

Dynamique spatio-temporelle dans un piège magnéto-optique

Rudy ROMAIN

sous la direction de
Daniel HENNEQUIN et Philippe VERKERK

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules



Les atomes froids

Des instabilités ?

observations expérimentales
modélisations théoriques

PMO anisotrope

principe
modélisation
mesures
théorie/expérience

Dynamique spatio-temporelle

modèle VFP et simulations
étude expérimentale du régime d'instabilités stochastiques

Conclusions & Perspectives

Les atomes froids

Des instabilités ?

- observations expérimentales
- modélisations théoriques

PMO anisotrope

- principe
- modélisation
- mesures
- théorie/expérience

Dynamique spatio-temporelle

- modèle VFP et simulations
- étude expérimentale du régime d'instabilités stochastiques

Conclusions & Perspectives



comète Hale - Bopp

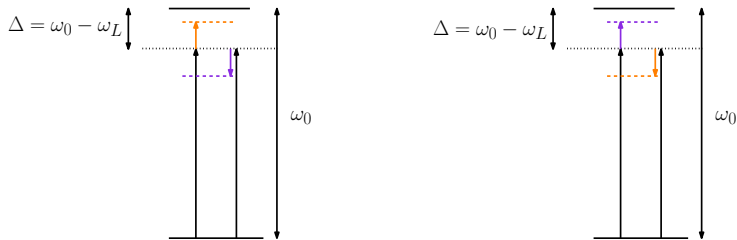
action mécanique de la lumière
sur les atomes



absorption = choc
= transfert d'impulsion

Refroidissement et piégeage laser

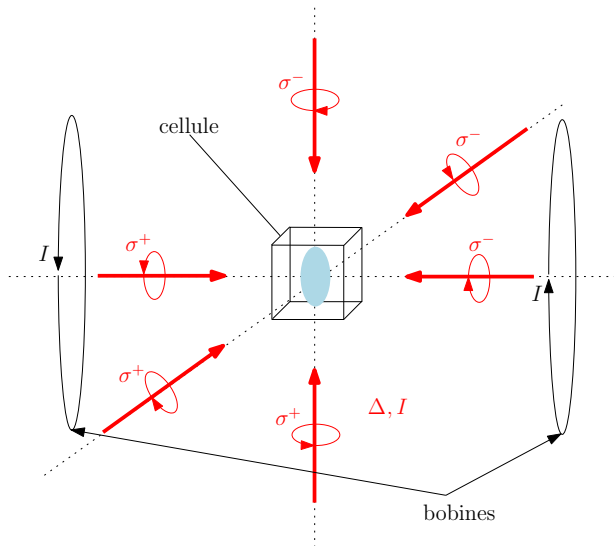
deux faisceaux lasers + effet Doppler



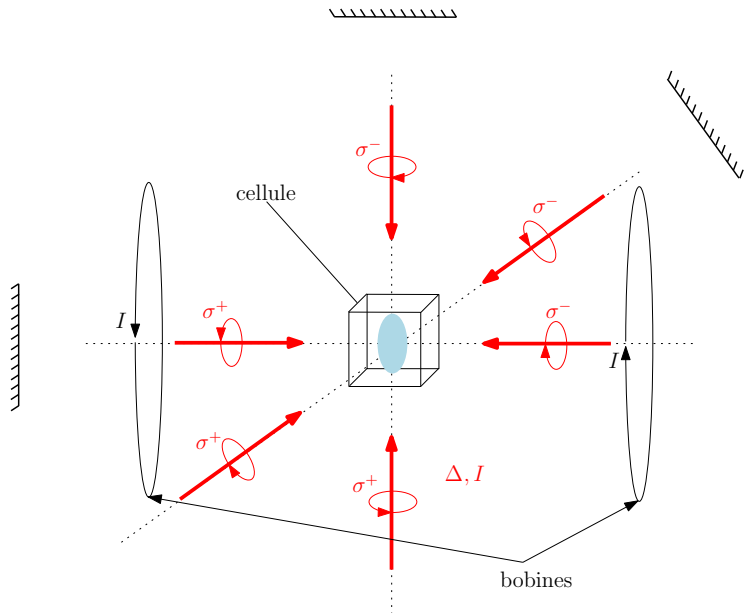
mélasse optique \longrightarrow force de friction

champ magnétique inhomogène \longrightarrow force de rappel
(raideur κ)

Piège magnéto-optique (PMO)

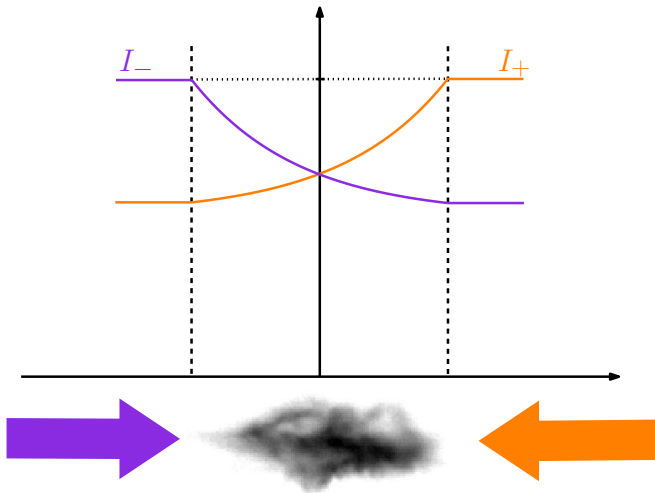


Piège magnéto-optique (PMO)

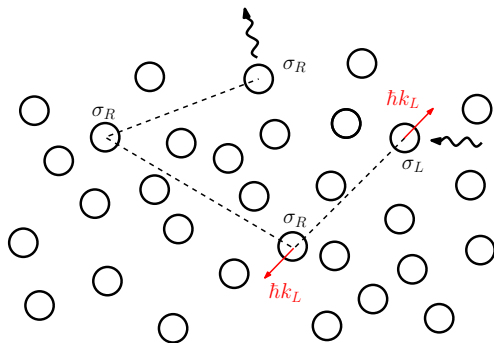


Effets collectifs

- ▶ effet d'ombre : absorption des photons lasers (section efficace σ_L)



- ▶ diffusion multiple : absorption des photons diffusés (section efficace σ_R)



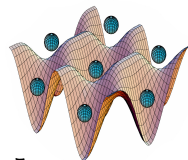
- ▶ force coulombienne : analogie avec les plasmas

- ▶ caractérisation
 - ▶ fluorescence (intensité et taille)
 - ▶ mesure de temps de vol \rightarrow température
- ▶ quelques chiffres
 - ▶ taille : \simeq mm
 - ▶ nombre d'atomes piégés : 10^8
 - ▶ température : $<$ mK

Que peut-on faire avec des atomes froids ?

atomes froids

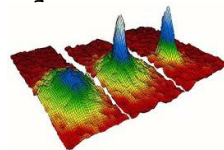
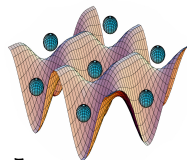
Que peut-on faire avec des atomes froids ?



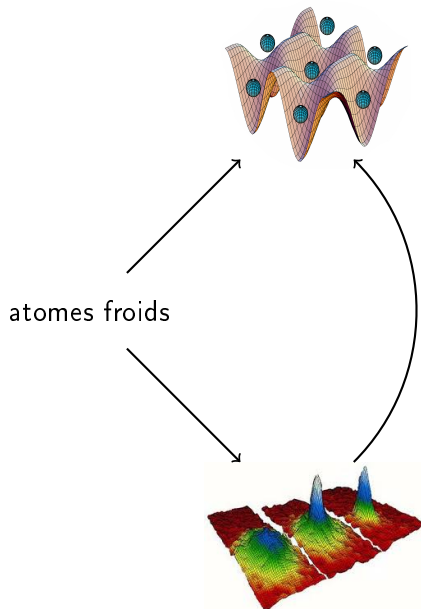
atomes froids

Que peut-on faire avec des atomes froids ?

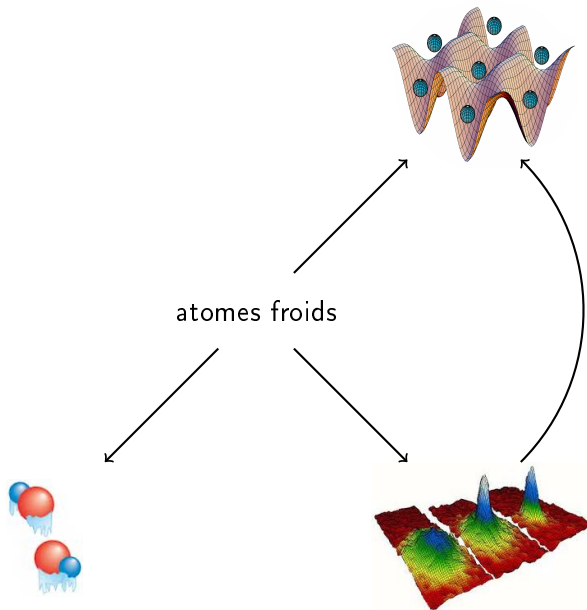
atomes froids



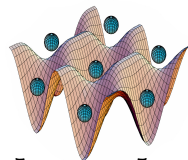
Que peut-on faire avec des atomes froids ?



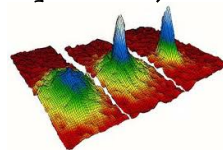
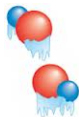
Que peut-on faire avec des atomes froids ?



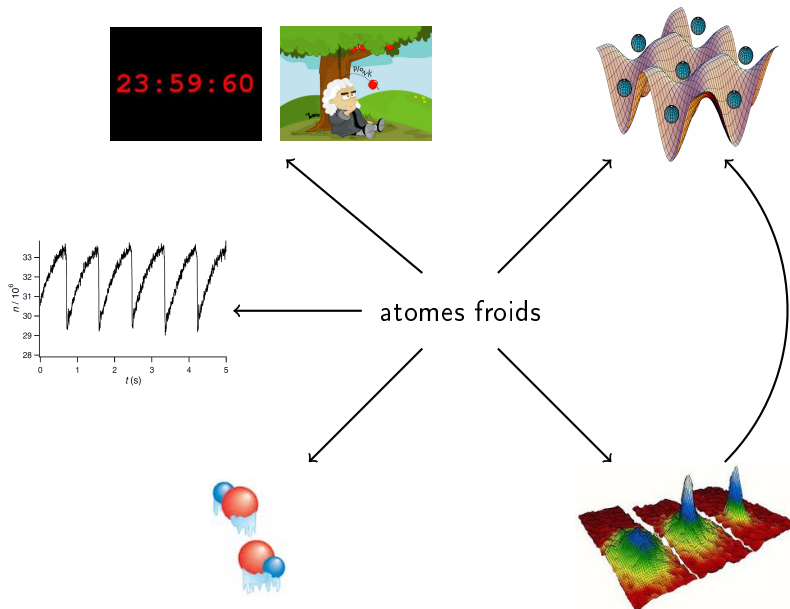
Que peut-on faire avec des atomes froids ?



