HAL
open science

Trigraphes de Berge apprivoises

Théophile Trunck

To cite this version:

Théophile Trunck. Trigraphes de Berge apprivoises. Autre [cs.OH]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2014. Français. NNT : 2014ENSL0929 . tel-01077934

HAL Id: tel-01077934

https://theses.hal.science/tel-01077934

Submitted on 27 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Normale Supérieure de Lyon

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Lyon, délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon

Spécialité : **Informatique**

préparée au **Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme**

dans le cadre de l'École Doctorale **Info-Math**

présentée et soutenue publiquement
par

Théophile Trunck

le 17 septembre 2014

Titre :
Trigraphes de Berge apprivoisés

Directeur de thèse : **Nicolas Trotignon**

Jury
Celina De Figueiredo, Rapporteur
Frédéric Maffray, Rapporteur
Stéphan Thomassé, Examinateur
Nicolas Trotignon, Directeur
Annegret Wagler, Examinateur

Résumé

L'objectif de cette thèse est de réussir à utiliser des décompositions de graphes afin de résoudre des problèmes algorithmiques sur les graphes.

Notre objet d'étude principal est la classe des graphes de Berge apprivoisés. Les graphes de Berge sont les graphes ne possédant ni cycle de longueur impaire supérieur à 4 ni complémentaire de cycle de longueur impaire supérieure à 4. Dans les années 60, Claude Berge a conjecturé que les graphes de Berge étaient des graphes parfaits, c'est-à-dire que la taille de la plus grande clique est exactement le nombre minimum de couleurs nécessaires à une coloration propre et ce pour tout sous-graphe. En 2002, Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas ont démontré cette conjecture en utilisant un théorème de structure : les graphes de Berge sont basiques ou admettent une décomposition. Ce résultat est très utile pour faire des preuves par induction. Cependant, une des décompositions du théorème, la skew-partition équilibrée, est très difficile à utiliser algorithmiquement. Nous nous focalisons donc sur les graphes de Berge apprivoisés, c'est-à-dire les graphes de Berge sans skew-partition équilibrée. Pour pouvoir faire des inductions, nous devons adapter le théorème de structure de Chudnovsky et al. à notre classe. Nous prouvons un résultat plus fort : les graphes de Berge apprivoisés sont basiques ou admettent une décomposition telle qu'un côté de la décomposition soit toujours basique. Nous avons de plus un algorithme calculant cette décomposition. Nous utilisons ensuite notre théorème pour montrer que les graphes de Berge apprivoisés admettent la propriété du grand biparti, de la clique-stable séparation et qu'il existe un algorithme polynomial permettant de calculer le stable maximum.

Abstract

The goal of this thesis is to use graph's decompositions to solve algorithmic problems on graphs.

We will study the class of tamed Berge graphs. A Berge graph is a graph without cycle of odd length at least 4 nor complement of cycle of odd length at least 4. In the 60's, Claude Berge conjectured that Berge graphs are perfect graphs. The size of the biggest clique is exactly the number of colors required to color the graph. In 2002, Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas proved this conjecture using a theorem of decomposition: Berge graphs are either basic or have a decomposition. This is a useful result to do proof by induction. Unfortunately, one of the decomposition, the skew-partition, is really hard to use. We are focusing here on tamed Berge graphs, i.e Berge graph without balanced skew- partition. To be able to do induction, we must first adapt the Chudnovsky et al's theorem of structure to our class. We prove a stronger result: tamed Berge graphs are basic or have a decomposition such that one side is always basic. We also have an algorithm to compute this decomposition. We then use our theorem to prove that tamed Berge graphs have the big-bipartite property, the clique-stable set separation property and there exists a polytime algorithm to compute the maximum stable set.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Nicolas Trotignon, pour sa disponibilité, l'aide qu'il m'a accordée pendant cette thèse et toutes les choses qu'il a pu m'apprendre tant au niveau de la recherche que de comment bien rédiger ou de choses plus anecdotiques comme la liste des monarques danois à partir de XVe siècle [1]. Je souhaite à tous les thésards de pouvoir bénéficier d'un encadrement comme le tien.

Si je peux présenter cette thèse, c'est aussi grâce à mes relecteurs. Je remercie Celina de Figueiredo pour toutes ses remarques sur le manuscrit et aussi pour avoir accepté de faire le déplacement à Lyon pour faire partie de mon jury. Je remercie également Frédéric Maffray, pour sa relecture scrupuleuse qui m'a permis de rendre plus claires certaines preuves. Merci également à Annegret Wagler d'avoir bien voulu faire partie de mon jury. Stéphan, merci pour tous les problèmes souvent suivis de solutions très élégantes que tu as pu nous poser durant ces années à Lyon, merci aussi d'avoir accepté de participer à ce jury.

Durant ce temps passé en thèse, mais aussi durant mon stage de master où j'ai pu commencer à travailler sur les problèmes présentés ici, j'ai eu la chance de rencontrer de nombreuses personnes. Je pense tout d'abord à mes cobureaux, par ordre d'apparition : Pierre, lorsque j'étais encore en stage de master au Liafa à Paris et qui nous a ensuite fait l'honneur de ses visites à Lyon. Bruno pour ton accueil au sein du LIP, tes explications sur le fonctionnement du DI et qui par ta maîtrise de Sage m'a donné goût à la science expérimentale. Sébastien tes discussions ont contribué à enrichir mes connaissances en physique, merci surtout pour ton enthousiasme à vouloir travailler sur n'importe quel problème, qu'il soit ou non lié à ton domaine de recherche. Aurélie sans qui les grapheux de MC2 n'auraient pas pu aller à toutes ces conférences, merci pour ton soutien. Emilie, je ne sais pas si nous avons officiellement été cobureaux mais merci pour toutes ces discussions (scientifiques ou pas) et bien sûr pour ces quiz musicaux. Jean-Florent, pendant ce semestre à Varsovie j'ai été très content d'avoir un cobureau lui aussi conditionné à manger à heures fixes, merci de m'avoir aidé à comprendre les wqo. Comme le temps passé au labo ne se limite pas à mon bureau merci à toute l'équipe MC2 : Nathalie, Pascal, Irena, Natacha, Michaël, Éric, Éric, Zhentao, Kévin, Maxime, Petru, Sebastián, Matthieu. Je souhaite à tout le monde de pouvoir travailler dans une telle équipe.

La recherche ne se limite pas à Lyon. Merci à Maria et Kristina de m'avoir appris autant de choses sur les graphes parfaits lors de votre séjour à Paris au début de mon stage. Marcin dziękuję za zaproszenie do Warszawy. Merci aussi à Marko et Jarek avec qui j'ai eu l'occasion de travailler respectivement à Belgrade et à Varsovie. Merci enfin à ceux qui m'ont les premiers fait découvrir la théorie des graphes lors de mon stage de M1. Daniël pour avoir proposé un sujet de stage intéressant et accessible, Matthew et Viresh pour vos discussions, Pim pour tes parties de billard.

La thèse c'est aussi l'enseignement, à ce titre merci à tous ceux avec qui j'ai eu l'occasion d'enseigner : Christophe, Xavier, Éric, Vincent et Arnaud. Merci aussi à tous mes élèves, particulièrement à ceux que j'ai eu l'occasion de coacher pour le SWERC.

1. C'est une alternance de Christian et de Frédéric

Même s'ils ne m'ont pas fait gagner de gourde j'ai été très content de les accompagner à Valence.

Un immense merci à Marie et Chiraz pour les réponses aux innombrables questions que j'ai pu leur poser et pour l'organisation de mes missions. Chiraz encore merci pour t'être occupée de l'organisation de ma soutenance. Merci à Damien pour ton aide lors des procédures d'inscription, de réinscription et de soutenance de thèse. Merci aussi à Catherine, Évelyne, Laetitia, Sèverine et Sylvie d'avoir toutes, à un moment donné, su répondre à mes demandes.

Comme une thèse ce n'est pas seulement ce qui se passe au labo, je voudrais remercier tous ceux qui m'ont accompagné durant ces trois ans. Au risque d'en oublier, merci à : Coco, Dédé, Pedro, Jo, So, Nico, Julie, Rom, Jess, Marion, Mika, Pauline, Pippo, Audrey, Camille... Merci aussi à toute ma famille, à mes parents qui ont pu être présents pour ma soutenance, à ma sœur qui est régulièrement passée à Lyon pendant ma thèse, mais surtout à Léopold sans qui l'organisation du pot m'aurait bien plus stressé. Enfin Marie, merci pour ton soutien pendant ces trois dernières années, mais merci surtout de m'avoir suivi à Lyon.

Et toi lecteur, si tu n'as pas encore trouvé ton nom, je ne t'ai pas oublié. J'espère juste que /dev/random te permettra de le trouver parmi tous les autres dans la grille suivante.

O	K	R	A	M	S	H	T	E	R	G	E	N	N	A	Z	O	G	U	X
U	E	L	L	I	M	A	C	H	I	R	A	Z	J	E	S	S	I	C	A
V	E	A	H	C	A	T	A	N	E	M	A	T	T	H	E	W	Z	V	M
S	O	P	E	E	I	L	E	R	U	A	Y	H	T	A	C	R	W	S	A
O	A	Q	N	H	K	T	T	H	E	N	I	R	E	H	T	A	C	U	R
L	T	M	P	I	P	D	X	N	W	P	L	E	O	P	O	L	D	E	I
E	N	S	I	U	C	O	C	X	E	M	O	S	E	V	E	R	I	N	E
N	E	F	T	K	D	O	T	R	A	R	A	L	L	P	E	O	L	D	H
N	H	E	F	E	A	E	L	S	O	V	O	R	E	Y	G	E	E	B	E
O	Z	I	G	T	L	S	N	A	I	L	I	L	C	N	D	W	A	A	Y
I	A	L	E	V	N	L	A	I	S	R	A	E	F	I	E	W	H	W	E
R	I	A	R	N	U	E	A	L	L	V	H	N	R	N	N	P	C	A	I
A	R	H	A	Y	E	S	C	J	S	U	K	C	D	I	A	C	I	L	V
M	A	T	R	M	O	I	N	N	E	I	A	R	K	Q	I	E	M	S	L
Z	M	A	D	O	I	S	T	I	I	M	N	P	I	R	F	X	J	O	Y
N	H	N	T	C	H	G	Q	S	A	V	I	A	E	S	U	D	F	R	S
C	F	R	E	D	E	R	I	C	A	M	J	X	T	F	T	R	I	A	Y
L	A	E	T	I	T	I	A	L	J	B	O	R	A	S	T	I	T	J	O
E	I	L	I	M	E	V	E	L	Y	N	E	R	X	M	R	V	N	E	M
M	N	A	H	T	A	N	O	J	R	M	V	S	C	E	L	I	N	A	P

Table des matières

Table des matières v

1 Introduction **1**

2 Trigraphes de Berge apprivoisés **9**
2.1 Définitions 12
2.2 Trigraphes basiques 15
2.3 Décompositions 17
2.4 Structure des trigraphes de Berge apprivoisés 21
2.5 Blocs de décomposition 28

3 Propriété du grand biparti **35**
3.1 Grand biparti dans les trigraphes de Berge apprivoisés 37
3.2 Clôture par k-joints généralisés 44
3.3 Grand biparti dans les classes closes par k-joints 45

4 Clique-Stable séparateur **49**
4.1 Clique-stable séparateur dans les trigraphes de Berge apprivoisés . . 51
4.2 Clique-stable séparateur dans les classes closes par k-joints 55

5 Calcul du stable maximum **59**
5.1 Le cas des trigraphes basiques 60
5.2 Stocker α dans les blocs 62
5.3 Calculer α 67

6 Décompositions extrêmes **79**
6.1 Décompositions extrêmes 79
6.2 Calculer une fin 85

7 Conclusion **95**

Bibliographie **97**

Chapitre 1

Introduction

Les graphes permettent de modéliser de nombreux problèmes. Par exemple, affecter un nombre minimal de salles permettant de faire cours sans que deux cours n'aient lieu dans la même salle au même moment est un problème de coloration du graphe d'intervalles représentant les cours.

Certains de ces problèmes sont "faciles", c'est-à-dire qu'il existe un algorithme en temps d'exécution polynomial pour les résoudre, d'autres sont difficiles (NP-complet) c'est-à-dire que si l'on trouve un algorithme efficace pour les résoudre, on résout par la même occasion tous les problèmes NP (ceux pour lesquels si l'on nous donne une solution il est facile de la vérifier, en particulier tous les problèmes de chiffrement). Cependant même si un problème est difficile sur les graphes généraux, il est possible que sur certaines classes de graphes il soit facile. Le problème du stable maximum est en général difficile, mais dans le cas des graphes bipartis (les graphes sans cycle de longueur impaire ou de manière équivalente, les graphes pouvant se partitionner en deux ensembles de sommets V_1 et V_2, tels que les seules arêtes soient entre V_1 et V_2, c'est-à-dire qu'il n'y ait aucune arête dans V_1 ni dans V_2) il devient facile. Notons bien que l'adjectif facile veut seulement dire ici qu'il existe un algorithme polynomial (donc dans un certain sens efficace) pour le résoudre et pas que cet algorithme est "facile" à trouver. Par exemple, pour résoudre le problème du stable maximum dans les graphes bipartis, il faut utiliser le théorème de Kőnig assurant l'égalité entre deux paramètres de graphe et un algorithme de couplage qui est maintenant classique.

Il est donc intéressant d'étudier des classes de graphes. D'un point de vue théorique afin de comprendre ce qui fait la difficulté d'un problème, mais également d'un point de vue pratique. En effet en modélisant un problème il est tout à fait possible que le graphe obtenu ait des propriétés spécifiques et qu'il soit alors

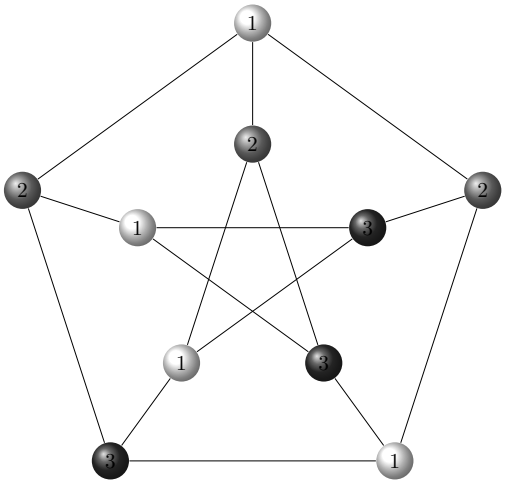

FIGURE 1.1 – Exemple de coloration

possible d'avoir des algorithmes efficaces. De nombreuses restrictions peuvent être obtenues, par exemple un graphe peut être obtenu à partir d'une carte routière et donc être représenté sans que ses arêtes ne se croisent (il est alors planaire). Il peut être obtenu à partir d'intersections d'intervalles de $\mathbb{R}$ (c'est alors un graphe d'intervalles) ou de contraintes entre deux types d'objets. Nous nous intéressons particulièrement aux classes de graphes définies par sous-graphes induits interdits, c'est-à-dire qu'en supprimant des sommets, on est assuré de ne pas pouvoir obtenir certains sous-graphes. De manière équivalente cela veut dire que quel que soit le sommet que l'on supprime, le graphe reste dans notre classe, ce qui permet par exemple de faire des inductions. Les graphes bipartis sont un exemple de classe de graphe définie par sous-graphes induits interdits (les cycles de longueur impaire).

La question générale est celle de l'influence des propriétés locales (on interdit localement une configuration) sur les propriétés globales : comment peut-on trouver un ensemble de taille maximum de sommets tous deux à deux non-adjacents, comment peut-on colorier le graphe avec seulement k couleurs ?

Le problème de coloration est le suivant : étant donné un graphe G, nous voulons donner à chacun de ses sommets une couleur (classiquement on identifie les couleurs à des entiers), telle que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. Une solution triviale est de donner à chaque sommet une couleur différente, mais nous cherchons à minimiser le nombre de couleurs différentes utilisées. Pour un graphe G on appelle nombre chromatique que l'on note $\chi(G)$ le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier G.

Une question naturelle à propos du problème de coloration, et c'est celle qui

va motiver l'introduction de notre classe de graphes, est la suivante : pourquoi un graphe G peut-il être colorié avec c couleurs mais pas avec $c-1$? Il est facile de trouver des conditions nécessaires. Par exemple, si un graphe contient une arête, c'est-à-dire deux sommets adjacents, il ne peut pas être colorié avec moins de 2 couleurs. Plus généralement s'il contient une clique de taille k (un ensemble de sommets tous deux à deux adjacents) alors il ne pourra pas être colorié avec strictement moins de k couleurs. Pour un graphe G on note $\omega(G)$ la taille de sa plus grande clique. Ce que nous venons de voir peut se traduire avec nos notations : Pour tout graphe G, $\chi(G) \geq \omega(G)$. Cependant la présence de clique n'est pas la seule obstruction. Par exemple, il n'y a pas de clique de taille strictement supérieure à deux dans un cycle sans corde sur 5 sommets, pourtant il est impossible de le colorier avec strictement moins de 3 couleurs. Plus généralement, il existe de nombreuses constructions qui pour tout entier k fournissent un graphe G_k n'ayant pas de triangle (de clique de taille plus que 3), mais qui n'est pas coloriable avec moins de k couleurs. Dans ce contexte, il est intéressant de regarder comment sont construits les graphes pour lesquels avoir une clique de taille k est la seule raison de ne pas être k coloriable. Il y a une petite subtilité technique, avec seulement cette propriété n'importe quel graphe est, si on lui ajoute une clique suffisamment grande, dans la classe. Pour éviter ce problème et comprendre vraiment les structures de nos graphes, Claude Berge a proposé dans les années 1960 de demander que tous les sous-graphes induits soient également dans la classe. C'est ainsi que sont définis les graphes parfaits : un graphe G est *parfait* si et seulement si pour tout sous-graphe induit H de G, alors la taille de la plus grande clique de H est égale au nombre de couleurs minimum permettant de colorier le graphe H. Soit avec nos notations un graphe G est parfait si et seulement si pour tout sous-graphe induit H de G, $\chi(H) = \omega(H)$.

Une autre notion importante est celle du stable. Un stable dans un graphe est un ensemble de sommets sans aucune arête entre eux. Pour tout graphe G on note $\alpha(G)$ la taille d'un stable maximum de G. Une opération classique sur un graphe G est de prendre son complémentaire $\overline{G}$ définit comme suit : les sommets de $\overline{G}$ sont les même que ceux de G et deux sommets de $\overline{G}$ sont adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G. On peut alors voir qu'un stable dans G devient une clique dans $\overline{G}$ et inversement. On a alors avec nos notations $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

D'un point de vue algorithmique, il est intéressant de noter que trouver un algorithme de coloration dans les graphes parfaits se ramène à un algorithme de calcul de stable et de clique maximum pondérés (on met des poids sur les sommets et on cherche un stable ou une clique de poids maximum). C'est pourquoi cette

thèse contient un chapitre sur le calcul du stable mais pas sur un algorithme de coloration. Ce résultat classique est difficile à extraire des travaux originaux de Gröstchel, Lovász, Schrijver mais est exposé plus clairement dans plusieurs travaux ultérieurs [33, 36]. Afin que le problème de coloration soit également traité dans cette thèse, le voici avec sa démonstration.

Théorème 1.1 (Gröstchel, Lovász, Schrijver, 1988)**.** *Pour toute classe $\mathcal{C}$ autocomplémentaire de graphes parfaits, s'il existe un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n^k)$ pour calculer un stable maximum pondéré d'un graphe de $\mathcal{C}$, alors il existe un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n^{k+2})$ pour colorier les graphes de $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Commençons par donner un algorithme qui étant donné un graphe G de $\mathcal{C}$ et une liste de cliques maximums de G $K_1, \ldots, K_t$ avec $t < |V(G)|$ calcule en temps $\mathcal{O}(n^k)$ un stable de G intersectant toutes ces cliques.

Donnons à chaque sommets le poids $y_v = |\{i; v \in K_i\}|$. Ce poids peut être nul. Calculons alors avec notre algorithme un stable pondéré maximum S. Nous alons montrer que S intersecte bien toutes les cliques K_i.

Considérons alors le graphe G' obtenu à partir de G en réplicant y_v fois chaque sommet v. Observons que G' peut ne pas être dans $\mathcal{C}$ mais est un graphe parfait. En réplicant y_v fois chaque sommet v de S nous obtenons S' un stable maximum de G'. Par construction, G' peut être partitionné en t cliques de taille $\omega(G)$ qui forment un coloriage optimale de $\overline{G'}$ car $\alpha(\overline{G'}) = \omega(G') = \omega(G)$. Puisque que le complémentaire d'un graphe parfait est parfait, $\overline{G'}$ est parfait, et donc $|S'| = t$. Donc dans G, S intersecte toutes les cliques K_i.

Nous allons maintenant montrer comment trouver un stable S intersectant toutes les cliques maximum de G. Ce stable formera une couleur et nous appliquerons ensuite cette méthode inductivement sur $G \setminus S$ qui est bien $\chi(G) - 1$ coloriable. Notons que la classe $\mathcal{C}$ n'a pas besoin d'être héréditaire, puisqu'on peut émuler $G \setminus S$ en donnant un poids nul aux sommets de S. Commençons avec $t = 0$. À chaque étape nous avons une liste de cliques maximums $K_1, \ldots, K_t$ et nous calculons un stable S les intersectant toutes avec la méthode décrite précédament. Si $\omega(G \setminus S) < \omega(G)$, alors notre stable intersecte toute les cliques maximums de G. Dans le cas contraire, calculons une clique maximum K_{t+1} de $G \setminus S$. Ce qui revient à calculer un stable maximum dans $\overline{G \setminus S}$ et qui est possible car notre classe est autocomplémentaire et en donnant un poids nul aux sommets de S.

Pour prouver notre résultat nous n'avons plus qu'à montrer que t la taille de notre liste de clique maximum est bornée par $|V(G)|$.

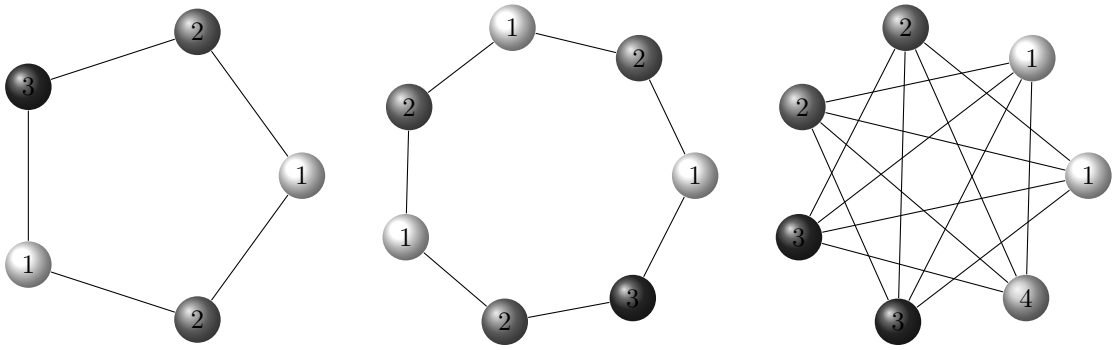

FIGURE 1.2 – Trous et complémentaire de trous ($C_5 = \overline{C_5}$, C_7 et $\overline{C_7}$)

Soit M_t la matrice d'incidence des cliques $K_1, \dots K_t$. C'est-à-dire que les colonnes de M_t correspondent aux sommets de G et que chaque ligne est une clique. Montrons par induction que les lignes de M_t sont indépendantes. Le cas de base est trivial. Supposons que les lignes de M_t sont indépendantes et montrons que celles de M_{t+1} le sont.

Soit x le vecteur d'incidence x de S. On a $M_t x = 1$ mais pas de $M_{t+1}x = 1$. Supposons que les lignes de M_{t+1} ne soient pas indépendantes. Nous avons, $K_{t+1} = \lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_t K_t$. En multipliant par x nous avons $K_{t+1}x = \lambda_1 + \cdots + \lambda_t \neq 1$. En multipliant par le vecteur colonne 1 nous avons alors $\omega(G) = K_{t+1}1 = \lambda_1\omega(G) + \cdots + \lambda_t\omega$. Donc $\lambda_1 + \cdots + \lambda_t = 1$, une contradiction. Par conséquent, les matrices $M_1, M_2, \dots$ ne peuvent avoir plus de $|V(G)|$ lignes, et notre nombre d'itérations est bien borné par $|V(G)|$.

□

Comme nous l'avons vu, contenir un cycle sans corde de longueur impaire nous assure de ne pas être parfait. Il est facile de voir que contenir le complémentaire d'un cycle sans corde de longueur impaire (tous les sommets non-adjacents deviennent adjacents et ceux adjacents deviennent non-adjacents, pour tout graphe G on note $\overline{G}$ son complémentaire) empêche également un graphe d'être parfait. On appelle trou un cycle sans corde, et on note C_n le trou de longueur n. On dit qu'un graphe sans trou, ni complémentaire de trou de longueur impaire supérieure à 4 est un graphe *de Berge*. La propriété d'être parfait pour un graphe est une propriété globale et elle implique la propriété locale d'être de Berge.

Un exemple trivial d'influence de propriété locale ou d'interdiction de structures locales sur la coloration est celui d'interdire les arêtes. Dans ce cas il est immédiat que le graphe est coloriable avec une seule couleur. Voyons un exemple plus intéressant. On note P_4 le chemin de 4 sommets, ce graphe a 3 arêtes. Un

graphe G est sans P_4 s'il ne contient pas P_4 en tant que sous graphe induit.

Théorème 1.2. *Les graphes sans P_4 sont coloriables optimalement avec l'algorithme suivant : Commençons par attribuer à chaque couleur un entier. Puis tant qu'il existe un sommet non colorié le colorier avec la plus petite couleur non utilisée par un de ses voisins.*

Démonstration. Notons k le nombre de couleurs utilisées par l'algorithme. Soit i le plus petit entier, tel qu'il existe une clique composée de $k-i+1$ sommets coloriés de i à k. Si le graphe ne contient pas d'arête, il est clair que l'algorithme est valide, sinon cette clique contient au moins 2 sommets. Nous allons montrer que $i = 1$. Supposons que ce n'est pas le cas. Par définition de l'algorithme, tout sommet de la clique a un voisin colorié par $i-1$, notons S cet ensemble de sommets. Par minimalité de i, S ne peut être réduit à un unique sommet. De plus, les sommets de S ayant la même couleur, ils forment donc un stable (ils sont tous deux à deux non-adjacents). Il existe deux sommets u et v de S, tels que u a un voisin x dans la clique qui n'est pas un voisin de v et v a un voisin dans la clique qui n'est pas un voisin de u. Les sommets $u-x-y-v$ forment un P_4, c'est une contradiction. Il existe donc une clique de taille k. Comme nous l'avons vu précédemment il est donc impossible de colorier le graphe avec strictement moins de k couleurs. Notre algorithme est donc optimal. □

Cette démonstration classique montre en fait que les graphes sans P_4 sont des graphes parfaits.

Dans les années 1960, Claude Berge a conjecturé qu'un graphe était parfait si et seulement si il était de Berge. Comme on vient de le voir, le passage du global (être coloriable avec exactement le même nombre de couleurs que la taille de la plus grande clique) au local (ne pas contenir de trou ni de complémentaire de trou de longueur impaire plus grande que 4) est clair. D'après les définitions : les graphes parfaits sont des graphes de Berge. C'est la réciproque, le passage du local au global qui est complexe. Cette conjecture a motivé de nombreuses recherches, utilisant des outils très différents (polyèdre, combinatoire). Finalement c'est grâce à un théorème de structure qu'en 2002 Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas ont pu démontrer cette conjecture.

Théorème 1.3 (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas (2002))**.** *Les graphes de Berge sont parfaits.*

Un théorème de structure est un théorème disant que les graphes d'une classe sont : ou bien basiques ou bien admettent une décomposition. Par basique, on entend qu'ils sont dans une sous-classe de graphe suffisamment simple ou étudiée pour qu'il soit possible de résoudre notre problème sur cette sous-classe. Par décomposition, on entend que le graphe est obtenu en recollant de manière bien définie deux graphes plus petits de la classe. Le sommet d'articulation (un sommet dont la suppression déconnecte le graphe) est un exemple de décomposition. Si l'on a deux graphes G_1 et G_2 on peut en former un troisième G_3 plus gros en identifiant un sommet de G_1 avec un sommet de G_2, ce sommet devient alors un sommet d'articulation de G_3. Il existe également une version plus forte des théorèmes de structure : les théorèmes de structure extrême, qui énoncent qu'un graphe est ou bien basique, ou bien admet une décomposition telle qu'un côté de la décomposition est basique. Si l'on regarde l'arbre de décomposition d'un théorème de structure extrême, c'est un peigne (chaque nœud interne de l'arbre a comme fils une feuille et un nœud).

Les théorèmes de structure sont généralement très utiles pour faire des démonstrations ou obtenir des algorithmes. Ils permettent de faire des inductions. Si une propriété est vraie pour les graphes basiques et qu'il est possible en utilisant la forme de la décomposition d'avoir cette propriété sur la composition de graphes, alors la propriété est vraie pour la classe de graphes. Certaines décompositions sont faciles à utiliser, par exemple le sommet d'articulation ou plus généralement la clique d'articulation (une clique dont la suppression déconnecte le graphe) qui peuvent, par exemple, être utilisées pour la coloration. D'autres sont très difficiles à utiliser, par exemple le star-cutset (un sommet dont la suppression et la suppression de certains de ses voisins déconnectent le graphe) et ses généralisations. En effet, il est possible que le star-cutset soit constitué de la majeure partie du graphe, dans ce cas toute tentative d'induction nécessitant de conserver le star-cutset dans chaque partie de la décomposition (c'est ce qui est le cas classique) conduira nécessairement à un algorithme exponentiel.

Dans cette thèse, nous allons utiliser le théorème de structure des graphes de Berge afin de démontrer un certain nombre de propriétés et d'algorithmes. Le théorème de Chudnovsky et al. et dont nous avons déjà parlé est le suivant.

Théorème 1.4 (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas (2002))**.** *Les graphes de Berge sont basiques ou décomposables par skew-partitions équilibrées, 2-joints ou complémentaire de 2-joints.*

Toutes les définitions seront données dans le chapitre 2. Nous ne savons pas

utiliser les skew-partitions (une décomposition généralisant les star-cutset) dans les algorithmes, nous nous focalisons donc sur les graphes de Berge sans skew-partition. Vu que notre classe et que nos problèmes sont auto-complémentaires notre principale décomposition est donc le 2-joint. Nous essayerons tant que possible de généraliser nos résultats à d'autres classes décomposables par k-joints.

Dans le chapitre 2, nous donnons toutes les définitions. Nous avons en fait besoin de généraliser la définition d'arête d'un graphe. Nous aurons alors des arêtes fortes, des non-arêtes fortes et un nouveau type d'adjacence : les arêtes optionnelles qui encodent une adjacence floue. Ces graphes généralisés sont appelés trigraphes et on été introduit par Chudnovsky et al. lors de la preuve du théorème fort des graphes parfaits. Nous avons donc besoin de redéfinir toutes les notions usuelles de graphe, ainsi que le théorème de structure des graphes de Berge.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons aux classes pour lesquelles il existe pour tout graphe de la classe deux ensembles de sommets complets dans le graphe ou dans son complément de taille linéaire. Il y a des contre-exemples de classes de graphes de Berge sans ces ensembles, mais lorsqu'on exclut les skew-partition ces ensembles existent toujours. Il est possible de généraliser cette propriété aux classes construites par k-joints.

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à la propriété de la clique-stable séparation, c'est-à-dire à l'existence d'un nombre polynomial de partitions du graphe en 2 ensembles tels que pour toute clique et tout stable sans intersection, il existe une partition contenant la clique d'un côté et le stable de l'autre. Ce problème est ouvert en général sur les graphes de Berge, mais nous pouvons le démontrer dans le cas où on exclut les skew-partition. Ici encore cette propriété peut-être étendue aux classes construites par k-joints.

Dans le chapitre 5, nous nous intéressons au calcul en temps polynomial du stable maximum. Notre algorithme est constructif et donne directement les sommets du stable. Dans le cas général des classes héréditaires on peut reconstruire avec un surcoût linéaire un stable maximum en sachant calculer sa valeur, cependant notre classe n'est pas héréditaire. Cet algorithme ne se généralise pas aux classes construites par k-joints, il existe de telles classes où le calcul du stable maximum est NP-complet. À partir de l'algorithme de calcul du stable on peut déduire un algorithme qui calcule une coloration optimale avec un surcoût de $\mathcal{O}(n^2)$.

Dans le chapitre 6, nous montrons qu'en étendant notre ensemble de décompositions nous pouvons obtenir une version extrême du théorème de structure. Nous donnons également des algorithmes permettant de calculer une telle décomposition.

Chapitre 2

Trigraphes de Berge apprivoisés

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec Maria Chudnovsky, Nicolas Trotignon et Kristina Vušković, ils font l'objet d'un article [15] soumis à Journal of Combinatorial Theory, Series B.

Nous introduisons dans ce chapitre une généralisation des graphes, les trigraphes. Il semble que cette notion de trigraphe, inventée par Chudnovsky, soit en train de devenir un outil très utile en théorie structurelle des graphes. Les trigraphes ont entre autre été utilisés pour éliminer la paire homogène (deux ensembles A et B de sommets se comportant comme deux sommets vis à vis du reste du graphe i.e tels que le reste du graphe se décompose en quatre ensembles : les sommets complétement adjacents aux sommets de A et de B, ceux complétement adjacents aux sommets de A et complétement non-adjacents aux sommets de B, ceux complétement non-adjacents aux sommets de A et complétement adjacents aux sommets de B et ceux complétement non-adjacents aux sommets de A et de B) de la liste des décompositions utilisées pour décomposer les graphes de Berge [9]. Ils apparaissent également dans l'étude des graphes sans griffe [14] ou dans celle des graphes sans taureau [11, 10]. La notion de trigraphe apparait également lors de l'étude d'homomorphismes [18, 19]. Cependant il faut bien noter que dans ce dernier cas, même si le nom et les idées générales sont identiques, les définitions diffèrent légèrement.

