



HAL
open science

Intersections maximales de quadriques réelles

Arnaud Tomasini

► **To cite this version:**

Arnaud Tomasini. Intersections maximales de quadriques réelles. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Strasbourg, 2014. Français. NNT : 2014STRAD035 . tel-01076980v2

HAL Id: tel-01076980

<https://theses.hal.science/tel-01076980v2>

Submitted on 12 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE ED269

Institut de Recherche Mathématique Avancée

THÈSE présentée par :

Arnaud TOMASINI

soutenue le : 10 novembre 2014

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : MATHÉMATIQUES

**Intersections maximales de
quadriques réelles**

THÈSE dirigée par :

KHARLAMOV Viatcheslav

Professeur, Université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

FINASHIN Sergey

Professeur, Middle East Technical University

MANGOLTE Frédéric

Professeur, LAREMA

AUTRES MEMBRES DU JURY :

ITENBERG Iliia

Professeur, Université Pierre et Marie Curie

PACIENZA Gianluca

Maître de conférences HDR, Université de Strasbourg

À la mémoire de ma maman.

Remerciements

Un mur ne se fait pas avec une seule pierre.

C'est avec cet état d'esprit que je souhaite remercier toutes les personnes qui m'ont accompagné de près ou de loin au cours de mes quatre années de thèse. Pour commencer, j'aimerais remercier mon directeur de thèse, Slava Kharlamov, qui a encadré mon travail durant ces quatre années en faisant preuve de beaucoup de disponibilités et de gentillesse. J'ai commencé ma thèse sans connaissance particulière sur la géométrie algébrique, et il a su partager avec moi l'étendu de son savoir ainsi que sa vision géométrique des problèmes. La rédaction de ce manuscrit doit beaucoup à sa rigueur et à ses remarques toujours très pertinentes.

Je souhaite ensuite remercier Frédéric Mangolte et Sergey Finashin pour avoir accepté de rapporter cette thèse et de consacrer de leur précieux temps à la relecture attentive de mon manuscrit. Les conversations que j'ai pu avoir avec chacun m'ont permis d'avancer dans ma thèse l'esprit léger. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Ilia Itenberg et Gianluca Pacienza pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie de mon jury.

« C'est le rôle essentiel du professeur d'éveiller la joie de travailler et de connaître. »

Albert Einstein

Ma soutenance marque la fin de mon parcours à Strasbourg, une aventure de neuf années (plus long que les années collège et lycée réunies) où j'ai pu passer par tous les stades : joie, tristesse, stress, ... Merci à tous ceux qui m'ont accompagné durant cette aventure, les gens de prépa, et de magistère. Je tiens à remercier tous les enseignants de mathématiques, que j'ai pu avoir durant cette période et même avant, et qui m'ont donné le goût des mathématiques, l'envie de continuer à étudier, à travailler sur tous les domaines des mathématiques ; des personnes sans qui je ne serais sans doute pas là. Je remercie tout particulièrement Reinhard Schäfke et Gaël Collinet qui m'ont tout deux encadré au cours d'un mémoire dans mon parcours universitaire, et qui m'ont donné un avant-goût de la recherche. L'enseignement a joué un rôle important au cours de mes quatre années de thèse. Enseigner permet de se changer les idées et d'oublier pendant une heure ou deux les difficultés rencontrées dans sa thèse pour se consacrer à la formation de la génération future. J'ai eu la chance de travailler avec des équipes formidables et de pouvoir donner des cours sans prise de tête, je voudrais donc remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu le plaisir de travailler.

Un grand merci également envers le personnel administratif et technique de l'IRMA et de l'UFR, les ingénieurs informatiques, les agents de la bibliothèque et les secrétaires qui font tous un travail remarquable.

*« Ce n'est pas tant l'intervention
de nos amis qui nous aide mais le
fait de savoir que nous pourrions
toujours compter sur eux. »*

Epicure

Les années de thèse sont souvent difficiles, et c'est important de pouvoir compter sur les autres dans ces moments. Je tiens donc à remercier l'ensemble des doctorants de la fac de maths, les anciens comme les nouveaux, pour les nombreuses discussions où on parle de tous sauf de mathématiques, les pauses café essentielles au bon fonctionnement du mathématicien et pour les séminaires instructifs du jeudi soir (et pendant une période du mercredi après-midi). Un merci tout particulier à Guillaume, Ranine et Abdoulaye, les gens de "maths appli" du premier étage, et Alexandre, leur ingénieur attitré, pour avoir partagé avec moi de nombreux repas au RU et au moins autant de pauses café. Merci à mes co-bureaux, tout particulièrement Clément et Mohamad pour les discussions mathématiques au cheminement parfois étrange, et pour l'aide qu'ils m'ont apporté dans la simplification de mon expression sur le nombre de classes de déformations d'une intersection maximale de deux quadriques réelles. Je tiens à remercier chaleureusement Mathieu, Cyrille et Jérôme pour les soirées jeux de société qu'on a débuté il y a plusieurs années et qu'on continue de faire (presque) chaque semaine malgré la distance qui nous sépare. Ces soirées ont toujours été un moment de détente et de bonne humeur.

Je souhaite remercier l'équipe de mathématiques du Lycée Darius Milhaud qui m'a accueilli à la rentrée avec beaucoup de gentillesse et qui m'a permis de conclure ma thèse dans les meilleures conditions. Merci à Isabelle, Julie, Ahmed, Ali, Anaël, Hedi et Olivier.

Je voudrais terminer en remerciant ma famille à qui je dois énormément : Maman et Papa pour tout ce que vous avez fait pour moi ; mes frères, Guillaume, Damien et Jérôme, qui ont toujours été là et à qui je souhaite beaucoup de succès. Je tiens également à remercier Viviane, Cyril, Cécile, Claire et Aurélien pour leur gentillesse.

Introduction

« Est rigoureuse toute démonstration, qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion. »

René Thom

J'espère que toute personne qui lira mes travaux, trouvera dans les démonstrations toute la rigueur nécessaire.

Topologie et géométrie des variétés algébriques réelles. La géométrie algébrique est dans sa définition la plus simple, l'étude des ensembles de solutions d'un système d'équations polynomiales. La géométrie algébrique réelle est dans ce contexte l'étude des variétés algébriques réelle. Dans ces travaux, une variété algébrique réelle est un couple $(V_{\mathbb{C}}, \tau)$ où $V_{\mathbb{C}}$ est une variété algébrique complexe et τ une involution anti-holomorphe. Ce sujet pouvant être résumé comme l'étude topologique des variétés algébriques réelles et l'interaction entre leur topologie d'une part et leur déformations et dégénération d'autre part, est issu du 16^e problème de Hilbert et enrichi par des développements récents. Plus précisément, dans cette thématique vaste, on se concentre sur les intersections de quadriques où déjà le cas de trois quadriques reste largement ouvert. Ici, la topologie des variétés réelles doit être traitée inséparablement de la topologie de leur complexifié et de l'action de la conjugaison complexe.

Intersections de quadriques réelles.

Le premier chapitre servira de base à notre étude des intersections de quadriques réelles. On se donne une variété algébrique complexe $V_{\mathbb{C}}$ et une involution anti-holomorphe τ . La donnée d'un telle couple $(V_{\mathbb{C}}, \tau)$ est appelé une *structure réelle*. La théorie de Smith appliquée aux structures réelles, nous offre une véritable interaction entre variétés réelles et variétés complexes. Posons dès à présent les notations que nous utiliserons tout au long de cette thèse, on note alors $b_i(V_{\mathbb{R}})$ le i^{e} nombre de Betti de la variété réelle $V_{\mathbb{R}}$, c'est à dire la dimension du groupe d'homologie $H_i(V_{\mathbb{R}})$ (sauf indication du contraire les groupes d'homologie et de cohomologie sont à coefficients dans \mathbb{Z}_2 , le corps à deux éléments). De même, on note $b_i(V_{\mathbb{C}})$ les nombres de Betti de la variété complexe $V_{\mathbb{C}}$, c'est à dire la dimension du groupe d'homologie $H_i(V_{\mathbb{C}})$. Plus généralement, on note $b_i(V_{\mathbb{K}})$ la dimension du groupe d'homologie de $H_i(V_{\mathbb{K}})$. Avec ces notations, on peut

donner l'inégalité de Smith-Thom pour une structure réelle donnée

$$\sum_{i \geq 0} b_i(V_{\mathbb{R}}) \leq \sum_{i \geq 0} b_i(V_{\mathbb{C}})$$

On définit alors les variétés algébriques réelles maximales comme étant les variétés pour lesquelles l'inégalité de Smith-Thom est une égalité. Le but de cette thèse est alors de caractériser les intersections maximales de quadriques (plus particulièrement de deux et trois quadriques), qui sont par définition, les intersections dont la topologie est la plus riche. Pour ce faire, il nous faut d'une part calculer les nombres de Betti des intersections de quadriques complexes, pour ce faire nous calculerons plutôt les nombres de Hodge de ces variétés complexes, et d'autre part déterminer les nombres de Betti des intersections de quadriques réelles. Remarquons que les nombres de Betti d'une intersection de quadriques réelles dépendent des coefficients des formes quadratiques formant l'intersection contrairement au cas complexe où les nombres de Betti en sont indépendants. Le calcul des nombres de Hodge passe par la *formule de Hirzebruch* pour obtenir le résultat.

Théorème. *On considère $X_{\mathbb{C}}$ une intersection régulière de $(r+1)$ quadriques complexes dans $P_{\mathbb{C}}^N$, l'espace projectif complexe. Les nombres de Hodge de la variété $X_{\mathbb{C}}$, notés $h^{j,i}(X_{\mathbb{C}}) = h^{i,j}(X_{\mathbb{C}})$, sont donnés pour $i \leq j$ par*

$$\delta_{i,j} + \sum_{k=1}^{r+1} \binom{r+1}{k} \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} \binom{k-1}{j-i+\ell} \binom{j+\ell}{k-1} \right]$$

si $i+j = N-r-1$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker avec la convention $\binom{n}{m} = 0$ si $n < m$. De plus, $h^{j,i}(X_{\mathbb{C}}) = h^{i,j}(X_{\mathbb{C}}) = \delta_{i,j}$ si $i+j \neq N-r-1$.

On peut remarquer en particulier que ces nombres sont nulles dès lors que $|i-j| > r+1$, on dit que les variétés ont le niveau de Hodge $r+1$. La détermination des nombres de Betti des intersections de quadriques réelles est plus difficile, et la seule méthode efficace connue à ce jour nécessite l'utilisation d'une suite spectrale mise au point par Agrachev dans des travaux publiés à la fin des années 80. Afin d'étudier une intersection régulière de $(r+1)$ quadriques réelles (Q_0, \dots, Q_r) , il faut considérer le système linéaire associé, à savoir l'application suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{r+1} &\longrightarrow S^2(\mathbb{R}^{N+1})^* \\ (\omega_0, \dots, \omega_r) &\longmapsto \sum_{i=0}^r \omega_i q_i \end{aligned}$$

où $S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*$ représente l'espace des formes quadratiques définies sur \mathbb{R}^{N+1} . Pour simplifier la notation, on pose $\sum_{i=0}^r \omega_i q_i = \omega q$. Chaque quadrique réelle ωq est entièrement déterminée, à transformation linéaire près, par sa signature, autrement dit le nombre de valeurs propres négatives et le nombre de valeurs propres positives. On considère la fonction indice sur S^r , notée *ind*, qui à chaque point de la sphère associe l'indice d'inertie négative de la quadrique associée, c'est à dire le nombre de valeurs propres négatives. On notera par la suite i_{\min} et i_{\max} les valeurs minimales, respectivement maximales de cette fonction. On définit une nouvelle variété appelée *variété spectrale* comme l'ensemble des points de S^r pour lesquels la quadrique associée est dégénérée. On considère alors

les ensembles $\Omega_i = \{\lambda \in S^r \text{ tels que } \text{ind}(\lambda) + \text{corang}(\omega q) \leq i\}$. Ces ensembles définissent une filtration de la sphère :

$$\emptyset = \Omega_{-1} \subset \Omega_0 \subset \cdots \subset \Omega_{N+1} = S^r$$

On fixe une base de l'espace \mathbb{R}^{N+1} et on considère l'ensemble

$$\Lambda_i(N) = \{q \in \mathbb{P}(S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*) \text{ tel que } \lambda_i(Q) \neq \lambda_{i+1}(Q)\}$$

où $\{\lambda_i(Q)\}_{0 \leq i \leq N}$ est la suite des valeurs propres de la matrice Q associée à q dans la base choisie, rangées dans l'ordre croissant. Soit ξ_i le fibré vectoriel au-dessus de cet espace $\Lambda_i(N)$ dont la fibre au-dessus d'un point $q \in \Lambda_i(N)$ est le sous-espace de \mathbb{R}^{N+1} engendré par les vecteurs propres des valeurs propres $\lambda_0(Q), \dots, \lambda_i(Q)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{i+1} & \longrightarrow & E_{i+1} \\ & & \downarrow \xi_i \\ & & \Lambda_i(N) \end{array}$$

On note finalement γ_i la première classe de Stiefel-Whitney de ce fibré vectoriel. On considère l'application $\pi : \omega \mapsto \omega q$ pour $\omega \in S^r$.

Théorème (Agrachev [Agr88a]). *Soient $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de $(r+1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Il existe une suite spectrale en cohomologie convergente vers $H^{i+j}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}})$ dont la deuxième page est donnée par*

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{N-j})$$

et la deuxième différentielle est donnée par la composition

$$d_2^{i,N-j} : H^i(\Omega_j) \xrightarrow{\delta^{(\gamma_{j+1}) \cup}} H^{i+2}(\Omega_{j+1}, \pi^{-1}(\Lambda_{j+1})) \longrightarrow H^{i+2}(\Omega_{j+1})$$

où δ est le morphisme de cobord $H^1(\pi^{-1}(\Lambda_{j+1})) \rightarrow H^2(\Omega_{j+1}, \pi^{-1}(\Lambda_{j+1}))$ et la deuxième application provient de la suite exacte du couple $(\Omega_{j+1}, \pi^{-1}(\Lambda_{j+1}))$.

La deuxième page de cette suite spectrale se présente sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c} j \\ \uparrow \\ j = i_{\max} \\ \vdots \\ j = i_{\min} \\ \vdots \\ \mathbb{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{Z}_2 \\ \downarrow \\ i \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ \mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z}_2 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} i = 0 \\ \vdots \\ i = r \end{array} \right) \end{array}$$

où les * représentent les groupes de cohomologie qui dépendent des ensembles $\Omega_i \neq S^r$. À partir de ce théorème, on peut étudier efficacement les groupes de (co)homologie des intersections de deux et trois quadriques réelles.

Intersections de deux quadriques.

L'étude des intersections de deux quadriques, et plus particulièrement la classification à déformation près, est bien connue, principalement grâce aux travaux de S.Lopez de Medrano qui a travaillé sur le cas de deux formes quadratiques simultanément diagonalisables. L'idée principale de S.Lopez de Medrano est de considérer les coefficients des deux formes quadratiques écrites dans une base adaptée et de regrouper ces coefficients pour former des points du plan. Ces points vont alors nous permettre de construire de manière très naturelle une partition du nombre de points. Soit (q_1, q_2) un couple de formes quadratiques réelles définissant une intersection régulière dans $P_{\mathbb{C}}^N$. On peut supposer que q_1 n'a pas de points critiques autre que $0 \in \mathbb{C}^{N+1}$. Ainsi, on peut trouver une base de \mathbb{C}^{N+1} tel que le pinceau de quadriques (q_1, q_2) soit de la forme réduite suivante

$$(\lambda q_1 + \mu q_2)(x) = (\lambda a_1 + \mu b_1)x_1^2 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2^2 + \cdots + (\lambda a_m + \mu b_m)x_m^2 + \\ + \sum_{i=m+1}^{m+M} [(\lambda \alpha_i + \mu \beta_i)(x_i + ix_{i+M})^2 + (\lambda \bar{\alpha}_i + \mu \bar{\beta}_i)(x_i - ix_{i+M})^2]$$

où a_i et b_i sont des nombres réels, et $\alpha_i \beta_i^{-1} \notin \mathbb{R}$. Une *partition diédrale impaire* d'un entier positif m est la donnée d'une classe d'équivalence d'une partition $m = m_1 + \cdots + m_{2k+1}$ de m en un nombre impaire d'entiers positifs, deux partitions étant équivalentes si elles diffèrent par une permutation cyclique des entiers m_i suivi, si nécessaire, d'un renversement de l'ordre. On note P_m l'ensemble des partitions diédrales impaires de m .

Théorème (Lopez de Medrano [Lop89]). *Il existe une bijection entre l'ensemble des classes de déformations des intersections régulières de deux quadriques réelles dans $P_{\mathbb{R}}^N$ et la réunion des ensembles P_m pour tout entier m vérifiant $1 \leq m \leq N+1$ et $m = N+1 \pmod{2}$.*

Chaque partition diédrale impaire d'un entier m vérifiant $1 \leq m \leq N+1$ et $m = N+1 \pmod{2}$ permet de définir une fonction indice. Une telle fonction indice détermine uniquement les nombres de Betti d'une intersection régulière de deux quadriques, en utilisant la suite spectrale d'Agrachev. On peut alors déterminer les intersections maximales de deux quadriques et donner une description complète des classes de déformation de telles intersections.

Théorème. *Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de deux quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Pour $N \geq 3$, $X_{\mathbb{R}}$ est maximale si et seulement si*

$$i_{\min} = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad m = N+1$$

où m est le nombre de points de la variété spectrale $C \subset P_{\mathbb{R}}^1$. Les partitions impaires de $N+1$ associée à des intersections maximales sont uniquement constituées de 1 si N est paire et constituée de 1 et de 2 si N est impaire. Si N est paire, il existe une unique classe de déformation d'intersection maximale de deux quadriques. Si N est impaire, le nombre de classes de déformation d'intersection

maximale de deux quadriques est

$$2^{\lfloor \frac{N}{4} \rfloor - 1} + \frac{1}{N+1} \sum_{\substack{m | \frac{N+1}{2} \\ m \text{ impaire}}} \varphi(m) 2^{\frac{N+1}{2m} - 1}$$

où $\varphi(m)$ est la fonction d'Euler.

Néanmoins, dans le cas N impaire, toute partition de $N+1$ constituée uniquement de 1 et de 2 n'est pas nécessairement la partition associée à une intersection maximale de deux quadriques. Par exemple, pour $N=7$, la partition $8 = 2+2+2+1+1$ est la partition diédrale impaire d'une intersection maximale alors que $8 = 2+1+2+1+2$ n'est pas la partition diédrale impaire d'une intersection maximale de deux quadriques.

Intersections de trois quadriques.

Contrairement au cas des intersections de deux quadriques, il n'existait jusqu'à récemment presque aucun résultat sur les intersections de trois quadriques. Il faut attendre 2010, pour obtenir de nouveau résultat sur le sujet avec notamment les travaux de V.A.Krasnov sur les intersections maximales ([Kra13],[Kra12]) motivés par les résultats de A.Degtyarev, I.Itenberg et V.Kharlamov sur le nombre maximales de composantes connexes d'une intersection de quadriques réelles [DIK] et les travaux de A.Lerario, étudiant de A.Agrachev, qui a amélioré la suite spectrale d'Agrachev pour pouvoir l'utiliser dans un cadre plus général (nous ne parlerons pas beaucoup plus des travaux de A.Lerario dans cette thèse mais le lecteur est fortement encouragé à y jeter un coup d'oeil). Les travaux de Krasnov sont très complémentaires de mes propres travaux et certaines de mes démonstrations s'inspirent de ces idées. Alors que les nombres de Betti d'une intersection de deux quadriques réelles se calculent sans difficulté à partir de la fonction indice, il en est autrement pour les nombres de Betti d'une intersection de trois quadriques réelles. C'est à partir de trois quadriques que les difficultés liées à l'utilisation d'une suite spectrale apparaissent, à savoir les différentielles non triviales à la deuxième page. Les intersections de trois quadriques possèdent une autre particularité, en effet, la variété spectrale associée à une telle intersection est une courbe plane. Ainsi, les intersections de trois quadriques (par l'intermédiaire du théorème de Dixon) nous offrent une nouvelle façon d'étudier les courbes planes, donc d'aborder le 16^e problème de Hilbert.

Pour le calcul des nombres de Betti d'une intersection de trois quadriques, il faut donc connaître les différentielles agissant sur la deuxième page de la suite spectrale, et ces différentielles sont décrites dans le théorème d'Agrachev. On peut en particulier remarquer qu'il existe au plus une seule différentielle non triviale agissant sur cette page, à savoir $d_2^{0, N-i_{\min}}$. On notera par la suite d_2 cette différentielle. On obtient alors une caractérisation des intersections maximales de trois quadriques.

Théorème. *Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ de dimension impaire $N = 2k + 1$. Alors, $X_{\mathbb{R}}$ est une intersection maximale si et seulement si sa courbe spectrale est une M -courbe, sa fonction indice vérifie $i_{\min} = k$ et la deuxième différentielle de la suite spectrale est triviale.*

Théorème. Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ de dimension paire $N = 2k$. Si $X_{\mathbb{R}}$ est une intersection maximale alors l'une des quatre propriétés suivantes est vérifiée

- (1) la courbe spectrale est une M -courbe, la différentielle d_2 est triviale et $i_{\min} = k - 1$;
- (2) la courbe spectrale est une M -courbe, la différentielle d_2 n'est pas triviale et $i_{\min} = k$;
- (3) la courbe spectrale est une $(M - 1)$ -courbe, la différentielle d_2 est triviale et $i_{\min} = k$ et l'homomorphisme $H_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}-1}(P_{\mathbb{R}}^N)$ est trivial;
- (4) la courbe spectrale est une $(M - 2)$ -courbe, la différentielle d_2 est triviale et $i_{\min} = k$ et l'homomorphisme $H_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}-1}(P_{\mathbb{R}}^N)$ n'est pas trivial.

Ce dernier théorème permet de caractériser les intersections maximales de trois quadriques réelles mais il ne donne aucune indication sur l'existence de telles intersections. Pour démontrer l'existence, on a besoin comme dans le cas d'intersections de deux quadriques, d'une manière simple de "construire" une famille de trois quadriques à partir de données simples. Le théorème de Dixon nous permet de palier à ce problème, en effet, ce théorème associe à un couple (C, θ) , où C est une courbe plane et θ une thêta-caractéristique réelle paire non-dégénérée, une intersection de trois quadriques réelle. La difficulté dans l'étude des intersections de trois quadriques réelles réside alors dans la compréhension des conditions du théorème précédent en termes de thêta-caractéristiques. L'enjeu est donc comprendre le lien entre la thêta-caractéristique d'une part, et la différentielle et la fonction indice d'autre part. En particulier, nous allons démontrer le résultat suivant, montrant le lien entre l'étude des intersections maximales de quadriques et l'étude des M -courbes.

Théorème. Toute M -courbe plane peut être obtenue comme la courbe spectrale d'une intersection maximale de trois quadriques.

Pour conclure, on peut discuter, comme pour les intersections de deux quadriques, des classes de déformation des intersections de trois quadriques réelles. Ici aussi, le problème est autrement plus compliqué et nous nous contenterons d'une étude des intersections maximales de trois quadriques dans les espaces projectifs de dimension 3 ou 4. En particulier, nous démontrerons le résultat suivant, évoqué dans [DIK] sans preuve.

Théorème. Il n'existe qu'une seule classe de déformation d'intersections maximales de trois quadriques réelles dans $P_{\mathbb{R}}^3$.

Un théorème que l'on peut améliorer en introduisant quelques notations. Une intersection maximale de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$ est une réunion de 8 points, cependant, il est bien connu que la donnée de 7 points suffit à déterminer entièrement notre intersection. Une famille de 7 points dans $P_{\mathbb{R}}^3$ est dite *typique* si les images de six points par la projection dans un plan par rapport au septième n'appartiennent pas à une conique. Deux familles typiques de 7 points \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont équivalentes si il existe une application lisse

$$f : P_{\mathbb{R}}^3 \times [0, 1] \rightarrow P_{\mathbb{R}}^3$$

satisfaisant $f(\mathcal{F}_1, 0) = \mathcal{F}_1$, $f(\mathcal{F}_1, 1) = \mathcal{F}_2$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $f(\mathcal{F}_1, t)$ est une famille typique de 7 points.

Théorème. *À équivalence près, il existe une unique famille typique ordonnée de 7 points dans $P_{\mathbb{R}}^3$.*

En utilisant les mêmes méthodes, on peut démontrer qu'une intersection de trois quadriques régulière dans $P_{\mathbb{R}}^3$ est entièrement déterminée à déformation près par sa courbe spectrale. Pour une intersection de trois quadriques réelles maximale dans $P_{\mathbb{R}}^4$, on peut encore donner un résultat sur les classes de déformation.

Théorème. *Il n'existe qu'une seule classe de déformation d'intersections maximales de trois quadriques réelles dans $P_{\mathbb{R}}^4$ dont la courbe spectrale est une M-courbe.*

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	iii
1 Intersections de quadriques	1
1.1 Théories et notions de base	1
1.1.1 Inégalité de Smith	1
1.1.2 Régularité et intersections de quadriques	4
1.2 Nombres de Betti d'une quadrique	6
1.2.1 Quadrique complexe	6
1.2.2 Quadrique réelle	7
1.3 Intersections de quadriques complexes	8
1.3.1 Formule de Hirzebruch	8
1.3.2 Intersection de quadriques	11
1.4 Intersections de quadriques réelles	13
1.4.1 Variété spectrale	13
1.4.2 Suite spectrale	17
1.4.3 L'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$	22
1.5 Variété spectrale réelle vide	25
2 Intersections de deux quadriques	29
2.1 Homologie d'une intersection de deux quadriques	29
2.2 Classification des intersections de deux quadriques	32
2.2.1 Classification	32
2.2.2 Classification et fonction indice	36
2.3 Classification des intersections maximales	37
3 Intersections de trois quadriques	43
3.1 Courbes algébriques planes	43
3.1.1 Description.	43
3.1.2 Restrictions sur les courbes.	44
3.1.3 Les travaux de Rokhlin.	45
3.2 Intersections maximales de trois quadriques	48
3.2.1 Nombres de Betti	48
3.2.2 Caractérisation des intersections maximales	54
3.3 Theta-caractéristiques	57
3.3.1 Première approche	57

3.3.2	Variété de Jacobi et thêta-fonctions.	58
3.3.3	Théorème de Riemann-Mumford.	59
3.3.4	Description géométrique	60
3.3.5	Thêta-caractéristiques sur les courbes réelles	61
3.3.6	Construction de Dixon	65
3.4	Existence d'intersections maximales	66
3.4.1	Caractérisation et thêta-caractéristiques	67
3.4.2	Caractéristique d'Euler et conséquences	70
3.4.3	Théorèmes d'existence	73
4	Classification par déformations	79
4.1	Courbes spectrales et thêta-caractéristiques	79
4.1.1	Courbes spectrales singulières	79
4.1.2	Thêta-caractéristiques sur une courbe singulière	81
4.2	Monodromie et thêta-caractéristiques	84
4.2.1	Formule de Picard-Lefschetz.	84
4.2.2	Action sur les thêta-caractéristiques.	88
4.3	Classification	91
4.3.1	Intersections dans $P_{\mathbb{R}}^3$	91
4.3.2	Intersections dans $P_{\mathbb{R}}^4$	103
	Bibliographie	109

CHAPITRE 1

Intersections de quadriques

Au cours de ce chapitre, nous allons poser les bases qui vont servir dans l'ensemble des chapitres à venir. Nous commencerons par définir la notion de M -variétés avant de nous intéresser véritablement aux intersections de quadriques.

1.1 Théories et notions de base

Dans cette première section, nous allons poser les définitions et les résultats qui nous serviront tout au long de cette thèse.

1.1.1 Inégalité de Smith

Dans cette partie, nous allons donner la suite exacte de Smith en toute généralité avant de donner les conséquences sur le lien entre variétés complexes et variétés réelles. On considère G un groupe d'ordre p premier (d'élément neutre noté 1) et on travaille avec l'homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qu'on notera \mathbb{Z}_p par la suite. Soit K un G -complexe, c'est à dire, un complexe simplicial muni d'une action du groupe G respectant la structure simpliciale, autrement dit, l'image d'un n -simplexe par un élément du groupe est toujours un n -simplexe. On suppose que K est un G -complexe régulier, i.e. il vérifie la propriété : pour toute famille (g_0, \dots, g_n) d'éléments de G et toute famille (v_0, \dots, v_n) de simplexe de K , il existe un élément $g \in G$ tel que pour tout i , $g(v_i) = g_i(v_i)$. On pose les notations suivantes

$$\mathbb{Z}_p G = \left\{ \sum_{g_i \in G} n_i g_i, n_i \in \mathbb{Z}_p \right\}$$
$$K^G = \{\text{points fixes pour l'action de groupe}\}$$

La régularité de K nous assure en particulier que K^G est un sous-complexe. Soit g un générateur de G , on pose

$$\begin{cases} \sigma = 1 + g + g^2 + \dots + g^{p-1} \\ \tau = 1 - g \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit que, dans $\mathbb{Z}_p G$, $\sigma\tau = 0 = \tau\sigma$; car puisque G est d'ordre p on a $g^p = 1$, mais aussi que $\sigma = \tau^{p-1}$ (en particulier, $\tau = \sigma$ si $p = 2$). On pose $\rho = \tau^k$ pour $1 \leq k \leq p-1$ fixé et $\bar{\rho} = \tau^{p-k}$. Soit $L \subset K$ un sous complexe invariant sous l'action de G . On note $L^G = L \cap K^G$ et on considère le complexe de chaînes

$$\rho C(K, L) \subset C(K, L)$$

Proposition 1.1. *On a la suite exacte courte de complexe de chaînes*

$$0 \longrightarrow \bar{\rho}C(K, L) \oplus C(K^G, L^G) \xrightarrow{i} C(K, L) \xrightarrow{\rho} \rho C(K, L) \longrightarrow 0$$

où i est la somme des inclusions.

Démonstration. Il suffit de montrer l'égalité $\ker \rho = \text{im } i$ (les autres égalités sont évidentes). Il nous faut donc démontrer que tout élément de $C(K, L)$ dont l'image par ρ est nul appartient à l'image de i , et inversement. Cependant, les éléments de $C(K, L)$ sont par définition des combinaisons linéaires dans \mathbb{Z}_p de n -simplexe de K et pas de L . Soit s un n -simplexe de K et pas de L . Deux possibilités sont alors possible, soit $s \in K^G$ alors $\tau(s) = 0$ et il est évident par les définitions que s appartient à l'image de i et au noyau de ρ . Soit $s \notin K^G$, on est alors amené à regarder les éléments de la forme $\sum_{g_i \in G} n_i g_i(s)$. Posons $\Lambda = \mathbb{Z}_p G$, on peut se contenter d'étudier la suite

$$0 \longrightarrow \bar{\rho}\Lambda \xrightarrow{i} \Lambda \xrightarrow{\rho} \rho\Lambda \longrightarrow 0$$

avec maintenant des espaces vectoriels. Il suffit donc de prouver l'égalité des dimensions.

$$\dim \bar{\rho}\Lambda + \dim \rho\Lambda = \dim \Lambda = p$$

Cependant, on sait que $\ker(\tau : \Lambda \rightarrow \Lambda) = \langle \sigma \rangle$. On en déduit que $\dim \tau\Lambda = \dim \Lambda - 1$. De plus, $\ker \tau = \mathbb{Z}_p \sigma \subset \tau\Lambda$ puisque $\sigma = \tau^{p-1} = \tau^k \tau^{p-k-1}$. On en déduit,

$$\dim \tau^{k+1}\Lambda = \dim \tau(\tau^k\Lambda) = \dim \tau^k\Lambda - 1$$

D'où, au final, $\dim \tau^k\Lambda = p - k$. □

Les détails de cette preuve peuvent être trouvés dans le livre de Bredon [Bre72].

On définit maintenant les groupes d'*homologie spéciale* de Smith

$$H_*^\rho(K, L) = H_*(\rho C(K, L; \mathbb{Z}_p))$$

Alors, par la méthode classique, on peut passer de la suite exacte courte de la proposition précédente à une suite exacte longue en homologie.

Théorème 1.2 (Smith)

Avec les notations précédentes, on a le triangle exacte

$$\begin{array}{ccc} & H_n(K, L) & \\ \rho_* \swarrow & & \nwarrow i_* \\ H_n^\rho(K, L) & \text{-----} \triangleright & H_n^{\bar{\rho}}(K, L) \oplus H_n(K^G, L^G) \end{array}$$

appelé la suite exacte de Smith.

Ce dernier résultat nous conduit alors vers un autre résultat tout aussi important que la suite exacte en elle-même.

Corollaire 1.3 (Inégalité de Smith). *Soit K un G -complexe régulier de dimension finie et $L \subset K$ un sous-complexe invariant. Alors, pour tout $n \geq 0$, et tout $\rho = \tau^k$, on a*

$$\operatorname{rg}(H_n^\rho(K, L)) + \sum_{k \geq n} \operatorname{rg}(H_k(K^G, L^G)) \leq \sum_{k \geq n} \operatorname{rg}(H_k(K, L))$$

Démonstration. De la suite exacte de Smith construite au théorème précédent, on en déduit les inégalités suivantes pour tout k entier

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(H_k^\rho(K, L)) + \operatorname{rg}(H_k(K^G, L^G)) &\leq \operatorname{rg}(H_{k+1}^{\bar{\rho}}(K, L)) + \operatorname{rg}(H_k(K, L)) \\ \operatorname{rg}(H_{k+1}^{\bar{\rho}}(K, L)) + \operatorname{rg}(H_{k+1}(K^G, L^G)) &\leq \operatorname{rg}(H_{k+2}^\rho(K, L)) + \operatorname{rg}(H_{k+1}(K, L)) \end{aligned}$$

Il suffit alors de sommer ces inégalités en alternant ρ et $\bar{\rho}$ pour $k \geq n$ et d'utiliser le fait que par hypothèse K est de dimension finie. \square

Cette inégalité se traduit simplement dans le cadre des variétés algébriques. Considérons $V_{\mathbb{C}}$ une variété algébrique complexe et soit $c : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ une involution anti-holomorphe. La donnée d'un couple $(V_{\mathbb{C}}, c)$ est appelé *structure réelle* et la variété réelle associée à cette structure est l'ensemble des points fixes de $V_{\mathbb{C}}$ par c , on note $V_{\mathbb{R}}$ cet ensemble. On considère le groupe $G = \{\operatorname{id}, c\}$. Ce groupe G agit sur notre variété $V_{\mathbb{C}}$ donc, on peut appliquer la construction précédente à ce cadre et on obtient l'inégalité (pour $L = \emptyset$ et $n = 0$)

$$\dim(H_0^c(V_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}_2)) + \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{C}}^G; \mathbb{Z}_2)) \leq \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}_2))$$

Pendant, $V_{\mathbb{C}}^G$ est notre définition de la variété algébrique réelle $V_{\mathbb{R}}$ associée à $V_{\mathbb{C}}$. Donc, au final, on obtient l'*inégalité de Smith-Thom*

$$\sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_2)) \leq \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}_2)).$$

On considère $W_{\mathbb{C}} \subset V_{\mathbb{C}}$ une sous-variété de $V_{\mathbb{C}}$ invariante par l'involution anti-holomorphe c , qui définie par restriction une structure réelle sur $W_{\mathbb{C}}$. On obtient dans ce cas l'*inégalité de Smith-Thom relative*

$$\sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_2)) \leq \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}_2))$$

Définition 1.4. *Une variété réelle $V_{\mathbb{R}}$ est appelée M -variété ou variété maximale si l'inégalité de Smith prend la forme*

$$\sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_2)) = \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}_2))$$

Une variété réelle $V_{\mathbb{R}}$ est appelée $(M - k)$ -variété si on a l'égalité

$$\sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_2)) = \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(V_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}_2)) - 2k$$

Par exemple, l'espace projectif complexe $P_{\mathbb{C}}^N$ muni de la conjugaison complexe $(P_{\mathbb{C}}^N, conj)$ définit une structure réelle dont la variété réelle associée est simplement l'espace projectif réel $P_{\mathbb{R}}^N$. Il n'est pas difficile de vérifier que $P_{\mathbb{R}}^N$ est une M -variété.

1.1.2 Régularité et intersections de quadriques

Une intersection de $(r+1)$ quadriques $X_{\mathbb{K}}$ dans l'espace projectif $P_{\mathbb{K}}^N$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est la donnée de $(r+1)$ formes quadratiques q_0, \dots, q_r , avec

$$X_{\mathbb{K}} = \{x \in P_{\mathbb{K}}^N \text{ tel que } q_0(x) = \dots = q_r(x) = 0\}.$$

Une telle famille de formes quadratiques n'est pas unique mais on peut passer de l'une à l'autre par combinaisons linéaires. Une intersection de $(r+1)$ quadriques est donc une variété algébrique décrite par la donnée de $(r+1)$ polynômes homogènes de degré 2. On ne va pas utiliser dans ce texte la notion de variété régulière propre aux variétés algébriques mais une notion plus adaptée aux formes quadratiques. À une famille de formes quadratiques (q_0, \dots, q_r) , on associe l'application suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^{r+1} &\longrightarrow S^2(\mathbb{K}^{N+1})^* \\ (\omega_0, \dots, \omega_r) &\longmapsto \sum_{i=0}^r \omega_i q_i \end{aligned} ,$$

où $S^2(\mathbb{K}^{N+1})^*$ représente l'espace des formes quadratiques définies sur \mathbb{K}^{N+1} . Pour simplifier la notation, on pose $\sum_{i=0}^r \omega_i q_i = \omega q$. Cette application passe naturellement au quotient pour obtenir une application

$$\hat{q} : \begin{array}{ccc} P_{\mathbb{K}}^r & \longrightarrow & \mathbb{P}(S^2(\mathbb{K}^{N+1})^*) \\ (\omega_0, \dots, \omega_r) & \longmapsto & \omega q \end{array} .$$

Définition 1.5. Une famille de formes quadratiques (q_0, \dots, q_r) est dite dégénérée en $\omega \in P_{\mathbb{K}}^r$ s'il existe un vecteur $x \in \mathbb{K}^{N+1}$ non nul vérifiant la condition $x \in \ker(\omega q)$ et pour tout entier i , on a l'égalité $q_i(x) = 0$. Une famille de formes quadratiques est dite dégénérée s'il existe $\omega \in P_{\mathbb{K}}^r$ tel que la famille est dégénérée en ω . Dans le cas contraire, la famille est dite non-dégénérée.

On peut voir qu'une famille de formes quadratiques est dégénérée si et seulement si l'application \hat{q} possède une valeur critique. Remarquons que dans le cas d'une unique forme quadratique, on retrouve la définition usuelle de dégénérescence d'une forme quadratique.

Définition 1.6. Une intersection de $(r+1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{K}}^N$ est dite régulière si la famille de formes quadratiques associée est non-dégénérée.

Remarquons que cette définition est indépendante du choix de la famille de formes quadratiques définissant l'intersection de quadriques. Par définition, si une famille de formes quadratiques est non-dégénérée, alors l'intersection de quadriques associée est une variété lisse de dimension $N - r - 1$ ou l'ensemble vide. En particulier, on travaillera toujours avec $r < N$.

Proposition 1.7. *Soit $q = (q_0, \dots, q_r)$ une famille de formes quadriques dans \mathbb{R}^{N+1} . On suppose que q est non-dégénérée en $\omega_0 \in P_{\mathbb{R}}^r$. Alors, il existe un réel $\rho > 0$ tel que la famille q est non-dégénérée sur la boule $B(\omega_0, \rho)$.*

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, il faut différencier deux cas possibles. Supposons que pour le point $\omega_0 \in P_{\mathbb{R}}^r$, le noyau de la forme quadratique soit triviale, $\ker(\omega_0 q) = \{0\}$. Cette égalité se traduit par le fait que le déterminant de la matrice associée à la forme quadratique $\omega_0 q$ dans une base donnée est non-nulle. Cette condition est ouverte, donc par continuité du déterminant, on peut trouver un nombre réel $\rho > 0$ tel que pour tout $\omega \in B(\omega_0, \rho)$, on vérifie toujours l'égalité $\ker(\omega q) = \{0\}$. On en déduit que, dans ce cas, la famille de formes quadratiques q est non-dégénérée sur $B(\omega_0, \rho)$.

Inversement, supposons que pour le point $\omega_0 \in S^r$, le noyau de la forme quadratique n'est pas triviale, $\ker(\omega_0 q) \neq \{0\}$. Alors, puisque par hypothèse la famille q est non-dégénérée en ω_0 , pour tout $x \in \ker(\omega_0 q)$, il existe un entier i entre 0 et r pour lequel $q_i(x) \neq 0$. De plus, pour tout entier k , la condition " $\dim \ker(\omega q) \leq k$ " est une condition ouverte. Ainsi, il existe un voisinage U de ω_0 pour lequel pour tout $\omega \in U$, $\dim \ker(\omega q) \leq \dim \ker(\omega_0 q)$. En particulier, quitte à diminuer la taille du voisinage U , pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x' \in \ker(\omega q)$ avec $\omega \in U$, il existe $x \in \ker(\omega_0 q)$ tel que $\|x' - x\| < \varepsilon$. On fixe à présent $x' \in \ker(\omega q)$ pour $\omega \in U$. Soit $x \in \ker(\omega_0 q)$ satisfaisant l'inégalité $\|x' - x\| < \varepsilon$. Alors par hypothèse de non-dégénérescence de la famille q , il existe un entier i tel que $q_i(x) \neq 0$. Alors, par continuité de la forme quadratique q_i , il existe un réel C pour lequel

$$q_i(x') = q_i(x) + \|x' - x\|C + o(\|x' - x\|^2).$$

On en déduit que pour ε suffisamment petit (ce qui revient à diminuer le voisinage U de ω_0), on a $q_i(x') \neq 0$. On en conclut qu'il existe $\rho > 0$ tel que la famille q soit non-dégénérée sur $B(\omega_0, \rho) \subset U$. \square

Proposition 1.8. *Soit $q = (q_0, \dots, q_r)$ une famille de formes quadriques dans \mathbb{R}^{N+1} . On suppose que q est non-dégénérée en $\omega_0 \in P_{\mathbb{R}}^r$. Alors, pour toute forme quadratique q^+ définie positive, il existe des réels $\rho > 0$ et $\varepsilon > 0$, tels que pour tout réel τ vérifiant les inégalités, $0 < \tau < \varepsilon$, la famille de formes quadratiques $q_\tau = (q_0 - \tau q^+, q_1, \dots, q_r)$ est non-dégénérée sur la boule $B(\omega_0, \rho)$.*

Démonstration. On fixe $q^+ > 0$ une forme quadratique définie positive dans \mathbb{R}^{N+1} . On note $X_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ l'intersection des quadriques associées à la famille de formes quadratiques q . Par compacité de la sphère S^N , il existe un réel $\rho > 0$ défini par

$$\frac{1}{\rho} = \sup_{x \in S^N} |q^+(x)|.$$

Par hypothèse de non-dégénérescence de la famille de formes quadratiques q en ω_0 , on en déduit que pour tout $x \in S^N \setminus X_{\mathbb{R}}$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\omega_x \in B(\omega_0, \rho)$ tel que $|\omega_x q(x)| \geq \varepsilon > 0$. Par compacité de la sphère S^N , on peut choisir ε indépendamment de $x \in S^N \setminus X_{\mathbb{R}}$. On veut montrer que la famille q' est non-dégénérée sur $B(\omega_0, \rho)$. Soit $(\omega, x) \in B(\omega_0, \rho) \times S^N$ tel que $x \in \ker(\omega q_\tau)$. Alors, puisque q^+ est définie positive, on doit avoir $x \notin X_{\mathbb{R}}$. Il existe donc $\omega_x \in B(\omega_0, \rho)$ tel que $|\omega_x q(x)| \geq \varepsilon$. Alors, pour tout $\tau < \varepsilon$, on obtient l'inégalité

$$|\omega_x q_\tau(x)| \geq |\omega_x q(x)| - \tau \|\omega_x\| |q^+(x)| > 0$$

On a ainsi montré que la famille de formes quadratiques q_r est non-dégénérée sur $B(\omega_0, \rho)$. \square

Cette proposition montre que le caractère de régularité est localement stable par petite perturbation. Au cours de sa thèse sous la directive de A.Agrachev, A.Lerario a démontré dans [Ler11] un théorème de régularisation globale; à savoir, on peut toujours perturber une famille de formes quadratiques afin d'obtenir une famille non-dégénérée.

1.2 Nombres de Betti d'une quadrique

1.2.1 Quadrique complexe

On considère $Q_{\mathbb{C}}^N = \{x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_N^2 = 0\} \subset P_{\mathbb{C}}^N$ une quadrique régulière de $P_{\mathbb{C}}^N$. On note $b_k = \dim H^k(Q_{\mathbb{C}}^N; \mathbb{Z}_2)$ les nombres de Betti de la quadrique $Q_{\mathbb{C}}^N$.