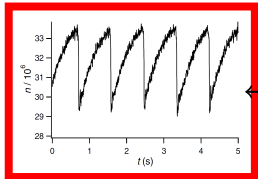
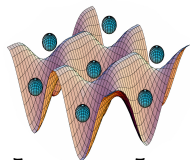
atomes froids



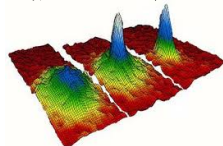
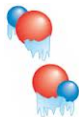
Que peut-on faire avec des atomes froids ?



Que peut-on faire avec des atomes froids ?



atomes froids



Les atomes froids

Des instabilités ?

- observations expérimentales
- modélisations théoriques

PMO anisotrope

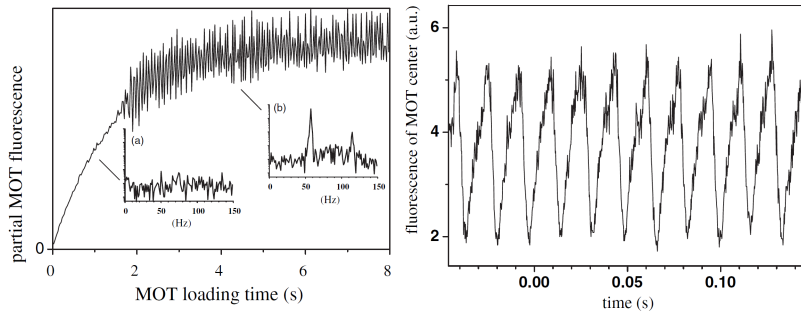
- principe
- modélisation
- mesures
- théorie/expérience

Dynamique spatio-temporelle

- modèle VFP et simulations
- étude expérimentale du régime d'instabilités stochastiques

Conclusions & Perspectives

Instabilités dans un PMO



piège symétrique → variable = nombre d'atomes N

G. Labeyrie et al., PRL 96, 023003 (2006)

- ▶ apparition d'instabilités sans modulation extérieure du système
- ▶ origine → effets collectifs

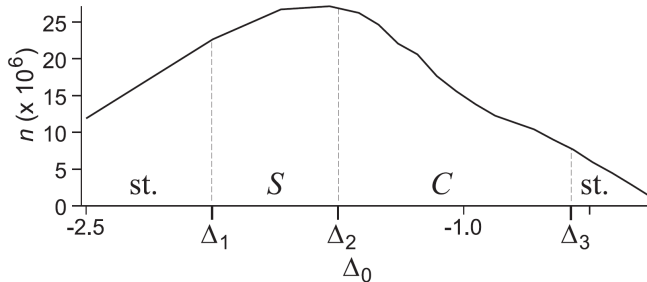
dynamique temporelle = comportement spatial global

- ▶ forte dépendance vis-à-vis des paramètres des lasers
- ▶ différents régimes d'instabilités

État de l'art : observations

dynamique temporelle = comportement spatial global

- ▶ forte dépendance vis-à-vis des paramètres des lasers
- ▶ différents régimes d'instabilités

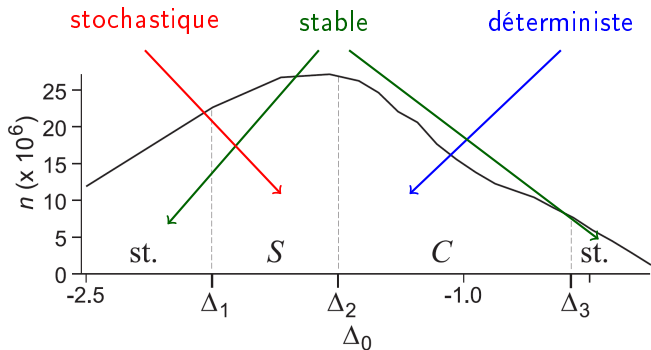


A. di Stefano et al., EPJD 30, 243-258 (2004)

État de l'art : observations

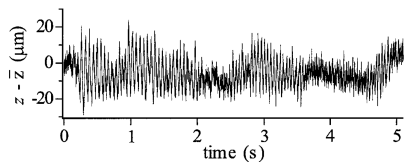
dynamique temporelle = comportement spatial global

- ▶ forte dépendance vis-à-vis des paramètres des lasers
- ▶ différents régimes d'instabilités



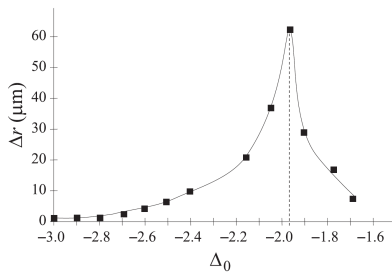
A. di Stefano et al., EPJD 30, 243-258 (2004)

régime stochastique

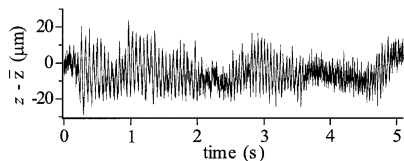


régime déterministe

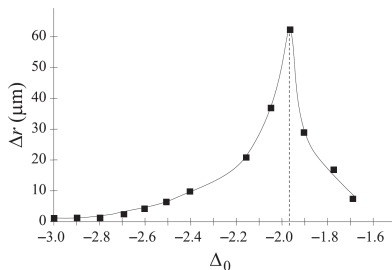
piège asymétrique \rightarrow variables =
 N + position nuage



régime stochastique

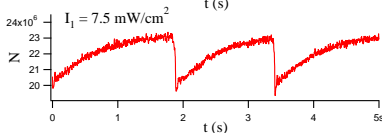
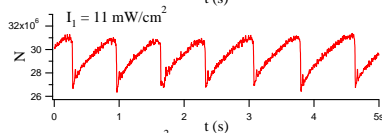
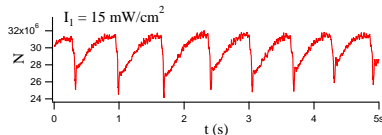


piège asymétrique \rightarrow variables =
 $N + \text{position nuage}$



D. Hennequin, EPJD 28,
135 (2004)

régime déterministe



thèse A. di Stefano,
Université de Lille1 (2005)

- ▶ effet d'ombre (nuage ponctuel) D. Hennequin, EPJD **28**, 135 (2004)
- ▶ effet d'ombre (nuage massif) A. di Stefano et al., PRA **67**, 033404 (2003)
- ▶ diffusion multiple G. Labeyrie et al., PRL **96**, 023003 (2006)
- ▶ piégeage non-linéaire T. Pohl et al., PRA **74**, 023409 (2006)
- ▶ modèle plasmas J.T. Mendonça et al., PRA **78**, 013408 (2008)

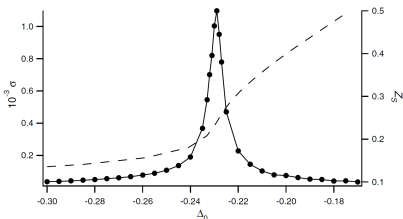
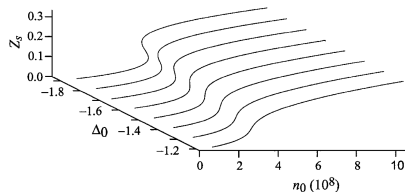
effet d'ombre global (nuage ponctuel) - piège asymétrique

▶ bistabilité

D. Wilkowski et al., PRL **85**, 1839 (2000)

▶ résonance stochastique

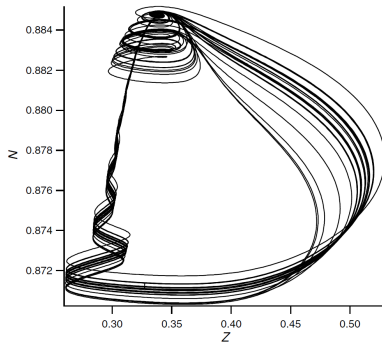
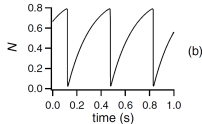
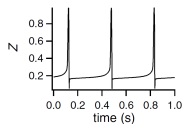
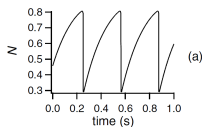
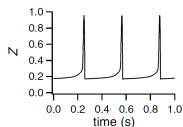
D. Hennequin, EPJD **28**, 135 (2004)



nuage massif - piège asymétrique

- ▶ instabilités cycliques
- ▶ trajectoire chaotique

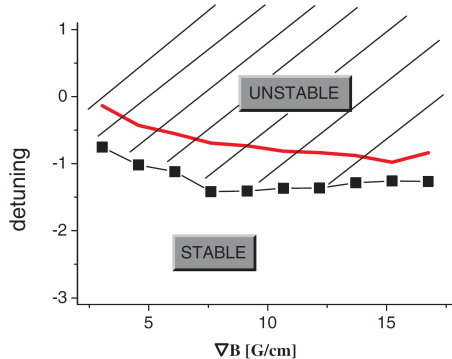
A. di Stefano et al., PRA **67**, 033404 (2003)



diffusion multiple - piège symétrique

► taille critique

G. Labeyrie et al., PRL **96**, 023003 (2006)

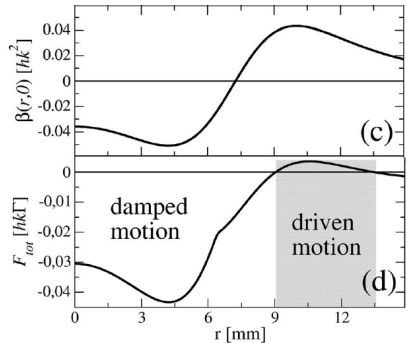
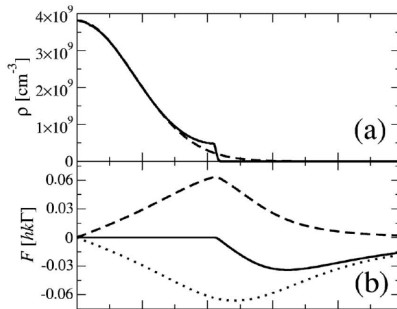


État de l'art : modélisations théoriques

piégeage non-linéaire - piège symétrique

► accélération des atomes

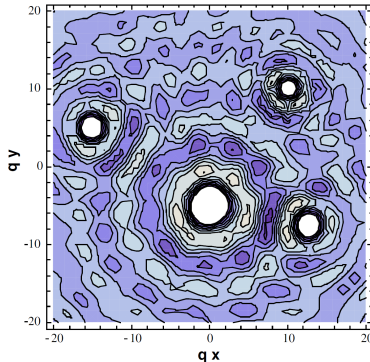
T. Pohl et al., PRA 74, 023409 (2006)



État de l'art : modélisations théoriques

modèles plus complets : approche physique des plasmas - piège symétrique

- ▶ ondes et oscillations de plasmas J.T. Mendonça et al., PRA **78**, 013408 (2008)
- ▶ couplage entre modes H. Terças et al., EPL **89**, 53001 (2010)
- ▶ “bulles de photons” J.T. Mendonça et al., PRL **109**, 033001 (2012)



Synthèse

- ▶ effet d'ombre global (nuage ponctuel)
- ▶ nuage massive
- ▶ diffusion multiple
- ▶ piégeage non-linéaire
- ▶ modèle plasmas