Avant de tout définir, essayons d'expliquer informellement l'intérêt des trigraphes. Le premier exemple de leurs utilisation est dans la démonstration de l'amélioration du théorème de décomposition des graphes de Berge. En effet, lors

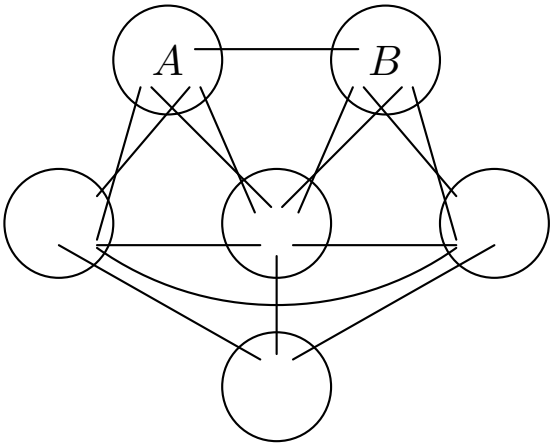

FIGURE 2.1 – Paire Homogène (Une double arête entre deux ensembles indique qu'ils sont complet, une arête simple indique qu'on ne sait rien sur leur adjacence, l'absence d'arête indique qu'il n'y a aucune arête entre les deux ensembles)

de la preuve du théorème des graphes parfaits Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [13] parviennent à décomposer les graphes de Berge en utilisant trois types de décompositions. Chudnovsky [9] montre alors qu'une de ces décompositions, la paire homogène est en fait inutile. Voyons l'intérêt des trigraphes dans la démonstration de ce résultat. L'idée de sa preuve est de prendre le plus petit graphe G dont la seule décomposition possible est une paire homogène et de chercher une contradiction. L'idée naturelle est alors de contracter cette paire homogène afin d'obtenir un graphe plus petit G', qui par hypothèse de minimalité, admet alors une décomposition autre que la paire homogène. On peut alors déduire de cette décomposition une décomposition dans G. Ce qui est contradictoire puisque par hypothèse, G n'est décomposable que par paire homogène. Cette idée est en fait une méthode classique de démonstration en théorie structurelle de graphes. Le principal problème (et c'est pour répondre à ce problème que les trigraphes ont été introduit) est de savoir comment contracter la paire homogène. Une paire homogène étant deux ensembles A et B de sommets se comportant comme deux sommets vis à vis du reste du graphe, on peut vouloir les réduire à deux sommets a et b tout en préservant leurs adjacences par rapport au reste du graphe. La question est de savoir s'il faut ou non mettre une arête entre ces deux sommets contractés. Sans donner les définitions précises, si on décide de ne pas mettre d'arête entre a et b, dans un certain sens, a va pouvoir être séparé de b, alors que dans le graphe de départ, séparer A de B n'a pas de sens. Nous avons le même problème dans le complémentaire du graphe si l'on décide de mettre une arête entre a et b. En

fait aucun de ces choix n'est le bon, en effet a priori chacun de ces choix pourrait créer une décomposition. Ce n'est finalement pas le cas puisque le résultat est vrai mais toute démonstration se heurte à ce problème. L'idée est alors de mettre une arête optionnelle. Les trigraphes sont alors définis comme des graphes mais avec trois types d'adjacence, les arêtes, les arêtes optionnelles et les non-arêtes. Une réalisation d'un trigraphe est alors une affectation des arêtes optionnelles en arêtes et non-arêtes. Tout le vocabulaire et les propriétés sur les graphes se traduisent alors sur les trigraphes de la manière suivante : *Une propriété $\mathcal{P}$ est vraie sur le trigraphe T si et seulement si elle est vraie sur toutes les réalisations G de T*. On ne crée alors plus de décomposition car on peut alors montrer que si toutes les réalisations contiennent cette décomposition, alors cette décomposition était présente à l'origine, ce qui mène à une contradiction. Bien entendu pour pouvoir faire l'induction tous les résultats doivent être vrais sur les trigraphes. Comme c'est souvent le cas lors des preuves par induction afin d'obtenir le résultat voulu nous devons en montrer un plus fort.

Les trigraphes permettent donc de travailler naturellement sur des hypothèses d'induction plus fortes ; pour toute réalisation la propriété doit être vraie ; ce qui nous permet alors de contracter des ensembles de sommets tout en préservant l'information d'adjacence entre ces sommets. Certains étaient adjacents, d'autre non, et suivant la réalisation choisie on a ou pas cet état. Ceci nous permet, si une décomposition existe (dans toutes les réalisations), de la trouver dans le graphe de départ.

Ceci n'étant que de brèves explications, voyons maintenant les définitions précises. Dans ce chapitre nous allons commencer par formaliser le vocabulaire usuel des graphes sur les trigraphes. Nous définissons ensuite plusieurs classes de trigraphes basiques (il s'agit des classes de base du thérorème fort des graphes parfaits, à savoir les trigraphes bipartis, les line trigraphes et les trigraphes doublés) et les décompositions que nous allons utiliser, là encore il s'agit des décompositions utilisées pour la démonstration du théorème fort des graphes parfaits à savoir les 2-joints et les skew-partitions équilibrées. Comme mentionné précédemment les paires homogènes ne sont pas utiles et nous les définirons plus tard lorsque nous voudrons une version "extrême" du théorème de structure, c'est à dire un théorème de structure dans lequel à chaque étape de décomposition, un côté au moins de la décomposition est un trigraphe basique. Nous définissons ensuite la classe des trigraphes que nous allons étudier, les trigraphes de Berge bigames, il s'agit d'une généralisation des trigraphes monogames utilisés dans [8]. Dans les trigraphes monogames les arêtes optionnelles forment un couplage alors que dans

les trigraphes bigames on autorise sous certaines conditions des composantes de deux arêtes optionnelles. Nous devons alors étendre le théorème de décomposition des trigraphes de Berge monogames aux trigraphes de Berge bigames. Enfin, nous pourrons définir la sous-classe qui nous intéresse, à savoir les trigraphes de Berge apprivoisés et montrer qu'ils se comportent bien vis à vis des décompositions du théorème. En effet il est possible de les décomposer tout en gardant l'information utile de l'autre partie de la décomposition et en restant dans la sous-classe.

2.1 Définitions

Pour tout ensemble X, on note $\binom{X}{2}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de X de taille 2. Pour alléger les notations, un élément $\{u, v\}$ de $\binom{X}{2}$ sera également noté uv ou vu. Un *trigraphe* T est composé d'un ensemble fini $V(T)$, appelé l'*ensemble de sommet* de T et d'une application $\theta : \binom{V(T)}{2} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$, appelée *fonction d'adjacence*.

Deux sommets distincts de T sont dit *fortement adjacents* si $\theta(uv) = 1$, *fortement antiadjacents* si $\theta(uv) = -1$ et *semiadjacents* si $\theta(uv) = 0$. On dit que u et v sont *adjacents* s'ils sont fortement adjacents ou semiadjacents ; et qu'ils sont *antiadjacents*, s'ils sont fortement antiadjacents ou semiadjacents. Une *arête* (*antiarête*) est une paire de sommets adjacents (antiadjacents). Si u et v sont adjacents (antiadjacents), on dit également que u est *adjacent (antiadjacent) à* v, ou que u est un *voisin (antivoisin)* de v. De la même manière, si u et v sont fortement adjacents (fortement antiadjacents), alors u est un *voisin fort (antivoisin fort)* de v. On note $\mathcal{E}(T)$, l'ensemble de toutes les paires fortement adjacentes de T, $\overline{\mathcal{E}}(T)$ l'ensemble de toutes les paires fortement antiadjacentes de T et $\mathcal{E}^*(T)$ l'ensemble de toutes les paires semiadjacentes de T. Un trigraphe T peut être considéré comme un graphe si et seulement si $\mathcal{E}^*(T)$ est vide. Une paire $\{u, v\} \subseteq V(T)$ de sommets distincts est une *arête optionnelle* si $\theta(uv) = 0$, une *arête forte* si $\theta(uv) = 1$ et une *antiarête forte* si $\theta(uv) = -1$. Une arête uv (antiarête, arête forte, antiarête forte, arête optionnelle) est *entre* deux ensembles $A \subseteq V(T)$ et $B \subseteq V(T)$ si $u \in A$ et $v \in B$ ou si $u \in B$ et $v \in A$.

Soit T un trigraphe. Le *complément* de T est le trigraphe $\overline{T}$ avec le même ensemble de sommet $V(T)$ que T, et avec la fonction d'adjacence $\overline{\theta} = -\theta$. Pour $v \in V(T)$, on note $N(v)$ l'ensemble de tous les sommets de $V(T) \setminus \{v\}$ qui sont adjacents à v. Soit $A \subset V(T)$ et $b \in V(T) \setminus A$. On dit que b est *fortement complet* à A si b est fortement adjacent à tous les sommets de A ; b est *fortement*

anticomplet à A si b est fortement antiadjacent à tous les sommets de A ; b est *complet* à A si b est adjacent à tous les sommets de A ; et b est *anticomplet* à A si b est anticomplet à tous les sommets de A. Pour deux ensembles disjoints A, B de $V(T)$, B est *fortement complet (fortement anticomplet, complet, anticomplet)* à A si tous les sommets de B sont fortement complets (fortement anticomplets, complets, anticomplets) à A. Un ensemble de sommets $X \subseteq V(T)$ *domine (domine fortement)* T, si pour tout sommet $v \in V(T) \setminus X$ il existe $u \in X$, tel que v est adjacent (fortement adjacent) à u.

Une *clique* de T est un ensemble de sommets deux à deux adjacents. Une *clique forte* est un ensemble de sommets deux à deux fortement adjacents. Un *stable* est un ensemble de sommets deux à deux antiadjacents. Un *stable fort* est un ensemble de sommets deux à deux fortement antiadjacents. Remarquons qu'avec ces définitions une clique et un stable peuvent s'intersecter sur plusieurs sommets, dans ce cas l'intersection est composée uniquement d'arêtes optionnelles.

Pour $X \subseteq V(T)$, le trigraphe *induit par* T *sur* X (noté $T|X$) a X comme ensemble de sommets et θ restreinte sur $\binom{X}{2}$ comme fonction d'adjacence. L'isomorphisme entre deux trigraphes est défini de manière naturelle et pour deux trigraphes T et H, on dit que H est un *trigraphe induit* de T ou que T *contient* H *en tant que sous-trigraphe induit*, s'il existe $X \subseteq V(T)$, tel que H est isomorphe à $T|X$. Comme la relation de sous-graphe induit est la principale relation étudiée dans cette thèse, on dit également que T *contient* H si T contient H comme sous-trigraphe induit. On note $T \setminus X$ le trigraphe $T|(V(T) \setminus X)$.

Soit T un trigraphe. Un *chemin* P de T est une suite de sommets distincts $p_1, \ldots, p_k$ telle que ou bien $k = 1$, ou bien pour $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, p_i est adjacent à p_j, si $|i - j| = 1$ et p_i est antiadjacent à p_j si $|i - j| > 1$. Dans ce cas, $V(P) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ et on dit que P est un chemin *de* p_1 *à* p_k, son *intérieur* est l'ensemble $P^* = V(P) \setminus \{p_1, p_k\}$, et la taille de P est $k - 1$. Parfois on note P par p_1-$\cdots$-p_k. Notons que puisqu'un graphe est également un trigraphe, un chemin dans un graphe avec notre définition est plus généralement appelé dans la littérature un chemin sans corde.

Un *trou* dans un trigraphe T est un sous-trigraphe induit H de T sur un ensemble de sommets $h_1, \ldots, h_k$ avec $k \geq 4$, et pour $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, h_i est adjacent à h_j si $|i - j| = 1$ ou si $|i - j| = k - 1$; et h_i est antiadjacent à h_j si $1 < |i - j| < k - 1$. La *taille* d'un trou est égale au nombre de sommets qu'il contient. Parfois on note H par h_1-$\cdots$-h_k-h_1. Un *antichemin* (resp. *antitrou*) dans T est un sous-trigraphe induit de T dont le complément est un chemin (resp. trou) dans $\overline{T}$.

Une *semiréalisation* d'un trigraphe T est n'importe quel trigraphe T' sur l'ensemble de sommet $V(T)$ qui vérifie les propriétés suivantes : pour tout $uv \in \binom{V(T)}{2}$, si $uv \in \mathcal{E}(T)$ alors $uv \in \mathcal{E}(T')$, et si $uv \in \overline{\mathcal{E}}(T)$ alors $uv \in \overline{\mathcal{E}}(T')$. On peut voir une semiréalisation de T comme une *affectation* des arêtes optionnelles de T avec trois valeurs possibles : "arête forte", "antiarête forte" ou "arête optionnelle". Une *réalisation* de T est n'importe quel graphe qui est une semiréalisation de T (c'est à dire que toutes les arêtes optionnelles sont assignées aux valeurs "arête forte" ou "antiarête forte"). Pour $S \subseteq \mathcal{E}^*(T)$, on note par G_S^T la réalisation de T avec $\mathcal{E}(T) \cup S$ comme ensemble d'arêtes, c'est à dire que dans G_S^T les arêtes optionnelles de S sont assignées à la valeur "arête" et que celles de $\mathcal{E}^*(T) \setminus S$ sont assignées à la valeur "antiarête". La réalisation $G_{\mathcal{E}^*(T)}^T$ est appelée *réalisation complète* de T.

Soit T un trigraphe. Pour $X \subseteq V(T)$, on dit que X et $T|X$ sont *connexes* (resp. *anticonnexes*) si le graphe $G_{\mathcal{E}^*(T|X)}^{T|X}$ ($\overline{G_{\emptyset}^{T|X}}$) est connexe, c'est à dire qu'en remplaçant toute les arêtes optionnelles par des arêtes fortes (resp. antiarêtes fortes) le graphe obtenu est connexe (resp. le complémentaire du graphe obtenu est connexe). Une *composante connexe* (ou simplement une *composante*) de X est un sous-ensemble connexe maximal de X, et une *anticomposante connexe* (ou simplement une *anticomposante*) de X est un ensemble maximal anticonnexe de X.

L'idée des ces définitions est la suivante :

— une propriété est vraie sur un trigraphe T s'il existe un graphe G réalisation de T sur laquelle elle est vraie.
— une propriété *forte* est vraie sur un trigraphe T si pour tout graphe G réalisation de T elle est vraie.
— une antipropriété est vraie sur un trigraphe T si elle est vraie sur le complémentaire de T (les arêtes fortes deviennent des antiarêtes fortes et inversement).

Attention dans les sections suivantes, les trigraphes basiques et les décompositions sont implicitement fortes. En effet si on a besoin de pouvoir parler de trigraphe connexe (au sens faible), nous n'aurons jamais besoin de parler de trigraphe faiblement de Berge ou admettant un 2-joint faible. En effet comme mentionné dans lors des motivations des trigraphes, nous voulons qu'un trigraphe soit basique ou admette une décomposition si et seulement si c'est le cas pour toutes ses réalisations. De cette manière nous pourront transformer une obstruction dans le trigraphe contracté en une obstruction dans le trigraphe de départ.

2.2 Trigraphes basiques

Un trigraphe T est *de Berge*, s'il ne contient pas de trou impair ni d'antitrou impair. Par conséquent, un trigraphe est de Berge si et seulement si son complément l'est. Notons également que T est de Berge si et seulement si, toutes ses semiréalisations (réalisations) sont de Berge. Remarquons qu'un trigraphe sans arêtes optionnelles et en particulier toutes réalisations d'un trigraphe peuvent être vues comme un graphe, il est alors important de voir qu'être un trigraphe de Berge pour un trigraphe sans arêtes optionnelles est exactement être un graphe de Berge. Notre définition dans les trigraphes est bien une généralisation aux trigraphes de la définition usuelle dans les graphes.

Un trigraphe T est *biparti* si on peut partitionner son ensemble de sommets en deux stables forts. Toute réalisation d'un trigraphe biparti est un graphe biparti, et donc tout trigraphe biparti est de Berge. De la même manière, les compléments de trigraphes bipartis sont également de Berge. De même cette définition est bien une généralisation de la définition de biparti dans les graphes.

Un trigraphe T est un *line trigraphe*, si la réalisation complète de T est le line graphe d'un graphe biparti et que toute clique de taille au moins 3 dans T est une clique forte. L'énoncé suivant est un résultat simple sur les lines trigraphes. Ici encore un line trigraphe sans arêtes optionnelles est un line graphe de graphe biparti.

Lemme 2.1. *Si T est un line trigraphe, alors toute réalisation de T est le line graphe d'un graphe biparti. Et plus, toute semiréalisation de T est un line trigraphe.*

Démonstration. Par définition, la réalisation complète G de T est le line graphe d'un graphe biparti R. Soit $S \subseteq \mathcal{E}^*(T)$. Définissons R_S comme suit. Pour tout $xy \in \mathcal{E}^*(T) \setminus S$, soit v_{xy} l'extrémité commune de x et y dans R. Alors v_{xy} est de degré 2 dans R car toute clique de taille au moins 3 dans T est une clique forte. Soit a_{xy} et b_{xy} ses voisins. Supprimons v_{xy} de R et remplaçons le par deux nouveaux sommets, u_{xy}, w_{xy} tels que u_{xy} est seulement adjacent à a_{xy}, et w_{xy} est seulement adjacent à b_{xy}. Maintenant R_S est biparti et G_S^T est le line graphe de R_S. On a alors la première partie du résultat, la seconde suit car la réalisation complète d'une semiréalisation est une réalisation. □

Remarquons que cela implique que les line trigraphes ainsi que leurs compléments sont de Berge. Définissons maintenant les trigraphes semblables aux double

split graphes (défini pour la première fois dans [13]), c'est à dire les *trigraphes doublés*. Une *bonne partition* d'un trigraphe T est une partition (X, Y) de $V(T)$ (les cas $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$ ne sont pas exclus) telle que :

— Chaque composante de $T|X$ a au plus deux sommets, et chaque anticomposante de $T|Y$ a au plus deux sommets.
— Il n'y a pas d'arête optionnelle de T qui intersecte à la fois X et Y
— Pour toute composante C_x de $T|X$, toute anticomposante C_Y de $T|Y$ et tout sommet v dans $C_X \cup C_Y$, il existe au plus une arête forte et une antiarête forte entre C_X et C_Y qui est incidente à v.

Un trigraphe est *doublé* si et seulement s'il a une bonne partition. Les trigraphes doublés peuvent aussi être définis comme les sous-trigraphes induits des double split trigraphes (voir [9] pour une définition des double split trigraphes que nous n'utiliserons pas ici). Remarquons que les trigraphes doublés sont clos par sous-trigraphes induit et par complémentation (en effet (X, Y) est une bonne partition d'un trigraphe T si et seulement si (Y, X) est une bonne partition de $\overline{T}$). Un *graphe doublé* est n'importe quelle réalisation d'un trigraphe doublé. Nous montrons maintenant le résultat suivant :

Lemme 2.2. *Si T est un trigraphe doublé, alors toute réalisation de T est un graphe doublé. De plus, toute semiréalisation de T est aussi un graphe doublé.*

Démonstration. L'énoncé sur les réalisations est clair par définition. Soit T un trigraphe doublé, et (X, Y) une bonne partition de T. Soit T' une semiréalisation de T. Il est facile de voir que (X, Y) est aussi une bonne partition de T' (par exemple, si une arête optionnelle ab de $T|X$ est assignée à la valeur "antiarête", alors $\{a\}$ et $\{b\}$ deviennent des composantes de $T'|X$, mais ils vérifient toujours la définition d'une bonne partition). Ceci prouve le résultat sur les semiréalisations. □

Remarquons que ceci implique que tout trigraphe doublé est de Berge, car tout graphe doublé est de Berge.

Un trigraphe est *basique* si c'est, ou bien un trigraphe biparti, ou bien le complément d'un trigraphe biparti, ou bien un line trigraphe, ou bien le complément d'un line trigraphe ou bien un trigraphe doublé. Le résultat suivant résume les résultats de cette section et montre bien que nos classes basiques sont implicitement fortement basiques.

Lemme 2.3. *Les trigraphes basiques sont de Berge et sont clos par sous-trigraphe induit, semiréalisation, réalisation et complémentation.*

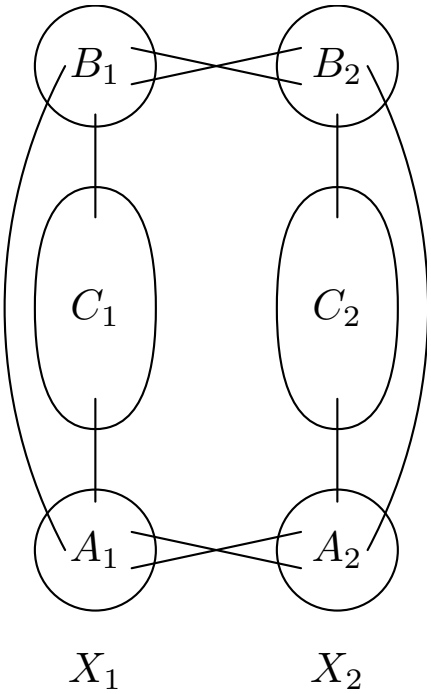

FIGURE 2.2 – 2-joint (Une double arête entre deux ensembles indique qu'ils sont complet, une arête simple indique qu'on ne sait rien sur leur adjacence, l'absence d'arête indique qu'il n'y a aucune arête entre les deux ensembles)

2.3 Décompositions

Nous pouvons maintenant décrire les décompositions dont nous aurons besoin afin d'énoncer notre théorème de décomposition. Pour commencer, un 2-*joint* dans un trigraphe T est une partition (X_1, X_2) de $V(T)$ telle qu'il existe des ensembles disjoints $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 \subseteq V(T)$ vérifiant :

— $X_1 = A_1 \cup B_1 \cup C_1$ et $X_2 = A_2 \cup B_2 \cup C_2$;
— A_1, A_2, B_1 et B_2 sont non-vides ;
— il n'y a pas d'arête optionnelle qui intersecte à la fois X_1 et X_2 ;
— tout sommet de A_1 est fortement adjacent à tous les sommets de A_2, et tout sommet de B_1 est fortement adjacent à tous les sommets de B_2 ;
— il n'y a pas d'autre arête forte entre X_1 et X_2 ;
— pour $i = 1, 2$ $|X_i| \geq 3$; et
— pour $i = 1, 2$, si $|A_i| = |B_i| = 1$, alors la réalisation complète de $T|X_i$ n'est pas un chemin de taille deux reliant les membres de A_i et ceux de B_i.

Remarquons bien qu'aucune arête importante (celles entre X_1 et X_2) pour la définition du 2-joint ne peut être une arête optionnelle. Ici aussi et sauf cas pathologique (X_i est un triangle d'arêtes optionelles ayant un sommet dans chaque ensemble A_i, B_i et C_i), le 2-joint est implicitement fort, dans tout graphe G réalisation de T, (X_1, X_2) est un 2-joint. Notons bien que dans les trigraphes de Berge ce cas pathologique ne peut pas apparaitre car il contredit le lemme 2.4 énoncé juste après. Nous aurions pu éviter ce problème en choisissant une définition plus forte du 2-joint, par exemple un 2-joint vérifiant par définition tous les points du théorème 2.9. Ce théorème prouve que dans le cas des trigraphes de Berge apprivoisés les 2-joints possèdent certaines conditions techniques supplémentaires que n'a pas ce cas pathologique. Cependant l'utilisation du théorème 2.5 qui est exactement le théorème 3.1 de [9] ne nous autorise pas à utiliser une définition adaptée aux trigraphes de Berge apprivoisés.

Dans ces conditions, on dit que $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ est une *affectation* de (X_1, X_2). Le 2-joint est *propre* si pour $i = 1, 2$, toute composante de $T|X_i$ intersecte à la fois A_i et B_i. Remarquons que le fait que le 2-joint soit propre ne dépend pas du choix de l'affectation.

Un *complément de 2-joint* d'un trigraphe T est un 2-joint de $\overline{T}$. Plus précisément, un *complément de 2-joint* d'un trigraphe T est une partition (X_1, X_2) de $V(T)$ telle que (X_1, X_2) est un 2-joint de $\overline{T}$; et $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ est une *affectation* de ce complément de 2-joint, si c'est une affectation du 2-joint correspondant dans le complément, i.e. A_1 est fortement complet à $B_2 \cup C_2$ et fortement anticomplet à A_2, C_1 est fortement complet à X_2, et B_1 est fortement complet à $A_2 \cup C_2$ et fortement anticomplet à B_2.

Lemme 2.4. *Soit T un trigraphe de Berge et $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation d'un 2-joint propre de T. Alors tous les chemins dont une extrémité est dans A_i, l'autre étant dans B_i et dont l'intérieur est dans C_i, pour $i = 1, 2$ ont des longueurs de même parité.*

Démonstration. Dans le cas contraire, pour $i = 1, 2$, soit P_i des chemins dont une extrémité est dans A_i, l'autre extrémité étant dans B_i et dont l'intérieur est dans C_i, tels que P_1 et P_2 ont des parités différentes. Ils forment un trou impair, c'est une contradiction. □

Notre deuxième décomposition est la skew-partition équilibrée. Soit A, B deux ensembles disjoints de $V(T)$. On dit que la paire (A, B) est *équilibrée* s'il n'y a pas de chemin impair de longueur strictement supérieure à 1 dont les extrémités

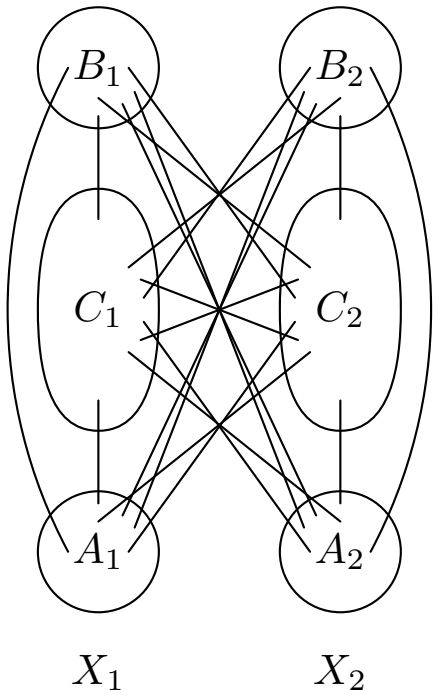

FIGURE 2.3 – Complèment de 2-joint (Une double arête entre deux ensembles indique qu'ils sont complet, une arête simple indique qu'on ne sait rien sur leur adjacence, l'absence d'arête indique qu'il n'y a aucune arête entre les deux ensembles)

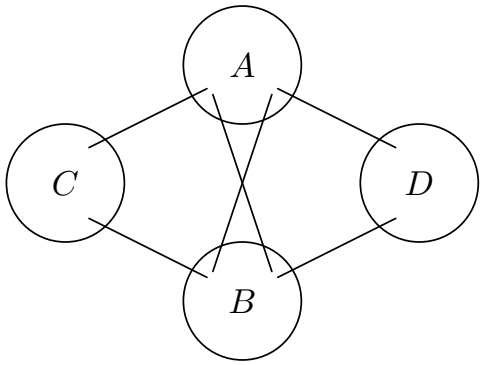

FIGURE 2.4 – Skew-partition (Une double arête entre deux ensembles indique qu'ils sont complet, l'absence d'arête indique qu'il n'y a aucune arête entre les deux ensembles)

sont dans B et dont l'intérieur est dans A et qu'il n'y a pas non plus d'antichemin de longueur strictement supérieure à 1 dont les extrémités sont dans A et dont l'intérieur est dans B. Une *skew-partition* est une partition (A, B) de $V(T)$ telle que A n'est pas connexe et B n'est pas anticonnexe. Une skew-partition (A, B) est *équilibrée* si la paire (A, B) l'est. Étant donné une skew-partition équilibrée (A, B), (A_1, A_2, B_1, B_2) est une *affectation de* (A, B) si A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des ensembles disjoints et non-vide, $A_1 \cup A_2 = A$, $B_1 \cup B_2 = B$, A_1 est fortement anticomplet à A_2, et B_1 est fortement complet à B_2. Remarquons que pour toute skew-partition équilibrée, il existe au moins une affectation.

Attention, l'adjectif "équilibrée" pourrait laisser penser que les tailles des deux parties sont comparables, ce n'est absolument pas le cas. Il est tout à fait possible qu'un des ensembles de l'affectation concentre presque tout le trigraphe, le reste ne comportant qu'un nombre fixe négligeable de sommets. C'est le problème majeur à l'élaboration d'algorithmes utilisant les skew-partitions équilibrées. Si nous étions assurés que chaque ensemble de l'affectation fût composé d'au moins une fraction du trigraphe, nos algorithmes pourraient alors s'étendre sur tous les graphes parfaits.

Ces deux décompositions généralisent les décompositions utilisées dans [13]. De plus toutes les arêtes et non-arêtes "importantes" dans ces décompositions doivent respectivement être des arêtes fortes et des antiarêtes fortes du trigraphe. Nos décompositions sont donc bien implicitement fortes. Nous pouvons maintenant énoncer plusieurs lemmes techniques.

Un trigraphe est dit *monogame* si tous ses sommets appartiennent à au plus une arête optionnelle. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de décomposition pour les trigraphes monogames de Berge. C'est le théorème 3.1 de [9].

Théorème 2.5. *Soit T un trigraphe monogame de Berge. Alors un des points suivants est vrai :*

- *T est basique ;*
- *T ou $\overline{T}$ admet un 2-joint propre ; ou*
- *T admet une skew-partition équilibrée.*

Si (A, B) est une skew-partition d'un trigraphe T, on dit que B est un *star cutset* de T si au moins une anticomposante de B a taille 1. L'énoncé suivant est le Théorème 5.9 de [8].

Lemme 2.6. *Si un trigraphe de Berge admet un star cutset, alors il admet une skew-partition équilibrée.*

On dit que X est un *ensemble homogène* d'un trigraphe T si $1 < |X| < |V(T)|$, et que tout sommet de $V(T) \setminus X$ est ou bien fortement complet ou bien fortement anticomplet à X.

Lemme 2.7. *Soit T un trigraphe et X un ensemble homogène de T, tel qu'il existe un sommet de $V(T) \setminus X$ fortement complet à X, et un sommet de $V(T) \setminus X$ fortement anticomplet à X. Alors T admet une skew-partition équilibrée.*

Démonstration. Soit A l'ensemble des sommets de $V(T) \setminus X$ qui sont fortement anticomplets à X, et C l'ensemble des sommets de $V(T) \setminus X$ qui sont fortement complets à X. Soit $x \in X$. Alors $C \cup \{x\}$ est un star cutset de T (puisque A est $X \setminus \{x\}$ sont non-vides et fortement anticomplets entre eux), et donc T admet une skew-partition équilibrée d'après le lemme 2.6. □

Nous aurons également besoin du résultat suivant (qui est un corollaire immédiat du théorème 5.13 de [8]) :

Lemme 2.8. *Soit T un trigraphe de Berge. Supposons qu'il y ait une partition de $V(T)$ en quatre ensembles non-vides X, Y, L, R, tels que L est fortement anticomplet à R, et X est fortement complet à Y. Si (L, Y) est équilibrée alors T admet une skew-partition équilibrée.*

2.4 Structure des trigraphes de Berge apprivoisés

Pour les besoins de nos inductions nous aurons besoin d'utiliser des trigraphes plus généraux que les trigraphes monogame. Nous allons donc définir les trigraphes bigame et montrer que le théorème de décomposition des trigraphes monogames de Berge s'étend sur les trigraphes bigames de Berge. Pour se familiariser avec notre objet d'étude principal, les trigraphes de Berge apprivoisés (définis dans la suite de ce paragraphe), nous allons commencer par montrer que dans ces trigraphes les 2-joints vérifient plusieurs conditions techniques supplémentaires.

Soit T un trigraphe, notons par $\Sigma(T)$ le graphe ayant $V(T)$ comme ensemble de sommets et $\mathcal{E}^*(T)$ (les arêtes optionnelles de T) comme ensemble d'arêtes. Les

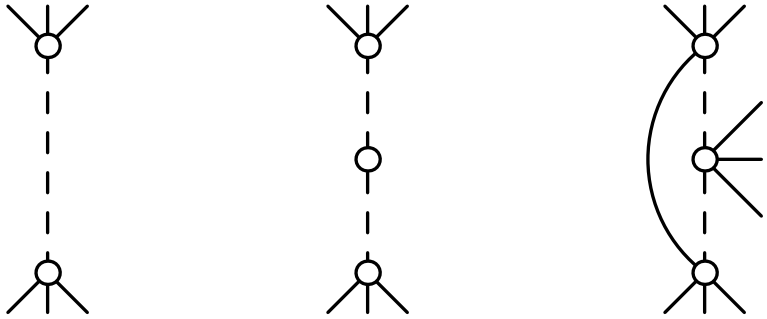

FIGURE 2.5 – Configuration possible des arêtes optionnelles dans les trigraphes bigame (les arêtes sont représentées par des traits pleins et les arêtes optionnelles par des pointillés)

composantes connexes de $\Sigma(T)$ sont appelées les *composantes optionnelles* de T. On dit qu'un trigraphe de Berge est *bigame* si les propriétés suivantes sont vérifiées :

— Chaque composante optionnelle de T a au plus deux arêtes (et donc aucun sommet n'a plus de deux voisins dans $\Sigma(T)$).

— Soit $v \in V(T)$ de degré deux dans $\Sigma(T)$, notons x et y ses voisins. Alors, ou bien v est fortement complet à $V(T) \setminus \{v, x, y\}$ dans T, et x est fortement adjacent à y dans T (dans ce cas on dit que v et la composante optionnelle qui contient v sont *lourds*) ou bien v est fortement anticomplet à $V(T) \setminus \{v, x, y\}$ dans T, et x est fortement antiadjacent à y dans T (dans ce cas on dit que v et la composante optionnelle qui contient v sont *légers*).

Remarquons qu'un trigraphe T est bigame si et seulement si $\overline{T}$ l'est aussi ; de plus v est léger dans T si et seulement si v est lourd dans $\overline{T}$.

On dit qu'un trigraphe de Berge est *apprivoisé* s'il est bigame et qu'il ne contient pas de skew-partition équilibrée.

