h^{2/3}$ Les équations dans Hst livrent :

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_2^{[m]} = \beta_2^{[m]}\Psi_0^{[m]} - \mathcal{L}_2^{[m]}\Psi_0^{[m]}, \quad (\mathcal{N}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Phi_2^{[m]} = 0$$

où $\mathcal{L}_2^{[m]} = -\partial_\alpha^2 + 2\alpha\left(\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) - \frac{m^2}{t^2}\right)$ avec les conditions aux limites (11.7)-(11.8) pour $j = 2$. Le Lemme 11.3 nous permet d'obtenir l'équation suivante en la variable α :

$$\langle (\beta_2^{[m]} - \mathcal{L}_2^{[m]})\Psi_0^{[m]}(\alpha, \cdot), b_1^{[m]} \rangle_t = 0, \quad \alpha < 0.$$

On sait que $\Psi_0(\alpha, t) = g_0^{[m]}(\alpha)b_1^{[m]}(t)$, par conséquent cette équation devient :

$$(-\partial_\alpha^2 - 2j_{m,1}^2\alpha)g_0^{[m]}(\alpha) = \beta_2^{[m]}g_0^{[m]}(\alpha), \quad \alpha < 0.$$

On obtient donc $\beta_2^{[m]} = (2j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(n)$ et $g_0^{[m]} \equiv a_n^{[m]}$. On en déduit que $(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_2^{[m]} = 0$ et que $\Psi_2^{[m]}$ est de la forme $\Psi_2^{[m]}(\alpha, t) = g_2^{[m]}(\alpha)b_1^{[m]}(t)$. La condition aux limites (11.7) donne : $\Psi_2^{[m]}(0, t) = -g_2^{[m]}(0)b_1^{[m]}(t)$. Le Lemme 11.2 donne

$$g_2^{[m]}(0) = 0, \quad \Phi_2^{[m]} = 0.$$

Termes d'ordre h Les équations dans Hst livrent :

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_3^{[m]} = \beta_3^{[m]}\Psi_0^{[m]} + \beta_2^{[m]}\Psi_1^{[m]} - \mathcal{L}_2^{[m]}\Psi_1^{[m]}, \quad (\mathcal{N}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Phi_3^{[m]} = 0$$

avec les conditions aux limites (11.7)-(11.8) pour $j = 3$. Le produit scalaire par $b_1^{[m]}$ (Lemme 11.3) puis le produit scalaire par $g_0^{[m]}$ (Lemme 11.4) donne $\beta_3^{[m]} = 0$ et $g_1^{[m]}$ est colinéaire à $g_0^{[m]}$. On choisit

$g_1^{[m]} = 0$. Par conséquent $\Psi_3^{[m]}$ est de la forme $\Psi_3^{[m]}(\alpha, t) = g_3^{[m]}(\alpha)b_1^{[m]}(t)$. Le Lemme 11.2 donne :

$$g_3^{[m]}(0) = 0, \quad \Phi_3^{[m]} = 0.$$

Termes d'ordre $h^{4/3}$ Les équations dans Hst livrent :

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_4^{[m]} = \beta_4^{[m]}\Psi_0^{[m]} + \beta_2^{[m]}\Psi_2^{[m]} - \mathcal{L}_4^{[m]}\Psi_0^{[m]} - \mathcal{L}_2^{[m]}\Psi_2^{[m]}, \quad (\mathcal{N}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Phi_4^{[m]} = 0$$

où

$$\mathcal{L}_4^{[m]} = 2\partial_t\partial_\alpha - \frac{3\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) - \frac{m^2}{t^2}\right)$$

avec les conditions aux limites (11.7)-(11.8) pour $j = 4$. Le produit scalaire par $b_1^{[m]}$ (Lemme 11.3) donne une équation pour $g_2^{[m]}$ et le produit scalaire par $g_0^{[m]}$ (Lemme 11.4) détermine $\beta_4^{[m]}$. Grâce au Lemme 11.3, $\Psi_4^{[m]}$ est de la forme $\Psi_4^{[m]} = \Psi_4^{[m]\perp} + g_4^{[m]}(s)b_1^{[m]}(t)$ avec $\Psi_4^{[m]\perp}$ potentiellement non nul. Le Lemme 11.2 donne $g_4^{[m]}(0) = 0$, de plus $\langle \Psi_4^{[m]\perp}(0, \cdot), b_1^{[m]} \rangle_t = 0$ et on a une solution $\Phi_4^{[m]}$ à décroissance exponentielle.

Termes d'ordre supérieur On construit les termes suivants par récurrence selon les mêmes principes. Dès lors on peut prouver la Proposition 11.1.

Preuve : La construction précédente nous incite à introduire

$$\beta_h^{[m, J]} = \sum_{j=0}^J \beta_j^{[m]} h^{j/3}, \quad (11.11)$$

$$\psi_h(x, y)^{[m, J]} = \chi(x) \sum_{j=0}^J \left(\Psi_j^{[m]} \left(\frac{x}{h^{2/3}}, \frac{y}{x+1} \right) + \Phi_j^{[m]} \left(\frac{x}{h}, \frac{y}{x+1} \right) \right) h^{j/3}, \quad (11.12)$$

où χ est une fonction troncature régulière valant 1 près de 0. Le théorème spectral 2.5 permet de conclure. \square

11.4 Nécessité de l'échelle h

On justifie ici pourquoi un Ansatz à la seule échelle $h^{2/3}$ ne permet pas d'obtenir de résultat. Si on veut construire des quasimodes $(\beta_h^{[m]}, \Psi_h^{[m]})$ pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(x, y; \partial_x, \partial_y)$. Là encore, il est plus facile de travailler sur le carré Sq et l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)(u, t; \partial_u, \partial_t)$. On introduit l'échelle $\alpha = h^{-2/3}u$ et on cherche des quasi-paires propres sous forme de séries formelles :

$$\beta_h^{[m]} \sim \sum_{j \geq 0} \beta_j^{[m]} h^{2j/3} \quad \text{et} \quad \Psi_h^{[m]}(u, t) \sim \sum_{j \geq 0} \Psi_j^{[m]}(\alpha, t) h^{2j/3}. \quad (11.13)$$

On veut résoudre $\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)\Psi_h^{[m]} = \beta_h^{[m]}\Psi_h$ au sens des séries formelles. Lorsque l'on développe l'opérateur en puissances de $h^{2/3}$ on obtient, toujours au sens des séries formelles :

$$\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)(h^{2/3}\alpha, t, h^{-2/3}\partial_\alpha, \partial_t) \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{L}_j^{[m]} h^{2j/3} \quad \text{avec terme dominant } \mathcal{L}_0^{[m]} = -\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) + \frac{m^2}{t^2}.$$

Dans ce qui suit, afin de vérifier les conditions de Dirichlet sur les bords du carré Sq, on impose à notre Ansatz les conditions aux limites suivantes, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\Psi_j^{[m]}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (11.14)$$

$$\Psi_j^{[m]}(\alpha, 1) = 0, \quad s < 0. \quad (11.15)$$

Commençons la construction de l'Ansatz :

Termes en h^0 Les équations dans Hst livrent :

$$\mathcal{L}_0^{[m]}\Psi_0^{[m]} = \beta_0^{[m]}\Psi_0^{[m]}$$

avec les conditions aux limites (11.14)-(11.15) pour $j = 0$. On choisit $\beta_0^{[m]} = j_{m,1}^2$, de plus Ψ_0 est tensoriel et donc on choisit $\Psi_0(\alpha, t) = g_0^{[m]}(\alpha)b_1^{[m]}(t)$. La condition aux limites (11.14) livre $g_0^{[m]}(0) = 0$. La fonction $g_0^{[m]}(\alpha)$ sera déterminée plus tard.

Termes en $h^{2/3}$ Les équations dans Hst livrent :

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_1^{[m]} = \beta_1^{[m]}\Psi_0^{[m]} - \mathcal{L}_1^{[m]}\Psi_0^{[m]}$$

où $\mathcal{L}_1^{[m]} = -\partial_\alpha^2 + 2\alpha \left(\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) - \frac{m^2}{t^2} \right)$ et avec les conditions aux limites (11.14)-(11.15) pour $j = 1$. Le Lemme 11.3 livre l'équation suivante en la variable α :

$$\langle \beta_1^{[m]}\Psi_0^{[m]} - \mathcal{L}_1^{[m]}\Psi_0^{[m]}(\alpha, \cdot), b_1^{[m]} \rangle_t = 0, \quad \alpha < 0.$$

En utilisant le fait que $\Psi_0^{[m]}(\alpha, t) = g_0^{[m]}(\alpha)b_1^{[m]}(t)$ l'équation devient :

$$(-\partial_s^2 - 2j_{m,1}^2 s)g_0^{[m]}(\alpha) = \beta_1^{[m]}g_0^{[m]}(\alpha).$$

Donc on choisit :

$$g_0^{[m]} = a_n^{[m]}, \quad \beta_1^{[m]} = (2j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(n)$$

On en déduit que $(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_1^{[m]} = 0$ donc $\Psi_1^{[m]}$ est tensoriel et $\Psi_1^{[m]} = g_1^{[m]}(\alpha)b_1^{[m]}(t)$. La condition aux limites (11.14) livre : $g_1^{[m]}(0) = 0$.

Termes en $h^{4/3}$ Les équations dans Hst livrent :

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_2^{[m]} = \beta_2^{[m]}\Psi_0^{[m]} + \beta_1^{[m]}\Psi_1^{[m]} - \mathcal{L}_2^{[m]}\Psi_0^{[m]} - \mathcal{L}_1^{[m]}\Psi_1^{[m]}$$

où

$$\mathcal{L}_2^{[m]} = 2\partial_t\partial_\alpha - \frac{3\alpha^2}{2} \left(\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) - \frac{m^2}{t} \right),$$

avec les conditions aux limites (11.14)-(11.15) pour $j = 2$. Le produit scalaire par $b_1^{[m]}$ (Lemme 11.3) livre une équation pour $g_1^{[m]}$ puis le produit scalaire par $g_0^{[m]}$ (Lemme 11.4) détermine $\beta_2^{[m]}$ et $g_1^{[m]}$. D'après le Lemme 11.3, $\Psi_2^{[m]} = \Psi_2^{[m]\perp} + g_2^{[m]}(s)b_1^{[m]}(t)$. De plus la condition aux limites (11.14) donne :

$$\Psi_2^{[m]\perp}(0, t) + g_2^{[m]}(0)b_1^{[m]}(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Le produit scalaire par $b_1^{[m]}$ nous permet d'affirmer que $g_2^{[m]}(0) = 0$ et finalement :

$$\Psi_2^{[m]\perp}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Cependant, $\Psi_2^{[m]\perp}$ vérifie la même équation que $\Psi_2^{[m]}$ à savoir :

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_2^{[m]\perp} = \beta_2^{[m]}\Psi_0^{[m]} + \beta_1^{[m]}\Psi_1^{[m]} - \mathcal{L}_2^{[m]}\Psi_0^{[m]} - \mathcal{L}_1^{[m]}\Psi_1^{[m]}.$$

En prenant en compte l'équation satisfaite par g_1 on aboutit à :

$$(\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_2^{[m]\perp}(\alpha, t) = -2a_n^{[m]'}(\alpha)b_1^{[m]}(t) \left(1 - \langle b_1^{[m]'}, b_1^{[m]} \rangle_t \right) \quad \text{pour tout } s < 0.$$

En particulier ceci est vrai en $\alpha = 0$ donc on a :

$$0 = (\mathcal{L}_0^{[m]} - \beta_0^{[m]})\Psi_2^{[m]\perp}(0, t) = -2a_n^{[m]'}(0)b_1^{[m]}(t)(1 - \langle b_1^{[m]'}, b_1^{[m]} \rangle_t). \quad (11.16)$$

Mais $a_n^{[m]'}(0) \neq 0$ car les zéros de la fonction d'Airy sont simples. De plus $\langle b_1^{[m]'}, b_1^{[m]} \rangle_t \neq 1$ car :

$$\begin{aligned} \langle b_1^{[m]'}, b_1^{[m]} \rangle_t &= \int_0^1 b_1^{[m]}(t)b_1^{[m]'}(t)tdt \\ &\underset{\text{par intégration par partie}}{=} -\frac{1}{2} \int_0^1 b_1^{[m]}(t)^2 dt < 0 \end{aligned}$$

La construction s'arrête donc là car (11.16) est absurde.

Chapitre 12

Simplicité asymptotique

La Proposition 11.1 nous donne une majoration des valeurs propres des opérateurs $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$. Pour obtenir une minoration et démontrer le Théorème 1.11 on utilise des estimées d'Agmon qui localisent les fonctions propres de $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ dans Mer. Cette localisation permet de se ramener à l'opérateur en dimension un étudié au Chapitre 4.

12.1 Estimées de localisation d'Agmon

Afin de prouver le Théorème 1.11 nous avons besoin d'estimées de localisation d'Agmon semi-classiques pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$. Grâce à la Proposition 11.1 les N_0 plus petites valeurs propres λ de $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ vérifient :

$$|\lambda - j_{m,1}^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}, \quad (12.1)$$

pour une certaine constante positive Γ_0 dépendant de N_0 . Si $\mathcal{Q}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ désigne la forme quadratique associée à $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$, on a la borne inférieure suivante pour tout $\Psi \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\text{Mer}}^{[m]}(h))$:

$$\mathcal{Q}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\Psi) \geq \int_{\text{Mer}} h^2 |\partial_x \Psi|^2 + \frac{j_{m,1}^2}{(x + \pi\sqrt{2})^2} |\Psi|^2 y dx dy.$$

On reprend alors la Proposition 4.4 et on obtient la

Proposition 12.1 *Soit $\Gamma_0 > 0$ et $\rho_0 \in (0, j_{m,1})$. Il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $\eta_0 > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et toute paire propre (λ, Ψ) de $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ vérifiant $|\lambda - j_{m,1}^2| \leq \Gamma_0 h^{2/3}$, on ait :*

$$\int_{\text{Mer}} e^{\Phi_1(x)/h} (|\Psi|^2 + |h^{2/3} \partial_x \Psi|^2) y dx dy \leq C_0 \|\Psi\|^2, \quad \int_{\text{Mer}} e^{\Phi_2(x)/h} (|\Psi|^2 + |h \partial_x \Psi|^2) y dx dy \leq C_0 \|\Psi\|^2,$$

avec

$$\Phi_1(x) = \eta_0 |x|^{3/2} \text{ et } \Phi_2(x) = -\rho_0 \ln(1 + x).$$

12.2 Approximations des premières fonctions propres par des produits tensoriels

Dans cette section, on travaillera avec l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)$ plutôt que $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$. Soit les N_0 premières valeurs propres de $\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{[m]}(h)$ (plus simplement notées $\lambda_n(h)$). Dans chaque espace propre associé, on choisit une fonction propre normalisée $\hat{\psi}_n$ vérifiant $\langle \hat{\psi}_n, \hat{\psi}_m \rangle = 0$ si $n \neq m$. On introduit :

$$\widehat{\mathcal{S}}_{N_0}(h) = \text{vect}(\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_{N_0}).$$

On définit alors $\mathcal{Q}_{\text{Sq}}^{0,[m]}$ la forme quadratique suivante :

$$\mathcal{Q}_{\text{Sq}}^{0,[m]}(\hat{\psi}) = \int_{\text{Sq}} (|\partial_t \hat{\psi}|^2 + \frac{m^2}{t^2} |\hat{\psi}|^2 - j_{m,1}^2) t(u+1)^2 du dt,$$

associée à l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{0,[m]} = \text{Id}_u \otimes \left(-\frac{1}{t} \partial_t (t \partial_t) + \frac{m^2}{t^2} - j_{m,1}^2 \right)$ sur $L^2(\text{Sq}, t(u+1)^2 du dt)$. On s'intéresse alors au projecteur sur l'espace propre associé à la valeur propre 0 de $-\frac{1}{t} \partial_t (t \partial_t) + \frac{m^2}{t^2} - j_{m,1}^2$:

$$\Pi_1^{[m]} \hat{\psi}(u, t) = \langle \hat{\psi}(u, \cdot), b_1^{[m]} \rangle_t b_1^{[m]}(t).$$

On peut maintenant énoncer un premier résultat d'approximation :

Proposition 12.2 *Il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et tout $\hat{\psi} \in \widehat{\mathcal{S}}_{N_0}(h)$:*

$$0 \leq \mathcal{Q}_{\text{Sq}}^{0,[m]}(\hat{\psi}) \leq Ch^{2/3} \|\hat{\psi}\|^2$$

et

$$\|(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}\| + \left\| \frac{1}{t} (\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi} \right\| + \|\partial_t (\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}\| \leq Ch^{1/3} \|\hat{\psi}\|.$$

De plus, $\Pi_1^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}}_{N_0}(h) \rightarrow \Pi_1^{[m]}(\widehat{\mathcal{S}}_{N_0}(h))$ est un isomorphisme.

Preuve : Si $\hat{\psi} = \hat{\psi}_n$, on a :

$$\mathcal{Q}_{\text{Sq},h}^{[m]}(\hat{\psi}_n) = \lambda_n \|\hat{\psi}_n\|^2.$$

On obtient :

$$\mathcal{Q}_{\text{Sq},h}^{[m]}(\hat{\psi}) \leq (j_{m,1}^2 + Ch^{2/3}) \|\hat{\psi}_n\|^2.$$

L'orthogonalité des $\hat{\psi}_n$ (dans L^2 et pour la forme quadratique) nous permet d'étendre l'inégalité à $\hat{\psi} \in \widehat{\mathcal{S}}_{N_0}(h)$:

$$\mathcal{Q}_{\text{Sq},h}^{0,[m]}(\hat{\psi}) \leq Ch^{2/3} \|\hat{\psi}\|^2.$$

De plus comme $\Pi_1^{[m]} \hat{\psi}$ est dans le noyau de $\mathcal{L}_{\text{Sq}}^{0,[m]}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\text{Sq}}^{0,[m]}(\hat{\psi}) &= \langle \mathcal{L}_{\text{Sq}}^{0,[m]}(\Pi_1^{[m]} \hat{\psi} + (\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}), \hat{\psi} \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}_{\text{Sq}}^{0,[m]}(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle \\ &= \mathcal{Q}_{\text{Sq}}^{0,[m]}((\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}). \end{aligned}$$

Si μ_2 désigne la deuxième valeur propre de l'opérateur en dimension un $-\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) + \frac{m^2}{t^2} - j_{m,1}^2$, le principe du min-max 2.1 livre pour tout $u \in (-1, 0)$:

$$\int_0^1 |\partial_t((\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi})|^2 + \frac{m^2}{t^2} |(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}|^2 - j_{m,1}^2 |(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}|^2 t dt \geq \mu_2 \int_0^1 |(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}|^2 t dt.$$

On en déduit alors que :

$$0 \leq \mathcal{Q}_{\text{Sq}}^0(\hat{\psi}) \leq Ch^{2/3} \|\hat{\psi}\|^2 \quad ; \quad \|(\text{Id} - \Pi_0)\hat{\psi}\| \leq Ch^{1/3}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|\partial_t(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}\|^2 + \left\| \frac{m}{t}(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi} \right\|^2 - Ch^{2/3} \|\hat{\psi}\|^2 &\leq \|\partial_t(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}\|^2 + \left\| \frac{m}{t}(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi} \right\|^2 \\ &\quad - j_{m,1}^2 \|(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}\|^2 \\ &\leq Ch^{2/3} \|\hat{\psi}\|^2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\|\partial_t(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}\|^2 + \left\| \frac{m}{t}(\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi} \right\|^2 \leq h^{2/3} \|\hat{\psi}\|^2.$$

Pour conclure la preuve on remarque que $\Pi_1^{[m]}$ est injectif car si $\Pi_1^{[m]}\hat{\psi} = 0$ alors on a

$$\|\hat{\psi}\| \leq Ch^{1/3} \|\hat{\psi}\|,$$

ce qui n'est possible pour tout $h < h_0$ que si $\hat{\psi} = 0$, ce qui conclut la preuve de la Proposition 12.2. \square