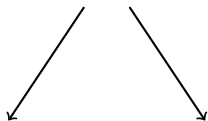
manque de cohérence entre les descriptions théoriques et les observations expérimentales

- ▶ théories partielles à 1D
- ▶ expériences à 3D

théorie 3D difficile à établir



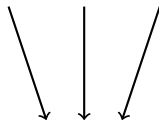
réduction des instabilités à 1D



tailles
caractéristiques

différenciation
des paramètres

multiples modèles

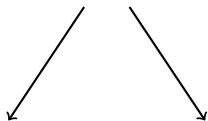


modèle unique
spatio-temporel à 1D

théorie 3D difficile à établir



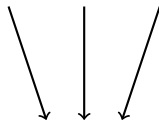
réduction des instabilités à 1D



tailles
caractéristiques

différenciation
des paramètres

multiples modèles



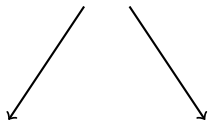
modèle unique
spatio-temporel à 1D

exemple :
instabilités de
Rayleigh - Bénard

théorie 3D difficile à établir



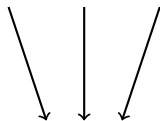
réduction des instabilités à 1D



tailles
caractéristiques

différenciation
des paramètres

multiples modèles



modèle unique
spatio-temporel à 1D

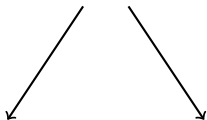
PMO
anisotrope



théorie 3D difficile à établir



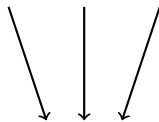
réduction des instabilités à 1D



tailles
caractéristiques

différenciation
des paramètres

multiples modèles



modèle unique
spatio-temporel à 1D



système de

Vlasov-
Fokker-Planck

Les atomes froids

Des instabilités ?

- observations expérimentales
- modélisations théoriques

PMO anisotrope

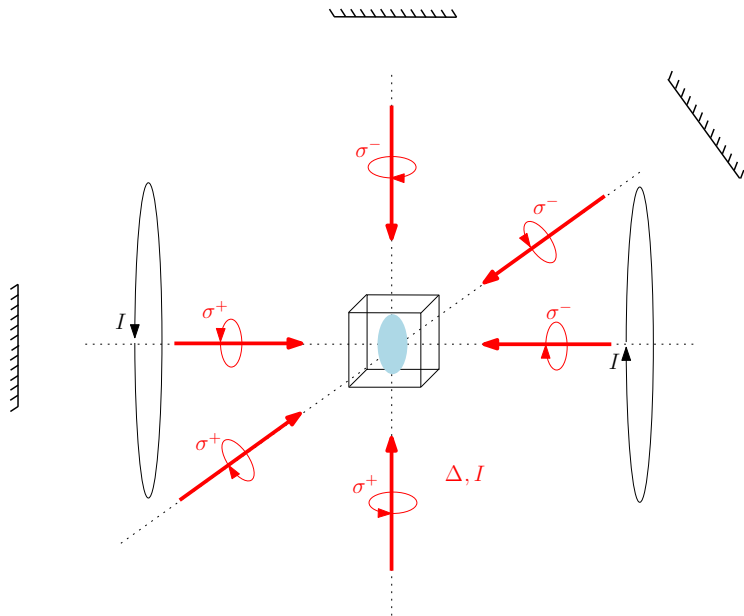
- principe
- modélisation
- mesures
- théorie/expérience

Dynamique spatio-temporelle

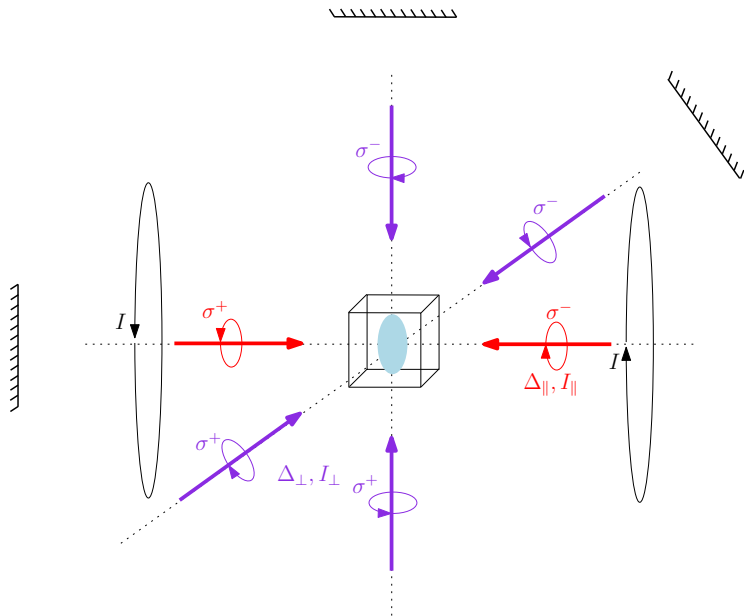
- modèle VFP et simulations
- étude expérimentale du régime d'instabilités stochastiques

Conclusions & Perspectives

Principe du PMO anisotrope



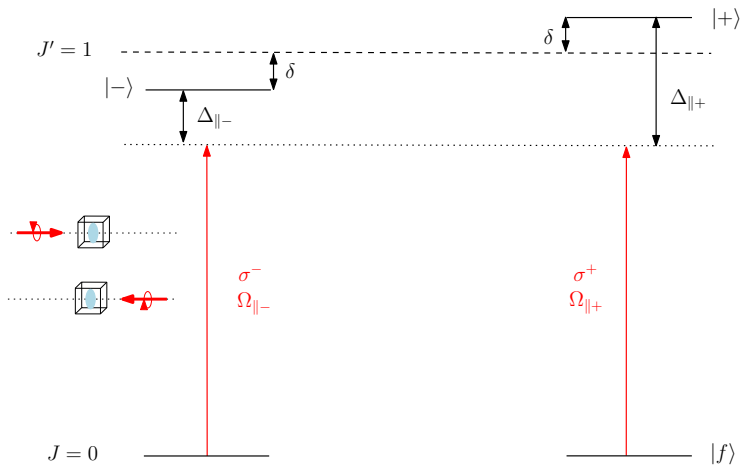
Principe du PMO anisotrope



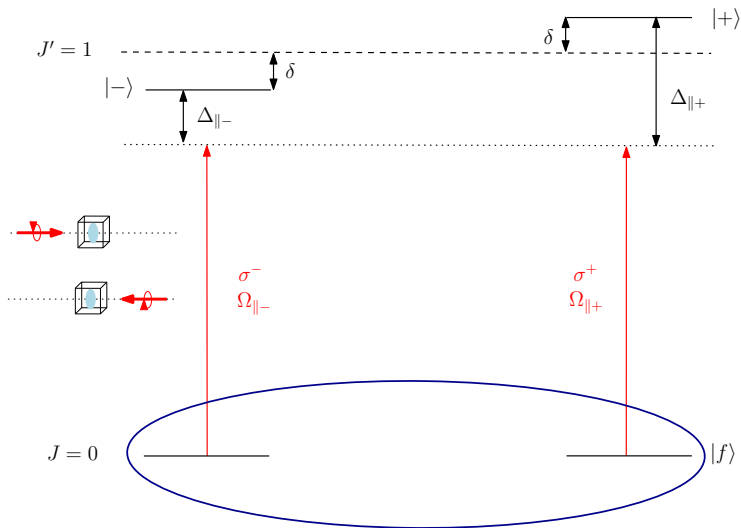
- ▶ description habituelle à un faisceau inadaptée
- ▶ modèle Doppler : conditions des instabilités
- ▶ problème très complexe : ondes intenses quasi-résonnantes de fréquence différente