On dit qu'un graphe de Berge est *apprivoisé* s'il ne contient pas de skew-partition équilibrée.

Théorème 2.9. *Soit T un trigraphe de Berge apprivoisé et soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation d'un 2-joint (X_1, X_2) dans T. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) (X_1, X_2) est un 2-joint propre ;

(ii) chaque sommet de X_i a un voisin dans X_i, $i = 1, 2$;

(iii) chaque sommet de A_i a un antivoisin dans B_i, $i = 1, 2$;

(iv) chaque sommet de B_i a un antivoisin dans A_i, $i = 1, 2$;

(v) *chaque sommet de* A_i *a un voisin dans* $C_i \cup B_i$, $i = 1, 2$ *;*

(vi) *chaque sommet de* B_i *a un voisin dans* $C_i \cup A_i$, $i = 1, 2$ *;*

(vii) *si* $C_i = \emptyset$, *alors* $|A_i| \geq 2$ *et* $|B_i| \geq 2$, $i = 1, 2$ *;*

(viii) $|X_i| \geq 4$, $i = 1, 2$.

Démonstration. Remarquons que d'après le lemme 2.6, ni T ni $\overline{T}$ ne peuvent contenir de star cutset.

Pour démontrer (i), nous devons simplement démontrer que toute composante de $T|X_i$ intersecte à la fois A_i et B_i, $i = 1, 2$. Supposons par contradiction qu'il y ait une composante connexe C de $T|X_1$ qui n'intersecte pas B_1 (les autres cas sont symétriques). S'il y a un sommet $c \in C \setminus A_1$ alors pour tout sommet $u \in A_2$, $\{u\} \cup A_1$ est un star cutset qui sépare c de B_1, c'est une contradiction. Donc $C \subseteq A_1$. Si $|A_1| \geq 2$ alors nous pouvons choisir deux sommets $c \in C$ et $c' \neq c$ dans A_1. Dans ce cas $\{c'\} \cup A_2$ est un star cutset qui sépare c de B_1. On a alors $C = A_1 = \{c\}$. Il existe donc une composante de $T|X_1$ qui n'intersecte pas A_1 et par le même argument on peut déduire que $B_1 = 1$ et que l'unique sommet de B_1 n'a pas de voisin dans X_1. Puisque $|X_1| \geq 3$, il existe un sommet u dans C_1. Maintenant, $\{c, a_2\}$ avec $a_2 \in A_2$ est un star cutset qui sépare u de B_1, c'est une contradiction.

Pour démontrer (ii), nous avons simplement à remarquer que si un sommet de X_i n'a pas de voisin dans X_i, alors il forme une composante de $T|X_i$ qui n'intersecte pas à la fois A_i et B_i. Ceci contredit (i).

Pour démontrer (iii) et (iv), considérons un sommet $a \in A_1$ fortement complet à B_1 (les autres cas sont symétriques). Si $A_1 \cup C_1 \neq \{a\}$ alors $B_1 \cup A_2 \cup \{a\}$ est un star cutset qui sépare $(A_1 \cup C_1) \setminus \{a\}$ de B_2. Donc $A_1 \cup C_1 = \{a\}$ et $|B_1| \geq 2$ car $|X_1| \geq 3$. Mais alors B_1 est un ensemble homogène, fortement complet à A_1 et fortement anticomplet à A_2 et donc T admet une skew-partition équilibrée d'après le lemme 2.7, c'est une contradiction.

Pour démontrer (v) et (vi), considérons un sommet $a \in A_1$ fortement anticomplet à $C_1 \cup B_1$ (les autres cas sont symétriques). D'après (ii), le sommet a a un voisin dans A_1, et donc $A_1 \neq \{a\}$. Dans ce cas $\{a\} \cup B_1 \cup C_1 \cup B_2 \cup C_2$ est un star cutset dans $\overline{T}$. C'est une contradiction.

Pour démontrer (vii), supposons que $C_1 = \emptyset$ et que $|A_1| = 1$ (les autres cas sont symétriques). D'après (iv) et (vi), et comme $C_1 = \emptyset$, A_1 est à la fois complet et anticomplet à B_1. Ceci implique que l'unique sommet de A_1 soit semiadjacent à tous les sommets de B_1 et donc puisque T est apprivoisé, $|B_1| \leq 2$. Puisque $|X_1| \geq 3$, $|B_1| = 2$ et comme T est apprivoisé, l'unique sommet de A_1 est ou bien

fortement complet ou bien fortement anticomplet à $V(T) \setminus (A_1 \cup B_1)$, c'est une contradiction car A_1 est fortement complet à A_2 et fortement anticomplet à B_2.

Pour démontrer (*viii*), nous pouvons supposer d'après (*vii*) que $C_1 \neq \emptyset$. Supposons donc par contradiction que $|A_1| = |C_1| = |B_1| = 1$. Soit a, b, c les sommets de respectivement A_1, B_1, C_1. D'après (*iii*), ab est une antiarête. De plus, c est adjacent au sommet a sinon il y aurait un star cutset centré en b qui séparerait a de c. Pour la même raison c est adjacent à b. Puisque la réalisation complète de $T|X_1$ n'est pas un chemin de longueur 2 allant de a à b, nous savons que ab est une arête optionnelle. Ceci contredit le lemme 2.4. □

Soit b un sommet de degré deux dans $\Sigma(T)$ et soit a, c les voisins de b dans $\Sigma(T)$. Supposons également que b soit léger. Nous appelons un sommet $w \in V(T) \setminus \{a, b, c\}$ un *a-appendice* de b s'il existe $u, v \in V(T) \setminus \{a, b, c\}$ tel que :

— a-u-v-w est un chemin ;
— u est fortement anticomplet à $V(T) \setminus \{a, v\}$;
— v est fortement anticomplet à $V(T) \setminus \{u, w\}$; et
— w n'a pas de voisin dans $\Sigma(T)$ à la possible exception de v (i.e. il n'y a pas d'arête optionnelle contenant w dans T à la possible exception de vw).

Un c-appendice est défini de la même manière. Si b est un sommet lourd de T, alors w est un a-appendice de b dans T si et seulement si w est un a-appendice de b dans $\overline{T}$.

Le résultat suivant est analogue au théorème 2.5 pour les trigraphes de Berge bigame.

Théorème 2.10. *Tout trigraphe de Berge bigame est ou bien basique, ou bien admet une skew-partition équilibrée, un 2-joint propre, ou un 2-joint propre dans son complément.*

Démonstration. Pour T un trigraphe de Berge bigame, notons $\tau(T)$ le nombre de sommets de degré deux dans $\Sigma(T)$. La démonstration est une induction sur $\tau(T)$. Si $\tau(T) = 0$, le résultat est direct à partir du théorème 2.5. Maintenant prenons T un trigraphe de Berge bigame et soit b un sommet de degré deux dans $\Sigma(T)$. Soient a, c les deux voisins de b dans $\Sigma(T)$. Quitte à passer au complément, on peut supposer que b est léger.

Soit T' le trigraphe obtenu à partir de T en rendant a fortement adjacent à b. Si b n'a pas de a-appendice, alors nous n'avons pas besoin d'effectuer plus de modifications ; prenons $W = \emptyset$. Dans le cas contraire, choisissons un a-appendice w

de b, et prenons u, v comme dans la définition des a-appendices ; prenons $V(T') = V(T) \setminus \{u, v\}$, $W = \{w\}$ et rendons a semiadjacent à w dans T'.

Si $W = \emptyset$ alors clairement T' est un trigraphe de Berge bigame et $\tau(T) > \tau(T')$. Supposons que $W \neq \emptyset$. Si $t \in V(T')$ est adjacent à a et à w, alors a-u-v-w-t est un trou impair dans T. Par conséquent aucun sommet de T' n'est adjacent à la fois à a et à w. En particulier, il n'y a pas d'antitrou impair de taille au moins 7 dans T' qui passe par a et par w. Comme il n'y a pas de trou impair qui passe par a et par w, T' est un trigraphe de Berge bigame. De plus $\tau(T) > \tau(T')$ (nous rappelons que dans $\Sigma(T)$, v est l'unique voisin potentiel de w et b est l'unique voisin potentiel de a).

Par induction, une des conséquences du théorème 2.10 est vraie pour T'. Nous considérons les cas suivants et montrons que pour chacun d'entre eux, une des conséquences du théorème 2.10 est vraie pour T.

Cas 1 : T' est basique.

Supposons d'abord que T' est biparti. Nous affirmons que T est biparti. Soit $V(T') = X \cup Y$ où X et Y sont des stables forts disjoints. L'affirmation est claire si b n'a pas de a-appendice, on peut donc supposer que $W = \{w\}$. On peut supposer que $a \in X$; alors $w \in Y$. Dans ce cas $X \cup \{v\}$ et $Y \cup \{u\}$ sont des stables forts de T d'union $V(T)$ et donc T est biparti.

Supposons que T' est un line trigraphe. Observons pour commencer qu'aucune clique de taille au moins trois dans T ne contient u, v ou b. Donc si $W = \emptyset$, il est clair que T est un line trigraphe. Nous pouvons donc supposer que $W \neq \emptyset$. Remarquons que la réalisation complète de T est obtenue à partir de la réalisation complète de T' en subdivisant deux fois l'arête aw. Puisque aucun sommet de T' n'est adjacent à la fois à a et à w, T est un line trigraphe (car les line graphes sont clos par subdivision d'arêtes n'ayant pas d'extrémité commune, et que les line graphes de graphes bipartis sont clos par double subdivision de telles arêtes).

Supposons que $\overline{T'}$ soit biparti et prenons X, Y une partition de $V(T)$ en deux cliques fortes de T'. On peut supposer que $a \in X$. Supposons pour commencer que $b \in Y$. Puisque a est l'unique voisin fort de b dans T', $Y = \{b\}$ et donc X contient a et c, c'est une contradiction. Par conséquent on peut supposer que $b \in X$. Puisque a est l'unique voisin fort de b dans T', $X = \{a, b\}$ et b est fortement anticomplet à $Y \setminus \{c\}$. Soit N l'ensemble des voisins forts de a dans $Y \setminus \{c\}$ et M l'ensemble des antivoisins forts de a dans $Y \setminus \{c\}$. Puisque T est un trigraphe de Berge bigame, $Y = N \cup M \cup W \cup \{c\}$. Si $|N| > 1$ ou $|M| > 1$, alors d'après le lemme 2.7 T admet une skew-partition équilibrée. On peut donc supposer que $|N| \leq 1$ et que $|M| \leq 1$. Puisqu'aucun sommet de T' n'est adjacent à la fois à a et

à w, $|N \cup W| \leq 1$. Maintenant si $M = \emptyset$ ou que $N \cup W = \emptyset$, alors T' est biparti et nous pouvons procéder comme ci-dessus. Sinon $N \cup W \cup \{c\}$ est un clique cutset de T' de taille 2 qui est un star cutset de T et donc d'après le lemme 2.6 T admet une skew-partition équilibrée.

Supposons maintenant que $\overline{T'}$ est un line trigraphe. Puisque bc est une arête optionnelle dans T' et que b est fortement anticomplet à $V(T') \setminus \{a, b, c\}$, c est fortement complet à $V(T') \setminus \{a, b, c\}$ sinon il y aurait dans $\overline{T'}$ une clique de taille 3 avec une arête optionnelle. Puisque $\overline{T'}$ est un line trigraphe, pour tout triangle S de T' et tout sommet $v \in V(T') \setminus S$, v a au moins un voisin fort dans S. Si $x, y \in V(T') \setminus \{a, b, c\}$ sont adjacents, alors $\{x, y, c\}$ est un triangle et b n'a pas de voisin fort à l'intérieur. Par conséquent, $V(T') \setminus \{a, b, c\}$ est un stable fort. Maintenant $V(T') \setminus \{a, c\}, \{a, c\}$ forme une partition de $V(T')$ en deux stables forts de T'. T' est donc biparti et nous pouvons procéder comme ci-dessus.

Finalement, supposons que T' est un trigraphe doublé et prenons (X, Y) une bonne partition de T'. Si $T'|Y$ est vide ou n'a qu'une unique anticomposante, alors T' est biparti. Nous pouvons donc supposer que Y contient deux sommets fortement adjacents x et x'. S'il existe $y \neq x$ et $y' \neq x'$, tels que $\{x, y\}$ et $\{x', y'\}$ soient des anticomposantes de $T'|Y$, alors tout sommet de T' a au moins deux voisins forts, c'est une contradiction à cause de b. Ceci implique que par exemple $\{x\}$ est une anticomposante de $T'|Y$. Si $T'|X$ est connexe ou vide, alors T' est le complément d'un trigraphe biparti. On peut donc supposer que $T'|X$ a au moins deux composantes. Dans ce cas, Y est un star cutset de T' centré en x. Ce cas est le prochain cas traité.

Cas 2 : T' admets une skew-partition équilibrée.

Soit (A, B) une skew-partition équilibrée de T'. Si $W \neq \emptyset$, prenons $A' = A \cup \{u, v\}$; et si $W = \emptyset$ prenons $A' = A$. Dans tous les cas, $T|A'$ n'est pas connecté. Nous allons montrer que si une anticomposante Y de B n'intersecte pas $\{a, b\}$, alors T admet une skew-partition équilibrée. Puisque a est complet à W dans T', il existe une composante L de A qui n'intersecte pas $\{a, b\}$ et donc L est aussi une composante de A'. Sans perte de généralité, on peut supposer que Y est disjoint de W (c'est clair dans le cas où $B \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ et si $B \cap \{a, b\} = \emptyset$ on peut sans perte de généralité supposer que $Y \cap W = \emptyset$). Maintenant, dans T, Y est fortement complet à $B \setminus Y$, L est fortement anticomplet à $A' \setminus L$ et donc A', B' est une skew-partition de T et $(L \cup Y) \cap (\{a, b\} \cup W \cup (A' \setminus A)) \subseteq \{b\}$. Puisque A, B est une skew-partition équilibrée de T', la paire (L, Y) est équilibrée dans T. Par conséquent le lemme 2.8 implique que T admet une skew-partition équilibrée.

Nous pouvons donc supposer qu'il n'y a pas de tel ensemble Y et donc $T'|B$ a

exactement deux anticomposantes, B_1 et B_2, de plus $a \in B_1$ et $b \in B_2$. Puisque a est l'unique voisin fort de b dans T', $B_1 = \{a\}$. Puisque a est anticomplet à $W \cup \{c\}$, nous pouvons en déduire que $W \cup \{c\} \subseteq A'$. Soit A_1 la composante de $T|A'$ contenant c et $A_1 = A' \setminus A_1$. Supposons que a n'ait pas de voisin fort dans T. Dans ce cas $B_2 = \{b\}$ et puisque T est un trigraphe de Berge bigame, a est fortement anticomplet à A'. Nous pouvons supposer que T n'est pas biparti, car sinon nous aurions déjà le résultat. T contient donc un trou impair C, qui doit être dans A_1 ou dans A_2 (en effet $\{a, b\}$ est fortement complet à A'). Puisque T est un trigraphe de Berge bigame, C contient au moins une arête forte xy. Dans ce cas $\{x, y\}$ est un star cutset dans T qui sépare $\{a, b\}$ d'un sommet de A_2. D'après le lemme 2.6, T a une skew-partition équilibrée. Nous pouvons donc supposer que le sommet a a au moins un voisin fort dans T.

Soit $x \in A_2$. Notons N l'ensemble des voisins forts de a dans T. Alors $(N \cup \{a\}) \setminus \{x\}$ est un star cutset dans T séparant b de x à moins que x soit l'unique voisin fort de a. Dans ce cas $\{a, x\}$ est un star cutset séparant A_1 de $A_2 \setminus \{x\}$, à moins que $A_2 = \{x\}$. Supposons alors que c ait un voisin y (dans ce cas c'est un voisin fort car T est un trigraphe de Berge bigame). Alors $\{c, y\}$ est un star cutset séparant $A_1 \setminus \{c, y\}$ de x, à moins que $A_1 = \{c, y\}$ mais dans ce cas T est biparti. Supposons donc que c n'ait pas de voisin dans A_1. Si T n'est pas biparti, il contient un trou impair, dans ce cas ce trou est dans A_1 et n'importe quelle arête forte (qui existe puisque T est un trigraphe de Berge bigame) forme un star cutset séparant c du reste du trou. D'après le lemme 2.6, T a une skew-partition équilibrée.

Cas 3 : T' admet un 2-joint propre.

Soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation d'un 2-joint propre de T'. Supposons que $a \in A_1 \cup B_1 \cup C_1$. Alors $W \subseteq A_1 \cup B_1 \cup C_1$. Si $W \neq \emptyset$ prenons $C_1' = C_1 \cup \{u, v\}$, et sinon prenons $C_1' = C_1$. On peut supposer que $(A_1, B_1, C_1', A_2, B_2, C_2)$ n'est pas un 2-joint propre de T et donc sans perte de généralité $a \in A_1$ et $b \in A_2$. Alors $c \in B_2 \cup C_2$. Puisque a est l'unique voisin fort de b dans T', $A_1 = \{a\}$. D'après le cas 2, on peut supposer que T' n'admet pas de skew-partition équilibré et donc le lemme 2.9 implique que a est anticomplet à B_1. Remarquons que puisque T est un trigraphe de Berge bigame, ab est la seule arête optionnelle dans T contenant le sommet a. Soit N l'ensemble des voisins forts de a dans C_1' dans T. D'après les définitions du 2-joint propre, $N \neq \emptyset$. On peut supposer que T n'admet pas de skew-partition équilibrée et donc d'après le lemme 2.9, tout 2-joint de T est propre. Dans ce cas, ou bien $(N, B_1, C_1' \setminus N, \{a\}, B_2, C_2 \cup A_2)$ est une affectation d'un 2-joint propre de T, ou bien $|N| = |B_1| = 1$ et la réalisation complète de $T|(C_1' \cup B_1)$ est un chemin de longueur deux entres N et B_1. Notons

n-n'-b_1 ce chemin avec $n \in N$ et $b_1 \in B_1$. Puisque b_1 n'a pas de voisin dans $\Sigma(T)$ à l'exception possible de n', b_1 est un a-appendice de b. En particulier, $W \neq \emptyset$. Puisque $W \subseteq B_1 \cup C_1$, $w = b_1$, $u = n$ et $v = n'$. Dans ce cas $|A_1 \cup B_1 \cup C_1| = 2$, ce qui contredit le fait que $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ soit l'affectation d'un 2-joint propre de T'.

Cas 4 : $\overline{(T')}$ admet un 2-joint propre.

Soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$, une affectation d'un 2-joint dans $\overline{T'}$. Commençons par supposer que $W \neq \emptyset$. Alors on peut supposer que $a, w \in A_1 \cup B_1 \cup C_1$. Puisqu'aucun sommet de T' est adjacent à la fois à a et à w, on peut supposer sans perte de généralité que $a \in A_1$, $w \in B_1$ et $C_2 = \emptyset$. Puisque a est l'unique voisin fort de b dans T', $b \in B_2$ et $C_1 = \emptyset$. Dans ce cas $(A_1, B_1, \emptyset, B_2, A_2, \emptyset)$ est une affectation d'un 2-joint de T'. D'après le deuxième cas, on peut supposer que T' n'admet pas de skew-partition équilibrée et donc ce 2-joint est propre d'après le lemme 2.9. Nous pouvons alors procéder comme dans le cas précédent. Supposons donc que $W = \emptyset$.

On peut supposer que $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ n'est pas une affectation d'un 2-joint propre de $\overline{T}$, par conséquent et sans perte de généralité, $a \in A_1 \cup B_1 \cup C_1$, et $b \in A_2 \cup B_2 \cup C_2$. Puisque a est l'unique voisin fort de b dans T' et puisque A_1, B_1 sont tous les deux non-vides, $b \notin C_2$, et on peut alors supposer que $b \in B_2$. Puisque $A_1 \neq \emptyset$, $C_1 = \emptyset$ et $A_1 = \{a\}$. Puisque $|A_1 \cup B_1 \cup C_1| \geq 3$, $|B_1| \geq 2$. De plus c est fortement antiadjacent à a et semiadjacent à b dans T, on peut donc en déduire que $c \in A_2$. Maintenant, si le sommet a a un voisin x dans B_1 dans le trigraphe T (c'est alors un voisin fort), alors $\{x, a\} \cup A_2 \cup C_2$ est un star cutset dans T, et si a est fortement anticomplet à B_1 dans T, d'après la définition du 2-joint propre, B_1 est un ensemble homogène dans T. Dans tous les cas, d'après le lemme 2.6 ou le lemme 2.7, T admet une skew-partition équilibrée. □

2.5 Blocs de décomposition

La manière d'utiliser les décompositions dans les chapitres suivantes nous demande de construire des blocs de décompositions et de récursivement poser plusieurs questions sur ces blocs. Pour pouvoir faire cela, nous devons nous assurer que les blocs de décompositions sont toujours dans notre classe de graphes.

Un ensemble $X \subseteq V(T)$ est un *fragment* d'un trigraphe T si une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $(X, V(T) \setminus X)$ est un 2-joint propre de T ;

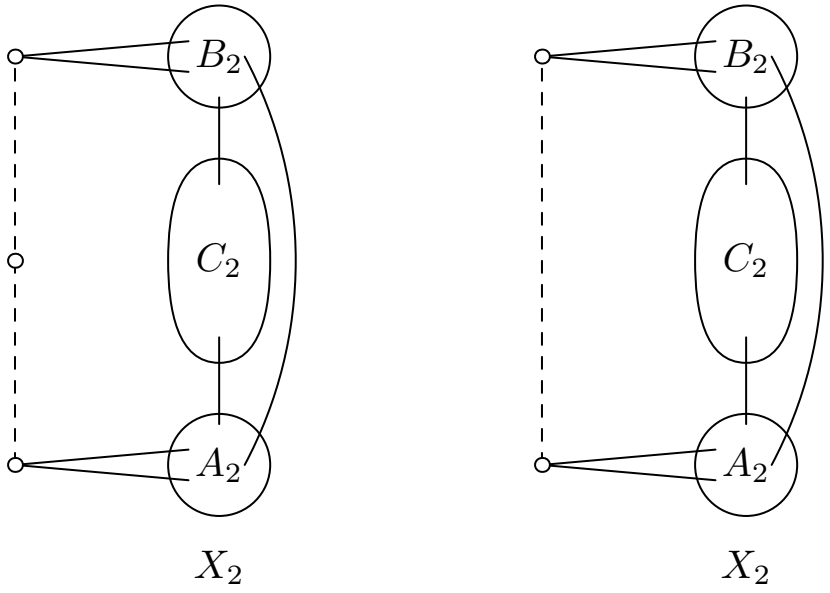

FIGURE 2.6 – Blocs de décomposition : 2-joint

2. $(X, V(T) \setminus X)$ est un complément de 2-joint propre de T.

Remarquons qu'un fragment de T est un fragment de $\overline{T}$. Nous pouvons maintenant définir le *bloc de décomposition* T_X associé à un fragment X. Un 2-joint est *pair* ou *impair* suivant la parité des longueurs des chemins décrits par le lemme 2.4.

Si (X_1, X_2) est un 2-joint propre impair et si $X = X_1$, alors prenons $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2). Nous construisons alors le bloc de décomposition $T_{X_1} = T_X$ comme suit. Nous partons de $T|(A_1 \cup B_1 \cup C_1)$. Nous ajoutons ensuite deux *sommets marqués* a et b, tels que a est fortement complet à A_1, b est fortement complet à B_1, ab est une arête optionnelle et il n'y a aucune autre arête entre $\{a, b\}$ et X_1. Remarquons que $\{a, b\}$ est une composante optionnelle de T_X. Nous l'appelons la *composante marquée* de T_X.

Si (X_1, X_2) est un 2-joint propre pair et si $X = X_1$, alors prenons $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2). Nous construisons alors le bloc de décomposition $T_{X_1} = T_X$ comme suit. Nous partons de $T|(A_1 \cup B_1 \cup C_1)$. Nous ajoutons ensuite trois *sommets marqués* a, b et c, tels que a est fortement complet à A_1, b est fortement complet à B_1, ac et cb sont deux arêtes optionnelles et il n'y a aucune autre arête entre $\{a, b, c\}$ et X_1. À nouveau nous appelons $\{a, b, c\}$ la *composante marquée* de T_X.

Si (X_1, X_2) est le complément d'un 2-joint propre impair et si $X = X_1$, alors prenons $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2). Nous construi-

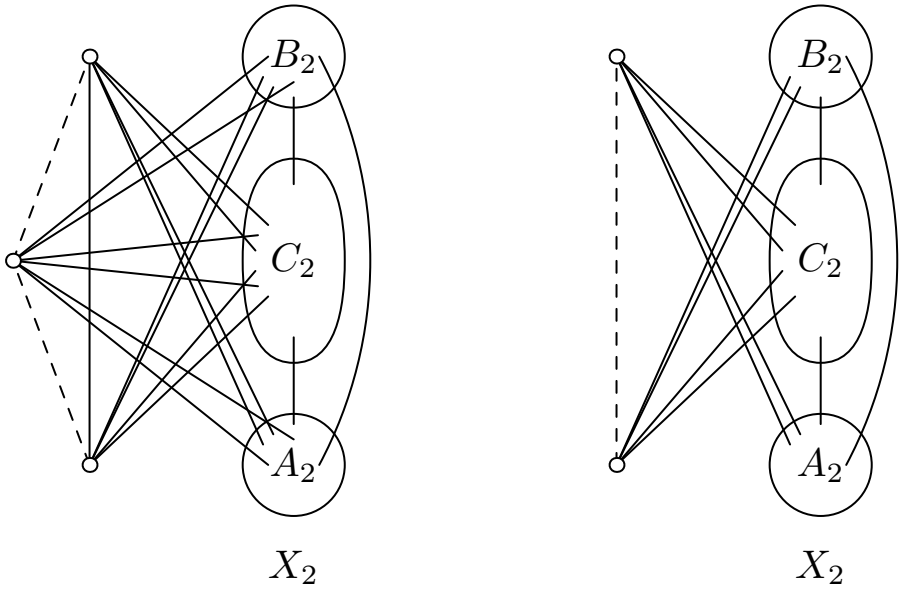

FIGURE 2.7 – Blocs de décomposition : Complément de 2-joint

sons alors le bloc de décomposition $T_{X_1} = T_X$ comme suit. Nous partons de $T|(A_1 \cup B_1 \cup C_1)$. Nous ajoutons ensuite deux *sommets marqués* a et b, tels que a est fortement complet à $B_1 \cup C_1$, b est fortement complet à $A_1 \cup C_1$, ab est une arête optionnelle et il n'y a aucune autre arête entre $\{a, b\}$ et X_1. À nouveau nous appelons $\{a, b\}$ la *composante marquée* de T_X.

Si (X_1, X_2) est le complément d'un 2-joint propre pair et si $X = X_1$, alors prenons $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2). Nous construisons alors le bloc de décomposition $T_{X_1} = T_X$ comme suit. Nous partons de $T|(A_1 \cup B_1 \cup C_1)$. Nous ajoutons ensuite trois *sommets marqués* a, b et c, tels que a est fortement complet à $B_1 \cup C_1$, b est fortement complet à $A_1 \cup C_1$, ac et cb sont deux arêtes optionnelles, ab est une arête forte et il n'y a aucune autre arête entre $\{a, b, c\}$ et X_1. À nouveau nous appelons $\{a, b, c\}$ la *composante marquée* de T_X.

Lemme 2.11. *Si X est un fragment d'un trigraphe T de Berge bigame, alors T_X est un trigraphe de Berge bigame.*

Démonstration. Par définition de T_X, il est clair que tout sommet de T_X est ou bien dans au plus une arête optionnelle, ou bien est lourd, ou bien est léger, T_X est donc bien un trigraphe bigame. Il reste juste à démontrer que T_X est de Berge.

Soit $X = X_1$ et (X_1, X_2) un 2-joint propre de T. Soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2).

Commençons par supposer que T_{X_1} a un trou impair $H = h_1\text{-}\cdots\text{-}h_k\text{-}h_1$. Notons Z_{X_1} l'ensemble des sommets marqués de T_{X_1}. Supposons que les sommets de Z_{X_1} soient consécutifs dans H, alors $H \setminus Z_{X_1}$ est un chemin P dont une extrémité est dans A_1, l'autre dans B_1 et dont l'intérieur est dans C_1. Un trou de T est obtenu en ajoutant à P un chemin dont une extrémité est dans A_2, dont l'autre extrémité est dans B_2 et dont l'intérieur est dans C_2. D'après le lemme 2.4 ce trou est impair, c'est une contradiction. Dans ce cas les sommets marqués ne sont pas consécutifs dans H, et puisque c n'a pas de voisin dans $V(T) \setminus \{a, b, c\}$, on peut en déduire que $c \notin V(H)$. Maintenant, un trou de même longueur que H peut être obtenu dans T en remplaçant si besoin a et/ou b par des sommets $a_2 \in A_2$ et $b_2 \in B_2$, choisi pour être antiadjacent (ce qui est possible d'après le lemme 2.9).

Supposons alors que T_{X_1} ait un antitrou impair $H = h_1\text{-}\cdots\text{-}h_k\text{-}h_1$. Puisqu'un antitrou de longueur 5 est également un trou, on peut supposer que H est de longueur au moins 7. Donc dans H, toute paire de sommets à un voisin commun. Il y a donc au plus un sommet parmi a, b, c qui est dans H, et à cause de son degré, c ne peut pas être dans H. Un antitrou de même longueur que H peut être obtenu dans T en remplaçant si besoin a ou b par un sommet $a_2 \in A_2$ ou $b_2 \in B_2$, encore une fois c'est une contradiction.

Remarquons que les cas où T a un complément de 2-joint sont traités par complémentation. □

Lemme 2.12. *Si X est un fragment d'un trigraphe T de Berge apprivoisé, alors le bloc de décomposition T_X n'a pas de skew-partition équilibrée.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat commençons par supposer que T_X ait une skew-partition équilibrée (A', B') et notons (A'_1, A'_2, B'_1, B'_2) une affectation de cette skew-partition. Cherchons maintenant une skew-partition dans T. Nous utiliserons le lemme 2.8 pour démontrer qu'il existe alors une skew-partition équilibrée dans T. Le résultat sera alors vrai par contradiction.

Soit $X = X_1$ et (X_1, X_2) un 2-joint propre de T. Soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2).

Puisque les sommets marqués dans T_X, a et b n'ont pas de voisin fort commun et que c n'a pas de voisin fort, il y a, à symétrie près, deux cas : $a \in A'_1$ et $b \in A'_1$, ou $a \in A'_1$ et $b \in B'_1$. Remarquons que lorsque (X_1, X_2) est pair, le sommet marqué c doit être dans A'_1 car il est adjacent au sommet a et n'a pas de voisin fort.

Commençons par supposer que les sommets a et b sont tous les deux dans A'_1. Dans ce cas $(X_2 \cup A'_1 \setminus \{a, b, c\}, A'_2, B'_1, B'_2)$ est une affectation d'une skew-

partition (A, B) dans T. La paire (A'_2, B'_1) est équilibrée dans T car elle l'est dans T_X. Donc d'après le lemme 2.8, T admets une skew-partition équilibrée, c'est une contradiction.

Les sommets a et b ne sont donc pas tous les deux dans A'_1 et donc $a \in A'_1$ et $b \in B'_1$. Dans ce cas, $(A_2 \cup C_2 \cup A'_1 \setminus \{a, c\}, A'_2, B_2 \cup B'_1 \setminus \{b\}, B'_2)$ est une affectation d'une skew-partition (A, B) dans T. La paire (A'_2, B'_2) est équilibrée dans T car elle l'est dans T_X. Donc d'après le lemme 2.8, T admet une skew-partition équilibrée, c'est une contradiction.

Le cas où T admet un complément de 2-joint se prouve par complémentation. $\square$

Nous avons dans ce chapitre introduit toutes les notions de base qui vont nous être utiles dans les chapitres suivants. Les résultats les plus importants sont le théorème 2.10 et les lemmes 2.11 et 2.12 qui nous permettent de dire que les trigraphes de Berge apprivoisés se décomposent par 2-joint et complémentaire de 2-joint et que les blocs construits restent dans la classe. Ces résultats sont la base des trois chapitres suivants dans lesquels nous allons pouvoir prouver divers résultats sur la classe en décomposant nos graphes puis en appliquant une induction.

Enfin, notons que les graphes de Berge sans skew-partition forment une sous-classe stricte des graphes de Berge. La figure 2.8 montre un graphe qui, si l'on se restreint à notre ensemble de décomposition, n'est décomposable que par skew-partition. Dans ce graphe, les arêtes de couleurs vont vers tous les sommets de possédant la même couleur.

Un résultat important serait d'arriver, en étendant l'ensemble des décompositions autorisées, à se débarrasser des skew-partitions.

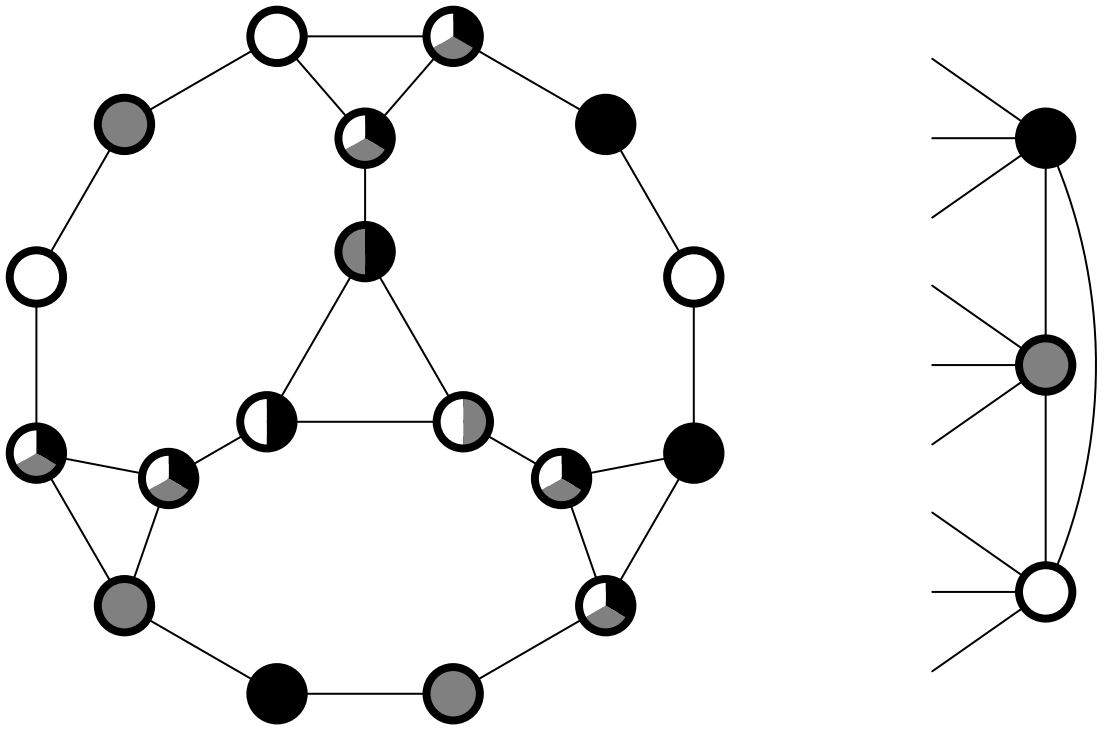

FIGURE 2.8 – Un graphe de Berge décomposable uniquement par skew-partition

Chapitre 3

Propriété du grand biparti

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec Aurélie Lagoutte, ils font l'objet d'un article [26] soumis à Discrete Mathematics.

