HAL
open science

Dynamique spatio-temporelle dans un piège magnéto-optique

Rudy Romain

To cite this version:

Rudy Romain. Dynamique spatio-temporelle dans un piège magnéto-optique. Physique [physics]. Université de Lille1, 2013. Français. NNT : . tel-01074802

HAL Id: tel-01074802

https://theses.hal.science/tel-01074802v1

Submitted on 16 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat
de l'Université des Sciences et Technologies de Lille - Lille 1
École Doctorale Sciences de la Matière, du Rayonnement et de l'Environnement

présentée par

Rudy ROMAIN

pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences Physiques

dans la spécialité : Optique et Lasers, Physico-Chimie, Atmosphère

Dynamique spatio-temporelle dans un piège magnéto-optique

soutenue le 9 Décembre 2013
devant le jury :

M. Marc LEFRANC, *Université de Lille1*	Président
Mme Laurence PRUVOST, *Laboratoire Aimé Cotton*	Rapporteur
M. Robin KAISER, *Université de Nice Sophia-Antipolis*	Rapporteur
Mme Hélène PERRIN, *Université Paris 13*	Examinateur
M. Daniel HENNEQUIN, *Université de Lille1*	Directeur de thèse
M. Philippe VERKERK, *Université de Lille1*	Co-directeur de thèse

Thèse de doctorat
de l'Université des Sciences et Technologies de Lille - Lille 1
École Doctorale Sciences de la Matière, du Rayonnement et de l'Environnement

présentée par

Rudy ROMAIN

pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences Physiques

dans la spécialité : Optique et Lasers, Physico-Chimie, Atmosphère

Dynamique spatio-temporelle dans un piège magnéto-optique

soutenue le 9 Décembre 2013
devant le jury :

M. Marc LEFRANC, *Université de Lille1*	Président
Mme Laurence PRUVOST, *Laboratoire Aimé Cotton*	Rapporteur
M. Robin KAISER, *Université de Nice Sophia-Antipolis*	Rapporteur
Mme Hélène PERRIN, *Université Paris 13*	Examinateur
M. Daniel HENNEQUIN, *Université de Lille1*	Directeur de thèse
M. Philippe VERKERK, *Université de Lille1*	Co-directeur de thèse

Informations contact :

Rudy ROMAIN, doctorant

e-mail : rudy.romain@gmail.com

Daniel HENNEQUIN, directeur de thèse

e-mail : daniel.hennequin@univ-lille1.fr

Philippe VERKERK, co-directeur de thèse

e-mail : philippe.verkerk@univ-lille1.fr

Avant-propos

Ce document est un rapport scientifique des travaux que j'ai réalisés au cours des dernières années au sein du laboratoire PhLAM (Physique des Lasers, Atomes et Molécules) de l'Université de Lille 1 avec Daniel Hennequin et Philippe Verkerk. Il a donc pour objectif de développer et d'expliquer les travaux expérimentaux et théoriques effectués pour améliorer notre compréhension de la physique au sein d'un piège magnéto-optique. Il n'y a donc aucune place pour l'expression de sentiments ou pour exprimer l'état d'esprit avec lequel ses travaux de recherche ont été effectués. Je souhaiterais faire usage de ces premières pages pour apporter mon témoignage et faire partager mon expérience de doctorant. Elles vont me permettre de dresser un bilan de ma thèse et d'avoir une pensée pour tous ceux, et toutes celles, qui m'ont accompagné pendant ces années.

La thèse est une période délicate pour différentes raisons. La principale est sans doute sa réputation. Nos prédécesseurs, soit par souci de mise en garde soit par volonté de nous faire « peur », n'hésitent pas à dramatiser cette « épreuve ». Pour ma part, je ne pense pas qu'il s'agisse d'une expérience difficile à vivre. Bien sûr, il existe des périodes de stress mais plutôt limitées et surtout contrebalancées par le plaisir de travailler sur un sujet qui nous tient à coeur. Néanmoins, je trouve cette période un peu ambigüe car nous sommes constamment confrontés à notre état d'étudiant/salarié. Je ne fais aucunement référence à des difficultés administratives bien qu'il y aurait sans doute pas mal à dire à ce sujet ... Le doctorat représente une première expérience professionnelle qui implique donc une nécessité de résultats alors que nous ne connaissons quasiment rien au métier de chercheur. Je pense qu'il faut savoir se montrer patient quant à l'obtention de résultats. Ainsi, nous pouvons dans un premier temps favoriser l'apprentissage et/ou l'approfondissement de techniques ou de méthodes expérimentales et théoriques. Sur ce point, le rôle du directeur de thèse est primordiale afin de pouvoir trouver le bon dosage entre formation et efficacité. Je remercie d'ailleurs Daniel et Philippe de m'avoir laisser le temps d'approfondir de nombreux éléments, de la manip notamment. C'est de cette façon, je pense, qu'un jeune chercheur se construit une base sur laquelle il viendra s'appuyer plus tard pour avoir une meilleure vision d'ensemble de son projet. Un autre point primordial dans cette construction est selon moi le dialogue avec les autres scientifiques, et en particulier avec les autres doctorants. À ce sujet, je regrette que les

actions de L'ADoc SMRE ne soient pas parvenues à établir ce dialogue au delà d'une sphère très locale. J'ai en tout cas une pensée pour mes « camarades » de l'association qui sont partis à la découverte d'autres horizons : Nazek, Imane, Béatrice, Stéphanie, Faustine, Laurent, Matthias, Vincent O., Vincent T. et Assaad. Je voudrais aussi remercier Peter, Adrien, Pierre, Augustin et Fabien pour avoir toujours été disponibles notamment pour échanger un bout de code (surtout du LaTeX). J'ai également eu la chance de pouvoir enseigner au cours de la thèse. Je pense que ce n'est pas absolument pas assimilable à une perte de temps. Tout d'abord, les heures de cours cassent la routine du labo et permettent de s'aérer l'esprit. Et surtout, la confrontation avec les étudiants permet d'acquérir des qualités de pédagogie et de synthèse, qui j'espère seront visibles dans ce document.

Une partie délicate de la thèse est la confection du manuscrit car il s'agit d'un travail de très longue haleine. Il faut le dire qui n'a rien à voir avec ce qui a pu nous être demandé auparavant. J'ai eu la chance de bénéficier de tous les conseils de Daniel et Philippe et surtout de leur haut niveau d'exigences. Je les remercie pour leurs nombreuses relectures. Un grand merci à toi Daniel pour ton important soutien dans la dernière ligne droite. Lorsque les journées s'allongeaient et les nuits se raccourcissaient, tu as su me communiquer un peu d'énergie pour pouvoir conclure. Merci également à Mélanie pour son ultime relecture la veille de l'envoi. J'ai ainsi pu produire un manuscrit dont je suis satisfaisant du fond comme de la forme, et c'est je pense le plus important. Il s'agit d'un travail de plusieurs mois dont la phase finale a dû être accélérée à cause des exigences du calendrier, il est donc important de ne pas avoir de regret sur ce point central de la thèse. Je remercie également les membres de mon jury d'avoir pris de leur temps pour lire ce document et pour leur intérêt envers mon travail.

Ces trois années resteront pour moi une bonne expérience et un bon souvenir notamment grâce au soutien quotidien de nombreuses personnes. L'université est un lieu vraiment enrichissant où l'on peut rencontrer des personnes de tout horizon (au sens propre comme au figuré), desquelles on peut apprendre énormément. Augustin, Romain, Marine, Adrien, Hui, Peter, Joumana, Antoine, Fanny, Pierre, Hélène, Quentin et Anne merci, pour votre amitié. Merci pour tous ces repas, ces cafés, ces bières, ces burgers et ces débats partagés qui n'ont été que d'agréables moments de détente et d'amitié (que j'espère méritée encore longtemps). Je vous souhaite le meilleur pour la suite de votre vie et de votre carrière. Je félicite les résidents du bureau 35 pour m'avoir supporté pendant toute cette période. Merci à toi Hui de nous avoir fait partager un peu de ta culture, j'espère que nous avons contribué à ce que ton séjour se déroule pour le mieux. Merci à toi Adrien d'avoir été présent, je suis très heureux d'avoir partagé cette expérience avec toi depuis les premières jours jusqu'à la soutenance. Au delà de l'aspect scientifique, je pense que nous avons formé une bonne équipe pour résoudre nos problèmes administratifs, faire face à nos premiers cours, partager les « perles » de nos étudiants, affronter les péripéties de la thèse, et aussi partager les déli-

cieux gâteaux cuisinés par Tatiana. Nos chemins se séparent aujourd'hui mais j'espère qu'ils se recroiseront régulièrement. J'ai également une pensée pour Antoine et Hélène avec qui les heures passées sur la manip étaient un vrai plasir. Des aléas n'ont malheureusement pas prolongé notre collaboration, je vous souhaite le meilleur pour votre thèse et pour la suite. Une pensée amicale pour mes coéquipiers du futsal pour m'avoir apporter un petit espace pour me défouler.

Je finirai cette partie avec quelques mots pour les personnes qui m'ont permis d'arriver jusqu'au doctorat. Tout d'abord, j'ai eu une profonde et sincère pensée pour mes parents qui m'ont mis le pied a l'étrier dès les premières années de ma scolarité et qui m'ont toujours encouragé et mis dans les meilleures dispositions pour réussir mes études. Je ne sais comment vous remercier. En tout cas, je pense que vous pouvez être fiers de vous. Je tiens également à dédier quelques mots à mon « collègue » Fabien. Je ne sais comment te remercier pour toutes ces années où tu m'as toujours donné de très bons conseils. Je pense très sincèrement que si je peux écrire ces lignes dans mon manuscrit de thèse, c'est en partie grâce à toi. Tu m'as poussé à travailler davantage et m'a permis de voir plus loin. Pour tout ceci, je te dis un grand merci mon ami. Je te souhaite de t'épanouir dans tes futures activités car tu le mérites.

Je terminerai en parlant de la principale responsable de ma présence à Lille. Mélanie, je pourrais bien sûr te remercier pour ta présence à mes cotés et ton soutien sans faille. Mais je vais surtout te présenter mes excuses pour ces derniers mois où je n'ai pas été très disponible avec toujours la thèse en tête. Nous sommes maintenant aux portes d'une vie nouvelle, ensemble, et c'est tout ce qui compte pour moi. Je t'aime.

Résumé

Cette thèse a pour objectif d'étudier la dynamique spatio-temporelle des atomes refroidis par laser dans un piège magnéto-optique (PMO). Il a été montré qu'un nuage d'atomes froids dans le régime de diffusion multiple peut présenter un comportement instable sans modulation externe du système. Cependant, ces instabilités n'ont pas encore été modélisées de façon satisfaisante.

Une nouvelle configuration du PMO a été mise en oeuvre pour tenter d'étudier des instabilités dans une seule direction. Ce PMO, qualifié d'anisotrope, n'utilise pas des lasers de mêmes fréquences dans chaque direction de l'espace. Il met en évidence les forts couplages existants entre les directions du piège, si bien qu'il n'est pas possible de l'utiliser pour réduire le nombre de dimensions dans lesquelles les instabilités s'établissent. Toutefois, cette étude constitue un premier pas vers une meilleure description tridimensionnelle du piège. Elle nous a notamment permis de mesurer la probabilité pour qu'un photon diffusé soit réabsorbé à l'intérieur du nuage. Cette quantité est caractéristique du PMO mais elle n'avait jusqu'à là jamais été mesurée.

Nous avons également établi un modèle spatio-temporel unidimensionnel du PMO. Il est constitué d'un système d'équations non-linéaires couplées reliant la densité atomique et les intensités des faisceaux lasers. Ce système contient notamment une équation de Vlasov-Fokker-Planck, rencontrée dans de nombreux domaines de la physique. Des simulations numériques ont été effectuées dans un cas simple. D'un point de vue expérimental, l'utilisation d'une caméra rapide nous a permis de mettre en évidence la structure spatiale d'instabilités de type stochastique.

Mots-clés :

Atomes froids, Interactions photon-atome, Refroidissement laser, Dynamique non-linéaire, Instabilités spatio-temporelles, Équation de Vlasov-Fokker-Planck, Piégeage anisotrope

Summary

The aim of this thesis is to study the spatio-temporal dynamics of laser cooled atoms in a magneto-optical trap (MOT). Previous works have shown that in the multiple scattering regime, an atomic cloud can have an unstable behavior without external modulation of the system. Nevertheless, these instabilities have not yet been modeled in a satisfactory way.

A new configuration of the MOT has been built up as a possible way to study instabilities in only one direction. This trap, called anisotropic MOT, is not made of laser beams with the same laser frequencies along each direction of space. It exhibits the strong couplings between the directions of the trap, with the result that it cannot be used to reduce the number of directions in which instabilities grow up. However, this study can be considered as a new step to a better 3D description of the MOT physics. In particular, it gives us a way to measure the probability that a scattered photon is reabsorbed inside the atomic cloud. This quantity is a characteristic of the MOT but it has never been measured so far.

We also develop a 1D spatio-temporal model of the MOT. It consists in a set of coupled nonlinear equations linking the atomic density and the laser intensities. This set contains a Vlasov-Fokker-Planck equation which is used to model a lot of systems in various fields and not only in physics. Numerical simulations have been done in a simple case. In the experiment, the use of a fast video camera allows us to observe the spatial structure of one type of instabilities, the so-called stochastic instabilities.

Key-words:

Cold atoms, Photon-atom interaction, Laser cooling, Non-linear dynamics, Spatio-temporal instabilities, Vlasov-Fokker-Planck equation, Anisotropic trapping

Notations utilisées

grandeurs physiques

k_L	vecteur d'onde d'un photon laser
$\hbar\omega_L$	énergie d'un photon laser
$\hbar\omega_0$	différence d'énergie entre le niveau excité et le niveau fondamental
Δ	désaccord des photons lasers
δ	somme des décalages Doppler et Zeeman
δ_r	déplacement lumineux
Ω	fréquence de Rabi
Ω_G	fréquence de Rabi généralisée
I	intensité d'un faisceau laser
I_{sat}	intensité de saturation
Γ	largeur du niveau excité
$\mathcal{N}$	nombre de photons dans un mode de champ laser
n	densité atomique dans l'espace réel
N	nombre d'atomes
ρ	densité atomique dans l'espace des phases
π_i	population de l'état $\|i\rangle$
σ_0	section efficace d'absorption à résonance dans le régime de faible saturation
σ_L	section efficace d'absorption d'un photon laser
σ_R	section efficace d'absorption d'un photon diffusé
κ	raideur du piège
α	coefficient de friction du piège
L	taille du nuage dans une direction donnée

indices

$\parallel$	axe des bobines
$\perp$	plan perpendiculaire à l'axe des bobines
DM	régime de diffusion multiple
th	régime thermique

Table des matières

Avant-propos **7**

Résumés **10**

Notations utilisées **12**

Introduction générale **17**

I Étude d'un PMO anisotrope en fréquence **23**

1 Rappels sur le formalisme de l'atome habillé **27**
1.1 Bases de la méthode 27
1.1.1 système {atome + champ} dans la base des états non couplés 28
1.1.2 système {atome + champ} dans la base des états habillés 32
1.2 Équation pilote pour la matrice densité 34
1.2.1 équation d'évolution 34
1.2.2 évolution des populations 35
1.2.3 évolution des cohérences 36
1.3 Spectres d'absorption et d'émission du système 37
1.3.1 spectre d'émission 37
1.3.2 spectre d'absorption 38

2 Modélisation du PMO anisotrope **41**
2.1 Modélisation des processus de piégeage 42
2.1.1 différentes configurations pour le PMO 42
2.1.2 expression générale des forces 44
2.1.3 équilibre statique 49
2.2 Modèle unidimensionnel $\sigma^+ - \sigma^-$ 55

2.2.1 probabilité d'absorption d'un photon laser 61
2.2.2 raideur du piège 61
2.2.3 probabilité d'absorber un photon diffusé 64
2.3 Un pas vers une description tridimensionnelle 71
2.3.1 probabilité d'absorption d'un photon laser 72
2.3.2 raideur du piège 79
2.3.3 probabilité d'absorber un photon diffusé 84

3 Étude expérimentale du PMO anisotrope 87
3.1 Dispositif expérimental 88
3.1.1 généralités 88
3.1.2 génération de l'anisotropie 90
3.2 Acquisition et traitement 91
3.3 Résultats expérimentaux 94
3.3.1 analyse de la fluorescence 94
3.3.2 évolution de l'ellipticité 97

4 Mesure de la section efficace de réabsorption 101
4.1 Modélisation du piège isotrope 102
4.2 Mesures 104
4.2.1 optimisation du dispositif 105
4.2.2 mesures d'ellipticités 108
4.2.3 détermination du rapport des sections efficaces 110

Conclusion 115

II Instabilités spatio-temporelles 117

5 Dynamique spatio-temporelle à une dimension 121
5.1 Bases du modèle 122
5.2 Modèle de Vlasov-Fokker-Planck 124
5.2.1 évolution de la densité dans l'espace des phases 124
5.2.2 force et coefficient de diffusion 129
5.2.3 interaction avec le réservoir d'atomes chauds 132
5.2.4 propagation des faisceaux 133
5.3 Modélisation de la réponse atomique 134

6 Simulations numériques du système VFP dans le régime de faible absorption 137
6.1 Équations sans dimension 137
6.1.1 modèle général 138
6.1.2 hypothèse de faible absorption dans un piège symétrique 140
6.2 Résolution du système 142
6.2.1 densité stationnaire 142
6.2.2 modèle dépendant du temps 146

7 Étude expérimentale de la dynamique spatio-temporelle dans un PMO 157
7.1 Dispositif expérimental 158
7.2 PMO dans le régime d'instabilités stochastiques 162
7.3 analyse spatio-temporelle 166
7.3.1 observation et caractérisation des instabilités 166
7.3.2 modélisation 177

Conclusion 181

Conclusion générale 183

Liste des figures 187

Liste des tableaux 189

Bibliographie 197

A Système avec faisceaux transverses 199

B Effet transverse sur le couplage longitudinal 203

C Équation d'évolution de la densité stationnaire 207

Introduction générale

Au cours des trois dernières décennies, notre compréhension et notre contrôle des systèmes quantiques ont connu une importante (r)évolution grâce au perfectionnement des techniques de refroidissement et de piégeage d'atomes, de molécules ou encore d'ions. Ce développement a été à la fois rapide, spectaculaire et mondial comme en témoigne l'attribution de trois prix Nobel sur cette thématique au cours de cette période. Ils ont été co-attribués [1] à Hans G. Dehmelt et Wolfgang Paul pour *"the development of the ion trap technique"* en 1989, à Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji et William D. Phillips pour *"the development of methods to cool and trap atoms with laser light"* en 1997, et également à Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle et Carl E. Wieman pour *"the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates"* en 2001.

Le principe du refroidissement d'atomes [Hansch1975] fait appel à la notion de pression de radiation [Ashkin1970]. Il s'agit de l'action mécanique de la lumière sur la matière. Lors de l'absorption d'un photon, il y a transfert de quantité de mouvement, comme dans un choc entre deux corps macroscopiques. Si les photons arrivent à contre sens du mouvement de l'atome, celui-ci est freiné. L'échange d'impulsion lors de la réémission du photon ne s'oppose pas à cet effet car il est nul en moyenne à cause de l'isotropie de l'émission spontanée. L'utilisation de sources lasers rend le mécanisme efficace car les atomes absorbent de nombreux photons. Des faisceaux se propageant dans des sens opposés assurent le refroidissement dans une direction. Les premières réalisations expérimentales [Chu1985] permettaient uniquement le ralentissement. Dans ce cas, l'ensemble des atomes refroidis est appelé *mélasse optique*, en référence à l'effet de friction de la lumière. L'ajout d'un champ magnétique introduisant un effet de rappel permet d'obtenir des *nuages* de densité plus élevée (typiquement 10^{10} atomes/cm^3) et donc plus faciles à observer. Le dispositif, formé de trois paires de faisceaux lasers et d'un champ magnétique inhomogène, est appelé *piège magnéto-optique* (PMO) [Raab1987]. Il joue un rôle central dans la physique des atomes froids. Historiquement, les alcalins ont été les premiers éléments à être refroidis car ils présentent une structure

1. http ://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/

électronique très simple. Année après année, de nouvelles espèces ont été refroidies.

Il est possible d'identifier différents régimes de fonctionnement du PMO [Townsend1995], en fonction du nombre d'atomes piégés. Dans des conditions de piégeage faible, on parle de *régime limité par la température* ou *régime thermique*. La formation du nuage s'interprète comme l'équilibre des forces de rappel et de friction avec le mouvement résiduel de l'atome. Ce dernier est la manifestation du gain d'impulsion lors de l'émission spontanée qui interdit de stopper totalement les atomes. Il est associé à la température du nuage. La température minimale T_D prédite dans un PMO vérifie la relation suivante :

$$k_B T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2} \tag{1}$$

où k_B est la constante de Boltzmann, $\hbar$ la constante de Planck normalisée et Γ la largeur de la transition atomique utilisée. Pour le Césium, nous trouvons $T_D = 125\,\mu\text{K}$. Dans des conditions plus favorables, un nombre plus élevé d'atomes peut être piégé si bien que l'absorption des faisceaux va devenir non négligeable. Deux nouveaux mécanismes apparaissent au sein du nuage, il s'agit d'effets collectifs. Le premier, appelé *effet d'ombre* [Dalibard1988], contracte le nuage à cause d'un déséquilibre local de l'intensité de chaque faisceau laser d'une même paire. Le second mécanisme découle du fait qu'un photon peut subir plusieurs diffusions avant de sortir du nuage. Il s'agit d'un effet de dilatation car les échanges d'impulsion des systèmes émetteur/photon et photon/absorbeur sont de même direction (celle de propagation du photon) et de sens opposé. On peut montrer qu'une force répulsive de type coulombien apparaît entre l'émetteur et le récepteur. Dans ce cas, on parle de *régime de diffusion multiple*. La différence principale entre ces deux régimes est la taille des nuages obtenus. Celle-ci est de quelques dizaines de µm pour le rayon dans le régime thermique (voir tableau 3 [Townsend1995]), à cause de la faible amplitude du mouvement résiduel. Alors que dans le régime de diffusion multiple, des nuages de quelques mm de diamètre sont observés. Il est donc relativement simple de les différencier.

Aujourd'hui, les atomes préalablement piégés dans un PMO sont utilisés dans différentes expériences dépassant le simple cadre de l'étude du piégeage et du refroidissement. Par l'adjonction d'autres techniques de refroidissement, il est possible d'obtenir des *atomes ultra-froids*, c'est-à-dire qui ont atteint la limite de dégénérescence quantique. On parle de *gaz de Fermi* pour les fermions [Ketterle2006b], alors qu'il s'agit de *condensats de Bose-Einstein* pour les bosons [Anderson1995, Bradley1995, Davis1995, Ketterle2006a]. Ces systèmes sont très intéressants car ils présentent un comportement quantique dont de nombreux degrés de liberté peuvent être contrôlés. Il est ainsi possible d'étudier des phénomènes tels que la superfluidité [Leggett2001]. D'autres expériences placent des atomes (ultra-)froids dans des réseaux optiques obtenus par interférences [Salomon1987, Grynberg1993]. La géométrie et la profondeur du réseau sont donc parfaitement maîtrisées. Ces études portent sur la diffusion

des atomes dans le réseau et permettent de comprendre le phénomène de transition de phase quantique [Greiner2002]. Il est également possible d'associer des atomes froids par différentes techniques (photo-association, résonance de Feshbach, ...) pour former des molécules froides [Krems2010]. Les atomes (ultra-)froids sont aussi utilisés en métrologie pour définir des étalons de fréquence [LeTargat2013] ou réaliser des mesures de l'accélération de la pesanteur [PereiraDosSantos2008].

La thématique générale des atomes froids s'est donc énormément diversifiée depuis l'obtention des premières mélasses. En effet, les travaux effectués dépassent largement le cadre des atomes froids. Les expériences d'atomes (ultra-)froids présente l'avantage d'un contrôle poussé du système, voire même des interactions à l'intérieur du système. La mise en oeuvre des expériences est aussi relativement simple à effectuer par rapport à d'autres, comme par exemple l'étude microscopique des solides. Les atomes (ultra-)froids se montrent très utiles pour simuler d'autres systèmes. Nous avons déjà cité les exemples des transitions de phase et de la superfluidité. Nous pouvons également évoqué la ressemblance avec la physique des plasmas causée par la présence de la force de diffusion multiple de forme coulombienne. Nous reviendrons plus tard sur ce point. Le refroidissement laser peut également être utile à l'information quantique et à la métrologie.

Nous pourrions penser que cette diversification a relégué le PMO au simple rôle d'outil technologique. Cependant, plusieurs équipes travaillent encore sur le développement de techniques pour refroidir de nouveaux éléments. Et surtout de nombreuses questions restent toujours sans réponse. Pour le moment, aucune modélisation à trois dimensions du PMO n'a été effectuée. Ce manque n'est pas fondamental pour comprendre comment les atomes sont piégés ou pour obtenir des densités suffisantes pour d'autres applications. À l'inverse, il devient problématique quand il s'agit d'étudier la dynamique du nuage. En effet, il a été observé qu'un nuage d'atomes froids peut avoir un comportement instable dans certaines conditions expérimentales [Wilkowski1998, Wilkowski2000, diStefano2004, Labeyrie2006]. Dans ce cas, les modèles unidimensionnels élaborés jusqu'à maintenant ne permettent pas de décrire de façon satisfaisante la dynamique observée. De plus, si nous voulons exploiter la ressemblance avec la physique des plasmas, une description quantitative du PMO est absolument essentielle.

Les premiers travaux sur les instabilités [Wilkowski2000, Hennequin2004] décrivent un comportement aléatoire du nuage sans qu'aucune modulation externe ne soit introduite. Plus précisément, il a été observé que la fluorescence et la position moyenne du nuage évoluent au cours du temps de façon erratique. Le mouvement du centre de masse est induit par la configuration asymétrique du PMO utilisé. Le fait que le piège soit formé avec des faisceaux rétro-réfléchis ajoute une contribution supplémentaire à l'effet d'ombre. Les observations montrent que les deux variables du système présentent par moments de fortes fluctuations autour de leur valeur moyenne. Ces plages d'instabilités sont séparées par des variations peu

bruitées. On parlera d'*instabilités stochastiques* car le système amplifie le bruit environnant. Une analyse temporelle de ces signaux met en évidence la présence de fréquences caractéristiques comprises entre quelques Hz et environ 200 Hz. Ces observations ont été effectuées pour des conditions de saturation élevée (faisceaux lasers proches de résonance et intensité importante). La variation de la fréquence des lasers a permis d'observer un phénomène de *résonance stochastique*. L'amplitude de la réponse du système dépend de la valeur des paramètres de l'expérience. Un modèle théorique décrivant l'évolution temporelle de la densité d'atomes piégés et de la position du centre de masse du nuage a été construit. Il s'agit d'un modèle à une dimension qui prend en compte l'effet d'ombre dû à la rétro-réflexion. Des simulations numériques ont montré que ce modèle ne pouvait décrire que de manière qualitative les observations expérimentales. Elles ont tout de même confirmé le phénomène d'amplification sélective du bruit à des fréquences caractéristiques du système. Une analyse de stabilité a montré que ce modèle possède une bifurcation de Hopf.

Un autre type d'instabilités a été observé dans la même configuration mais pour des intensités lasers plus grandes [diStefano2003, diStefano2004]. Dans ce cas, l'évolution temporelle de la densité et de la position du nuage est différente. Elle a un caractère périodique très marqué dont la période est d'environ une demie seconde. On parlera d'*instabilités déterministes*. Le modèle précédent a été modifié pour tenir compte de la taille du nuage. L'explication proposée est la suivante : au fur et à mesure que la densité augmente, le nuage se déplace à cause de l'effet d'ombre. Si le nuage explore une zone où les faisceaux lasers sont moins intenses, il se vide et reprend sa position au centre du piège, ce mouvement constitue une période. L'accord n'est pas quantitatif bien que les résultats reproduisent assez bien l'allure des mesures. Les différents régimes d'instabilités sont notamment bien prédits.

Des oscillations périodiques de la fluorescence (fréquence associée d'environ 50 Hz) ont également été reportées dans [Labeyrie2006]. Elles ont été obtenues pour de plus faibles intensités et dans un PMO à six faisceaux indépendants, la position du nuage est donc constante au cours du temps. Les oscillations sont associées à des phases d'expansion et de contraction. Dans ce cas, un modèle théorique à une dimension a été développé. Il prend en compte à la fois l'atténuation des faisceaux et une contribution associée à la diffusion multiple, mais ne permet pas de décrire quantitativement les observations. Un autre modèle incluant une dépendance spatiale de la diffusion multiple est décrit dans [Pohl2006]. Il met en évidence l'existence d'un intervalle spatial (bande de quelques mm de largeur distant d'environ 1 cm du centre du piège) dans lequel les atomes sont accélérés alors qu'ils sont piégés de part et d'autre. Cet argument explique l'origine de l'expansion observée du nuage. La transition vers le régime instable s'effectue également par une bifurcation de Hopf.

Il est très difficile de comparer ces travaux car ils n'utilisent pas le PMO dans les mêmes conditions. Dans les premières expériences décrites, le PMO possède des faisceaux rétro-réfléchis de forte intensité et dont la fréquence est proche de résonance. Les autres ex-

périences sont réalisées dans un PMO à six faisceaux indépendants dont la grande taille conduit à des nuages de plusieurs mm de rayon. Toutefois, l'analyse des résultats montre des similitudes au niveau des observations. Elle met surtout en exergue les limites des descriptions théoriques actuelles et la nécessité de posséder un modèle capable de décrire quantitativement des configurations expérimentales variées. D'autres modèles plus complets ont été développés plus récemment en adaptant les méthodes de la physique des plasmas [Mendonca2008, Mendonca2012, Tercas2012]. Ils donnent lieu à des prédictions qui n'ont pour le moment pas été reliées à des observations expérimentales.

Dans ce manuscrit, nous allons améliorer la description du PMO par deux approches différentes et complémentaires. Une limite des traitements précédents est probablement de comparer les résultats d'un système 3D avec un modèle 1D. D'une part, nous proposerons une configuration du PMO pour observer des instabilités unidimensionnelles. Ainsi, nous pouvons espérer obtenir une meilleure cohérence lors de la confrontation avec des modèles 1D. Le principe de cette configuration est d'utiliser des faisceaux lasers différents selon les directions du piège. Nous aboutissons ainsi à un PMO anisotrope en fréquence et en intensité. Le rôle de ces paramètres est de fixer une dynamique différente dans chaque direction. Ainsi nous pouvons espérer observer un comportement instable dans une seule direction. D'autre part, nous allons développer un modèle spatio-temporel 1D pour étudier la dynamique du nuage. Comme nous venons de le voir, nous ne disposons pas d'un modèle général décrivant les différentes conditions dans lesquelles un PMO peut être utilisé. Nous allons dériver des principes de base de la physique atomique un modèle spatio-temporel contenant le moins d'approximations possible que ce soit sur la valeur des paramètres des faisceaux lasers ou sur la configuration du piège.

Ce manuscrit est composé de deux parties. La première est consacrée à la description théorique et à la réalisation expérimentale du piège anisotrope. Nous verrons également que ce PMO anisotrope peut être très utile pour comprendre le PMO traditionnel car la modélisation de ces deux pièges est très proche. Nous calculerons notamment les forces qui existent pour ces deux configurations. L'étude de la dynamique du nuage est l'objet de la seconde partie. Le but de celle-ci est l'élaboration du modèle spatio-temporel et son intégration numérique. Nous étudierons aussi expérimentalement l'évolution spatiale et temporelle des atomes dans un régime d'instabilités stochastiques.

Première partie

Étude d'un PMO anisotrope en fréquence

Dans cette première partie, nous allons étudier une nouvelle configuration du PMO. L'objectif est de trouver un système permettant l'observation d'instabilités unidimensionnelles du nuage d'atomes froids. Ce choix est motivé par le fait que les modèles théoriques ont été développés à une dimension jusqu'à présent. Nous allons introduire une anisotropie dans le piège pour obtenir des conditions de piégeage différentes selon chaque direction. Cette anisotropie est créée par l'intermédiaire des faisceaux lasers : nous utilisons des fréquences et des intensités différentes pour chaque bras du PMO. Ce type de piège anisotrope en fréquence a déjà été présenté dans la littérature [Heo2007, Noh2007]. Ces études se sont restreintes à des cas où les deux fréquences étaient quasiment dégénérées (différence inférieures à une demie largeur naturelle Γ). Nous pouvons citer plusieurs types d'anisotropie qui ont également été mises en oeuvre par le passé. Des PMO dans lesquels les intensités de chaque direction sont différentes ont été étudiés [Stites2005, Vorozcovs2005]. L'anisotropie du champ magnétique a également été accentuée [Dudle1996, Vengalattore2003]. Ces études montrent principalement qu'une grande anisotropie conduit à une transition du régime de diffusion multiple vers le régime thermique. Un tel effet est induit par des variations importantes des paramètres de contrôle, par exemple un ordre de grandeur sur l'intensité de chaque direction. D'autre part, il a été montré que des variations d'amplitude comparables sont nécessaires pour que le système passe d'un point de fonctionnement stable à un autre instable, et inversement [diStefano2004, Labeyrie2006]. Ces travaux ont montré que la sensibilité de la dynamique vis-à-vis du désaccord est beaucoup plus grande. Des variations de l'ordre de la largeur naturelle Γ (c'est-à-dire supérieures à celles réalisées dans [Heo2007, Noh2007]) peuvent complètement modifier le comportement spatio-temporel du système. C'est pourquoi l'anisotropie utilisée par la suite sera introduite sur la fréquence des lasers. La possibilité d'agir sur les intensités sera également considérée car elle est très simple à mettre en oeuvre.

Il est nécessaire de reprendre le modèle du PMO développé dans [Sesko1991] pour l'adapter à la configuration anisotrope. Dans un souci de généralité, nous développerons un formalisme capable de décrire un grand nombre de configurations anisotropes du PMO. Nous verrons également qu'il est possible de voir le piège traditionnel comme un cas particulier du PMO anisotrope. Par conséquent, certains des résultats concernant le cas anisotrope pourront être appliqués au PMO traditionnel. En particulier, nous reviendrons sur le rôle important de la diffusion multiple. Nous verrons notamment qu'il est possible de déterminer expérimentalement le coefficient caractéristique de ce processus grâce à des mesures de tailles du nuage. Cette possibilité de mesure est très intéressante car cette grandeur n'a pratiquement jamais été mesurée.

Cette partie s'organise de la manière suivante. Tout d'abord, nous rappellerons des résultats importants au sujet du formalisme de l'atome habillé dans le chapitre 1. Cette théorie nous sera très utile notamment pour caractériser la diffusion multiple, mais aussi car elle permet de comprendre certains phénomènes avec des images physiques simples. Le second

chapitre sera dédié à la modélisation du PMO. Le modèle tentera d'abord de décrire plusieurs configurations, pour ensuite converger vers une description du PMO anisotrope, puis du piège traditionnel. La réalisation expérimentale de la configuration anisotrope fera l'objet du chapitre 3. Nous reviendrons ensuite à une configuration traditionnelle dans le chapitre 4. Nous y développerons une méthode de mesure permettant de déterminer la section efficace caractéristique de la diffusion multiple.

Chapitre 1

Rappels sur le formalisme de l'atome habillé

Tout au long de ce manuscrit, nous allons tenter de modéliser le comportement des atomes refroidis par laser. Il s'agit donc de décrire l'interaction entre la lumière et un système atomique. La théorie de l'atome habillé [Cohen-Tannoudji1988] fait partie du domaine de la physique atomique. Elle est particulièrement adaptée pour décrire cette interaction lorsque l'intensité du rayonnement devient importante. Ce formalisme semble donc tout à fait approprié pour étudier la physique des atomes froids. Dans la suite, nous allons régulièrement faire appel à cette approche car elle fournit des conclusions quantitatives, comme elle permet d'avoir des raisonnements qualitatifs. En particulier, la méthode de l'atome habillé permet de prendre en compte l'émission spontanée et d'obtenir des images physiques simples des différents mécanismes sous-jacents. Il convient donc de rappeler ici les bases du formalisme de l'atome habillé et également ses principaux résultats, afin de pouvoir y faire référence le moment venu.

Tout d'abord, nous allons revenir sur le principe de cette méthode, en rappelant le cadre dans lequel cette théorie s'insère. Puis, nous l'appliquerons aux problèmes qui seront traités dans la suite de ce manuscrit, tels que la réponse d'un système atomique soumis à un champ intense, ou encore la détermination des spectres d'absorption et d'émission correspondants.

1.1 Bases de la méthode

Le formalisme de l'atome habillé est une approche quantique de l'interaction lumière-matière, à savoir qu'outre la quantification des niveaux d'énergie de l'atome, le champ laser est lui aussi traité comme un objet quantique. Ce choix va permettre de faire apparaître clairement les phénomènes d'absorption, d'émissions stimulée et spontanée.

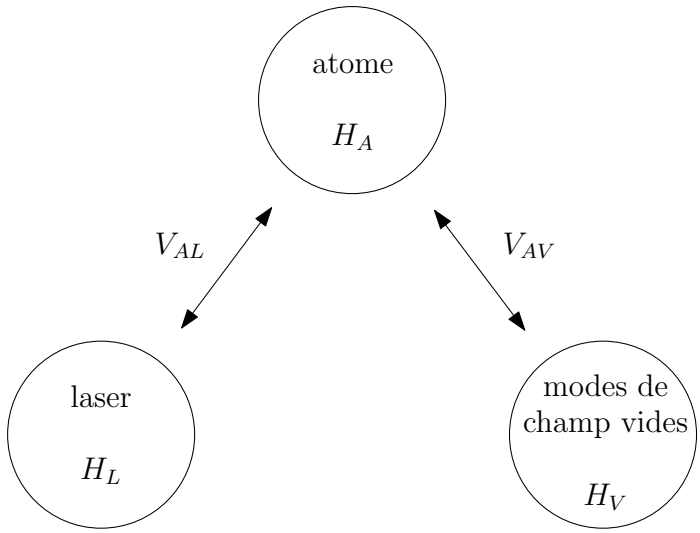


FIGURE 1.1 – Représentation schématique des différents sous-systèmes et de leurs interactions, l'ensemble forme le système total étudié.

Le système étudié, représenté sur la figure 1.1, est donc composé de l'atome A d'hamiltonien H_A, du mode laser du champ L d'hamiltonien H_L et de l'ensemble des modes de champ vides V d'hamiltonien H_V. Ces trois sous-systèmes interagissent via les couplages V_{AL} entre A et L et V_{AV} entre A et V. L'hamiltonien total du système est donc :

$$H = H_A + H_L + H_V + V_{AL} + V_{AV} \tag{1.1}$$

Dans un premier temps, le sous-système {atome + champ} sera considéré seul : la contribution des modes de champ inoccupés sera traitée par la suite. Les états propres de ce sous-système sont les *états habillés par le champ laser*.

1.1.1 système {atome + champ} dans la base des états non couplés

Nous considérerons dans cette partie un atome à 2 niveaux d'énergie. L'état fondamental $|f\rangle$ et l'état excité $|e\rangle$ sont séparés par l'énergie $\hbar\omega_0$. Nous pouvons donc exprimer l'hamiltonien atomique comme :

$$H_A = \frac{\hbar\omega_0}{2}\left(|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|\right) \tag{1.2}$$

Nous supposerons que le champ laser est monomode et de pulsation ω_L. Son hamiltonien peut être écrit ainsi :

$$H_L = \hbar\omega_L \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{1.3}$$

Les opérateurs $a^\dagger$ et a sont les opérateurs de création et d'annihilation de photon. Les états propres de cet hamiltonien sont les états de Fock $|\mathcal{N}\rangle$ qui représentent un état du champ contenant $\mathcal{N}$ photons [1]. Les énergies propres de l'hamiltonien du champ laser sont périodiques, leur valeur est : $E_\mathcal{N} = \left(\mathcal{N} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_L$.

Les états propres du sous-système $A + L$ {atome + champ sans couplage} seront notés $|i, \mathcal{N}\rangle$ [2] (i pour e ou f). Il est intéressant de constater que tous ces états s'organisent par paires qui ont une énergie très proche : on parlera de multiplicité. Il est simple d'expliciter l'énergie des états non couplés d'une même multiplicité $\mathcal{E}(\mathcal{N})$:

$$E_{f,\mathcal{N}+1} = \langle f, \mathcal{N}+1 | H_A + H_L | f, \mathcal{N}+1\rangle = \hbar\omega_L(\mathcal{N}+1) + \frac{\hbar}{2}(\omega_L - \omega_0) \tag{1.4a}$$

$$E_{e,\mathcal{N}} = \langle e, \mathcal{N} | H_A + H_L | e, \mathcal{N}\rangle = \hbar\omega_L(\mathcal{N}+1) - \frac{\hbar}{2}(\omega_L - \omega_0) \tag{1.4b}$$

La différence d'énergie entre ces niveaux est :

$$E_{f,\mathcal{N}+1} - E_{e,\mathcal{N}} = \hbar\Delta \tag{1.5}$$

Nous introduisons une quantité très importante, le désaccord Δ du laser :

$$\Delta = \omega_L - \omega_0 \tag{1.6}$$

Pour que la situation étudiée ait un intérêt, il faut que l'onde laser soit résonnante ou quasi-résonnante avec la transition atomique, soit $\omega_L \simeq \omega_0$. L'écart d'énergie entre les deux états d'une même multiplicité est très petit devant l'écart avec les multiplicités adjacentes puisque $\Delta \ll \omega_L$. Le structure énergétique du sous-système {atome + champ sans couplage} est représenté sur la figure 1.2.

Nous allons maintenant introduire l'interaction V_{AL}. Dans l'approximation dipolaire électrique, nous pouvons écrire que :

$$V_{AL} = -\vec{d}.\vec{E} \tag{1.7}$$

1. L'action des opérateurs échelles sur les états de Fock sont les suivantes : $a^\dagger|\mathcal{N}\rangle = \sqrt{\mathcal{N}+1}\,|\mathcal{N}+1\rangle$ et $a|\mathcal{N}\rangle = \sqrt{\mathcal{N}}\,|\mathcal{N}-1\rangle$.

2. Rigoureusement $|i, \mathcal{N}\rangle \equiv |i\rangle \otimes |\mathcal{N}\rangle$, produit tensoriel des vecteurs de chaque espace de Hilbert.

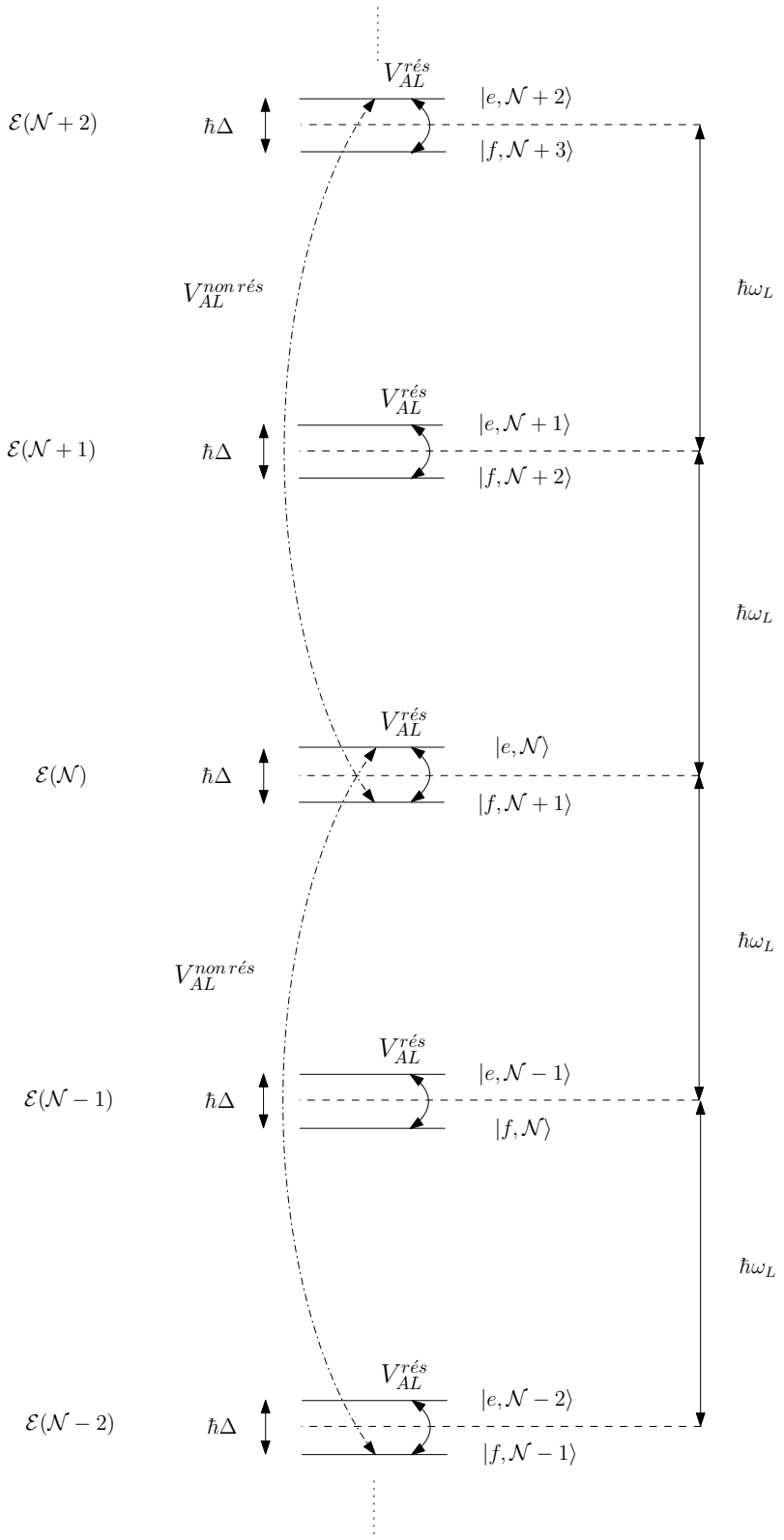


FIGURE 1.2 – Structure énergétique du sous-système $A+L$ et représentation des couplages entre l'atome et le champ laser (dans le cas $\Delta < 0$).

où $\vec{d}$ est l'opérateur moment dipolaire de la transition f-e et $\vec{E}$ est l'opérateur associé au champ électrique. La seconde quantification mène à l'expression suivante pour cet opérateur :

$$\vec{E} = \vec{E}_L(a + a^\dagger) \tag{1.8}$$

avec $\vec{E}_L$ est le champ électrique associé à un photon. L'opérateur moment dipolaire traduit la possibilité que le système atomique a de changer d'état, d'où :

$$\vec{d} = \vec{d}_{ef}(S_+ + S_-) \tag{1.9}$$

où $\vec{d}_{ef}$ est le moment dipolaire de la transition f-e et

$$S_+ = |e\rangle\langle f| \tag{1.10a}$$
$$S_- = |f\rangle\langle e| \tag{1.10b}$$

L'expression du couplage V_{AL} est donc :

$$V_{AL} = -\vec{d}_{ef}.\vec{E}_L(S_+ + S_-)(a + a^\dagger) \tag{1.11a}$$
$$= -\vec{d}_{ef}.\vec{E}_L\left[\left(S_+a + S_-a^\dagger\right) + \left(S_+a^\dagger + S_-a\right)\right] \tag{1.11b}$$
$$= V_{AL}^{rés} + V_{AL}^{non\,rés} \tag{1.11c}$$

où $V_{AL}^{rés}$ et $V_{AL}^{non\,rés}$ sont les termes résonnants et non résonnants du couplage. Les deux contributions de $V_{AL}^{non\,rés}$ sont

$$S_+a^\dagger|f, \mathcal{N}+1\rangle = S_+|f\rangle \otimes a^\dagger|\mathcal{N}+1\rangle \tag{1.12a}$$
$$= \sqrt{\mathcal{N}+2}\,|e, \mathcal{N}+2\rangle \tag{1.12b}$$

et

$$S_-a|e, \mathcal{N}\rangle = S_-|e\rangle \otimes a|\mathcal{N}\rangle \tag{1.13a}$$
$$= \sqrt{\mathcal{N}}\,|f, \mathcal{N}-1\rangle \tag{1.13b}$$

Le terme $V_{AL}^{non\,rés}$ couple des états appartenant à des multiplicités distantes de $2\hbar\omega_L$, comme représenté sur la figure 1.2. Il sera donc négligé. Le couplage devient :

$$V_{AL} \simeq V_{AL}^{rés} = -\vec{d}_{ef}.\vec{E}_L\left(S_-a^\dagger + S_+a\right) \tag{1.14}$$

En analysant l'équation 1.14, nous remarquons que le premier terme du second membre décrit l'émission stimulée d'un photon dans le mode laser (l'atome passe de $|e\rangle$ à $|f\rangle$ et

le champ gagne un photon), alors que le deuxième terme correspond à l'absorption d'un photon (l'atome passe de $|f\rangle$ à $|e\rangle$ et le champ perd un photon). Ce terme de couplage ne relie que les états d'une même multiplicité. Nous considérons un champ suffisamment intense, c'est-à-dire dont le nombre moyen de photons $\langle\mathcal{N}\rangle$ est très grand ($\langle\mathcal{N}\rangle \gg 1$). De plus, nous supposons que la largeur de la distribution du nombre de photons $\Delta\mathcal{N}$ dans le mode laser est également grande en valeur absolue mais faible comparée au nombre total de photons : $\dfrac{\Delta\mathcal{N}}{\langle\mathcal{N}\rangle} \ll 1$. Ces hypothèses nous permettent de considérer que la fréquence de Rabi Ω associée à la transition f-e[3] est la même pour toutes les multiplicités que nous allons considérer. L'énergie qui correspond à ce couplage résonnant s'écrit donc :

$$\langle f, \mathcal{N}+1 \,|V_{AL}|\, e, \mathcal{N}\rangle = \langle e, \mathcal{N} \,|V_{AL}|\, f, \mathcal{N}+1\rangle = \frac{\hbar\Omega}{2} \tag{1.15}$$

Le couplage V_{AL} introduit des éléments non-diagonaux dans l'hamiltonien. La base des états $|i, \mathcal{N}\rangle$ n'est donc pas la base propre de l'hamiltonien du système {atome + champ}.

1.1.2 système {atome + champ} dans la base des états habillés

Il est habituel en mécanique quantique de travailler dans la base des états propres de l'hamiltonien. Or, nous venons de montrer que la base des états non couplés ne satisfaisait pas cette condition. Nous allons donc diagonaliser l'hamiltonien dans chaque multiplicité. Il est très simple de montrer que la différence des énergies propres pour la multiplicité $\mathcal{E}(\mathcal{N})$ est :

$$\hbar\Omega_G = \hbar\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} \tag{1.16}$$

où Ω_G est la fréquence de Rabi généralisée. Les états propres correspondants pour la multiplicité $\mathcal{E}(\mathcal{N})$, notés $|1, \mathcal{N}\rangle$ et $|2, \mathcal{N}\rangle$ (appelés états habillés), peuvent être exprimés comme la combinaison linéaire suivante des états non couplés :

$$|1, \mathcal{N}\rangle = \sin\theta\,|f, \mathcal{N}+1\rangle + \cos\theta\,|e, \mathcal{N}\rangle \tag{1.17a}$$
$$|2, \mathcal{N}\rangle = \cos\theta\,|f, \mathcal{N}+1\rangle - \sin\theta\,|e, \mathcal{N}\rangle \tag{1.17b}$$

Le paramètre θ est défini par la relation $\tan(2\theta) = -\Omega/\Delta$. Sur la figure 1.3, est représentée

3. Nous introduisons cette fréquence par sa définition traditionnelle $\hbar\Omega = 2\left\|\vec{d}.\vec{E_L}\right\|\sqrt{\langle\mathcal{N}\rangle}$, où $\vec{E_L}\sqrt{\langle\mathcal{N}\rangle}$ est l'amplitude du champ classique associé.

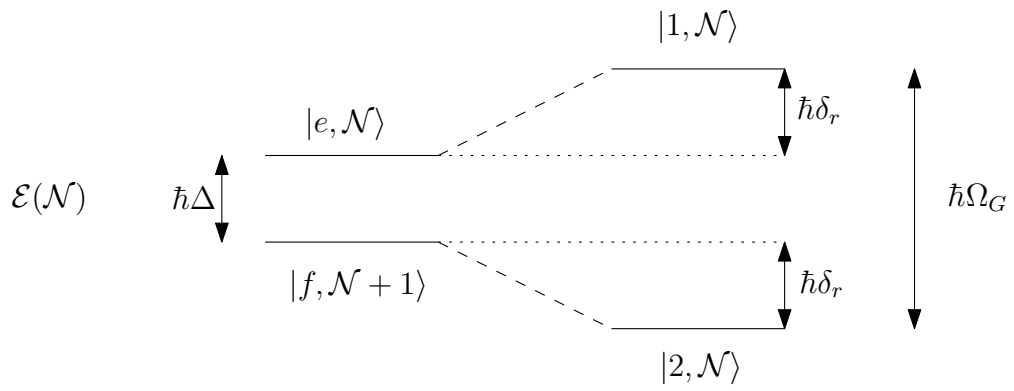


FIGURE 1.3 – Modification des niveaux d'énergie des états propres de l'hamiltonien par le couplage V_{AL} pour les états de la multiplicité $\mathcal{E}(\mathcal{N})$.

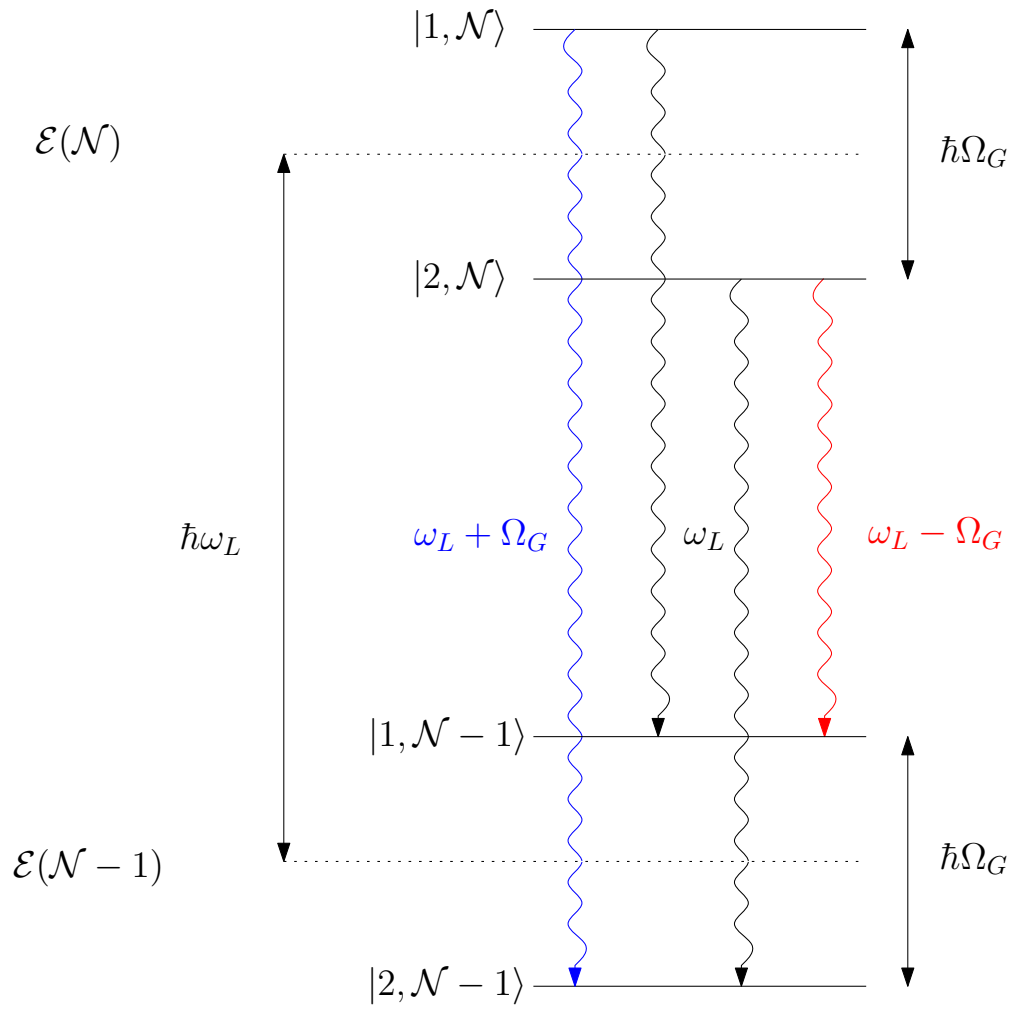


FIGURE 1.4 – Transitions radiatives permises par le couplage V_{AV} entre les états des multiplicités $\mathcal{E}(\mathcal{N})$ et $\mathcal{E}(\mathcal{N}-1)$. Deux d'entre elles (flèches noires) possèdent la même fréquence $\omega = \omega_L$. Il existe deux bandes latérales de fréquence plus élevée (bleue) $\omega = \omega_L + \Omega_G$ et plus faible (rouge) $\omega = \omega_L - \Omega_G$.

l'influence du couplage sur les niveaux d'énergie. On remarque que ces niveaux sont décalés d'une énergie δ_r, souvent appelée le déplacement lumineux. Il est égal à :

$$\delta_r = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} - |\Delta|\right) \tag{1.18}$$

En résumé, la diagonalisation de l'hamiltonien du sous-système {atome + champ} conduit à une infinité d'états propres, appelés états habillés. Ils se regroupent par paires ayant une énergie proche. Chaque paire est isolée des autres car la différence d'énergie entre chaque paire est très grande par rapport à celle au sein d'une même multiplicité. L'écart entre les deux états d'une même multiplicité dépend de l'intensité et de la fréquence du champ laser. Les phénomènes d'absorption et d'émission stimulée sont contenus dans cette description.

À ce stade du développement, il est possible de considérer qualitativement l'effet du couplage V_{AV}. En effet, le processus d'émission spontanée se traduit par une désexcitation de l'atome mais sans gain de photon pour le mode de champ. Une transition entre l'état $|e, \mathcal{N}\rangle$ de $\mathcal{E}(\mathcal{N})$ vers l'état $|f, \mathcal{N}\rangle$ de $\mathcal{E}(\mathcal{N}-1)$ est rendue possible. La prise en compte des modes vides du champ va engendrer un couplage entre états habillés de multiplicités différentes. Un tel schéma fait apparaître quatre transitions représentées sur la figure 1.4, puisque $|e, \mathcal{N}\rangle$ et $|f, \mathcal{N}\rangle$ apparaissent respectivement dans $\left|\frac{1}{2}, \mathcal{N}\right\rangle$ et $\left|\frac{1}{2}, \mathcal{N}-1\right\rangle$. Cependant, les transitions entre niveaux de même état i ont une fréquence identique. Il s'agit du triplet de Mollow [Mollow1969] qui sera déterminé par le calcul dans la suite.

1.2 Équation pilote pour la matrice densité

Après avoir posé les bases du formalisme, nous allons étudier l'évolution du système global $A + L + V$ pour en tirer des informations quantitatives. Nous allons notamment prendre en compte l'effet des modes vides. Bien que considérant le champ comme partie intégrante du système étudié, il ne faut pas perdre de vue que notre intérêt se porte sur l'état de l'atome. Pour ce type de description, il est utile d'introduire l'opérateur densité σ qui permet de déterminer les populations des différents niveaux d'énergie, termes diagonaux de la matrice densité. Les éléments non-diagonaux sont appelés cohérences.

1.2.1 équation d'évolution

L'équation d'évolution de l'opérateur densité pour le système global peut être écrit comme :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left[H_{AL}, \sigma\right] - \frac{\Gamma}{2}\left(S_+ S_- \sigma + \sigma S_+ S_- - 2 S_- \sigma S_+\right) \tag{1.19}$$

où $H_{AL} = H_A + H_L + V_{AL}$ est l'hamiltonien du sous-système {atome + champ} traité dans la section précédente, Γ est la largeur naturelle de la transition *f-e* et $[H_{AL}, \sigma]$ est le commutateur des matrices H_{AL} et σ [4]. Le premier terme du second membre de l'équation 1.19 prend en compte les processus d'absorption et d'émission induite, puisqu'ils sont présents dans H_{AL}. Cet hamiltonien est diagonal dans la base des états habillés. Les autres opérateurs changent l'état de la particule uniquement. Ils sont donc diagonaux dans la base des états non couplés. Les trois derniers termes de relaxation caractérisent l'émission spontanée. Ainsi l'opérateur $\partial\sigma/\partial t$ n'est diagonal dans aucune des bases utilisées. Toutefois, nous choisissons de travailler dans la base des états habillés car le calcul ne présente aucune difficulté dans la limite séculaire :

$$\Omega_G \gg \Gamma \tag{1.20}$$

Cette condition permet de négliger les couplages non-séculaires entre populations et cohérences, c'est-à-dire évoluant à une fréquence Ω_G par rapport aux populations. Nous aboutissons ainsi à deux paires d'équations différentielles couplées : l'une pour les populations et l'autre pour les cohérences. Ces équations sont équivalentes aux équations de Bloch optiques, résultant d'une approche semi-classique.

1.2.2 évolution des populations

La première paire d'équations concerne les populations [5]. Elle s'interprète très simplement en terme de transfert :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1(\mathcal{N})}{\partial t} = & \Gamma_{1\to1}\,\pi_1(\mathcal{N}+1) + \Gamma_{2\to1}\,\pi_2(\mathcal{N}+1) - (\Gamma_{1\to1} + \Gamma_{1\to2})\;\pi_1(\mathcal{N}) \\ \\ \dfrac{\partial \pi_2(\mathcal{N})}{\partial t} = & \Gamma_{2\to2}\,\pi_2(\mathcal{N}+1) + \Gamma_{1\to2}\,\pi_1(\mathcal{N}+1) - (\Gamma_{2\to2} + \Gamma_{2\to1})\;\pi_2(\mathcal{N}) \end{cases} \tag{1.21}$$

Nous avons introduit des coefficients $\Gamma_{i\to j}$ qui représentent des taux de transfert de population entre états habillés.

$$\Gamma_{i\to j} = \Gamma\,|\langle j, \mathcal{N}|\,S_-\,|i, \mathcal{N}+1\rangle|^2 \tag{1.22}$$

4. $[H_{AL}, \sigma] = H_{AL}\sigma - \sigma H_{AL}$
5. $\sigma_{ij}(\mathcal{N}) = \langle i, \mathcal{N}\,|\sigma|\,j, \mathcal{N}\rangle$ et, plus simplement, $\pi_i(\mathcal{N}) = \sigma_{ii}(\mathcal{N})$

À partir des définitions des états habillés (équations 1.17), nous pouvons déduire les expressions des différents taux :

$$\Gamma_{1\to1} = \Gamma_{2\to2} = \Gamma \cos^2\theta \sin^2\theta \tag{1.23a}$$
$$\Gamma_{1\to2} = \Gamma \cos^4\theta \tag{1.23b}$$
$$\Gamma_{2\to1} = \Gamma \sin^4\theta \tag{1.23c}$$

Comme nous l'avons déjà évoqué, notre intérêt se porte sur l'état du système atomique. Il convient donc de sommer les contributions de chaque multiplicité. Nous noterons $\pi_i = \sum_{\mathcal{N}} \pi_i(\mathcal{N})$. Le système d'équations 1.21 peut ainsi être réécrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial t} = & \Gamma_{2\to1}\,\pi_2 - \Gamma_{1\to2}\,\pi_1 \\ \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial t} = & \Gamma_{1\to2}\,\pi_1 - \Gamma_{2\to1}\,\pi_2 \end{cases} \tag{1.24}$$

La solution stationnaire de ce système est simple à déterminer. Nous obtenons pour chaque population π_i^{st}, les expressions suivantes :

$$\pi_1^{st} = \frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \tag{1.25a}$$
$$\pi_2^{st} = \frac{\cos^4\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \tag{1.25b}$$

Il est également simple de constater que le régime transitoire est une évolution exponentielle des populations initiales vers les populations stationnaires. L'inverse de la constante de temps associée est :

$$\Gamma_{pop} = \Gamma_{1\to2} + \Gamma_{2\to1} = \Gamma\left(1 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta\right) \tag{1.26}$$

1.2.3 évolution des cohérences

La deuxième paire d'équations provenant de l'équation pilote décrit l'évolution des cohérences. Celle-ci se réduit à une seule équation car les deux cohérences sont complexes conjuguées l'une de l'autre. En sommant toutes les multiplicités, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = -\left(i\Omega_G + \Gamma_{coh}\right)\sigma_{12} \tag{1.27}$$

avec

$$\Gamma_{coh} = \frac{\Gamma}{2}\left(1 + 2\cos^2\theta\sin^2\theta\right) \tag{1.28}$$

La cohérence tend vers zéro pour des temps longs avec une oscillation amortie. La fréquence d'oscillation est la fréquence de Rabi généralisée et le taux d'amortissement est donné par Γ_{coh}.

1.3 Spectres d'absorption et d'émission du système

1.3.1 spectre d'émission

Dans la section 1.1, nous avons vu que l'émission spontanée fait interagir les niveaux non couplés $|e,\mathcal{N}\rangle$ et $|f,\mathcal{N}\rangle$ qui appartiennent à des multiplicités différentes. D'après la définition des états habillés (équations 1.17), nous constatons que des transitions entre les quatre niveaux habillés sont possibles. En effet, $|e,\mathcal{N}\rangle$ est contenu à la fois dans $|1,\mathcal{N}\rangle$ et $|2,\mathcal{N}\rangle$ alors que $|f,\mathcal{N}\rangle$ est présent dans $|1,\mathcal{N}-1\rangle$ et $|2,\mathcal{N}-1\rangle$. Il existe donc trois composantes au spectre d'émission car deux des quatre transitions ont la même fréquence [6]. Ce spectre est composé d'une première raie centrée en ω_L, d'une bande latérale sur le « rouge » centrée en $\omega_L - \Omega_G$ et d'une bande latérale sur le « bleu » centrée en $\omega_L + \Omega_G$. Dans le cadre de l'approximation séculaire (1.20), les bandes latérales sont bien résolues puisque leur largeur Γ_{coh} est petite devant la séparation Ω_G avec la raie centrale. Nous retrouvons le triplet de Mollow [Mollow1969].

Il est possible de déterminer la structure $S(\omega)$ de ce spectre [7] [Cohen-Tannoudji1988] :

$$\begin{aligned} S(\omega) \;=\; & \frac{\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)^2}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}\,\delta\left(\omega - \omega_L\right) \\ & + \frac{\left(2\cos^2\theta\sin^2\theta\right)^2}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}\,L\left(\omega - \omega_L, \Gamma_{pop}\right) \\ & + \cos^2\theta\sin^2\theta\; L\left(\omega - \omega_L + \Omega_G, \Gamma_{coh}\right) \\ & + \cos^2\theta\sin^2\theta\; L\left(\omega - \omega_L - \Omega_G, \Gamma_{coh}\right) \end{aligned} \tag{1.29}$$

où $\delta(\omega)$ est la distribution de Dirac et $L(\omega,\Gamma)$ est une lorentzienne d'aire normalisée, soit :

$$L(\omega,\Gamma) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \tag{1.30}$$

6. Pour rappel, nous avons supposé que $\mathcal{N} \gg 1$. Ainsi, nous pouvons utiliser la définition des états habillés et des opérateurs de transition dipolaire. L'expression de ces derniers est indépendante de $\mathcal{N}$.

7. La condition de normalisation suivante a été utilisée : $\int S(\omega)\,d\omega = 1$.

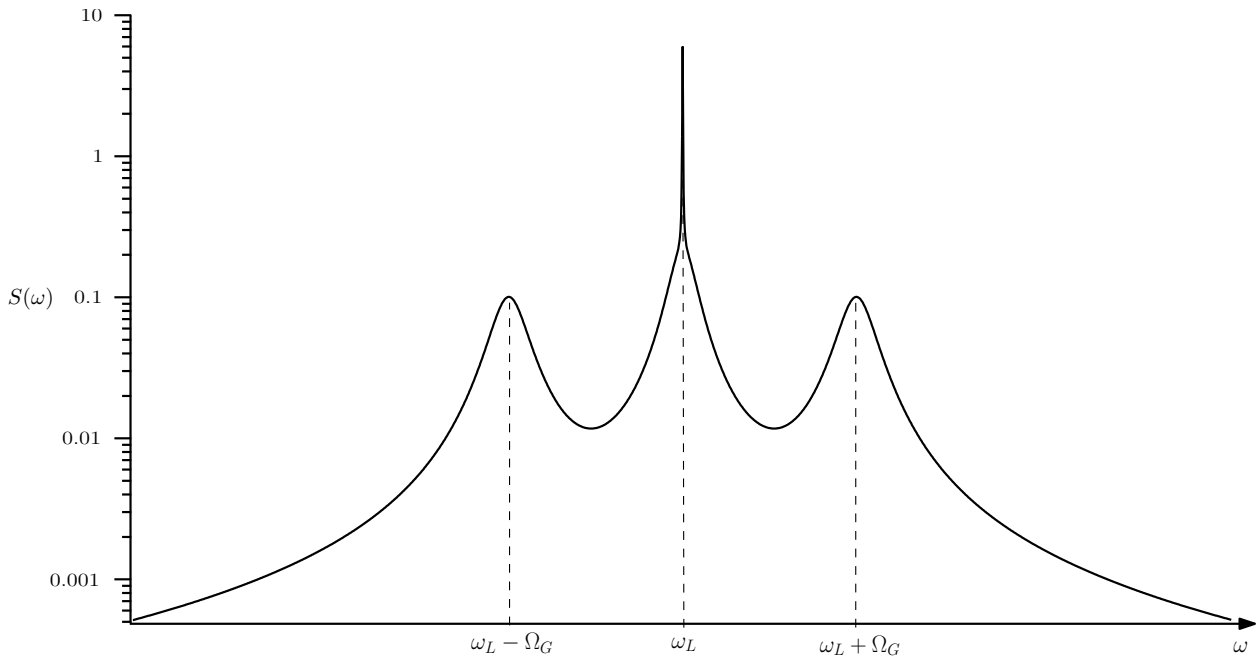


FIGURE 1.5 – Triplet de Mollow : spectre d'émission (échelle logarithmique) d'un atome irradié par une onde intense de pulsation ω_L. La courbe est obtenue avec $\Delta = -2\Gamma$ et $\Omega = 6\Gamma$.