R. Romain et al., EPJD 67, 211 (2013)

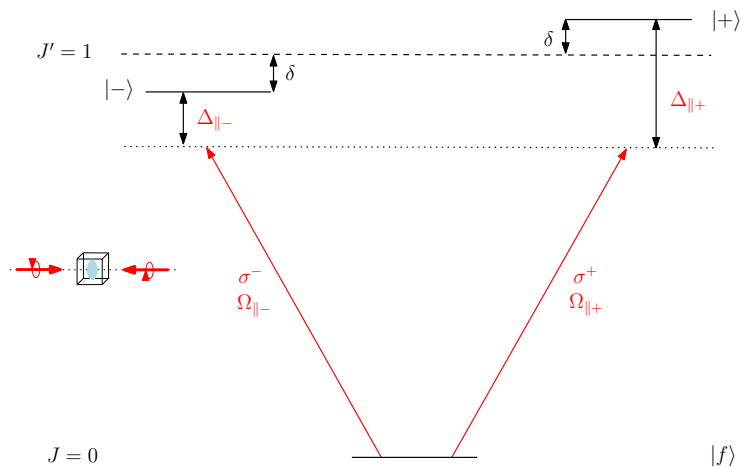
Interaction atome-lasers simplifiée



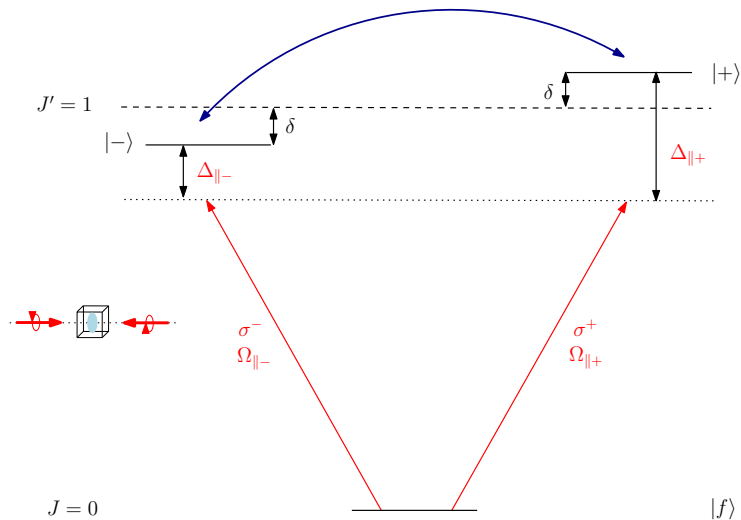
Interaction atome-lasers simplifiée



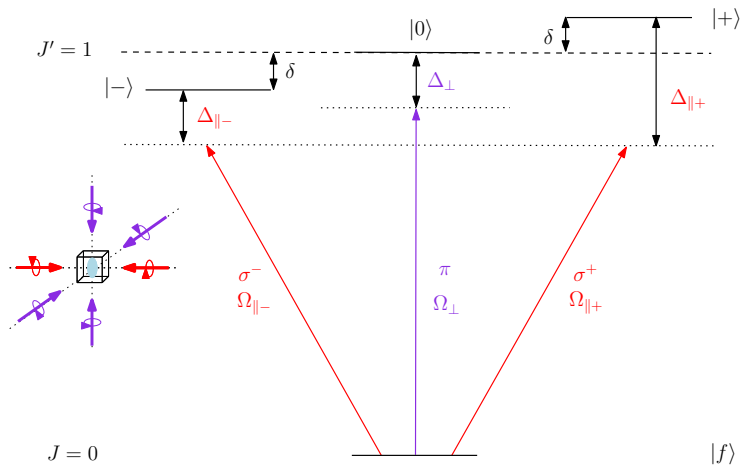
Interaction atome-lasers simplifiée



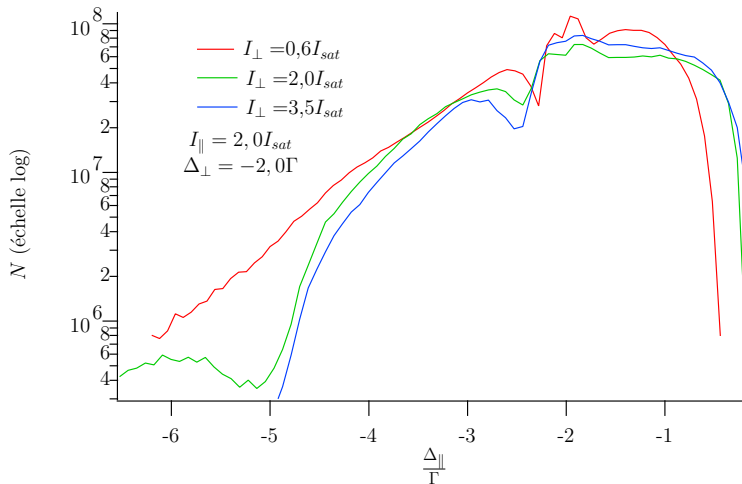
Interaction atome-lasers simplifiée



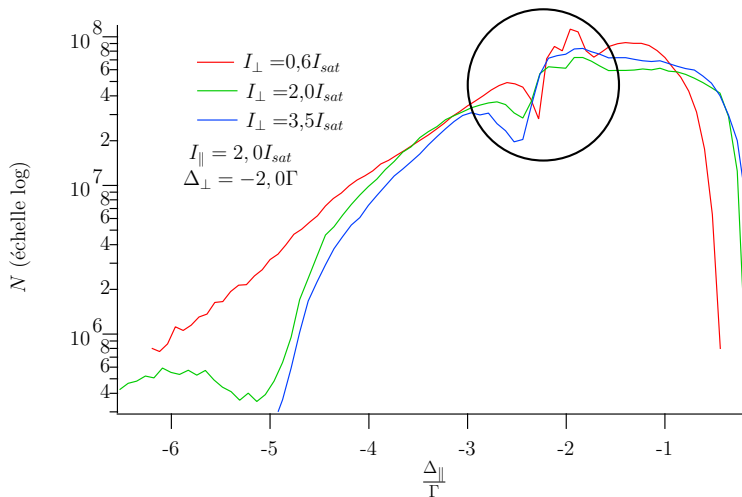
Interaction atome-lasers simplifiée



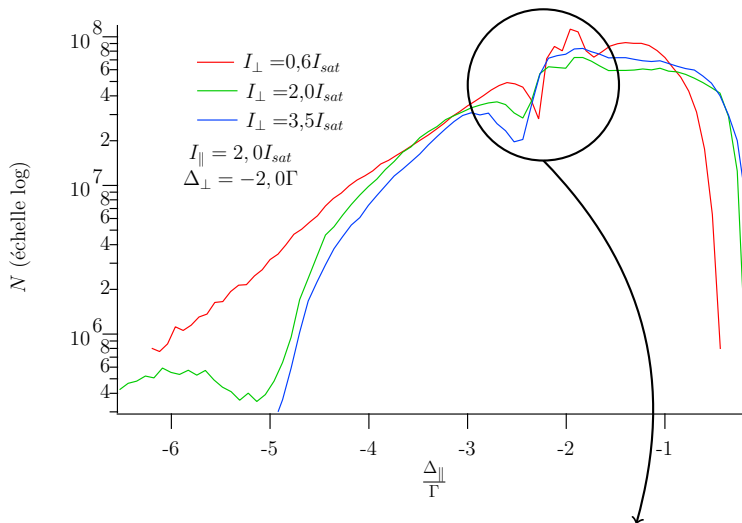
Évolution du nombre d'atomes



Évolution du nombre d'atomes

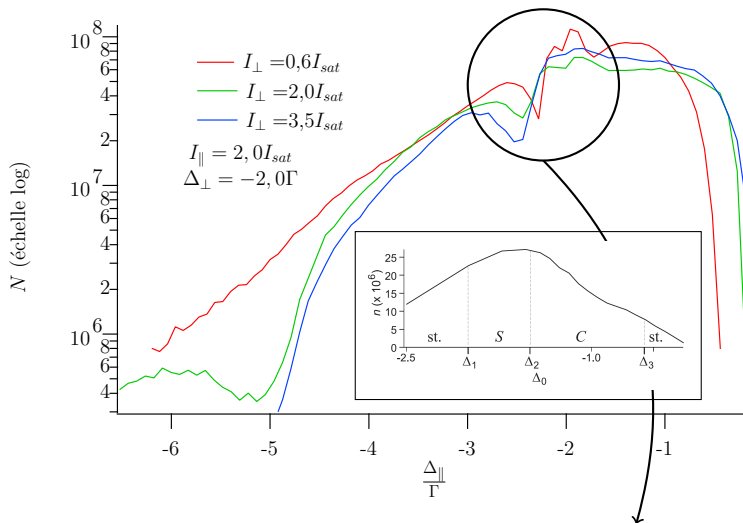


Évolution du nombre d'atomes



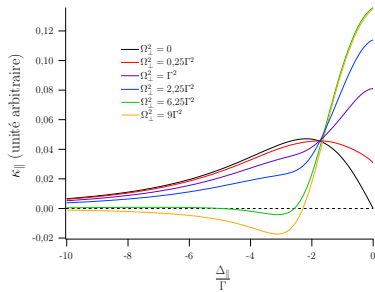
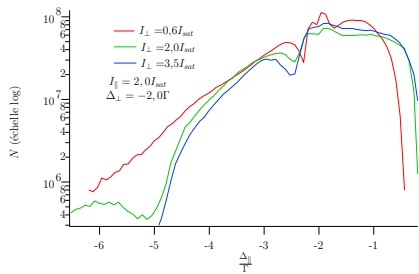
M. Heo et al., Phys. Rev. A **675**, 023409 (2007)

Évolution du nombre d'atomes



M. Heo et al., Phys. Rev. A **675**, 023409 (2007)

Évolution du nombre d'atomes

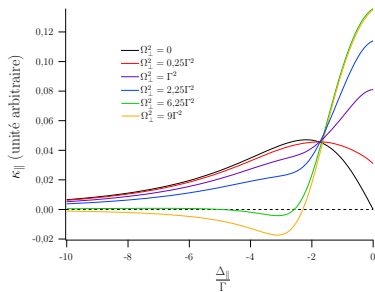
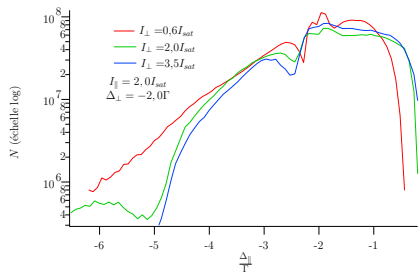


disparition à grands désaccords



effet de saturation croisée

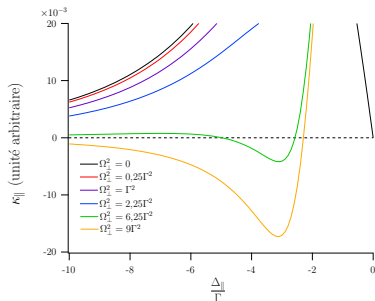
Évolution du nombre d'atomes



disparition à grands désaccords

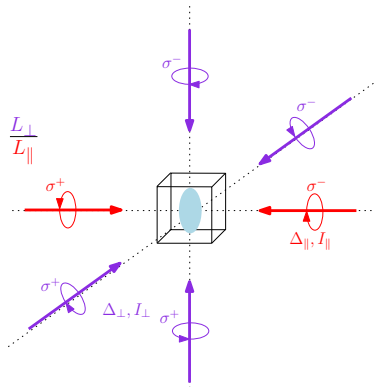


effet de saturation croisée

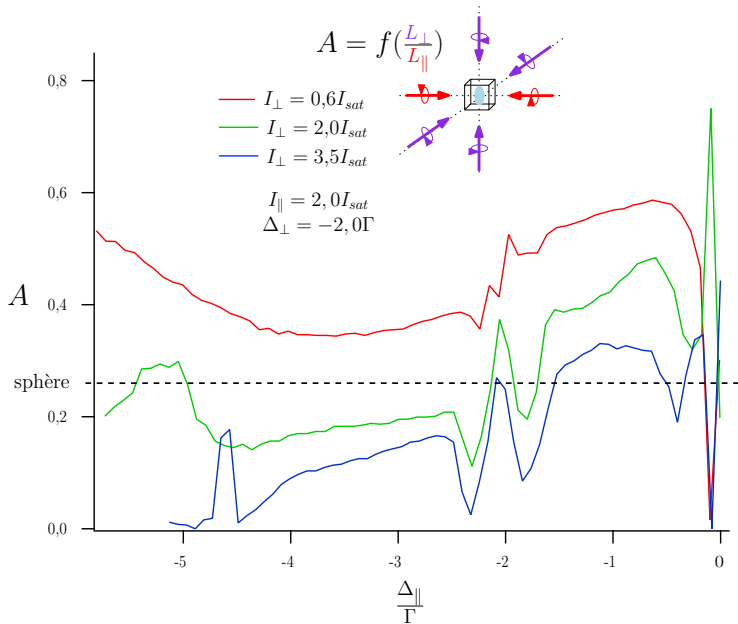


Évolution de l'ellipticité

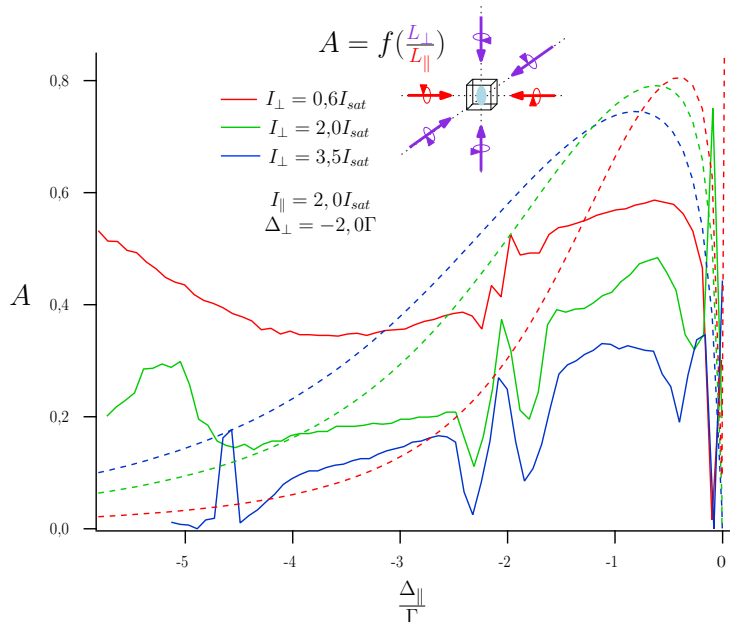
$$\text{ellipticité} = \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}}$$