Une des propriétés les plus simples à obtenir à l'aide d'une décomposition par 2-joints est celle du grand biparti. On dit qu'un graphe G d'ordre n a la *c-propriété du grand biparti*, s'il existe deux ensembles de sommets $V_1 \subseteq V$ et $V_2 \subseteq V$, tels que $|V_1| \geq c\dot{n}$, $|V_2| \geq c\dot{n}$ et que V_1 soit ou bien complet, ou bien anticomplet à V_2. On dit qu'une classe de graphes $\mathcal{C}$ a la propriété du grand biparti s'il existe une constante c, telle que tout graphe $G \in \mathcal{C}$ d'ordre n a la c-propriété du grand biparti. Cette propriété est appelée propriété d'Erdős Hajnal forte dans [22].

Par exemple, pour tout entier k, les graphes sans P_k, ni $\overline{P_k}$ induit ont la propriété du grand biparti [5]. Cette propriété est intéressante car dans le cas des classes de graphes définies par un unique sous-graphe induit H interdit, elle implique la *propriété d'Erdős-Hajnal* [3, 22]. C'est à dire qu'il existe une constante δ_H qui dépend de H, telle que tout graphe G de la classe contient une clique ou un stable de taille $|V(G)^{\delta_H}|$. Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Tout graphe de Berge sans skew-partition équilibrée a la propriété du* $(1/148)$*-grand biparti.*

Ce résultat n'implique pas la propriété d'Erdős-Hajnal, puisque la classe des graphes de Berge apprivoisés n'est pas close par sous-graphe induit, en effet la suppression de sommets peut créer des skew-partitions équilibrées. Cependant, il est facile de voir que la propriété d'Erdős-Hajnal est une conséquence directe

du théorème fort des graphes parfaits. En effet, pour tout graphe G, $|V(G)| \leq \chi(G)\alpha(G)$ et par perfection des graphes de Berge $\chi(G) = \omega(G)$, on sait donc que pour tout graphe de Berge G $|V(G)| \leq \omega(G)\alpha(G)$ donc pour tout graphe de Berge, ou bien $\omega(G) \geq \sqrt{|V(G)|}$ ou bien $\alpha(G) \geq \sqrt{|V(G)|}$. En fait nous n'avons même pas besoin du théorème fort des graphes parfaits, il suffit d'avoir l'inégalité $|V(G)| \leq \omega(G)\alpha(G)$, prouvée dès 1972 par Lovász [28].

Le théorème 3.1 est dans un certain sens un résultat négatif, en effet les graphes de Berge n'ont en général pas la propriété du grand biparti. Interdire les skew-partitions donne donc une classe sensiblement plus petite. Comme l'a observé Seymour [34], les graphes de comparabilité non triviaux (ici qui ne sont ni des cliques, ni des graphes bipartis) ont tous une skew-partition. En fait Chvátal à démontré [16] que les graphes parfaitement ordonables, c'est à dire une super classe des graphes de comparabilité sont, ou bien biparti, ou bien admettent un star-cutset dans leur complémentaire. Les graphes de comparabilité étant des graphes de Berge, c'est une des classes les plus intéressantes à regarder pour comprendre les restrictions posées par l'interdiction des skew-partitions équilibrées.

Le résultat suivant est le théorème 2 de [21].

Théorème 3.2. *Soit $\varepsilon \in (0,1)$. Pour tout entier n suffisamment grand, il existe un ordre partiel P sur n éléments tel qu'aucun élément de P n'est comparable à n^{ε} autres éléments de P et pour tout $A, B \subset P$ tels que $|A| = |B| > \frac{14n}{\varepsilon \log_2 n}$, il y a un élément de A comparable à un élément de B.*

En prenant les graphes de comparabilité des ordres partiels fournis par ce théorème, nous avons une classe de graphes parfaits qui n'a pas la propriété du grand biparti. À partir d'un ordre partiel, on construit son graphe de comparabilité de la manière suivante, les sommets sont les éléments de l'ordre et il y un arête entre deux sommets si et seulement si les éléments qu'ils représentent sont comparables dans l'ordre partiel.

Le but de ce chapitre est de montrer que les graphes de Berge apprivoisés ont la propriété du grand biparti. Pour cela nous allons généraliser le problème aux trigraphes de Berge apprivoisés. Commençons par étendre la définition. Nous verrons ensuite comment généraliser ce résultat aux classes construites par k-joints généralisés.

3.1 Grand biparti dans les trigraphes de Berge apprivoisés

Soit une constante $0 < c < 1$, un trigraphe T sur n sommet a la *c-propriété du grand biparti* s'il existe $V_1, V_2 \subseteq V(T)$ tels que $|V_1|, |V_2| \geq c\dot{n}$ et que V_1 est fortement complet ou anticomplet à V_2. Il est immédiat de voir que pour les trigraphes sans arêtes optionnelles, la définition coïncide avec celle sur les graphes. Une autre remarque importante est que la propriété du grand biparti est une propriété auto-complémentaire : un trigraphe T a la propriété du grand biparti si et seulement si son complémentaire $\overline{T}$ a aussi la propriété du grand biparti. Nous rappelons qu'être un trigraphe de Berge apprivoisé est aussi une propriété auto-complémentaire. Lors de nos inductions nous pouvons donc ramener le cas des complémentaires de 2-joints au cas des 2-joints.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.3. *Soit T un trigraphe de Berge apprivoisé, tel que $n = |V(T)| \geq 3$. Alors T a la $(1/148)$-propriété du grand biparti.*

Pour les besoins de l'induction nous devons encore étendre notre problème aux trigraphes de Berge apprivoisés *pondérés*. Dans la suite, on associe à tout trigraphe T une fonction de poids $w : V(T) \cup \mathcal{E}^*(T) \to \mathbb{N}$, telle que $w(v) > 0$ pour $v \in V(T)$ et que toute arête optionnelle de poids non nul soit étiquetée avec "2-joint" ou "complément 2-joint". Pour tout sous-ensemble $V' \subseteq V(T)$, on note $w(V') = \sum_{v \in V'} w(v) + \sum_{u,v \in V'} w(uv)$. Avec ces notations, le poids W d'un trigraphe T est la somme $w(V(T))$ de ses poids, et étant donné une constante $c < 1$, on dit que T a la *c-propriété du grand biparti*, s'il existe $V_1, V_2 \subseteq V(T)$, tels que $w(V_1), w(V_2) \geq c\dot{W}$ et V_1 est fortement complet ou fortement anticomplet à V_2. Remarquons que si w est une fonction de poids telle que $w(v) = 1$ pour tout sommet $v \in V(T)$ et que $w(uv) = 0$ pour toute arête optionnelle $uv \in \mathcal{E}^*(T)$, nous obtenons la notion précédente.

Remarquons également que la propriété du grand biparti est stable par réalisation comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Soit $\mathcal{C}_\mathcal{T}$ une classe de trigraphes ayant la c-propriété du grand biparti, alors la classe des graphes $\mathcal{C} = \{G, G$ est une réalisation de $T \in \mathcal{C}_\mathcal{T}\}$ a la c-propriété du grand biparti.*

Démonstration. Si un trigraphe T a la propriété du grand biparti, il existe une paire d'ensembles de sommets $V_1, V_2 \subseteq V(T)$ témoins de la propriété. Dans toute

réalisation de T, V_1, V_2 reste une paire de témoins de la propriété du grand biparti. □

L'idée de la démonstration du théorème 3.1 est de contracter les sommets de T, tout en préservant les poids jusqu'à obtenir un trigraphe basique. Soit T un trigraphe avec une fonction de poids w, (X_1, X_2) un 2-joint propre dans T ou dans son complément $\overline{T}$, tel que $w(X_1) \geq w(X_2)$, et $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2). Définissons le trigraphe T' avec la fonction de poids w' comme la *contraction de* T, noté $(T, w) \rightsquigarrow (T', w')$.

T' est le bloc de décomposition T_{X_1} et sa fonction de poids w' est définie comme suit :

— Sur les sommets de X_1, on définit $w' = w$.
— Sur les sommets marqués a, b, on définit $w'(a) = w(A_2)$ et $w'(b) = w(B_2)$
— Si le sommet marqué c existe, on définit $w'(c) = w(C_2)$. Sinon, on définit $w'(ab) = w(C_2)$ et on étiquette ab en fonction du type de (X_1, X_2).

On définit a (resp. b, $v \in X_1$) comme étant le *représentant* de A_2 (resp. B_2, v) et pour tout sommet $v \in A_2$ (resp. B_2, X_1) on note $v \to a$ (resp. $v \to b$, $v \to v$). Suivant l'existence de c, c ou ab est le *représentant* de C_2 et pour tout sommet $v \in C_2$ on note $v \to c$ ou $v \to ab$.

Si $(T, w) \rightsquigarrow (T', w')$ et $V' \subseteq V(T')$, on note également $V \to V'$ si $V = \{v \in V(T) | \exists v' \in V' v \to v' \vee \exists u'v' \in V'^2 v \to u'v'\}$. On note par $\to^*$ (resp. $\rightsquigarrow^*$) la clôture transitive de $\to$ (resp. $\rightsquigarrow$).

Lemme 3.5. *Si T est un trigraphe avec une fonction de poids w et $(T, w) \rightsquigarrow^* (T', w')$ alors :*
— $w'(V(T')) = w(V(T))$
— *Si T' a la c-propriété du grand biparti, alors T aussi.*

Démonstration. La première partie du résultat est claire. Supposons que T' ait la c-propriété du grand biparti. Alors il existe $W_1, W_2 \subseteq V(T)$, tels que $W_1 \to^* V_1$ et $W_2 \to^* V_2$. Puisque la contraction ne crée ni adjacence forte, ni antiadjacent forte qui n'existaient pas auparavant, si V_1, V_2 sont fortement complets (resp. anticomplets), W_1, W_2 sont également fortement complets (resp. anticomplets). De plus $w(W_1) = w'(V_1)$ et $w(W_2) = w'(V_2)$. Donc la paire (W_1, W_2) prouve que T' a la c-propriété du grand biparti. □

Lemme 3.6. *Soit $0 < c < 1/6$. Soit T un trigraphe de Berge apprivoisé, et w sa fonction de poids telle que $w(x) < c\dot{n}$ pour tout $x \in V(T) \cup \mathcal{E}^*(T)$. Ou bien T a la c-propriété du grand biparti, ou bien il existe un trigraphe basique T' avec sa fonction de poids associée w' tel que $(T, w) \rightsquigarrow^* (T', w')$ et pour tout $x \in V(T') \cup \mathcal{E}^*(T')$, $w(x) < c\dot{n}$.*

Démonstration. On prouve le résultat par induction sur T, en utilisant le résultat de décomposition sur les trigraphes de Berge bigames (Théorème 2.10). Si T n'est pas basique, alors il admet un 2-joint propre ou le complément d'un 2-joint propre. Le problème étant auto-complémentaire, nous traitons uniquement le cas d'un 2-joint (X_1, X_2) de T. Par symétrie, supposons que $w(X_1) \geq w(X_2)$ et donc $w(X_1) \geq n/2$. Soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2). Par définition de X_1, $\max(w(A_1), w(B_1), w(C_1)) \geq n/6 \geq c\dot{n}$. Donc si $\max(w(A_2), w(B_2), w(C_2)) \geq c\dot{n}$, on a la c-propriété du grand biparti. Sinon, $(T, w) \rightsquigarrow (T', w')$ avec $w'(x) < c\dot{n}$ pour tout $x \in V(T') \cup \mathcal{E}^*(T')$ et T' est un trigraphe de Berge apprivoisé d'après 2.11. On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction et ; ou bien trouver un trigraphe basique T'', tel que $(T, w) \rightsquigarrow (T', w') \rightsquigarrow^* (T'', w'')$ et $w''(x) < c\dot{n}$ pour tout $x \in V(T'') \cup \mathcal{E}^*(T'')$; ou bien T' a la c-propriété du grand biparti, et donc T aussi d'après le lemme 3.5. □

Si T est un trigraphe basique avec une fonction de poids w, on veut transformer T en un trigraphe ayant des poids uniquement sur ses sommets en transférant les poids des arêtes optionnelles sur de nouveaux sommets. On définit l'*extension T' de* T comme le trigraphe avec la fonction de poids $w' : V(T') \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie comme suit : $V(T') = V(T) \cup \{v_{ab} | ab \in \mathcal{E}^*(T), w(ab) > 0\}$, $w'(v) = w(v)$ pour $v \in V(T)$, l'étiquette de ab est donnée par v_{ab}, $w'(v_{ab}) = w(ab)$, $\theta(av_{ab}) = \theta(bv_{ab}) = 0$, et si $u \in V \setminus \{a, b\}$, alors $\theta(uv_{ab}) = -1$ si l'étiquette de ab est "2-joint" et $\theta(uv_{ab}) = 1$ si l'étiquette est "complément 2-joint". Remarquons que ab était le représentant de C_2 de l'affectation $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ du 2-joint, et que v_{ab} prend sa place en tant que contraction de C_2, puisque qu'il a le même poids et les même adjacences et antiadjacences fortes vis à vis du reste du trigraphe. Il n'était pas possible de garder la contraction de C_2 à chaque étape et en même temps de rester apprivoisé, ce qui est la clé du lemme 3.6. Remarquons finalement que les nouveaux sommets ajoutés étiquetés "2-joint" forment un stable et que ceux étiquetés "complément de 2-joint" forment une clique.

Lemme 3.7. *Soit T un trigraphe de Berge apprivoisé et w sa fonction de poids associée, tel que $w(uv) = 0$ pour tout $uv \in \mathcal{E}^*(T)$. Supposons que $(T, w) \rightsquigarrow^* (T', w')$ et soit T'' avec sa fonction de poids w'' l'extension de T'. Si T'' a la c-propriété du grand biparti, alors T aussi.*

Démonstration. Soit (V_1, V_2) deux sous-ensembles de T'' prouvant que T'' a la c propriété du grand biparti. Soit $X_1 \subseteq V_1$ un sous-ensemble de sommets de V_1 étiquetés. Alors $V_1 \backslash X_1 \subseteq V(T')$ et il existe $W_1 \subseteq V(T)$, tel que $W_1 \to^* V_1 \backslash X_1$. Soit $Y_1 = \{v \in V(T) | \exists v_{ab} \in X_1, v \to ab\}$. Alors $w(W_1 \cup Y_1) = w''(V_1) \geq c\dot{n}$. On définit de la même manière X_2, W_2 et Y_2 et nous avons les même inégalités $w(W_2 \cup Y_2) = w''(V_2) \geq c\dot{n}$. De plus, $W_1 \cup Y_1$ est fortement complet (resp. anticomplet) à $W_2 \cup Y_2$ si V_1 est fortement complet (resp. anticomplet) à V_2. Donc T a la c-propriété du grand biparti. □

Lemme 3.8. *Si T' est l'extension d'un trigraphe basique T de Berge apprivoisé et que sa fonction de poids associée w_0 vérifie $w_0(x) < c\dot{n}$ pour tout $x \in V(T) \cup \mathcal{E}^*(T)$ et si $c \leq 1/148$, alors T' a la c-propriété du grand biparti.*

Avant de pouvoir démontrer ce résultat nous avons besoin d'un lemme technique. Un graphe G a *m arêtes-multiples* si son ensemble d'arêtes E est un multi-ensemble de $V^2 \setminus \{xx | x \in V(G)\}$ de taille m : il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux sommets distincts mais pas de boucle. Une arête uv a deux *extrémités* u et v. Le degré de $v \in V(G)$ est $d(v) = |\{e \in E | v \text{ est une extrémité de } e\}|$.

Lemme 3.9. *Soit G un graphe biparti (A, B) avec m arêtes multiples et de degré maximum $c\dot{m}$ avec $c < 1/3$. Alors il existe des sous-ensembles d'arêtes E_1, E_2 de G, tels que $|E_1|, |E_2| \geq m/48$ et si $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2$ alors e_1 et e_2 n'ont pas d'extrémité commune.*

Démonstration. Si $m \leq 48$, il suffit de trouver deux arêtes sans extrémité commune. De telles arêtes existent toujours puisque le degré maximum est borné par $c\dot{m}$, donc aucun sommet ne peut être une extrémité commune à toutes les arêtes. Sinon si $m > 48$, considérons une partition aléatoire uniforme (U, U') des sommets. Pour toute paires d'arêtes distinctes e_1, e_2, considérons la variable aléatoire $X_{e_1,e_2} = 1$ si $(e_1, e_2) \in (U^2 \times U'^2) \cup (U'^2 \times U^2)$, et 0 sinon. Si e_1 et e_2 ont au moins une extrémité commune, alors $\Pr(X_{e_1,e_2} = 1) = 0$, sinon $\Pr(X_{e_1,e_2} = 1) = 1/8$.

Nous définissons alors :

$$\begin{aligned} p &= |\{(e_1, e_2) \in E^2 | e_1 \text{ et } e_2 \text{ n'ont pas d'extrémité commune}\}| \\ p_A &= |\{(e_1, e_2) \in E^2 | e_1 \text{ et } e_2 \text{ n'ont pas d'extrémité commune dans } A\}| \\ q_A &= |\{(e_1, e_2) \in E^2 | e_1 \neq e_2 \text{ et } e_1 \text{ et } e_2 \text{ n'ont pas d'extrémité commune dans } A\}| \end{aligned}$$

Nous définissons de la même manière p_B et q_B. Supposons que $p \geq \frac{1}{3}\binom{m}{2}$. Alors :

$$\mathbb{E}(\sum_{\substack{e_1,e_2 \in E \\ e_1 \neq e_2}} X_{e_1,e_2}) = \sum_{\substack{e_1,e_2 \in E \\ e_1 \neq e_2}} \Pr(X_{e_1,e_2} = 1) = \frac{p}{8} \geq \frac{1}{24}\binom{m}{2} .$$

Donc il existe une partition (U, U') telle que :

$$\sum_{\substack{e_1,e_2 \in E \\ e_1 \neq e_2}} X_{e_1,e_2} \geq \frac{1}{24}\binom{m}{2} .$$

Soit $E_1 = E \cap U^2$ et $E_2 = E \cap U'^2$. Alors $|E_1|, |E_2| \geq m/48$, sinon :

$$\sum_{\substack{e_1,e_2 \in E \\ e_1 \neq e_2}} X_{e_1,e_2} = |E_1| \cdot |E_2| < \frac{m}{48} \cdot \left(1 - \frac{1}{48}\right) m \leq \frac{1}{24}\binom{m}{2} ,$$

c'est une contradiction. Donc E_1 et E_2 vérifient les hypothèses du lemme. Il nous reste donc à démontrer que $p \geq \frac{1}{3}\binom{m}{2}$. Le résultat intermédiaire clé est que $p_A \geq 2q_A$. Numérotons les sommets de A de 1 à $|A|$ et rappelons que $d(i)$ est le degré de i. Alors $\sum_{i=1}^{|A|} d(i) = m$ et :

$$p_A = 1/2 \left(\sum_{i=1}^{|A|} d(i)(m - d(i))\right) = 1/2 \left(\left(\sum_{i=1}^{|A|} d(i)\right)^2 - \sum_{i=1}^{|A|} (d(i))^2\right) = 1/2 \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{|A|} d(i)d(j)\right)$$

$$q_A = 1/2 \left(\sum_{i=1}^{|A|} d(i)(d(i) - 1)\right) = 1/2 \left(\sum_{i=1}^{|A|} (d(i))^2 - m\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
2p_A - (4q_A + 2m) &= \sum_{i=1}^{|A|} d(i) \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{|A|} d(j) - 2d(i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{|A|} d(i) \left(\sum_{j=1}^{|A|} d(j) - 3d(i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{|A|} d(i) \left(m - 3d(i) \right)
\end{aligned}$$

Mais pour tout i, $d(i) \leq c\dot{m} \leq m/3$ donc $m - 3d(i) \geq 0$. Par conséquent, $2p_A - (4q_A + 2m) \geq 0$ et donc $p_A \geq 2q_A$. Mais $p_A + q_A = \binom{m}{2}$ donc $q_A \leq \frac{1}{3}\binom{m}{2}$. De la même manière, $p_B \geq 2q_B$ et $q_B \leq \frac{1}{3}\binom{m}{2}$. Finalement :

$$p \geq \binom{m}{2} - q_A - q_B \geq \binom{m}{2} - \frac{2}{3}\binom{m}{2} \geq \frac{1}{3}\binom{m}{2} .$$

□

Démonstration du lemme 3.8. Soit w la fonction de poids associée à T'. Puisque le problème est auto-complémentaire, il suffit de démontrer le résultat si T est un trigraphe biparti, un trigraphe doublé ou un line trigraphe. Si T est un trigraphe doublé, alors T a une bonne partition (X, Y). En fait, X est l'union de deux stables X_1, X_2 et Y est l'union de deux cliques Y_1 et Y_2. Donc T' est l'union de trois stables X_1, X_2, X_3 (X_3 est l'ensemble des sommets étiquetés "2-joint") et de trois cliques Y_1, Y_2, Y_3 (Y_3 est l'ensemble des sommets étiquetés "complément de 2-joint"). Il existe un ensemble Z parmi ces six ensembles de taille au moins $n/6$. Puisque chaque sommet de Z a poids au plus $c\dot{n}$, on peut partitionner Z en (Z_1, Z_2) avec $w(Z_1), w(Z_2) \geq n/12 - c\dot{n} \geq c\dot{n}$ et Z_1 est ou bien fortement complet à Z_2 (c'est le cas si Z est une clique forte) ou bien fortement anticomplet à Z_2 (c'est le cas si Z est un stable fort). Le même argument s'applique si T est un trigraphe biparti, puisque c'est alors l'union de deux stables forts.

La démonstration est plus compliquée si T est un line trigraphe. Soit X le stable fort des sommets étiquetés "2-joint" dans T, Y la clique forte des sommets étiquetés "complément de 2-joint", et $Z = V(T') \setminus (X \cup Y)$. Par définition du line trigraphe, la réalisation complète de $T'|Z$ est le line graphe d'un graphe biparti G, et toute clique de $T'|Z$ de taille au moins trois est une clique forte. Si $v_{ab} \in X$,

alors la réalisation complète de $T'|(Z \cup \{v_{ab}\})$ est aussi le line graphe d'un graphe biparti : en effet, v_{ab} est semiadjacent à exactement a et b, et antiadjacent au reste des sommets. Par hypothèse sur les cliques de taille trois de T, il ne peut y avoir de sommet $d \in Z$ adjacent à la fois à a et à b. Cela veut dire que l'extrémité commune x de a et b dans G a degré exactement deux. Ajoutons l'arête v_{ab} entre x et un nouveau sommet, alors la réalisation complète de $T'|(Z \cup \{v_{ab}\})$ est le line graphe d'un graphe biparti. En itérant ce procédé, la réalisation complète $T'|(Z \cup X)$ est également le line graphe d'un graphe biparti.

Distinguons alors deux cas : s'il existe une clique K de poids $w(K) \geq 4c\dot{n}$ dans T', alors nous pouvons partitionner K en (K_1, K_2) avec $w(K_1), w(K_2) \geq 4c\dot{n}/2 - c\dot{n} \geq c\dot{n}$ et K_1 est fortement complet à K_2. Sinon, remarquons que dans $Z \cup X$, toute composante optionnelle a au plus trois sommets. Pour chaque composante prenons le sommets de poids maximal pour obtenir un ensemble de sommets $V' \subseteq Z \cup X$ sans arête optionnelle entre eux, c'est à dire $T'|V'$ est un graphe. De plus $T'|V'$ est un sous-graphe de la réalisation complète de $T'|(Z \cup X)$ et donc est le line graphe d'un graphe biparti G. Au lieu de garder les poids strictement positifs sur les arêtes de G, nous transformons chaque arête xy de poids m en m arêtes xy. L'inégalité $w(K) \leq 4c\dot{n}$ pour toute clique K implique que d'une part le degré maximum d'un sommet de G est $4c\dot{n}$, d'autre part, $n' = w(V') \geq (n - w(Y))/3 \geq n(1 - 4c)/3$, puisque Y est une clique. Le lemme 3.9 prouve l'existence de deux sous-ensembles d'arêtes E_1, E_2 de G tels que $|E_1|, |E_2| \geq n'/48$ et si $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2$ alors e_1 et e_2 n'ont pas d'extrémité commune. Cela correspond dans T' un témoin anticomplet de la propriété du grand biparti. □

Démonstration du Théorème 3.3. Soit $c = 1/148$. Si $n < 1/c$, il existe toujours une arête forte ou une antiarête forte uv par définition des trigraphes bigames, et nous définissons $V_1 = \{u\}$ et $V_2 = \{v\}$. Sinon, donnons à T la fonction de poids w, telle que $w(v) = 1$ pour tout $v \in V(T)$ (en particulier, $w(V(T)) = n$). Appliquons le lemme 3.6 à T pour obtenir ou bien la c propriété du grand biparti, ou bien pour contracter T : il existe un trigraphe basique T' tel que $(T, w) \rightsquigarrow^* (T', w')$. Appliquons alors le lemme 3.8 pour avoir la c-propriété du grand biparti dans l'extension de T'. Grâce au lemme 3.7 nous avons bien la c-propriété du grand biparti. □

3.2 Clôture par k-joints généralisés

Dans cette section nous allons voir comment nous pouvons utiliser une généralisation des 2-joints afin d'obtenir un résultat analogue. Les résulats 2.10, 2.11 et 2.12 montrent qu'en fait les trigraphes de Berge apprivoisés sont la clôture par 2-joints et complément de 2-joints des classes basiques (trigraphes biparti, line trigraphes, trigraphes doublés et leurs complémentaires). Ces classes basiques ont la propriété du grand biparti et le théorème 3.3 montre que prendre la clôture de cette classe préserve la propriété du grand biparti.

Dans cette section nous allons voir comment à partir d'une classe de *graphes* héréditaire nous pouvons obtenir une classe de *trigraphes*, puis comment clore cette classe de trigraphes par des opérations similaires aux 2-joints et aux complémentaires de 2-joints. La clôture sera une classe de trigraphe. D'après le lemme 3.4 si la clôture a la propriété du grand biparti alors la classe de graphes des réalisations des trigraphes de la clôture aussi. En fait dans ce qui suit un k-joint avec $k = 2$ sera analogue à la fois à l'opération de 2-joint et à celle du complémentaire de 2-joint.

Dans la section suivante nous verrons que si la classe de graphes basiques a la propriété du grand biparti, cette propriété est conservée dans la clôture par k-joints. Il est important de remarquer que prendre la clôture des graphes basiques du théorème de décomposition des graphes de Berge par k-joints avec $k = 2$ ne donne pas exactement la classe des trigraphes de Berge apprivoisés (en particulier les trigraphes de la clôture ne sont pas tous de Berge). De plus les constantes obtenues pour les k-joints sont moins bonnes que celles obtenue pour les trigraphes de Berge apprivoisés.

Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes qui doit être vue comme une classe "basique" de graphes. Pour tout entier $k \geq 1$, on construit la classe de trigraphes $\mathcal{C}^{\leq k}$ de la manière suivante : un trigraphe T appartient à $\mathcal{C}^{\leq k}$ si et seulement s'il existe une partition $X_1, \ldots, X_r$ de $V(T)$ telle que :

— pour tout $1 \leq i \leq r$, $1 \leq |X_i| \leq k$.
— pour tout $1 \leq i \leq r$, $\binom{X_i}{2} \subseteq \mathcal{E}^*(T)$.
— pour tout $1 \leq i \neq j \leq r$, $X_i \times X_j \cap \mathcal{E}^*(T) = \emptyset$.
— il existe un graphe G dans $\mathcal{C}$ tel que G est une réalisation de T.

En d'autre termes, on part du graphe G de $\mathcal{C}$, on partitionne ses sommets en petites parties (de taille au plus k), et on change toutes les adjacences à l'intérieur de ces parties en arêtes optionnelles.

On définit alors le *k-joint généralisé* entre deux trigraphes T_1 et T_2, qui géné-

ralise le 2-joint et qui est similaire au H-joint [6]. Soit T_1 et T_2 deux trigraphes vérifiant les propriétés suivantes avec $1 \leq r, s \leq k$:

— $V(T_1)$ est partitionné en $(A_1, \ldots, A_r, B = \{b_1, \ldots, b_s\})$ et $A_j \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq j \leq r$.

— $V(T_2)$ est partitionné en $(B_1, \ldots, B_s, A = \{a_1, \ldots, a_r\})$ et $B_i \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq s$.

— $\binom{B}{2} \subseteq \mathcal{E}^*(T_1)$ et $\binom{A}{2} \subseteq \mathcal{E}^*(T_2)$, ce qui veut dire que A et B contiennent uniquement des arêtes optionnelles.

— Pour tout $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r$, b_i et a_j sont ou bien fortement complets, ou bien fortement anticomplets à respectivement A_j et B_i. En d'autre terme, il existe un graphe biparti qui décrit les adjacences entre B et $(A_1, \ldots, A_r)$, et le même graphe biparti décrit les adjacences entre $(B_1, \ldots, B_s)$ et A.

Alors le k-joint généralisé de T_1 et T_2 est le trigraphe T ou $V(T) = A_1 \cup \ldots \cup A_r \cup B_1 \cup \ldots \cup B_s$. Soit θ_1 et θ_2 les fonctions d'adjacences de respectivement T_1 et T_2. Autant que possible la fonction d'adjacence θ de T étend θ_1 et θ_2 (c'est à dire $\theta(uv) = \theta_1(uv)$ pour $uv \in \binom{V(T_1) \cap V(T)}{2}$ et $\theta(uv) = \theta_2(uv)$ pour $uv \in \binom{V(T_2) \cap V(T)}{2}$), et pour $a \in A_j$, $b \in B_i$, $\theta(ab) = 1$ si b_i et A_j sont fortement complets dans T_1 (ou de manière équivalente, si a_j et B_i) sont fortement complets dans T_2), et -1 sinon.

On définit finalement $\overline{\mathcal{C}^{\leq k}}$ comme la plus petite classe contenant $\mathcal{C}^{\leq k}$ et close par k-joints généralisés.

3.3 Grand biparti dans les classes closes par k-joints

En fait la méthode de contraction des 2-joints utilisée dans la section précédente peut être généralisée aux k-joints. Nous avons seulement besoin que la classe $\mathcal{C}$ des graphes basiques soit close par sous-graphes induits pour avoir le résultat sur $\overline{\mathcal{C}^{\leq k}}$. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.10. *Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0 < c < 1/2$ et $\mathcal{C}$ une classe de graphes telle que pour tout $G \in \mathcal{C}$ et pour toute fonction de poids $w : V(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que $w(v) < c\dot{n}$ pour tout $v \in V(G)$, G a la c-propriété du grand biparti. Alors tout trigraphe T de $\overline{\mathcal{C}^{\leq k}}$, avec au moins k/c sommets, a la (c/k)-propriété du grand biparti.*

Pour démontrer ce théorème, nous définissons la contraction d'un k-joint généralisé. Paradoxalement cette contraction est plus simple que dans le cas du 2-joint

car il n'y a ni poids ni étiquette sur les arêtes optionnelles : soit T un trigraphe avec une fonction de poids $w : V(T) \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et supposons que T est le k-joint généralisé de T_1 et de T_2. Nous suivons les notations introduites dans la définition des k-joints généralisés. En particulier, $V(T)$ est partitionné en $(A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_s)$. Quitte à échanger T_1 et T_2, supposons que $w(\cup_{j=1}^r A_j) \geq w(\cup_{i=1}^s B_i)$. Alors la *contraction* de T est le trigraphe $T' = T_1$ avec les poids w' définis par $w'(v) = w(v)$ si $v \in \cup_{j=1}^r A_j$, et $w'(b_i) = w(B_i)$ pour $1 \leq i \leq s$. On note cette opération de contraction par $(T, w) \rightsquigarrow (T', w')$.

Remarquons que le lemme 3.5 est toujours vrai dans ce contexte, et nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 3.11. *Soit $0 < c < 1/(2k)$. Soit (T, w) un trigraphe pondéré de $\overline{\mathcal{C}^{\leq k}}$ tel que $w(v) < c\dot{n}$ pour tout $v \in V(T)$. Ou bien T a la c-propriété du grand biparti, ou bien il existe un trigraphe $T' \in \mathcal{C}^{\leq k}$ de poids w' tel que $(T, w) \rightsquigarrow^* (T', w')$ et pour tout $v \in V(T')$, $w(v) < c\dot{n}$.*

Démonstration. La démonstration est similaire au lemme 3.6.