Ce spectre est représenté sur la figure 1.5. Nous retrouvons bien deux composantes centrées en ω_L et deux bandes latérales de même poids. Nous notons tout de même une différence entre les deux termes centraux puisque l'un est élastique (pas d'élargissement) alors que le second est inélastique.

Pour faire un lien avec des résultats connus, évaluons la limite des faibles intensités. L'angle θ a été défini par la relation : $\tan(2\theta) = -\Omega/\Delta$. Si Ω devient faible devant $|\Delta|$, cela revient à considérer la limite $\theta = 0$ (ou $\pi/2$). Les bandes latérales disparaissent, ainsi que la composante inélastique. Le spectre est réduit à l'émission d'un photon de fréquence ω_L.

1.3.2 spectre d'absorption

Nous étudions la façon dont un rayonnement de très faible intensité (petit par rapport à l'intensité de saturation) et de pulsation ω est absorbé par le système décrit précédemment. Nous considérons qu'il ne va pas modifier les populations d'équilibre du système car il a une intensité négligeable devant les champs utilisés pour habiller le système atomique. Les transitions mises en jeu sont bien évidemment les mêmes que dans l'étude du spectre

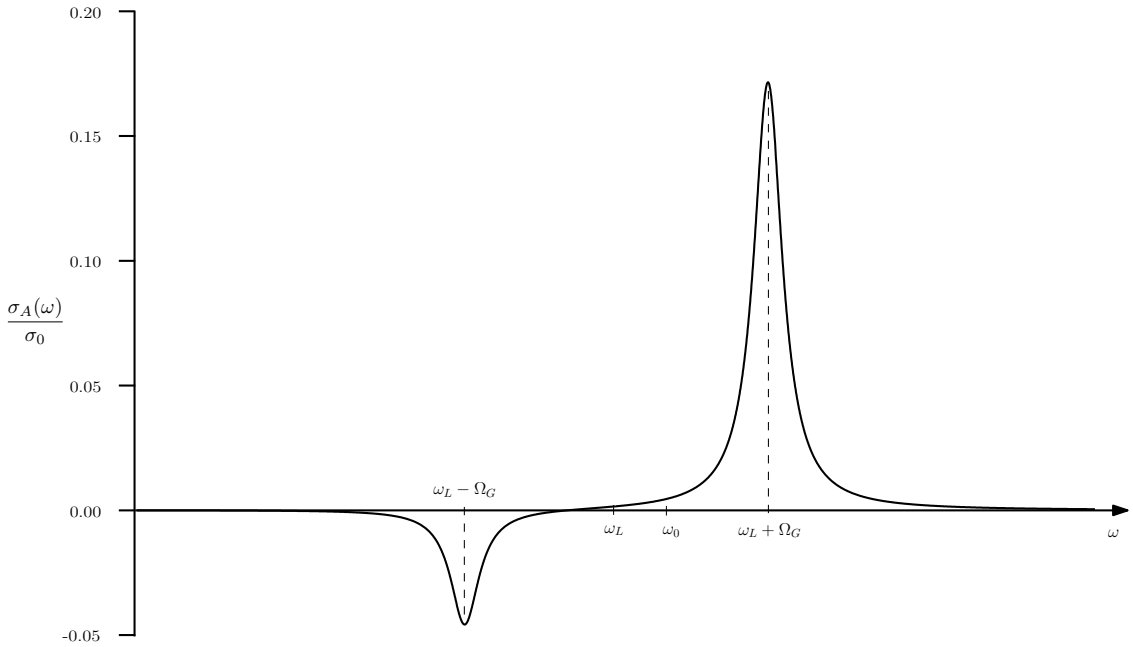


FIGURE 1.6 – Doublet d'absorption d'un atome en présence d'une onde intense de pulsation ω_L. La courbe est obtenue pour les mêmes valeurs de paramètres que pour le triplet de Mollow, soit : $\Delta = -2\Gamma$ et $\Omega = 6\Gamma$.

d'émission. Cependant le spectre d'absorption ne compte pas autant d'éléments. En effet, les équations 1.21 n'introduisent pas de différence entre les populations de chaque multiplicité, car $\mathcal{N}$ est supposé très grand devant 1. Nous pouvons donc supposer raisonnablement que les états $|i, \mathcal{N}\rangle$ sont identiquement peuplés pour tout $\mathcal{N}$. Par conséquent, le spectre ne possède pas de composantes centrales puisque ces transitions se feraient entre des niveaux de même population. Il est possible de montrer que l'une des autres transitions est absorbante alors que pour l'autre, le processus d'émission induite est majoritaire. Tout ceci conduit au spectre suivant [Grove1977, Wu1977] :

$$\sigma_A(\omega) = \sigma_0 \frac{\pi\Gamma}{2} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \left\{ \cos^4\theta \, L(\omega - \omega_L - \Omega_G, \Gamma_{coh}) - \sin^4\theta \, L(\omega - \omega_L + \Omega_G, \Gamma_{coh}) \right\} \tag{1.31}$$

$\sigma_0 = \dfrac{3\lambda^2}{2\pi}$ est la section efficace d'absorption à résonance du système à deux niveaux faiblement irradié. Ce spectre est représenté sur la figure 1.6.

Nous pouvons remarquer que la raie d'émission induite a un poids plus faible que la raie d'absorption. De même que précédemment, étudions la limite des faibles intensités ($\theta = 0$

ou $\pi/2$). L'expression du spectre 1.31 se simplifie énormément : le terme d'émission induite disparaît. Comme Ω_G diminue, la raie absorbante se rapproche de $\omega = \omega_0$. L'absorption d'un photon de pulsation ω devient :

$$\sigma_A(\omega) = \sigma_0 \frac{\Gamma^2}{4\left(\omega - \omega_0\right)^2 + \Gamma^2} \tag{1.32}$$

Cette expression est bien connue comme décrivant l'absorption par un atome d'un champ quasi-résonnant.

Conclusion

Revenons sur les points importants de ce chapitre, notamment ceux que nous allons réutiliser par la suite. La prise en compte du couplage entre l'atome et le champ quantique nous a permis de définir la base des états habillés. Il ne s'agit pas de la base propre du système total mais elle permet d'obtenir des résultats aisément dans le cadre de l'approximation séculaire. Les énergies des états habillés mettent en évidence la notion de déplacement lumineux des niveaux d'énergie, qui dépend à la fois de l'intensité du champ laser et de sa fréquence. Nous avons également donné l'expression des populations de chaque état.

La structure des spectres d'émission et d'absorption du système a été déterminée. Le spectre d'émission fait apparaître quatre composantes (dont deux ont la même fréquence), il s'agit du triplet de Mollow. Le spectre d'absorption est lui constitué de deux raies de part et d'autre de la fréquence du laser.

Chapitre 2

Modélisation du PMO anisotrope

Les premiers travaux portant sur la dynamique du nuage d'atomes froids [Wilkowski2000, diStefano2004, Labeyrie2006] ont montré que celui-ci pouvait présenter différents types de comportements non triviaux au cours du temps. Cependant, ces travaux n'ont pas abouti à une modélisation satisfaisante des phénomènes observés. Une des raisons est sans nul doute la grande difficulté d'écrire une théorie rendant compte du caractère tridimensionnel du système.

Nous proposons d'avoir un raisonnement inverse, c'est-à-dire plutôt que de décrire théoriquement une situation expérimentale à trois dimensions, nous souhaitons trouver une configuration unidimensionnelle du piège plus simple à modéliser. Ce raisonnement est souvent rencontré en physique. Nous pouvons citer un exemple en hydrodynamique. Dans certaines conditions, l'écoulement unidimensionnel d'un fluide peut être perturbé par des mouvements dans une direction transverse liés à la convection. Le nombre de Rayleigh est utilisé pour prédire l'apparition de ce phénomène. Ces mouvements peuvent être évités en réduisant la taille du système en dessous de celle des cellules de convection, dont la taille intervient dans le calcul du nombre de Rayleigh. Cependant, aucune étude n'a mis en évidence l'existence d'une telle taille caractéristique dans les nuages d'atomes froids. Il semble donc difficile de travailler avec un système dynamique strictement 1D.

Une autre possibilité est de trouver un moyen de limiter expérimentalement le développement des instabilités dans une seule direction de l'espace. Par conséquent, ce système est bien à trois dimensions mais les instabilités n'existeraient que dans une seule. Des travaux ont montré que la dynamique du nuage dépend d'un ensemble de *paramètres de contrôle* [Hennequin2004, diStefano2004, Labeyrie2006]. Ces paramètres sont principalement : l'intensité, la fréquence et la taille des faisceaux lasers, la pression du gaz résiduel ou encore le gradient du champ magnétique. L'ensemble des valeurs de ces paramètres désigne un *point de fonctionnement*. Afin de réduire le nombre de dimensions dans lesquelles les instabilités

peuvent se développer, nous allons utiliser des valeurs différentes des paramètres de contrôle dans chaque direction de l'espace. Nous obtenons ainsi une configuration du piège que nous qualifierons de PMO *anisotrope*. En réalité, nous n'introduisons pas l'anisotropie mais nous l'amplifions. En effet, le PMO traditionnel présente déjà une anisotropie par l'intermédiaire de son champ magnétique quadrupolaire. La nature de la nouvelle anisotropie est différente car elle est introduite sur l'intensité et la fréquence des lasers, et uniquement sur ces paramètres.

Dans un premier temps, nous allons développer un formalisme général du PMO, dans le but de décrire l'ensemble des configurations possibles. Puis nous pourrons étudier plus particulièrement le cas du piège anisotrope ; pour cela il suffira de réécrire les équations générales pour cette configuration spécifique. Ce travail de modélisation passe également par la détermination des grandeurs caractéristiques du PMO qui sont : la raideur et les sections efficaces d'absorption et de réabsorption. Nous verrons également que de nombreuses conclusions sur cette configuration peuvent être appliquées au PMO traditionnel.

2.1 Modélisation des processus de piégeage

2.1.1 différentes configurations pour le PMO

Les ingrédients de base d'un PMO sont un champ magnétique inhomogène et trois paires de faisceaux lasers, une dans chaque direction de l'espace. Un expérimentateur jouit d'une relative liberté dans le choix des caractéristiques de ces six faisceaux lasers. Dans une certaine limite, il n'est pas dans l'obligation de choisir des paramètres identiques pour les six faisceaux dans le but de refroidir efficacement des atomes.

Revenons un instant sur la validité de ces propos, en précisant ce que signifie cette « relative liberté » et pour quelle « limite » cela est vrai. Les faisceaux lasers doivent tout de même satisfaire à des conditions de piégeage pour former un nuage d'atomes froids : désaccord négatif et de faible valeur (typiquement $-10\Gamma < \Delta < 0$), intensité non nulle et raisonnablement équilibrée selon les bras, ... Nous pouvons cependant citer des situations où ces conditions ne sont pas validées, par exemple lorsque le PMO est constitué d'une double cellule [Myatt1996, Swanson1998]. Le nuage formé dans la première cellule est déplacé vers la seconde pour diminuer les interactions avec le gaz environnant. D'autre part, un nuage peut être projeté vers le haut pour étudier sa trajectoire (ex : fontaine atomique). Dans ce cas, la pression de radiation est augmentée dans la direction verticale, on parle de *faisceau pousseur* [Kasevich1989]. Mais ce problème est autre que celui qui nous intéresse.

Les paramètres de contrôle relatifs aux faisceaux lasers qui seront utilisés sont pour la direction i : les intensités incidentes $I_{0\pm i}$ (les signes identifient le sens de propagation de chaque onde) et le désaccord Δ_i. L'ensemble de ces paramètres sera résumé par la grandeur

ξ_i [1]. Nous pouvons définir plusieurs configurations pour le PMO en fonction des valeurs des paramètres des faisceaux lasers et de la façon dont le piège est formé. L'*isotropie* du PMO qualifiera le fait de choisir des ξ_i identiques ou non pour chaque direction. D'autre part, indépendamment des caractéristiques des faisceaux lasers, il existe deux façons de construire un PMO : une configuration avec six faisceaux indépendants et une autre pour laquelle chaque paire est créée par la rétro-réflexion d'un faisceau incident. Dans ce cas, nous parlerons de la *symétrie* du piège. Une configuration est donc caractérisée par ces deux propriétés. Afin de définir la terminologie qui sera utilisée dans la suite, les différentes configurations possibles sont représentées dans le tableau 2.1.

	6 faisceaux indépendants avec $I_{0+} = I_{0-}$	6 faisceaux indépendants avec $I_{0+} \neq I_{0-}$	3 faisceaux rétro-réfléchis
$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$	symétrique équilibrée isotrope	symétrique déséquilibrée isotrope	asymétrique isotrope
$\xi_1 = \xi_2 \neq \xi_3$	symétrique équilibrée anisotrope dégénérée	symétrique déséquilibrée anisotrope dégénérée	asymétrique anisotrope dégénérée
$\xi_1 \neq \xi_2 \neq \xi_3$	symétrique équilibrée anisotrope non-dégénérée	symétrique déséquilibrée anisotrope non-dégénérée	asymétrique anisotrope non-dégénérée

TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif des différentes configurations d'un PMO.

Il existe deux configurations pour lesquelles les intensités incidentes de part et d'autre du nuage sont différentes. Le cas déséquilibré à six faisceaux indépendants est créé par un choix de valeurs différentes pour I_{0+} et I_{0-}. Alors que le cas avec des faisceaux rétro-réfléchis est déséquilibré par nature car seule une des intensités $I_{0\pm}$ est un paramètre, l'autre est une variable du système dépendant notamment du nombre d'atomes piégés.

Les configurations communément utilisées sont les PMOs symétrique équilibré isotrope et asymétrique isotrope. Par souci de généralité, nous utiliserons d'abord un formalisme décrivant un piège quelconque dans le but de pouvoir tirer des conclusions pour toutes les configurations du PMO.

1. $\xi_i = \{I_{0+i}, I_{0-i}, \Delta_i\}$

2.1.2 expression générale des forces

Nous considérons un espace à trois dimensions muni d'un repère $\{Ox,Oy,Oz\}$ défini par les axes orthogonaux des faisceaux lasers. Par convention, l'axe Oz sera choisi selon l'axe des bobines. L'origine du piège est défini comme le point de l'espace où le champ magnétique est nul et où les axes des trois paires de faisceaux se croisent. Dans un cas général, nous supposerons que le nuage n'est pas centré sur l'origine du piège mais en un point quelconque de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Introduire ce déplacement permet de traiter les configurations asymétriques et déséquilibrées du piège.

Avant d'expliciter les forces exercées sur les atomes, il semble judicieux de décrire l'évolution de l'intensité lumineuse des lasers dans le nuage. En effet, dans le régime de diffusion multiple, les effets collectifs prennent des proportions importantes à cause de la densité atomique élevée. L'absorption doit donc être prise en compte.

propagation des faisceaux

L'absorption des faisceaux laser est modélisée par σ_L, la section efficace d'absorption d'un photon laser. Dans une direction donnée (ici z), l'évolution de l'intensité des faisceaux est la suivante :

$$\frac{dI_{\pm z}}{dz} = \pm\sigma_L \, n \, I_{\pm z} \tag{2.1}$$

où n est la densité atomique dans le nuage, I_- est l'intensité lumineuse du faisceau se propageant dans le sens des positions croissantes et I_+ dans le sens opposé (voir figure 2.1). Comme nous le verrons dans la suite, les forces ne dépendent pas de ces intensités individuelles mais plutôt de leur somme i_+ et de leur différence i_- [2]. Pour ces grandeurs, les équations précédentes deviennent :

$$\frac{di_{\pm z}}{dz} = \sigma_L \, n \, i_{\mp z} \tag{2.2}$$

expressions des forces

Le premier effet intervenant dans le refroidissement est lié à la pression de radiation : il s'agit de la force engendrée par l'absorption d'un photon. Pour donner une expression mathématique à cette force, il faut définir la structure atomique que nous allons utiliser pour modéliser l'espèce refroidie. Ce point sera abordé par la suite. Admettons pour le moment que la composante dans la direction i de cette force puisse être exprimée comme la somme

2. $i_+(z) = I_+(z) + I_-(z)$ et $i_-(z) = I_+(z) - I_-(z)$

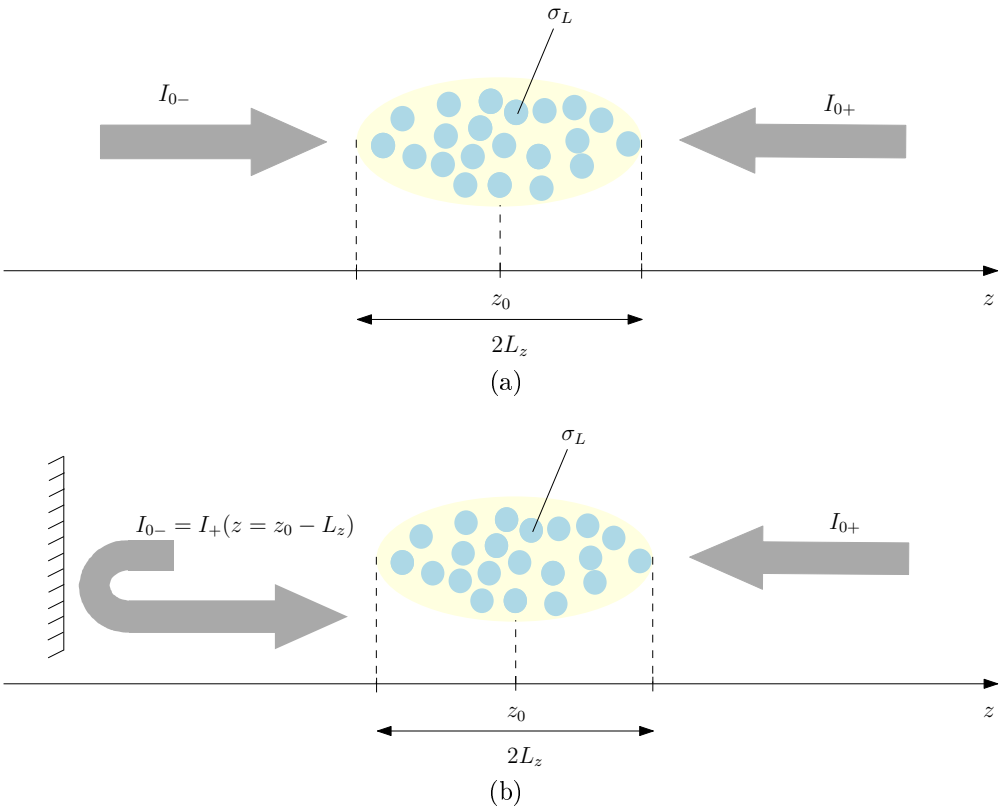


FIGURE 2.1 – Représentation des deux configurations de symétrie du PMO : (a) piège symétrique (équilibré si $I_{0+} = I_{0-}$ et déséquilibré sinon) et (b) piège asymétrique.

d'un terme de rappel κ_i et d'un autre décrivant la friction α_i. La force de piégeage s'exprime donc ainsi :

$$\vec{F}_{PMO} = - \left| \begin{array}{l} \kappa_x x + \alpha_x v_x \\ \kappa_y y + \alpha_y v_y \\ \kappa_z z + \alpha_z v_z \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Cette force est la seule à agir quand le nombre d'atomes est faible. On parle en général de *régime thermique* [Townsend1995]. Cependant, quand le nombre d'atomes piégés augmente, d'autres phénomènes apparaissent : il s'agit du *régime de diffusion multiple*.

L'effet d'ombre décrit le fait que les deux ondes, qui exercent une pression sur un atome dans des directions opposées, n'ont localement pas la même intensité à cause de l'absorption. C'est donc naturellement que la force correspondante s'écrit comme la différence entre le nombre $\mathcal{N}_\pm$ de photons absorbés de chaque faisceau de la direction concernée [Dalibard1988].

Ainsi, la forme de chaque composante de cette force est la suivante :

$$
\begin{aligned}
F_{ombre} &= \hbar k_L \Gamma \left(\mathcal{N}_- - \mathcal{N}_+\right) && (2.4a)\\
&= \hbar k_L \Gamma \left(\frac{\sigma_L I_-}{\hbar \omega_L \Gamma} - \frac{\sigma_L I_+}{\hbar \omega_L \Gamma}\right) && (2.4b)\\
&= -\frac{\sigma_L}{c}\, i_- && (2.4c)
\end{aligned}
$$

Un photon laser est absorbé par un premier atome, la section efficace associée est σ_L. Le photon réémis peut être de nouveau absorbé par un atome froid, il s'agit du phénomène de diffusion multiple. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que le photon sorte du nuage. Nous supposerons que la section efficace de réabsorption σ_R est la même quelque soit le nombre de diffusions subies au préalable. Un exemple de séquence de diffusion multiple a été représenté sur la figure 2.2.

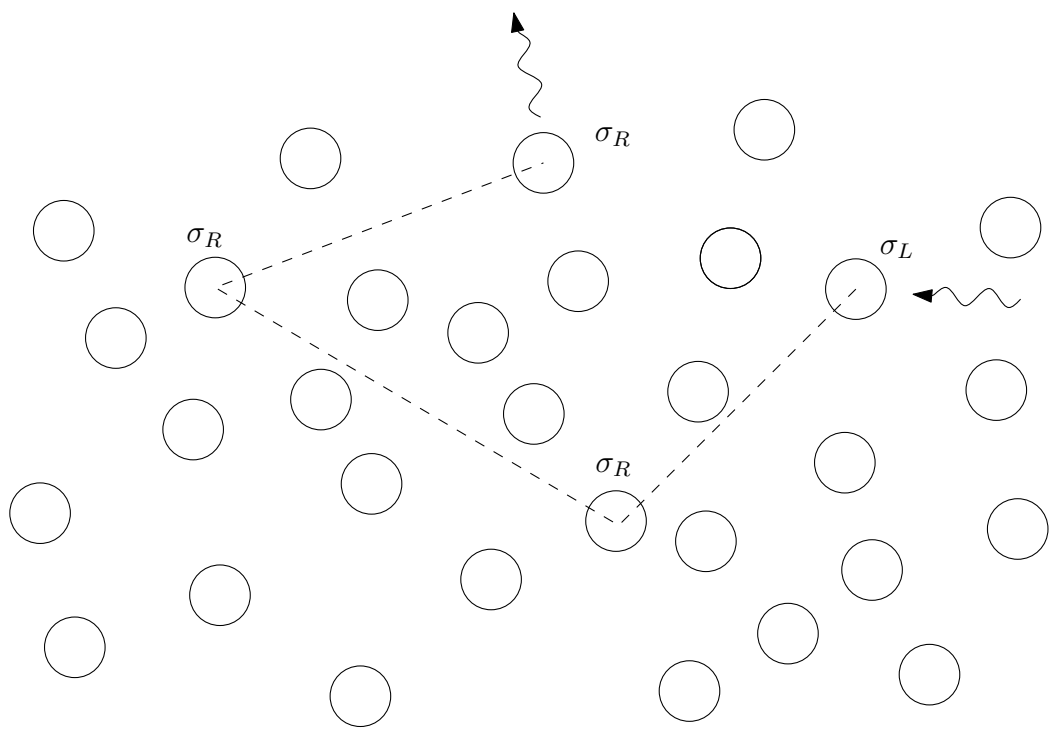


FIGURE 2.2 – Exemple de parcours d'un photon à travers un nuage atomique dans le régime de diffusion multiple. Le photon subit une première absorption, caractérisée par la section efficace σ_L. Les diffusions suivantes sont identifiées par σ_R.

La force f_{DM} entre deux atomes (distants de r) est proportionnelle au nombre de photons diffusés par unité de temps par le premier (atome A) qui seront absorbés par le second (atome B) :

$$f_{DM} = \hbar k_L \frac{\sigma_R}{4\pi r^2} \mathcal{N}_{diff} \exp(-\sigma_R n r) \tag{2.5}$$

$\mathcal{N}_{diff}$ est le nombre de photons diffusés par n'importe quel atome du nuage, le facteur $\exp(-\sigma_R n r)$ introduit une atténuation liée à la présence d'autres atomes entre A et B. La probabilité que l'atome B absorbe un des photons émis par A est $\sigma_R/4\pi r^2$.

Le nombre $\mathcal{N}_{diff}$ s'exprime comme la somme des photons absorbés dans le faisceau laser et des photons diffusés par les autres atomes. Une expression semblable à une relation de récurrence apparaît puisque le nombre de photons diffusés par A dépend du nombre de photons diffusés par les autres atomes :

$$\mathcal{N}_{diff} = \frac{\sigma_L I_0}{\hbar\omega_L} + \zeta \mathcal{N}_{diff} \tag{2.6a}$$

$$= \frac{\sigma_L I_0}{\hbar\omega_L} \frac{1}{1-\zeta} \tag{2.6b}$$

Le facteur de proportionnalité ζ tient compte de la probabilité pour que les photons diffusés par l'ensemble des atomes soit absorbés par l'atome B. Notre objectif est qualitatif : nous allons donc supposer que le nuage est une sphère de rayon R et de densité constante, et effectuer le calcul en plaçant B au centre. Le coefficient ζ est ainsi :

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_0^R \underbrace{dr\, 4\pi r^2\, n}_{nombre\, d'atomes\, à\, la\, distance\, r} \times \underbrace{\frac{\sigma_R}{4\pi r^2}}_{probabilité\, de\, réabsorption} \times \underbrace{\exp(-\sigma_R n r)}_{atténuation} \\ &= 1 - \exp(-\sigma_R n R) \end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{N}_{diff} = \frac{\sigma_L I_0}{\hbar\omega_L} \exp(R/\ell) \tag{2.8}$$

où ℓ est le *libre parcours moyen* d'un photon diffusé, défini comme $\sigma_R n \ell = 1$. Pour des valeurs typiques des expériences d'atomes froids ($\lambda = 1\,\mu\text{m}$, $\sigma_R = \sigma_0/50$, $n = 10^{10}\, atomes/cm^3$ et $R = 1\,\text{mm}$), nous trouvons $\ell \simeq 1\,\text{cm}$ et donc :

$$\mathcal{N}_{diff} = \frac{\sigma_L I_0}{\hbar\omega_L} \Big(\underbrace{1}_{issu\, du\, laser} + \underbrace{0,1}_{rediffusé\, une\, fois} + \underbrace{\ldots}_{rediffusé\, plus\, d'une\, fois} \Big) \tag{2.9}$$

Ce résultat montre que le nombre de photons diffusés par un atome a bien deux origines : l'absorption des lasers et la diffusion multiple. La proportion de photons diffusés plus d'une fois est d'environ 10%. Cependant, des hypothèses assez fortes ont été effectuées pour obtenir cette valeur, cela nous incite à penser qu'elle est probablement majorée. La contribution liée à la diffusion simple est donc majoritaire. En d'autres termes, nous considérerons qu'un photon n'est rediffusé qu'une seule fois avant de sortir du nuage, par conséquent :

$$\mathcal{N}_{diff} \simeq \frac{\sigma_L I_0}{\hbar\omega_L} \tag{2.10}$$

Nous pouvons revenir sur l'équation 2.5. En effet, nous venons de montrer que la prise en compte du facteur d'atténuation est inutile puisque la probabilité pour qu'un photon soit absorbé entre les atomes A et B est très faible. La force se simplifie :

$$f_{DM} = \hbar k_L \frac{\sigma_R}{4\pi r^2} \mathcal{N}_{diff} \tag{2.11}$$

Dans le cas où un seul faisceau laser est considéré, la force de diffusion multiple exercée par l'atome A sur l'atome B, peut donc se mettre sous la forme :

$$f_{DM}(r) = \frac{\sigma_R \sigma_L I_0}{c} \frac{1}{4\pi r^2} \tag{2.12}$$

La généralisation de cette équation pour une configuration tenant compte des trois paires de faisceaux nécessite un éclaircissement. En première approximation, l'émission spontanée est considérée comme isotrope : il n'y a donc pas de distinction entre les directions incidentes des photons diffusés. Toutefois, il ne faut pas oublier que σ_R caractérise l'absorption d'un photon diffusé. Ce photon possède donc des caractéristiques qui dépendent du photon initial. Par conséquent, les contributions de chaque direction doivent être sommées sous la forme de produit $\sigma_{Ri}\,\sigma_{Li}$. La force, tenant compte de la présence des six faisceaux, est donc :

$$f_{DM}(r) = \frac{\sigma_{Rx}\,\sigma_{Lx}\,i^{(0)}_{+x} + \sigma_{Ry}\,\sigma_{Ly}\,i^{(0)}_{+y} + \sigma_{Rz}\,\sigma_{Lz}\,i^{(0)}_{+z}}{c} \frac{1}{4\pi r^2} \tag{2.13}$$

où nous avons supposé que l'intensité totale d'une paire de faisceaux était constante dans le nuage, notée par conséquent $i^{(0)}_{+j}$ pour la direction j. Nous supposons donc que l'absorption reste faible. Cette hypothèse est cohérente avec le fait de n'avoir considérer qu'un seul processus de diffusion par photon. Ainsi, $\sigma_{Lj}\,i^{(0)}_{+j}$ est la puissance absorbée du faisceau laser de la direction j. σ_{Rj} décrit l'absorption des photons diffusés issus du faisceau de cette direction.

La force globale est calculée en prenant en compte la totalité des atomes du nuage :

$$\vec{F}_{DM}\,(\vec{r}) = \iiint_V \vec{f}_{DM}(\vec{r} - \vec{r'})\,n(r')d^3r' \tag{2.14}$$

L'expression complète de cette force nécessite la connaissance de la forme du nuage pour pouvoir calculer l'intégrale. Cette question sera discutée par la suite.

2.1.3 équilibre statique

Dans cette partie, nous allons étudier une situation d'équilibre statique. En d'autres termes, nous nous focalisons sur un état stationnaire pour lequel les atomes sont arrêtés. Nous pouvons également parler d'une description à température nulle. Nous ne nous intéressons pas au régime transitoire qui correspond à la création du nuage

Pour cela, il est commode de raisonner sur la divergence des forces [Sesko1991] et non sur les forces elles-mêmes, car cela permet de n'effectuer aucune hypothèse supplémentaire [3]. En particulier, il est inutile de définir la forme du nuage. Ainsi,

$$\vec{\nabla}.\vec{F}_{PMO} = -\left(\kappa_x + \kappa_y + \kappa_z\right) \tag{2.15a}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{F}_{ombre} = -\frac{n}{c}\left(\sigma_{Lx}^2\, i_{+x}^{(0)} + \sigma_{Ly}^2\, i_{+y}^{(0)} + \sigma_{Lz}^2\, i_{+z}^{(0)}\right) \tag{2.15b}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{F}_{DM} = \frac{n}{c}\left(\sigma_{Rx}\,\sigma_{Lx}\, i_{+x}^{(0)} + \sigma_{Ry}\,\sigma_{Ly}\, i_{+y}^{(0)} + \sigma_{Rz}\,\sigma_{Lz}\, i_{+z}^{(0)}\right) \tag{2.15c}$$

Connaissant ces expressions, il est simple de déterminer l'état d'équilibre du système. En effet, si la somme des forces est nulle, la somme de leur divergence l'est également. De cette observation, nous pouvons déduire que la densité est constante dans le nuage, résultat identique à celui obtenu dans [Sesko1991]. Sa valeur est :

$$n = \frac{c\left(\kappa_x + \kappa_y + \kappa_z\right)}{\left(\sigma_{Rx} - \sigma_{Lx}\right)\,\sigma_{Lx}\, i_{+x}^{(0)} + \left(\sigma_{Ry} - \sigma_{Ly}\right)\,\sigma_{Ly}\, i_{+y}^{(0)} + \left(\sigma_{Rz} - \sigma_{Lz}\right)\,\sigma_{Lz}\, i_{+z}^{(0)}} \tag{2.16}$$

Il s'agit d'une généralisation de la densité prédite dans [Sesko1991]. Ce résultat est donc une caractéristique du régime de diffusion multiple, il ne dépend donc pas de la géométrie du piège. Au contraire de ce qu'aurait pu laisser penser l'étude de [Sesko1991] réalisée pour une symétrie sphérique.

Il est possible de donner des expressions simplifiées des forces liées aux effets collectifs car les équations 2.2 d'évolution des intensités s'intègrent aisément. Il faut toutefois faire une différence entre les symétries. En effet, les intensités dans un piège symétrique équilibré

3. L'utilisation de quelques propriétés des opérateurs différentiels permet le calcul formel de l'intégrale apparaissant dans l'expression de la force de diffusion multiple : $-\vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\right)\right) = \triangle\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\right)$ et $\triangle\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r)$

sont égales au centre du nuage (en z_0) alors que dans le cas du piège asymétrique, elles le sont sur le bord (du côté du miroir de renvoi). Nous effectuons un développement limité à l'ordre 1 en position de ces équations et nous obtenons, pour la direction z :

$$\begin{aligned} i_{+z}(z) &= i_{+z}^{(0)} + i_{-z}^{(0)} \sigma_{Lz} n \, (z - z_0) && (2.17a) \\ &= I_+(z = z_0) + I_-(z = z_0) && (2.17b) \\ i_{-z}(z) &= i_{-z}^{(0)} + i_{+z}^{(0)} \sigma_{Lz} n \, (z - z_0) && (2.17c) \end{aligned}$$

Nous avons supposé à plusieurs reprises que l'intensité totale était constante, ceci revient à négliger le second terme de l'équation 2.17a. Physiquement, cette hypothèse correspond soit à un régime de très faible absorption, soit à la considération d'un faible déséquilibre d'intensités. Nous ne conservons donc que le terme d'ordre 0. En revanche, la même simplification ne peut pas être effectuée sur l'équation 2.17c car les deux termes peuvent être du même ordre de grandeur. C'est notamment le cas pour les deux limites que nous venons d'évoquer. De plus, le terme $i_{-z}^{(0)}$ est introduit pour prendre en compte les différentes symétries. Par exemple, pour un piège symétrique équilibré, il est nul. Il ne contient donc pas à lui seul toute la physique nécessaire à la description générale de l'absorption dans le nuage.

Ce résultat nous permet de justifier *a posteriori* la simplification effectuée pour écrire la force de diffusion dans l'équation 2.13, à savoir qu'à l'ordre le plus bas l'intensité totale locale peut être considérée comme constante.

Cette approximation permet de réécrire la force d'effet d'ombre :

$$\vec{F}_{ombre} = -\frac{n}{c} \begin{vmatrix} \sigma_{Lx}^2 i_{+x}^{(0)} \, (x - x_0) \\ \sigma_{Ly}^2 i_{+y}^{(0)} \, (y - y_0) \\ \sigma_{Lz}^2 i_{+z}^{(0)} \, (z - z_0) \end{vmatrix} - \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \sigma_{Lx} i_{-x}^{(0)} \\ \sigma_{Ly} i_{-y}^{(0)} \\ \sigma_{Lz} i_{-z}^{(0)} \end{vmatrix} \tag{2.18}$$

où l'on distingue un terme dépendant de la position et un second constant qui s'applique sur le centre de masse du nuage.

Dans le cas de la diffusion multiple, nous avions remarqué que la force était proportionnelle au produit de σ_L et σ_R à cause des diffusions successives que peut subir un photon. La force liée à l'effet d'ombre fait intervenir σ_L au carré [4], car l'absorption des faisceaux lasers est prise en compte.

Jusqu'à présent le modèle a été développé dans un souci de généralité. Cependant notre objectif est de décrire un PMO réaliste. La géométrie de ce système présente des propriétés de

4. σ_L paraît seulement au carré à cause du développement limité. Dans le régime d'absorption linéaire, l'intensité des faisceaux suit une loi exponentielle qui peut être écrite sous forme de série : $i_{-z}(z) \propto \exp(-\sigma_L n z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sigma_L^p \, (nz)^p \, \frac{(-1)^p}{p!}$. Ainsi un grand nombre d'absorption des photons lasers apparaît explicitement sous la forme σ_L^p.

symétrie, qu'il est donc judicieux de considérer. Le champ magnétique du PMO présente une symétrie de révolution autour de l'axe passant par le centre des bobines. Les configurations pour lesquels tous les faisceaux lasers sont différents ($\xi_1 \neq \xi_2 \neq \xi_3$) ne respectent pas cette propriété. Elles seront donc abandonnées dans la suite. À présent, la dénomination *anisotrope* sera réservée aux configurations pour lesquelles deux paires de faisceaux sont identiques, appelées anisotropes dégénérées précédemment. Il s'agit d'utiliser des faisceaux identiques ($\xi_x = \xi_y$) dans les directions contenues dans le plan perpendiculaire à l'axe des bobines et une paire différente $\xi_z \neq \xi_x$ selon cet axe. Cette situation sera étudiée expérimentalement dans le chapitre 3.

piège anisotrope

Pour caractériser la situation anisotrope, nous modifions les notations précédentes. Les axes x et y étant équivalents, leur indice est remplacé par un indice $\perp$. L'indice z est lui remplacé par $\|$. Dans ces conditions, il est possible de réécrire la valeur de la densité dans le régime de diffusion multiple :

$$n = \frac{2c\left(\kappa_\perp + \kappa_\|\right)}{\left(\sigma_{R\|} - \sigma_{L\|}\right)\,\sigma_{L\|}\,i^{(0)}_{+\|} + 2\left(\sigma_{R\perp} - \sigma_{L\perp}\right)\,\sigma_{L\perp}\,i^{(0)}_{+\perp}} \tag{2.19}$$

Un facteur 2 a été ajouté, arbitrairement, à la dernière composante de la force magnéto-optique pour tenir compte du fait que le gradient du champ est deux fois plus grand dans la direction longitudinale. Ainsi pour un piège traditionnel, $\kappa_\perp$ et $\kappa_\|$ sont égaux. En d'autres termes, les indices des coefficients ne reflètent que les paramètres des faisceaux lasers d'une direction donnée, et non la valeur du gradient de champ.

À ce stade du développement, il est intéressant de revenir sur la forme du nuage. Compte tenu de la remarque précédente sur le champ magnétique, nous pouvons dire que le PMO est un système intrinsèquement anisotrope et qu'il ne paraît donc pas justifié de donner une forme sphérique au nuage d'atomes froids, comme c'est régulièrement le cas dans la littérature [Sesko1991, Steane1992, Pruvost2000]. La seule information connue sur cette forme est qu'elle doit satisfaire une symétrie d'ordre 4 autour de l'axe des bobines. Une solution intuitive est de considérer un ellipsoïde de révolution qui est l'extension d'une sphère à un cas anisotrope, tout en précisant que l'hypothèse sur la symétrie est un peu plus forte que ce qu'exige le piège.

Une fois cette hypothèse réalisée, il est possible de calculer la force de diffusion multiple. Ce calcul est fastidieux mais ne présente pas de difficulté sur l'axe de symétrie. Les deux autres composantes, qui sont identiques, peuvent être déduites grâce à l'expression connue de la divergence. On aboutit ainsi à la formule suivante, valable uniquement au voisinage de la droite parallèle à l'axe z passant par le centre du nuage :

$$\vec{F}_{DM} = \frac{n}{2c}\left(\sigma_{R\parallel}\,\sigma_{L\parallel}\,i^{(0)}_{+\parallel} + 2\sigma_{R\perp}\,\sigma_{L\perp}\,i^{(0)}_{+\perp}\right)\left|\begin{array}{c}(1-A)\,(x-x_0)\\(1-A)\,(y-y_0)\\2A\,(z-z_0)\end{array}\right. \tag{2.20}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{\beta}}{1-\sqrt{\beta}}\right|\right) & \textit{pour } \beta>0\\ \left(1-\dfrac{1}{\beta}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{-\beta}}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{\beta}{\beta-1}}\right)\right) & \textit{pour } \beta<0\end{cases}\\ \beta &= 1-\left(\frac{L_\perp}{L_\parallel}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

La symétrie du système (deux directions équivalentes) permet de ne connaître qu'une composante de cette force pour pouvoir étudier l'équilibre, car la densité est déduite de la condition sur la divergence. L'expression 2.20 est effectivement valable pour des positions proches de l'axe mais la troisième composante est exacte pour tout point de l'axe.

Nous pouvons donc constater que le seul paramètre géométrique qui intervient dans la détermination de la force est le rapport des demi-axes du nuage dans les directions transverses et longitudinale, ou *ellipticité*. L'étude du facteur A, représenté sur le graphe 4.1a, montre qu'il n'y a pas de discontinuité en fonction de l'ellipticité car les deux fonctions tendent vers $1/3$. En fait, chaque fonction décrit un nuage oblate ($\beta < 0$) ou prolate ($\beta > 0$) et le cas limite où $\beta = 0$ correspond à un nuage sphérique.

La connaissance de cette force permet d'écrire les conditions à satisfaire pour obtenir une situation d'équilibre. L'annulation de la divergence des forces nous a déjà donné l'expression de la densité énoncée en 2.19. La compensation de la composante longitudinale aboutit à deux relations reliant le facteur A et le déplacement z_0 avec les coefficients caractéristiques de chaque processus :

$$A = \frac{\kappa_\parallel}{\kappa_\perp+\kappa_\parallel}\left(1+\frac{i^{(0)}_{+\parallel}\sigma_{L\parallel}\kappa_\perp - 2i^{(0)}_{+\perp}\sigma_{L\perp}\kappa_\parallel}{\kappa_\parallel\left(\sigma_{R\parallel}\,\sigma_{L\parallel}\,i^{(0)}_{+\parallel}+2\sigma_{R\perp}\,\sigma_{L\perp}\,i^{(0)}_{+\perp}\right)}\right) \tag{2.22a}$$

$$z_0 = -\frac{1}{2c}\,\frac{\sigma_{L\parallel}}{\kappa_\parallel}\,i^{(0)}_{-\parallel} \tag{2.22b}$$

L'équation 2.22a joue un rôle très important puisqu'elle relie des quantités facilement mesurables (tailles) et des grandeurs théoriques.

L'analyse de l'équation 2.22b est simple et très intéressante car elle vient confirmer plusieurs raisonnements intuitifs. En effet, z_0 est proportionnel à $i^{(0)}_{-\parallel}$ dont l'expression générale

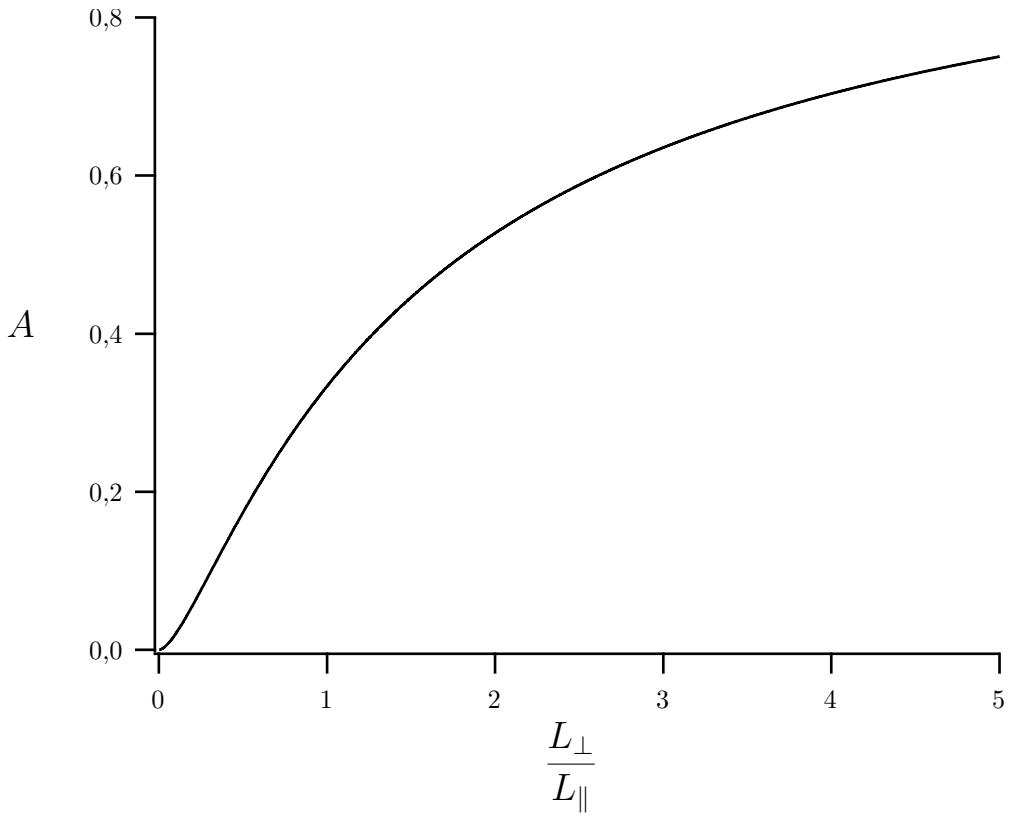


FIGURE 2.3 – Évolution du coefficient géométrique A en fonction de l'ellipticité du nuage.

est la suivante :

$$i_{-\parallel}^{(0)} = \left[I_+(z = z_0 + L_\parallel) - I_-(z = z_0 - L_\parallel)\right]\left(1 - \sigma_{L\parallel}\, n\, L_\parallel\right) \tag{2.23a}$$

$$= \left(I_{0+} - I_{0-}\right)\left(1 - \sigma_{L\parallel}\, n\, L_\parallel\right) \tag{2.23b}$$

où $I_{0\pm}$ sont les intensités incidentes. Nous pouvons en déduire le signe (fonction sgn) de $i_{-\parallel}^{(0)}$ pour chaque type de symétrie (tableau 2.2).

symétrique équilibrée	symétrique déséquilibrée	asymétrique
$i_{-\parallel}^{(0)} = 0$	$\mathrm{sgn}\left(i_{-\parallel}^{(0)}\right) = \mathrm{sgn}\left(I_{0+} - I_{0-}\right)$	$i_{-\parallel}^{(0)}$ positif
$z_0 = 0$	$\mathrm{sgn}\left(z_0\right) = -\,\mathrm{sgn}\left(I_{0+} - I_{0-}\right)$	$z_0 < 0$

TABLE 2.2 – Signe de $i_{-\parallel}^{(0)}$ et de z_0 pour les différentes symétries du PMO.

Le déplacement z_0 est donc nul pour un piège symétrique équilibré, ce qui est naturel puisqu'il s'agit d'une configuration symétrique par rapport à l'origine du piège. Les deux autres symétries ne donnent pas naissance à un nuage centré à l'origine. Le nuage est poussé vers le miroir de rétro-réflexion du piège asymétrique. Au contraire de la configuration déséquilibrée pour laquelle c'est la différence d'intensités incidentes qui définit la position du centre du nuage.

L'amplitude du déplacement par rapport à l'origine dépend également du rapport entre l'absorption et la raideur. Plus l'effet d'ombre est important par rapport au rappel, plus le nuage est éloigné de l'origine.

Pour déterminer les expressions des déplacements dans les autres directions, il nous faudrait calculer les composantes de la force de diffusion multiple. Cependant, nous ne nous attendons pas à un résultat différent. Nous pouvons tout de même dire que la symétrie du système implique que les deux déplacements dans le plan transverse sont identiques.

piège traditionnel

Une configuration répandue est celle pour laquelle tous les faisceaux lasers sont identiques ($\xi_x = \xi_y = \xi_z$). Nous avons qualifié cette situation d'*isotrope* malgré le fait qu'un PMO soit par nature anisotrope. Dans ce cas, les indices des équations précédentes n'ont plus lieu d'être puisque l'intensité et la fréquence des faisceaux sont les mêmes dans toutes les directions. De ce fait, nous pouvons réécrire la densité :

$$n = \frac{2c\kappa}{3I_{0+}\,\sigma_L\left(\sigma_R - \sigma_L\right)} \tag{2.24}$$

Cette expression est identique à celle donnée par [Sesko1991, Steane1992] à un facteur multiplicatif près, car un champ isotrope (gradient identique dans toutes les directions) avait été considéré. C'est d'ailleurs pour cela que leur choix d'une symétrie sphérique se justifiait. Toutefois, nous avons déjà dit que le PMO ne possédait pas cette symétrie. Il paraît donc

logique de conserver une forme ellipsoïdale même pour la configuration totalement dégénérée. Ainsi, l'équation 2.22a se simplifie énormément pour donner :

$$A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\sigma_L}{\sigma_R}\right) \tag{2.25}$$

Cette équation donne une relation directe entre les tailles du nuage et le rapport des sections efficaces, ce qui est intéressant d'un point de vue expérimental puisque très peu d'études ont mesuré σ_R. La détermination expérimentale de cette quantité fera l'objet du chapitre 4. Le déplacement causé par l'effet d'ombre n'est pas modifié.

Une partie non triviale de ce travail de modélisation est la détermination de la raideur du piège κ et des sections efficaces d'absorption σ_L et de réabsorption σ_R. Cette étape consiste à trouver des expressions qui dépendent des paramètres de contrôle de l'expérience. La méthode pour parvenir à ce résultat est de résoudre les équations de Bloch optiques de la matrice densité pour une interaction atome-champ décrivant au mieux la nature du système. Si l'on recherche la solution pour le problème du PMO dans la littérature, on constate que dans la plupart des cas [Metcalf1999, Pohl2006], des expressions sont obtenues en considérant un atome à deux niveaux interagissant avec un champ électromagnétique quasi-résonnant. En d'autres termes, il s'agit d'un calcul 1D incomplet qui est ensuite généralisé à 3D. Les interactions entre faisceaux d'une même paire et entre paires différentes ne sont donc pas prises en compte. Il paraît utile de reprendre ce calcul pour tenter de décrire le PMO de manière plus satisfaisante.

2.2 Modèle unidimensionnel $\sigma^+ - \sigma^-$

Un calcul rigoureux à une dimension doit prendre en compte la présence de deux faisceaux de sens et de polarisation opposés. Cette considération exclut le choix d'un atome à deux niveaux comme représentation de la structure énergétique élémentaire pour un atome susceptible d'être refroidi et piégé. Le choix naturel qui s'impose est d'introduire la dégénérescence des sous-niveaux magnétiques. En effet, cette dégénérescence est levée par effet Zeeman à cause du champ magnétique du piège. Celle-ci permet de tenir compte de l'interaction des ondes de chaque polarisation avec les sous-niveaux magnétiques de l'état excité. C'est pourquoi nous étudions le système atomique le plus simple pouvant être utilisé dans un PMO à travers une transition $J = 0 \rightarrow J' = 1$. Ce système est représenté sur la figure 2.4a.

Nous allons donc développer un modèle de refroidissement Doppler. Les mécanismes qualifiés de sub-Doppler [Lett1988, Dalibard1989] ne peuvent pas se manifester puisque le niveau fondamental ne possède pas de sous-structure. De plus, ils sont prédominants pour de faibles intensités [Dalibard1989]. Or, les conditions qui nous intéressent sont celles dans

lesquelles les instabilités existent. Elles correspondent plutôt à des valeurs élevées de ce paramètre, ce qui justifie le choix d'une théorie Doppler.

La littérature fournit un grand nombre de développements permettant de calculer les coefficients de chaque force. Cependant, la plupart des calculs sont effectués dans des conditions souvent assez restrictives, notamment du point de vue expérimental (limite des faibles saturations par exemple). Notre démarche est de faire le moins d'approximations possible sur les paramètres de contrôle dans le but d'aboutir à des expressions aussi générales que possibles, tout en permettant une analyse physique simple.

La démarche usuelle, permettant d'écrire une force magnéto-optique sous la forme de l'équation 2.3, est de considérer que les atomes sont localisés au voisinage du centre du piège et qu'ils sont peu rapides. Cette approximation est absolument équivalente à supposer que la levée de dégénérescence induit des décalages faibles devant la largeur naturelle. Nous introduisons le décalage δ qui est la somme des décalages Zeeman et Doppler, et qui s'écrit dans la direction z, de la manière suivante :

$$\delta = k_L v_z + \frac{\mu_B b_z}{\hbar} z \tag{2.26}$$

k_L est le vecteur d'onde du champ laser, μ_B le magnéton de Bohr et b_z le gradient de champ magnétique. Nous pouvons en déduire le désaccord total $\Delta_\pm$ correspondant respectivement au désaccord des ondes $\sigma^\pm$:

$$\Delta_\pm = \Delta \pm \delta \tag{2.27}$$

La méthode est standard : il s'agit d'un développement perturbatif de l'hamiltonien du système en fonction du paramètre δ.

Dans la base des états atomiques $\{|f\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$, la matrice hamiltonienne H, comportant une partie atomique H_{at} et un terme d'interaction V, est la suivante :

$$\begin{aligned} H &= H_{at} + V \\ &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_+ & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta_- \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_+ & \Omega_- \\ \Omega_+^* & 0 & 0 \\ \Omega_-^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Les fréquences de Rabi de chaque onde ont été introduites, ce qui permet de traiter toutes les symétries du piège. Ces quantités sont définies comme des nombres complexes. Elles contiennent donc une information sur la phase de chaque champ électrique et notamment la phase relative des deux ondes. L'hamiltonien peut être réécrit de la manière suivante en

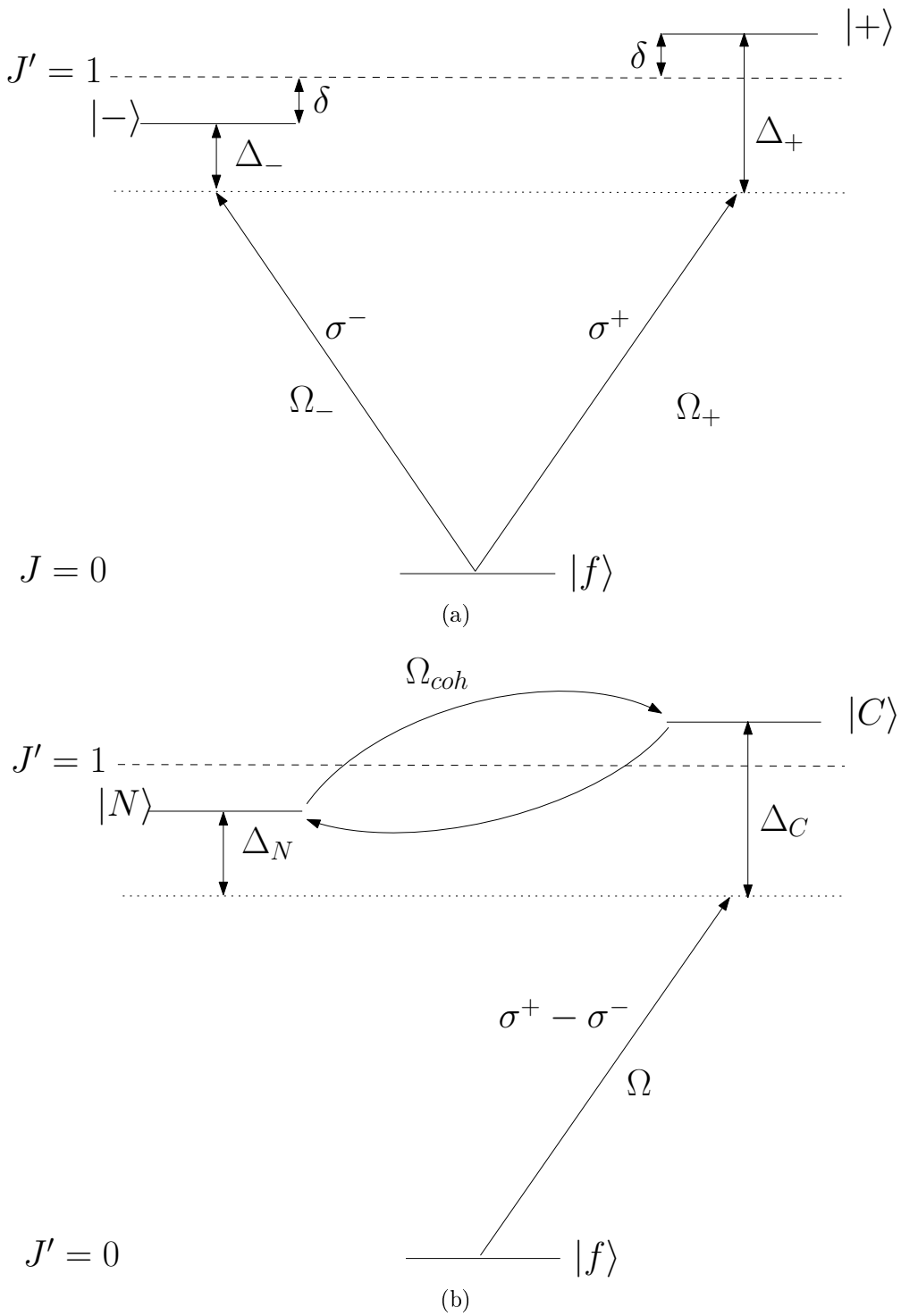


FIGURE 2.4 – Représentation du système dans les deux bases utilisées pour le calcul : (a) structure atomique dans la base naturelle et (b) dans la base couplée, l'onde est désaccordée de Δ_C et Δ_N par rapport aux niveaux $|C\rangle$ et $|N\rangle$.

fonction de δ :

$$\begin{aligned} H &= \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega_+/2 & \Omega_-/2 \\ \Omega_+^*/2 & -\Delta & 0 \\ \Omega_-^*/2 & 0 & -\Delta \end{pmatrix} + \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \\ &= H^{(0)} + H^{(1)} \end{aligned} \tag{2.29}$$

L'équation d'évolution de la matrice densité σ décrivant un système est la suivante :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H,\sigma] + \left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{relax} \tag{2.30}$$

Le terme $\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{relax}$ correspond aux variations des éléments de la matrice densité dues aux phénomènes de relaxation. Cette matrice est de la forme suivante :

$$\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{relax} = -\Gamma \begin{pmatrix} -(\sigma_{++}+\sigma_{--}) & \sigma_{f+} & \frac{\sigma_{f-}}{2} \\ \sigma_{+f} & \sigma_{++} & \frac{\sigma_{+-}}{2} \\ \frac{\sigma_{-f}}{2} & \frac{\sigma_{-+}}{2} & \sigma_{--} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

De plus amples détails concernant l'expression des termes de cette matrice peuvent être trouvés dans [Cohen-Tannoudji1988].

Le développement perturbatif jusqu'à l'ordre 1 conduit aux équations :

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[H^{(0)},\sigma^{(0)}\right] + \left.\frac{d\sigma^{(0)}}{dt}\right|_{relax} \tag{2.32a}$$

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left(\left[H^{(1)},\sigma^{(0)}\right] + \left[H^{(0)},\sigma^{(1)}\right]\right) + \left.\frac{d\sigma^{(1)}}{dt}\right|_{relax} \tag{2.32b}$$

L'équation 2.32a décrit l'évolution d'un atome au repos et au centre du piège. Il est utile de remarquer qu'un changement de base simplifie l'étude de ce système. En effet, $H^{(0)}$ peut se réécrire comme un système à trois niveaux dans lequel seulement deux d'entre eux sont en interaction. Le changement de variable qui définit l'état couplé $|C\rangle$ et l'état non couplé $|N\rangle$ est :

$$|C\rangle = \frac{\Omega_+|+\rangle + \Omega_-|-\rangle}{\Omega} \tag{2.33a}$$

$$|N\rangle = \frac{\Omega_-^*|+\rangle - \Omega_+^*|-\rangle}{\Omega} \tag{2.33b}$$

avec $\Omega = \sqrt{|\Omega_+|^2 + |\Omega_-|^2}$. Le système atomique dans cette base est représenté sur la figure 2.4b. $\Delta_{\substack{C\\N}}$ représente le désaccord du champ par rapport à ces niveaux. Dans la base $\{|f\rangle, |N\rangle, |C\rangle\}$, l'ordre le plus bas de l'hamiltonien est :

$$H^{(0)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega/2 \\ 0 & -\Delta & 0 \\ \Omega/2 & 0 & -\Delta \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

La résolution de l'équation 2.32a se réduit donc à la résolution de l'interaction d'un champ laser avec un atome à deux niveaux d'énergie. La solution est simple, elle peut être trouvée dans tout livre de physique atomique. Ainsi nous obtenons pour les populations,

$$\langle C| \sigma^{(0)} |C\rangle = \pi_C^{(0)} = \frac{\Omega^2}{4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2} \tag{2.35a}$$

$$\pi_f^{(0)} = 1 - \pi_C^{(0)} \tag{2.35b}$$

Évidemment $\pi_N^{(0)} = 0$ puisque cet état n'interagit pas avec le champ. Il est fréquent d'introduire le paramètre de saturation $s = \dfrac{2\Omega^2}{4\Delta^2 + \Gamma^2}$. La population de l'état couplé peut s'écrire :

$$\pi_C^{(0)} = \frac{1}{2}\frac{s}{s+1} \tag{2.36}$$

Les cohérences optiques ont l'expression suivante :

$$\langle C| \sigma^{(0)} |f\rangle = \sigma_{Cf}^{(0)} = \frac{s}{s+1}\frac{\Delta - i\dfrac{\Gamma}{2}}{\Omega} \tag{2.37a}$$

$$\sigma_{fC}^{(0)} = \sigma_{Cf}^{(0)*} \tag{2.37b}$$

Comme la cohérence Zeeman $\sigma_{\substack{C\\N}}^{(0)}$ est nulle, les populations des états $|\pm\rangle$ s'expriment très simplement :

$$\pi_\pm^{(0)} = \frac{\left|\Omega_\pm^2\right|}{\Omega^2}\pi_C^{(0)} \tag{2.38a}$$

$$= \frac{\left|\Omega_\pm^2\right|}{4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2} \tag{2.38b}$$

L'équation 2.32b d'évolution de $\sigma^{(1)}$ peut être résolue puisque tous les termes du second membre sont connus. Afin de résoudre cette équation, nous devons exprimer $H^{(1)}$ dans la

base $\{|f\rangle, |N\rangle, |C\rangle\}$:

$$H^{(1)} = \hbar\delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & \Omega_{coh} \\ 0 & \Omega^*_{coh} & -\eta \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

avec $\hbar\delta\eta = \hbar\delta \dfrac{|\Omega_+|^2 - |\Omega_-|^2}{\Omega^2}$ [5] le décalage Zeeman des niveaux couplé et non couplé. Dans cette base, il existe une interaction entre les états excités, représentée sur la figure 2.4b, dont l'amplitude est $\Omega_{coh} = 2\Omega_+\Omega_-/\Omega^2$. $H^{(1)}$ introduit un couplage entre niveaux excités via des cohérences Zeeman ainsi qu'une modification du désaccord de l'onde avec le niveau couplé. À cause de cette dernière, la population de l'état $|C\rangle$ va ainsi être modifiée :

$$\pi_C^{(1)} = \frac{8\,\Delta\,\delta\left(|\Omega_-|^2 - |\Omega_+|^2\right)}{\left(4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2\right)^2} \tag{2.40}$$

La résolution de l'équation à l'ordre 1 montre que les cohérences Zeeman ne sont plus nulles, leur expression est :

$$\left\langle N \left|\sigma^{(1)}\right| C\right\rangle = \frac{-2\,\delta\,\Omega_+\Omega_-}{4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2}\,\frac{4\,\Gamma}{4\Gamma\Delta - i\,\left(2\Gamma^2 + \Omega^2\right)} \tag{2.41a}$$

$$\left\langle C \left|\sigma^{(1)}\right| N\right\rangle = \left\langle N \left|\sigma^{(1)}\right| C\right\rangle^* \tag{2.41b}$$

Ces quantités sont très importantes car elles vont changer les populations des états excités $|\pm\rangle$:

$$\pi_+^{(1)} = \frac{\Omega_+^2}{\Omega^2}\,\pi_C^{(1)} + \frac{\Omega_+^*\Omega_-^*}{\Omega^2}\,\sigma_{N-C}^{(1)} + \frac{\Omega_+\Omega_-}{\Omega^2}\,\sigma_{C-N}^{(1)} \tag{2.42a}$$

$$\pi_-^{(1)} = \frac{\Omega_-^2}{\Omega^2}\,\pi_C^{(1)} - \frac{\Omega_+^*\Omega_-^*}{\Omega^2}\,\sigma_{N-C}^{(1)} - \frac{\Omega_+\Omega_-}{\Omega^2}\,\sigma_{C-N}^{(1)} \tag{2.42b}$$

La connaissance des populations et des cohérences nous permet de déterminer les sections efficaces d'absorption d'un photon laser σ_L et d'un photon diffusé σ_R, ainsi que la raideur κ du piège. Nous avons accès à des expressions dépendant des paramètres de contrôle des faisceaux lasers.

5. Chaque désaccord total est $\Delta_{\substack{C\\N}} = \Delta \mp \delta\eta$.

2.2.1 probabilité d'absorption d'un photon laser

La section efficace σ_L caractérise la façon dont un faisceau lumineux est absorbé par un milieu. Nous avons également remarqué qu'elle permettait de caractériser l'effet d'ombre dans l'équation 2.4a. Nous allons procéder par analogie en calculant la force exercée sur un atome arrêté au centre du piège pour déterminer l'expression de σ_L. Cette force est proportionnelle à la différence du nombre de photons absorbés issus du faisceau venant de gauche (valeurs de positions croissantes) et de droite (valeurs de positions décroissantes), soit :

$$F^{(0)} = \hbar k_L \left(\mathcal{N}_-^{(0)} - \mathcal{N}_+^{(0)}\right) \tag{2.43a}$$

$$= \hbar k_L \Gamma \left(\pi_-^{(0)} - \pi_+^{(0)}\right) \tag{2.43b}$$

D'après la résolution des équations de la matrice densité, nous pouvons écrire [6] :

$$F^{(0)} = \frac{\hbar k_L \Gamma^3}{4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2} \frac{i_-}{2I_{sat}} \tag{2.44}$$

Par identification avec l'équation 2.4a, nous pouvons en déduire :

$$\sigma_L = \sigma_0 \frac{\Gamma^2}{4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2} \tag{2.45}$$

avec $\sigma_0 = \dfrac{\hbar k_L \Gamma c}{2I_{sat}} = \dfrac{3\lambda^2}{2\pi}$, la section efficace d'absorption à résonance pour un régime de faible saturation. Cette expression correspond bien à une fonction lorentzienne classique élargie à cause de la saturation. Notons au passage que l'élargissement est lié à la présence des deux ondes, le terme Ω^2 au dénominateur étant la somme $|\Omega_+|^2 + |\Omega_-|^2$ qui est proportionnelle à la somme des intensités.

2.2.2 raideur du piège

L'évaluation de la raideur du piège nécessite la connaissance de $\sigma^{(1)}$, puisqu'il s'agit du terme proportionnel au décalage Zeeman δ, c'est-à-dire à la position. La démarche est la même que pour la section efficace : nous déterminons l'expression de la force à l'ordre 1 et nous identifions la raideur avec l'expression 2.3.

$$F^{(1)} = \hbar k_L \Gamma \left(\pi_-^{(1)} - \pi_+^{(1)}\right) \tag{2.46}$$

6. La fréquence de Rabi est reliée à l'intensité par la relation $\dfrac{\Omega_i^2}{\Gamma^2} = \dfrac{I_i}{2I_{sat}}$ avec I_{sat} l'intensité de saturation. Pour le Césium $I_{sat} = 1,1\,\mathrm{mW/cm^2}$

L'expression de la raideur est donc :

$$\kappa = -8\mu_B b k_L \frac{\Gamma\Delta}{\left(4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2\right)^2} \left[\Omega^2 + \frac{16\left|\Omega_+\right|^2\left|\Omega_-\right|^2\Gamma^2}{16\Gamma^2\Delta^2 + \left(2\Gamma^2 + \Omega^2\right)^2}\left(1 - \frac{\Omega^2}{4\Gamma^2}\right)\right] \tag{2.47}$$

Elle est analogue à celle donnée dans [Dalibard1984] pour la friction.