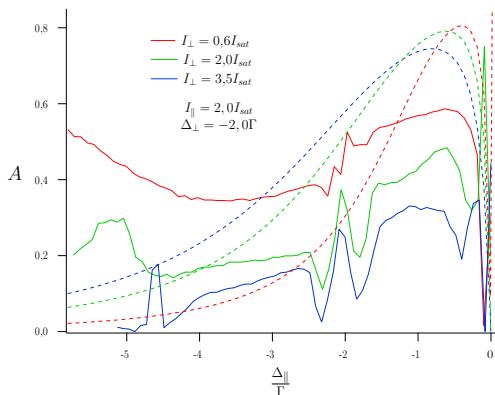
Évolution de l'ellipticité



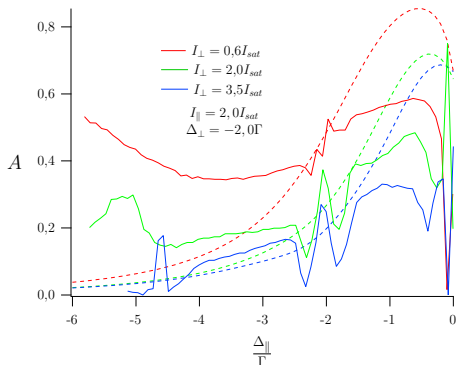
Évolution de l'ellipticité



Comparaison mesures-modèles



modèle "standard" à 1 faisceau



modèle anisotrope

bilan

- ▶ modèle standard défaillant
- ▶ modèle anisotrope non quantitatif

- ▶ effets inattendus et spectaculaires (résonance Raman, conditions de piégeage difficilement prévisibles)
- ▶ mise en évidence de couplages entre les directions du PMO
- ▶ meilleure compréhension des mécanismes du PMO (cf. mesure section efficace)



Le PMO anisotrope ne peut être utilisé pour étudier une dynamique 1D

Les atomes froids

Des instabilités ?

observations expérimentales
modélisations théoriques

PMO anisotrope

principe
modélisation
mesures
théorie/expérience

Dynamique spatio-temporelle

modèle VFP et simulations
étude expérimentale du régime d'instabilités stochastiques

Conclusions & Perspectives

"cahier des charges"

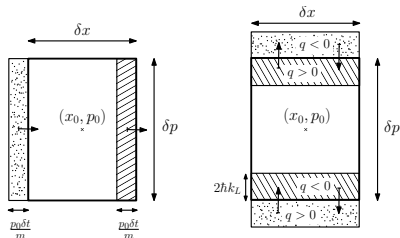
- ▶ dynamique
spatio-temporelle à 1D
- ▶ nombre d'approximations
minimal
- ▶ flexibilité du modèle
(configurations piège)

"cahier des charges"

- ▶ dynamique spatio-temporelle à 1D
- ▶ nombre d'approximations minimal
- ▶ flexibilité du modèle (configurations piège)

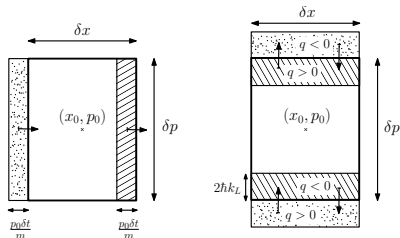
système

- ▶ dynamique dans l'espace des phases



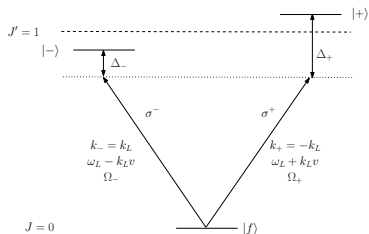
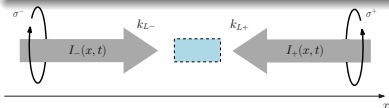
"cahier des charges"

- ▶ dynamique spatio-temporelle à 1D
- ▶ nombre d'approximations minimal
- ▶ flexibilité du modèle (configurations piège)



système

- ▶ dynamique dans l'espace des phases
- ▶ une paire de faisceaux lasers



Système de Vlasov-Fokker-Planck (VFP)

- ▶ dynamique des atomes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} \rho + \frac{\partial}{\partial p} (F \rho) - \frac{\partial^2}{\partial p^2} (D \rho) = \Lambda - \frac{\rho}{\tau}$$

- ▶ évolution des lasers :

$$\frac{\partial I_+}{\partial x} = +\hbar \omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp \rho(x, p, t) \gamma_+$$
$$\frac{\partial I_-}{\partial x} = -\hbar \omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp \rho(x, p, t) \gamma_-$$

Système de Vlasov-Fokker-Planck (VFP)

- ▶ dynamique des atomes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} \rho + \frac{\partial}{\partial p} (F \rho) - \frac{\partial^2}{\partial p^2} (D \rho) = \Lambda - \frac{\rho}{\tau}$$

Vlasov

- ▶ évolution des lasers :

$$\frac{\partial I_+}{\partial x} = +\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp \rho(x, p, t) \gamma_+$$
$$\frac{\partial I_-}{\partial x} = -\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp \rho(x, p, t) \gamma_-$$

Système de Vlasov-Fokker-Planck (VFP)

- ▶ dynamique des atomes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} \rho + \frac{\partial}{\partial p} (F \rho) - \frac{\partial^2}{\partial p^2} (D \rho) = \Lambda - \frac{\rho}{\tau}$$

Vlasov Fokker-Planck

- ▶ évolution des lasers :

$$\frac{\partial I_+}{\partial x} = +\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp \rho(x, p, t) \gamma_+$$
$$\frac{\partial I_-}{\partial x} = -\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp \rho(x, p, t) \gamma_-$$

Système de Vlasov-Fokker-Planck (VFP)

- ▶ dynamique des atomes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} \rho + \frac{\partial}{\partial p} (F \rho) - \frac{\partial^2}{\partial p^2} (D \rho) = \Lambda - \frac{\rho}{\tau}$$

Vlasov Fokker-Planck atomes chauds

- ▶ évolution des lasers :

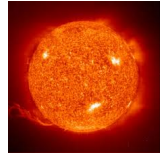
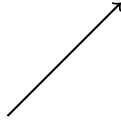
$$\frac{\partial I_+}{\partial x} = +\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp \rho(x, p, t) \gamma_+$$
$$\frac{\partial I_-}{\partial x} = -\hbar\omega_L \int_{-\infty}^{+\infty} dp \rho(x, p, t) \gamma_-$$