Proposition 1.9. *Soit $Q_{\mathbb{C}}^N$ une quadrique régulière complexe dans $P_{\mathbb{C}}^N$. Les nombres de Betti de la quadriques sont données pour tout entier $i \leq 2N$ par :*

$$\begin{aligned} b_i(Q_{\mathbb{C}}^N) &= 2 & \text{si } i = N - 1 \text{ est pair} \\ b_i(Q_{\mathbb{C}}^N) &= 1 & \text{si } i \neq N - 1 \text{ est pair} \\ b_i(Q_{\mathbb{C}}^N) &= 0 & \text{si } i \text{ est impair} \end{aligned}$$

Démonstration. À l'aide du théorème de Lefschetz sur sections hyperplanes, pour $k \neq N - 1$, on a l'isomorphisme

$$H^k(Q_{\mathbb{C}}^N; \mathbb{Z}_2) \simeq H^k(P_{\mathbb{C}}^N; \mathbb{Z}_2).$$

On peut dès à présent calculer les nombres de Betti de la quadrique $b_i(Q_{\mathbb{C}}^N)$ pour tout entier $i \neq N - 1$. Pour terminer cette démonstration, il est suffisant de déterminer $b_{N-1}(Q_{\mathbb{C}}^N)$. Cependant, $Q_{\mathbb{C}}^N$ est un revêtement double de $P_{\mathbb{C}}^{N-1}$ (par la formule $x_0^2 = -(x_1^2 + \dots + x_N^2)$) ramifié en $Q_{\mathbb{C}}^{N-1}$. On peut alors calculer la caractéristique d'Euler de la quadrique par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \chi(Q_{\mathbb{C}}^N) &= 2\chi(P_{\mathbb{C}}^{N-1}) - \chi(Q_{\mathbb{C}}^{N-1}) \\ &= 2N - \chi(Q_{\mathbb{C}}^{N-1}). \end{aligned}$$

On obtient ainsi une formule de récurrence permettant de calculer la caractéristique d'Euler de la quadrique $Q_{\mathbb{C}}^N$. Cependant, par définition de la caractéristique d'Euler, on a

$$\chi(Q_{\mathbb{C}}^N) = \sum_{i=0}^N (-1)^i b_i.$$

On peut finalement calculer l'unique nombre de Betti qui nous manque pour terminer la démonstration de cette proposition.

$$b_{N-1} = \dim H^{N-1}(Q_{\mathbb{C}}^N; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} 2 & \text{si } N - 1 \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

\square

1.2.2 Quadrique réelle

Soit $Q_{\mathbb{R}} \subset P_{\mathbb{R}}^N$ une quadrique réelle non-dégénérée de signature $(N_+ + 1, N_- + 1)$. On utilise cette convention de prendre l'indice d'inertie positif (respectivement négatif) égale à $N_+ + 1$ (respectivement $N_- + 1$) afin d'éviter le cas où l'un des deux indices serait nul, puisque dans ce cas la quadrique réel est vide, il n'est donc pas difficile de calculer ses nombres de Betti. La forme quadratique associée à $Q_{\mathbb{R}}$ étant définie à un facteur réel près, on peut supposer que $N_+ \geq N_-$. De plus, on a l'égalité $N = N_+ + N_- + 1$. Les nombres de Betti de la quadrique $Q_{\mathbb{R}}$ sont donnés par le résultat suivant.

Proposition 1.10. *Soit $Q_{\mathbb{R}} \subset P_{\mathbb{R}}^N$ une quadrique réelle non-dégénérée de signature $(N_+ + 1, N_- + 1)$. Les nombres de Betti de la quadrique réelle sont donnés comme suit.*

- si $N_+ \geq N_- + 1$

$$b_i(Q_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq i \leq N_- \text{ ou } N_+ \leq i \leq N - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- si $N_+ = N_-$

$$b_i(Q_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = N_+ \\ 1 & \text{si } 0 \leq i \leq N - 1, i \neq N_+ \end{cases}$$

Démonstration. Commençons cette démonstration en remarquant que si $N_- = 0$ alors la quadrique $Q_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à la sphère S^{N-1} et le résultat est immédiat. Supposons à présent que $N_- > 0$. On peut supposer que la quadrique $Q_{\mathbb{R}}$ est donnée par la forme quadratique

$$q(x) = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{N_+}^2 - x_{N_++1}^2 - \cdots - x_N^2$$

Le système d'équation

$$\begin{cases} q(x) = 0 \\ x_0^2 + \cdots + x_N^2 = 1 \end{cases}$$

est équivalent à

$$x_0^2 + \cdots + x_{N_+}^2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_{N_++1}^2 + \cdots + x_N^2 = \frac{1}{2}$$

Ainsi, les solutions de l'équation $q(x) = 0$ sur la sphère unité est un produit de sphères $S^{N_+} \times S^{N_-}$. De plus, l'involution $x \mapsto -x$ sur la sphère unité induit une involution sur le produit $S^{N_+} \times S^{N_-}$ qui correspond au produit des involutions antipodales sur S^{N_+} et S^{N_-} . On considère alors la projection

$$S^{N_+} \times S^{N_-} \rightarrow S^{N_-}$$

En utilisant nos involutions, on obtient un fibré localement trivial

$$\pi : Q_{\mathbb{R}} \rightarrow P_{\mathbb{R}}^{N_-}$$

dont la fibre est donnée par la sphère S^{N_+} . Par la suite spectrale de Leray-Serre, on en déduit l'existence d'une suite spectrale convergente vers $H^i(Q_{\mathbb{R}})$ et dont la deuxième page est donnée par

$$E_2^{p,q} = H^p(P_{\mathbb{R}}^{N_-}; H^q(S^{N_+}))$$

La deuxième page de la suite spectrale se présente donc sous la forme ci-dessous.

N^+	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\cdots	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	
	0	0	\cdots	0	0	
	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	
	0	0		0	0	
0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\cdots	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	q
	0				N^-	

Finalement, puisque $N_- \leq N_+$, la suite spectrale dégénère dès la deuxième page (toutes les différentielles sont triviales). On en déduit alors le résultat

$$H^i(Q_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{p+q=i} H^p(P_{\mathbb{R}}^{N^-}; H^q(S^{N^+}))$$

□

En comparant les résultats obtenus pour le calcul des nombres de Betti d'une quadrique complexe et d'une quadrique réelle, on remarque qu'une quadrique réelle est une M-variété, pour la structure réelle donnée par la restriction de la conjugaison complexe, si et seulement si $N_+ = N_-$ ou $N_+ = N_- + 1$. On va voir dans les dernières sections de ce chapitre qu'on retrouve un résultat similaire pour des intersections de quadriques réelles $X_{\mathbb{R}}$ dans le sens où si une intersection de r quadriques est une M-variété alors toute combinaison linéaire de ces r quadriques est au moins une $(M - r + 1)$ -variété autrement dit,

$$\sum_{i \geq 0} b_i(Q_{\mathbb{R}}) \geq \sum_{i \geq 0} b_i(Q_{\mathbb{C}}) - 2(r - 1).$$

1.3 Intersections de quadriques complexes

Durant la totalité de cette partie, nous allons étudier et donner les principaux résultats sur les intersections de quadriques dans l'espace projectif complexe $P_{\mathbb{C}}^N$. L'outil indispensable pour calculer les nombres de Betti et de Hodge de tels espaces est la *formule de Hirzebruch* que nous allons voir par la suite sans démonstration.

1.3.1 Formule de Hirzebruch

On considère V_{N-r-1} l'intersection de $(r+1)$ hypersurfaces de degré respectif d_i dans $P_{\mathbb{C}}^N$, et le polynôme de Poincaré associé à la variété V_{N-r-1} défini comme suit.

$$P(y; V_{N-r-1}) = \sum_{i=0}^{N-r-1} \dim H^i(V_{N-r-1}; \mathbb{C}) y^i$$

On a alors le résultat.

Théorème 1.11 (Hirzebruch, [Hir66])

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère V_n l'intersection régulière de $(r+1)$ hypersurfaces de degrés respectifs d_i dans $P_{\mathbb{C}}^{n+r+1}$. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(y; V_n) z^{n+r+1} = \frac{1}{(1+zy)(1-z)} \prod_{i=1}^{r+1} \frac{(1+zy)^{d_i} - (1-z)^{d_i}}{(1+zy)^{d_i} + y(1-z)^{d_i}}$$

Remarquons qu'à partir de ce théorème, on pourrait, en écrivant la fraction du théorème en série entière et en identifiant les différents coefficients, calculer les nombres de Betti de toutes intersections de $(r+1)$ hypersurfaces de degré respectif d_i dans $P_{\mathbb{C}}^N$. Néanmoins, il est extrêmement difficile d'effectuer un tel calcul avec la formule sous cette forme. Nous allons donc, à partir de cette formule, en déduire une nouvelle qui va nous permettre de calculer, non plus les nombres de Betti, mais les nombres de Hodge d'une telle intersection, qui sont par définition $h^{p,q}(V_{N-r-1}) = \dim H^{p,q}(V_{N-r-1}; \mathbb{C})$. Si la nouvelle formule peut paraître, à première vue, plus compliquée que la formule d'origine, elle est néanmoins très pratique dans certaines situations, en particulier dans le cas des intersections de quadriques. Avant d'énoncer cette formule, on a besoin de quelques notations, on pose

$$h_0^{p,q}(V_n) = \begin{cases} h^{p,q}(V_n) = \dim H^{p,q}(V_n, \mathbb{C}) & \text{si } p \neq q, \\ h^{p,p}(V_n) - 1 = \dim H^{p,p}(V_n, \mathbb{C}) - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les entiers $h_0^{p,q}(V_n)$ sont donc les nombres de Hodge de la cohomologie primitive d'une intersection de multidegré $\underline{d} = (d_0, \dots, d_r)$. Posons alors

$$H(\underline{d}; y, z) = \sum_{p,q \geq 0} h_0^{p,q}(V_{p+q}) y^p z^q$$

Dans cette notation, on considère les variétés V_{p+q} , intersections de r hypersurfaces de degré d_i dans $P_{\mathbb{C}}^{p+q+r}$, où r est fixé. Comme pour la formule de Hirzebruch, c'est la dimension de l'espace ambiant qui varie.

Proposition 1.12 (Deligne). *Avec les notations précédentes, on obtient les formules suivantes*

$$H(\underline{d}; y, z) = \frac{(1+y)^{d-1} - (1+z)^{d-1}}{(1+z)^d y - (1+y)^d z}$$

$$H(\underline{d}; y, z) = \sum_{P \subset [0,r]} \left[((1+y)(1+z))^{|P|-1} \prod_{i \in P} H(d_i; y, z) \right]$$

où la somme est prise sur l'ensemble des sous-ensembles d'entiers compris entre 0 et r .

Démonstration. Pour la première égalité, on considère V_n une hypersurface de degré d dans $P_{\mathbb{C}}^{n+1}$. On part de la formule de Hirzebruch, et on obtient

$$\sum_{n \geq 0} P(u; V_n) v^n = \frac{1}{(1+uv)(1-v)v} \times \frac{(1+uv)^d - (1-v)^d}{(1+uv)^d + u(1-v)^d}$$

Par le changement de variables, $y = uv$ et $z = -v$, on obtient l'égalité

$$\sum_{n \geq 0} P(u; V_n) v^n = \frac{1}{(1+y)(1+z)} \times \frac{(1+y)^d - (1+z)^d}{-z(1+y)^d + y(1+z)^d} \quad (1.1)$$

Cependant, par définition du polynôme de Poincaré d'une variété et d'après la relation entre nombres de Betti et nombres de Hodge, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P(u; V_n) v^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_{p, q=0}^n (-1)^q h^{p, q}(V_n) u^p v^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{p, q=0}^n (-1)^q h_0^{p, q}(V_n) u^p v^n + \sum_{n \geq 0} \sum_{p=0}^n (-1)^p u^p v^n \\ &= \sum_{p, q=0}^n (-1)^q h_0^{p, q}(V_{p+q}) u^p v^{p+q} + \sum_{n \geq 0} \sum_{p=0}^n (-1)^p u^p v^n \\ &= \sum_{p, q=0}^n h_0^{p, q}(V_{p+q}) (uv)^p (-v)^q + \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq p} (-1)^n (uv)^p (-v)^{n-p} \end{aligned}$$

Par le changement de variables, $y = uv$ et $z = -v$, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P(u; V_n) v^n &= \sum_{p, q=0}^n h_0^{p, q}(V_{p+q}) y^p z^q + \sum_{p \geq 0} \sum_{n-p \geq 0} (-1)^p y^p (-1)^{n-p} z^{n-p} \\ &= \sum_{p, q=0}^n h_0^{p, q}(V_{p+q}) y^p z^q + \frac{1}{(1+y)(1+z)} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la deuxième égalité

$$\sum_{n \geq 0} P(u; V_n) v^n = H(d; y, z) + \frac{1}{(1+y)(1+z)} \quad (1.2)$$

En utilisant les deux égalités 1.1 et 1.2, on en déduit

$$\begin{aligned} H(d; y, z) &= \frac{1}{(1+y)(1+z)} \frac{(1+y)^d - (1+z)^d}{y(1+z)^d - z(1+y)^d} - \frac{1}{(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{(1+y)^{d-1} - (1+z)^{d-1}}{y(1+z)^d - z(1+y)^d} \end{aligned}$$

De la même manière, pour obtenir la deuxième égalité du théorème, on obtient

$$H(d; y, z) = \frac{1}{(1+y)(1+z)} \left[\prod_{i=0}^r \frac{(1+y)^d - (1+z)^d}{y(1+z)^d - z(1+y)^d} - 1 \right]$$

On utilise alors le résultat suivant (qui se démontre facilement par récurrence sur r),

$$\prod_{i=0}^r a_i - 1 = \sum_{P \subset [0, r]} \prod_{i \in P} (a_i - 1)$$

On en déduit donc,

$$\begin{aligned} H(\underline{d}; y, z) &= \frac{1}{(1+y)(1+z)} \left[\sum_{P \subset [0, r]} \prod_{i \in P} \left(\frac{(1+y)^{d_i} - (1+z)^{d_i}}{y(1+z)^{d_i} - z(1+y)^{d_i}} - 1 \right) \right] \\ &= \sum_{P \subset [0, r]} ((1+y)(1+z))^{|P|-1} \prod_{i \in P} H(d_i) \end{aligned}$$

□

1.3.2 Intersection de quadriques

On souhaite à présent utiliser les résultats précédent afin de déterminer les nombres de Hodge d'une intersection de $(r+1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{C}}^N$, c'est à dire une intersection de $(r+1)$ hypersurfaces de degré 2.

Proposition 1.13. *Soit $X_{\mathbb{C}}(r)$ une intersection régulière de $(r+1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{C}}^N$. Les nombres de Hodge de la cohomologie primitive de $X_{\mathbb{C}}(r)$ sont alors donnés, pour $p < q$ avec $p+q = N-r-1$, par la formule :*

$$h_0^{p,q}(X_{\mathbb{C}}(r)) = \sum_{k=1}^{r+1} \binom{r+1}{k} \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} \binom{k-1}{q-p+\ell} \binom{q+\ell}{k-1} \right], \quad (1.3)$$

avec la convention $\binom{n}{m} = 0$ si $n < m$. Les nombres de Hodge de la cohomologie primitive de $X_{\mathbb{C}}(r)$ pour $p+q \neq N-r-1$ sont nuls.

Démonstration. La deuxième partie de la proposition, à savoir que les nombres de Hodge de la cohomologie primitive de $X_{\mathbb{C}}(r)$ pour $p+q \neq N-r-1$ sont nuls, est un fait général en géométrie algébrique complexe. Nous nous contenterons ici de démontrer la formule (1.3). En utilisant la formule de la proposition 1.12 pour une hypersurface de degré 2, on trouve

$$H(2) = \frac{1}{1-yz} = \sum_{k \geq 0} (yz)^k$$

Pour l'intersection de $(r+1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{C}}^N$ noté $X_{\mathbb{C}}(r)$, toujours en utilisant la formule de la proposition 1.12, on trouve

$$H(2) = \sum_{k=1}^{r+1} \binom{r+1}{k} ((1+y)(1+z))^{k-1} (H(2))^k$$

Par un calcul direct des différents termes intervenant dans cette égalité, on trouve

$$\begin{aligned} (H(2))^k &= \left(\frac{1}{1-yz} \right)^k = \sum_{\ell \geq 0} \binom{\ell+k-1}{k-1} (yz)^\ell \\ ((1+y)(1+z))^{k-1} &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m \binom{k-1}{\ell} \binom{\ell}{m} \binom{m}{p} y^{\ell-p} z^m \end{aligned}$$

On en conclut que pour $p < q$ (le problème est ici symétrique) avec $p + q = N - r - 1$, en identifiant les différents coefficients de $H(\underline{2})$, le nombre $h_0^{p,q}(X_{\mathbb{C}}(r))$ est donné par

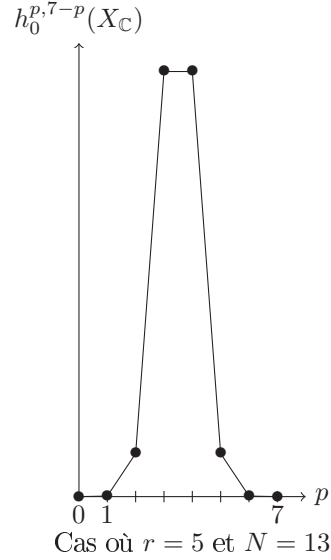
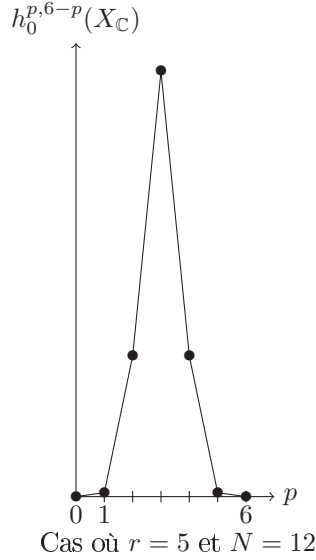
$$\sum_{k=1}^{r+1} \sum_{\ell=q-k+1}^q \sum_{m=q-\ell}^{k-1} \binom{r+1}{k} \binom{\ell+k-1}{k-1} \binom{k-1}{m} \binom{m}{q-\ell} \binom{q-\ell}{\ell+m-p}$$

Ainsi, en utilisant l'identité de Van der Monde sur les coefficients binomiaux, on obtient le résultat suivant

$$h_0^{p,q}(X_{N-r-1}) = \sum_{k=1}^{r+1} \binom{r+1}{k} \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} \binom{k-1}{q-p+\ell} \binom{q+\ell}{k-1} \right]$$

□

Dans ce qui suit, je représente graphiquement la répartition des nombres de Hodge de la cohomologie primitive pour une intersection de 6 quadriques dans $P_{\mathbb{C}}^{12}$ et $P_{\mathbb{C}}^{13}$.



On peut constater, sur le graphique mais surtout directement par le calcul, que les nombres de Hodge de la cohomologie primitive d'une intersection de $(r+1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{C}}^N$ sont non nuls uniquement sur un intervalle de longueur $(r+1)$ centrés autour de $p = q = \frac{N-r-1}{2}$, on dit qu'elles ont le niveau de Hodge $(r+1)$.

Corollaire 1.14. *Pour une intersection régulière de deux quadriques $X_{\mathbb{C}}$ dans $P_{\mathbb{C}}^N$, on a*

$$\sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{C}}) = \begin{cases} 2N & \text{si } N \text{ est paire} \\ 2(N-1) & \text{si } N \text{ est impaire} \end{cases}$$

Démonstration. La somme des nombres de Betti d'une variété complexe est égale à la somme de ses nombres de Hodge. Cependant, les nombres de Hodge

$h^{p,q}(X_{\mathbb{C}})$ sont non nulles si et seulement si $p + q = N - 2 = \dim(X_{\mathbb{C}})$ ou si $p = q \leq N - 2$ et $h^{p,p}(X_{\mathbb{C}}) = 1$ sauf si $2p = N - 2$. Supposons que $N = 2k$ est paire, alors, en utilisant la formule (1.3), on obtient le résultat

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{C}}) &= h_0^{k-1, k-1}(X_{\mathbb{C}}) + 2k - 1 \\ &= 2k + 1 + 2k - 1 \\ &= 4k = 2N. \end{aligned}$$

Supposons que $N = 2k + 1$, alors, toujours en utilisant la formule (1.3),

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{C}}) &= 2h_0^{k-2, k-1}(X_{\mathbb{C}}) + 2k \\ &= 2k + 2k \\ &= 4k = 2(N - 1). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.15. *Pour une intersection régulière de trois quadriques $X_{\mathbb{C}}$ dans $P_{\mathbb{C}}^N$, on a*

$$\sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{C}}) = \begin{cases} N^2 - 4 & \text{si } N \text{ est paire} \\ N^2 - 1 & \text{si } N \text{ est impaire} \end{cases}$$

Démonstration. La somme des nombres de Betti d'une variété complexe est égale à la somme de ses nombres de Hodge. Cependant, les nombres de Hodge $h^{p,q}(X_{\mathbb{C}})$ sont non nulles si et seulement si $p + q = N - 3 = \dim(X_{\mathbb{C}})$ ou si $p = q \leq N - 3$ et $h^{p,p}(X_{\mathbb{C}}) = 1$ sauf si $2p = N - 3$. Supposons que $N = 2k$ est paire, alors, en utilisant la formule (1.3), on obtient le résultat

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{C}}) &= 2h^{k-2, k-1}(X_{\mathbb{C}}) + 2k - 2 \\ &= 4k^2 - 2k - 2 + 2k - 2 \\ &= 4k^2 - 4 = N^2 - 4. \end{aligned}$$

Supposons que $N = 2k + 1$, alors, toujours en utilisant la formule (1.3),

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{C}}) &= h^{k-1, k-1}(X_{\mathbb{C}}) + 2h^{k-2, k}(X_{\mathbb{C}}) + 2k - 2 \\ &= 3k^2 + 3k + 2 + k(k - 1) + 2k - 2 \\ &= 4k^2 + 4k = N^2 - 1. \end{aligned}$$

□

1.4 Intersections de quadriques réelles

1.4.1 Variété spectrale

Considérons $q = (q_0, q_1, \dots, q_r)$ une famille de $(r + 1)$ formes quadratiques à coefficients réels, linéairement indépendantes. À une telle famille, on a précé-

demment associée l'application

$$\hat{q} : \begin{array}{ccc} P_{\mathbb{C}}^r & \longrightarrow & \mathbb{P}(S^2(\mathbb{C}^{N+1})^*) \\ (\omega_0, \dots, \omega_r) & \longmapsto & \omega q \end{array} .$$

Une telle application détermine une variété $C_{\mathbb{C}}$ appelée *variété spectrale*, définie comme l'ensemble

$$C_{\mathbb{C}} = \{\omega \in P_{\mathbb{C}}^r \text{ tel que } \det(\omega q) = 0\}.$$

Pour toute la suite, on suppose que $C_{\mathbb{C}}$ est un sous-espace propre de $P_{\mathbb{C}}^r$, c'est à dire, on exclut la possibilité d'avoir $C_{\mathbb{C}} = P_{\mathbb{C}}^r$; dans ce cas, $X_{\mathbb{C}}$ n'est pas une intersection régulière. Sous cette condition, $C_{\mathbb{C}}$ est une hypersurface de $P_{\mathbb{C}}^r$ de degré $N + 1$. Cependant, comme les formes quadratiques q_0, q_1, \dots, q_r sont à coefficients réels, on peut regarder cette même application sur \mathbb{R}

$$\hat{q} : \begin{array}{ccc} P_{\mathbb{R}}^r & \longrightarrow & \mathbb{P}(S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*) \\ (\omega_0, \dots, \omega_r) & \longmapsto & \omega q \end{array} ,$$

et définir la variété spectrale réelle $C_{\mathbb{R}}$ comme la partie réelle de $C_{\mathbb{C}}$. Comme pour l'étude des intersections de quadriques complexes, on veut ici uniquement étudier les intersections de quadriques régulières sur \mathbb{R} . Par la suite, on parlera de *pinceau de quadriques* pour désigner une famille de deux quadriques et de *faisceau de quadriques* pour désigner une famille de trois quadriques. Il n'est pas toujours simple de vérifier qu'une intersection de quadriques est régulière, nous allons donc utiliser un résultat pour s'assurer que l'intersection des quadriques est régulière mais en contre-partie, on va limiter les intersections que l'on étudie.

Lemme 1.16. *Un point ω de la variété spectrale $C_{\mathbb{C}}$ d'un pinceau de quadriques dans $P_{\mathbb{C}}^N$ est un point simple si et seulement si la quadrique $\{\omega q = 0\}$ a une unique point singulier et ce point n'est pas un point base du pinceau.*

Démonstration. Soient (q_0, q_1) les deux formes quadratiques du pinceau de quadriques. Quitte à modifier ces deux formes quadratiques par une famille équivalente, on peut toujours supposer que q_1 est une forme non dégénérée (car par hypothèse C est un sous-espace propre), et que ω est le point de coordonnées $[1 : 0]$ dans $P_{\mathbb{C}}^1$. On est donc amené à étudier la famille de quadriques $(q_0 + \lambda q_1)_{\lambda \in \mathbb{C}}$.

Supposons que la quadrique $\{q_0 = 0\}$ a un unique point singulier et que ce point n'est pas un point base du pinceau. Alors, il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{C}^{N+1}$ qui engendre $\ker(q_0)$ et tel que $q_1(x_0) \neq 0$. On en déduit que x_0^\perp , l'espace orthogonale de x_0 par rapport à la forme bilinéaire associée à q_1 , est un hyperplan de \mathbb{C}^{N+1} . Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la décomposition $\mathbb{C}^{N+1} = \mathbb{C}x_0 \oplus x_0^\perp$ est orthogonale. On en déduit

$$\det(q_0 + \lambda q_1) = \det((q_0 + \lambda q_1)|_{\mathbb{C}x_0}) \det((q_0 + \lambda q_1)|_{x_0^\perp})$$

Le point $[1 : 0] \in P_{\mathbb{C}}^1$ est un point double de la variété spectrale si et seulement si $\lambda = 0$ est une racine double du polynôme $\det(q_0 + \lambda q_1)$, ou encore si et seulement si le déterminant $\det((q_0)|_{x_0^\perp}) = 0$. Cette dernière égalité est impossible puisque $\ker(q_0)$ est engendré par x_0 et que $x_0 \notin x_0^\perp$.

Inversement, supposons que la forme quadratique q_0 est dégénérée et choisissons $x_0 \in \ker(q_0)$. Supposons également que la forme quadratique q_1 est non-dégénérée et que $q_1(x_0) = 0$, autrement dit, on suppose que x_0 est un point base du pinceau. On veut montrer que dans ce cas, $\lambda = 0$ est une racine double du polynôme $\det(q_0 + \lambda q_1)$; en particulier, ω ne peut pas être un point simple de la variété spectrale. Par hypothèse, q_1 est non-dégénérée, l'espace orthogonale (par rapport à q_1) x_0^\perp est un hyperplan. Alors, il existe un vecteur $x_1 \in \mathbb{C}^{N+1}$ vérifiant $q_1(x_0, x_1) = 1$. Quitte à changer x_1 par une combinaison linéaire de x_1 et x_0 , on peut supposer que $q_1(x_1) = 0$. Comme pour x_0 , le sous-espace orthogonale (par rapport à q_1) x_1^\perp est un hyperplan. Le sous-espace vectoriel $V = x_0^\perp \cap x_1^\perp$ est de codimension 2 puisque ni x_0 ni x_1 n'appartiennent à ce sous-espace. On fixe (x_2, \dots, x_N) une base de V , remarquons que par construction, on a pour tout $v \in V$ l'égalité $q_1(x_1, v) = q_1(x_0, v) = 0$. Alors, dans la base (x_0, \dots, x_N) de \mathbb{C}^{N+1} , la matrice associée à la forme quadratique $q_0 + \lambda q_1$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & c_1 & c_2 & \dots & c_N \\ 0 & c_2 & & & \\ \vdots & \vdots & & M & \\ 0 & c_N & & & \end{pmatrix}$$

où $c_i = q_0(x_1, x_i)$ et M est la matrice de la restriction $(q_0 + \lambda q_1)|_V$. Par un calcul simple, le polynôme $\det(q_0 + \lambda q_1)$ admet zéro comme racine double. \square

Proposition 1.17. *Si la variété spectrale $C_{\mathbb{C}}$ d'un système linéaire de $(r+1)$ formes quadratiques est non singulière, alors l'intersection $X_{\mathbb{C}}$ des quadriques associées aux formes quadratiques est régulière.*

Démonstration. La variété $X_{\mathbb{C}}$ est régulière si et seulement si pour tout point $\omega \in C_{\mathbb{C}}$ la quadrique ωq est non dégénérée sur $X_{\mathbb{C}}$. Il suffit d'observer qu'un pinceau générique passant par $\omega \in C_{\mathbb{C}}$ est transverse à $C_{\mathbb{C}}$. Or, par hypothèse $C_{\mathbb{C}}$ est non singulière, donc pour tout $\omega \in C_{\mathbb{C}}$, ω est un point simple, et par le lemme 1.16, on en déduit que l'unique point singulier de $\{\omega q = 0\}$ n'est pas dans $X_{\mathbb{C}}$, on a ainsi démontré que la famille de formes quadratiques est non-dégénérée (sur \mathbb{C}) et donc que l'intersection de quadriques est régulière. \square

Par un argument simple de dimension, on peut voir que la variété spectrale $C_{\mathbb{C}}$ est nécessairement singulière pour $r \geq 3$. Pour le voir, il nous faut adopter un autre point de vue sur les intersections de quadriques. On a déjà signalé qu'une intersection de quadriques est uniquement déterminée par une famille de formes quadratiques, et à une telle famille, on a associée une application $\mathbb{R}^{r+1} \rightarrow S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*$. L'image de cette application est un sous-espace vectoriel de dimension r dans l'espace des formes quadratiques $S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*$. Dans l'espace vectoriel $S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*$, on peut définir une variété particulier $D(N)$ constituée des formes quadratiques dégénérées et appelé *variété discriminant*. Remarquons qu'alors, la variété spectrale $C_{\mathbb{R}}$ n'est autre que l'intersection de la projectivisation de la variété discriminant avec le sous-espace projectif donnée par l'image de l'application \hat{q} . Pour tout entier $1 \leq k \leq N+1$, on pose

$$D_k(N) = \{q \in S^2(\mathbb{R}^{N+1})^* \text{ tel que } \text{corang}(q) = k\}$$

Lemme 1.18. *Soit $q_0 \in S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*$, on pose $V_0 = \ker(q_0)$. Alors, il existe un voisinage U de q_0 dans $S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*$ et une application $\Phi : U \rightarrow S^2(V_0)^*$ tel que pour tout $q \in U$*

$$\begin{aligned} \Phi(q_0) &= 0; & \text{corang}(q) &= \text{corang}(\Phi(q)); \\ d_{q_0}\Phi(q) &= q|_V; & i^-(q) &= i^-(q_0) + i^-(\Phi(q)). \end{aligned}$$

où $i^-(q)$ est l'inertie négative de la forme quadratique.

Démonstration. Soit γ un lacet dans le plan complexe séparant les valeurs propres non nulles de la forme quadratique q_0 avec l'origine. Autrement dit, le lacet γ définit un espace compact dans \mathbb{C} , correspondant à l'intérieur de γ , ne contenant que la valeur propre nulle de la forme quadratique q_0 . Il existe un voisinage U de q_0 dans $S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*$ tel que pour tout $q \in U$, les valeurs propres de la forme quadratique q appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Pour tout $q \in U$, on définit π_q la projection orthogonale sur le sous-espace propre $V_\gamma(q)$ engendré par les vecteurs propres des valeurs propres à l'intérieur de γ . En particulier, on obtient $\pi_{q_0}|_{V_0} = id_{V_0}$. Alors, on définit

$$\Phi(q) = q \circ \pi_q|_{V_0}.$$

Cette application vérifie toutes les propriétés de la proposition. \square

À l'aide de ce lemme, on obtient le résultat recherché.

Corollaire 1.19. *L'ensemble $D_k(N)$ est une sous-variété analytique de codimension $k(k+1)/2$ dans $S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*$ pour tout $1 \leq k \leq N+1$. L'adhérence de cette sous-variété est $\overline{D_k(N)} = \bigcup_{j \geq k} D_j(N)$ et le lieu de ces points singuliers est donné par $\overline{D_{k+1}(N)}$.*

En particulier, le lieu des points singuliers de $D(N)$ est de codimension 3. On retrouve ainsi le fait qu'une intersection de $(r+1)$ quadriques pour $r \geq 3$ a toujours une variété spectrale singulière. La proposition 1.17 nous sera néanmoins utile pour l'étude des intersections de trois quadriques, où de manière générique, la variété spectrale est non-singulière. Cependant, deux problèmes peuvent apparaître. D'une part, dans les cas d'intersections de deux quadriques, la variété spectrale d'une intersection est singulière si et seulement si la famille de formes quadratiques associée est dégénérée sur \mathbb{C} , le résultat est faux sur \mathbb{R} . Il est impossible de "voir" les singularités d'une intersection de quadriques uniquement à l'aide de la variété spectrale. En effet, une intersection singulière et une intersection régulière peuvent avoir une même variété spectrale. Par exemple,

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x_0x_1 - 2x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ -2x_0x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$$

représente deux intersections de deux quadriques; or, la première famille est non-dégénérée sur \mathbb{R} tandis que la seconde est dégénérée. Pourtant, ces deux intersections de quadriques ont la même variété spectrale. D'autre part, pour les intersections de trois quadriques, le problème est d'autant plus compliqué qu'une famille de formes quadratiques non-dégénérée sur \mathbb{C} peut tout de même avoir une variété spectrale singulière (c.f. chapitre 4). Dans la suite de ce texte,

nous travaillerons uniquement avec des variétés spectrales non-singulières sur \mathbb{C} , nous commencerons à parler de variété spectrale singulière uniquement au chapitre 4.

On définit la variété $\tilde{C} \subset S^r$ comme la pré-image de $C_{\mathbb{R}}$ par le revêtement double de l'espace projectif $P_{\mathbb{R}}^r$ par S^r , on a donc

$$\tilde{C} = \{\omega \in S^r \text{ tel que } \det(\omega q) = 0\}$$

On définit la *fonction indice* $ind_q : S^r \rightarrow \mathbb{Z}$ comme l'indice d'inertie négatif de la forme quadratique ωq (c'est à dire le nombre de valeur propre strictement négative de la matrice associée à la forme quadratique). Si il n'y a pas d'ambiguïté possible, on notera ind au lieu de ind_q pour la fonction indice. La fonction indice vérifie certaines propriétés évidentes décrites dans la proposition suivante.

Proposition 1.20. *Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de quadriques. La fonction indice associée à cette intersection satisfait les propriétés :*

1. *ind est semi-continue par valeur inférieure ;*
2. *ind est localement constante sur $S^r \setminus C$;*
3. *ind fait un saut de ± 1 quand on traverse C transversalement en ses points réguliers ;*
4. *$ind(-\omega) = N + 1 - [ind(\omega) + corang(\omega q)]$.*

On pose alors $i_{\min} = \min_{\omega \in S^2} ind(\omega)$ et $i_{\max} = \max_{\omega \in S^2} ind(\omega) = N + 1 - i_{\min}$.

Dans la suite, nous allons décrire une *suite spectrale* dite d'Agrachev qui va nous permettre de déterminer les groupes d'homologie de l'intersection de quadriques à partir de la variété spectrale et de la fonction indice ind que l'on vient de construire.

1.4.2 Suite spectrale

Dans cette partie, nous n'allons pas chercher à calculer directement les nombres de Betti d'une intersection de quadriques réelles $X_{\mathbb{R}}$. À la place, on va calculer les nombres de Betti du complémentaire $P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}$ en utilisant une variété homotope à ce complémentaire. On considère alors le sous-ensemble

$$L_{\mathbb{R}}^+ = \{(\omega, x) \in S^r \times P_{\mathbb{R}}^N \text{ tel que } (\omega.q)(x) > 0\} \subset S^r \times P_{\mathbb{R}}^N.$$

Lemme 1.21. *La projection $S^r \times P_{\mathbb{R}}^N \rightarrow P_{\mathbb{R}}^N$ se restreint en une équivalence d'homotopie $L_{\mathbb{R}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Notons p la projection $S^r \times P_{\mathbb{R}}^N \rightarrow P_{\mathbb{R}}^N$. L'image inverse d'un point $x \in X_{\mathbb{R}}$ n'intersecte pas l'ensemble $L_{\mathbb{R}}^+$, on en déduit que la restriction de la projection à l'espace $L_{\mathbb{R}}^+$ est à valeur dans $P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}$. De plus, la restriction $L_{\mathbb{R}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}$ est un fibré localement trivial et pour chaque point $x \in P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}$, l'image inverse

$$p^{-1}(x) = \{\omega \in S^r \text{ tel que } (\omega.q)(x) > 0\}$$

est contractile. □

On considère alors la filtration croissante de S^r donnée par

$$\emptyset = \Omega_{-1} \subset \Omega_0 \subset \cdots \subset \Omega_{N+1} = S^r$$

où $\Omega_i = \{\omega \in S^r \text{ tel que } \text{ind}(\omega) + \text{corang}(\omega q) \leq i\}$ sont des ouverts. Avant de construire la suite spectrale reliant l'homologie d'une intersection de plusieurs quadriques et les caractéristiques de sa variété spectrale, nous allons avoir besoin de quelques résultats intermédiaires.

Proposition 1.22. *On considère une homotopie lisse*

$$\begin{aligned} U \times [0, 1] &\rightarrow S^2(\mathbb{R}^{N+1})^* \\ (\omega, t) &\mapsto \omega q_t \end{aligned}$$

où $U \subset S^r$ et q_t est une famille de formes quadratiques non-dégénérée pour tout $t \in [0, 1]$. On pose $L_t = \{(\omega, x) \in U \times P_{\mathbb{R}}^N \text{ tel que } \hat{q}_t(\omega)(x) > 0\}$. Alors, il existe une équivalence d'homotopie entre L_0 et L_1 .

Démonstration. Afin de démontrer que les deux ensembles L_0 et L_1 ont même type d'homotopie, nous allons construire un flot F_t issue d'un champ de vecteurs complet Z_t sur $U \times P_{\mathbb{R}}^N$ vérifiant les conditions $F_0 = id$ et $F_t(L_0) \subset L_t$. En utilisant les mêmes idées, on va pouvoir construire un autre flot G_t vérifiant les conditions $G_0 = id$ et $G_t(L_1) \subset L_{1-t}$.

Il nous reste donc à construire un champ de vecteurs Z_t sur $U \times P_{\mathbb{R}}^N$ dont le flot vérifiera les conditions souhaitées. On décompose notre champ de vecteurs en deux composantes $Z_t = X_t + Y_t$ où pour tout couple $(\omega, x) \in U \times P_{\mathbb{R}}^N$, $X_t(\omega, x)$ est un vecteur tangent à $P_{\mathbb{R}}^N$ et $Y_t(\omega, x)$ est un vecteur tangent à U . Pour construire ce champ de vecteurs Z_t , il suffit de travailler localement autour des triplets $(\omega, x, t) \in U \times P_{\mathbb{R}}^N \times [0, 1]$ satisfaisant l'égalité $\omega q_t(x) = 0$; l'idée générale est de se dire que tant que la condition $\omega q_t(x) > 0$ est satisfaite, on peut poser $Z_t(\omega, x) = 0$. Pour un tel triplet, on a alors deux possibilités. Supposons que $x \notin \ker(\omega q_t)$ alors on peut poser $Y_t(\omega, x) = 0$ et choisir le vecteur $X_t(\omega, x)$ dans l'espace tangent à $P_{\mathbb{R}}^N$ orthogonale à x (car l'espace orthogonale est distinct de l'espace projectif $P_{\mathbb{R}}^N$) de sorte que $\omega q_t(x + X_t(\omega, x)) > 0$. Inversement, supposons que $x \in \ker(\omega q_t)$, alors on pose $X_t(\omega, x) = 0$. Par hypothèse de non-dégénérescence de la famille q_t , il existe un indice i pour lequel $q_{t,i}(x) \neq 0$ où $q_t = (q_{t,0}, \dots, q_{t,r})$. On choisit alors le vecteur $Y_t(\omega, x)$ dans la direction $q_{t,i}$. Dans tous les cas, il suffit de lisser le champ de vecteurs sur un voisinage des triplets (t, ω, x) satisfaisant $\omega q_t(x) = 0$, et d'utiliser une partition de l'unité pour obtenir un champ de vecteurs globales dont le flot va satisfaire les conditions $F_0 = id$ et $F_t(L_0) \subset L_t$. On construit de la même manière un flot G_t satisfaisant les conditions $G_0 = id$ et $G_t(L_1) \subset L_{1-t}$. Les compositions $F_1 \circ G_1 : L_1 \rightarrow L_1$ et $G_1 \circ F_1 : L_0 \rightarrow L_0$ sont par construction homotopes à l'identité, on pourra en déduire que L_0 et L_1 sont homotopes. \square

Soit q une famille de formes quadriques non-dégénérée. Pour tout ensemble $U \subset S^r$, on considère l'ensemble

$$L_q(U) = \{(\omega, x) \in U \times P_{\mathbb{R}}^N \text{ tel que } \omega q(x) > 0\}.$$

La proposition 1.22 va nous être très utile par la suite pour démontrer l'existence d'une équivalence d'homotopie entre les ensembles $L_q(U)$ et $L_{q'}(U)$ connaissant

une homotopie lisse entre les familles de formes quadratiques non-dégénérées q et q' .

Lemme 1.23. *Soit q une famille de formes quadriques. On suppose que q est non-dégénérée en $\omega_0 \in S^r$. Alors, il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout voisinage convexe $U_1 \subset U_2$ avec $\text{diam}(U_2) < \rho_0$, l'inclusion $L_q(U_1) \subset L_q(U_2)$ est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. Par hypothèse la famille de formes quadratiques q est non-dégénérée en $\omega_0 \in S^r$, alors d'après la proposition 1.7, il existe un réel $\rho_0 > 0$ tel que la famille de formes quadratiques q est non-dégénérée sur $B(\omega_0, \rho_0)$. On peut toujours trouver deux nombres $\rho_1 < \rho_2 \leq \rho_0$, pour obtenir les inclusions suivantes : $B(\omega_0, \rho_1) \subset U_1 \subset U_2 \subset B(\omega_0, \rho_2)$. Pour tout $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, la famille de formes quadratiques q est non-dégénérée sur $B(\omega_0, \rho)$. Après un simple changement de variables, cette famille à paramètre ρ devient une homotopie entre familles de formes quadratiques non-dégénérées sur un domaine de définition fixe, par exemple $B(\omega_0, \rho_2)$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.22 pour obtenir le résultat. \square

Lemme 1.24. *Soit $q = (q_0, \dots, q_r)$ une famille de formes quadriques. On suppose que q est non-dégénérée en $\omega_0 \in S^r$. Alors, il existe un voisinage convexe U de ω_0 tel que l'ensemble $L_q(U)$ a même type d'homotopie que l'espace projectif réel de dimension $N - \text{ind}(\omega_0) - \text{corang}(\omega_0 q)$.*

Démonstration. Afin de démontrer ce lemme, il faut différencier deux cas possibles. Supposons dans un premier temps que $\ker(\omega_0 q) = \{0\}$. La condition $\ker(\omega q) = \{0\}$ étant une condition ouverte, il existe un réel $\rho > 0$ tel que pour tout $\omega \in B(\omega_0, \rho)$ on a l'égalité $\ker(\omega q) = \{0\}$. D'après la proposition 1.7, quitte à diminuer la valeur de ρ , on peut supposer que la famille q est non-dégénérée sur $B(\omega_0, \rho)$. Pour conclure, il suffit de constater que par définition de ρ , et en utilisant la proposition 1.22, il existe une équivalence d'homotopie entre les ensembles $L_q(B(\omega_0, \rho))$ et $L_q(\{\omega_0\})$. Par définition, $L_q(\{\omega_0\}) = \{x \in P_{\mathbb{R}}^N \text{ tel que } \omega_0 q(x) > 0\}$ est isomorphe à l'espace projectif réel de dimension $N - \text{ind}(\omega_0) = N - \text{ind}(\omega_0) - \text{corang}(\omega_0 q)$.

Inversement, supposons que $\ker(\omega_0 q) \neq \{0\}$. Quitte à changer la famille q par des combinaisons linéaires des formes quadratiques q_i de la famille, on peut supposer $\omega_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^r$. D'après la proposition 1.8, pour toute forme quadratique définie positive q^+ , il existe $\rho > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 < \tau < \varepsilon$, la famille de forme quadratique $q_\tau = (q_0 - \tau q^+, q_1, \dots, q_r)$ soit non-dégénérée sur $B(\omega_0, \rho)$. On choisit la forme q^+ et on fixe $\tau > 0$ de sorte que la forme quadratique $q_0 - \tau q^+$ soit non-dégénérée. Autrement dit, on obtient les égalités $\ker(\omega_0 q_\tau) = \{0\}$ et $\text{ind}_{q_\tau}(\omega_0) = \text{ind}_q(\omega_0) + \text{corang}(\omega_0 q)$. D'après le cas précédent, il existe un voisinage convexe U de ω_0 pour lequel $L_{q_\tau}(U)$ est homotope à l'espace projectif réel de dimension $N - \text{ind}_q(\omega_0) - \text{corang}(\omega_0 q)$. Il suffit à présent d'appliquer la proposition 1.22 pour montrer que les ensembles $L_q(U)$ et $L_{q_\tau}(U)$ sont homotopes et ainsi conclure. \square

Nous avons encore besoin de quelques notations. On fixe une base de l'espace \mathbb{R}^{N+1} et on considère l'ensemble

$$\Lambda_i(N) = \{q \in \mathbb{P}(S^2(\mathbb{R}^{N+1})^*) \text{ tel que } \lambda_i(Q) \neq \lambda_{i+1}(Q)\}$$

où $\{\lambda_i(Q)\}_{0 \leq i \leq N}$ représente les valeurs propres de la matrice Q associée à q dans la base choisie, rangées dans l'ordre croissant. Soit ξ_i le fibré vectoriel au-dessus de cet espace $\Lambda_i(N)$ dont la fibre au-dessus d'un point $q \in \Lambda_i(N)$ est le sous-espace de \mathbb{R}^{N+1} engendré par les vecteurs propres des valeurs propres $\lambda_0(Q), \dots, \lambda_i(Q)$. On pose E_i l'espace total de ce fibré, on a donc les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{i+1} & \longrightarrow & E_i \\ & & \downarrow \xi_i \\ & & \Lambda_i(N) \end{array}$$

On pose finalement la notation γ_i pour désigner la première classe de Stiefel-Whitney de ce fibré vectoriel ξ_i .