12.3 Réduction à l'opérateur d'Airy

Le but de cette sous-section est de prouver le Théorème 1.11 en utilisant les projections des vraies fonctions propres $(\Pi_1^{[m]}\hat{\psi}_n)$ comme fonctions tests pour l'opérateur d'Airy. Cela justifie que l'opérateur $l_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$ défini en (4.1) est une bonne approximation de l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)$. Soit $\hat{\psi} \in \widehat{S}_{N_0}(h)$, nous avons besoin de quelques lemmes pour estimer la forme quadratique de l'opérateur d'Airy testé sur $\Pi_1^{[m]}\hat{\psi}$. Le premier lemme est une estimation dans le triangle méridien Mer ; on pose $\hat{\psi}(u, t) = \psi(x, y)$ et on considère l'espace $S_{N_0}(h)$

$$S_{N_0}(h) = \text{vect}(\psi_1, \dots, \psi_{N_0}).$$

On a le

Lemme 12.3 *Pour tout $\psi \in S_{N_0}(h)$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$, on ait :*

$$\int_{\text{Mer}} (x+1)^{-k} |\partial_y \psi|^2 y dx dy \leq C \|\psi\|^2.$$

Preuve du lemme : Commençons avec $\psi = \psi_j$ pour un certain $j \in \{1, \dots, N_0\}$. L'équation suivante est vérifiée :

$$\left(-h^2 \partial_x^2 - \frac{1}{y} \partial_y (y \partial_y) + \frac{m^2}{y^2}\right) \psi_j = \lambda_j(h) \psi_j.$$

On multiplie par $(x+1)^{-k}$, on fait le produit scalaire avec ψ_j puis une intégration par partie et on trouve :

$$\int_{\text{Mer}} (x+1)^{-k} |\partial_y \psi_j|^2 y dx dy \leq C \int_{\text{Mer}} (x+1)^{-k} (|\psi_j|^2 + h^2 (x+1)^{-1} |\psi_j| |\partial_x \psi_j|) y dx dy.$$

On utilise l'estimée d'Agmon de la Proposition 12.1 avec $\rho_0 \geq k+1$ et on en déduit le lemme pour $\psi = \psi_j$. Pour $\psi \in S_{N_0}(h)$, on procède comme expliqué en Remarque 4.5. \diamond

Dès lors, on prouve :

Lemme 12.4 Soit $\hat{\psi} \in \widehat{S}_{N_0}(h)$. Il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$

$$\left| h^2 \int_{\text{Sq}} \frac{1}{(u+1)^2} (\partial_u \hat{\psi})(\partial_t \hat{\psi}) t (u+1)^2 dt du \right| \leq C h^{4/3} \|\hat{\psi}\|^2.$$

Preuve du lemme : Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\left| h^2 \int_{\text{Sq}} \frac{1}{(u+1)^2} (\partial_u \hat{\psi})(\partial_t \hat{\psi}) t (u+1)^2 dt du \right|^2 \leq h^4 \int_{\text{Sq}} |\partial_u \hat{\psi}|^2 (u+1)^2 t dt du \int_{\text{Sq}} \frac{1}{(u+1)^4} |\partial_t \hat{\psi}|^2 t (u+1)^2 dt du.$$

Dans les coordonnées originales sur le triangle méridien Mer on a :

$$\int_{\text{Sq}} \frac{1}{(u+1)^4} |\partial_t \hat{\psi}|^2 t (u+1)^2 dt du = \int_{\text{Mer}} (x+1)^{-4} |\partial_y \psi|^2 y dx dy.$$

On applique le Lemme 12.3 et cette égalité devient

$$\int_{\text{Sq}} \frac{1}{(u+1)^4} |\partial_t \hat{\psi}|^2 t (u+1)^2 dt du \leq C_1 \|\hat{\psi}\|^2, \quad (12.2)$$

pour un nombre réel $C_1 > 0$. On utilise la Proposition 12.1 exprimée dans les coordonnées du carré Sq, et on trouve qu'il existe un nombre réel $C_2 > 0$ tel que :

$$\int_{\text{Sq}} \left| \partial_u \hat{\psi} - \frac{1}{(u+1)^2} \partial_t \hat{\psi} \right|^2 t (u+1)^2 dt du \leq C_2 h^{-4/3} \|\hat{\psi}\|^2.$$

Pour un nombre réel $C_3 > 0$, l'inégalité (12.2) livre

$$\int_{\text{Sq}} |\partial_u \hat{\psi}|^2 t (u+1)^2 dt du \leq C_3 h^{-4/3} \|\hat{\psi}\|^2,$$

ce qui termine la preuve du lemme. \diamond

Pour avoir des estimées dans $L^2(\text{Sq}, t dt du)$ au lieu de $L^2(\text{Sq}, t(u+1)^2 dt du)$ on a besoin du

Lemme 12.5 Soit $\hat{\psi} \in \widehat{S}_{N_0}(h)$. Il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ on ait

$$\left| h^2 \int_{\text{Sq}} |\partial_u \hat{\psi}|^2 u t d t d u \right| \leq C h^{4/3} \|\hat{\psi}\|^2; \quad \left| \int_{\text{Sq}} |u| |\hat{\psi}|^2 u t d t d u \right| \leq C h^{4/3} \|\hat{\psi}\|^2.$$

Preuve : On exprime chaque intégrale dans le triangle méridien Mer et on utilise l'estimée d'Agmon de la Proposition 12.1 afin d'obtenir le lemme. \square

On peut maintenant prouver la

Proposition 12.6 Soit $\hat{\psi} \in \widehat{S}_{N_0}(h)$. Il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ on ait

$$\int_{\text{Sq}} (h^2 |\partial_u \hat{\psi}|^2 + j_{m,1}^2 |u| |\hat{\psi}|^2) t d t d u \leq (\lambda_{N_0}(h) - j_{m,1}^2) \|\hat{\psi}\|^2 + C h^{4/3} \|\hat{\psi}\|^2.$$

Preuve : Soit $\psi \in S_{N_0}(h)$. Comme les $(\psi_i)_{i \in \{1, \dots, N_0\}}$ sont orthogonales on a :

$$\mathcal{Q}_{\text{Mer}}^{[m]}(h)(\psi) \leq \lambda_{N_0}(h) \|\psi\|^2.$$

L'équation (12.1) mène à

$$\int_{\text{Mer}} h^2 |\partial_x \psi|^2 + \frac{j_{m,1}^2}{(x+1)^2} |\psi|^2 y d x d y \leq \lambda_{N_0}(h) \|\psi\|^2.$$

On utilise la convexité de la fonction $(x \mapsto (x+1)^{-2})$ et on obtient

$$\int_{\text{Mer}} (h^2 |\partial_x \psi|^2 + j_{m,1}^2 |x| |\psi|^2) y d x d y \leq (\lambda_{N_0}(h) - j_{m,1}^2) \|\psi\|^2.$$

On effectue le changement de variables (11.2) et à l'aide des Lemmes 12.4 et 12.5, dans le carré Sq on obtient :

$$\int_{\text{Sq}} (h^2 |\partial_u \hat{\psi}|^2 + j_{m,1}^2 |u| |\hat{\psi}|^2) t d t d u \leq (\lambda_{N_0}(h) - j_{m,1}^2) \|\hat{\psi}\|^2 + C h^{4/3} \|\hat{\psi}\|^2,$$

ce qui termine la preuve de la proposition. \square

Preuve du Théorème 1.11 L'inégalité de la Proposition 12.6 s'écrit comme

$$\mathcal{Q}_{\text{A}}^{[m]}(h)(\hat{\psi}) \leq (\lambda_{N_0}(h) - j_{m,1}^2) \|\hat{\psi}\|^2 + C h^{4/3} \|\hat{\psi}\|^2,$$

où $\mathcal{Q}_{\text{A}}^{[m]}(h)$ est la forme quadratique d'un opérateur d'Airy définie par

$$\mathcal{Q}_{\text{A}}^{[m]}(h)(\hat{\psi}) = \int_{\text{Sq}} (h^2 |\partial_u \hat{\psi}|^2 + j_{m,1}^2 |u| |\hat{\psi}|^2) t d t d u.$$

La Proposition 12.2 et l'équation (12.1) donnent

$$\mathcal{Q}_{\text{A}}^{[m]}(h)(\hat{\psi}) \leq (\lambda_{N_0}(h) - j_{m,1}^2) \|\Pi_1^{[m]} \hat{\psi}\|_{L^2(\text{Sq}, t d t d u)}^2 + C h^{4/3} \|\Pi_1^{[m]} \hat{\psi}\|_{L^2(\text{Sq}, t d t d u)}^2.$$

De plus on a

$$\mathcal{Q}_A^{[m]}(h)(\hat{\psi}) = \mathcal{Q}_A^{[m]}(h)(\Pi_1^{[m]}\hat{\psi}) + \mathcal{Q}_A^{[m]}(h)((\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}) + 2\mathcal{B}_A^{[m]}(h)(\Pi_1^{[m]}\hat{\psi}, (\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}),$$

où $\mathcal{B}_A^{[m]}(h)$ est la forme bilinéaire associée à la forme quadratique $\mathcal{Q}_A^{[m]}(h)$.

On remarque que

$$\mathcal{B}_A^{[m]}(h)(\Pi_1^{[m]}\hat{\psi}, (\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi}) = \int_u \left\langle \Pi_1^{[m]}((-h^2\partial_u^2 + j_{m,1}^2|u|)\hat{\psi}), (\text{Id} - \Pi_1^{[m]})\hat{\psi} \right\rangle_t \mathbf{d}u = 0.$$

Finalement on a

$$\mathcal{Q}_A^{[m]}(h)(\Pi_1^{[m]}\hat{\psi}) \leq (\lambda_{N_0}(h) - j_{m,1}^2) \|\Pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|_{L^2(\text{Sq}, tdtdu)}^2 + Ch^{4/3} \|\Pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|_{L^2(\text{Sq}, tdtdu)}^2.$$

On définit $\pi_1^{[m]}\hat{\psi} = \langle \Pi_1^{[m]}\hat{\psi}, b_1^{[m]} \rangle_t$, c'est une fonction en la seule variable u et en une dimension on a :

$$q_A^{[m]}(h)(\pi_1^{[m]}\hat{\psi}) = \int_{-1}^0 h^2 |\partial_u \pi_1^{[m]}\hat{\psi}|^2 + j_{m,1}^2 |u| |\pi_1^{[m]}\hat{\psi}|^2 \mathbf{d}u \leq (\lambda_{N_0}(h) - j_{m,1}^2) \|\pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|^2 + Ch^{4/3} \|\pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|^2,$$

où les normes $\|\pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|$ sont celles sur $L^2((-1, 0), \mathbf{d}u)$. On considère une fonction troncature régulière χ telle que :

$$\chi(u) = 1 \quad \text{pour } u \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{et} \quad \chi(u) = 0 \quad \text{pour } u \leq -\frac{3}{4}.$$

La Proposition 12.1 donne

$$q_A^{[m]}(h)(\chi\pi_1^{[m]}\hat{\psi}) + \mathcal{O}(h^\infty) \|\pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|^2 \leq q_{A,h}^{[m]}(\pi_1^{[m]}\hat{\psi}), \quad \text{et} \quad \|\pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|^2 = (1 + \mathcal{O}(h^\infty)) \|\chi\pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|^2.$$

Donc il vient

$$q_A^{[m]}(h)(\chi\pi_1^{[m]}\hat{\psi}) \leq (\lambda_{N_0}(h) - j_{m,1}^2) \|\chi\pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|^2 + Ch^{4/3} \|\chi\pi_1^{[m]}\hat{\psi}\|^2.$$

Enfin, on considère l'espace $\widehat{s}_{N_0}(h) = \text{vect}(\pi_1^{[m]}\hat{\psi}_1, \dots, \pi_1^{[m]}\hat{\psi}_{N_0})$ et on applique le principe du min-max 2.1 à l'espace de dimension N_0 $\chi\widehat{s}_{N_0}(h)$ ce qui livre

$$j_{m,1}^2 + (2j_{m,1}^2)^{2/3} z_A(N_0) h^{2/3} \leq \lambda_{N_0}(h) + Ch^{4/3}.$$

Combiné à la Proposition 11.1 cela conclut la preuve du Théorème 1.11. □

Chapitre 13

Simulations numériques pour les cônes de petite ouverture

13.1 Structure des fonctions propres dans la limite semiclassique

On illustre certaines propriétés théoriques des fonctions propres à l'aide de simulations numériques. Les calculs sont effectués dans le triangle méridien Mer pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Mer}}^{[m]}(\tan \theta)$. La Figure 13.1 rend compte du terme dominant dans la construction (11.12) : c'est presque un produit tensoriel entre la fonction d'Airy de première espèce et la 0-ième fonction de Bessel de première espèce (respectivement le long des abscisses et des ordonnées). Les fonctions propres sont localisées près du bord droit du triangle ce qui coïncide avec les estimées d'Agmon de la Proposition 12.1.

La Figure 13.2 met en relief la localisation pour des valeurs croissantes de m . Pour $m \neq 0$ il y a une condition de Dirichlet le long de l'axe des abscisses. Elle induit une répulsion le long de cet axe qui est plus importante lorsque m grandit. La m -ième fonction de Bessel de première espèce détermine le comportement des fonctions propres le long de l'axe des ordonnées ce qui explique cette répulsion.

13.2 Comportement pour de plus grands angles d'ouverture

La Figure 13.3 met en valeur un phénomène sur le comportement des valeurs propres. À première vue, on pourrait croire à un croisement de ces valeurs propres. Néanmoins en Figure 13.4, on a effectué un zoom de la Figure 13.3 et on peut voir qu'il n'y a pas de croisement mais des évitements.

Afin de mieux comprendre ces évitements on a représenté en Figure 13.5 des fonctions propres après un évitement. Même si nous ne sommes plus dans le régime semi-classique $\theta \rightarrow 0$ la sixième fonction propre a l'allure attendue. La septième a deux zones nodales principales bien qu'on puisse observer la trace de zones nodales secondaires. La huitième fonction propre a sept zones nodales et possède l'allure de ce que l'on attend comme la septième fonction propre dans le régime semi-classique. On observe le même phénomène pour les neuvième et dixième fonctions propres. Pour avoir une idée de ce qui arrive, on peut penser aux premiers termes du Théorème 1.11. Si $j_{0,1}^2 + (2j_{0,1}^2)^{2/3} z_A(7)h^{2/3}$ est proche de $j_{0,2}^2 + (2j_{0,2}^2)^{2/3} z_A(1)h^{2/3}$ on peut imaginer que les autres zéros de Bessel jouent aussi un rôle. Cela explique partiellement la Figure 13.5.

La Figure 13.6 représente l'évolution des lignes nodales le long d'un évitement dans le triangle méridien $\text{Mer}(\theta)$. On a choisi ce domaine pour mettre en exergue la structure régulière des lignes

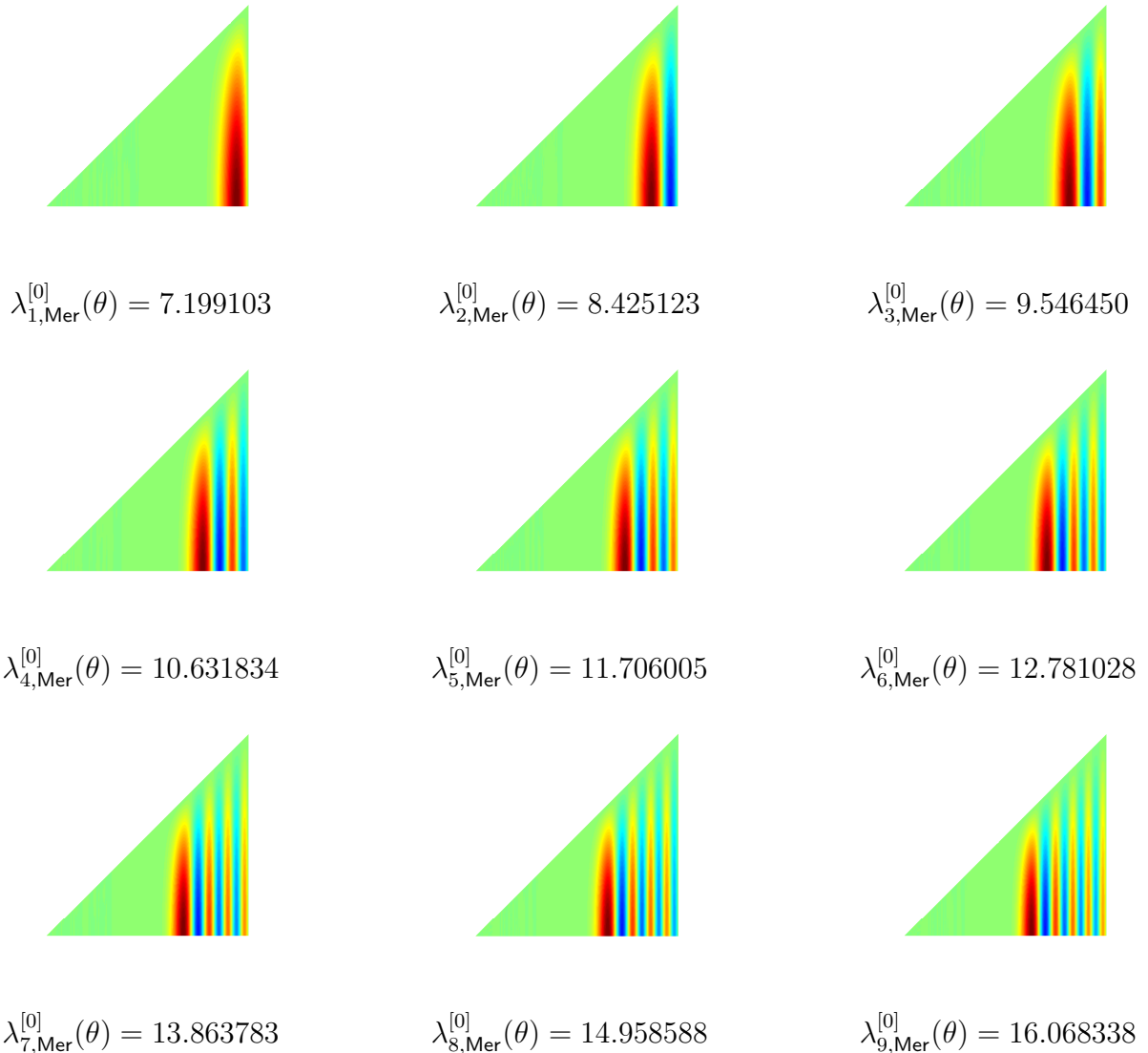


FIG. 13.1 – Calculs pour $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$. Valeurs numériques des neuf premières valeurs propres pour $m = 0$. Représentations des fonctions propres associées dans le triangle Mer.

nodales. Les trois zones nodales sur la gauche sont inchangées. Toutefois, les deux zones nodales en bleues sur la gauche se rejoignent progressivement pour en former une unique. On observe ensuite le même phénomène pour les deux zones nodales rouges sur la droite. Enfin on obtient à gauche les trois zones nodales initiales et deux autres, l'une au dessus de l'autre.