On prouve le résultat par induction sur T. Avec les notations précédentes, T se partitionne en $V(T) = A_1 \cup \ldots \cup A_r \cup B_1 \cup \ldots \cup B_s$ Par symétrie, supposons que $w(\cup A_j) \geq w(\cup B_i)$ et donc $w(\cup A_j) \geq n/2$. Par définition de X_1, $\max(w(A_j)) \geq n/(2k) \geq c\dot{n}$. Donc si $\max(w(B_j)) \geq c\dot{n}$, on a la c-propriété du grand biparti. Sinon, $(T, w) \rightsquigarrow (T', w')$ avec $w'(x) < c\dot{n}$ pour tout $x \in V(T') \cup \mathcal{E}^*(T')$ et $T' \in \overline{\mathcal{C}^{\leq \|}}$ par construction de la classe. On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction et ; ou bien trouver un trigraphe basique T'', tel que $(T, w) \rightsquigarrow (T', w') \rightsquigarrow^* (T'', w'')$ et $w''(x) < c\dot{n}$ pour tout $x \in V(T'') \cup \mathcal{E}^*(T'')$; ou bien T' a la c-propriété du grand biparti, et donc T aussi d'après le lemme 3.5. □

Démonstration du Théorème 3.10. Soit T un trigraphe de $\overline{\mathcal{C}^{\leq k}}$. On définit les poids $w(v) = 1$ pour tout $v \in V(T)$. En appliquant le lemme 3.11 on a, ou bien la (c/k) propriété du grand biparti, ou bien il existe un trigraphe $T' \in \mathcal{C}^{\leq k}$ tel que $(T, w) \rightsquigarrow^* (T', w')$ et $w'(v) < (c/k).n$ pour tout $v \in V(T')$. Pour chaque composante optionnelle de T', on choisit le sommet de plus grand poids et on supprime les autres. On obtient un graphe $G \in \mathcal{C}$ et on définit $w''(v) = w'(v)$ sur ses sommets. Remarquons que $w''(V(G)) \geq w'(V(T'))/k$ puisque toute composante optionnelle a taille au moins k, et pour tout $v \in V(G)$, $w''(v) < (c/k).w'(V(T')) \leq c\dot{w}''(V(G))$. Alors il existe $V_1, V_2 \subseteq V(G)$ tels que $w''(V_1), w''(V_2) \geq c\dot{w}''(V(G))$ et V_1 est ou bien fortement complet ou bien fortement anticomplet à V_2. Alors $w'(V_1), w'(V_2) \geq (c/k).w'(V(T'))$ et V_1 est ou bien fortement complet ou bien fortement anticomplet

à V_2 dans T'. Donc T' a la (c/k)-propriété du grand biparti. On conclut alors à l'existence d'une paire d'ensembles témoins de la propriété du grand biparti dans T avec le lemme 3.5. □

Les résultats de ce chapitre ne sont pas spécifiques aux trigraphes de Berge apprivoisés. En effet la partie la plus technique est la démonstration du cas basique (lemme 3.8). La partie induction, c'est à dire, la construction par joint est finalement assez simple. En fait, si le joint est équilibré, il est normal que l'on ait la propriété du grand biparti entre les deux côtés du joint. Cependant comme les graphes de Berge n'ont pas tous cette propriété, c'est une autre manière de voir que notre classe est une sous-classe stricte des graphes de Berge.

Chapitre 4

Clique-Stable séparateur

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec Aurélie Lagoutte, ils font l'objet d'un article [26] soumis à Discrete Mathematics.

Une propriété très proche de la propriété du grand biparti est celle de la clique-stable séparation. Commençons par définir ce qu'est un clique-stable séparateur. Soit G un graphe, on dit qu'une partition en deux ensembles $C = (U, V)$ du graphe G est une *coupe*. Un ensemble de coupes est un *clique-stable séparateur* de G si pour toute clique K et tout stable S de G tels que $K \cap S = \emptyset$ il existe une coupe $C = (U, V)$ du graphe G telle que $K \subseteq U$ et $S \subseteq V$. Bien entendu, pour tout graphe G il existe toujours un clique-stable séparateur. La question intéressante est de savoir s'il existe un clique-stable séparateur contenant un nombre polynomial de coupes. On dit donc qu'une classe $\mathcal{C}$ graphes a la propriété de la *clique-stable séparation* s'il existe un polynôme P tel que pour tout graphe $G \in \mathcal{C}$ d'ordre n, G admette un clique-stable séparateur de taille $P(n)$.

Dans ce chapitre nous allons montrer que les graphes de Berge apprivoisés admettent un clique-stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$. Nous généraliserons ce résultat aux classes de trigraphes construites par k-joints généralisés comme défini dans le chapitre 3.

La propriété de la clique-stable séparation a été introduite par Yannakakis [38] dans les années 90 lorsqu'il étudiait le problème de l'existence d'une formulation étendue pour le polytope des stables (l'enveloppe convexe des fonctions caractéristiques de ses stables). C'est à dire un polytope plus simple en dimension plus grande mais tel que sa projection soit le polytope des stables. Il s'est intéressé à

ce problème sur les graphes parfaits car ces graphes ont des propriétés permettant de définir plus simplement ce polytope. Cela l'a amené à définir un problème de communication qui est équivalent à celui de la clique-stable séparation. De fait l'existence d'un clique-stable séparateur de taille polynomial est une condition nécessaire à l'existence d'une formulation étendue. Il a pu démontrer l'existence à la fois d'un clique-stable séparateur de taille polynomiale et d'une formulation étendue pour de nombreuses sous-classes de graphes parfaits comme par exemple, les graphes de comparabilité, les graphes triangulés (chordal graph c'est-à-dire les graphes sans C_4 induit), et les compléments de ces classes. Lovász à également démontré ces propriétés pour les graphes t-parfaits [30]. Cependant ces deux problèmes restent ouverts pour les graphes parfaits en général. L'existence d'une formulation étendue n'étant pas toujours vraie pour les graphes [20], il est donc d'autant plus intéressant de voir si ces propriétés sont vérifiées pour les graphes parfaits. Remarquons bien que contrairement à la propriété du grand biparti qui n'est pas vérifiée pour les graphes de comparabilité, la propriété de la clique-stable séparation est vraie sur cette classe. Les graphes de comparabilité sont une classe de graphes parfaits assez bien comprise dans laquelle presque tous les graphes ont de nombreuses skew-partitions équilibrées, de ce point de vue c'est une classe bien étudiée de graphes de Berge non apprivoisés. Peut-être est-il donc possible d'utiliser la décomposition du théorème fort des graphes parfaits pour démontrer l'existence de clique-stable séparateur de taille polynomiale pour les graphes parfaits.

Commençons par voir comment la propriété de la clique-stable séparation et la propriété du grand biparti sont liées. Dans le cas des classes de graphes héréditaires, la propriété du grand biparti implique celle de la clique-stable séparation. Comme le montre le théorème suivant (la démonstration est la même que celle de Bousquet, Lagoutte et Thomassé dans [4] qui à partir de la propriété du grand biparti prouvé dans [5] montre que les graphes sans chemin induit ni complémentaire de chemin induit de taille k ont la propriété de la clique-stable séparation)

Lemme 4.1. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de graphes héréditaire ayant la c-propriété du grand biparti, alors $\mathcal{C}$ a la propriété de la clique-stable séparation.*

Démonstration. Le but est de démontrer que tout graphe G dans $\mathcal{C}$ admet un clique-stable séparateur de taille n^{cs} avec $cs = \frac{-1}{log_2(1-c)}$ (pour rappel, c-est la constante de la propriété du grand biparti). Raisonnons par l'absurde et prenons G un contre-exemple minimal. Notons $n = |V(G)|$, comme G a la c-propriété du grand biparti, il existe deux sous-ensembles de sommets disjoints V_1, V_2 vérifiant, $|V_1| \geq c\dot{n}$, $|V_2| \geq c\dot{n}$ et V_1 est ou bien complet à V_2 ou bien anticomplet à V_2.

Notons $V_3 = V(G) \setminus (V_1 \cup V_2)$. Par minimalité de G, $G|(V_1 \cup V_3)$ admet un clique-stable séparateur F_1 de taille $(|V_1| + |V_3|)^{cs}$ et $G|(V_2 \cup V_3)$ admet un clique-stable séparateur F_2 de taille $(|V_2| + |V_3|)^{cs}$. Construisons F un clique stable séparateur de G. Nous devons distinguer deux cas suivant les adjacences entre V_1 et V_2. L'idée est de prendre chaque coupe de F_1 et F_2 et de la transformer en une coupe de G en ajoutant les sommets de V_2 ou V_1 du "bon" côté de la coupe suivant les adjacences entre V_1 et V_2. Formellement si V_1 est complet à V_2, $F = \{(U \cup V_2, W); (U, W) \in F_1\} \cup \{(U \cup V_1, W); (U, W) \in F_2\}$. Si au contraire, V_1 est anticomplet à V_2, $F = \{(U, W \cup V_2); (U, W) \in F_1\} \cup \{(U, W \cup V_1); (U, W) \in F_2\}$. Il est facile de voir que F est un clique-stable séparateur de G. En effet suivant les adjacences entre V_1 et V_2 une clique ou un stable de G ne peut pas intersecter à la fois V_1 et V_2. Pour toute clique K et stable S ne s'intersectant pas, il existe donc une coupe dans F qui les sépare. Enfin F a taille au plus $2((1-c)n)^{cs} \leq n^{cn}$. □

Ce résultat ne règle pas vraiment le problème pour les graphes de Berge apprivoisés. En effet la classe des graphes de Berge apprivoisés n'est pas héréditaire (la suppression de sommet peut créer des skew-partitions). D'autre part, avec la constante obtenue dans le théorème 3.3 on obtiendrait un clique-stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^{101})$ ce qui, étant donné que nous pouvons montrer qu'il existe un clique-stable séparateur de taille quadratique, est assez mauvais.

4.1 Clique-stable séparateur dans les trigraphes de Berge apprivoisés

Comme dans le chapitre précédent, nous allons utiliser le théorème de décomposition et les blocs du chapitre 2. Nous devons donc étendre notre problème aux trigraphes. Le résultat principal sera le théorème 4.5 prouvant l'existence de clique-stable séparateur de taille quadratique pour les trigraphes de Berge apprivoisés.

Commençons par définir les notions de clique-stable séparation dans les trigraphes. Soit T un trigraphe. Une *coupe* de T est une paire $(U, W) \subseteq V(T)^2$, telle que $U \cup W = V(T)$ et $U \cap W = \emptyset$. Elle *sépare* une clique K d'un stable S, si $H \subseteq U$ et $S \subseteq W$. Parfois on dit que U est la *partie clique* de la coupe et W la *partie stable* de la coupe. Remarquons qu'une clique et un stable ne peuvent être séparés que s'ils ne s'intersectent pas. Remarquons également qu'ils ne peuvent s'intersecter que sur une composante optionnelle V (pour rappel pour tout $u, v \in V$, $u = v$ ou $uv \in \mathcal{E}^*(T)$). En particulier, si T est un trigraphe bigame, une clique et un

stable s'intersectent sur au plus un sommet ou une arête optionnelle. On dit que la famille F de coupes est un *clique-stable séparateur*, si pour toute clique K et tout stable S qui ne s'intersectent pas, il existe une coupe dans F qui sépare K et S. Étant donnée une classe $\mathcal{C}$ de trigraphes, nous nous intéressons à la question suivante : existe-t-il une constante c, telle que pour tout trigraphe T de $\mathcal{C}$, T admet un clique-stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^c)$?

Supposons qu'il existe un clique-stable séparateur de taille m de T, alors on construit un clique-stable séparateur de taille m de $\overline{T}$ en construisant pour chaque coupe (U, W) la coupe (W, U). Le problème est donc bien auto-complémentaire. Montrons également qu'il est suffisant de considérer uniquement les cliques et les stables maximaux.

Lemme 4.2. *Si un trigraphe T bigame admet une famille F de coupes qui sépare toutes les cliques maximales (pour l'inclusion) de tous les stables maximaux, alors T admet un clique-stable séparateur de taille au plus $|F| + \mathcal{O}(n^2)$.*

Démonstration. Pour tout $x \in V$, prenons $\mathrm{Cut}_{1,x}$ la coupe $N[x], V \setminus N[x]$ et $\mathrm{Cut}_{2,x}$ la coupe $(N(x), V \setminus N(x))$. Pour toute arête optionnelle xy, prenons $\mathrm{Cut}_{1,xy}$ (resp. $\mathrm{Cut}_{2,xy}$, $\mathrm{Cut}_{3,xy}$, $\mathrm{Cut}_{4,xy}$) la coupe $(U = N[x] \cup N[y], V \setminus U)$ (resp. $(U = N[x] \cup N(y), V \setminus U)$, $(U = N(x) \cup N[y], V \setminus U)$, $(U = N(x) \cup N(y), V \setminus U)$). Soit F' l'union de F avec toutes les coupes que nous venons de définir pour tout $x \in V$, et $xy \in \mathcal{E}^*(T)$. Nous allons démontrer que F' est un clique-stable séparateur.

Soit (K, S) une paire d'une clique et d'un stable qui ne s'intersectent pas. Étendons K et S en ajoutant des sommets jusqu'à avoir une clique maximale K' et un stable maximal S'. Nous devons traiter trois cas. Ou bien K' et S' ne s'intersectent pas, dans ce cas il y a une coupe de F qui sépare K' de S' (et donc K et S). Ou bien K' et S' s'intersectent sur un sommet x, dans ce cas si $x \in K$, alors $\mathrm{Cut}_{1,x}$ sépare K de S, sinon $\mathrm{Cut}_{2,x}$ les sépare. Ou bien K' et S' s'intersectent sur une arête optionnelle xy (en effet une clique et un stable ne peuvent s'intersecter que sur au plus un sommet ou une arête optionnelle). Dans ce cas, par le même argument que pour le cas précédent, suivant l'intersection entre $\{x, y\}$ et K' une des coupes $\mathrm{Cut}_{1,xy}$,..., $\mathrm{Cut}_{4,xy}$ sépare la clique K du stable S. □

En particulier, si T a au plus $\mathcal{O}(n^c)$ cliques maximales (ou stables maximaux) pour une constante $c \geq 2$, alors il existe un clique-stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^c)$. (Il suffit de séparer toutes les cliques maximales puis d'appliquer le lemme précédent).

Nous prouvons maintenant que les trigraphes de Berge apprivoisés admettent un clique-stable séparateur de taille quadratique. Commençons par traiter le cas des trigraphes basiques.

Lemme 4.3. *Il existe une constante c, telle que tout trigraphe basique admet un clique-stable séparateur de taille $c\dot{n}^2$.*

Démonstration. Puisque le problème est auto-complémentaire, nous traitons uniquement le cas des trigraphes bipartis, des line trigraphes et des trigraphes doublés. Une clique dans un trigraphe biparti est une arête forte, une arête optionnelle ou un sommet, il y a donc un nombre quadratique de cliques. Si T est un line trigraphe, alors sa réalisation complète est le line graphe d'un graphe biparti G et donc T a au plus un nombre linéaire de cliques car chaque clique correspond à un sommet de G. Grâce au lemme 4.2, les line trigraphes admettent un clique-stable séparateur de taille quadratique.

Si T est un trigraphe doublé, alors soit (X, Y) une bonne partition de T. Ajoutons à la coupe (Y, X) les coupes suivantes : pour tout $Z = \{x\}$ avec $x \in X$ ou $Z = \emptyset$, et pour tout $Z' = \{y\}$ avec $y \in Y$ ou $Z' = \emptyset$, prenons la coupe $(Y \cup Z \setminus Z', X \cup Z' \setminus Z)$ et pour toute paire $x, y \in V$, prenons la coupe $(\{x, y\}, V \setminus \{x, y\})$, et $(V \setminus \{x, y\}, \{x, y\})$. Ces coupes forment un clique-stable séparateur : soit K une clique et S un stable de T qui ne s'intersectent pas, alors $|K \cap X| \leq 2$ et $|S \cap Y| \leq 2$. Si $|K \cap X| = 2$ (resp. $|S \cap Y|$=2) alors K (resp. S) est seulement une arête (resp. une antiarête), car par définition, les sommets de $K \cap X$ n'ont pas de voisin commun avec Y. Donc la coupe $(K, V \setminus K)$ (resp. $V \setminus S, S$) sépare K et S. Sinon, $|K \cap X| \leq 1$ et $|S \cap Y| \leq 1$ et alors $(Y \cup (K \cap X) \setminus (S \cap Y), X \cup (S \cap Y) \setminus (K \cap X))$ sépare K et S. □

Nous pouvons maintenant traiter le cas des 2-joints dans les trigraphes et montrer comment reconstruire un clique-stable séparateur à partir des clique-stable séparateurs des blocs de décompositions.

Lemme 4.4. *Soit T un trigraphe qui admet un 2-joint propre (X_1, X_2). Si les blocs de décomposition T_{X_1} et T_{X_2} admettent des clique-stable séparateurs de taille respectivement k_1 et k_2, alors T admet un clique-stable séparateur de taille $k_1 + k_2$.*

Démonstration. Soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2), T_{X_i} $(i = 1, 2)$ les blocs de décomposition avec les sommets marqués a_i, b_i et potentiellement

c_i suivant la parité du 2-joint. Remarquons que nous n'avons pas besoin de distinguer le cas du 2-joint pair de celui du 2-joint impair car c_i ne joue aucun rôle. Soit F_1 un clique-stable séparateur de T_{X_1} de taille k_1 et F_2 un clique-stable séparateur de T_{X_2} de taille k_2. Construisons F un clique-stable séparateur de T. Pour chaque coupe $(U, W) \in F_1$, construisons la coupe $((U \cap X_1) \cup U', (W \cap X_1) \cup W' \cup C_2)$ avec $U' \cup W' = A_2 \cup B_2$ et $A_2 \subseteq U'$ (resp. $B_2 \subseteq U'$) si $a_2 \in U$ (resp. $b_2 \in U$), et $A_2 \subseteq W'$ (resp. $B_2 \subseteq W'$) sinon. En d'autres termes, A_2 va du même côté de la coupe que a_2, B_2 va du même côté que b_2 et C_2 va toujours du côté du stable. Pour chaque coupe dans F_2, nous faisons la même construction : A_1 va du côté de a_1, B_1 va du côté de b_1 et C_1 va du côté du stable.

Montrons maintenant que F est bien un clique-stable séparateur : soit K une clique et S un stable tels que K et S ne s'intersectent pas. Commençons par supposer que $K \subseteq X_1$. Soit $S' = (S \cap X_1) \cup S_{a_2,b_2}$ avec $S_{a_1,b_2} \subseteq \{a_2, b_2\}$ contient a_2 (resp. b_2) si et seulement si S intersecte A_2 (resp. B_2). S' est un stable de T_{X_1}, donc il y a une coupe de F_1 qui sépare K de S'. La coupe correspondante dans F sépare (K, S). Le cas $K \subseteq X_2$ se traite de la même manière.

Supposons alors que K intersecte à la fois X_1 et X_2. Alors $K \cap C_1 = \emptyset$ et $K \subseteq A_1 \cup A_2$ ou $K \subseteq B_1 \cup B_2$. Supposons sans perte de généralité que $K \subseteq A_1 \cup A_2$. Remarquons que S ne peut intersecter à la fois A_1 et A_2 qui sont fortement adjacent. Supposons donc que S n'intersecte pas A_2. Soit $K' = (K \cap A_1) \cup \{a_2\}$ et $S' = (S \cap X_1) \cup S_{b_2}$ avec $S_{b_2} = \{b_2\}$, si S intersecte B_2, et $S_{b_2} = \emptyset$ sinon. K' est une clique et S' est un stable de T_{X_1}, donc il existe une coupe dans F_1 qui les sépare. La coupe correspondante dans F sépare bien K de S, et donc F est bien un clique-stable séparateur. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème principal de cette section :

Théorème 4.5. *Tout trigraphe de Berge apprivoisé admet un clique-stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^2)$.*

Démonstration. Soit c' la constante du lemme 4.3 et $c = \max(c', 2^{24})$. Nous allons démontrer par induction que tout trigraphe de T admet un clique-stable séparateur de taille $c\dot{n}^2$. Nous avons deux cas de base, celui des trigraphes basiques, traités par le lemme 4.3 qui donne un clique-stable séparateur de taille $c'n^2$, et celui des petits trigraphes, c'est à dire celui des trigraphes d'ordre inférieur à 24. Pour ces trigraphes on peut simplement prendre tous les sous-ensembles de sommet U et prendre les coupes $(U, V \setminus U)$ qui forment trivialement un clique-stable séparateur de taille au plus $2^{24}n^2$.

Par conséquent, nous pouvons maintenant supposer que le trigraphe T n'est pas basique et a au moins 25 sommets. D'après le théorème 2.10, T admet un 2-joint propre (X_1, X_2) (ou le complément d'un 2-joint propre, mais dans ce cas comme le problème est auto-complémentaire, donc pouvons le résoudre sur $\overline{T}$). Soit $n_1 = |X_1|$, d'après le lemme 2.9 nous pouvons supposer que $4 \leq n_1 \leq n - 4$. D'après le théorème 2.11, nous pouvons appliquer l'hypothèse d'induction sur les blocs de décomposition T_{X_1} et T_{X_2} afin d'obtenir un clique-stable séparateur de taille respectivement au plus $k_1 = c(n_1 + 3)^2$ et $k_2 = c(n - n_1 + 3)^2$. D'après le lemme 4.4, T admet un clique-stable séparateur de taille $k_1 + k_2$. Prouvons maintenant que $k_1 + k_2 \leq c\dot{n}^2$.

Soit $P(n_1) = c(n_1 + 3)^2 + c(n - n_1 + 3)^2 - c\dot{n}^2$. P est un polynôme de degré 2 de coefficient dominant $2c > 0$. De plus $P(4) = P(n - 4) = -2c(n - 25) \leq 0$ donc par convexité de P, $P(n_1) \leq 0$ pour tout $4 \leq n_1 \leq n - 4$, ce qui termine la démonstration. □

4.2 Clique-stable séparateur dans les classes closes par k-joints

Comme dans le chapitre 3 voyons maintenant comment étendre le résultat sur l'existence de clique-stable séparateurs de taille polynomial dans les classes de trigraphes closes par k-joints généralisés. Nous rappelons que nous partons d'une classe de graphes $\mathcal{C}$ héréditaire ayant la propriété de la clique stable séparation. Nous allons alors construire une classe de trigraphes $\mathcal{C}^{\leq k}$ à partir de ces graphes, puis nous prenons la clôture $\overline{\mathcal{C}^{\leq k}}$ de cette classe par k-joints généralisés. Nous rappelons que toutes les définitions sont dans la section 3.2 du chapitre 3.

Les remarques du chapitre précédent restent vraies : même si le théorème 2.10 montre que dans un certain sens les trigraphes de Berge apprivoisés sont la clôture par 2-joints et complémentaire de 2-joints des trigraphes basiques, prendre la clôture par k-joints généralisés des trigraphes basiques avec $k = 2$ ne donne pas la classe des trigraphes de Berge apprivoisés. En effet certains graphes de cette clôture ont des skew-partitions équilibrées. De plus les constantes obtenues dans le cas des k-joints généralisés sont moins bonnes que celles obtenues directement sur les trigraphes de Berge apprivoisés.

Dans un premier temps montrons que la transformation des graphes en trigraphes (de la classe $\mathcal{C}$ à la classe $\mathcal{C}^{\leq k}$), préserve la propriété de la clique-stable séparation. L'explosion de la taille du clique-stable séparateur est due au fait que

dans un trigraphe T, une clique (et de même pour un stable) contenant k arêtes optionnelles devient une union d'au plus k cliques dans les réalisations de T.

Lemme 4.6. *Si chaque graphe G de $\mathcal{C}$ admet un clique-stable séparateur de taille m, alors chaque trigraphe T de $\mathcal{C}^{\leq k}$ admet un clique-stable séparateur de taille m^{k^2}.*

Démonstration. Commençons par démontrer que s'il existe un clique-stable séparateur F de taille m alors $F' = \{(\cap_{i=1}^{k} U_i, \cup_{i=1}^{k} W_i) | (U_1, W_1) \dots (U_k, W_k) \in F\}$ est une famille de coupes de taille m^k qui sépare chaque clique de chaque union d'au plus k stables. En effet, si K est une clique et $S_1 \dots S_k$ sont k stables, tels qu'ils n'intersectent pas K, alors il existe dans F k partitions $(U_1, W_1) \dots (U_k, W_k)$ telles que (U_i, W_i) sépare K et S_i. Maintenant $(\cap_{i=1}^{k} U_i, \cup_{i=1}^{k} W_i)$ est une partition qui sépare K de $\cup_{i=1}^{k} S_i$. Avec le même argument, on peut construire une famille F'' de coupes de taille m^{k^2} qui sépare chaque union d'au plus k cliques d'union d'au plus k stables. Maintenant soit T un trigraphe de $\mathcal{C}^{\leq k}$ et soit $G \in \mathcal{C}$, tel que G est une réalisation de T. Remarquons qu'une clique K (resp. un stable S) dans T est une union d'au plus k cliques (resp. stables) dans G. Par exemple on peut voir que $\Sigma(T) \cap K$ (resp. $\Sigma(T) \cap S$) est k-coloriable et chaque classe de couleur correspond à une clique (resp. un stable) dans G. Alors il existe un clique-stable séparateur de T de taille m^{k^2}. □

Nous pouvons maintenant montrer que le k-joint généralisé de deux trigraphes préserve la propriété de clique-stable séparation. En fait vu la structure assez forte du k-joint généralisé, les cliques traversantes (qui ont des sommets des deux côtés du k-joint généralisé) sont très contraintes. On peut donc presque prendre l'union des clique-stable séparateurs des deux trigraphes dont on est en train de prendre le k-joint généralisé.

Lemme 4.7. *Si T_1 et $T_2 \in \overline{\mathcal{C}^{\leq k}}$ admettent des clique-stable séparateurs de taille respectivement m_1 et m_2, alors le k-joint généralisé T de T_1 et T_2 admet un clique-stable séparateur de taille $m_1 + m_2$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle faite pour le lemme 4.4. On suit les notations introduites dans les définitions du k-joint généralisé. Soit F_1 (resp, F_2) un clique-stable séparateur de taille m_1 (resp. m_2) sur T_1 (resp. T_2). Construisons F un clique-stable séparateur de T. Pour chaque coupe (U, W) dans F_1, construisons la coupe (U', W') suivant ces deux règles : pour tout $a \in \cup_{j=0}^{r} A_j$ (resp. $b \in B_i$),

$a \in U'$ (resp. $b \in U'$) si et seulement si $a \in U$ (resp. $b_i \in U$). En d'autres termes, on prend une coupe similaire à (U, W) en mettant B_i du même côté que b_i. On fait l'opération symétrique pour chaque coupe (U, W) dans F_2 en mettant A_j du même côté que a_j.

F est bien un clique-stable séparateur : soit K une clique et S un stable qui ne s'intersectent pas. Supposons pour commencer qu'un côté de la partition $(A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_s)$ intersecte à la fois K et S. Quitte à échanger T_1 et T_2 et à renuméroter les A_j, on peut supposer que $A_1 \cap K \neq \emptyset$ et $A_1 \cap S \neq \emptyset$. Puisque pour tout i, A_1 est ou bien fortement complet ou bien fortement anti-complet à B_i, B_i ne peut intersecter à la fois K et S. Considérons dans T_1 la paire $(K' = (K \cap V(T)) \cup K_b, S' = (S \cap V(T)) \cup S_b)$ avec $K_b = \{b_i | K \cap B_i \neq \emptyset\}$ et $S_b = \{b_i | S \cap B_i \neq \emptyset\}$. K' est une clique dans T_1, S' est un stable dans T_1. Comme ils ne s'intersectent pas, il y a une coupe les séparant dans F_1. La coupe correspondante dans F sépare K et S.

L'autre cas est celui ou aucune partie de la partition n'intersecte à la fois K et S. Alors pour tout i, B_i n'intersectent pas non plus à la fois la clique K et le stable S : le même argument que ci-dessus s'applique encore. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème principal de cette section.

Théorème 4.8. *Si tout graphe de $\mathcal{C}$ admet un clique-stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^c)$, alors tout trigraphe de $\overline{\mathcal{C}^{\leq k}}$ admet un clique-stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^{k^2 c})$. En particulier, toute réalisation d'un trigraphe de $\overline{\mathcal{C}^{\leq k}}$ admet un clique-stable séparateur de taille $\mathcal{O}(n^{k^2 c})$.*

Démonstration. On prouve par induction qu'il existe un clique-stable séparateur de taille $pn^{k^2 c}$ avec $p = \max(p', 2^{p_0})$ où p' est la constante du $\mathcal{O}$ de la taille du clique-stable séparateur des graphes de $\mathcal{C}$ et p_0 est une constante définie dans la suite. Le cas de base comporte deux cas : les trigraphes de $\mathcal{C}^{\leq k}$, pour lesquels la propriété est vérifiée d'après le lemme 4.6 et les trigraphes d'ordre au plus p_0. Pour ces derniers, on peut considérer tous les sous-ensembles U de sommets et prendre les coupes $(U, V \setminus U)$ qui forment un clique-stable séparateur trivial de taille au plus $2^{p_0} n^{k^2 c}$.

Par conséquent, on peut supposer que T est le k-joint généralisé de T_1 et T_2 et qu'il a au moins p_0 sommets. Soit $n_1 = |T_1|$ et $n_2 = |T_2|$ avec $n_1 + n_2 = n + r + s$ et $r + s + 1 \leq n_1, n_2, \leq n - 1$. Par induction, il existe un clique-stable séparateur de taille $pn_1^{k^2 c}$ sur T_1 et un de taille $pn_2^{k^2 c}$ sur T_2. D'après le lemme 4.7, il existe

un clique-stable séparateur sur T de taille $pn_1^{k^2c} + pn_2^{k^2c}$. On veut démontrer que $pn_1^{k^2c} + pn_2^{k^2c} \leq pn^{k^2c}$.

Remarquons que $n_1+n_2 = n-1+r+s+1$ donc par convexité de $x \mapsto x^c$ sur $\mathbb{R}^+$, $n_1^{k^2c}+n_2^{k^2c} \leq (n-1)^{k^2c}+(r+s+1)^{k^2c}$. De plus, $r+s+1 \leq 2k+1$. Définissons alors p_0 suffisamment grand pour que pour tout $n \geq p_0$, $n^{k^2c} - (n-1)^{k^2c} \geq (2k+1)^{k^2c}$. Alors $n_1^{k^2c} + n_2^{k^2c} \leq n^{k^2c}$, ce qui conclut la démonstration.

□

Dans ce chapitre également les résultats sortent du cadre des graphes de Berge apprivoisés pour s'étendre aux graphes clos par k-joint. Le point clé est de remarquer que les cliques ne peuvent pas vraiment traverser un k-joint. Le seul cas possible de traversée est entre deux ensembles complets du k-joint, mais dans ce cas comme les ensembles sont complets, le stable ne peut pas lui aussi intersecter ces deux ensembles.

Chapitre 5

Calcul du stable maximum

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec Maria Chudnovsky, Nicolas Trotignon et Kristina Vušković, ils font l'objet d'un article [15] soumis à Journal of Combinatorial Theory, Series B.

Nous allons dans ce chapitre montrer comment calculer en temps polynomial la taille du stable maximum dans les graphes de Berge apprivoisés. En toute rigueur ce problème est déjà résolu dans les graphes parfaits et donc a fortiori dans les graphes de Berge apprivoisés. Cependant la démonstration, due à Grötschel, Lovász et Schrijver [33] n'utilise pas du tout la structure (au sens du théorème de décomposition) des graphes parfaits (qui lui est postérieur) mais utilise principalement l'égalité entre les nombre chromatique χ et la taille d'une clique maximumω. En effet Lovász [29] introduit une quantité ϑ, résultat d'un problème d'optimisation convexe. Dans les graphes cette quantité vérifie l'inégalité $\alpha \leq \vartheta \leq \overline{\chi}$ ($\overline{\chi}$ est la taille d'une couverture par clique minimale). Dans les graphes parfaits, ϑ est donc égal à α la taille maximum d'un stable. Grâce à la méthode de l'ellipsoïde inventée par Grötschel, Lovász et Schrijver [23], il est alors possible de calculer α en temps polynomial. L'intérêt de notre résultat est qu'il est complétement combinatoire. À partir de ce résultat il est possible de colorier les graphes de Berge apprivoisés avec un surcout de $\mathcal{O}(n^2)$ en utilisant la démonstration classique de Grötschel, Lovász et Schrijver [33]. Comme dans les chapitres précédents nous allons décomposer le graphe grâce au théorème 2.10, et faire une induction. Malheureusement contrairement aux chapitres précédents notre méthode n'est pas générale vis à vis des 2-joints et donc ne se généralise pas aux classes closes par k-joints généralisées.

En effet la structure des stables dépend de la parité du 2-joint (voir surtout le lemme 5.3 et le lemme 5.4).

Afin de pouvoir faire l'induction nous avons besoin de travailler avec des trigraphes pondérés. Donc dans la suite de ce chapitre, le terme "trigraphe" signifie un trigraphe avec des poids sur ses sommets. Les poids sont des nombres de K avec K ou bien l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels strictement positifs ou bien $\mathbb{N}_+$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Les théorèmes sont vrais pour $K = \mathbb{R}_+$ mais les algorithmes sont implémentés avec $K = \mathbb{N}_+$. On voit un trigraphe sans poids sur ses sommets comme un trigraphe pondéré avec tous ses poids égaux à 1. Remarquons qu'un ensemble de sommets dans un trigraphe T est un stable fort, si et seulement si c'est un stable dans la réalisation complète de T.

5.1 Le cas des trigraphes basiques

Commençons par montrer que nous pouvons reconnaître les classes basiques et calculer un stable pondéré maximum dans ces classes.

Théorème 5.1. *Il existe un algorithme en temps $\mathcal{O}(n^4)$ dont l'entrée est un trigraphe et dont la sortie est ou bien "T n'est pas basique", ou bien le nom de la classe de base de T et le poids maximum d'un stable fort de T.*

Démonstration. Pour toute classe de trigraphe basique, nous fournissons un algorithme en temps $\mathcal{O}(n^4)$ qui décide si le trigraphe appartient à la classe et si c'est le cas, calcule le poids maximum d'un stable fort.

Pour les trigraphes bipartis, on construit la réalisation complète G de T. Il est immédiat de voir que T est biparti si et seulement si G l'est. On peut donc reconnaitre un trigraphe biparti en temps linéaire en utilisant un parcours. Si T est biparti, un stable maximum de G est exactement un stable fort maximum de T, et on peut le calculer en temps $\mathcal{O}(n^3)$ voir [33].