VFP, une grande famille de systèmes

VFP

VFP, une grande famille de systèmes

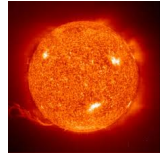
VFP



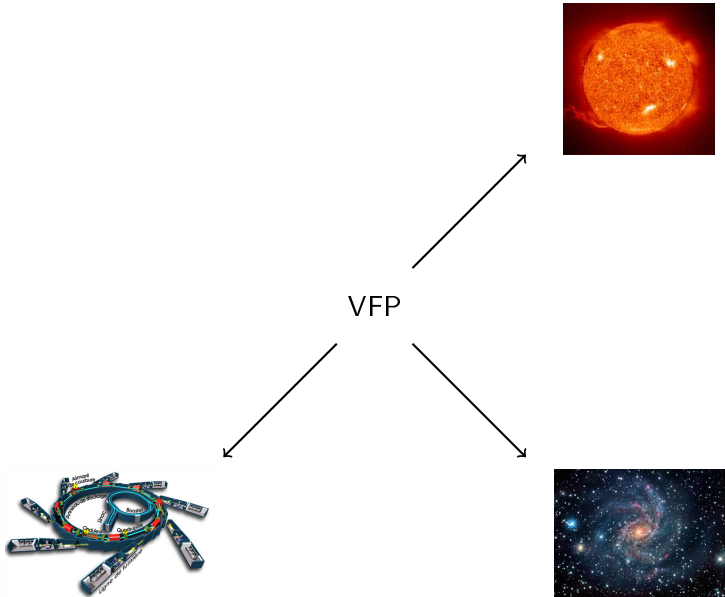
VFP, une grande famille de systèmes



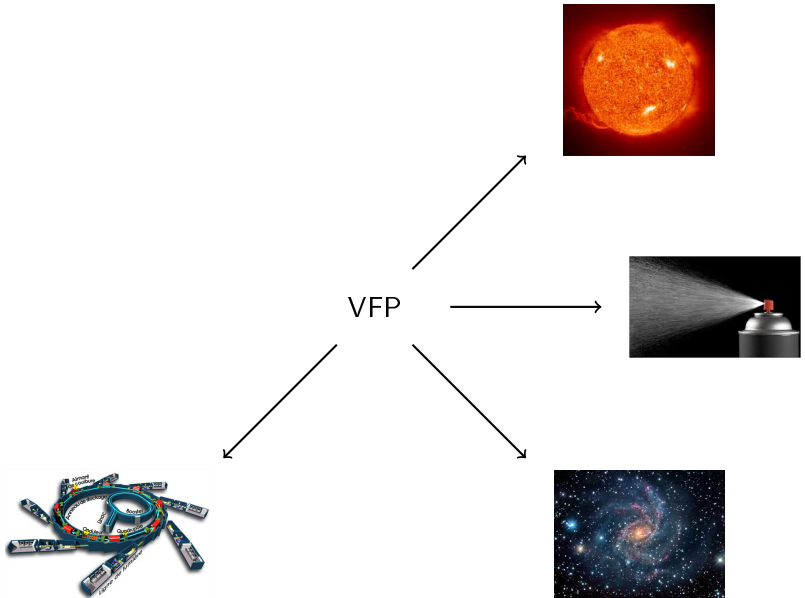
VFP



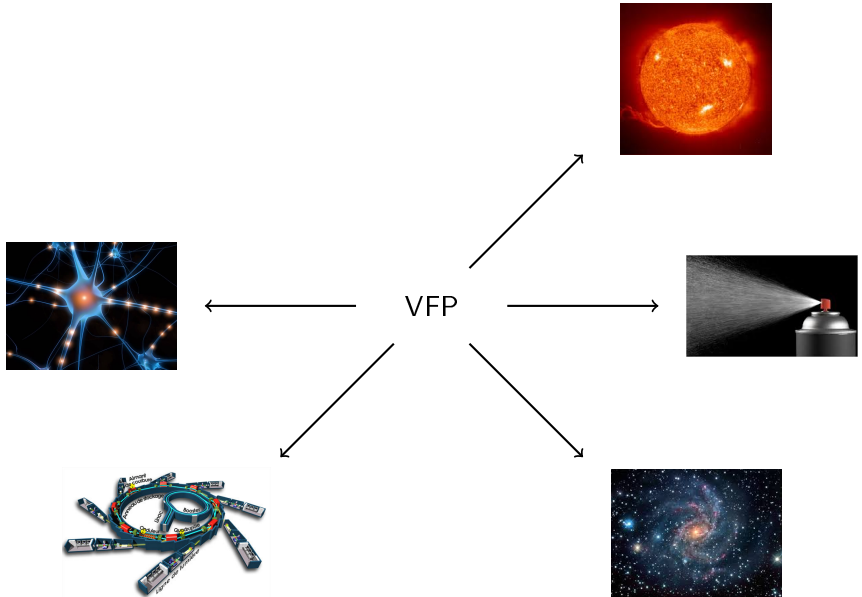
VFP, une grande famille de systèmes



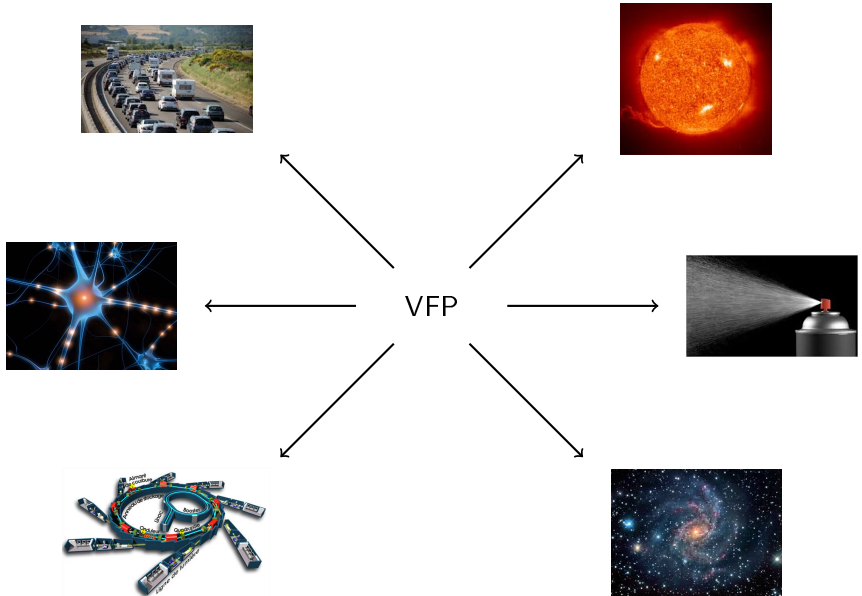
VFP, une grande famille de systèmes



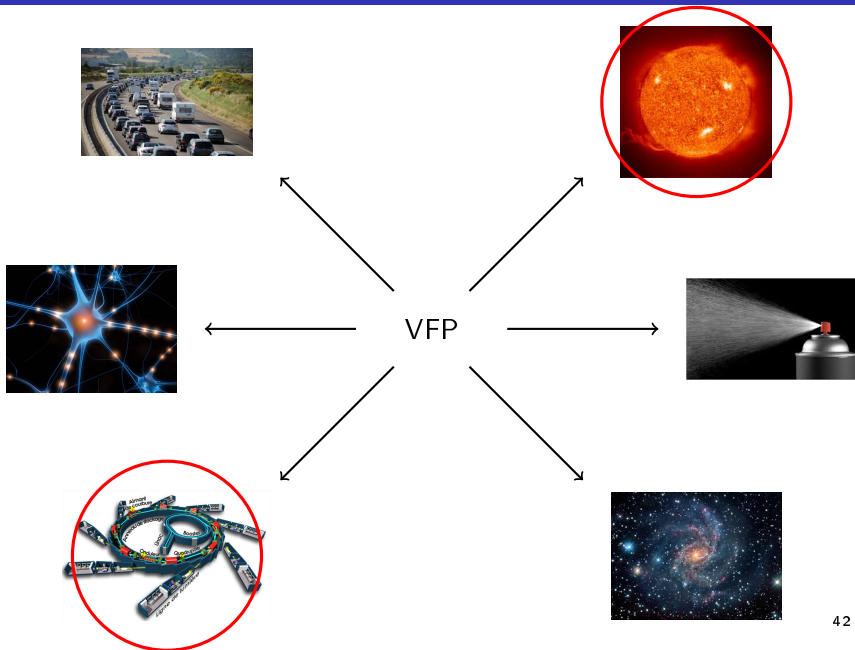
VFP, une grande famille de systèmes



VFP, une grande famille de systèmes



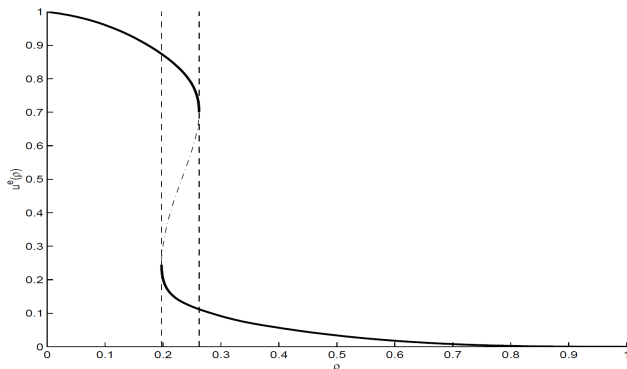
VFP, une grande famille de systèmes



1ère analogie : le trafic routier

$$\text{atomes froids : } \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} \rho + \frac{\partial}{\partial p} (F\rho) - \frac{\partial^2}{\partial p^2} (D\rho) = \Lambda - \frac{\rho}{\tau}$$

$$\partial_t f_i + v \partial_x f_i + \partial_v (B[f_i] f_i - D[f_i] \partial_v f_i) = p_k [f_k] f_k - p_i [f_i] f_i$$



R. Illner et al., Commun. Math. Sci. 1, 1-12 (2003)

spécificités des modèles

- ▶ origine physique des éq. couplées (absorption, champ électromagnétique, irritabilité de l'automobiliste, ...)
- ▶ poids relatif des termes
- ▶ système ouvert/fermé

spécificités des modèles

- ▶ facilité d'obtention
- ▶ contrôle
- ▶ caractérisation
 - ▶ répartition spatio-temporelle de la densité
 - ▶ temps de vol
- ▶ flexibilité
 - ▶ système ouvert/fermé
 - ▶ grandes gammes de paramètres

Une autre analogie : électrons piégés

- ▶ électrons stockés

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} + p \frac{\partial f}{\partial q} - (q + l F(q, f)) \frac{\partial f}{\partial p} = 2\beta \frac{\partial}{\partial p} \left(pf + \frac{\partial f}{\partial p} \right)$$

R. Warnock et al., SLAC-PUB-8404 (2000)

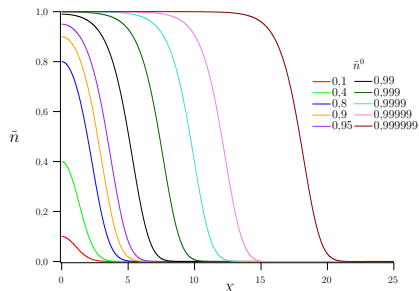
- ▶ atomes froids
 - ▶ système fermé
 - ▶ absorption linéaire

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \theta} + P \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial X} - \left[X - a (\hat{l}_+ - \hat{l}_-) \right] \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial P} = 2b \frac{\partial}{\partial P} \left(P \hat{\rho} + (1 + c) \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial P} \right)$$

	$l \simeq 0,3$		$a \simeq 20$
typiquement :			$b \simeq 1$
	$\beta \simeq 10^{-3}$		$c \simeq 1$

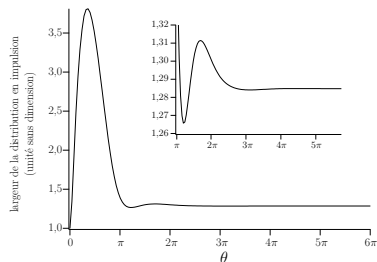
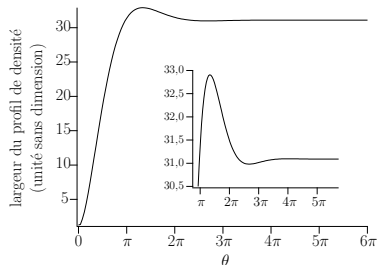
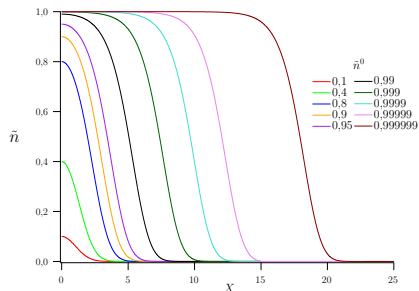
Simulations numériques

- ▶ résultats connus retrouvés en régime stationnaire
- ▶ dynamique triviale



Simulations numériques

- ▶ résultats connus retrouvés en régime stationnaire
- ▶ dynamique triviale



- ▶ équation de Vlasov-Fokker-Planck
- ▶ système modèle
- ▶ complexifier le modèle pour étudier la dynamique

Les atomes froids

Des instabilités ?

observations expérimentales

modélisations théoriques

PMO anisotrope

principe

modélisation

mesures

théorie/expérience

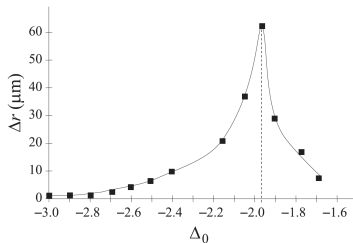
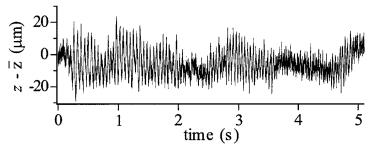
Dynamique spatio-temporelle

modèle VFP et simulations

étude expérimentale du régime d'instabilités stochastiques

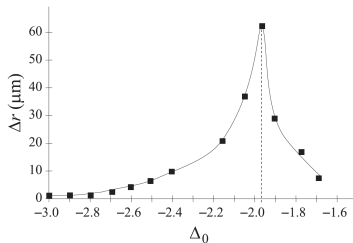
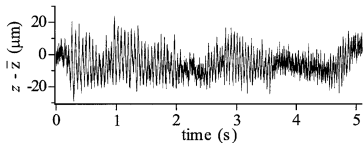
Conclusions & Perspectives