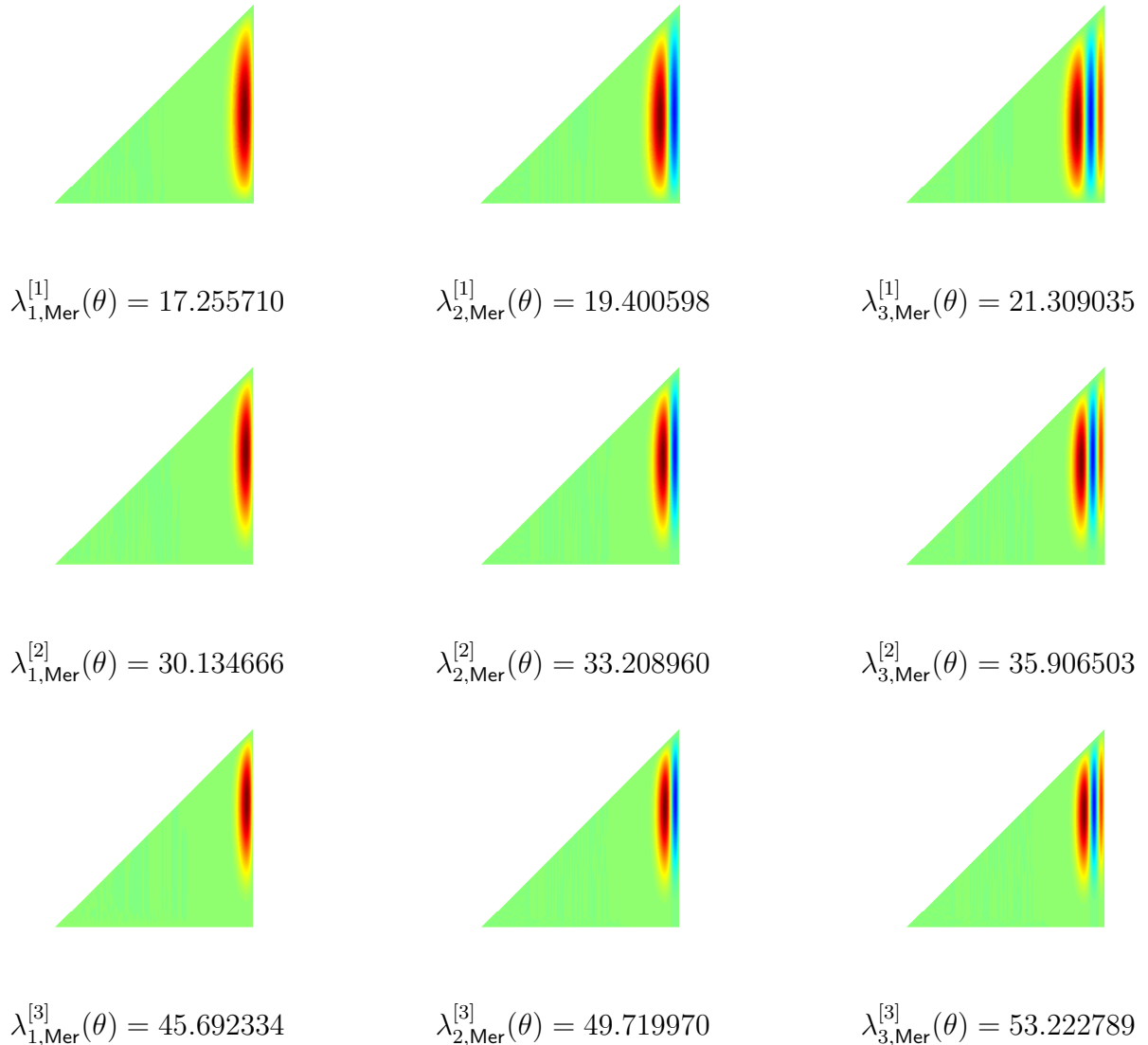


FIG. 13.2 – Calculs pour $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$. Valeurs numériques des trois premières valeurs propres pour $m = 1$, $m = 2$ et $m = 3$. Représentation des fonctions propres associées dans le triangle Mer.

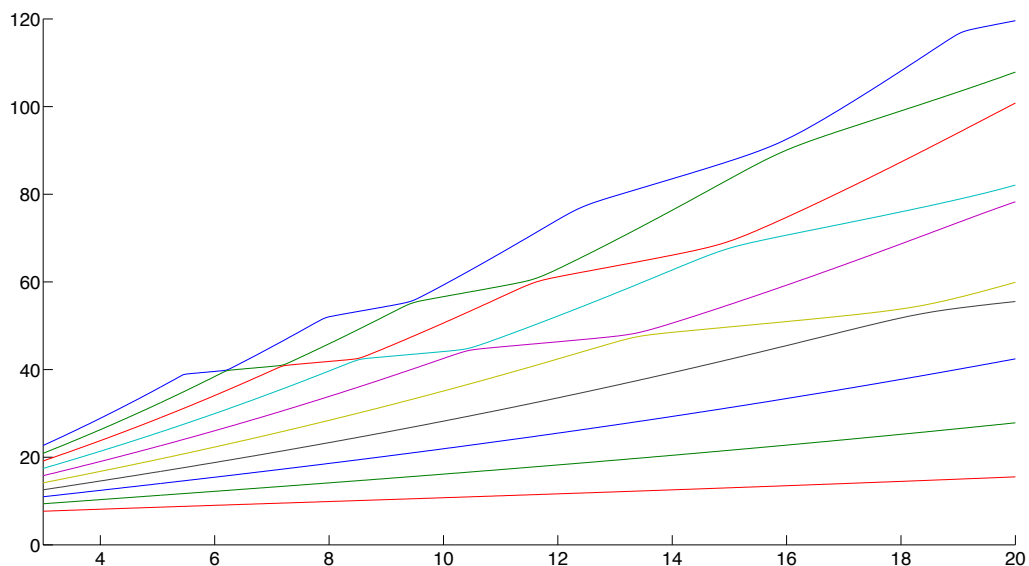


FIG. 13.3 – Cette figure représente les dix premières valeurs propres $\lambda_{n,Mer}^{[0]}$ en fonction de l'ouverture θ [°]. On a calculé chaque valeur propre tous les 0.05° .

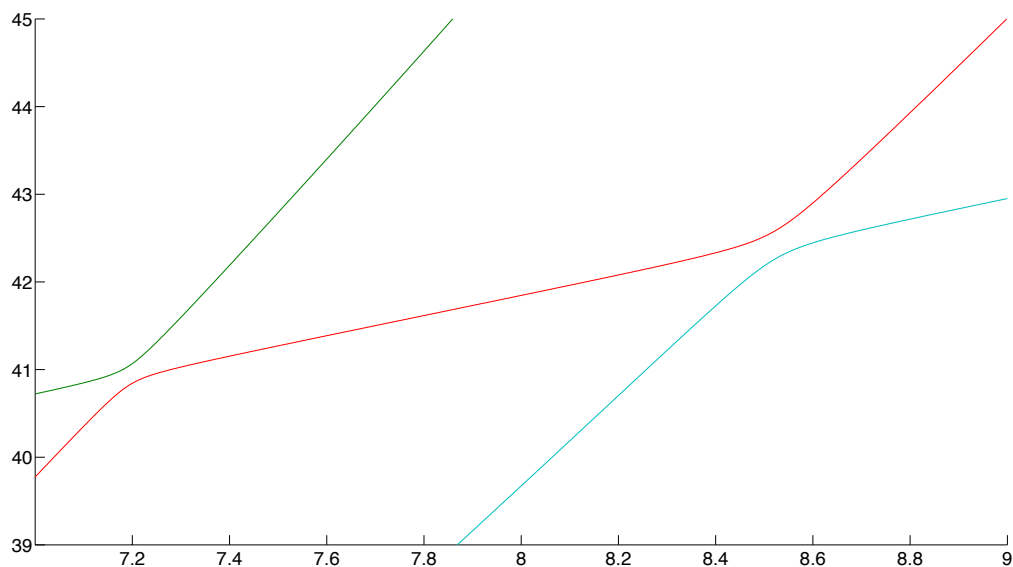


FIG. 13.4 – Cette figure est un zoom de la Figure 13.3. On a calculé chaque valeur propre tous les 0.005° .

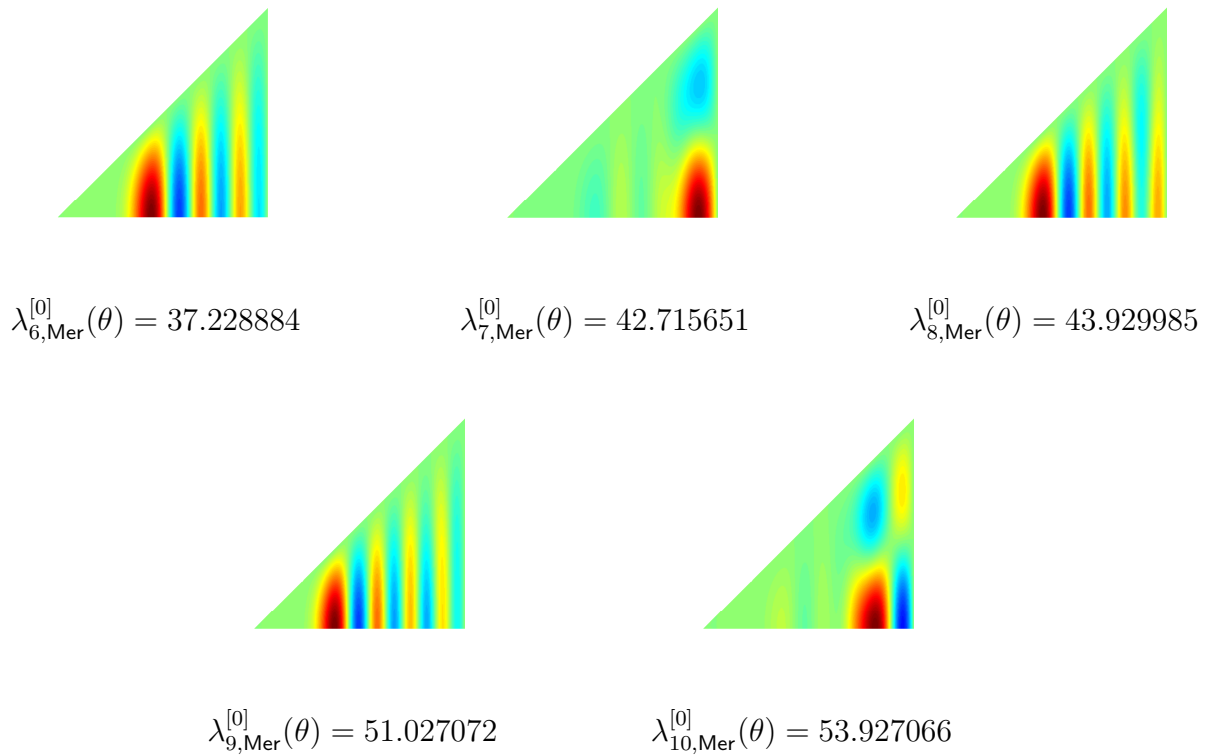


FIG. 13.5 – Calculs pour $\theta = 8.8^\circ$. Valeurs numériques des valeurs propres correspondantes. Représentation des fonctions propres associées dans le triangle méridien Mer.

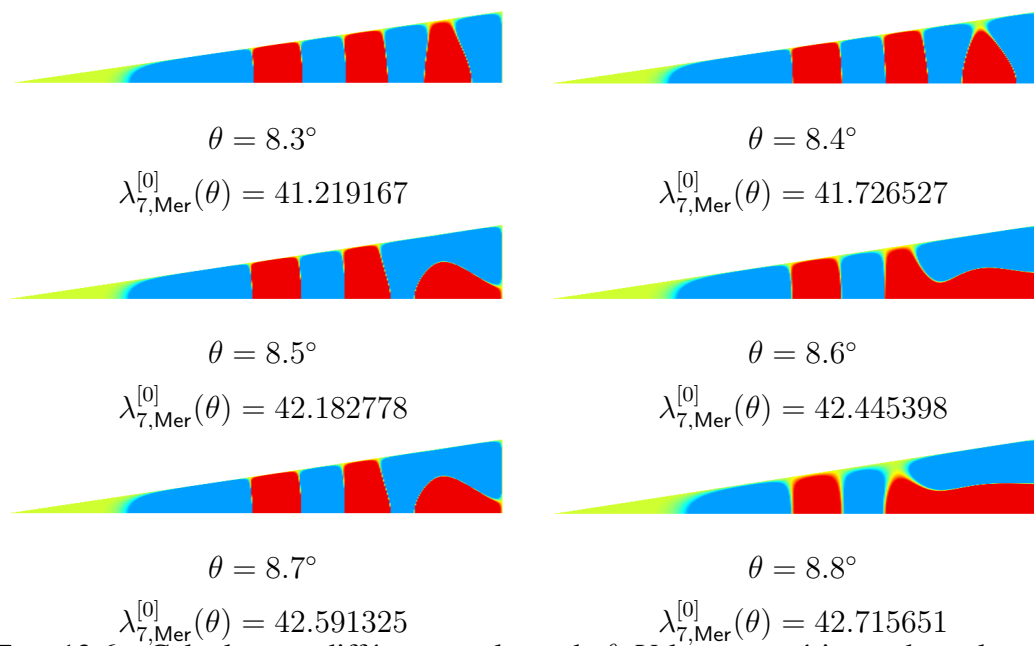


FIG. 13.6 – Calculs pour différentes valeurs de θ . Valeurs numériques des valeurs propres correspondantes. Représentation des zones nodales dans le triangle méridien initial Mer(θ).

Cinquième partie

Couche conique

Chapitre 14

Comptage des valeurs propres

Le but de ce chapitre est de prouver le Théorème 1.19. En Section 14.1 on s'intéresse aux valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger de la forme $-\partial_x^2 - \frac{c}{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$. En Section 14.2, on démontre que pour $E > 0$, on a

$$\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cot \theta}{4\pi} |\ln E|.$$

14.1 Un résultat de Kirsh et Simon

Soit $c > 0$, on considère la forme quadratique, définie sur $\mathcal{C}_0^\infty(1, +\infty)$, par

$$\int_1^{+\infty} |\partial_x \varphi|^2 - \frac{c}{x^2} |\varphi|^2 dx, \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(1, +\infty).$$

Cette forme quadratique est bornée inférieurement, on note \mathfrak{h} son extension de Friedrichs. Le but de cette section est de prouver la

Proposition 14.1 ([KS88]) Soit $E > 0$ et $V_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(1, +\infty)$. Si $c > \frac{1}{4}$ on a l'équivalent :

$$\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h} + V_0) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi} \sqrt{c - \frac{1}{4}} |\ln E|,$$

où $\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h} + V_0)$ est à comprendre au sens de la Définition 1.17.

En fait, comme expliqué dans [KS88], quand $c < \frac{1}{4}$ et que E tend vers 0 la quantité $\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h} + V_0)$ est bornée. Cette distinction de cas $c < \frac{1}{4}$ et $c > \frac{1}{4}$ est à mettre en relation avec l'inégalité de Hardy suivante :

Proposition 14.2 (Inégalité de Hardy) Pour toute fonction $f \in H_0^1(0, +\infty)$, on a :

$$\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 - \frac{1}{4x^2} |f(x)|^2 dx \geq 0.$$

En particulier pour $c \leq \frac{1}{4}$ la réalisation de Dirichlet de $-\partial_x^2 - \frac{c}{x^2}$ sur $(0, +\infty)$ est un opérateur positif dont le spectre est composé uniquement de spectre essentiel et vaut $[0, +\infty)$.

La preuve de la Proposition 14.1 s'articule comme celle exposée par Kirsh et Simon dans [KS88]. En sous-Section 14.1.1, on effectue un changement d'échelle pour compter les valeurs propres de \mathfrak{h} sous un seuil fixé. Ensuite, en sous-Section 14.1.2, on s'intéresse à une perturbation compacte de l'opérateur \mathfrak{h} puis, en sous-Section 14.1.3, on montre que cette perturbation compacte ne perturbe pas $\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h})$ au premier ordre. Finalement, en sous-Section 14.1.4, on justifie que pour une fonction $V_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(1, +\infty)$ on a $\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h} + V_0)$.

Avant de commencer la preuve de la Proposition 14.1, on justifie le fait que le spectre discret de \mathfrak{h} soit à chercher sous la valeur 0. En effet, on a la

Proposition 14.3 *Le spectre essentiel de \mathfrak{h} vérifie :*

$$\mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathfrak{h}) = [0, +\infty).$$

Preuve : On montre dans un premier temps que $[0, +\infty) \subset \mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathfrak{h})$. Pour cela, pour tout $r \in \mathbb{R}$, on exhibe une suite de Weyl associée r^2 . On considère une fonction $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(1, +\infty)$ telle que :

$$\text{supp}\chi = [2, 3], \|\chi\|^2 = 1.$$

On pose $\chi_n(x) = n^{-1/2}e^{irx}\chi(n^{-1}x)$. Cette suite de fonction converge faiblement vers 0 dans $L^2(1, +\infty)$. De plus, on a :

$$\|(\mathfrak{h} - r)\chi_n\| \leq \|(-\partial_x^2 - r^2)\chi_n\| + \|\frac{c}{x^2}\chi_n\|,$$

or

$$(-\partial_x^2 - r^2)\chi_n = -\frac{2ir}{n^{3/2}}e^{irx}\chi'(n^{-1}x) - \frac{e^{irx}}{n^{5/2}}\chi''(n^{-1}x),$$

on en déduit donc

$$\|(-\partial_x^2 - r^2)\chi_n\| \leq \frac{2|r|}{n^{3/2}}\|\chi'(n^{-1}\cdot)\| + \frac{1}{n^{5/2}}\|\chi''(n^{-1}\cdot)\|.$$

Comme on a $\|\chi'(n^{-1}\cdot)\| \leq n\|\chi'\|_\infty$ et $\|\chi''(n^{-1}\cdot)\| \leq n\|\chi''\|_\infty$ on obtient :

$$\|(-\partial_x^2 - r^2)\chi_n\| \leq \frac{2|r|}{\sqrt{n}}\|\chi'\|_\infty + \frac{1}{n^{3/2}}\|\chi''\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0.$$

De plus, on a :

$$\|\frac{c}{x^2}\chi_n\| \leq \frac{|c|}{4n^2} \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0,$$

donc on en déduit que $\|(\mathfrak{h} - r^2)\chi_n\| \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0$ et que χ_n est une suite de Weyl associée r^2 .

Pour obtenir l'inclusion $\mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathfrak{h}) \subset [0, +\infty)$ on considère $\lambda > 0$ et on regarde le potentiel

$$v_{-\lambda}(x) = \begin{cases} -\frac{c}{x^2} & \text{si } x \geq \sqrt{\frac{c}{\lambda}}, \\ -\lambda & \text{si } x \leq \sqrt{\frac{c}{\lambda}}. \end{cases}$$

On remarque que $\mathfrak{h} = -\partial_x^2 + v_{-\lambda}(x) - (\frac{c}{x^2} + v_{-\lambda}(x))$. Comme $(\frac{c}{x^2} + v_{-\lambda}(x))$ est une perturbation compacte de $-\partial_x^2 + v_{-\lambda}(x)$ on en déduit que

$$\mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{S}_{\text{ess}}(-\partial_x^2 + v_{-\lambda}(x)).$$

Or, on sait que

$$-\lambda \leq \mathfrak{S}(-\partial_x^2 + v_{-\lambda}(x)) \leq \mathfrak{S}_{\text{ess}}(-\partial_x^2 + v_{-\lambda}(x)).$$

Comme ceci est vrai pour tout $\lambda > 0$ on obtient l'inclusion réciproque. \square

14.1.1 Changement d'échelle pour l'opérateur sans potentiel

Soit l'opérateur de changement d'échelle $U_{\sqrt{E}}$ tel que

$$U_{\sqrt{E}}\varphi(x) = E^{1/4}\varphi(\sqrt{E}x).$$

Sur $L^2(\sqrt{E}, +\infty)$ on considère la réalisation de Dirichlet de

$$\mathfrak{h}_{\sqrt{E}} = -\partial_x^2 - \frac{c}{x^2}.$$

On a

$$U_{\sqrt{E}}^{-1}\mathfrak{h}U_{\sqrt{E}} = E\mathfrak{h}_{\sqrt{E}}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{-1}(\mathfrak{h}_{\sqrt{E}}).$$

14.1.2 Comptage des valeurs propres pour une perturbation compacte

On considère, sur $L^2(\sqrt{E}, +\infty)$, la réalisation de Dirichlet de

$$\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}} = -\partial_x^2 - \widehat{v}_{\sqrt{E}},$$

avec

$$\widehat{v}_{\sqrt{E}} = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & x \geq \sqrt{c}, \\ \frac{c}{x^2} + 1, & \sqrt{E} \leq x < \sqrt{c}. \end{cases}$$

En fait, $\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}$ est une perturbation compacte de $\mathfrak{h}_{\sqrt{E}}$ pour laquelle on peut expliciter $\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}})$. On montrera, en sous-Section 14.1.3, n'affecte pas l'équivalent de $\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}})$: elle crée des termes d'ordres plus élevés. On a la

Proposition 14.4 *Le nombre de valeurs propres inférieures à -1 de l'opérateur $\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}$ admet, lorsque $E \rightarrow 0$, l'équivalent suivant :*

$$\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi} \sqrt{c - \frac{1}{4}} |\ln E|.$$

Preuve de la Proposition 14.4 Soit l'espace de fonction

$$\mathcal{C}_{0,0}^\infty(\sqrt{E}, +\infty) = \{\Psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\sqrt{E}, +\infty) : \text{supp}(\Psi) \subset (\sqrt{E}, \sqrt{c}) \cup (\sqrt{c}, +\infty)\}.$$

On construit l'opérateur $\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}$ comme l'extension de Friedrichs sur $L^2(\sqrt{E}, +\infty)$ de la forme quadratique sur $\mathcal{C}_{0,0}^\infty(\sqrt{E}, +\infty)$ définie par

$$\int_{\sqrt{E}}^{\sqrt{c}} |\partial_x \Psi|^2 - \left(\frac{c}{x^2} + 1\right) |\Psi|^2 dx + \int_{\sqrt{c}}^{+\infty} |\partial_x \Psi|^2 - \frac{c}{x^2} |\Psi|^2 dx.$$

On note $\widehat{q}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}$ la forme quadratique associée à $\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}$. Nous voulons appliquer la Proposition A.1 avec $\mathcal{L}_1 = \widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}$, $\mathcal{L}_2 = \widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}$ et un espace \mathcal{E} à définir.