Théorème 1.25 (Agrachev [Agr88a])

Soient $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de $(r+1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ et $L_{\mathbb{R}}^+$ l'ensemble associée. Il existe une suite spectrale convergeant vers $H^{i+j}(L_{\mathbb{R}}^+)$ dont la deuxième page est donnée par

$$E_2^{i,j} = H^p(\Omega_{N-j})$$

et la deuxième différentielle est donnée par la composition

$$d_2^{i,N-j} : H^i(\Omega_j) \xrightarrow{\delta(\gamma_{j+1}) \cup \gamma} H^{i+2}(\Omega_{j+1}, \hat{q}^{-1}(\Lambda_{j+1})) \rightarrow H^{i+2}(\Omega_{j+1})$$

où δ est le morphisme de cobord $H^1(\hat{q}^{-1}(\Lambda_{j+1})) \rightarrow H^2(\Omega_{j+1}, \hat{q}^{-1}(\Lambda_{j+1}))$ et la deuxième application provient de la suite exacte du couple $(\Omega_{j+1}, \hat{q}^{-1}(\Lambda_{j+1}))$.

Démonstration. Nous allons nous contenter de démontrer l'existence de la suite spectrale, la démonstration de la formule des différentielles de la deuxième page peut être trouvée dans [Agr88a]. La suite spectrale en question est celle de Leray de la projection $\beta_g : L_{\mathbb{R}}^+ \rightarrow S^r$. On sait donc que cette suite spectrale va converger vers les groupes de cohomologie de $L_{\mathbb{R}}^+$. Il reste à étudier la deuxième page de la suite spectrale. La deuxième page de la suite spectrale de Leray est donnée par

$$E_2^{i,j} = H^i(S^r, \mathcal{F}^j)$$

où \mathcal{F}^j est le faisceau donné par le pré-faisceau $U \mapsto H^j(\beta_g^{-1}(U))$ pour tout ouvert $U \subset S^r$. Soit $\omega \in S^r$, le germe du faisceau \mathcal{F}^j au-dessus de ω est donnée par $\varinjlim_{\omega \in \tilde{U}} \mathcal{F}^j(U)$. En appliquant les lemmes 1.23 et 1.24, on obtient immédiatement en remarquant que $\beta_g^{-1}(U) = L_q(U)$,

$$\varinjlim_{\omega \in \tilde{U}} \mathcal{F}^j(U) = H^j \left(P_{\mathbb{R}}^{N-ind(\omega)-corang(\omega q)} \right).$$

On en déduit que la germe au dessus d'un point $\omega \in S^r$ est égale à \mathbb{Z}_2 si et seulement si $j \leq N - ind(\omega) - corang(\omega q)$, ou de manière équivalente si $\omega \in \Omega_{N-j}$. La germe au dessus d'un point $\omega \notin \Omega_{N-j}$ est nulle. On obtient ainsi le résultat annoncé, $E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{N-j})$. \square

Avec l'énoncé de ce théorème, on voit clairement que les ensembles Ω_i jouent un rôle essentiel dans la détermination des nombres de Betti d'une intersection de quadriques.

Corollaire 1.26. *Soient $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de $(r + 1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Avec les notations précédentes, la caractéristique d'Euler de $X_{\mathbb{R}}$ est donné par*

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{2} (1 + (-1)^{N+1}) + \sum_{j=0}^N (-1)^{j+1} \chi(\Omega_j).$$

Démonstration. Par la suite exacte longue du couple $(P_{\mathbb{R}}^N, X_{\mathbb{R}})$ et la dualité de Lefschetz-Poincaré, on obtient l'égalité sur les caractéristiques d'Euler

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = \chi(P_{\mathbb{R}}^N) - (-1)^N \chi(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}})$$

À l'aide de la suite spectrale d'Agrachev, et par les propriétés des suites spectrales, on peut calculer la caractéristique d'Euler de $P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}$ en fonction des termes $E_2^{i,j}$ de la deuxième page pour obtenir,

$$\chi(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) = \sum_{j=0}^N (-1)^{j+N} \chi(\Omega_j).$$

□

Cette suite spectrale ne nous permet pas de calculer directement les nombres de Betti d'une intersection de quadriques. Récemment, une nouvelle suite spectrale basée sur les mêmes idées, a été mise au point par Agrachev et Lerario dans [Ler11], permettant un calcul des nombres de Betti plus directe, cette nouvelle suite spectrale convergeant directement vers les groupes d'homologie de l'intersection de quadriques, sous certaines conditions. Remarquons que pour l'étude d'une intersection de deux ou trois quadriques (à savoir les cas d'intersection qui vont nous intéresser dans les chapitres à venir), on travaillera principalement avec des intersections dont la variété spectrale est non-singulière. Sous cette hypothèse, l'ensemble Ω_i est homotope à l'ensemble $\{\omega \in S^r \text{ tel que } \text{ind}(\omega) \leq i\}$.

Corollaire 1.27. *En conservant les notations du théorème précédent, on a les résultats suivants*

1. $E_2^{0,j} = E_2^{r,j} = \mathbb{Z}_2$ si $j < i_{\min}$;
2. $E_2^{i,j} = 0$ si $j < i_{\min}$ et $1 \leq i \leq r - 1$;
3. $E_2^{i,j} = 0$ si $i_{\min} \leq j < i_{\max}$ et $i \geq r$;
4. $E_2^{i,j} = 0$ si $j \geq i_{\max}$.

Démonstration. Pour démontrer les différents points de ce corollaire, il suffit d'utiliser la description de notre suite spectrale, à savoir $E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{N-j})$. Pour le premier point, si $j < i_{\min}$, alors, $N - j > N - i_{\min} = i_{\max} - 1$. On en déduit immédiatement

$$\Omega_{i_{\max}} = S^r \subset \Omega_{N-j} \subset S^r$$

d'où la première partie de notre proposition. Les trois autres points se démontrent de la même manière. □

À partir de ce corollaire, on en déduit que la deuxième page de la suite spectrale d'Agrachev est de la forme suivante,

$$\begin{array}{c}
 q \\
 \uparrow \\
 q = i_{\max} \\
 \vdots \\
 q = i_{\min} \\
 \vdots \\
 \mathbb{Z}_2 \\
 \vdots \\
 \mathbb{Z}_2 \\
 \downarrow \\
 p = 0 \qquad \qquad \qquad p = r
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \hline
 * & * & \cdots & * & 0 \\
 \hline
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \hline
 * & * & \cdots & * & 0 \\
 \hline
 \mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z}_2 \\
 \hline
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \hline
 \mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z}_2 \\
 \hline
 \end{array}$$

où les * représentent les groupes de cohomologie qui dépendent des ensembles $\Omega_i \neq S^r$. Avant de conclure cette partie, nous allons donner une condition nécessaire (mais non suffisante) de régularité de l'intersection de $(r + 1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ dans un cas très particulier que nous étudierons un peu plus tard.

Corollaire 1.28. *Une intersection de $(r + 1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ vérifiant l'égalité $i_{\min} = i_{\max}$ ne peut-être régulière que si on a l'inégalité $r \leq \frac{N+1}{2}$.*

Démonstration. D'après le lemme 1.21, on a les égalités $H^i(L_{\mathbb{R}}^+) = H^i(P_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}})$. En particulier, on doit obtenir $H^i(L_{\mathbb{R}}^+) = 0$ si $i > N$. Comme les groupes de cohomologie de $L_{\mathbb{R}}^+$ sont donnés par la suite spectrale d'Agrachev (la deuxième page de cette suite spectrale est représenté page 31), il suffit de regarder la dimension maximale atteinte, à savoir

$$r + i_{\min} - 1 = r + \frac{N + 1}{2}.$$

□

Dans les chapitres suivants, nous utiliserons cette suite spectrale dans le cadre des intersections de deux et de trois quadriques (c'est à dire avec $r=1$ et $r=2$). Comme nous l'avons déjà fait remarquer, le théorème 1.25 nous donne les groupes d'homologie de $P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}$ et non directement les groupes d'homologies de l'intersection de quadriques. On a encore besoin d'une dernière donnée pour déterminer ces groupes d'homologie.

1.4.3 L'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$.

Par définition, l'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$ est le plus grand entier pour lequel l'application $H_p(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_p(P_{\mathbb{R}}^N)$ induite par l'inclusion est surjective. Au-delà de cet entier, les applications $H_p(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_p(P_{\mathbb{R}}^N)$ sont toutes nulles (tandis que ces applications sont surjectives pour tout $p \leq \ell(X_{\mathbb{R}})$).

Lemme 1.29. *Considérons une forme quadratique réelle non-dégénérée q telle que $\mu = \min\{N^- + 1, N^+ + 1\} > 0$, où $N^- + 1, N^+ + 1$ sont les indices d'inertie de la forme quadratique. Alors l'homomorphisme d'inclusion*

$$H_i(Q) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N)$$

où $Q \subset P_{\mathbb{R}}^N$ est la quadrique donnée par l'équation $q(x) = 0$, est non nulle pour $0 \leq i \leq \mu - 1$ et nulle sinon.

Démonstration. Quitte à changer la forme quadratique q en $-q$ (ce qui ne change pas la quadrique Q), on peut toujours supposer que $\mu = N^- + 1$. Nous allons démontrer ce lemme en passant par les groupes de cohomologie, le résultat étant le même quitte à passer par la dualité de Poincaré. Nous allons donc montrer que l'homomorphisme $H^i(P_{\mathbb{R}}^{\mu-1}) \rightarrow H^i(Q)$ est surjectif pour $0 \leq i \leq \mu - 1$ et nulle sinon. Au cours de la démonstration du théorème 1.10, nous avons construit un fibré localement trivial

$$\pi : Q \rightarrow P_{\mathbb{R}}^{N^-}$$

dont la fibre est la sphère S^{N^+} . Par les propriétés de la suite spectrale, on en déduit que l'homomorphisme $\pi^* : H^i(P_{\mathbb{R}}^{\mu-1}) \rightarrow H^i(Q)$ est surjectif pour $0 \leq i \leq \mu - 1$. Notons H une section hyperplane réelle de la quadrique $Q \subset P_{\mathbb{C}}^N$, et x un générateur du groupe $H^1(P_{\mathbb{R}}^{\mu-1})$. Ainsi, on obtient par les surjection précédente que $\pi^*(t) = [H_{\mathbb{R}}]^*$, où $[H_{\mathbb{R}}]^* \in H^1(Q_{\mathbb{R}})$ est le dual de $[H_{\mathbb{R}}] \in H_{N-2}(Q_{\mathbb{R}})$ par la dualité de Poincaré. On en déduit que les classes de cohomologie $([H_{\mathbb{R}}]^*)^i = \pi^*(t^i)$ sont non nulles pour $0 \leq i \leq \mu - 1$ et nulles pour $i \geq \mu$, ce qui démontre le lemme. \square

Proposition 1.30. *Considérons $X_{\mathbb{R}}$ l'intersection régulière de $(r + 1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Soit i_{\min} le minimum de la fonction indice et $\ell(X_{\mathbb{R}})$ l'entier définit précédemment. Supposons que $i_{\min} \neq i_{\max}$. Alors, on a les inégalités*

$$i_{\min} - r \leq \ell(X_{\mathbb{R}}) < i_{\min}$$

Démonstration. Soient q_0, \dots, q_r les formes quadratiques qui définissent les quadriques de notre intersection $X_{\mathbb{R}}$. Soit $\omega \in S^r$ un point vérifiant $\text{ind}(\omega, q) = i_{\min}$. On considère la quadrique Q réelle donnée par l'équation $\omega \cdot q = 0$. Par le lemme 1.29, l'homomorphisme induit par l'inclusion $Q_{\mathbb{R}} \subset P_{\mathbb{R}}^N$

$$H_i(Q) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N)$$

est non nul pour $0 \leq i \leq i_{\min} - 1$ et nul sinon. Ainsi, l'homomorphisme

$$H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N)$$

s'annule pour $i \geq i_{\min}$ et donc en déduit que $\ell(X_{\mathbb{R}}) < i_{\min}$.

Pour la première inégalité, considérons la suite exacte longue en homologie de la paire $(X_{\mathbb{R}}, P_{\mathbb{R}}^N)$, puis à l'aide de la dualité de Lefschetz-Poincaré et du lemme 1.21, on obtient la suite exacte

$$\rightarrow H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) \rightarrow H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-i}(L_{\mathbb{R}}^+) \rightarrow$$

Ainsi, l'application d'inclusion est surjective si $H^{N-i}(L_{\mathbb{R}}^+) = 0$. Cependant, d'après le corollaire 1.27, la deuxième page de notre suite spectrale ressemble à

$$\begin{array}{c}
q \\
q = i_{\max} \\
\vdots \\
q = i_{\min} \\
\vdots \\
\mathbb{Z}_2 \\
\vdots \\
\mathbb{Z}_2 \\
p = 0 \qquad \qquad \qquad p = r
\end{array}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
* & * & \cdots & * & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\hline
* & * & \cdots & * & 0 \\
\hline
\mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z}_2 \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\hline
\mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z}_2 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{c}
p \\
p = 0 \qquad \qquad \qquad p = r
\end{array}$$

où les * représentent les groupes de cohomologie qui dépendent des ensembles $\Omega_i \neq S^r$. La condition $H^{N-i}(L_{\mathbb{R}}^+) = 0$ est vérifiée dès lors que $N-i \geq i_{\max} + r - 1$ ou encore

$$i \leq N + 1 - r - i_{\max} = i_{\min} - r$$

□

Proposition 1.31. *Considérons $X_{\mathbb{R}}$ l'intersection régulière de $(r + 1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Supposons que $X_{\mathbb{R}}$ est une M -variété, et que $i_{\min} \neq i_{\max}$, alors, on a l'inégalité suivante.*

$$\ell(X_{\mathbb{R}}) \geq \left\lfloor \frac{\dim(X_{\mathbb{R}})}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N - r - 1}{2} \right\rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x .

Démonstration. Soit X une intersection régulière de $(r + 1)$ quadriques, d'après le théorème de Lefschetz sur sections hyperplanes, l'application

$$H_i(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{C}}^N)$$

est un isomorphisme pour $i < \dim(X_{\mathbb{C}}) = N - r - 1$ et surjective pour $i = \dim(X_{\mathbb{C}})$. Alors, par la suite exacte longue,

$$\rightarrow H_i(P_{\mathbb{C}}^N) \xrightarrow{\varphi_i} H_i(P_{\mathbb{C}}^N, X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H_{i-1}(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H_{i-1}(P_{\mathbb{C}}^N) \xrightarrow{\varphi_{i-1}}$$

on en déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow \ker \varphi_i \rightarrow H_i(P_{\mathbb{C}}^N) \xrightarrow{\varphi_i} H_i(P_{\mathbb{C}}^N, X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H_{i-1}(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow \ker \varphi_{i-1} \rightarrow 0.$$

En sommant les dimensions des groupes, on obtient

$$\begin{aligned}
\dim H_*(P_{\mathbb{C}}^N, X_{\mathbb{C}}) &= \dim H_*(P_{\mathbb{C}}^N) + \dim H_*(X_{\mathbb{C}}) - 2 \dim \ker \varphi_* \\
&\leq \dim H_*(P_{\mathbb{C}}^N) + \dim H_*(X_{\mathbb{C}}) - 2 \left(\left\lfloor \frac{N - r - 1}{2} \right\rfloor + 1 \right)
\end{aligned}$$

De la même manière, par définition de $\ell(X_{\mathbb{R}})$, on obtient

$$\dim H_*(P_{\mathbb{R}}^N, X_{\mathbb{R}}) = \dim H_*(P_{\mathbb{R}}^N) + \dim H_*(X_{\mathbb{R}}) - 2(\ell(X_{\mathbb{R}}) + 1)$$

Ainsi, par l'inégalité de Smith relative, comme $P_{\mathbb{R}}^N$ est une M-variété et que $X_{\mathbb{R}}$ est une M-variété par hypothèse, on en déduit

$$\ell(X_{\mathbb{R}}) \geq \left\lfloor \frac{N-r-1}{2} \right\rfloor$$

□

Concluons cette section en observant que ces deux propositions démontrent le fait annoncé après le calcul des nombres de Betti d'une quadrique.

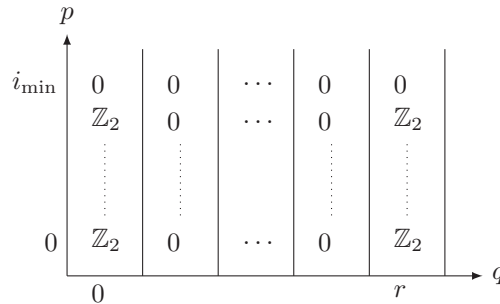
Corollaire 1.32. *Si une intersection $X_{\mathbb{R}}$ de $(r+1)$ quadriques est une M-variété, alors toute combinaison linéaire de nos $(r+1)$ quadriques est une quadrique qui est au moins une $(M-r+1)$ -variété, i.e.*

$$\sum_{i \geq 0} \dim(H_i(Q_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_2)) \geq \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(Q_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}_2)) - 2(r-1)$$

Démonstration. Si $X_{\mathbb{R}}$ une intersection de $(r+1)$ quadriques est une M-variété, alors les deux propositions 1.30 et 1.31 implique que $i_{\min} > \left\lfloor \frac{\dim(X_{\mathbb{R}})}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N-r-1}{2} \right\rfloor$. En particulier, en utilisant le calcul des nombres de Betti d'une quadrique, il est facile de voir que toute combinaison linéaire de nos $(r+1)$ quadriques vérifie l'inégalité annoncée. □

1.5 Variété spectrale réelle vide

Pour conclure ce chapitre sur les généralités concernant les intersections de quadriques réelles, nous allons étudier un cas très particulier, le cas où la variété spectrale ne possède aucun point réel. Soit $X_{\mathbb{R}}$, une intersection de $(r+1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ régulière dont la variété spectrale ne possède aucun point réel. Pour obtenir la régularité de l'intersection des quadriques, il faut supposer que $r \leq \frac{N+1}{2}$. Dans cette situation, la fonction indice est nécessairement constante et la suite spectrale d'Agrachev possède une deuxième page de la forme suivante.



Remarquons que dans notre situation, la suite spectrale, qui en toute généralité est une suite spectrale de Leray, est ici la suite spectrale de Serre du fibré vectoriel $\xi : L_{\mathbb{R}}^+ \rightarrow S^r$. On peut alors montrer que les différentielles qui interviennent dans cette suite spectrale sont toutes triviales. Ainsi, par le théorème 1.25 et le lemme 1.21, on connaît les groupes de cohomologie de $P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}$. En déterminant

la valeur de l'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$, on pourra en déduire les nombres de Betti de notre intersection de $(r + 1)$ quadriques.

Proposition 1.33. *On considère la r^e classe de Stiefel-Whitney du fibré ξ , $w_r(\xi) \in H^r(S^r, \mathbb{Z}_2)$. Si $w_r(\xi) = 0$ alors $\ell(X_{\mathbb{R}}) = \frac{N-1}{2}$. Sinon, on obtient $\ell(X_{\mathbb{R}}) = \frac{N-1}{2} - r$.*

Démonstration. On s'intéresse à la suite exacte longue en homologie du couple $(X_{\mathbb{R}}, P_{\mathbb{R}}^N)$, et plus précisément aux homomorphismes suivants.

$$H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}, X_{\mathbb{R}})$$

Par définition de l'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$, il faut étudier la surjectivité du premier homomorphisme. Cependant, ce dernier est surjectif si et seulement si le deuxième homomorphisme est nul. Par la dualité de Poincaré, on est ramené à regarder l'homomorphisme

$$H^{N-i}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-i}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) \cong H^{N-i}(L_{\mathbb{R}}^+)$$

En notant t un générateur du groupe $H^1(P_{\mathbb{R}}^N)$, on peut décrire ce morphisme en regardant l'image de t^{N-i} qui est un générateur de $H^{N-i}(P_{\mathbb{R}}^N)$. L'image de t^{N-i} est donnée par $p^*(t^{N-i})$, où $p : L_{\mathbb{R}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{R}}^N$ est la projection. Ainsi, $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$ si et seulement si $p^*(t^{i_{\min}}) = 0$, or, par construction des classes de Stiefel-Whitney, on a l'égalité $p^*(t^{i_{\min}}) = w_r(\xi)$. On a donc démontré la première partie de l'énoncé, la deuxième partie de l'énoncé est une simple conséquence de ce que l'on vient d'établir et de la définition des classes de Stiefel-Whitney. \square

Nous sommes désormais en mesure de calculer les nombres de Betti d'une intersection de $(r + 1)$ quadriques dont la variété spectrale ne possède aucun point réel.

Théorème 1.34

Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection de $(r + 1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ dont la variété spectrale ne possède aucun point réel. Si $r = \frac{N+1}{2}$ alors, nécessairement $w_r(\xi) \neq 0$ est tous les groupes d'homologie de $X_{\mathbb{R}}$ sont triviaux. Si $r < \frac{N+1}{2}$, alors

1^{er} cas : *Si $w_r(\xi) = 0$*

$$\begin{aligned} b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{N-3}{2} - r \\ b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 2 & \text{si } \frac{N-1}{2} - r \leq i \leq \frac{N-1}{2} \\ b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } \frac{N+1}{2} \leq i \leq N - r - 1 \end{aligned}$$

2^e cas : *Si $w_r(\xi) \neq 0$*

$$\begin{aligned} b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{N-1}{2} - r \\ b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 0 & \text{si } \frac{N+1}{2} - r \leq i \leq \frac{N-3}{2} \\ b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } \frac{N-1}{2} \leq i \leq N - r - 1 \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème va se dérouler en deux étapes. D'une part, on va calculer la dimension des groupes de cohomologie de $L_{\mathbb{R}}^+$ à l'aide de la suite spectrale d'Agrachev. D'autre part, on va calculer les nombres de Betti en fonction des nombres précédemment calculés, et en fonction de l'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$. Pour la première partie, on a déjà vu que la deuxième page de la suite spectrale se présente sous la forme suivante.

$$\begin{array}{c}
 p \\
 \uparrow \\
 i_{\min} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z}_2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z}_2 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \downarrow \\
 0 \qquad \qquad \qquad r \qquad \qquad \qquad q
 \end{array}$$

On sait également que toutes les différentielles de cette suite spectrale sont triviales, on en déduit immédiatement les dimensions des groupes de cohomologie de $L_{\mathbb{R}}^+$.

$$\begin{aligned}
 \dim H^i(L_{\mathbb{R}}^+) &= 1 && \text{si } 0 \leq i \leq r-1 \\
 \dim H^i(L_{\mathbb{R}}^+) &= 2 && \text{si } r \leq i \leq \frac{N-1}{2} \\
 \dim H^i(L_{\mathbb{R}}^+) &= 1 && \text{si } \frac{N+1}{2} \leq i \leq \frac{N-1}{2} + r
 \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie de la démonstration, on utilise la suite exacte longue du couple $(X_{\mathbb{R}}, P_{\mathbb{R}}^N)$ avec la dualité de Poincaré-Lefschetz et le lemme 1.21. Par définition de l'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$, si $i < \ell(X_{\mathbb{R}})$, on obtient la suite exacte courte suivante.

$$0 \rightarrow H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) \rightarrow H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow 0$$

Si $i = \ell(X_{\mathbb{R}})$, on obtient la suite exacte courte suivante.

$$0 \rightarrow H_{\ell(X_{\mathbb{R}})+1}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-\ell(X_{\mathbb{R}})-1}(L_{\mathbb{R}}^+) \rightarrow H_{\ell(X_{\mathbb{R}})}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{\ell(X_{\mathbb{R}})}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow 0$$

Enfin, si $i > \ell(X_{\mathbb{R}})$, on obtient la suite exacte courte suivante.

$$0 \rightarrow H_{i+1}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) \rightarrow H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow 0$$

On en déduit finalement les nombres de Betti de la variété $X_{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}
 b_i(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) + 1 && \text{si } 0 \leq i < \ell(X_{\mathbb{R}}) \\
 b_i(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) && \text{si } i = \ell(X_{\mathbb{R}}) \\
 b_i(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) - 1 && \text{si } \ell(X_{\mathbb{R}}) < i \leq N-r-1
 \end{aligned}$$

Il suffit alors de combiner ces deux résultats avec la proposition 1.33 pour obtenir les résultats du théorème. Remarquons pour finir que si $r = (N+1)/2$, alors on obtient que le groupe de cohomologie $H^N(L_{\mathbb{R}}^+)$ est de dimension 1,

donc l'homomorphisme $H_0(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_0(P_{\mathbb{R}}^N)$ est nécessairement nul (il suffit de regarder la suite exacte écrite plus haut dans la preuve pour s'en convaincre). On en déduit donc que $\ell(X_{\mathbb{R}}) < 0$, ce qui d'après la proposition 1.33, revient à dire que $w_r(\xi) \neq 0$. \square

Corollaire 1.35. *Une intersection régulière de $(r+1)$ quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ dont la variété spectrale ne possède aucun point réel n'est jamais maximale.*

Remarquons, par exemple, que même dans le cas minimale, à savoir pour $N = 3$ et $r = 1$, on obtient une intersection de deux quadriques donnée par les équations :

$$\begin{cases} x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ 2x_0x_1 + 2x_2x_3 = 0 \end{cases} .$$

Ces équations définissent en fait l'unique intersections de deux quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$ dont la variété spectrale est sans point réel, à déformation près (voir théorème 2.6). On peut voir que l'intersection de quadriques correspondante n'est rien d'autre qu'une fibre de la fibration de Hopf, donc difféomorphe au cercle S^1 . Une telle intersection n'est pas maximale en vertu du corollaire 1.14.

CHAPITRE 2

Intersections de deux quadriques

Nous pouvons à présent utiliser tous les outils que nous venons de développer afin d'étudier les intersections de deux quadriques réelles. Dans ce chapitre, ainsi que dans les suivants, nous travaillerons uniquement avec des intersections de quadriques régulières afin de pouvoir utiliser la suite spectrale d'Agrachev.

2.1 Homologie d'une intersection de deux quadriques

Soient q_0, q_1 deux formes quadratiques et C la variété spectrale associée. On suppose que $C_{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}}^1$ est non singulière, ce qui nous assure d'après la proposition 1.17 que l'intersection des quadriques $X_{\mathbb{R}}$ est régulière. Dans cette situation, les ensembles Ω_i et $\tilde{\Omega}_i = \{\omega \in S^r \text{ tel que } \text{ind}(\omega) \leq i\}$ définis précédemment sont homotopes, on travaillera alors de préférence avec $\tilde{\Omega}_i$ tout en écrivant les groupes de cohomologie $H^p(\Omega_i)$. On suppose également que la fonction indice prend ses valeurs entre 1 et $N \geq 2$ pour éviter l'intersection vide. D'après le corollaire 1.27, les termes de la suite spectrale du théorème 1.25 sont nulles à l'exception éventuellement des termes correspondant à $0 \leq p \leq 1$. En particulier, les différentielles de cette suite spectrale à partir de la deuxième page sont nulles et la suite se stabilise dès la deuxième page. De plus, d'après ce même corollaire 1.27, cette deuxième page se présente de la manière suivante

$$\begin{array}{c} q \\ \uparrow \\ q = i_{\max} \quad 0 \\ \quad \quad \quad * \\ \quad \quad \quad \vdots \\ q = i_{\min} \quad * \\ \quad \quad \quad \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_2 \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\ p = 0 \quad p = 1 \end{array} \quad p$$

Rappelons enfin que cette suite spectrale converge vers les groupes de cohomologie de $L_{\mathbb{R}}^+$ qui, par le lemme 1.21, a même type d'homotopie que $P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}$. On peut dès à présent calculer les nombres de Betti d'une intersection régulière de deux quadriques.

Théorème 2.1

Soient q_0, q_1 deux formes quadratiques et $X_{\mathbb{R}}$ l'intersection des deux quadriques associées aux deux formes quadratiques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. On suppose que $X_{\mathbb{R}}$ est régulière. Alors, si $i_{\min} < (N-1)/2$, les nombres de Betti sont donnés par

$$\begin{aligned} b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } i \leq i_{\min} - 2 \\ b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) \\ b_i(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^0(\Omega_{i+1}) - 1 & \text{si } i_{\min} \leq i \leq i_{\max} - 3 \\ b_{i_{\max}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^0(\Omega_{i_{\max}-1}) \\ b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } i_{\max} - 1 \leq i \leq N - 2 \end{aligned}$$

Si $i_{\min} = (N-1)/2 = i_{\max} - 2$ (donc en particulier, N est impaire), alors les nombres de Betti de $X_{\mathbb{R}}$ sont

$$\begin{aligned} b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } i \leq i_{\min} - 2 \\ b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) \\ b_{i_{\min}}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^0(\Omega_{i_{\min}+1}) \\ b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } i_{\min} + 1 \leq i \leq N - 2 \end{aligned}$$

Si $i_{\min} = N/2 = i_{\max} - 1$ (donc en particulier, N est paire), alors les nombres de Betti de $X_{\mathbb{R}}$ sont

$$\begin{aligned} b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } i \leq i_{\min} - 2 \\ b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) + 1 \\ b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1 & \text{si } i_{\min} \leq i \leq N - 2 \end{aligned}$$

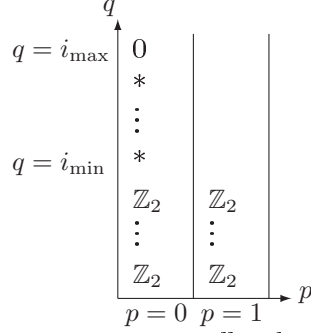
Démonstration. On se contentera ici de démontrer le premier cas (c'est à dire le cas le plus général), les autres cas se démontrant de la même manière, la différence pour les autres cas étant dans le calcul de la dimension des groupes $H^i(L_{\mathbb{R}}^+)$. Commençons cette démonstration en remarquant que par la proposition 1.30, (étant dans le cas $r = 1$), on obtient nécessairement

$$\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$$

Rappelons également que l'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$ est défini comme le plus grand entier pour lequel l'application induite par l'inclusion $H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N)$ est surjective. Par la suite exacte longue en homologie de la paire $(X_{\mathbb{R}}, P_{\mathbb{R}}^N)$ en utilisant la dualité de Poincaré-Lefschetz et le lemme 1.21, on obtient la suite exacte longue suivante

$$\rightarrow H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) \rightarrow H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-i}(L_{\mathbb{R}}^+) \rightarrow$$

- (1) Si les deux groupes $H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+)$ et $H^{N-i}(L_{\mathbb{R}}^+)$ sont nulles alors, on pourra en déduire que les groupes $H_i(X_{\mathbb{R}})$ et $H_i(P_{\mathbb{R}}^N)$ sont isomorphes. Cependant, en regardant la deuxième page de notre suite spectrale,



on en déduit que ces deux groupes sont nulles dès que $N - i - 1 \geq i_{\max}$, autrement dit $i \leq N - 1 - i_{\max} = i_{\min} - 2$. On obtient finalement les groupes d'homologie

$$H_i(X_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{si } i \leq i_{\min} - 2$$

- (2) Cherchons maintenant à calculer le groupe $H_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}})$. Pour se faire, on utilise la suite exacte courte (issue de la suite exacte longue précédente) suivante

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{i_{\min}}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-i_{\min}}(L_{\mathbb{R}}^+) \rightarrow H_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow \\ \rightarrow H_{i_{\min}-1}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

où le premier zéro vient du fait que l'application $H_{i_{\min}}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}}(P_{\mathbb{R}}^N)$ est nulle car $i_{\min} > \ell(X_{\mathbb{R}})$ et le deuxième zéro vient du fait que l'application $H_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}-1}(P_{\mathbb{R}}^N)$ est surjective. On en déduit alors le résultat

$$b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) = \dim H^{N-i_{\min}}(L_{\mathbb{R}}^+) = \dim H_0(\Omega_{i_{\min}})$$

- (3) Comme précédemment, si $i > \ell(X_{\mathbb{R}})$, alors on obtient une suite exacte courte issue de la suite exacte longue en homologie

$$0 \rightarrow H_{i+1}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) \rightarrow H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow 0$$

On en déduit donc pour $i > i_{\min} - 1$, que

$$b_i(X_{\mathbb{R}}) = \dim H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) - 1$$

Il suffit alors de calculer la dimension du groupe de cohomologie de $L_{\mathbb{R}}^+$ à l'aide de la suite spectrale, les différents cas intervenant dans le résultats sont les cas où $\dim H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) = 2$ et où $\dim H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+)$ dépend des ensembles $\Omega_j \neq S^1$. Pour conclure cette démonstration, rappelons que l'on travaille uniquement sur le premier cas du théorème, à savoir $i_{\min} < (N - 1)/2$, qui est le cas le plus général. Dans cette situation, on a déjà montré dans le point (1) que $b_i(X_{\mathbb{R}}) = 1$ si $i \leq i_{\min} - 2$ et par dualité de Poincaré, on obtient de même $b_i(X_{\mathbb{R}}) = 1$ si $i_{\max} - 1 \leq i \leq N - 2$. On a également montré dans le points (2) que $b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) = \dim H^0(\Omega_{i_{\min}})$. Il reste alors à déterminer les nombres de Betti $b_i(X_{\mathbb{R}})$ pour $i_{\min} - 1 \leq i \leq i_{\max} - 2$. Si $i \neq i_{\max} - 2$ alors, d'après le point (3) et la suite spectrale, on obtient le résultat

$$b_i(X_{\mathbb{R}}) = \dim H^{N-i-1}(L_{\mathbb{R}}^+) - 1 = \dim H^0(\Omega_{i+1}) - 1$$

Finalement, pour $i = i_{\max} - 2$, on obtient

$$\begin{aligned} b_{i_{\max}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^{i_{\min}}(L_{\mathbb{R}}^+) - 1 \\ &= \dim H^0(\Omega_{i_{\max}-1}) + \dim H^1(\Omega_{i_{\max}}) - 1 \\ &= \dim H^0(\Omega_{i_{\max}-1}) \end{aligned}$$

□

Dans la suite de ce chapitre, nous allons étudier la classification de ces intersections à déformation près et nous donnerons une caractérisation ainsi que la classification des intersections maximales.

2.2 Classification des intersections de deux quadriques

2.2.1 Classification

La plupart des résultats de ce paragraphe sont issus de l'article de Lopez de Medrano [Lop89]. Dans un premier temps, considérons deux quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ simultanément diagonalisables

$$\begin{cases} q_1(x) = a_0x_0^2 + \cdots + a_Nx_N^2 = 0 \\ q_2(x) = b_0x_0^2 + \cdots + b_Nx_N^2 = 0 \end{cases}$$

On note $X_{\mathbb{R}}$ l'intersection de ces deux quadriques. On pose $A_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et on considère $S = \{A_i, i = 0, \dots, N\}$ une configuration donnée, c'est à dire une famille de points de \mathbb{R}^2 . On suppose

$$(H1) : \left(\begin{array}{l} \text{L'origine de } \mathbb{R}^2 \text{ n'appartient à aucun segment } [A_i, A_j] \\ \text{de points de la configuration } S. \end{array} \right)$$

Sous cette hypothèse, la variété $X_{\mathbb{R}}$ est régulière de dimension réelle $N-2$. Inversement, une intersection régulière de deux quadriques dont les formes quadratiques sont simultanément diagonalisable, vérifie cette hypothèse. Remarquons que si une telle configuration de points de \mathbb{R}^2 satisfaisant (H1) est déformé de manière continue en vérifiant en chaque instant la condition (H1), c'est à dire si on déplace nos points dans \mathbb{R}^2 en préservant la condition (H1), alors la variété $X_{\mathbb{R}}$ ainsi perturbée, appartient toujours à la même classe de déformation. On peut alors décrire les classes de déformation de telles intersections de deux quadriques en décrivant l'ensemble des composantes connexes de l'espace des configurations satisfaisant l'hypothèse (H1).

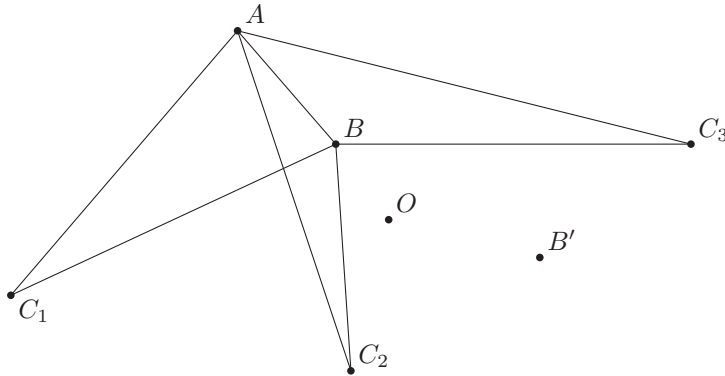
Définition 2.2. Une partition d'un entier m est la donnée d'une suite d'entiers strictement positifs m_1, \dots, m_k vérifiant $m = m_1 + \cdots + m_k$. De plus, une partition est dite impaire (respectivement paire) si k est impaire (respectivement paire). Par convention, 0 admet une unique partition $0 = 0$ qui est impaire. Deux partitions sont équivalentes s'il existe une permutation cyclique ou un renversement transformant la suite d'une partition en la suite de l'autre partition. Une classe d'équivalence de partitions est appelé une partition diédrale.

Théorème 2.3 (Lopez de Medrano)

On a une correspondance une à une entre l'ensemble des composantes connexes de l'espace des configurations à $N + 1$ éléments satisfaisant l'hypothèse (H1) et l'ensemble des partitions diédrales impaires de $N + 1$.

Afin de comprendre et de démontrer ce théorème, on va essentiellement utiliser un lemme et définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des configurations satisfaisant l'hypothèse (H1). Comme nous avons pu le remarquer précédemment, on peut toujours bouger un point d'une configuration donnée dans \mathbb{R}^2 tant que la condition (H1) est satisfaite. Pour une configuration S donnée, on dit que deux points $A, B \in \mathbb{R}^2$, pas nécessairement dans S , sont équivalents par rapport à S , noté $A \sim_S B$ ou simplement $A \sim B$ s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, si pour tout $C \in S$, l'enveloppe convexe de A, B et C ne contient pas l'origine.

Exemple: Considérons $S = \{A, C_1, C_2, C_3\}$



Alors, on voit que $A \sim B$ mais $A \not\sim B'$ car $O \in [ABC_2]$.

On peut remarquer que, avec cette relation d'équivalence, tout point est équivalent à un point du cercle unité. Alors, en ramenant tous les points sur le cercle et en gardant un unique point dans chaque classe d'équivalence, on remarque que toute configuration S de départ est équivalente à une *configuration standard*, à savoir un k -gon régulier, où k ne dépend que de S (certains points distincts de la configuration S de départ peuvent être équivalents à un même point de notre k -gon régulier, on a donc une notion de multiplicité qui se rajoute).

Lemme 2.4. Soit (q_1, q_2) deux formes quadratiques simultanément diagonalisables sur \mathbb{R}^{N+1} . On suppose que la famille (q_1, q_2) est non-dégénérée. Soit $S = \{B_0, \dots, B_N\}$ la configuration donnée par la famille (q_1, q_2) . Soit (A_1, A_2, \dots, A_k) les points distincts de la configuration standard associée dans \mathbb{R}^2 . Alors, k est impaire, $k = 2\ell + 1$.

Si $k > 1$, et A_i, A_{i+1} sont deux points successifs, alors $j = i + \ell + 1$ est l'unique, modulo k , valeur de j tel que O appartienne à l'enveloppe convexe de A_i, A_{i+1} et A_j dans \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Si $k > 1$, considérons les deux points A_1, A_k . Puisqu'ils correspondent à des classes différentes, il existe au moins un point $A_{\ell+1}$ tel que

l'origine O appartienne au triangle $[A_1, A_k, A_{\ell+1}]$. Pour $i = 1, \dots, \ell$, il existe également un points $A_{s(i)}$ tel que O appartienne au triangle $[A_i, A_{i+1}, A_{s(i)}]$. Maintenant, tous les $s(i)$ sont différents pour différentes valeurs de i (un dessin suffit à s'en convaincre), et $s(i)$ doit appartenir à l'intervalle $[\ell + 2, k]$. On en déduit que $\ell \leq k - \ell - 1$. En appliquant le même raisonnement pour $i = \ell + 1, \dots, k - 1$, on obtient $\ell \geq k - \ell - 1$ et donc $k = 2\ell + 1$. Il s'en suit également qu'il existe un unique choix pour $s(i)$, et que ce choix n'est autre que $s(i) = i + \ell + 1$. \square

Ce lemme suffit à démontrer le théorème 2.3. La partition de $N + 1$ du théorème est donné comme suit

$$N + 1 = \sum_{i=1}^k N_i \quad \text{où } N_i = \#\{C \in S \text{ tel que } C \sim A_i\}$$

où A_1, \dots, A_k est la configuration standard associée à S .

Concrètement, le théorème nous dit que l'intersection de deux quadriques réelles simultanément diagonalisable est donnée à déformation près par la structure d'un $(2k+1)$ -gon donnée par les points A_i . On va voir par la suite que l'hypothèse *simultanément diagonalisable* n'est pas importante et nous verrons le lien entre structure de $(2k + 1)$ -gon et fonction indice.

Pour compléter notre classification des intersections de deux quadriques, il nous faut à présent travailler avec des formes quadratiques quelconques et plus seulement avec des formes quadratiques simultanément diagonalisables.

Lemme 2.5. *Soit (q_1, q_2) une famille non-dégénérée de deux formes quadratiques réelles sur \mathbb{R}^{N+1} . Alors, le pinceau de quadriques peut être représenté par la forme normalisée suivante*

$$\begin{aligned} q_1(x) &= \sum_{i=1}^m a_i x_i^2 + \sum_{i=m+1}^{m+M} 2x_i x_{i+M} ; \\ q_2(x) &= \sum_{i=1}^m b_i x_i^2 + \sum_{i=m+1}^{m+M} (\beta_i (x_i^2 - x_{i+M}^2) + 2\alpha_i x_i x_{i+M}) . \end{aligned}$$

où $M = \frac{N-m+1}{2}$. La classe de déformation de l'intersection de deux quadriques est déterminée par la donnée des réels a_i, b_i . En particulier cette classe est indépendante des nombres α_i, β_i .

Démonstration. Puisque la famille (q_1, q_2) est non-dégénérée, on peut supposer que q_1 est non-dégénérée. Notons Q_1, Q_2 les matrices associée aux formes quadratiques q_1, q_2 dans la base canonique de \mathbb{R}^{N+1} . L'hypothèse que la famille (q_1, q_2) est non-dégénérée est équivalente à l'hypothèse que $Q_1^{-1}Q_2$ a des valeurs propres distinctes dans \mathbb{C} . Ainsi, dans une base de vecteurs propres de la matrice $Q_1^{-1}Q_2$ dans \mathbb{C}^{N+1} , les formes quadratiques q_1 et q_2 s'écrivent sous la forme

$$q_1(x) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i z_i^2, \quad q_2(x) = \sum_{i=1}^{N+1} b_i z_i^2 .$$

Comme q_1 et q_2 sont réelles, les valeurs propres de $Q_1^{-1}Q_2$ sont soit réelles soit complexe conjugué. Pour une valeur propre réelle, on peut toujours choisir un vecteur propre réel associé. Pour deux valeurs propres complexes et conjugués, les espaces propres associés s'échangent par conjugaison complexe. Dans ce cas, on peut choisir deux vecteurs propres complexes conjugués, disons e et \bar{e} . Pour tout couple de nombres complexes (z_1, z_2) , on obtient

$$\lambda q_1 + \mu q_2(z_1 e + z_2 \bar{e}) = (\lambda a + \mu b)z_1^2 + (\lambda \bar{a} + \mu \bar{b})z_2^2$$

avec a et b des nombres complexes. Le vecteur $z_1 e + z_2 \bar{e}$ est réel si et seulement si $z_2 = \bar{z}_1$, et on pose

$$z_1 = u + iv, \quad a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2.$$

On obtient la forme réelle

$$\lambda q_1 + \mu q_2(z_1 e + \bar{z}_1 \bar{e}) = 2(\lambda a + \mu b)(u^2 - v^2) + 4(\lambda a_2 + \mu b_2)uv$$

ou après une normalisation, en posant $b/a = \alpha + i\beta$ et $a = -i/2$,

$$\lambda q_1 + \mu q_2(z_1 e + \bar{z}_1 \bar{e}) = \mu\beta(u^2 - v^2) + 2(\lambda + \mu\alpha)uv$$

En travaillant sur chaque couple de valeurs propres complexes, on obtient finalement la forme voulue. De plus, comme les valeurs propres complexes varient dans un espace connexe, la modification d'un ou plusieurs couples de valeurs propres complexes ne modifient pas la topologie de l'intersection, donc la classe de déformation d'une intersection de deux quadriques est indépendante de ces valeurs. \square

Théorème 2.6 (Lopez de Medrano)

On a une correspondance une à une entre l'ensemble des classes d'intersection de deux quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ à déformation près et l'ensemble des partitions impaire de m pour tout m entier inférieure ou égale à $N + 1$ avec $m \equiv N + 1 \pmod{2}$.

