



**HAL**  
open science

# Application de la méthode de l’“ état passé ” à la mesure quantique non-destructive du nombre de photons dans une cavité

Théo Rybarczyk

► **To cite this version:**

Théo Rybarczyk. Application de la méthode de l’“ état passé ” à la mesure quantique non-destructive du nombre de photons dans une cavité. Physique Quantique [quant-ph]. ENS, 2014. Français. NNT : . tel-01078348

**HAL Id: tel-01078348**

**<https://theses.hal.science/tel-01078348>**

Submitted on 28 Oct 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



Département  
de Physique  
École Normale  
Supérieure



COLLÈGE  
DE FRANCE  
—1530—



# THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

**Théo RYBARCZYK**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'École Normale Supérieure**

Sujet :

*Application de la méthode de  
l'« état passé » à la mesure quantique  
non-destructive du nombre de photons  
dans une cavité*

Soutenue le 07/07/2014 devant le jury composé de :

Pr. OLIVIER BUISSON	Examinateur
Pr. PHILIPPE GRANGIER	Rapporteur
Pr. AGNÈS MAÎTRE	Présidente
Pr. KLAUS MØLMER	Rapporteur
Pr. JEAN-MICHEL RAIMOND	Directeur de thèse



*À ma mère,  
À ma grand-mère,*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Éléments de théorie</b>	<b>11</b>
I.1 Description quantique de la lumière . . . . .	11
I.1.1 Description d'un mode du champ quantique . . . . .	12
I.1.1.a Hamiltonien du champ lumineux . . . . .	12
I.1.1.b États nombre de photons . . . . .	12
I.1.1.c États cohérents . . . . .	13
I.1.2 Couplage à l'environnement . . . . .	14
I.1.2.a État thermique du champ . . . . .	14
I.1.2.b Relaxation, décohérence : l'équation maîtresse . . . . .	15
I.2 Interaction de l'atome avec le champ . . . . .	16
I.2.1 Atome à deux niveaux . . . . .	16
I.2.2 Couplage de l'atome à un champ classique . . . . .	18
I.2.2.a Hamiltonien d'interaction . . . . .	18
I.2.2.b Manipulation de l'état interne de l'atome . . . . .	19
I.2.3 Couplage avec un champ quantique . . . . .	19
I.2.3.a Hamiltonien de Jaynes-Cummings . . . . .	20
I.2.3.b Cas résonant : oscillations de Rabi quantiques . . . . .	22
I.2.3.c Cas dispersif : déplacement lumineux . . . . .	22
I.3 Compter les photons . . . . .	23
I.3.1 Interférométrie atomique de Ramsey . . . . .	23
I.3.1.a Un interféromètre pour atomes . . . . .	23
I.3.1.b Phase de l'interféromètre . . . . .	24
I.3.1.c Effet d'un champ quantique sur les franges d'interférences	25
<b>II Mesures quantiques non-destructives</b>	<b>27</b>
II.1 La mesure en physique quantique . . . . .	27
II.1.1 Mesure projective - mesure généralisée . . . . .	27
II.1.2 Mesure quantique non-destructive . . . . .	29
II.2 Mesure QND du nombre de photons . . . . .	30
II.2.1 Transformation de la distribution du nombre de photons par la me- sure d'une sonde atomique . . . . .	30