Lemme 14.5 *Il existe un espace vectoriel \mathcal{E} de dimension 1 tel que :*

$$\text{Dom}(\widehat{q}_{\sqrt{E}}) = \text{Dom}(\widehat{q}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}) \oplus \mathcal{E}. \quad (14.1)$$

La décomposition 14.1, combinée à la Proposition A.1, a pour conséquence immédiate l'inégalité :

$$|\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}) - \mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}})| \leq 1. \quad (14.2)$$

Preuve du lemme : Afin de construire \mathcal{E} on considère la fonction

$$p(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x - \sqrt{c}) + 1, & \text{si } \sqrt{E} \leq x \leq \sqrt{c}, \\ \frac{1}{2}(x - \sqrt{c}) + 1, & \text{si } \sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{E}. \end{cases}$$

Soit χ une fonction troncature régulière telle que

$$\chi(x) = 1 \text{ si } |x - \sqrt{c}| \leq \frac{\sqrt{c} - \sqrt{E}}{3}; \quad \chi(x) = 0 \text{ si } |x - \sqrt{c}| \geq \frac{\sqrt{c} - \sqrt{E}}{2}.$$

On définit la fonction $e(x) = \chi(x)p(x) \in \text{Dom}(\widehat{q}_{\sqrt{E}})$. Cette fonction vaut 1 en $x = \sqrt{c}$ et possède un saut de dérivée égal à 1. Posons $\mathcal{E} = \text{vect}(e)$, pour toute fonction $\Psi \in \text{Dom}(\widehat{q}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}})$ on a :

$$\Psi = \underbrace{(\Psi - \Psi(\sqrt{c})e)}_{\in \text{Dom}(\widehat{q}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}})} + \Psi(\sqrt{c})e.$$

De plus $\mathcal{E} \cap \text{Dom}(\widehat{q}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}) = \{0\}$, ce qui justifie la décomposition (14.1). \diamond

On décompose alors $\mathfrak{h}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}$ en somme directe en considérant ses restrictions sur (\sqrt{E}, \sqrt{c}) et $(\sqrt{c}, +\infty)$:

$$\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}} = \widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{E}, \sqrt{c})} \oplus \widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{c}, +\infty)}, \quad (14.3)$$

cependant seul le premier opérateur de cette somme directe génère des valeurs propres inférieures à -1 . Par conséquent, on a :

$$\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}) = \mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{E}, \sqrt{c})}). \quad (14.4)$$

Lemme 14.6 *Il existe une constante $B > 0$, indépendante de E , telle que l'on ait :*

$$\left| \mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{E}, \sqrt{c})}) - \frac{1}{2\pi} \sqrt{c - \frac{1}{4}} |\ln E| \right| \leq B.$$

Preuve du lemme : On veut appliquer le Corollaire B.3 ; pour cela on cherche une fonction Ψ de la forme $\Psi(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), solution de

$$-\Psi''(x) - \left(\frac{c}{x^2} + 1\right)\Psi(x) = -\Psi(x),$$

c'est-à-dire vérifiant

$$-\Psi''(x) - \frac{c}{x^2}\Psi(x) = 0. \quad (14.5)$$

Nécessairement, α vérifie :

$$\alpha^2 - \alpha - c = 0.$$

On obtient $\alpha = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{c - \frac{1}{4}}$ et une solution réelle Ψ_1 de (14.5) s'écrit :

$$\Psi_1(x) = \sqrt{x} \sin\left(\sqrt{c - \frac{1}{4}} \ln x\right).$$

Si $\Psi_1(\sqrt{E}) = 0$ alors, d'après la Proposition B.2, le nombre de zéros de Ψ_1 dans l'intervalle (\sqrt{E}, \sqrt{c}) est égal à $\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{E}, \sqrt{c})})$, si $\Psi_1(\sqrt{E}) \neq 0$ d'après le Corollaire B.3 on a :

$$|\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{E}, \sqrt{c})}) - \#\{x \in (\sqrt{E}, \sqrt{c}) : \Psi_1(x) = 0\}| \leq 1. \quad (14.6)$$

Il convient alors de compter le nombre de zéros de Ψ_1 dans l'intervalle ouvert (\sqrt{E}, \sqrt{c}) . Or, on a

$$\Psi_1(x) = 0 \text{ si et seulement si } \sqrt{c - \frac{1}{4}} \ln x \equiv 0[\pi],$$

Ce qui revient revient à :

$$x = e^{k\pi(c-\frac{1}{4})^{-1/2}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit :

$$\#\{x \in (\sqrt{E}, \sqrt{c}) : \Psi_1(x) = 0\} = \#\{k \in \mathbb{Z} : \frac{1}{2\pi} \sqrt{c - \frac{1}{4}} \ln E \leq k \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{c - \frac{1}{4}} \ln c\}.$$

Plus précisément, on a :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{c - \frac{1}{4}}(\ln c - \ln E)\right) \leq \#\{x \in (\sqrt{E}, \sqrt{c}) \mid \Psi_1(x) = 0\} \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{c - \frac{1}{4}}(\ln c - \ln E)\right) + 1, \quad (14.7)$$

où \mathbb{E} est la fonction partie entière. On en déduit

$$\left| \#\{x \in (\sqrt{E}, \sqrt{c}) \mid \Psi_1(x) = 0\} - \frac{1}{2\pi}\sqrt{c - \frac{1}{4}}|\ln E| \right| \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{c - \frac{1}{4}}|\ln c| + 2.$$

Finalement, si on combine (14.6) et (14.7), on obtient :

$$\left| \mathcal{N}_{-1}\left(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{\text{Dir}}\Big|_{(\sqrt{E}, \sqrt{c})}\right) - \frac{\sqrt{c - 1/4}}{2\pi}|\ln E| \right| \leq \frac{\sqrt{c - 1/4}}{2\pi}|\ln c| + 3.$$

◇

Enfin, on utilise (14.2), (14.4) et le Lemme 14.6 pour conclure la preuve de la Proposition 14.4. □

14.1.3 Invariance par perturbation compacte

Le but de cette sous-section est de démontrer la

Proposition 14.7 *On a :*

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}})}{\mathcal{N}_{-1}(\mathfrak{h}_{\sqrt{E}})} = 1.$$

Preuve : Soit $\varepsilon \in (0, 1)$, on a :

$$\mathfrak{h}_{\sqrt{E}} = -\partial_x^2 + v_{\sqrt{E}} - (1 - \varepsilon)\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)^{-1}c})} + (1 - \varepsilon)\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)^{-1}c})}.$$

D'après (i) du Lemme A.3, on a :

$$\mathcal{N}_{-1}(\mathfrak{h}_{\sqrt{E}}) \leq \mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{(1-\varepsilon)^{-1}}) + \mathcal{N}_{-1}(-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon)\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)^{-1}c})}), \quad (14.8)$$

où, pour $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $\kappa > \frac{E}{c}$, on a :

$$\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{(\kappa)} = -\partial_x^2 + \kappa v_{\sqrt{E}} - \mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{\kappa c})}.$$

De même, on peut écrire :

$$\mathfrak{h}_{\sqrt{E}} = -\partial_x^2 + v_{\sqrt{E}} - (1 - \varepsilon)^{-1}\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)c})} + (1 - \varepsilon)^{-1}\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)c})}.$$

À l'aide de (ii) du Lemme A.3, pour ε assez petit, on obtient la minoration :

$$\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{(1-\varepsilon)}) - \mathcal{N}_{-1}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)c})}) \leq \mathcal{N}_{-1}(\mathfrak{h}_{\sqrt{E}}). \quad (14.9)$$

Toutefois, l'opérateur $-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon)\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)^{-1}c})}$ est positif donc

$$\mathcal{N}_{-1}(-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon)\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)^{-1}c})}) = 0. \quad (14.10)$$

On a aussi le

Lemme 14.8 *Soit $\varepsilon \in (0, 1)$, il existe une constante $B(\varepsilon) > 0$, indépendante de E , telle que*

$$\mathcal{N}_{-1}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)c})}) \leq B(\varepsilon).$$

Preuve du lemme : Soit l'opérateur $\delta_\varepsilon = -\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}\mathbb{1}_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)c})}$, en utilisant la Proposition A.1 de la même manière que dans la preuve du Lemme 14.5, on prouve que :

$$|\mathcal{N}_{-1}(\delta_\varepsilon) - \mathcal{N}_{-1}(\delta_\varepsilon^{\text{Dir}})| \leq 1,$$

où $\delta_\varepsilon^{\text{Dir}}$ est l'opérateur δ_ε avec condition de Dirichlet en $\sqrt{(1 - \varepsilon)c}$. Comme en (14.3), on a la décomposition suivante :

$$\delta_\varepsilon^{\text{Dir}} = \delta_\varepsilon^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)c})} \oplus \delta_\varepsilon^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{(1-\varepsilon)c}, +\infty)},$$

on en déduit que

$$\mathcal{N}_{-1}(\delta_\varepsilon^{\text{Dir}}) = \mathcal{N}_{-1}(\delta_\varepsilon^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)c})}).$$

Si $\lambda_k^{(\varepsilon)}(E)$ est la k -ième valeur propre de $\delta_\varepsilon^{\text{Dir}}|_{(\sqrt{E}, \sqrt{(1-\varepsilon)c})}$ on a :

$$\lambda_k^{(\varepsilon)}(E) = \frac{k^2\pi^2}{(\sqrt{(1-\varepsilon)c} - \sqrt{E})^2} + \varepsilon^{-1}.$$

Or résoudre $\lambda_k^{(\varepsilon)}(E) \leq 1$ mène à :

$$k \leq \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^{-1}}}{\pi} (\sqrt{(1 - \varepsilon)c} - \sqrt{E}) \leq \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^{-1}}}{\pi} \sqrt{(1 - \varepsilon)c}.$$

◇

Si on combine (14.8), (14.9), (14.10) et le Lemme 14.8, on a :

$$\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{(1-\varepsilon)}) - B(\varepsilon) \leq \mathcal{N}_{-1}(\mathfrak{h}_{\sqrt{E}}) \leq \mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{(1-\varepsilon)^{-1}}).$$

On divise alors l'inégalité par $\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}})$. Grâce à la Proposition 14.4, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{(1-\varepsilon)^{-1}})}{\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1-\varepsilon)^{-1}c - \frac{1}{4}}}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}} = 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}}^{(1-\varepsilon)}) - B(\varepsilon)}{\mathcal{N}_{-1}(\widehat{\mathfrak{h}}_{\sqrt{E}})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1-\varepsilon)c - \frac{1}{4}}}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}} = 1.$$

On en déduit la proposition. \square

14.1.4 Obtention de l'équivalent

Cette sous-section est consacrée à la preuve de la Proposition 14.1. Cette preuve s'articule de la même façon que celle de la Proposition 14.7. Soit $E > 0$, $V_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(1, +\infty)$ et $\varepsilon \in (0, 1)$, d'après le Lemme A.3 on a

$$\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h} + V_0) \leq \mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - (1-\varepsilon)^{-1} \frac{c}{x^2}) + \mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}V_0) \quad (14.11)$$

et

$$\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - (1-\varepsilon) \frac{c}{x^2}) - \mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)V_0) \leq \mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h} + V_0). \quad (14.12)$$

On a le

Lemme 14.9 *Pour $\varepsilon \in (0, 1)$, il existe deux constantes indépendantes de E , $B(\varepsilon) > 0$ et $C(\varepsilon) > 0$, telles que*

- (i) $\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}V_0) \leq B(\varepsilon)$,
- (ii) $\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)V_0) \leq C(\varepsilon)$.

Preuve du lemme : Soit $\varepsilon \in (0, 1)$, si $V_0 = 0$ on a

$$\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}V_0) = \mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)V_0) = 0.$$

Si $V_0 \neq 0$ alors il existe $1 < a < b$ tel que $\text{supp}V_0 \subset [a, b]$. Démontrons le point (i), si $V_0 > 0$ alors l'opérateur $-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}V_0$ est positif donc $\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}V_0) = 0$. Supposons qu'il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $V_0(x_1) < 0$, on note $x_0 = \underset{x \in [a, b]}{\text{argmin}} V_0(x)$. On a :

$$-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}|V_0(x_0)|\mathbf{1}_{[1, b]} \leq -\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}V_0.$$

Par conséquent, on en déduit :

$$\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}V_0) \leq \mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}|V_0(x_0)|\mathbf{1}_{[1, b]}).$$

En procédant comme au Lemme 14.8 on trouve une constante $B(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}|V_0(x_0)|) \leq B(\varepsilon),$$

ce qui conclut la preuve du (i). Démontrons le point (ii), si $V_0 < 0$ alors l'opérateur $-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)V_0$ est un opérateur positif donc $\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)V_0) = 0$. Supposons qu'il existe $x_1 \in (a, b)$ tel que $V_0(x_1) > 0$, on note $x_0 = \underset{x \in [a, b]}{\text{argmax}} V_0(x)$. On a :

$$-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)V_0(x_0)\mathbf{1}_{[1, b]} \leq -\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)V_0(x).$$

On en déduit :

$$\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon)V_0(x)) \leq \mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon)V_0(x_0)\mathbb{1}_{[1,b]}).$$

Là encore, comme au Lemme 14.8, on trouve une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - \varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon)V_0(x_0)\mathbb{1}_{[1,b]}) \leq C(\varepsilon).$$

◇

En utilisant (14.11), (14.12) et le Lemme 14.9, on a

$$\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - (1 - \varepsilon)\frac{c}{x^2}) - C(\varepsilon) \leq \mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h} + V_0) \leq \mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - (1 - \varepsilon)^{-1}\frac{c}{x^2}) + B(\varepsilon).$$

On divise alors par $\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h})$. Grâce à la Proposition 14.7, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - (1 - \varepsilon)^{-1}\frac{c}{x^2}) + B(\varepsilon)}{\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon)^{-1}c - \frac{1}{4}}}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}} = 1$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{E \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_{-E}(-\partial_x^2 - (1 - \varepsilon)\frac{c}{x^2}) - C(\varepsilon)}{\mathcal{N}_{-E}(\mathfrak{h})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon)c - \frac{1}{4}}}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}} = 1.$$

On en déduit la Proposition 14.1.

14.2 Autour des valeurs propres de la couche conique

Comme expliqué en sous-Section 1.4.2, pour comprendre les valeurs propres du Laplacien de Dirichlet dans la couche conique, on se concentre sur l'opérateur $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}$ (voir Tableau 1.4). En sous-Section 14.2.1, on démontre que ses valeurs propres $\mu_{n,\text{Gui}(\cdot)}$ sont croissantes sur $(0, \frac{\pi}{2})$. Les sous-Section 14.2.2 et 14.2.3 constituent la preuve du Théorème 1.18 : on établit successivement une minoration puis une majoration de $\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)})$. En fait, pour $E > 0$, on montre que $\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)})$ est encadré par le nombre de valeurs propres inférieures à $-E$ pour des opérateurs de même type que $\mathfrak{h} + V_0$ dans la Proposition 14.1.

14.2.1 Reformulation du problème et croissance des valeurs propres

Dans toute cette section nous utiliserons une autre expression de l'opérateur $\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}$ et de sa forme quadratique associée $\mathcal{Q}_{\text{Gui}(\theta)}$. Pour cela, on considère la rotation

$$s = z \cos \theta + r \sin \theta; \quad u = -z \sin \theta + r \cos \theta. \quad (14.13)$$

Le domaine $\text{Gui}(\theta)$ devient $\Omega(\theta)$ (voir Figure 14.1) :

$$\Omega(\theta) = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2 : s \geq -\pi \cot \theta, \max(0, -s \tan \theta) < u < \pi\}.$$

Pour $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\text{Gui}(\theta)})$, on définit $\tilde{\psi}(s, u) = \psi(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta)$ et on a :

$$\mathcal{Q}_{\text{Gui}(\theta)}(\psi) = \int_{\Omega(\theta)} (|\partial_s \tilde{\psi}|^2 + |\partial_u \tilde{\psi}|^2)(s \sin \theta + u \cos \theta) \, ds \, du.$$

On définit alors la forme quadratique $\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}$ de domaine $\text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)})$. Ce domaine se déduit de $\text{Dom}(\mathcal{Q}_{\text{Gui}(\theta)})$ par la rotation (14.13) et, pour tout $\tilde{\psi} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)})$, on a :

$$\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}(\tilde{\psi}) = \int_{\Omega(\theta)} (|\partial_s \tilde{\psi}|^2 + |\partial_u \tilde{\psi}|^2)(s \sin \theta + u \cos \theta) \, ds \, du.$$

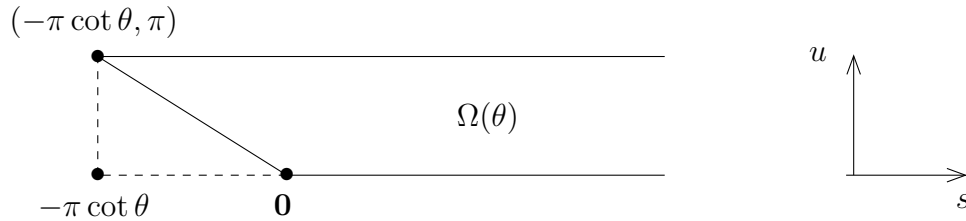


FIG. 14.1 – Le domaine $\Omega(\theta)$.

Cette reformulation du problème permet d'obtenir la Proposition 1.14 sur la croissance des valeurs propres. En voici la preuve.

Preuve : On a l'identité suivante :

$$\frac{\mathcal{Q}_{\text{Gui}(\theta)}(\psi)}{\|\psi\|^2} = \frac{\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}(\tilde{\psi})}{\int_{\Omega(\theta)} |\tilde{\psi}|^2 (s \sin \theta + u \cos \theta) \, ds \, du}.$$

On fait le changement de variable

$$\hat{s} = s \tan \theta; \hat{u} = u. \quad (14.14)$$

Le domaine $\Omega(\theta)$ devient $\Omega = \Omega(\frac{\pi}{4})$. On note $\hat{\psi}(\hat{s}, \hat{u}) = \tilde{\psi}(\hat{s} \cot \theta, \hat{u})$ et on a :

$$\frac{\mathcal{Q}_{\text{Gui}(\theta)}(\psi)}{\|\psi\|^2} = \frac{\int_{\Omega} (\tan^2 \theta |\partial_{\hat{s}} \hat{\psi}|^2 + |\partial_{\hat{u}} \hat{\psi}|^2) (\hat{s} + \hat{u}) \cos \theta \cot \theta \, d\hat{s} \, d\hat{u}}{\int_{\Omega} |\hat{\psi}|^2 (\hat{s} + \hat{u}) \cos \theta \cot \theta \, d\hat{s} \, d\hat{u}}.$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\mathcal{Q}_{\text{Gui}(\theta)}(\psi)}{\|\psi\|^2} = \frac{\int_{\Omega} (\tan^2 \theta |\partial_{\hat{s}} \hat{\psi}|^2 + |\partial_{\hat{u}} \hat{\psi}|^2) (\hat{s} + \hat{u}) \, d\hat{s} \, d\hat{u}}{\int_{\Omega} |\hat{\psi}|^2 (\hat{s} + \hat{u}) \, d\hat{s} \, d\hat{u}}.$$

Soit $\mathcal{Q}_{\Omega}(\theta)$ la forme quadratique au numérateur dans le membre de droite. Son domaine $\text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega}(\theta))$ se déduit de celui de $\text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)})$ à l'aide du changement de variable (14.14). D'après le principe du min-max 2.1, on a :

$$\mu_{n, \text{Gui}}(\theta) = \inf_{\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_n \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega}(\theta))} \sup_{\substack{\hat{\psi} \in \text{vect}(\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_n) \\ \hat{\psi} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega}(\theta)) \setminus \{0\}}} \frac{\mathcal{Q}_{\Omega}(\theta)(\hat{\psi})}{\|\hat{\psi}\|^2},$$

où la norme de $\hat{\psi}$ est celle de l'espace $L^2(\Omega, (\hat{s} + \hat{u})dsdu)$.