Le premier terme est le terme habituel, identique à celui calculé pour un atome à deux niveaux. Alors que le deuxième a pour origine la prise en compte des cohérences entre les états excités. Ce deuxième terme est en général négligé. Son signe dépend des valeurs respectives de Ω et Γ. L'analyse de l'expression 2.47 est assez simple. Par commodité, nous étudions le cas symétrique équilibré : $\left|\Omega_+\right|^2\left|\Omega_-\right|^2 = \Omega^4/4$. Il est possible de réécrire 2.47 pour constater que la raideur est positive pour tout jeu de paramètres de contrôle. Tout d'abord, nous remarquons un changement de signe pour $\Omega^2 = 4\Gamma^2$. La saturation par les deux ondes augmente la raideur pour les intensités inférieures, alors qu'elle la réduit pour de plus grandes valeurs. La décroissance de la rappel est proportionnelle à Ω^{-4} alors que sans le terme correctif, la raideur décroît en Ω^{-2}. L'évolution du rapport des deux termes pour $\Delta = -2\Gamma$ est représentée sur la figure 2.5a. Le terme correctif joue un rôle important pour $\Omega^2 \gtrsim 6\Gamma^2$ car il représente plus de 10 % de la raideur globale. Cette remarque est également illustrée sur la figure 2.5b. Sur cette figure, il est possible de comparer la raideur avec (trait plein) et sans (pointillé) le terme correctif, pour différentes valeurs de désaccord. Il est clair que pour de faibles intensités la correction est négligeable. Au contraire, ne pas tenir compte de la saturation par les deux ondes provoque une erreur relativement importante pour des valeurs élevées de l'intensité.

L'expression du rapport des deux termes est une forme lorentzienne en fonction du désaccord dont la largeur augmente avec l'intensité. Ce comportement est confirmé sur la figure 2.6. Plus l'intensité est élevée, plus la plage de désaccords pour laquelle la contribution du second terme est non négligeable augmente.

Toutes ces conclusions peuvent être étendues au cas du piège déséquilibré (symétrique ou asymétrique). Si nous écrivons $\left|\Omega_+\right|^2\left|\Omega_-\right|^2 = \Omega^4\, r/\left(1+r\right)^2$ où r est le rapport I_+/I_- de l'intensité de chaque faisceau, il est possible d'étudier l'influence du déséquilibre. Nous ne nous intéressons pas à des valeurs de r supérieures à 2, qui est une valeur très élevée pour un PMO usuel. Dans ce cas, le terme correctif est réduit de 10 % à cause du déséquilibre, ce qui n'est pas significatif.

La prise en compte des deux faisceaux d'une même paire semble donc importante pour certaines gammes de paramètres. Les effets de saturation associés ne doivent donc pas être négligés et ne le seront pas dans la suite, sauf indication contraire.

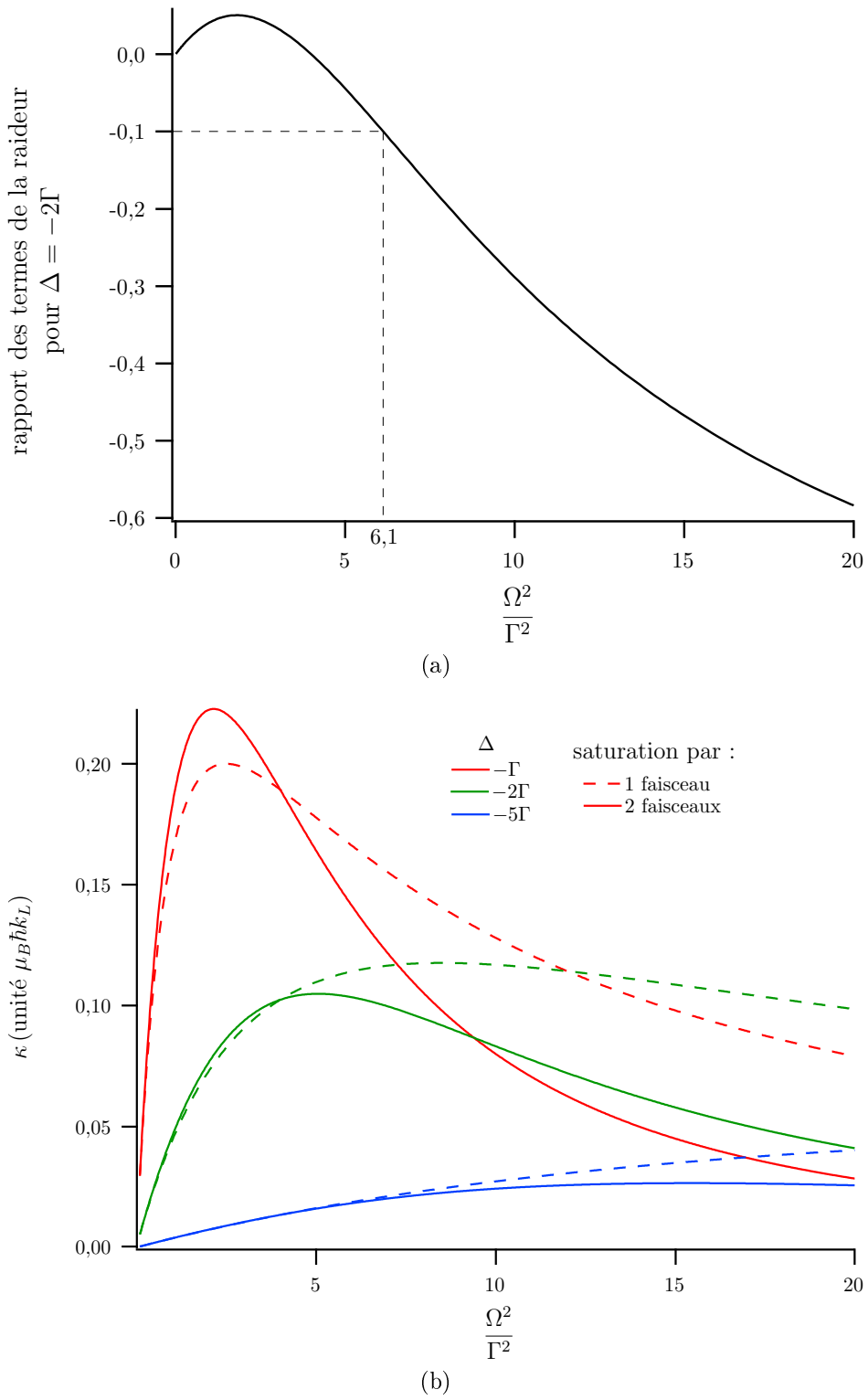


FIGURE 2.5 – Évolution de la raideur en fonction de l'intensité totale pour un piège symétrique équilibré $\left(|\Omega_+|^2 = |\Omega_-|^2\right)$: (a) variation du rapport des deux termes de κ pour $\Delta = -2\Gamma$ et (b) comparaison des raideurs calculées en prenant en compte un ou deux faisceaux pour trois valeurs de désaccord $\Delta = -\Gamma$, -2Γ et -5Γ.

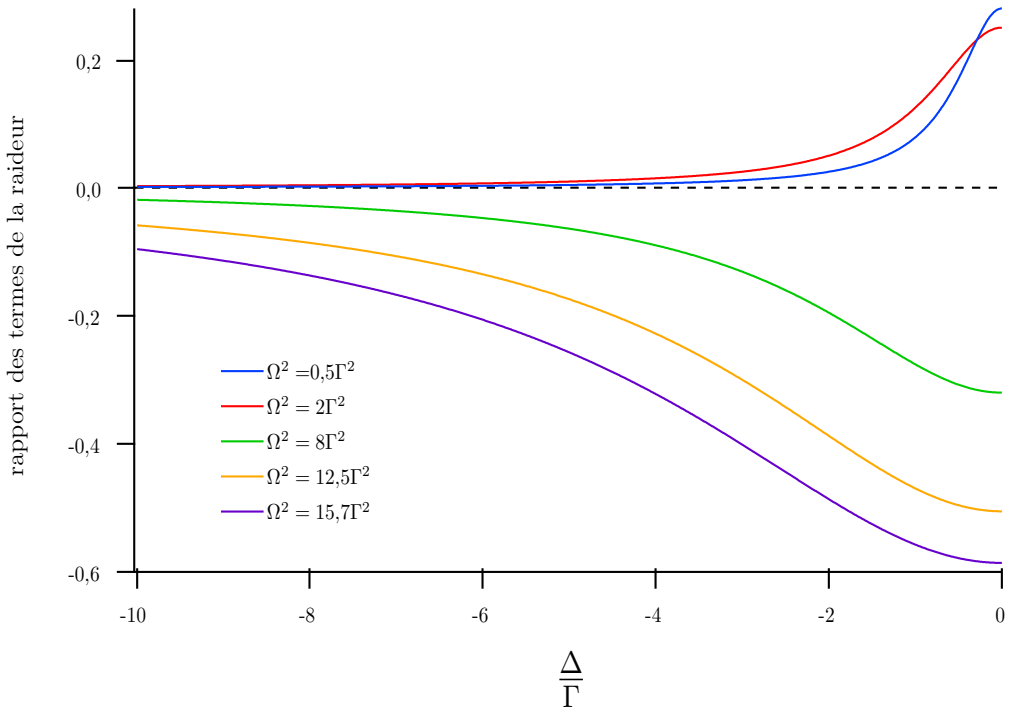


FIGURE 2.6 – Évolution du rapport des deux termes de κ en fonction du désaccord pour différentes valeurs de l'intensité totale dans un piège symétrique équilibré$\left(|\Omega_+|^2 = |\Omega_-|^2\right)$.

2.2.3 probabilité d'absorber un photon diffusé

Le principe du calcul de la section efficace d'absorption d'un photon diffusé σ_R, dernier coefficient caractéristique du PMO, est plutôt simple. En effet, il s'agit d'évaluer la probabilité pour qu'un photon diffusé par un premier atome froid soit absorbé par un second. Pour cela, il faut calculer le recouvrement entre le spectre de l'atome émetteur et celui du récepteur. D'un point de vue calculatoire, la détermination de ces spectres est un problème plutôt compliqué. En effet, cela dépend du degré de complexité choisi pour la description de la structure atomique. Nous resterons cohérent avec le choix précédent, en conservant un atome à trois niveaux d'énergie et excité par les deux lasers de la même direction.

Dans le chapitre 1, nous avons donné les expressions des spectres d'absorption et d'émission d'un atome à deux niveaux en présence d'un champ laser intense, en faisant appel au formalisme de l'atome habillé. Nous pouvons réutiliser ces résultats dans l'état, car l'utilisation de la base couplée réduit le système étudié à un système à deux niveaux d'énergie (état fondamental $|f\rangle$ et état couplé $|C\rangle$). La présence du niveau non couplé $|N\rangle$ ne modifie pas le spectre d'émission puisque celui-ci n'interagit pas avec le champ, comme le montre la figure

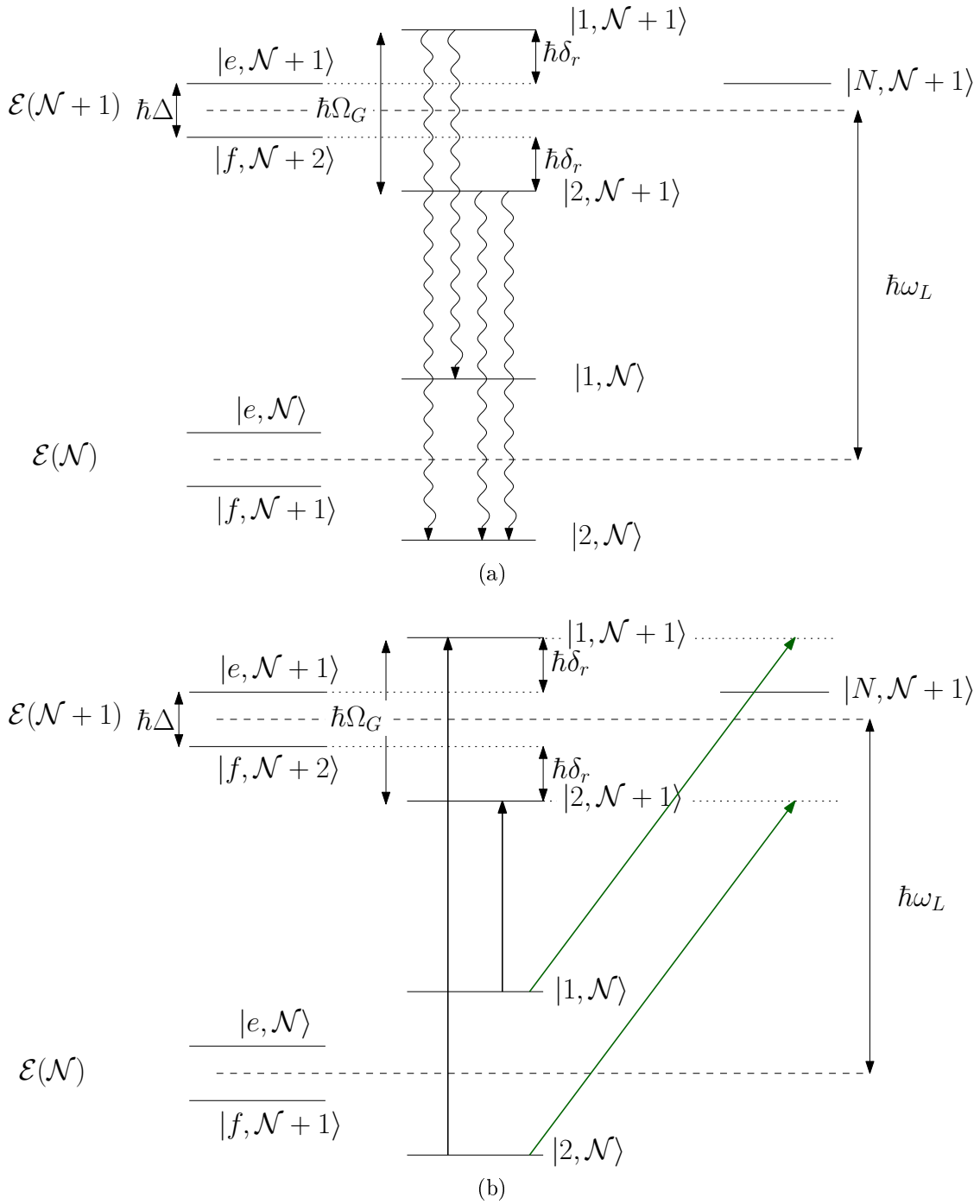


FIGURE 2.7 – Représentation schématique des différentes composantes des spectres (a) d'émission et (b) d'absorption du système à trois niveaux d'énergie.

2.7a. Nous négligeons les décalages Doppler et Zeeman ($\delta = 0$), le spectre d'émission est :

$$\begin{aligned} S(\omega) = & \frac{2c^2}{1+c^2} \quad \delta\left(\omega - \omega_L\right) \\ + & \frac{s^4}{2\left(1+c^2\right)} \quad L\left(\omega - \omega_L, \Gamma_{pop}\right) \\ + & \frac{s^2}{4} \quad L\left(\omega - \omega_L + \Omega_G, \Gamma_{coh}\right) \\ + & \frac{s^2}{4} \quad L\left(\omega - \omega_L - \Omega_G, \Gamma_{coh}\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

Pour simplifier l'analyse de ces expressions, de nouvelles notations ont été introduites : $c \equiv \cos 2\theta = -\Delta/\Omega_G$ et $s \equiv \sin 2\theta = \Omega/\Omega_G$. Les différentes largeurs se réécrivent donc :

$$\Gamma_{coh} = \frac{\Gamma}{2}\left(1 + \frac{s^2}{2}\right) \tag{2.49a}$$

$$\Gamma_{pop} = \Gamma\left(1 - \frac{s^2}{2}\right) \tag{2.49b}$$

D'autre part, le spectre d'absorption est différent car le niveau non couplé est susceptible d'absorber les photons émis par le système à deux niveaux. La figure 2.7b représente les composantes absorbées par le système à deux niveaux (flèches noires) et par le troisième niveau (flèches vertes). Nous décomposons donc le spectre total en deux contributions : $\sigma_A^{(2)}(\omega)$ pour le système à deux niveaux et $\sigma_A^{(3)}(\omega)$ pour le niveau non couplé. Le premier terme est identique à celui calculé précédemment :

$$\sigma_A^{(2)}(\omega) = \sigma_0 \pi \Gamma \frac{c}{1+c^2}\left\{\frac{(1+c)^2}{4} L\left(\omega - \omega_L - \Omega_G, \Gamma_{coh}\right) - \frac{(1-c)^2}{4} L\left(\omega - \omega_L + \Omega_G, \Gamma_{coh}\right)\right\} \tag{2.50}$$

Le terme supplémentaire est représenté sur la figure 2.8. Cette contribution à l'absorption est connue sous le nom de doublet Autler-Townes [Autler1955] et s'écrit [7] :

$$\sigma_A^{(3)}(\omega) = \frac{\sigma_0 \pi \Gamma}{8} \frac{1}{1+c^2}\left\{(1+c)^3 L\left(\omega - \omega_L - \Omega_G + \delta_r, \Gamma_2\right) + (1-c)^3 L\left(\omega - \omega_L + \delta_r, \Gamma_1\right)\right\} \tag{2.51}$$

7. Dans [Romain2011], le préfacteur $1/(1+c^2)$ a été oublié.

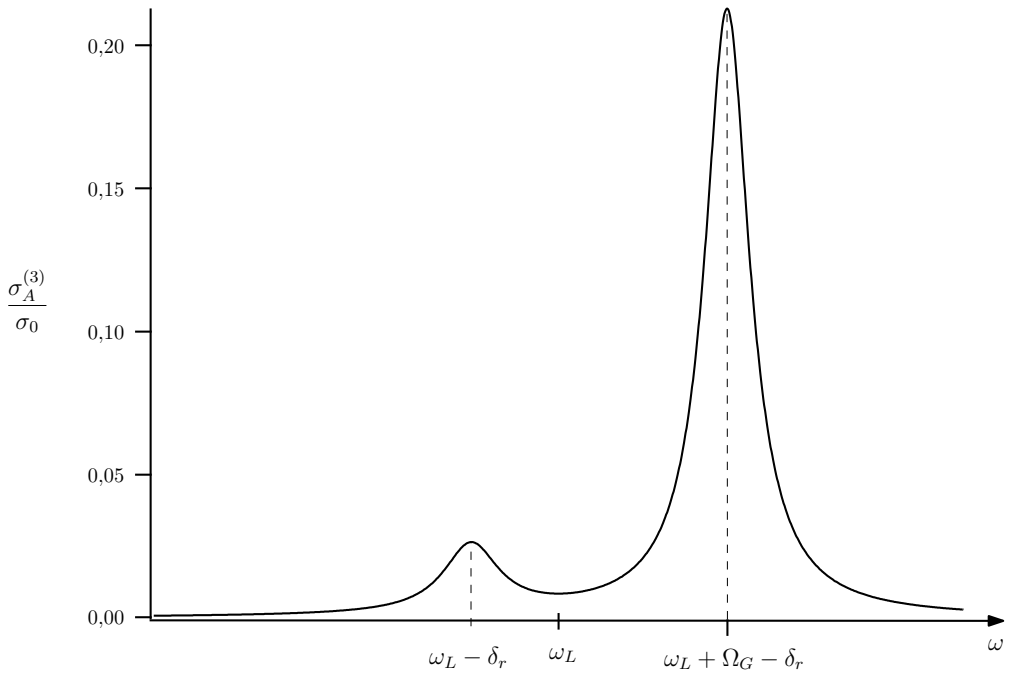


FIGURE 2.8 – Spectre d'absorption du troisième niveau déterminé pour $\Delta = -2\Gamma$ et $\Omega = 6\Gamma$.

Les fréquences de transition se déduisent facilement de la figure 2.7b. Nous remarquons l'apparition du déplacement lumineux δ_r, conséquence du passage dans la base habillée. Les poids de chaque composante sont calculés comme le produit de la population stationnaire du niveau habillé $\left|\frac{1}{2}, \mathcal{N}_\perp\right\rangle$ par le taux de transition associé $\left|\left\langle N, \mathcal{N}_\perp + 1 \left|\frac{1}{2}, \mathcal{N}_\perp\right\rangle\right.\right|^2$. Les largeurs mettent en jeu la somme des taux de relaxation des cohérences optiques des états habillés et de l'état non couplé. Leurs expressions sont les suivantes :

$$\Gamma_1 = \frac{\Gamma}{4}(3 + c) \tag{2.52a}$$

$$\Gamma_2 = \frac{\Gamma}{4}(3 - c) \tag{2.52b}$$

Le recouvrement entre les spectres d'absorption et d'émission peut être calculé numériquement [Sesko1991]. Des expressions analytiques [Steane1992, Pruvost2000] et une loi empirique ont également été calculées [Townsend1995]. Une différence importante est à noter par rapport aux calculs effectués à l'aide de l'atome habillé de [Townsend1995, Pruvost2000]. En effet, ces études proposent un calcul de la section efficace de réabsorption pour un atome à 2 niveaux d'énergie. Dans notre cas [Romain2011], il faut tenir compte de la présence

d'un troisième niveau. Les différents états excités sont couplés à l'état fondamental par des ondes de polarisations différentes. La polarisation de la lumière est repérée par rapport à l'axe de quantification choisi. L'orientation de cet axe aux points de l'espace où se trouvent l'émetteur et le récepteur est aléatoire. La polarisation peut donc être considérée elle aussi comme aléatoire. Cet argument nous conduit à écrire la section efficace totale comme la demie-somme des contributions du système à deux niveaux et celle due au troisième niveau :

$$\sigma_R = \frac{1}{2}\left(\sigma_R^{(2)} + \sigma_R^{(3)}\right) \tag{2.53a}$$

$$\sigma_R^{(2)} = \int \sigma_A^{(2)}(\omega)\, S(\omega)\, d\omega \tag{2.53b}$$

$$\sigma_R^{(3)} = \int \sigma_A^{(3)}(\omega)\, S(\omega)\, d\omega \tag{2.53c}$$

L'utilisation de la méthode de l'atome habillé nous a conduit à réaliser l'approximation séculaire : $\Omega_G = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} \gg \Gamma$. Cette approximation nous empêche de donner une expression globale de la section efficace de réabsorption, car un calcul rigoureux nécessite l'élimination des termes non-séculaires des spectres en fonction des valeurs des paramètres. La simple convolution des seize composantes n'est donc pas envisageable. Cependant, il est possible de donner des formules correspondant à des cas particuliers, c'est-à-dire à des conditions plus restrictives sur les paramètres que l'approximation séculaire. Par souci de clarté, nous avons représenté ces conditions particulières sur la figure 2.9. Ce graphique représente le plan (Δ, Ω) dans lequel il est possible de repérer les différentes limites sous forme de zone, ou gamme de paramètres. La zone grisée ne satisfait pas l'approximation séculaire, aucune expression ne peut être donnée pour de telles valeurs de paramètres. Les zones facilement identifiables sont les suivantes :

- dans le cas d'une très faible intensité (zone 1), on a $|\Delta| \gg \Gamma \gg \Omega$ (ou encore $c = 1$ et $s = 0$). Le terme prédominant du spectre d'émission est la composante élastique qui est réabsorbée par les composantes de plus hautes fréquences car les autres termes disparaissent d'où :

$$\sigma_R = \frac{\sigma_0}{4}\frac{\Gamma^2}{\Delta^2} \tag{2.54a}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_L} = 1 \tag{2.54b}$$

- à l'inverse si le désaccord est très faible (zone 2) : $\Omega \gg \Gamma \gg |\Delta|$ (ou encore $c = 0$ et $s = 1$), la contribution de la composante élastique disparaît et seules les raies du

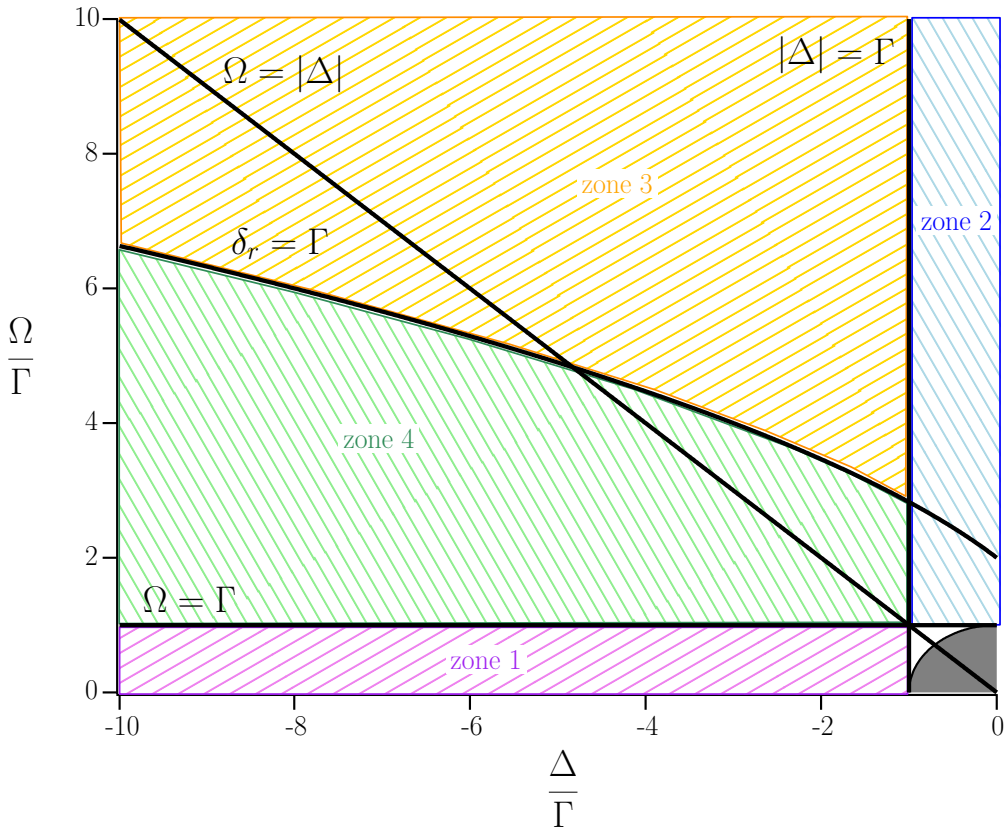


FIGURE 2.9 – Espace des paramètres des faisceaux lasers, zone 1 : $\Omega \ll \Gamma$, zone 2 : $|\Delta| \ll \Gamma$, zone 3 : $\delta_r > \Gamma$, zone 4 : $\delta_r < \Gamma$.

troisième niveau contribuent à l'absorption :

$$\sigma_R = \frac{25}{48}\sigma_0\frac{\Gamma^2}{\Omega^2} \tag{2.55a}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_L} = \frac{25}{24} \tag{2.55b}$$

Les deux cas où l'un des paramètres est négligeable devant la largeur naturelle viennent d'être traités. À présent, nous allons nous intéresser aux limites pour lesquelles l'intensité et le désaccord sont grands devant Γ. Les limites sont multiples car en fonction des valeurs relatives des deux paramètres, le troisième niveau peut être plus ou moins résonnant. Le critère qui est utilisé pour en juger est d'étudier la valeur du déplacement lumineux δ_r.

– si le déplacement lumineux est grand devant Γ (zone 3), le troisième niveau n'est pas résonnant et les bandes latérales contribuent majoritairement puisqu'elles sont

résonnantes avec l'atome à 2 niveaux :

$$\sigma_R = \frac{\sigma_0}{4}\frac{\Delta^2\Omega^2}{4\Delta^4+8\Delta^2\Omega^2+3\Omega^4} \tag{2.56a}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_L} = \frac{1}{2}\frac{\Delta^2\Omega^2}{4\Delta^4+8\Delta^2\Omega^2+3\Omega^4}\frac{2\Delta^2+\Omega^2}{\Gamma^2} \tag{2.56b}$$

– δ_r peut aussi devenir négligeable par rapport à Γ (zone 4) : l'expression suivante est la somme de l'équation précédente dans la limite $|\Delta| \gg \Omega$, qui correspond à un petit déplacement lumineux, et des termes quasi-résonnants dus au troisième niveau :

$$\sigma_R = \frac{\sigma_0}{8}\frac{\Omega^2}{\Delta^2} \tag{2.57a}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_L} = \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\Gamma^2} \tag{2.57b}$$

Notons qu'il ne s'agit que de cas limites et que par conséquent, la détermination d'une expression à la frontière de deux zones peut s'avérer difficile. Nous pouvons également remarquer que le rapport des sections efficaces est toujours supérieur à 1, hypothèse qui avait été formulée lors du calcul de la densité stationnaire du nuage à l'équation 2.24.

La figure 2.9 est très utile si l'on souhaite décrire une situation expérimentale. En effet, il suffit d'y reporter les paramètres expérimentaux pour savoir comment modéliser la réabsorption.

En comparant ces résultats avec ceux obtenus dans la littérature (voir tableau 2.3), nous pouvons constater que les différentes approches ne conduisent pas à des expressions identiques. Cependant, à l'exception de ceux de [Steane1992], les résultats sont plutôt proches. Ce tableau récapitule les expressions du rapport des sections efficaces pour deux cas limites ($|\Delta| \gg \Omega \gg \Gamma$ et $\Omega \gg |\Delta| \gg \Gamma$) ainsi que la méthode pour y parvenir. Celle de [Pruvost2000] et celle présentée ici ([Romain2011]) sont très proches, elles ne diffèrent que par la considération du troisième niveau. Dans la limite $\Omega \gg |\Delta| \gg \Gamma$, le fait de considérer le troisième niveau réduit la réabsorption, alors que dans l'autre limite ce n'est pas le cas. Des expressions différentes sont reportées dans [Townsend1995]. La plus grande différence est sur l'expression de la limite $\Omega \gg |\Delta| \gg \Gamma$. Il semble que l'intensité soit prise en compte de manière trop importante.

Une autre étape dans l'amélioration de la compréhension et de la description du PMO est la prise en compte des faisceaux transverses à la direction considérée. Cette étape constitue un pas important vers une description 3D du piège. Nous allons tenter de trouver un moyen de prendre en compte les faisceaux de direction différente.

	$\Omega \gg \lvert\Delta\rvert \gg \Gamma$	$\lvert\Delta\rvert \gg \Omega \gg \Gamma$	méthode
[Steane1992]	1	2	*calcul phénoménologique approché atome à 2 niveaux*
[Townsend1995]	$\frac{\Delta^2}{2\Gamma^2}$	$\frac{3\Omega^2}{\Gamma^2}$	*expression ajustée / atome habillé atome à 2 niveaux*
[Pruvost2000]	$\frac{\Delta^2}{3\Gamma^2}$	$\frac{\Omega^2}{2\Gamma^2}$	*expression analytique / atome habillé atome à 2 niveaux*
[Romain2011]	$\frac{\Delta^2}{6\Gamma^2}$	$\frac{\Omega^2}{2\Gamma^2}$	*expression analytique / atome habillé atome à 3 niveaux*

TABLE 2.3 – Comparaison des expressions théoriques du rapport des sections efficaces.

2.3 Un pas vers une description tridimensionnelle

La description précédente se limite à une seule dimension. Elle est donc incomplète, notamment dans le cas d'un piège anisotrope. Dans la littérature, la généralisation à 3D s'effectue en multipliant par trois la puissance du laser. Les éventuels couplages entre directions ne sont pas considérés. La situation anisotrope comprend deux fréquences différentes, il est donc d'autant plus nécessaire de tenir compte de ces couplages. Les deux fréquences utilisées ne seront que légèrement différentes. La description théorique de ce problème est très complexe puisqu'il s'agit d'étudier l'excitation d'une même transition par deux champs quasi-résonnants, de fréquence et d'amplitude similaires. Dans le but d'avoir une intuition physique de cette situation, nous proposons de faire un calcul différent et plus simple. L'idée est de considérer que les quatre faisceaux transverses ont une polarisation π. Ainsi, ils interagissent avec le niveau magnétique excité $|m = 0\rangle$. Les niveaux $|m = \pm 1\rangle$ sont uniquement couplés avec les ondes $\sigma^{\pm}$ de la direction longitudinale. Ce système est représenté sur la figure 2.10. L'intérêt de cette démarche est de faire un premier pas vers une description tridimensionnelle, dans le sens où l'action des faisceaux des directions transverses est prise

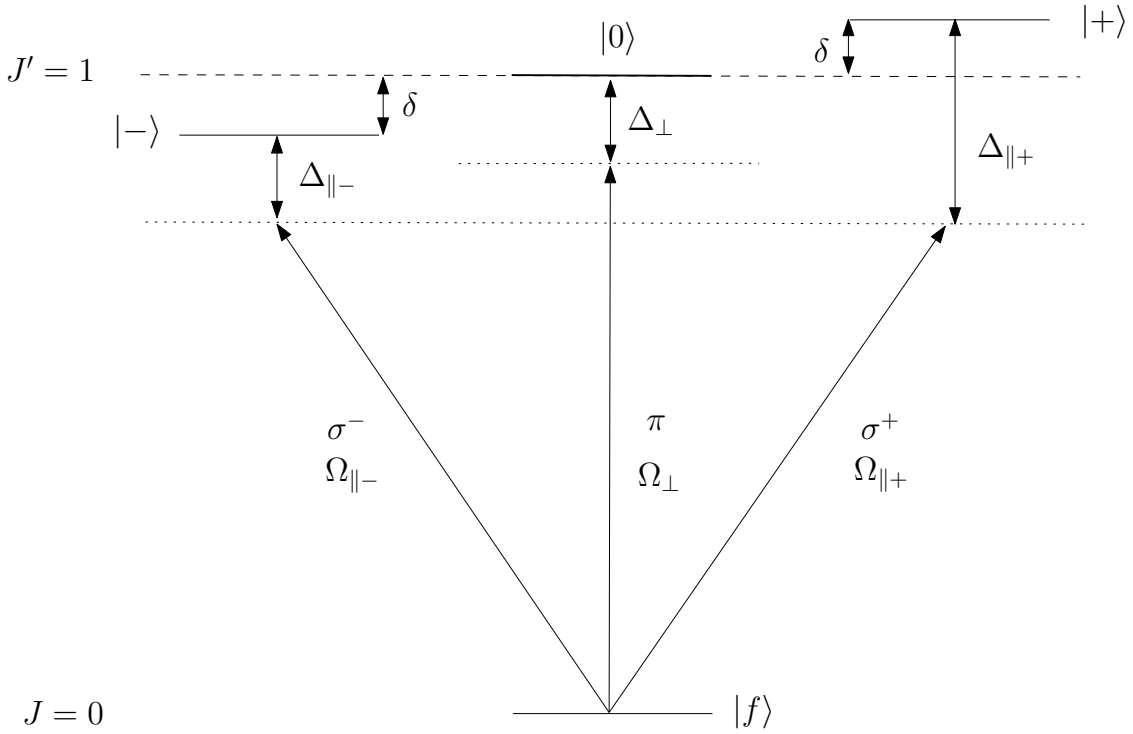
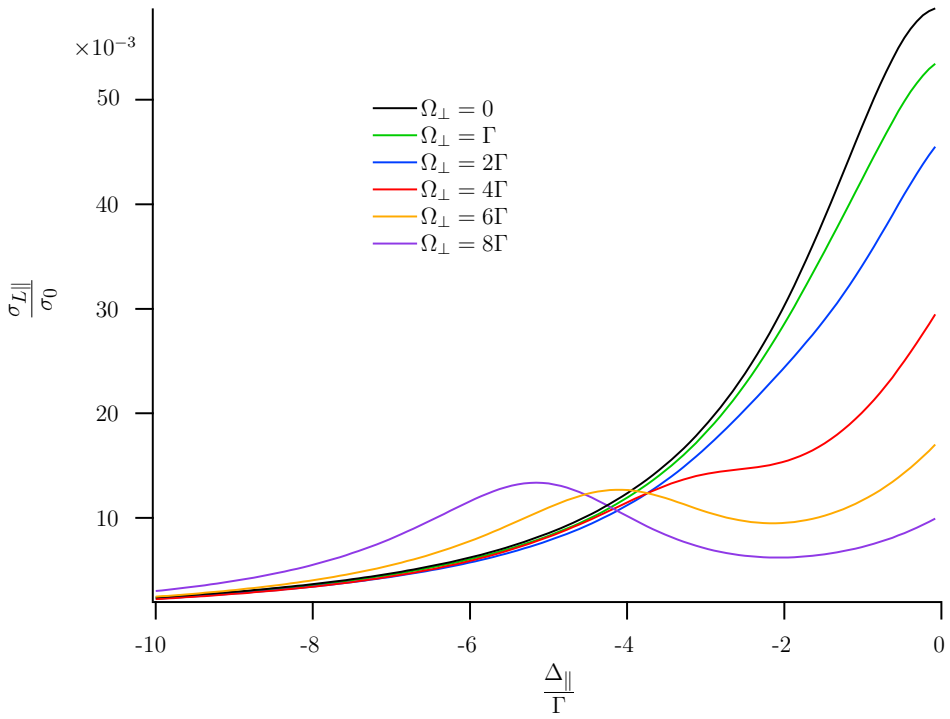


FIGURE 2.10 – Représentation du système simplifié $J = 0 \rightarrow J' = 1$ dans lequel une paire de faisceaux a une polarisation circulaire $\sigma^+ - \sigma^-$ et les deux autres π .

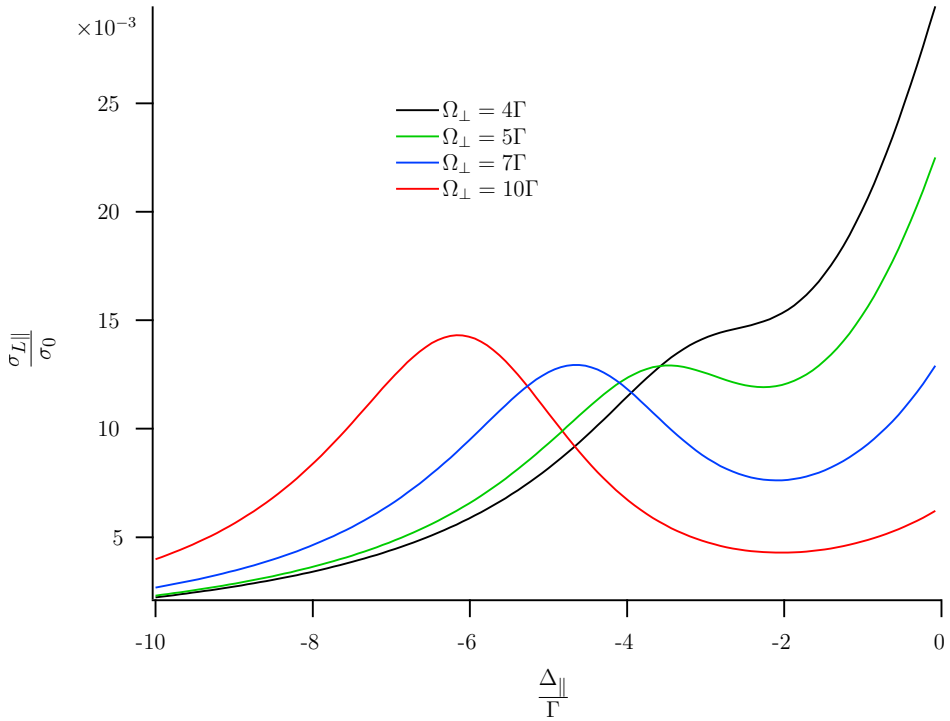
en compte, mais de manière approchée. Pour la modélisation des quantités transverses, nous conserverons une description purement unidimensionnelle car un calcul identique pour ces directions ne serait pas cohérent. Ce changement rend le calcul beaucoup plus simple à réaliser puisqu'il peut être mené de la même manière que le précédent. Nous pouvons également introduire des états couplé et non couplé, le même développement perturbatif peut ensuite être effectué. Les détails sur la méthode peuvent être trouvés en annexe A.

2.3.1 probabilité d'absorption d'un photon laser

Le calcul ne présente pas plus de difficulté que le précédent. Cependant l'expression obtenue n'est pas intelligible. Pour rappel, la section efficace d'absorption est proportionnelle à la population de l'état couplé, donnée dans l'annexe A afin d'illustrer sa complexité. Les effets « croisés » ne seront donc pas simples à mettre en évidence. Une première approche pour tirer une information quantitative est de s'intéresser à la limite des faibles intensités. Un développement à l'ordre 1 en fonction de l'intensité (ordre 2 sur la fréquence de Rabi),



(a)



(b)

FIGURE 2.11 – Évolution de la section efficace $\sigma_{L\|}$ en fonction du désaccord $\Delta_\|$ des faisceaux longitudinaux pour différentes valeurs de l'intensité transverse $\Omega_\perp$: (a) $0 < \Omega_\perp < 8\Gamma$ et (b) avec apparition d'un maximum d'absorption hors résonance pour $\Omega_\perp > 4\Gamma$. L'ensemble des courbes est obtenue avec $\Delta_\perp = -2\Gamma$ et $\Omega_\| = 2\Gamma$.

aboutit à :

$$\sigma_{L\parallel} = \sigma_0 \frac{\Gamma^2}{4\Delta_\parallel^2 + \Gamma^2} \left(1 - \frac{2\Omega_\parallel^2}{4\Delta_\parallel^2 + \Gamma^2} - \frac{2\left(4\Delta_\parallel \Delta_\perp + \Gamma^2\right)\Omega_\perp^2}{\left(4\Delta_\parallel^2 + \Gamma^2\right)\left(4\Delta_\perp^2 + \Gamma^2\right)} \right) \tag{2.58}$$

Les deux premiers termes correspondent au développement de l'expression 2.45. Un terme supplémentaire apparaît. Il dépend des paramètres des faisceaux transverses. Ce terme additionnel est positif pour toute valeur des paramètres, il a donc une contribution négative à la section efficace. Ce résultat est plutôt naturel car en ajoutant l'onde π, le niveau fondamental est dépeuplé, ce qui réduit la proportion d'atomes susceptibles d'absorber l'onde $\sigma^+ - \sigma^-$. Ici la correction est proportionnelle à l'intensité, ce qui est une conséquence du développement limité.

Afin de pouvoir tirer plus de conclusions, il faut étudier l'expression globale sous forme graphique. La figure 2.11a permet d'identifier les modifications engendrées par l'introduction des faisceaux transverses. Elle représente l'évolution de la section efficace en fonction du désaccord $\Delta_\parallel$. Pour des valeurs d'intensités transverses modérées, la section efficace possède la même allure que dans le cas 1D (courbe noire tracée pour $\Omega_\perp = 0$) mais elle prend des valeurs plus faibles. Ceci confirme la justification apportée au développement limité précédent. Lorsque les faisceaux longitudinaux sont éloignés de résonance, nous observons une décroissance de $\sigma_{L\parallel}$. Nous remarquons également une importante modification du comportement des courbes lorsque l'intensité transverse devient plus grande. Un maximum secondaire se forme loin de résonance à mesure que l'intensité transverse augmente. Ce maximum devient petit à petit plus élevé que la valeur à résonance. Cette évolution pour $\Omega_\perp \geq 4\Gamma$ est représentée sur la figure 2.11b.

Il est possible de comprendre ce comportement à l'aide d'arguments simples en faisant appel au formalisme de l'atome habillé. L'effet le plus notable se produit pour de fortes intensités transverses et cette théorie est particulièrement adaptée à l'étude d'un couplage intense entre un atome et un champ. Nous avons vu précédemment que le calcul de la section efficace σ_L est un problème d'ordre 0 en δ, et que par conséquent il est judicieux de travailler dans la base $\{|f\rangle, |N\rangle, |C\rangle\}$. Ce choix permet de simplifier le problème puisqu'un seul état excité interagit avec le champ $\sigma^+ - \sigma^-$. La prise en compte des différents états $|\mathcal{N}_\perp\rangle$ de champ transverse conduit à l'obtention d'une série de niveaux $\left|\frac{1}{2}, \mathcal{N}_\perp\right\rangle$ regroupés par paire. L'état couplé $|C\rangle$ de la multiplicité $\mathcal{N}_\perp$ s'écrit donc $|C, \mathcal{N}_\perp\rangle$. L'onde longitudinale, qui couplait les états $|f\rangle$ et $|C\rangle$ dans la base naturelle, couple dans la base habillée les états $\left|\frac{1}{2}, \mathcal{N}_\perp\right\rangle$ et $|C, \mathcal{N}_\perp + 1\rangle$. Le désaccord Δ_C est égal à $\Delta_\parallel$ car c'est un développement à l'ordre 0. Le système est représenté sur la figure 2.12. Ce schéma est quasiment identique à celui de la figure 2.7b. La différence est, qu'ici, l'état couplé par l'onde longitudinale ne sert pas à habiller le système. Pour comprendre l'évolution de la section efficace, il faut donc évaluer

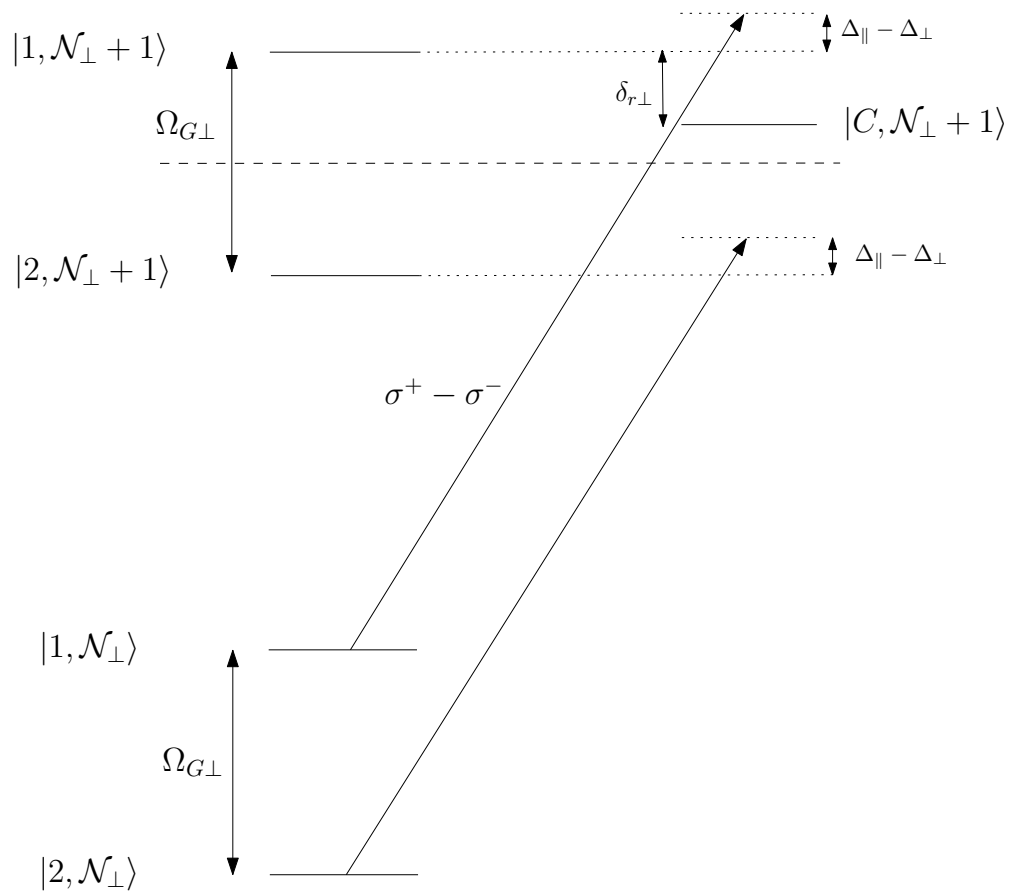


FIGURE 2.12 – Représentation de deux multiplicités du système après prise en compte de l'interaction avec les différents modes $|\mathcal{N}_\perp\rangle$ de champ transverse. L'excitation du niveau $|C, \mathcal{N}_\perp + 1\rangle$ par l'onde longitudinale est également représentée.

l'absorption d'un doublet de raies. Il s'agit une nouvelle fois du doublet Autler-Townes, mais avec une transition à une autre fréquence que celle utilisée pour habiller le système à deux niveaux. Le doublet a été calculé précédemment (équation 2.51), il devient pour l'absorption d'un photon du champ longitudinal :

$$\begin{aligned} \sigma_A^{(3)}\left(\omega_{L\parallel}\right) &= \frac{\sigma_0 \pi \Gamma}{8} \frac{1}{1+c_\perp^2} \left[(1-c_\perp)^3 L\left(\Delta_\parallel - \Delta_\perp + \delta_{r\perp}, \Gamma_{1\perp}\right) \right. \qquad (2.59a) \\ &\quad \left. + (1+c_\perp)^3 L\left(\Delta_\parallel - \Delta_\perp - \Omega_{G\perp} + \delta_{r\perp}, \Gamma_{2\perp}\right) \right] \\ &= \sigma_{A1}^{(3)} + \sigma_{A2}^{(3)} \qquad (2.59b) \end{aligned}$$

Les indices $\perp$ permettent d'identifier clairement les grandeurs dépendant de l'onde transverse

qui habille le système. Il nous faut à présent décrire l'évolution de chacune des ces deux raies d'absorption en fonction des paramètres des faisceaux.

La figure 2.13a montre l'effet d'une diminution de $\Delta_\parallel$. Il s'agit d'une translation d'ensemble des deux raies d'absorption. Une des raies s'éloigne du niveau $|C, \mathcal{N}_\perp + 1\rangle$ à mesure que le désaccord augmente. L'autre raie va balayer la position du niveau excité. Le désaccord pour lequel cette contribution est à résonance est noté $\tilde{\Delta}_\parallel$.

La figure 2.13b présente le comportement du système pour une variation de $\Omega_{G\perp}$. L'écart entre les niveaux habillés augmente avec $\Omega_{G\perp}$, ainsi le désaccord de chaque composante grandit. Autrement dit, les raies du doublet s'écarte l'une de l'autre. Nous choisissons de fixer $\Delta_\perp$ et de modifier la valeur de $\Omega_\perp$ pour faire varier $\Omega_{G\perp}$. L'annexe B étudie l'impact de $\Omega_\perp$ sur le système habillé couplé au troisième niveau par l'onde longitudinale. En particulier, la figure **??** montre que les populations et les fréquences de Rabi varient très peu dans la gamme de valeurs d'intensités transverses qui nous intéresse ($4\Gamma^2 < \Omega_\perp^2 < 10\Gamma^2$). Cette remarque nous permet de raisonner uniquement sur les fréquences des raies du doublet, en considérant que la population des états $\left|{}^1_2, \mathcal{N}_\perp\right\rangle$ (poids de chaque composante) reste constante.

Les figures 2.13a et 2.13b montrent que la raie $\sigma_{A2}^{(3)}$ s'éloigne de résonance de façon monotone dès que l'un des paramètres ($\left|\Delta_\parallel\right|$ ou $\Omega_\perp$) est augmenté. Sa contribution à l'absorption totale est donc faible. Le déplacement de la seconde raie $\sigma_{A1}^{(3)}$ est différent. Une variation du désaccord longitudinal la rapproche de résonance jusqu'à $\Delta_\parallel = \tilde{\Delta}_\parallel$, puis l'éloigne. Le comportement en fonction de l'intensité transverse est monotone : la raie s'écarte de résonance. À $\Omega_\perp$ fixé, l'absorption semble donc maximale pour $\Delta_\parallel = \tilde{\Delta}_\parallel$. D'autre part, la valeur de $\left|\tilde{\Delta}_\parallel\right|$ augmente avec $\Omega_\perp$. En effet, le maximum de $\sigma_{A1}^{(3)}$ se trouve en $\tilde{\Delta}_\parallel = \Delta_\perp - \delta_{r\perp} = \Delta_\perp - (\Delta_\perp + \Omega_{G\perp})/2 = (\Delta_\perp - \Omega_{G\perp})/2$.

Il est possible de vérifier ce raisonnement en calculant le spectre $\sigma_A^{(3)}\left(\omega_{L\parallel}\right)$ pour différentes valeurs de $\Delta_\parallel$ et de $\Omega_\perp$. Pour faciliter la comparaison, nous utilisons les mêmes valeurs que celles utilisées pour tracer les courbes de la figure 2.11b. Les résultats sont présentés sur la figure 2.14. L'allure des courbes est très proche du comportement observé sur la figure 2.11b. Précisons que les populations ont été prises en compte pour tracer ces courbes. Toutefois, elles ne modifient en rien la position des maxima, leur seul effet est de changer la valeur du maximum d'absorption de chaque courbe. Nous pouvons également comparer l'évolution du maximum par rapport aux paramètres des faisceaux transverses. La figure 2.15 montre la position des maxima calculés à partir de l'expression totale de la section efficace en fonction de $\Omega_{G\perp}$. Les paramètres d'une loi linéaire ont été ajustés sur ces positions (ordonnée à l'origine $= -0,584$ et pente$= -0,551$). Le résultat est plutôt en bon accord avec la relation $\tilde{\Delta}_\parallel = -\Gamma - \Omega_{G\perp}/2$ (car $\Delta_\perp = -2\Gamma$), déduite de notre raisonnement.

Le comportement en fonction du désaccord $\Delta_\perp$ est beaucoup plus compliqué à évaluer.

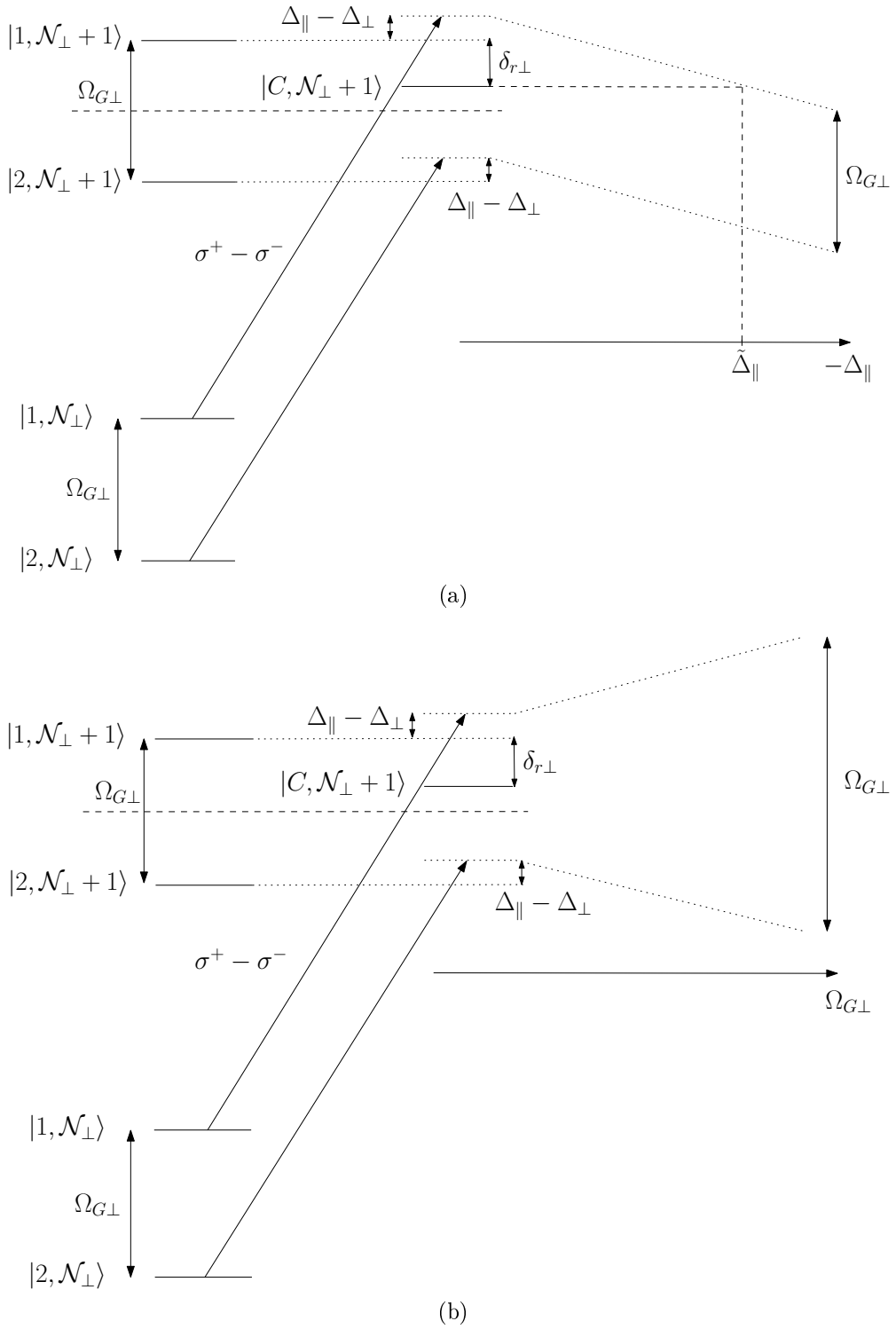


FIGURE 2.13 – Représentation de l'impact sur les fréquences du doublet Autler-Townes pour une variation : (a) de $\Delta_\parallel$ et (b) de $\Omega_{G\perp}$. $\tilde{\Delta}_\parallel$ est défini comme le désaccord longitudinal pour lequel le faisceau couplant $|1, \mathcal{N}_\perp\rangle$ et $|C, \mathcal{N}_\perp + 1\rangle$ est résonnant.

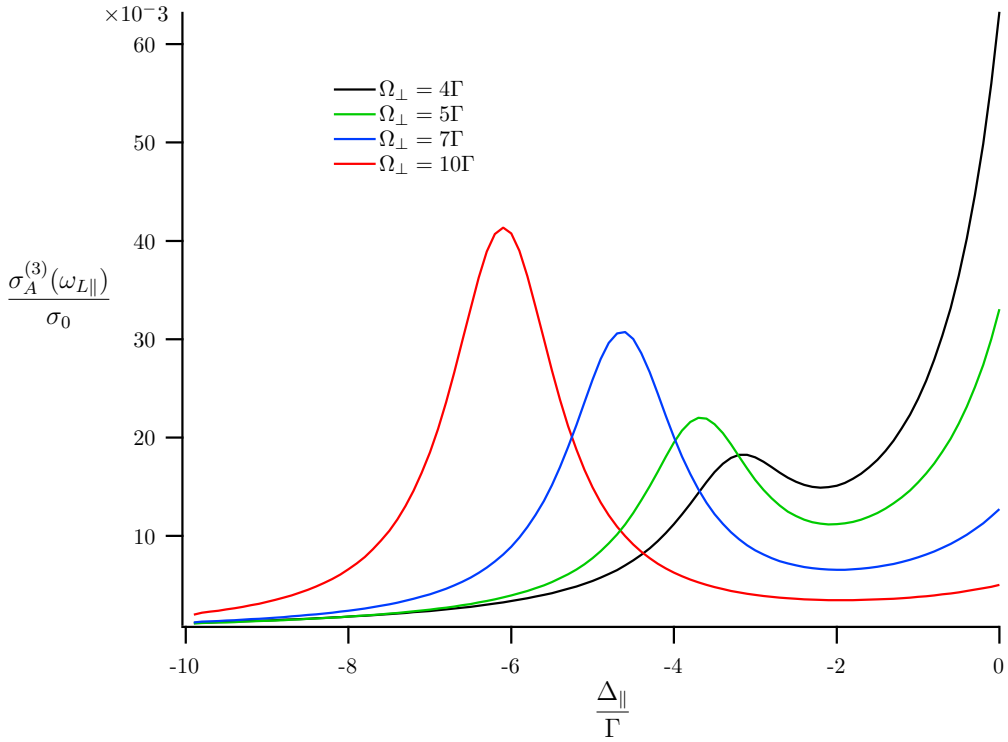


FIGURE 2.14 – Représentation du doublet $\sigma_A^{(3)}\left(\omega_{L\parallel}\right)$ en fonction du désaccord longitudinal pour les mêmes valeurs d'intensités transverses que dans la figure 2.11b.

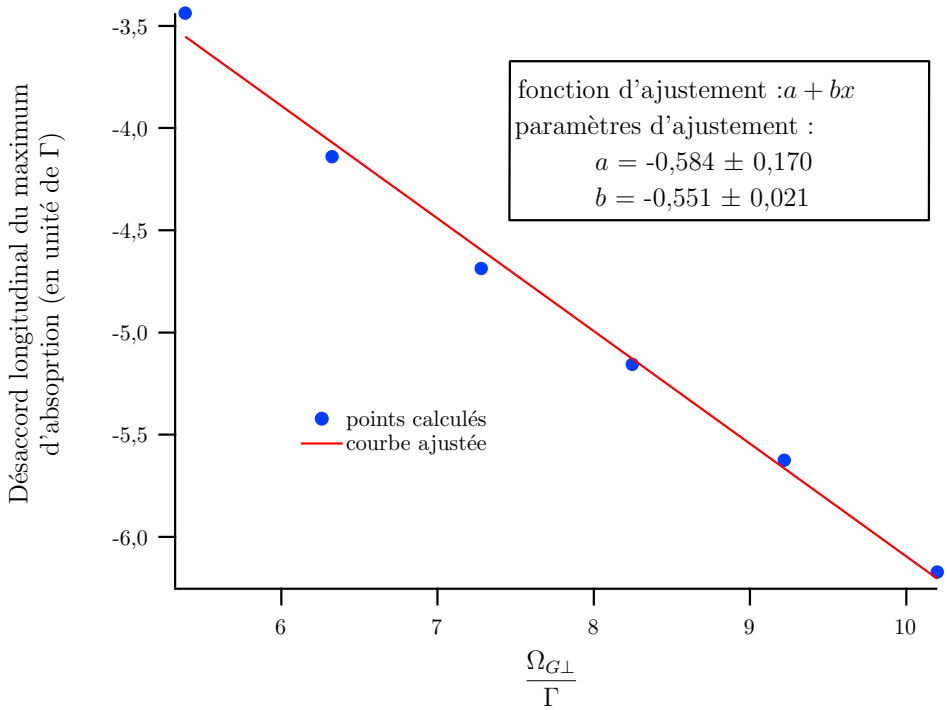


FIGURE 2.15 – Position du maximum d'absorption pour différentes intensités transverses. Les paramètres fixes sont $\Delta_\perp = -2\Gamma$ et $\Omega_\parallel = \Gamma$. La courbe rouge représente l'ajustement d'une fonction linéaire sur les désaccords correspondant au maximum.

En effet, l'annexe B permet de voir que les deux contributions sont faibles lorsque le désaccord transverse devient grand. L'une parce qu'elle est peu résonnante, comme dans le cas précédent. La seconde parce que l'état $|1,\mathcal{N}_\perp\rangle$ tend vers l'état nu $|0,\mathcal{N}_\perp\rangle$ et sa population, comme le couplage avec l'état excité, deviennent faibles. Des arguments, aussi simples que ceux apportés pour expliquer la variation en fonction de l'intensité, ne permettent pas de conclure dans ce cas précis. Nous nous contenterons de résumer les résultats graphiques en notant que l'élévation du désaccord conduit au même comportement. Cependant, la position du maximum d'absorption ne varie pas de la même façon. Et lorsque le désaccord devient très important, ce maximum devient négligeable.

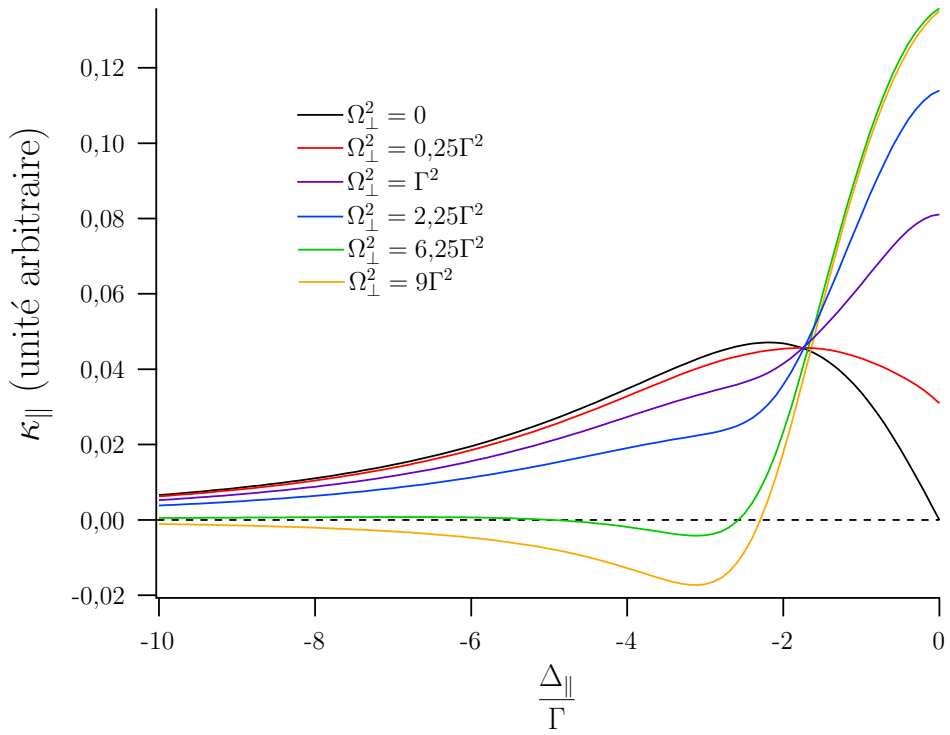
2.3.2 raideur du piège

Comme précédemment, la raideur correspond au terme proportionnel au décalage Zeeman, son expression est complexe et encore une fois difficile à analyser. Notre démarche est la même que pour la section efficace. Tout d'abord, la raideur peut s'exprimer plus simplement dans la limite des faibles intensités :

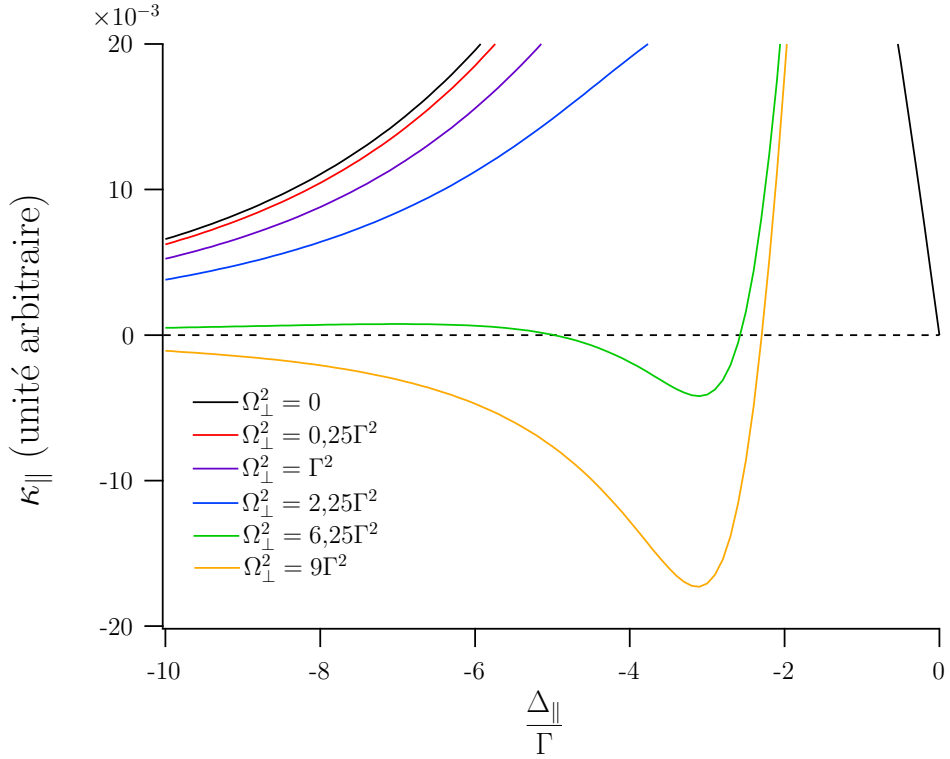
$$\kappa_\parallel = -\frac{8\Delta_\parallel \Gamma\, \Omega_\parallel^2}{\left(4\Delta_\parallel^2+\Gamma^2\right)^2} + \frac{24\Delta_\parallel \Gamma\, \Omega_\parallel^4}{\left(4\Delta_\parallel^2+\Gamma^2\right)^3} + \frac{8\Gamma\left(12\Delta_\parallel^2\Delta_\perp + 4\Delta_\parallel\Gamma^2 - \Delta_\perp\Gamma^2\right)\Omega_\perp^2\Omega_\parallel^2}{\left(4\Delta_\parallel^2+\Gamma^2\right)^3\left(4\Delta_\perp^2+\Gamma^2\right)} \tag{2.60}$$

Dans cette formule, les deux premiers termes correspondent au développement de l'expression 2.47 pour une intensité faible (ordre 2 sur $\Omega_\parallel^2$ pour les faisceaux longitudinaux). À ces termes vient s'ajouter un troisième qui fait intervenir les paramètres des autres faisceaux. Ce type de simplification n'est pas totalement satisfaisante car l'expression demeure difficile à lire. Cependant, nous pouvons constater que ce troisième terme peut changer de signe en fonction de la valeur du désaccord transverse, ce qui implique que la raideur peut être diminuée.