II.2.2	Direction de mesure du pseudospin . . . . .	32
II.2.3	Mesure par décimation . . . . .	34
II.2.4	Trajectoires quantiques . . . . .	34
II.3	L'état passé du champ . . . . .	36
II.3.1	Formalisme de l'état passé du champ . . . . .	36
II.3.1.a	Idée générale . . . . .	36
II.3.1.b	Prise en compte du couplage du système avec un bain thermique . . . . .	38
II.3.1.c	Application du formalisme à notre système . . . . .	40
II.3.1.d	L'analyse en pratique . . . . .	42
II.3.1.e	Cas sans relaxation . . . . .	44
II.3.2	Application à l'expérience de C. Guerlin <i>et al.</i> . . . . .	44
<b>III</b>	<b>Dispositif expérimental</b> . . . . .	<b>47</b>
III.1	Vue d'ensemble . . . . .	48
III.2	Les atomes de Rydberg circulaires . . . . .	50
III.2.1	Un système atomique à deux niveaux . . . . .	50
III.2.2	Préparation et détection . . . . .	52
III.3	La cavité de grande finesse . . . . .	58
III.3.1	La cavité et le mode du champ utilisé . . . . .	59
III.3.2	Facteur de qualité du résonateur . . . . .	61
III.3.3	Contrôle de la fréquence de résonance . . . . .	61
III.4	L'interféromètre de Ramsey en pratique . . . . .	62
III.4.1	Des cavités de faible finesse pour manipuler l'état atomique . . . . .	62
III.4.2	Régler la phase de l'interféromètre . . . . .	64
III.4.3	Imperfections expérimentales . . . . .	65
<b>IV</b>	<b>Résultats expérimentaux</b> . . . . .	<b>67</b>
IV.1	Calibrations . . . . .	68
IV.1.1	Franges de Ramsey . . . . .	68
IV.1.2	Déphasage par photon et champ thermique . . . . .	69
IV.1.3	Injection initiale . . . . .	71
IV.2	Mesure QND du nombre de photons . . . . .	73
IV.2.1	Séquence expérimentale . . . . .	73
IV.2.2	Un exemple de trajectoire quantique de l'état du champ . . . . .	74
IV.2.3	Une meilleure information sur l'état du champ . . . . .	76
IV.2.3.a	Entropie moyenne des distributions du nombre de photons . . . . .	76
IV.2.3.b	Corrélations entre sous-ensembles de détections . . . . .	77
IV.2.3.c	Fidélité des états du champ par rapport aux états de Fock . . . . .	80
IV.3	Résolution des sauts quantiques . . . . .	81
IV.3.1	Sauts quantiques induits . . . . .	81
IV.3.2	Sauts quantiques de nombres de photons élevés . . . . .	88
IV.4	Sens physique de la matrice d'effet . . . . .	92

<b>Conclusion</b>	<b>97</b>
<b>A Résolution de l'équation pilote de la matrice d'effet</b>	<b>101</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>

# Table des figures

1	Principe de notre expérience d'électrodynamique quantique en cavité . . .	4
2	Dispositif expérimental . . . . .	6
3	État passé d'un système quantique . . . . .	8
I.1	Représentation de la sphère de Bloch . . . . .	17
I.2	Oscillations de Rabi classiques . . . . .	20
I.3	Énergies des états habillés . . . . .	21
I.4	Schéma de l'interféromètre de Ramsey . . . . .	24
II.1	Transformation de la distribution du nombre de photons par la mesure d'une sonde atomique . . . . .	32
II.2	Directions de mesure du pseudospin atomique . . . . .	33
II.3	Mesure du nombre de photons par décimation . . . . .	35
II.4	Évolution temporelle du nombre de photons obtenue par décimation . . .	36
II.5	Principe de la méthode de l'état passé . . . . .	37
II.6	Intégration des équations pilotes . . . . .	39
II.7	Évolution de $P$ et $E$ , construction de l'état passé du champ . . . . .	41
II.8	Application de la méthode de l'état passé aux expériences de C. Guerlin <i>et al.</i> . . . . .	45
III.1	Montage expérimental . . . . .	49
III.2	Atome à deux niveaux . . . . .	52
III.3	Préparation de l'atome dans un état de Rydberg circulaire . . . . .	54
III.4	Sélection de la vitesse des atomes . . . . .	56
III.5	Distribution de vitesse des atomes . . . . .	57
III.6	Détection de l'état atomique . . . . .	58
III.7	Cavité supraconductrice . . . . .	60
III.8	Mesure de la fréquence de résonance de la cavité . . . . .	63
III.9	Zone de Ramsey . . . . .	64
IV.1	Calibration des franges de Ramsey . . . . .	69
IV.2	Tomographie du pseudospin . . . . .	70
IV.3	Calibration du champ thermique . . . . .	71
IV.4	Calibration de l'injection micro-onde . . . . .	72
IV.5	Exemple de trajectoire quantique du champ . . . . .	75