Pour les compléments de trigraphes bipartis, nous procédons de manière analogue : nous commençons par prendre le complément $\overline{T}$ de notre trigraphe T, et nous reconnaissons si la réalisation complète de $\overline{T}$ est un graphe biparti. Nous calculons ensuite le poids maximum d'une clique de $G_{\emptyset}^{\overline{T}}$. Toutes ces opérations peuvent clairement se faire en temps $\mathcal{O}(n^2)$.

Pour les line trigraphes, nous calculons la réalisation complète G et testons si G est un line graphe d'un graphe biparti par un algorithme classique comme [27] ou [32]. Notons que ces algorithmes fournissent également le graphe R tel que

$G = L(R)$. En temps $\mathcal{O}(n^3)$ nous pouvons vérifier que les cliques de taille au moins 3 dans T sont bien des cliques fortes. On peut donc reconnaitre si T est un line trigraphe en temps $\mathcal{O}(n^3)$. Si c'est le cas, un stable maximum dans G peut être calculer en temps $\mathcal{O}(n^3)$ en calculant un couplage de poids maximum (voir [33]) dans le graphe biparti R tel que $G = L(R)$.

Pour les compléments de line trigraphes, nous procédons de manière similaire pour la reconnaissance en prenant la réalisation complète de $\overline{T}$. Et le calcul du poids maximum d'un stable fort est simple : nous calculons la réalisation complète G de T, nous calculons ensuite le graphe biparti R tel que $G = \overline{L(R)}$ (il existe car d'après le lemme 2.1, les line trigraphes sont clos par réalisation) et nous calculons un stable de poids maximum de G (un tel stable est un ensemble maximal d'arête de R toutes deux à deux adjacentes, et il y a un nombre linéaire de tels ensembles). C'est alors un stable fort de poids maximum dans T.

Pour les trigraphes doublés, nous ne pouvons pas utiliser de résultats classiques. Pour la reconnaissance, nous pourrions utiliser la liste des graphes non doublés minimaux décrite dans [2]. Cette liste de 44 graphes sur au plus 9 sommets donne un algorithme de reconnaissance en temps $\mathcal{O}(n^9)$. Plus récemment Maffray à donné un algorithme linéaire [31] pour la reconnaissance des graphes doublés. Malheureusement ce résultat ne semble pas se généraliser directement aux trigraphes. Nous proposons ici un algorithme en $\mathcal{O}(n^4)$ qui fonctionne également sur des trigraphes.

Si une partition (X, Y) des sommets d'un trigraphe est donné, on peut décider si c'est une bonne partition, par une génération exhaustive qui vérifie tous les points de la définition en temps $\mathcal{O}(n^2)$. Et si une arête ab de $T|X$ est donnée, il est facile de reconstruire la bonne partition : tous les sommets fortement antiadjacents aux sommets a et b sont dans X et tous les sommets fortement adjacents à au moins a ou b sont dans Y. Donc en testant toutes les arêtes uv, on peut prédire laquelle est dans $T|X$, puis reconstruire (X, Y) et donc décider en temps $\mathcal{O}(n^4)$ si le trigraphe T a une bonne partition (X, Y), telle que X contient au moins une arête. De la même manière on peut tester si le trigraphe T a une bonne partition (X, Y), telle que Y contient au moins une antiarête. Reste le cas de la reconnaissance des trigraphes doublés, tels que toute bonne partition est composée d'une clique forte et d'un stable fort. Dans ce cas le trigraphe est en fait un graphe, et ce type de graphe est connu comme un *split graphe*. Ils peuvent être reconnus en temps linéaire, voir [25] où il est prouvé qu'en regardant les degrés on peut facilement trouver une partition en clique et stable si une telle partition existe.

Maintenant que nous savons reconnaitre si le trigraphe T est un trigraphe doublé, regardons comment calculer le poids maximum d'un stable fort de T.

Calculons la réalisation complète G de T. D'après 2.2, G est un graphe doublé, et en fait (X, Y) est une bonne partition pour G. Nous calculons alors un stable pondéré maximum dans $G|X$ (qui est biparti), dans $G|Y$ (dont le complément est biparti), et tous les stables formés d'un sommet de Y et de ses non-voisins dans X. Un de ces stables est de poids maximum dans G et donc est un stable fort de poids maximum dans T. □

5.2 Stocker α dans les blocs

Dans cette section, nous définissons plusieurs blocs de décomposition qui vont nous permettre de calculer le stable de poids maximum. Nous notons $\alpha(T)$ le poids maximum d'un stable fort de T.

Dans la suite, T est un trigraphe de Berge apprivoisé, X est un fragment de T et $Y = V(T) \setminus X$ (donc Y est aussi un fragment de T). Pour calculer $\alpha(T)$, il n'est pas suffisant de considérer les blocs T_X et T_Y (comme défini dans le chapitre 2) séparément. Nous devons élargir les blocs afin d'encoder l'information de l'autre bloc. Dans cette section nous définissons quatre gadgets différents, $T_{Y,1}$, ..., $T_{Y,4}$ et pour $i = 1, \ldots, 4$, nous prouvons que $\alpha(T)$ peut être calculé à partir de $\alpha(T_{Y_i})$. Nous définissons parfois plusieurs gadgets pour la même situation. En effet, dans la section 5.3 (notamment pour démontrer le lemme 5.9), nous avons besoin que nos gadgets préservent les classes de base, et suivant ces classes de base nous utilisons différents gadgets. Les gadgets que nous allons définir ne préservent pas la classe (certains introduisent des skew-partitions équilibrées). Ce n'est pas un problème dans cette section, mais il faudra y prendre garde dans la section suivante.

Dans [37], un résultat de NP-complétude est prouvé, qui suggère que les 2-joints ne sont sans doute pas un outil utile pour calculer des stables maximum. En effet Trotignon et Vušković exhibent une classe de graphes $\mathcal{C}$ avec une théorème de décomposition du type : tout graphe de $\mathcal{C}$ est ou bien un line graphe, ou bien un graphe biparti ou bien admet un 2-joint. Cependant le calcul du stable maximum dans la classe $\mathcal{C}$ est NP=complet. Il semble donc que pour pouvoir utiliser les 2-joints, nous devons vraiment utiliser le fait que nos trigraphes sont de Berge. Ceci est fait en prouvant plusieurs inégalités.

Si (X, Y) est un 2-joint de T alors soit $X_1 = X$, $X_2 = Y$ et soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2). Nous définissons $\alpha_{AC} = \alpha(T|(A_1 \cup C_1))$, $\alpha_{BC} = \alpha(T|(B_1 \cup C_1))$, $\alpha_C = \alpha(T|C_1)$ et $\alpha_X = \alpha(T|X_1)$. Soit w la fonction de poids sur $V(T)$, $w(H)$ est la somme des poids sur les sommets de H.

Lemme 5.2. *Soit S un stable fort de poids maximum de T. Alors exactement un des points suivants est vérifié :*

1. $S \cap A_1 \neq \emptyset$, $S \cap B_1 = \emptyset$, $S \cap X_1$ *est un stable fort maximum de* $T|(A_1 \cup C_1)$ *et* $w(S \cap X_1) = \alpha_{AC}$ *;*
2. $S \cap A_1 = \emptyset$, $S \cap B_1 \neq \emptyset$, $S \cap X_1$ *est un stable fort maximum de* $T|(B_1 \cup C_1)$ *et* $w(S \cap X_1) = \alpha_{BC}$ *;*
3. $S \cap A_1 = \emptyset$, $S \cap B_1 = \emptyset$, $S \cap X_1$ *est un stable fort maximum de* $T|C_1$ *et* $w(S \cap X_1) = \alpha_C$ *;*
4. $S \cap A_1 \neq \emptyset$, $S \cap B_1 \neq \emptyset$, $S \cap X_1$ *est un stable fort maximum de* $T|X_1$ *et* $w(S \cap X_1) = \alpha_X$.

Démonstration. Directe depuis la définition d'un 2-joint. □

Nous avons besoin de plusieurs inégalités à propos des intersections entre les stables forts et les 2-joints. Ces lemmes sont prouvés dans [37] pour les graphes. Les démonstrations sont similaires pour les trigraphes mais comme ce sont ces inégalités qui nous permettent d'utiliser le fait que les trigraphes sont de Berge nous les incluons ici.

Lemme 5.3. $0 \leq \alpha_C \leq \alpha_{AC}, \alpha_{BC} \leq \alpha_X \leq \alpha_{AC} + \alpha_{BC}$.

Démonstration. Les inégalités $0 \leq \alpha_C \leq \alpha_{AC}, \alpha_{BC} \leq \alpha_X$ sont trivialement vraies. Soit D un stable fort pondéré de poids maximum de $T|X_1$. Nous avons :

$$\alpha_X = w(D) = w(D \cap A_1) + w(D \cap (C_1 \cup B_1)) \leq \alpha_{AC} + \alpha_{BC}.$$

□

Lemme 5.4. *Si (X_1, X_2) est un 2-joint impair de T, alors $\alpha_C + \alpha_X \leq \alpha_{AC} + \alpha_{BC}$.*

Démonstration. Soit D un stable fort de $T|X_1$ de poids α_X et C un stable fort de $T|C_1$ de poids α_C. Dans le trigraphe biparti $T|(C \cup D)$, on note par Y_A (resp. Y_B) l'ensemble des sommets de $C \cup D$ pour lesquels il existe un chemin dans $T|(C \cup D)$ les reliant à des sommets de $D \cap A_1$ (resp. $D \cap B_1$). Remarquons que par définition, $D \cap A_1 \subseteq Y_A$, $D \cap B_1 \subseteq Y_B$ et il n'y a pas d'arêtes entre $Y_A \cup Y_B$ et $(C \cup D) \setminus (Y_A \cup Y_B)$. Montrons que $Y_A \cap Y_B = \emptyset$, et Y_A est fortement complet à Y_B.

Supposons le contraire, alors il existe un chemin P dans $T|(C \cup D)$ d'un sommet de $D \cap A_1$ à un sommet de $D \cap B_1$. On peut supposer que P est minimal vis à vis de cette propriété, et donc que l'intérieur de P est dans C_1 ; Par conséquent, P est de longueur paire car $T|(C \cup D)$ est biparti. Ceci contredit l'hypothèse sur le fait que (X_1, X_2) était impair. Nous définissons alors :

— $Z_A = (D \cap Y_A) \cup (C \cap Y_B) \cup (C \setminus (Y_A \cup Y_B))$;

— $Z_B = (D \cap Y_B) \cup (C \cap Y_A) \cup (D \setminus (Y_A \cup Y_B)$.

Des définitions et des propriétés ci-dessus, Z_A et Z_B sont des stables forts et $Z_A \subseteq A_1 \cup C_1$ et $Z_B \subseteq B_1 \cup C_1$. Donc, $\alpha_C + \alpha_X = w(Z_A) + w(Z_B) \leq \alpha_{AC} + \alpha_{BC}$. □

Lemme 5.5. *Si (X_1, X_2) est un 2-joint pair de T, alors $\alpha_{AC} + \alpha_{BC} \leq \alpha_C + \alpha_X$.*

Démonstration. Soit A un stable fort de $T|(A_1 \cup C_1)$ de poids α_{AC} et B un stable fort de $T|(B_1 \cup C_1)$ de poids α_{BC}. Dans le trigraphe biparti $T|(A \cup B)$, on note Y_A (resp. Y_B) l'ensemble des sommets de $A \cup B$ pour lesquels il existe un chemin P dans $T|(A \cup B)$ les reliant à un sommet de $A \cap A_1$ (resp. $B \cap B_1$). Remarquons que d'après les définitions, $A \cap A_1 \subseteq Y_A$, $B \cap B_1 \subseteq Y_B$, et $Y_A \cup Y_B$ est fortement anticomplet à $(A \cup B) \setminus (Y_A \cup Y_B)$. Nous allons montrer que $Y_A \cap Y_B = \emptyset$ et Y est fortement anticomplet à Y_B. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe un chemin P dans $T|(A \cup B)$ d'un sommet de $A \cap A_1$ à un sommet de $B \cap B_1$. On peut supposer que P est minimal vis à vis de cette propriété, et donc que son intérieur est dans C_1 ; par conséquent, il est de longueur impaire car $T|(A \cup B)$ est biparti. Ceci contredit l'hypothèse sur le fait que (X_1, X_2) était pair. Nous définissons alors :

— $Z_D = (A \cap Y_A) \cup (B \cap Y_B) \cup (A \setminus (Y_A \cup Y_B))$;

— $Z_C = (A \cap Y_B) \cup (B \cap Y_A) \cup (B \setminus (Y_A \cup Y_B))$.

À partir des définitions et des propriétés ci-dessus, Z_D et Z_C sont des stables forts et $Z_D \subseteq X_1$ et $Z_C \subseteq C_1$. Donc, $\alpha_{AC} + \alpha_{BC} = w(Z_C) + w(Z_D) \leq \alpha_C + \alpha_X$. □

Nous pouvons maintenant construire nos gadgets.

Si (X, Y) est un complément de 2-joint propre de T, alors soit $X_1 = X$, $X_2 = Y$ et $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de(X_1, X_2). Nous construisons le gadget $T_{Y,1}$ comme suit. Nous partons de $T|Y$ et nous ajoutons deux nouveaux *sommets marqués* a, b, tels que a est fortement complet à $B_2 \cup C_2$, b est fortement complet à $A_2 \cup C_2$ et ab est une arête forte. Nous donnons les poids $\alpha_A = \alpha(T|A_1)$ et $\alpha_B = \alpha(T|B_1)$ respectivement aux sommets a et b. Nous notons $\alpha_X = \alpha(T|X)$.

Lemme 5.6. *Si (X, Y) est un complément de 2-joint propre de T, alors $T_{Y,1}$ est de Berge et $\alpha(T) = \max(\alpha(T_{Y,1}), \alpha_X)$.*

Démonstration. Puisque $T_{Y,1}$ est une semiréalisation d'un sous-trigraphe induit du bloc T_Y, comme défini dans le chapitre 2, il est clairement de Berge d'après 2.11.

Soit Z un stable fort pondéré de poids maximum dans T. Si $Z \cap X_1 = \emptyset$, alors Z est aussi un stable fort dans $T_{Y,1}$, donc $\alpha(T) \leq \alpha(T_{Y,1}) \leq \max(\alpha(T_{Y,1}), \alpha_X)$. Si $Z \cap A_1 \neq \emptyset$ et $Z \cap (B_1 \cup C_1) = \emptyset$, alors $\{a_1\} \cup (Z \cap X_2)$ est un stable fort dans $T_{Y,1}$ de poids $\alpha(T)$, donc $\alpha(T) \leq \alpha(T_{Y,1}) \leq \max(\alpha(T_{Y,1}), \alpha_X)$. Si $Z \cap B_1 \neq \emptyset$ et $Z \cap (A_1 \cup C_1) = \emptyset$, alors $\{b_1\} \cup (Z \cap X_2)$ est un stable fort dans $T_{Y,1}$ de poids $\alpha(T)$, donc $\alpha(T) \leq \alpha(T_{Y,1}) \leq \max(\alpha(T_{Y,1}), \alpha_X)$. Si $Z \cap (A_1 \cup C_1) \neq \emptyset$ et $Z \cap (B_1 \cup C_1) \neq \emptyset$, alors $\alpha(T) = \alpha_X$, donc $\alpha(T) \leq \max(\alpha(T_{Y,1}), \alpha_X)$. Dans tous les cas nous avons prouvé que $\alpha(T) \leq \max(\alpha(T_{Y,1}), \alpha_X)$.

Réciproquement, soit $\alpha = \max(\alpha(T_{Y,1}), \alpha_X)$. Si $\alpha = \alpha_X$, alors en considérant n'importe quel stable fort de $T|X_1$, nous voyons que $\alpha = \alpha_X \leq \alpha(T)$. Nous pouvons donc supposer que $\alpha = \alpha(T_{Y,1})$ et soit Z un stable fort pondéré de poids maximum dans $T_{Y,1}$. Si $a \notin Z$ et $b \notin Z$, alors Z est aussi un stable fort dans T, donc $\alpha \leq \alpha(T)$. Si $a \in Z$ et $b \notin Z$, alors $Z' \cup Z \setminus \{a\}$, où Z' est un stable fort pondéré de poids maximum dans $T|A_1$, est aussi un stable fort dans T de même poids que Z, donc $\alpha \leq \alpha(T)$. Si $a \notin Z$ et $b \in Z$, alors $Z' \cup Z \setminus \{b\}$ quand Z' est un stable de poids maximum dans $T|B_1$ est aussi un stable fort dans T de même poids que Z, donc $\alpha \leq \alpha(T)$. Dans tous les cas, nous avons prouvé que $\alpha \leq \alpha(T)$. $\square$

Si (X_1, X_2) est un 2-joint propre impair de T, alors nous construisons le gadget $T_{Y,2}$ comme suit. Nous commençons avec $T|Y$. Nous ajoutons ensuite quatre nouveaux *sommets marqués* a, a', b, b', tels que a et a' soient fortement complets à A_2, b et b' soient fortement complets à B_2, et ab est une arête forte. Nous donnons les poids $\alpha_{AC} + \alpha_{BC} - \alpha_C - \alpha_X$, $\alpha_X - \alpha_{BC}$, $\alpha_{AC} + \alpha_{BC} - \alpha_C - \alpha_X$ et $\alpha_X - \alpha_{AC}$ à respectivement a, a', b et b'. Remarquons que d'après 5.3 et 5.4, tous les poids sont positifs.

Nous définissons un autre gadget de décomposition $T_{Y,3}$ pour la même situation, de la manière suivante. Nous commençons avec $T|Y$. Nous ajoutons ensuite trois nouveaux *sommets marqués* a, a', b, tels que a et a' sont fortement complets à A_2, b est fortement complets à B_2, et $a'a$ et ab sont des arêtes fortes. Nous donnons les poids $\alpha_{AC} - \alpha_C$, $\alpha_X - \alpha_{BC}$ et $\alpha_{BC} - \alpha_C$ à respectivement a, a' et b. Remarquons que d'après 5.3, tous les poids sont positifs.

Lemme 5.7. *Si (X, Y) est un 2-joint propre de T, alors $T_{Y,2}$ et $T_{Y,3}$ sont de Berge, et $\alpha(T) = \alpha(T_{Y,2}) + \alpha_C = \alpha(T_{Y,3}) + \alpha_C$.*

Démonstration. Supposons que $T_{Y,2}$ contienne un trou impair H. Puisqu'un trou impair n'a pas de sommet fortement dominant, il contient au plus un sommet parmi a, a' et au plus un sommet parmi b, b'. Donc H est un trou impair d'une semiréalisation du bloc T_Y (comme défini dans le chapitre 2). Ceci contredit 2.11. De la même manière, $T_{Y,2}$ ne contient pas d'antitrou impair, et est donc de Berge. La démonstration que $T_{Y,3}$ est de Berge est similaire.

Soit Z un stable fort dans T de poids $\alpha(T)$. Nous construisons un stable fort dans $T_{Y,2}$ en ajoutant à $Z \cap X_2$ un des ensembles suivants (en fonction de la conclusion du lemme 5.2) : $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$, $\emptyset$, ou $\{a, a', b'\}$. Dans chaque cas, nous obtenons un stable fort de $T_{Y,2}$ de poids $\alpha(T) - \alpha_C$. Ce qui prouve que $\alpha(T) \leq \alpha(T_{Y,2}) + \alpha_C$.

Réciproquement, soit Z un stable dans $T_{Y,2}$ de poids $\alpha(T_{Y,2})$. On peut supposer que $Z \cap \{a, a', b, b'\}$ est un des ensembles $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$, $\emptyset$, ou $\{a, a', b'\}$, et suivant chacun de ces cas, on construit un stable fort de T en ajoutant à $Z \cap X_2$ un stable fort pondéré de poids maximum d'un des trigraphes suivants : $T|(A_1 \cup C_1)$, $T|(B_1 \cup C_1)$, $T|C_1$, ou $T|X_1$. Nous obtenons un stable fort dans T de poids $\alpha(T_{Y,2}) + \alpha_C$, prouvant que $\alpha(T_{Y,2}) + \alpha_C \leq \alpha(T)$. Ceci complète la démonstration pour $T_{Y,2}$.

Prouvons maintenant l'égalité pour $T_{Y,3}$. Soit Z un stable fort dans T de poids $\alpha(T)$. Nous construisons un stable fort dans $T_{Y,3}$ en ajoutant à $Z \cap X_2$ un des ensembles suivants (en fonction de la conclusion du lemme 5.2) : $\{a\}$, $\{b\}$, $\emptyset$, or $\{a', b\}$. Dans chaque cas, nous obtenons un stable fort de $T_{Y,3}$ de poids $\alpha(T) - \alpha_C$. Ceci prouve que $\alpha(T) \leq \alpha(T_{Y,3}) + \alpha_C$.

Réciproquement, soit Z un stable de $T_{Y,3}$ de poids $\alpha(T_{Y,3})$. D'après 5.4, $\alpha_{AC} - \alpha_C \geq \alpha_X - \alpha_{BC}$, on peut donc supposer que $Z \cap \{a, a', b\}$ est un des ensembles $\{a\}$, $\{b\}$, $\emptyset$, ou $\{a', b\}$, et suivant chacun, nous construisons un stable fort de T en ajoutant à $Z \cap X_2$ un stable fort pondéré de poids maximum d'un des trigraphes suivants : $T|(A_1 \cup C_1)$, $T|(B_1 \cup C_1)$, $T|C_1$, ou $T|X_1$. Nous obtenons alors un stable fort dans T de poids $\alpha(T_{Y,3}) + \alpha_C$, ce qui prouve que $\alpha(T_{Y,3}) + \alpha_C \leq \alpha(T)$. Ceci termine la démonstration pour $T_{Y,3}$. □

Si (X_1, X_2) est un 2-joint propre pair de T et $X = X_1$, $Y = X_2$, alors soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2). Nous construisons le gadget $T_{Y,4}$ comme suit. Nous partons que $T|Y$. Nous ajoutons ensuite trois nouveaux *sommets marqués* a, b, c, tels que a est fortement complet à A_2, b est fortement

complet à B_2, et c est fortement adjacent aux sommets a et b et n'a aucun autre voisin. Nous donnons les poids $\alpha_X - \alpha_{BC}$, $\alpha_X - \alpha_{AC}$, et $\alpha_X + \alpha_C - \alpha_{AC} - \alpha_{BC}$ à respectivement a, b et c. Remarquons que d'après 5.3 et 5.5, ces poids sont positifs.

Lemme 5.8. *Si (X, Y) est un 2-joint propre pair de T, alors $T_{Y,4}$ est de Berge et $\alpha(T) = \alpha(T_{Y,4}) + \alpha_{AC} + \alpha_{BC} - \alpha_X$.*

Démonstration. Clairement, $T_{Y,4}$ est de Berge, car c'est la semiréalisation du bloc T_Y comme défini dans le chapitre 2, qui est de Berge d'après 2.11.

Soit Z un stable fort dans T de poids $\alpha(T)$. Nous construisons un stable fort dans $T_{Y,4}$ en ajoutant à $Z \cap X_2$ un des ensembles suivant (suivant la conclusion de 5.2) : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, ou $\{a, b\}$. Dans chaque cas, nous obtenons un stable fort de $T_{Y,4}$ de poids $\alpha(T) - (\alpha_{AC} + \alpha_{BC} - \alpha_X)$. ce qui prouve que $\alpha(T) \leq \alpha(T_{Y,4}) + \alpha_{AC} + \alpha_{BC} - \alpha_X$.

Réciproquement, soit Z un stable fort dans $T_{Y,4}$ de poids $\alpha(T_{Y,4})$. On peut supposer que $Z \cap \{a, b, c\}$ est un des ensembles $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, ou $\{a, b\}$, et suivant ces cas, nous construisons un stable fort de T en ajoutant à $Z \cap X_2$ un stable fort pondéré de poids maximum d'un des trigraphes suivant : $T|(A_1 \cup C_1)$, $T|(B_1 \cup C_1)$, $T|C_1$, ou $T|X_1$. Nous obtenons un stable fort de T de poids $\alpha(T_{Y,4}) + \alpha_{AC} + \alpha_{BC} - \alpha_X$, ce qui prouve que $\alpha(T_{Y,4}) + \alpha_{AC} + \alpha_{BC} - \alpha_X \leq \alpha(T)$. □

5.3 Calculer α

Nous sommes maintenant prêt à décrire notre algorithme de calcul d'un stable fort pondéré de poids maximal. La difficulté principale est que les blocs de décomposition définis dans le chapitre 2 doivent être utilisés pour rester dans la classe, alors que les gadgets définis dans la section 5.2 doivent être utilisés pour calculer α. Notre idée est de commencer par utiliser les blocs de décomposition dans un premier temps, puis de les remplacer par les gadgets lors d'une deuxième étape. Pour transformer un bloc en un gadget (ce que nous appelons réaliser une *expansion*), nous devons effacer une composante optionnelle, et la remplacer par un groupe de sommets de poids bien choisi. Pour cela nous avons besoin de deux informations ; la première est le type de décomposition utilisé originellement pour créer cette composante optionnelle, ainsi que les poids associés ; ces informations sont encodées dans ce que nous appelons un *pré-label*. La seconde information nécessaire est le type de la classe basique dans laquelle cette composante optionnelle va finir (car tous les gadgets ne préservent pas toutes les classes basiques) ; cette information

est encodée dans ce que nous appelons un *label*. Remarquons que le pré-label est connu juste après la décomposition du trigraphe, alors que le label n'est connu qu'après, lorsque le trigraphe est complétement décomposé. Formalisons cela.

Soit S une composante optionnelle d'un trigraphe bigame T. Un *pré-label* de S est défini par :

— ("Complément de 2-joint impair", $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_X$) avec α_A, α_B et α_X des entiers, si S est une arête optionnelle.

— ("2-joint impair", $\alpha_{AC}, \alpha_{BC}, \alpha_C, \alpha_X$) avec α_{AC}, α_{BC}, α_C et α_X des entiers, si S est une arête optionnelle et qu'aucun sommet de T n'est complet à S.

— ("Complément de 2-joint pair", $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_X$) avec α_A, α_B et α_X des entiers, si S est un composante lourde.

— ("2-joint pair", $\alpha_{AC}, \alpha_{BC}, \alpha_C, \alpha_X$) avec α_{AC}, α_{BC}, α_C et α_X des entiers, si S est une composante légère.

Remarquons que certains types de composantes optionnelles sont "éligibles" à la fois au premier et au deuxième pré-label.

Un pré-label doit être vu comme "la décomposition à partir de laquelle la composante optionnelle est construite". Quand T est un trigraphe et $\mathcal{S}$ est un ensemble des composantes optionnelles de T, une *fonction de pré-label* pour $(T, \mathcal{S})$ est une fonction qui associe à chaque $S \in \mathcal{S}$ un pré-label. Il est important de remarquer que $\mathcal{S}$ est seulement un ensemble de composantes optionnelles, donc certaines composantes optionnelles peuvent ne pas avoir de pré-label.

Notons que la définition suivante des labels est un peu ambigüe. En effet, lorsqu'on parle de "la classe basique contenant le trigraphe" il est possible que certains trigraphes soient contenus dans plusieurs classes basiques. C'est typiquement le cas des petits trigraphes et des trigraphes complets par exemple. Il est important de voir que cela n'est pas un problème ; si un trigraphe appartient à plusieurs classes de base, notre algorithme choisi arbitrairement une de ces classes, et produit un résultat correct. Pour ne pas compliquer les notations c'est pas n'est pas complétement formalisé dans notre algorithme. Pour les trigraphes doublés, il y a une autre ambiguïté. Si T est un trigraphe doublé et (X, Y) est une bonne partition de T, une arête optionnelle uv de T est une *arête de couplage* si $u, v \in X$ et une *antiarête de couplage* si $u, v \in Y$. Dans certains cas dégénérés, une arête optionnelle d'un trigraphe doublé peut être à la fois une arête de couplage et une antiarête de couplage suivant la bonne partition choisie, cependant une fois la bonne partition choisie il n'y a plus d'ambiguïté. Là encore ce n'est pas un problème : lorsqu'une arête optionnelle est ambigüe, notre algorithme choisi arbitrairement une bonne partition.

Soit S une arête optionnelle d'un trigraphe bigame. Un *label* pour S est une paire $L' = (L, N)$, tel que L est un pré-label et N est une des étiquettes suivantes : "biparti", "complément de bipartite", "line", "complément de line", "couplage doublé", "anticouplage doublé". On dit que L' *étend* L. l'étiquette ajoutée au pré-label d'une composante optionnelle S doit être pensée comme "la classe basique dans laquelle la composante S finit une fois que le trigraphe est complétement décomposé". Quand T est un trigraphe et $\mathcal{S}$ est un ensemble de composantes optionnelles de T, une *fonction de label* pour $(T, \mathcal{S})$ est une fonction qui associe à chaque $S \in \mathcal{S}$ un label. Dans ces conditions, on dit que T est étiqueté. Comme pour les pré-labels, les composantes optionnelles qui ne sont pas dans $\mathcal{S}$ ne reçoivent pas de label.

Soit T un trigraphe étiqueté, $\mathcal{S}$ un ensemble de composantes optionnelles de T et $\mathcal{L}$ une fonction de label pour $(T, \mathcal{S})$. *L'expansion* de $(T, \mathcal{S}, \mathcal{L})$, est le trigraphe obtenu à partir de T après avoir effectué pour chaque $S \in \mathcal{S}$ de label L l'opération suivante :

1. Si $L = ((\text{"Complément de 2-joint impair"}, \alpha_A, \alpha_B, \alpha_X), N)$ pour une étiquette N (donc S est une arête optionnelle ab) : transformer ab en arête forte, donner le poids α_A au sommet a et le poids α_B au sommet b.
2. Si $L = ((\text{"2-joint impair"}, \alpha_{AC}, \alpha_{BC}, \alpha_C, \alpha_X), N)$ pour une étiquette N (donc S est une arête optionnelle ab) : transformer ab en arête forte et :
   — Si N est une des étiquettes suivantes : "biparti", "complément de line", ou "couplage doublé", alors ajouter un sommet a', un sommet b', rendre a' fortement complet à $N(a) \setminus \{b\}$, rendre b fortement complet à $N(b) \setminus \{a\}$, et donner les poids $\alpha_{AC} + \alpha_{BC} - \alpha_C - \alpha_X$, $\alpha_X - \alpha_{BC}$, $\alpha_{AC} + \alpha_{BC} - \alpha_C - \alpha_X$ et $\alpha_X - \alpha_{AC}$ à respectivement a, a', b et b'
   — Si N est une des étiquettes suivantes : "complément de biparti", "line" ou "anticouplage doublé", alors ajouter un sommet a', rendre a' fortement complet à $\{a\} \cup N(a) \setminus \{b\}$ et donner les poids $\alpha_{AC} - \alpha_C$, $\alpha_X - \alpha_{BC}$ et $\alpha_{BC} - \alpha_C$ à respectivement a, a' et b
3. Si $L = ((\text{"Complément de 2-joint pair"}, \alpha_A, \alpha_B, \alpha_X), N)$ pour une étiquette N (donc S est composée de deux arêtes optionnelles ac et cb et c est lourd) : supprimer le sommet c, et donner les poids α_A au sommet a et α_B au sommet b.
4. Si $L = ((\text{"2-joint pair"}, \alpha_{AC}, \alpha_{BC}, \alpha_C, \alpha_X), N)$ pour une étiquette N (donc S est composée de deux arêtes optionnelles ac et cb, et c est léger) : transformer ac et cb en arête forte, donner les poids $\alpha_X - \alpha_{BC}$, $\alpha_X - \alpha_{AC}$, et $\alpha_X + \alpha_C - \alpha_{AC} - \alpha_{BC}$ à respectivement a, b et c.

L'expansion doit être vue comme "ce qui est obtenu si on utilise les gadgets comme défini dans la section 5.2 au lieu des blocs de décomposition comme défini dans le chapitre 2".

Théorème 5.9. *Supposons que T est un trigraphe qui est dans une classe basique d'étiquette N, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des composantes optionnelles de T et $\mathcal{L}$ est une fonction de label pour T, tels que pour tout $S \in \mathcal{S}$ de label L, un des points suivants est vérifié :*

- *$L = (\ldots, N)$ avec N une des étiquettes suivantes : "biparti", "complément de biparti", "line" ou "complément de line"; ou*
- *$N =$ "doublé", S est une arête de couplage de T et $L = (\ldots,$ "couplage doublé") ; ou*
- *$N =$ "doublé", S est une antiarête de couplage de T et $L = (\ldots,$ "anticouplage doublé").*

Alors l'expansion de $(T, \mathcal{S}, \mathcal{L})$ est un trigraphe basique.

Démonstration. À partir de nos hypothèses, T est basique. Donc il suffit de démontrer que l'expansion d'une composante optionnelle S préserve le fait d'être basique, et le résultat suivra par induction sur $\mathcal{S}$. Soit T' l'expansion. Dans plusieurs cas (c'est à dire dans les cas 1, 3 et 4) l'expansion consiste simplement à transformer des arêtes optionnelles en arêtes fortes et potentiellement supprimer des sommets. D'après 2.3, ces opérations préservent le fait d'être basique. Nous avons donc simplement à étudier le cas 2 de la définition des expansions. Nous pouvons donc supposer que S est une arête optionnelle ab.

Il est facile de voir que l'expansion comme définie dans le cas 2 préserve les trigraphes bipartis et les compléments de trigraphes bipartis ; donc si $N \in \{$"biparti", "complément de biparti"$\}$ le résultat est prouvé.

Supposons que $N =$"line", et donc T est un line trigraphe. Soit G la réalisation complète de T, et R le graphe biparti, tel que $G = L(R)$. Donc a est une arête $x_a y_a$ dans R, et b est un arête $y_a x_b$. Puisque T est un line trigraphe, toute clique de taille au moins 3 dans T est une clique forte, et donc a et b n'ont pas de voisin commun dans T. Donc tous les voisins de a, à l'exception de b, sont des arêtes incidentes à x_a et pas à y_a. Soit R' le graphe obtenu à partir de R en ajoutant une arête pendante e à x_a. Remarquons que $L(R')$ est isomorphe à la réalisation complète de T' (l'arête e correspond au nouveau sommet a'), et donc T' est un line trigraphe.