Démonstration. Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques réelles dans \mathbb{R}^{N+1} , on suppose que la famille (q_1, q_2) est non-dégénérée. D'après le lemme 2.5, on peut écrire cette famille de formes quadratiques comme suit

$$\begin{aligned} \lambda q_1 + \mu q_2(x) = & (\lambda a_1 + \mu b_1)x_1^2 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2^2 + \cdots + (\lambda a_m + \mu b_m)x_m^2 + \\ & + \sum_{i=m+1}^{m+M} [(\lambda\alpha_i + \mu\beta_i)(x_i + ix_{i+M})^2 + (\lambda\bar{\alpha}_i + \mu\bar{\beta}_i)(x_i - ix_{i+M})^2] \end{aligned}$$

où $M = \frac{N-m+1}{2}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ et $\beta_j^{-1}\alpha_j \notin \mathbb{R}$. De plus, la classe de déformation de l'intersection de nos deux quadriques est uniquement déterminée par la première partie de la somme à savoir

$$(\lambda a_1 + \mu b_1)x_1^2 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2^2 + \cdots + (\lambda a_m + \mu b_m)x_m^2.$$

Cependant, en appliquant le même raisonnement que pour la démonstration du théorème 2.3, cette classe de déformation est uniquement déterminée par une partition diédrale impaire de m , où m correspond au nombre de valeurs propres réelles dans la diagonalisation simultanée complexe des formes quadratiques q_1 et q_2 et satisfait les deux conditions suivantes,

- $m \leq N + 1$;
- m a la même parité que $N + 1$.

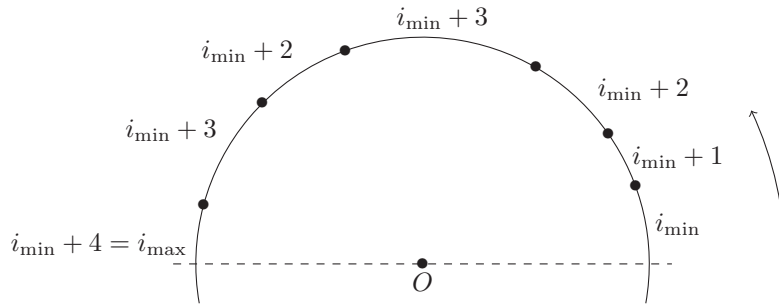
\square

2.2.2 Classification et fonction indice

Dans ce paragraphe, on cherche à déterminer le lien entre la classification des intersections de deux quadriques, précédemment donnée, et les outils qui nous ont permis dans la première partie de ce chapitre de déterminer les groupes d'homologie d'une intersection régulière de deux quadriques (en particulier la variété spectrale et la fonction indice).

Nous allons commencer cette partie en définissant une partition d'un entier m où m est le nombre de points constituant la variété spectrale $C_{\mathbb{R}} \subset P_{\mathbb{R}}^1$ (remarquons que dans la cas d'intersections régulières de deux quadriques, la variété spectrale est 0-dimensionnel). La fonction indice est une application définie sur le cercle S^1 . On va alors parcourir le cercle S^1 dans le sens trigonométrique (ou dans le sens horaire) et regarder les augmentations successives de la fonction indice. On obtient ainsi une partition $m = m_1 + \dots + m_k$ où m_i est la différence entre la valeur de la fonction indice après les différentes augmentations et la valeur de la fonction indice au départ. Cette partition n'est pas définie de manière unique, néanmoins vu comme partition diédrale, on obtient l'unicité.

Exemple: Analysons le cas suivant



Par les propriétés de la fonction indice décrites par la proposition 1.20, le demi-cercle suffit à connaître entièrement la fonction indice sur le cercle entier. Dans cet exemple, on voit que le nombre de points est 6 et la décomposition est alors $6 = 3 + 2 + 1$.

Proposition 2.7. *La partition diédrale donnée par la fonction indice est identique à la partition diédrale donnée par le théorème 2.6. En particulier, l'ensemble des fonctions indices, i.e. les applications satisfaisant les propriétés de la proposition 1.20 est en bijection avec l'ensemble des classes de déformation d'intersections régulières de deux quadriques.*

Démonstration. Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques réelles dans \mathbb{R}^{N+1} , on suppose que la famille (q_1, q_2) est non-dégénérée. D'après le lemme 2.5, on peut écrire cette famille de formes quadratiques comme suit

$$\begin{aligned} \lambda q_1 + \mu q_2(x) &= (\lambda a_1 + \mu b_1)x_1^2 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2^2 + \dots + (\lambda a_m + \mu b_m)x_m^2 + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{m+M} [(\lambda \alpha_i + \mu \beta_i)(x_i + ix_{i+M})^2 + (\lambda \bar{\alpha}_i + \mu \bar{\beta}_i)(x_i - ix_{i+M})^2] \end{aligned}$$

pour tout $(\lambda, \mu) \in S^1$ où $M = \frac{N-m+1}{2}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ et $\beta_j^{-1}\alpha_j \notin \mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe un entier $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \det(\lambda q_1 + \mu q_2) &= 2^c \prod_{i=1}^m (\lambda a_i + \mu b_i) \cdot \prod_{i=m+1}^{m+M} |\lambda \alpha_i + \mu \beta_i|^2 \\ &= 2^c \prod_{i=1}^m (\lambda a_i + \mu b_i) \cdot A \end{aligned}$$

où A est un réel strictement positif. On peut déjà voir le lien entre les points de la configuration donnés par nos deux quadriques et les points de la variété spectrale C . En particulier, les deux entiers dont on donne la partition sont les mêmes. Il reste à montrer que la partition diédrale associée à chacune de ces partitions est la même. Pour ce faire, on considère les applications suivantes

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1$$

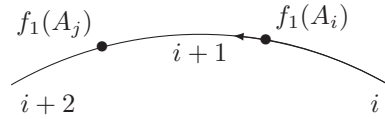
$$(a, b) \longmapsto \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

et

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1$$

$$(a, b) \longmapsto \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

Remarquons que la réunion des images par ces deux applications des points de la configuration $A_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ correspond à la variété \tilde{C} . On considère $\omega \in S^1$ vérifiant l'égalité $\text{ind}(\omega, q) = i_{\min}$. En parcourant le cercle S^1 dans le sens trigonométrique en partant du point ω , on peut remarquer que la fonction indice va croître de 1 lorsqu'elle va passer par l'image par f_1 d'un point de la configuration et diminuer de 1 en passant par l'image par f_2 d'un point de la configuration. Supposons qu'il existe A_i, A_j deux points de notre configuration tels que $A_i \sim A_j$ pour la relation d'équivalence du paragraphe précédent. Quitte à changer les points A_i et A_j considéré, on peut supposer qu'il n'existe pas de point A_ℓ tel que $f_1(A_\ell)$ est situé entre $f_1(A_i)$ et $f_1(A_j)$ (dans le cas contraire, les points A_i, A_j et A_ℓ sont équivalents). Alors, montrons que la fonction indice est comme suit



Cette propriété suffit à terminer la démonstration. Par hypothèse, il n'existe pas de points A_ℓ tel que $f_1(A_\ell)$ soit entre $f_1(A_i)$ et $f_1(A_j)$. Donc, la fonction indice ne sera pas comme voulu si et seulement si il existe un point A_ℓ tel que $f_2(A_\ell)$ soit entre $f_1(A_i)$ et $f_1(A_j)$. Or, dans ce cas, il est facile de voir que l'origine de \mathbb{R}^2 appartient au triangle $[A_i A_j A_\ell]$, ce qui est impossible par hypothèse. \square

2.3 Classification des intersections maximales

Dans cette section, nous allons utiliser les théorèmes 2.1 et 2.6 afin de donner l'ensemble des classes d'intersection maximale de deux quadriques à déformation près (à savoir, les intersections de deux quadriques qui sont des M-variétés).

Lemme 2.8. Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de deux quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Supposons que la fonction indice associée à cette intersection vérifie $i_{\min} = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.

Alors, on a les égalités suivantes

- si N est paire, $b_0(\Omega_{i_{\min}}) = m$;
 - si N est impaire, $b_0(\Omega_{i_{\min}}) + b_0(\Omega_{i_{\min}+1}) = m$;
- où m est le nombre de points de la variété spectrale $C \subset P_{\mathbb{R}}^1$.

Démonstration. Supposons pour commencer que N est paire. Par hypothèse, $i_{\min} = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, mais on sait également que $i_{\min} + i_{\max} = N + 1$. On en déduit que l'image de la fonction indice est constituée de seulement deux valeurs. Le résultat est alors immédiat puisque la variété \tilde{C} , possède $2m$ points pour lesquels la fonction indice va changer de valeurs. Donc,

$$\dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) = m$$

Supposons finalement que N est impaire. Par hypothèse, on a toujours l'égalité $i_{\min} = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, mais également que $i_{\min} + i_{\max} = N + 1$. On en déduit que dans ce cas, l'image de la fonction indice est constitué de trois valeurs. Ainsi, chaque point de la variété spectrale étendue \tilde{C} est adjacent à une zone où la fonction vaut soit $i_{\min} + 1$ et une zone où la fonction indice vaut $i_{\min} + 2$ ou adjacent à une zone où la fonction indice vaut i_{\min} et une autre zone où la fonction indice vaut $i_{\min} + 1$. Dans le premier cas, le point est un bord d'une composante connexe de $\Omega_{i_{\min}+1}$ et dans le deuxième cas, le point est un bord d'une composante connexe de $\Omega_{i_{\min}}$. Puisque la variété spectrale étendue, sous-ensemble de S^1 , possède $2m$ points, on en conclut

$$\dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) + \dim H^0(\Omega_{i_{\min}+1}) = m$$

□

Théorème 2.9

Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de deux quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Pour $N \geq 3$, $X_{\mathbb{R}}$ est maximale si et seulement si

$$i_{\min} = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad m = N + 1$$

où m est le nombre de points de la variété spectrale $C \subset P_{\mathbb{R}}^1$. Si $N = 2k$ est paire, notre intersection $X_{\mathbb{R}}$ possède un unique nombre de Betti différent de 1, à savoir, $b_{k-1}(X_{\mathbb{R}}) = 2k + 2$. Si $N = 2k + 1$ est impaire, notre intersection $X_{\mathbb{R}}$ possède deux nombres de Betti différent de 1, à savoir, $b_{k-1}(X_{\mathbb{R}}) = b_k(X_{\mathbb{R}}) = k + 1$.

Démonstration. La première égalité du théorème est une conséquence immédiate des propositions 1.30 et 1.31. Il suffit donc de démontrer la deuxième égalité du théorème et pour ce faire, on doit étudier séparément les deux cas : N paire et N impaire.

1^{er} cas : Supposons que N est paire.

D'après le théorème 2.1, on a le résultat suivant

$$\sum_{i=0}^{N-2} b_i(X_{\mathbb{R}}) = N - 1 + b_0(\Omega_{i_{\min}})$$

Cependant, d'après le lemme 2.8, on a $\dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) = m$. Enfin, par les résultats sur les nombres de Hodge d'une intersection de quadriques, corollaire 1.14,

$$\sum_{i=1}^{N-2} b_i(X_{\mathbb{C}}) = 2N$$

Ainsi, notre intersection de deux quadriques est maximale si et seulement si on a l'égalité $N - 1 + m = 2n$. On en déduit donc que $m = N + 1$. Il suffit alors d'utiliser les résultats du théorème 2.1 avec $\dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) = m = N + 1$ pour terminer la preuve dans ce cas.

2^e cas : Supposons que N est impaire.

Comme précédemment, d'après le théorème 2.1, on a le résultat suivant

$$\sum_{i=0}^{N-2} b_i(X_{\mathbb{R}}) = N - 3 + b_0(\Omega_{i_{\min}}) + b_0(\Omega_{i_{\min}+1})$$

D'après le lemme 2.8, on a $b_0(\Omega_{i_{\min}}) + b_0(\Omega_{i_{\min}+1}) = m$. Enfin, par les résultats sur les nombres de Hodge d'une intersection de quadriques, corollaire 1.14

$$\sum_{i=1}^{N-2} b_i(X_{\mathbb{C}}) = 2(N - 1)$$

On en déduit que l'intersection de deux quadriques est maximale si et seulement si on a l'égalité $N - 3 + m = 2N - 2$, ou encore $m = N + 1$. Il suffit alors d'utiliser les résultats du théorème 2.1 avec $b_0(\Omega_{i_{\min}}) + b_0(\Omega_{i_{\min}+1}) = m = N + 1$ et le fait que $b_0(\Omega_{i_{\min}+1}) = b_0(\Omega_{i_{\min}})$ pour terminer la preuve dans ce dernier cas. □

Corollaire 2.10. *Les nombres de Betti d'une M -variété $X_{\mathbb{R}}$, intersection régulière de deux quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ et les nombres de Hodge du complexifié $X_{\mathbb{C}}$ sont liés par les égalités*

$$b_i(X_{\mathbb{R}}) = h^{i, N-2-i}(X_{\mathbb{C}}).$$

Avant de conclure ce chapitre en explicitant les classes de déformation des intersections maximales de deux quadriques par les fonctions indices, nous pouvons remarquer que le théorème 2.9 implique que si une intersection de deux quadriques est maximale alors les deux quadriques qui forment cette intersection sont simultanément diagonalisables dans une base réelle (indépendamment du choix des deux quadriques). La réciproque est bien évidemment fautive.

Théorème 2.11

Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de deux quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Si N est paire, alors il existe une unique classe de déformation d'intersection maximale de deux quadriques. Si $N \geq 3$ est impaire, le nombre de classes de déformation d'intersection maximale de deux quadriques est

$$2^{\lfloor \frac{N}{4} \rfloor - 1} + \frac{1}{N+1} \sum_{\substack{m \mid \frac{N+1}{2} \\ m \text{ impaire}}} \varphi(m) 2^{\frac{N+1}{2m} - 1}$$

où $\varphi(m)$ est la fonction d'Euler.

Démonstration. D'après le lemme 2.9, on sait déjà qu'une intersection de deux quadriques $X_{\mathbb{R}} \subset P_{\mathbb{R}}^N$ est maximale si et seulement si

$$i_{\min} = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad m = N + 1$$

où m est le nombre de points contenus dans la variété spectrale $C \subset P_{\mathbb{R}}^1$. Il nous reste donc à étudier le nombre de classes distinctes vérifiant ces conditions en fonction de la parité de N .

1^{er} cas : Supposons que N est paire.

Ici, le résultat est immédiat puisque $i_{\max} = i_{\min} + 1$. Ainsi, nécessairement, la fonction indice ne peut augmenter ou diminuer de plus de 1, et donc la partition de m est donnée simplement par des 1. Au final, puisque l'entier $m = N + 1$ pour une intersection maximale, la seule partition possible est la suivante

$$N + 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{N+1}$$

2^e cas : Supposons que N est impaire.

Dans ce cas, on a $i_{\max} = i_{\min} + 2$, on dispose ainsi de plus de liberté dans le choix de la partition, celle-ci étant alors composée de 1 et de 2. Il suffit alors de compter combien de partitions diédrales de $m = N + 1$ peut-on avoir avec des 1 et des 2. D'abord, puisque $N + 1$ est paire, on en déduit que le nombre de 1 est nécessairement paire. Ensuite, puisque la partition doit être *impaire* (c'est à dire comporter un nombre impaire de termes), on en déduit que le nombre de 2 est impaire et ne peut pas excéder $\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$. Enfin, pour satisfaire la condition $i_{\min} = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, il n'est pas difficile de voir qu'il est nécessaire et suffisant que les 1 apparaissent par paire bien ordonnée dans la partition de $N + 1$. Par exemple, $8 = 2+2+2+1+1$ n'est pas la partition d'une intersection maximale de deux quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^7$ alors que $8 = 2+1+2+1+2$ est la partition d'une intersection maximale donnée par la fonction indice de la figure 2.1.

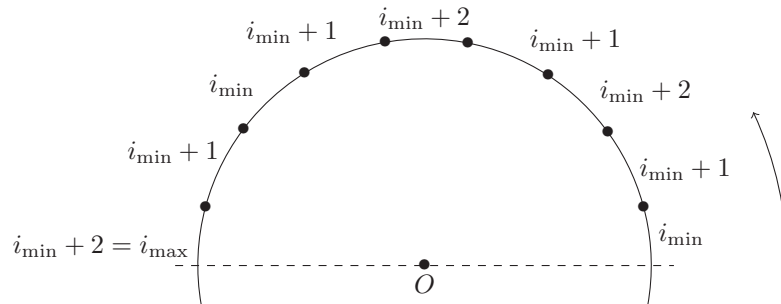


FIGURE 2.1 – Fonction indice d'un intersection maximale dans $P_{\mathbb{R}}^7$

Le nombre exacte de partitions diédrales est alors donné par la formule de Burnside (les partitions diédrales étant les orbites de l'action du groupe

diédrale sur l'ensemble des partitions de $N + 1$). Indiquons tout de même que la première partie de l'égalité (à savoir la puissance de 2) correspond aux partitions fixés par l'action de la symétrie ou de la composée d'une rotation avec la symétrie. La deuxième partie du nombre de classe (à savoir la somme sur les diviseurs impaires de $\frac{N+1}{2}$) correspond aux partitions fixés par une rotation.

□

On va conclure ce chapitre en donnant les résultats obtenus par la formule du théorème 2.11, pour les premières dimensions. Si on regarde le nombre $\#_k$ de classes de déformation d'intersections maximales de deux quadriques comme une suite sur k où la dimension de l'espace projectif est $N = 2k + 1$, on obtient les termes

$$\begin{aligned} \#_1 = 1, \#_2 = 2, \#_3 = 2, \#_4 = 4, \#_5 = 5, \#_6 = 9, \#_7 = 12, \#_8 = 23, \\ \#_9 = 34, \#_{10} = 63, \#_{11} = 102, \#_{12} = 190. \end{aligned}$$

On peut aller un peu plus loin en majorant ce nombre,

$$\#_k \geq 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} + \frac{2^{k-1}}{k+1}.$$

CHAPITRE 3

Intersections de trois quadriques

Soient q_0, q_1, q_2 trois formes quadratiques linéairement indépendantes. On considère la quadrique définie pour $\omega \in P_{\mathbb{R}}^2$ par

$$\omega q = \omega_0 q_0 + \omega_1 q_1 + \omega_2 q_2$$

définissant la *courbe spectrale* C , par l'équation $\det(\omega q) = 0$. Contrairement au cas précédent de deux quadriques, il nous faut utiliser pleinement le théorème 1.25 et la description des différentielles sur la deuxième page de la suite spectrale d'Agrachev pour déterminer les nombres de Betti d'une intersection de trois quadriques. Ce chapitre sera constitué de quatre parties. Dans une première partie, nous donnerons certains résultats fondamentaux sur les courbes planes, puis dans une deuxième partie, nous calculerons les nombres de Betti d'une intersection régulière de trois quadriques. Les deux dernières parties nous permettront de démontrer l'existence de telles intersections maximales.

3.1 Courbes algébriques planes

3.1.1 Description.

Par courbes algébriques planes réelles C de degré d , on désigne un polynôme homogène non nul à coefficients réels de degré d en trois variables défini à un facteur constant non nul près. Par la suite, on notera $C_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions réelles du polynôme et $C_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions complexes. Un point $x \in P_{\mathbb{R}}^N$ est appelé un *point singulier* (réel) d'une courbe C si x représente une droite des points critiques du polynôme définissant C . Par la suite, nous travaillerons uniquement avec des courbes non-singulières, i.e., sans point singulier. Dans l'étude de la topologie des courbes algébriques planes non-singulières, une question naturelle à se poser est le problème de classification à déformation près, connue comme le 16^{ème} problème de Hilbert

Problème de Hilbert

À déformation près, quelles sont les paires possible $(P_{\mathbb{R}}^2, C_{\mathbb{R}})$ où C est une courbe algébrique plane réelle non-singulière de degré d ?

Pour simplifier la notation, on parlera simplement de courbes non-singulières pour désigner une courbe algébrique plane réelle non-singulière, sauf en cas de confusion possible. Une courbe *connexe* peut-être plongée dans $P_{\mathbb{R}}^2$ de deux manières distinctes ; soit la courbe est un *ovale*, i.e peut-être transformée en bord d'un disque dans $P_{\mathbb{R}}^2$ par un homéomorphisme de $P_{\mathbb{R}}^2$, soit la courbe peut-être transformée en une droite projective par un homéomorphisme de $P_{\mathbb{R}}^2$, on parle alors de *courbe unilatère*. Ainsi, à l'aide du théorème de Bezout, on obtient la description suivante.

Proposition 3.1. *Une courbe non-singulière de degré paire est uniquement composée d'ovales alors qu'une courbe non-singulière de degré impaire est composée d'ovales et d'une composante unilatère. Finalement, deux ovales donnés sont soit emboîtés l'un dans l'autre soit ont des intérieurs disjoints.*

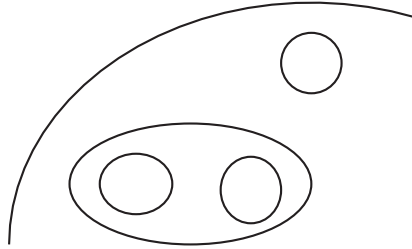


FIGURE 3.1 – Courbe impaire

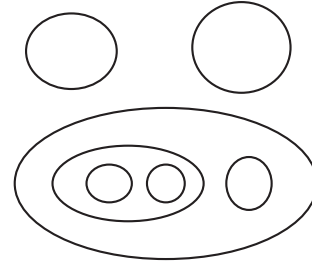


FIGURE 3.2 – Courbe paire

Le problème de Hilbert revient donc à connaître l'ensemble des classes d'isotopies possibles pour une courbe. Terminons ce paragraphe avec une dernière notion. D'après la description des courbes, deux ovales σ et σ' sont soit emboîtés soit ont des intérieurs disjoints ; dans le premier cas on note $\sigma \prec \sigma'$ si l'ovale σ est à l'intérieur de l'ovale σ' , on parle alors d'une *paire injective*. On définit ainsi une relation d'ordre partielle sur les ovales et on définit la *profondeur* d'un ovale σ_0 comme le plus grand entier m pour lequel il existe une chaîne de la forme

$$\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \cdots \prec \sigma_{m-1} \prec \sigma_m$$

Par exemple, un ovale qui n'est contenu dans aucun autre ovale de la courbe est de profondeur 0. On dit alors qu'un ovale est *paire* (respectivement *impaire*) si sa profondeur est paire (respectivement impaire). On note p le nombre d'ovales paires d'une courbe C et n le nombre d'ovales impaires.

3.1.2 Restrictions sur les courbes.

La première restriction sur les courbes (ou sur les configurations possibles de courbes algébriques) est dû à Harnack, dans [Har76], qui apporta par la même occasion la classification topologique des lieux réelles $C_{\mathbb{R}}$ de courbes planes non-singulières.

Théorème 3.2 (Harnack)

Pour toute courbe non-singulière C de degré d , le nombre ℓ de composantes

connexes de $C_{\mathbb{R}}$ satisfait

$$\frac{1 - (-1)^d}{2} \leq \ell \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 \quad (\text{Inégalité de Harnack})$$

Réciproquement, pour tout entier naturel d et tout entier ℓ satisfaisant les inégalités précédentes, il existe une courbe de degré d avec ℓ composantes connexes.

Démonstration. Nous nous contenterons ici de démontrer la première partie du théorème pour $d \geq 3$, la démonstration pour $d \leq 2$ étant évidente. La deuxième partie est démontré dans le papier originel de Harnack [Har76] par une construction explicite d'une M-courbe en tout degré. Les courbes issues de cette construction sont appelées *courbe de Harnack*.

Soit C une courbe non-singulière de degré $d \geq 3$. Supposons que $C_{\mathbb{R}}$ possède $\ell = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 2$ composantes connexes. Alors, la courbe possède au moins $\ell - 1$ ovales, noté $C_1, \dots, C_{\ell-1}$, et une autre composante C_{ℓ} . On choisit pour tout i entre 1 et $\ell - 1$, $p_i \in C_i$ et $q_1, \dots, q_{d-3} \in C_{\ell}$. Comme l'espace des courbes de degré $d - 2$ est de dimension $\frac{d(d-1)}{2} > \ell + d - 4$, on en déduit qu'il existe une courbe D de degré $d - 2$ passant par les points p_i et q_i . L'intersection de $C_{\mathbb{R}}$ et de $D_{\mathbb{R}}$ est constitué de c points comptés avec multiplicité avec

$$c \geq 2(\ell - 1) + d - 3 = (d-1)(d-2) + 2 + d - 3 > d(d-2)$$

Cette inégalité contredit le théorème de Bezout. On en conclut qu'une telle courbe ne peut pas exister d'où l'inégalité $\ell \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ du théorème. L'inégalité $\frac{1 - (-1)^d}{2} \leq \ell$ est une conséquence du fait qu'une courbe de degré impaire possède toujours une composante unilatère. \square

Le nombre $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ est appelé *genre* de la courbe et les courbes possédant exactement $g + 1$ composantes connexes sont appelées *M-courbes*. On aurait pu démontrer l'inégalité de Harnack simplement en remarquant qu'il s'agit d'un cas particulier de l'inégalité de Smith, ce qui justifie notre choix de terminologie.

La deuxième restriction dont nous aurons besoin par la suite est la congruence de Gudkov conjecturée par ce dernier vers la fin des années 60 avant d'être démontré en 1972 par Rokhlin dans [Rok72b].

Théorème 3.3 (Gudkov-Arnold-Rokhlin)

Une M-courbe de degré $d = 2k$ vérifie la congruence

$$p - n \equiv k^2 \pmod{8}$$

3.1.3 Les travaux de Rokhlin.

Dès 1876, Klein se posa la question du lien entre la classe d'isotopie d'une courbe réelle $C_{\mathbb{R}}$ et la façon dont celle-ci est incluse dans sa partie complexe $C_{\mathbb{C}}$. L'ensemble $C_{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}}^2$ des points complexes d'une courbe réelle (i.e l'ensemble des racines complexes d'un polynôme homogène à coefficients réels) est invariant par conjugaison complexe $\text{conj} : P_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow P_{\mathbb{C}}^2$. La courbe $C_{\mathbb{R}}$ est alors l'ensemble des points fixes de cette involution restreint à $C_{\mathbb{C}}$. La donnée d'une paire $(C_{\mathbb{C}}, \text{conj})$ est appelé *structure réelle*. Une courbe réelle $C_{\mathbb{R}}$ peut diviser $C_{\mathbb{C}}$ (autrement dit,

$C_{\mathbb{C}} \setminus C_{\mathbb{R}}$ possède deux composantes connexes); dans ce cas, on dit que C est *séparante*. Dans le cas contraire, on parle d'une courbe *non-séparante*. Remarquons que cette notation de séparabilité d'une courbe dépend de la structure réelle pas seulement de $C_{\mathbb{R}}$, ainsi une courbe réelle $C_{\mathbb{R}}$ peut être à la fois séparante et non-séparante en fonction de la structure réelle qui lui est associée, c'est pourquoi la notion de séparabilité est associée à C le polynôme homogène et non pas à $C_{\mathbb{R}}$.

Proposition 3.4. *Toute M-courbe est non-singulière et séparante.*

Démonstration. Soit C une M-courbe. Supposons que C est non-séparante. Alors, par définition, la variété $D = C_{\mathbb{C}} \setminus C_{\mathbb{R}}$ est une surface avec $2g + 2$ trous. La caractéristique d'Euler de cette surface est la même que la caractéristique d'Euler de $C_{\mathbb{C}}$, à savoir $\chi(D) = 2 - 2g$. On va à présent construire une nouvelle surface \tilde{D} en "rebouchant" chaque trou par un disque. La caractéristique d'Euler va ainsi augmenter de 1 pour chaque trou ainsi "reboucher". On obtient donc

$$\chi(\tilde{D}) = 2 - 2g + 2(g + 1) = 4$$

On a donc construit une surface fermée orientée de caractéristique d'Euler strictement plus grand que 2, ce qui est impossible. \square

Pour une courbe séparante, $C_{\mathbb{R}}$ divise $C_{\mathbb{C}}$ en deux composantes connexes et l'orientation complexe sur ces deux composantes connexes détermine deux orientations opposées sur $C_{\mathbb{R}}$, ces orientations sur $C_{\mathbb{R}}$ sont appelées les *orientations complexes* de la courbe. La donnée d'une paire d'orientations opposées est appelée *semi-orientation*. Pour une courbe séparante, une paire injective d'ovales est dite *positive* (c.f., figure 3.3) si les orientations complexes des ovales est induites par une orientation de l'anneau dont les ovales forment le bord. Autrement, la paire est dite *négative* (c.f., figure 3.4).

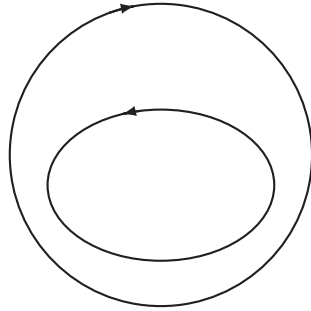


FIGURE 3.3 – Paire positive

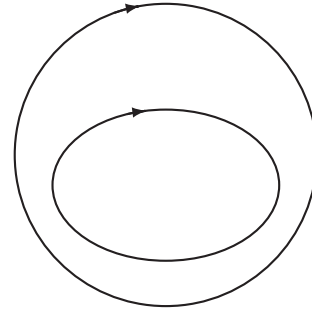


FIGURE 3.4 – Paire négative

On note Π^+ le nombre de paires positives et Π^- le nombre de paires négatives. Si la courbe est de degré impair (donc possède une composante unilatère), on dit qu'un ovale est dite *positif* (cf., figure 3.5) si les orientations complexes sur les deux composantes est induites par une orientation du ruban de Möbius formé par l'ovale et la composante unilatère. Autrement, l'ovale est dite *négatif* (cf., figure 3.6).

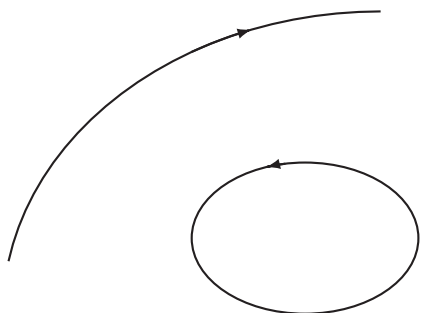


FIGURE 3.5 – Ovale positive

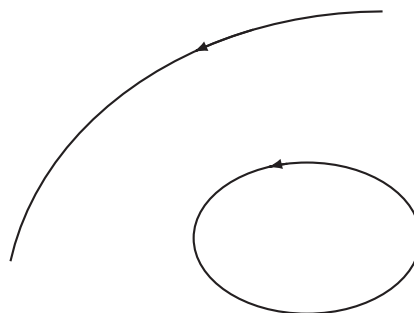


FIGURE 3.6 – Ovale négative

On note Λ^+ le nombre d'ovales positifs et Λ^- le nombre d'ovales négatifs. En 1974, Rokhlin démontra une relation entre ces différents nombres dans le cas des courbes paires, voir par exemple [Rok78], puis en 1975, en se basant sur les travaux de Rokhlin, Mishachev considéra le cas des courbes impaires afin d'obtenir le théorème suivant

Théorème 3.5 (Rokhlin-Mishachev)

Si C est une courbe séparante de degré d paire avec ℓ ovales alors

$$2(\Pi^+ - \Pi^-) = \ell - \frac{d^2}{4}$$

Si C est une courbe séparante de degré d impaire avec ℓ ovales alors

$$\Lambda^+ - \Lambda^- + 2(\Pi^+ - \Pi^-) = \ell - \frac{d^2 - 1}{4}$$

Dans son article, Rokhlin a introduit plusieurs notations supplémentaires. Il considère m le nombre d'ovales désorientant (cf figure 3.7), i.e., les ovales impaires qui forment avec l'ovale paire situé dessus une paire négative. Il considère également M^+ et M^- le nombre de paires positives et négatives désorientant, c'est à dire les paires (positives, respectivement négatives) dont l'ovale extérieure est désorientant.

Proposition 3.6. Soit C une courbe. Avec les notations précédentes, on a l'égalité

$$\Pi^+ - \Pi^- = n - 2(m + M^+ - M^-)$$

Démonstration. L'idée afin de démontrer cette proposition est de travailler ovale par ovale. Soit C_i un ovale de C , on introduit les notations suivantes

$\Pi_{C_i}^+$ = nombre de paires positives dont C_i est l'ovale intérieure

$\Pi_{C_i}^-$ = nombre de paires négatives dont C_i est l'ovale intérieure

$$m_{C_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i \text{ est désorienté} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$M_{C_i}^+$ = nombre de paires positives désorientées dont C_i est l'ovale intérieure

$M_{C_i}^-$ = nombre de paires négatives désorientées dont C_i est l'ovale intérieure

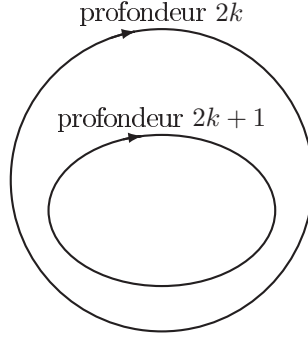


FIGURE 3.7 – Ovale désorientant

On montre alors le résultat suivant

$$\Pi_{C_i}^+ - \Pi_{C_i}^- = \begin{cases} 1 - 2(m_{C_i} + M_{C_i}^- - M_{C_i}^+) & \text{si } C_i \text{ est impaire} \\ -2(M_{C_i}^- - M_{C_i}^+) & \text{si } C_i \text{ est paire} \end{cases}$$

Il suffit alors de sommer sur l'ensemble des ovales pour obtenir le résultat de la proposition. Le résultat ci-dessus sur un seul ovale revient en fait à comparer l'orientation complexe avec l'orientation alternée (le terme $2(m_{C_i} + M_{C_i}^- - M_{C_i}^+)$ correspondant à la différence et le terme constant est celui de l'orientation alternée). \square

À l'aide de cette proposition et de la formule de l'orientation complexe, on montre facilement que la congruence de Gudkov est équivalente à la congruence suivante

$$m + M^+ - M^- \equiv 0 \pmod{2} \quad (3.1)$$

3.2 Intersections maximales de trois quadriques

3.2.1 Nombres de Betti

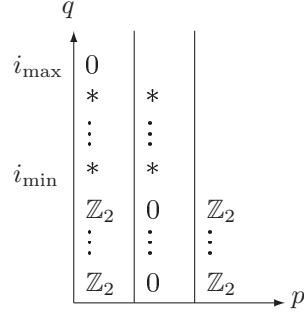
Soient q_0, q_1, q_2 trois formes quadratiques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ linéairement indépendantes et C la courbe spectrale associée. On suppose que C est non-singulière et $C_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$. Rappelons que par hypothèse, $i_{\min} \neq 0$, puisque dans ce cas, l'intersection réelle est vide. Comme pour le chapitre précédent, les ensembles Ω_i et $\tilde{\Omega}_i$ sont homotopes, on travaillera alors de préférence avec $\tilde{\Omega}_i$ tout en écrivant les groupes de cohomologie $H^p(\Omega_i)$. D'après le théorème 1.25, il existe une suite spectrale convergente vers les groupes de cohomologie de $L_{\mathbb{R}}^+$ avec

$$L_{\mathbb{R}}^+ = \{(\omega, x) \in S^2 \times P_{\mathbb{R}}^N \text{ tel que } (\omega q)(x) > 0\}$$

dont la deuxième page est donnée par

$$E_2^{p,q} = H^p(\Omega_{N-q})$$

où $\Omega_i = \{\omega \in S^2 \text{ tel que } \text{ind}(\omega q) \leq i\}$, ind représentant l'indice d'inertie négatif de la quadrique ωq . En utilisant les résultats du corollaire 1.27, on obtient la deuxième page de la suite spectrale de la forme suivante



où les $*$ représentent les groupes $H^i(\Omega_j)$ qui peuvent être non triviaux. On voit clairement par cette représentation que la suite spectrale peut avoir des différentielles non triviales. Ainsi, contrairement au cas des d'intersections de deux quadriques, on ne peut pas calculer directement à partir de la fonction indice, les nombres de Betti. Il faut utiliser la description de la deuxième différentielle donnée dans le théorème 1.25. La deuxième différentielle est donnée par la composition

$$d_2^{p, N-q} : H^p(\Omega_q) \xrightarrow{\delta(\gamma_{q+1}) \cup -} H^{p+2}(\Omega_{q+1}, \pi^{-1}(\Lambda_{q+1})) \longrightarrow H^{p+2}(\Omega_{q+1})$$

où δ est le morphisme de cobord $H^1(\pi^{-1}(\Lambda_{q+1})) \rightarrow H^2(\Omega_{q+1}, \pi^{-1}(\Lambda_{q+1}))$ et la deuxième application provient de la suite exacte du couple $(\Omega_{q+1}, \pi^{-1}(\Lambda_{q+1}))$. Dans le cas d'une intersection de trois quadriques, l'étude de ces différentielles se simplifie énormément.

Proposition 3.7. *La suite spectrale d'Agrachev décrite au théorème 1.25 possède au plus une unique différentielle non triviale.*

Démonstration. Au vu de la deuxième page de la suite spectrale donnée plus haut, seules les différentielles agissant sur la deuxième page peuvent être non triviale et les seules différentielles à étudier sont les suivantes :

$$d_2^{0, N-q} : H^0(\Omega_q) \rightarrow H^2(\Omega_{q+1})$$

pour $q \geq i_{\max} - 1$ (les autres différentielles possèdent toutes un groupe de départ ou d'arrivé triviale). Maintenant, si $q > i_{\max} - 1$, le groupe $H^2(\Omega_{q+1}, \pi^{-1}(\Lambda_{q+1}))$ qui intervient dans la description de la différentielle est triviale car $\pi^{-1}(\Lambda_{q+1}) = \Omega_{q+1} = S^2$ (on considère toujours l'ensemble $\pi^{-1}(\Lambda_{q+1})$ comme sa restriction à Ω_{q+1} puisqu'on regarde le groupe de cohomologie relatif). Finalement, la seule différentielle de la suite spectrale qui peut être non triviale est la suivante :

$$d_2^{0, i_{\min}} : H^0(\Omega_{i_{\max}-1}) \rightarrow H^2(S^2)$$

□

Comme la suite spectrale ne possède au plus qu'une différentielle non-triviale, nous noterons par la suite cette différentielle d_2 en évitant de rappeler à chaque fois les indices en exposant. Nous sommes désormais presque en mesure de calculer les nombres de Betti d'une intersection de trois quadriques, il nous manque

uniquement quelques informations supplémentaires sur l'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$. Nous allons voir avec la proposition qui suit que ce nombre est étroitement lié à la différentielle d_2 .

Proposition 3.8. *On suppose que $i_{\min} < i_{\max} - 1$. La deuxième différentielle d_2 de la suite spectrale d'Agrachev est triviale si et seulement si $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$. De même, la deuxième différentielle est non-triviale si et seulement si $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 2$.*

Démonstration. La preuve repose essentiellement sur la dualité de Poincaré appliquée à la variété $X_{\mathbb{R}}$. On suppose pour commencer que $i_{\min} < i_{\max} - 2$. Par la dualité de Poincaré, on a l'égalité des nombres de Betti, $b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) = b_{i_{\max}-3}(X_{\mathbb{R}})$. Nous allons maintenant calculer séparément ces deux nombres. Pour ce faire, on note ε_1 la trivialité de la différentielle d_2 , i.e. $\varepsilon_1 = 0$ si d_2 est triviale et $\varepsilon_1 = 1$ sinon. On pose également $\varepsilon_2 = 0$ si $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$ et $\varepsilon_2 = 1$ sinon (rappelons que par la proposition 1.30, $i_{\min} - 2 \leq \ell(X_{\mathbb{R}}) < i_{\min}$). Le but de cette démonstration est alors de montrer que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Par la suite exacte longue du couple $(P_{\mathbb{R}}^N, X_{\mathbb{R}})$ et la dualité de Poincaré-Lefschetz, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow H_{i_{\min}}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{i_{\max}-1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}-1}(P_{\mathbb{R}}^N)$$

où le premier zéro vient du fait que $\ell(X_{\mathbb{R}}) < i_{\min}$ donc l'application $H_{i_{\min}}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}}(P_{\mathbb{R}}^N)$ est nulle. On en déduit immédiatement par la suite spectrale d'Agrachev

$$\begin{aligned} b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^{i_{\max}-1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) - 1 + (1 - \varepsilon_2) \\ &= \dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) + \dim H^1(\Omega_{i_{\min}+1}) - \varepsilon_2 \end{aligned}$$

De la même façon, par la suite exacte longue du couple $(P_{\mathbb{R}}^N, X_{\mathbb{R}})$ et la dualité de Poincaré-Lefschetz, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow H_{i_{\max}-2}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{i_{\min}+1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\max}-3}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow 0$$

est les deux zéros viennent du fait que $i_{\max} - 3 \geq i_{\min} > \ell(X_{\mathbb{R}})$. On obtient donc le deuxième nombre de Betti recherché

$$\begin{aligned} b_{i_{\max}-3}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^{i_{\min}+1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) - 1 \\ &= \dim H^0(\Omega_{i_{\max}-2}) + \dim H^1(\Omega_{i_{\max}-1}) + 1 - \varepsilon_1 - 1 \\ &= \dim H^1(\Omega_{i_{\min}+1}) + 1 + \dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) - 1 - \varepsilon_1 \\ &= \dim H^1(\Omega_{i_{\min}+1}) + \dim H^0(\Omega_{i_{\min}}) - \varepsilon_1 \end{aligned}$$

On en conclut que les deux nombres de Betti sont égaux si et seulement si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Pour $i_{\min} = i_{\max} - 2$, on suppose que $N > 3$. On va refaire le même raisonnement mais en utilisant la dualité de Poincaré pour obtenir l'égalité $b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) = b_{i_{\max}-2}(X_{\mathbb{R}})$ (comme $N > 3$ on ne peut pas avoir dans ce cas $i_{\min} = 1$). En conservant les notations précédentes, par des suites exactes similaires aux précédentes, on obtient les résultats,

$$\begin{aligned} b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^{i_{\max}}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) + 1 - \varepsilon_2 \\ &= \dim H^1(\Omega_{i_{\min}}) + 1 - \varepsilon_2 \end{aligned}$$

mais également

$$\begin{aligned} b_{i_{\max}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= \dim H^{i_{\min}}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) - 1 \\ &= \dim H^0(\Omega_{i_{\max}-1}) + 1 - \varepsilon_1 - 1 \\ &= \dim H^1(\Omega_{i_{\min}}) + 1 - \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Une nouvelle fois, ces deux nombres de Betti sont égaux si et seulement si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Pour $i_{\min} = i_{\max} - 2$ et $N = 3$, on peut travailler directement à la main en remarquant que $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1 = 0$ si et seulement si le groupe $H^3(L_{\mathbb{R}})$ est trivial. On connaît toutes les courbes de degré 4, il suffit d'utiliser le fait que $b_1(X_{\mathbb{R}}) = 0$ puisque $X_{\mathbb{R}}$ est une intersection régulière (donc de dimension 0 dans ce cas), pour obtenir le résultat final. \square

Il reste donc le cas un peu particulier où $i_{\min} = i_{\max} - 1$. Dans ce cas, il n'est pas compliqué de se convaincre que la dualité de Poincaré ne nous donnera aucune information, le fait étant qu'on peut très bien avoir une différentielle d_2 triviale et $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 2$.

Lemme 3.9. *On suppose que $i_{\min} = i_{\max} - 1$. Si la deuxième différentielle d_2 n'est pas triviale alors on a l'égalité $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 2$.*

Démonstration. Commençons cette démonstration par une remarque élémentaire. En regardant la suite exacte longue du couple $(P_{\mathbb{R}}^N, X_{\mathbb{R}})$, on constate facilement que l'application $H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N)$ induite par l'inclusion est surjective si et seulement si l'application $H_i(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N, X_{\mathbb{R}})$ induite par l'inclusion est nulle. Par la dualité de Poincaré, cette condition est satisfaite dès lors que l'application

$$H^{N-i}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-i}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) \cong H^{N-i}(L_{\mathbb{R}}^+)$$

est nulle. Si on note $x \in H^1(P_{\mathbb{R}}^N)$ un générateur du groupe, cette application entre groupes de cohomologie est entièrement déterminée par l'image de x^{N-i} qui est donnée par $p^*(x^{N-i})$ où $p : L_{\mathbb{R}}^+ \rightarrow P_{\mathbb{R}}^N$ est la projection. Au final, l'application $H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N)$ est surjective si et seulement si $p^*(x^{N-i}) = 0$. Pour démontrer le lemme, en vertu de la proposition 1.30, il suffit donc de prouver que $p^*(x^{N-(i_{\min}-1)}) = p^*(x^{i_{\max}}) \neq 0$. Pour ce faire, on considère la suite spectrale de Leray-Serre associée au fibré vectoriel

$$L_{\mathbb{R}}^+|_{\Omega_{i_{\min}}} \rightarrow \Omega_{i_{\min}}.$$

On obtient alors les isomorphismes $H^{i_{\max}}(L_{\mathbb{R}}^+) = H^1(\Omega_{i_{\min}}) = H^{i_{\max}}(L_{\mathbb{R}}^+|_{\Omega_{i_{\min}}})$. De plus, ce fibré vectoriel est naturellement isomorphe au fibré $\xi_{i_{\max}-1}$ (c.f. théorème 1.25 pour les notations) via l'application antipodale sur la sphère S^2 . Par construction des classes de Stiefel-Whitney, on en conclut que l'élément $p^*(x^{i_{\max}})$ est donnée par la première classe de Stiefel-Whitney du fibré vectoriel $\xi_{i_{\max}-1}$, on a donc l'égalité $p^*(x^{i_{\max}}) = w_1(\xi_{i_{\max}-1})$. D'après le théorème 1.25 et la proposition 3.7, la deuxième différentielle d_2 de la suite spectrale, supposée non triviale, est déterminée par cette classe de Stiefel-Whitney. On en conclut que $p^*(x^{i_{\max}}) = w_1(\xi_{i_{\max}-1}) \neq 0$, et finalement, $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 2$. \square

Nous possédons dorénavant tous les ingrédients nécessaire au calcul des nombres de Betti d'une intersection de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$.