Instabilités stochastiques dans un PMO asymétrique



D. Hennequin, EPJD 28, 135 (2004)

Instabilités stochastiques dans un PMO asymétrique

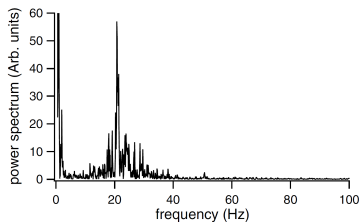
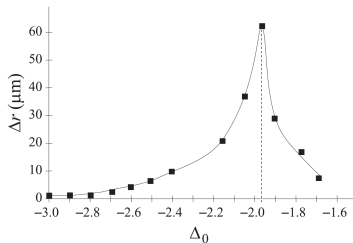
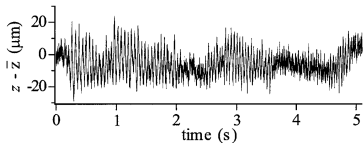


temporel \longrightarrow spatio-temporel

photodiode \longrightarrow caméra

D. Hennequin, EPJD 28, 135 (2004)

Instabilités stochastiques dans un PMO asymétrique

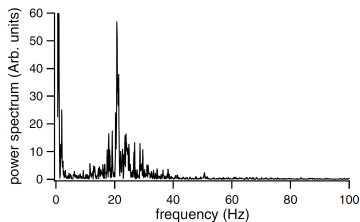
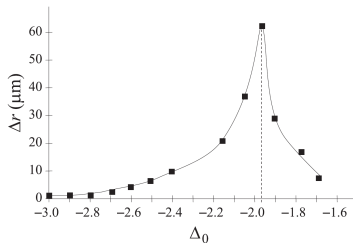
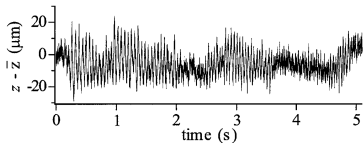


temporel \longrightarrow spatio-temporel

photodiode \longrightarrow caméra

D. Hennequin, EPJD 28, 135 (2004)

Instabilités stochastiques dans un PMO asymétrique

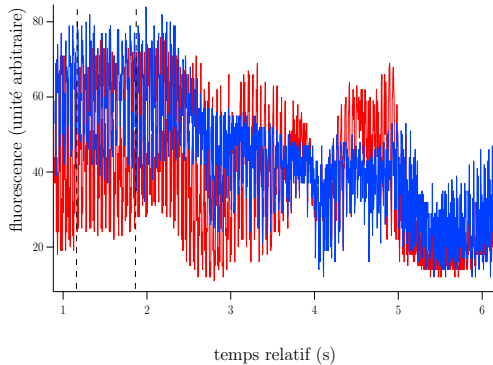
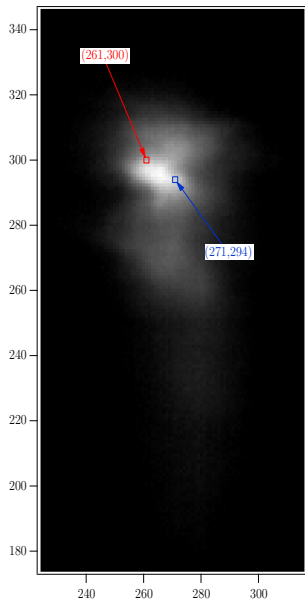


temporel \longrightarrow spatio-temporel

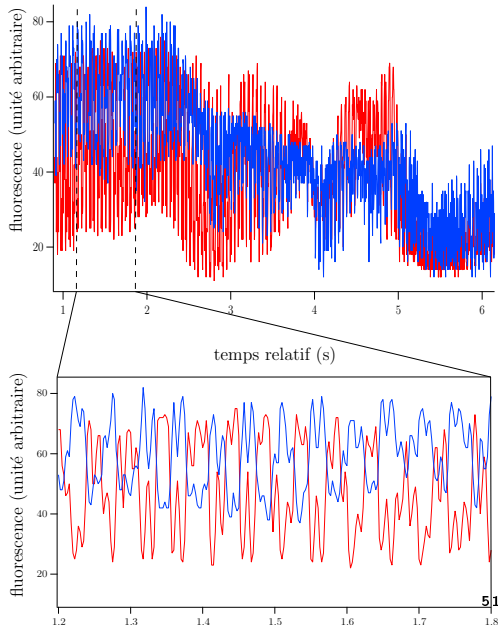
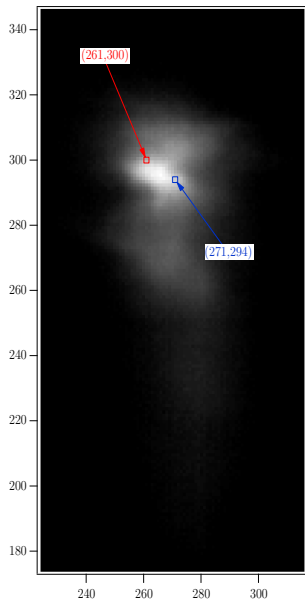
photodiode \longrightarrow caméra
rapide

D. Hennequin, EPJD 28, 135 (2004)

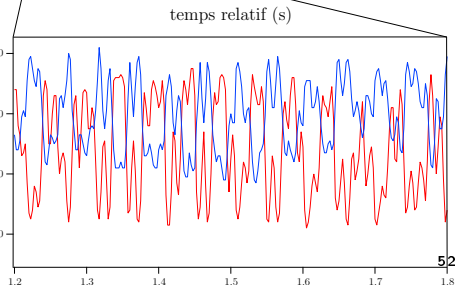
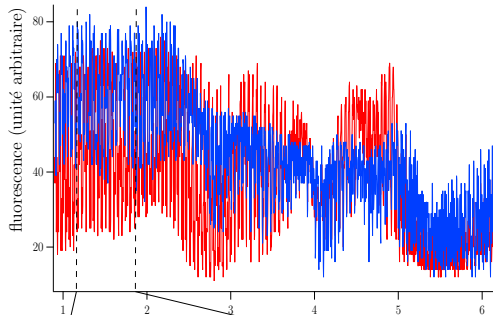
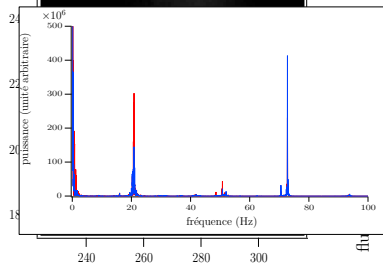
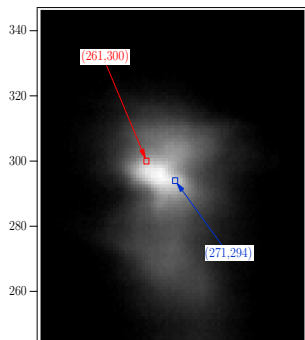
Analyse des images

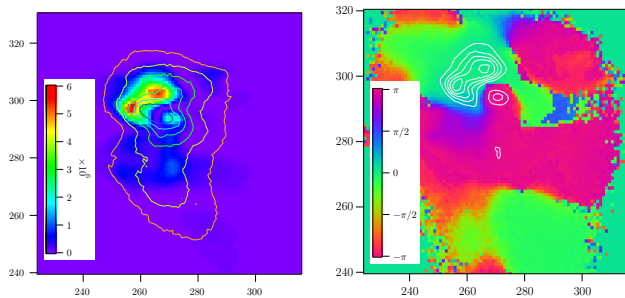


Analyse des images



Analyse des images

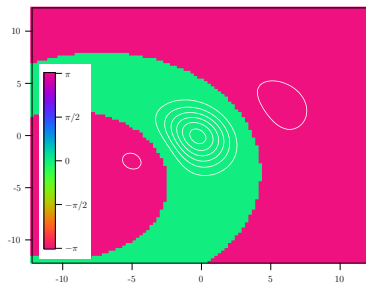
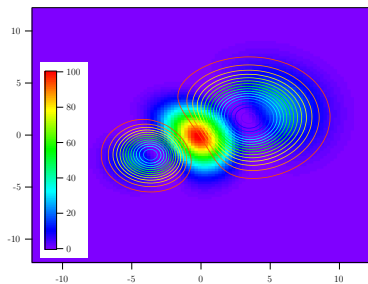
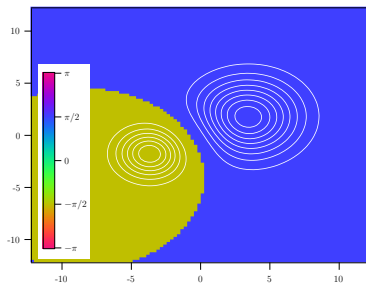
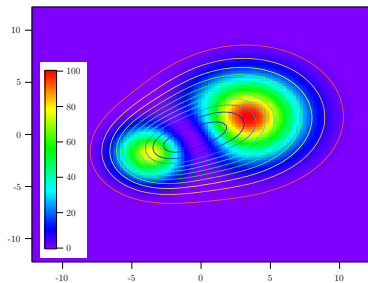




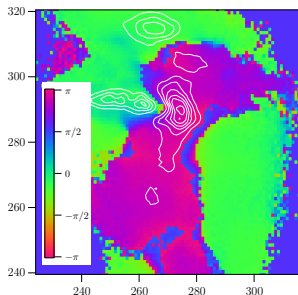
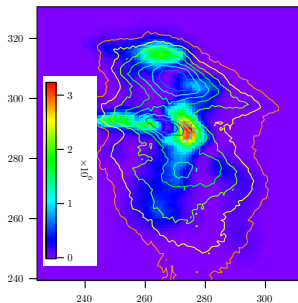
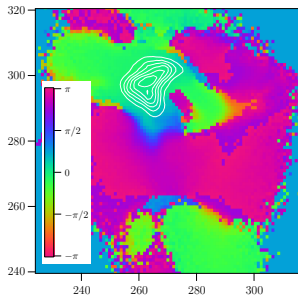
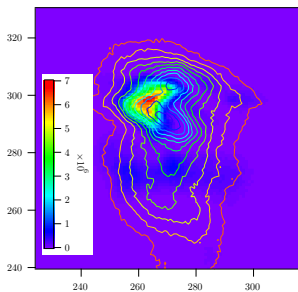
composante à $\simeq 20$ Hz

fluorescence et lobes d'instabilités

Modélisation = translation + dilatation



Répartition des instabilités



- ▶ première observation d'une dynamique spatiale
- ▶ structure complexe des instabilités
- ▶ mouvements d'oscillations de fragments de nuage

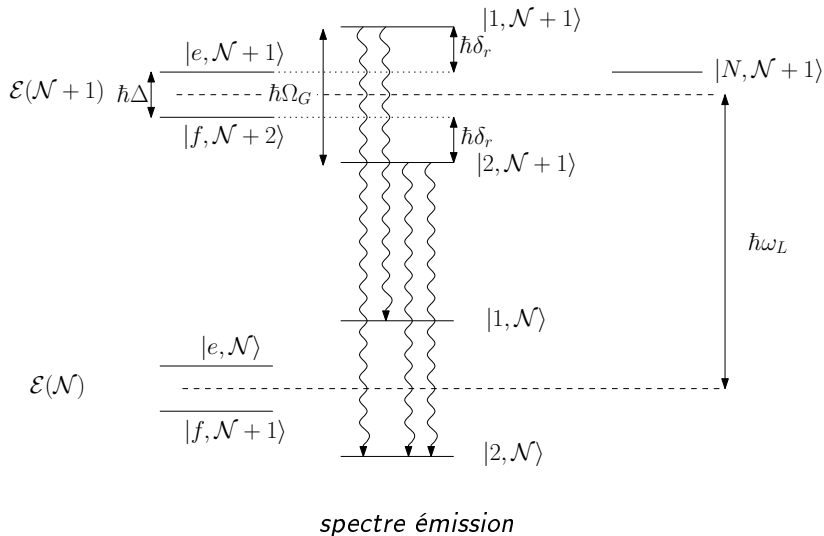
- ▶ PMO anisotrope
 - ▶ preuves et modélisation approchée des forts couplages entre les directions du piège
 - ▶ peu de chances de pouvoir réaliser des instabilités 1D
 - ▶ méthode de mesure du coefficient de diffusion multiple σ_R
- ▶ dynamique des atomes froids
 - ▶ modèle général semblable à ceux décrivant des systèmes très variés
 - ▶ résultats numériques préliminaires dans un cas simplifié
 - ▶ 1ère analyse spatio-temporelle du nuage : observation d'une structuration spatiale complexe

- ▶ axe théorique
 - ▶ **réintroduire les ingrédients non contenus dans le modèle simplifié (absorption, gaz chaud, rôle de l'asymétrie) dans le but de poursuivre les simulations numériques**
 - ▶ identifier des tailles caractéristiques du système
 - ▶ écriture d'un modèle 3D
- ▶ axe expérimental
 - ▶ **poursuivre la caractérisation du régime d'instabilités stochastiques (grandeurs caractéristiques, influence des paramètres, mouvement à 3D)**
 - ▶ **étude du régime d'instabilités déterministes**
 - ▶ revenir à des instabilités 1D