On remarque que $\text{Dom}(\mathcal{Q}_\Omega(\theta))$ est indépendant de θ . Soient $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, comme la fonction $\theta \mapsto \tan^2 \theta$ est croissante sur $(0, \frac{\pi}{2})$, pour toute fonction $\hat{\psi} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_\Omega(\theta_1)) = \text{Dom}(\mathcal{Q}_\Omega(\theta_2))$, on a :

$$\frac{\mathcal{Q}_\Omega(\theta_1)(\hat{\psi})}{\|\hat{\psi}\|^2} \leq \frac{\mathcal{Q}_\Omega(\theta_2)(\hat{\psi})}{\|\hat{\psi}\|^2}.$$

Le principe du min-max 2.1 livre :

$$\mu_{n, \text{Gui}}(\theta_1) \leq \mu_{n, \text{Gui}}(\theta_2).$$

□

On remarque que, pour $E > 0$, on a

$$\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_{\text{Gui}}(\theta)) = \mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_\Omega(\theta)),$$

c'est à l'aide de la forme quadratique $\mathcal{Q}_\Omega(\theta)$ que l'on démontre le Théorème 1.18.

14.2.2 Une minoration du nombre de valeurs propres

Pour minorer le nombre de valeurs propres de $\mathcal{H}_{\text{Gui}}(\theta)$ inférieures à $1 - E$, on majore la forme quadratique $\mathcal{Q}_\Omega(\theta)$ dans le but d'appliquer le principe du min-max 2.1. On définit la demi-bande $\text{Hst} = (1, +\infty) \times (0, \pi)$. Pour toute fonction $\tilde{\psi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\text{Hst})$ on considère la forme quadratique

$$\mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta)(\tilde{\psi}) = \int_{\text{Hst}} (|\partial_s \tilde{\psi}|^2 + |\partial_u \tilde{\psi}|^2)(s \sin \theta + u \cos \theta) dsdu.$$

La forme quadratique $\mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta)$ est positive, on considère la forme quadratique de l'extension de Friedrichs qui lui est associée. On la notera encore $\mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta)$. On a $\text{Dom}(\mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta)) \subset \text{Dom}(\mathcal{Q}_\Omega(\theta))$ et pour toute fonction $\tilde{\psi} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta))$ on a

$$\mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta)(\tilde{\psi}) = \mathcal{Q}_\Omega(\theta)(\tilde{\psi}),$$

ce qui livre :

$$\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta)) \leq \mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_\Omega(\theta)). \quad (14.15)$$

Pour $\tilde{\psi} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta))$, on pose $\hat{\psi}(s, u) = \sqrt{s \sin \theta + u \cos \theta} \tilde{\psi}(s, u)$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta)(\tilde{\psi}) &= \int_{\text{Hst}} |\partial_s \hat{\psi}|^2 + |\partial_u \hat{\psi}|^2 - \frac{1}{4(s \sin \theta + u \cos \theta)^2} |\hat{\psi}|^2 dsdu \\ &\leq \int_{\text{Hst}} |\partial_s \hat{\psi}|^2 + |\partial_u \hat{\psi}|^2 - \frac{1}{4(s \sin \theta + \pi \cos \theta)^2} |\hat{\psi}|^2 dsdu. \end{aligned}$$

On considère alors la forme quadratique positive, définie pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(1, +\infty)$, par :

$$\int_1^{+\infty} |\partial_s \varphi|^2 - \frac{1}{4(s \sin \theta + \pi \cos \theta)^2} |\varphi|^2 ds.$$

Si on note $q_1(\theta)$ la forme quadratique associée à son extension de Friedrichs, on a :

$$\mathcal{N}_{-E}(q_1(\theta)) \leq \mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_{\text{Hst}}(\theta)).$$

Soit le changement de variable

$$\sigma = \frac{s + \pi \cot \theta}{1 + \pi \cot \theta},$$

pour $\varphi \in \text{Dom}(q_1(\theta))$, on pose $\tilde{\varphi}(\sigma) = \varphi((1 + \pi \cot \theta)\sigma - \pi \cot \theta)$ et on a :

$$\frac{q_1(\theta)(\varphi)}{\int_1^{+\infty} |\varphi|^2 ds} = (1 + \pi \cot \theta)^{-2} \frac{\int_1^{+\infty} |\partial_\sigma \tilde{\varphi}|^2 - \frac{1}{4\sigma^2 \sin^2 \theta} |\tilde{\varphi}|^2 d\sigma}{\int_1^{+\infty} |\tilde{\varphi}|^2 d\sigma}$$

Donc finalement, si on note $\tilde{q}(\theta)$ la forme quadratique au numérateur dans le membre de droite, on a :

$$\mathcal{N}_{-(1+\pi \cot \theta)^2 E}(\tilde{q}(\theta)) \leq \mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\Omega(\theta)}). \quad (14.16)$$

14.2.3 Une majoration du nombre de valeurs propres

Nous cherchons maintenant à obtenir une majoration du nombre de valeurs propres. Pour cela on s'inspire de l'analyse présentée dans [MT05] et [DLR12, Section 5].

Soit une partition \mathcal{C}^1 de l'unité (χ_0, χ_1) telle que :

$$\chi_0(s)^2 + \chi_1(s)^2 = 1$$

avec $\chi_0(s) = 1$ pour $s < 1$ et $\chi_0(s) = 0$ pour $s > 2$.

Pour toute fonction $\tilde{\psi} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)})$, la formule IMS (voir Proposition 2.4) donne :

$$\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}(\tilde{\psi}) = \mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}(\chi_0 \tilde{\psi}) + \mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}(\chi_1 \tilde{\psi}) - \|\chi'_{0,R} \tilde{\psi}\|^2 - \|\chi'_{1,R} \tilde{\psi}\|^2. \quad (14.17)$$

Posons $W(s) = |\chi'_0(s)|^2 + |\chi'_1(s)|^2$, on a :

$$\|\chi'_0 \tilde{\psi}\|^2 + \|\chi'_1 \tilde{\psi}\|^2 = \int_{\Omega(\theta)} W(s)(|\chi_0 \tilde{\psi}|^2 + |\chi_1 \tilde{\psi}|^2)(s \sin \theta + u \cos \theta) dud s. \quad (14.18)$$

On introduit les deux sous ensembles de $\Omega(\theta)$:

$$\mathcal{O}_0 = \{(s, u) \in \Omega(\theta) : s < 2R\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_1 = (1, +\infty) \times (0, \pi).$$

On considère les domaines de forme :

$$V_0 = \left\{ \phi \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}) : \phi = 0 \text{ sur } \{2\} \times (0, \pi) \text{ et } \text{supp}(\phi) \cap \{(s, u) \in \Omega(\theta) : s > 2\} = \emptyset \right\},$$

$$V_1 = \left\{ \phi \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}) : \phi = 0 \text{ sur } \{1\} \times (0, \pi) \text{ et } \text{supp}(\phi) \cap \{(s, u) \in \Omega(\theta) : s < 1\} = \emptyset \right\}.$$

et les formes quadratiques $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_0}$ et $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1}$ définies par :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_j}(\phi) = \int_{\mathcal{O}_j} (|\partial_s \phi|^2 + |\partial_u \phi|^2 - W(s) |\phi|^2)(s \sin \theta + u \cos \theta) ds du, \text{ pour } \phi \in \mathbf{V}_j, j = 0, 1.$$

Grâce à (14.17) et (14.18), pour tout $\tilde{\psi} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)})$, on a :

$$\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}(\tilde{\psi}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{O}_0}(\chi_{0,R}\tilde{\psi}) + \mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1}(\chi_{1,R}\tilde{\psi}).$$

On a le

Lemme 14.10 *On a :*

$$\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}) \leq \mathcal{N}_1(\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_0}) + \mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1}). \quad (14.19)$$

Preuve du lemme : On rappelle la formule du j -ième quotient de Rayleigh de $\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}$:

$$\mu_{j,\text{Gui}}(\theta) = \inf_{\substack{E \subset \mathbf{V} \\ \dim(E) = j}} \sup_{\substack{\tilde{\psi} \in E \\ \tilde{\psi} \neq 0}} \frac{\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}(\tilde{\psi})}{\|\tilde{\psi}\|^2}.$$

où la norme de $\tilde{\psi}$ est prise sur $L^2(\Omega(\theta), (s \sin \theta + u \cos \theta) ds du)$. On considère maintenant l'application :

$$\mathcal{J} : \begin{cases} \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}) & \rightarrow \mathbf{V}_0 \times \mathbf{V}_1 \\ \tilde{\psi} & \mapsto (\chi_0 \tilde{\psi}, \chi_1 \tilde{\psi}). \end{cases}$$

\mathcal{J} est injective et donc $\mathcal{J} : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{V})$ est bijective. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \mu_{j,\text{Gui}}(\theta) &= \inf_{\substack{F \subset \mathcal{J}(\mathbf{V}) \\ \dim(F) = j}} \sup_{\substack{\tilde{\psi} \in \mathcal{J}^{-1}(F) \\ \tilde{\psi} \neq 0}} \frac{\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)}(\tilde{\psi})}{\|\tilde{\psi}\|^2} \\ &= \inf_{\substack{F \subset \mathcal{J}(\mathbf{V}) \\ \dim(F) = j}} \sup_{\substack{\tilde{\psi} \in \mathcal{J}^{-1}(F) \\ \tilde{\psi} \neq 0}} \frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_0}(\chi_0 \tilde{\psi}) + \mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1}(\chi_1 \tilde{\psi})}{\|\chi_0 \tilde{\psi}\|^2 + \|\chi_1 \tilde{\psi}\|^2} \\ &= \inf_{\substack{F \subset \mathcal{J}(\mathbf{V}) \\ \dim(F) = j}} \sup_{\substack{(\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1) \in F \\ (\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1) \neq 0}} \frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_0}(\tilde{\psi}_0) + \mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1}(\tilde{\psi}_1)}{\|\tilde{\psi}_0\|_{\mathcal{O}_0}^2 + \|\tilde{\psi}_1\|_{\mathcal{O}_1}^2}, \end{aligned}$$

où, pour $j = 1, 2$, $\|\cdot\|_{\mathcal{O}_j}$ est la norme sur $L^2(\mathcal{O}_j, (s \sin \theta + u \cos \theta) ds du)$. Par définition,

$\mathcal{J}(V) \subset V_0 \times V_1$, on en déduit :

$$\mu_{j,\text{Gui}}(\theta) \geq \inf_{\substack{F \subset V_0 \times V_1 \\ \dim(F) = j}} \sup_{\substack{(\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1) \in F \\ (\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_1) \neq 0}} \frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_0}(\tilde{\psi}_0) + \mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1}(\tilde{\psi}_1)}{\|\tilde{\psi}_0\|_{\mathcal{O}_0}^2 + \|\tilde{\psi}_1\|_{\mathcal{O}_1}^2} = \nu_j. \quad (14.20)$$

On remarque maintenant que les formes bilinéaires associées à $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_j}$ ($j = 0, 1$) sont bornées inférieurement. Si on note $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_j}$ l'opérateur auto-adjoint de domaine $\text{Dom}(\mathcal{A}_{\mathcal{O}_j})$ associé à la forme quadratique $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_j}$ sur V_j . On remarque que ν_j dans (14.20) est le j -ième quotient de Rayleigh de l'opérateur \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\mathcal{O}_0} & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{\mathcal{O}_1} \end{pmatrix},$$

de domaine $\text{Dom}(\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}) \times \text{Dom}(\mathcal{A}_{\mathcal{O}_1})$. On en déduit que ν_j est le j -ième élément de l'ensemble ordonné

$$\{\nu_k(\mathcal{A}_{\mathcal{O}_0}), k \geq 1\} \cup \{\nu_k(\mathcal{A}_{\mathcal{O}_1}), k \geq 1\},$$

où $\nu_k(\mathcal{A}_{\mathcal{O}_j})$ ($j = 1, 2$), est le k -ième quotient de Rayleigh de $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_j}$. Ce qui achève la démonstration. \diamond
On prouve ensuite le

Lemme 14.11 *La quantité $\mathcal{N}_1(\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_0})$ est finie et indépendante de E .*

Preuve du lemme : Pour $\tilde{\psi} \in V_0$, on a :

$$\int_{\mathcal{O}_0} (|\partial_s \tilde{\psi}|^2 + |\partial_u \tilde{\psi}|^2)(s \sin \theta + u \cos \theta) ds du - \|W\|_\infty \|\tilde{\psi}\|_{\mathcal{O}_0}^2 \leq \mathcal{Q}_{\mathcal{O}_0}(\tilde{\psi})$$

La forme quadratique dans le membre de gauche est celle du Laplacien de Dirichlet axisymétrique dans un domaine borné : il est à résolvante compacte donc a une suite de valeurs propres croissante non bornée. Le principe du min-max 2.1 donne le résultat. \diamond

On a également le

Lemme 14.12 *On a l'inégalité :*

$$\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1}) \leq \mathcal{N}_{-E}(\hat{\mathfrak{q}}(\theta)),$$

où $\hat{\mathfrak{q}}(\theta)$ est de la forme quadratique de l'extension de Friedrichs de la forme quadratique, définie pour tout $\hat{\psi} \in \mathcal{C}_0^\infty(1 + \infty)$, par :

$$\int_1^{+\infty} \left| \partial_s \hat{\psi} \right|^2 - \left(\frac{1}{4s^2 \sin^2 \theta} + W(s) \right) |\hat{\psi}|^2 ds.$$

Preuve du lemme : Pour $\tilde{\psi} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1})$, on pose $\hat{\psi}(s, u) = \sqrt{s \sin \theta + u \cos \theta} \tilde{\psi}(s, u)$ et on a :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1}(\tilde{\psi}) = \int_{\mathcal{O}_1} |\partial_s \hat{\psi}|^2 + |\partial_u \hat{\psi}|^2 - \frac{1}{4(s \sin \theta + u \cos \theta)^2} |\hat{\psi}|^2 - W(s) |\hat{\psi}|^2 ds du.$$

On en déduit l'inégalité

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1}(\tilde{\psi}) \geq \int_{\mathcal{O}_1} |\partial_s \hat{\psi}|^2 + |\partial_u \hat{\psi}|^2 - \frac{1}{4s^2 \sin^2 \theta} |\hat{\psi}|^2 - W(s) |\hat{\psi}|^2 ds du.$$

Par séparation des variables on a :

$$\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_{\mathcal{O}_1(\theta)}) \leq \mathcal{N}_{-E}(\hat{\mathbf{q}}(\theta)).$$

◇

14.2.4 Obtention de l'équivalent

Grâce aux équations (14.16), (14.19) et aux Lemmes 14.11 et 14.12 on a l'encadrement :

$$\mathcal{N}_{-(1+\pi \cot \theta)^2 E}(\tilde{\mathbf{q}}(\theta)) \leq \mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\Omega(\theta)}) \leq \mathcal{N}_1(\mathcal{Q}) + \mathcal{N}_{-E}(\hat{\mathbf{q}}(\theta)). \quad (14.21)$$

On a le

Lemme 14.13 *Pour tout $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, on a les équivalents suivants :*

$$(i) \mathcal{N}_{-(1+\pi \cot \theta)^2 E}(\tilde{\mathbf{q}}(\theta)) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cot \theta}{4\pi} |\ln E|,$$

$$(ii) \mathcal{N}_{-E}(\hat{\mathbf{q}}(\theta)) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cot \theta}{4\pi} |\ln E|.$$

Preuve du lemme : Prouvons le point (i). D'après la Proposition 14.1, on a :

$$\mathcal{N}_{-(1+\pi \cot \theta)^2 E}(\tilde{\mathbf{q}}(\theta)) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cot \theta}{4\pi} |\ln((1 + \pi \cot \theta)^2 E)| \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cot \theta}{4\pi} |\ln E|,$$

ce qui démontre le point (i). Prouvons maintenant le point (ii). Comme $W \in \mathcal{C}_0^\infty(1, +\infty)$, on peut appliquer la Proposition 14.1 et on a :

$$\mathcal{N}_{-E}(\hat{\mathbf{h}}(\theta)) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cot \theta}{4\pi} |\ln(E)|,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. ◇

Reprenons alors (14.21), combiné au Lemme 14.13, en divisant par $\frac{\cot \theta}{4\pi} |\ln E|$ et en faisant tendre E vers 0, on obtient :

$$\lim_{E \rightarrow 0} \left(\frac{\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{Q}_{\Omega(\theta)})}{|\ln E|} \right) = \frac{\cot \theta}{4\pi},$$

ce qui achève la démonstration.

Chapitre 15

Développement asymptotique des valeurs propres

Le but de ce chapitre est de démontrer le Théorème 1.19. Pour obtenir le développement asymptotique des N_0 premières valeurs propres nous allons procéder comme aux Parties III et IV en majorant puis minorant la n -ième valeur propre de $\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$ défini en (1.23).

La majoration s'obtient directement en comparant l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$ sur le domaine Gui à celui sur sa pointe triangulaire. Le principe du min-max 2.1 donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda_{n,\text{Gui}}(h) \leq \frac{1}{2\pi^2} \lambda_{n,\text{Mer}}(h).$$

Les sections suivantes sont consacrées à l'obtention d'une minoration de $\lambda_{n,\text{Gui}}(h)$.

15.1 Estimées de localisation d'Agmon

On remarque que pour tout ψ dans le domaine de la forme quadratique $\mathcal{Q}_{\text{Gui}}(h)$ associée à $\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$ on a :

$$\int_{\text{Gui}} h^2 |\partial_x \psi|^2 + |\partial_y \psi|^2 y dx dy \geq \int_{\text{Gui}} h^2 |\partial_x \psi|^2 + v_{\text{Gui}}(x) |\psi|^2 y dx dy,$$

où v_{Gui} est le potentiel effectif étudié au Chapitre 5. Cette inégalité nous permet d'affirmer que la forme quadratique $\mathcal{Q}_{\text{Gui}}(h) - j_{0,1}^2 (\pi\sqrt{2})^{-2}$ est positive. Par conséquent les plus petites valeurs propres λ de $\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$ vérifient, pour une certaine constante $\Gamma_0 > 0$:

$$|\lambda - j_{0,1}^2 (\pi\sqrt{2})^{-2}| \leq \Gamma_0 h^{2/3}.$$

On peut donc utiliser l'analyse de la Proposition 5.8 et on a la

Proposition 15.1 *Soit $\Gamma_0 > 0$, $\delta \in (0, 1)$. Il existe $h_0 > 0$, $C_0 > 0$, $r(\delta) > 0$ et $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h_0)$ et toute paire propre (λ, ψ) de $\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$ vérifiant $|\lambda - j_{0,1}^2 (\pi\sqrt{2})^{-2}| \leq \Gamma_0 h^{2/3}$, on ait :*

$$\int_{\text{Gui} \cap \{(x,y): x \in (-\pi\sqrt{2}, 0)\}} e^{\Phi_1/h} (|\psi|^2 + |h^{2/3} \partial_x \psi|^2) dx \leq C_0 \|\psi\|^2,$$

$$\int_{\text{Gui} \cap \{(x,y): x \in (0, r(\delta))\}} e^{\Phi_2 \sqrt{1-\delta}/h} (|\psi|^2 + |h\partial_x \psi|^2) dx \leq C_0 \|\psi\|^2,$$

$$\int_{\text{Gui} \cap \{(x,y): x \in (r(\delta), +\infty)\}} e^{\Phi_3/h} (|\psi|^2 + |h\partial_x \psi|^2) dx \leq C_0 \|\psi\|^2,$$

avec

$$\Phi_1(x) = \eta_1 |x|^{3/2}, \quad \Phi_2(x) = \eta_2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|\ln t|}} dt, \quad \Phi_3(x) = \eta_3 (x - r(\delta)) + \eta_2 \sqrt{1-\delta} \int_0^{r(\delta)} \frac{1}{\sqrt{|\ln t|}} dt.$$

Ces estimées permettent de comprendre à quelles échelles sont localisées les fonctions propres de $\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$. Elles se comportent dans la variable x comme celles de l'opérateur en dimension un $l_{\text{Gui}}(h)$: dans la pointe de Gui (à gauche de l'origine) elles sont localisées à une échelle $h^{2/3}$ alors qu'elles rentrent dans l'autre partie à une échelle $h\sqrt{|\ln(h)|}$.