Théorème 3.10

Soient q_0, q_1, q_2 trois formes quadratiques et $X_{\mathbb{R}}$ l'intersection des trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. On considère ε le coefficient de trivialité de la différentielle d_2 (c'est à dire, $\varepsilon = 0$ si et seulement si d_2 est triviale). Si $i_{\min} < i_{\max} - 2$, on a les nombres de Betti

$$\begin{aligned} b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1, \quad \text{si } i < i_{\min} - 2 \text{ ou } i > i_{\max} - 2; \\ b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= b_1(\Omega_{i_{\min}}) + 1 - \varepsilon; \\ b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i_{\min}}) + b_1(\Omega_{i_{\min}+1}) - \varepsilon; \\ b_i(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i+1}) + b_1(\Omega_{i+2}) - 1, \quad \text{si } i_{\min} \leq i \leq i_{\max} - 4; \\ b_{i_{\max}-3}(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i_{\max}-2}) + b_1(\Omega_{i_{\max}-1}) - \varepsilon; \\ b_{i_{\max}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i_{\max}-1}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $i_{\min} = i_{\max} - 2$, on a les nombres de Betti

$$\begin{aligned} b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1, \quad \text{si } i < i_{\min} - 2 \text{ ou } i > i_{\min}; \\ b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= b_1(\Omega_{i_{\min}}) + 1 - \varepsilon; \\ b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i_{\min}}) + b_1(\Omega_{i_{\min}+1}) + 1 - 2\varepsilon; \\ b_{i_{\min}}(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i_{\max}-1}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $i_{\min} = i_{\max} - 1$ et $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$, on a les nombres de Betti

$$\begin{aligned} b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1, \quad \text{si } i < i_{\min} - 2 \text{ ou } i > i_{\min} - 1; \\ b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= b_1(\Omega_{i_{\min}}) + 2; \\ b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i_{\min}}) + 1. \end{aligned}$$

Si $i_{\min} = i_{\max} - 1$ et $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 2$, on a les nombres de Betti

$$\begin{aligned} b_i(X_{\mathbb{R}}) &= 1, \quad \text{si } i < i_{\min} - 2 \text{ ou } i > i_{\min} - 1; \\ b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= b_1(\Omega_{i_{\min}}) + 1 - \varepsilon; \\ b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i_{\min}}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve du théorème utilise les mêmes outils que ceux utilisés pour la démonstration de la proposition précédente. On suppose donc que $i_{\min} \neq i_{\max}$, par la suite exacte longue du couple $(P_{\mathbb{R}}^N, X_{\mathbb{R}})$ et la dualité de Poincaré-Lefschetz, on obtient

$$\rightarrow H^{N-i-1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-i}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) \rightarrow$$

Si i vérifie $N - i > i_{\max} + 1$, c'est à dire si $i < i_{\min} - 2$, alors les groupes $H^{N-i-1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}})$ et $H^{N-i}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}})$ sont nulles et on en conclut

$$b_i(X_{\mathbb{R}}) = 1 \quad \text{si } i < i_{\min} - 2$$

Si $i \geq i_{\min}$, alors les morphismes $H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(P_{\mathbb{R}}^N)$ sont nulles par définition de l'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$ et par la proposition 1.30. On obtient la suite exacte (toujours en utilisant la suite exacte longue du couple $(P_{\mathbb{R}}^N, X_{\mathbb{R}})$ et la dualité de Poincaré-Lefschetz)

$$0 \rightarrow H_{i+1}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{N-i-1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_i(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow 0$$

On en déduit immédiatement

$$b_i(X_{\mathbb{R}}) = \dim H^{N-i-1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) - 1$$

Par la description de la deuxième page de la suite spectrale d'Agrachev, si $i \geq i_{\max} - 1$ on obtient $\dim H^{N-i-1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) = 2$ et donc $b_i(X_{\mathbb{R}}) = 1$. De plus, si $i_{\min} < i_{\max} - 2$, on obtient

$$b_i(X_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} b_0(\Omega_{i_{\max}-1}) - \varepsilon & \text{si } i = i_{\max} - 2 \\ b_0(\Omega_{i_{\max}-2}) + b_1(\Omega_{i_{\max}-1}) - \varepsilon & \text{si } i = i_{\max} - 3 \\ b_0(\Omega_{i+1}) + b_1(\Omega_{i+2}) - 1 & \text{si } i_{\min} \leq i \leq i_{\max} - 4 \end{cases}$$

Et enfin, si $i_{\min} = i_{\max} - 2$, on obtient

$$b_{i_{\max}-2}(X_{\mathbb{R}}) = b_0(\Omega_{i_{\max}-1}) - \varepsilon$$

Pour conclure cette démonstration, il reste à calculer les nombres de Betti $b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}})$ et $b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}})$. On commence par travailler avec $i_{\min} < i_{\max} - 1$. Par la proposition 3.8, on sait que $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$ si et seulement si $\varepsilon = 0$. On regarde alors la suite exacte courte toujours issue de la suite exacte longue du couple $(P_{\mathbb{R}}^N, X_{\mathbb{R}})$

$$0 \rightarrow H_{i_{\min}}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{i_{\max}-1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}-1}(P_{\mathbb{R}}^N)$$

On en déduit, par la description de la deuxième page de la suite spectrale

$$\begin{aligned} b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= b_{i_{\max}-1}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) - 1 + (1 - \varepsilon) \\ &= \begin{cases} b_0(\Omega_{i_{\min}}) + b_1(\Omega_{i_{\min}+1}) - \varepsilon & \text{si } i_{\min} < i_{\max} - 2 \\ b_0(\Omega_{i_{\min}}) + b_1(\Omega_{i_{\min}+1}) + 1 - 2\varepsilon & \text{si } i_{\min} = i_{\max} - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, on regarde la suite exacte courte

$$\begin{aligned} H_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &\rightarrow H_{i_{\min}-1}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow H^{i_{\max}}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) \rightarrow H_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{i_{\min}-2}(P_{\mathbb{R}}^N) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On en déduit, par la description de la deuxième page de la suite spectrale

$$\begin{aligned} b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= b_{i_{\max}}(P_{\mathbb{R}}^N \setminus X_{\mathbb{R}}) + 1 - \varepsilon \\ &= b_1(\Omega_{i_{\min}}) + 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Il reste à étudier la cas $i_{\min} = i_{\max} - 1$, où seuls les nombres de Betti $b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}})$ et $b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}})$ sont indéterminés. Si $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$, alors par le lemme 3.9, la différentielle d_2 est triviale. En utilisant les mêmes suites spectrale que précédemment, on obtient le résultat suivant.

$$\begin{aligned} b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i_{\min}}) + 1 \\ b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= b_1(\Omega_{i_{\min}}) + 2 \end{aligned}$$

Si $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 2$, la différentielle d_2 n'est plus nécessairement triviale. En utilisant les mêmes suites spectrale que précédemment, on obtient le résultat suivant.

$$\begin{aligned} b_{i_{\min}-2}(X_{\mathbb{R}}) &= b_0(\Omega_{i_{\min}}) - \varepsilon \\ b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}}) &= b_1(\Omega_{i_{\min}}) + 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

□

Remarquons que, en toute rigueur, les formules pour le calcul des nombres de Betti donné par le théorème ne sont valables que pour $N > 3$. Néanmoins pour $N = 3$, on est obligatoirement dans le cas $i_{\min} = i_{\max} - 2 = 1$, et notre intersection de quadriques $X_{\mathbb{R}}$ est de dimension 0. Il est alors très facile de reprendre les idées de la démonstration pour vérifier que le seul nombre de Betti non nul $b_0(X_{\mathbb{R}})$ est effectivement donné par la formule de $b_{i_{\min}-1}(X_{\mathbb{R}})$ du théorème.

Corollaire 3.11. *Avec les notations du théorème précédent, on suppose que la courbe spectrale $C_{\mathbb{R}}$ possède ℓ ovals. Alors, si $i_{\min} \leq i_{\max} - 2$, on a*

$$\sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{R}}) = \left(\sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}-1} b_0(\Omega_i) + b_1(\Omega_i) \right) + 4(i_{\min} - \varepsilon) - N - 1$$

avec

$$\sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}-1} b_0(\Omega_i) + b_1(\Omega_i) = \begin{cases} 2\ell & \text{si la courbe est paire} \\ 2\ell + 1 & \text{si la courbe est impaire} \end{cases}$$

Si $i_{\min} = i_{\max} - 1 = k$, alors $N = 2k$ et on a

$$\sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{R}}) = 2\ell + 2k - 2(1 + \varepsilon)\nu$$

où $\nu = 0$ si et seulement si $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$ et $\nu = 1$ sinon.

3.2.2 Caractérisation des intersections maximales

Le but de cette section est de donner une caractérisation des intersections maximales de trois quadriques, l'existence de telles intersections fera l'objet de la dernière section de ce chapitre. Pour ce faire, nous allons étudier séparément le cas des intersections de dimension paire et le cas des intersections de dimension impaire.

Variétés de dimension paire.

Dans ce paragraphe, on supposera toujours que notre intersection de quadriques est dans $P_{\mathbb{R}}^N$ de dimension $N = 2k + 1$ impaire. Dans cette situation, la variété $X_{\mathbb{R}}$ est de dimension $2k - 2$.

Lemme 3.12. *Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Supposons que $X_{\mathbb{R}}$ est une M -variété, alors la fonction indice induite par les quadriques vérifie*

$$i_{\min} = k$$

Démonstration. D'après les propositions 1.30 et 1.31 utiliser dans le cadre d'une intersection de deux quadriques, on a les inégalités

$$\left\lfloor \frac{N-3}{2} \right\rfloor \leq \ell(X_{\mathbb{R}}) < i_{\min}$$

où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière. Cependant, par définition, on a également $i_{\min} \leq \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$, donc, comme $N = 2k + 1$, on en déduit

$$k - 1 < i_{\min} \leq k + 1$$

Finalement, le cas $i_{\min} = k + 1$ correspond au cas $i_{\min} = i_{\max}$ que l'on ne considère pas ici puisque ce cas ne peut pas correspondre à une intersection maximale. \square

Théorème 3.13

Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Alors, $X_{\mathbb{R}}$ est une M-variété si et seulement si sa courbe spectrale est une M-courbe, sa fonction indice vérifie $i_{\min} = k$ et la deuxième différentielle de la suite spectrale est triviale.

Démonstration. Par le lemme 3.12, on sait déjà que si $X_{\mathbb{R}}$ est une M-variété alors $i_{\min} = k$. De plus, par le corollaire 3.11, on a dans le cas $i_{\min} = i_{\max} - 2$

$$\sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{R}}) = 2\ell + 2k - 4\varepsilon - 2$$

où ε représente la trivialité de d_2 et ℓ est le nombre d'ovales de la courbe spectrale. Enfin, par les résultats sur les intersections de quadriques complexes, corollaire 1.15, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{C}}) &= h^{k-1, k-1}(X_{\mathbb{C}}) + 2h^{k-2, k}(X_{\mathbb{C}}) + 2k - 2 \\ &= 3k^2 + 3k + 2 + k(k-1) + 2k - 2 \\ &= 4k^2 + 4k \end{aligned}$$

Ainsi, par définition, $X_{\mathbb{R}}$ est une M-variété si et seulement si on a l'égalité

$$2\ell + 2k - 4\varepsilon - 2 = 4k^2 + 4k$$

On en déduit immédiatement,

$$\begin{aligned} \ell &= 2k^2 + k + 1 + 2\varepsilon \\ &= \frac{2k(2k+1)}{2} + 1 + 2\varepsilon = g + 1 + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Cependant, par l'inégalité de Harnack, $\ell \leq g + 1$ d'où $\ell = g + 1$ et $\varepsilon = 0$. \square

Variétés de dimension impaire.

Dans ce paragraphe, on supposera toujours que notre intersection de quadriques est dans $P_{\mathbb{R}}^N$ de dimension $N = 2k$ paire. Dans cette situation, la variété $X_{\mathbb{R}}$ est de dimension $2k - 3$.

Lemme 3.14. Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Supposons que $X_{\mathbb{R}}$ est une M-variété, alors la fonction indice induite par les quadriques vérifie

$$i_{\min} = k - 1 \quad \text{ou} \quad i_{\min} = k$$

Démonstration. D'après les propositions 1.30 et 1.31 utiliser dans le cadre d'une intersection de trois quadriques, on a les inégalités

$$\left\lfloor \frac{N-3}{2} \right\rfloor \leq \ell(X_{\mathbb{R}}) < i_{\min}$$

où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière. Cependant, par définition, on a également $i_{\min} \leq \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$, donc, comme $N = 2k$, on en déduit

$$k-2 < i_{\min} \leq k$$

On retrouve donc les deux possibilités, $i_{\min} = k-1$ ou $i_{\min} = k$ □

Théorème 3.15

Soit $X_{\mathbb{R}}$ une intersection régulière de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Alors, $X_{\mathbb{R}}$ est une M -variété si et seulement si l'un des cas suivants est vérifié

- (1) la courbe spectrale est une M -courbe, la fonction indice vérifie $i_{\min} = k-1$ et la différentielle d_2 est triviale.
- (2) la courbe spectrale est une M -courbe, la fonction indice vérifie $i_{\min} = k$ et la différentielle d_2 n'est pas triviale.
- (3) la courbe spectrale est une $(M-1)$ -courbe, la fonction indice vérifie $i_{\min} = k$, la différentielle d_2 est triviale et $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 2$.
- (4) la courbe spectrale est une $(M-2)$ -courbe, la fonction indice vérifie $i_{\min} = k$ et $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$.

Démonstration. Par le lemme 3.14, on sait déjà que si $X_{\mathbb{R}}$ est une M -variété alors $i_{\min} = k-1$ ou $i_{\min} = k$. Nous allons supposer pour commencer que $i_{\min} = k-1$. Alors, par le corollaire 3.11, on a dans le cas $i_{\min} < i_{\max} - 2$

$$\sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{R}}) = 2\ell + 2k - 4\varepsilon - 4$$

où ε représente la trivialité de d_2 et ℓ est le nombre d'ovales de la courbe spectrale. Enfin, par les résultats sur les intersections de quadriques complexes, corollaire 1.15, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{C}}) &= 2h^{k-2, k-1}(X_{\mathbb{C}}) + 2k - 2 \\ &= 4k^2 - 2k - 2 + 2k - 2 \\ &= 4k^2 - 4 \end{aligned}$$

Ainsi, par définition, $X_{\mathbb{R}}$ est une M -variété si et seulement si on a l'égalité

$$2\ell + 2k - 4\varepsilon - 4 = 4k^2 - 4$$

On en déduit immédiatement,

$$\begin{aligned} \ell &= 2k^2 - k + 2\varepsilon \\ &= \frac{2k(2k-1)}{2} + 2\varepsilon = g + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Cependant, par l'inégalité de Harnack, $\ell + 1 \leq g + 1$ (la courbe spectrale est impaire donc possède une composante unilatère qui n'est pas un ovale) d'où $\ell = g$ et $\varepsilon = 0$.

Supposons désormais que $i_{\min} = k$. Alors, par le corollaire 3.11, on a dans le cas $i_{\min} = i_{\max} - 1$

$$\sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{R}}) = 2\ell + 2k - 2(1 + \varepsilon)\nu$$

où ε représente toujours la trivialité de d_2 , ℓ est le nombre d'ovales de la courbe spectrale et $\nu = 0$ si et seulement si $\ell(X_{\mathbb{R}}) = i_{\min} - 1$. Enfin, la somme des nombres de Betti de l'intersection de quadriques complexes restent inchangée, d'où

$$\sum_{i \geq 0} b_i(X_{\mathbb{C}}) = 4k^2 - 4$$

Ainsi, par définition, $X_{\mathbb{R}}$ est une M-variété si et seulement si on a l'égalité

$$2\ell + 2k - 2(1 + \varepsilon)\nu = 4k^2 - 4$$

On en déduit immédiatement,

$$\begin{aligned} \ell &= 2k^2 - k - 2 + (1 + \varepsilon)\nu \\ &= \frac{2k(2k - 1)}{2} - 2 + (1 + \varepsilon)\nu = g - 2 + (1 + \varepsilon)\nu \end{aligned}$$

D'après la lemme 3.9, il existe trois possibilités pour le couple (ε, ν) , à savoir $(1, 1)$, $(0, 1)$ et $(0, 0)$. On en déduit que soit $\varepsilon = 1$, $\nu = 1$ et $\ell = g$, soit $\varepsilon = 0$, $\nu = 1$ et $\ell = g - 1$, soit $\nu = 0$ et $\ell = g - 2$. \square

Contrairement au cas des variétés de dimension paire, il n'y a pas ici une parfaite correspondance entre les intersections maximales et les M-courbes, ce qui rend l'étude de ce cas plus intéressante mais également plus difficile. Pour conclure ce chapitre, il nous faut démontrer que de telles intersections maximales existent.

3.3 Thêta-caractéristiques

Nous savons déjà par le théorème 1.25 que l'on peut associer à chaque intersection de trois quadriques une courbe algébrique plane mais que cette courbe ne caractérise pas l'intersection, i.e. étant donné une courbe plane, on ne peut pas lui associer de manière unique une intersection de trois quadriques. Le but de cette section est d'obtenir une telle construction, et donc de pouvoir démontrer l'existence d'intersection maximale à partir d'une courbe plane donnée.

3.3.1 Première approche

Définition 3.16. Soit C une courbe algébrique non-singulière de genre g et θ un fibré en droites holomorphe au-dessus de $C_{\mathbb{C}}$. Alors, θ est appelé une thêta-caractéristique si $\theta^{\otimes 2} = K_C$, où K_C est le fibré canonique.

On note $\Sigma(C)$, ou simplement Σ , l'ensemble des thêta-caractéristiques sur C . Une thêta-caractéristique est *paire* (respectivement *impaire*) si $h^0(C, \theta)$ est paire

(respectivement impaire). Une thêta-caractéristique paire est dite *dégénérée* si $\dim H^0(C, \theta) > 0$. Il existe une notion similaire pour les thêta-caractéristiques impaire mais nous n'en aurons pas besoin par la suite.

L'espace de modules des paires (C, θ) , où C est une courbe non-singulière de degré d fixé et θ une thêta-caractéristique sur C_C diffère suivant la parité du degré, pour plus d'informations sur le sujet voire par exemple [Mum71] ou [Dol12]. Si d est paire, l'espace de modules possède deux composantes connexes formées des thêta-caractéristiques paires et impaires. Si d est impaire, l'espace de modules possède une composante supplémentaire formée des paires $(C, \frac{1}{2}(d-3)H)$, où H est le diviseur d'une section hyperplane. Cette thêta-caractéristique particulière, appelé *thêta-caractéristique de Rokhlin*, est paire si $d \equiv \pm 1 \pmod{8}$ et impaire si $d \equiv \pm 3 \pmod{8}$.

3.3.2 Variété de Jacobi et thêta-fonctions.

Soit C une courbe algébrique non-singulière de genre g . On considère l'espace $H^0(C, K_C)$ comme l'espace des 1-formes holomorphes sur C_C . Par intégration sur des 1-cycles, on obtient un homomorphisme

$$\begin{aligned} \iota : H_1(C, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(C, K_C)^\vee \\ \gamma &\longmapsto \iota(\gamma)(\omega) = \int_\gamma \omega \end{aligned}$$

L'image de cette application est un réseau Λ de rang $2g$ sur $H^0(C, K_C)^\vee$. Le quotient par ce réseau

$$Jac(C) = H^0(C, K_C)^\vee / \Lambda$$

est un g -tore complexe appelé la *variété de Jacobi* de C_C . Par le théorème d'Abel-Jacobi, la variété de Jacobi est isomorphe à $Pic_0(C)$. Ainsi, un fibré en droites d'ordre 2 peut-être vu comme un élément d'ordre 2 de la variété de Jacobi, i.e. un élément de $Jac_2(C)$ et par dualité de Serre

$$Jac_2(C) \cong H^1(C, \mathbb{Z}_2)$$

Rappelons que le produit cap

$$H_1(C, \mathbb{Z}) \times H_1(C, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(C, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

définit une forme symplectique non-dégénérée sur $H_1(C, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Considérons $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ une base standard symplectique. On choisit $\omega_1, \dots, \omega_g$ une base de 1-formes holomorphes sur C_C telles que

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{i,j}$$

On pose

$$\tau_{i,j} = \int_{\beta_i} \omega_j$$

La matrice $\tau = (\tau_{i,j})$ est appelée *matrice de période*. Cette matrice $\tau = Re(\tau) + iIm(\tau)$ satisfait les relations de Riemann :

$${}^t\tau = \tau, \quad Im(\tau) > 0$$

On définit la thêta-fonction sur \mathbb{C}^g associée à $C_{\mathbb{C}}$ de caractéristique $(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{Z}_2^g$ par

$$\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^g} \exp \left[i\pi \left({}^t(r + \frac{1}{2}\varepsilon)\tau(r + \frac{1}{2}\varepsilon) + 2 {}^t(z + \frac{1}{2}\delta)(r + \frac{1}{2}\varepsilon) \right) \right]$$

On peut vérifier que

$$\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix} (-z, \tau) = \exp(i\pi {}^t\varepsilon\delta) \theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix} (z, \tau)$$

Une thêta-fonction est ainsi toujours paire ou impaire en fonction de sa caractéristique. À une telle thêta-fonction, on associe un thêta-diviseur (et donc une thêta-caractéristique) en regardant les zéros de l'application

$$\begin{array}{ccc} C_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & \theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix} (u(P), \tau) \end{array}$$

où $u(P) = \left(\int_{P_0}^P \omega_1, \dots, \int_{P_0}^P \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g$ pour P_0 un point fixé. On peut vérifier qu'une thêta-fonction est paire (respectivement impaire) si et seulement si la thêta-caractéristique associée est paire (respectivement impaire). De plus, une thêta-caractéristique paire est dégénérée si et seulement si $\theta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix} (0, \tau) = 0$.

Lemme 3.17. *Avec une exception, toute thêta-caractéristique paire définie sur une courbe plane non-singulière devient non-dégénérée après une petite perturbation de la courbe. L'exception est la thêta-caractéristique de Rokhlin sur les courbes de degré $d \equiv \pm 1 \pmod{8}$.*

Démonstration. Comme on vient de le voir, la condition d'être dégénérée est une condition analytique ne dépendant que de la matrice τ , donc ne dépendant que de la courbe. Ainsi, dans l'espace des paires (C, θ) où C est une courbe plane non-singulière de degré d et θ une thêta-caractéristique paire sur $C_{\mathbb{C}}$, les paires (C, θ) où θ est non-dégénérée forment un ouvert de Zariski pour cet espace. Puisqu'il existe au moins une courbe de degré d muni d'une thêta-caractéristique non-dégénérée, cet ensemble de paires (C, θ) est non vide donc dense dans l'unique composante formée par les thêta-caractéristiques paires autre que la thêta-caractéristiques de Rokhlin. \square

3.3.3 Théorème de Riemann-Mumford.

Soit θ une thêta-caractéristique sur $C_{\mathbb{C}}$. Pour tout fibré en droites L d'ordre 2, le fibré $\theta \otimes L$ est une thêta-caractéristique. On définit alors l'application

$$q_{\theta} : \begin{array}{ccc} \text{Jac}_2(C) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ L & \longmapsto & h^0(C, \theta \otimes L) - h^0(C, \theta) \end{array}$$

Théorème 3.18 (Riemann-Mumford [Mum71],[Har82])

L'application q_{θ} est une forme quadratique dont la forme bilinéaire associée est

la forme bilinéaire de Weil. De plus, l'application $\theta \mapsto q_\theta$ est une bijection canonique entre l'espace vectoriel des thêta-caractéristiques sur C et les formes quadratiques sur $Jac_2(C)$ de forme polaire la forme bilinéaire de Weil.

Nous n'allons pas ici décrire la forme bilinéaire de Weil. Néanmoins, sous l'isomorphisme $Jac_2(C) \cong H_1(C, \mathbb{Z}_2)$, la forme bilinéaire de Weil est simplement donnée par la forme d'intersection. On regarde à présent q_θ comme une forme quadratique sur $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$. Remarquons que si on considère $u_1, \dots, u_g, v_1, \dots, v_g$ base symplectique de $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ et si on pose

$$q_\theta(u_i) = \alpha_i, \quad q_\theta(v_j) = \beta_j$$

on obtient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_2^g$ la caractéristique de la thêta-fonction associée. Le nombre $Arf(q_\theta) = {}^t\alpha\beta \pmod{2}$, qui détermine la parité de la thêta-fonction et donc de la thêta-caractéristique, est appelé *invariant de Arf*. Pour conclure cette section, nous allons rappeler quelques résultats sur les formes quadratiques à valeur dans \mathbb{Z}_2 , les détails peuvent être trouvés dans [GH04] par exemple. On considère q et q' deux formes quadratiques sur $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ dont la forme bilinéaire associée est la forme d'intersection notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors, il existe un vecteur $v \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ tel que pour tout $u \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$,

$$q'(u) - q(u) = \langle v, u \rangle$$

On notera simplement par la suite l'égalité $q' = q + v$. On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des thêta-caractéristiques et l'espace $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$. Si on suppose que $q' = q + v$, l'invariant de Arf de q' est donné par la formule suivante

$$Arf(q') = Arf(q) + q(v)$$

Ainsi, en fixant une forme quadratique q_0 d'invariant de Arf nul, les thêta-caractéristiques paires seront toutes les thêta-caractéristiques dont la forme quadratique associée est de la forme $q = q_0 + v$ et satisfaisant $q_0(v) = 0$.

Corollaire 3.19. *Soit C une courbe algébrique plane non-singulière de genre g . Il existe 2^{2g} thêta-caractéristiques sur $C_{\mathbb{C}}$ dont $2^{g-1}(2^g+1)$ paires et $2^{g-1}(2^g-1)$ impaires.*

3.3.4 Description géométrique

Soit C une courbe algébrique de genre g et θ une thêta-caractéristique sur $C_{\mathbb{C}}$. On choisit s une section méromorphe du fibré en droites θ non identiquement nulle. Ainsi, $\hat{s} = s \otimes s$ est une section de $\theta \otimes \theta = K_C$ donc une 1-forme de $C_{\mathbb{C}}$ méromorphe non identiquement nulle. Comme K_C^* est canoniquement isomorphe à l'espace tangent TC , il existe une unique section méromorphe τ de TC définie par la condition, $\tau(\hat{s})$ est la fonction constante 1 sur $C_{\mathbb{C}}$. En particulier, les zéros (respectivement les pôles) de \hat{s} deviennent les pôles (respectivement les zéros) de τ et par construction, sont tous d'ordre paire. Notons $\Omega \subset C_{\mathbb{C}}$ la réunion des zéros et des pôles de τ .

Soit γ un lacet représentant $c \in H_1(C; \mathbb{Z}_2)$, plus précisément $\gamma : S^1 \rightarrow C_{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Pour tout point $p \in S^1$, on identifie $T_{\gamma(p)}C \setminus \{0\}$, l'espace tangent en $\gamma(p)$ privé

de 0, avec $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$ en envoyant le point $(1, 0) \in S^1$ sur $\gamma'(p)$. Ainsi, $\tau(\gamma(p))$ définit un point sur S^1 et on obtient une application

$$f : S^1 \rightarrow S^1$$

On note $n = \deg(f)$ et on définit $\text{index}(\tau, \gamma) = n \pmod 2$. On définit alors l'application

$$\begin{array}{ccc} H_1(C; \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ c & \mapsto & \text{index}(\tau, \gamma) \end{array}$$

où γ est un lacet représentant la classe $c \in H_1(C; \mathbb{Z}_2)$. Le nombre $\text{index}(\tau, \gamma)$ est indépendant du représentant γ que l'on choisit et de τ , c'est à dire de la section s que l'on a fixé au départ. On peut donc définir pour toute thêta-caractéristique θ l'application

$$\begin{array}{ccc} H_1(C; \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ c & \mapsto & \text{index}(\theta, c) \end{array}$$

Théorème 3.20 (Thurston [GH81])

Soit C une courbe algébrique de genre g et θ une thêta-caractéristique sur $C_{\mathbb{C}}$. Alors, pour tout élément $c \in H_1(C; \mathbb{Z}_2)$, on a l'égalité

$$q_{\theta}(c) = \text{index}(\theta, c) + 1 \pmod 2$$

3.3.5 Thêta-caractéristiques sur les courbes réelles

Soit (C, conj) une courbe réelle. L'involution $\text{conj} : C_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$ induit une involution $c : \Sigma \rightarrow \Sigma$ sur l'ensemble des thêta-caractéristiques. L'ensemble des points fixes de cette involution est noté $\Sigma_{\mathbb{R}}$ et appelé l'ensemble des thêta-caractéristiques réelles.

Soit θ une thêta-caractéristique réelle, alors on dispose d'une involution anti-holomorphe $\tau : \theta \rightarrow \theta$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \theta & \xrightarrow{\tau} & \theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\text{conj}} & C_{\mathbb{C}} \end{array}$$

L'application induite $\theta_{\mathbb{R}} \rightarrow C_{\mathbb{R}}$ sur les parties réelles est alors un fibré en droites réelle. Si on note C_0, \dots, C_r les composantes connexes de $C_{\mathbb{R}}$ alors on considère la famille $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r) \in \mathbb{Z}_2^{r+1}$ en posant $\varepsilon_i = 0$ si et seulement si le fibré en droites $\theta_{\mathbb{R}}$ est trivial au-dessus de C_i . Les nombres ε_i vérifient la congruence

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r \equiv g + 1 \pmod 2$$

Ainsi, ε_0 est déterminé par la donnée de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$. Avec les mêmes notations que précédemment, pour toute composante connexe C_i de $C_{\mathbb{R}}$, on choisit un point $p_i \in C_i$ puis un chemin lisse γ_i de p_0 à p_i avec $\gamma_i \subset C_{\mathbb{C}}$ et orthogonal à C_0 et C_i . En posant $G_i = \gamma_i \cup \text{conj}(\gamma_i)$, on obtient un lacet lisse. On définit alors $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r) \in \mathbb{Z}_2^r$ par $\delta_i = q_{\theta}([G_i])$ où $[G_i]$ est la classe du lacet G_i dans $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$.

Toute thêta-caractéristique réelle θ détermine une orientation sur $C_{\mathbb{R}}$ appelé

spin-orientation ou *thêta-orientation*. Cette orientation est décrite de la manière suivante : on choisit ω une section de θ . Ainsi, la section $\Omega = \omega \otimes \omega$ est une forme différentielle méromorphe sur C . Puisque, par construction, tous les zéros et les pôles de Ω sont d'ordre paire, sa restriction sur $C_{\mathbb{R}}$ détermine une semi-orientation.

Proposition 3.21. *Soit θ une thêta-caractéristique réelle, on considère q_{θ} la forme quadratique associée. Alors, on a l'égalité*

$$q_{\theta}([C_i]) \equiv \varepsilon_i + 1 \pmod{2}$$

où $[C_i]$ est la classe du lacet C_i dans $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$. De plus, si on oriente le lacet G_i , on obtient $q_{\theta}([G_i]) = 1$ si et seulement si les nombres d'intersection entre G_i et les courbes orientés C_0, C_i ont la même valeur.

Démonstration. Cette proposition est une conséquence directe du théorème 3.20. En effet, ce théorème nous donne l'égalité $q_{\theta}(c) = \text{index}(\theta, c) + 1$ pour tout $c \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$. Ainsi, par la description de la fonction index, on obtient l'égalité $\text{index}(\theta, [C_i]) = \varepsilon_i$. De même, il n'est pas difficile de voir que si les nombres d'intersection entre G_i et les courbes orientés C_0, C_i ont la même valeur alors $\text{index}(\theta, [G_i]) = 0$ étant donné que la spin-orientation est donnée par une section de la thêta-caractéristique tout comme la fonction index. \square

Si C est une courbe séparante, alors on peut définir l'orientation complexe. D'après le théorème 3.20 et les définitions des différentes constantes, on en déduit que $\delta_i = 0$ si et seulement si la spin-orientation sur C_i est la même que l'orientation complexe. Cette distinction entre courbes séparantes et courbes non-séparantes est importante pour les thêta-caractéristiques réelles. En effet, la forme quadratique associée à une thêta-caractéristique réelle θ doit être invariante par composition avec le morphisme $\text{conj}_* : H_1(C, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(C, \mathbb{Z}_2)$. Si C est une courbe séparante, alors on peut compléter la famille $([C_i], [G_i])$ en une base de $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ où ce morphisme est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \end{pmatrix}$$

Si C est une courbe non-séparante, alors il existe une base où ce morphisme est donnée par l'une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La première matrice correspond au cas où le nombre de composantes connexes de la courbe réelle et le genre de la courbe ont la même parité, la deuxième matrice correspond au cas où ces nombres n'ont pas la même parité. Dans le cas d'une courbe séparante, la base que l'on considère peut être représentée comme sur la figure 3.8, où les lacets en pointillé complètent la famille $([C_i], [G_i])$ en

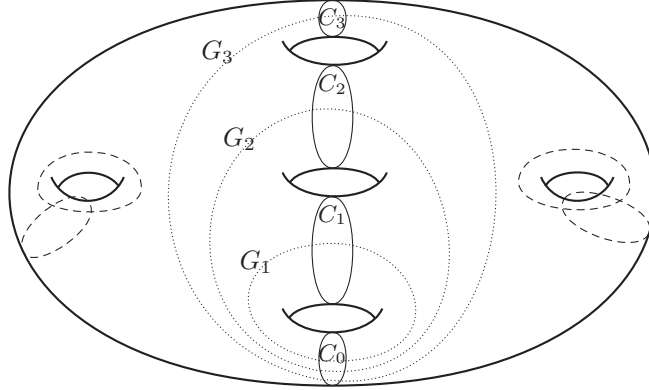


FIGURE 3.8 – Courbe plane et base du $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$

une base symplectique. Par un résultat de Gross et Harris (c.f. [GH81]), toute forme quadratique q_θ sur $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ invariante par l'application $conj_*$, i.e. pour tout $c \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ on a $q_\theta(c) = q_\theta(conj_*(c))$, définit une thêta-caractéristique réelle. Remarquons que cette propriété est fautive si la courbe spectrale n'a pas de points réelle, i.e. $C_{\mathbb{R}} = \emptyset$. On en déduit la propriété suivante.

Proposition 3.22. *Soit C une courbe non-singulière dont la partie réelle est constituée de $r \geq 1$ composantes connexes. Pour tout $(\varepsilon, \delta) \in (\mathbb{Z}_2^{r-1})^2$, il existe une thêta-caractéristique réelle θ vérifiant*

$$\begin{aligned} q_\theta([C_i]) &\equiv \varepsilon_i + 1 \pmod{2} \\ q_\theta([G_i]) &= \delta_i \end{aligned}$$

De plus, si C est non-séparante, on peut choisir la thêta-caractéristique réelle paire ou impaire. Si C est séparante, l'invariant de Arf de q_θ est donnée par

$$\text{Arf}(q_\theta) = \sum_{i=1}^r \delta_i(1 + \varepsilon_i)$$

Démonstration. Supposons que la courbe spectrale C soit séparante, en particulier r et g n'ont pas même parité. On pose $k = (g + 1 - r)/2$ et on choisit une base symplectique de $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$

$$([C_1], \dots, [C_r], X_1, \dots, X_k, X_1^c, \dots, X_k^c, [G_1], \dots, [G_r], Y_1, \dots, Y_k, Y_1^c, \dots, Y_k^c)$$

avec $X_i^c = conj_*(X_i)$ et $Y_i^c = conj_*(Y_i)$. Alors, d'après un résultat de Gross et Harris, une thêta-caractéristique réelle sur C est uniquement déterminée par

la donnée d'une forme quadratique à valeurs dans \mathbb{Z}_2 invariante par conjugaison. Une telle forme quadratique est entièrement déterminée par l'image de la base symplectique décrite précédemment. Les éléments de la base symplectique $[C_1], \dots, [C_r]$ et $[G_1], \dots, [G_r]$ sont invariants par la conjugaison, on peut alors imposer n'importe quel valeur à leur image par une forme quadratique q_θ . On pose alors

$$\begin{aligned} q_\theta([C_i]) &\equiv \varepsilon_i + 1 \pmod{2} \\ q_\theta([G_i]) &= \delta_i \end{aligned}$$

Pour obtenir une thêta-caractéristique réelle θ , il suffit de donner une valeur aux autres éléments de la base symplectique. Néanmoins par définition de cette base, X_i et X_i^c sont conjugué, tout comme Y_i et Y_i^c . Ainsi, on doit vérifier les égalités

$$\begin{aligned} q_\theta(X_i) &= q_\theta(X_i^c) \\ q_\theta(Y_i) &= q_\theta(Y_i^c) \end{aligned}$$

Supposons avoir fixé des valeurs pour $q_\theta(X_i)$ et $q_\theta(Y_i)$, on a ainsi obtenu une thêta-caractéristique réelle dont l'invariant de Arf est donné par la formule

$$\begin{aligned} \text{Arf}(q_\theta) &= \sum_{i=1}^{r-1} q_\theta([C_i])q_\theta([G_i]) + \sum_{i=1}^k [q_\theta(X_i)q_\theta(Y_i) + q_\theta(X_i^c)q_\theta(Y_i^c)] \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} (1 + \varepsilon_i)\delta_i + 2 \sum_{i=1}^k q_\theta(X_i)q_\theta(Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} (1 + \varepsilon_i)\delta_i. \end{aligned}$$

Si la courbe spectrale est non-séparante. Supposons par exemple que g et r ont même parité (la démonstration est similaire si g et r n'ont pas la même parité). On pose $k = (g - r)/2$ et on choisit une base symplectique de $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$

$$([C_i], X_j, X_j^c, X, [G_i], Y_j, Y_j^c, Y)_{\substack{1 \leq i \leq r-1 \\ 1 \leq j \leq k}}$$

avec $X_i^c = \text{conj}_*(X_i)$, $Y_i^c = \text{conj}_*(Y_i)$, $\text{conj}_*(X) = X$ et $\text{conj}_*(Y) = X + Y$. Comme précédemment, les éléments de la base $([C_1], \dots, [C_r], [G_1], \dots, [G_r])$ sont invariants par la conjugaison, on peut alors imposer n'importe quel valeur à leur image par une forme quadratique q_θ . Pour construire une thêta-caractéristique réelle, il faut alors satisfaire les relations suivantes

$$\begin{aligned} q_\theta(X_i) &= q_\theta(X_i^c) \\ q_\theta(Y_i) &= q_\theta(Y_i^c) \\ q_\theta(\text{conj}_*(Y)) &= q_\theta(Y + X) = q_\theta(Y) \\ q_\theta(\text{conj}_*(X)) &= q_\theta(X) \end{aligned}$$

La dernière relation est triviale, néanmoins la troisième relation, à savoir $q_\theta(Y + X) = q_\theta(Y)$, impose l'égalité

$$q_\theta(X) = \langle X, Y \rangle = 1$$

Supposons avoir fixé des valeurs pour $q_\theta(X_i)$, $q_\theta(Y_i)$ et $q_\theta(Y)$, on a ainsi obtenu une thêta-caractéristique réelle dont l'invariant de Arf est donné par la formule

$$\begin{aligned} \text{Arf}(q_\theta) &= \sum_{i=1}^{r-1} q_\theta([C_i])q_\theta([G_i]) + \sum_{i=1}^k [q_\theta(X_i)q_\theta(Y_i) + q_\theta(X_i^c)q_\theta(Y_i^c)] \\ &\quad + q_\theta(X)q_\theta(Y) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} (1 + \varepsilon_i)\delta_i + 2 \sum_{i=1}^k q_\theta(X_i)q_\theta(Y_i) + q_\theta(Y) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} (1 + \varepsilon_i)\delta_i + q_\theta(Y). \end{aligned}$$

L'invariant de Arf dépend fortement de la valeur que l'on choisit pour $q_\theta(Y)$ et plus uniquement des vecteurs $(\varepsilon, \delta) \in (\mathbb{Z}_2^{r-1})^2$ fixés. \square

3.3.6 Construction de Dixon

Soient q_0, q_1, q_2 trois formes quadratiques linéairement indépendantes et C la courbe spectrale de degré d associée. On suppose que la courbe C_C est non-singulière. À chaque faisceau de quadriques, on peut associer un fibré en droites \mathcal{K} sur C_C où la fibre au-dessus d'un point $\omega \in C_C$ est donnée par $\ker(\omega q)$ (c'est bien un sous-espace de dimension 1 d'après le lemme 1.16). Après un twist, on obtient un fibré $\mathcal{L} = \mathcal{K}(d-1)$ vérifiant $\mathcal{L}^2 = \mathcal{O}_C(d-1)$ et $H^0(C, \mathcal{L}(-1)) = 0$. Ainsi, $\theta = \mathcal{L}(-1)$ définit une thêta-caractéristique non-dégénérée sur C appelée *thêta-caractéristique spectrale*. Nous aurons besoin d'un lemme algébrique afin de pouvoir démontrer le résultat principal dû aux travaux de Dixon.

Lemme 3.23. *Soit $A(x)$ une matrice d'ordre m pour $x \in P_C^2$. Si chaque mineur d'ordre $(m-1)$ dans $A(x)$ est divisible par un polynôme $F(x)^\ell$, alors $\det A(x)$ est divisible par $F(x)^{\ell+1}$.*

Démonstration. Notons p le plus grand entier vérifiant $F(x)^p$ divise $\det(A(x))$. Considérons la matrice adjointe, notée $\text{adj}(A(x))$; dont les coefficients sont par hypothèse divisible par $F(x)^\ell$. On en déduit que $\det(\text{adj}(A(x)))$ est divisible par $F(x)^{\ell m}$. Cependant,

$$\det(\text{adj}(A(x))) = [\det(A(x))]^{m-1}$$

Ainsi, la plus grande puissance de $F(x)$ qui divise $[\det(A(x))]^{m-1}$, qui est par définition $p(m-1)$, est supérieure ou égale à ℓm , i.e.

$$p(m-1) \geq \ell m \quad \Rightarrow \quad p \geq \frac{m}{m-1}\ell$$

Finalement, puisque p est un entier, on en conclut que $p \geq \ell + 1$, c'est à dire que $\det(A(x))$ est divisible par $F(x)^{\ell+1}$. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal.

Théorème 3.24 (Dixon [Dix02])

Soit θ une thêta-caractéristique paire (réelle) telle que $\dim H^0(C, \theta) = 0$ sur une courbe non-singulière C de degré d . Alors, il existe un unique faisceau de quadriques (réelle) (q_0, q_1, q_2) , à isomorphisme de l'espace projectif près, tel que C soit sa courbe spectrale et θ sa thêta-caractéristique spectrale.

Démonstration. Nous donnerons uniquement les grandes étapes de la démonstration, une preuve détaillée se trouve dans [Dol12]. Soit $\phi_{11}, \dots, \phi_{1d}$ une base de $H^0(C, \theta(1)) = H^0(C, \mathcal{L})$. on pose $v_{11} = \phi_{11}^2, \dots, v_{1d} = \phi_{11}\phi_{1d} \in H^0(C, \mathcal{L}^2)$ (par les propriétés énoncé précédemment, on a $\mathcal{L}^2 = \mathcal{O}_C(d-1)$). Puisque la restriction $H^0(P_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{O}_{P_{\mathbb{C}}^2}(d-1)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(d-1))$ est surjective, on peut regarder les éléments v_{1i} comme des polynômes homogènes de degré $d-1$. Soit $U(x_0, x_1, x_2) = 0$ l'équation de la courbe C . Par définition, la courbe $\{v_{1i} = 0\}$ pour $i \geq 2$, passe par tous les points d'intersections de C et de $\{v_{11} = 0\}$. on déduit qu'il existe v_{ij} et w_{11ij} deux polynômes homogènes de degré $d-1$ et $d-2$ respectivement vérifiant

$$v_{1i}v_{1j} = v_{11}v_{ij} - U w_{11ij}$$

Par construction, on a $v_{ij} = v_{ji}$ donc, on a construit une matrice symétrique $V(x) = (v_{ij})$ d'ordre d , de rang 1 pour tout $x \in C_{\mathbb{R}}$ dont les entrées sont des polynômes homogènes de degré $d-1$ et dont le déterminant n'est pas identiquement nulle (cette dernière propriété provient de l'hypothèse $\dim H^0(C, \theta) = 0$). Par le lemme 3.23, à l'aide d'une récurrence, on montre que tout mineur d'ordre r dans $V(x)$ est divisible par $U(x)^{r-1}$ (la récurrence commence en utilisant le fait que le rang de $V(x)$ vaut 1 pour tout $x \in C_{\mathbb{R}}$). On en déduit en particulier que $\det V(x)$ est divisible par U^{d-1} mais : $\deg(\det V(x)) = d(d-1) = \deg U^{d-1}$. On en conclut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\det V(x) = cU(x)^{d-1}$$

De plus, tout mineur d'ordre $d-1$ est divisible par $U(x)^{d-2}$, on définit alors

$$M(x) = \frac{1}{U(x)^{d-2}} \text{adj} V(x)$$

On vérifie que $M(x)$ est solution à notre problème, i.e $\det M(x) = c^{d-1}U(x)$ et $\text{adj} M(x) = c^{d-2}V(x)$. \square

3.4 Existence d'intersections maximales

Au cours de cette section, nous allons dans un premier temps étudier la caractéristique d'Euler des intersections de trois quadriques et voir ce qu'on peut en déduire sur les courbes planes. Par la suite, nous allons comprendre la relation entre la thêta-caractéristique d'une part et la différentielle d_2 et la fonction indice d'autre part. Pour finir, nous pourrons exprimer la caractérisation des intersections maximales en fonction de la thêta-caractéristique pour finalement démontrer l'existence de telles intersections.