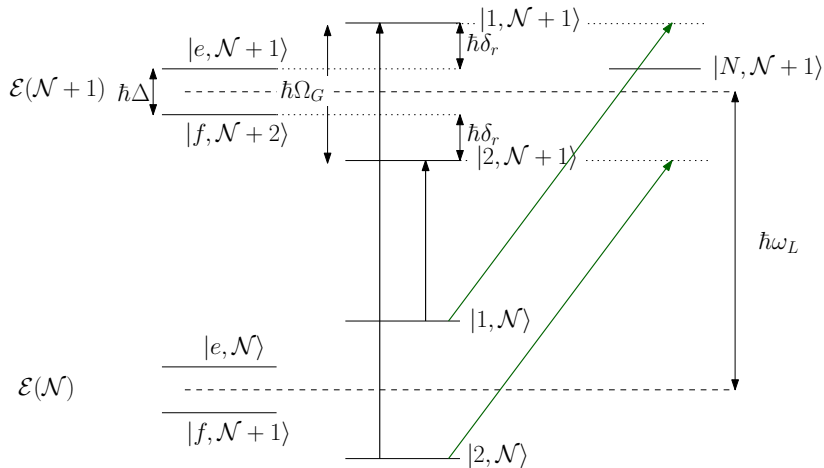


Merci de votre attention

Calcul section efficace de réabsorption

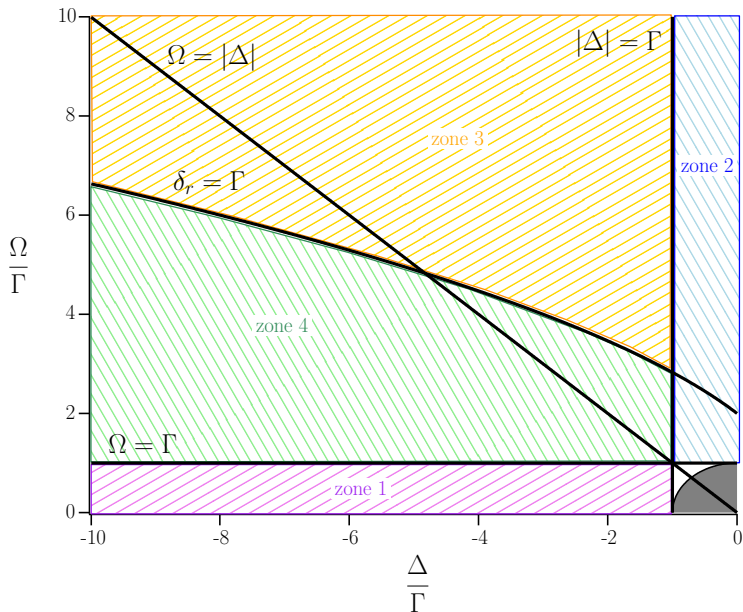


Calcul section efficace de réabsorption



spectre absorption

Calcul section efficace de réabsorption



Calcul section efficace de réabsorption

	$ \Delta , \Omega \gg \Gamma$		méthode
	$\Omega \gg \Delta $	$ \Delta \gg \Omega$	
[1]	1	2	<i>calcul phénoménologique approché atome à 2 niveaux</i>
[2]	$\frac{\Delta^2}{2\Gamma^2}$	$\frac{3\Omega^2}{\Gamma^2}$	<i>expression ajustée / atome habillé atome à 2 niveaux</i>
[3]	$\frac{\Delta^2}{3\Gamma^2}$	$\frac{\Omega^2}{2\Gamma^2}$	<i>expression analytique / atome habillé atome à 2 niveaux</i>
[4]	$\frac{\Delta^2}{6\Gamma^2}$	$\frac{\Omega^2}{2\Gamma^2}$	<i>expression analytique / atome habillé atome à 3 niveaux</i>

[1] *A. M. Steane, JOSA B* **9**, 2142 (1992)

[2] *C. G. Townsend, PRA* **52**, 1423 (1995)

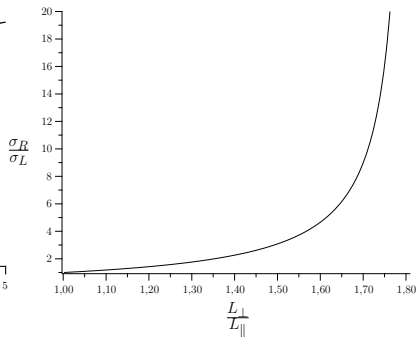
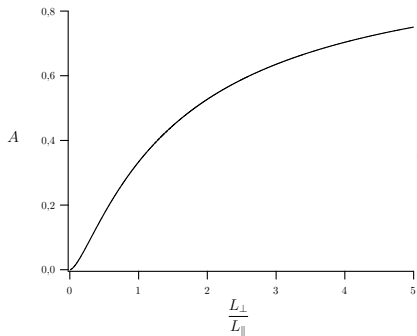
[3] *L. Pruvost, PRA* **61**, 053408 (2000)

[4] *R. Romain, EPJD* **61**, 171 (2011)

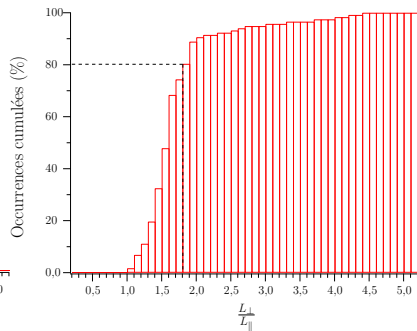
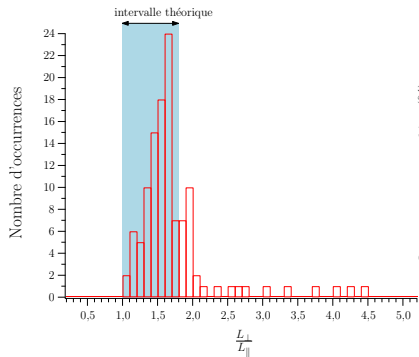
Mesure section efficace de réabsorption

$$A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_L}{3\sigma_R} \right)$$

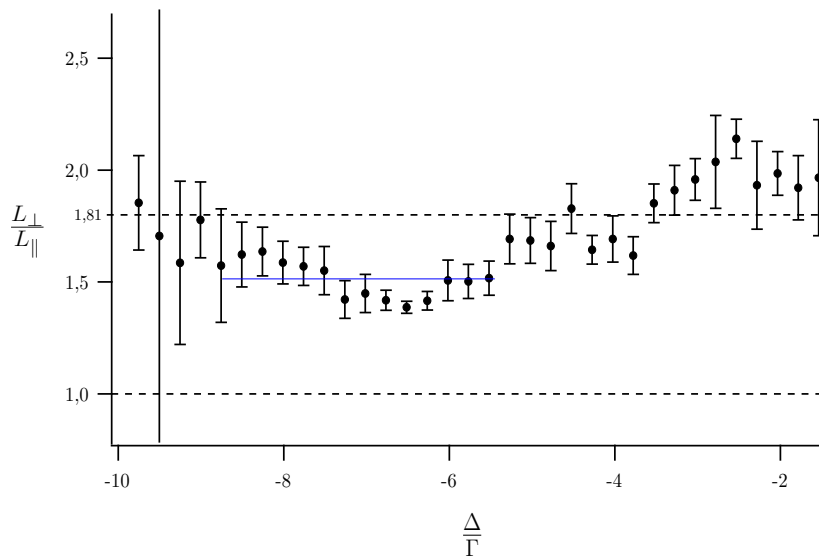
$$1 < \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}} < 1,81$$



Mesure ellipticité



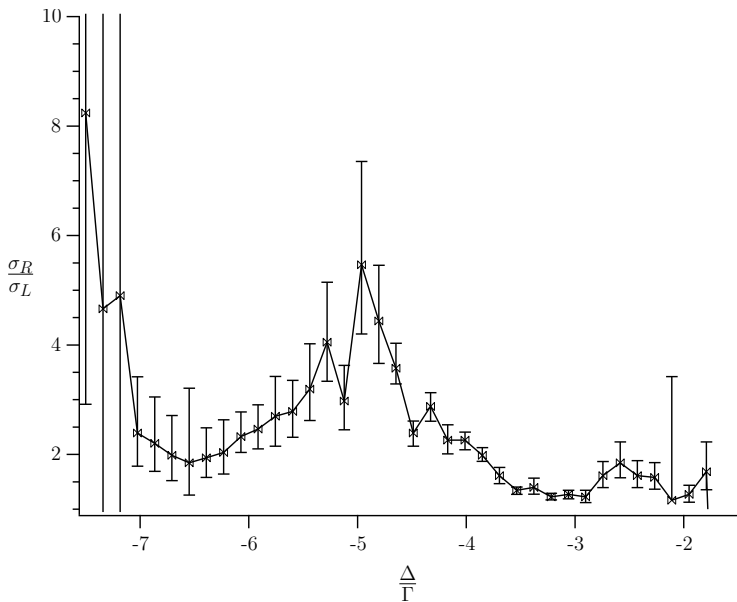
Mesure section efficace de réabsorption



Mesure section efficace de réabsorption

$\frac{\Omega^2}{\Gamma^2}$	4,5	7,0	9,4
intervalle Δ	$[-7,0\Gamma, -5,6\Gamma]$	$[-8,8\Gamma, -5,5\Gamma]$	$[-9,2\Gamma, -5,5\Gamma]$
$\frac{L_{\perp}}{L_{\parallel \text{ expé}}}$	$1,39 \pm 0,05$	$1,51 \pm 0,08$	$1,61 \pm 0,09$
$S_{\text{expé}}$	$2,2^{+0,3}_{-0,3}$	$3,2^{+1,2}_{-0,7}$	$4,9^{+4,1}_{-1,6}$
$S_{\text{théo}}$	2,3	3,5	4,7

Mesure section efficace de réabsorption



Measure section efficace de réabsorption

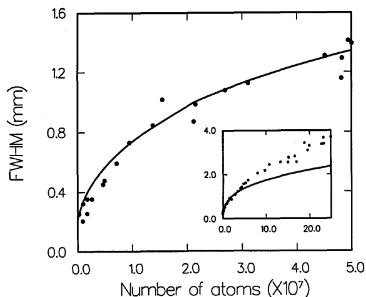


Fig. 11. Plot of the diameter (FWHM) of the cloud of atoms as a function of the number of atoms in the cloud (circles). For the main figure the magnetic field gradient is 9 G/cm, and for the inset it is 16.5 G/cm. The laser detuning is $-1.5\Delta_N$, and the total laser intensity is 12 mW/cm^2 . The solid curves show the predictions of the mode that are described in the text.

$$K \equiv (\sigma_R - \sigma_L)\sigma_L I/c$$

$$\frac{1}{n(t)} = \frac{1}{n_0} + \frac{K}{\alpha} t$$

D. W. Sesko, JOSA B **8**, 946 (1991) *L. Pruvost, PRA* **61**, 053408 (2000)