De manière à étendre nos conclusions, nous allons étudier l'expression complète sous forme graphique. Nous pourrons ainsi dégager des tendances en faisant varier les paramètres du système. Sur la figure 2.16a, a été représentée l'expression non simplifiée de la raideur en fonction du désaccord longitudinal pour différentes valeurs de l'intensité transverse. La présence de l'onde transverse change de manière significative le comportement de la raideur. La figure 2.16b, qui est un agrandissement, permet de remarquer que la raideur est négative pour une plage de désaccords longitudinaux et d'intensités transverses. Notamment, le cas de la courbe verte ($\Omega_\perp^2 = 6,25\Gamma^2$) est assez frappant. Lorsque la fréquence des faisceaux longitudinaux s'éloigne de résonance, un atome est ramené au centre du piège, puis expulsé et de nouveau piégé. Par ailleurs, pour des intensités plus élevées la raideur ne redevient pas positive (courbe orange), ce qui serait synonyme d'un arrêt prématuré du confinement.



(a)



(b)

FIGURE 2.16 – Variation de la raideur en fonction de l'intensité transverse, l'intensité longitudinal est $\Omega_\parallel = 3\Gamma$ et le désaccord transverse est $\Delta_\perp = -2\Gamma$: (a) pleine échelle et (b) agrandissement.

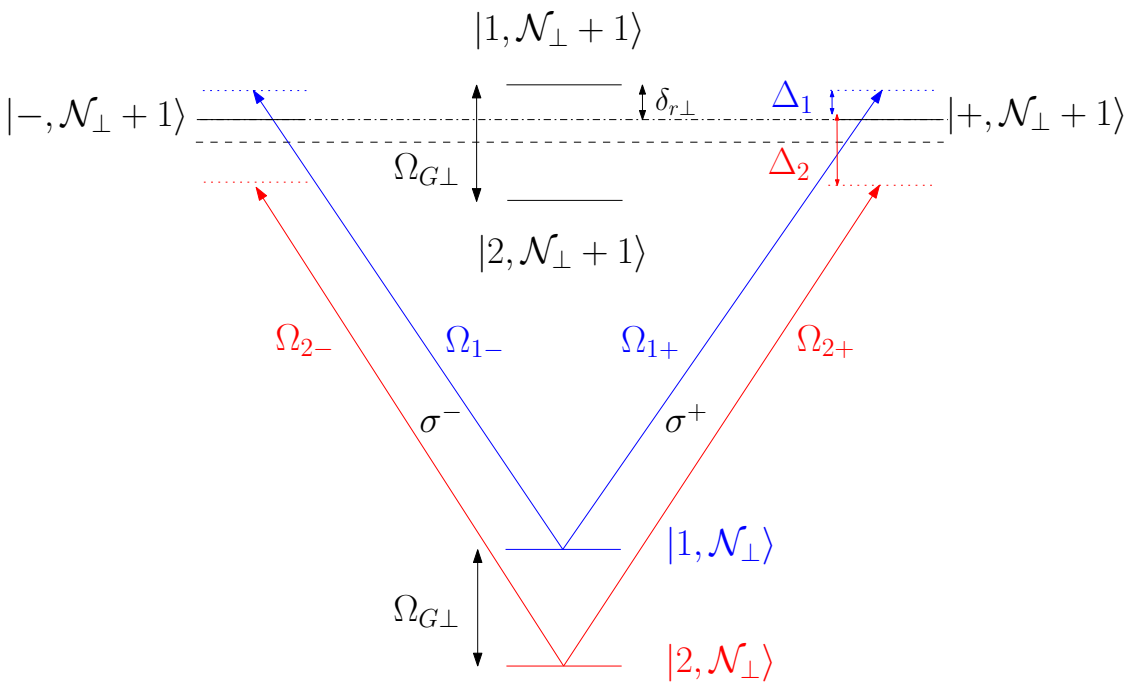


FIGURE 2.17 – Schéma du système habillé par l'onde transverse. Les deux sous-systèmes sont représentés en rouge et bleu. Le décalage δ n'a pas été représenté pour ne pas surcharger la figure.

L'introduction des faisceaux transverses fait donc apparaître de nouveaux effets. Cependant, la complexité des expressions obtenues ne permet pas d'identifier les processus qui conduisent à ces évolutions non triviales. Nous faisons de nouveau appel au formalisme de l'atome habillé pour étudier la limite des fortes intensités transverses. Le calcul de la raideur est un problème d'ordre 1 en δ, nous choisissons de travailler dans la base naturelle. Notre démarche peut être qualifiée de « perturbative ». Nous supposerons que le couplage entre les états excités $|\pm, \mathcal{N}_\perp + 1\rangle$ et les états habillés est faible, de manière à ne pas perturber la population stationnaire de ces derniers. Ceci aboutit au système représenté sur la figure 2.17.

L'intérêt de mener le calcul de cette manière est qu'à présent la raideur globale κ_{hab} peut s'écrire comme la superposition des raideurs de deux sous-systèmes (en rouge et bleu) à trois niveaux (cf. expression 2.47), pondérée par les populations π_1 et π_2 des niveaux fondamentaux $|1, \mathcal{N}_\perp\rangle$ et $|2, \mathcal{N}_\perp\rangle$:

$$\kappa_{hab} = \pi_1 \kappa_1 + \pi_2 \kappa_2 \tag{2.61}$$

Nous pouvons nous contenter de développer la raideur donnée en 2.47 au premier ordre en $\Omega_{\parallel\pm}$, puisque ces intensités sont supposées faibles [8] :

$$\kappa_{\frac{1}{2}} = \kappa(\Omega_\pm = \Omega_{\frac{1}{2}\pm}, \Delta = \Delta_{\frac{1}{2}}) \tag{2.62a}$$

$$\simeq -8\mu_B b k_L \frac{\Gamma \Delta_{\frac{1}{2}} \Omega_{\frac{1}{2}}^2}{\left(4\Delta_{\frac{1}{2}}^2 + \Gamma^2\right)^2} \tag{2.62b}$$

Les fréquences de Rabi $\Omega_{\parallel\pm}$ caractérisent le couplage entre l'état fondamental $|f\rangle$ et les états excités $|\pm\rangle$. Le passage dans la base des états habillés fait que nous ne pouvons pas identifier $\Omega_{\frac{1}{2}\pm}$ à $\Omega_{\parallel\pm}$. En effet, les fréquences de Rabi du système habillé $\Omega_{\frac{1}{2}\pm}$ ainsi que les populations $\pi_{\frac{1}{2}}$ dépendent des paramètres des faisceaux transverses. Comme dans le cas de la section efficace, nous négligeons leur variation car celle-ci n'est pas significative pour l'intervalle de valeurs de $\Omega_\perp$ qui nous intéresse (voir annexe B). Nous pourrons ainsi raisonner uniquement sur les fréquences, comme précédemment.

Deux ondes $\sigma^+ - \sigma^-$ sont couplées aux niveaux excités $|\pm\rangle$ à partir des deux niveaux habillés de la multiplicité inférieure, le désaccord $\Delta_{\frac{1}{2}}$ de chaque faisceau fait donc intervenir les paramètres des faisceaux transverses et longitudinaux, tel que :

$$\Delta_{\frac{1}{2}} = \Delta_\parallel - \frac{\Delta_\perp}{2} \pm \frac{\Omega_{G\perp}}{2} \tag{2.63}$$

Cette formule, assez simple en apparence, contient un grand nombre d'informations et permet de comprendre le phénomène observé sur les figures 2.16, grâce à des arguments physiques élémentaires. Pour cela, il faut évaluer la valeur et/ou le signe des désaccords $\Delta_{\frac{1}{2}}$. En effet, en fonction des différentes valeurs des paramètres, Δ_1 peut être positif ou négatif, contrairement à Δ_2 qui est toujours négatif. En d'autres termes, le fait de considérer que l'onde transverse est intense conduit à devoir étudier la somme d'un terme de rappel ($\kappa_2 > 0$) et d'un autre terme qui peut soit piéger soit expulser les atomes. Le tableau 2.4 regroupe les différents cas de figure pour une variation de $\Delta_\parallel$ et de $\Omega_\perp$ (via $\Omega_{G\perp}$) comme sur les figures 2.16.

Une ligne du tableau 2.4 correspond à une courbe de la figure 2.16a (respectivement aux courbes rouge, verte et orange) où le désaccord longitudinal est augmenté pour une intensité transverse fixe.

Pour des fréquences de Rabi transverses faibles (l'approximation séculaire doit tout de même être satisfaite), quelle que soit la valeur du désaccord longitudinal, les atomes sont piégés. Tout d'abord, quand les faisceaux longitudinaux sont proches de résonance, Δ_1 est supérieur à $|\Delta_2|$ (avec $\left|\Delta_{\frac{1}{2}}\right| > \Gamma$). Étant donné que la raideur décroît comme $\Delta_{\frac{1}{2}}^{-3}$, nous déduisons que $\kappa_2 > |\kappa_1|$. De plus, pour de faibles valeurs de $\Omega_{G\perp}$, le niveau $|2, \mathcal{N}_\perp\rangle$ est plus

8. Le terme correctif lié à la saturation par les deux ondes est négligé pour de faibles intensités.

$\Delta_\parallel \longrightarrow$

$\Omega_{G\perp} \downarrow$

$\lvert\Delta_\parallel\rvert << \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ $\Delta_{\frac{1}{2}} \simeq -\frac{\Delta_\perp}{2} \pm \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ $\Delta_1 > 0$ et $\Delta_1 > \lvert\Delta_2\rvert$ $\kappa_1 > \lvert\kappa_2\rvert$ et $\pi_1 > \pi_2$ $\rightarrow \kappa_{hab} > 0$ **PIÉGEAGE**	$\lvert\Delta_\parallel\rvert > \frac{\Omega_{G\perp}}{2} \left(> \frac{\lvert\Delta_\perp\rvert}{2}\right)$ $\rightarrow \Delta_{\frac{1}{2}} < 0$ $\rightarrow \kappa_{\frac{1}{2}} < 0$ **PIÉGEAGE**	$\lvert\Delta_\parallel\rvert > \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ **PIÉGEAGE**
$\lvert\Delta_\parallel\rvert << \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ **PIÉGEAGE**	$\lvert\Delta_\parallel\rvert < \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ RÉPULSION	$\lvert\Delta_\parallel\rvert > \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ **PIÉGEAGE**
$\lvert\Delta_\parallel\rvert << \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ **PIÉGEAGE**	$\left(\frac{\lvert\Delta_\perp\rvert}{2} <\right) \lvert\Delta_\parallel\rvert < \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ $\Delta_{\frac{1}{2}} \simeq \Delta_\parallel \pm \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ $\Delta_1 > 0$ et $\lvert\Delta_1\rvert < \lvert\Delta_2\rvert$ $\rightarrow \kappa_1 < \lvert\kappa_2\rvert$ RÉPULSION	$\lvert\Delta_\parallel\rvert < \frac{\Omega_{G\perp}}{2}$ RÉPULSION

TABLE 2.4 – Synthèse des différentes situations en fonction des paramètres des faisceaux conduisant soit à du piégeage soit à de la répulsion.

peuplé que $|1, \mathcal{N}_\perp\rangle$. Tout indique donc que cette situation conduit à du piégeage car la raideur globale κ_{hab} est positive. D'autre part, à mesure que les faisceaux longitudinaux s'éloignent de résonance, $\left|\Delta_\parallel\right|$ devient plus grand que $\left(-\Delta_\perp \pm \Omega_{G\perp}\right)/2$. Les désaccords $\Delta_{\frac{1}{2}}$ sont alors négatifs : les deux contributions sont donc piégeantes. Ce cas correspond à la première ligne du tableau 2.4.

Pour de grandes intensités (troisième ligne), les désaccords sont de signes opposés. Près de résonance, les mêmes arguments que précédemment peuvent être donnés pour constater l'effet de piégeage. Plus $\left|\Delta_\parallel\right|$ augmente, plus $|\Delta_2|$ devient grand et plus Δ_1 diminue. La raideur étant inversement proportionnelle au désaccord $(\Delta_{\frac{1}{2}}^{-3})$, c'est le terme d'expulsion κ_1 qui l'emporte : le nuage disparaît plus tôt que dans le cas précédent.

La situation intermédiaire aux deux précédentes (deuxième ligne) est maintenant simple à analyser. Quand les faisceaux longitudinaux sont proches de résonance, les atomes sont piégés car $\kappa_2 > |\kappa_1|$ et $\pi_2 > \pi_1$. L'augmentation du désaccord conduit à l'expulsion des atomes car

Δ_1 est positif et plus petit que $|\Delta_2|$. Lorsque les faisceaux sont très peu résonnants, les deux termes $\kappa_{\frac{1}{2}}$ sont positifs et engendrent donc du piégeage. Il existe ainsi une plage de désaccords longitudinaux pour laquelle les atomes sont expulsés alors qu'à l'extérieur de celle-ci, ils sont piégés.

Cette seconde approche reproduit de manière qualitative le comportement observé sur les figures 2.16. Ceci est très satisfaisant et surtout très utile car cela nous permet de comprendre les mécanismes qui mènent au phénomène observé, alors que cela était impossible à partir de l'expression complète.

2.3.3 probabilité d'absorber un photon diffusé

Comme nous l'avons vu précédemment, le principe de la détermination de la section efficace de réabsorption σ_R est plutôt simple. Il s'agit de calculer le recouvrement des spectres d'émission et d'absorption d'un atome froid. Cependant, même si la configuration étudiée a été simplifiée, il est très difficile de calculer ces spectres et *a fortiori* d'en calculer la convolution de façon analytique. D'autant que les expressions des populations et des cohérences calculées ne sont pas utilisables de par leur complexité. Une détermination numérique pourrait être menée mais ces résultats seraient sans doute difficiles à comprendre et à analyser. De plus, nous n'avons aucun *a priori* sur le résultat, notamment car les effets croisés conduisent à des comportements inattendus.

Par conséquent, nous ne calculerons pas de section efficace de réabsorption en tenant compte d'un effet de saturation par les faisceaux transverses. Nous nous contenterons d'utiliser le calcul unidimensionnel de la section précédente.

Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons développé un formalisme général permettant de décrire plusieurs configurations du PMO dans le régime de diffusion multiple. Nous avons notamment choisi de décrire la forme du nuage par un ellipsoïde de révolution afin de respecter la symétrie du piège. Ce choix a mis en évidence la corrélation entre l'anisotropie de piège et l'ellipticité du nuage.

Nous avons montré qu'un modèle prenant en compte, même de manière simplifiée, la présence de plusieurs faisceaux, dans une même direction et *a fortiori* dans d'autres, pouvait apporter de profonds changements par rapport au modèle à un faisceau. En effet, le comportement des coefficients caractéristiques du piège est fortement modifié dès que l'intensité des faisceaux est élevée. Une prédiction surprenante est la disparition du rappel pour une plage de désaccords peu éloignés de résonance. Malheureusement, les mécanismes à l'origine de ces changements sont difficiles à identifier car les expressions sont très lourdes. Un raisonnement

qualitatif nous a toutefois permis de mettre en évidence le rôle du déplacement lumineux et de la saturation par les faisceaux des différentes directions.

Chapitre 3

Étude expérimentale du PMO anisotrope

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié théoriquement différentes configurations du PMO. Nous nous sommes particulièrement intéressés au cas du piège anisotrope. Cette configuration a été définie comme composée de deux paires de faisceaux identiques dans le plan transverse à l'axe des bobines, et d'une paire différente selon cet axe. Les faisceaux lasers sont différents car leur fréquence et leur intensité ne sont pas les mêmes. L'objectif de cette configuration est la réalisation d'un piège dans lequel les atomes ne développent un comportement instable que dans une seule direction. Des travaux ont mis en évidence le rôle des paramètres des faisceaux lasers sur la dynamique [diStefano2004, Labeyrie2006]. Nous souhaitons choisir les paramètres des lasers de manière à ce qu'ils correspondent à un point de fonctionnement stable dans le plan transverse, et instable dans la direction longitudinale. Nous disposerons ainsi d'un système expérimental pour étudier le comportement spatio-temporel à une dimension des atomes froids. Les résultats pourront être comparés aux différentes modèles théoriques qui sont eux aussi à une dimension [Hennequin2004, diStefano2004, Labeyrie2006, Pohl2006, Mendonca2008, Mendonca2012].

Dans un premier temps, nous décrirons succinctement le dispositif expérimental utilisé. Nous développerons plus particulièrement la façon dont l'anisotropie est créée. À notre connaissance, aucune expérience avec un PMO anisotrope en fréquence n'est décrite dans la littérature. Nous allons donc en présenter une première étude basée sur des mesures de fluorescence et de tailles du nuage. L'évolution de ces quantités sera décrite et analysée. Une comparaison avec le modèle théorique décrit précédemment sera finalement effectuée.

3.1 Dispositif expérimental

3.1.1 généralités

Le PMO est un dispositif utilisé depuis plus de 20 ans. C'est pourquoi uniquement les grandes lignes de ce montage ainsi que les spécificités liées à cette étude seront développées. Des informations détaillées au sujet du dispositif expérimental utilisé peuvent être trouvées dans [Guidoni1998].

atome de Césium

Les atomes utilisés sont des atomes de Césium 133. Comme souvent, la transition D_2 de cet atome $\left(6\,^2S_{1/2} \rightarrow 6\,^2P_{3/2}\right)$, représentée sur le graphe 3.1, est utilisée pour le piégeage. Toutes les données concernant l'atome de Césium sont issues de [Steck2003] comme le graphe 3.1. Cette transition correspond à une longueur d'onde de 852 nm. Elle possède une largeur naturelle Γ de $2\pi \times 5,22\,\mathrm{MHz}$ et une intensité de saturation I_{sat} de $1,1\,\mathrm{mW/cm^2}$. En réalité, le piégeage utilise une transition entre niveaux de la structure hyperfine du spectre du Césium : $\left(6\,^2S_{1/2}\right)\ F=4 \longrightarrow \left(6\,^2P_{3/2}\right)\ F=5$. Toutefois, il est possible d'estimer que tous les mille cycles de fluorescence, un atome est excité dans le niveau $\left(6\,^2P_{3/2}\right)\ F=4$. Celui-ci peut donc se désexciter vers le niveau $\left(6\,^2S_{1/2}\right)\ F=3$. Il devient ainsi insensible au laser. Les atomes seraient très rapidement perdus pour la formation du nuage. En effet, la durée de vie radiative dans l'état excité est de quelques ns. Un atome se retrouverait dans le niveau $\left(6\,^2S_{1/2}\right)\ F=3$ au bout de quelques µs. C'est pourquoi la transition $\left(6\,^2S_{1/2}\right)\ F=3 \longrightarrow \left(6\,^2P_{3/2}\right)\ F=4$ est également excitée par un deuxième laser appelé *repompeur*. L'atome pourra de nouveau effectuer des cycles de fluorescence efficaces pour le refroidissement.

sources lasers

Deux sources lasers quasi-résonnantes sont nécessaires pour la réalisation du PMO. Le laser piège est asservi sur la transition hyperfine $\left(6\,^2S_{1/2}\right)\ F=4 \longrightarrow \left(6\,^2P_{3/2}\right)\ F=5$ alors que le laser repompeur l'est sur la transition $\left(6\,^2S_{1/2}\right)\ F=3 \longrightarrow \left(6\,^2P_{3/2}\right)\ F=4$. La fréquence du faisceau piège est ensuite décalée sur le *rouge* de la transition ($\Delta < 0$). Dans les deux cas, il s'agit d'une diode laser placée en cavité étendue de manière à affiner sa largeur spectrale.

L'asservissement et l'amélioration du profil spectral sont des étapes coûteuses en énergie.

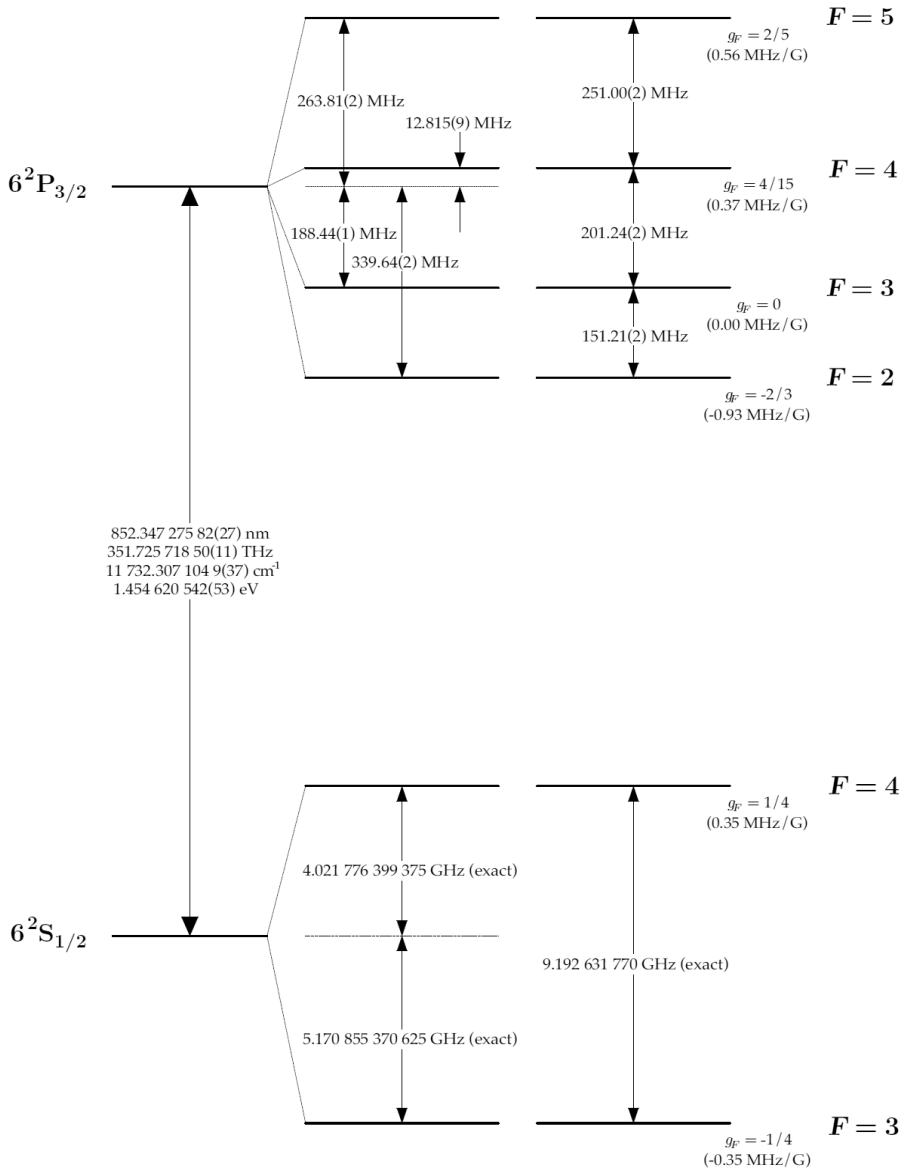


FIGURE 3.1 – Schéma de la transition D_2 de l'atome de Césium [Steck2003].

Il est ainsi nécessaire d'augmenter la puissance, après que la fréquence a été définie avec précision. Cette amplification est réalisée grâce à l'ajout d'une autre diode laser. Il est fréquent de parler de système *maître-esclave* pour ce type de configuration. En effet, ce second laser amplifie le faisceau du laser en amont. Le faisceau de sortie a la même fréquence que celle du faisceau d'entrée, il s'agit du phénomène d'injection optique. Dès que cette étape est effectuée, les faisceaux peuvent être dirigés vers le piège.

piège

Les atomes de Césium sont placés dans une cellule en quartz de forme parallélépipédique. Le Césium est à l'état gazeux, car maintenu à des pressions de l'ordre de 10^{-8} Torr (très inférieures à sa pression de vapeur saturante) par une pompe ionique.

Les faisceaux lasers sont dirigés selon les trois directions de l'espace. Les faisceaux retours sont obtenus par rétro-réflexion sur des miroirs après propagation des faisceaux incidents à travers la cellule. De part et d'autre de la cellule, des bobines circulaires ont été placées en configuration anti-Helmholtz. Elles créent ainsi un champ magnétique quadrupolaire dont chaque composante est proportionnelle à l'éloignement du centre du piège. Ce point est défini comme le point de l'espace où le champ est nul. Les axes des faisceaux lasers se croisent en ce point. Le gradient du champ magnétique est de l'ordre de quelques G /cm.

Nous utilisons des faisceaux lasers polarisés circulairement. Le but de cette polarisation est d'assurer le piégeage des atomes. Le choix de l'orientation de la polarisation de chaque faisceau dépend du signe du champ magnétique. En effet, le décalage Zeeman est proportionnel au champ. Par conséquent, dans les régions où le champ est positif, un niveau excité possédant un nombre quantique magnétique négatif est plus proche de résonance ($\Delta < 0$), le faisceau venant de ce demi-espace est polarisé σ^-. L'atome est ainsi poussé vers le centre. Inversement, un niveau avec un nombre quantique magnétique positif est plus proche de résonance pour un champ négatif : le second faisceau de la paire a une polarisation σ^+.

3.1.2 génération de l'anisotropie

Nous disposons de deux paramètres de contrôle pour créer l'anisotropie. Il s'agit de la fréquence et l'intensité des trois paires de faisceaux lasers.

Un moyen efficace pour modifier la fréquence d'un faisceau laser est l'utilisation d'un modulateur acousto-optique (MAO). Il s'agit d'un cristal parcouru par une onde acoustique qui est utilisé comme réseau de diffraction. La fréquence de cette onde, d'une centaine de MHz, définit le décalage de la fréquence laser. La fréquence de l'onde acoustique peut être balayée de manière à faire varier le désaccord. Compte tenu de la valeur de la largeur de raie de la transition, il est possible d'explorer un intervalle de désaccords d'une vingtaine de Γ. Cette valeur permet donc de balayer la zone de fréquence pour laquelle le refroidissement

Doppler est possible. L'anisotropie en fréquence est créée par l'utilisation de deux MAOs opérant à des fréquences différentes.

Dans le but d'avoir un maximum de réserve de puissance dans chaque bras, une lame séparatrice est placée après la diode en cavité étendue. Deux lasers esclaves sont utilisés, chacun amplifiant un faisceau de fréquence différente. L'intensité est une des grandeurs les plus simples à modifier, plus exactement à diminuer. Il est possible soit de changer le courant d'injection des diodes lasers, soit de placer une densité neutre sur le passage du faisceau. Ces deux méthodes permettent des variations relativement importantes de la puissance lumineuse. En effet, comme décrit précédemment, le dispositif expérimental utilise un système maître-esclave pour amplifier la puissance du laser verrouillé en fréquence. La puissance en sortie des diodes esclaves utilisées est de l'ordre de 120 mW. Et il est très simple de placer une série de densités qui permette d'éteindre totalement le faisceau. Nous avons donc une capacité de variation de 100% de l'intensité maximale. Une autre solution utilisée est de modifier la puissance de l'onde acoustique introduite dans le modulateur car l'efficacité de diffraction dépend de l'amplitude de l'onde. Une autre façon de modifier l'intensité des faisceaux au niveau du nuage est de réduire leur taille. Dans notre cas, nous ne modifierons pas ce paramètre. Le waist [1] des faisceaux est fixé à 5 mm.

De manière à respecter la symétrie du champ magnétique, le faisceau d'une des diodes esclaves est divisé en deux pour créer la paire de faisceaux transverses alors que l'autre diode produit uniquement le faisceau longitudinal. Le schéma du dispositif est représenté sur la figure 3.2.

3.2 Acquisition et traitement

Nous nous intéressons à l'état stationnaire du système en fonction des paramètres de contrôle choisis. Nous ne sommes pas dans des conditions faisant apparaître de la multistabilité [Wilkowski1998], par conséquent nous n'attendons pas d'influence des conditions initiales sur la formation du nuage. Les variables pertinentes du système sont le nombre d'atomes piégés et les tailles longitudinale et transverses du nuage. La fluorescence des atomes est recueillie par une photodiode et des caméras CCD disposées selon plusieurs points de vue autour du piège.

Le nombre d'atomes piégés est proportionnel à l'intensité de la fluorescence émise. Le coefficient de proportionnalité dépend des paramètres des faisceaux lasers. Pour une forte saturation, la population des atomes tend vers une constante et varie donc très peu en fonction des paramètres. Le coefficient de proportionnalité entre le nombre d'atomes et l'intensité

1. En optique gaussienne, le waist définit la demi-largeur du faisceau lorsque que l'intensité a été réduite de e^{-2}. 95 % de l'intensité lumineuse est contenue dans l'intervalle associé au waist.

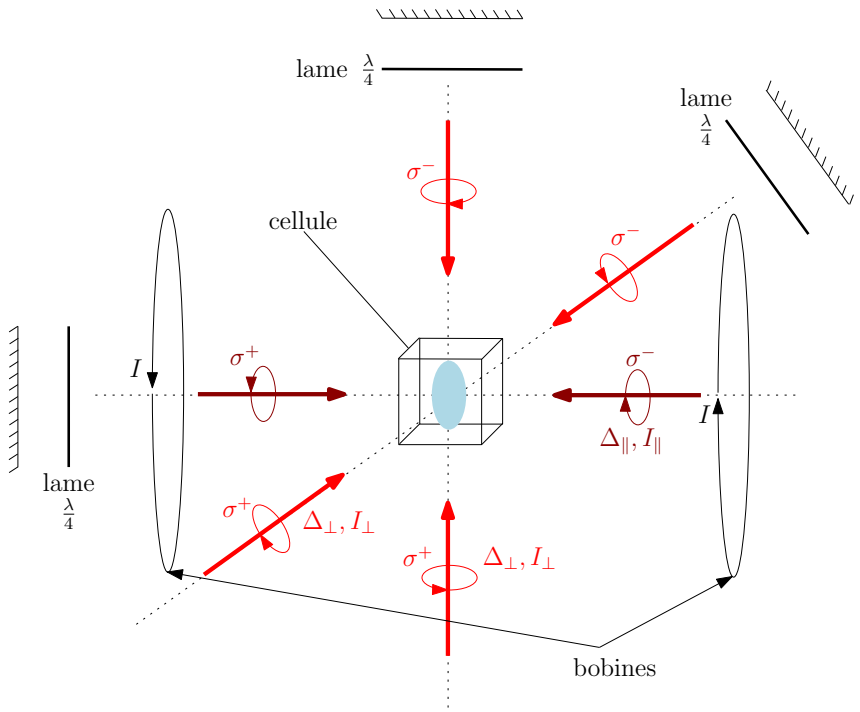


FIGURE 3.2 – Schéma du piège magnéto-optique anisotrope. Les faisceaux longitudinaux (rouge foncé) et les faisceaux transverses (rouge vif) possèdent respectivement un désaccord $\Delta_\parallel$ et $\Delta_\perp$. Il s'agit un piège asymétrique : les faisceaux allers d'intensités $I_\parallel$ et $I_\perp$ sont rétro-réfléchis pour former les faisceaux retours.

de la fluorescence émise est donc constant. Pour des saturations plus faibles, ce facteur est divisé par un facteur 3-4. Cette variation n'influe pas significativement l'allure de la fluorescence. Nous ne reporterons pas ce coefficient sur les données expérimentales. De plus, notre démarche est plutôt qualitative sur l'étude de la fluorescence. Nous ne nous intéressons pas précisément au nombre d'atomes à un point de fonctionnement donné mais plutôt à son évolution lorsque les conditions sont modifiées.

L'analyse théorique a confirmé la corrélation entre anisotropie et ellipticité. Les détecteurs sont placés de manière à pouvoir enregistrer la dimension du nuage dans les directions des faisceaux lasers. Une caméra est notamment placée pour observer le plan vertical et ainsi mesures les deux tailles caractéristiques du nuage. Il est plus simple de déduire l'ellipticité à partir des mesures de tailles effectuées par le même détecteur : cette caméra sera utilisée pour l'analyse quantitative du système. Il s'agit d'une caméra CCD refroidie thermoélectriquement fabriquée par Roper Scientific (TE/CCD 512 EFT). Elle permet d'acquérir des images de 512×512 pixels (chaque pixel mesure $15 \times 15\,\mu\text{m}$) encodés sur 14 bits.

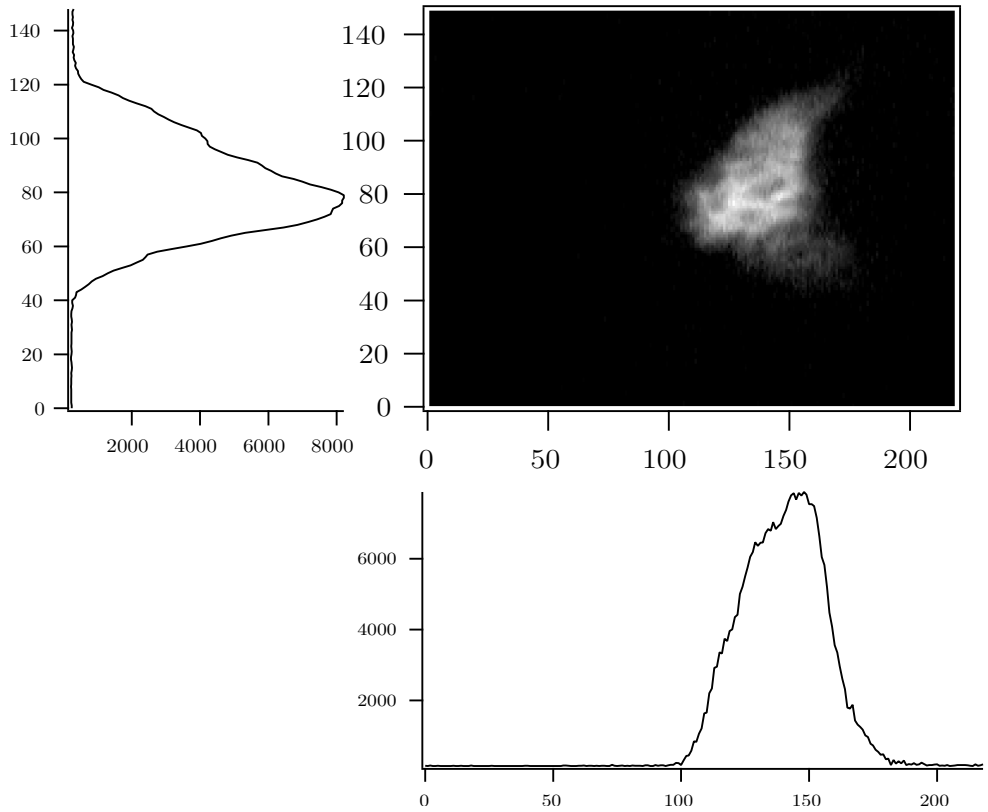


FIGURE 3.3 – Obtention de profils à partir d'une image.

Les images enregistrées sont ensuite analysées grâce à un algorithme développé sur le logiciel IGOR Pro (WaveMetrics). Le traitement quantitatif des images est constitué de deux étapes : une amélioration du rapport signal sur bruit et une détermination des caractéristiques du nuage. La première étape est une projection verticale et horizontale de l'image (voir figure 3.3). En supposant que le bruit est aléatoire et uniforme sur l'ensemble de l'image, nous obtenons deux profils intégrés de la fluorescence avec un bruit de faible amplitude autour de sa valeur moyenne. Une routine de régression ajuste ensuite les paramètres d'une fonction gaussienne sur chaque profil longitudinal et chaque profil transverse. Le maximum nous donne accès à l'intensité de la fluorescence. Les largeurs de la gaussienne permettent de mesurer la taille transverse $L_\perp$ et la taille longitudinale $L_\parallel$. Nous pouvons ensuite en déduire l'ellipticité définie comme le rapport $L_\perp/L_\parallel$.

Nous disposons de quatre paramètres de contrôle dans la configuration décrite précédemment : l'intensité et la fréquence des faisceaux longitudinaux et transverses. Une série de mesures est composée d'enregistrements pour un intervalle de désaccord longitudinal $\Delta_\parallel$

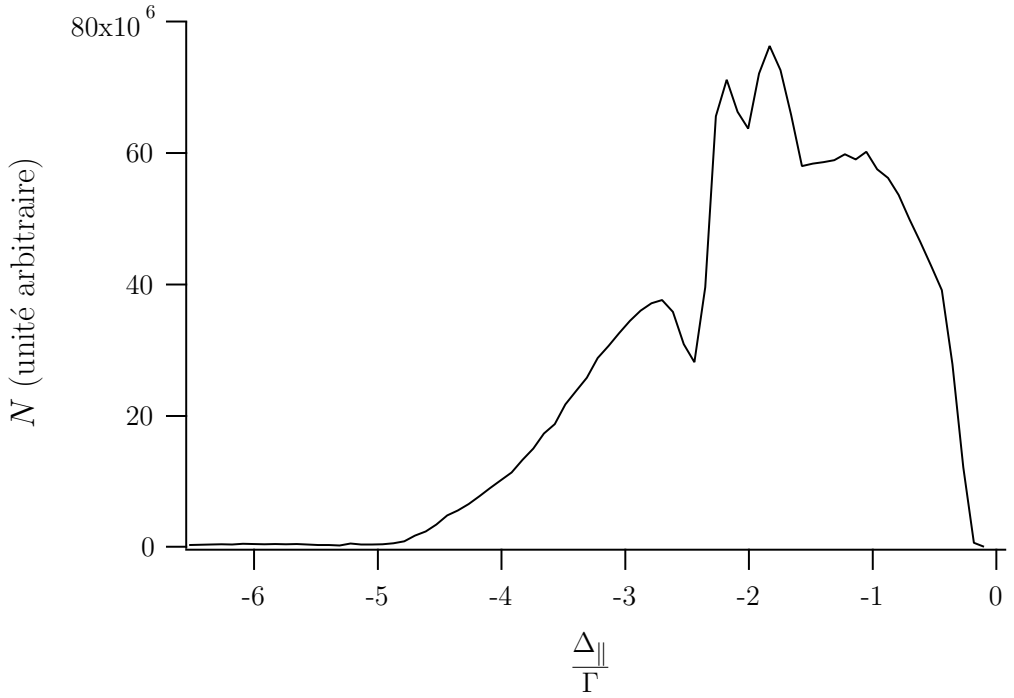


FIGURE 3.4 – Évolution du nombre d'atomes N en fonction du désaccord longitudinal $\Delta_{\parallel}$ avec $\Delta_{\perp} = -2\Gamma$ et $I_{\parallel} \simeq I_{\perp} \simeq 2I_{sat}$.

permettant l'observation de fluorescence, tout en conservant le désaccord transverse $\Delta_{\perp}$ et les deux intensités $I_{\perp}$ et $I_{\parallel}$ constantes. Plusieurs séries de mesures ont été enregistrées pour lesquelles la valeur de ces trois paramètres a été modifiée.

3.3 Résultats expérimentaux

3.3.1 analyse de la fluorescence

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à l'évolution du nombre d'atomes N dans le nuage. La figure 3.4 montre la variation de N en fonction du désaccord longitudinal pour un piège dont l'anisotropie est uniquement introduite sur la fréquence, puisque $I_{\parallel} \simeq I_{\perp} \simeq 2I_{sat}$ et $\Delta_{\perp} = -2\Gamma$. Cette courbe présente une allure semblable à ce qui peut être observé dans un piège traditionnel. Le maximum de fluorescence est obtenu aux alentours de -2Γ. Le nombre d'atomes décroît de part et d'autre pour des désaccords où le piégeage longitudinal devient de plus en plus faible. La principale différence est observée autour du point où les lasers ont la même fréquence. En effet, la courbe exhibe une forte variation du nombre d'atomes

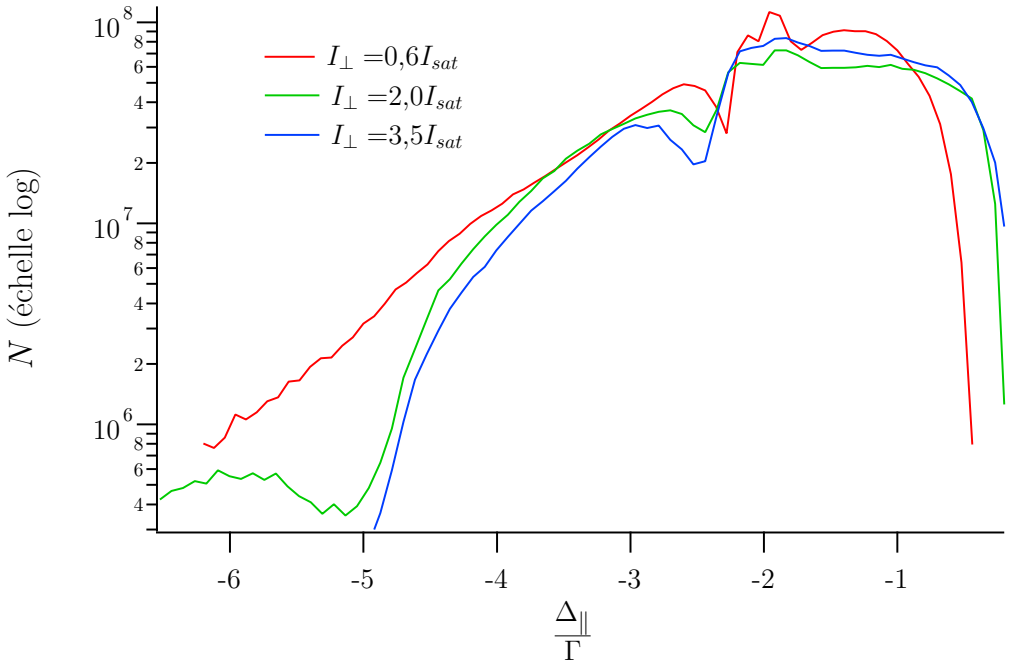


FIGURE 3.5 – Évolution du nombre d'atomes N (échelle logarithmique) en fonction du désaccord longitudinal $\Delta_\parallel$ pour plusieurs intensités transverses $I_\perp$ avec $\Delta_\perp = -2\Gamma$ et $I_\parallel \simeq 2I_{sat}$.

pour une différence de fréquences $\left|\Delta_\perp - \Delta_\parallel\right| < 0,5\Gamma$. Cet intervalle correspond à l'écart d'énergie entre les sous-niveaux magnétiques fondamentaux mesuré dans [Grison1991]. Ce comportement est donc la manifestation de processus Raman entre les différents sous-niveaux magnétiques de l'atome de Césium. La même observation a été faite quelle que soit la valeur du désaccord transverse. Cet effet n'est pas décrit dans la modélisation précédente puisque un état fondamental $J = 0$ ne possède pas de sous-structure a été choisi. De plus, la situation pour laquelle les fréquences des deux faisceaux sont aussi proches ne nous intéresse pas car l'anisotropie générée est très faible [Heo2007, Noh2007]. Pour la réalisation d'un piège unidimensionnel, la différence de fréquence serait plus importante que $\Gamma/2$, de manière à ce que la dynamique selon chaque direction soit très différente.

L'allure décrite précédemment est analogue pour tous les désaccords $\Delta_\perp$ utilisés, inférieurs à -2Γ. En revanche, le comportement du nombre d'atomes est fortement modifié par un changement de l'intensité transverse, notamment lorsque les faisceaux longitudinaux sont loin de résonance. La figure 3.5 montre l'évolution de N, toujours en fonction de $\Delta_\parallel$, pour différentes valeurs de $I_\perp$. Lorsque $I_\perp < 2I_{sat}$ (courbe rouge), le nombre d'atomes décroît régulièrement jusqu'à la disparition du piège aux alentours de $\Delta_\parallel \simeq -6,5\Gamma$. Pour des intensités

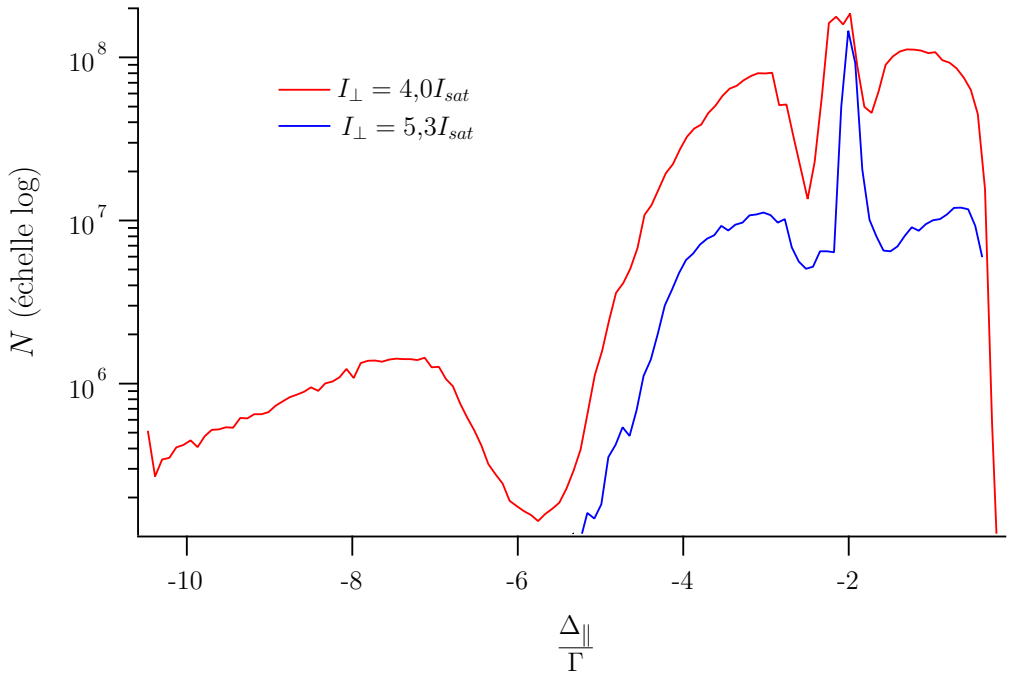


FIGURE 3.6 – Évolution du nombre d'atomes N (échelle logarithmique) en fonction du désaccord longitudinal $\Delta_\parallel$ pour des intensités transverses $I_\perp$ élevées avec $\Delta_\perp = -2\Gamma$ et $I_\parallel = 9I_{sat}$.

transverses plus grandes ($I_\perp > 2I_{sat}$), N décroît beaucoup plus rapidement de telle façon que le nuage disparaît à $\Delta_\parallel \simeq -5\Gamma$ pour $I_\perp = 3,5I_{sat}$ (courbe bleue). Un phénomène inattendu se produit pour $I_\perp = 2,0I_{sat}$ (courbe verte) : le nuage disparaît à $\Delta_\parallel \simeq -5\Gamma$ mais réapparaît pour des désaccords plus élevés, avant de disparaître définitivement à $\Delta_\parallel \simeq -7\Gamma$. Le faible nombre d'atomes présents dans le nuage ayant réapparu pourrait suggérer une transition vers le régime thermique. Toutefois, la taille du nuage est toujours de l'ordre du mm, ce qui contredit cette hypothèse. De plus, pour d'autres valeurs de paramètres pour lesquelles ce phénomène est observé, le nombre d'atomes peut atteindre quelques % du nombre maximal. Ceci est visible sur la figure 3.6.

Le comportement observé sur ces courbes semblent être la manifestation expérimentale de l'allure de la raideur calculée dans le chapitre précédent. En effet, nous avions remarqué que pour des intensités transverses intermédiaires, le piégeage disparaissait pour un intervalle de désaccords longitudinaux. Notre modèle étant simplifié, les paramètres expérimentaux ne correspondent pas exactement aux paramètres théoriques utilisés pour observer ce phénomène. Toutefois, l'accord qualitatif est évident. Il s'agit d'une manifestation de l'importance du couplage entre les différentes directions.

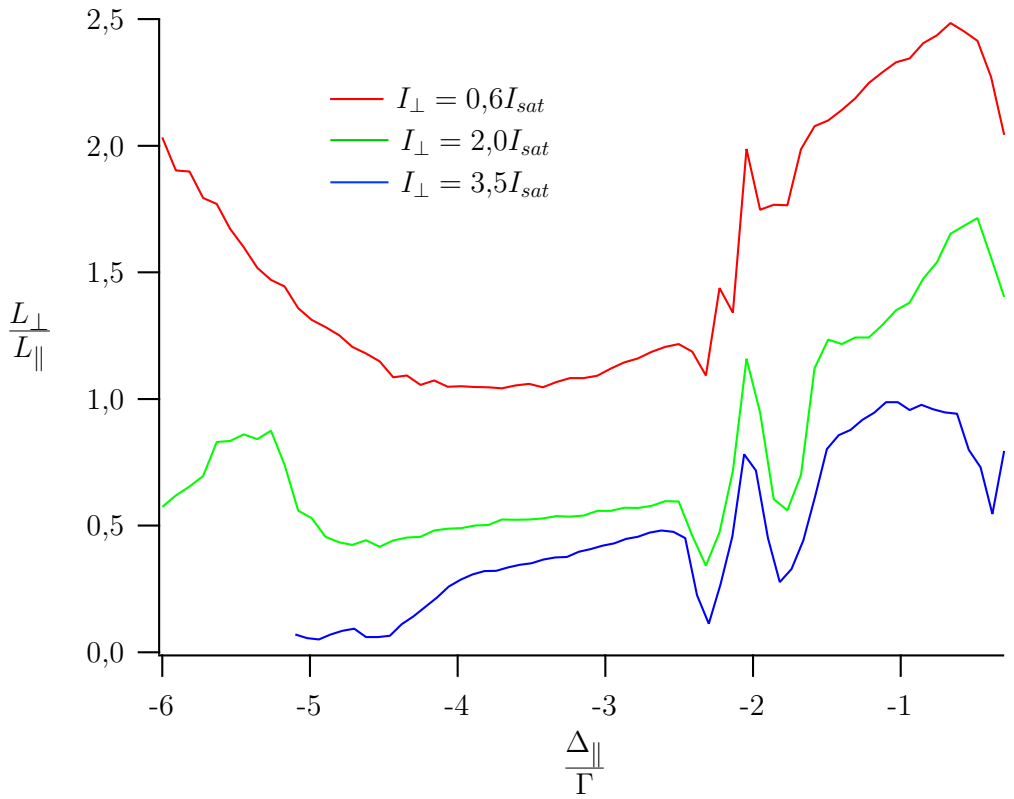


FIGURE 3.7 – Évolution de l'ellipticité en fonction du désaccord longitudinal $\Delta_\parallel$ pour différentes intensités transverses $I_\perp$ avec $\Delta_\perp = -2\Gamma$ et $I_\parallel = 2I_{sat}$. Ces paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.5.

3.3.2 évolution de l'ellipticité

La description théorique a mis en évidence le rôle prépondérant de l'ellipticité. La figure 3.7 présente les variations de cette quantité en fonction de $\Delta_\parallel$, pour des valeurs de $I_\perp$ qui encadrent I_{sat}. L'ellipticité présente un comportement non trivial. Elle décroît à mesure que le désaccord longitudinal augmente, après une rapide augmentation près de résonance. Elle augmente de nouveau lorsque ces faisceaux sont très désaccordés. L'irrégularité observée autour de $\Delta_\parallel = \Delta_\perp$ est probablement liée à des résonances Raman, comme nous l'avons déjà évoqué lors de l'analyse des courbes de fluorescence. Nous remarquons tout de même que plus l'intensité transverse est grande, plus le nuage est comprimé dans cette direction. Ces mesures confirment un résultat découlant d'un raisonnement qui aurait pu être jugé naïf.

Toutes ces mesures nous montrent que le comportement du nuage dans un piège anisotrope est loin d'être simple et intuitif. Les couplages entre les différentes directions semblent

jouer un rôle très important. Afin de confirmer cette impression, nous allons comparer ces mesures avec les modèles théoriques qui tiennent compte ou non de ces interactions.

L'élément commun entre la description théorique et les mesures est le coefficient A. Il s'agit d'un coefficient géométrique qui apparaît dans la force de diffusion multiple. Il résulte du choix d'un ellipsoïde de révolution pour la forme du nuage. Il ne dépend que de l'ellipticité : il est donc facile d'obtenir A expérimentalement. L'équilibre des forces nous a fourni une expression de A en fonction des coefficients caractéristiques de chaque processus existant dans le nuage. Cette expression est la suivante :

$$A = \frac{\kappa_\parallel}{\kappa_\perp + \kappa_\parallel}\left(1 + \frac{i^{(0)}_{+\parallel}\sigma_{L\parallel}\kappa_\perp - 2i^{(0)}_{+\perp}\sigma_{L\perp}\kappa_\parallel}{\kappa_\parallel\left(\sigma_{R\parallel}\,\sigma_{L\parallel}\,i^{(0)}_{+\parallel} + 2\sigma_{R\perp}\,\sigma_{L\perp}\,i^{(0)}_{+\perp}\right)}\right)$$

Pour rappel, $i^{(0)}_{+\parallel}$ et $i^{(0)}_{+\perp}$ représentent l'intensité locale totale selon chaque direction, elles ont été supposées constantes. Dans le cas d'un piège rétro-réfléchi, ces quantités s'expriment en fonction des intensités incidentes de la manière suivante :

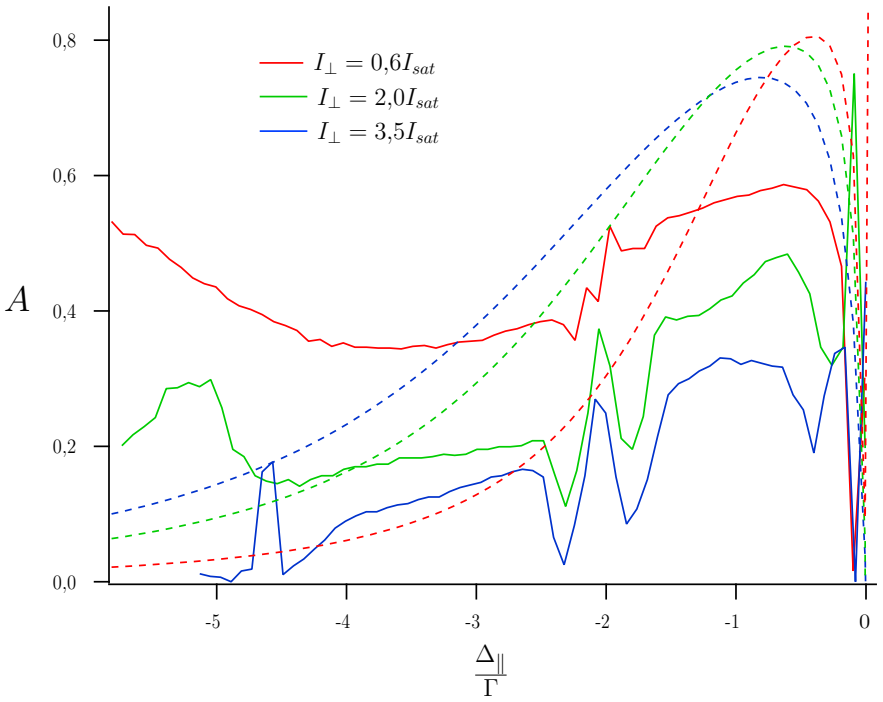
$$\begin{aligned} i^{(0)}_{+\substack{\parallel\\\perp}} &= 2I_{\substack{\parallel\\\perp}}(1 - 2\sigma_{L\substack{\parallel\\\perp}}nL_{\substack{\parallel\\\perp}}) \\ &\simeq 2I_{\substack{\parallel\\\perp}} \end{aligned}$$

L'absorption est supposée faible à travers la totalité du nuage. Il est toutefois possible de considérer une diminution de l'intensité, mais le résultat n'est que très peu modifié.

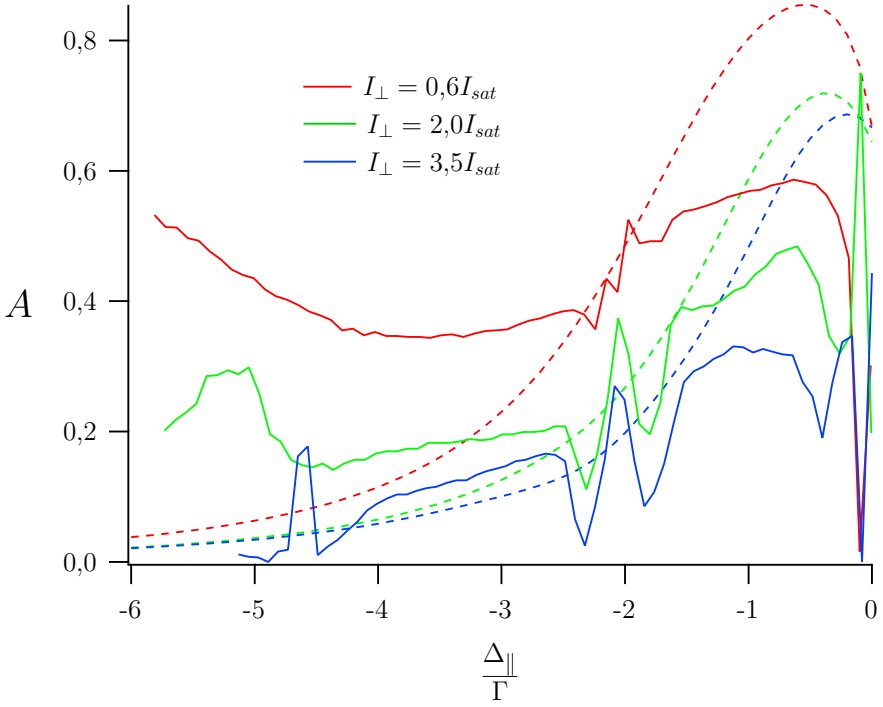
L'expression de A a été déterminée indépendamment de tout choix de la structure atomique. Il est donc possible de comparer différents modèles. Nous avons développé un modèle afin de prendre en compte le couplage entre les différentes directions du piège. Nous allons donc calculer A pour ce modèle et pour le modèle usuel, c'est-à-dire unidimensionnel. Nous pourrons ainsi conclure sur la pertinence de ces deux approches.

Les expressions de la raideur κ du piège et des sections efficaces d'absorption σ_L et de réabsorption σ_R ont été calculées dans le chapitre 2. Afin de calculer A dans le modèle usuel, nous avons utilisé les expressions calculées dans la section 2.2 où seulement une paire de faisceaux est considérée. La figure 3.8a montre clairement que ce modèle est incapable de reproduire les mesures. Cette incompatibilité est profonde car les courbes ne suivent pas le comportement observé en fonction de l'intensité transverse. Les courbes théoriques (pointillées) se s'agencent pas de la même façon que les courbes expérimentales (pleines) pour une variation de $I_\perp$(représentée en couleur). L'évolution expérimentale observée correspond à une plus forte compression du nuage dans les directions transverses quand $I_\perp$est augmentée, ce qui semble naturel. Les courbes théoriques prévoient le contraire.

Nous avons déjà évoqué que le modèle tenant compte de l'interaction entre les différentes directions permettait d'expliquer le réapparition du nuage. Le calcul de A est effectué de la



(a)



(b)

FIGURE 3.8 – Comparaison des coefficients A mesurés (traits pleins) et calculés (tirets) : (a) modèle « standard » unidimensionnel et (b) modèle avec saturation croisée. Les courbes d'ellipticités utilisées pour déterminer A sont celles de la figure 3.7, les paramètres sont $\Delta_\perp = -2\Gamma$ et $I_\parallel = 2I_{sat}$.

manière suivante : les coefficients longitudinaux $\kappa_{\parallel}$ et $\sigma_{L\parallel}$ sont ceux calculés dans la section 2.3, les expressions des autres coefficients sont celles du modèle standard. Notre méthode est adaptée à la détermination des quantités longitudinales car, dans ce cas, les faisceaux transverses sont identiques. L'inverse n'est pas vrai puisqu'il faudrait tenir compte des contributions de champs longitudinal et transverse de fréquences différentes. Ce modèle décrit donc deux directions indépendantes et une troisième tenant compte du caractère tridimensionnel du piège. La figure 3.8b montre que ce modèle permet de reproduire qualitativement les mesures d'ellipticités, comme il expliquait la réapparition du nuage. Bien entendu, le choix d'un schéma atomique approché conduit à un accord qui n'est pas quantitatif. Un modèle plus proche de la réalité est nécessaire pour améliorer la consistance des prédictions.

Conclusion

Nous avons complété [Romain2013] l'étude du PMO anisotrope en fréquence réalisée dans [Heo2007, Noh2007]. Ce piège présente plusieurs comportements qui n'apparaissent pas dans un piège traditionnel. Nous avons observé la présence de résonances Raman, lorsque la fréquence des faisceaux est très proche l'une de l'autre. Le fait que le nuage disparaisse puis réapparaisse pour des désaccords où le piégeage est supposé fonctionner est également un phénomène inattendu. Ces deux effets montrent l'importance des couplages entre les différentes directions du PMO. Une comparaison avec le modèle théorique de la section 2.3 permet de comprendre l'origine de la disparition prématurée du nuage et de son retour. À l'inverse, les prédictions du modèle usuel ne sont pas en accord avec nos observations. Toutefois, les nombreuses simplifications effectuées dans le modèle tenant compte des effets croisés ne permettent pas une description quantitative de ce système.

D'autre part, il semble fortement compromis de pouvoir utiliser ce type de piège pour l'étude de la dynamique du nuage, tant les interactions entre directions sont importantes. Ces couplages laissent penser que le développement d'instabilités ne pourrait être contenu dans une seule direction. Le piège anisotrope n'est donc pas un bon candidat à l'observation d'une dynamique instable unidimensionnelle.

Chapitre 4

Mesure de la section efficace de réabsorption

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes principalement intéressés au piège anisotrope. Cependant, de nombreux résultats sur ce type de piège peuvent être appliqués au piège isotrope traditionnel. La principale raison est que celui-ci est anisotrope par son champ magnétique. Le piège traditionnel peut donc être traité comme un piège anisotrope pour lequel tous les lasers sont identiques. En particulier, nous pouvons conserver une forme ellipsoïdale pour modéliser le nuage. Par conséquent, nous pouvons réutiliser la relation entre l'ellipticité du nuage et le rapport entre la section efficace d'absorption σ_L et de réabsorption σ_R fournie par la description théorique du PMO.

Nous avons vu dans le chapitre 2 que le calcul de σ_R est assez délicat. De nombreuses expressions ou valeurs de cette grandeur peuvent être trouvées dans la littérature [Sesko1991, Steane1992, Townsend1995, Pruvost2000], mais la possibilité d'en faire une mesure est très intéressante car cette quantité n'a pratiquement jamais été mesurée [Sesko1991]. Dans ce travail, le rapport $S = \sigma_R/\sigma_L$ des sections efficaces apparaît dans l'équation différentielle donnant la densité atomique. Celle-ci est intégrée numériquement, S jouant le rôle de paramètre. La solution obtenue est ensuite ajustée sur des mesures d'une seule taille du nuage en fonction du nombre d'atomes piégés. D'autre part, la raideur a été mesurée dans le régime thermique [Townsend1995] et dans le régime de diffusion multiple [Kim2005], pour les conditions du refroidissement Doppler. La section efficace σ_L résulte d'une mesure d'absorption à travers le nuage. Une mesure de σ_R présente également un intérêt dans l'étude de la dynamique du nuage, car la diffusion multiple joue un rôle très important dans les instabilités observées ou prédites jusqu'à présent, ainsi que dans l'analogie avec la physique des plasmas [Mendonca2008, Mendonca2012]. De manière plus générale, S caractérise les interactions à longue portée [Olivetti2009, Chalony2013]. Nous proposons de tirer parti de la relation entre

l'ellipticité et S afin d'obtenir une mesure directe du rapport des sections efficaces. Ainsi, tous les coefficients caractéristiques du PMO seront déterminés expérimentalement.

Dans un premier temps, nous reprendrons et développerons les résultats donnés dans le chapitre 2 sur le piège traditionnel. Nous étudierons ensuite les mesures de tailles pour la détermination de σ_R. Nous discuterons notamment l'efficacité de cette méthode de mesure. Une comparaison avec les calculs théoriques sera ensuite abordée.

4.1 Modélisation du piège isotrope

L'équilibre du nuage nous a donné la densité dans le régime de diffusion multiple et une relation liant les sections efficaces et l'ellipticité :

$$n = \frac{2c\kappa}{3I_{0+}\,\sigma_L^2\,(S-1)} \tag{4.1a}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3S}\right) \tag{4.1b}$$

$$S = \frac{\sigma_R}{\sigma_L} \tag{4.1c}$$

L'absorption a été supposée faible : l'intensité totale est constante et la différence locale entre les intensités d'une paire est linéarisée. Le coefficient A est une fonction de l'ellipticité, défini comme :

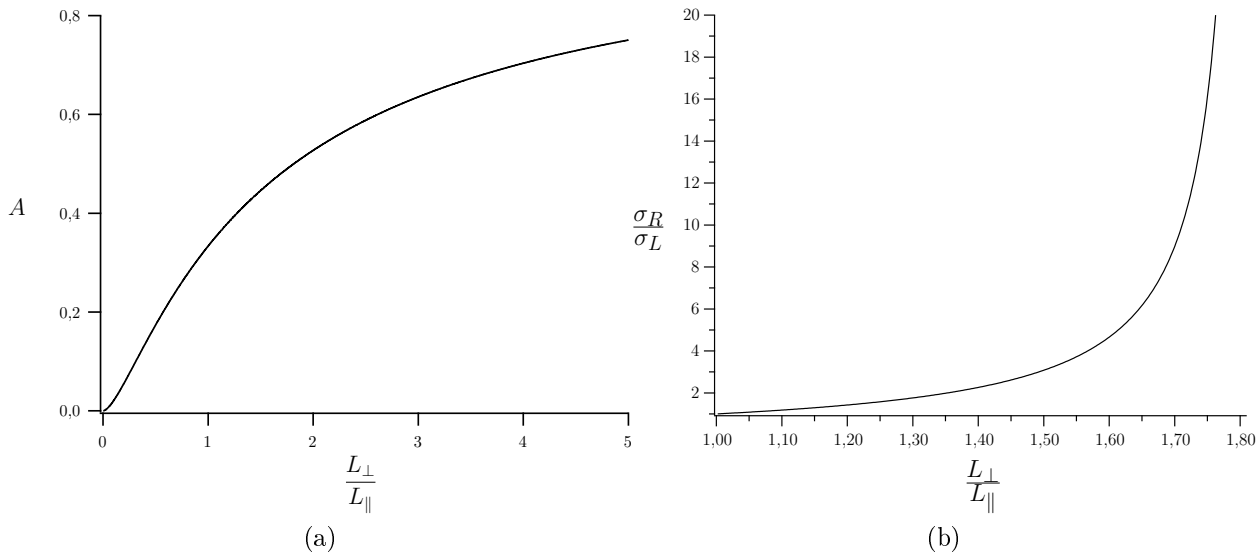
$$A = \begin{cases} \left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\beta}}{1-\sqrt{\beta}}\right|\right) & \textit{pour } \beta > 0 \\ \left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{-\beta}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}\right)\right) & \textit{pour } \beta < 0 \end{cases} \tag{4.2a}$$

$$\beta = 1-\left(\frac{L_\perp}{L_\parallel}\right)^2 \tag{4.2b}$$

Il est représenté sur la figure 4.1a : $L_\parallel < L_\perp$ décrit un nuage oblate et $L_\parallel > L_\perp$ un nuage prolate.

L'analyse des équations 4.1a et 4.1b permet de déduire un intervalle de définition pour A. La densité est une grandeur positive, ce qui implique que $S > 1$, soit $\sigma_R > \sigma_L$. Les sections efficaces sont également positives et *a fortiori* leur rapport l'est également. Ces deux conditions donnent :

$$\frac{1}{3} < A < \frac{1}{2} \tag{4.3}$$



(a) (b)

FIGURE 4.1 – Évolution du coefficient A (a) et du rapport des sections efficaces (b) en fonction de l'ellipticité.

La courbe de la figure 4.1a permet de déduire un intervalle possible pour l'ellipticité du nuage :

$$1 < \frac{L_\perp}{L_\parallel} < 1,81 \tag{4.4}$$

Ce résultat montre que le nuage est toujours de forme oblate, c'est-à-dire plus allongé dans le plan transverse à l'axe des bobines. La limite sphérique donne $S = 1$, ce qui impliquerait que la densité tende vers l'infini. Cette situation n'est pas physiquement acceptable. Il s'agit d'une limitation de ce modèle qui considère que la température est nulle. L'ellipticité maximale de 1,81 est obtenue quand la diffusion multiple est beaucoup plus grande que l'effet d'ombre ($\sigma_R \gg \sigma_L$). Cet intervalle de valeurs d'ellipticités est très différent du comportement du nuage dans le régime thermique, dans lequel l'ellipticité est prédite constante et égale à $\sqrt{2}$.

La figure 4.1b représente l'évolution du rapport des sections efficaces en fonction de l'ellipticité. Cette courbe confirme que plus la réabsorption est importante par rapport à l'absorption, plus le nuage est allongé dans la direction transverse.