3.4.1 Caractérisation et thêta-caractéristiques

Au cours de ce paragraphe, nous allons étudier la relation existant entre la thêta-caractéristique et les éléments intervenant dans la caractérisation des intersections maximales, à savoir la différentielle d_2 et la fonction indice.

Différentielle.

Soient q_0, q_1, q_2 trois formes quadratiques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ et $C_{\mathbb{R}}$ la courbe spectrale associée. La différence $P_{\mathbb{R}}^2 \setminus C_{\mathbb{R}}$ consiste en r composantes orientables et une composante non-orientable si N est impaire. On note D_1, \dots, D_r les composantes orientables. Pour tout i , le bord de la composante D_i est constitué d'ovales dont un est "au-dessus" des autres pour la relation \prec décrite précédemment. On note C_i cet ovale. La pré-image de D_i par la projection $S^2 \rightarrow P_{\mathbb{R}}^2$ consiste en deux composantes notées D'_i, D''_i . De même, la pré-image de C_i par la projection de la sphère consiste en deux ovales Γ'_i, Γ''_i et on peut supposer que $\Gamma'_i \subset \partial D'_i$ et $\Gamma''_i \subset \partial D''_i$. Finalement, on note E'_i la restriction du fibré ξ_{m-1} sur D'_i (où m est la valeur de la fonction indice sur D'_i) et E''_i la restriction du fibré ξ_{N-m} sur D''_i . Soit \mathcal{M}_i l'ensemble des entiers $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ tel que $j \neq i$ et $C_j \subset \partial D_i$. étant donné $j \in \mathcal{M}_i$, on note $\mathcal{M}_{i,j}$ l'ensemble des entiers $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que $C_j \prec C_k$.

Lemme 3.25. *Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et tout $j \in \mathcal{M}_i$, on a*

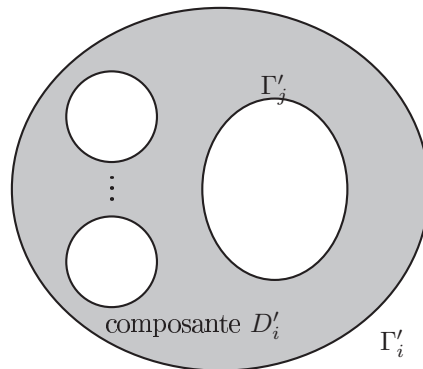
$$\begin{aligned} \omega_1(E'_i)[\Gamma'_j] &= \varepsilon(C_j) + \sum_{k \in \mathcal{M}_{i,j}} \varepsilon(C_k) \\ \omega_1(E''_i)[\Gamma''_j] &= \varepsilon(C_j) + \sum_{k \in \mathcal{M}_{i,j}} \varepsilon(C_k) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(C_k)$ est le coefficient de trivialité du fibré \mathcal{K} (i.e $\varepsilon(C_k) = 0$ si et seulement si \mathcal{K} est trivial au-dessus de C_k).

Démonstration. Par "symétrie" de la fonction indice, il est suffisant de démontrer l'une des deux égalités pour démontrer le lemme. On fixe $i \in \{1, \dots, r\}$ et on se donne $j \in \mathcal{M}_i$. On considère $p(C_j) = p$ le plus grand entier pour lequel on peut avoir

$$C_j \prec C_{k_1} \prec C_{k_2} \prec \dots \prec C_{k_p}$$

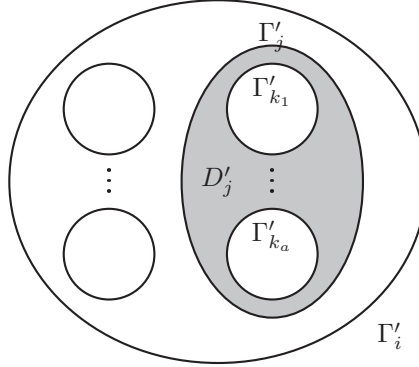
On va alors démontrer le lemme par récurrence sur p . Supposons que $p(C_j) = 0$.



On en déduit immédiatement que $\mathcal{M}_{i,j} = \emptyset$ et que le fibré E'_j est trivial puisque le fibré est défini au-dessus de D'_j qui est contractile. Ainsi, l'une des deux égalités suivantes convient

$$E'_i|_{\Gamma'_j} = E'_j|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{K}|_{\Gamma'_j}, \quad E'_j|_{\Gamma'_j} = E'_i|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{K}|_{\Gamma'_j}$$

Dans les deux cas, puisque le fibré E'_j est trivial, on en déduit que $\omega_1(E'_i)[\Gamma'_j] = \varepsilon(C_j)$, ce qui démontre le lemme pour $p(C_j) = 0$. Supposons maintenant que le lemme soit vraie pour tout $j \in \mathcal{M}_i$ vérifiant $p(C_j) \leq \rho$. Soit $j \in \mathcal{M}_i$ avec $p(C_j) = \rho + 1$. On note $\mathcal{M}_j = \{k_1, \dots, k_a\}$.



Alors, on en déduit, $p(C_{k_1}) \leq \rho, \dots, p(C_{k_a}) \leq \rho$ et par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \omega_1(E'_j)[\Gamma'_{k_1}] &= \varepsilon(C_{k_1}) + \sum_{k \in \mathcal{M}_{i,k_1}} \varepsilon(C_k) \\ &\vdots \\ \omega_1(E'_j)[\Gamma'_{k_a}] &= \varepsilon(C_{k_a}) + \sum_{k \in \mathcal{M}_{i,k_a}} \varepsilon(C_k) \end{aligned}$$

Le fibré E'_j étant défini sur D'_j , on en déduit

$$\omega_1(E'_j)[\Gamma'_j] = \sum_{m=1}^a \omega_1(E'_j)[\Gamma'_{k_m}] = \sum_{k \in \mathcal{M}_{i,j}} \varepsilon(C_k)$$

Or, on a toujours l'une des deux égalités suivantes

$$E'_i|_{\Gamma'_j} = E'_j|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{K}|_{\Gamma'_j}, \quad E'_j|_{\Gamma'_j} = E'_i|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{K}|_{\Gamma'_j}$$

On en déduit au final que $\omega_1(E'_i)[\Gamma'_j] = \omega_1(E'_j)[\Gamma'_j] + \varepsilon(C_k)$ ce qui est bien l'égalité du lemme. \square

Théorème 3.26

Soient q_0, q_1, q_2 trois formes quadratiques et $C_{\mathbb{R}}$ la courbe spectrale associée. Avec les notations précédentes, la différentielle d_2 est trivial si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ vérifiant que la fonction indice sur D'_i ou D''_i a pour valeur i_{max} et tout $j \in \mathcal{M}_i$, on ait

$$\varepsilon(C_j) + \sum_{k \in \mathcal{M}_{i,j}} \varepsilon(C_k) = 0$$

Démonstration. D'après le théorème 1.25, la différentielle d_2 est essentiellement donnée par la première classe de Stiefel-Whitney du fibré $\xi_{i_{\max}-1}$ et plus précisément par

$$d_2 : H^0(\Omega_{i_{\max}-1}) \xrightarrow{\delta(\gamma_{i_{\max}}) \cup \underline{\quad}} H^2(\Omega_{i_{\max}}, \pi^{-1}(\Lambda_{i_{\max}})) \longrightarrow H^2(\Omega_{i_{\max}})$$

Cependant, le morphisme de bord $\delta : H^1(\pi^{-1}(\Lambda_{i_{\max}})) \rightarrow H^2(\Omega_{i_{\max}}, \pi^{-1}(\Lambda_{i_{\max}}))$ issu de la suite exacte longue du couple $(\Omega_{i_{\max}}, \pi^{-1}(\Lambda_{i_{\max}}))$ est injectif, on a alors les équivalences

$$d_2 = 0 \Leftrightarrow \delta(\gamma_{i_{\max}}) = 0 \Leftrightarrow \gamma_{i_{\max}} = 0$$

Par l'isomorphisme naturelle $H^1(\pi^{-1}(\Lambda_{i_{\max}})) = (\bigoplus H^1(D'_i)) \oplus (\bigoplus H^1(D''_i))$, où les sommes directes sont prises sur les composantes D'_i (respectivement D''_i) sur lesquels la fonction indice vaut i_{\max} , on a $\gamma_{i_{\max}} = 0$ si et seulement si la première classe de Stiefel-Whitney du fibré $\xi_{i_{\max}-1}$ restreint à D'_i (respectivement D''_i) est triviale. Finalement, en utilisant l'isomorphisme $H^1(D'_i) = \bigoplus_{j \in \mathcal{M}_i} H^1(\Gamma'_j)$, la première classe de Stiefel-Whitney du fibré $\xi_{i_{\max}-1}$ restreint à D'_i est triviale si et seulement si pour tout $j \in \mathcal{M}_i$

$$\omega_1(E'_i)[\Gamma'_j] = 0$$

Le lemme 3.25 nous donne alors le résultat final. \square

D'après le théorème 3.26, la différentielle d_2 est entièrement déterminée par la trivialité du fibré \mathcal{K} . Cependant, puisque θ la thêta-caractéristique spectrale est un twist de \mathcal{K} , on en déduit que sur les ovales la trivialité de \mathcal{K} est équivalente à la trivialité de θ , et sur la composante unilatère la trivialité de \mathcal{K} est équivalente à la non-trivialité de θ . Si on note $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_r)$ la trivialité de la thêta-caractéristique spectrale sur les composantes connexes C_i de $C_{\mathbb{R}}$ alors

$$\begin{aligned} \varepsilon(C_i) &= \varepsilon_i \quad \text{si } C_i \text{ est un ovale} \\ \varepsilon(C_i) &= \varepsilon_i + 1 \pmod{2} \quad \text{si } C_i \text{ est la composante unilatère} \end{aligned}$$

En pratique, la composante unilatère (lorsqu'elle existe) sera toujours la composante connexe noté C_0 , ainsi, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de la forme quadratique q_θ sur cette composante. On peut ainsi sans ambiguïté utiliser la notation ε_i pour la trivialité du fibré \mathcal{K} au-dessus de C_i , comme pour la trivialité de la thêta-caractéristique spectrale.

Fonction indice.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la fonction indice définie pour les intersections de trois quadriques est associée à la spin-orientation qui détermine en partie une thêta-caractéristique. En effet, la fonction indice donne une manière naturelle de comparer des orientations sur deux composantes connexes adjacentes de $C_{\mathbb{R}}$ en regardant si la fonction indice augmente ou diminue en traversant chacune des composantes (voir figure 3.9). À partir de ces comparaisons, on définit une semi-orientation sur $C_{\mathbb{R}}$ de la manière suivante : on fixe une orientation sur S^2 et on l'utilise pour fixer l'orientation sur une composante de $C_{\mathbb{R}}$, on en déduit alors l'orientation sur toutes les composantes connexes via la comparaison précédente.

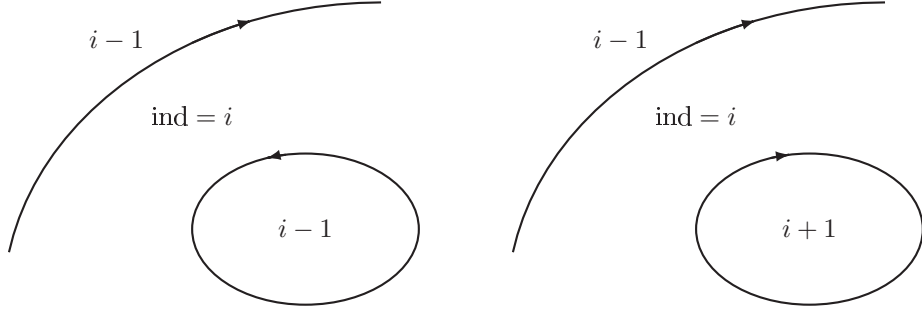


FIGURE 3.9 – Fonction indice et orientation

Réciproquement, on peut utiliser cette comparaison pour construire une fonction indice à partir d'une semi-orientation. Inversement, on peut facilement construire une fonction indice à partir d'une spin-orientation. Le théorème suivant dû à V.Vinnikov fait le lien entre cette semi-orientation construite à partir de la fonction indice et la semi-orientation donnée par la thêta-caractéristique spectrale.

Théorème 3.27 (Vinnikov [Vin93])

Soient q_0, q_1, q_2 trois formes quadratiques et $C_{\mathbb{R}}$ la courbe spectrale associée, supposée non-singulière. Alors, la semi-orientation déterminée par la fonction indice coïncide avec la semi-orientation définie par la thêta-caractéristique spectrale.

3.4.2 Caractéristique d'Euler et conséquences

Le but de cette section est de calculer la caractéristique d'Euler d'une intersection de trois quadriques de dimension paire et de retrouver, à partir de théorème généraux sur les variétés réelles, les différents résultats déjà évoqués sur les courbes planes.

Proposition 3.28. Soient q_0, q_1, q_2 trois formes quadratiques et $X_{\mathbb{R}}$ l'intersection des trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$. Si $N = 2k + 1$ est impaire avec $k \geq 2$ et si $i_{\min} > 1$, la caractéristique d'Euler de l'intersection de trois quadriques est donnée par la formule

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = (1 + (-1)^k) + (-1)^{k-1}(2p - 2n)$$

Démonstration. On va uniquement démontrer cette proposition pour $2 < i_{\min} < i_{\max} - 2$, la démonstration pour les autres cas étant exactement identique. En utilisant les résultats du corollaire 1.26, on obtient l'égalité

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = \sum_{j=0}^N (-1)^{j+1} \chi(\Omega_j).$$

Rappelons maintenant que si $j < i_{\min}$ alors $\Omega_j = \emptyset$ et si $j \geq i_{\max}$ alors $\Omega_j = S^2$.

En utilisant la formule $i_{\min} + i_{\max} = N + 1$, on en déduit alors,

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = (1 + (-1)^{i_{\min}-1}) + \sum_{j=i_{\min}}^{i_{\max}-1} (-1)^{j+1} \chi(\Omega_j),$$

ou encore après une réorganisation des différents termes,

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) = (1 + (-1)^{i_{\min}-1}) + \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} (-1)^i (b_0(\Omega_{i-1}) + b_1(\Omega_i)).$$

Il suffit à présent de remarquer (en séparant la somme en deux termes suivant la parité de $i - k$) que l'on a l'égalité

$$\sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} (-1)^i (b_0(\Omega_{i-1}) + b_1(\Omega_i)) = (-1)^{k-1} (2p - 2n - 1 - (-1)^{k-i_{\min}}).$$

Finalement, en regroupant les différentes puissances de (-1) , on obtient le résultat annoncé. \square

On peut remarquer que la caractéristique d'Euler d'une intersection régulière de trois quadriques ne dépend pas de la fonction indice mais uniquement de la courbe spectrale associée à cette intersection, ou plus précisément de l'entier $p - n$. Pour conclure cette section, on va avoir besoin de quelques résultats généraux. On considère $V_{\mathbb{R}}$ une variété algébrique réelle dans $P_{\mathbb{R}}^N$, définie par s polynômes avec $N - s$ paire, de degré respectif m_1, \dots, m_s , et on note $V_{\mathbb{C}}$ la variété algébrique complexe associée au même système de polynômes. On va noter $\sigma(V_{\mathbb{C}})$ la signature de cette variété. Par les équations fonctionnelles de Hirzebruch (cf [Hir66]), on peut calculer la signature d'une variété algébrique. Pour ce faire, on note $\sigma_s^N(m_1, \dots, m_s)$ le polynôme défini par

$$\sigma_s^N(m_1, \dots, m_s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s = 0; \\ m_1 \cdot m_2 \dots m_s, & \text{si } 0 < s = N; \end{cases}$$

$$\sigma_s^N(m_1, \dots, m_s) = m_s \sigma_{s-1}^{N-1}(m_1, \dots, m_{s-1}) - \sum_{\mu=1}^{m_s} \sigma_s^N(m_1, \dots, m_{s-1}, \mu, \mu - 1),$$

si $0 < s < N$.

Alors, par le théorème de Hirzebruch, on obtient $\sigma(V_{\mathbb{C}}) = \sigma_s^N(m_1, \dots, m_s)$. Pour une intersection de trois quadriques, on obtient

$$\sigma_3^{2k+1}(2, 2, 2) = (1 + (-1)^k) + (-1)^{k-1} 2(k+1)^2. \quad (3.2)$$

Théorème 3.29 (Rokhlin [Rok72a], Kharlamov [Kha73] [Kha75])

On considère $V_{\mathbb{R}}$ une variété algébrique réelle de dimension paire $2k$.

1. (Rokhlin) Si $V_{\mathbb{R}}$ est une M -variété alors on obtient la congruence

$$\chi(V_{\mathbb{R}}) \equiv \sigma(V_{\mathbb{C}}) \pmod{16}.$$

2. (Kharlamov) Si $V_{\mathbb{R}}$ est une $(M-1)$ -variété alors on obtient la congruence

$$\chi(V_{\mathbb{R}}) \equiv \sigma(V_{\mathbb{C}}) \pm 2 \pmod{16}.$$

3. (Kharlamov) Si $V_{\mathbb{R}}$ est une (M-2)-variété avec $m_1 \dots m_s \equiv 0 \pmod{8}$ et si l'application $H_k(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(P_{\mathbb{R}}^N, \mathbb{Z}_2)$ induit par l'inclusion est nulle alors on obtient la congruence

$$\chi(V_{\mathbb{R}}) \equiv \pm \sigma(V_{\mathbb{C}}) \pmod{16}.$$

Corollaire 3.30. Toute M-courbe de degré paire $2k$ satisfait la congruence dite de Gudkov, à savoir

$$p - n \equiv k^2 \pmod{8}.$$

Toute (M-1)-courbe de degré paire $2k$, satisfait la congruence dite de Gudkov-Kharlamov, à savoir

$$p - n \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}.$$

Démonstration. Fixons C une M-courbe de degré paire $2k$. D'après la proposition 3.22, on peut choisir une thêta-caractéristique réelle paire de sorte que la fonction indice associée à cette thêta-caractéristique satisfasse la relation $i_{\min} = i_{\max} - 2$. Ainsi, par le théorème de Dixon, on obtient une intersection de trois quadriques $X_{\mathbb{R}}$ dont la fonction indice satisfait la condition du lemme 3.12. Pour cette intersection de trois quadriques, soit la différentielle d_2 est nulle et l'intersection est une M-variété, soit la différentielle d_2 n'est pas nulle et l'intersection de quadriques est une (M-2)-variété (cf corollaire 3.11) dont l'application $H_k(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(P_{\mathbb{R}}^N, \mathbb{Z}_2)$ induit par l'inclusion est nulle par la proposition 3.8 et la définition de l'entier $\ell(X_{\mathbb{R}})$. Dans tous les cas, d'après le théorème 3.29, on obtient la congruence

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) \equiv \pm \sigma(X_{\mathbb{C}}) \pmod{16}.$$

En utilisant la proposition 3.28 et l'égalité (3.2), on trouve en séparant les deux cas possibles

$$p - n \equiv k^2 \pmod{8}.$$

À présent, fixons C une (M-1)-courbe de degré paire. Cette courbe est nécessairement non-séparante, et d'après la proposition 3.22, on peut choisir une thêta-caractéristique réelle paire de sorte que la fonction indice satisfasse la relation $i_{\min} = i_{\max} - 2$ et que la différentielle d_2 soit nulle. Alors, en utilisant le corollaire 3.11, l'intersection de trois quadriques $X_{\mathbb{R}}$ associée à cette courbe et cette thêta-caractéristique est une (M-1)-variété. D'après le théorème 3.29, on obtient la congruence

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) \equiv \sigma(X_{\mathbb{C}}) \pm 2 \pmod{16},$$

ou encore après simplification $p - n \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}$. □

On verra par la suite que dans le cas d'une M-courbe, on peut toujours choisir la thêta-caractéristique paire de sorte que l'intersection associée soit maximale.

Théorème 3.31 (Kharlamov [Kha74])

On considère $V_{\mathbb{R}}$ une variété algébrique réelle de dimension paire $2k$. On a alors l'inégalité dite de Petrovski généralisée

$$|\chi(V_{\mathbb{R}}) - 1| \leq h^{k,k}(V_{\mathbb{C}}) - 1.$$

Corollaire 3.32. *Toute courbe algébrique plane de degré paire $2k$ satisfait les inégalités dite de Petrovski*

$$-\frac{3}{2}k(k-1) \leq p-n \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1.$$

Démonstration. Fixons C une courbe plane de degré paire $2k$ et une thêta-caractéristique réelle paire au-dessus de cette courbe. D'après le théorème de Dixon, il existe une intersection de trois quadriques $X_{\mathbb{R}}$ de dimension $2(k-2)$ associée à cette courbe munie de la thêta-caractéristique choisie. D'après le théorème 3.31, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} |\chi(X_{\mathbb{R}}) - 1| &= |(1 + (-1)^k) + (-1)^{k-1}(2p - 2n) - 1| \\ &= |1 - (2p - 2n)| \\ &\leq h^{k-2, k-2}(X_C) - 1 \\ &\leq 3k^2 - 3k + 2. \end{aligned}$$

□

3.4.3 Théorèmes d'existence

Comme pour la caractérisation des intersections maximales de trois quadriques, il nous faut ici séparer la cas des variétés de dimension paire, du cas des variétés de dimension impaire. Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.33

Toute M -courbe plane peut être vu comme la courbe spectrale d'une intersection maximale de trois quadriques.

Variétés de dimension paire.

Dans ce paragraphe, on supposera toujours que notre intersection de quadriques est dans $P_{\mathbb{R}}^N$ de dimension $N = 2k + 1$ impaire. Dans cette situation, la variété $X_{\mathbb{R}}$ est de dimension $2k - 2$. Le théorème 3.13 nous donne une caractérisation des intersections maximales de trois quadriques. Nous allons maintenant traduire ces conditions en fonction de la thêta-caractéristique spectrale.

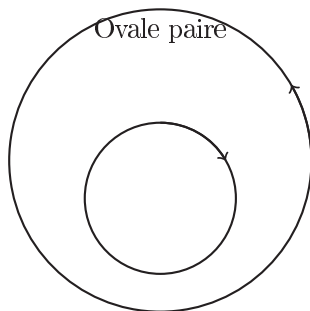
Proposition 3.34. *Soit (C, θ) une courbe plane de degré $2k + 2$ munie d'une thêta-caractéristique paire non-dégénérée. L'intersection de trois quadriques associée à ce couple est maximale si et seulement si*

- la courbe est maximale ;
- la courbe ne possède pas d'ovale désorientant pour la spin-orientation, i.e. tout ovale de profondeur impaire forme une paire positive pour la spin-orientation avec l'ovale de profondeur $2k$ situé au-dessus ;
- pour tout ovale C_i de profondeur $2m + 1$

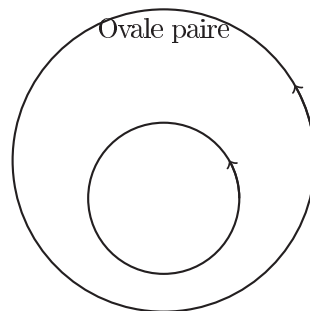
$$\varepsilon_i + \sum_{j \in \widetilde{\mathcal{M}}_i} \varepsilon_j = 0$$

où $\widetilde{\mathcal{M}}_i = \{j \in \{1, \dots, g\} \text{ tel que } C_j \prec C_i \text{ et } C_j \text{ est de profondeur } 2m + 2\}$.

Démonstration. D'après le théorème 3.13, l'intersection de trois quadriques associée au couple (C, θ) est maximale si et seulement si la courbe est maximale, la fonction indice vérifie $i_{\min} = k$ et la deuxième différentielle est triviale. Pour commencer, remarquons que la fonction indice sur la composante extérieure, i.e. la composante de $S^2 \setminus \tilde{C}$ dont le bord est la réunion des ovals de profondeur 0, vaut $k + 1$. Ainsi, en traversant un ovale de profondeur 0, la valeur de la fonction indice dans cette nouvelle composante sera k ou $k + 2$, autrement dit, la valeur minimale ou la valeur maximale autoriser par la fonction indice d'une intersection maximale. En particulier, en traversant un ovale de profondeur 1, la fonction indice ne peut que revenir à sa valeur initiale $k + 1$. On en déduit que la spin-orientation des ovals de profondeur 1 est entièrement déterminée par la spin-orientation des ovals de profondeur 0, l'orientation doit être alternée. En répétant ce procédé, on en conclut que la spin-orientation des ovals de profondeur $2k + 1$ est entièrement déterminé par la spin-orientation des ovals de profondeur $2k$.



Spin-orientation d'une paire d'ovale acceptable pour une intersection maximale.



Spin-orientation d'une paire d'ovale non-acceptable pour une intersection maximale.

Finalement, d'après le théorème 3.26, la différentielle d_2 est triviale si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$ vérifiant que la fonction indice sur D_i a pour valeur i_{\max} et tout $j \in \mathcal{M}_i$

$$\varepsilon_j + \sum_{k \in \mathcal{M}_{i,j}} \varepsilon_k = 0$$

Cependant, au vu des valeurs de la fonction indice que l'on vient de décrire, il n'est pas difficile de se convaincre que ce système d'équations en ε_i est équivalent au système décrit dans la proposition. En effet, dans un cas, la somme est prise sur tous les ovals en-dessous d'un ovale donnée, alors que dans l'autre cas, la somme s'arrête dès qu'on "rencontre" une nouvelle composante où la fonction est soit maximale soit minimale. Ainsi, la différence entre ces deux sommes est nulle par le théorème 3.26. \square

Une nouvelle fois, cette proposition est une caractérisation des intersections maximales de trois quadriques, mais en aucun cas nous n'avons démontré l'existence d'une intersection maximale étant donnée une M-courbe. En effet, dans cette proposition, on suppose l'existence d'une thêta-caractéristique paire satisfaisant toutes ces conditions. La construction d'une telle thêta-caractéristique paire est l'objet du prochain théorème.

Théorème 3.35

Soit C une M -courbe de degré $N + 1$ avec $N = 2k + 1$. Alors, il existe $X_{\mathbb{R}}$ une intersection maximale régulière de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ telle que C soit sa courbe spectrale.

Démonstration. Par le théorème 3.24, il suffit de démontrer qu'il existe une thêta-caractéristique paire θ sur C vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Soit C une M -courbe, on note (C_0, \dots, C_g) les composantes connexes de la partie réelle. D'après la proposition 3.22, pour obtenir une thêta-caractéristique réelle sur C , il suffit de se donner deux familles $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_g)$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g)$ dans \mathbb{Z}_2^g . Rappelons également qu'une M -courbe est toujours séparante. On va donc commencer par fixer certaines de ces valeurs qu'on pourra toujours modifier par la suite. En utilisant le résultat de la proposition 3.34, on fixe l'orientation de tous les ovales paires en imposant l'orientation complexe (c'est à dire que $\delta_i = 0$ si C_i est un ovale paire), l'orientation des ovales impaires est alors fixé par le fait qu'il n'existe pas d'ovale désorientant. Puis, on pose $\varepsilon = 0$, on s'assure ainsi que la différentielle d_2 est triviale. On considère alors l'entier

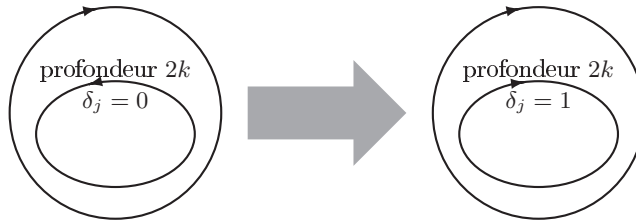
$$a = \text{nombre d'ovales avec } \delta_i = 1$$

Enfin, on rappelle que l'on cherche à obtenir une thêta-caractéristique paire, donc on veut que l'invariant de Arf soit nulle modulo 2, or ce dernier est donné par

$$\text{Arf}(q_\theta) = \sum_{i=1}^g \delta_i(1 + \varepsilon_i)$$

On a donc provisoirement $\text{Arf}(q_\theta) = a \pmod{2}$. On va maintenant étudier les différents cas qui peuvent se présenter

- (1) Supposons que a est pair, alors on ne change rien, la forme quadratique associée au couple (δ, ε) est déjà une thêta-caractéristique paire.
- (2) Supposons que a est impaire et qu'il existe un ovale paire C_j de profondeur maximale dans une certaine chaîne (c'est à dire sans ovale dessous), alors on modifie la spin-orientation de cet ovale.

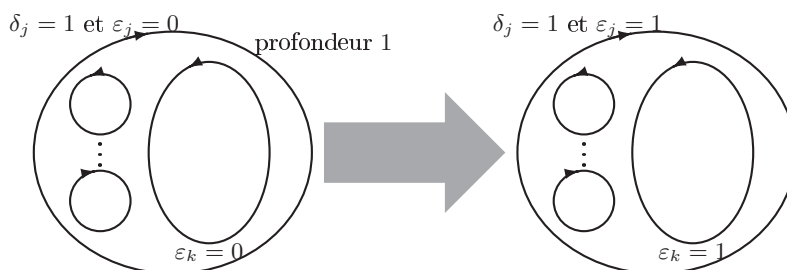


On a déjà remarqué plus haut que l'on peut imposer une orientation quelconque sur les ovales paires tant qu'on respecte une certaine logique avec les ovales impaires. Puisque C_j n'a pas d'ovale impaire dessous, le fait de changer l'orientation de C_j ne modifie l'orientation d'aucun autre ovale et on a alors $\text{Arf}(q_\theta) = a + 1 \pmod{2}$. On a de nouveau une thêta-caractéristique paire.

- (3) Supposons que a est impaire et qu'il existe un ovale C_j de profondeur 1 avec $\delta_j = 1$ et un ovale paire C_k dessous (donc de profondeur 2). Alors, on modifie ε_j et ε_k en posant

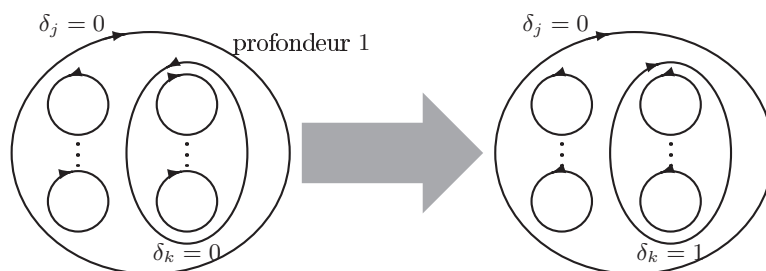
$$\varepsilon_j = \varepsilon_k = 1$$

On a donc effectué les changements suivants



Puisqu'on modifie ε_i sur deux ovals adjacents, on ne modifie pas le fait que la différentielle d_2 est triviale mais on change bien la parité de l'invariant de Arf. On a donc construit une thêta-caractéristique paire vérifiant toutes nos hypothèses.

- (4) Supposons que a est impaire et qu'il existe un ovale C_k de profondeur 2 avec des ovals impaires dessous (donc de profondeur 3). On modifie alors l'orientation de ces ovals.



On recalcule la valeur de a après ces modifications. Si a est paire on a obtenu une thêta-caractéristique paire, et si a est impaire, on modifie la valeur de ε_k et la valeur ε_j sur l'ovale C_j situé au-dessus de C_k (on remarque que $\delta_j = 0$ puisque dans la cas contraire on se retrouverait dans la configuration précédente) pour obtenir une thêta-caractéristique paire.

Nous aurons alors démontré le théorème dès lors qu'on aura démontré que l'on ne peut pas éviter ces quatre configurations. Cependant, pour éviter ces quatre configurations, il faut nécessairement considérer une courbe ne possédant que des ovals de profondeur au plus 1. Mais, dans ce cas, notre nombre a est exactement le nombre d'ovals désorientant m pour l'orientation complexe, d'après le théorème de Gudkov ou tout au moins son équivalent donné par l'équation 3.1, ce nombre m est paire, en particulier a est paire. \square

Variétés de dimension impaire.

Dans ce paragraphe, on supposera toujours que notre intersection de quadriques est dans $P_{\mathbb{R}}^N$ de dimension $N = 2k$ paire. Dans cette situation, la variété $X_{\mathbb{R}}$ est de dimension $2k - 3$.

Contrairement à ce qui a été fait pour les intersections de dimension paire, pour le premier cas du théorème, à savoir $i_{\min} = k - 1$, on ne peut pas simplifier l'étude des conditions, en donnant des conditions sur la spin-orientation et sur les variables ε_i . Néanmoins, si $i_{\min} = k$, on peut facilement remarquer que,

puisque la fonction indice n'a que deux valeurs distinctes, alors nécessairement, la spin-orientation associée à la thêta-caractéristique spectrale est l'orientation alternée. De plus, la différentielle d_2 est triviale, toujours dans le cas $i_{\min} = k$, si et seulement si pour tout i , on a $\varepsilon_i = 0$. Avant de passer à la construction d'une thêta-caractéristique paire au-dessus d'une M-courbe de degré $2k + 1$, remarquons que si on considère une M-courbe munie d'une thêta-caractéristique θ paire vérifiant $i_{\min} = k$ et $\varepsilon_i = 0$ pour tout i , alors on se retrouve avec la thêta-caractéristique de Rokhlin qui est dégénérée donc ne correspond pas à une intersection de trois quadriques (un résultat attendu puisqu'une intersection de trois quadriques satisfaisant toutes ces conditions contredirait l'inégalité de Smith).

Théorème 3.36

Soit C une M-courbe de degré $N + 1$ avec $N = 2k$. Alors, il existe $X_{\mathbb{R}}$ une intersection maximale de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ telle que C soit sa courbe spectrale.

Démonstration. Par le théorème 3.24, il suffit de démontrer qu'il existe une thêta-caractéristique paire sur C vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Contrairement au cas précédent, ici on peut simplement prendre comme spin-orientation, l'orientation alternée. Alors, la fonction indice vérifie $i_{\min} = k$ et d'après le théorème précédent, il suffit d'avoir une différentielle non triviale. Or, la différentielle est triviale si et seulement si pour tout i , $\varepsilon_i = 0$, ce qui est le cas uniquement pour une thêta-caractéristique de Rokhlin. Ainsi, il suffit de considérer, par exemple, la thêta-caractéristique dont la spin-orientation est l'orientation alternée et vérifiant $\varepsilon_i = 1$ pour tout i , dans ce cas, la thêta-caractéristique est bien paire. \square

En combinant les résultats des théorèmes 3.35 et 3.36, on obtient un théorème d'existence complet.

CHAPITRE 4

Classification par déformations

Le théorème de Dixon que nous avons énoncé et démontré dans le chapitre précédent, nous affirme qu'étant donné une courbe plane non-singulière et une thêta-caractéristique paire réelle non-dégénérée, il existe un unique faisceau de quadriques à transformation projective près. Néanmoins, ce résultat est insuffisant pour la détermination des classes de déformations d'intersections régulières de trois quadriques. En effet, on a déjà remarqué qu'il existe des intersections régulières de trois quadriques possédant une courbe spectrale singulière. Avant d'obtenir le moindre résultat sur les classes de déformations, il nous faut donc comprendre quelles singularités peuvent apparaître sur nos courbes spectrales. Au cours de ce chapitre, nous allons donc commencer par étudier les singularités qui peuvent apparaître avec une intersection régulière de trois quadriques. Par la suite, afin d'étudier les classes de déformation des intersections de quadriques, on va en réalité déformer une courbe non-singulière munie d'une thêta-caractéristique (toujours supposé paire et non-dégénérée) et utiliser le théorème de Dixon pour associer à ce couple une intersection de trois quadriques. Néanmoins, comme on s'autorise à passer par des courbes singulières, il nous faut justifier que la construction de Dixon s'étend au cours de ce passage par la courbe singulière. Pour finir, nous donnerons la classification par déformations des intersections maximales de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$ et $P_{\mathbb{R}}^4$.

4.1 Courbes spectrales et thêta-caractéristiques

4.1.1 Courbes spectrales singulières

Soit Q_1, Q_2, Q_3 trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$ et supposons que la courbe spectrale \tilde{C} associée est singulière, i.e. la courbe d'équation $\det(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3) = 0$ admet au moins un point critique (on note Q_i la matrice associée à la quadrique Q_i dans une base fixée). Dans l'espace des quadriques, il existe une variété algébrique particulière, que l'on va appeler par la suite variété discriminant, qui correspond à l'ensemble des quadriques de déterminant nul. De plus, une intersection de trois quadriques dans cet espace de quadriques correspond à un plan projectif.

Proposition 4.1. *Pour une famille générique à un paramètre de faisceaux non-dégénérés de trois quadriques $(Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))$, les courbes spectrales singulières sont isolées et chaque courbe singulière n'a qu'un unique point nodale et aucun autre point singulier.*

Démonstration. Pour des raisons de codimension (c.f. corollaire 1.19), chaque courbe spectrale singulière d'une famille générique à un paramètre de faisceaux de trois quadriques non-dégénérés est isolée. On peut à présent travailler uniquement sur le faisceau de quadrique (Q_1, Q_2, Q_3) pour lequel la courbe spectrale est singulière. Pour une famille générique de faisceaux de trois quadriques, la courbe spectrale d'une intersection de trois quadriques non-dégénérée (qui n'est rien d'autre que l'intersection de notre plan avec la variété discriminant) est singulière si l'un des deux cas suivants est vérifié :

- le plan est tangent à la variété discriminant en un point simple ;
- le plan passe par un point double de la variété discriminant (i.e. ce plan possède une quadrique dont 0 est une valeur propre double).

En particulier, on en déduit que la courbe spectrale d'un faisceau de quadriques d'une famille générique possède au plus un unique point singulier. Quitte à changer les représentants de notre faisceau, on peut supposer que la courbe spectrale C a un point singulier en $(1 : 0 : 0)$. Supposons pour commencer que nous sommes dans le premier cas de figure, c'est à dire le plan est tangent à la variété discriminant en un point simple. Puisqu'une singularité s'étudie de manière locale autour du point singulier, on peut choisir une base de \mathbb{C}^{N+1} où on obtient

$$Q_1 + \lambda Q_2 + \mu Q_3 = \begin{pmatrix} \lambda b_{00} + \mu c_{00} & {}^t B_{\lambda, \mu} \\ B_{\lambda, \mu} & C_{\lambda, \mu} \end{pmatrix}$$

où $B_{\lambda, \mu}$ ne dépend que des coefficients de Q_2 et Q_3 , et $C_{\lambda, \mu}$ est une matrice inversible pour des petites valeurs de λ et μ . On note $M_{\lambda, \mu}$ la matrice ainsi obtenue. Cependant, l'hypothèse d'être tangent à la variété discriminant au point $(1 : 0 : 0)$ impose la condition $b_{00} = c_{00} = 0$. Dans ce cas, le premier vecteur de base appartient à toutes les quadriques du faisceau donc à l'intersection des trois quadriques. D'après la proposition 1.17, ce résultat implique que l'intersection est singulière. Comme nous travaillons uniquement avec des intersections régulières, ce cas ne peut jamais se produire. Autrement dit, une singularité sur la courbe spectrale d'un faisceau de quadrique non-dégénéré ne peut correspondre génériquement qu'à un point double de la variété singulière. Supposons, donc, que le plan passe par un point double de la variété discriminant. Comme précédemment, on peut alors choisir une base où on obtient

$$Q_1 + \lambda Q_2 + \mu Q_3 = \begin{pmatrix} \lambda b_{00} + \mu c_{00} & \lambda b_{01} + \mu c_{01} & {}^t B_{\lambda, \mu} \\ \lambda b_{01} + \mu c_{01} & \lambda b_{11} + \mu c_{11} & \\ B_{\lambda, \mu} & & C_{\lambda, \mu} \end{pmatrix}$$

où $B_{\lambda, \mu}$ ne dépend que des coefficients de Q_2 et Q_3 et $C_{\lambda, \mu}$ est une matrice inversible au voisinage de $\lambda = \mu = 0$. On note de nouveau $M_{\lambda, \mu}$ cette matrice. On obtient ainsi la formule du déterminant

$$\det(M_{\lambda, \mu}) = \det(A_{\lambda, \mu} - {}^t B_{\lambda, \mu} C_{\lambda, \mu}^{-1} B_{\lambda, \mu}) \times \det(C_{\lambda, \mu})$$

où $A_{\lambda, \mu}$ est la matrice carrée de taille 2 donnée par les coefficients $(\lambda b_{ij} + \mu c_{ij})_{0 \leq i, j \leq 1}$. On peut obtenir un développement limité au voisinage de $\lambda = \mu =$

0 du déterminant à l'ordre 2 :

$$\det(M_{\lambda,\mu}) = \det(C_{0,0}) \times \left[\lambda^2(b_{00}b_{11} - b_{01}^2) + \mu^2(c_{00}c_{11} - c_{01}^2) + \lambda\mu(b_{00}c_{11} + c_{00}b_{11} - 2b_{01}c_{01}) + \text{termes d'ordre 3} \right]$$

On pose alors $\Delta = (b_{00}c_{11} + c_{00}b_{11} - 2b_{01}c_{01})^2 - 4(b_{00}b_{11} - b_{01}^2)(c_{00}c_{11} - c_{01}^2)$. Pour conclure cette démonstration, il suffit de démontrer que pour un faisceau non-dégénéré de trois quadriques, on a nécessairement $\Delta \neq 0$, on se retrouve ainsi avec un point double de la courbe spectrale. Par définition, l'intersection des trois quadriques est singulière si et seulement si il existe deux nombres réels x et y tels que quelque soit λ et μ , le vecteur $x e_1 + y e_2$ où e_1, e_2 sont les deux premiers vecteurs de la base choisie ci-dessus, vérifie

$${}^t(x e_1 + y e_2) M_{\lambda,\mu} (x e_1 + y e_2) = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\lambda \underbrace{(x^2 b_{00} + y^2 b_{11} + 2xy b_{01})}_{P_1(x,y)} + \mu \underbrace{(x^2 c_{00} + y^2 c_{11} + 2xy c_{01})}_{P_2(x,y)} = 0$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que Δ définit précédemment est également le résultant des polynômes P_1 et P_2 . On en déduit que $\Delta = 0$ si et seulement si l'intersection est singulière. Finalement, notre unique point singulier est un point nodale. \square

Corollaire 4.2. *Pour une famille générique à un paramètre de faisceaux non-dégénérés de trois quadriques réels $(Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))$, chaque courbe spectrale possède au plus un point nodale réel et aucune autre singularité.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que, pour un paramètre t donné, si la courbe spectrale a un point singulier complexe, alors le point conjugué est également un point singulier de la courbe spectrale. Ainsi, d'après la proposition 4.1, aucune courbe spectrale dans une famille générique à un paramètre de faisceaux non-dégénérés de trois quadriques réelles ne possède de point singulier complexe. \square

Maintenant que nous connaissons la forme des singularités qui peuvent intervenir sur la courbe spectrale d'une famille générique d'intersections de trois quadriques, il faut comprendre l'impacte de cette singularité sur une thêta-caractéristique donnée.

4.1.2 Thêta-caractéristiques sur une courbe singulière

Cette partie a deux objectifs principaux. D'une part, il nous faut définir la notion de thêta-caractéristique sur une courbe singulière, puisque la définition du chapitre 3 se limite au cas des courbes régulières. D'autre part, il nous faut prolonger le théorème de Dixon au cas des courbes singulières.

Il existe deux façon d'aborder la notion de thêta-caractéristiques sur une courbe singulière, soit en continuant de parler de fibrés en droites (ce qui est fait par exemple dans [Cor89]); soit en utilisant la notion plus générale de faisceaux.

Dans ce texte, nous allons favoriser l'approche par les faisceaux. Soit $C_{\mathbb{C}}$ une courbe nodale (i.e. une courbe singulière dont les singularités sont des points doubles). On considère $\pi : \tilde{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$ la normalisation de la courbe $C_{\mathbb{C}}$. Le faisceau canonique ω_C sur la courbe nodale $C_{\mathbb{C}}$ est défini sur chaque ouvert U de $C_{\mathbb{C}}$ comme l'espace des 1-formes rationnelles τ sur $\pi^{-1}(U) \subset \tilde{C}_{\mathbb{C}}$ ayant au pire des pôles simples aux deux points $P_{i,+}$ et $P_{i,-}$ au-dessus de chaque point double P_i de $C_{\mathbb{C}}$, et dont la somme des résidus en ces deux points est nulle :

$$\text{Rés}_{P_{i,+}} \tau + \text{Rés}_{P_{i,-}} \tau = 0.$$

Définition 4.3. Soit $C_{\mathbb{C}}$ une courbe nodale, une *thêta-caractéristique* sur $C_{\mathbb{C}}$ est un faisceau \mathcal{F} en \mathcal{O}_C -module sans torsion et de rang 1 isomorphe au faisceau $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{F}, \omega_C)$.