15.2 Simplicité asymptotique

Soit ψ_n^h une fonction propre associée à $\lambda_{\text{Gui}}(h)$. On suppose que les ψ_n^h sont orthogonales dans $L^2(\text{Gui}, y dx dy)$. Nécessairement elles le sont aussi pour la forme bilinéaire $\mathcal{B}_{\text{Gui}}(h)$ associée à l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{Gui}}(h)$.

Soit $\varepsilon > 0$, on introduit la fonction troncature régulière χ^h à l'échelle $h\sqrt{|\ln h|}^{1+\varepsilon}$, définie pour $x > 0$ par :

$$\chi^h(x) = \chi(xh |\ln h|^{-(1+\varepsilon)/2}) \quad \text{avec} \quad \chi \equiv 1 \text{ si } x \leq \frac{1}{2}, \quad \chi \equiv 0 \text{ si } x \geq 1.$$

On note

$$\mathcal{S}_{N_0}(h) = \text{vect}(\chi^h \psi_1^h, \dots, \chi^h \psi_{N_0}^h).$$

On a :

$$\mathcal{Q}_{\text{Gui}}(h)(\psi_n^h) = \lambda_{\text{Gui},n}(h) \|\psi_n^h\|^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\text{Gui}}(h)(\chi^h \psi_n^h) &= \int_{\text{Gui}} |\chi^h|^2 (h^2 |\partial_x \psi_n^h|^2 + |\partial_y \psi_n^h|^2) y dx dy \\ &\quad + \frac{1}{|\ln h|^{1+\varepsilon}} \underbrace{\int_{\text{Gui}} |\chi'(xh^{-1} |\ln h|^{-(1+\varepsilon)/2})|^2 |\psi_n^h|^2 y dx dy}_{=I} \\ &\quad + 2 \frac{h}{|\ln h|^{(1+\varepsilon)/2}} \underbrace{\int_{\text{Gui}} \chi'(xh^{-1} |\ln h|^{-(1+\varepsilon)/2}) \partial_x \psi_n^h y dx dy}_{=II}. \end{aligned}$$

Soit $\Phi = \Phi_1 \mathbb{1}_{(-\pi\sqrt{2}, 0)} + \Phi_2 \mathbb{1}_{(0, r(\delta))} + \Phi_3 \mathbb{1}_{(r(\delta), +\infty)}$ où les fonctions Φ_j ($j = 1, 2, 3$) sont définies en

Proposition 15.1. On a, grâce à la à la définition de χ et la Proposition 15.1 :

$$\begin{aligned} I &\leq \|\chi'\|_{L^\infty(-\pi\sqrt{2}, +\infty)} \int_{\text{Gui} \cap \{(x,y): 1/2 \leq xh^{-1} | \ln h|^{-(1+\varepsilon)/2} \leq 1\}} e^{2\Phi/h} e^{-2\Phi/h} |\psi_n^h|^2 y dx dy \\ &\leq C e^{-2\Phi(2^{-1}h |\ln h|^{(1+\varepsilon)/2})/h} \|\chi'\|_{L^\infty(-\pi\sqrt{2}, +\infty)} \|\psi_n^h\|^2. \end{aligned}$$

Or on a :

$$\Phi(2^{-1}h |\ln h|^{(1+\varepsilon)/2}) \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(h |\ln h|^{\varepsilon/2}).$$

On en déduit que $I = \mathcal{O}(h^\infty) \|\psi_n^h\|^2$. On démontre le même résultat pour II en utilisant une inégalité de Cauchy-Schwartz. Pour les mêmes raisons les $\chi^h \psi_n^h$ sont "presques" orthogonales pour la forme bilinéaire $\mathcal{B}_{\text{Gui}}(h)$, pour $n \neq m$:

$$\mathcal{B}_{\text{Gui}}(h)(\chi^h \psi_n^h, \chi^h \psi_m^h) = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Ainsi, pour tout $\psi \in S_{N_0}(h)$:

$$\mathcal{Q}_{\text{Gui}}(h)(\psi) \leq (\lambda_{N_0, \text{Gui}}(h) + \mathcal{O}(h^\infty)) \|\psi\|^2.$$

Soit Mer_ε le triangle ayant pour sommets $(-\pi\sqrt{2}, 0)$, $(h^{1-\varepsilon} \sqrt{|\ln(h)|}, 0)$ et $(h |\ln(h)|^{(1+\varepsilon)/2}, h |\ln(h)|^{(1+\varepsilon)/2} + \pi\sqrt{2})$. On considère sur $L^2(\text{Mer}_\varepsilon, y dx dy)$ l'opérateur :

$$-h^2 \partial_x^2 - \frac{1}{y} \partial_y (y \partial_y)$$

avec conditions de Dirichlet au bord sauf sur l'arête reliant les sommets $(-\pi\sqrt{2}, 0)$ et $(h |\ln(h)|^{(1+\varepsilon)/2}, 0)$. Une dilatation réduit cet opérateur à

$$\left(1 + \frac{h |\ln(h)|^{(1+\varepsilon)/2}}{\pi\sqrt{2}}\right)^{-2} (-h^2 \partial_{\tilde{x}}^2 - \frac{1}{\tilde{y}} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{y} \partial_{\tilde{y}})).$$

On prolonge les éléments de $S_{N_0}(h)$ par zéro de telle manière à ce que $\mathcal{Q}_{\text{Gui}}(h)(\psi) = \mathcal{Q}_{\text{Mer}_\varepsilon, h}(\psi)$ (où $\mathcal{Q}_{\text{Mer}_\varepsilon, h}$ est la forme quadratique de l'opérateur sur Mer_ε). Pour tout $n \leq N_0$, le principe du min-max 2.1 donne :

$$\frac{1}{2\pi^2} \left(1 + \frac{h |\ln(h)|^{(1+\varepsilon)/2}}{\pi\sqrt{2}}\right)^{-2} \lambda_{n, \text{Mer}}(h) \leq \lambda_{n, \text{Gui}}(h) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Cette inégalité et le développement asymptotique de $\lambda_{n, \text{Mer}}(h)$ (voir Théorème 1.11) donnent le Théorème 1.19.

Chapitre 16

Simulations numériques pour la couche conique

On illustre certaines propriétés des valeurs propres et des fonctions propres à l'aide de simulations numériques. Les calculs sont effectués pour l'opérateur $\mathcal{D}_{\text{Gui}}(\theta)$ défini en (1.22). Comme le domaine d'intégration doit être fini, on a tronqué le domaine Gui suffisamment loin de l'origine. On utilise la librairie d'éléments finis Melina++ [LM12] avec un degré d'interpolation de 6 et une formule de quadrature de degré 13. Les éléments sont des triangles. Les différents maillages utilisés et les degrés de liberté sont décrits en légende des figures.

La Figure 16.1 illustre le comportement des six premières valeurs propres en fonction de l'angle d'ouverture θ . On retrouve bien la croissance des fonctions $\mu_{n,\text{Gui}}(\cdot)$ énoncée en Proposition 1.14. De plus, ces fonctions s'accumulent et semblent converger vers la valeur 1, seuil du spectre essentiel. Ce point est déjà abordé par Exner et Tater dans [ET10, Fig. 2] et conforte le résultat de la Proposition 1.18. Pour comparaison, on a représenté en Figure 16.2 l'allure des valeurs propres du guide 2D étudié par Dauge, Lafranche et Raymond [DLR12] puis Dauge et Raymond [DR12]. Les valeurs propres valent toutes 1 pour θ assez grand, à l'exception de la première.

La Figure 16.3 montre comment se comportent, pour une petite valeur de l'angle d'ouverture, les premières fonctions propres. Contrairement au guide 2D étudié par Dauge, Lafranche et Raymond dans [DLR12] puis Dauge et Raymond dans [DR12] les fonctions propres ne restent pas localisées exclusivement dans la tête de la couche et pénètrent à l'intérieur. C'est en accord avec l'estimée de localisation d'Agmon 15.1 et la simulation numérique d'Exner et Tater [ET10, Fig. 3].

La Figure 16.4 permet de suivre, pour un angle fixé, comment se comportent les fonctions propres successives. Plus le numéro de la valeur propre augmente, plus les fonctions propres se répandent dans la couche conique.

La Figure 16.5 permet, quant à elle, de suivre l'évolution d'une fonction propre en fonction de θ . Plus l'angle d'ouverture est grand, plus les fonctions propres se répandent dans la couche conique : elles ne sont plus uniquement localisées près la tête conique. Ce phénomène est d'autant plus vrai que la valeur propre associée est proche du seuil du spectre essentiel.

En Table 16.1 on a indiqué les valeurs numériques des premières valeurs propres pour $\theta = 8^\circ$ et $\theta = 5^\circ$. Pour $\theta = 5^\circ$ (respectivement $\theta = 8^\circ$), seules les douze (respectivement huit) premières valeurs propres sont calculées correctement : pour un numéro de valeur propre trop élevé la fonction propre associée pénètre dans la partie non bornée de la couche conique. Ce phénomène est accentué lorsque θ est grand. Par conséquent le maillage à 6416 éléments n'est pas assez grand pour les numéros des

valeurs propres suivantes. On utilise ensuite la Table 16.1 pour construire les graphiques de la Figure 16.6. Le but est de comparer la valeur numérique de $\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)})$ à l'équivalent du Théorème 1.18. Pour obtenir $\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)})$, on regarde les quantités $E_j(\theta) = 1 - \mu_{j,\text{Gui}(\theta)}$ (données en Table 16.1). Par définition, pour tout $E \in [E_{j+1}(\theta), E_j(\theta))$, on a :

$$\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)}) = j.$$

Ce calcul de $\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)})$ donne la courbe bleue en escalier de la Figure 16.6. Les sauts correspondent aux valeurs $E_j(\theta)$.

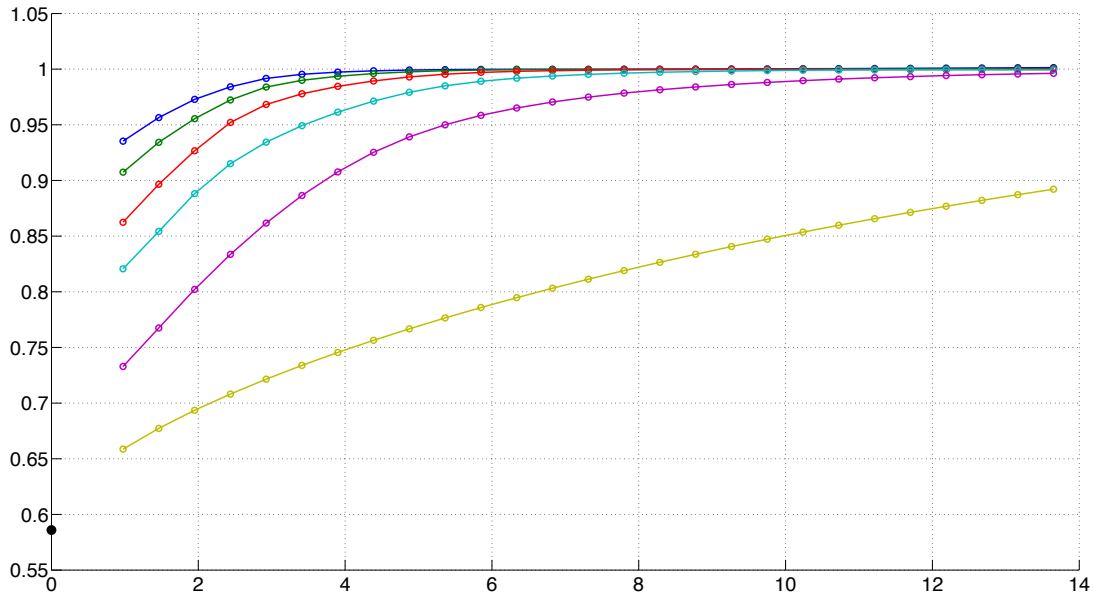


FIG. 16.1 – Allure des six premières valeurs propres $\mu_{n,\text{Gui}}(\cdot)$ ($n = 1, \dots, 6$) en fonction de l'angle θ (en degrés). Le point noir représente la valeur $\frac{j_{0,1}^2}{\pi^2}$. Calculs effectués avec un maillage de 1616 éléments. Le nombre de degrés de liberté est 30325.

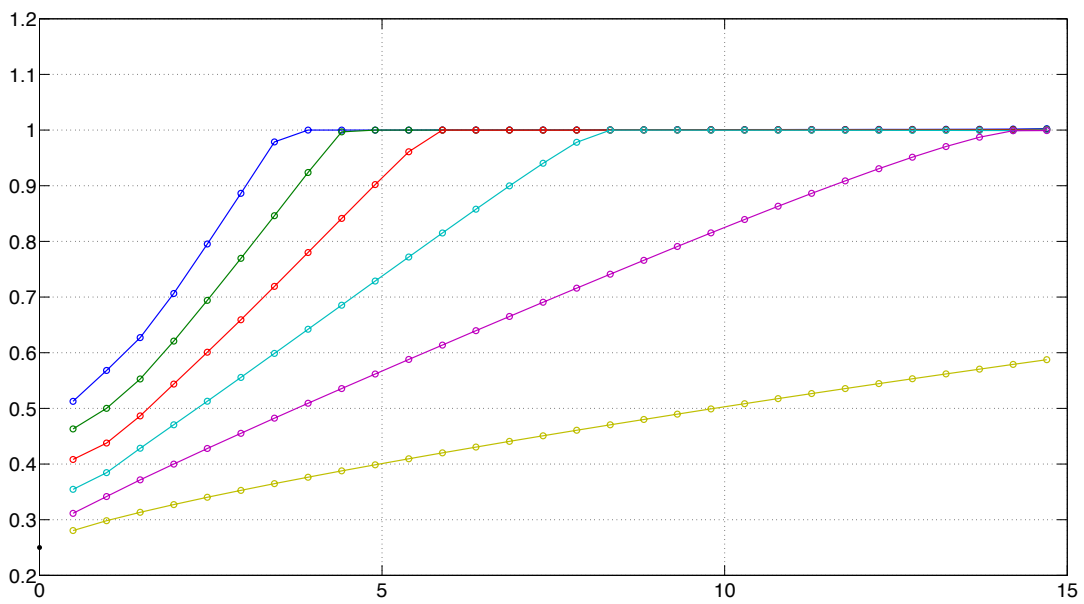


FIG. 16.2 – Allure des six premières valeurs propres du guide 2D en fonction de l'angle θ (en degrés). Le point noir représente la valeur $\frac{1}{4}$. Calculs effectués avec un maillage de 1616 éléments. Le nombre de degrés de liberté est 30325.

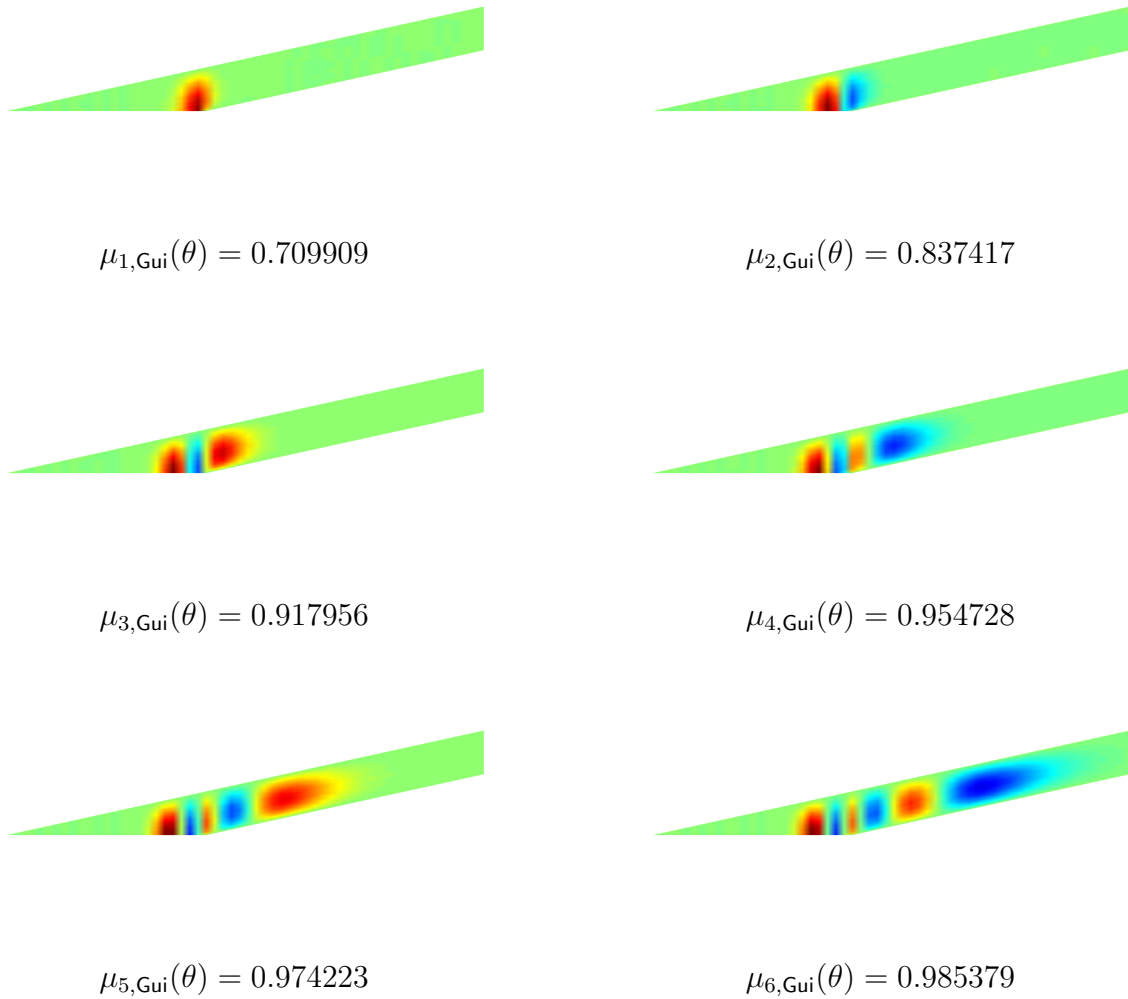


FIG. 16.3 – Calculs pour $\theta = 2.5^\circ$. Valeurs numériques des six premières valeurs propres. Représentation des fonctions propres dans le domaine $\text{Gui}(\theta)$ où l'ordonnée est multiplié par 5. Calculs effectués avec un maillage de 6416 éléments. Le nombre de degrés de liberté est 120325.