Supposons maintenant que $N =$"complément de line", donc T est le complément d'un line trigraphe. Puisque toute clique de taille au moins 3 dans $\overline{T}$ est une

clique forte, $V(T) = N(a) \cup N(b)$. Supposons qu'il existe $u, v \in N(a) \setminus N(b)$, tels que u est adjacent à v. Puisque $\overline{T}$ est un line trigraphe, et que uv est une semiarête, alors $\{u, v, b\}$ est une clique de taille 3 dans T. Soit R le graphe biparti, tel que la réalisation complète de $\overline{T}$ soit $L(R)$. Alors dans R aucune arête de u, v, a ne partage d'extrémité, cependant b partage une extrémité avec ces trois arêtes, c'est une contradiction. Ceci prouve que $N(a) \setminus N(b)$ (et par symétrie que $N(b) \setminus N(a)$) est un stable fort dans T. Comme $N(a) \cap N(b) = \emptyset$, alors T est biparti, et donc comme précédemment, T' est basique.

On peut donc supposer que T est un trigraphe doublé avec (X, Y) une bonne partition. Si $S = ab$ est une arête de couplage de T, alors ajouter les sommets a', b' à X produit une bonne partition de T'. Si $S = ab$ est une antiarête de couplage de T, alors ajouter le sommet a' à Y produit une bonne partition de T'. Dans tous les cas T' est basique et le résultat est prouvé. $\square$

Soit T un trigraphe, $\mathcal{S}$ un ensemble de composantes optionnelles de T, $\mathcal{L}$ une fonction de label de $(T, \mathcal{S})$ et T' l'expansion de $(T, \mathcal{S}, \mathcal{L})$. Soit $X \subseteq V(T)$. On définit *l'expansion de* $X \subseteq V(T)$ *en* X' comme suit. On part avec $X' = X$ et on effectue les opérations suivantes pour tout $S \in \mathcal{S}$.

1. Si $L = ((\text{“Complément de 2-joint impair”}, \alpha_A, \alpha_B, \alpha_X), N)$ pour une étiquette N (donc S est une arête optionnelle ab), ne pas modifier X'.

2. Si $L = ((\text{“2-joint impair”}, \alpha_{AC}, \alpha_{BC}, \alpha_C, \alpha_X), N)$ pour une étiquette N(donc S est une arête optionnelle ab) :
   — Si N est une des étiquettes suivantes : “biparti”, “complément de line”, ou “couplage doublé”, faire : si $a \in X$ alors ajouter a' à X', et si $b \in X$ alors ajouter b' à X'.
   — Si N est une des étiquettes suivantes : “complément de biparti”, “line” ou “anticouplage doublé”, faire : si $a \in X$ alors ajouter a' à X'.

3. Si $L = ((\text{“Complément de 2-joint pair”}, \alpha_A, \alpha_B, \alpha_X), N)$ pour une étiquette N (donc S est composée de deux arêtes optionnelles ac et cb et c est lourd), faire : si $c \in X$, alors supprimer c de X'.

4. Si $L = ((\text{“2-joint pair”}, \alpha_{AC}, \alpha_{BC}, \alpha_C, \alpha_X), N)$ pour une étiquette N (donc S est composée de deux arêtes optionnelles ac et cb et c est léger) ne pas modifier X'.

Théorème 5.10. *Avec les notations ci-dessus, si* (X_1, X_2) *est un* 2-*joint propre (resp. le complément d'un* 2-*joint propre) de* T *avec* $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ *une affectation de* (X_1, X_2)*, alors* (X'_1, X'_2) *est un*

2-joint propre (resp. le complément d'un 2-joint propre) de T' avec $(A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2)$ une affectation de (X'_1, X'_2), de même parité que (X_1, X_2). (Remarquons que la notion de parité fait sens pour T', puisque T' est de Berge d'après 5.6, 5.7 et 5.8).

Démonstration. Directe à partir des définitions. □

Théorème 5.11. *Il existe un algorithme avec les spécifications suivantes :*

Entrée : *Un triplet $(T, \mathcal{S}, \mathcal{L})$, tels que T est un trigraphe de Berge apprivoisé, $\mathcal{S}$ est un ensemble de composantes optionnelles de T et $\mathcal{L}$ est une fonction de pré-label pour $(T, \mathcal{S})$.*

Sortie : *Une fonction de label $\mathcal{L}'$ pour $(T, \mathcal{S})$ qui étend $\mathcal{L}$, et un stable fort pondéré de poids maximum de l'expansion de $(T, \mathcal{S}, \mathcal{L}')$.*

Complexité en temps : $O(n^5)$

Démonstration. Nous décrivons un algorithme récursif. La première étape de l'algorithme utilise 5.1 pour vérifier que T est basique. Remarquons que si T est un trigraphe doublé, l'algorithme de 5.1 calcule également quelles arêtes optionnelles sont des arêtes de couplage, et quelles arêtes optionnelles sont des antiarêtes de couplage.

Commençons par supposer que T est dans une classe basique de nom N (c'est en particulier le cas lorsque $|V(T)| = 1$). Nous étendons la fonction de pré-label $\mathcal{L}$ en une fonction de label $\mathcal{L}'$ comme suit : si $N \neq$"doublé", alors on ajoute N à tous les pré-labels et sinon, pour tout $S \in \mathcal{S}$ de label L, on ajoute "couplage doublé" (resp. "anticouplage doublé") à L si S est une arête de couplage (resp. antiarête de couplage). La fonction de label obtenue vérifie les hypothèses de 5.9, donc l'expansion T' de $(T, \mathcal{S}, \mathcal{L}')$ est basique, et en exécutant l'algorithme de 5.1 sur T', nous obtenons un stable fort pondéré de poids maximum de T' en temps $\mathcal{O}(n^4)$. Donc, nous pouvons bien calculer une fonction de label $\mathcal{L}'$ pour $T, \mathcal{S}$ qui étend $\mathcal{L}$, et un stable fort pondéré de poids maximum de l'expansion de $(T, \mathcal{S}, \mathcal{L}')$.

Supposons maintenant que T n'est pas basique. Puisque T est un trigraphe de Berge apprivoisé, d'après 2.10, nous savons que T se décompose par un 2-joint ou le complément d'un 2-joint. Dans [7], un algorithme fonctionnant en temps $\mathcal{O}(n^4)$ est donné pour calculer un 2-joint dans un graphe quelconque. En fait les 2-joints comme décrit dans [7] ne sont pas exactement ceux que nous utilisons : Le dernier point de notre définition n'a pas besoin d'être vérifié (celui qui assure

qu'aucun côté du 2-joint n'est réduit à un chemin de longueur exactement 2). Cependant la méthode du Théorème 4.1 de [7] montre comment ajouter ce type de contraintes sans perte de temps. Il est facile d'adapter cette méthode pour la détection de 2-joint dans un trigraphe (nous présentons d'ailleurs dans le chapitre 6 un algorithme similaire). Nous pouvons donc calculer la décomposition nécessaire en temps $\mathcal{O}(n^4)$. Nous calculons alors les blocs T_X et T_Y comme défini dans le chapitre 2. Remarquons que tout membre de $\mathcal{S}$ est une arête optionnelle de seulement un des blocs T_X ou T_Y. Nous appelons $\mathcal{S}_X$ (resp. $\mathcal{S}_Y$) l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ qui sont dans T_X (resp. T_Y). Soit S la composante optionnelle marquée utilisée pour créer le bloc T_Y. Observons que pour tout $u \in S$, il existe un sommet $v \in X$ tel que $N_T(v) \cap Y = N_{T_Y}(u) \cap Y$. De même pour T_X. Donc, la fonction de pré-label $\mathcal{L}$ pour $(T, \mathcal{S})$ induit naturellement une fonction de pré-label $\mathcal{L}_X$ pour $(T_X, \mathcal{S}_X)$ et une fonction de pré-label $\mathcal{L}_Y$ pour $(T_Y, \mathcal{S}_Y)$ (chaque $S \in \mathcal{S}_X$ reçoit le même pré-label que celui dans $\mathcal{L}$, et de même pour $\mathcal{S}_Y$. Dans la suite, la *décomposition* réfère à la décomposition qui a été utilisée pour construire T_X et T_Y, (c'est une des étiquettes "complément de 2-joint pair", "complément de 2-joint impair", "2-joint pair" ou "2-joint impair") et nous utilisons nos notations habituelles pour l'affectation de cette décomposition.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $|V(T_X)| \leq |V(T_Y)|$. D'après 2.11, T_X, T_Y sont des trigraphes de Berge bigames, et d'après 2.12, ils sont apprivoisés.

Soit S la composante optionnelle marquée qui est utilisée pour créer le bloc T_Y. On définit $\mathcal{S}'_Y = \mathcal{S}_Y \cup \{S\}$. On peut maintenant construire une fonction de pré-label $\mathcal{L}_Y$ pour $\mathcal{S}'_Y$ comme suit. Toutes les composantes optionnelles dans $\mathcal{S}_Y$ conservent le pré-label qu'elles ont dans $\mathcal{S}$. La composante marquée S reçoit le pré-label suivant :

— Si la décomposition est un complément de 2-joint impair, alors calculer récursivement $\alpha_A = \alpha(T_X|A_1)$, $\alpha_B = \alpha(T_X|B_1)$ et $\alpha_X = \alpha(T_X|X)$, et définir le pré-label de S comme ("Complément de 2-joint impair", $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_X$). Remarquons que dans ce cas $|S| = 2$.

— Si la décomposition est un 2-joint impair, alors calculer récursivement $\alpha_{AC} = \alpha(T_X|(A_1 \cup C_1))$, $\alpha_{BC} = \alpha(T_X|(B_1 \cup C_1))$, $\alpha_C = \alpha(T_X|C_1)$ et $\alpha_X = \alpha(T_X|X)$ et définir le pré-label de S comme ("2-joint impair", $\alpha_{AC}, \alpha_{BC}, \alpha_C, \alpha_X$). Remarquons que dans ce cas $|S| = 2$ et aucun sommet de $T'_Y \setminus S$ n'est fortement complet à S.

— Si la décomposition est un complément de 2-joint pair, alors calculer récursivement $\alpha_A = \alpha(T_X|A_1)$, $\alpha_B = \alpha(T_X|B_1)$ et $\alpha_X = \alpha(T_X|X)$, et définir le

pré-label de S comme ("Complément de 2-joint pair", $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_X$). Remarquons que dans ce cas, $|S| = 3$ et S est léger.

— Si la décomposition est un 2-joint pair, alors calculer récursivement $\alpha_{AC} = \alpha(T_X|(A_1 \cup C_1))$, $\alpha_{BC} = \alpha(T_X|(B_1 \cup C_1))$, $\alpha_C = \alpha(T_X|C_1)$ et $\alpha_X = \alpha(T_X|X)$ et définir le pré-label de S comme ("2-joint pair", $\alpha_{AC}, \alpha_{BC}, \alpha_C, \alpha_X$). Remarquons que dans ce cas, $|S| = 3$ et S est lourd.

Maintenant $T_Y, \mathcal{S}'_Y$ a une fonction de pré-label $\mathcal{L}_Y$. Nous exécutons récursivement notre algorithme pour $(T_Y, \mathcal{S}'_Y, \mathcal{L}_Y)$.

Nous obtenons une extension $\mathcal{L}'_Y$ de $\mathcal{L}_Y$ et un stable fort pondéré de poids maximum de l'expansion T'_Y de $(T_Y, \mathcal{S}'_Y, \mathcal{L}'_Y)$.

Nous utilisons $\mathcal{L}'_Y$ pour terminer la construction de $\mathcal{L}'$, en utilisant pour tout $S \in \mathcal{S}_Y$ la même extension que nous avions dans $\mathcal{L}'_Y$ pour étendre $\mathcal{L}_Y$. Nous avons donc maintenant, une extension $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$. Soit T' l'extension de $(T, S, \mathcal{L}')$.

Remarquons maintenant que d'après 5.10, T'_Y est exactement le gadget pour T', comme défini dans la section 5.2. Donc, $\alpha(T')$ peut être calculé à partir de $\alpha(T'_Y)$, comme expliqué dans 5.6, 5.7, ou 5.8.

Donc, l'algorithme fonctionne correctement lorsqu'il renvoie $\mathcal{L}'$ et le stable fort pondéré de poids maximum que nous venons de calculer.

Analyse de complexité : Avec notre manière de construire nos blocs de décomposition, nous avons $|V(T_X)| - 3 + |V(T_Y)| - 3 \leq n$ et d'après 2.9(viii) nous avons $6 \leq |V(T_X)|, |V(T_Y)| \leq n - 1$. Rappelons que nous avons supposé que $|V(T_X)| \leq |V(T_Y)|$.

Soit $T(n)$ la complexité de notre algorithme. Pour chaque type de décomposition, nous effectuons au plus quatre appels récursifs sur le petit bloc, c'est à dire T_X, et un appel récursif sur le grand bloc T_Y. Nous avons donc $T(n) \leq dn^4$ lorsque le trigraphe est basique et sinon $T(n) \leq 4T(|V(T_X)|) + T(|V(T_Y)|) + dn^4$, avec d la constante venant de la complexité de trouver un 2-joint ou un complément de 2-joint et de trouver α dans les trigraphes basiques.

Nous pouvons maintenant démontrer qu'il existe une constante c, telle que $T(n) \leq c.n^5$. Notre démonstration est par induction sur n. Nous montrons qu'il existe une constante N, telle que l'étape d'induction passe pour tout $n \geq N$ (cet argument et en particulier N ne dépend pas de c). Le cas de base de notre induction est alors sur les trigraphes basiques ou sur les trigraphes qui ont au plus N sommets. Pour ces trigraphes, il est clair que la constante c existe.

Nous faisons la démonstration de l'induction uniquement dans le cas du 2-joint pair (potentiellement dans le complément). La démonstration pour le 2-joint impair est similaire. Nous définissons $n_1 = |V(T_X)|$. Nous avons $T(n) \leq 4T(n_1) +$

$T(n+6-n_1)+dn^4$ pour tout n_1 et n vérifiant $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3 \geq n_1 \geq 7$.

Définissons $f(n_1) = n^5 - 4n_1^5 - (n+6-n_1)^5 - dn^4$. Nous montrons qu'il existe une constante N, telle que pour tout $n \geq N$ et pour tout n_1 tel que $7 \leq n_1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$, $f(n_1) \geq 0$. Par hypothèse d'induction, ceci prouve notre résultat. Un simple calcul montre que :

$$f'(n_1) = -20n_1^4 + 5(n+6-n_1)^4$$

$$f''(n_1) = -80n_1^3 - 20(n+6-n_1)^3$$

Puisque $n+6-n_1$ est positif, nous avons $f'' \leq 0$. Donc, f' est décroissante, et il est facile de voir que si n est suffisamment large, $f'(n_1)$ est positif pour $n_1 = 7$ et négatif pour $n_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$. Maintenant f est minimum pour $n_1 = 7$ ou $n_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3$. Puisque $f(7) = n^5 - (n-1)^5 - P(n)$ avec P un polynôme, tel que $\deg(P) \leq 4$, si n est suffisamment large, alors $f(7)$ est positif. De même $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3) \leq n^5 - 5(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3)^5$. Là encore, si n est suffisamment large, $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3)$ est positif. Donc, il existe une constante N, telle que pour tout $n \geq N$, $f(n_1) \geq 0$. Cela montre que notre algorithme s'exécute en temps $\mathcal{O}(n^5)$. □

Théorème 5.12. *On peut calculer un stable fort pondéré de poids maximum d'un trigraphe T de Berge apprivoisé en temps $\mathcal{O}(n^5)$.*

Démonstration. Exécuter l'algorithme de 5.11 pour $(T, \emptyset, \emptyset)$. □

Théorème 5.13. *On peut calculer un stable pondéré de poids maximum d'un graphe G de Berge apprivoisé en temps $\mathcal{O}(n^5)$.*

Démonstration. D'après 5.12 et le fait que les graphes de Berge peuvent être vu comme des trigraphes de Berge. □

Contrairement aux deux chapitres précédents, les résultats de ce chapitre ne peuvent s'étendre aux classes closes par k-joint. La raison principale est que les lemmes 5.3 et 5.4 qui sont nécessaires pour assurer que les poids dans les blocs sont tous positifs ou nuls ne sont vrais que dans le cas des graphes de Berge. Plus précisément nous avons besoin que tous les chemins entre les deux ensembles frontières du 2-joint (avec nos notations : A_i et B_i) soient de mêmes parités (ce qui est prouvé par le lemme 2.4 pour les graphes de Berge).

On peut voir notre preuve comme étant en deux temps. Nous commençons par construire l'arbre de décomposition. Lors de cette étape, nous devons n'utiliser que les blocs qui préservent la classe pour pouvoir continuer à décomposer. Puis une fois le trigraphe complètement décomposé nous modifions les blocs afin de pouvoir faire remonter l'information des blocs basiques au trigraphe complet. Un point important lors de la reconstruction est de bien choisir sur quel bloc poser le plus de questions, en effet si l'on ne fait pas attention l'algorithme devient exponentiel.

Dans les algorithmes présentés nous nous sommes focalisé sur le calcul de la valeur du stable maximum. Il est facile et classique de convertir un tel algorithme en un algorithme qui explicite un stable maximum pour un surcout linéaire. Cependant comme il est possible pour les classes de base d'expliciter à chaque fois un stable maximum, il est possible en utilisant de bonnes structures de données de suivre les sommets du stable maximum à chaque étape de l'induction et ainsi d'expliciter un stable maximum sans surcout.

Enfin il faut noter qu'en utilisant le théorème 1.1 nous obtenons un algorithme de coloration en temps $\mathcal{O}(n^7)$.

Chapitre 6

Décompositions extrêmes

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec Maria Chudnovsky, Nicolas Trotignon et Kristina Vušković, ils font l'objet d'un article [15] soumis à Journal of Combinatorial Theory, Series B.

6.1 Décompositions extrêmes

Dans cette section nous allons démontrer que les trigraphes de Berge apprivoisés qui ne sont pas basiques, admettent des décompositions extrêmes. C'est à dire des décompositions telles qu'un des blocs de décomposition est basique. Ce résultat n'est pas trivial, puisque qu'il existe dans [37] un exemple montrant que les graphes de Berge généraux n'admettent pas toujours de 2-joint extrême. Les décompositions extrêmes sont parfois très utiles pour faire des preuves par induction.

En fait nous ne sommes pas capable de démontrer que tous les trigraphes de Berge apprivoisés admettent un 2-joint ou un complément de 2-joint extrême. Pour démontrer l'existence de décompositions extrêmes nous devons inclure un nouveau type de décomposition, la paire homogène à notre ensemble de décomposition. Il est intéressant de remarquer que cette nouvelle décomposition est déjà utilisée dans de nombreuses variantes du théorème 2.5. Il est intéressant de voir que nous avons besoin d'étendre notre ensemble de décompositions afin d'obtenir un théorème de structure extrême. Il est donc possible que les star-cutsets ou plus généralement les skew-partitions ne soient pas des décompositions assez générales mais qu'en

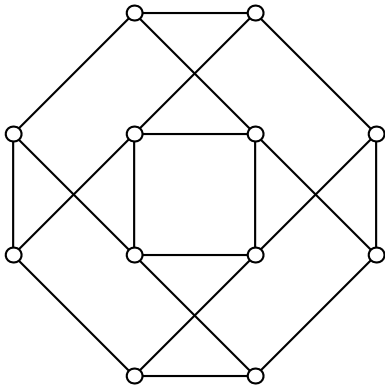

FIGURE 6.1 – Un exemple de *graphe* d'admettant pas de 2-joint extrême

les étendant il soit possible d'obtenir un théorème de décomposition extrême. Par exemple dans [1], nous avons pu avec Aboulker, Radovanović Trotignon et Vušković, en étendant la définition du star-cutset avoir une décomposition extrême d'une classe de graphes particulière. Grâce à cette décomposition extrême nous avons alors pu démontrer notre hypothèse d'induction.

Une *paire homogène propre* d'un trigraphe T est une paire de sous-ensembles disjoints (A, B) de $V(T)$, telle que si A_1, A_2 sont respectivement les ensembles de tous les sommets fortement complets à A et fortement anticomplets à A et que B_1, B_2 sont définis de manière similaire, alors :

— $|A| > 1$ et $|B| > 1$;
— $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2 = V(T) \setminus (A \cup B)$ (et en particulier tout sommet de A a un voisin et un antivoisin dans B et vice versa) ; et
— les quatre ensembles $A_1 \cap B_1$, $A_1 \cap B_2$, $A_2 \cap B_1$, $A_2 \cap B_2$ sont tous non-vides.

Dans ces circonstances, on dit que $(A, B, A_1 \cap B_2, A_2 \cap B_1, A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2)$ est une *affectation* de la paire homogène.

Une manière de démontrer l'existence d'une décomposition extrême est de considérer un "côté" de la décomposition et de le minimiser, pour obtenir ce que nous appelons une *fin*. Cependant pour les paires homogènes, les deux côtés (qui sont $A \cup B$ et $V(T) \setminus (A \cup B)$ avec nos notations habituelles) ne sont pas symétriques comme le sont les deux côtés d'un 2-joint. Nous devons donc décider quel côté minimiser. Nous choisissons de minimiser le côté $A \cup B$. Formellement nous devons faire la distinction entre un *fragment*, qui est n'importe quel côté d'une décomposition et un *fragment propre* qui est le côté qui va être minimisé et qui ne peut donc pas être le côté $V(T) \setminus (A \cup B)$ d'une paire homogène. Toutes les définitions sont données formellement ci-dessous.

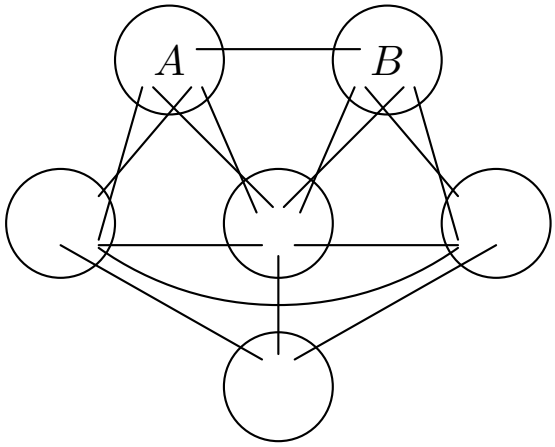

FIGURE 6.2 – Paire Homogène

Nous commençons par modifier la définition des fragments pour inclure les paires homogènes. À partir de maintenant, un ensemble $X \subseteq V(T)$ est un *fragment* d'un trigraphe T si une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. $(X, V(T) \setminus X)$ est un 2-joint propre de T ;
2. $(X, V(T) \setminus X)$ est un complément de 2-joint propre de T ;
3. il existe une paire homogène propre (A, B) de T telle que $X = A \cup B$ ou $X = V(T) \setminus (A \cup B)$.

Un ensemble $X \subseteq V(T)$ est un *fragment propre* d'un trigraphe T si une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. $(X, V(T) \setminus X)$ est un 2-joint propre de T ;
2. $(X, V(T) \setminus X)$ est un complément de 2-joint propre de T ;
3. il existe une paire homogène propre (A, B) de T telle que $X = A \cup B$.

Une *fin* de T est un fragment propre X de T tel qu'aucun sous-trigraphe induit propre de X est un fragment propre de T.

Remarquons qu'un fragment propre de T est un fragment propre de $\overline{T}$, et une fin de T est une fin de $\overline{T}$. De plus un fragment dans T est encore un fragment dans $\overline{T}$. Nous avons déjà défini les blocs de décomposition d'un 2-joint et d'un complément de 2-joint. Nous définissons maintenant les blocs de décomposition d'une paire homogène.

Si $X = A \cup B$ avec (A, B, C, D, E, F) une affectation d'une paire homogène propre (A, B) de T, alors nous construisons le bloc de décomposition T_X en rapport avec X de la manière suivante. Nous partons de $T|(A \cup B)$. Nous ajoutons ensuite

deux nouveaux *sommets marqués* c et d tels que c est fortement complet à A, d est fortement complet à B, cd est une arête optionnelle et il n'y a aucune autre arête entre $\{c, d\}$ et $A \cup B$. Ici encore, $\{c, d\}$ est appelé la *composante marquée de* T_X.

Si $X = C \cup D \cup E \cup F$ avec (A, B, C, D, E, F) une affectation d'une paire homogène propre (A, B) de T, alors nous construisons le bloc de décomposition T_X en rapport avec X de la manière suivante. Nous partons de $T|X$. Nous ajoutons alors deux nouveaux *sommets marqués* a et b tels que a est fortement complet à $C \cup E$, b est fortement complet à $D \cup E$, ab est une arête optionnelle et il n'y a aucune autre arête entre $\{a, b\}$ et $C \cup D \cup E \cup F$. Ici encore, $\{a, b\}$ est appelé la *composante marquée de* T_X.

Théorème 6.1. *Si X est un fragment d'un trigraphe T de Berge bigame, alors T_X est un trigraphe de Berge bigame.*

Démonstration. D'après la définition de T_X, il est clair que tous ses sommets sont dans au plus une arête optionnelle ou sont lourds ou sont légers. Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer que T_X est de Berge.

Si le fragment vient d'un 2-joint ou d'un complément de 2-joint, alors nous avons le résultat d'après le lemme 2.11.

Si $X = A \cup B$ et (A, B) est une paire homogène propre de T, alors soit H un trou ou un antitrou de T_X. En passant si besoin au complémentaire, on peut supposer que H est un trou. S'il contient les deux sommets marqués c, d, alors c'est un trou sur quatre sommets ou il doit contenir deux voisins forts de d dans B, donc H a longueur 6. Par conséquent, on peut supposer que H contient au plus un sommet parmi c, d et donc un trou de longueur strictement identique peut être obtenu dans T en remplaçant c ou d par un sommet de C ou de D. Par conséquent, H a longueur paire.

S'il existe une paire homogène propre (A, B) de T telle que $X = V(T) \setminus (A \cup B)$, alors puisque pour tout sommet de A a un voisin et un antivoisin dans B, nous pouvons remarquer que toute réalisation de T_X est un sous-trigraphe induit d'une réalisation de T. Il suit que T_X reste de Berge. □

Théorème 6.2. *Si X est un fragment d'un trigraphe T de Berge apprivoisé, alors le bloc de décomposition T_X n'a pas de skew-partition équilibrée.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, supposons que T_X ait une skew-partition équilibrée (A', B') avec une affectation (A'_1, A'_2, B'_1, B'_2). À partir de cette

skew-partition équilibrée, nous allons trouver une skew-partition dans T. Nous allons alors utiliser le lemme 2.8 afin de démontrer l'existence d'une skew-partition *équilibrée* dans T. Ceci nous fournira une contradiction, et démontrera le résultat.

Si le fragment vient d'un 2-joint ou d'un complément de 2-joint, nous avons le résultat d'après le lemme 2.12.

Si $X = A \cup B$ et (A, B) est une paire homogène de T, alors soit (A, B, C, D, E, F) une affectation de (A, B). Puisque cd est une arête optionnelle, les sommets marqués c et d n'ont pas de voisin commun et cd domine T_X. Sans perte de généralité il n'y a qu'un cas à traiter : $c \in A'_1$ et $d \in B'_1$. Puisque B'_2 est complet à d et A'_2 est anticomplet à c, il suit que $A'_2, B'_2 \subseteq B$.

Maintenant $(A'_1 \setminus \{c\} \cup C \cup F, A'_2, B'_1 \setminus \{d\} \cup D \cup E, B'_2)$ est une affectation d'une skew-partition dans T. La paire (A'_2, B'_2) est équilibrée dans T car elle l'est dans T_X. Par conséquent, d'après le lemme 2.8, T admet une skew-partition équilibrée, c'est une contradiction.

Si $X = V(T) \setminus (A \cup B)$ et (A, B) est une paire homogène propre de T, alors soit (A, B, C, D, E, F) une affectation de (A, B). Puisque ab est une arête optionnelle, on peut à symétrie et complémentation près supposer que $a \in A'_1$ et $b \in A'_1 \cup B'_1$. Si $b \in A'_1$ alors $(A \cup B \cup A'_1 \setminus \{a, b\}, A'_2, B'_1, B'_2)$ est une affectation d'une skew-partition dans T. Dans tous les cas, la paire (A'_2, B'_2) est équilibrée dans T car elle l'est dans T_X. Par conséquent, d'après le lemme 2.8, T admet une skew-partition équilibrée, c'est une contradiction. □

Théorème 6.3. *Si X est une fin d'un trigraphe T de Berge apprivoisé, alors le bloc de décomposition T_X est basique.*

Démonstration. Soit T un trigraphe de Berge apprivoisé et X une fin de T. D'après le lemme 6.1, T_X est un trigraphe bigame de Berge et d'après le lemme 6.2, T_X n'a pas de skew-partition équilibrée. D'après le théorème 2.10, il suffit de montrer que T_X n'a ni 2-joint propre, ni complément de 2-joint propre.

En passant au complémentaire de T si nécessaire, on peut supposer qu'une des propriétés suivantes est vraie :

— $X = A \cup B$ et (A, B) est une paire homogène propre de T ;
— $(X, V(T) \setminus X)$ est un 2-joint pair propre de T ; ou
— $(X, V(T) \setminus X)$ est un 2-joint impair propre de T.

Cas 1 : $X = A \cup B$ avec (A, B) une paire homogène propre de T. Soit (A, B, C, D, E, F) une affectation de (A, B).

Supposons que T_X admette un 2-joint propre (X_1, X_2). Soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de (X_1, X_2). Puisque cd est une arête optionnelle, nous pouvons supposer que les deux sommets c, d sont tous les deux dans X_2. Comme $\{c, d\}$ domine fortement T_X, on peut supposer que $c \in A_2$ et $d \in B_2$, et donc $C_1 = \emptyset$. Puisque c est fortement complet à A, $A_1 \subseteq A$ et de manière similaire, $B_1 \subseteq B$. D'après le lemme 6.2 et le lemme 2.9, $|A_1| \geq 2$ et $|B_1| \geq 2$ et comme $C_1 = \emptyset$, tous les sommets de A_1 ont un voisin et un antivoisin dans B_1 et vice versa. Maintenant $(A_1, B_1, C \cup A_2 \setminus \{c\}, D \cup B_2 \setminus \{d\}, E, F \cup C_2)$ est une affectation d'une paire homogène propre de T. Comme $|X_2| \geq 3$, $A_1 \cup B_1$ est strictement inclus dans $A \cup B$, c'est une contradiction.

Comme $A \cup B$ est aussi une paire homogène de $\overline{T}$, en utilisant le même argument que ci-dessus, T_X n'admet pas de complément de 2-joint propre.

Cas 2 : $(X, V(T) \setminus X)$ est un 2-joint pair propre (X_1, X_2) de T, avec $X = X_1$. Soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de $(X, V(T) \setminus X)$.

Supposons que T_X admette un 2-joint propre (X'_1, X'_2). Soit $(A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2)$ une affectation de (X'_1, X'_2). Puisque ac et bc sont des arêtes optionnelles, on peut supposer que $a, b, c \in X'_2$. Nous affirmons maintenant que $(X'_1, V(T) \setminus X'_1)$ est un 2-joint propre de T et que X'_1 est strictement inclus dans X, ce qui est une contradiction. Remarquons que d'après la définition d'un 2-joint et le fait que c n'ait pas de voisin fort, X'_2 ne peut pas être réduit à $\{a, b, c\}$ et par conséquent, X'_1 est strictement inclus dans X. Puisque c n'a pas de voisin fort, $c \in C'_2$. Puisque a et b n'ont pas de voisin fort commun dans T_{X_1}, il n'y a à symétrie près que trois cas : ou bien $a \in A'_2$, $b \in B'_2$, ou bien $a \in A'_2$, $b \in C'_2$, ou bien $a, b \in C'_2$.

Si $a \in A'_2$ et $b \in B'_2$, alors $(A'_1, B'_1, C'_1, A_2 \cup A'_2 \setminus \{a\}, B_2 \cup B'_2 \setminus \{b\}, C_2 \cup C'_2 \setminus \{c\})$ est une affectation d'un 2-joint de T.

Si $a \in A'_2$ et $b \in C'_2$, alors $(A'_1, B'_1, C'_1, A_2 \cup A'_2 \setminus \{a\}, B'_2, B_2 \cup C_2 \cup C'_2 \setminus \{b, c\})$ est une affectation d'un 2-joint de T.

Si $a \in C'_2$ et $b \in C'_2$, alors $(A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, X_2 \cup C'_2 \setminus \{a, b, c\})$ est une affectation d'un 2-joint de T.

D'après le lemme 6.2 et le lemme 2.9 tous ces 2-joints sont propres, et nous avons donc une contradiction.

Supposons que T_X admette un complément de 2-joint propre (X'_1, X'_2). Puisque c n'a pas de voisin fort nous avons une contradiction.

Case 3 : $(X, V(T) \setminus X)$ est un 2-joint propre (X_1, X_2) de T, avec $X = X_1$. Soit $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ une affectation de $(X, V(T) \setminus X)$.

Supposons que T_X admette un 2-joint propre (X'_1, X'_2). Soit

$(A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2)$ une affectation de (X'_1, X'_2). Puisque ab est une arête optionnelle, on peut supposer que $a, b \in X'_2$. Maintenant nous affirmons que $(X'_1, V(T) \setminus X'_1)$ est un 2-joint propre de T, ce qui est une contradiction, car X'_2 ne peut pas être réduit à seulement $\{a, b\}$ (d'après la définition d'un 2-joint), donc X'_1 est strictement inclus dans X. Comme a et b n'ont pas de voisin fort commun dans T_{X_1}, il y a à symétrie près seulement trois cas : ou bien $a \in A'_2$, $b \in B'_2$, ou bien $a \in A'_2$, $b \in C'_2$, ou bien $a, b \in C'_2$.

Si $a \in A'_2$ et $b \in B'_2$, alors $(A'_1, B'_1, C'_1, A_2 \cup A'_2 \setminus \{a\}, B_2 \cup B'_2 \setminus \{b\}, C_2 \cup C'_2)$ est une affectation d'un 2-joint de T.