IV.6	Comparaison des entropies . . . . .	76
IV.7	Sous-ensembles de résultats de détections . . . . .	78
IV.8	Corrélations entre sous-ensembles de détection : trajectoire individuelle . . . . .	79
IV.9	Écart quadratique moyen entre distributions des deux sous-ensembles de détection . . . . .	80
IV.10	Distributions moyennes d'états de Fock, de 0 à 5 photons . . . . .	82
IV.11	Distributions moyennes d'états de Fock, de 6 à 12 photons . . . . .	83
IV.12	Fidélité et dispersion des distributions du nombre de photons . . . . .	84
IV.13	Saut de photon visible dans une trajectoire individuelle . . . . .	85
IV.14	Nombre de photons moyen à l'instant du saut induit . . . . .	86
IV.15	Distribution des instants de détection du saut quantique . . . . .	88
IV.16	Détection de sauts quantiques . . . . .	89
IV.17	Répartition de la durée de vie des états de Fock . . . . .	90
IV.18	Taux de transitions $n \rightarrow n - 1$ . . . . .	91
IV.19	Ordre des sauts quantiques . . . . .	92
IV.20	Analyse de la retro-propagation de $E$ . . . . .	93
IV.21	Résultats expérimentaux de l'analyse de la matrice d'effet . . . . .	95
A.1	Résultats théoriques pour $m = 0$ . . . . .	106
A.2	Résultats théoriques pour $m = 1$ . . . . .	108



# Introduction

*The only way to find, what I left behind  
I got to double back again, double back again.*  
(Doubleback, ZZTop - Back to the Future Part III)

Les premières pierres de la physique quantique ont été posées au tout début du XX<sup>e</sup> siècle. Les théories de la thermodynamique et de l'électromagnétisme de Maxwell, qui n'avaient jusqu'alors rencontré que des succès, se heurtaient à un problème majeur avec le corps noir. Cet objet idéal est en équilibre thermodynamique avec les modes du champ avoisinant : ils échangent sans cesse de l'énergie lumineuse. Quand on cherche à calculer l'énergie totale émise par ce corps avec la théorie de l'électrodynamique classique, on tombe sur un infini : c'est ce qu'on appelle la catastrophe ultraviolette. En 1900, Max Planck suggéra, pour résoudre le problème, que les échanges d'énergie entre le corps noir et le champ électromagnétique se font par paquets, par *quanta*, d'énergie  $h\nu$  où  $\nu$  est la fréquence de la lumière et  $h$  une nouvelle constante de la nature qui sera appelée ensuite constante de Planck. En 1905, dans l'article expliquant l'effet photoélectrique [1], Einstein proposa que l'énergie du champ électromagnétique elle-même était quantifiée. Le quantum de lumière, baptisé plus tard photon, transporte l'énergie  $h\nu$  introduite par Planck.

Après les années 1930, la physique quantique est une théorie bien établie. Cependant, sa compréhension n'est pas évidente : de nombreux résultats sont contraires à l'intuition. Parmi ces étrangetés figure la notion même de mesure. Contrairement au cas classique, où nous pouvons tirer de l'information sur une quantité physique d'un système sans le perturber, un système quantique  $\mathcal{S}$  est profondément modifié par la mesure d'une de ses observables. Rappelons les postulats liés à la mesure :

- La mesure d'une observable  $O$  de  $\mathcal{S}$  ne peut donner que certains résultats  $o_i \in \mathbb{R}$  qui sont les valeurs propres de l'opérateur hermitien  $O$ . On suppose ici qu'elles ne sont pas dégénérées.
- Le résultat de mesure  $o_i$  s'obtient avec une certaine probabilité  $\pi_i$  qui dépend de la projection de l'état normé  $|\Psi\rangle$  du système considéré sur l'état propre  $|o_i\rangle$  de  $O$  :  
 $\pi_i = |\langle o_i | \Psi \rangle|^2$ .
- Après la mesure, le système est dans l'état propre associé au résultat :  $|\Psi\rangle \longrightarrow |\Psi'\rangle = |o_i\rangle$ .

Ces postulats décrivent une mesure idéale mais, dans la plupart des cas, la situation est plus compliquée. En effet, le système peut tout bonnement être détruit : c'est le cas,

par exemple, de photons absorbés par un photo-détecteur. De plus, une fois mesuré et même s'il n'est pas détruit, un système ne reste pas forcément dans un des états propres de l'observable considérée. Supposons que l'évolution libre de  $\mathcal{S}$  fasse intervenir un Hamiltonien de la forme  $H = f(Q)$  où  $f$  est une fonction de l'opérateur  $Q$  conjugué à  $O$ . Après la mesure et selon sa qualité,  $O$  est connue à  $\Delta O$  près qui peut être proche de 0. En conséquence, l'incertitude sur la quantité  $Q$  est considérablement augmentée, ce qui est exprimé par l'inégalité de Heisenberg suivante :

$$\Delta O \Delta Q \geq \frac{|\langle [O, Q] \rangle|}{2},$$

où  $\langle [O, Q] \rangle$  est la valeur moyenne du commutateur non nul de  $O$  et  $Q$ . Ces fluctuations sur  $Q$  vont se recoupler très rapidement à  $O$  via l'évolution Hamiltonienne de  $\mathcal{S}$  interdisant ainsi une mesure précise et répétée de  $O$ . En résumé, l'obtention d'un résultat de mesure particulier est aléatoire, l'état du système en sort modifié et la mesure n'est pas nécessairement répétable.