Le calcul des sections efficaces peut être trouvé dans la section 2.2.3. Nous ne rappellerons ici que les résultats. Des expressions ont pu être obtenues pour certaines valeurs des paramètres de contrôle dans le cadre de l'approximation séculaire ($\Omega^2 + \Delta^2 \gg \Gamma^2$). Les différents cas sont représentés sur la figure 4.2. Les expressions pour chaque zone de l'espace

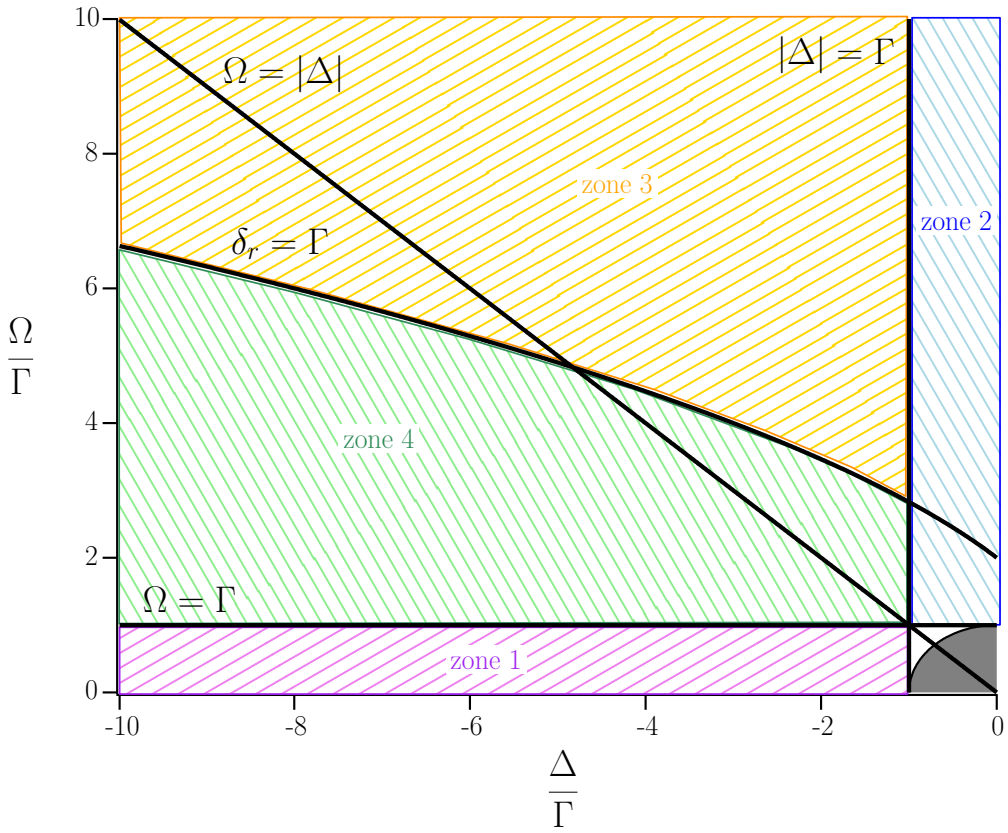


FIGURE 4.2 – Espace des paramètres des faisceaux lasers, zone 1 : $\Omega \ll \Gamma$, zone 2 : $|\Delta| \ll \Gamma$, zone 3 : $\delta_r > \Gamma$, zone 4 : $\delta_r < \Gamma$.

des paramètres sont reportées dans le tableau 4.1.

4.2 Mesures

Les mesures nécessaires à la détermination expérimentale de σ_R sont les dimensions du nuage dans la direction longitudinale et dans le plan transverse. Sur notre dispositif, les faisceaux lasers de ce plan sont inclinés de 45° par rapport à la verticale. Une caméra CCD peut donc être placée au dessus de la cellule, de manière à pouvoir enregistrer les deux tailles avec une même image. Rappelons que le piège utilisé est formé avec trois paires de faisceaux rétro-réfléchis. Le dispositif a été modifié par rapport à celui décrit dans le chapitre 3. En effet, nous sommes revenus à une configuration traditionnelle avec un seul laser piégeant. Le faisceau incident est séparé pour créer une paire selon chaque direction de l'espace.

	zone 1 $\Omega \ll \Gamma$	zone 2 $\lvert\Delta\rvert \ll \Gamma$	zone 3 $\Omega \gg \lvert\Delta\rvert \gg \Gamma$	zone 4 $\lvert\Delta\rvert \gg \Omega \gg \Gamma$
$\frac{\sigma_R}{\sigma_0}$	$\frac{\Gamma^2}{4\Delta^2}$	$\frac{25}{48}\frac{\Gamma^2}{\Omega^2}$	$\frac{1}{4}\frac{\Delta^2\Omega^2}{4\Delta^4+8\Delta^2\Omega^2+3\Omega^4}$	$\frac{\Omega^2}{8\Delta^2}$
$\frac{\sigma_R}{\sigma_L}$	1	$\frac{25}{24}$	$\frac{1}{2}\frac{\Delta^2\Omega^2}{4\Delta^4+8\Delta^2\Omega^2+3\Omega^4}\frac{2\Delta^2+\Omega^2}{\Gamma^2}$	$\frac{\Omega^2}{2\Gamma^2}$

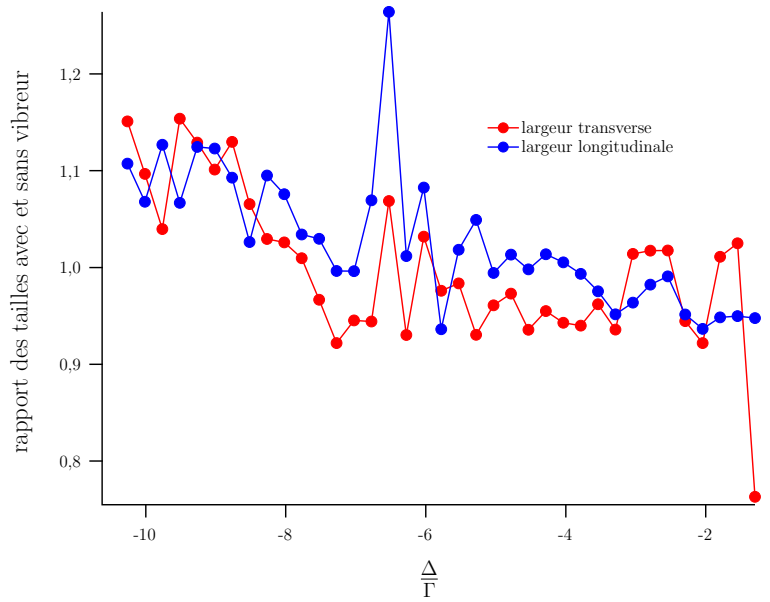
TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif de l'expression de la section efficace de réabsorption dans chaque zone de paramètres dans le cadre de l'approximation séculaire ($\Omega^2 + \Delta^2 \gg \Gamma^2$).

L'objectif de ces mesures est quantitatif. Il est donc nécessaire d'améliorer la précision du protocole expérimental. Si ce n'est pas le cas, la détermination de σ_R ne sera pas concluante. L'élément crucial de ce type de mesures est la forme du nuage. En effet, elle est très sensible à l'alignement des faisceaux (notamment celui des faisceaux retours) et aux fluctuations de phase relative des différents faisceaux. Un certain nombre de précautions doivent être prises afin de s'affranchir de ces problèmes et de déterminer de façon précise et reproductible la forme du nuage.

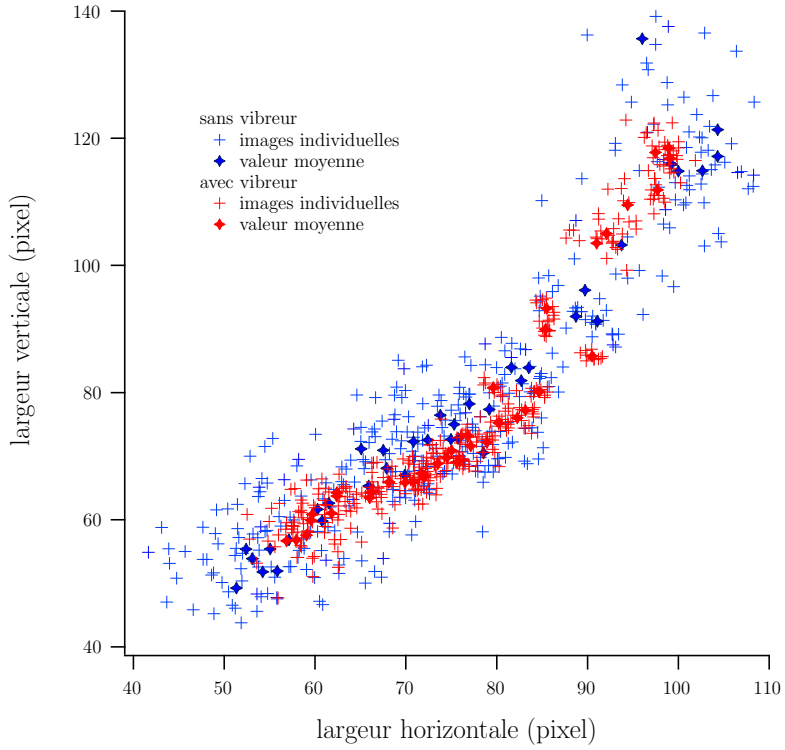
4.2.1 optimisation du dispositif

Un PMO est composé de six faisceaux lasers qui se coupent en un point de l'espace. Ce système est propice à la formation de réseaux d'interférences. Les franges ainsi formées entraînent des inhomogénéités dans la répartition spatiale des atomes. Ainsi, des zones sont plus peuplées que d'autres et provoquent une détérioration de la forme du nuage. De plus, les fluctuations de phase relative des faisceaux engendrent un mouvement aléatoire des franges dans le nuage. Pour éviter cet effet, un vibreur a été placé sur l'armature de support des miroirs. Ce moteur vibre à une fréquence de quelques kHz et provoque un lissage des franges. Cette fréquence a été choisie car la modulation est ainsi plus rapide que les échelles de temps du système. Les atomes ne voient donc qu'une intensité homogène moyennée. Les courbes de la figure 4.3a montrent que la présence du vibreur a peu d'impact sur les mesures de tailles. À l'inverse, le vibreur permet une nette diminution de la fluctuation de la forme du nuage comme représenté sur la figure 4.3b.

Malgré la présence du vibreur, l'alignement des faisceaux retours par rapport aux faisceaux allers de chaque paire demeure un facteur critique pour la forme du nuage, en par-

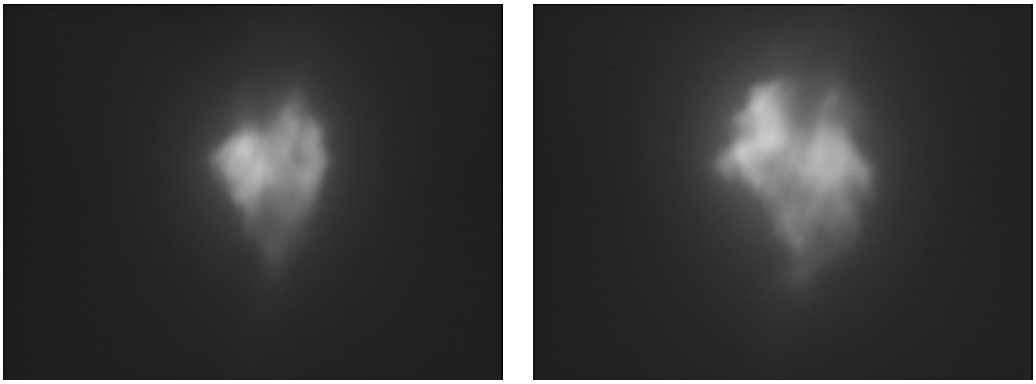


(a)



(b)

FIGURE 4.3 – Effet du vibreur sur les mesures de tailles longitudinales et transverses : (a) rapport moyen des mesures effectuées avec et sans vibreur pour chaque largeur en fonction du désaccord du laser et (b) représentation des largeurs verticales en fonction des largeurs horizontales correspondantes pour les mesures avec vibreur (rouge) et sans (bleu), les valeurs moyennes pour chaque point de fonctionnement sont symbolisées par les marqueurs épais.



(a) (b)

FIGURE 4.4 – Influence d'un désalignement du faisceau rétro-réfléchi longitudinal : les images correspondent à deux réglages du miroir de renvoi, en conservant un écart angulaire inférieur à $0,2\,\mathrm{mrad}$.

ticulier pour obtenir une bonne reproductibilité des mesures. L'alignement est effectué en superposant les faisceaux allers et retours à l'aide d'un diaphragme, qui se trouve à $2\,\mathrm{m}$ du miroir de renvoi. Pour un réglage à l'oeil jugé satisfaisant, l'écart angulaire entre un faisceau aller et son faisceau retour est inférieur à $0,2\,\mathrm{mrad}$. Ceci crée un interfrange de l'ordre du mm. Quelques franges sont donc visibles dans le nuage [Steane1992, Wallace1994]. Cependant, le nuage peut être déformé même si l'interfrange devient de l'ordre de la taille du nuage. Nous constatons que la précision de $0,2\,\mathrm{mrad}$ est insuffisante car la forme du nuage est sensible à des réglages encore plus fins, comme le montrent les images de la figure 4.4. Pour optimiser l'alignement, nous réglons les miroirs de renvoi en tentant d'obtenir le nuage le plus symétrique possible, tout en s'assurant que l'écart angulaire est toujours inférieur à 0,2 mrad.

L'erreur sur la détermination des largeurs est obtenue par l'écart-type (racine carrée de la variance) de l'ensemble des $N_{éch}$ mesures (ici, $N_{éch} = 10$ images par point de fonctionnement). La théorie des probabilités nous dit que l'écart-type sur la moyenne des mesures est réduit d'un facteur $\sqrt{N_{éch}}$ par rapport à l'erreur sur une seule mesure, soit un facteur 3 dans notre cas.

L'erreur sur le rapport S des sections efficaces est calculée à partir de l'expression de S en fonction de l'ellipticité. La forte non-linéarité de cette relation engendre que les barres d'erreurs sont asymétriques. En effet, nous pouvons voir sur la courbe de la figure 4.1b qu'une même incertitude $\Delta\epsilon$ de part et d'autre de l'ellipticité ne provoque pas les mêmes erreurs sur S. L'incertitude ΔS n'est donc pas centrée autour de la valeur S, elle est décalée vers

les grands rapports.

4.2.2 mesures d'ellipticités

En prenant les précautions énoncées précédemment, il est possible de photographier le nuage de manière assez reproductible. Nous choisissons dans un premier temps de mesurer σ_R à un point de fonctionnement pour lequel la théorie donne une expression sans équivoque. De cette façon nous testons notre méthode de mesure. Pour choisir ce point de fonctionnement, examinons les situations du tableau 4.1. Les deux premiers cas ($\Omega \ll \Gamma$ et $|\Delta| \ll \Gamma$) sont très difficiles à mettre en oeuvre expérimentalement. En effet, si l'intensité est trop faible, peu d'atomes seront piégés et il est possible que le nuage soit dans le régime thermique. D'autant que pour satisfaire l'approximation séculaire, les faisceaux devraient être très désaccordés, ce qui diminue encore le nombre d'atomes. Le refroidissement et le piégeage sont également faibles lorsque les faisceaux sont très proches de résonance. La zone 3 ($\Omega \gg |\Delta| \gg \Gamma$) est également difficile à réaliser car nous ne disposons pas d'assez de puissance lumineuse. La zone 4 ($|\Delta| \gg \Omega \gg \Gamma$) présente deux avantages : c'est une situation pour laquelle le piège est efficace et l'expression du rapport des sections efficaces est très simple. Pour ces paramètres, il s'agit d'une constante :

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_L} = \frac{\Omega^2}{2\Gamma^2} \tag{4.5}$$

Nous allons donc nous placer dans ces conditions.

Les mesures sont effectuées de la manière suivante : pour une intensité constante, le désaccord est augmenté jusqu'à disparition du nuage. Dix images sont enregistrées par point de fonctionnement. La moyenne des ellipticités est effectuée à la fin du traitement des images.

Une première prédiction théorique à vérifier est l'intervalle des valeurs des ellipticités. Le graphique 4.5a représente la statistique des valeurs d'ellipticités mesurées pour un ensemble d'environ 120 points de fonctionnement différents : $-10\Gamma < \Delta < -\Gamma$ et $3I_{sat} < I_{0+} < 10I_{sat}$. Les mesures sont en très bon accord avec l'intervalle calculé : $1 < L_\perp/L_\parallel < 1,81$. En effet, aucun nuage de forme prolate n'a été observé et environ 80 % des ellipticités sont inférieures à la borne supérieure, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.5b. Ce pourcentage s'approche de 90 %, si nous tenons compte des incertitudes de mesures qui seront discutées plus loin. De manière assez systématique, les mesures sont supérieures à la limite théorique quand les lasers sont proches de résonance et aussi lorsqu'ils en sont éloignés. Pour de grands désaccords, le rapport signal sur bruit devient faible. Ces mesures sont donc moins fiables. D'autre part, l'effet d'ombre est très important près de résonance, ce qui provoque un important déplacement du nuage à cause de la rétro-réflexion des faisceaux. Bien que la modélisation

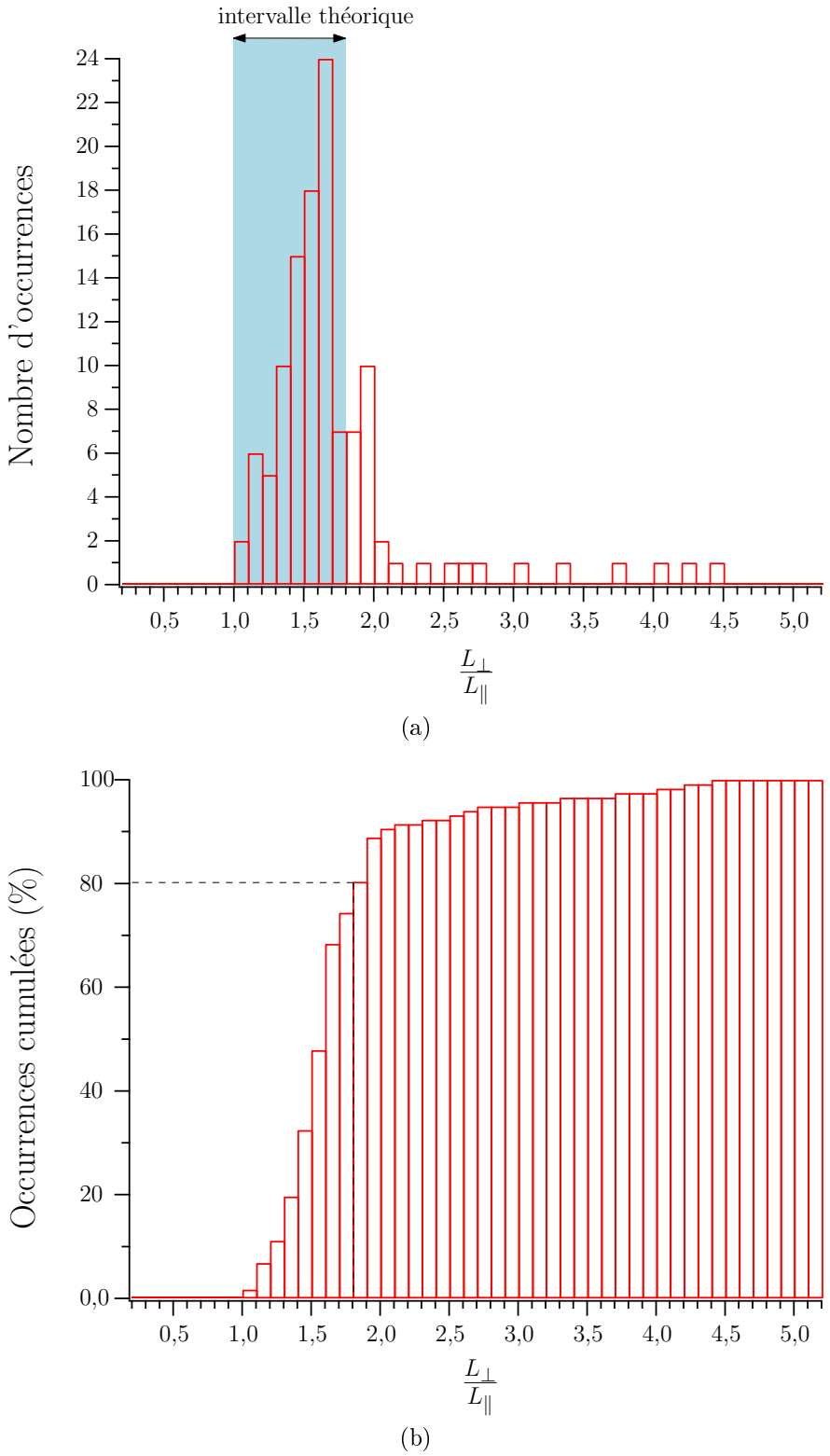


FIGURE 4.5 – Histogrammes représentant la gamme d'ellipticités explorée pour 117 mesures : (a) nombre d'occurrences et (b) pourcentage cumulé.

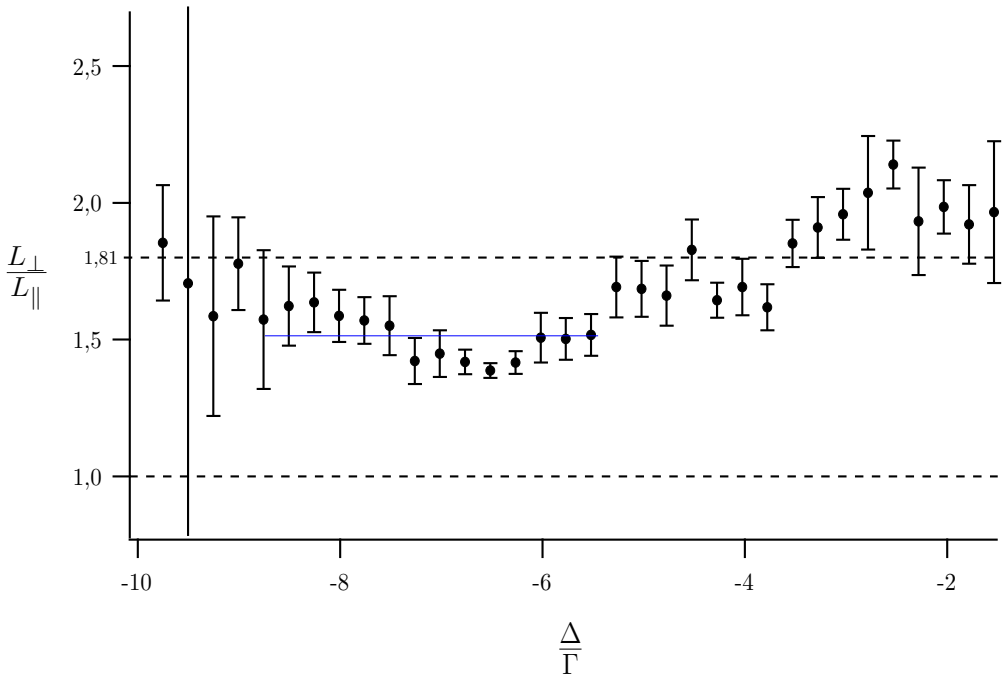


FIGURE 4.6 – Évolution de l'ellipticité en fonction du désaccord pour un intensité incidente de $I_{0+} \simeq 7I_{sat}$. La taille des barres d'erreurs représente l'écart-type calculé à partir des dix enregistrements.

actuelle n'en tienne pas compte, il est assez clair que ce déplacement s'accompagne d'une déformation du nuage. Il devient difficile de conserver une forme ellipsoïdale pour décrire le nuage. L'erreur augmente également dans cette plage de désaccords.

Intéressons-nous à présent aux variations de l'ellipticité en fonction du désaccord. La figure 4.6 représente une série de mesures pour une intensité incidente par faisceau d'environ $7I_{sat}$, soit $\Omega \simeq 3\Gamma$. Nous choisissons l'intervalle de désaccords $-8,8\Gamma < \Delta < -5,5\Gamma$ car il correspond au domaine ($|\Delta| \gg \Omega \gg \Gamma$) choisi pour tester la méthode. Pour cette gamme de désaccords, les mesures de la figure 4.6 évoluent très peu. La valeur moyenne obtenue est de $1,51 \pm 0,08$. La faible dispersion des mesures autour de la valeur moyenne montre qu'il est pertinent d'utiliser cet intervalle pour déterminer le rapport des sections efficaces. Nous l'utiliserons donc de manière systématique dans la suite.

4.2.3 détermination du rapport des sections efficaces

Des séries de mesures ont été effectuées avec des intensités différentes. Le comportement de l'ellipticité est semblable à celui observé sur la figure 4.6. Notamment, l'ellipticité varie

$\frac{\Omega^2}{\Gamma^2}$	4,5	7,0	9,4
intervalle de désaccords	$[-7,0\Gamma, -5,6\Gamma]$	$[-8,8\Gamma, -5,5\Gamma]$	$[-9,2\Gamma, -5,5\Gamma]$
$\frac{L_\perp}{L_\parallel}_{expé}$	$1,39 \pm 0,05$	$1,51 \pm 0,08$	$1,61 \pm 0,09$
$S_{expé}$	$2,2^{+0,3}_{-0,3}$	$3,2^{+1,2}_{-0,7}$	$4,9^{+4,1}_{-1,6}$
$S_{théo}$	2,3	3,5	4,7

TABLE 4.2 – Comparaison des valeurs du rapport des sections efficaces mesurées et calculées.

très peu pour un intervalle de désaccord élevé, similaire à celui évoqué plus tôt. La valeur moyenne des ellipticités est relevée sur l'intervalle de désaccords associé à l'approximation $|\Delta| \gg \Omega \gg \Gamma$. Les données expérimentales conduisant à la détermination de la section efficace sont reportées dans le tableau 4.2. Une comparaison avec les prédictions théoriques est également présentée dans ce tableau. Nous pouvons remarquer que plus l'intensité est élevée, plus le nuage est allongé à grands désaccords. L'erreur sur la moyenne des ellipticités à grands désaccords est faible ($\simeq 5\%$). Les rapports de sections efficaces déduits de ces mesures sont également très proches des valeurs calculées. Cependant, malgré les faibles erreurs sur les ellipticités, les rapports S sont donnés avec une grande incertitude. Ceci s'explique très simplement par la forte pente de la fonction reliant ces deux quantités (voir figure 4.1b). Le rapport augmente énormément pour une faible variation de l'ellipticité. Notre précision maximale sur l'ellipticité est de 0,05, ce qui n'est pas suffisant lorsque l'ellipticité est élevée.

Nous venons de valider cette méthode. Il est donc possible d'étendre ces mesures à des points de fonctionnement pour lesquels la théorie ne fournit pas d'expression simple. La figure 4.7 montre les résultats des mesures de S lorsque l'on fait varier le désaccord du laser. Nous notons une augmentation significative du rapport autour de $\Delta = -5\Gamma$. Près de résonance, S est compris entre 1 et 2. Il s'agit de la zone de désaccords où un grand nombre d'atomes sont piégés : la densité est importante ($S \simeq 1$). Au contraire, S est supérieur à 2 à

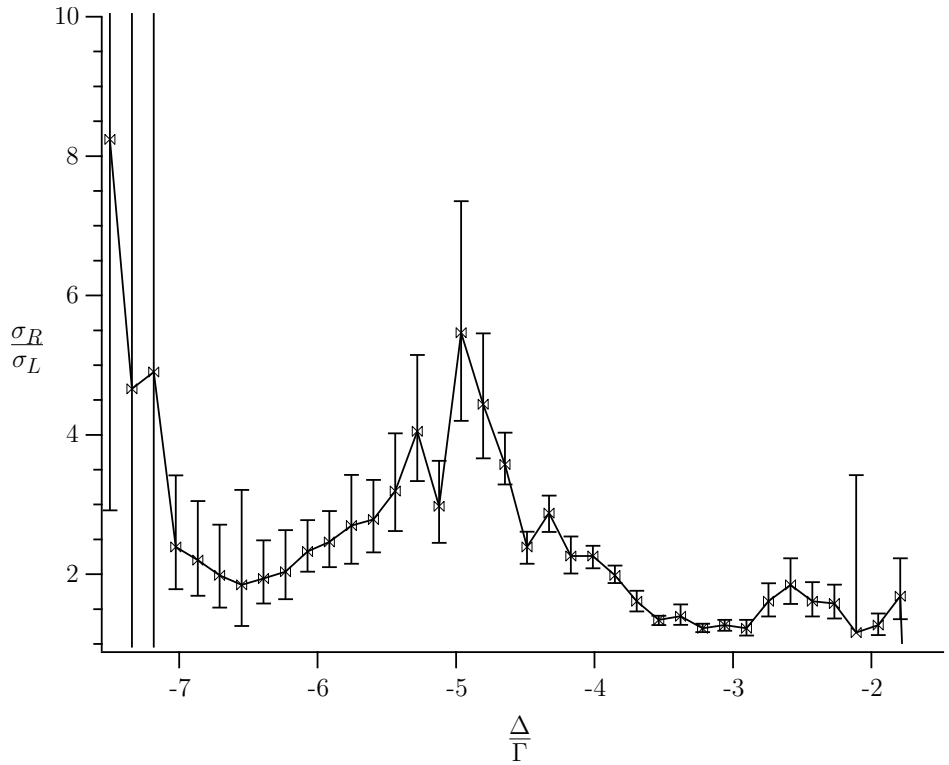


FIGURE 4.7 – Évolution du rapport des sections efficaces en fonction du désaccord Δ pour $I_{0+} \simeq 4,5 I_{sat}$. Les barres d'erreurs représentent une fois l'écart type.

grands désaccords. La contribution du troisième niveau excité (voir section 2.2.3) augmente la réabsorption vis-à-vis de l'absorption. La précision de ces valeurs varie entre 5 et 45 %.

Conclusion

Nous avons proposé et validé une méthode simple de mesure du rapport entre les sections efficaces d'absorption σ_L et de réabsorption σ_R [Romain2014a]. Cette méthode est basée sur le lien entre ce rapport et l'ellipticité du nuage d'atomes froids. Le rapport σ_R/σ_L est déterminé pour une grande partie de l'espace des paramètres, contrairement au calcul théorique. Le modèle théorique fait apparaître une restriction sur les valeurs que peut prendre l'ellipticité. Nous avons également vérifié cette prédiction.

La principale limite de la méthode réside dans la forte non-linéarité entre l'ellipticité et les sections efficaces. Bien que la précision des mesures de tailles puisse être réduite en augmentant le nombre d'acquisitions, l'erreur sur le rapport demeure importante. La

précision augmentant comme la racine carrée du nombre d'images, il faudrait prendre 10 fois plus d'enregistrements (soit 100 par point de fonctionnement) pour réduire l'incertitude d'un facteur 3. Celle-ci serait ainsi inférieure à 15 %.

Conclusion

Dans cette première partie, nous avons étudié d'un point de vue théorique plusieurs configurations du PMO, dans le régime de diffusion multiple. Nous nous sommes focalisés, plus précisément, sur les pièges anisotrope et traditionnel. Le PMO anisotrope est constitué de paires de faisceaux possédant des caractéristiques différentes. Les faisceaux du PMO traditionnel sont tous identiques. Cependant, nous pouvons tirer des conclusions communes pour ces deux types de piège. L'argument principal est qu'aucun PMO n'est isotrope puisque son champ magnétique crée une première anisotropie. Nous avons ainsi choisi de représenter le nuage par un ellipsoïde de révolution. Cette forme conserve à la fois la symétrie du champ magnétique et celle des faisceaux du PMO anisotrope. Elle peut donc être utilisée dans la modélisation des deux pièges. Ce constat conduit à un certain nombre de similitudes dans leur description.

Nous avons étudié l'état stationnaire du PMO à température nulle. La modélisation d'un piège réside dans le calcul des forces de piégeage, d'effet d'ombre et de diffusion multiple. Chacune de ces forces est caractérisée par un coefficient : la raideur κ, la section efficace d'absorption d'un photon laser σ_L et la section efficace d'absorption d'un photon diffusé σ_R. La description de l'équilibre du nuage se réduit au calcul de ces trois quantités. Dans la littérature, elles sont en général calculées par l'interaction d'un faisceau avec un atome à deux niveaux d'énergie. De nombreux effets ne sont pas pris en compte par ces modèles, comme la saturation par les ondes d'une même paire et par les ondes présentes dans les autres directions du piège. Nous pouvons imaginer que le défaut d'accord quantitatif entre les observations et les résultats de ces modèles vient de ce manque.

Dans un premier temps, nous avons développé un calcul perturbatif de l'interaction d'une onde $\sigma^+ - \sigma^-$ avec un atome possédant deux états excités, dont la dégénérescence est levée par le champ magnétique. La contribution de la saturation par les deux ondes a ainsi pu être mise en avant. Des expressions simples à analyser ont pu être déterminées pour les trois coefficients. Dans un second temps, nous avons perfectionné cette description pour tenter de prendre en compte les autres paires de faisceaux. Ce problème est très complexe, c'est pourquoi nous avons choisi d'étudier une configuration proche, plus simple à calculer. Une onde polarisée π est ajoutée à la description précédente de manière à représenter les faisceaux

des directions transverses. Malheureusement, les expressions deviennent très lourdes dans ce cas, et ne sont pas intelligibles. Notre analyse a été effectuée sous forme graphique, en faisant varier les paramètres des faisceaux lasers. Toutefois, nous avons pu décrire qualitativement le comportement observé sur ces courbes grâce à un modèle approché faisant appel au formalisme de l'atome habillé. Ce modèle a permis de comprendre les importantes modifications liées à la variation des intensités sur la raideur et la section efficace d'absorption laser.

La réalisation expérimentale du piège anisotrope a été présentée. Nous avons suivi l'évolution du nombre d'atomes piégés et de l'ellipticité du nuage en fonction des différents paramètres. Les résultats mettent en évidence le rôle très important des couplages entre les différentes directions. Ces interactions sont responsables de phénomènes inattendus et spectaculaires. Il a été observé pour certains paramètres une disparition prématurée du nuage, suivie d'une réapparition et d'une disparition définitive lorsque que l'une des fréquences était éloignée de résonance. Cet effet bien qu'étonnant a pu être expliqué grâce au calcul de la raideur effectué en prenant en compte les différentes directions du piège. Il s'agit d'un des arguments qui nous permet de dire que le modèle usuel n'est pas apte à décrire le PMO anisotrope. Cependant, notre modèle compte de nombreuses simplifications qui réduisent l'accord avec les mesures à un accord qualitatif.

Notre objectif en réalisant ce piège anisotrope était de trouver une configuration permettant de créer des instabilités dans une seule direction. Le rôle de l'anisotropie était de fixer des dynamiques différentes selon chaque direction. L'importance des couplages entre les directions et l'absence de description quantitative nous conduisent à abandonner l'idée d'utiliser ce piège. En effet, cette configuration ne peut pas être utilisée pour réduire le nombre de dimensions dans lesquelles les instabilités s'établissent. Nous allons donc devoir conserver un système expérimental 3D pour l'étude des instabilités.

Nous avons évoqué les similitudes qui existent entre ce piège anisotrope et le piège traditionnel. Nous en avons tiré parti pour avoir accès expérimentalement à la section efficace de réabsorption σ_R. En effet, dans un piège traditionnel, l'anisotropie de la distribution spatiale du nuage est directement liée à l'anisotropie des effets collectifs. Nous avons pu par exemple montrer que le nuage créé dans un piège traditionnel est de forme oblate, quelque soit le point de fonctionnement étudié. Dans un premier temps, nous avons comparé les mesures avec le calcul de σ_R pour des paramètres où l'expression théorique est définie sans ambiguïté. L'accord s'est révélé de très bonne qualité. Nous avons ensuite étendu la détermination de la section efficace à des points de fonctionnement où la théorie ne permet pas de prédiction.

La méthode de détermination de σ_R s'est révélée efficace. Toutefois, elle nécessite de nombreuses précautions expérimentales afin que les mesures soient reproductibles. De même, elle demande un grand nombre d'acquisitions de manière à améliorer la précision du résultat.

Deuxième partie

Instabilités spatio-temporelles

Dans cette seconde partie, nous allons nous intéresser à la dynamique spatio-temporelle du nuage d'atomes froids. Notre but est de comprendre les instabilités qui apparaissent dans ce système. Il y a plusieurs raisons qui motivent cette étude. Tout d'abord, si nous considérons le PMO comme un système d'étude à part entière, de nombreuses questions restent ouvertes à son sujet. Les travaux précédents [Wilkowski2000, diStefano2003, Hennequin2004, Labeyrie2006] ont mis en évidence la riche dynamique du PMO, sans que les mécanismes conduisant aux instabilités soient clairement identifiés et compris. D'autre part, si nous voulons profiter de l'analogie entre la physique des atomes froids et celle des plasmas, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension du PMO.

Jusqu'à présent, les instabilités observées n'ont pu être reproduites de façon satisfaisante par les différents modèles élaborés dans ce but [Hennequin2004, diStefano2004, Pohl2006, Labeyrie2006]. Il y a plusieurs explications à ce constat. La première est l'application de ces modèles 1D à la description d'un système 3D. La première partie de ce manuscrit a montré qu'il était difficile de réduire les dimensions du système pour aboutir à des instabilités unidimensionnelles. Pour le moment, nous devrons donc travailler avec des instabilités 3D. La seconde explication réside dans les nombreuses restrictions de ces modèles sur les valeurs des paramètres et la géométrie du PMO. En effet, des instabilités sont souvent obtenues pour des faisceaux intenses et proches de résonance alors que certains de ces modèles se placent dans le régime des faibles saturations. Par ailleurs, des instabilités ont été observées pour des symétries différentes sans que le rôle de la configuration du piège ne soit identifié. Il semble donc nécessaire de construire un modèle plus général que les précédents pour prendre en compte ces éléments.

Une autre limite des travaux antérieurs est l'aspect spatial de la dynamique. Dans le cas du PMO asymétrique, des mouvements périodiques du nuage ont pu être observés [Wilkowski2000, diStefano2004]. Toutefois, l'analyse a été globale car les mouvements détectés sont ceux du centre de masse du nuage. Une étude spatiale locale peut apporter une information primordiale à la compréhension des instabilités. Il serait également intéressant de pouvoir comparer cette dynamique spatiale à celle d'autres systèmes.

Cette partie est constituée de trois chapitres. L'objet du chapitre 5 est l'élaboration d'un modèle spatio-temporel 1D du PMO. Ce modèle sera construit dans un souci de généralité, le nombre d'approximations sera le plus faible possible. Nous réaliserons des simulations numériques de ce modèle dans un cas simplifié dans le chapitre 6. Cela nous permettra à la fois de tester le modèle dans un cas bien connu et aussi de tester une méthode d'intégration numérique issue de l'optique non-linéaire. Finalement, nous réaliserons une étude spatio-temporelle expérimentale des instabilités dans un PMO 3D dans le chapitre 7.

Chapitre 5

Dynamique spatio-temporelle à une dimension

Il a été montré qu'un nuage d'atomes froids avait une dynamique non triviale pouvant générer des instabilités. Des travaux expérimentaux ont mis en évidence que le nuage atomique avait un comportement erratique sous certaines conditions [Wilkowski2000, Hennequin2004]. Il s'agit d'instabilités stochastiques. Pour d'autres valeurs des paramètres de contrôle, des oscillations déterministes ont été observées pour plusieurs géométries du PMO : soit avec un piège formé avec six faisceaux indépendants [Labeyrie2006] soit avec des faisceaux rétro-réfléchis [diStefano2003, diStefano2004].

De nombreux modèles ont été construits dans le but de reproduire ces observations et de comprendre leurs origines. Ils se focalisent chacun sur des aspects différents du PMO. Un effet d'ombre global (le nuage est considéré comme ponctuel) est pris en compte dans [Wilkowski1998, Hennequin2004] alors que [diStefano2003] tient compte de la taille du nuage. D'autre part, [Labeyrie2006] fait intervenir la force de diffusion multiple. Le modèle développé dans [Pohl2006] va au delà de l'approximation de linéarité de la force de piégeage pour des nuages de tailles importantes. Malheureusement, aucun de ces travaux n'a abouti à une description quantitative des phénomènes observés. L'origine des instabilités déterministes n'a pas non plus été clairement identifiée, notamment en ce qui concerne le rôle de la symétrie du piège. Ces limites viennent sans doute du fait que ces modèles introduisent de nombreuses simplifications. Nous pouvons également citer d'autres travaux très proches de la physique des plasmas donnant lieu à des prédictions qui n'ont pas encore été observées expérimentalement [Mendonca2008, Mendonca2012, Tercas2012].

Il semble nécessaire d'établir un modèle aussi général que possible pour répondre au manque de cohérence dans la description des instabilités des atomes froids et les observations expérimentales. Des approximations usuelles comme la limite des faibles saturations pourront

être effectuées, mais le plus tardivement possible.

Tout d'abord, nous poserons les bases du modèle théorique en définissant le système étudié. Les équations décrivant l'évolution spatio-temporelle des atomes froids et des faisceaux lasers seront ensuite établies. Et finalement, nous montrerons comment la réponse des atomes dépend des paramètres de contrôle.

5.1 Bases du modèle

Nous nous intéressons au comportement spatio-temporel des atomes soumis à deux champs lasers contrapropageants d'intensité $I_{\pm}$. Le système étudié est représenté sur la figure 5.1. Comme dans le cas du PMO étudié précédemment, les faisceaux lasers sont polarisés circulairement. Le faisceau se propageant dans le sens des abscisses croissantes a une polarisation σ^-, alors que l'autre faisceau est polarisé σ^+. Les faisceaux ont la même pulsation ω_L et possèdent un vecteur d'onde de norme k_L.

Les lasers excitent une transition atomique $J = 0 \rightarrow J' = 1$. Il s'agit du système le plus simple pouvant conduire à du refroidissement et à du piégeage. L'interaction de chaque onde avec les atomes excite un sous-niveau de la structure magnétique $J' = 1$. Ce couplage est représenté par les fréquences de Rabi $\Omega_{\pm}$. Dans leur référentiel, les atomes voient une fréquence différente de ω_L à cause de leur mouvement et de la présence d'un champ magnétique inhomogène. Les faisceaux apparaissent désaccordés respectivement de $\Delta_{\pm}$.

Comme fréquemment dans les problèmes de physique microscopique, nous faisons l'hypothèse d'un milieu continu. Dans la suite, nous serons amenés à utiliser des éléments infinitésimaux de taille et de surface. Ces quantités seront à la fois suffisamment petites (devant la taille totale du système) pour nous permettre d'utiliser un formalisme différentiel, et à la fois suffisamment grandes (devant la distance interatomique) pour pouvoir introduire des grandeurs d'ensemble telles que la densité. Dans ces conditions, la dynamique spatio-temporelle de l'ensemble des atomes est caractérisée par l'évolution de la densité $\rho(x, p, t)$ définie en un point de coordonnées (x, p) de l'espace des phases, à l'instant t. Cette grandeur décrit à la fois les atomes piégés et ceux qui ne le sont pas. Toutefois, le piégeage laser n'est possible que dans une petite partie de l'espace des phases, comme représenté sur la figure 5.2. À trois dimensions, le piégeage est limité spatialement par l'intersection des trois paires de faisceaux. Dans le cas d'un modèle unidimensionnel, il paraît légitime d'introduire une telle limitation : $2w$ représente l'intervalle de l'espace réel où le piégeage est possible. Cette quantité est typiquement de l'ordre de la taille des faisceaux dans les directions transverses. Le même raisonnement peut être mené dans l'espace des impulsions. En effet, nous pouvons définir une impulsion p_{cap} au dessus de laquelle un atome est trop rapide pour rester dans le nuage lorsqu'il franchit la position $x = \pm w$. Ceci permet de distinguer deux contributions à $\rho(x, p, t)$: celle des atomes froids définie comme se trouvant dans le sous-espace

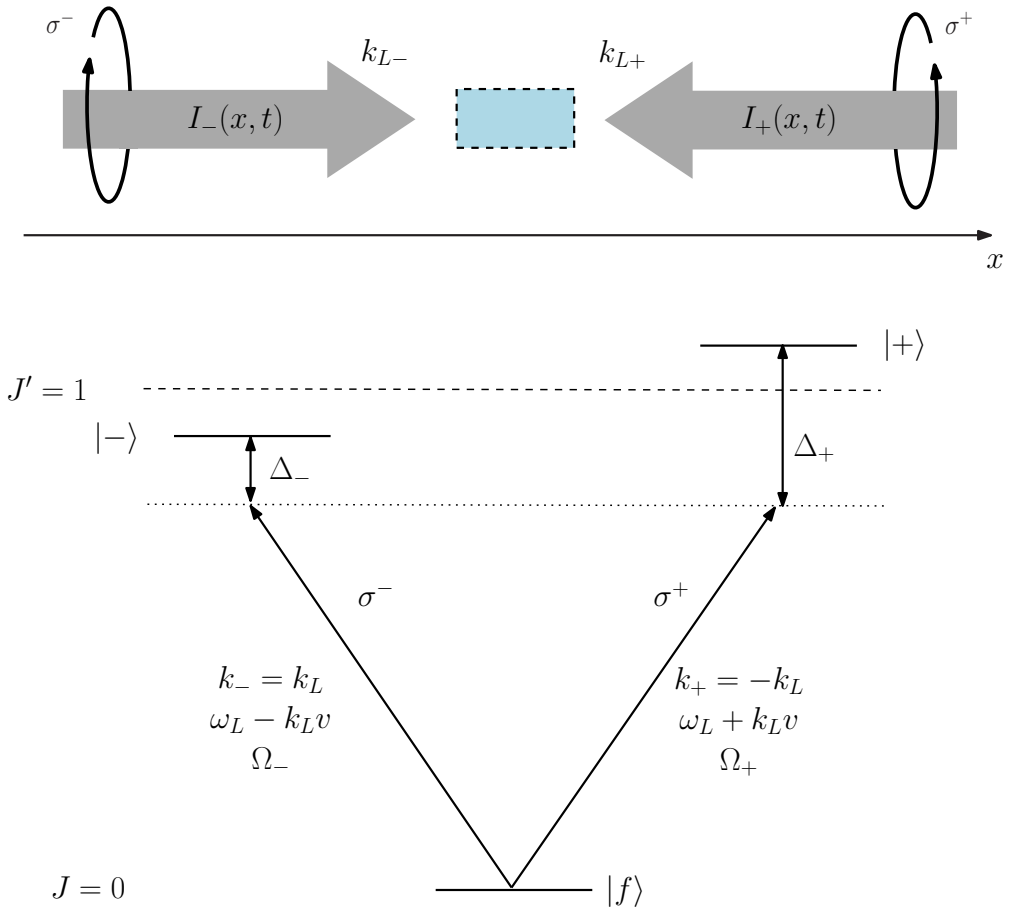


FIGURE 5.1 – Schéma du système étudié.

$\{|x| < w, |p| < p_{cap}\}$ (figure 5.2, zone bleue), et celle des atomes chauds qui occupent le reste de l'espace des phases (figure 5.2, zone rouge). Typiquement, les atomes chauds sont 10 000 fois plus nombreux que les atomes froids, dans les expériences réalisées. Nous allons donc considérer leurs actions comme celles d'un réservoir. En d'autres termes, les atomes froids sont issus initialement de l'ensemble des atomes chauds, mais les caractéristiques de ce dernier ne sont pas modifiées après la formation du nuage. Les atomes chauds seront considérés comme un ensemble à l'équilibre thermodynamique à la température du laboratoire. Ils suivent donc une loi de Maxwell-Boltzmann, de forme gaussienne en impulsion et uniforme spatialement. Cette distribution possède un trou pour $|x| < w$ et $|p| < p_{cap}$, de façon à ne pas comptabiliser deux fois la contribution des atomes froids. La densité $\rho(x, p, t)$ ne représente donc que ces derniers.

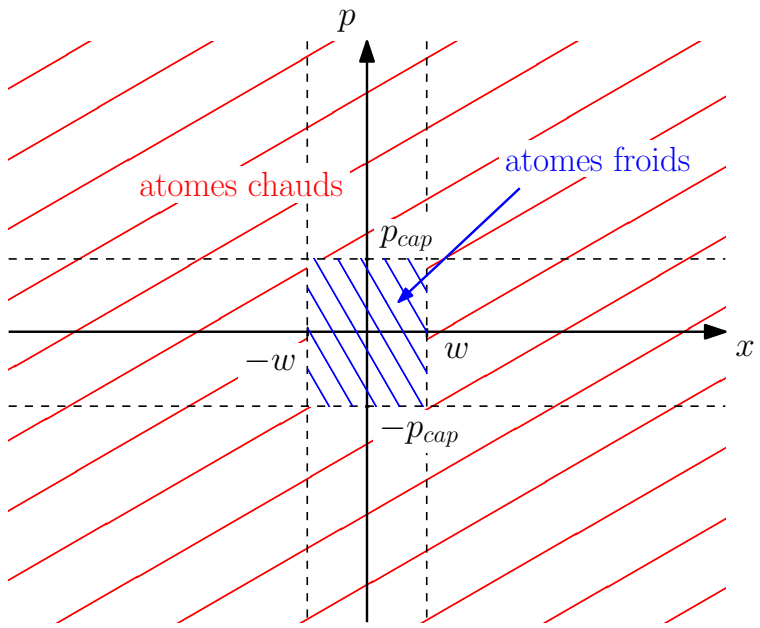


FIGURE 5.2 – Séparation de l'espace des phases en deux parties : les atomes froids possèdent une impulsion maximale p_{cap}, la zone spatiale de piégeage est limitée par la taille w des faisceaux des autres directions.

Un autre élément important dans la description de ce système est la propagation des faisceaux lasers. À mesure que les faisceaux piègent des atomes, l'absorption est de plus en plus forte et l'intensité des faisceaux décroît. Une rétro-action s'établit entre les atomes et l'intensité des faisceaux. Le PMO est donc décrit par un système d'équations couplées reliant la densité $\rho(x,p,t)$ d'atomes froids dans l'espace des phases et les intensités lasers $I_{\pm}(x,t)$.

5.2 Modèle de Vlasov-Fokker-Planck

5.2.1 évolution de la densité dans l'espace des phases

Afin de déterminer l'équation d'évolution de $\rho(x,p,t)$, nous allons supposer dans un premier temps que les intensités des lasers sont connues en tout point de l'espace et à tout instant. Tout d'abord, nous considérons un élément de surface de l'espace des phases centré au point de coordonnées (x_0,p_0) et de dimensions infinitésimales δx et δp ($\delta x \ll w$ et $\delta p \ll p_{cap}$). À un instant t quelconque, le nombre d'atomes $N(t)$ présents dans ce rectangle est $\rho(x_0,p_0,t)\,\delta x\,\delta p$. Pour déterminer l'évolution de $\rho(x_0,p_0,t)$, il suffit de prendre en compte tous les processus susceptibles de faire varier le nombre d'atomes dans cette cellule. Les

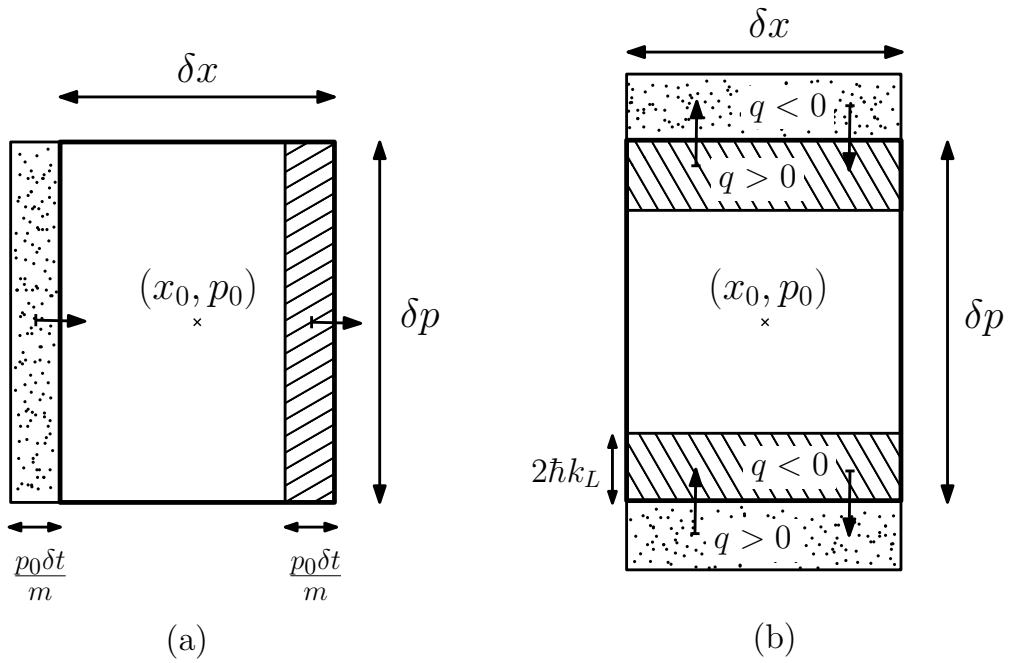


FIGURE 5.3 – Variation du nombre d'atomes contenus dans une cellule élémentaire de l'espace de phase à cause d'une variation (a) de la position et (b) de l'impulsion. Les atomes qui appartiennent aux zones pointillées entrent dans la cellule, alors que ceux des zones hachurées en sortent.

différents mécanismes sont :

- un changement de position lié au mouvement des atomes
- un changement d'impulsion après la diffusion d'un photon
- l'interaction avec les atomes chauds

Nous négligerons les collisions entre atomes froids. En effet, cette contribution est faible pour les paramètres de contrôle pour lesquels les instabilités ont été observées [Grego1996].

Il faut évaluer la variation δN du nombre d'atomes entre les instants t et $t+\delta t$, avec $\delta N = \delta x\, \delta p\, \delta t \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$. La figure 5.3 schématise les deux premières contributions. Nous ne tiendrons compte que des processus élémentaires (verticaux ou horizontaux), un changement simultané de position et d'impulsion étant une contribution d'ordre plus élevée en δt.

variation de la position

Un atome possédant une impulsion p_0 parcourt la distance $p_0\, \delta t/m$ pendant le temps considéré. Ainsi, les atomes compris dans l'intervalle pointillé $[x_0 - \delta x/2 - p_0\, \delta t/m, x_0 -$

$\delta x/2]$ de la figure 5.3a vont entrer dans la cellule, alors que ceux de l'intervalle hachuré $[x_0 + \delta x/2 - p_0\,\delta t/m,\, x_0 + \delta x/2]$ vont en sortir. La variation δN_x du nombre d'atomes se déplaçant est :

$$\delta N_x = \frac{p_0\,\delta p\,\delta t}{m}\left[\rho\left(x_0 - \frac{\delta x}{2}, p_0, t\right) - \rho\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}, p_0, t\right)\right] \tag{5.1}$$

Puisque δx est une grandeur infinitésimale, la différence de l'expression précédente peut être identifiée à la dérivée de $\rho\,(x_0, p_0, t)$, d'où :

$$\delta N_x = -\,(\delta x\,\delta p\,\delta t)\,\frac{p_0}{m}\,\frac{\partial}{\partial x}\rho\,(x_0, p_0, t) \tag{5.2}$$

variation de l'impulsion

Un changement d'impulsion est consécutif à l'absorption et à l'émission d'un photon. Nous allons décrire ce processus par la probabilité par unité de temps $\mathcal{P}\,(x, p, t, q)$. Nous supposons que l'intervalle δt est suffisamment petit pour que $\mathcal{P}\,(x_0, p_0, t, q)\,\delta t$ soit la probabilité qu'un atome situé en (x_0, p_0) subisse un seul cycle de fluorescence entre les instants t et $t + \delta t$, et que son impulsion change d'une quantité q. Ce changement résulte du transfert de quantité de mouvement avec les photons absorbé et émis, de vecteurs d'ondes respectifs k_a et k_e. Le changement d'impulsion est donc $q = \hbar\,(k_a - k_e)$. Pour ce modèle unidimensionnel, nous ne tenons compte que de la projection du vecteur d'onde sur l'axe x. La quantité q appartient donc à l'intervalle $[-2\hbar k_L, 2\hbar k_L]$ puisqu'un seul cycle de fluorescence est possible.

Étudions d'abord la variation en $p_+ = p_0 + \delta p/2$. Les atomes qui sont au-delà de cette limite peuvent entrer dans la cellule, s'ils sont plus près que $2\hbar k_L$ et que l'échange d'impulsion est négatif. Inversement, des atomes qui sont dans la cellule et proches de la frontière peuvent sortir si q est positif, comme représenté sur la figure 5.3b. La variation δN_{p+} tenant compte des deux contributions est :

$$\delta N_{p+} = \delta x\,\delta t \int_0^{2\hbar k_L} dq \int_0^q dq'\,\left(N_{p_+}^+ - N_{p_+}^-\right) \tag{5.3a}$$

$$N_{p_+}^{\pm} = \mathcal{P}\,(x_0, p_+ \pm q', t, \mp q)\;\rho\,(x_0, p_+ \pm q', t) \tag{5.3b}$$

Le même raisonnement à la frontière $p_- = p_0 - \delta p/2$ conduit à une expression analogue :

$$\delta N_{p-} = \delta x\,\delta t \int_0^{2\hbar k_L} dq \int_0^q dq'\,\left(N_{p_-}^+ - N_{p_-}^-\right) \tag{5.4a}$$

$$N_{p_-}^{\pm} = \mathcal{P}\,(x_0, p_- \mp q', t, \pm q)\;\rho\,(x_0, p_- \mp q', t) \tag{5.4b}$$

Afin de pouvoir donner une expression plus simple de ces quantités, nous allons supposer que le produit $\mathcal{P}(x,p,t,q)\,\rho(x,p,t)$ varie lentement avec p. Nous pouvons ainsi remplacer chacun des $N^{\pm}_{p\pm}$ par son développement limité au premier ordre en q'. La première intégration s'effectue donc aisément puisque l'intégrant est une fonction linéaire en q'. La seconde intégration est effectuée formellement en introduisant la force $F(x,p,t)$ et le coefficient de diffusion $D(x,p,t)$, définis de la manière suivante :

$$F(x,p,t) = \int_{-2\hbar k_L}^{2\hbar k_L} q\,dq\,\mathcal{P}(x,p,t,q) \tag{5.5a}$$

$$D(x,p,t) = \int_{-2\hbar k_L}^{2\hbar k_L} \frac{q^2}{2}\,dq\,\mathcal{P}(x,p,t,q) \tag{5.5b}$$

Ces quantités sont simplement les deux premiers moments de la probabilité $\mathcal{P}(x,p,t,q)$. Elles peuvent également être interprétées comme les valeurs moyennes de q et q^2.

La somme des contributions en p_+ et p_- s'écrit comme une différence qui peut être identifiée à une dérivée, comme précédemment. Par conséquent, la variation totale δN_p du nombre d'atomes due à un changement d'impulsion s'exprime de la manière suivante :

$$\delta N_p = -(\delta x\,\delta p\,\delta t)\left[\frac{\partial}{\partial p}(F\rho) - \frac{\partial^2}{\partial p^2}(D\rho)\right] \tag{5.6}$$

collisions avec les atomes chauds

Le dernier mécanisme est un peu différent des précédents car il conduit à une variation du nombre d'atomes piégés. Avoir considéré les atomes chauds comme un réservoir permet de prendre leurs effets en compte simplement. Il existe deux contributions : un atome froid peut être expulsé de la zone de piégeage par un atome chaud, et la collision entre deux atomes chauds peut produire un atome chaud et un atome froid. Parmi ces contributions, la première représente des pertes proportionnelles à la densité. La seconde est un gain d'atomes piégés, elle est indépendante du nombre d'atomes déjà présents dans le nuage. La somme δN_{coll} des deux termes est :

$$\delta N_{coll} = (\delta x\,\delta p\,\delta t)\left(\Lambda - \frac{\rho(x_0,p_0,t)}{\tau}\right) \tag{5.7}$$

où Λ est le terme source et τ le temps moyen entre deux collisions impliquant un atome chaud et un atome froid.

équation de Vlasov-Fokker-Planck

La variation globale du nombre d'atomes est obtenue en sommant toutes les contributions [1] :

$$\delta N = \delta N_x + \delta N_p + \delta N_{coll} \tag{5.8}$$

Nous pouvons en déduire l'équation régissant l'évolution de la densité dans l'espace des phases :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x}\rho + \frac{\partial}{\partial p}(F\rho) - \frac{\partial^2}{\partial p^2}(D\rho) = \Lambda - \frac{\rho}{\tau} \tag{5.9}$$

Elle est communément appelée *équation de Vlasov-Fokker-Planck* (VFP). Cette équation est très générale, elle décrit un grand nombre de systèmes physiques. Le comportement des électrons dans les plasmas est modélisé par une équation VFP [Neunzert1984]. Celle-ci est également rencontrée en astrophysique pour décrire la dynamique interne des étoiles [Ramos-Caro2008], mais aussi pour étudier l'évolution de systèmes solaires [Chavanis1996, Amaro-Seoane2004]. L'équation VFP est aussi utilisée en hydrodynamique pour étudier le comportement des milieux granulaires [Benedetto2004] ou l'évolution des structures de petites tailles (par exemple des gouttelettes) immergées dans un fluide [Goudon2013]. Elle apparaît également dans la dynamique des électrons piégés dans des accélérateurs de particules circulaires [Warnock2006]. Nous pouvons également donner des exemples plus éloignés de la physique comme la modélisation du trafic routier [Illner2003] ou encore la dynamique du système nerveux [Baladron2012]. La spécificité de tous ces modèles réside dans l'origine de la force et du coefficient de diffusion. La plupart de ces études doivent également prendre en compte une autre équation régissant l'évolution de la force.

Dans la physique des plasmas, l'équation de Vlasov modélise la dynamique des particules chargées. Elle contient les trois premiers termes du membre de gauche de l'équation 5.9. Cependant, la force coulombienne agissant dans les plasmas ne dépend pas de la vitesse des particules. Les deux derniers termes du membre de gauche sont caractéristiques de l'équation de Fokker-Planck. Il s'agit d'une équation très souvent rencontrée dans les problèmes de diffusion, comme par exemple dans l'étude du mouvement brownien d'une particule. Dans notre système, les faisceaux lasers jouent le rôle d'un « bain thermique » dans lequel sont placés les atomes. Toutefois, il faut être prudent avec cette notion car les atomes froids agissent également sur ce bain thermique, comme nous le verrons plus tard.

Une différence majeure avec les systèmes d'électrons piégés ou de plasmas est que le PMO n'est pas un système fermé. Nous n'introduisons pas une quantité donnée d'atomes dans un piège mais ils sont captés de l'ensemble des atomes chauds pour être refroidis et piégés. La

1. Nous supposons que les éléments infinitésimaux sont si petits que nous pouvons les assimiler à des éléments différentiels.

capacité à piéger dépend principalement des paramètres de contrôle des faisceaux lasers et de la pression de gaz chaud. Ainsi, il existe un second bain thermique : le réservoir d'atomes chauds. Une majorité du gaz subsiste dans la cellule et interagit avec les atomes froids par collisions, qui sont décrites par les termes du membre de droite de l'équation 5.9. Toutefois, il est possible de supprimer ce second bain par l'utilisation d'un dispositif constitué de deux cellules [Myatt1996]. Les atomes initialement piégés dans une première cellule sont déplacés vers une deuxième, dans laquelle il n'y a pas d'atomes chauds. Dans cette configuration particulière, les termes du membre de droite peuvent être négligés : leur rôle pourrait ainsi être testé. Le système devient fermé, l'analogie entre les nuages d'atomes froids et les plasmas est d'autant plus forte dans ces conditions.

Un point important sur cette équation est l'existence de deux temps caractéristiques très différents. En effet, le temps pour qu'un atome soit freiné et piégé est de l'ordre de quelques ms, alors que le temps de chargement τ du piège est plutôt de l'ordre de la seconde. Cette différence d'ordre de grandeur rend difficile l'interprétation des mécanismes conduisant aux instabilités observées.

5.2.2 force et coefficient de diffusion

La résolution de l'équation VFP nécessite la connaissance de la probabilité $\mathcal{P}(x, p, t, q)$ associée à l'échange de quantité de mouvement q, qui intervient dans la force et le coefficient de diffusion. Cependant, il n'est pas nécessaire de calculer en détail cette probabilité. En effet, nous pouvons réécrire la définition 5.5a de la force en terme de valeurs moyennes :

$$F \propto \langle q \rangle \tag{5.10a}$$

$$\propto \hbar \left(\langle k_a \rangle - \langle k_e \rangle \right) \tag{5.10b}$$

$\langle k_e \rangle$ est la valeur moyenne du vecteur d'onde des photons émis spontanément. Les directions de sens opposé sont équiprobables donc $\langle k_e \rangle = 0$. La force ne dépend donc que de la contribution associée à l'absorption des photons lasers.

Le même raisonnement peut être mené sur le coefficient de diffusion. L'expression 5.5b se met sous la forme :

$$D \propto \left\langle q^2 \right\rangle \tag{5.11a}$$

$$\propto \hbar^2 \left(\left\langle k_a^2 \right\rangle + \left\langle k_e^2 \right\rangle - 2 \langle k_a k_e \rangle \right) \tag{5.11b}$$

Le dernier terme est nul car la direction du photon absorbé et celle du photon émis spontanément sont indépendantes, d'où $\langle k_a k_e \rangle = \langle k_a \rangle \langle k_e \rangle = 0$. Ainsi,

$$D \propto \hbar^2 \left(\left\langle k_a^2 \right\rangle + \left\langle k_e^2 \right\rangle \right) \tag{5.12}$$

L'expression du coefficient de diffusion fait intervenir l'impulsion quadratique moyenne des photons absorbés et émis.

Les atomes sont soumis à deux faisceaux lasers contrapropageants. Ils les absorbent et émettent des photons spontanés. Nous distinguons à l'intérieur du nuage les photons lasers et les photons émis spontanément. Ils n'ont pas les mêmes caractéristiques : leur section efficace d'absorption est différente ainsi que leur direction de propagation. Ceci conduit à séparer la force et le coefficient de diffusion en deux parties :

$$F = F_L + F_{DM} \tag{5.13a}$$

$$D = D_L + D_{DM} \tag{5.13b}$$

L'indice L caractérise les grandeurs liées aux faisceaux lasers alors que l'indice DM est réservé à la contribution de la diffusion multiple.

photons lasers

La structure étudiée est plutôt simple : chaque onde couple l'état fondamental avec un niveau excité $|\pm\rangle$. Les taux d'émission spontanée $\gamma_\pm$ sont donc faciles à relier aux populations $\pi_\pm$ des états excités :

$$\gamma_\pm = \Gamma \pi_\pm \tag{5.14}$$

Les taux d'absorption et d'émission spontanée sont identiques puisque les états $|\pm\rangle$ n'ont pas d'autre moyen d'être peuplés que par l'absorption d'un photon.

Il est donc simple de déterminer une expression de la force liée aux faisceaux lasers :

$$F_L = \hbar \left(\langle k_{a+} \rangle \gamma_+ + \langle k_{a-} \rangle \gamma_- \right) \tag{5.15}$$

avec $\langle k_{a\pm} \rangle$ le vecteur d'onde moyen d'un photon absorbé de chaque faisceau. Les vecteurs d'onde des faisceaux lasers sont de même direction et de sens opposé donc $\langle k_{a-} \rangle = - \langle k_{a+} \rangle = k_L$ et donc :

$$F_L = \hbar k_L \left(\gamma_- - \gamma_+ \right) \tag{5.16}$$

De même, le coefficient de diffusion associé aux photons lasers est :

$$D_L = \hbar^2 \left(\left[\left\langle k_{a+}^2 \right\rangle + \left\langle k_{e+}^2 \right\rangle \right] \gamma_+ + \left[\left\langle k_{a-}^2 \right\rangle + \left\langle k_{e-}^2 \right\rangle \right] \gamma_- \right) \tag{5.17}$$

La même justification que précédemment donne $\left\langle k_{a+}^2 \right\rangle = \left\langle k_{a-}^2 \right\rangle = k_L^2$. Les photons spontanés sont émis dans toutes les directions, cependant seule la composante dirigée selon l'axe x doit être prise en compte. Pour cela, nous supposerons que l'atome est un dipôle électrique

circulaire. Les valeurs quadratiques moyennes des composantes du vecteur d'onde sont $^3/_{10}\, k_L^2$ dans le plan transverse et $^2/_5\, k_L^2$ sur l'axe. Nous en déduisons

$$D_L = \frac{7}{5}\hbar^2 k_L^2 \left(\gamma_+ + \gamma_-\right) \tag{5.18}$$

photons diffusés

Un atome est également soumis à un ensemble incohérent de photons spontanés se propageant dans toutes les directions mais de mêmes caractéristiques. Nous nous restreignons aux photons diffusés une seule fois dans le nuage, en avançant les arguments donnés dans le chapitre 2. Le taux d'absorption des photons diffusés dans une direction donnée est proportionnel au flux de photons spontanés se propageant dans cette même direction. Nous nous intéressons à un atome situé en $\mathtt{x}$ et possédant une vitesse $\mathtt{v}$. Les flux $\Psi_+(\mathtt{x}, t)$ et $\Psi_-(\mathtt{x}, t)$ se propagent respectivement vers la gauche et vers la droite jusqu'en $\mathtt{x}$. À une dimension, la moitié des photons est émise vers la gauche et l'autre moitié vers la droite. Les flux s'écrivent donc comme la moitié des photons émis entre le bord du nuage et la position $\mathtt{x}$:

$$\Psi_+(\mathtt{x}, t) = \frac{1}{2}\int_{\mathtt{x}}^{+\infty} dx' \int dp\, \rho\left(x', p, t\right) \left(\gamma_+ + \gamma_-\right) \tag{5.19a}$$

$$\Psi_-(\mathtt{x}, t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\mathtt{x}} dx' \int dp\, \rho\left(x', p, t\right) \left(\gamma_+ + \gamma_-\right) \tag{5.19b}$$

où les contributions de chaque polarisation ont été sommées.