Remarquons que cette définition est bien une généralisation de la définition de thêta-caractéristique donnée dans le cas des courbes non-singulières. On note $\Theta(C_{\mathbb{C}})$ l'ensemble des thêta-caractéristiques sur $C_{\mathbb{C}}$. Au-dessus d'une courbe nodale, il existe localement au-dessus d'un point double deux types de thêta-caractéristiques, les faisceaux localement libres, qui correspondent aux fibrés en droites au-dessus du point double de $C_{\mathbb{C}}$, et les faisceaux sans torsion mais non-localement libre, qui sont les thêta-caractéristiques qui vont nous être utiles dans l'étude des classes de déformation d'intersections régulières de trois quadriques. La notion de thêta-caractéristique se généralise pour des courbes avec des singularités autre que des points doubles, cependant, au vu des résultats de la section précédente, il est suffisant de travailler avec des courbes nodales. Les notions définies sur les thêta-caractéristiques d'une courbe non-singulière restent valables dans le cadre des courbes nodales.

Définition 4.4. Une *thêta-caractéristique* θ sur une courbe nodale $C_{\mathbb{C}}$ est dite *paire* si $\dim H^0(C_{\mathbb{C}}, \theta) \equiv 0 \pmod{2}$, la *thêta-caractéristique* θ est dite *impaire* si $\dim H^0(C_{\mathbb{C}}, \theta) \equiv 1 \pmod{2}$. Une *thêta-caractéristique* θ est dite *non-dégénérée* si $\dim H^0(C_{\mathbb{C}}, \theta) = 0$.

Maintenant que nous savons donner un sens à la notion de thêta-caractéristiques au-dessus d'une courbe nodale, il nous reste à présent à généraliser le théorème de Dixon au cas des courbes nodales. Considérons $q = (q_0, q_1, q_2)$ une famille de formes quadratiques non-dégénérée dans $P_{\mathbb{R}}^N$. On note $C_{\mathbb{C}}$ la courbe spectrale associée à l'intersection de quadriques. En fixant une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^{N+1} , on obtient une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathcal{O}_{P_{\mathbb{R}}^2}(1))$. Cette matrice définit naturellement un homomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{O}_C^{N+1}(-1) \xrightarrow{M} \mathcal{O}_C^{N+1}$$

Après un twist sur les faisceaux, on fait apparaître le faisceau noyau E_C

$$0 \rightarrow E_C \rightarrow \mathcal{O}_C^{N+1}(d-1) \xrightarrow{M} \mathcal{O}_C^{N+1}(d)$$

Ce faisceau E_C vérifie les propriétés suivantes (voir [KV12])

1. $\dim H^0(E_C(-1)) = 0$;
2. E_C est un faisceau sans torsion ;

3. $E_C \cong \text{Hom}(E_C, \omega_C(2))$.

À partir de ces trois propriétés, on en déduit que le faisceau $E_C(-1)$ est une thêta-caractéristique paire non-dégénérée appelée *thêta-caractéristique spectrale*.

Théorème 4.5 (Kerner, Vinnikov [KV12])

Soient $C_{\mathbb{C}}$ une courbe nodale de degré $N+1$ et θ une thêta-caractéristique paire vérifiant $\dim H^0(C_{\mathbb{C}}, \theta) = 0$. Alors, il existe une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathcal{O}_{P_{\mathbb{C}}^2}(1))$ représentant une intersection régulière de trois quadriques telle que $C_{\mathbb{C}}$ soit la courbe spectrale associée à l'intersection et telle que θ soit la thêta-caractéristique spectrale associée à l'intersection. De plus, la matrice M est unique à équivalence près, autrement dit, toutes les représentations de la courbe $C_{\mathbb{C}}$ sont de la forme tAMA où $A \in O_{N+1}(\mathbb{C})$.

Démonstration. Nous allons simplement donner ici les grandes étapes de la démonstration. L'idée de la démonstration est la même que pour la démonstration du cas des courbes régulières, à savoir, chercher à construire la matrice adjointe à la matrice M recherchée. On définit le faisceau $\theta^\ell = \theta^* \otimes \omega_C$. Remarquons que, par le théorème de Riemann-Roch et par la dualité de Serre, on obtient les égalités

$$\dim H^0(C_{\mathbb{C}}, \theta(1)) = \dim H^0(C_{\mathbb{C}}, \theta^\ell(1)) = N + 1.$$

On fixe alors une base de $H^0(C_{\mathbb{C}}, \theta(1)) = \langle e_1, \dots, e_{N+1} \rangle$ ainsi qu'une base de $H^0(C_{\mathbb{C}}, \theta^\ell(1)) = \langle e_1^\ell, \dots, e_{N+1}^\ell \rangle$. Par définition des faisceaux $\theta(1)$ et $\theta^\ell(1)$, on a une forme bilinéaire non-dégénérée,

$$(H^0(\theta(1)), H^0(\theta^\ell(1))) \longrightarrow H^0(\omega_C(2)) \approx H^0(\mathcal{O}_C(N)).$$

On construit ainsi une matrice $V(x)$ dont les coefficients $V_{i,j}$ sont les images par cette forme bilinéaire des éléments de base (e_i, e_j^ℓ) . La matrice $V(x)$ est notre candidate à la matrice adjointe, mais on doit au préalable démontrer que cette matrice n'est pas globalement dégénérée. Pour ce faire, on considère L une droite générique telle que $L \cap C = \{pt_1, \dots, pt_{N+1}\}$ avec des points distincts. Quitte à effectuer une transformation linéaire sur nos espaces vectoriels, on peut choisir la base de sections satisfaisant les conditions :

$$\text{div}(e_i) \geq \sum_{j \neq i} pt_j \not\geq pt_i, \quad \text{div}(e_i^\ell) \geq \sum_{j \neq i} pt_j \not\geq pt_i.$$

Avec ce choix de sections, on obtient pour tout k et pour tout $i \neq j$ que la restriction $V_{i,j}|_{pt_k} = 0$. On en déduit que $\deg(V_{i,j}) \geq N + 1$, alors que par construction, $V_{i,j}$ est un polynôme sur $P_{\mathbb{C}}^2$ de degré N . Finalement, on a démontré que pour tout $i \neq j$, on a l'égalité $V_{i,j}|_L = 0$. Cependant, pour tout i , $V_{i,i}|_{pt_i} \neq 0$. On en déduit que $V_{i,i}|_L \neq 0$, en particulier la matrice $V(x)$ est n'est pas globalement dégénérée (puisque non-dégénérée sur la droite L). Pour conclure cette démonstration, il suffit de construire la matrice M recherchée. Par construction de $V(x)$, chaque mineur de taille 2 est dégénérée sur la courbe $C_{\mathbb{C}}$. D'après le lemme 3.23, on en déduit que tous les coefficients de la matrice $\text{adj}(V(x))$ sont divisible par f^{N-1} où $f(x)$ est l'équation de la courbe C . On pose alors $M = \text{adj}(V(x))/f^{N-1}$, cette matrice est alors solution du problème. Par hypothèse, θ est une thêta-caractéristique, en particulier, les faisceaux θ et θ^ℓ sont isomorphes. Par une propriété démontrée dans [KV12], cette isomorphisme

entre les faisceaux implique que la matrice M que l'on vient de construire est équivalente à une matrice symétrique. L'unicité de la matrice M est également démontrée dans [KV12]. \square

Comme pour le cas d'une courbe non-singulière, si on ajoute une structure réelle sur la courbe nodale $C_{\mathbb{C}}$, on peut regarder les thêta-caractéristique invariante par cette structure réelle.

Définition 4.6. *Soit $(C_{\mathbb{C}}, \text{conj})$ une courbe nodale munie d'une structure réelle. Une thêta-caractéristique réelle sur $C_{\mathbb{C}}$ est la donnée d'une thêta-caractéristique \mathcal{F} sur $C_{\mathbb{C}}$ satisfaisant l'isomorphisme $\mathcal{F}_{\text{conj}} \cong \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}_{\text{conj}}$ est le faisceau sur $C_{\mathbb{C}}$ dont les sections au-dessus d'un ouvert $U \subset C_{\mathbb{C}}$ sont les sections du faisceau \mathcal{F} au dessus de l'ouvert $\text{conj}(U) \subset C_{\mathbb{C}}$.*

On peut alors énoncer la généralisation du théorème de Dixon dans le cadre des intersections régulières de trois quadriques réelles dont la courbe spectrale est une courbe nodale qui est en fait, simplement un corollaire du théorème précédent sur les courbes complexes.

Théorème 4.7 (Kerner, Vinnikov [KV12])

Soient $(C_{\mathbb{C}}, \text{conj})$ une courbe nodale munie d'une structure réelle et θ une thêta-caractéristique réelle paire et non-dégénérée. Alors, il existe une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ représentant une intersection régulière de trois quadriques réelles telle que $C_{\mathbb{C}} = \{\det M = 0\}$ et telle que θ soit la thêta-caractéristique spectrale associée à l'intersection. De plus, la matrice M est unique à équivalence réelle près.

4.2 Monodromie et thêta-caractéristiques

Au cours de cette section, nous allons démontrer comment le passage par une courbe spectrale singulière peut modifier une thêta-caractéristique donnée, afin d'obtenir des informations sur la classification des intersections régulières de trois quadriques à déformation près.

4.2.1 Formule de Picard-Lefschetz.

Nous allons commencer cette partie en rappelant les principaux résultats de la théorie de Picard-Lefschetz. On considère $f(x, y)$ un polynôme tel que la courbe plane

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

ait une singularité isolée en $(0, 0)$. Le *déploiement miniversal* de cette singularité est la donnée d'une famille $g(x, y; t)$ de polynômes pour $t \in \mathbb{C}^{\mu}$ où μ est le nombre de Milnor de la singularité (voir par exemple, [AGZV88]) satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) $g(x, y; 0) = f(x, y)$;
- (ii) $g(0, 0; t) = 0$;
- (iii) les dérivées partielles de g par rapport à t_i où $t = (t_1, \dots, t_{\mu})$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}\{x, y\}/(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f)$.

On se donne une boule de Milnor pour la singularité B_η , et on choisit $\tau > 0$ assez petit, de sorte que la sphère ∂B_η rencontre transversalement les courbes planes

$$H_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } g(x, y; t) = 0\}, \quad ||t|| < \tau.$$

On pose D_τ le disque de \mathbb{C}^μ de centre 0 et de rayon τ , et on considère

$$X = \{(x, y; t) \in B_\eta \times D_\tau \text{ tel que } g(x, y; t) = 0\}$$

On note $p : X \rightarrow D_\tau$ la projection $(x, y; t) \mapsto t$. Cette projection ne dépend à diffeomorphisme près que de la singularité de la courbe $H = H_0$. En dehors du discriminant $\Delta = \{t \in D_\tau \text{ tel que } p^{-1}(t) \text{ n'est pas lisse}\}$, la projection p est une fibration dont la fibre $F = p^{-1}(t_0)$ pour $t_0 \in D_\tau \setminus \Delta$ est diffeomorphe à la fibre de Milnor de la singularité de la courbe H . Le groupe fondamentale $\pi_1(D_\tau \setminus \Delta)$ agit sur le groupe d'homologie $H_1(F; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^\mu$. Le groupe de monodromie du déploiement, noté Γ est donné par

$$\Gamma = \text{Im}(\pi_1(D_\tau \setminus \Delta) \rightarrow \text{Aut}(H_1(F; \mathbb{Z}_2)))$$

La formule de Picard-Lefschetz donne les générateurs du groupe de monodromie.

Théorème 4.8 (Picard-Lefschetz, [AGZV88])

Le groupe de monodromie de la singularité de H est engendré par les transvections

$$\begin{array}{ccc} T_i : H_1(F; \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & H_1(F; \mathbb{Z}_2) \\ x & \mapsto & x + \langle x, \xi_i \rangle \xi_i \end{array}$$

où les ξ_i sont les cycles évanescents associés à une base distinguée de $H_1(F; \mathbb{Z}_2)$ et où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la forme d'intersection.

Soit (Q_1, Q_2, Q_3) un faisceau non-dégénéré de quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^N$, notons $X_{\mathbb{R}}$ l'intersection des quadriques. Rappelons que l'espace des quadriques peut être vu comme un espace projectif, et que la donnée d'un faisceau de quadriques peut être vu comme un plan projectif dans cet espace projectif. On considère le polynôme donné par le déterminant et la courbe

$$C = \{(x : y : z) \in P_{\mathbb{C}}^2 \text{ tel que } \det(xQ_1 + yQ_2 + zQ_3) = 0\}$$

On suppose que cette courbe est singulière en $(0, 0, 1)$ et que la singularité est un point double ordinaire. On souhaite suivre l'évolution de la courbe C et de la thêta-caractéristique associée au faisceau de quadriques au cours d'une déformation du faisceau de quadriques. On pose la notation

$$C_t = \{(x : y : z) \in P_{\mathbb{C}}^2 \text{ tel que } \det(xQ_1(t) + yQ_2(t) + zQ_3(t)) = 0\}$$

où $C_0 = C$ et on note θ_t la thêta-caractéristique associée au faisceau de quadriques $(Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))$, supposé non-dégénéré pour tout t . On veut alors connaître la thêta-caractéristique après le passage par la courbe singulière. Cependant, l'application $G(x, y, z; t) = \det(xQ_1(t) + yQ_2(t) + zQ_3(t))$ n'est pas un déploiement miniversal de $F(x, y, z) = \det(xQ_1 + yQ_2 + zQ_3)$ puisque la propriété (iii) de la définition n'est pas satisfaite. On ne peut pas appliquer directement la théorie de Picard-Lefschetz.

Lemme 4.9. *Soit $(Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))$ une famille générique à un paramètre de faisceaux non-dégénérés de trois quadriques. Supposons que, pour $t = 0$, la courbe spectrale associée au faisceau est une courbe singulière possédant un unique point double. Pour tout $|t| < \eta$ suffisamment petit, il existe un système de coordonnées locales (u_t, v_t) pour lequel la courbe C_t est donnée au voisinage de $(0 : 0 : 1) \in P_{\mathbb{C}}^2$ par l'équation*

$$f(u_t, v_t) = t^2$$

où $f(u, v) = F(1, u, v)$. De plus, par une homotopie sur les coordonnées locales, on peut se ramener au cas où le système de coordonnées locales est indépendant du paramètre t .

Démonstration. On se place au voisinage de $(0 : 0 : 1) \in P_{\mathbb{C}}^2$. Dans un tel voisinage suffisamment petit, la courbe C_t est donnée par l'équation $\det(Q_1(t) + \lambda Q_2(t) + \mu Q_3(t)) = 0$. Dans une base adaptée, pour tout $t \in]-\eta, \eta]$ avec η suffisamment petit, on peut écrire la matrice $(Q_1(t) + \lambda Q_2(t) + \mu Q_3(t))$ sous la forme,

$$\begin{pmatrix} a_{00}(t) + \lambda b_{00}(t) + \mu c_{00}(t) & a_{01}(t) + \lambda b_{01}(t) + \mu c_{01}(t) & & {}^t B_{\lambda, \mu}(t) \\ a_{01}(t) + \lambda b_{01}(t) + \mu c_{01}(t) & a_{11}(t) + \lambda b_{11}(t) + \mu c_{11}(t) & & \\ & & B_{\lambda, \mu}(t) & \\ & & & C_{\lambda, \mu}(t) + A \end{pmatrix}.$$

On note $M_{\lambda, \mu}(t)$ cette matrice où $M_{\lambda, \mu}(0) = M_{\lambda, \mu}$, la matrice décrite dans la section précédente. On en déduit alors, par un développement limité à l'ordre deux en les variables t, λ et μ

$$\begin{aligned} \det(M_{\lambda, \mu}(t)) = & t^2(a_{00}a_{11} - a_{01}^2) + \lambda^2(b_{00}b_{11} - b_{01}^2) + \mu^2(c_{00}c_{11} - c_{01}^2) \\ & + \lambda\mu(b_{00}c_{11} + c_{00}b_{11} - 2b_{01}c_{01}) + t\lambda(a_{00}b_{11} + b_{00}a_{11} - 2a_{01}b_{01}) \\ & + t\mu(a_{00}c_{11} + c_{00}a_{11} - 2a_{01}c_{01}) + \text{termes d'ordre 3} \end{aligned}$$

Pour tout t fixé, on obtient l'équation d'une conique dont la nature et la position est entièrement déterminé par le discriminant Δ défini dans la preuve de la proposition 4.1 par la formule,

$$\Delta = (b_{00}c_{11} - b_{11}c_{00})^2 + 4(b_{00}c_{01} - b_{01}c_{00})(b_{11}c_{01} - b_{01}c_{11})$$

dépendant ainsi uniquement de la singularité de la courbe spectrale. On arrive alors à trouver un système de coordonnées (dépendant du paramètre t) pour lequel la courbe C_t est donnée par l'équation de la forme $f(u_t, v_t) = t^2$ où l'application f ne dépend pas du paramètre t . Afin de poursuivre notre étude, on aimerait obtenir un système de coordonnées locales indépendant du paramètre t . Néanmoins, en général, c'est impossible puisqu'on n'a pas nécessairement l'égalité $G(x, y, z; t) = G(x, y, z; -t)$ pour $|t| < \eta$. On va donc effectuer une homotopie sur les coordonnées locales afin de se ramener à ce cas particulier. On considère alors les courbes locales définie par les équations,

$$\{f((1 - \lambda)u_t + \lambda u_0, (1 - \lambda)v_t + \lambda v_0) = t^2\}$$

D'après la remarque précédente, cette courbe est une conique dont la nature est entièrement déterminée par Δ qui est indépendant du paramètre t . Ainsi, la conique définie par l'équation $\{f(u_t, v_t) = t^2\}$ est difféomorphe à la conique définie par l'équation $\{f(u_0, v_0) = t^2\}$. \square

D'après le lemme 4.9, le déploiement d'une courbe spectrale issue d'une famille générique à un paramètre de faisceaux non-dégénérés de trois quadriques n'est pas un déploiement miniversal d'une courbe plane, qui serait de la forme $\{f(u_0, v_0) = t\}$. De nouveau, on se rend compte que la théorie de Picard-Lefschetz ne s'applique pas directement. Néanmoins, cette théorie décrit l'action du groupe de monodromie qui par définition est donnée par des lacets autour des singularités du déploiement. Dans notre cas, on effectue une déformation d'une courbe C_1 vers une courbe C_2 en passant par une courbe singulière C_0 suivant la figure 4.1, on travaille ainsi avec des chemins et non plus avec des lacets. Afin de fixer les notations, on considère le déploiement $\mathcal{C} \rightarrow T \subset \mathbb{C}$ avec $\mathcal{C}_{t_0} = C_0$, $\mathcal{C}_{t_1} = C_1$ et $\mathcal{C}_{t_2} = C_2$. Notons γ le chemin dans T entre t_1 et t_2 illustré sur la figure 4.1.

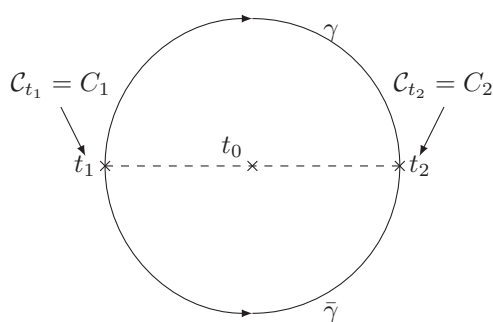


FIGURE 4.1 – Déploiement d'une courbe spectrale

Les courbes C_1 et C_2 sont isotopes, ainsi, en identifiant les deux courbes, notre chemin γ s'identifie à un lacet associée au déploiement miniversal de la singularité de C_0 . Finalement, on peut appliquer la théorie de Picard-Lefschetz au chemin γ et en conclure que l'application de monodromie associée à notre singularité est donnée par la transvection associée au cycle évanescant de la singularité de la courbe C_0 . Comme précédemment, le groupe de monodromie noté Γ agit sur le groupe d'homologie $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$, il nous reste alors à vérifier que cette action s'étend en une action sur les thêta-caractéristiques.

Théorème 4.10 (Cornalba [Cor89])

Soit $C_{\mathbb{C}}$ une courbe nodale. On considère $\mathcal{C} \rightarrow T$ un déploiement miniversal de la courbe $C_{\mathbb{C}}$. On pose

$$\mathcal{E}(T) = \{(\mathcal{C}_{\tau}, \mathcal{F}) \text{ tel que } \tau \in T \text{ et } \mathcal{F} \in \Theta(\mathcal{C}_{\tau})\}$$

Alors la projection $(\mathcal{C}_{\tau}, \mathcal{F}) \in \mathcal{E}(T) \mapsto \tau \in T$ est un revêtement ramifié dont le lieu de ramification est exactement le lieu des courbes \mathcal{C}_{τ} singulières. De plus, si la courbe possède un unique point double, la ramification est d'ordre 2.

Pour clarifier un peu ce théorème, on peut garder à l'esprit le dessin explicatif de la figure 4.2, où on représente l'ensemble des thêta-caractéristiques au-dessus d'une famille à un paramètre de courbes planes, les traits pleins représentant les thêta-caractéristiques réelles et les pontillés représentant les thêta-caractéristiques complexes. Dans ce dessin, on a supposé que l'unique courbe singulière pour $\tau = 0$ possède un unique point double.

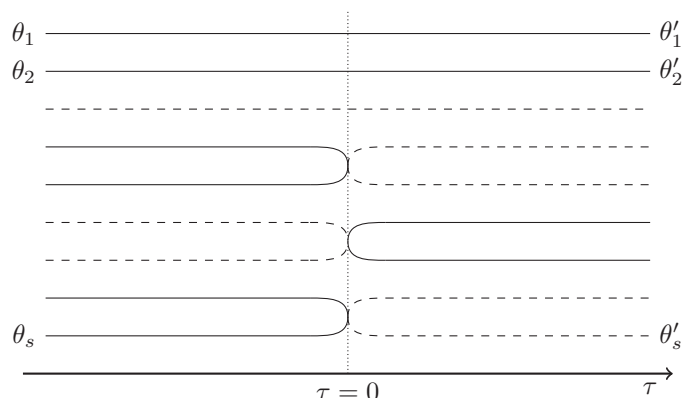


FIGURE 4.2 – Thêta-caractéristiques au-dessus d'une famille de courbes planes

On peut également observer que les points de ramification correspondent exactement à des faisceaux d'idéaux et que ces derniers donnent des thêta-caractéristiques dont l'intersection de quadriques associée est régulière. Cette remarque est importante car dans la première partie de ce chapitre, nous avons uniquement regardé les singularités possible de la courbe spectrale, néanmoins, nous n'avons jamais démontré que toute courbe spectrale avec ce type de singularité est associée à une intersection régulière quelque soit la thêta-caractéristique que l'on considère (ce résultat étant essentiellement faux).

À partir de ce théorème, on en déduit en particulier que l'action du groupe de monodromie s'étend sur l'ensemble des thêta-caractéristiques. Soit $p : \mathcal{C} \rightarrow [t_1, t_2]$ un déploiement de la courbe C_C de la forme du déploiement obtenue par le lemme 4.9 et supposons que C_{t_0} avec $t_0 \in]t_1, t_2[$ est l'unique courbe singulière du déploiement et que celle-ci possède un unique point double. Notons θ_1 une thêta-caractéristique fixé au-dessus de la courbe C_1 . La forme quadratique associée à la thêta-caractéristique θ_2 obtenue par le déploiement p et la thêta-caractéristique θ_1 est alors donnée pour tout $c \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ par la formule

$$q_{\theta_2}(c) = q_{\theta_1}(\mu(c))$$

où μ est l'application de monodromie associée à la singularité en t_0 . D'après le théorème de Picard-Lefschetz, le groupe de monodromie est engendré par les transvections données par certains cycles évanescents. Nous allons donc à présent décrire cette action de la monodromie sur l'ensemble des thêta-caractéristiques.

4.2.2 Action sur les thêta-caractéristiques.

Soit C une courbe algébrique plane réelle, on note C_0, \dots, C_ℓ les composantes connexes de $C_{\mathbb{R}}$, et G_i le pont reliant la composante C_0 à la composante C_i . Étudions à présent l'action de la monodromie sur la forme quadratique associée à une thêta-caractéristique réelle θ . Notons θ' la thêta-caractéristique que l'on obtient après un passage par l'une des singularités que nous avons mise en évidence précédemment. Comme pour le chapitre précédent, on va poser $q_\theta([C_i]) = 1 + \varepsilon_i$ et $q_\theta([G_i]) = \delta_i$ mais également $q_{\theta'}([C_i]) = 1 + \varepsilon'_i$ et $q_{\theta'}([G_i]) = \delta'_i$. On souhaite alors être capable d'exprimer $(\varepsilon'_i, \delta'_i)$ en fonction de $(\varepsilon_i, \delta_i)$.

Proposition 4.11. *Si le cycle évanescant est donné par $[C_i] \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$, alors on obtient*

$$\begin{cases} \delta'_k = \delta_k + \delta_{i,k}\varepsilon_i \\ \varepsilon'_k = \varepsilon_k \end{cases}$$

et si le cycle évanescant est donné par $[\gamma_{i,j}] \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$, alors on obtient

$$\begin{cases} \delta'_k = \delta_k \\ \varepsilon'_k = \varepsilon_k + (\delta_{i,k} + \delta_{j,k})(1 + \delta_i + \delta_j) \end{cases}$$

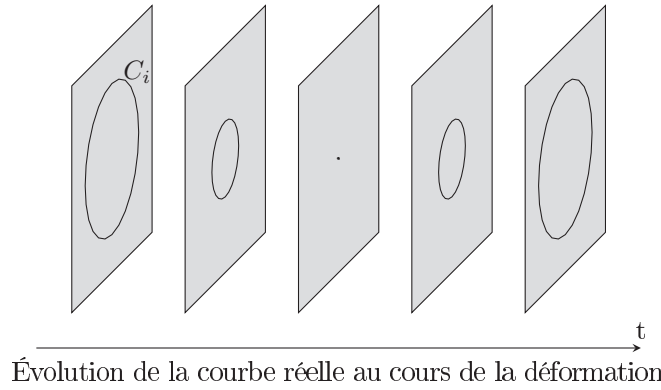
où les $\delta_{i,k}$ sont les symboles de Kronecker.

Démonstration. Pour tout $c \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$, on doit vérifier l'égalité

$$q_{\theta'}(c) = q_{\theta}(\mu(c))$$

où μ est la monodromie associée à la singularité.

1^{er} cas : Le cycle évanescant est donné par $[C_i] \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$.



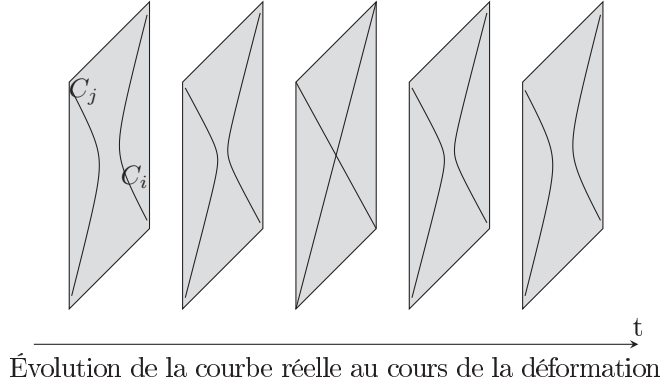
On est donc dans le cas où un ovale (C_i sur le dessin) va se contracter en un point avant de revenir sous sa forme de départ. Dans ce cas, le cycle évanescant est donné par l'image de C_i dans $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$. Par la formule de Picard-Lefschetz, et par définition des nombres $(\varepsilon_i, \delta_i)$, on obtient les égalités

$$\begin{aligned} \delta'_k = q_{\theta'}([G_k]) &= q_{\theta}(\mu([G_k])) \\ &= q_{\theta}([G_k] - \langle [C_i], [G_k] \rangle [C_i]) \\ &= q_{\theta}([G_k]) + \langle [C_i], [G_k] \rangle^2 q_{\theta}([C_i]) + \langle [C_i], [G_k] \rangle^2 \\ &= \delta_k + \delta_{i,k}\varepsilon_i \end{aligned}$$

où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker. Dans ce cas, la monodromie n'agit pas sur les classes $[C_k]$ puisque le nombre d'intersections de $[C_k]$ avec $[C_i]$ est nulle quelque soit l'entier k . On a donc le résultat

$$\begin{cases} \delta'_k = \delta_k + \delta_{i,k}\varepsilon_i \\ \varepsilon'_k = \varepsilon_k \end{cases}$$

2^e cas : Le cycle évanescant est donné par $[\gamma_{i,j}] \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$.



On est donc dans le cas où deux ovales (C_i et C_j sur le dessin) vont se rapprocher jusqu'à se toucher en un point avant de se séparer à nouveau en revenant à leur place d'origine. Dans ce cas, le cycle évanescant est donné par le pont γ_{ij} dans $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ qui peut être décrit comme $\gamma_{ij} = [G_i] - [G_j]$. Par la formule de Picard-Lefschetz, et par définition des nombres $(\varepsilon_i, \delta_i)$, on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
 1 + \varepsilon'_k = q_{\theta'}([C_k]) &= q_{\theta}(\mu([C_k])) \\
 &= q_{\theta}([C_k] - \langle [C_k], \gamma_{ij} \rangle \gamma_{ij}) \\
 &= q_{\theta}([C_k]) + \langle [C_k], \gamma_{ij} \rangle^2 q_{\theta}(\gamma_{ij}) + \langle [C_k], \gamma_{ij} \rangle^2 \\
 &= 1 + \varepsilon_k + (\delta_{i,k} + \delta_{j,k})(1 + q_{\theta}(\gamma_{ij})) \\
 &= 1 + \varepsilon_k + (\delta_{i,k} + \delta_{j,k})(1 + \delta_i + \delta_j)
 \end{aligned}$$

où $\delta_{i,k}$ et $\delta_{j,k}$ sont des symboles de Kronecker. Dans ce cas, la monodromie n'agit pas sur les classes $[G_k]$ puisque le nombre d'intersections de $[G_k]$ avec γ_{ij} est nulle quelque soit l'entier k . On a donc le résultat

$$\begin{cases} \delta'_k = \delta_k \\ \varepsilon'_k = \varepsilon_k + (\delta_{i,k} + \delta_{j,k})(1 + \delta_i + \delta_j) \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de remarquer que ces deux opérations ne modifient pas l'invariant de Arf de la thêta-caractéristique. \square

Nous allons généraliser un peu ce résultat. Pour ce faire, on va noter pour la suite de cette section (e_i, f_i) la base de $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ où e_i est la classe de l'ovale C_i et f_i est la classe de G_i pour $i \leq \ell$ et la complétion de la base pour $i > \ell$ (c.f. discussion dans la section 3.3.4). On considère la forme quadratique q_0 définie par la formule

$$q_0 \left(\sum_{i=1}^g \alpha_i e_i + \beta_i f_i \right) = \sum_{i=1}^g \alpha_i \beta_i$$

Il n'est pas difficile de constater que cette forme quadratique a un invariant de Arf nul. D'après la discussion qui a suivi le théorème 3.18, toute forme quadratique q sur $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ peut s'écrire sous la forme $q = q_0 + v$ où $v \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$. L'action de la monodromie sur les formes quadratiques $q = q_0 + v$ où $v \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ est donnée par le résultat suivant.

Proposition 4.12. *On considère $q = q_0 + v$ une forme quadratique définie sur $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ et $u \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ un cycle évanescent. Alors, la forme quadratique q' obtenue par l'action de la monodromie, associée au cycle évanescent u , sur q est décrite par la formule*

$$q' = \begin{cases} q_0 + v + u & \text{si } \langle u, v \rangle = q_0(u) \\ q_0 + v & \text{sinon} \end{cases}$$

où comme précédemment, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la forme d'intersection.

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, il suffit de vérifier que la formule donnée pour q' satisfait l'invariance par rapport à la formule de Picard-Lefschetz, i.e. si on note μ la monodromie associée au cycle évanescent u , alors on doit vérifier que pour tout élément $x \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$, on a l'égalité $q(\mu(x)) = q'(x)$ où $\mu(x) = x + \langle x, u \rangle u$. Par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned} q(\mu(x)) &= q(x + \langle x, u \rangle u) \\ &= q(x) + \langle x, u \rangle + \langle x, u \rangle q(u) \\ &= q_0(x) + \langle v, x \rangle + \langle x, u \rangle + \langle x, u \rangle (q_0(u) + \langle v, u \rangle) \\ &= q_0(x) + \langle v, x \rangle + \langle x, u \rangle (1 + q_0(u) + \langle v, u \rangle) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule annoncée dans la proposition. \square

Dans la suite, nous allons utiliser ces résultats afin d'obtenir des informations sur les classes de déformations d'intersections régulières de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$ et $P_{\mathbb{R}}^4$.

4.3 Classification

4.3.1 Intersections dans $P_{\mathbb{R}}^3$

Pour une intersection de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$, la courbe spectrale est une quartique (une courbe plane de degré 4) et il est bien connu (par exemple, cf [Dol12]) qu'une telle courbe n'a pas de thêta-caractéristique dégénérée. Il nous suffit à présent de connaître les cycles évanescents possibles (en fonction de la courbe que l'on considère) et de regarder l'action de la monodromie sur la forme quadratique associée à une thêta-caractéristique. Dans cette partie, on considère la courbe maximale $\langle 4 \rangle$ constituée de 4 ovales vides avec les notations de la figure 4.3. Chaque ovale C_i définit un cycle évanescent ainsi que chaque pont G_i ou γ_{ij} . Nous pouvons maintenant démontrer le théorème principale.

Théorème 4.13

Il existe une unique intersection maximale de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$ à déformation près.

Démonstration. D'après le théorème de Dixon, une intersection de trois quadriques est déterminée par la donnée d'une thêta-caractéristique θ sur la courbe C . D'après le théorème 3.13, puisque que la courbe considérée est maximale, l'intersection de trois quadriques donnée par la thêta-caractéristique paire θ

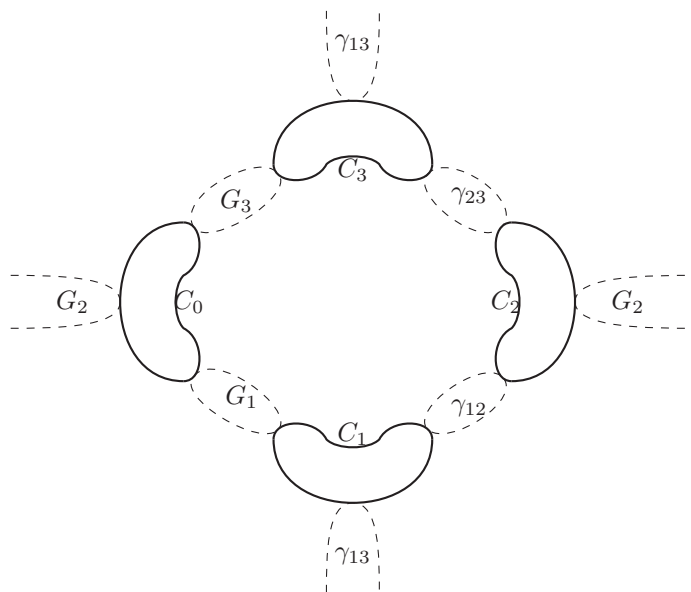


FIGURE 4.3 – Quartique réelle maximale.

est maximale si et seulement si la fonction indice vérifie $i_{\min} = 1$ et la différentielle d_2 est triviale. Cependant, dans ce cas où la courbe est très simple, toute thêta-caractéristique paire vérifie ces deux conditions. Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que l'on peut "modifier" toute thêta-caractéristique paire donnée en n'importe quel autre thêta-caractéristique paire. On peut encore simplifier la démonstration en remarquant qu'il est suffisant de démontrer que toute thêta-caractéristique paire peut-être "modifier afin d'obtenir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ (rappelons que $q_\theta([C_i]) = 1 + \varepsilon_i$). Si on arrive à démontrer ce résultat, alors on peut modifier les valeurs des δ_i en contractant l'ovale C_i , on aura donc montré que toute thêta-caractéristique paire peut se ramener à la thêta-caractéristique définie par $\varepsilon_i = 1$ et $\delta_i = 0$ pour tout i . La démonstration se fait à présent par étape.

1^{re} étape. Supposons que $\varepsilon_3 = 0$. Afin de modifier la valeur de ε_3 , on regarde la valeur de $\delta_1 + \delta_3$. Si $\delta_1 + \delta_3 = 0$, on peut modifier la valeur de ε_3 en contractant le pont γ_{13} . Supposons alors que $\delta_1 + \delta_3 = 1$. Si $\delta_1 = 0$ et $\delta_3 = 1$, alors quitte à contracter le pont γ_1 , on peut supposer que $\varepsilon_1 = 1$, et en contractant l'ovale C_1 on obtient $\delta_1 = 1$ ou encore $\delta_1 + \delta_3 = 0$. Sinon, $\delta_1 = 1$ et $\delta_3 = 0$. Supposons que $\varepsilon_1 = 0$ (dans le cas contraire, on peut modifier δ_1 comme précédemment en contractant l'ovale C_1). L'invariant de Arf est alors donnée par

$$\begin{aligned} 0 = \text{arf}(q_\theta) &= (1 + \varepsilon_1)\delta_1 + (1 + \varepsilon_2)\delta_2 + (1 + \varepsilon_3)\delta_3 \\ &= 1 + (1 + \varepsilon_2)\delta_2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\varepsilon_2 = 0$ et que $\delta_2 = 1$. Ainsi $\delta_1 + \delta_2 = 0$, et en contractant le pont γ_{12} , on obtient les valeurs $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. En particulier, on peut de nouveau modifier la valeur de δ_1 pour obtenir $\delta_1 + \delta_3 = 0$.

2^e étape. Supposons que $\varepsilon_3 = 1$ et que $\varepsilon_2 = 0$. Afin de modifier la valeur de ε_2 ,

on regarde la valeur de $\delta_1 + \delta_2$. Si $\delta_1 + \delta_2 = 0$, on peut modifier la valeur de ε_2 en contractant le pont γ_{12} . Supposons alors que $\delta_1 + \delta_2 = 1$. Si $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 1$, alors quitte à contracter le pont γ_1 , on peut supposer que $\varepsilon_1 = 1$, et en contractant l'ovale C_1 on obtient $\delta_1 = 1$ ou encore $\delta_1 + \delta_2 = 0$. Sinon, $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = 0$. L'invariant de Arf est alors donnée par

$$\begin{aligned} 0 = \text{arf}(q_\theta) &= (1 + \varepsilon_1)\delta_1 + (1 + \varepsilon_2)\delta_2 + (1 + \varepsilon_3)\delta_3 \\ &= 1 + \varepsilon_1 \end{aligned}$$

On en déduit que $\varepsilon_1 = 1$ et on peut modifier la valeur de δ_1 en contractant l'ovale C_1 pour obtenir $\delta_1 + \delta_2 = 0$.

3^e étape. Supposons que $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ et que $\varepsilon_1 = 0$. L'invariant de Arf est alors donnée par

$$\begin{aligned} 0 = \text{arf}(q_\theta) &= (1 + \varepsilon_1)\delta_1 + (1 + \varepsilon_2)\delta_2 + (1 + \varepsilon_3)\delta_3 \\ &= \delta_1 \end{aligned}$$

On peut donc modifier la valeur de ε_1 en contractant le pont γ_1 . □

Ce résultat était déjà connu (cf [DIK]), mais aucune démonstration n'est proposée dans cet article. Nous allons à présent nous attarder un peu plus sur la particularité des intersections de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$. Pour commencer, une intersection régulière de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$ est une réunion d'un nombre paire de points disjoints, éventuellement zéro. Pour la suite de notre travail, nous étudierons uniquement les intersections maximales, en d'autres termes 8 points dans $P_{\mathbb{R}}^3$. Il n'est pas difficile de voir que 7 points suffisent à entièrement déterminer une intersection de trois quadriques, la construction du 8^e points à partir des 7 autres points est un problème résolu à la fin du XIX^e siècle. Néanmoins, toute famille de 7 points dans $P_{\mathbb{R}}^3$ ne peut pas être associée à une intersection régulière de trois quadriques.

Définition 4.14. *Une famille de 7 points est dite typique si la projection de six points dans un plan par rapport au 7^e n'est pas inclus dans une conique.*

Remarquons qu'on n'a pas rajouté dans cette définition l'hypothèse que les points sont en position générique (i.e. on ne peut pas trouver quatre points coplanaires). La raison étant que si la courbe spectrale associée à l'intersection de quadriques possède un noeud, alors les 8 points de l'intersection sont contenus quatre à quatre dans deux plans. Puisqu'on s'autorise ce genre de singularité pour étudier les classes de déformation, on ne peut pas rajouter une telle hypothèse.

Lemme 4.15. *Toute famille de 7 points typique est associée à une intersection régulière de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$.*

Démonstration. Il existe deux possibilités pour qu'une famille de 7 points ne soit pas associée à une intersection régulière de trois quadriques. D'une part, si l'intersection est 0-dimensionnel mais que le 8^e point de l'intersection correspondent à l'un des 7 points de notre famille, notons ce point p_i . Dans ce cas,

le faisceau de quadriques donné par les trois quadriques contient une quadrique singulière (à savoir un cône) dont le point singulier est le point p_i . Ainsi, la projection des 6 points distincts de p_i par rapport à ce dernier est inclus dans une conique, donc notre famille n'est pas typique. D'autre part, l'intersection des trois quadriques peut être 1-dimensionnel. Dans ce cas, l'intersection contient une courbe de degré au plus 3. Si l'un des 7 points, noté de nouveau p_i , de la famille est inclus dans une telle courbe, alors l'espace tangent de l'intersection X en ce point est également 1-dimensionnel. Il existe donc un vecteur non nul v dans l'espace tangent de X en p_i , c'est à dire que toute quadrique du faisceau associée aux trois quadriques s'annule en p_i tout comme les dérivées partielles dans la direction v de ces quadriques. On en déduit que le faisceau possède au moins une quadrique singulière en p_i , de nouveau c'est impossible pour une famille typique. Finalement, la seule possibilité qu'il nous reste est de supposer que l'intersection des trois quadriques X est 1-dimensionnel et qu'aucun des 7 points n'appartienne à une courbe de X . Dans cette situation, la courbe elliptique de degré 4, définie par l'intersection de deux quadriques, se décompose en deux courbes, chacune de degré au plus 3. Mais, les 7 points de notre famille n'appartiennent à aucune courbe de degré au plus 3, car sinon la projection de 6 points par rapport au 7^e serait située sur une courbe de degré au plus 2 donc sur une conique, ce qui est impossible pour une famille typique. En conclusion, on a bien démontré qu'une famille typique est toujours associée à une intersection régulière de trois quadriques. \square

On peut à présent définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des famille typique de 7 points. Deux familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 de 7 points typiques sont *équivalentes* si il existe une application lisse

$$f : P_{\mathbb{R}}^3 \times [0, 1] \rightarrow P_{\mathbb{R}}^3$$

vérifiant $f(\mathcal{F}_1, 0) = \mathcal{F}_1$, $f(\mathcal{F}_1, 1) = \mathcal{F}_2$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a $f(\mathcal{F}_1, t)$ est une famille de 7 points typique. Cette relation est directement issue de la notion de déformation sur les quadriques. Notre but pour conclure cette section est de montrer qu'il existe une unique famille typique de 7 points à équivalence près. Pour ce faire, on a besoin d'approfondir la relation entre l'intersection de trois quadriques et la courbe spectrale.

Définition 4.16. Soit $S = \{q_1, \dots, q_7\}$, un ensemble de 7 *thêta-caractéristiques (réelles) impaires*. On dit que S est un ensemble de Aronhold si pour tout triplet d'indice (i, j, k) deux à deux distinct, la forme quadratique $q_i + q_j + q_k$ définit une *thêta-caractéristique (réelle) paire*.

Remarquons que dans cette définition et également par la suite, nous utiliserons toujours les résultats du théorème de Riemann-Mumford (cf théorème 3.18), à savoir la bijection entre les formes quadratiques sur $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ et les *thêta-caractéristiques*. Rappelons qu'une *thêta-caractéristique impaire* sur une quartique peut-être représentée géométriquement par une bitangente de la courbe. Le nom de Aronhold a été choisi par B.Gross et J.Harris dans [GH04] en hommage à ces travaux sur les bitangentes d'une quartique plane.

Lemme 4.17 ([GH04]). Soit $S = \{q_1, \dots, q_7\}$, un ensemble de Aronhold, alors la somme $q_S = q_1 + q_2 + \dots + q_7$ est une *thêta-caractéristique paire*. Réciproque-

ment, pour toute θ -caractéristique paire q_θ , il existe exactement 8 ensembles de Aronhold distinct vérifiant $q_S = q_\theta$.