D'autres bizarreries quantiques comme le *principe de superposition* qui permet à un système d'exister dans plusieurs états à la fois (avant d'être projeté dans l'un d'eux par une éventuelle mesure) ou l'*intrication* entre particules, qui est l'expression de leur caractère inséparable après certaines interactions, ont contraint les pères fondateurs de la théorie à imaginer nombre d'expériences de pensée. Ces illustrations des aspects contre-intuitifs de la théorie mettent en scène des particules uniques, photons ou atomes. À l'époque, il était impensable de pouvoir mettre en pratique ces expériences dans un laboratoire. En 1952 encore, Schrödinger disait qu'« on ne réalise jamais d'expériences avec *un seul* électron, atome ou (petite) molécule » et de relever les « conséquences ridicules » de la projection de l'état d'une particule *unique* après une mesure<sup>1</sup>.

Mais depuis, le raffinement des expériences est devenu tel qu'il est finalement possible de contrôler et de manipuler des systèmes quantiques uniques comme des atomes, des ions, des molécules ou des photons. En 1976, Merli *et al.* [3] et plus tard, en 1989, Tonomura *et al.* [4], sont arrivés à enregistrer la figure d'interférence d'une série d'électrons *uniques* traversant un dispositif type fentes d'Young. En 1973, Wineland *et al.* rapportent l'observation d'un électron unique dans un piège de Penning [5]. Les premiers ions uniques piégés le furent en 1981 [6, 7].

Le phénomène d'intrication a aussi pu être testé. Deux particules intriquées forment un système unique : il n'est pas possible de considérer une seule particule de la paire comme une sous-partie indépendante. La mesure de l'état d'une de ces particules donne de l'information sur l'état de la seconde même si des années-lumière les séparent. Dans leur article de 1935, Einstein, Podolsky et Rosen [8] en concluent que la théorie quantique n'est pas complète car cette situation, selon eux, ne peut pas être représentative de la réalité. Par la suite, des théories impliquant des variables cachées ont été développées pour résoudre le problème

---

1. « ... we never experiment with just *one* electron or atom or (small) molecule. In thought-experiments we sometimes assume that we do; this invariably entails ridiculous consequences as, e.g. that a spherical de Broglie wave, which is supposed to represent "one" electron, moving in an "unknown" direction, suddenly collapses into a small wave parcel, when "that" electron is detected at a definite spot », E. Schrödinger [2]

soulevé. Ces variables supplémentaires prédéterminent le résultats de mesures ultérieures ce qui rend moins mystérieuse la transmission apparemment instantanée d'information d'une particule de la paire à l'autre. Afin de tester la validité de ces théories, Bell [9] montre qu'il existe une différence dans les corrélations de certaines mesures sur une paire de particules quand on utilise soit la théorie quantique soit une version avec variables cachées. Si cette dernière est valide, elle doit satisfaire une inégalité sur ces corrélations. Dans les expériences d'Aspect [10, 11, 12] au début des années 1980, des photons intriqués sont utilisés pour montrer la violation des inégalités de Bell, prouvant ainsi que la physique quantique est bel et bien une théorie *non-locale*.

Même si certains aspects fondamentaux de la théorie ont pu être testés, les systèmes quantiques restent très compliqués à modéliser quand ils ont beaucoup de degrés de libertés internes et externes. En 1981, Feynman relève l'impossibilité de simuler l'évolution de la plupart des systèmes quantiques avec des ordinateurs classiques : les ressources disponibles (y compris le temps!) sont insuffisantes pour mener à terme les calculs. Il propose alors l'idée d'utiliser directement des systèmes quantiques comme simulateurs [13]. Cela a été le point de départ du domaine de l'*information quantique*. Dans un ordinateur quantique, l'information ne serait plus codée sur des bits bivalués mais sur des systèmes quantiques à deux niveaux appelés *qubits*. Grâce au principe de superposition et à l'intrication entre systèmes, un ordinateur quantique permettrait de résoudre certaines classes de problèmes en un temps bien plus raisonnable qu'avec l'utilisation de ressources classiques [14]. Cela pourrait avoir, par exemple, des applications dans le domaine de la cryptographie. Pour sécuriser les communications, certaines procédures de chiffrement utilisent la difficulté à factoriser de grands nombres (RSA par exemple). L'algorithme quantique de Shor [15] est destiné à trouver les facteurs du nombre  $N$  dans un temps qui augmente seulement de façon polynomiale avec  $N$  et non exponentielle comme avec la résolution numérique classique du problème.