La force s'exprime de la manière suivante :

$$F_{DM} = \sigma_R\, \hbar \left\langle k_{a-}\right\rangle \left(\Psi_- - \Psi_+\right) \tag{5.20}$$

La section efficace de réabsorption σ_R caractérise l'absorption d'un photon diffusé. En effet, un photon laser et un photon diffusé ne sont, a priori, pas absorbés de la même manière (voir chapitre 2 et 4).

En considérant que les atomes sont des dipôles électriques circulaires, nous trouvons $\left\langle k_{a-}\right\rangle = {}^9/_{16}\, k_L$ et donc :

$$F_{DM} = \frac{9}{16}\sigma_R\, \hbar k_L \left(\Psi_- - \Psi_+\right) \tag{5.21}$$

D'autre part, le coefficient de diffusion est :

$$D_{DM} = \sigma_R \hbar^2 \left(\left\langle k_{a+}^2\right\rangle + \left\langle k_{e+}^2\right\rangle\right) \left(\Psi_+ + \Psi_-\right) \tag{5.22a}$$

$$= \frac{4}{5}\sigma_R \hbar^2 k_L^2 \left(\Psi_+ + \Psi_-\right) \tag{5.22b}$$

avec $\left\langle k_{a+}^2\right\rangle = \left\langle k_{e+}^2\right\rangle = {}^2/_5\, k_L^2$ car le photon absorbé est un photon diffusé.

5.2.3 interaction avec le réservoir d'atomes chauds

Nous cherchons maintenant à déterminer les deux termes du membre de droite de l'équation VFP liés à la présence du gaz chaud. En intégrant cette équation sur la totalité de l'espace des phases, nous obtenons une équation d'évolution du nombre d'atomes piégés :

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda' - \frac{N}{\tau} \tag{5.23}$$

avec $\Lambda' = 4w\, p_{cap}\, \Lambda$ et τ qui a été défini comme le temps moyen entre deux collisions d'un atome chaud et d'un atome froid. La solution de cette équation différentielle est triviale :

$$N(t) = \frac{\Lambda'}{\tau}\left[1 - \exp(-t/\tau)\right] \tag{5.24}$$

Les deux paramètres de cette équation sont facilement mesurables : il suffit d'enregistrer la durée du régime transitoire lors de la formation du nuage et la valeur stationnaire du nombre d'atomes, voir la figure 10 dans [Adams1997] ($\tau \simeq 2,3\,\mathrm{s}$ pour cet exemple).

Une bonne approximation du temps entre deux collisions peut facilement être calculée. Pendant l'intervalle τ, un atome a parcouru en moyenne la distance $\langle v_c \rangle\, \tau$, où $\langle v_c \rangle = \sqrt{2k_BT/m}$ est la vitesse la plus probable pour un atome du réservoir. Si sa section efficace de collision est σ_c, alors $\sigma_c \langle v_c \rangle\, \tau\, n_c = 1$, où n_c est la densité d'atomes chauds. Nous en déduisons

$$\tau = \frac{1}{\sigma_c \langle v_c \rangle\, n_c} \tag{5.25}$$

Les expériences de refroidissement laser s'effectuent dans des cellules à très basse pression. Le réservoir peut ainsi être considéré comme un gaz parfait donc $n_c = P/k_BT$. En prenant $\sigma_c = 4\pi(5a_0)^2$ avec a_0 le rayon de Bohr [2], une pression dans la cellule $P = 10^{-7}$ Torr et une température $T = 300\mathrm{K}$ dans le laboratoire, nous obtenons $\tau \simeq 1,8\,\mathrm{s}$.

Le terme source est calculé avec la même approche. Il faut évaluer le nombre d'atomes qui entrent par unité de temps dans la zone de piégeage ($\sim 2w$) et qui possèdent une vitesse inférieure à la vitesse de capture. Le calcul donne [Monroe1990, Adams1997] :

$$\Lambda' = n_c\, w^2\, \frac{v_{cap}^4}{\langle v_c \rangle^3} \tag{5.26}$$

avec $v_{cap} = p_{cap}/m$. Pour être rigoureux, il faut retrancher à cette quantité le nombre d'atomes ayant subit une collision avant d'avoir été totalement piégés. Cependant, il est assez faible compte tenu de la différence des temps caractéristiques (temps de piégeage $\sim 80\,\mu\mathrm{s}$ contre $2\,\mathrm{s}$ pour le temps entre deux chocs).

2. Pour un modèle de sphères identiques, la section efficace de collision vaut $4\pi \times R^2$ si R est le rayon de la sphère. Pour le Césium dans son état fondamental $6\,^2S_{1/2}$, nous prenons $R = 5a_0$.

5.2.4 propagation des faisceaux

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'équation VFP décrit une large gamme de systèmes qui se différencient cependant par la présence d'une autre équation régissant la rétro-action des particules sur l'origine de la force. Nous pouvons citer comme exemple la physique des plasmas, où les particules chargées subissent une force par l'intermédiaire d'un champ électrique. Cependant, ces charges agissent également sur le champ : une équation de Poisson est nécessaire à la description complète du système. Dans notre cas, les atomes diminuent l'intensité des faisceaux lasers.

Nous devons donc établir les équations d'évolution des intensités lasers. Pour cela, nous procédons comme précédemment, en supposant que la densité est connue en tout point de l'espace des phases et à tout instant. La variation de l'intensité des lasers entre les positions x et $x+dx$ est proportionnelle au taux d'absorption. En sommant les contributions des atomes en $\mathtt{x} = x$ ayant une vitesse $\mathtt{v} = p/m$ différente, nous obtenons les expressions suivantes pour l'évolution des intensités lasers :

$$\frac{\partial I_+}{\partial x} = +\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \rho\,(x,p,t)\ \gamma_+ \tag{5.27a}$$

$$\frac{\partial I_-}{\partial x} = -\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \rho\,(x,p,t)\ \gamma_- \tag{5.27b}$$

Ces équations généralisent l'évolution exponentielle qui a été utilisée dans le chapitre 2. De plus, elles ne font aucune hypothèse sur la symétrie du piège. C'est le choix des conditions initiales lors de l'intégration qui définira si le piège est symétrique ou asymétrique.

À l'aide de ces expressions, il est possible de réexprimer les flux 5.19 en calculant formellement l'intégrale sur la position. Les flux de photons spontanés s'écrivent en fonction des intensités lasers :

$$\Psi_+\,(x,t) = \frac{I_+\,(\infty,t) - I_-\,(\infty,t) - I_+\,(x,t) + I_-\,(x,t)}{2\hbar\omega_L} \tag{5.28a}$$

$$\Psi_-\,(x,t) = \frac{I_+\,(x,t) - I_-\,(x,t) - I_+\,(-\infty,t) + I_-\,(-\infty,t)}{2\hbar\omega_L} \tag{5.28b}$$

$I_+\,(\infty,t)$ et $I_-\,(-\infty,t)$ sont les intensités incidentes de part et d'autre du nuage.

En résumé, la distribution de l'intensité lumineuse définit les caractéristiques des atomes piégés, comme leur répartition spatiale et leur température. En contrepartie, la densité atomique influe sur l'évolution des faisceaux. Le modèle VFP est donc constitué d'un système d'équations différentielles non-linéaires couplées constitué des équations 5.9 et 5.27. Nous les

rappelons ici pour avoir une vue d'ensemble du système :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x}\rho + \frac{\partial}{\partial p}(F\rho) - \frac{\partial^2}{\partial p^2}(D\rho) &= \Lambda - \frac{\rho}{\tau} \\
\frac{\partial I_+}{\partial x} &= +\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \rho(x,p,t)\ \gamma_+ \\
\frac{\partial I_-}{\partial x} &= -\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \rho(x,p,t)\ \gamma_-
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Ces équations doivent donc être résolues conjointement.

5.3 Modélisation de la réponse atomique

Jusqu'ici, nous avons exprimé les forces, les coefficients de diffusion et les intensités sous des formes qui ont un sens physique simple, notamment en terme de taux d'absorption. Ce choix nous a permis de ne pas effectuer d'approximations trop restrictives pour la généralité du modèle. Il nous faut à présent réaliser des hypothèses simplificatrices pour déterminer la dépendance de ces grandeurs en fonction des paramètres de contrôle. Nous allons décrire les atomes par la structure présentée sur la figure 5.1. Nous étudions l'excitation d'une transition $J = 0 \to J' = 1$ par deux champs lasers.

excitation par les photons lasers

Chaque faisceau laser a une intensité $I_\pm(x,t) = 2I_{sat}\,\Omega_\pm^2(x,t)/\Gamma^2$ et est quasi-résonnant avec la transition atomique ($\omega_L \simeq \omega_0$). Nous supposons que le champ magnétique B est linéaire en tout point de l'espace : $B = bx$. Le désaccord de chaque faisceau est :

$$\Delta_\pm = \omega_L - \omega_0 \pm \delta \tag{5.30a}$$

$$= \Delta \pm \delta \tag{5.30b}$$

Comme précédemment, Δ est le désaccord des faisceaux pour un atome arrêté au centre du piège et $\delta = kp/m + \mu_B bx/\hbar$ est la somme des décalages Doppler et Zeeman.

Nous utilisons une approche perturbative en δ pour déterminer les expressions des taux d'absorption $\gamma_\pm$ des photons lasers. δ est traité comme une perturbation de la réponse d'un atome immobile à l'origine du piège. La résolution de ce problème a fait l'objet de la section 2.2. Nous ne donnerons ici que les résultats utiles pour l'étude du modèle VFP. Dans le chapitre 2, nous avons effectué un développement au premier ordre en δ. L'expression des

taux d'absorption, et des grandeurs qui en découlent, sont donc linéaires en position et en vitesse.

À l'ordre 0, les taux d'absorption sont :

$$\gamma_{\pm}^{(0)} = \Gamma \, \frac{|\Omega_{\pm}|^2}{4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2}$$

avec $\Omega^2 = |\Omega_+|^2 + |\Omega_-|^2$. Les contributions à la force et au coefficient de diffusion associées aux faisceaux lasers sont donc :

$$F_L^{(0)} = \frac{\hbar \, k_L \, \Gamma}{4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2} \left(|\Omega_-|^2 - |\Omega_+|^2 \right) \tag{5.31a}$$

$$D_L^{(0)} = \frac{7}{5} \, \hbar^2 k_L^2 \, \Gamma \frac{\Omega^2}{4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2} \tag{5.31b}$$

Cette force correspond à la force d'effet d'ombre introduite dans le chapitre 2. Elle est proportionnelle à la différence locale des intensités.

À l'ordre 1, les cohérences entre états excités modifient les taux d'absorption :

$$\gamma_{\pm}^{(1)} = \frac{\mp 8 \, \Delta \, \delta \, \Gamma}{(4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2)^2} \left(|\Omega_{\pm}|^2 + 2 \, |\Omega_-|^2 \, |\Omega_+|^2 \, \frac{4\Gamma^2 - \Omega^2}{16\Gamma^2\Delta^2 + (2\Gamma^2 + \Omega^2)^2} \right) \tag{5.32}$$

Les contributions proportionnelles à δ de la force et du coefficient de diffusion sont :

$$F_L^{(1)} = \frac{8\hbar \, k_L \, \Gamma \, \Delta \, \delta}{(4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2)^2} \left(\Omega^2 + 4 \, |\Omega_-|^2 \, |\Omega_+|^2 \, \frac{4\Gamma^2 - \Omega^2}{16\Gamma^2\Delta^2 + (2\Gamma^2 + \Omega^2)^2} \right) \tag{5.33a}$$

$$D_L^{(1)} = \frac{7}{5} \, \hbar^2 k_L^2 \, \Gamma \frac{8 \, \Delta \, \delta \left(|\Omega_-|^2 - |\Omega_+|^2 \right)}{(4\Delta^2 + 2\Omega^2 + \Gamma^2)^2} \tag{5.33b}$$

La contribution $F_L^{(1)}$ à la force est souvent mise sous la forme $F_L^{(1)} = -\alpha p/m - \kappa x$, où α est le coefficient de friction et κ est la raideur du piège. Les variations de ce dernier coefficient ont été discutées dans la section 2.2. Le terme $D_L^{(1)}$ du coefficient de diffusion est proportionnel à la différence des intensités.

influence des photons diffusés

La force F_{DM} et le coefficient de diffusion D_{DM} dépendent de la somme et de la différence des flux 5.19. Les relations 5.28 exprimant les flux en fonction des intensités lasers donnent :

$$\Psi_+(x,t) + \Psi_-(x,t) = \frac{[I_+(\infty,t) - I_-(\infty,t)] - [I_+(-\infty,t) + I_-(-\infty,t)]}{2\hbar\omega_L} \quad (5.34a)$$

$$\Psi_-(x,t) - \Psi_+(x,t) = \frac{[I_+(\infty,t) + I_-(\infty,t)] - [I_+(-\infty,t) - I_-(-\infty,t)]}{2\hbar\omega_L} + \frac{I_+(x,t) - I_-(x,t)}{\hbar\omega_L} \quad (5.34b)$$

Nous remarquons que le flux total de photons diffusés est une constante indépendante de la position. La contribution au coefficient de diffusion liée à la diffusion multiple est donc une constante dans le nuage.

Une autre grandeur permet de caractériser la diffusion multiple. il s'agit de la section efficace de réabsorption σ_R, dont le calcul et la mesure ont été largement discutés dans les chapitres 2 et 4.

Conclusion

Nous avons développé un modèle théorique afin de décrire la dynamique spatio-temporelle des atomes refroidis par laser [Romain2011]. Ce modèle à une dimension est composé d'une équation de Vlasov-Fokker-Planck décrivant les variations de la densité dans l'espace des phases. Le modèle prend également en compte l'évolution des faisceaux lasers dans le nuage. Ces équations couplées ont été déterminées à partir des principes de bases de la physique atomique.

L'équation VFP est une équation aux dérivées partielles (EDP) générale décrivant une grande classe de problèmes physiques. L'intérêt des expériences de refroidissement laser est d'autant plus important. Ce système simple à mettre en oeuvre pourrait servir de simulateur pour d'autres systèmes plus compliqués à manipuler, comme les plasmas.

Au regard de la complexité des équations et notamment de leurs nombreuses non-linéarités, une étude analytique semble compromise. Par contre, il paraît envisageable de les intégrer numériquement. Il peut être utile de simplifier le modèle afin d'identifier les mécanismes qui conduisent à des instabilités du nuage. Grâce à ce modèle, il est possible d'étudier l'impact de la symétrie du piège et le rôle des atomes chauds. L'intégration numérique du système d'équations fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 6

Simulations numériques du système VFP dans le régime de faible absorption

La complexité des équations du modèle rend difficile une résolution analytique. Pour aller plus loin, nous décidons de nous tourner vers l'intégration numérique du système VFP. L'objectif de ce chapitre est de poser les bases d'une étude numérique. Il faut notamment trouver une méthode pour intégrer l'EDP contenue dans le modèle. Dans ce but, nous avons initié une collaboration avec l'équipe d'optique non-linéaire du laboratoire. Cette équipe travaille sur la thématique des électrons stockés dans des accélérateurs circulaires de particules [Roussel2014]. Les similitudes entre nos deux systèmes vont nous permettre de transposer les méthodes utilisées dans ce domaine à notre système d'atomes froids.

Tout d'abord, nous allons effectuer une étape préalable aux simulations numériques : l'introduction de variables sans dimension. Nous allons ensuite simplifier le modèle global pour le faire tendre vers celui des électrons et ainsi faciliter l'adaptation des méthodes de calcul. Nous nous intéresserons précisément au cas d'une absorption faible sans gaz résiduel. Dans de telles conditions, l'état stationnaire du système est simple à obtenir. Le modèle se réduit à une seule équation différentielle ordinaire (EDO) décrivant la répartition spatiale de la densité atomique. Nous développerons ensuite la méthode d'intégration de l'équation VFP et les résultats correspondants seront finalement analysés.

6.1 Équations sans dimension

Pour commencer, nous souhaitons introduire des grandeurs sans dimension dans le modèle. Cette manipulation permet l'intégration numérique des équations en réduisant fortement les écarts entre les différents ordres de grandeurs des paramètres ou des variables du problème. Les équations obtenues sont en général plus épurées, les grandeurs caractéristiques

sont plus facilement identifiables.

6.1.1 modèle général

Notre modèle décrit la dynamique spatio-temporelle des atomes froids : il faut donc introduire un temps, une impulsion et une position de manière à obtenir des équations sans dimension. Nous choisissons d'utiliser les grandeurs caractéristiques du nuage dans le régime thermique. Lorsque peu d'atomes sont piégés, la densité et la distribution de vitesse ont une forme gaussienne [Townsend1995]. L'extension spatiale Δx du nuage et la largeur Δp de la distribution en impulsion se déduisent du théorème d'équipartition de l'énergie :

$$\frac{1}{2}k_B T_{th} = \frac{1}{2}\frac{\Delta p^2}{m} = \frac{1}{2}\kappa_{th}\Delta x^2 \tag{6.1a}$$

$$= \frac{D_{th}}{\alpha_{th}} \tag{6.1b}$$

L'indice *th* permet d'identifier la température, la raideur et les coefficients de friction et de diffusion dans le régime thermique. Nous pouvons en déduire les expressions de Δx, Δp et du temps associé Δt :

$$\Delta x = \sqrt{\frac{D_{th}}{\kappa_{th}\alpha_{th}}} \simeq 40\,\mu\text{m} \tag{6.2a}$$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{mD_{th}}{\alpha_{th}}} \simeq m\times 13\,\text{cm/s} \tag{6.2b}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{m}{\kappa_{th}}} \simeq 0,3\,\text{ms} \tag{6.2c}$$

Les variables sans dimension sont définies de la manière suivante :

$$X = \frac{x}{\Delta x} \tag{6.3a}$$

$$P = \frac{p}{\Delta p} \tag{6.3b}$$

$$\theta = \frac{t}{\Delta t} \tag{6.3c}$$

La force totale est mise sous la forme $F = F_L^{(0)} + F_L^{(1)} + F_{DM} = -\alpha\, p/m - \kappa x + F_{coll}$, où F_{coll} est la somme des forces collectives : l'effet d'ombre et la diffusion multiple. Nous négligeons la contribution $D_L^{(1)}$ au coefficient de diffusion, car elle est faible. Par conséquent, nous noterons $D_L^{(0)} = D_L$ afin d'alléger les notations.

L'introduction de la densité $\rho\,(X,P,\theta)$ est également nécessaire. Pour cela, nous utilisons la définition du nombre total d'atomes qui ne dépend pas des coordonnées : $N(t) = \iint \rho\,(x,p,t)\;dx\,dp = \iint \rho\,(X,P,\theta)\;dX\,dP$. Le changement de variables donne :

$$\hat{\rho} \equiv \rho\,(X,P,\theta) = \frac{D_{th}}{\alpha_{th}}\sqrt{\frac{m}{\kappa_{th}}}\,\rho\,(x,p,t) \tag{6.4}$$

L'équation VFP adimensionnée est donc :

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\theta} + P\,\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial X} - a_1\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial P}\left(X - a_2\hat{F}_{coll}\right) - 2a_3\left(\hat{\rho} + P\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial P} + a_4\frac{\partial^2\hat{\rho}}{\partial P^2}\right) = \hat{\Lambda} - \frac{\hat{\rho}}{\hat{\tau}} \tag{6.5}$$

avec

$$a_1 = \frac{\kappa}{\kappa_{th}} \tag{6.6a}$$

$$a_2 = \frac{1}{a_1}\sqrt{\frac{\alpha_{th}}{\kappa_{th}D_{th}}} \tag{6.6b}$$

$$\hat{F}_{coll} = F_{coll}(X,P,\theta) \tag{6.6c}$$

$$a_3 = \frac{\alpha}{2\sqrt{m\kappa_{th}}} \tag{6.6d}$$

$$a_4 = \frac{D\alpha_{th}}{D_{th}\alpha} \tag{6.6e}$$

$$\hat{\Lambda} = \frac{mD_{th}}{\alpha_{th}\kappa_{th}}\,\Lambda \tag{6.6f}$$

$$\hat{\tau} = \sqrt{\frac{\kappa_{th}}{m}}\tau \tag{6.6g}$$

Il est également nécessaire de réécrire les équations des intensités lasers. Pour cela, nous introduisons des intensités sans dimension $\hat{I}_{\pm}\,(X,\theta) = \hat{I}_{\pm}\,(x,t) = I_{\pm}\,(x,t)\,/2I_{sat}$. Les équations 5.27 deviennent donc :

$$\frac{\partial\hat{I}_+}{\partial X} = +\sigma_0\int_{-\infty}^{+\infty}\pi_+\,\rho\,(X,P,\theta)\;dP \tag{6.7a}$$

$$\frac{\partial\hat{I}_-}{\partial X} = -\sigma_0\int_{-\infty}^{+\infty}\pi_-\,\rho\,(X,P,\theta)\;dP \tag{6.7b}$$

À ce point du développement, nous possédons un système d'EDPs couplées reliant des variables sans dimension. Il est donc *a priori* possible de l'intégrer numériquement. Toutefois, nous décidons de le simplifier à la fois pour tester le modèle dans une situation connue et

aussi pour choisir la méthode d'intégration qui sera utilisée. Il faut rappeler que l'intégration numérique des EDPs n'est pas un problème trivial. Il n'existe pas de méthodes universelles.

Il existe trois possibilités de simplifications : négliger le gaz chaud, définir une symétrie pour le piège et linéariser l'absorption des faisceaux lasers. Pour débuter l'étude du système VFP, nous choisissons de simplifier le modèle pour l'étudier dans des conditions pour lesquelles nous possédons une bonne intuition des résultats. Ce choix conduit à négliger les interactions avec les atomes chauds : les termes du membre de droite sont donc éliminés. Nous étudierons un piège symétrique : les deux faisceaux sont donc indépendants. Nous supposerons également que l'absorption est modérée dans le nuage si bien que l'intensité totale est une constante.

6.1.2 hypothèse de faible absorption dans un piège symétrique

Le fait de considérer un piège symétrique permet de réécrire le modèle différemment. En effet, il faut remarquer que toutes les quantités introduites dans le chapitre précédent qui dépendent des intensités sont en réalité des fonctions de leur somme et de leur différence. Il semble donc judicieux d'introduire l'intensité totale locale $i_+(X,\theta)$ et la différence locale $i_-(X,\theta)$, définies comme $i_\pm(X,\theta) = \hat{I}_+ \pm \hat{I}_-$. La symétrie du piège induit que $i_-(0,\theta) = 0$, ce qui justifie la pertinence de l'utilisation de ces grandeurs par rapport aux intensités individuelles. L'intégration de l'équation de $i_-(X,\theta)$ est donc possible à partir de cette condition. Pour un piège asymétrique, la situation est différente car les deux intensités individuelles ne sont pas connues en un même point de l'espace.

La linéarisation de l'absorption élimine une des équations. i_+ peut être considérée comme un paramètre : $i_+ \simeq \hat{I}_+(\infty)+\hat{I}_-(-\infty)$, en accord avec les hypothèses réalisées dans le chapitre 2. Toutes les grandeurs dépendant uniquement de l'intensité totale s'identifient avec leur expression dans le régime thermique, dans lequel l'absorption est infiniment faible.

L'équation VFP pour le système fermé contenant N atomes dans le régime de faible absorption est ainsi :

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\theta} + P\,\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial X} - \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial P}\,(X - b_2\, i_-) = 2b_3\left(\hat{\rho} + P\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial P} + (1+b_4)\,\frac{\partial^2\hat{\rho}}{\partial P^2}\right) \tag{6.8}$$

Une nouvelle formulation de cette équation a été adoptée, le membre de droite est constitué des termes ne dépendant pas de la position. Nous reviendrons sur cette disposition lors de l'intégration numérique de l'équation. Nous pouvons introduire les sections efficaces d'absorption σ_L et de réabsorption σ_R qui ne dépendent pas de i_-. Les différents coefficients

s'expriment donc :

$$b_2 = -\hbar k_L \Gamma \frac{\sigma_L}{\sigma_0} \sqrt{\frac{\alpha_{th}}{D_{th}\kappa_{th}}} \left(1 - \frac{9}{16}\frac{\sigma_R}{\sigma_L}\right) \tag{6.9a}$$

$$b_3 = \frac{\alpha_{th}}{2\sqrt{m\kappa_{th}}} \tag{6.9b}$$

$$b_4 = \frac{D_{DM}}{D_{th}} \tag{6.9c}$$

$$= \frac{8}{7}\sigma_R N = \frac{N}{N_c} \tag{6.9d}$$

L'équation 6.8 a exactement la même forme que l'équation 2 de [Warnock2006] décrivant la dynamique des électrons stockés dans un accélérateur circulaire. Ce qui montre encore une fois, la similitude entre ces deux systèmes. D'autre part, le terme de force collective fait apparaître le rapport des sections efficaces que nous avons mesuré dans le chapitre 4. Le coefficient b_4 est également un terme lié à la diffusion multiple, il est proportionnel au nombre d'atomes. Nous pouvons introduire N_c, le nombre d'atomes pour lequel $D_{DM} = D_{th}$ et donc $b_4 = 1$. Ainsi, la diffusion multiple a le même poids que la diffusion résiduelle thermique pour $N_c = {}^7\!/_8\,\sigma_R \simeq 10^{12}$. Le coefficient b_3, préfacteur du membre de droite (termes de Fokker-Planck), est le rapport entre les temps caractéristiques associés au rappel et à la dissipation par friction.

L'équation décrivant l'évolution de i_- est :

$$\frac{\partial i_-}{\partial X} = c_1 \hat{n} \tag{6.10}$$

avec $\hat{n} \equiv n(X,\theta) = \sqrt{D_{th}/\kappa_{th}\alpha_{th}}\, n(x,t)$ et $c_1 = \sigma_L i_+$. Il s'agit de la modélisation traditionnelle de l'absorption linéaire des faisceaux, notamment celle utilisée dans le chapitre 2.

En résumé, le modèle se réduit à deux équations différentielles couplées. Il subsiste quatre coefficients dépendant explicitement de trois paramètres de contrôle : le désaccord laser Δ, l'intensité incidente $I_{0+} = I_+(\infty)$ [1] et le nombre d'atomes N.

1. $I_-(-\infty) = I_+(\infty)$ car le piège est symétrique

6.2 Résolution du système

6.2.1 densité stationnaire

Il a été montré que l'équation VFP 6.8 admet une solution stationnaire $\hat{\rho}_0$ de la forme suivante [Haissinski1973, Cai2011] :

$$\hat{\rho}_0 = \frac{\hat{n}_0(X)}{\sqrt{2\pi\,(1+b_4)}} \exp(-P^2/2\,(1+b_4)) \tag{6.11}$$

Cette solution est obtenue par séparation des variables. La distribution en impulsion est une forme gaussienne comme dans le régime thermique mais élargie par la diffusion multiple. Elle annule le membre de droite de l'équation VFP 6.8. La densité $\hat{n}_0(X)$ est connue sous le nom de distribution de Haïssinski [2] et annule le membre de gauche.

Il est possible d'établir une équation différentielle pour la densité stationnaire normalisée $\tilde{n}(X) = b_2 c_1 \hat{n}_0$ prenant en compte la variation de l'intensité stationnaire $i_{-0}(X)$. Les expressions de b_2 et c_1 montre que le produit $(b_2 c_1)^{-1}$ s'exprime de manière identique à la densité maximale dans le régime de diffusion prédite dans [Sesko1991]. L'annexe C fournit les détails qui permettent d'obtenir l'EDO suivante :

$$\frac{d^2\tilde{n}}{dX^2} - \frac{1}{\tilde{n}}\left(\frac{d\tilde{n}}{dX}\right)^2 + \tilde{n}\left(\frac{1-\tilde{n}}{1+b_4}\right) = 0 \tag{6.12}$$

b_4 est le seul paramètre à intervenir explicitement dans cette équation. Cette EDO est similaire à l'équation 13 de [Sesko1991]. Cependant, aucune intégration n'a été effectuée dans cette référence. Il est possible de trouver une étude à deux dimensions de cette équation dans [Arnold2000].

L'intégration numérique de cette EDO ne présente aucune difficulté : les méthodes usuelles d'Euler [3] ou de Runge-Kutta [4] sont tout à fait adaptées. Comme nous recherchons une solution symétrique, nous procédons à l'intégration uniquement pour des positions positives. Le maximum de la distribution est à l'origine donc $d\tilde{n}/dX = 0$ en $X = 0$. L'EDO 6.12 définit le profil spatial de la densité, par conséquent la condition initiale $\tilde{n}^0 \equiv \tilde{n}(X = 0)$ joue le

2. L'introduction de cette distribution est indépendante de l'hypothèse de faible absorption. Elle nécessite seulement que le système soit fermé. L'état stationnaire de l'équation 6.5, sans second membre, prend donc une forme analogue.

3. Dans cette méthode, la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ est obtenue par différence finie. L'évolution se déduit de la relation : $f(x+h) = f(x) + h \times f'(x)$ où h est le pas d'intégration.

4. Cette méthode est un perfectionnement de la méthode d'Euler, dans le sens où elle introduit des points intermédiaires au pas d'Euler. Le nombre de points choisis définit l'ordre de la méthode, si bien que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 1 s'identifie à la méthode d'Euler.

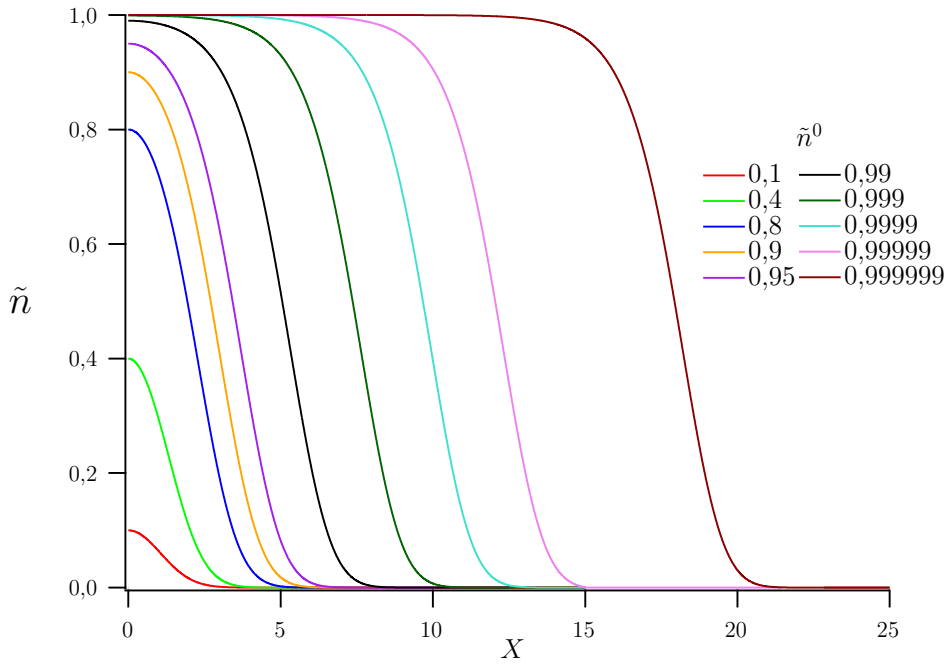


FIGURE 6.1 – Profils de densité pour une variation de la densité à l'origine.

rôle de paramètre. Le choix de sa valeur est plus lourd de sens que peut l'être celui d'une condition initiale pour une évolution temporelle. En effet, $\tilde{n}^0$ définit la densité au centre normalisée par rapport à la densité maximale dans le régime de diffusion multiple. En d'autres termes, le régime de fonctionnement du piège dépend de la valeur choisie pour $\tilde{n}^0$. Le régime de diffusion multiple est associée à une valeur proche de 1, alors que le régime thermique correspond à une valeur plus faible. La diffusion en impulsion est contrôlée par le coefficient b_4. Les valeurs de ces deux paramètres sont modifiées indépendamment l'une de l'autre afin de pouvoir comprendre leur influence.

La figure 6.1 présente des profils de densité correspondant à des conditions initiales différentes. Cette évolution de la distribution était attendue. Dans un premier temps, une augmentation de la densité maximale n'élargit pas de manière significative la distribution. Il s'agit du comportement dans le régime thermique. Alors que pour $\tilde{n}^0 > 0,95$ (courbe violette), le profil s'élargit énormément. Le nuage rentre dans le régime de diffusion multiple. L'équation 6.12 qui définit l'évolution de $\tilde{n}(X)$ montre que la condition initiale $\tilde{n}^0 = 1$ conduit à une densité constante et de taille infinie. Cette solution n'est pas réaliste car la zone de piégeage est limitée à $2w$. La taille des faisceaux dans un PMO est typiquement de quelques mm, ce qui donne une limitation de $X < 100$. Dans le cas où la taille de la distribution devient comparable à w, il faut prendre en compte une distribution transverse

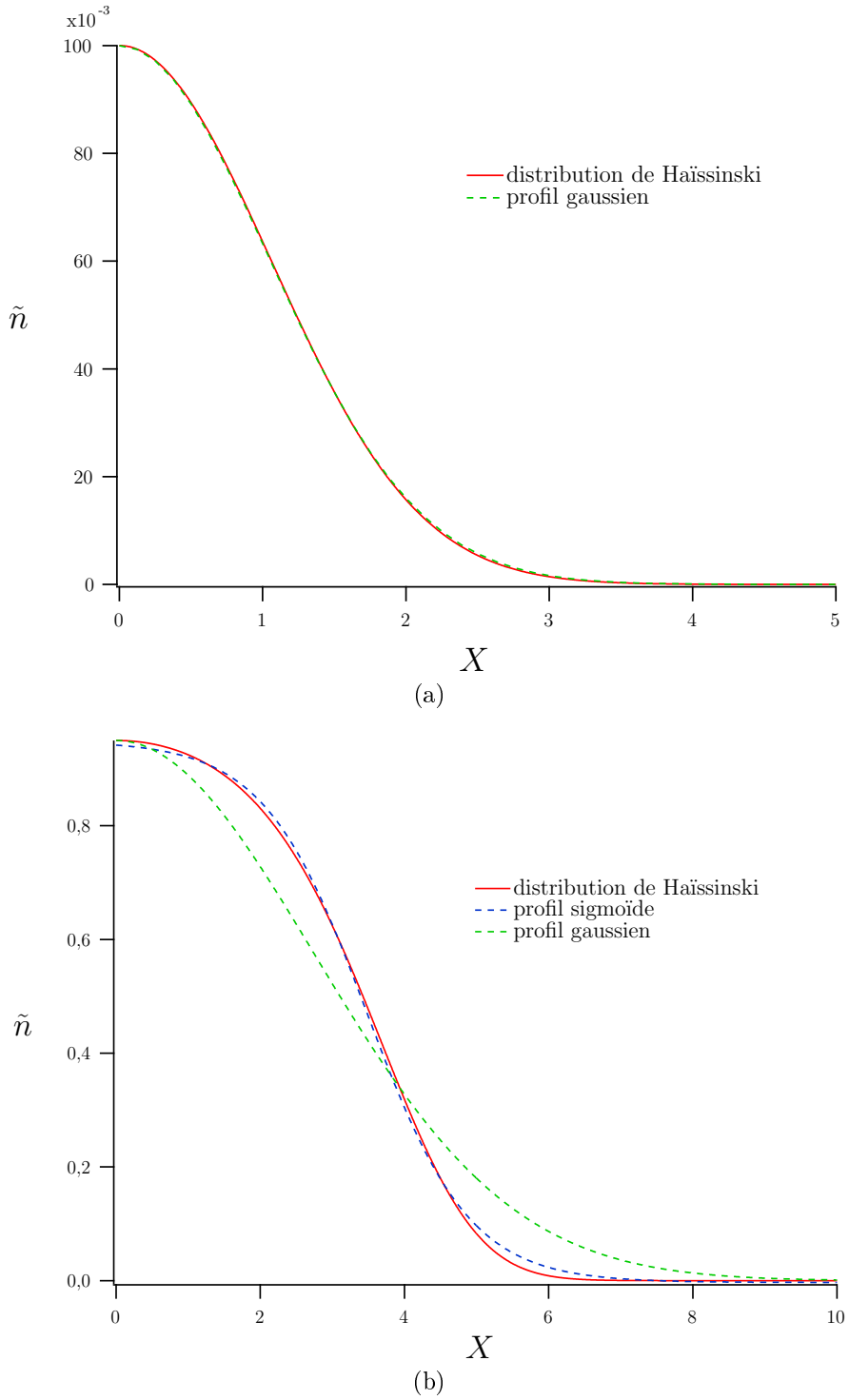


FIGURE 6.2 – Modélisation du profil de densité pour une condition au centre différente : (a) une forme gaussienne convient parfaitement pour $\tilde{n}^0 = 0,1$, (b) pour une densité plus élevée $\tilde{n}^0 = 0,95$, une fonction sigmoïde correspond davantage.

pour les faisceaux mais ce n'est pas nécessaire ici.

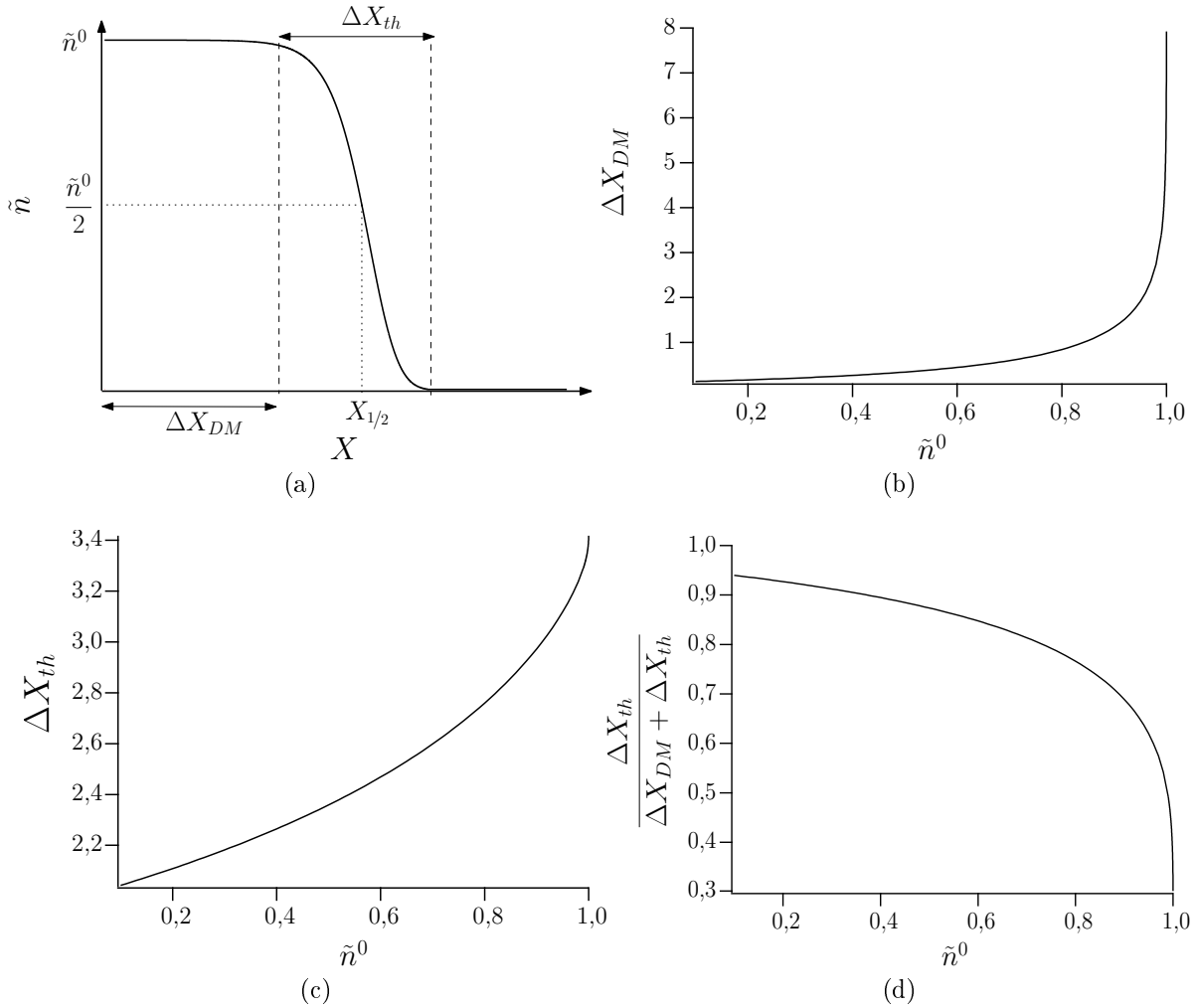


FIGURE 6.3 – Variation des deux composantes de la taille du nuage en fonction de la densité au centre : (a) définition des tailles ΔX_{DM} de diffusion multiple et thermique ΔX_{th}, (b) évolution de la taille de diffusion multiple, (c) évolution de la taille thermique et (d) comportement de la proportion thermique du nuage.

Il peut être utile de décrire la distribution de Haïssinski par une fonction mathématique. La distribution est très bien décrite par une forme gaussienne pour une faible densité initiale (voir figure 6.2a). Lorsque la densité au centre se rapproche de sa valeur limite, une meilleure approximation est trouvée en utilisant une forme sigmoïde [Hoffmann1994]. Il s'agit d'une

marche d'escalier, définie comme $f(X) = 1/\left[1 + \exp\left(-\left(X - X_{1/2}\right)/\Delta X\right)\right]$ où ΔX quantifie la largeur de la décroissance et $X_{1/2}$ est la position où $f\left(X_{1/2}\right) = 1/2$. Le bon accord obtenu avec cette fonction est visible sur la figure 6.2b.

Il est possible de considérer le nuage dans le régime de diffusion multiple comme constitué d'un noyau de taille ΔX_{DM} dans lequel la densité est constante (ou à température nulle) [Sesko1991] et d'une couronne de dimension ΔX_{th} qui est la manifestation de la température. Ces grandeurs sont définies sur la graphe de la figure 6.3a. Nous choisissons de définir ΔX_{th} comme l'étendue spatiale du nuage pour laquelle la densité passe de 90 % à 10 % de sa valeur maximale [5]. Ainsi, la taille thermique vaut $4,4\,\Delta X$ et la taille du plateau est égale à $X_{1/2} - 2,2\,\Delta X$. Les figures 6.3b et 6.3c représentent l'évolution de ces deux tailles en fonction de la densité au centre. Les deux contributions augmentent de façon monotone. Cependant, le plateau lié à la diffusion multiple présente un effet de seuil et prend une part de plus en plus importante à la taille totale, comme nous pouvons le voir sur la figure 6.3d.

Les mêmes observations peuvent être faites pour une variation du coefficient b_4 associé à la diffusion en impulsion due à la diffusion multiple ($b_4 = D_{DM}/D_{th}$). L'effet de la diffusion est représenté sur la figure 6.4. Les deux tailles ΔX_{DM} et ΔX_{th} augmente avec b_4. Ce paramètre élargit davantage en proportion la taille thermique que le plateau (voir courbes noires pour $b_4 = 2$). Toutefois, le plateau étant très grand devant la taille thermique, la densité peut être décrite par un profil carré lorsque le nuage est entré profondément dans le régime de diffusion multiple ($\tilde{n}^0 \simeq 1$ et $b_4 > 1$). De tels profils peuvent être comparés à des données expérimentales. En effet, il est possible d'extraire la densité atomique selon une direction à partir d'une image grâce à un algorithme décrit dans [Overstreet2005].

L'équation 6.10 régissant l'évolution de $i_{-0}(X)$ est très simple à intégrer dès lors que la densité atomique est connue. La figure 6.5 représente l'évolution de la différence d'intensité et de la densité obtenues pour $\tilde{n}^0 = 0,999$ et $b_4 = 0$. La variation observée correspond bien à l'hypothèse de faible absorption, à savoir que $i_{-0}(X)$ croît linéairement à l'intérieur du nuage.

L'étude du régime stationnaire nous a permis de confirmer un certain nombre de résultats issus de modèles partiels. Intéressons-nous maintenant à l'évolution temporelle du système.

6.2.2 modèle dépendant du temps

méthode d'intégration numérique

À présent, nous souhaitons réaliser des simulations de notre modèle spatio-temporel simplifié. Pour cela, nous allons tirer profit du fait que dans l'approximation de faible absorption

5. La condition $f(X_{0,9}) = 0,9 = 1/\left[1 + \exp\left(-\left(X_{0,9} - X_{1/2}\right)/\Delta X\right)\right]$ donne $X_{0,9} = X_{1/2} + \Delta X \ln 9 \simeq X_{1/2} + 2,2\,\Delta X$

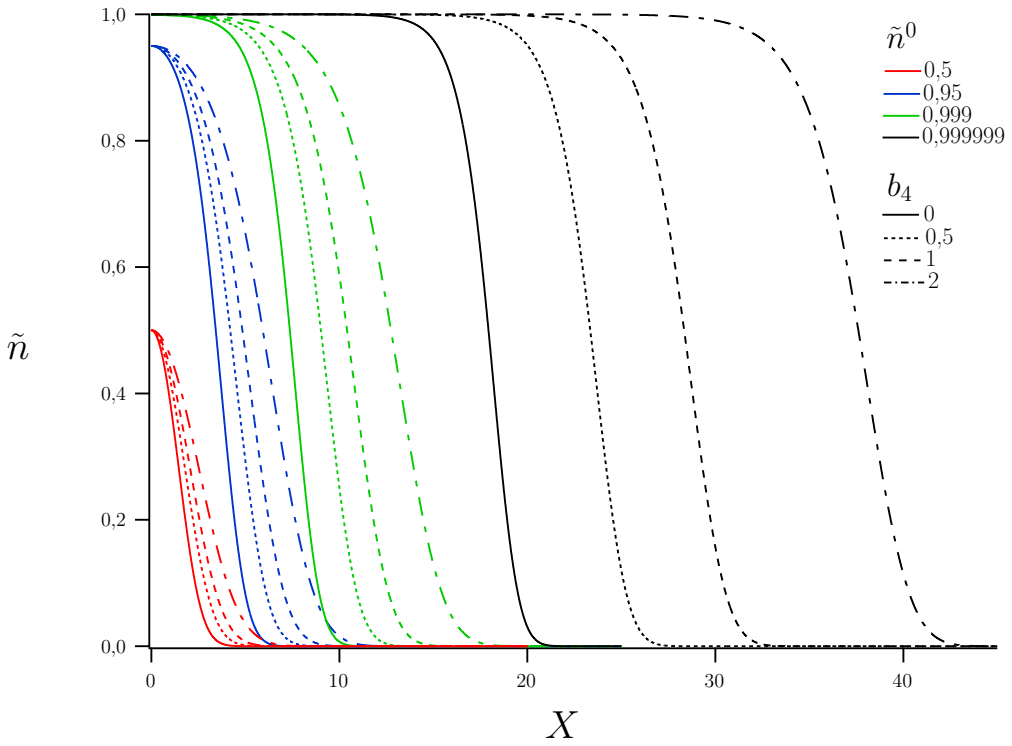


FIGURE 6.4 – Profils de densité pour différents jeux de coefficient de diffusion et densité au centre. La valeur de densité à l'origine est identifiée par une couleur : $\tilde{n}^0 = 0,5$ (courbes rouges), $0,95$ (bleues), $0,999$ (vertes) et $0,999999$ (noires). Le coefficient b_4 est associé à des motifs différents : $b_4 = 0$ (ligne pleine), $0,5$ (pointillés), 1 (tirets) et 2 (pointillés-tirets).

pour un système fermé, l'équation VFP 6.8 est identique à l'équation 2 de [Warnock2006] pour des électrons piégés dans un accélérateur circulaire. Ce système a été et est toujours intensivement étudié, et notamment par l'équipe d'optique non-linéaire du PhLAM dirigée par Serge Bielawski et Christophe Szwaj. En collaboration avec cette équipe, nous allons utiliser ces travaux pour intégrer les équations de notre système d'atomes froids. La procédure d'intégration de l'équation 6.8 est décrite dans [Warnock2000]. Nous utiliserons un programme développé par l'équipe du laboratoire [Roussel2014] dans le but d'intégrer numériquement l'EDP du modèle VFP.

L'algorithme d'intégration utilise une méthode semi-lagrangienne. Une grille rectangulaire à deux dimensions est formée par discrétisation de l'axe des positions et des impulsions. Le principe de cette méthode est le suivant : la condition initiale choisie à θ_0 donne les valeurs de $\hat{\rho}$ sur l'ensemble des noeuds de la grille. L'évolution temporelle consiste à faire agir les termes de l'équation VFP sur la grille. D'une manière générale, les points ainsi calculés

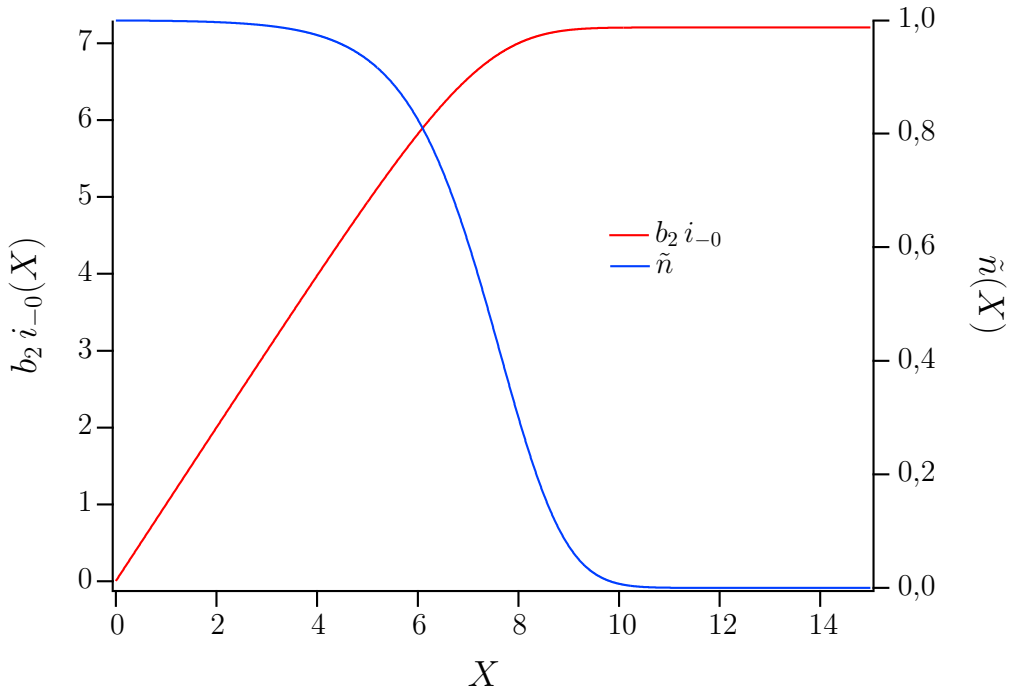


FIGURE 6.5 – Variation de $b_2\, i_{-0}(X)$ (courbe rouge) et de $\tilde{n}(X)$ (bleue) pour une densité à l'origine de 0,999 et $b_4 = 0$.

ne coïncident pas avec les noeuds de la grille. Une interpolation biquadratique permet de redéfinir une grille identique à celle de départ, mais où les valeurs de $\hat{\rho}$ à chaque noeud correspondent à un temps $\theta_0 + \delta\theta$. Cette procédure permet de calculer une approximation de la valeur d'un noeud de la grille, à partir de neuf points voisins. Elle est habituelle de l'intégration numérique des EDPs.

La méthode utilisée traite séparément les termes de Vlasov (membre de gauche de l'équation 6.8) et ceux de Fokker-Planck (membre de droite). Les deux premiers termes de Vlasov ($P\,\partial/\partial X - X\,\partial/\partial P$) correspondent à une rotation dans l'espace des phases. Le troisième ($b_2 i_-\,\partial/\partial P$), dépendant de la force collective, est associé à un changement d'impulsion. L'algorithme d'intégration fait donc tourner la grille d'un angle $\delta\theta$, puis il la translate d'une quantité $b_2 i_- \delta\theta$ selon l'axe des impulsions. La partie Fokker-Planck ne dépend que de l'impulsion, elle est donc plus facile à traiter. Son intégration est effectuée avec la méthode d'Euler. En parallèle, l'intégration de l'EDO 6.10 donnant l'évolution de la différence des intensités est également effectuée avec la méthode d'Euler.

La rapidité de la méthode est en partie donnée par la valeur du coefficient $2b_3$. Ce paramètre est le rapport des temps d'oscillation et d'amortissement du piège. Plus ce coefficient

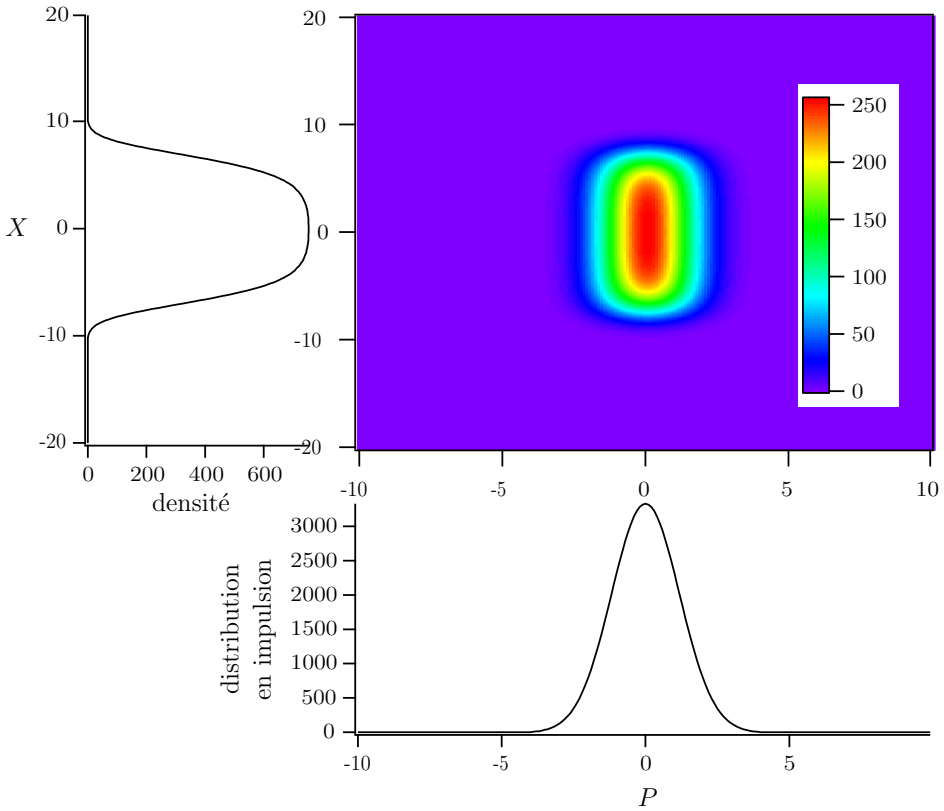
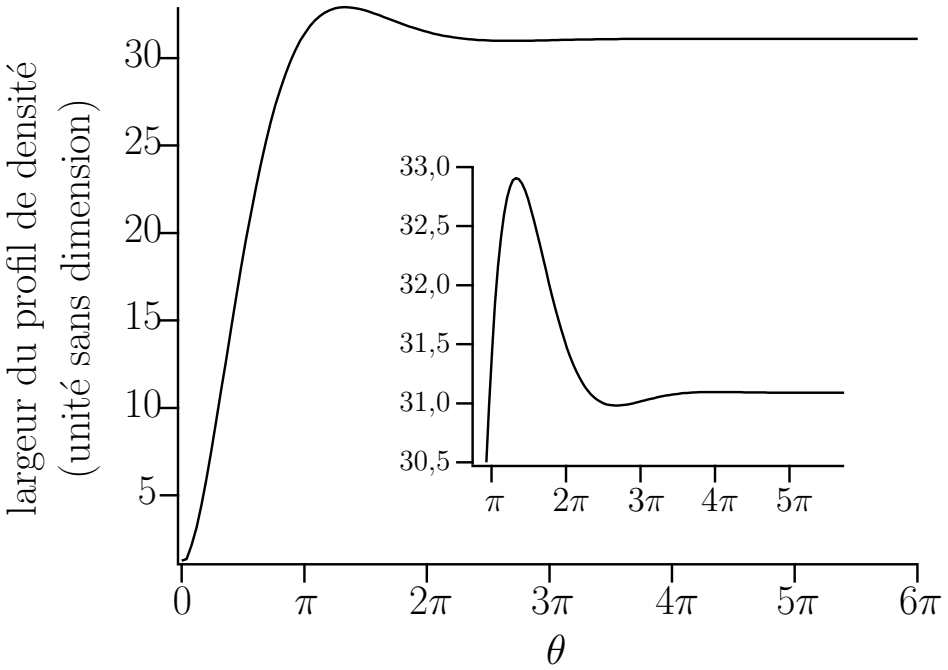


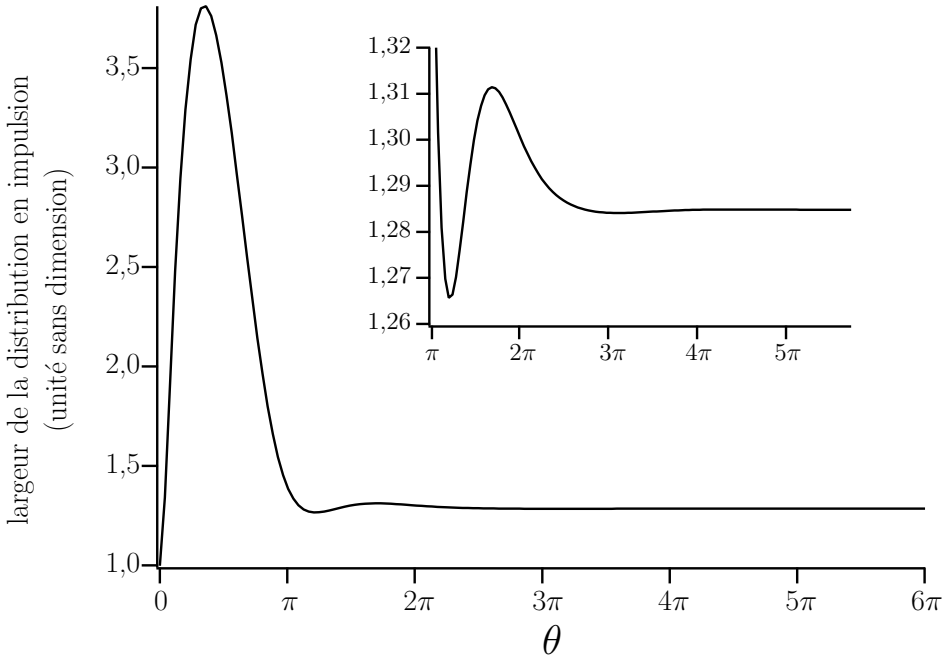
FIGURE 6.6 – Représentation 2D de la densité stationnaire obtenue pour $\Delta = -5\Gamma$, $i_+ = 50$ et $N = 4\,10^{12}$. La condition initiale est une fonction gaussienne à 2D symétrique de demi-largeur égale à 1.

est petit, plus il faudra intégrer un grand nombre de fois les termes de Fokker-Planck pour un pas temporel de l'intégration des termes de Vlasov. Dans le cas des paramètres standards de la physique des atomes froids, nous trouvons $b_3 \simeq 1$. Cette méthode est donc tout à fait adaptée à notre modèle.

Pour obtenir les résultats qui vont suivre, nous avons utilisé des grilles rectangulaires typiquement de 40×20 cellules avec des pas d'intégration $\delta X = \delta P = 0,1$. La taille de la grille est plus importante selon l'axe des positions car nous attendons que la distribution soit plus large dans cette direction. Le pas d'intégration temporel (ou l'angle de rotation de la grille) est $\delta\theta = \pi/2 \times 10^{-4}$ afin de garantir une bonne précision aux résultats. Pour un temps total d'intégration de 6π, la quantité de données calculée est de 77 Go. Ce nombre est plutôt élevé, toutefois il n'est pas nécessaire de conserver la totalité des points. Un échantillonnage de 150 grilles est suffisant, soit un fichier de 96 Mo. Pour une telle grille, le temps de calcul



(a)



(b)

FIGURE 6.7 – Évolution temporelle de la densité dans l'espace des phases : (a) demi-largeur de la densité réelle et (b) demi-largeur de la distribution en impulsion. Les agrandissements permettent de voir l'oscillation amortie. La condition initiale utilisée est un profil gaussien dans les deux directions. Les valeurs des paramètres sont les suivantes : $\Delta = -2\Gamma$, $i_+ = 1$ et $N = 4\,10^{12}$ (soit $b_4 = 0,05$).

est de l'ordre de 40 s sur un processeur 8 coeurs de 2,13 GHz. L'algorithme utilisé permet la parallélisation du calcul pour diminuer les temps de calcul, notamment pour des temps d'intégration plus long ou des grilles de taille plus conséquente.

résultats

Dans la section précédente, nous avons établi l'état stationnaire du système. L'intégration du système d'équations dépendant du temps permet d'avoir accès au régime transitoire. La figure 6.6 représente la densité stationnaire dans l'espace des phases pour les valeurs de paramètres suivants : $\Delta = -5\Gamma$, $i_+ = 50$ et $N = 4\,10^{12}$. Nous retrouvons les résultats énoncés plus tôt. La densité est un créneau avec des décroissances douces et la distribution en impulsion a l'allure d'une fonction gaussienne. Les figures 6.7 montrent l'évolution de la demi-largeur des distributions en position et en impulsion. La condition initiale est une fonction gaussienne dans chaque direction de demi-largeur 1. La taille du profil de densité est déterminée par l'ajustement d'une double sigmoïde (cette fois, nous tenons compte de la totalité du profil et non de la moitié). D'autre part, une fonction gaussienne est utilisée pour modéliser la distribution en impulsion. Les deux largeurs atteignent leur valeur d'équilibre en effectuant une oscillation amortie (période associée $\simeq 2\pi$) en moins de $\theta = 6\pi$. Le profil de densité atteint une demi-largeur d'environ 30. La distribution en impulsion tend vers une demi-largeur de 1,44. Cette valeur est en très bon accord avec la prédiction théorique : $\sqrt{2\,(b_4+1)} = 1,45$.

Ce comportement est observé pour toute la zone de l'espace des paramètres que nous avons explorée. Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau 6.1. Comme nous pouvions nous en douter le modèle a été trop simplifié et conduit à un comportement spatio-temporel trivial. Il nous faut donc revenir sur les simplifications qui ont été effectuées afin d'ajouter des ingrédients susceptibles de créer des instabilités.

plages de valeur
$-5\Gamma \leq \Delta \leq -\Gamma$
$1 \leq i_+ \leq 50$
$0,5N_c \leq N \leq 10N_c$

TABLE 6.1 – Valeurs des paramètres utilisées pour les simulations numériques. N_c a été défini comme le nombre d'atomes pour lequel $D_{DM} = D_{th}$.

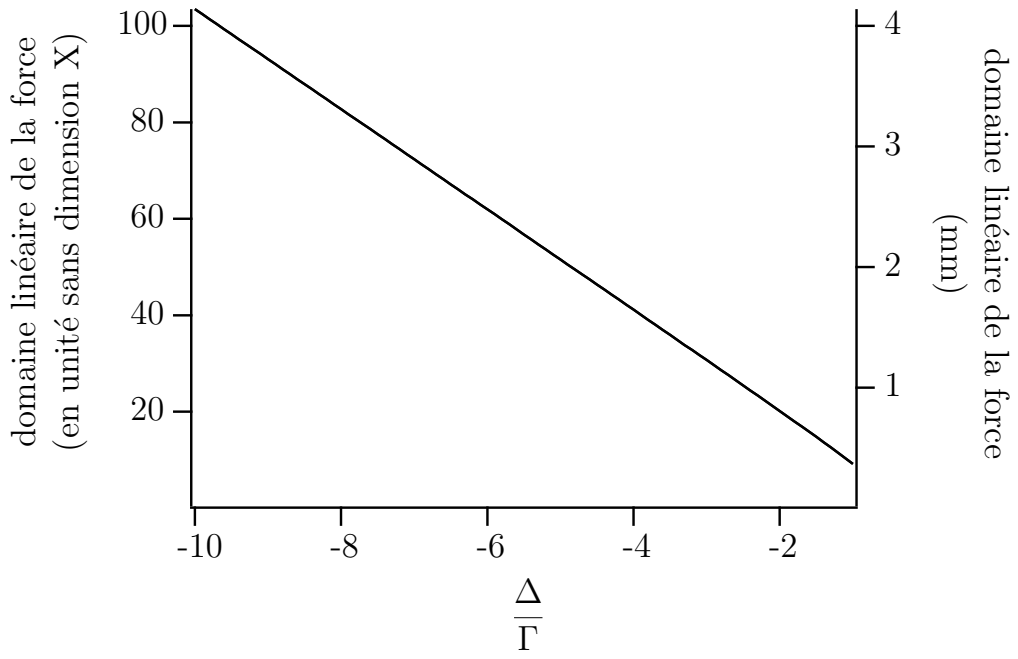


FIGURE 6.8 – Variation en fonction du désaccord de la position pour laquelle l'écart relatif entre la force de rappel et son développement linéaire est inférieur à 10 %. L'échelle de gauche est exprimée en unité de position sans dimension X alors que l'axe de droite est gradué en mm.

retour sur les simplifications

Étudions tout d'abord la validité de la linéarisation de la force de rappel. Cette force dépend du champ magnétique. Nous avons considéré que les bobines en configuration anti-Helmholtz créent un champ dont les composantes sont proportionnelles à l'écart avec le centre du piège. Il est possible de montrer que l'écart relatif entre le champ et son développement linéaire est inférieur à 2 % pour des positions $X \lesssim 500$. Cette valeur est 5 fois plus grande que la limitation introduite par la taille des faisceaux transverses. Le champ peut donc être considéré comme linéaire : $B = bx$. D'autre part, il faut comparer la force de rappel et sa forme utilisée, proportionnelle à la position. Pour faciliter cette comparaison, nous nous plaçons dans l'approximation des faibles saturations. Il est ainsi possible de calculer la force

sans réaliser le développement du chapitre 2. La force de rappel F_{rappel} s'exprime simplement :

$$F_{rappel} \propto \frac{1}{4\left(\Delta+\delta\right)^2+\Gamma^2} - \frac{1}{4\left(\Delta-\delta\right)^2+\Gamma^2} \tag{6.13a}$$

$$\propto -16\,\frac{\Delta}{\left(4\Delta^2+\Gamma^2\right)^2}\,\delta + o\left(\delta^3\right) \tag{6.13b}$$

avec $\delta = \mu_B bx/\hbar = \mu_B b\Delta x\, X/\hbar$.

La figure 6.8 montre en fonction du désaccord l'évolution du domaine spatial pour lequel l'écart relatif entre l'expression 6.13a et sa forme linéaire est inférieur à 10 %. Pour de grands désaccords $|\Delta| > 4\Gamma$, l'approximation linéaire est plutôt bonne pour des largeurs de nuage inférieures à 40. Cette valeur est plutôt élevée et est atteinte pour des valeurs marginales de paramètres. Le problème peut se poser pour des désaccords plus faibles $-4\Gamma < \Delta < 0$. Dans ces conditions, la demi-taille du nuage ne doit pas excéder 10. Certains profils de la figure 6.4 atteignent cette borne, ils correspondent à $\tilde{n}^0 \simeq 1$. Dans ce cas, il est nécessaire de tenir compte de la non-linéarité de la force de rappel ce dont il est question dans [Pohl2006]. La référence [Townsend1995] identifie cette situation comme le *régime à deux composantes* par opposition aux régimes thermique et de diffusion multiple. La linéarisation de la force ne semble pas un problème critique. Il faut toutefois garder à l'esprit cette limite lorsque de grands nuages sont observés.

Revenons à présent sur l'hypothèse d'absorption modérée. Nous avons considéré que l'intensité des faisceaux diminuait peu dans le nuage si bien que la somme i_+ pouvait être supposée constante. Afin de tester la validité de cette simplification, nous utilisons la densité calculée dans le régime de faible absorption pour recalculer les intensités à partir de leurs équations d'évolution (équations 6.7) où cette hypothèse n'a pas été réalisée. Sur la figure 6.9a sont représentées la densité $\tilde{n}(X)$ (courbe noire), obtenue pour $b_4 = 0,35$ ($\Delta = -2\Gamma$, $I_{0+} = 2I_{sat}$, $N = 5\,10^{12}$) et $\tilde{n}^0 = 0,99999$, ainsi que les intensités $\hat{I}_\pm(X)$. Celles-ci sont donc calculées à partir des équations 6.7, où uniquement les populations ont été linéarisées (équivalent à linéariser la force de rappel en δ). Nous remarquons que l'évolution de $\hat{I}_\pm(X)$ n'est pas linéaire et qu'environ 75 % de l'intensité est absorbée à travers le nuage. La figure 6.9b montre que la somme i_+ varie de près de 20 %. Ces courbes ont été calculées pour des valeurs standards des paramètres. Il paraît donc nécessaire de revenir sur l'approximation d'absorption modérée. D'une part, cela permettra de mieux décrire la propagation des faisceaux. D'autre part, cela va introduire une non-linéarité dans le système qui pourrait conduire à un comportement dynamique moins trivial que celui observé jusqu'ici. Ceci est cohérent avec ce qui peut être trouvé dans la littérature [Wilkowski2000, diStefano2004], à savoir que l'effet d'ombre est à l'origine des instabilités observées dans ce cas.