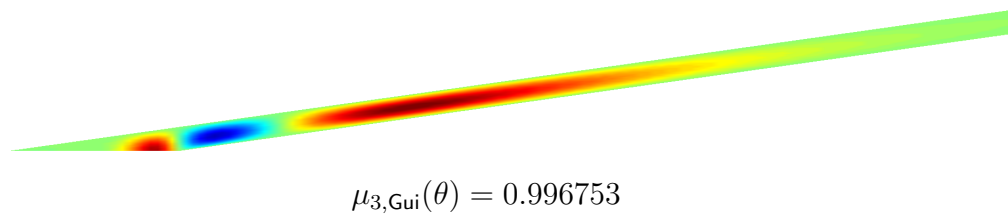
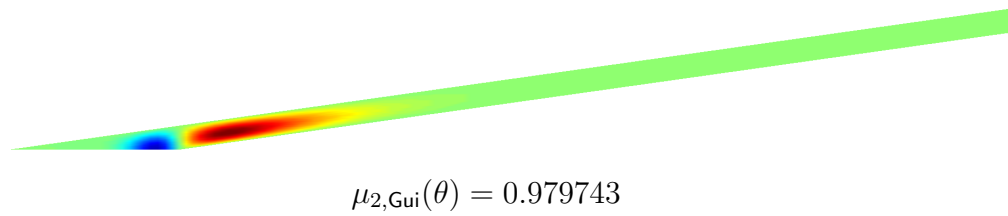
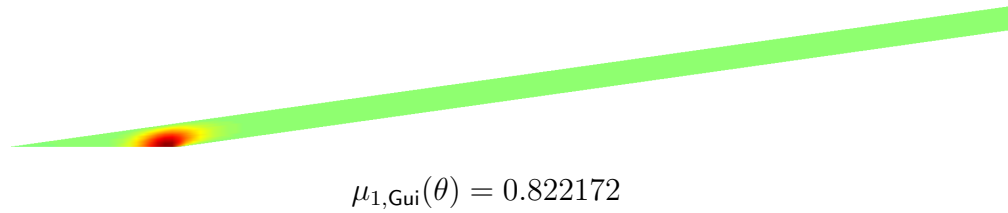
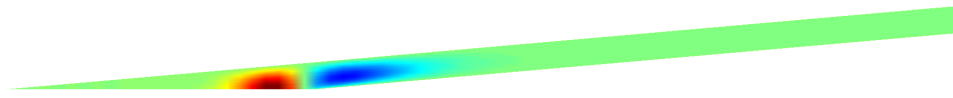
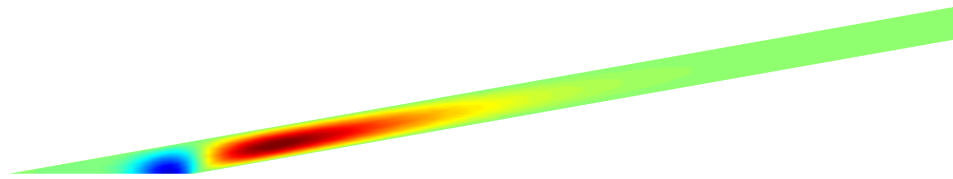


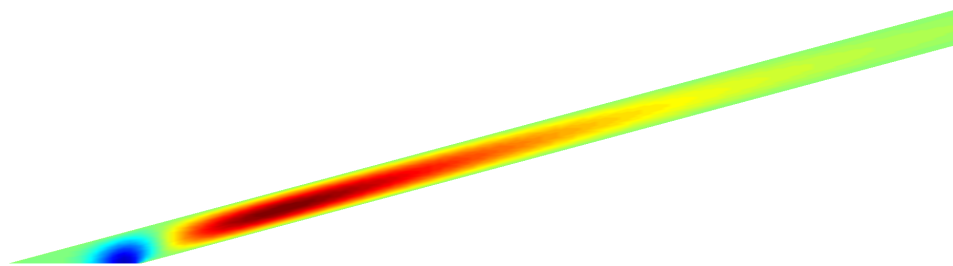
FIG. 16.4 – Calculs pour $\theta = 8^\circ$. Valeurs numériques des trois premières valeurs propres. Représentation des fonctions propres dans le domaine physique $Gui(\theta)$. Calculs effectués avec un maillage de 6416 éléments. Le nombre de degrés de liberté est 120325.



$$\theta = 5^\circ \quad \mu_{2,\text{Gui}}(\theta) = 0.833630$$



$$\theta = 10^\circ \quad \mu_{2,\text{Gui}}(\theta) = 0.978435$$



$$\theta = 15^\circ \quad \mu_{2,\text{Gui}}(\theta) = 0.996283$$

FIG. 16.5 – Valeurs numériques de la deuxième valeur propre pour différentes valeurs de θ . Représentations des fonctions propres dans le domaine $\text{Gui}(\theta)$. Calculs effectués avec un maillage de 656 éléments. Le nombre de degrés de liberté est 12325.

Valeur propre	$\theta = 5^\circ$	$\theta = 8^\circ$
$\mu_{1,\text{Gui}}(\theta)$	0.769255	0.822172
$E_1(\theta)$	0.2307450	0.177828
$\mu_{2,\text{Gui}}(\theta)$	0.942246	0.979743
$E_2(\theta)$	0.057754	0.020257
$\mu_{3,\text{Gui}}(\theta)$	0.980909	0.996753
$E_3(\theta)$	0.019091	0.003247
$\mu_{4,\text{Gui}}(\theta)$	0.993731	0.999453
$E_4(\theta)$	0.006269	0.000547
$\mu_{5,\text{Gui}}(\theta)$	0.997932	0.999907
$E_5(\theta)$	0.002068	0.000093
$\mu_{6,\text{Gui}}(\theta)$	0.999314	0.999921
$E_6(\theta)$	0.000686	0.000079
$\mu_{7,\text{Gui}}(\theta)$	0.999772	0.999984
$E_7(\theta)$	0.000228	0.000016
$\mu_{8,\text{Gui}}(\theta)$	0.999924	0.999997
$E_8(\theta)$	0.000076	0.000003
$\mu_{9,\text{Gui}}(\theta)$	0.999975	_____
$E_9(\theta)$	0.000025	_____
$\mu_{10,\text{Gui}}(\theta)$	0.999988	_____
$E_{10}(\theta)$	0.000012	_____
$\mu_{11,\text{Gui}}(\theta)$	0.999992	_____
$E_{11}(\theta)$	0.000008	_____
$\mu_{12,\text{Gui}}(\theta)$	0.999997	_____
$E_{12}(\theta)$	0.000003	_____

TAB. 16.1 – Valeurs numériques des valeurs propres pour différentes valeurs de θ . Calculs effectués avec un maillage de 6416 éléments. Le nombre de degrés de liberté est 120325.

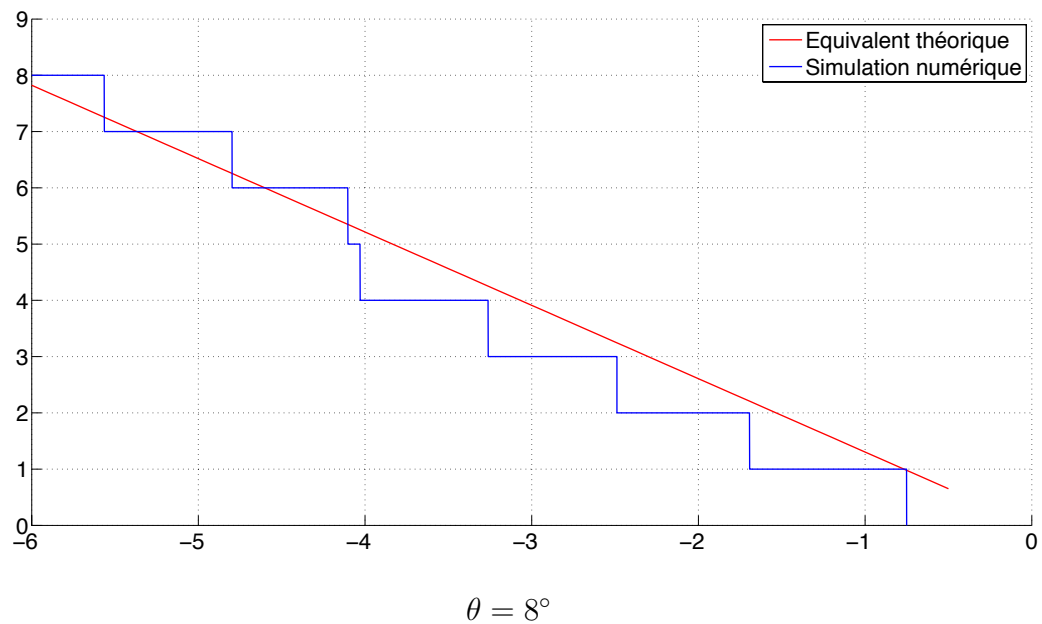
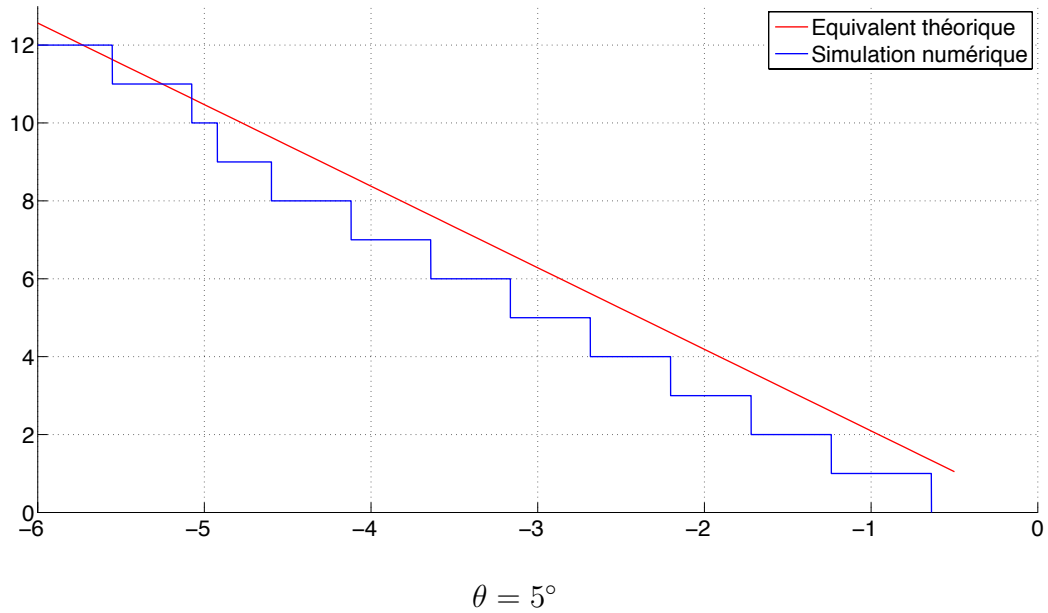


FIG. 16.6 – On a représenté en abscisse le logarithme en base 10 de E . La courbe bleue représente, en ordonnée, la valeur $\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)})$ obtenue après calcul. En rouge on a tracé l'équivalent du Théorème 1.18. Calculs effectués avec un maillage de 6416 éléments. Le nombre de degrés de liberté est 120325.

Sixième partie

Perspectives

Nous concluons ce manuscrit en évoquant quelques questions que soulèvent cette thèse. Ces questions constituent de potentielles pistes de recherche.

VI.1 Pour aller plus loin à propos de la couche conique

La Figure 16.1 laisse penser que toutes les valeurs propres $\mu_{n,\text{Gui}}(\theta)$ convergent vers 1 lorsque $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Pour compléter l'étude des fonctions $\mu_{n,\text{Gui}}(\cdot)$, et comprendre l'accumulation donnée par l'équivalent du Théorème 1.18 il conviendrait de le démontrer.

De plus, le Théorème 1.18 ne donne qu'un équivalent de $\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)})$ lorsque $E \rightarrow 0$. Moralement, cet équivalent s'obtient en regardant la réalisation de Dirichlet de l'opérateur dans une partie non bornée de $\text{Gui}(\theta)$. Toutefois, pour de petites valeurs de θ , on sait, grâce à l'estimée d'Agmon de la Proposition 15.1, que les premières fonctions propres se concentrent dans la partie bornée car elle contient la tête conique. Par conséquent, l'équivalent du Théorème 1.18 n'est une bonne approximation de $\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)})$ que lorsque E est suffisamment petit, c'est-à-dire lorsque l'on regarde suffisamment de valeurs propres pour que des fonctions propres associées pénètrent dans la partie non bornée.

On pourrait donc essayer de compter, à θ fixé, le nombre de valeurs propres générées par la partie bornée, cela donnerait le terme suivant de l'asymptotique de $\mathcal{N}_{1-E}(\mathcal{H}_{\text{Gui}(\theta)})$ ce qui permettrait de mieux quantifier le phénomène pour de petites valeurs de θ .

VI.2 La couche quantique définie à l'aide d'un octant

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées cartésiennes de \mathbb{R}^3 et \mathbf{O} l'origine. On définit la couche Σ (voir Figure VI.1) comme

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 > 0, \min(x_1, x_2, x_3) < \pi\}.$$

Là encore on peut s'intéresser au Laplacien de Dirichlet $-\Delta_\Sigma = -\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$ dans la couche Σ et se questionner sur la structure du spectre (essentiel et discret). On pourrait également considérer le même type d'objet mais avec des angles qui ne sont plus nécessairement droits. Ces problèmes ont été suggérés par Pavel Exner.

VI.3 Le guide fin avec conditions de Robin

Dans l'article [BMT12], Bouchitté, Mascarenhas et Trabucchi s'intéressent aux paires propres du Laplacien avec conditions de Robin dans un guide en dimension trois. Ils obtiennent, dans la limite où la section transverse se réduit en un point, un développement à deux termes des paires propres.

Ici aussi, le problème admet une reformulation semi-classique. On pourrait essayer de construire des quasimodes sous forme de séries formelles comme aux Chapitres 6 et 11. *A priori*, il ne devrait pas y avoir de double échelle car on s'intéresse à des guides réguliers. Néanmoins, dans la construction de quasimodes, il faudra développer la condition de Robin en puissances du paramètre semi-classique. Les estimées d'Agmon et la réduction à un opérateur modèle par une projection de Feshbach devraient permettre de conclure.

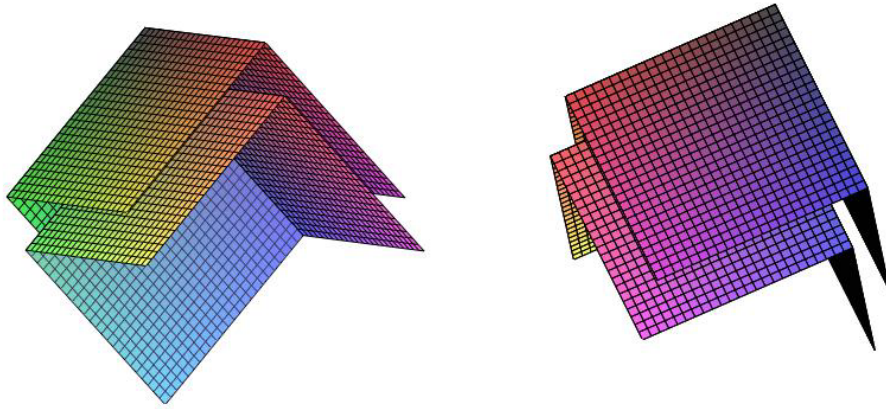


FIG. VI.1 – La couche quantique définie à l’aide d’un octant.

VI.4 Effet tunnel pour des potentiels non réguliers

Comme expliqué tout au long de ce manuscrit, lorsque l’on regarde un opérateur unidimensionnel de la forme

$$l(h) = -h^2 \partial_x^2 + v(x), \quad (\text{VI.1})$$

on sait que le minimum du potentiel effectif v donne le comportement des plus petites paires propres. Pour un potentiel v symétrique à deux puits on s’attend à ce qu’il y ait un phénomène d’effet tunnel : dans la limite $h \rightarrow 0$ les valeurs propres vont se regrouper par paires exponentiellement proches.

Le cas d’un potentiel v régulier est traité par Helffer et Sjöstrand dans [HS84, HS85] et Helffer dans [Hel88]. Lorsque le potentiel n’est pas dérivable aux points de minimum la question semble assez compliquée. Dans sa thèse de doctorat [Pop12], Popoff s’intéresse au cas du potentiel $v(x) = 1 - |x|$ sur $L^2(-1, 1)$ avec conditions de Dirichlet aux bords. Comme les calculs sont explicites, il obtient un équivalent de l’écart entre les paires de valeurs propres proches exponentiellement. Il retrouve l’influence de la distance d’Agmon entre les deux fonds de puits, connue dans le cas régulier ; pourtant, un terme vient ralentir la convergence vers 0 de l’écart entre ces paires propres. Pour comprendre d’une manière générale le phénomène il faudrait, dans un premier temps, réussir des constructions BKW au fond de puits non réguliers pour essayer d’adapter la stratégie d’Helffer et Sjöstrand.

En fait, cette question est liée au problème du bonnet d’âne. Si on construit une approximation de type Born-Oppenheimer pour l’opérateur $\mathcal{L}_\Omega(h)$ défini en (1.3), on retrouve un opérateur de type (VI.1) avec un minimum atteint en deux points. Comme la compréhension du modèle 1D est une première étape vers celle du problème initial, cela permettrait de mieux appréhender le résultat du Théorème 1.9.

Une autre application possible serait de quantifier l’effet tunnel dans un guide d’onde en forme de ciseaux. Ce type de guide est étudié par Bulgakov, Exner, Pichugin et Sadreev dans [BEPS02]. On a représenté en Figure VI.2 un tel guide d’angle d’ouverture θ . Lorsqu’on s’intéresse au régime $\theta \rightarrow 0$, le Laplacien de Dirichlet dans un tel guide admet une reformulation semi-classique. Là encore, on peut construire une approximation de type Born-Oppenheimer et retrouver un opérateur de type (VI.1) avec un minimum atteint en deux points distincts.

On pourrait également, pour un tel guide, compter les valeurs propres lorsque l’angle $\theta \rightarrow 0$ comme pour les ciseaux de Dirac traités par Duchêne et Raymond [DR14].

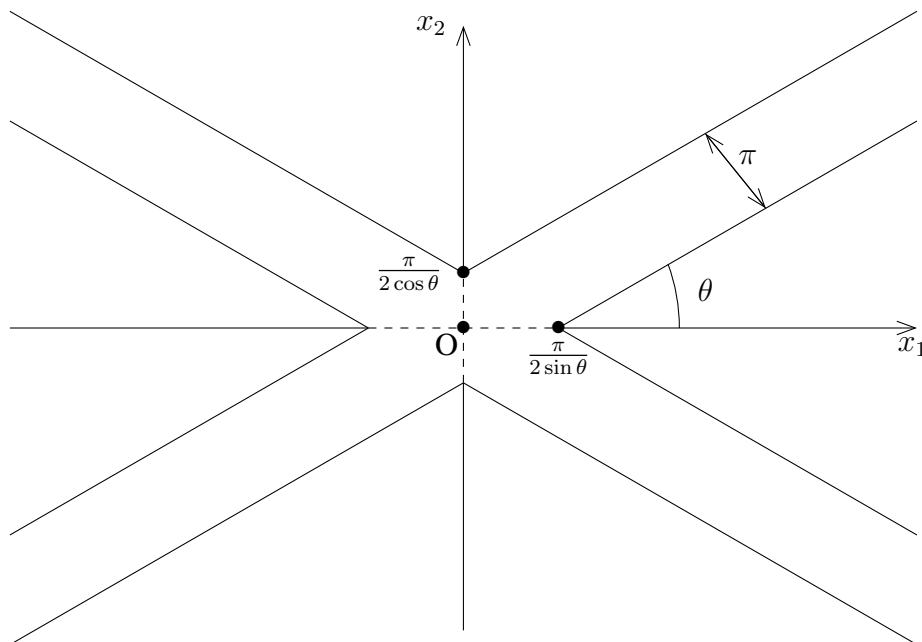


FIG. VI.2 – Le guide en forme de ciseaux.