Si $a \in A'_2$ et $b \in C'_2$, alors $(A'_1, B'_1, C'_1, A_2 \cup A'_2 \setminus \{a\}, B'_2, B_2 \cup C_2 \cup C'_2 \setminus \{b\})$ est une affectation d'un 2-joint de T.

Si $a \in C'_2$ et $b \in C'_2$, alors $(A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, X_2 \cup C'_2 \setminus \{a, b\})$ est une affectation d'un 2-joint de T.

D'après le lemme 6.2 et le lemme 2.9 tous ces 2-joints sont propres, et nous avons donc une contradiction.

Supposons que T_X admette un complément de 2-joint propre (X'_1, X'_2). Soit $(A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2)$ une affectation de (X'_1, X'_2). Puisque ab est une arête optionnelle, on peut supposer que $a, b \in X'_2$. Puisque a et b n'ont pas de voisin fort commun, on peut supposer que $a \in A'_2$, $b \in B'_2$ et $C'_1 = \emptyset$. Si C_2 et C'_2 sont non-vides, alors $(A'_1, B'_1, B_2 \cup B'_2 \setminus \{b\}, A_2 \cup A'_2 \setminus \{a\}, C'_2, C_2)$ est une affectation d'une paire homogène propre de T et $A'_1 \cup B'_1$ est strictement inclus dans X, c'est une contradiction (remarquons que d'après le lemme 6.2 et le lemme 2.9, $|A'_1| \geq 2$, $|B'_1| \geq 2$, et tout sommet de A'_1 a un voisin et un antivoisin dans B'_1 et vice versa). Si C_2 est non-vide et que C'_2 est vide, alors $(A'_1, B'_1, \emptyset, B_2 \cup B'_2 \setminus \{b\}, A_2 \cup A'_2 \setminus \{a\}, C_2)$ est une affectation d'un 2-joint propre de T (il est propre d'après le lemme 6.2 et le lemme 2.9). Si C_2 est vide, alors $(A'_1, B'_1, \emptyset, A_2 \cup A'_2 \setminus \{a\}, B_2 \cup B'_2 \setminus \{b\}, C'_2)$ est une affectation d'un complément de 2-join de T (ici encore il est propre d'après le lemme 6.2 et le lemme 2.9). □

6.2 Calculer une fin

Le but de cette section est de donner un algorithme polynomial qui étant donné un trigraphe, calcule une fin s'il en existe une. Pour résoudre ce problème nous pourrions utiliser les algorithmes existants de détection de 2-joint et de paire homogène. Le plus rapide est dans [7] pour les 2-joints et dans [24] pour les paires homogènes. Cependant cette approche pose plusieurs problèmes. Premièrement ces algorithmes fonctionnent pour les graphes et non pour les trigraphes. Il est

cependant possible de les adapter pour les faire fonctionner sur les trigraphes. Cependant il est difficile de démontrer que cette conversion des graphes aux trigraphes est correcte sans rentrer dans les détails des algorithmes. Le problème plus grave est que ces algorithmes calculent un fragment et non une fin. En fait pour les 2-joints l'algorithme de [7] calcule un ensemble X minimal pour l'inclusion tel que $(X, V(G) \setminus X)$ est un 2-joint, mais il peut toujours y avoir une paire homogène dans X. Pour régler ces deux problèmes nous donnons ici notre propre algorithme même si la plupart des idées de cet algorithme existaient déjà dans des travaux précédents.

Notre algorithme cherche un fragment propre X. À cause de tous les points techniques des définitions des 2-joints et des paires homogènes, nous introduisons une nouvelle notion. Un *fragment faible* d'un trigraphe T est un ensemble $X \subseteq V(T)$ tel qu'il existe des ensembles disjoints A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 vérifiant :

- $X = A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D_1$;
- $V(T) \setminus X = A_2 \cup B_2 \cup C_2 \cup D_2$;
- A_1 est fortement complet à $A_2 \cup D_2$ et fortement anticomplet à $B_2 \cup C_2$;
- B_1 est fortement complet à $B_2 \cup D_2$ et fortement anticomplet à $A_2 \cup C_2$;
- C_1 est fortement anticomplet à $A_2 \cup B_2 \cup C_2$;
- D_1 est fortement anticomplet à $A_2 \cup B_2 \cup D_2$;
- $|X| \geq 4$ et $|V(T) \setminus X| \geq 4$;
- $|A_i| \geq 1$ et $|B_i| \geq 1$, $i = 1, 2$;
- et au moins une des propriétés suivantes est vérifiée :
  - $C_1 = D_1 = \emptyset$, $C_2 \neq \emptyset$, et $D_2 \neq \emptyset$, ou
  - $D_1 = D_2 = \emptyset$, ou
  - $C_1 = C_2 = \emptyset$.

Dans ces circonstances, on dit que $(A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2)$ est une *affectation* de X. Étant donné un fragment faible, on dit qu'il est de type *paire homogène* si $C_1 = D_1 = \emptyset$, $C_2 \neq \emptyset$, et $D_2 \neq \emptyset$, de type 2-*joint* si $D_1 = D_2 = \emptyset$ et de type *complément de* 2-*joint* si $C_1 = C_2 = \emptyset$. Remarquons qu'un fragment peut être à la fois de type 2-joint et de type complément de 2-joint (lorsque $C_1 = D_1 = C_2 = D_2 = \emptyset$).

Théorème 6.4. *Si T est un trigraphe de Berge apprivoisé, alors X est un fragment faible de T si et seulement si X est un fragment propre de T.*

Démonstration. Si X est un fragment propre, alors c'est clairement un fragment faible (les conditions $|X| \geq 4$ et $|V(T) \setminus X| \geq 4$ sont satisfaites lorsque X est un côté d'un 2-joint d'après le lemme 2.9). Prouvons l'autre sens de l'équivalence. Soit

X un fragment faible et soit $(A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2)$ une affectation de X. Si X est de type 2-joint ou complément de 2-joint, alors il est propre d'après le lemme 2.9. Par conséquent nous n'avons à traiter que le cas du fragment faible de type paire homogène et donc $C_1 = D_1 = \emptyset$, $C_2 \neq \emptyset$, et $D_2 \neq \emptyset$. Puisque les quatre ensembles A_1, A_2, B_1, B_2 sont tous non-vides, il suffit de vérifier que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Tout sommet de $A_1(B_1)$ a un voisin et un antivoisin dans $B_1(A_1)$.
(ii) $|A_1| > 1$ et $|B_1| > 1$.

Supposons que la condition (i) n'est pas vérifiée. En prenant le complémentaire de T si nécessaire, on peut supposer qu'il existe un sommet $v \in A_1$ fortement complet à B_1. Puisque $\{v\} \cup B_1 \cup A_2 \cup D_2$ n'est pas un star cutset dans T d'après le lemme 2.6, on a que $A_1 = \{v\}$. Maintenant tout sommet de B_1 est fortement complet à A_1, et donc par le même argument, $|B_1| = 1$. Ceci contredit l'hypothèse que $|X| \geq 4$. Par conséquent la propriété (i) est vérifiée.

Pour démontrer (ii) supposons que $|A_1| = 1$. Puisque $|X| \geq 4$, on a que $|B_1| \geq 3$. D'après (i), tout sommet de B_1 est semi-adjacent à un unique sommet de A_1, ce qui est impossible puisque $|B_1| \geq 3$ et que T est un trigraphe bigame. Par conséquent la propriété (ii) est vérifiée. □

Un quadruplet (a_1, b_1, a_2, b_2) de sommets d'un trigraphe T est *propre* s'il vérifie les propriétés suivantes :

— a_1, b_1, a_2, b_2 sont deux à deux distincts ;
— $a_1a_2, b_1b_2 \in \mathcal{E}(T)$;
— $a_1b_2, b_1a_2 \in \overline{\mathcal{E}}(T)$.

Un quadruplet propre (a_1, b_1, a_2, b_2) est *compatible* avec un fragment faible X s'il existe une affectation $(A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2)$ de X telle que $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$, $a_2 \in A_2$ et $b_2 \in B_2$.

Nous utilisons les notations suivantes. Si x est un sommet d'un trigraphe T, $N(x)$ désigne l'ensemble des voisins de x, $\overline{N}(x)$ l'ensemble des antivoisins de x, $\mathcal{E}(x)$ l'ensemble des voisins forts de x, et $\mathcal{E}^*(x)$ l'ensemble des sommets v tels que $xv \in \mathcal{E}^*(T)$.

Théorème 6.5. *Soit T un trigraphe et $Z = (a_1, b_1, a_2, b_2)$ un quadruplet propre de T. Il y a un algorithme en temps $\mathcal{O}(n^2)$ qui étant donné un ensemble $R_0 \subseteq V(T)$ de taille au moins 4 tel que $Z \cap R_0 = \{a_1, b_1\}$, trouve un fragment faible X compatible avec Z et tel que $R_0 \subseteq X$, ou renvoie la propriété vraie suivante : "Il n'existe pas de fragment faible X compatible avec Z et tel que $R_0 \subseteq X$"*

De plus le fragment trouvé X est minimal vis à vis de ces propriétés. C'est

à dire que $X \subset X'$ pour tout fragment faible X' vérifiant ces propriétés.

Démonstration. Nous utilisons la procédure décrite dans la table 6.1. Elle essaie de construire un fragment faible R, en commençant avec $R = R_0$ et $S = V(T) \setminus R_0$, Ensuite plusieurs règles de forçage sont implémentées, disant que certains ensembles de sommets doivent être déplacés de S vers R.

La variable "State" contient le type du fragment faible en train d'être considéré. Au début de la procédure le type n'est pas connu et la variable "State" contient "Unknown". Il est facile de vérifier que les propriétés suivantes sont des invariants d'exécution (c'est à dire qu'elles sont vérifiées après chaque appel à Explore) :

— R et S forment une partition de $V(T)$, $R_0 \subseteq R$ et $a_2, b_2 \in S$.
— Pour tout sommet $v \in R$ non-marqué et tout sommet $u \in S$, uv n'est pas une arête optionnelle.
— Tous les sommets non-marqués appartenant à $R \cap (\mathcal{E}(a_2) \setminus \mathcal{E}(b_2))$ ont le même voisinage dans S, c'est à dire A (et A est un voisinage fort).
— Tous les sommets non-marqués appartenant à $R \cap (\mathcal{E}(b_2) \setminus \mathcal{E}(a_2))$ ont le même voisinage dans S, c'est à dire B (et B est un voisinage fort).
— Tous les sommets non-marqués appartenant à $R \cap (\mathcal{E}(b_2) \cap \mathcal{E}(a_2))$ ont le même voisinage dans S, c'est à dire $A \cup B$.
— Tous les sommets non-marqués appartenant à R et non-adjacent ni à a_2 ni à b_2 sont fortement anticomplet à S.
— Pour tout fragment faible X tel que $R_0 \subseteq X$ et $a_2, b_2 \in V(T) \setminus X$, on a que $R \subseteq X$ et $V(T) \setminus X \subseteq S$.

D'après le dernier point, tous les déplacements de sommets de S vers R sont nécessaires. Donc si un sommet de R est fortement adjacent à a_2 et à b_2, n'importe quel fragment faible compatible avec Z qui contient R doit être un fragment faible de type complément de 2-joint. C'est pourquoi la variable "State" est alors assignée avec la valeur $\overline{\text{2-joint}}$ et que tous les sommets de $S \setminus (A \cup B)$ sont déplacés vers R. De la même manière, si un sommet de R est fortement antiadjacent à a_2 et à b_2, n'importe quel fragment faible compatible avec Z qui contient R doit être un fragment faible de type 2-joint. C'est pourquoi la variable "State" est alors assignée à la valeur 2-joint et que tous les sommets de $A \cap B$ sont déplacés vers R.

Lorsque State = "$\overline{\text{2-joint}}$" et qu'un sommet de R est à la fois fortement adjacent à a_2 et à b_2, il y a une contradiction avec la définition du complément de 2-joint, donc l'algorithme doit s'arrêter. Lorsque State = 2-joint et qu'un sommet de R est à la fois fortement adjacent à a_2 et à b_2, il y a une contradiction avec la définition du 2-joint donc l'algorithme doit s'arrêter. Lorsque la fonction Move essaie de déplacer a_2 ou b_2 dans R (ceci peut arriver si un sommet dans R est semiadjacent

Entrée : R_0 un ensemble de sommets d'un trigraphe T et un quadruplet propre $Z = (a_1, b_1, a_2, b_2)$ tel que $a_1, b_1 \in R_0$ and $a_2, b_2 \notin R_0$.

Initialisation :

$R \leftarrow R_0$; $S \leftarrow V(T) \setminus R_0$; $A \leftarrow \mathcal{E}(a_1) \cap S$; $B \leftarrow \mathcal{E}(b_1) \cap S$;
State $\leftarrow$ Unknown ;

Les sommets a_1, b_1, a_2, b_2 sont laissés non-marqués. Pour les autres sommets de T :

Mark$(x) \leftarrow \alpha\beta$ pour tout sommet $x \in \mathcal{E}(a_2) \cap \mathcal{E}(b_2)$;
Mark$(x) \leftarrow \alpha$ pour tout sommet $x \in \mathcal{E}(a_2) \setminus \mathcal{E}(b_2)$;
Mark$(x) \leftarrow \beta$ pour tout sommet $x \in \mathcal{E}(b_2) \setminus \mathcal{E}(a_2)$;
tous les autres sommets de T sont marqués par ε ;
Move$(\mathcal{E}^*(a_1) \cap S)$; Move$(\mathcal{E}^*(b_1) \cap S)$;

Boucle principale :

Tant que il existe un sommet $x \in R$ marqué
Faire Explore(x); Unmark(x);

Fonction Explore(x) :

Si Mark$(x) = \alpha\beta$ **et** State = Unknown **alors**
State $\leftarrow \overline{\text{2-joint}}$, Move$(S \setminus (A \cup B))$;
Si Mark$(x) = \alpha\beta$ **et** State $= \overline{\text{2-joint}}$ **alors** Move$(\overline{N}(x) \cap S)$;
Si Mark$(x) = \alpha\beta$ **et** State = 2-joint **alors**
Sortie *Pas de fragment faible trouvé*, **Stop** ;
Si Mark$(x) = \alpha$ **alors** Move$(A\Delta(\mathcal{E}(x) \cap S))$, Move$(\mathcal{E}^*(x) \cap S)$;
Si Mark$(x) = \beta$ **alors** Move$(B\Delta(\mathcal{E}(x) \cap S))$, Move$(\mathcal{E}^*(x) \cap S)$;
Si Mark$(x) = \varepsilon$ **et** State = Unknown **alors**
State $\leftarrow$ 2-joint, Move$(A \cap B)$;
Si Mark$(x) = \varepsilon$ **et** State = 2-joint **alors** Move$(N(x) \cap S)$;
Si Mark$(x) = \varepsilon$ **et** State $= \overline{\text{2-joint}}$ **alors**
Sortie *Pas de fragment faible trouvé*, **Stop** ;

Fonction Move(Y) :

Cette fonction déplace simplement un sous-ensemble $Y \subset S$ de S vers R.
Si $Y \cap \{a_2, b_2\} \neq \emptyset$ **alors**
Sortie *Pas de fragment faible trouvé*, **Stop** ;
$R \leftarrow R \cup Y$; $A \leftarrow A \setminus Y$; $B \leftarrow B \setminus Y$; $S \leftarrow S \setminus Y$;

TABLE 6.1 – La procédure utilisée dans le théorème 6.5

à a_2 et à b_2), alors R ne peut pas être contenu dans un fragment compatible avec Z.

Si le processus ne s'arrête pas pour une des raisons ci-dessus, alors tous les sommets de R ont été explorés et donc sont non-marqués. Donc, si $|S| \geq 4$ à la fin, R est un fragment faible compatible avec Z. Plus spécifiquement, $(R \cap (\mathcal{E}(a_2) \setminus \mathcal{E}(b_2)), R \cap (\mathcal{E}(b_2) \setminus \mathcal{E}(a_2)), R \setminus (\mathcal{E}(a_2) \cup \mathcal{E}(b_2)), R \cap (\mathcal{E}(a_2) \cap \mathcal{E}(b_2)), A \setminus B, B \setminus A, S \setminus (A \cup B), A \cap B)$ est une affectation du fragment faible R.

Puisque tous les déplacements de S vers R sont nécessaires, le fragment est minimal comme affirmé. Cela implique également que si $|S| \leq 3$, alors il n'existe pas de fragment faible vérifiant les propriétés, dans ce cas l'algorithme renvoie qu'il n'existe pas de fragment vérifiant les propriétés requises.

Complexité :

Le voisinage et l'antivoisinage d'un sommet de R n'est considéré qu'au plus une fois. Donc, globalement l'algorithme utilise un temps $\mathcal{O}(n^2)$.

□

Théorème 6.6. *Il existe un algorithme fonctionnant en temps $\mathcal{O}(n^5)$, qui prend en entré un trigraphe T de Berge apprivoisé, et qui renvoie une fin X de T (si une fin existe) et le bloc de décomposition T_X.*

Démonstration. Rappelons que d'après le lemme 6.4, les fragments faibles de T sont des fragments propres. Nous commençons par décrire un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n^8)$, nous expliquerons ensuite comment l'accélérer. Nous supposons que $|V(T)| \geq 8$ car sinon il n'existe pas de fragment propre. Pour tout quadruplet propre $Z = (a_1, a_2, b_1, b_2)$ et pour toute paire de sommets u, v de $V(T) \setminus \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, nous appliquons le lemme 6.5 à $R_0 = \{a_1, b_1, u, v\}$. Cette méthode détecte pour tout Z et tout u, v un fragment propre (s'il en existe) compatible avec Z, contenant u, v et minimal vis à vis de ces propriétés. Parmi tous ces fragments, nous choisissons celui de cardinalité minimum, c'est une fin. Une fois que la fin est donnée, il est facile de connaitre le type de décomposition utilisé et de construire le bloc correspondant (en utilisant en particulier, le lemme 2.4, on peut simplement tester avec un chemin si le 2-joint est pair ou impair). Voyons maintenant comment accélérer cet algorithme.

Nous traitons séparément le cas du 2-joint et de la paire homogène. Nous allons décrire un algorithme en temps $\mathcal{O}(n^5)$ qui renvoie un fragment faible de type 2-joint, un algorithme en temps $\mathcal{O}(n^5)$ qui renvoie un fragment faible de type complément de 2-joint et un algorithme en temps $\mathcal{O}(n^5)$ qui renvoie un fragment faible

de type paire homogène. Chacun de ces fragments sera de cardinalité minimum parmi tous les fragments faibles du même type. Par conséquent, le fragment de cardinalité minimum parmi ces trois fragments sera une fin.

Commençons par traiter le cas des 2-joints. Un ensemble $\mathcal{Z}$ de quadruplets propres est *universel*, si pour tout 2-joint propre d'affectation $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$, il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathcal{Z}$ tel que $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$. Au lieu de tester tous les quadruplets comme dans la version en $\mathcal{O}(n^8)$ de notre algorithme, il est clairement suffisant de restreindre notre recherche à un ensemble universel de quadruplet. Comme prouvé dans [7], il existe un algorithme qui génère en temps $\mathcal{O}(n^2)$ un ensemble universel de quadruplet de taille au plus $\mathcal{O}(n^2)$ pour n'importe quel graphe. Il est facile d'obtenir un algorithme similaire pour les trigraphes.

L'idée suivante pour les 2-joints est d'appliquer la méthode de la Table 6.1 à $R_0 = \{a_1, b_1, u\}$ pour tout sommet u au lieu de l'appliquer pour $R_0 = \{a_1, b_1, u, v\}$ pour tout couple de sommets u, v. Comme nous allons le voir ceci trouve un 2-joint compatible avec $Z = (a_1, a_2, b_1, b_2)$ s'il en existe un. Supposons que (X_1, X_2) soit un tel 2-joint. Si X_1 contient un sommet u dont le voisinage (dans T) est différent de $N(a_1) \cup N(b_1)$, alors d'après le lemme 2.9, u a au moins un voisin dans $X_1 \setminus \{a_1, b_1\}$. Donc quand la boucle considère u, la méthode de la Table 6.1 déplace de nouveaux sommets dans R. Donc, à la fin, $|R| \geq 4$ et le 2-joint est détecté. Par conséquent, l'algorithme échoue à détecter un 2-joint uniquement dans le cas où u a degré 2 et a_1-v-b_1 est un chemin alors qu'il existe un 2-joint compatible avec Z avec u du même côté que a_1 et b_1. En fait, puisque tous les sommets sont essayés, ce n'est un problème que s'il apparait pour tout choix possible de u. C'est à dire si le 2-joint cherché a un côté fait de a_1, b_1, et d'un ensemble de sommets $u_1, \ldots, u_k$ de degré 2 tous adjacents à la fois à a_1 et à b_1. Mais dans ce cas, ou bien un des u_i est fortement complet à $\{a_1, b_1\}$ et c'est le centre d'un star cutset, ou bien tous les u_i sont adjacents à un des sommets a_1 ou b_1 par une arête optionnelle. Dans ce cas tous les u_i sont déplacés vers R lorsque nous appliquons les règles décrites par la Table 6.1, et donc le 2-joint est en fait bien détecté.

Les compléments de 2-joints sont traités de la même manière dans le complément.

Considérons maintenant les paires homogènes. Il est utile de définir une *paire homogène faible* exactement comme les paires homogènes propres, à l'exception que nous demandons que "$|A| \geq 1$, $|B| \geq 1$ et $|A \cup B| \geq 3$" au lieu de "$|A| > 1$ et $|B| > 1$". Un lemme similaire au lemme 6.5 existe pour lequel l'entrée de l'algorithme est un graphe G, un triplet $(a_1, b_1, a_2) \in V(G)^3$ et un ensemble $R_0 \subseteq$

$V(G)$ qui contient a_1, b_1 mais pas a_2, et dont la sortie est une paire homogène faible (A, B) telle que $R_0 \subseteq A \cup B$, $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ et $a_2 \notin A \cup B$, et telle que a_2 est complet à A et anticomplet à B, si une telle paire homogène faible existe. Comme dans le lemme 6.5, le temps d'exécution est $\mathcal{O}(n^2)$ et la paire homogène faible est minimale parmi toutes les paires homogènes faibles possibles. Ce résultat est prouvé dans [17].

Comme pour les 2-joints, nous définissons la notion d'ensemble universel de triplets (a_1, b_1, a_2). Comme prouvé dans [24], il existe un algorithme qui génère en temps $\mathcal{O}(n^2)$ un ensemble universel de triplet de taille au plus $\mathcal{O}(n^2)$ pour n'importe quel graphe. Ici encore il est facile d'adapter cet algorithme pour les trigraphes. Comme dans le cas du 2-joint, nous appliquons un lemme analogue au lemme 6.5 à tous les sommets u au lieu de tous les couples de sommets u, v. Le seul problème est qu'après l'appel au lemme similaire au lemme 6.5, nous avons une paire homogène faible et pas propre (donc $|A \cup B| = 3$). Mais dans ce cas on peut vérifier qu'alors le trigraphe contient un star cutset ou un star cutset dans son complément. □

Nous avons vu dans ce chapitre comment étendre notre ensemble de décompositions afin d'assurer l'existence d'une décomposition extrême. Nous avons également donné un algorithme polynomial permettant d'exhiber une telle décomposition. Nous n'avons pas eu besoin de ce type de décomposition pour prouver le reste des résultats de cette thèse, mais savoir qu'elle existe donne une preuve conceptuellement plus simple des résultats concernant le calcul du stable maximum. En effet, si l'on sait qu'à chaque étape de décomposition un des côtés est basique on peut facilement calculer les valeurs qui nous intéressent dans ce coté sans craindre d'explosion combinatoire, de fait la récursion devient presque immédiatement récursive terminale. Malheureusement, la preuve est techniquement plus compliquée puisqu'il faut également traiter les cas des paires homogènes. Il n'est pas possible de transformer automatique un théorème de décomposition en son équivalent extrême (cf la figure 6.1). Il serait intéressant de savoir s'il est toujours possible d'ajouter des décompositions (et comment les calculer) pour obtenir une décomposition extrême.

Chapitre 7

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons démontré un certain nombre de résultats sur les trigraphes de Berge apprivoisés et par conséquent sur les graphes de Berge sans skew-partition. En fait, le point important dans tous ces résultats est de pouvoir décomposer le graphe par 2-joint ou complémentaire de 2-joint. L'interdiction des skew-partitions permet simplement d'assurer que le graphe ou son complémentaire admet bien un 2-joint et que les blocs vont eux aussi être inductivement décomposables. La classe la plus générale pour laquelle ces résultats s'appliquent est donc celle des graphes de Berge décomposables par 2-joint ou complémentaire de 2-joint. Malheureusement cette classe est une sous-classe stricte des graphes de Berge, le graphe en figure 2.8 est un graphe de Berge qui (en utilisant les décompositions mentionnées dans cette thèse) n'est décomposable que par skew-partition.

La reconnaissance des graphes de Berge apprivoisés est possible en temps polynomial, mais est compliquée. En toute généralité la détection de skew-partition équilibrée est un problème NP-complet heureusement ce problème devient polynomial sur les graphes de Berge [35]. On peut donc utiliser l'algorithme de Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour et Vušković [12] pour s'assurer que le graphe est bien de Berge puis on peut utiliser les résultats de Trotignon [35] pour s'assurer que le graphe ne possède pas de skew-partition équilibrée. Avec ces résultats il est alors possible, étant donné un graphe quelconque de le colorier en temps polynomial ou d'assurer que ce n'est pas un graphe de Berge sans skew-partition. La reconnaissance de la classe plus large des graphes de Berge totalement décomposable par 2-joint et complémentaire de 2-joint est plus difficile. On peut chercher décomposer jusqu'à arriver sur des blocs basiques, mais en cas d'échec, a priori rien ne garantit qu'en ayant choisi un autre 2-joint nous n'aurions pas pu le décomposer totalement.

Notre classe est auto-complémentaire mais pas héréditaire, ce qui peut paraître surprenant pour les personnes familières avec les graphes de Berge. Il est assez difficile de trouver une classe proche qui soit héréditaire. De manière artificielle, ce serait la classe des graphes de Berge sans sous-graphe induit uniquement décomposable par skew-partition (en utilisant comme ensemble de décompositions celles présentées dans cette thèse), en particulier il faut interdire le graphe de la figure 2.8. Il faudrait alors vérifier que les blocs de décompositions restent dans la classe. Dans ce cas cette classe serait alors totalement décomposable par 2-joint et par complémentaire de 2-joint et tous les résultats de cette thèse s'appliqueraient.

Une manière d'étendre ces résultats serait de réussir pour un graphe de Berge donné à lui ajouter des sommets pour le rendre sans skew-partition. Dans ce cas en affectant des poids nuls à ces sommets ajoutés il est possible d'utiliser l'algorithme de stable maximum pondéré présenté ici pour calculer un stable maximum du graphe de départ. Pour que cet algorithme reste un algorithme en temps polynomial il faut que le nombre de sommets à ajouter soit polynomial en la taille du graphe de départ. Le risque d'une telle méthode est bien sûr que les sommets ajoutés créent de nouvelles skew-partition.

Si ces résultats ne permettent pas de résoudre le problème pour les graphe de Berge en général, ils peuvent néanmoins fournir des outils utiles. En effet pour ces problèmes, on peut désormais voir notre classe comme une classe basique. De futurs algorithmes pourraient donc traiter les graphe de Berge tant qu'ils admettent des skew-partition puis utiliser nos algorithmes.

Enfin le problème ouvert qui est sans doute le plus intéressant est celui de la reconnaissance des trigraphes de Berge. Ce problème est résolu pour les graphes [12] mais est toujours ouvert pour les trigraphes. Étant donné l'intérêt de l'utilisation des trigraphes pour l'étude des graphes de Berge, il serait très intéressant de savoir reconnaître les trigraphes de Berge. De manière plus générale, si l'on définit une classe de trigraphe $\mathcal{C}^*$ à partir de la classe de graphe $\mathcal{C}$ de la manière suivante : Un trigraphe T est dans la classe $\mathcal{C}^*$ si et seulement si toutes ses réalisations sont dans la classe $\mathcal{C}$, quel est le lien entre la reconnaissance de la classe $\mathcal{C}$ et celle de la la classe $\mathcal{C}^*$.

Bibliographie

[1] Pierre Aboulker, Marko Radovanović, Nicolas Trotignon, Théophile Trunck et Kristina Vušković : Linear balanceable and subcubic balanceable graphs. *Journal of Graph Theory*, 75(2):150–166, 2014.

[2] Boris Alexeev, Alexandra Fradkin et Ilhee Kim : Forbidden induced subgraphs of double-split graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(1):1–14, 2012.

[3] Noga Alon, János Pach, Rom Pinchasi, Radoš Radoičić et Micha Sharir : Crossing patterns of semi-algebraic sets. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 111(2):310–326, 2005.

[4] Nicolas Bousquet, Aurélie Lagoutte et Stéphan Thomassé : Clique versus independent set. *arXiv preprint arXiv :1301.2474*, 2013.

[5] Nicolas Bousquet, Aurélie Lagoutte et Stéphan Thomassé : The Erdős-Hajnal conjecture for paths and antipaths. *arXiv preprint arXiv :1303.5205*, 2013.

[6] Binh-Minh Bui-Xuan, Jan Arne Telle et Martin Vatshelle : H-join decomposable graphs and algorithms with runtime single exponential in rankwidth. *Discrete Applied Mathematics*, 158(7):809–819, 2010.

[7] Pierre Charbit, Michel Habib, Nicolas Trotignon et Kristina Vušković : Detecting 2-joins faster. *Journal of discrete algorithms*, 17:60–66, 2012.

[8] Maria Chudnovsky : *Berge trigraphs and their applications.* Thèse de doctorat, Princeton University, 2003.

[9] Maria Chudnovsky : Berge trigraphs. *Journal of Graph Theory*, 53(1):1–55, 2006.

[10] Maria Chudnovsky : The structure of bull-free graphs II and III—A summary. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102(1):252–282, 2012.

[11] Maria Chudnovsky : The structure of bull-free graphs I—Three-edge-paths with centers and anticenters. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102(1):233–251, 2012.

[12] Maria Chudnovsky, Gérard Cornuéjols, Xinming Liu, Paul Seymour et Kristina Vušković : Recognizing berge graphs. *Combinatorica*, 25(2):143–186, 2005.

[13] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas : The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics*, pages 51–229, 2006.

[14] Maria Chudnovsky et Paul D Seymour : The structure of claw-free graphs. *Surveys in combinatorics*, 327:153–171, 2005.

[15] Maria Chudnovsky, Nicolas Trotignon, Théophile Trunck et Kristina Vuskovic : Coloring perfect graphs with no balanced skew-partitions. *arXiv preprint arXiv :1308.6444*, 2013.

[16] Vasek Chvátal : Star-cutsets and perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 39(3):189–199, 1985.

[17] Hazel Everett, Sulamita Klein et Bruce Reed : An algorithm for finding homogeneous pairs. *Discrete Applied Mathematics*, 72(3):209–218, 1997.

[18] Tomás Feder, Pavol Hell, David G Schell et Juraj Stacho : Dichotomy for tree-structured trigraph list homomorphism problems. *Discrete Applied Mathematics*, 159(12):1217–1224, 2011.

[19] Tomás Feder, Pavol Hell et Kim Tucker-Nally : Digraph matrix partitions and trigraph homomorphisms. *Discrete Applied Mathematics*, 154(17):2458–2469, 2006.

[20] Samuel Fiorini, Serge Massar, Sebastian Pokutta, Hans Raj Tiwary et Ronald de Wolf : Linear vs. semidefinite extended formulations : exponential separation and strong lower bounds. *In Proceedings of the 44th symposium on Theory of Computing*, pages 95–106. ACM, 2012.

[21] Jacob Fox : A bipartite analogue of Dilworth's theorem. *Order*, 23(2-3):197–209, 2006.

[22] Jacob Fox et János Pach : Erdős-Hajnal-type results on intersection patterns of geometric objects. *In Horizons of combinatorics*, pages 79–103. Springer, 2008.

[23] Martin Grötschel, László Lovász et Alexander Schrijver : Geometric algorithms and combinatorial optimization. 1988.

[24] Michel Habib, Antoine Mamcarz et Fabien de Montgolfier : Algorithms for some H-join decompositions. *In LATIN 2012 : Theoretical Informatics*, pages 446–457. Springer, 2012.

[25] Peter L Hammer et Bruno Simeone : The splittance of a graph. *Combinatorica*, 1(3):275–284, 1981.

[26] Aurélie Lagoutte et Théophile Trunck : Clique-stable set separation in perfect graphs with no balanced skew-partitions. *arXiv preprint arXiv :1312.2730*, 2013.

[27] Philippe GH Lehot : An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):569–575, 1974.

[28] Lásló Lovász : A characterization of perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 13(2):95–98, 1972.

[29] László Lovász : On the shannon capacity of a graph. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 25(1):1–7, 1979.

[30] László Lovász : Stable sets and polynomials. *Discrete mathematics*, 124(1): 137–153, 1994.

[31] Frédéric Maffray : Fast recognition of doubled graphs. *Theoretical Computer Science*, 516:96–100, 2014.

[32] Nicholas D Roussopoulos : A $\max(n, m)$ algorithm for determining the graph H from its line graph G. *Information Processing Letters*, 2(4):108–112, 1973.

[33] Alexander Schrijver : *Combinatorial optimization : polyhedra and efficiency*, volume 24. Springer, 2003.

[34] Paul Seymour : How the proof of the strong perfect graph conjecture was found. *Gazette des Mathematiciens*, 109:69–83, 2006.

[35] Nicolas Trotignon : Decomposing berge graphs and detecting balanced skew partitions. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 98(1):173–225, 2008.

[36] Nicolas Trotignon : Perfect graphs : a survey. *arXiv preprint arXiv :1301.5149*, 2013.

[37] Nicolas Trotignon et Kristina Vušković : Combinatorial optimization with 2-joins. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102(1):153–185, 2012.

[38] Mihalis Yannakakis : Expressing combinatorial optimization problems by linear programs. *In Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 223–228. ACM, 1988.