Depuis plus de 20 ans, de nombreux efforts sont mis en œuvre pour arriver à obtenir des systèmes pouvant réaliser efficacement des algorithmes quantiques, conserver l'information (mémoires) et permettre le transport de celle-ci. L'algorithme de Shor a pu être appliqué, en utilisant, entre autres, le spin 1/2 de molécules pour factoriser le nombre 15 [16]. Si ce nombre paraît peu impressionnant cela révèle la complexité extrême de la manipulation des systèmes quantiques. Ils sont en effet très fragiles : la *décohérence* due au couplage à des degrés de libertés extérieurs cause la perte progressive du caractère quantique des systèmes étudiés et limite l'application des algorithmes.

De grands temps de cohérence peuvent être obtenus dans le domaine de l'électrodynamique quantique en cavité. Il couvre l'étude de la lumière piégée entre deux miroirs. Plus la finesse de la cavité est grande, plus un photon peut être conservé longtemps : la décohérence limitant les manipulations sur le système peut être relativement faible sur la durée des expériences.

Notre dispositif permet d'observer et de manipuler le champ micro-onde présent dans une cavité supraconductrice de grande finesse. La cavité est formée par deux miroirs en cuivre recouvert de niobium supraconducteur qui est extrêmement réfléchissant dans le domaine des micro-ondes. L'énergie moyenne du champ décroît en un temps typique de

l'ordre du dixième de seconde.

C'est assez pour nous permettre d'envoyer une série d'atomes de Rubidium 85 préparés dans des *états de Rydberg circulaires* [17] interagir avec le champ (voir figure 1). Ces atomes possèdent de nombreux avantages : ils ont une durée de vie très importante, ils possèdent un dipôle électrique géant et on peut choisir une paire d'états circulaires dont la fréquence de transition est résonante avec la cavité. Nous pouvons donc obtenir *un système à deux niveaux* qui va se coupler *fortement* au mode du champ. Nous appelons ces niveaux  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ .

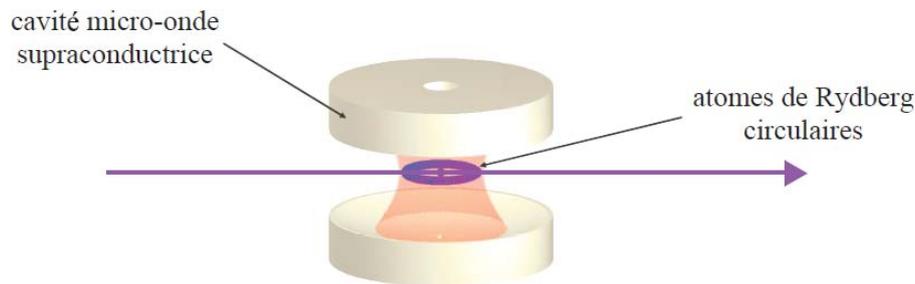


FIGURE 1 – Principe de notre expérience d'électrodynamique quantique en cavité. Des atomes de Rydberg circulaires interagissent un par un, dans le régime de couplage fort, avec le champ micro-onde d'une cavité supraconductrice.

L'intérêt des expériences réalisées dans notre équipe réside surtout dans l'étude des aspects fondamentaux de l'interaction entre champ et atomes. Dans le régime de couplage fort, si l'interaction est résonante, l'échange cohérent d'énergie entre l'atome et le champ se fait en un temps court devant les durées de vie de ces deux systèmes quantiques. Dans ce cas, l'atome effectue de nombreux cycles  $|g, n + 1\rangle \leftrightarrow |e, n\rangle$  d'absorption et d'émission dans le mode du champ. Il est aussi intéressant de pouvoir sonder le mode du champ sans émettre ni absorber de photons. L'interaction est alors dite *dispersive*. C'est grâce à ce régime particulier d'interaction que nous sondons le champ micro-onde avec des atomes de Rydberg circulaires.