En utilisant ce lemme, on voit qu'on peut associer à une courbe munie d'un ensemble de Aronhold une intersection de trois quadriques (par le théorème de Dixon). Néanmoins, le fait de choisir un ensemble de Aronhold permet d'obtenir une information supplémentaire sur l'intersection de quadriques. Géométriquement, on considère la quartique maximale (i.e. constitué de 4 ovals) et on choisit convenablement 7 bitangentes (celles-ci doivent satisfaire la définition d'ensemble de Aronhold). À partir de ces données, le théorème de Dixon nous indique qu'il existe une intersection de trois quadriques, c'est à dire une réunion de huit points dans $P_{\mathbb{R}}^3$. Nous allons à présent expliciter un peu plus en détail la relation entre les huit points d'une intersection de trois quadriques et les 28 bitangentes de la quartique. On se donne huit points noté p_i dans $P_{\mathbb{R}}^3$ correspondant à une intersection régulière de trois quadriques. On considère la courbe B (de degré 6) définie par les points de $P_{\mathbb{R}}^3$ qui sont des singularités d'une quadrique de la famille des trois formes quadratiques. Pour tout couple de points (p_i, p_j) parmi les huit points de l'intersection, la droite $\overline{p_i p_j}$ intersectent la courbe B en exactement deux points (voir [GH04] pour la démonstration). De ces deux points d'intersection, on peut associer deux points sur la courbe spectrale, et ainsi obtenir une droite dans $P_{\mathbb{R}}^2$ qui va être une bitangente de la courbe spectrale. De ce fait, chacune des 28 bitangentes de la quartique est associée à l'une des 28 paires de points de l'intersection de quadriques. Quitte à changer la numérotation de nos points, les ensembles de Aronhold correspondent à l'une des deux représentations illustrées dans la figure 4.4 (c.f. [Dol12] pour une justification)

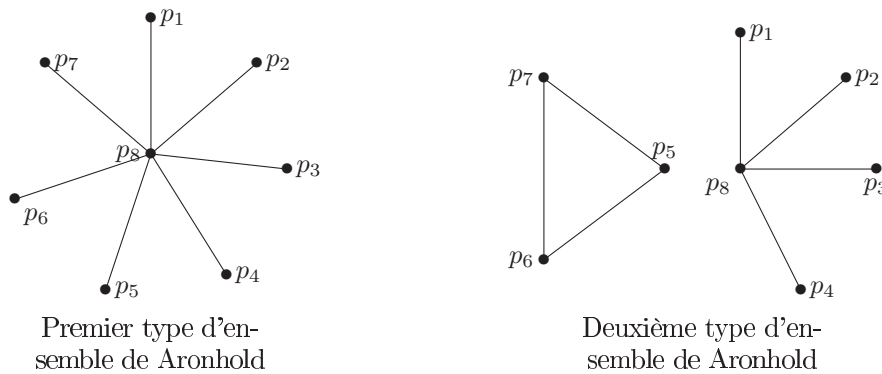


FIGURE 4.4 – Les ensembles de Aronhold

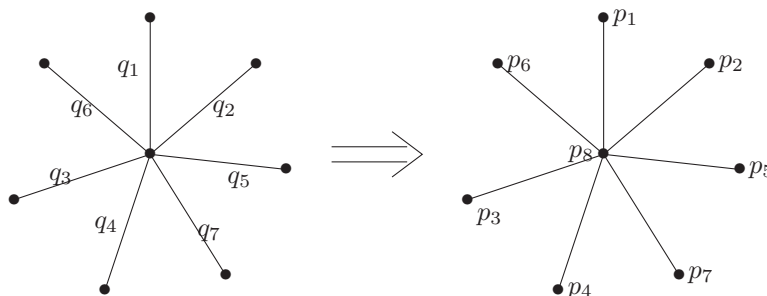
Il existe exactement 8 ensembles de Aronhold du premier type et 280 ensembles de Aronhold du deuxième type. On peut s'apercevoir sur cette nouvelle interprétation d'un ensemble de Aronhold, que l'un des points de l'intersection de quadriques joue un rôle privilégié, le point p_8 sur chacun des dessins précédents. Ainsi, la donnée de la quartique maximale et d'un ensemble de Aronhold permet de définir une intersection de trois quadriques pointée, à savoir une réunion de sept points. On obtient ainsi un premier raffinement du théorème de Dixon.

Théorème 4.18 ([GH04])

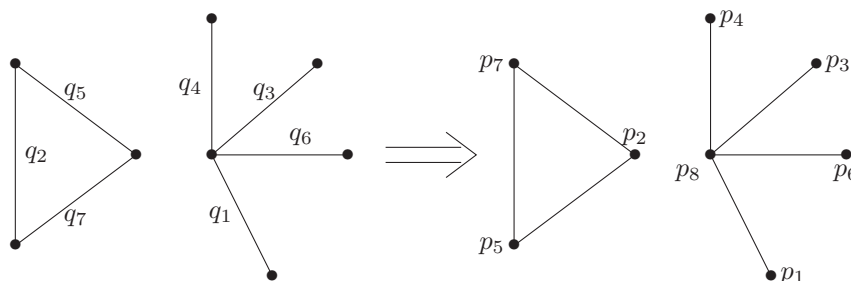
Il existe une bijection entre l'ensemble des familles typiques de sept points dans $P_{\mathbb{R}}^3$ à transformation de l'espace projectif près et l'ensemble des quartiques planes munies d'un ensemble de Aronhold.

On peut raffiner d'avantage le théorème de Dixon en remarquant que si on ordonne les sept bitangentes d'un ensemble de Aronhold donné, on peut définir un ordre sur les huit points de l'intersection de quadriques en suivant l'une des règles suivantes.

- Si l'ensemble de Aronhold est du premier type, alors les sept bitangentes sont associées à sept droites dans $P_{\mathbb{R}}^3$ qui s'intersectent en un même point, ce point appartenant à l'intersection. On note p_8 ce point, qui est considéré comme le point "privilegié". Chacune des sept bitangentes contient exactement deux points de l'intersection dont l'un des point est p_8 . Si on ordonne les 7 bitangentes (q_1, \dots, q_7) , on peut ordonner les sept points restant de l'intersection en posant p_i pour le point associé à la bitangente q_i .



- Si l'ensemble de Aronhold est du deuxième type, alors les sept bitangentes sont associées à sept droites dans $P_{\mathbb{R}}^3$ dont quatre s'intersectent en un même point, notons p_8 ce point. Comme précédemment, on souhaite ordonner les sept point de l'intersection restant à partir d'un ordre fixé sur les sept bitangentes. Les quatre droites qui s'intersectent correspondent à quatre bitangentes, et de la même manière que pour le cas précédent, on peut ordonner les quatre points de l'intersection en utilisant l'ordre sur les bitangentes. Pour les trois points restant, on regarde les trois droites dans $P_{\mathbb{R}}^3$, noté comme les bitangentes q_i, q_j, q_k avec $i < j < k$, qui s'intersectent deux à deux. On va alors poser $p_i = q_j \cap q_k$, $p_j = q_i \cap q_k$ et $p_k = q_i \cap q_j$.



Remarquons que cette ordre sur les points de l'intersection est arbitraire, nous allons fixé cette règle pour ordonner les points. Notre but est alors de démontrer le résultat suivant.

Conjecture

À équivalence près, il existe une unique famille de 7 points typique dans $P_{\mathbb{R}}^3$. On peut ordonner ces points tout en conservant l'unicité d'une telle famille.

Nous allons consacrer le reste de cette section à expliquer ce qui se cache derrière cette conjecture. Dans un premier temps, remarquons que d'après le théorème 4.13, il existe à déformation près une unique classe d'intersection de trois quadriques, autrement dit, l'action de la monodromie sur les thêta-caractéristiques est transitive. On peut donc dès à présent fixer une thêta-caractéristique paire particulière. On va noter pour la suite de cette section (e_i, f_i) la base de $H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ où e_i est la classe de l'ovale C_i et f_i est la classe de G_i . On considère alors q_0 la forme quadratique définie par la formule

$$q_0 \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i + \beta_i f_i \right) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \beta_i$$

Il n'est pas difficile de constater que cette forme quadratique a un invariant de Arf nul, néanmoins pour des raisons de facilité, on va préférer travailler avec la forme quadratique $q_\theta = q_0 + e_1 + e_3 + f_1 + f_2 + f_3$ (les notations étant celles introduites dans la section 3.3.3). En effet, il n'est pas difficile de remarquer qu'un ensemble de Aronhold associé à cette forme quadratique est donné par les formes quadratiques suivantes

$$q_1 = q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3$$

$$q_2 = q_0 + e_3 + f_2 + f_3$$

$$q_3 = q_0 + e_3 + f_1 + f_3$$

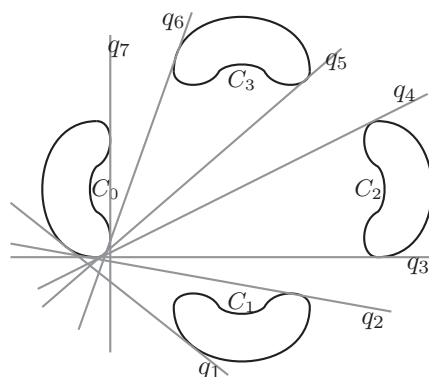
$$q_4 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3$$

$$q_5 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2$$

$$q_6 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2$$

$$q_7 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3$$

qui correspond en terme de bitangentes au schéma suivant.



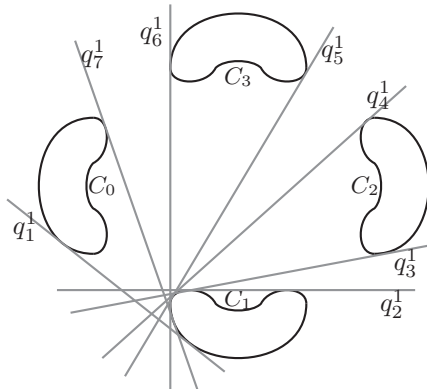
Finalement, la conjecture se résume à dire que l'action de monodromie sur l'ensemble des huit ensembles de Aronhold associés à la forme quadratique q_θ est transitive (on démontre ainsi la première partie de la conjecture) et que l'action

du groupe des symétrie S_7 , qui agit sur un ensemble de Aronhold en permutant les formes quadratiques q_i , peut-être obtenu par l'action de la monodromie (ce qui démontrera la deuxième partie de la conjecture sur l'ordre des sept points). Nous allons donner rapidement une idée de démonstration et expliquer pourquoi cette idée ne peut pas fonctionner sous cette forme. Pour chaque étape, nous donnerons le cycle évanescant que nous utiliserons mais également l'interprétation graphique sur les bitangentes.

Conjecture

L'action de la monodromie sur les ensembles de Aronhold associé à la forme quadratique q est transitive.

Idée de démonstration. *L'idée derrière cette première partie de la conjecture est la suivante : nous allons choisir des cycles évanescents particuliers et vérifier que l'action de monodromie donnée par ces cycles et décrite par la proposition 4.12 nous permette de retrouver les huit ensembles de Aronhold de la forme quadratique q_θ . Sur le dessin ci-dessus, on peut voir que les bitangentes associées à notre ensemble de Aronhold passent tous par une même "zone" de la quartique. L'idée générale de la démonstration consiste à contracter successivement les ponts et les ovales afin de faire passer nos bitangentes par les différentes "zone" de la quartique. Pour commencer, on va contracter le pont G_1 , ainsi, le cycle évanescant que l'on considère est donné par f_1 . Graphiquement, l'action de monodromie sur les bitangentes sont comme suit*

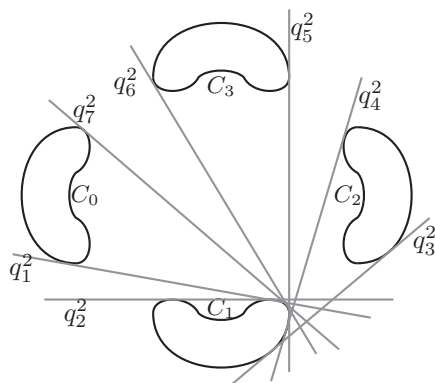


En utilisant la proposition 4.12, les formes quadratiques obtenues après l'action de la monodromie sont données par les formules

$$\begin{array}{ll}
 q_1 = q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 & q_1^1 = q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 \\
 q_2 = q_0 + e_3 + f_2 + f_3 & q_2^1 = q_0 + e_3 + f_1 + f_2 + f_3 \\
 q_3 = q_0 + e_3 + f_1 + f_3 & q_3^1 = q_0 + e_3 + f_3 \\
 q_4 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3 & \Rightarrow q_4^1 = q_0 + e_2 + e_3 + f_3 \\
 q_5 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 & q_5^1 = q_0 + e_2 + e_3 + f_2 \\
 q_6 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2 & q_6^1 = q_0 + e_2 + f_2 \\
 q_7 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3 & q_7^1 = q_0 + e_2 + f_2 + f_3
 \end{array}$$

Par un calcul direct, on peut constater que $q_1^1 + \dots + q_7^1 = q_\theta$. On a donc obtenu un ensemble de Aronhold distinct du premier (dans le sens où cet ensemble ne

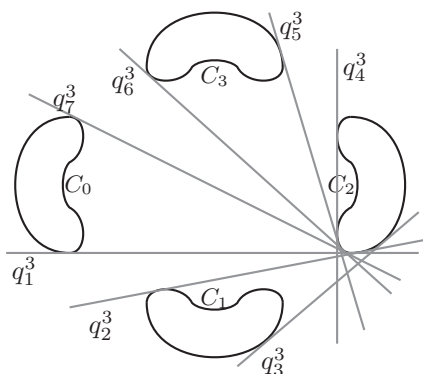
peut pas obtenu par une simple permutation des formes quadratiques q_i) et dont la thêta-caractéristique paire associée est la même. On continue notre déformation en contractant l'ovale C_1 , c'est à dire, on considère le cycle évanescents e_1 . Graphiquement, on obtient le dessin suivant



Une nouvelle fois, en utilisant la proposition 4.12, les formes quadratiques obtenue après l'action de monodromie sont données par les formules

$$\begin{array}{ll}
 q_1^1 = q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 & q_1^2 = q_0 + e_3 + f_2 + f_3 \\
 q_2^1 = q_0 + e_3 + f_1 + f_2 + f_3 & q_2^2 = q_0 + e_3 + f_1 + f_2 + f_3 \\
 q_3^1 = q_0 + e_3 + f_3 & q_3^2 = q_0 + e_1 + e_3 + f_3 \\
 q_4^1 = q_0 + e_2 + e_3 + f_3 & \Rightarrow q_4^2 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_3 \\
 q_5^1 = q_0 + e_2 + e_3 + f_2 & q_5^2 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_2 \\
 q_6^1 = q_0 + e_2 + f_2 & q_6^2 = q_0 + e_1 + e_2 + f_2 \\
 q_7^1 = q_0 + e_2 + f_2 + f_3 & q_7^2 = q_0 + e_1 + e_2 + f_2 + f_3
 \end{array}$$

Par un calcul direct, on peut constater que $q_1^2 + \dots + q_7^2 = q_\theta$. On a donc obtenu un troisième ensemble de Aronhold distinct des deux premiers et dont la thêta-caractéristique paire associée est la même. On continue notre "voyage" le long de la quartique et on va poursuivre en contractant le pont γ_{12} . Ainsi, par cette contraction, le cycle évanescents qui apparaît est donné par $f_1 + f_2$. Graphiquement, on obtient le dessin suivant



Comme précédemment, en utilisant la proposition 4.12, les formes quadratiques

obtenue après l'action de monodromie sont données par les formules

$$\begin{array}{ll}
q_1^2 = q_0 + e_3 + f_2 + f_3 & q_1^3 = q_0 + e_3 + f_1 + f_3 \\
q_2^2 = q_0 + e_3 + f_1 + f_2 + f_3 & q_2^3 = q_0 + e_3 + f_3 \\
q_3^2 = q_0 + e_1 + e_3 + f_3 & q_3^3 = q_0 + e_1 + e_3 + f_3 \\
q_4^2 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_3 & \Rightarrow q_4^3 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 + f_3 \\
q_5^2 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_2 & q_5^3 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_1 \\
q_6^2 = q_0 + e_1 + e_2 + f_2 & q_6^3 = q_0 + e_1 + e_2 + f_1 \\
q_7^2 = q_0 + e_1 + e_2 + f_2 + f_3 & q_7^3 = q_0 + e_1 + e_2 + f_1 + f_3
\end{array}$$

Par un calcul direct, on peut constater que $q_1^3 + \dots + q_7^3 = q_\theta$. On a donc obtenu un nouvel ensemble de Aronhold distinct des trois autres et dont la thêta-caractéristique paire associée est la même. Il nous reste quatre ensembles de Aronhold distincts à trouver. L'idée générale étant toujours la même, nous allons nous contenter de donner les cycles évanescents et les formes quadratiques obtenues par l'action de la monodromie, en utilisant à chaque étape la proposition 4.12. On considère à présent le cycle évanescents e_2 , on contracte donc l'ovale C_2 et on obtient les formules

$$\begin{array}{ll}
q_1^4 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3; & q_2^4 = q_0 + e_2 + e_3 + f_3; \\
q_3^4 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_3; & q_4^4 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 + f_3; \\
q_5^4 = q_0 + e_1 + e_3 + f_1; & q_6^4 = q_0 + e_1 + f_1; \\
q_7^4 = q_0 + e_1 + f_1 + f_3.
\end{array}$$

On continue en contractant le pont γ_{23} , on considère ainsi le cycle évanescents $f_2 + f_3 \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ et on obtient les formules

$$\begin{array}{ll}
q_1^5 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2; & q_2^5 = q_0 + e_2 + e_3 + f_2; \\
q_3^5 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_2; & q_4^5 = q_0 + e_1 + e_2 + e_3 + f_1; \\
q_5^5 = q_0 + e_1 + e_3 + f_1; & q_6^5 = q_0 + e_1 + f_1 + f_2 + f_3; \\
q_7^5 = q_0 + e_1 + f_1 + f_2.
\end{array}$$

On continue en contractant l'ovale C_3 , on considère ainsi le cycle évanescents $e_3 \in H_1(C, \mathbb{Z}_2)$ et on obtient les formules

$$\begin{array}{ll}
q_1^6 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2; & q_2^6 = q_0 + e_2 + f_2; \\
q_3^6 = q_0 + e_1 + e_2 + f_2; & q_4^6 = q_0 + e_1 + e_2 + f_1; \\
q_5^6 = q_0 + e_1 + f_1; & q_6^6 = q_0 + e_1 + f_1 + f_2 + f_3; \\
q_7^6 = q_0 + e_1 + e_3 + f_1 + f_2.
\end{array}$$

Pour terminer notre "tour" le long de la quartique, on contracte le pont G_3 , et on considère ainsi le cycle évanescents f_3 . On obtient les formes quadratiques suivantes

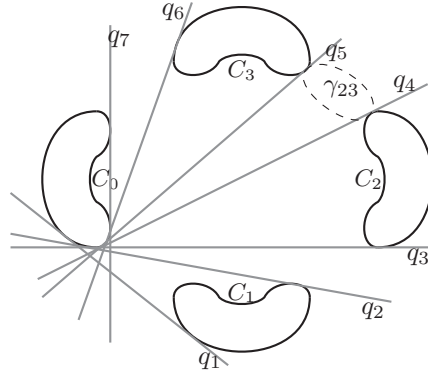
$$\begin{array}{ll}
q_1^7 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3; & q_2^7 = q_0 + e_2 + f_2 + f_3; \\
q_3^7 = q_0 + e_1 + e_2 + f_2 + f_3; & q_4^7 = q_0 + e_1 + e_2 + f_1 + f_3; \\
q_5^7 = q_0 + e_1 + f_1 + f_3; & q_6^7 = q_0 + e_1 + f_1 + f_2; \\
q_7^7 = q_0 + e_1 + e_3 + f_1 + f_2.
\end{array}$$

Pour conclure, il suffit de constater que les huit ensembles de Aronhold que l'on vient de décrire par les formes quadratiques, sont distincts deux à deux et que la thêta-caractéristique paire associée, c'est à dire donnée par la somme des formes quadratiques, est la même.

Conjecture

Soit (q_1, \dots, q_7) un ensemble de Aronhold. Il existe un sous-groupe du groupe de monodromie isomorphe au groupe de symétrie S_7 dont l'action sur l'ensemble de Aronhold donné est la même.

Idée de démonstration. L'idée derrière cette deuxième partie de la conjecture est de considérer l'ensemble de Aronhold (q_1, \dots, q_7) défini précédemment et de construire explicitement une bijection entre le groupe de symétrie S_7 et un sous-ensemble du groupe de monodromie. Puisque le groupe symétrique S_7 est engendré par les permutations de la forme $(i, i+1)$, il suffit de trouver un cycle évanescents dont l'action sur l'ensemble de Aronhold va permuer q_i et q_{i+1} . Graphiquement, il faut trouver un cycle évanescents qui permuent deux bitangentes. Par exemple, si on considère les bitangentes associées aux formes quadratiques q_4 et q_5 , il est raisonnable de penser que le cycle évanescents à considérer pour permuer ces deux droites est le pont γ_{23} .



Nous allons à présent vérifier que ce raisonnement est correct. Afin de permuer les formes quadratiques q_1 et q_2 , on va contracter l'ovale C_1 , i.e. on considère le cycle évanescents e_i . En utilisant la proposition 4.12, les formes quadratiques obtenues après l'action de la monodromie sont données par les formules.

$$\begin{array}{ll}
 q_1 = q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 & q'_1 = q_0 + e_3 + f_2 + f_3 = q_2 \\
 q_2 = q_0 + e_3 + f_2 + f_3 & q'_2 = q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 = q_1 \\
 q_3 = q_0 + e_3 + f_1 + f_3 & q'_3 = q_0 + e_3 + f_1 + f_3 = q_3 \\
 q_4 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3 & \Rightarrow q'_4 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3 = q_4 \\
 q_5 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 & q'_5 = q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 = q_5 \\
 q_6 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2 & q'_6 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2 = q_6 \\
 q_7 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3 & q'_7 = q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3 = q_7
 \end{array}$$

On a donc préservé l'ensemble de Aronhold en permuant uniquement deux des formes quadratiques qui le définissent. Pour compléter cette démonstration, il suffit de trouver des cycles évanescents pour chaque permutation. Pour éviter

une démonstration trop longue, on va se contenter de donner pour la suite les cycles évanescents et l'action de la monodromie par chaque cycle. Pour la permutation de q_2 et q_3 , on considère le cycle évanescents $f_1 + f_2$ correspondant à la contraction du pont γ_{12} , on obtient alors les formules.

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 = q_1 \\ q'_2 &= q_0 + e_3 + f_1 + f_3 = q_3 \\ q'_3 &= q_0 + e_3 + f_2 + f_3 = q_2 \\ q'_4 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3 = q_4 \\ q'_5 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 = q_5 \\ q'_6 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 = q_6 \\ q'_7 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3 = q_7 \end{aligned}$$

Pour la permutation de q_3 et q_4 , on considère le cycle évanescents e_2 correspondant à la contraction de l'ovale C_2 , on obtient alors les formules.

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 = q_1 \\ q'_2 &= q_0 + e_3 + f_2 + f_3 = q_2 \\ q'_3 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3 = q_4 \\ q'_4 &= q_0 + e_3 + f_1 + f_3 = q_3 \\ q'_5 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 = q_5 \\ q'_6 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 = q_6 \\ q'_7 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3 = q_7 \end{aligned}$$

Pour la permutation de q_4 et q_5 , on considère le cycle évanescents $f_2 + f_3$ correspondant à la contraction du pont γ_{23} , on obtient alors les formules.

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 = q_1 \\ q'_2 &= q_0 + e_3 + f_2 + f_3 = q_2 \\ q'_3 &= q_0 + e_3 + f_1 + f_3 = q_3 \\ q'_4 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 = q_5 \\ q'_5 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3 = q_4 \\ q'_6 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 = q_6 \\ q'_7 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3 = q_7 \end{aligned}$$

Pour la permutation de q_5 et q_6 , on considère le cycle évanescents e_3 correspondant à la contraction de l'ovale C_3 , on obtient alors les formules.

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 = q_1 \\ q'_2 &= q_0 + e_3 + f_2 + f_3 = q_2 \\ q'_3 &= q_0 + e_3 + f_1 + f_3 = q_3 \\ q'_4 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3 = q_4 \\ q'_5 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 = q_6 \\ q'_6 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 = q_5 \\ q'_7 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3 = q_7 \end{aligned}$$

Finalemment, pour la permutation de q_6 et q_7 , on considère le cycle évanescent f_3 correspondant à la contraction du pont G_3 , on obtient alors les formules.

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 = q_1 \\ q'_2 &= q_0 + e_3 + f_2 + f_3 = q_3 \\ q'_3 &= q_0 + e_3 + f_1 + f_3 = q_2 \\ q'_4 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3 = q_4 \\ q'_5 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 = q_5 \\ q'_6 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 = q_6 \\ q'_7 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3 = q_7 \end{aligned}$$

Pour la permutation de q_2 et q_3 , on considère le cycle évanescent $f_1 + f_2$ correspondant à la contraction du pont γ_{12} , on obtient alors les formules.

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_0 + e_1 + e_3 + f_2 + f_3 = q_1 \\ q'_2 &= q_0 + e_3 + f_2 + f_3 = q_2 \\ q'_3 &= q_0 + e_3 + f_1 + f_3 = q_3 \\ q'_4 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_3 = q_4 \\ q'_5 &= q_0 + e_2 + e_3 + f_1 + f_2 = q_5 \\ q'_6 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 + f_3 = q_7 \\ q'_7 &= q_0 + e_2 + f_1 + f_2 = q_6 \end{aligned}$$

On a finalement obtenu toutes les permutations de la forme $(i, i + 1)$, donc le groupe de symétrie S_7 est bien isomorphe à un sous-groupe du groupe de monodromie.

Si la conjecture n'est pas démontrée avec les idées évoquées ci-dessus, c'est simplement parce qu'au moment où on passe par une singularité de la courbe spectrale dans chacune des deux parties de la conjecture, l'intersection de trois quadriques associée à la thêta-caractéristique est une intersection singulière (deux des huit points sont confondus). Pour démontrer cette conjecture, il faudrait réussir à effectuer les mêmes opérations que ci-dessus mais en utilisant uniquement des faisceaux d'idéaux qui correspondent aux intersections régulières de trois quadriques.

4.3.2 Intersections dans $P_{\mathbb{R}}^4$

Nous allons commencer par montrer que, comme dans la cas d'intersections de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$, il n'existe pas de thêta-caractéristique non-nulle sur une courbe plane de degré 5.

Proposition 4.19. *Toute thêta-caractéristique paire sur une courbe plane non-singulière de degré 5 est non-dégénérée.*

Démonstration. Soit C une courbe plane non-singulière de degré 5. Supposons qu'il existe une thêta-caractéristique paire θ vérifiant $\dim H^0(C, \theta) \neq 0$. Alors, d'après le lemme 3.17, après une petite perturbation de la courbe C , la

thêta-caractéristique θ devient nulle. Cependant, d'après un résultat de Mumford (cf [Mum71]), la dimension modulo 2 de l'espace des sections d'une thêta-caractéristique est invariant par déformation de la courbe. On en déduit

$$\dim H^0(C, \theta) = 0 \pmod{2}$$

Ainsi, la thêta-caractéristique θ possède au moins deux sections linéairement indépendantes notées ϕ et ψ . On obtient alors une famille de sections $(\phi + t\psi)_{t \in \mathbb{R}}$ dont le carré est une section du fibré canonique $K = \mathcal{O}_C(2)$, on peut donc regarder ces sections comme des polynômes homogènes de degré 2 dans P_C^2 . On obtient une famille de coniques $Q_t : (\phi + t\psi)^2 = 0$. Chaque conique Q_t rencontre la courbe C en cinq points d'ordre 2 puisque $(\phi + t\psi)$ est une section de θ . Ainsi, deux coniques définies pour t et t' suffisamment proches s'intersectent en autant de points que l'intersection d'une des deux coniques avec la courbe C , à savoir cinq points. Cependant, deux coniques ne peuvent pas s'intersecter en plus de quatre points, on obtient ainsi notre contradiction. \square

Comme pour l'intersection de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^3$, nous sommes maintenant en mesure de donner la classification à déformation près des intersections maximales de trois quadriques dont la courbe spectrale est maximale. Avant d'énoncer notre théorème, il nous faut connaître les ponts et les ovales que l'on peut contracter afin d'utiliser nos résultats sur la modification d'une thêta-caractéristique par la passage par une singularité de la courbe spectrale. Il n'est pas difficile de voir que chaque ovale de la courbe peut-être contracté. Par la construction de Hilbert des M-courbes, on obtient les cycles évanescents de la quintique maximale représentés par les courbes C_i et γ_i sur la figure 4.5.

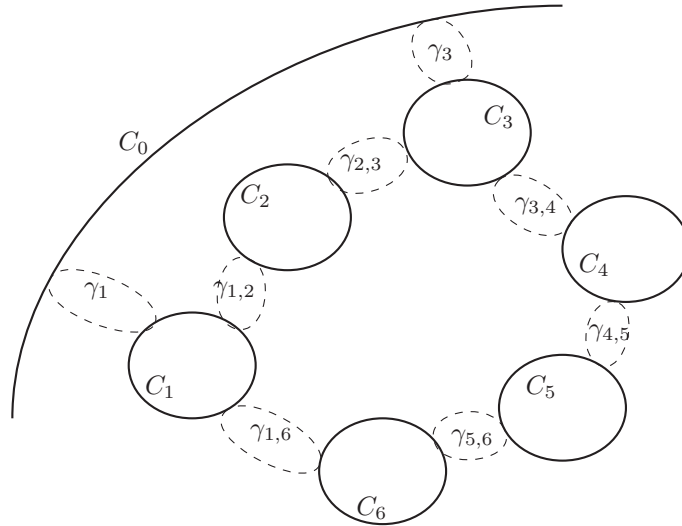


FIGURE 4.5 – Quintique réelle maximale

Théorème 4.20

À déformation près, il existe une unique intersection maximale de trois quadriques dans $P_{\mathbb{R}}^4$ dont la courbe spectrale est maximale.

Démonstration. D'après le théorème de Dixon, une intersection de trois quadriques est déterminée par la donnée d'une thêta-caractéristique θ sur la courbe C . D'après le théorème 3.15, puisque que la courbe considérée est maximale, l'intersection de trois quadriques donnée par la thêta-caractéristique paire θ est maximale si et seulement si la fonction indice vérifie $i_{\min} = 1$ et la différentielle d_2 est triviale ou la fonction indice vérifie $i_{\min} = 2$ et la différentielle d_2 n'est pas triviale. Cependant, dans ce cas où la courbe est très simple, toute thêta-caractéristique paire vérifie une de ces conditions. Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que l'on peut "modifier" toute thêta-caractéristique paire donnée en n'importe quel autre thêta-caractéristique paire. On peut encore simplifier la démonstration en remarquant qu'il est suffisant de démontrer que toute thêta-caractéristique paire peut-être "modifier" afin d'obtenir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ (rappelons que $q_\theta([C_i]) = 1 + \varepsilon_i$). Si on arrive à démontrer ce résultat, alors on peut modifier les valeurs des δ_i en contractant l'ovale C_i , on aura donc montré que toute thêta-caractéristique paire peut se ramener à la thêta-caractéristique définie par $\varepsilon_i = 1$ et $\delta_i = 0$ pour tout i . La démonstration se fait à présent par étape sur le nombre d'entier pour lesquels $\varepsilon_i = 1$. Il suffit alors de remarquer que, grâce au circuit fermé formé par les ponts reliant les ovales, par un jeu de contraction de ponts et d'ovales, on peut transférer une valeur $\varepsilon_i = 1$ pour obtenir $\varepsilon_j = 1$ pour $j \neq i$.

1^{re} étape. Supposons que $\varepsilon_i = 0$ pour tout i . On souhaite obtenir $\varepsilon_i = 1$ pour au moins un entier i . Pour ce faire, regardons la somme suivante

$$(\delta_1 + \delta_2) + (\delta_2 + \delta_3) + \cdots + (\delta_6 + \delta_1) = 2(\delta_1 + \cdots + \delta_6)$$

En particulier, cette somme est paire. Soit il existe un entier i tel que $\delta_i + \delta_{i+1} = 0$, dans ce cas, on peut contracter le ponts $\gamma_{i,i+1}$ et obtenir $\varepsilon_i = 1$. Soit $\delta_i + \delta_{i+1} = 1$ pour tout i et dans ce cas, nécessairement $\delta_1 = 1$ ou $\delta_3 = 1$, on peut donc contracter le pont γ_1 ou γ_3 pour obtenir $\varepsilon_1 = 1$ ou $\varepsilon_3 = 1$. Dans tous les cas, il existe au moins un entier i tel que $\varepsilon_i = 1$.

2^e étape. On suppose que $\varepsilon_i = 0$ pour $i \neq 5$. On souhaite obtenir $\varepsilon_i = 1$ pour au moins deux entiers distincts. On regarde les valeurs de $\delta_1, \delta_3, \delta_3 + \delta_4$ et $\delta_1 + \delta_6$. Si une de ces valeurs est nulles (toujours modulo 2) alors, on peut contracter le pont correspondant pour obtenir un deuxième entier i vérifiant $\varepsilon_i = 1$. Dans le cas contraire, on en déduit que $\delta_4 = \delta_6 = 0$. Quitte à contracter l'ovale C_5 , on peut supposer que $\delta_5 = 0$, on a alors $\delta_5 + \delta_4 = \delta_5 + \delta_6 = 0$. Alors, en contractant successivement les ponts $\gamma_{4,5}$ et $\gamma_{5,6}$, on obtient $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1$.

3^e étape. Supposons que $\varepsilon_2 = \varepsilon_5 = 1$ et que les autres sont nulles. On regarde les valeurs de $\delta_3 + \delta_4$ et $\delta_1 + \delta_6$. Si l'une de ces valeurs est nulle, alors on peut obtenir notre troisième entier vérifiant $\varepsilon_i = 1$. Dans le cas contraire, supposons que $\delta_1 = \delta_3 = 1$ (sinon, on peut également obtenir un troisième entier), quitte à contracter l'ovale C_2 , on peut supposer que $\delta_2 = 1$. Ainsi, en contractant successivement les ponts $\gamma_{2,3}$ et $\gamma_{1,2}$, on obtient $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$.

4^e étape. Supposons que $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_5 = 1$ et que $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = \varepsilon_6 = 0$. On regarde la valeur de δ_4 . Si $\delta_4 = 0$, quitte à contracter l'ovale C_3 , on peut supposer que $\delta_3 = 0$ de sorte que $\delta_3 + \delta_4 = 0$. Ainsi, en contractant le pont $\gamma_{3,4}$ on obtient $\varepsilon_4 = 1$ mais en contrepartie $\varepsilon_3 = 0$. Cependant, puisque $\delta_3 = 0$,

on peut contracter le pont γ_3 pour obtenir de nouveau $\varepsilon_3 = 1$. Si $\delta_4 = 1$, quitte à contracter l'ovale C_3 , on peut supposer que $\delta_3 = 1$ de sorte que $\delta_3 + \delta_4 = 0$. Ainsi, en contractant le pont $\gamma_{3,4}$ on obtient $\varepsilon_4 = 1$ mais en contrepartie $\varepsilon_3 = 0$. On regarde l'invariant de Arf de cette nouvelle thêta-caractéristique

$$\text{arf}(q_\theta) = \sum_{i=1}^6 (1 + \varepsilon_i) \delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_1 + \delta_2 + 1$$

On en déduit que $\delta_1 + \delta_2 = 1$. Si $\delta_1 = 0$, on peut contracter le pont γ_1 pour obtenir $\varepsilon_1 = 1$. Si $\delta_1 = 1$ alors, quitte à contracter l'ovale C_2 , on peut supposer que $\delta_2 = 1$, on a ainsi $\delta_1 + \delta_2 = \delta_2 + \delta_3 = 0$. On contracte alors successivement les ponts $\gamma_{1,2}$ et $\gamma_{2,3}$ pour obtenir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. Dans tous les cas, on a bien au moins 4 entiers distincts vérifiant $\varepsilon_i = 1$.

5^e étape. Pour conclure cette démonstration, il ne reste plus qu'à utiliser l'invariant de Arf. Supposons que $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$. On a alors

$$\text{arf}(q_\theta) = \sum_{i=1}^6 (1 + \varepsilon_i) \delta_i = (1 + \varepsilon_1) \delta_1 + (1 + \varepsilon_6) \delta_6$$

Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_6 = 0$ alors $\delta_1 + \delta_6 = 0$ et, en contractant le pont $\gamma_{1,6}$ on obtient $\varepsilon_1 = \varepsilon_6 = 1$. Supposons que $\varepsilon_6 = 1$ et $\varepsilon_1 = 0$. Alors, $\delta_1 = 0$, et en contractant le pont γ_1 on obtient $\varepsilon_1 = 1$. Dans tous les cas, on vérifie que $\varepsilon_i = 1$ pour tout i .

□

Bibliographie

- [A'C74] N. A'CAMPO : Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes ii. *In Actes du Congrès de Vancouver*, 1974.
- [A'C75] N. A'CAMPO : Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes i. *Math. Ann*, vol 213:pp 1–32, 1975.
- [AG88] A.A. AGRACHEV et R. GAMKRELIDZE : Computation of the euler characteristic of intersections of real quadrics. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, vol 299:pp 11–14, 1988.
- [Agr88a] A.A. AGRACHEV : Homology of intersections of real quadrics. *Soviet Math. Dokl.*, vol 37:pp 493–496, 1988.
- [Agr88b] A.A. AGRACHEV : Topology of quadratic maps and hessians of smooth maps. *Itogi Nauki i Tekhniki*, vol 26:pp 85–124, 1988. (Russian); English transl. in *J.Soviet Math.* 49, 1990, pp 990-1013.
- [AGZV88] V.I. ARNOL'D, S. GOUSSEIN-ZADE et A.N. VARCHENKO : *Singularities of differentiable maps*, volume vol. 2. Monographs in mathematics, 1988.
- [Arn71] V.I. ARNOL'D : On the arrangement of ovals of real plane algebraic curves, involutions on four-dimensional manifolds, and the arithmetic of integer-valued quadratic forms. *Funct. Anal. Appl.*, vol 5:pp 375–379, 1971.
- [BCR98] J. BOCHNAK, M. COSTE et M-F. ROY : *Real Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1998.
- [Bis04] I. BISWAS : A note on the theta characteristics of a compact riemann surface. *J. Aust. Math. Soc.*, vol 76:pp 415–423, 2004.
- [Bre67] G.E. BREDON : *Sheaf theory*. McGraw-Hill series in higher mathematics, 1967.
- [Bre72] G.E. BREDON : *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, 1972.
- [BT82] R. BOTT et L. TU : *Differential forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [Cor89] M. CORNALBA : Moduli of curves and theta-characteristics. *World Sci. Publ.*, Teaneck, NJ:pp 560–589, 1989.

- [Del74] P. DELIGNE : Cohomologie des intersections complètes, groupes de monodromie en géométrie algébrique. *Lectures notes in Mathematics, Springer-Verlag*, vol 340:pp 39–61, 1974.
- [DIK] A. DEGTJAREV, I. ITENBERG et V. KHARLAMOV : On the number of components of a complete intersection of real quadrics. arXiv :0806.4077v3.
- [Dix02] A.C. DIXON : Note on the reduction of a ternary quantic to a symmetrical determinant. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol 5:pp 305–351, 1902.
- [Dol12] I.V. DOLGACHEV : *Classical Algebraic Geometry : a modern view*. Cambridge University Press, 2012.
- [GH81] B.H. GROSS et J. HARRIS : Real algebraic curves. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, vol 14:pp 157–182, 1981.
- [GH04] B.H. GROSS et J. HARRIS : On some geometric constructions related to theta characteristics. *Contributions to Automorphic forms, Geometry, and Number Theory*, John Hopkins Press:pp 279–311, 2004.
- [Har76] A. HARNACK : Über vieltheiligkeit der ebenen algebraischen curven. *Math. Ann.*, vol 10:pp 187–209, 1876.
- [Har82] J. HARRIS : Theta-characteristics on algebraic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol 271:pp 611–638, 1982.
- [Hir66] F. HIRZEBRUCH : *Topological methods in algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1966.
- [Kha73] V.M. KHARLAMOV : New relations for the euler characteristic of real algebraic manifolds. *Funct. Anal. Appl.*, vol 7(2):pp 147–150, 1973.
- [Kha74] V.M. KHARLAMOV : A generalized petrovskii inequality. *Funct. Anal. Appl.*, vol 8:pp 132–137, 1974.
- [Kha75] V.M. KHARLAMOV : Additional congruences for the euler characteristic of real algebraic manifolds of even dimensions. *Funct. Anal. Appl.*, vol 9:pp 134–141, 1975.
- [Kra12] V.A. KRASNOV : Cohomology of real three-dimensional triquadrics. *Izv. Math.*, vol 76:pp 113–138, 2012.
- [Kra13] V.A. KRASNOV : Real m -triquadrics. *Izv. Math.*, vol 77:pp 30–43, 2013.
- [KV12] D. KERNER et V. VINNIKOV : Determinantal representation of singular hypersurfaces in \mathbb{P}^n . *Advances in Mathematics*, vol 231:pp 1619–1654, 2012.
- [Ler11] A. LERARIO : *Homology invariants of quadratic maps*. Thèse de doctorat, SISSA-Trieste, 2011.
- [Lop89] S. LOPEZ DE MEDRANO : Topology of the intersection of quadrics in \mathbb{R}^n . *Lectures notes in Mathematics*, vol 1370:pp 280–292, 1989.
- [McC01] J. MCCLEARY : *A user's guide to spectral sequences*. Cambridge University Press, 2001.
- [Mum71] D. MUMFORD : Theta-characteristics of an algebraic curve. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, vol 4:pp 181–191, 1971.

- [Nat04] S.M. NATANZON : *Moduli of Riemann surfaces, real algebraic curves, and their superanalogs*. Translations of mathematical Monographs 225, 2004.
- [Pet38] I. PETROVSKI : On the topology of real plane algebraic curves. *Ann. of Math.*, vol 39:pp 187–209, 1938.
- [Pio07] J. PIONTKOWSKI : Theta-characteristics on singular curves. *J. Lond. Math. Soc.*, vol 75, 2007.
- [Rei72] M. REID : *The complete intersection of two or more quadrics*. Thèse de doctorat, Trinity College, Cambridge, 1972.
- [Rok72a] V.A. ROKHLIN : Congruences modulo 16 in hilbert’s sixtieth problem. *Funktsional. Analiz i Ego Prilozhen*, vol 6(4):pp 58–64, 1972.
- [Rok72b] V.A. ROKHLIN : Proof of gudkov’s conjecture. *Funct. Anal. Appl.*, vol 6:pp 136–138, 1972.
- [Rok78] V.A. ROKHLIN : Complex topological characteristics of real algebraic curves. *Uspekhi Mat. Nauk*, vol 33:pp 77–89, 1978.
- [Tyu75] A.N. TYURIN : On intersection of quadrics. *Russian Math. Surveys*, vol 30:pp 51–105, 1975.
- [Vin93] V. VINNIKOV : Self-adjoint determinantal representations of real plane curves. *Math. Ann.*, vol 296:pp 453–479, 1993.
- [Vir86] O. VIRO : Progress in the last six years in topology of real algebraic varieties. *Uspekhi Mat. Nauk*, vol 41:pp 45–67, 1986. (Russian), English transl. in *Russian Math. Surveys* 41, 1986, pp 55–82.

Intersections maximales de quadriques réelles

Résumé

La géométrie algébrique réelle est dans sa définition la plus simple, l'étude des ensembles de solutions d'un système d'équations polynomiales à coefficients réelles. Dans cette vaste thématique, on se concentre sur les intersections de quadriques où déjà le cas de trois quadriques reste largement ouvert. Notre sujet peut être résumé comme l'étude topologique des variétés algébriques réelles et l'interaction entre leur topologie d'une part et leur déformations et dégénération d'autre part, un problème issu du 16^{ième} problème de Hilbert et enrichi par des développements récents. Au cours de cette thèse, nous allons nous focaliser sur les intersections maximales de quadriques réelles et en particulier démontrer l'existence de telles intersections en utilisant des développements issus des recherches effectuées depuis la fin des années 80. Dans le cas d'intersections de trois quadriques, nous allons mettre en évidence le lien très étroit entre ces intersections d'une part et les courbes planes d'autre part, et démontrer que l'étude des M-courbes (une des problématiques du 16^{ième} problème de Hilbert) peut se faire à travers l'étude des intersections maximales. Nous utiliserons ensuite les résultats sur les courbes planes nodales afin de déterminer dans certains cas les classes de déformations d'intersections de trois quadriques réelles.

Mots clés : Formes quadratiques, nombres de Betti, courbes planes, 16^{ème} problème de Hilbert, classes de déformation.

Résumé en anglais

Real algebraic geometry is in its simplest definition, the study of sets of solutions of a system of polynomial equations with real coefficients. In this theme, we focus on the intersections of quadrics where already the case of three quadrics remains wide open. Our subject can be summarized as the topological study of real algebraic varieties and interaction between their topology on the one hand and their deformations and degenerations on the other hand, a problem coming from the 16th Hilbert problem and enriched by recent developments. In this thesis, we will focus on maximum intersections of real quadrics and particularly prove the existence of such intersections using research developments made since the late 80. In the case of intersections of three quadrics, we will point the very close link between the intersections on the one hand and on the other plane curves, and show that the study of M-curves (one of the problems of the 16th Hilbert problem) may be done through the study of maximum intersections. Next, we will use the study on nodal plane curves to determine in some cases deformation classes of intersections of three real quadrics.

Quadratic forms, Betti numbers, plane curves, Hilbert 16th problem, deformation classes.