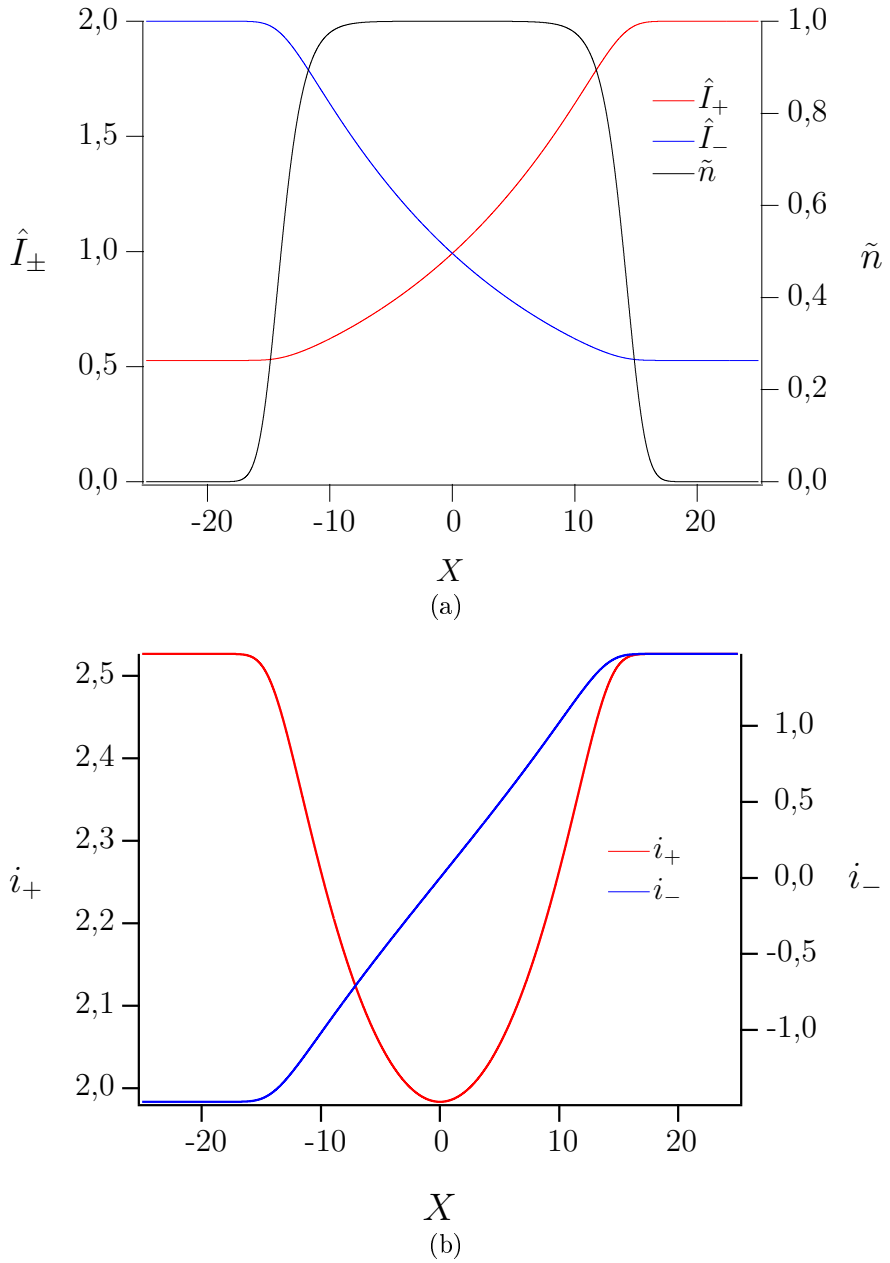


FIGURE 6.9 – Évolution des intensités lasers sans linéarisation de l'absorption : (a) variation des intensités individuelles $\hat{I}_+$ (courbe rouge) et $\hat{I}_-$ (bleue) et du profil densité (noire) et (b) variation de l'intensité totale locale i_+ (courbe rouge) et de la différence locale i_- (bleue). Ces courbes sont obtenues avec les valeurs suivantes des paramètres : $\Delta = -2\Gamma$, $I_{0+} = 2I_{sat}$, $N = 5\,10^{12}$ (soit $b_4 = 0,35$) et $\tilde{n}^0 = 0,99999$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les premières étapes d'une étude numérique du système VFP. En particulier, nous avons vu que l'état stationnaire de la densité pouvait se mettre sous la forme d'une distribution de Haïssinski, dans le régime de faible absorption et pour un système fermé. La distribution en impulsion est alors une gaussienne. Nous avons étudié le comportement de la distribution de Haïssinski en fonction des paramètres du système.

Nous avons également présenté des résultats préliminaires de l'intégration du système dépendant du temps. Ces simulations ont été réalisées en collaboration avec l'équipe d'optique non-linéaire du laboratoire PhLAM. L'algorithme utilise une méthode semi-lagrangienne développée pour intégrer une équation de VFP régissant l'évolution des électrons dans des accélérateurs de particules. Cependant, les résultats montrent que le modèle a été trop simplifié comme nous pouvions nous y attendre. Ils ne mettent pas en évidence des comportements dynamiques intéressants, notamment ceux observés expérimentalement. La dynamique du système se réduit à une évolution vers un état stationnaire. Le régime de faible absorption a été étudié car il s'agit du modèle le plus simple dérivant du modèle VFP complet. De plus, les équations obtenues sont très proches de celles pour les électrons : il s'agit d'une première étape pour tester puis adapter le programme d'intégration aux spécificités de la physique des atomes froids. À l'avenir, il paraît nécessaire de réintroduire des éléments négligés pour complexifier le modèle pas à pas. L'hypothèse de faible absorption notamment n'est pas valide pour les valeurs de paramètres typiques des expériences. Il est également envisageable d'introduire les termes d'interaction avec les atomes chauds. La première option conduit à augmenter les non-linéarités des équations, alors que la seconde introduit une deuxième échelle de temps. Ce second temps caractéristique est notamment plus proche de la période des oscillations déterministes observées.

Chapitre 7

Étude expérimentale de la dynamique spatio-temporelle dans un PMO

Les études précédentes sur la dynamique des atomes froids ont mis en évidence l'existence de comportements instables. Ces derniers peuvent se classer en deux catégories : les instabilités *stochastiques* et les instabilités *déterministes*.

Les premières se caractérisent par l'apparition aléatoire de bouffées périodiques de grande amplitude dans une dynamique qui est par ailleurs essentiellement bruitée [Wilkowski2000, Hennequin2004]. Ces instabilités stochastiques ont été observées avec un PMO asymétrique, c'est-à-dire où l'effet d'ombre joue un rôle majeur. Leur apparition se traduit par des fluctuations de fluorescence, c'est à dire essentiellement du nombre d'atomes dans le nuage, mais également par des mouvements périodiques de l'ensemble du nuage.

D'après [Hennequin2004], l'origine de ces instabilités est à rechercher dans un phénomène de *résonance stochastique*. Au voisinage de cette résonance, le système devient particulièrement sensible au bruit qui est amplifié et conduit à l'apparition de salves d'instabilités. Il a été montré que les fréquences d'évolution des instabilités sont des fréquences propres du système liées à l'existence d'une bifurcation de Hopf.

Par contre, les instabilités déterministes ont été observées à la fois dans des PMOs symétrique [Labeyrie2006] et asymétrique [diStefano2004]. Elles se caractérisent par une variation périodique du nombre d'atomes piégés. Dans le cas asymétrique, cette variation du nombre d'atomes s'accompagne d'un mouvement périodique du nuage. Enfin, notons que les fréquences caractéristiques de ces instabilités peuvent varier de quelques Hz à environ 200 Hz, ce qui suggère qu'il pourrait y avoir plusieurs mécanismes à l'origine de cette dynamique. Celle-ci n'a pas été clairement identifiée et n'est pas nécessairement la même pour les deux configurations.

La principale limitation de ces études est que la description adoptée ne tient pas compte

de l'évolution temporelle de la distribution spatiale des atomes au sein du nuage. En effet, la dynamique spatiale n'est caractérisée qu'au travers du mouvement du centre de masse. Notre objectif est de dépasser cette limite en caractérisant la dynamique spatio-temporelle du nuage d'atomes froids. En d'autres termes, nous allons décrire l'évolution temporelle de la répartition spatiale des instabilités dans le nuage. Pour cela, et c'est le point clé de ce travail, nous allons utiliser une caméra rapide. Celle-ci est capable d'acquérir des images à un rythme supérieur aux fréquences d'évolution des instabilités. Grâce à cet outil, nous pouvons espérer donner une description des mouvements au sein du nuage, et ainsi affiner notre compréhension de la dynamique dans un PMO. Pour cette première étude spatio-temporelle, nous allons nous focaliser sur les instabilités stochastiques. Ce régime est celui qui apparaît pour la gamme de paramètres la plus usuelle, et c'est d'ailleurs le premier régime à avoir été observé.

Nous présenterons tout d'abord le dispositif de mesure utilisé. Celui-ci est principalement composé d'une photodiode 4 quadrants pour l'analyse temporelle et de la caméra rapide pour la caractérisation spatio-temporelle. Puis, nous réaliserons une étude similaire à celles effectuées dans [Wilkowski2000] et [Hennequin2004] pour nous assurer que le piège se trouve bien dans un régime d'instabilités stochastiques. Une fois cette étape effectuée, nous pourrons utiliser la caméra rapide pour étudier la répartition spatiale des instabilités.

7.1 Dispositif expérimental

Nous utilisons un piège isotrope et asymétrique : tous les faisceaux sont identiques et les faisceaux retours sont formés par rétro-réflexion des faisceaux incidents. Il s'agit de la même configuration que dans [Wilkowski2000] et [Hennequin2004]. Ces études ont utilisé une photodiode 4 quadrants pour enregistrer l'évolution temporelle du nombre d'atomes et les déplacements du centre de masse du nuage. Comme nous souhaitons nous remettre dans des conditions similaires à celles de ces études, nous utiliserons également ce type de photodiode. Le modèle utilisé ici possède quatre cellules de détection carrées de 1,5 mm de côté (avec 10 µm de séparation). Elle est montée de manière à générer trois signaux de sortie correspondant à la différence des courants des capteurs horizontaux, des capteurs verticaux et également à la somme de tous les courants (comme une photodiode classique). La somme donne accès à la fluorescence totale du nuage. Il est également possible de détecter des mouvements du nuage, si celui-ci est à cheval sur les quadrants horizontaux ou verticaux. Les mouvements détectés sont ceux du centre de masse du nuage. Cette photodiode donne donc accès à une information temporelle et spatiale sur la dynamique globale du nuage.

L'acquisition des signaux de la photodiode est effectuée grâce à un oscilloscope PicoScope 4424 (PicoScope Technology). Il s'agit d'un oscilloscope PC connecté par un port USB et disposant de 4 voies d'entrée d'une résolution de 12 bits. Cet appareil permet l'enregistrement

de signaux avec une fréquence d'échantillonnage maximale de 80×10^6 point/s. Sa mémoire tampon peut contenir 1024×10^6 points. Compte tenu de l'intervalle de fréquences des instabilités, il nous faut couvrir un spectre s'étalant de quelques Hz à 200 Hz. D'après le théorème de Nyquist-Shannon, nous devons donc acquérir au minimum un point toutes les $2,5$ ms. Nous verrons dans la suite que nous avons besoin de faire des enregistrements pendant plusieurs dizaines de secondes. L'acquisition de trois signaux (un par tension de sortie de la photodiode) pendant 30 s nécessite l'enregistrement de 36000 points. Les performances de cet oscilloscope correspondent donc largement à nos besoins.

Pour aller plus loin dans l'analyse spatio-temporelle du système, il est nécessaire d'utiliser une caméra. Cependant, une caméra standard enregistre 25 images/s, ce qui n'est pas suffisant pour observer des instabilités dont la fréquence peut atteindre 200 Hz. Nous nous sommes donc équipés d'une caméra rapide. Il s'agit d'un modèle Phantom v7.3 fabriqué par Vision Research. Son capteur possède une résolution de 800×600 pixels carrés de 22 µm de côté soit $17,6 \times 13,2$ mm. À résolution maximale, elle peut acquérir jusqu'à un taux de 6688 images/s avec un encodage de 8 à 14 bits. La résolution des images peut être volontairement diminuée, soit pour augmenter le taux d'acquisition, soit simplement pour diminuer le volume de données enregistré. En effet, dans le cas d'acquisitions à un taux très élevé, le temps de transfert des fichiers peut devenir plus grand que le temps d'acquisition. Il est donc nécessaire d'utiliser une mémoire tampon interne à la caméra. Dans notre caméra, la taille de cette mémoire est de 2 Go. Malheureusement, cela limite la quantité de données que l'on peut acquérir à chaque enregistrement, il faut trouver le meilleur compromis entre la résolution des images et la fréquence de prise de vue pour un temps total d'acquisition donné. Par exemple, à résolution maximale et pour des images encodées sur 8 bits, il est possible d'enregistrer 4167 images. Cela correspond à une acquisition de $0,6$ s (soit plus de 1000 périodes de 200 Hz) pour une cadence maximale. Ces chiffres montrent que cet outil est bien adapté aux observations que nous souhaitons réaliser.

Nous plaçons sur le dispositif expérimental la photodiode 4 quadrants et la caméra rapide, et nous enregistrons la dynamique avec les deux appareils simultanément et de manière synchronisée. Comme nous l'avons déjà évoqué, ces outils sont complémentaires puisqu'ils donnent des informations respectivement sur la dynamique temporelle et spatio-temporelle. De plus, la photodiode a déjà été utilisée dans les premières observations des instabilités stochastiques. Son utilisation nous permettra donc de comparer plus simplement nos résultats avec ceux des études précédentes.

Le placement de la photodiode 4 quadrants n'est pas arbitraire. En effet, dans un piège asymétrique le nuage est poussé vers les miroirs de renvoi par l'effet d'ombre. Le nuage se déplace des quantités x_0, y_0 et z_0 dans chaque direction de l'espace. Le raisonnement développé dans la section 2.1 donne $x_0 = y_0 = 2z_0$. La direction $(1, 1, 1/2)$ du piège est donc une direction particulière dans laquelle les mouvements seront plus importants. La figure 7.1

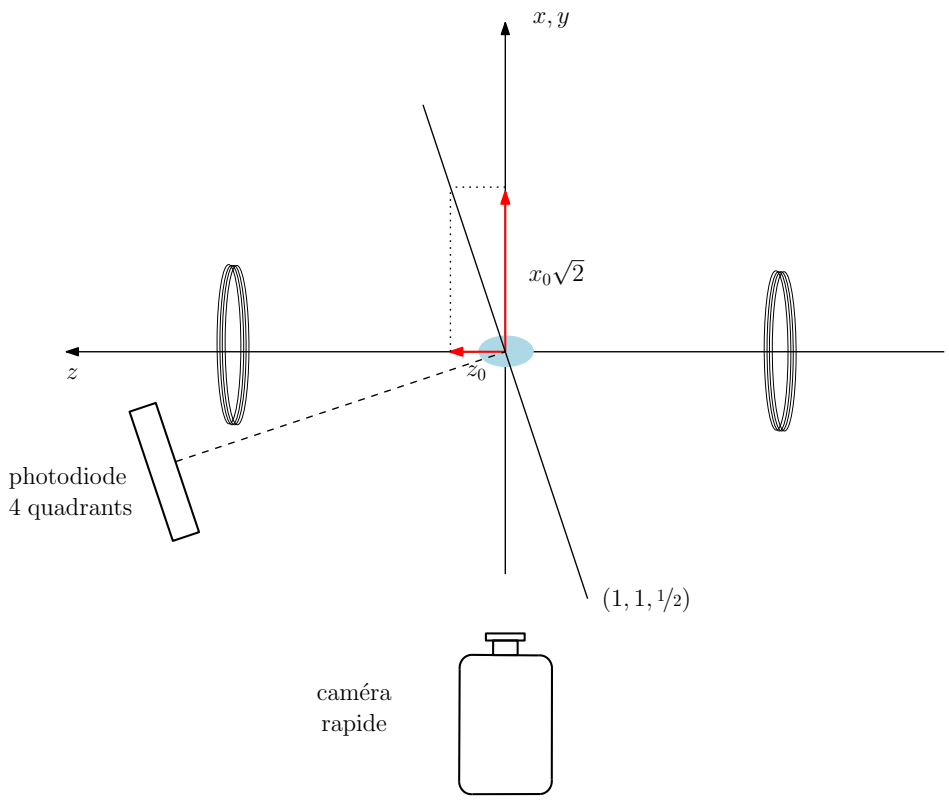


FIGURE 7.1 – Vue de dessus du PMO pour illustrer le positionnement de la photodiode 4 quadrants par rapport à la direction privilégiée du piège et de la caméra rapide.

représente la position dans laquelle nous avons placé la photodiode de manière à observer le plan vertical contenant la direction $(1, 1, 1/2)$. Les axes de la photodiode sont très proches de la verticale et de l'horizontale. Un système de lentilles (non représenté sur la figure 7.1) a été ajouté au dispositif, afin d'obtenir une image du nuage sur le détecteur. Le grandissement optique est de $1/5$.

Le choix du placement de la caméra rapide est assez délicat compte tenu de sa taille, de son poids et de la compacité d'un PMO. Elle est placée dans le plan horizontal du piège de manière à voir le plan vertical contenant l'axe de bobines. Une étude détaillée des différentes options d'imagerie peut être trouvée dans [Bendahmane2009]. Les contraintes expérimentales (distance de travail, passage des faisceaux, ...) nous ont conduit à choisir une configuration constituée d'un objectif Nikkor de 85 mm et une bague allonge Nikon Pn11 de 105 mm. Nous obtenons ainsi une profondeur de champ d'environ $2,5$ mm et un grandissement optique proche de 1.

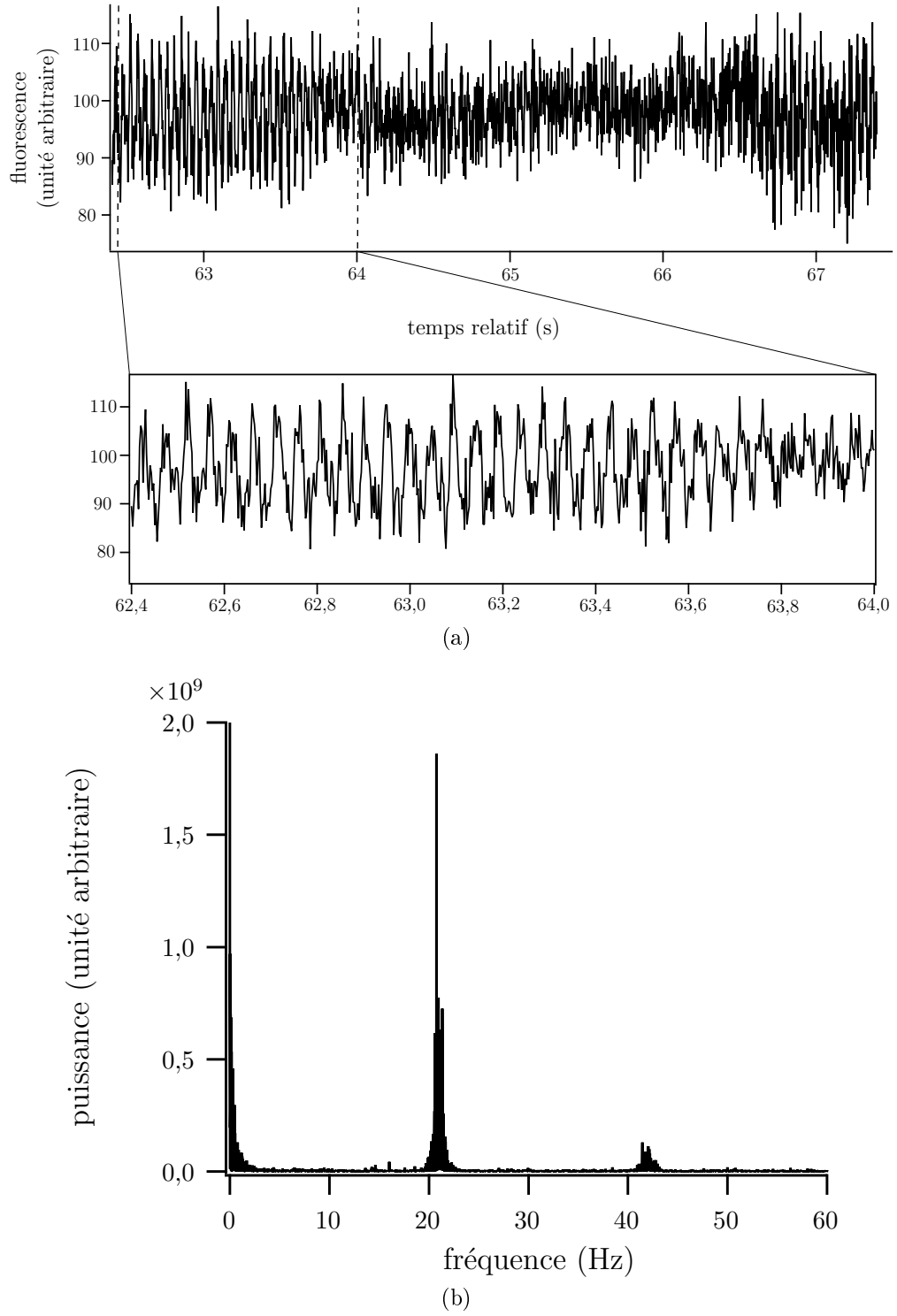


FIGURE 7.2 – Évolution de la fluorescence du nuage enregistrée avec une photodiode 4 quadrants : (a) signal temporel et (b) spectre de puissance associé. Le point de fonctionnement est défini par : $\Delta = -1,8\Gamma$ et $I_{+0} \simeq 13 I_{sat}$. Le temps d'acquisition permet d'obtenir une résolution spectrale de 5 mHz.

7.2 PMO dans le régime d'instabilités stochastiques

Nous souhaitons nous placer dans les conditions des études précédentes sur les instabilités stochastiques [Wilkowski2000, Hennequin2004]. Nous devons donc trouver les points de fonctionnement correspondant à cette situation. Pour un piège isotrope, nous disposons de deux paramètres de contrôle : l'intensité et la fréquence des faisceaux lasers. Nous avons donc exploré différents jeux de paramètres afin de retrouver une dynamique similaire à celle recherchée. Pour chaque situation, nous enregistrons l'évolution temporelle de la fluorescence des atomes, ainsi que les mouvements horizontaux et verticaux du nuage à l'aide de la photodiode 4 quadrants.

La figure 7.2a montre un exemple d'évolution de la fluorescence pour un intervalle de quelques secondes. Il s'agit d'une bonne illustration de ce qui est typiquement observé. Ce signal semble plutôt erratique avec des passages où de fortes fluctuations apparaissent, et d'autres pour lesquels le signal semble moins bruité. La valeur moyenne du signal évolue aussi légèrement. L'agrandissement (figure 7.2a) montre que ce signal qui semblait aléatoire possède un comportement périodique très marqué. Les oscillations apparaissent sous forme de salves dans le signal. Le spectre de puissance du signal total est représenté sur la figure 7.2b. Il a été obtenu par un algorithme de *Fast Fourier Transform* (FFT). En dehors de la partie représentée, le spectre ne contient que du bruit. Sur ce spectre, deux composantes se détachent clairement : l'une à 20,992 Hz et l'autre à 41,951 Hz. Ces deux fréquences sont dans un rapport 2, et nous pouvons donc penser en première analyse qu'il s'agit d'une composante fondamentale et de son premier harmonique.

La dynamique dépend de manière critique des paramètres de contrôle. Ce constat est illustré sur la figure 7.3. Celle-ci représente un spectre mesuré de la même façon que le précédent mais pour une valeur du désaccord de $-1,7\Gamma$ contre $-1,8\Gamma$ précédemment. L'apparition de nouvelles composantes est notable. Cinq sont clairement identifiables, parmi lesquelles les deux composantes, notées ν_1 et ν_2, du spectre de la figure 7.2b. La fréquence f_{ν_n} de chaque composante est reportée dans le tableau 7.1. La comparaison des différentes valeurs permet de remarquer la présence simultanée de deux composantes fondamentales : ν_1 et ν_4. Il s'agit d'une observation nouvelle par rapport aux expériences antérieures. Nous observons également les mélanges de fréquences $\nu_1 \pm \nu_4$. Ces deux composantes témoignent des non-linéarités attendues dans ce système. Cette analyse est en accord avec l'amplitude relative des pics, au moins d'un point de vue qualitatif. En effet, les composantes d'ordre supérieur (ν_2, ν_3 et ν_5) sont moins intenses que les composantes fondamentales (ν_1 et ν_4). En plus, les amplitudes des composantes $\nu_1 \pm \nu_4$ sont très proches.

Nous souhaitons nous assurer que ces instabilités sont bien les instabilités stochastiques rapportées dans [Wilkowski2000, Hennequin2004]. Le premier point concerne l'existence de la fréquence des instabilités. Si elle a effectivement pour origine la résonance stochastique, elle

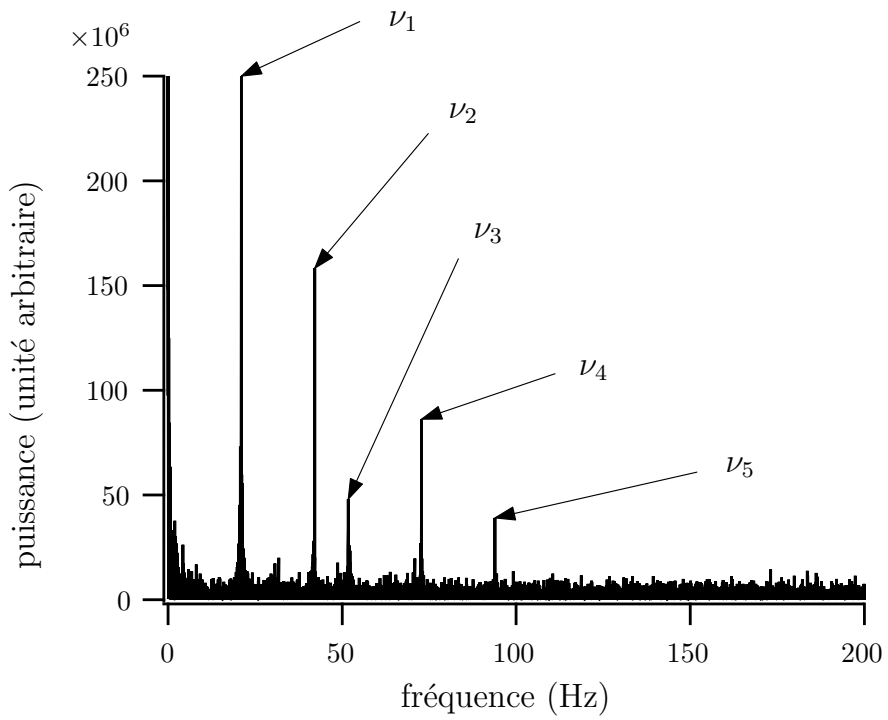


FIGURE 7.3 – Spectre de puissance d'un signal temporel de fluorescence obtenu avec les valeurs de paramètres suivantes : $\Delta = -1,7\Gamma$ et $I_{0+} \simeq 13 I_{sat}$ (intensité identique à celle du spectre précédent).

composante	fréquence f_{ν_i} (Hz)	association de fréquences
ν_1	21,047	-
ν_2	42,095	$\frac{f_{\nu_2}}{f_{\nu_1}} = 2,000$
ν_3	51,742	$\frac{f_{\nu_4} - f_{\nu_1}}{f_{\nu_3}} = 0,999$
ν_4	72,780	-
ν_5	93,830	$\frac{f_{\nu_4} + f_{\nu_1}}{f_{\nu_5}} = 0,999$

TABLE 7.1 – Tableau présentant la fréquence des composantes du spectre de la figure 7.3.

ne doit pas apparaître dans les faisceaux laser. Nous nous en sommes assurés en vérifiant les les fluctuations de l'intensité des faisceaux. Nous avons également contrôlé les variations de leur fréquence par une mesure d'absorption à travers une cellule de Césium. Ces deux mesures montrent que les lasers n'introduisent pas de bruit aux fréquences observées sur les spectres de la fluorescence. Par ailleurs, et bien que l'amplitude des instabilités dépendait de manière importante du désaccord et de l'intensité du laser, la fréquence des différentes composantes spectrales est très robuste vis-à-vis d'un changement de point de fonctionnement. La variation observée de la fréquence des pics est inférieure à 4 %. Ce comportement est typique de fréquences propres du système, ce qui vient encore renforcer les remarques précédentes.

Pour aller plus loin, nous avons voulu chercher à mettre en évidence la résonance elle-même. Dans [Hennequin2004] (voir figure 2), elle se traduisait par le fait que l'amplitude du déplacement du nuage en fonction du désaccord présentait un pic centré en $\Delta \simeq -2\Gamma$ et possédant une largeur à mi-hauteur de $0,2\Gamma$. Nous allons donc analyser la réponse du système en fonction du désaccord pour tenter d'observer cette résonance. Nous avons exploré une plage similaire de désaccords aux alentours de $\Delta = -2\Gamma$. Nous utilisons un pas suffisamment petit $(0,1\Gamma)$ pour repérer la résonance mais plus élevé que dans [Hennequin2004] car nous voulons uniquement vérifier son existence. Nous choisissons d'utiliser la composante ν_1 car il s'agit de la composante la plus intense. Toutefois, précisons que le comportement des autres composantes est identique. Pour comparer l'amplitude de ν_1 issue de séquences temporelles différentes, il faut prendre une précaution sur la durée des acquisitions car cette amplitude est une variable aléatoire. Concrètement, il faut qu'une acquisition contienne un nombre important de salves pour effectuer une moyenne sur le caractère aléatoire des instabilités. La durée des salves observées ne dépasse jamais 2 s (soit environ 40 périodes de la composante ν_1) et l'écart relevé entre les salves est comparable. Il est donc nécessaire d'enregistrer des séquences de plusieurs dizaines de secondes. La figure 7.4 présente l'évolution de l'amplitude de la composante ν_1 en fonction du désaccord du laser pour des acquisitions de 200 s. Il s'agit de l'amplitude issue des spectres de la fluorescence totale et non des déplacements du nuage comme la courbe de résonance dans [Hennequin2004], mais comme ce travail a établi que la dynamique du nombre d'atomes et celle du mouvement du nuage sont identiques, notre démarche est donc justifiée. Nous remarquons que ν_1 est maximale pour $\Delta = -1,8\Gamma$ et qu'elle est quasiment inexistante pour des désaccords distants de $0,2\Gamma$ de part et d'autre de cette position. Ce comportement est similaire à celui décrit dans [Wilkowski2000] : nous avons donc retrouvé des points de fonctionnement qui redonnent des instabilités de type stochastique.

Avant de refermer ce paragraphe, notons que dans [Hennequin2004], les instabilités stochastiques ont été observées pour $I_{0+} \lesssim 10 I_{sat}$. En explorant l'espace des paramètres de notre dispositif expérimental, nous nous sommes aperçu de l'existence d'un seuil d'intensité $I_{0+} = 6,5\,\mathrm{mW/cm^2}$, au dessous duquel la composante ν_1 n'émerge pas du bruit. L'évolution

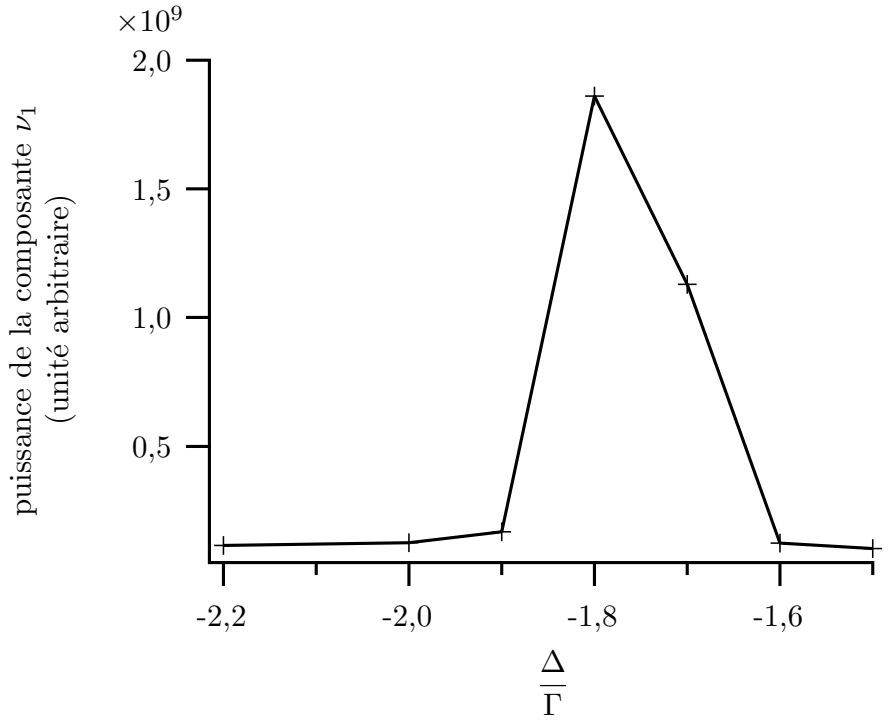


FIGURE 7.4 – Évolution de l'amplitude de la composante ν_1 en fonction du désaccord toujours pour $I_{0+} \simeq 13 I_{sat}$.

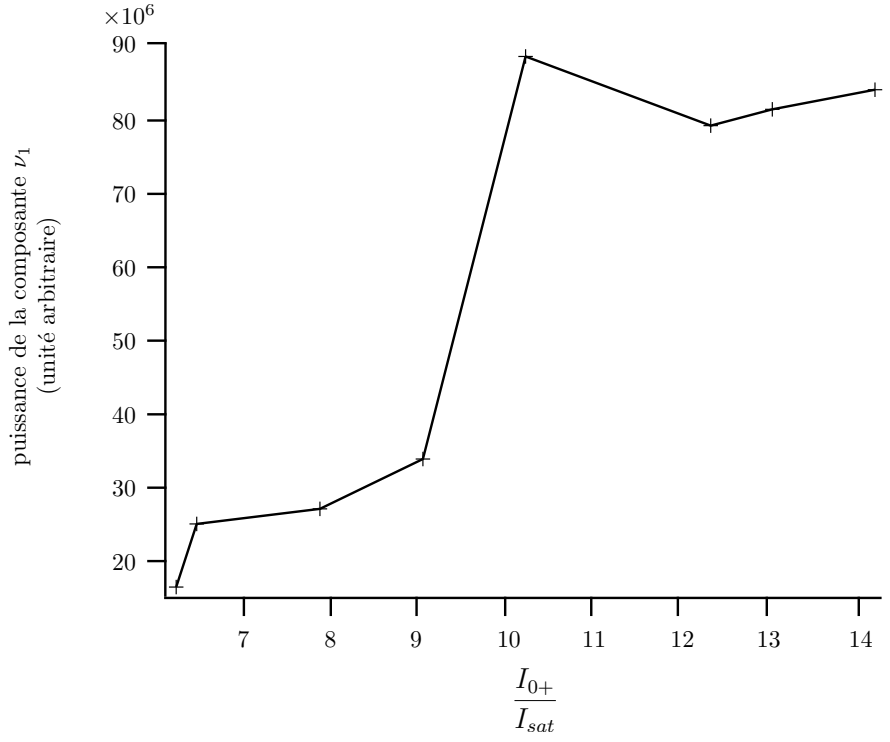


FIGURE 7.5 – Évolution de l'amplitude de la composante ν_1 en fonction de l'intensité d'un faisceau pour $\Delta = -1,9\Gamma$.

de l'amplitude de ν_1, après le seuil, est représentée sur la figure 7.5. La réponse du système augmente avec l'intensité jusqu'à l'apparition d'un palier pour $I_{0+} \gtrsim 11\,\mathrm{mW/cm^2}$. Ce comportement typique des mécanismes non-linéaires n'avait pas été reporté dans les travaux précédents.

Enfin, pour être complet, nous avons voulu vérifier la forte corrélation entre le nombre d'atomes et les mouvements du nuage, ainsi que notre hypothèse initiale sur le fait que la direction $(1, 1, 1/2)$ soit privilégiée. Les figures 7.6a, 7.6c et 7.6e représentent respectivement l'évolution temporelle de la fluorescence totale et des mouvements verticaux et horizontaux du nuage. Nous pouvons remarquer qu'aucune salve d'instabilités n'est visible sur la figure 7.6c. Ceci s'explique par le positionnement de la photodiode. En effet, l'axe vertical de celle-ci est perpendiculaire à l'axe $(1, 1, 1/2)$. Le spectre de chaque signal est représenté avec la même échelle verticale sur les figures 7.6b, 7.6d et 7.6f. L'amplitude des composantes visibles est bien plus grande pour le signal de fluorescence et celui des mouvements horizontaux. Ce constat confirme la corrélation entre le nombre d'atomes et les mouvements du nuage. L'amplitude de la composante liée aux mouvements verticaux est plus faible (d'un facteur 6) que celle due aux mouvements horizontaux. Le nuage se déplace principalement selon la direction $(1, 1, 1/2)$. L'effet d'ombre joue donc un rôle important dans ce comportement.

En résumé, nous pouvons dire que nous retrouvons bien un fonctionnement du piège correspondant à des instabilités stochastiques. Nous avons mis en évidence l'existence de la résonance stochastique en fonction du désaccord laser. Les instabilités possèdent des fréquences caractéristiques de l'ordre de quelques dizaines de Hz. Nous allons maintenant affiner la description de ce système par une étude spatio-temporelle à l'aide de notre caméra rapide.

7.3 analyse spatio-temporelle

7.3.1 observation et caractérisation des instabilités

L'utilisation d'une caméra rapide va nous permettre de réaliser une analyse spatiale locale des instabilités stochastiques, à l'inverse de la photodiode 4 quadrants qui ne permet de connaître que les mouvements du centre de masse du nuage. La méthode sera la même que celle utilisée pour traiter les signaux de la photodiode. Son principe est illustré sur la figure 7.7, où nous avons choisi arbitrairement deux pixels (rouge et bleu). Nous allons étudier l'évolution temporelle de l'intensité lumineuse reçue par chaque pixel des images (figures 7.7b) et en calculer le spectre (figure 7.7c). Nous pourrons ainsi étudier la répartition des instabilités dans le nuage. Il est également intéressant d'extraire la phase relative des oscillations en différents points de l'espace. Par exemple, les signaux des deux pixels semblent être en opposition de phase dans la salve présentée sur la figure 7.7b (voir agrandissement).

Nous désirons également caractériser l'évolution de l'amplitude des composantes spec-

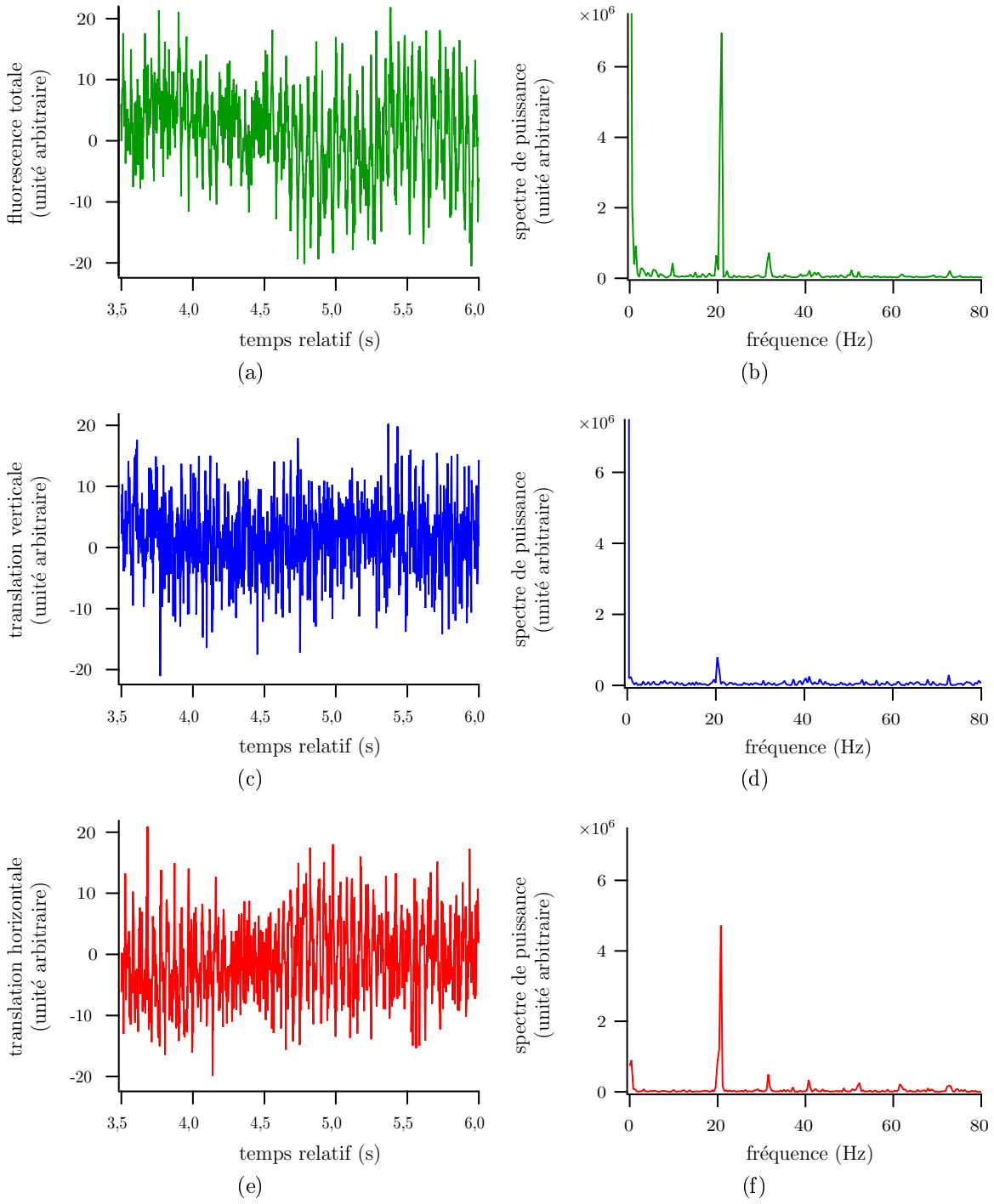


FIGURE 7.6 – Enregistrements effectués avec la photodiode 4 quadrants pendant $2,5\,\mathrm{s}$ pour $\Delta = -1,8\Gamma$ et $I_{+0} \simeq 12 I_{sat}$. Les figures (a), (c) et (e) correspondent respectivement à la fluorescence totale, aux mouvements verticaux et horizontaux du nuage. Les spectres de puissance associés sont présentés sur les figures (b), (d) et (f). Ils sont représentés avec la même échelle verticale.

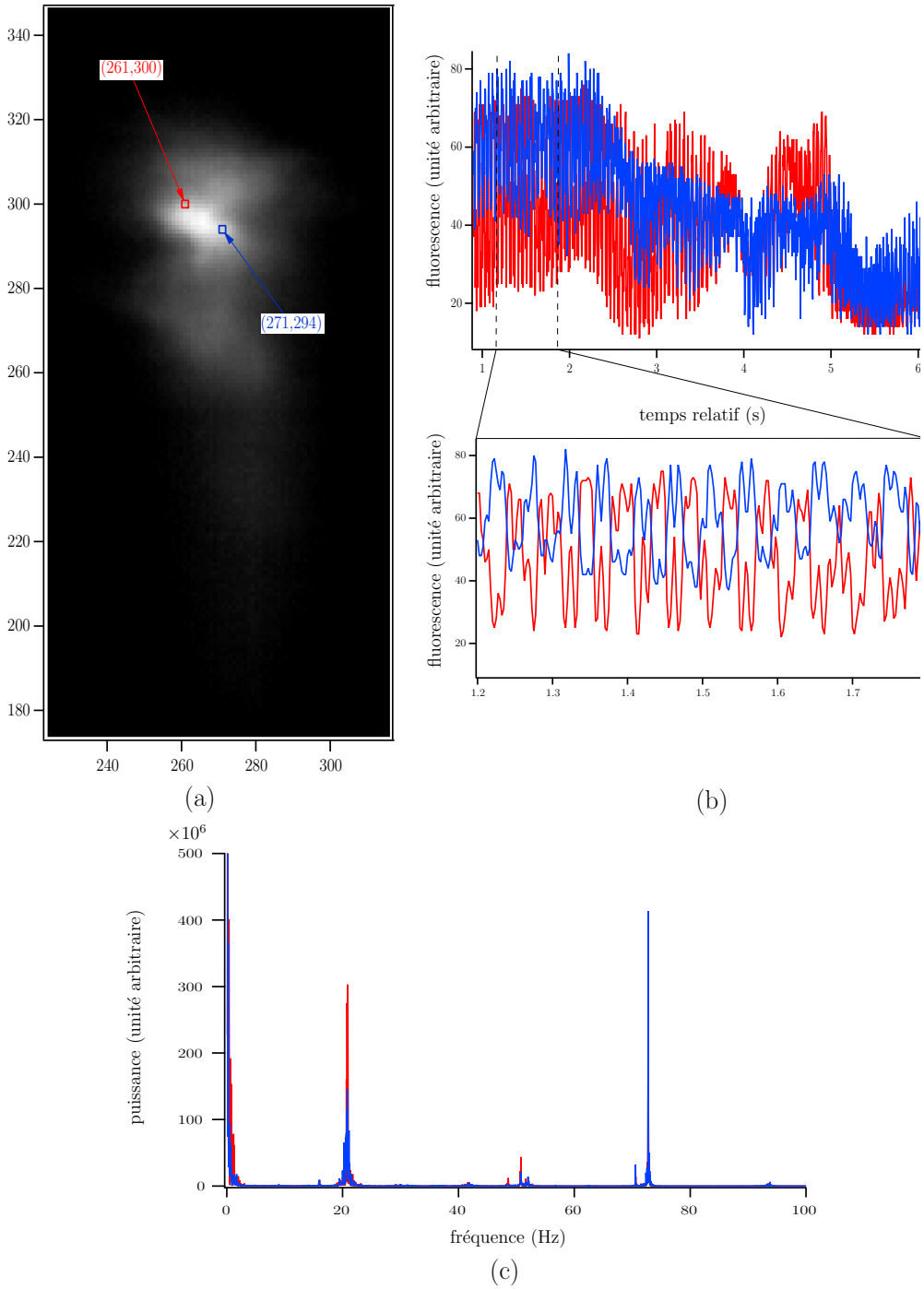


FIGURE 7.7 – Principe de la méthode d'analyse des images illustrée pour deux pixels (l'un est identifié par la couleur rouge et l'autre par le bleu). La figure (a) représente une image du nuage et donne la position des deux pixels. La figure (b) montre l'évolution temporelle de la fluorescence en ces deux points. L'agrandissement permet de constater que l'évolution en chaque point n'est pas en phase. La figure (c) présente le spectre de puissance des signaux de la figure (b).

trales au cours du temps. Notre analyse va donc s'effectuer sur deux échelles de temps. La première correspond à l'intervalle utilisé pour calculer le spectre. Cette échelle de temps nous procure une carte des instabilités sur tout l'espace à un instant donné. Pour faire la différence entre des séquences avec et sans salve, cette échelle de temps doit nécessairement être inférieure à la durée d'une salve ($\simeq 1\,\mathrm{s}$). Dans les résultats présentés ici, nous avons choisi une valeur de $0,6\,\mathrm{s}$. La seconde échelle de temps correspond au temps total de l'acquisition, échelle qui va permettre d'étudier l'évolution temporelle de la répartition spatiale des instabilités. Cette durée d'acquisition est contrainte par les 2 Go de mémoire tampon de notre caméra. Comme expliqué plus haut, il faut trouver un compromis entre la résolution des images (chaque pixel sera encodé sur 8 bits), l'intervalle Δt entre deux images et le temps total d'acquisition t_{acq}. Il est facile d'établir la relation entre tous ces paramètres :

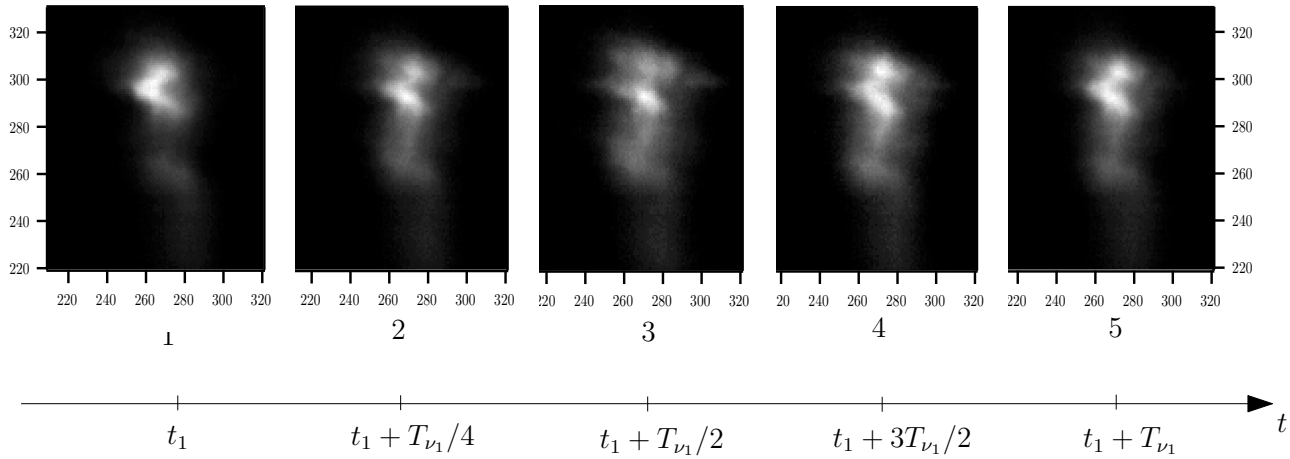
$$t_{acq} = 2\,\mathrm{Go} \times \frac{\Delta t}{L\,l} \tag{7.1}$$

où L et l représentent le nombre de pixels dans chaque direction. Pour les mêmes raisons que dans la section précédente, nous choisissons Δt =2,5 ms, ce qui nous donne des temps d'acquisition $t_{acq} \simeq 20\,\mathrm{s}$ pour des images de 512×512 pixels.

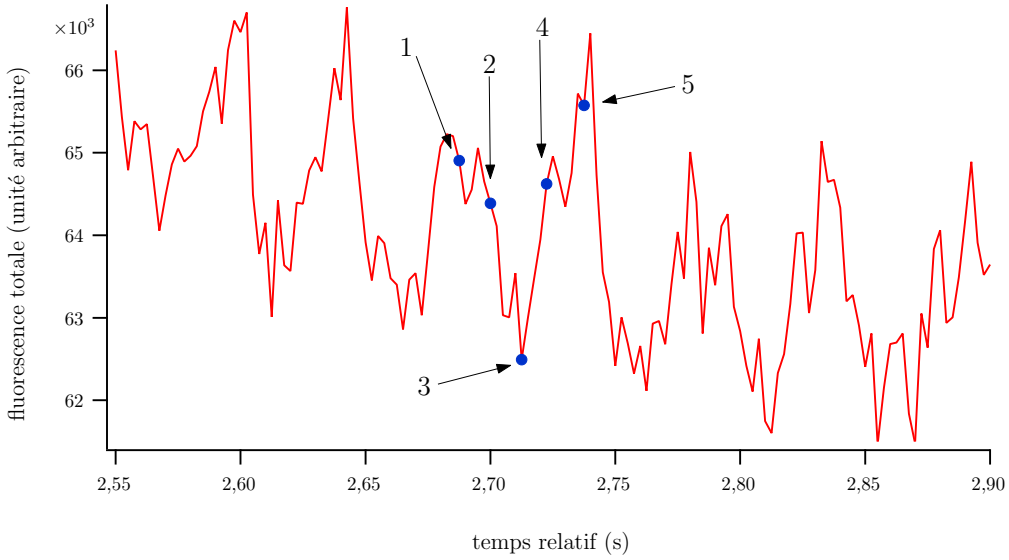
Nous avons montré précédemment la présence de deux composantes principales ν_1 et ν_4, dont les fréquences sont proches de 21 Hz et 73 Hz. Nous allons ici nous concentrer sur la première de ces composantes car il s'agit de la plus intense et aussi parce qu'elle est toujours présente. Pour cette composante, nous enregistrons donc environ 20 images par période ($T_{\nu_1} = 47,6\,\mathrm{ms}$), ce qui permet non seulement d'obtenir le spectre, mais aussi de reconstituer de façon relativement précise et fluide le détail de l'évolution spatio-temporelle de la distribution des atomes. Ce n'est pas le cas pour les autres fréquences, et si nous voulons compléter cette étude, il faudra augmenter le nombre d'images par seconde, ce qui se fera au prix de durées d'acquisition plus courtes. Notons cependant que les paramètres choisis, avec 10 points par période pour ν_2 et 5 pour ν_4, permettent malgré tout d'effectuer les analyses spectrales.

Nous allons maintenant examiner en détail la dynamique spatio-temporelle du nuage d'atomes froids. Les résultats présentés ont été obtenus avec les paramètres des faisceaux lasers choisis pour maximiser les instabilités, soit $\Delta = -1,8\Gamma$ et $I_{0+} \simeq 11 I_{sat}$ selon les mesures effectuées avec la photodiode.

Pour présenter ces résultats, nous allons devoir faire appel à des séquences vidéos. La présentation de telles mesures n'est pas une chose évidente sur papier. D'autant qu'il n'est pas question d'observer une simple déformation du nuage, mais bien d'avoir une approche quantitative sur la dynamique spatio-temporelle. Lorsque nous voudrons étudier un enregistrement, nous représenterons une séquence d'images choisie pour être la plus explicite possible. Toutefois, pour faciliter les observations, nous fournirons également un lien vers la vidéo correspondante.



(a)



(b)

`http://www-phlam.univ-lille1.fr/perso/romain/video_fluo.html`

(c)

FIGURE 7.8 – Évolution du nuage au cours d'une période de T_{ν_1} : (a) images échantillonnées tous les quarts de période (t_1 est un temps arbitraire), (b) fluorescence totale (les points repèrent chaque image) et (c) lien vers la vidéo représentant l'évolution de la fluorescence au cours du temps.

Commençons par caractériser l'évolution de la fluorescence. La figure 7.8a montre des images espacées de $T_{\nu_1}/4$ à partir d'un temps arbitraire. Nous remarquons que le maximum de fluorescence se déplace au cours du temps, alors que la forme globale du nuage évolue assez peu. La figure 7.8b représente la fluorescence totale au cours d'une salve enregistrée par une photodiode, les points repèrent la position temporelle des images de la figure 7.8a. Il y a une corrélation évidente entre le mouvement observé sur la séquence d'images et les oscillations de la fluorescence totale. Pour compléter l'analyse de ces cinq d'images, nous avons donc choisi de mettre à disposition une séquence vidéo en ligne dont le lien est représenté sous forme d'un QR code sur la figure 7.8c. Celle-ci regroupe 1 s d'enregistrement et présente en parallèle l'intensité de la fluorescence recueillie par la photodiode. L'intervalle de la figure 7.8 est contenu dans ce film.

L'analyse spectrale des images nous donne 512×512 spectres associés chacun à un pixel, pour un intervalle de temps donné. Ceci nous permet de construire une carte des instabilités à l'intérieur du nuage, par exemple en représentant l'amplitude d'une composante spectrale en fonction de la position du pixel considéré. L'analyse de ces cartes pour différentes séquences montre que la dynamique se concentre sur des zones restreintes, alors que le reste du nuage est stationnaire. Dans ces zones bien identifiables, les composantes instables sont toutes ou partiellement présentes. Nous parlerons de *lobes d'instabilités* pour désigner ces zones. Leur taille et leur géométrie évoluent en fonction du temps. Les figures 7.9 présentent trois exemples de la cartographie de l'amplitude (échelle couleur) de la composante ν_1. Elles ont été obtenues à partir de trois séquences de $0,625\,\mathrm{s}$ (soit 250 images [1]) enregistrées dans les mêmes conditions. La fluorescence moyenne pendant les $0,625\,\mathrm{s}$ y est représentée sous forme de lignes de niveau. Nous y découvrons une structuration assez complexe des instabilités. L'image 7.9a est la plus simple à analyser car elle ne contient qu'un seul lobe. Ce lobe possède une taille verticale [2] $\simeq 0,5\,\mathrm{mm}$ et une taille horizontale $\simeq 0,6\,\mathrm{mm}$, ce qui représente environ 15 % de la surface totale du nuage. Les courbes de niveau montrent que le maximum de fluorescence ne coïncide pas avec le lobe d'instabilités. Ce maximum se situe sur le bord du lobe. Les deux autres figures illustrent des situations plus complexes, avec respectivement deux (7.9b) et trois lobes (7.9c).

Les cartes d'amplitude sont toutes très similaires à celles de la figure 7.9. Bien entendu, dans les périodes entre les salves, nous n'identifions pas de structure. Mais quand le nuage est instable, nous constatons l'apparition de plusieurs lobes d'instabilités. Leur taille et leur position ne sont pas toujours les mêmes. Toutefois, la taille de l'ensemble des lobes est toujours de l'ordre de 15 % de celle du nuage. Comme dans les figures 7.9, la position des instabilités et celles des maxima de fluorescence ne sont pas les mêmes. Un maximum de

1. La résolution du spectre est donc de $1,6\,\mathrm{Hz}$.
2. Les tailles sont définies par une décroissance de l'amplitude d'un facteur 10 par rapport au maximum du lobe.

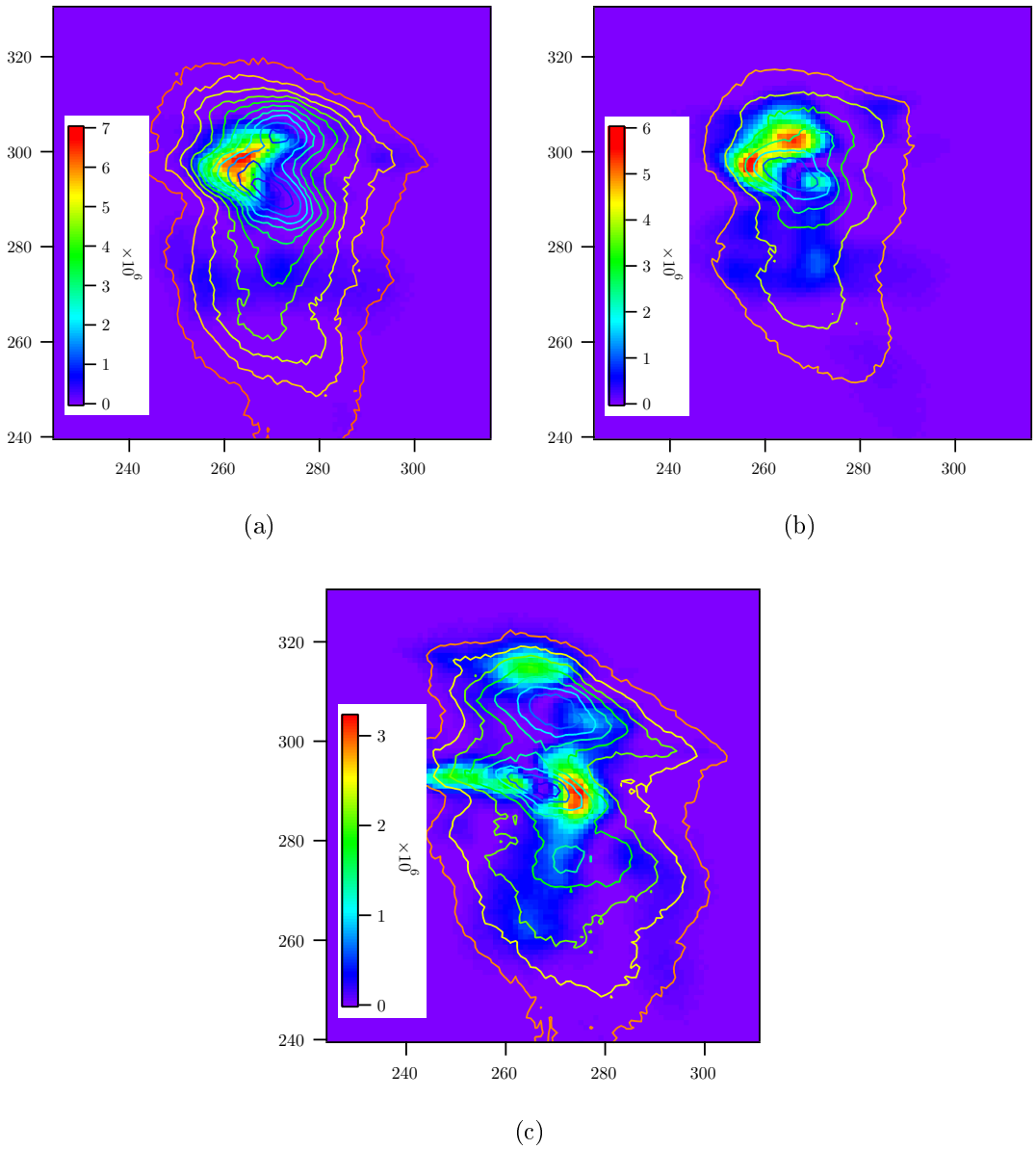
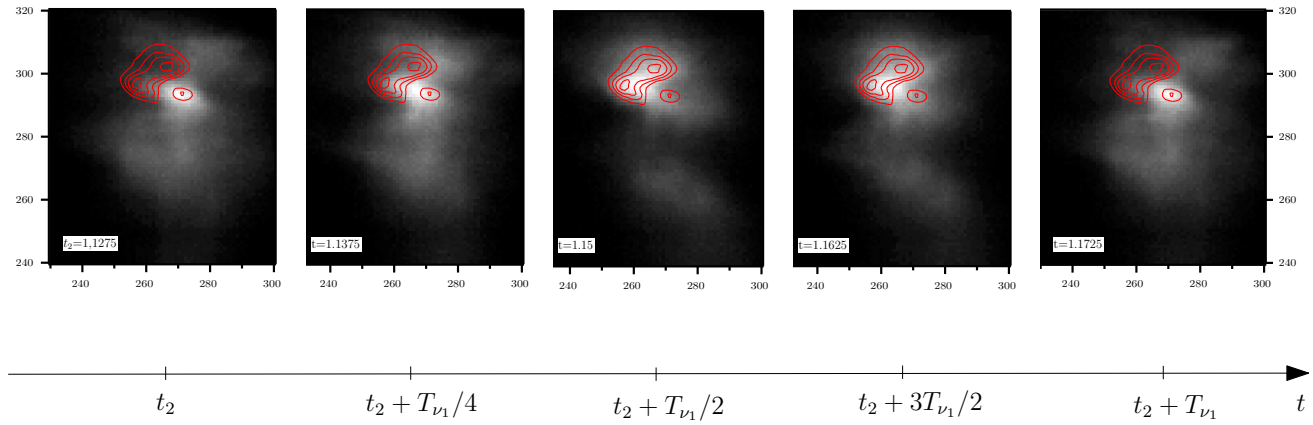


FIGURE 7.9 – Répartition spatiale des instabilités associées à la composante ν_1. Les figures représentent en échelle de couleur l'amplitude de ν_1 dans le spectre de puissance pour trois séquences temporelles enregistrées pour les mêmes valeurs de paramètres. Les lignes de niveau permettent de visualiser la fluorescence moyenne sur chaque intervalle.



(a)

web

http://www-phlam.univ-lille1.fr/perso/romain/video_fluo_et_lobe.html

(b)

FIGURE 7.10 – Évolution de la fluorescence par rapport aux lobes d'instabilités : (a) images représentant une période T_{ν_1} pendant la séquence de la figure 7.9b et (b) Lien vers la vidéo correspondante (lecture à 5 images/s). Les courbes de niveau montrent la position des lobes pour cette séquence. Le temps initial t_2 a été choisi de façon arbitraire pour visualiser la période.

fluorescence se situe en général entre deux zones instables.

Nous pouvons faire le lien entre le mouvement observé sur la séquence de la figure 7.8 et les lobes d'instabilités. Les images de la figure 7.10 sont issues de la séquence correspondant à la figure 7.9b (cas avec deux lobes d'instabilités). Les lignes de niveau identifient les lobes observés pendant cet intervalle. Les 5 images de fluorescence permettent de visualiser une période d'oscillation. De même que précédemment, ces images sont complétées par une séquence vidéo. Le but de cette séquence est de montrer que la position des lobes coïncide avec les positions extrêmes du mouvement périodique du maximum de fluorescence. Nous avons choisi de démarrer la séquence 7.10 au temps t_2 pour lequel la position du maximum de fluorescence coïncide avec un lobe d'instabilités. À $t_2+T_{\nu_1}/2$, le maximum de fluorescence se trouve sur le second lobe. À l'instant $t_2+T_{\nu_1}$, le maximum est revenu sur le premier lobe. Nous remarquons que la taille de la zone se déplaçant varie également de façon périodique. Une corrélation apparaît entre cette taille et celle des lobes d'instabilités. Au cours d'une période, l'ensemble d'atomes instable se trouve le plus souvent entre les lobes, c'est pourquoi le maximum de fluorescence moyen est localisé entre les lobes.

Si comme nous venons de le voir la présence de la composante ν_1 trouve son origine dans le mouvement périodique d'une petite partie du nuage, il est utile d'analyser le comportement de ν_2, de fréquence double. Les figures 7.11 représentent la localisation des instabilités associées à cette composante. Les images correspondent aux mêmes séquences temporelles que celles des figures 7.9. Ces cartographies montrent que les instabilités liées à la composante ν_2 se répartissent également sous forme de lobes dont le nombre varie au cours du temps. Les lignes de niveau, qui permettent de visualiser les lobes de ν_1, mettent en évidence le fait que les lobes des deux composantes ne se trouvent pas à la même position. Les lobes de la composante ν_2 semblent être répartis autour de ceux du ν_1. Si nous voulons quantifier cette impression visuelle, nous pouvons calculer un coefficient de recouvrement des lobes de deux composantes. Il s'agit de la surface commune des lobes normalisée par la taille d'un des groupes de lobes. Avec cette définition, le recouvrement calculé pour les trois séquences est compris entre 45 et 55 %. En d'autres termes, seulement la moitié des lobes s'interpénètre. Cette information suggère que la présence de ν_2 n'est pas due à un effet non-linéaire de doublage de fréquence, mais simplement à l'existence d'un harmonique induit par des mécanismes linéaires. Dans le cas de la séquence 7.10, la présence de la composante ν_2 s'explique par le fait que le maximum de fluorescence passe deux fois plus souvent entre les lobes que sur eux.