En réalisant des *mesures quantiques non-destructives* (QND) répétées du champ, il nous est possible d'observer son évolution dans le temps. Nos expériences centrées sur des systèmes quantiques simples permettent de tester les fondements mêmes de la théorie quantique. Ces mesures QND du champ sont des mesures idéales telles qu'elles sont décrites par les postulats que nous avons rappelé plus haut.

Les mesures QND trouvent leurs origines dans les années 1970 dans le cadre de l'élaboration de détecteurs d'ondes gravitationnelles avec des barres de Weber [18, 19, 20]. Le passage d'une telle onde, phénomène rare, fait très légèrement vibrer le résonateur mécanique. La perturbation ne change que très faiblement le nombre de phonons du mode de vibration. Il est donc nécessaire de trouver une stratégie qui permette de compter ces

phonons sans en modifier le nombre et que la mesure puisse être répétée. Non-destruction et répétabilité sont l'essence des mesures QND.

Dans le domaine de l'optique quantique, certaines expériences de mesure QND réalisées sont basées sur l'utilisation du couplage entre deux faisceaux laser passant à travers un milieu non-linéaire [21]. L'indice optique du milieu est modulé avec l'intensité d'un faisceau laser « signal » par effet Kerr. Un second faisceau laser, un « mètre », qui traverse le même milieu, est donc déphasé d'une quantité qui dépend de l'intensité du signal. À l'aide d'un interféromètre il est possible de mesurer la phase du mètre par rapport à une référence et ainsi d'observer (indirectement) les fluctuations quantiques de l'intensité du faisceau signal sans en absorber les photons. Cette stratégie a été appliquée dans différents milieux non-linéaires comme un jet d'atomes de sodium [22] ou un nuage d'atomes froids [23].

Revenons à notre expérience d'électrodynamique quantique en cavité. Pour mesurer le nombre de photons du mode du champ de façon non-destructive, l'interaction doit être dispersive. En se plaçant du point de vue de l'atome, lorsqu'il croise le mode du champ de la cavité, on constate un *déplacement lumineux* des niveaux atomiques dépendant du nombre de photons  $n$  présents dans le mode. C'est-à-dire que l'atome va accumuler une phase, différente selon l'état dans lequel il se trouve, et que cette phase est fonction de  $n$ .

Bien entendu, si l'on prépare l'atome dans un état pur  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ , cette phase sera globale pour l'état et donc impossible à récupérer en mesurant l'état atomique final dans la base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ . Nous plaçons alors la cavité supraconductrice dans un *interféromètre de Ramsey*, le dispositif est représenté à la figure 2. En première étape, nous préparons les atomes dans une superposition d'états  $|e\rangle + |g\rangle$ . Après interaction avec le mode de la cavité, la phase de la superposition dépend de  $n$ . Nous manipulons ensuite l'état interne de l'atome avant de mesurer son état dans la base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ . Le résultat de détection nous renseigne alors sur le nombre de photons présents dans la cavité.

En pratique, nous envoyons un train d'atomes de Rydberg circulaires interagir, un par un, avec le champ de la cavité supraconductrice. En analysant les résultats des détections, il est donc possible de suivre dans le temps l'évolution du nombre de photons du mode.

Les expériences de mesure QND du champ ont produit de nombreux résultats. Des photons uniques ont pu être observés de façon non-destructive [24]. Les deux états atomiques sont liés à la présence de 0 ou 1 photon dans le mode : l'analyse de l'évolution du champ révèle les sauts quantiques entre les états de Fock  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Dans une autre expérience, l'équipe a étudié la relaxation d'un champ cohérent contenant initialement 3.8 photons en moyenne. On observe alors la projection progressive du champ initial vers un état de Fock contenant  $n$  photons, trouvés aléatoirement entre  $n = 0$  et  $n = 7$ , puis les sauts quantiques successifs vers le vide de photons [25]. Par la suite, les matrices densités d'états de Fock et d'un état chat de Schrödinger ont été reconstruites. La décohérence d'un petit chat de Schrödinger du champ a pu être suivie dans le temps [26, 27].

Je suis arrivé dans l'équipe lors de la réalisation des expériences de rétroaction quantique [28]. En estimant l'état du champ après chaque détection atomique, il est possible de déceler les sauts quantiques et de les corriger pour conserver le champ dans un état de Fock *choisi*. La correction a pu être effectuée par de petits déplacements du champ micro-onde [29] ou grâce à des atomes résonants pouvant absorber ou injecter des photons un par un [30].