Septième partie

Annexes

Annexe A

Quelques applications du principe du min-max

On énonce ici quelques résultats généraux qui découlent du principe du min-max 2.1. Le premier permet de comparer les valeurs propres de deux opérateurs dont les domaines de forme diffèrent d'un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition A.1 *Soit X un espace de Hilbert et \mathcal{E} un sous-espace vectoriel de X de dimension $d \in \mathbb{N}^*$. Soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 deux opérateurs auto-adjoints sur X bornés inférieurement de formes quadratiques associées \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 . Si le domaine de la forme quadratique \mathcal{Q}_2 vérifie :*

$$\text{Dom}(\mathcal{Q}_2) = \text{Dom}(\mathcal{Q}_1) \oplus \mathcal{E},$$

et si de plus, pour tout $\Psi \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_1)$, $\mathcal{Q}_2(\Psi) = \mathcal{Q}_1(\Psi)$ alors ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mu_n(\mathcal{L}_2) \leq \mu_n(\mathcal{L}_1) \leq \mu_{n+d}(\mathcal{L}_2),$$

où, pour $j = 1, 2$, $\mu_n(\mathcal{L}_j)$ est le n -ième quotient de Rayleigh de l'opérateur \mathcal{L}_j défini en (2.1).

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\text{Dom}(\mathcal{Q}_1) \subset \text{Dom}(\mathcal{Q}_2)$, d'après le principe du min-max 2.1, on a :

$$\mu_n(\mathcal{L}_2) \leq \mu_n(\mathcal{L}_1).$$

Pour $j = 1, 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les ensembles :

$$\mathcal{F}_j^n = \{F \text{ sous-espace vectoriel de } \text{Dom}(\mathcal{Q}_j) : \text{codim}(F) = n\}.$$

Par définition on a :

$$\mathcal{F}_1^n \subset \mathcal{F}_2^{n+d},$$

donc on obtient

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_1^n} \inf_{\Psi \in F \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{Q}_1(\Psi)}{\|\Psi\|^2} \leq \sup_{F \in \mathcal{F}_2^{n+d}} \inf_{\Psi \in F \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{Q}_2(\Psi)}{\|\Psi\|^2}.$$

On en déduit le lemme. □

On énonce ensuite un résultat pour compter le nombre de valeurs propres d'un opérateur sous un certain seuil. On peut le trouver dans [KS88, Prop. 4].

Proposition A.2 ([KS88]) Soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 deux opérateurs auto-adjoints bornés inférieurement avec $\inf \mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_1) = \inf \mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_2) = 0$ tels que $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ aient un cœur de forme commun \mathcal{D}_0 . Alors, pour tout $\lambda > 0$ et $\varepsilon \in (0, 1)$, on a

$$\mathcal{N}_{-\lambda}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \leq \mathcal{N}_{-(1-\varepsilon)\lambda}(\mathcal{L}_1) + \mathcal{N}_{-\varepsilon\lambda}(\mathcal{L}_2),$$

ce qui se réécrit :

$$\mathcal{N}_{-\lambda}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \leq \mathcal{N}_{-\lambda}((1-\varepsilon)^{-1}\mathcal{L}_1) + \mathcal{N}_{-\lambda}(\varepsilon^{-1}\mathcal{L}_2).$$

Preuve : Soient \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 les formes quadratiques associées respectivement à \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 . Soit $m, k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_{m+k+1}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) &= \sup_{\Psi_1, \dots, \Psi_m, \rho_1, \dots, \rho_k} \inf_{\substack{\varphi \perp \Psi_i, \rho_j \\ \|\varphi\|=1, \varphi \in \mathcal{D}_0}} \left(\mathcal{Q}_1(\varphi) + \mathcal{Q}_2(\varphi) \right) \\ &\geq \sup_{\Psi_1, \dots, \Psi_m, \rho_1, \dots, \rho_k} \left(\inf_{\substack{\varphi \perp \Psi_i \\ \|\varphi\|=1, \varphi \in \mathcal{D}_0}} \mathcal{Q}_1(\varphi) + \inf_{\substack{\varphi \perp \rho_j \\ \|\varphi\|=1, \varphi \in \mathcal{D}_0}} \mathcal{Q}_2(\varphi) \right) \\ &= \mu_{m+1}(\mathcal{L}_1) + \mu_{k+1}(\mathcal{L}_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\mathcal{N}_{-(1-\varepsilon)\lambda}(\mathcal{L}_1) = m$ et $\mathcal{N}_{-\varepsilon\lambda}(\mathcal{L}_2) = k$, on a :

$$\mu_{m+k+1}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \geq \mu_{m+1}(\mathcal{L}_1) + \mu_{k+1}(\mathcal{L}_2) > -(1-\varepsilon)\lambda - \varepsilon\lambda = -\lambda.$$

Donc $\mathcal{N}_{-\lambda}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \leq m + k$. □

On en déduit le Lemme suivant

Lemme A.3 ([KS88]) Soit $a > 0$ et V, W deux potentiels sur $[a, +\infty)$, tels que pour tout $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ les opérateurs $\mathcal{L}_{\mu_1, \mu_2} = -\partial_x^2 + \mu_1 V + \mu_2 W$ aient le même domaine de forme et vérifient

$\mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_{\mu_1, \mu_2}) = 0$. Alors, pour tout $\lambda > 0$ et $0 < \varepsilon < 1$, on a :

- (i) $\mathcal{N}_{-\lambda}(-\partial_x^2 + V + W) \leq \mathcal{N}_{-\lambda}(-\partial_x^2 + (1-\varepsilon)^{-1}V) + \mathcal{N}_{-\lambda}(-\partial_x^2 + \varepsilon^{-1}W)$,
- (ii) $\mathcal{N}_{-\lambda}(-\partial_x^2 + V + W) \geq \mathcal{N}_{-\lambda}(-\partial_x^2 + (1-\varepsilon)V) - \mathcal{N}_{-\lambda}(-\partial_x^2 - (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}W)$.

Annexe B

Autour de la théorie de Sturm-Liouville

On énonce ici quelques résultats de la théorie de Sturm-Liouville. On peut les retrouver dans [Sim05].

Lemme B.1 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $a < b$ deux réels et V une fonction bornée sur (a, b) . Pour $j = 1, 2$, on considère u_j une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle suivante

$$-u_j''(x) + V(x)u_j(x) = \lambda u_j(x).$$

Si $u_1(a) = u_1(b) = 0$ et que $u_2(a) \neq 0$ alors u_2 a au moins un zéro dans (a, b) .

Proposition B.2 Soient $a < b$ deux réels et V une fonction bornée sur (a, b) . On considère la réalisation de Dirichlet sur $L^2(a, b)$ de l'opérateur :

$$l = -\partial_x^2 + V(x).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le nombre de valeurs propres de l strictement en dessous de λ est exactement le nombre de zéros dans (a, b) d'une solution u de l'équation :

$$-u''(x) + V(x)u(x) = \lambda u(x) \text{ sur } (a, b) \text{ vérifiant } u(a) = 0 \text{ et } u'(a) = 1.$$

En particulier, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire B.3 Soient $a < b$ deux réels et V une fonction bornée sur (a, b) . On considère la réalisation de Dirichlet sur $L^2(a, b)$ de l'opérateur :

$$l = -\partial_x^2 + V(x).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u une solution de l'équation différentielle

$$-u''(x) + V(x)u(x) = \lambda u(x) \text{ sur } (a, b).$$

Alors, si $u(a) \neq 0$, on a :

$$|\mathcal{N}_\lambda(l) - \#\{x \in (a, b) : u(x) = 0\}| \leq 1.$$

Preuve du corollaire : Notons u_λ la solution de

$$-u_\lambda''(x) + V(x)u_\lambda(x) = \lambda u_\lambda(x) \text{ sur } (a, b) \text{ vérifiant } u_\lambda(a) = 0 \text{ et } u_\lambda'(a) = 1.$$

D'après la Proposition B.2 on a :

$$\mathcal{N}_\lambda(l) = \#\{x \in (a, b) : u_\lambda(x) = 0\}.$$

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $a = x_\lambda^{[0]} < x_\lambda^{[1]} < \dots < x_\lambda^{[n]} \leq b$ les zéros consécutifs de u_λ et, $a < x^{[1]} < \dots < x^{[p]} \leq b$ ceux de u . Pour tout entier j, k tels que $0 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq p$ on a :

$$x_\lambda^{[j]} \neq x^{[k]}.$$

Raisonnons par l'absurde et considérons

$$k_0 = \operatorname{argmin}\{1 \leq k \leq p : \exists 0 \leq j \leq n, x_\lambda^{[j]} = x^{[k]}\}.$$

Soit j_0 tel que $x^{[k_0]} = x_\lambda^{[j_0]}$. Comme $u(a) \neq 0$ nécessairement $x^{[k_0]} \neq x_\lambda^0 = a$ donc $j_0 > 1$. De plus, si on applique le Lemme B.1 sur l'intervalle $(x_\lambda^{[j_0-1]}, x_\lambda^{[j_0]})$ avec $u_1 = u_\lambda$ et $u_2 = u$ alors il existe un zéro de u , noté $x^{[k_1]}$, tel que $x^{[k_1]} \in (x_\lambda^{[j_0-1]}, x_\lambda^{[j_0]})$. On applique à nouveau le Lemme B.1 mais cette fois sur l'intervalle $(x^{[k_1]}, x^{[k_0]})$ avec $u_1 = u$ et $u_2 = u_\lambda$, par définition de $x^{[k_1]}$ on a $u'(x^{[k_1]}) \neq 0$ donc il existe un zéro de u_λ dans l'intervalle ouvert $(x^{[k_1]}, x^{[k_0]})$ ce qui est absurde.

Maintenant, on montre que pour tout $0 \leq j \leq n-1$, il existe un unique entier $d(j)$ tel que $1 \leq d(j) \leq p$, vérifiant

$$x_\lambda^{[j]} < x^{[d(j)]} < x_\lambda^{[j+1]}.$$

Soit $0 \leq j \leq n-1$, on applique le Lemme B.1 sur l'intervalle $(x_\lambda^{[j]}, x_\lambda^{[j+1]})$ avec $u_1 = u_\lambda$ et $u_2 = u$, comme $u(x_\lambda^{[j]}) \neq 0$ on sait qu'il existe un entier $d_1(j)$ qui vérifie :

$$x_\lambda^{[j]} < x^{[d_1(j)]} < x_\lambda^{[j+1]}.$$

Supposons qu'il y'en ait un deuxième, noté $d_2(j)$, quitte à changer les notations on peut choisir $d_1(j) < d_2(j)$. On peut applique alors le Lemme B.1 sur $(x^{[d_1(j)]}, x^{[d_2(j)]})$ avec $u_1 = u$ et $u_2 = u_\lambda$. On sait que $u_\lambda(x^{[d_1]}) \neq 0$ donc u_λ s'annule sur l'ouvert $(x^{[d_1(j)]}, x^{[d_2(j)]})$ ce qui est absurde. Donc il existe un unique entier $d(j)$ tel que $1 \leq d(j) \leq p$, vérifiant

$$x_\lambda^{[j]} < x^{[d(j)]} < x_\lambda^{[j+1]}.$$

Pour conclure, on montre que :

$$\#\{x \in (x_\lambda^{[n]}, b) : u(x) = 0\} \leq 1.$$

Tout d'abord si $x_\lambda^{[n]} = b$ cet ensemble est vide donc $\#\{x \in (x_\lambda^{[n]}, b) : u(x) = 0\} = 0$. Supposons alors que $x_\lambda^{[n]} < b$, s'il y a deux zéros $x^{[k_0]} < x^{[k_1]}$ de u dans $(x_\lambda^{[n]}, b)$ alors on peut appliquer le Lemme B.1 sur l'intervalle $(x^{[k_0]}, x^{[k_1]})$ avec $u_1 = u$ et $u_2 = u_\lambda$ car $u_\lambda'(x^{[k_0]}) \neq 0$ par hypothèse. Ceci est absurde car on aurait alors un autre zéro de u_λ dans l'intervalle $(x_\lambda^{[n]}, b)$. Finalement, on obtient

$$|\mathcal{N}_\lambda(l) - \#\{x \in (a, b) : u(x) = 0\}| \leq 1,$$

ce qui prouve le corollaire.

◇

Bibliographie

- [ABGM91] Y. Avishai, D. Bessis, B. G. Giraud, and G. Mantica. Quantum bound states in open geometries. *Phys. Rev. B*, 44 :8028–8034, Oct 1991.
- [Agm82] S. Agmon. *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations : bounds on eigenfunctions of N -body Schrödinger operators*, volume 29 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1982.
- [Agm85] S. Agmon. Bounds on exponential decay of eigenfunctions of Schrödinger operators. In *Schrödinger operators (Como, 1984)*, volume 1159 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–38. Springer, Berlin, 1985.
- [AS66] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications, Inc., New York, 1966.
- [BDM99] C. Bernardi, M. Dauge, and Y. Maday. *Spectral methods for axisymmetric domains*, volume 3 of *Series in Applied Mathematics (Paris)*. Gauthier-Villars, Éditions Scientifiques et Médicales Elsevier, Paris, 1999. Numerical algorithms and tests due to Mejdí Azaïez.
- [BEL14] J. Behrndt, P. Exner, and V. Lotoreichik. Schrödinger operators with δ -interactions supported on conical surfaces. *submitted, J. Phys. A*, 2014.
- [BEPS02] E. Bulgakov, P. Exner, K. Pichugin, and A. Sadreev. Multiple bound states in scissor-shaped waveguides. *Physical Review B. Condensed Matter and Materials Physics*, 66(15), 2002.
- [BF09] D. Borisov and P. Freitas. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin planar domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(2) :547–560, 2009.
- [BF10] D. Borisov and P. Freitas. Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in \mathbb{R}^d . *Journal of Functional Analysis*, 258(3) :893 – 912, 2010.
- [BMT12] G. Bouchitté, L. Mascarenhas, and L. Trabucho. Thin waveguides with Robin boundary conditions. *Journal of Mathematical Physics*, 53(12) :123517, December 2012.
- [BO27] M. Born and R. Oppenheimer. Zur quantentheorie der molekeln. *Annalen der Physik*, 389(20) :457–484, 1927.
- [CDFK05] B. Chenaud, P. Duclos, P. Freitas, and D. Krejčířík. Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes. *Differential Geom. Appl.*, 23(2) :95–105, 2005.
- [CDS81] J. Combes, P. Duclos, and R. Seiler. The born-oppenheimer approximation. In G. Velo and A. Wightman, editors, *Rigorous Atomic and Molecular Physics*, volume 74 of *NATO Advanced Study Institutes Series*, pages 185–213. Springer US, 1981.

- [CEK04] G. Carron, P. Exner, and D. Krejčířík. Topologically nontrivial quantum layers. *J. Math. Phys.*, 45(2) :774–784, 2004.
- [CFKS87] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, study edition, 1987.
- [CLMM93] J. P. Carini, J. T. Londergan, K. Mullen, and D. P. Murdock. Multiple bound states in sharply bent waveguides. *Phys. Rev. B*, 48 :4503–4515, Aug 1993.
- [DE95] P. Duclos and P. Exner. Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions. *Rev. Math. Phys.*, 7(1) :73–102, 1995.
- [DEK01] P. Duclos, P. Exner, and D. Krejčířík. Bound states in curved quantum layers. *Comm. Math. Phys.*, 223(1) :13–28, 2001.
- [DLR12] M. Dauge, Y. Lafranche, and N. Raymond. Quantum waveguides with corners. *ESAIM : Proceedings*, 35 :14–45, 2012.
- [DR12] M. Dauge and N. Raymond. Plane waveguides with corners in the small angle limit. *Journal of Mathematical Physics*, 53(12) :123529, 2012.
- [DR14] V. Duchêne and N. Raymond. Spectral asymptotics of a broken δ -interaction. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 47(15) :155203, 2014.
- [DS99] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [ET10] P. Exner and M. Tater. Spectrum of Dirichlet Laplacian in a conical layer. *J. Phys. A*, 43(47) :474023, 11, 2010.
- [Evv89] P. Exner, P. Šeba, and P. Št’oviček. On existence of a bound state in an L-shaped waveguide. *Czechoslovak Journal of Physics*, 39 :1181–1191, 1989.
- [Fes58] H. Feshbach. Unified theory of nuclear reactions. *Annals of Physics*, 5(4) :357 – 390, 1958.
- [Fes62] H. Feshbach. A unified theory of nuclear reactions. {II}. *Annals of Physics*, 19(2) :287 – 313, 1962.
- [FH10] S. Fournais and B. Helffer. *Spectral methods in surface superconductivity*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 77. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.
- [Fre07] P. Freitas. Precise bounds and asymptotics for the first Dirichlet eigenvalue of triangles and rhombi. *J. Funct. Anal.*, 251(1) :376–398, 2007.
- [FS09] L. Friedlander and M. Solomyak. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip. *Israel J. Math.*, 170 :337–354, 2009.
- [Hel88] B. Helffer. *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, volume 1336 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [HJ11] L. Hillairet and C. Judge. Spectral simplicity and asymptotic separation of variables. *Comm. Math. Phys.*, 302(2) :291–344, 2011.
- [HS84] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semiclassical limit. I. *Comm. Partial Differential Equations*, 9(4) :337–408, 1984.

- [HS85] B. Helffer and J. Sjöstrand. Puits multiples en limite semi-classique. II. Interaction moléculaire. Symétries. Perturbation. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 42(2) :127–212, 1985.
- [Jec14] T. Jecko. On the mathematical treatment of the Born-Oppenheimer approximation. *to appear, J. Math. Phys.*, 2014.
- [Kat66] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.
- [KMSW92] M. Klein, A. Martinez, R. Seiler, and X. P. Wang. On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules. *Comm. Math. Phys.*, 143(3) :607–639, 1992.
- [Kon67] V. A. Kondratiev. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 16 :209–292, 1967.
- [KR13] D. Krejčířík and N. Raymond. Magnetic effects in curved quantum waveguides. 28 pages 2013-30 2013-30, 2013.
- [KS88] W. Kirsch and B. Simon. Corrections to the classical behavior of the number of bound states of Schrödinger operators. *Ann. Physics*, 183(1) :122–130, 1988.
- [KŠ12] D. Krejčířík and H. Šediváková. The effective Hamiltonian in curved quantum waveguides under mild regularity assumptions. *Rev. Math. Phys.*, 24(7) :1250018, 39, 2012.
- [LB03] P. Lévy-Bruhl. *Introduction à la théorie spectrale : cours et exercices corrigés*. Sciences sup. Dunod, Paris, 2003.
- [LM12] Y. Lafranche and D. Martin. MÉLINA++, bibliothèque de calculs éléments finis. <http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina/>, 2012.
- [Mar89] A. Martinez. Développements asymptotiques et effet tunnel dans l’approximation de Born-Oppenheimer. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 50(3) :239–257, 1989.
- [Mar07] A. Martinez. A general effective Hamiltonian method. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 18(3) :269–277, 2007.
- [McC03] B. J. McCartin. Eigenstructure of the equilateral triangle. I. The Dirichlet problem. *SIAM Rev.*, 45(2) :267–287 (electronic), 2003.
- [MT05] A. Morame and F. Truc. Remarks on the spectrum of the Neumann problem with magnetic field in the half-space. *J. Math. Phys.*, 46(1) :012105, 13, 2005.
- [NS14] S. A. Nazarov and A. V. Shanin. Trapped modes in angular joints of 2D waveguides. *Appl. Anal.*, 93(3) :572–582, 2014.
- [OB14] T. Ourmières-Bonafos. Dirichlet eigenvalues of cones in the small aperture limit. *To appear, Journal of Spectral Theory*, 2014.
- [Per60] A. Persson. Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator. *Math. Scand.*, 8 :143–153, 1960.
- [Pop12] N. Popoff. *Sur le spectre de l’opérateur de Schrödinger magnétique dans un domaine diédral. (Thèse de doctorat)*. Université de Rennes 1. 2012.
- [Ray] N. Raymond. Little magnetic book. Geometry and bound states of the magnetic Schrödinger operator. Technical report. 243 pages.

- [Ray12] N. Raymond. Une excursion semi-classique dans l'univers des guides d'ondes. *La gazette des mathématiciens*, 131 :5–15, 2012.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press, New York, 1978.
- [Sim83] B. Simon. Semiclassical analysis of low lying eigenvalues. I. Nondegenerate minima : asymptotic expansions. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, 38(3) :295–308, 1983.
- [Sim05] B. Simon. Sturm oscillation and comparison theorems. In *Sturm-Liouville theory*, pages 29–43. Birkhäuser, Basel, 2005.