De même que pour l'amplitude, il est possible d'extraire par FFT la phase des différentes composantes et d'étudier leur répartition dans le nuage. La figure 7.12 présente les cartes de phase pour la composante ν_1 correspondant aux séquences présentées sur la figure 7.9. L'échelle couleur, variant de $-\pi$ à π, représente la phase de cette composante en un point du nuage. Il s'agit plus exactement de la phase relative par rapport à une valeur choisie arbitrai-

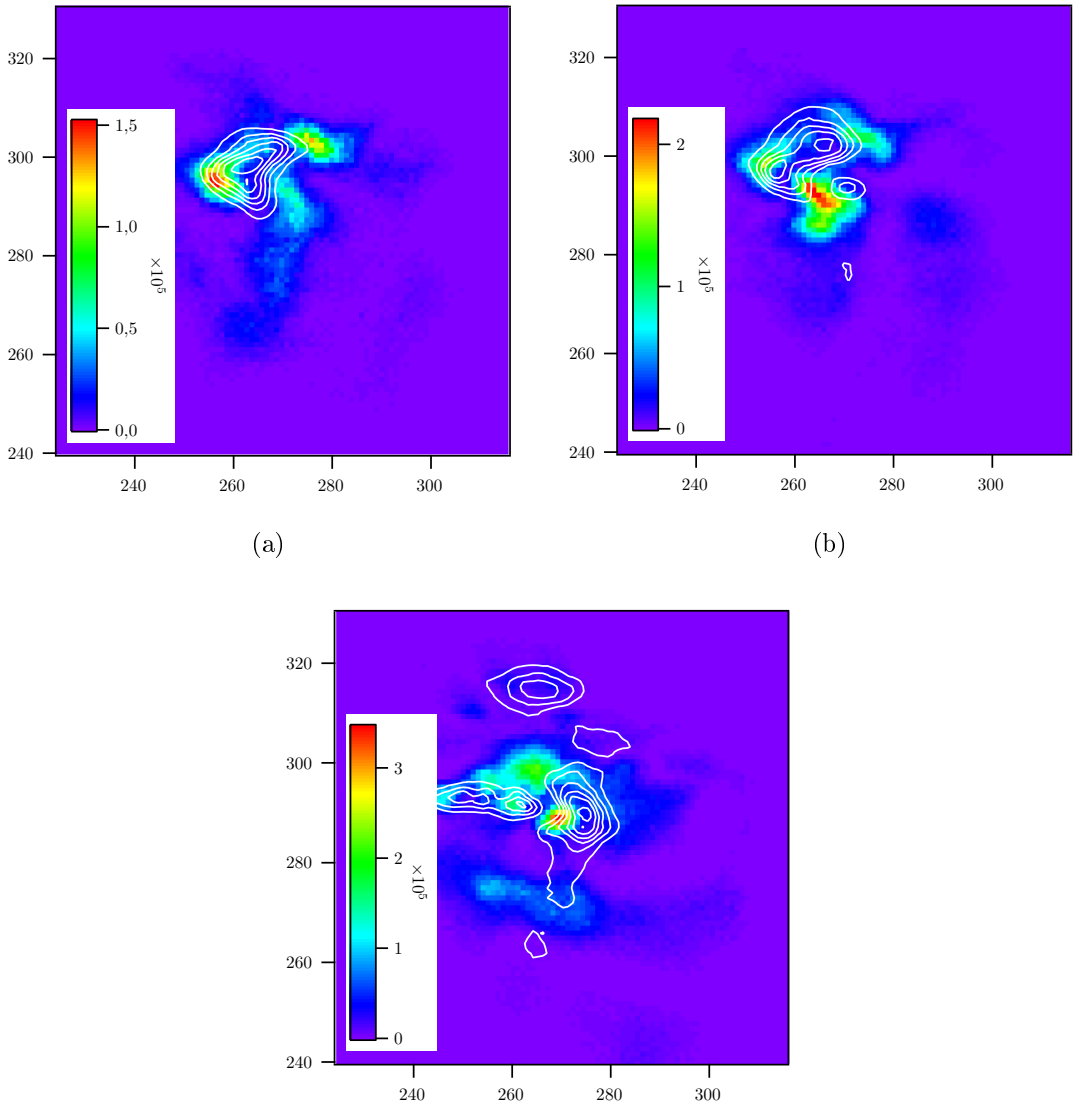


FIGURE 7.11 – Répartition spatiale des instabilités associées à la composante ν_2. Les images correspondent aux mêmes intervalles de temps que celles de la figure 7.9. Les lignes de niveau identifient la position des lobes de ν_1, elles sont représentées de la même couleur pour simplifier la lecture.

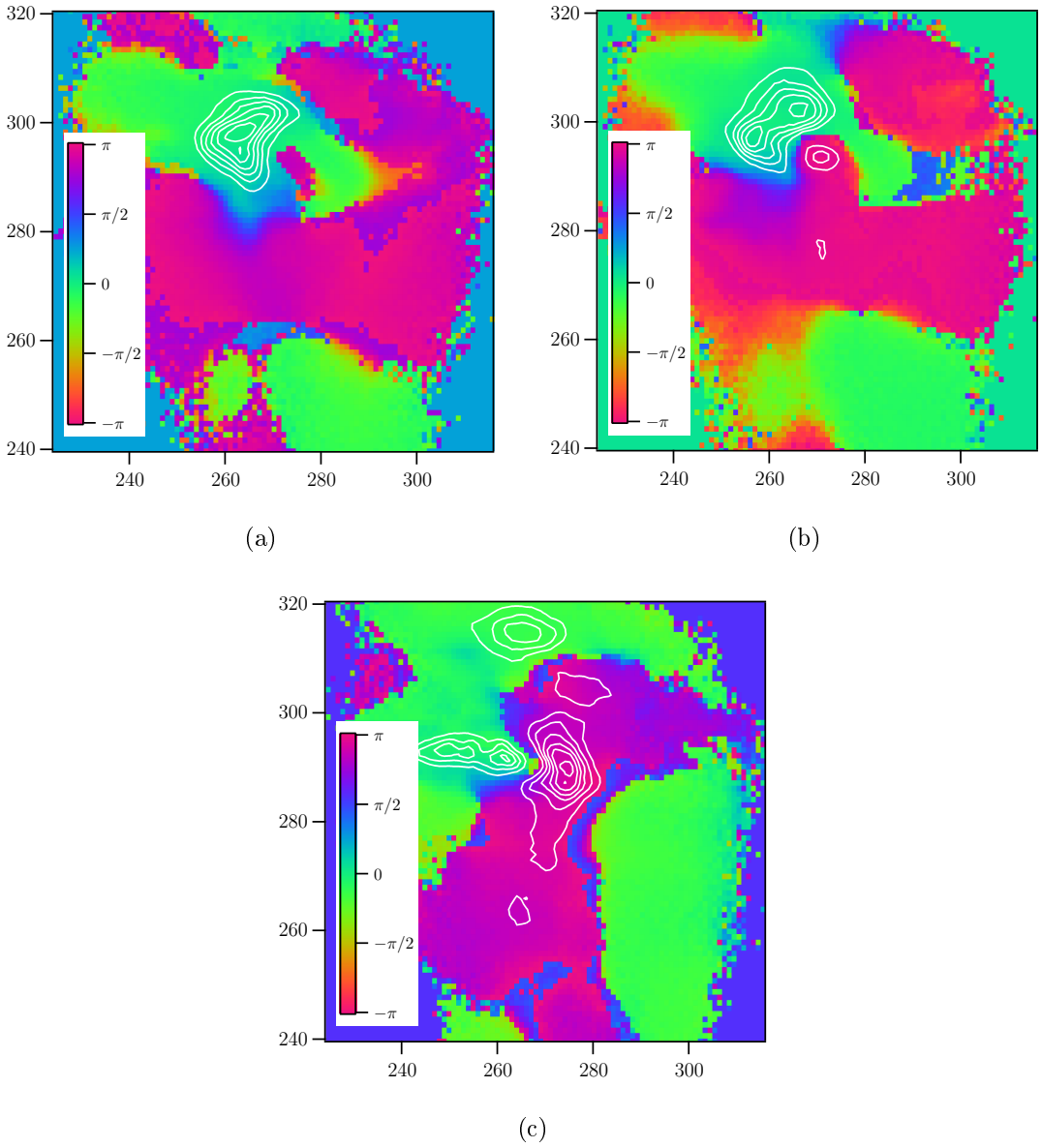


FIGURE 7.12 – Répartition spatiale de la phase de la composante ν_1. Ces cartes correspondent à celles de la figure 7.9. L'image représente la phase de la composante ν_1 dans le signal temporel. Les contours permettent de localiser la position des lobes d'instabilités. Les changements de phase dans les parties du nuage qui contiennent peu d'atomes ne sont pas significatifs car elles ne présentent pas de comportement instable.

rement dans une zone instable. Ici, les courbes de niveau représentent les lobes d'instabilités. Deux résultats apparaissent sur ces cartes. Tout d'abord, nous remarquons que la phase est uniforme dans un même lobe. D'autre part, lorsque plusieurs lobes sont présents, les oscillations s'effectuent en opposition de phase. Ces observations témoignent d'un comportement collectif des atomes responsables de l'apparition des zones instables.

Enfin, avant de conclure ces observations, examinons rapidement ce qui se passent pour la composante ν_4. Les signaux liés à ν_4 sont en général plus faibles que ceux de ν_1, mais le même type de structure est observé. L'étude des cartes de cette composante montre que, pour un même intervalle de temps, le nombre de lobes est le même pour les deux composantes ν_1 et ν_4. Leurs positions sont très similaires. Dans ce cas, le recouvrement de ν_1 et ν_4 est d'environ 70 %, excepté pour la dernière séquence temporelle pour laquelle la taille des lobes de ν_1 est bien plus importante que celle de ν_4. Cette valeur élevée montre que la distribution relative de ces deux composantes est plutôt semblable contrairement à celle de ν_1 et de ν_2. Ce résultat peut être étendu à la composante ν_3 lorsqu'elle est mesurée. Les positions de ses lobes sont très proches de celles des lobes de ν_1 et ν_4. Ceci semble confirmer notre hypothèse de mélange non-linéaire de fréquences conduisant à la création des composantes ν_3 et ν_5. Les mêmes observations sont effectuées pour les autres composantes. Ce comportement semble donc général. Tous les points d'un lobe vibrent en phase. Des lobes différents évoluent soit en phase soit en opposition de phase.

En résumé, cette étude spatio-temporelle a mis en évidence que tous les atomes n'ont pas un comportement instable. En effet, les instabilités se localisent dans des petites parties du nuage. La dynamique instable se traduit par le mouvement périodique d'une zone très dense du nuage. Le nombre et la taille des lobes d'instabilités évoluent de manière plutôt aléatoire au cours du temps.

7.3.2 modélisation

Pour confirmer les conclusions déduites de nos observations, nous nous proposons de simuler le mouvement d'un ensemble d'atomes à l'aide d'un modèle très simple. Nous considérons un groupe d'atomes représenté par une fonction localisée, choisie gaussienne et symétrique [3] par commodité. Afin d'étudier la dynamique d'un mode ν_n, nous allons moduler à la même fréquence les trois paramètres de cette fonction (la position dans chaque direction et sa largeur). Nous choisissons des amplitudes de modulation différentes pour chaque paramètre. Il s'agit donc de la composition de deux mouvements de translation et d'un mouvement de

3. Un profil asymétrique ne modifie pas les conclusions qui vont suivre.

« respiration » du groupe d'atomes. L'évolution temporelle $S(t)$ est la suivante [4] :

$$S(t) = \exp\left(-\frac{[X - X_0(t)]^2 + [Y - Y_0(t)]^2}{L(t)^2}\right) \tag{7.2a}$$

$$X_0(t) = S_X \sin(2\pi t) \tag{7.2b}$$

$$Y_0(t) = S_Y \sin(2\pi t) \tag{7.2c}$$

$$L(t) = S_L + s_L \sin(2\pi t) \tag{7.2d}$$

Nous effectuons la même analyse que pour les signaux expérimentaux. La figure 7.13a représente la carte d'instabilités de ce mouvement pour la composante fondamentale. Il apparaît deux lobes (échelle couleur) à la fréquence du mode ν_n. Ces lobes sont placés de part et d'autre du maximum moyen du signal (courbes de niveau). Le lobe principal de la composante harmonique (figure 7.13b) se trouve au milieu des lobes associés à la composante fondamentale. Des lobes d'amplitude plus faible sont visibles à l'extrémité de la trajectoire. Les cartes de phase sur les figures 7.13c et 7.13d montrent que les lobes oscillent soit en phase soit en opposition de phase.

La variation des paramètres de $S(t)$ nous permet de comprendre les observations. L'amplitude relative des mouvements de translation définit l'axe selon lequel le maximum de la fonction se déplace, alors que l'amplitude de la respiration apporte une dissymétrie dans le mouvement qui conduit à l'amplification d'un lobe au détriment de l'autre. Les valeurs des paramètres utilisées pour obtenir les figures 7.13 sont assez proches de situations expérimentales. La dilatation conduit à un rapport environ 3 entre la taille de chaque lobe. L'amplitude des translations est légèrement plus grande que la taille de la gaussienne, ce qui conduit à observer un maximum de fluorescence moyen localisé entre les lobes.

Ce modèle, bien que simpliste, reproduit plutôt bien les observations faites avec la caméra rapide. Bien évidemment, ces observations ne donnent aucune information sur un éventuel mouvement dans la direction de l'axe de la caméra. L'évolution $S(t)$ est la projection du mouvement réel à 3D sur le plan d'observation de la caméra. Il nous est toutefois possible d'émettre quelques hypothèses sur la nature du mouvement 3D. Une première possibilité est que la translation ne s'effectue pas uniquement dans le plan mais également selon la troisième direction. Une seconde hypothèse est un mouvement de rotation dans un plan dont la projection sur le plan d'observation est proche de l'axe de translation observé. La direction particulière du piège est contenue dans ce plan. Malheureusement, l'ajout à notre dispositif d'une caméra capable de visualiser ce plan n'a pas été possible. De plus, le système d'imagerie utilisé ne permet pas d'observer d'agrandissement significatif associé à un mouvement de l'ordre de la taille du nuage selon l'axe de la caméra. Nous ne sommes donc pas en mesure de confirmer ou d'infirmer ces hypothèses.

4. Pour cette modélisation, nous avons normalisé la fréquence du mode ν_n à 1.

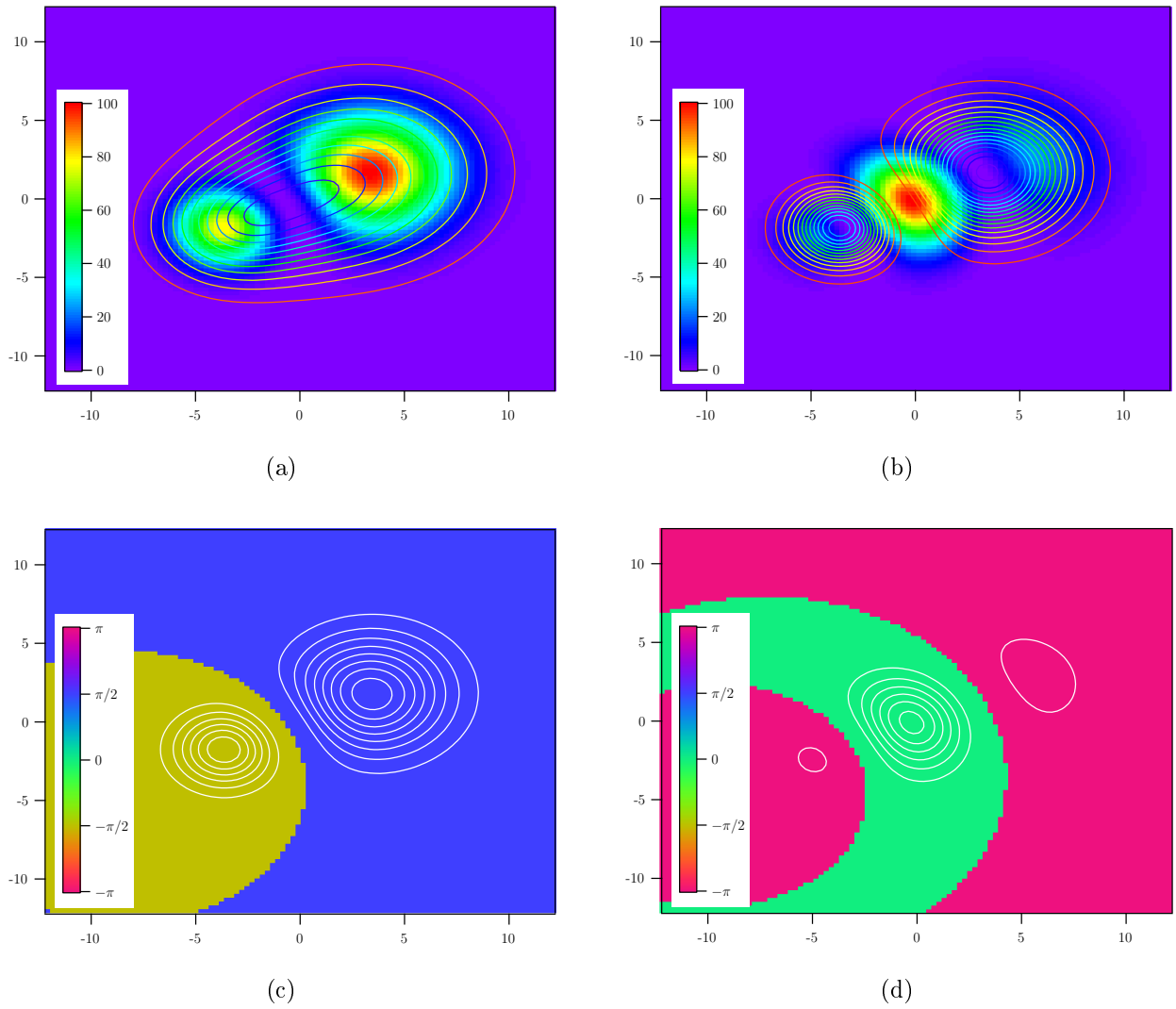


FIGURE 7.13 – Simulation d'un mouvement de translation et de dilatation d'une fonction gaussienne : (a) répartition spatiale de la composante fondamentale (l'amplitude moyenne de $S(t)$ est représentée par les contours), (b) répartition de la composante harmonique, (c) carte de phase du fondamental (les contours rappellent la position des lobes d'oscillations) et (d) carte de phase de l'harmonique. Ces figures ont été obtenues pour les paramètres suivants : $S_X = 4$, $S_Y = 2$, $S_L = 2$ et $s_L = 1$.

Conclusion

Nous avons réalisé la première caractérisation expérimentale de la dynamique spatio-temporelle d'un nuage d'atomes froids [Romain2014b]. Cette étude s'est portée sur un régime d'instabilités stochastiques. Pour cela, nous avons utilisé de manière complémentaire une photodiode 4 quadrants et une caméra rapide. L'analyse des images a révélé une structure spatiale complexe des instabilités. Seules quelques zones du nuage présentent un comportement instable. Ces lobes d'instabilités sont créés par le mouvement périodique d'un ensemble d'atomes du nuage, comme l'a confirmée une modélisation très simple. Le mouvement réel à trois dimensions reste pour le moment inconnu. Le caractère aléatoire de ces instabilités se traduit à la fois sur l'amplitude des oscillations et sur le nombre de zones instables, ce qui rend difficile l'analyse de ce régime.

Cette étude nous a fourni un certain nombre de résultats inédits. Nous devons sans doute approfondir notre étude théorique du PMO pour aller plus loin dans la caractérisation des observations expérimentales. Nous n'avons pour le moment pas été en mesure de rapprocher ce comportement de celui d'un autre système. D'un point de vue expérimental, il peut être intéressant de placer le nuage dans un régime d'instabilités déterministes. En effet, ces instabilités présentent des comportements dynamiques oscillants très réguliers. Une étude à l'aide de la caméra rapide peut probablement nous donner des résultats plus faciles à comprendre. La recherche et l'étude de ces oscillations est donc un objectif prioritaire à court terme.

Conclusion

Cette partie nous a fourni de précieuses informations sur la dynamique des atomes froids. Nous avons développé un modèle spatio-temporel 1D du PMO. Ce modèle est constitué d'un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires couplées. Celui-ci relie la densité atomique dans l'espace des phases et l'intensité d'une paire de faisceaux lasers. L'équation régissant l'évolution de la densité est une équation de Vlasov-Fokker-Planck. Il s'agit d'une équation très générale rencontrée dans plusieurs domaines de la physique. Elle montre que le PMO est un système qui partage de nombreux points communs avec d'autres systèmes. Ce modèle prend en compte plusieurs éléments qui n'avaient pas été réunis jusqu'ici. En effet, il comprend des interactions avec le gaz chaud résiduel et ne fait aucune hypothèse sur la configuration du PMO. De même, aucune simplification n'a été réalisée en fonction des valeurs des paramètres des faisceaux lasers. En somme, ce modèle est donc capable de décrire un grand nombre de situations expérimentales.

La généralité du modèle induit une complexité sur les équations et aussi des difficultés pour trouver une méthode d'intégration numérique. Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé les similitudes de ce modèle avec celui décrivant la dynamique spatio-temporelle d'électrons stockés dans un accélérateur de particules. Ces deux systèmes sont décrits par la même équation de Vlasov-Fokker-Planck à condition d'effectuer quelques simplifications sur notre modèle. Il nous faut linéariser l'absorption et négliger les interactions avec le gaz résiduel. Les résultats de simulations confirment que ces simplifications sont trop fortes pour que le modèle conservent les ingrédients susceptibles de générer des instabilités. Toutefois, cette étude a permis de poser les bases d'une approche numérique dans un cas connu. La prochaine étape est de revenir sur certaines approximations et d'adapter le programme d'intégration en conséquence.

Nous avons affiné la description spatio-temporelle des instabilités stochastiques par rapport aux études précédentes grâce à l'utilisation d'une caméra rapide. L'étude expérimentale de ce régime instable a permis de voir que l'ensemble du nuage n'est pas instable. Au contraire, seules quelques petites parties très peuplées effectuent des mouvements périodiques de façon imprévisible. La fréquence de ces oscillations est de quelques dizaines de Hz. Le caractère aléatoire de ces instabilités rend difficile une analyse systématique car la forme et le

nombre des lobes d'instabilités varient au cours du temps. L'avancée du développement du modèle théorique ne nous a pas permis de le confronter aux observations.

Conclusion générale

Au début de ce manuscrit, nous nous étions fixé comme objectif d'approfondir notre connaissance et notre compréhension des comportements dynamiques dans un PMO. En particulier, nous avions choisi d'utiliser deux approches différentes. La première était de trouver une configuration du PMO qui permette de faciliter la comparaison entre les expériences et les modèles unidimensionnels de la littérature. La seconde proposition était inverse. Il s'agissait d'améliorer notre description théorique du PMO avec un modèle général qui puisse être adapté à différentes situations expérimentales.

Notre tentative d'utiliser un PMO anisotrope en fréquence pour restreindre le développement des instabilités a mis en évidence les importants couplages qui existent entre les directions du PMO. La manifestation de ces couplages peut être assez spectaculaire. Nous avons notamment observé une disparition du piégeage pour des valeurs de paramètres standards. À cause de ces couplages, il semble compromis de pouvoir limiter les instabilités à une seule dimension. Cependant, l'étude du PMO anisotrope nous a permis d'approfondir notre compréhension du piège traditionnel. En effet, leur modélisation théorique est similaire, nous avons ainsi pu avoir accès à une mesure de la grandeur qui caractérise la diffusion multiple. C'est un point très important car cette grandeur peut à présent être mesurée de façon simple et systématique.

Le second objectif de ce travail de thèse était d'affiner notre description théorique et expérimentale de la dynamique spatio-temporelle des atomes froids. D'un point de vue expérimental, nous avons été en mesure d'observer le comportement spatial du nuage dans un régime d'instabilités stochastiques. Ces observations réalisées pour la première fois ont mis en évidence des mouvements périodiques de fragments du nuage. D'un point de vue théorique, la modélisation nous a conduit à décrire la physique du PMO par une équation de Vlasov-Fokker-Planck. Cette équation, rencontrée dans de nombreux domaines de la physique, suggère de nombreuses possibilités d'analogie avec des systèmes complexes. Nous avons d'ailleurs utilisé un système analogue pour trouver une méthode d'intégration numérique. En le simplifiant, notre modèle devient identique à celui-ci utilisé pour décrire des électrons dans un accélérateur de particules. Malheureusement, les simplifications nécessaires sont trop fortes pour conduire à des instabilités.

Ce travail se pose comme une base pour des études à la fois théoriques et expérimentales. Nous disposons d'un modèle et d'une méthode pour l'intégrer dans un cas simple. Il faut maintenant adapter le programme pour revenir sur les simplifications qui ont été effectuées. Une première étape est de réintroduire une absorption non-linéaire dans le modèle. Ceci modifie sensiblement la forme actuelle du modèle car une équation supplémentaire est nécessaire. De plus, il faut travailler de nouveau avec les intensités individuelles des lasers car elles ne sont pas connues en un même point de l'espace. Il est également envisageable d'ajouter les termes d'interaction avec le gaz résiduel. Dans ce cas, la méthode d'intégration doit également être adaptée car elle est utilisée pour des systèmes fermés pour le moment.

Il est aussi possible de poursuivre l'étude expérimentale. Un certain nombre d'outils d'analyse d'images ont été développés et peuvent être réutilisés pour l'étude d'instabilités déterministes. Ce type d'instabilités présente un grand avantage vis-à-vis du régime stochastique. En effet, les oscillations temporelles ne sont plus aléatoires mais cycliques. D'une manière générale, le comportement du nuage est bien plus régulier que celui observé ici. Il est donc vraisemblable de penser que ce régime est plus simple à étudier. La recherche d'instabilités déterministes est donc une priorité pour la poursuite de l'étude expérimentale de la dynamique spatio-temporelle du PMO.

Ces différents éléments constituent des pistes de développement à court ou moyen terme. Nous pouvons également évoquer des échéances un peu plus lointaines, du moins nécessitant d'autres études au préalable. Ces perspectives reprennent l'idée de nos deux approches précédentes. Nous pouvons espérer que l'étude numérique du modèle de Vlasov-Fokker-Planck mette en évidence une taille caractéristique pour le développement des instabilités. Si tel est le cas, nous pourrions revenir sur notre idée de trouver une configuration donnant naissance à des instabilités 1D. En parallèle, il est possible de travailler sur la construction d'un modèle théorique à 3D. Notre étude du PMO anisotrope montre clairement qu'un PMO 3D n'est pas toujours identique à trois PMOs 1D. Il est par exemple évident que la saturation par toutes les ondes doit être prise en compte pour décrire encore plus finement le PMO. Une simulation d'un plasma, ou de tout autre système, par un nuage d'atomes froids nécessite une bonne connaissance des mécanismes du PMO. Il semble donc que le piège magnéto-optique n'ait pas fini de faire parler lui ...

Table des figures

1.1 Sous-systèmes et interactions du système total étudié 28
1.2 Interactions entre les niveaux du système {atome+champ} 30
1.3 Déplacement lumineux des niveaux habillés 33
1.4 Composantes radiatives du spectre d'émission de l'atome habillé 33
1.5 Spectre d'émission de l'atome habillé 38
1.6 Spectre d'absorption de l'atome habillé 39

2.1 Les deux symétries du PMO 45
2.2 Illustration du processus de diffusion multiple 46
2.3 Évolution du coefficient géométrique A en fonction de l'ellipticité du nuage. . 53
2.4 Structure atomique excitée par une onde $\sigma^+ - \sigma^-$ dans la base naturelle et la base couplée 57
2.5 Évolution de la raideur en fonction de l'intensité totale pour le modèle unidimensionnel 63
2.6 Évolution du rapport des deux termes de κ en fonction du désaccord 64
2.7 Représentation schématique des différentes composantes des spectres (a) d'émission et (b) d'absorption du système à trois niveaux d'énergie. 65
2.8 Spectre d'absorption du niveau non-couplé 67
2.9 Différents cas limites dans l'espace des paramètres des faisceaux lasers pour la détermination de σ_R 69
2.10 Structure atomique excitée par une onde $\sigma^+ - \sigma^-$ et une onde π dans la base naturelle 72
2.11 Évolution de la section efficace $\sigma_{L\|}$ en fonction du désaccord $\Delta_\|$ des faisceaux longitudinaux 73
2.12 Excitation par l'onde $\sigma^+ - \sigma^-$ après habillage du système par l'onde π dans la base couplée 75
2.13 Évolution des désaccords de l'onde $\sigma^+ - \sigma^-$ dans le système habillé par l'onde π dans la base couplée 77

2.14 Spectre d'absorption de l'onde $\sigma^+ - \sigma^-$ calculé à partir du système habillé par l'onde π 78
2.15 Évolution du désaccord du maximum d'absorption de l'onde $\sigma^+ - \sigma^-$ en fonction $\Omega_{G\perp}$ 78
2.16 Variation de la raideur en fonction de l'intensité transverse pour le système tridimensionnel approché 80
2.17 Excitation par l'onde $\sigma^+ - \sigma^-$ dans le système habillé par l'onde π dans la base naturelle 81

3.1 Schéma de la transition D_2 de l'atome de Césium 89
3.2 Schéma de principe du PMO anisotrope 92
3.3 Obtention de profils à partir d'une image. 93
3.4 Évolution du nombre d'atomes N en fonction du désaccord longitudinal $\Delta_\parallel$ en échelle linéaire 94
3.5 Évolution du nombre d'atomes N en fonction de $\Delta_\parallel$ en échelle logarithmique pour des intensités modérées 95
3.6 Évolution du nombre d'atomes N en fonction de $\Delta_\parallel$ en échelle logarithmique pour des intensités élevées 96
3.7 Évolution de l'ellipticité en fonction du désaccord longitudinal $\Delta_\parallel$ dans un PMO anisotrope 97
3.8 Comparaison de l'accord entre les modèles standard et anisotrope avec les observations expérimentales 99

4.1 Évolution du coefficient géométrique A et du rapport des sections efficaces en fonction de l'ellipticité. 103
4.2 Différents cas limites dans l'espace des paramètres des faisceaux lasers pour la détermination de σ_R 104
4.3 Effet du vibreur sur les mesures de tailles 106
4.4 Impact d'un faible désalignement des faisceaux sur la forme du nuage 107
4.5 Ensemble des mesures d'ellipticités pour 117 points de fonctionnement différents 109
4.6 Évolution de l'ellipticité en fonction du désaccord dans un piège traditionnel 110
4.7 Évolution du rapport des sections efficaces en fonction du désaccord 112

5.1 Schéma du système pour le modèle spatio-temporel à 1D 123
5.2 Définition de l'atome froid 124
5.3 Variation du nombre d'atomes contenus dans une cellule élémentaire de l'espace de phase à cause d'une variation de la position et de l'impulsion 125

6.1 Modification du profil de densité stationnaire en fonction de la densité au centre 143

6.2 Ajustement des profils de densité dans le régime thermique et de diffusion multiple . . . 144
6.3 Évolution des tailles thermique et de diffusion multiple en fonction de densité au centre . . . 145
6.4 Modification du profil de densité stationnaire en fonction de la diffusion . . . 147
6.5 Évolution de la différence d'intensité locale dans le nuage . . . 148
6.6 Densité stationnaire dans l'espace des phases obtenue par intégration numérique de l'équation VFP . . . 149
6.7 Évolution temporelle de la largeur de la densité et de la distribution en impulsion 150
6.8 Domaine de validité de l'approximation de linéarisation de la force de piégeage 152
6.9 Domaine de validité de l'approximation de faible absorption . . . 154

7.1 Dispositif de détection des instabilités . . . 160
7.2 Signal de fluorescence et spectre correspondant pour $\Delta = -1,8\Gamma$ et $I_{+0} \simeq 13 I_{sat}$ 161
7.3 Spectre de la fluorescence pour $\Delta = -1,7\Gamma$ et $I_{+0} \simeq 13 I_{sat}$ . . . 163
7.4 Réponse du système à une variation du désaccord . . . 165
7.5 Réponse du système à une variation de l'intensité . . . 165
7.6 Signaux et spectres mesurés par la photodiodes 4 quadrants . . . 167
7.7 Principe de la méthode d'analyse des images . . . 168
7.8 Évolution de la fluorescence du nuage au cours d'une période d'oscillation . . 170
7.9 Répartition spatiale des instabilités associées à la composante ν_1 . . . 172
7.10 Évolution de la fluorescence par rapport aux lobes d'instabilités . . . 173
7.11 Répartition spatiale des instabilités associées à la composante ν_2 . . . 175
7.12 Répartition spatiale de la phase des instabilités associées à la composante ν_1 176
7.13 Simulation des instabilités par un mouvement composé d'une translation et d'une dilatation . . . 179

A.1 Structure atomique excitée par une onde $\sigma^+ - \sigma^-$ et une onde π dans la base naturelle . . . 199

B.1 Excitation par l'onde $\sigma^+ - \sigma^-$ dans le système habillé par l'onde π dans la base naturelle . . . 204
B.2 Évolution des populations des niveaux habillés et des couplages longitudinaux en fonction des paramètres des faisceaux transverses . . . 205

Liste des tableaux

2.1 Les différentes configurations d'un PMO 43
2.2 Position du centre du nuage en fonction de la configuration du PMO 54
2.3 Comparaison des expressions théoriques du rapport des sections efficaces. . . 71
2.4 Efficacité du piégeage en fonction de $\Delta_{\parallel}$ et $\Omega_{G\perp}$ 83

4.1 Expressions de σ_R et de σ_R/σ_L dans les cas limites des paramètres des lasers 105
4.2 Déterminations du rapport des sections efficaces à partir des mesures de tailles 111

6.1 Valeurs des paramètres utilisées pour les simulations numériques 151

7.1 Composantes spectrales présentes dans le spectre précédent 163

A.1 Coefficients intervenant dans l'expression de la population du niveau couplé . 202

Bibliographie

[Adams1997] C. Adams et E. Riis, *Laser cooling and trapping of neutral atoms*, Prog. Quant. Electon. **21**, 1 (1997)

[Amaro-Seoane2004] P. Amaro-Seoane, M. Freitag et R. Spurzem, *Accretion of stars on to a massive black hole : a realistic diffusion model and numerical studies*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **352**, 655 (2004)

[Anderson1995] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman et E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198 (1995)

[Arnold2000] A. S. Arnold et P. J. Manson, *Atomic density and temperature distributions in magneto-optical traps*, J. Opt. Soc. Am. B **17**, 497 (2000)

[Ashkin1970] A. Ashkin, *Atomic-Beam Deflection by Resonance-Radiation Pressure*, Phys. Rev. Lett. **25**, 1321 (1970)

[Autler1955] S. H. Autler et C. H. Townes, *Stark Effect in Rapidly Varying Fields*, Phys. Rev. **100**, 703 (1955)

[Baladron2012] J. Baladron, D. Fasoli, O. Faugeras et J. Touboul, *Mean-field description and propagation of chaos in networks of Hodgkin-Huxley and FitzHugh-Nagumo neurons*, JMN **2**, 1 (2012)

[Bendahmane2009] A. Bendahmane, *Instabilités dans les pièges magnéto-optiques*, Rapport de master, Université de Lille1 (2009)

[Benedetto2004] D. Benedetto, F. Caglioti, E.and Golse et M. Pulvirenti, *Hydrodynamic limits of Vlasov-Fokker-Planck equation for granular media*, Commun. Math. Sci. **2**, 121 (2004)

[Bradley1995] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett et R. G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995)

[Cai2011] Y. Cai, *Linear theory of microwave instability in electron storage rings*, Phys. Rev. ST Accel. Beams **14**, 061002 (2011)

[Chalony2013] M. Chalony, J. Barré, B. Marcos, A. Olivetti et D. Wilkowski, *Long-range one-dimensional gravitational-like interaction in a neutral atomic cold gas*, Phys. Rev. A **87**, 013401 (2013)

[Chavanis1996] P. H. Chavanis, J. Sommeria et R. Robert, *Statistical Mechanics of Two-Dimensional Vortices and Collisionless Stellar Systems*, Astrophys. J. **471**, 385 (1996)

[Chu1985] S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable et A. Ashkin, *Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **55**, 48 (1985)

[Cohen-Tannoudji1988] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupond-Roc et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes* (EDP Sciences, Paris, 1988)

[Dalibard1988] J. Dalibard, *Laser cooling of an optically thick gas : The simplest radiation pressure trap ?*, Opt. Commun. **68**, 203 (1988)

[Dalibard1989] J. Dalibard et C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2023 (1989)

[Dalibard1984] J. Dalibard, S. Reynaud et C. Cohen-Tannoudji, *Potentialities of a new $\sigma_+ - \sigma_-$ laser configuration for radiative cooling and trapping*, J. Phys. B : At. Mol. Phys **17**, 4577 (1984)

[Davis1995] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn et W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995)

[diStefano2003] A. di Stefano, M. Fauquembergue, P. Verkerk et D. Hennequin, *Giant oscillations in a magneto-optical trap*, Phys. Rev. A **67**, 033404 (2003)

[diStefano2004] A. di Stefano, P. Verkerk et D. Hennequin, *Deterministic instabilities in the magneto-optical trap*, Eur. Phys. J. D. **30**, 243 (2004)

[Dudle1996] G. Dudle, N. Sagna, P. Berthoud et P. Thomann, *Anisotropic magneto-optical trapping of atoms : capture efficiency and induced drift velocities*, J. Phys. B : At., Mol. Opt. Phys. **29**, 4659 (1996)

[Goudon2013] T. Goudon, S. Jin, J.-G. Liu et B. Yan, *Asymptotic-preserving schemes for kinetic-fluid modeling of disperse two-phase flows*, J. Comput. Phys. **246**, 145 (2013)

[Grego1996] S. Grego, M. Colla, A. Fioretti, J. Müller, P. Verkerk et E. Arimondo, *A cesium magneto-optical trap for cold collisions studies*, Opt. Commun. **132**, 519 (1996)

[Greiner2002] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch et I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature **415**, 39 (2002)

[Grison1991] D. Grison, B. Lounis, C. Salomon, J. Y. Courtois et G. Grynberg, *Raman Spectroscopy of Cesium Atoms in a Laser Trap*, Europhys. Lett. **15**, 149 (1991)

[Grove1977] R. E. Grove, F. Y. Wu et S. Ezekiel, *Measurement of the spectrum of resonance fluorescence from a two-level atom in an intense monochromatic field*, Phys. Rev. A **15**, 227 (1977)

[Grynberg1993] G. Grynberg, B. Lounis, P. Verkerk, J.-Y. Courtois et C. Salomon, *Quantized motion of cold cesium atoms in two- and three-dimensional optical potentials*, Phys. Rev. Lett. **70**, 2249 (1993)

[Guidoni1998] L. Guidoni, *Quasicristaux optiques : refroidissement et piégeage d'atomes de Césium dans un potentiel lumineux quasi-périodique*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris IV (1998)

[Haissinski1973] J. Haïssinski, *Exact longitudinal equilibrium distribution of stored electrons in the presence of self-fields*, Il Nuovo Cimento **18**, 72 (1973)

[Hennequin2004] D. Hennequin, *Stochastic dynamics of the magneto-optical trap*, Eur. Phys. J. D. **28**, 135 (2004)

[Heo2007] M.-s. Heo, K. Kim, K.-H. Lee, D. Yum, S. Shin, Y. Kim, H.-R. Noh et W. Jhe, *Adjustable multiple sub-Doppler traps in an asymmetric magneto-optical trap*, Phys. Rev. A **75**, 023409 (2007)

[Hansch1975] T. Hänsch et A. Schawlow, *Cooling of gases by laser radiation*, Opt. Commun. **13**, 68 (1975)

[Hoffmann1994] D. Hoffmann, P. Feng et T. Walker, *Measurements of Rb trap-loss collision spectra*, J. Opt. Soc. Am. B **11**, 712 (1994)

[Illner2003] R. Illner, A. Klar et T. Materne, *Vlasov-Fokker-Plank Models for Multilane Traffic Flow*, Commun. Math. Sci. **1**, 1 (2003)

[Kasevich1989] M. A. Kasevich, E. Riis, S. Chu et R. G. DeVoe, *RF spectroscopy in an atomic fountain*, Phys. Rev. Lett. **63**, 612 (1989)

[Ketterle2006a] W. Ketterle, D. Durfee et D. Stamper-Kurn, *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*, dans *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXL* (edité par S. S. M. Inguscio et C. Wieman) (IOS Press, Amsterdam, 2006)

[Ketterle2006b] W. Ketterle, D. Durfee et D. Stamper-Kurn, *Making, probing and understanding ultracold Fermi gases*, dans *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXL* (edité par S. S. M. Inguscio et C. Wieman) (IOS Press, Amsterdam, 2006)

[Kim2005] K. Kim, H.-R. Noh et W. Jhe, *Measurements of trap parameters of a magneto-optical trap by parametric resonance*, Phys. Rev. A **71**, 033413 (2005)

[Krems2010] R. Krems, B. Friedrich et W. Stwalley, *Cold Molecules : Theory, Experiment, Applications* (Taylor & Francis, 2010)

[Labeyrie2006] G. Labeyrie, F. Michaud et R. Kaiser, *Self-Sustained Oscillations in a Large Magneto-Optical Trap*, Phys. Rev. Lett. **96**, 023003 (2006)

[LeTargat2013] R. Le Targat, L. Lorini, Y. Le Coq, M. Zawada, J. Guéna, M. Abgrall, M. Gurov, P. Rosenbusch, D. G. Rovera, B. Nagórny, R. Gartman, P. G. Westergaard, M. E. Tobar, M. Lours, G. Santarelli, A. Clairon, S. Bize, P. Laurent, P. Lemonde et J. Lodewyck, *Experimental realization of an optical second with strontium lattice clocks*, Nat. Commun. **4** (2013)

[Leggett2001] A. J. Leggett, *Bose-Einstein condensation in the alkali gases : Some fundamental concepts*, Rev. Mod. Phys. **73**, 307 (2001)

[Lett1988] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould et H. J. Metcalf, *Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit*, Phys. Rev. Lett. **61**, 169 (1988)

[Mendonca2012] J. T. Mendonça et R. Kaiser, *Photon Bubbles in Ultracold Matter*, Phys. Rev. Lett. **108**, 033001 (2012)

[Mendonca2008] J. T. Mendonça, R. Kaiser, H. Terças et J. Loureiro, *Collective oscillations in ultracold atomic gas*, Phys. Rev. A **78**, 013408 (2008)

[Metcalf1999] H. J. Metcalf et P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping* (Springer - Verlag, New York, 1999)

[Mollow1969] B. R. Mollow, *Power Spectrum of Light Scattered by Two-Level Systems*, Phys. Rev. **188**, 1969 (1969)

[Monroe1990] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson et C. Wieman, *Very cold trapped atoms in a vapor cell*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1571 (1990)

[Myatt1996] C. J. Myatt, N. R. Newbury, R. W. Ghrist, S. Loutzenhiser et C. E. Wieman, *Multiply loaded magneto-optical trap*, Opt. Lett. **21**, 290 (1996)

[Neunzert1984] H. Neunzert, M. Pulvirenti et L. Triolo, *On the Vlasov-Fokker-Planck equation*, Math. Method. Appl. Sci. **6**, 527 (1984)

[Noh2007] H.-R. Noh et W. Jhe, *Semiclassical theory of sub-Doppler forces in an asymmetric magneto-optical trap with unequal laser detunings*, Phys. Rev. A **75**, 053411 (2007)

[Olivetti2009] A. Olivetti, J. Barré, B. Marcos, F. Bouchet et R. Kaiser, *Breathing Mode for Systems of Interacting Particles*, Phys. Rev. Lett. **103**, 224301 (2009)

[Overstreet2005] K. Overstreet, P. Zabawa, J. Tallant, A. Schwettmann et J. Shaffer, *Multiple scattering and the density distribution of a Cs MOT*, Opt. Express **13**, 9672 (2005)

[PereiraDosSantos2008] F. Pereira Dos Santos, J. Le Gouët, T. Mehlstäubler, S. Merlet, D. Holleville, A. Clairon et A. Landragin, *Gravimètre à atomes froids*, Revue française de métrologie **1** (2008)

[Pohl2006] T. Pohl, G. Labeyrie et R. Kaiser, *Self-driven nonlinear dynamics in magneto-optical traps*, Phys. Rev. A **74**, 023409 (2006)

[Pruvost2000] L. Pruvost, I. Serre, H. T. Duong et J. Jortner, *Expansion and cooling of a bright rubidium three-dimensional optical molasses*, Phys. Rev. A **61**, 053408 (2000)

[Raab1987] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu et D. E. Pritchard, *Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2631 (1987)

[Ramos-Caro2008] J. Ramos-Caro et G. A. González, *Fokker-Planck-Rosenbluth-type equations for self-gravitating systems in the 1PN approximation*, Classical Quant. Grav. **25**, 045011 (2008)

[Romain2011] R. Romain, D. Hennequin et P. Verkerk, *Phase-space description of the magneto-optical trap*, Eur. Phys. J. D. **61**, 171 (2011)

[Romain2013] R. Romain, P. Verkerk et D. Hennequin, *The dual frequency anisotropic magneto-optical trap*, Eur. Phys. J. D. **67**, 211 (2013)

[Romain2014a] R. Romain, P. Verkerk et D. Hennequin, *Measurement of the reabsorption cross section in a magneto-optical trap* (en préparation)

[Romain2014b] R. Romain, P. Verkerk et D. Hennequin, *Spatio-temporal characterization of stochastic instabilies in a magneto-optical trap* (en préparation)

[Roussel2014] E. Roussel, C. Evain, C. Szwaj et S. Bielawski, *Microbunching instability in storage rings : Link between phase-space structure and terahertz coherent synchrotron radiation radio-frequency spectra*, Phys. Rev. ST Accel. Beams **17**, 010701 (2014)

[Salomon1987] C. Salomon, J. Dalibard, A. Aspect, H. Metcalf et C. Cohen-Tannoudji, *Channeling atoms in a laser standing wave*, Phys. Rev. Lett. **59**, 1659 (1987)

[Sesko1991] D. W. Sesko, T. G. Walker et C. E. Wieman, *Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap*, J. Opt. Soc. Am. B **8**, 946 (1991)

[Steane1992] A. M. Steane, M. Chowdhury et C. J. Foot, *Radiation force in the magneto-optical trap*, J. Opt. Soc. Am. B **9**, 2142 (1992)

[Steck2003] D. A. Steck, *Cesium D Line Data*, URL `http://steck.us/alkalidata/cesiumnumbers.1.6.pdf`

[Stites2005] R. Stites, M. McClimans et S. Bali, *Large atom-density change at constant temperature by varying trap anisotropy in a dilute magneto-optical trap*, Opt. Commun. **248**, 173 (2005)

[Swanson1998] T. B. Swanson, D. Asgeirsson, J. A. Behr, A. Gorelov et D. Melconian, *Efficient transfer in a double magneto-optical trap system*, J. Opt. Soc. Am. B **15**, 2641 (1998)

[Tercas2012] H. Terças, J. T. Mendonça et V. Guerra, *Classical rotons in cold atomic traps*, Phys. Rev. A **86**, 053630 (2012)

[Townsend1995] C. G. Townsend, N. H. Edwards, C. J. Cooper, K. P. Zetie, C. J. Foot, A. M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin et J. Dalibard, *Phase-space density in the magneto-optical trap*, Phys. Rev. A **52**, 1423 (1995)

[Vengalattore2003] M. Vengalattore, W. Rooijakkers, R. Conroy et M. Prentiss, *Suppression of photon rescattering due to spatial anisotropy in a cold atomic gas*, Phys. Rev. A **67**, 063412 (2003)

[Vorozcovs2005] A. Vorozcovs, M. Weel, S. Beattie, S. Cauchi et A. Kumarakrishnan, *Measurements of temperature scaling laws in an optically dense magneto-optical trap*, J. Opt. Soc. Am. B **22**, 943 (2005)

[Wallace1994] C. D. Wallace, T. P. Dinneen, K. Y. N. Tan, A. Kumarakrishnan, P. L. Gould et J. Javanainen, *Measurements of temperature and*

spring constant in a magneto-optical trap, J. Opt. Soc. Am. B **11**, 703 (1994)

[Warnock2006] R. L. Warnock, *Study of bunch instabilities by the nonlinear Vlasov-Fokker-Planck equation*, Nucl. Instrum. Meth. A **561**, 186 (2006)

[Warnock2000] R. L. Warnock et J. A. Ellison (rédacteurs), *A general method for propagation of the phase space distribution, with application to the saw-tooth instability* (World Scientific, 2000)

[Wilkowski1998] D. Wilkowski, J. C. Garreau et D. Hennequin, *Observation of bistability in a perturbed magneto-optical trap*, Eur. Phys. J. D. **2**, 157 (1998)

[Wilkowski2000] D. Wilkowski, J. Ringot, D. Hennequin et J. C. Garreau, *Instabilities in a Magneto-optical Trap : Noise-Induced Dynamics in an Atomic System*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1839 (2000)

[Wu1977] F. Y. Wu, S. Ezekiel, M. Ducloy et B. R. Mollow, *Observation of Amplification in a Strongly Driven Two-Level Atomic System at Optical Frequencies*, Phys. Rev. Lett. **38**, 1077 (1977)

Annexe A

Détails sur la modélisation du système incluant les faisceaux transverses

Le schéma de la structure atomique est donné sur la figure A.1.

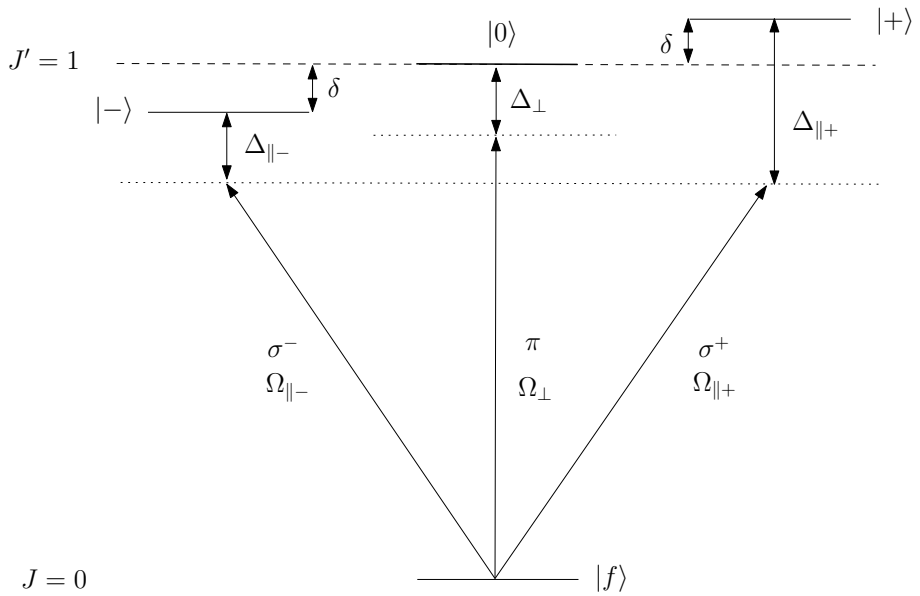


FIGURE A.1 – Représentation du système simplifié $J = 0 \rightarrow J' = 1$ dans lequel une paire de faisceaux a une polarisation circulaire $\sigma^+ - \sigma^-$ et les deux autres une polarisation π .

Il s'agit d'une transition $J = 0 \rightarrow J' = 1$, pour laquelle chaque sous-niveau magnétique de l'état excité est couplé au niveau fondamental par un champ différent. Les faisceaux circulairement polarisés représentent les deux faisceaux contrapropageants (indice $\pm$) selon

l'axe des bobines (indice $\|$). Les quatre faisceaux transverses (indice $\perp$) sont considérés comme polarisés linéairement (sur l'axe des bobines : polarisation π) .

Avec les mêmes arguments que pour le modèle unidimensionnel, l'hamiltonien du système dans la base naturelle $\{|f\rangle, |+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$ peut s'écrire :

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{\|+}/2 & \Omega_{\perp}/2 & \Omega_{\|-}/2 \\ \Omega^*_{\|+}/2 & -\Delta_{\|} - \delta & 0 & 0 \\ \Omega^*_{\perp}/2 & 0 & -\Delta_{\perp} & 0 \\ \Omega^*_{\|-} & 0 & 0 & -\Delta_{\|} + \delta \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

L'étude de ce système consiste, comme précédemment, à résoudre l'équation pilote pour la matrice densité. La méthode est identique, il s'agit d'un développement perturbatif en fonction du décalage Zeeman δ. Les équations à l'ordre 1 en δ sont :

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[H^{(0)}, \sigma^{(0)}\right] + \left.\frac{d\sigma^{(0)}}{dt}\right|_{relax} \tag{A.2}$$

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left(\left[H^{(1)}, \sigma^{(0)}\right] + \left[H^{(0)}, \sigma^{(1)}\right]\right) + \left.\frac{d\sigma^{(1)}}{dt}\right|_{relax} \tag{A.3}$$

Le terme $\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{relax}$ correspond aux phénomènes de relaxation et est de la forme suivante :

$$\left.\frac{d\sigma^{(n)}}{dt}\right|_{relax} = -\Gamma \begin{pmatrix} -\sigma^{(n)}_{++} - \sigma^{(n)}_{--} - \sigma^{(n)}_{00} & \sigma^{(n)}_{f+} & \sigma^{(n)}_{f0} & \frac{\sigma^{(n)}_{f-}}{2} \\ \sigma^{(n)}_{+f} & \sigma^{(n)}_{++} & \sigma^{(n)}_{+0} & \frac{\sigma^{(n)}_{+-}}{2} \\ \sigma^{(n)}_{0f} & \sigma^{(n)}_{0+} & \sigma^{(n)}_{00} & \frac{\sigma^{(n)}_{0-}}{2} \\ \frac{\sigma^{(n)}_{-f}}{2} & \frac{\sigma^{(n)}_{-+}}{2} & \frac{\sigma^{(n)}_{-0}}{2} & \sigma^{(n)}_{--} \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

Pour un atome au centre du piège, $H^{(0)}$ exprimé dans la base couplée $\{|f\rangle, |C\rangle, |0\rangle, |N\rangle\}$ est :

$$H^{(0)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{\|}/2 & \Omega_{\perp}/2 & 0 \\ \Omega^*_{\|}/2 & -\Delta_{\|} & 0 & 0 \\ \Omega^*_{\perp}/2 & 0 & -\Delta_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta_{\|} \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

avec $\Omega_{\parallel} = \sqrt{\left|\Omega_{\parallel+}\right|^2 + \left|\Omega_{\parallel-}\right|^2}$. Les états couplé et non couplé sont définis de la même manière que précédemment :

$$|C\rangle = \frac{\Omega_{\parallel+}\,|+\rangle + \Omega_{\parallel-}\,|-\rangle}{\Omega_{\parallel}} \tag{A.6}$$

$$|N\rangle = \frac{\Omega^*_{\parallel-}\,|+\rangle - \Omega^*_{\parallel+}\,|-\rangle}{\Omega_{\parallel}} \tag{A.7}$$

La résolution de l'équation A.2 ne présente pas de difficulté. Cependant, les expressions sont très lourdes et ne peuvent pas simplement être analysées. Pour illustrer cette complexité, nous donnons l'expression de la population de l'état couplé, qui permet de déterminer la section efficace $\sigma_{L\parallel}$, sous la forme :

$$\pi_C = \Omega_{\parallel}^2 \frac{X}{Y} \tag{A.8}$$

avec

$$X = \sum_{s=4} \phi_{abcde}\, \Gamma^{2a} \Omega_{\parallel}^{2b} \Omega_{\perp}^{2c} \Delta_{\parallel}^{d} \Delta_{\perp}^{e} \tag{A.9}$$

$$Y = \sum_{s=6} \phi'_{abcde}\, \Gamma^{2a} \Omega_{\parallel}^{2b} \Omega_{\perp}^{2c} \Delta_{\parallel}^{d} \Delta_{\perp}^{e} \tag{A.10}$$

où $s = 2a + 2b + 2c + d + e$ et a, b, c, d et e sont des entiers positifs ou nuls. Les valeurs des coefficients ϕ_{abcde} et ϕ'_{abcde} sont données dans les tableaux A.1. Les sommes comptent respectivement 20 et 49 termes dont seulement 3 et 8 sont nuls. Il est possible de vérifier en éliminant le champ transverse que l'on retrouve la population calculée précédemment :

$$\pi_C = \frac{\Omega_{\parallel}^2}{4\Delta_{\parallel}^2 + 2\Omega_{\parallel}^2 + \Gamma^2}$$

Pour cela, il « suffit » de ne conserver que les termes pour lesquels $c = 0$ (respectivement 11 et 24).

L'équation A.3 donnant $\sigma^{(1)}$ peut maintenant être résolue. Les expressions obtenues ne sont pas intelligibles. Elles devront donc être analysées graphiquement.

			d				
2*a*	**2*b***	***2c***	0	1	2	3	4
0	0	0	16	-32	16	0	0
0	0	2	16	-24	8		
0	2	0	-8	8	0		
2	0	0	20	-8	4		
0	2	2	2				
2	0	2	4				
2	2	0	4				
0	0	4	1				
0	4	0	1				
4	0	0	4				

(a)

			d						
2*a*	**2*b***	***2c***	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	64	-128	64	0	0
0	0	2	0	32	0	-64	32		
0	2	0	32	-64	0	32	0		
2	0	0	16	-32	96	-32	16		
0	2	2	36	-64	36				
2	0	2	24	-8	32				
2	2	0	32	-8	24				
0	0	4	4	16	-16				
0	4	0	-16	16	4				
4	0	0	20	-8	20				
0	2	4	6						
2	0	4	9						
0	4	2	6						
2	4	0	9						
4	0	2	12						
4	2	0	12						
0	0	6	2						
0	6	0	2						
6	0	0	4						

(b)

Table A.1 – Coefficients des sommes de l'expression de la population (a) valeurs pour le numérateur (b) valeurs pour le dénominateur. Les valeurs sont regroupées par triplet ($2a$,$2b$,$2c$) puis sont données pour chaque valeur de d . e se déduit de la somme s ($e = s-2(a+b+c)-d$)).

Annexe B

Modification du couplage dû aux faisceaux longitudinaux pour des états habillés par l'onde transverse

Il est question ici d'évaluer le terme d'interaction, lié aux ondes longitudinales, entre les états habillés par l'onde transverse de la multiplicité « fondamentale » $\mathcal{E}(\mathcal{N}_\perp)$ et des niveaux excités $|\pm\rangle$. Nous avons supposé que l'intensité des champs longitudinaux était faible, ainsi ils ne perturbent pas les autres états. Un développement semi-classique est donc suffisant. Dans l'approximation dipolaire électrique, le couplage $V_\parallel$ est :

$$V_\parallel = -\vec{d}.\vec{E}_\parallel$$

où $\vec{d}$ est le moment dipolaire de la transition de l'état fondamental $|f\rangle$ à un des états excités $|\pm\rangle$ de la base naturelle, et $\vec{E}_\parallel$ est le champ électrique longitudinal. Par définition, le couplage est relié à la fréquence de Rabi :

$$\langle \pm \left| V_\parallel \right| f \rangle = \frac{\hbar\Omega_{\parallel\pm}}{2}$$

Le schéma atomique étudié est décrit sur la figure B.1. Pour rappel, les expressions des populations stationnaires du schéma habillé sont :

$$\pi_1^{st} = \frac{\sin^4\theta_\perp}{\cos^4\theta_\perp + \sin^4\theta_\perp} \tag{B.1}$$

$$\pi_2^{st} = \frac{\cos_\perp^4\theta}{\cos^4\theta_\perp + \sin^4\theta_\perp} \tag{B.2}$$

Nous cherchons à calculer les valeurs des fréquences de Rabi $\Omega_{\frac{1}{2}\pm}$ dont la définition est :

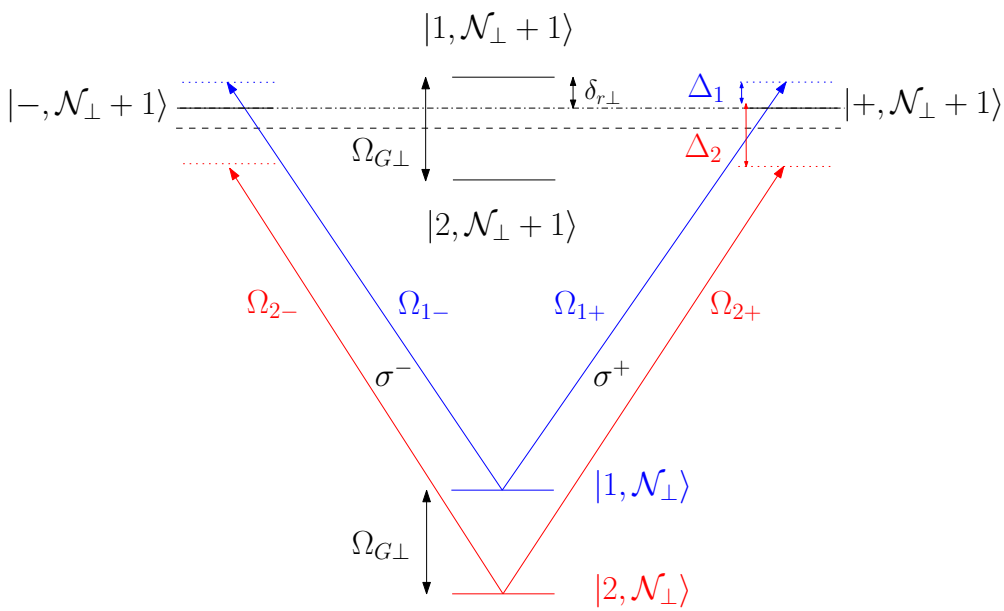


FIGURE B.1 – Schéma du système habillé par l'onde transverse. Les deux sous-systèmes sont représentés en rouge et bleu.

$$\frac{\hbar\Omega_{\substack{1\\2}\pm}}{2} = \left\langle \pm, \mathcal{N}_\perp + 1 \left| V_\parallel \right| \substack{1\\2}, \mathcal{N}_\perp \right\rangle$$

À l'aide de la définition des états habillés ($\tan 2\theta_\perp = -\Omega_\perp/\Delta_\perp$) du chapitre 1, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar\Omega_{1\pm}}{2} &= \left\langle \pm, \mathcal{N}_\perp + 1 \left| V_\parallel \right| 1, \mathcal{N}_\perp \right\rangle \\
&= \cos\theta_\perp \left\langle \pm, \mathcal{N}_\perp + 1 \left| V_\parallel \right| 0, \mathcal{N}_\perp \right\rangle + \sin\theta_\perp \left\langle \pm, \mathcal{N}_\perp + 1 \left| V_\parallel \right| f, \mathcal{N}_\perp + 1 \right\rangle \\
&= \cos\theta_\perp \left\langle \pm \left| V_\parallel \right| 0 \right\rangle \otimes \langle \mathcal{N}_\perp + 1 | \mathcal{N}_\perp \rangle + \sin\theta_\perp \left\langle \pm \left| V_\parallel \right| f \right\rangle \otimes \langle \mathcal{N}_\perp + 1 | \mathcal{N}_\perp + 1 \rangle \\
&= \frac{\hbar\Omega_{\parallel\pm}}{2} \sin\theta_\perp
\end{aligned}$$

Le même développement pour le second état de la multiplicité conduit à :

$$\Omega_{2\pm} = \Omega_{\parallel\pm} \cos\theta_\perp$$

La fréquence de Rabi de chaque sous-système est donc différente et elle dépend des paramètres des faisceaux transverses. Nous souhaitons connaître la modification engendrée par une augmentation de l'intensité des faisceaux transverses. La figure **??** montre l'évolution de

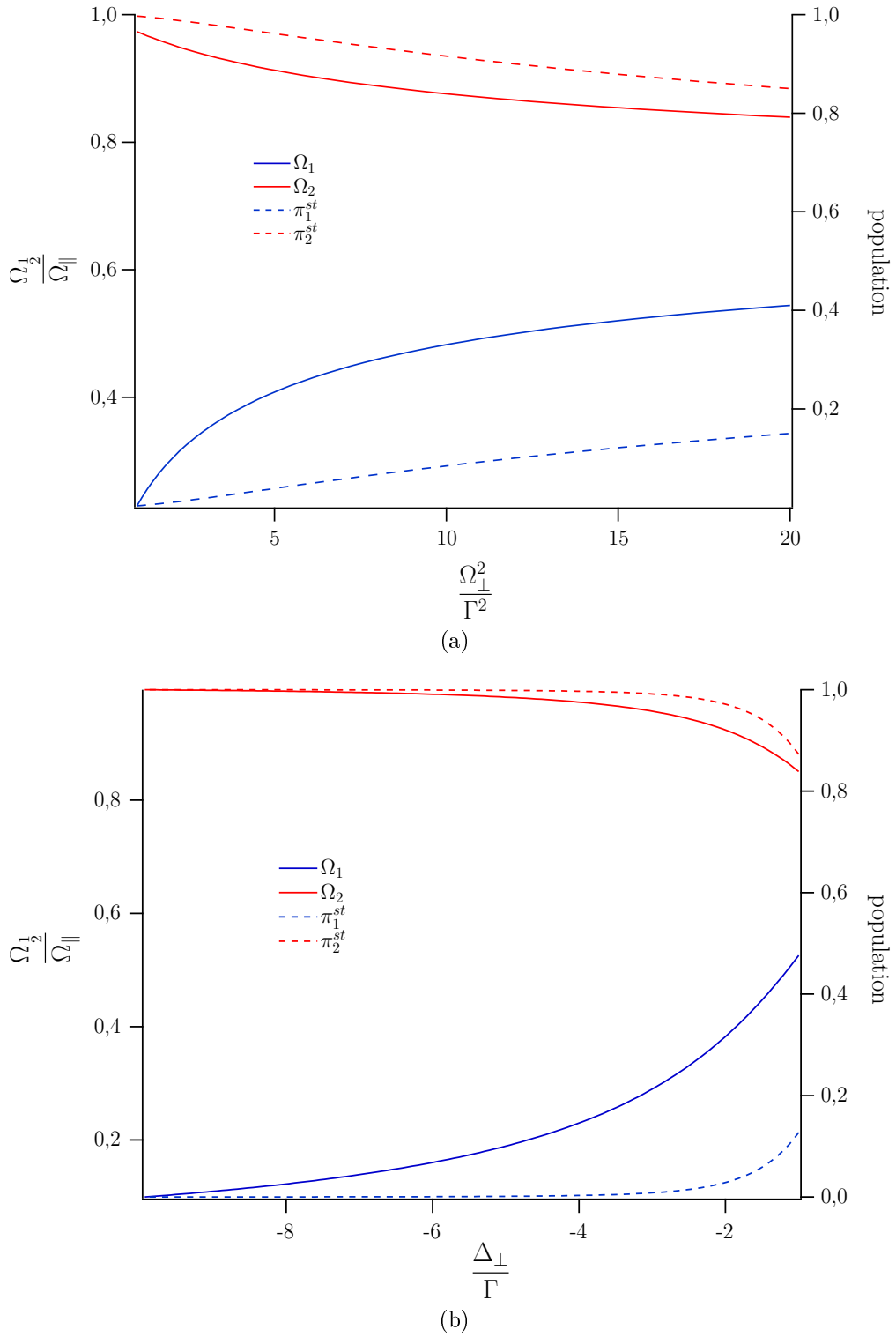


FIGURE B.2 – Évolution des fréquences de Rabi $\Omega_{\frac{1}{2}}$ et des populations $\pi_{\frac{1}{2}}^{st}$ pour une variation : (a) de l'intensité des faisceaux transverses avec $\Delta_\perp = -2\Gamma$ et (b) du désaccord des faisceaux transverses pour $\Omega_\perp = 2\Gamma$.

$\Omega_{1\pm}$ et $\Omega_{2\pm}$ en fonction de $\Omega_\perp^2$. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas $\Omega_\perp^2 > 4\Gamma^2$ (forte saturation). La prise en compte de cette dépendance n'a qu'un faible effet, l'évolution des quantités tracées est inférieures à $1/3$. Nous pouvons conclure que, pour la gamme d'intensités transverses qui nous intéresse, $\Omega_{1\pm}$ est toujours inférieure à $\Omega_{2\pm}$. De même, la population π_2 est supérieure à π_1. Nous pouvons négliger les variations en fonction de $\Omega_\perp^2$.

La figure **??** montrent l'évolution des fréquences de Rabi et des populations en fonction du désaccord transverse. Ainsi lorsque les faisceaux transverses sont très désaccordés, la population de l'état $|1\rangle$ et la fréquence de Rabi Ω_1 tendent vers zéro. Cette observation est la conséquence directe de la définition des états habillés comme un mélange entre l'état fondamental $|f\rangle$ et l'état excité $|0\rangle$.

Annexe C

Équation d'évolution de la densité stationnaire

Le système d'équations en régime permanent est :

$$P\,\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial X} - \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial P}\,(X - b_2\,i_{-0}) \;=\; 2b_3\frac{\partial}{\partial P}\left(P\hat{\rho} + (1+b_4)\,\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial P}\right) \tag{C.1a}$$

$$\frac{di_{-0}}{dX} \;=\; c_1\hat{n}_0 \tag{C.1b}$$

Ce système admet $\hat{\rho}_0(X,P)$ comme solution [Haissinski1973, Cai2011] :

$$\hat{\rho}_0 = \frac{\hat{n}_0(X)}{\sqrt{2\pi\,(1+b_4)}}\exp(-P^2/2\,(1+b_4)) \tag{C.2}$$

avec $\hat{n}_0(X)$ la distribution de Haïssinski. Cette solution annule le membre de droite de C.1a. Pour déterminer la distribution de Haïssinski, il faut annuler le membre de gauche en y injectant $\hat{\rho}_0$:

$$\frac{P}{\sqrt{2\pi\,(1+b_4)}}\exp(-P^2/2\,(1+b_4))\left[\frac{d\hat{n}_0}{dX} + \hat{n}_0\,\frac{X - b_2\,i_{-0}}{1+b_4}\right] = 0 \tag{C.3}$$

Cette équation est vérifiée en tout point de l'espace des phases pour :

$$\frac{d\hat{n}_0}{dX} + \hat{n}_0\,\frac{X - b_2\,i_{-0}}{1+b_4} = 0 \tag{C.4}$$

En différenciant et en utilisant l'équation définissant i_{-0} (C.1b), nous obtenons l'évolution de la quantité $\tilde{n} = b_2c_1\hat{n}_0$:

$$\frac{d^2\tilde{n}}{dX^2} - \frac{1}{\tilde{n}}\left(\frac{d\tilde{n}}{dX}\right)^2 + \tilde{n}\left(\frac{1-\tilde{n}}{1+b_4}\right) = 0 \tag{C.5}$$