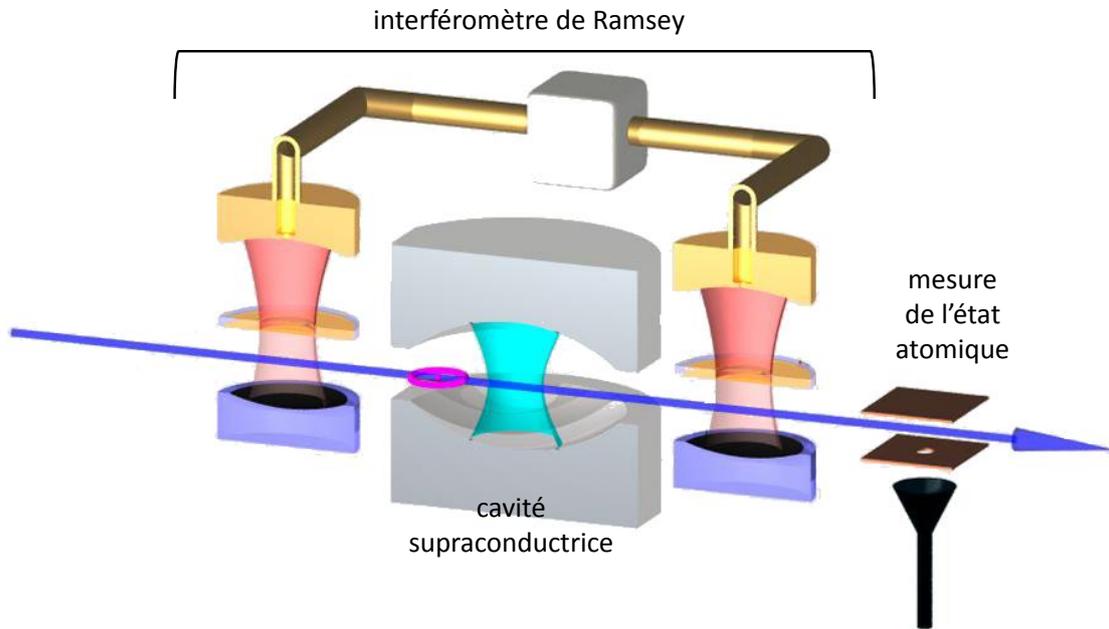


FIGURE 2 – Dispositif expérimental. Pour mesurer le nombre de photons de la cavité, nous préparons les atomes dans une superposition d'états. Nous effectuons une mesure interférométrique de la phase atomique qui évolue, par le couplage avec le mode du champ, en fonction du nombre de photons présents.

Enfin, nous avons pu optimiser notre appareil de mesure en fonction de l'état estimé. Cette *mesure adaptative* [31] permet un réglage optimal de la phase de l'interféromètre afin de faire converger le champ le plus rapidement possible vers un état de Fock. Je ne parlerai pas dans ce manuscrit de ces trois expériences : elles ont déjà été largement traitées dans les thèses de mes prédécesseurs [32, 33, 34].

Les travaux qui viennent d'être évoqués reposent sur notre capacité à estimer l'état réel du champ le plus fidèlement possible. Nous avons déjà dit que cette estimation provient de l'analyse des résultats des détections des atomes de Rydberg circulaires en sortie de l'interféromètre de Ramsey. Jusqu'ici nous utilisons seulement la matrice densité qui est mise à jour, progressivement, à chaque nouvelle détection. Dans ce cas, notre connaissance de l'état du champ se base uniquement sur l'information obtenue avant l'instant considéré.

À la fin d'une séquence de mesure QND du champ, nous avons à disposition une série de résultats de mesure de sondes atomiques. Il est en principe possible d'utiliser l'ensemble complet pour déterminer à chaque instant  $t$  l'état du champ. À la différence de la matrice densité, cet état est conditionné aux mesures ultérieures à  $t$  : toute l'information disponible sur l'évolution de notre système est alors utilisée. On s'attend à ce que cet état généralisé soit une meilleure estimation de l'état du champ que la matrice densité. Bien entendu, il ne peut pas être utilisé dans des stratégies de contrôle actif, en temps réel, du champ

ou de l'appareil de mesure (comme lors des expériences de rétroaction quantique ou de mesure adaptative du nombre de photons). Pour analyser à posteriori des mesures QND, son utilisation est toute indiquée. Pour définir cet état généralisé, nous allons utiliser la notion d'*état passé du champ* [35].

L'origine de l'état passé se trouve dans l'étude des états pré- et post-sélectionnés d'un système quantique [36]. Ce formalisme a donné naissance à la notion de *valeur faible* [37, 38, 39, 40]. La *mesure faible* d'une observable  $A$  d'un système  $\mathcal{S}$  est une mesure indirecte via le couplage de  $\mathcal{S}$  avec un mètre  $\mathcal{M}$ . Cette interaction est dite faible car l'état du système en sort essentiellement inchangé. Après la post-sélection de l'état final de  $\mathcal{S}$ , l'état du mètre est translaté d'une quantité dépendant de  $A_w = \langle f|A|i\rangle/\langle f|i\rangle$  qui est la valeur faible de  $A$  et où  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  sont respectivement les états initial et final de  $\mathcal{S}$ . On voit que, plus le recouvrement  $\langle f|i\rangle$  est petit, plus  $A_w$  est grand. C'est l'origine du phénomène d'*amplification* de l'estimation d'un paramètre qui est obtenue au prix de rendre très rares les occurrences pour lesquelles le système passe de l'état  $|i\rangle$  à l'état  $|f\rangle$ .

La première réalisation de l'amplification par une mesure faible a été celle du petit déplacement d'un faisceau laser gaussien passant à travers un cristal biréfringent [41]. Les mesures faibles permettent aussi, par exemple, de mesurer directement l'état d'un système. En 2011, Lundeen *et al.* [42] ont mesuré la fonction d'onde spatiale d'un mode transverse quantique d'un faisceau lumineux sans utiliser de techniques de tomographie de l'état.

Pour des systèmes plus complexes, sujets à une évolution *markovienne* comme la décohérence, il faut pouvoir prendre en compte la matrice densité complète du système et l'équation pilote régissant le processus stochastique [43]. Dans [35], Gammelmark *et al.* introduisent l'état passé d'un système  $\mathcal{S}$  sondé en continu. L'état passé est la donnée de deux matrices dont il faut calculer l'évolution indépendamment : la matrice densité  $\rho$  et la *matrice d'effet*  $\hat{E}$ . À l'instant  $t$ ,  $\rho$  est la transformée successive par les mesures prises depuis le début de l'expérience jusqu'à  $t$ . La matrice d'effet est calculée de manière analogue à  $\rho$ , les mêmes opérateurs de mesure sont utilisés, mais on doit considérer les résultats de détections en partant de la fin de l'expérience et en remontant jusqu'à  $t$ , voir figure 3.

En prenant l'exemple de la sonde du champ en cavité, il existe une équation pilote de  $\rho$  qui régit l'évolution de l'état du mode vers le vide de photon. La matrice d'effet, elle aussi, possède une équation pilote qui correspond à la description d'une « retro-relaxation ». L'évaluation de  $\hat{E}$  est donc obtenue avec des opérations « miroirs », transposées, à celles pour  $\rho$ . *In fine*, l'état passé du champ contient l'ensemble de l'information disponible à l'issue d'une séquence expérimentale (provenant des sondes et de la connaissance des équations pilotes).

Si une mesure indirecte, *faible ou non*, d'une quantité  $X$  de  $\mathcal{S}$  est effectuée à un instant  $t_X$  (voir figure 3), la prédiction du résultat de mesure est, à posteriori, meilleure en utilisant l'état passé plutôt que la matrice densité. La probabilité d'obtenir le résultat  $x_n$  s'écrit :

$$\mathcal{P}(x_n, t_X) = \frac{\text{Tr}(\Omega_n \rho(t_X) \Omega_n^\dagger E(t_X))}{\sum_m \text{Tr}(\Omega_m \rho(t_X) \Omega_m^\dagger E(t_X))},$$

où  $\Omega_m$  est l'opérateur de mesure lié au résultat  $x_m$ . Cette expression est bien différente de

celle de la probabilité usuelle construite avec la matrice densité uniquement :

$$P(x_n, t_X) = \frac{\text{Tr}(\Omega_n \rho(t_X) \Omega_n^\dagger)}{\sum_m \text{Tr}(\Omega_m \rho(t_X) \Omega_m^\dagger)}.$$

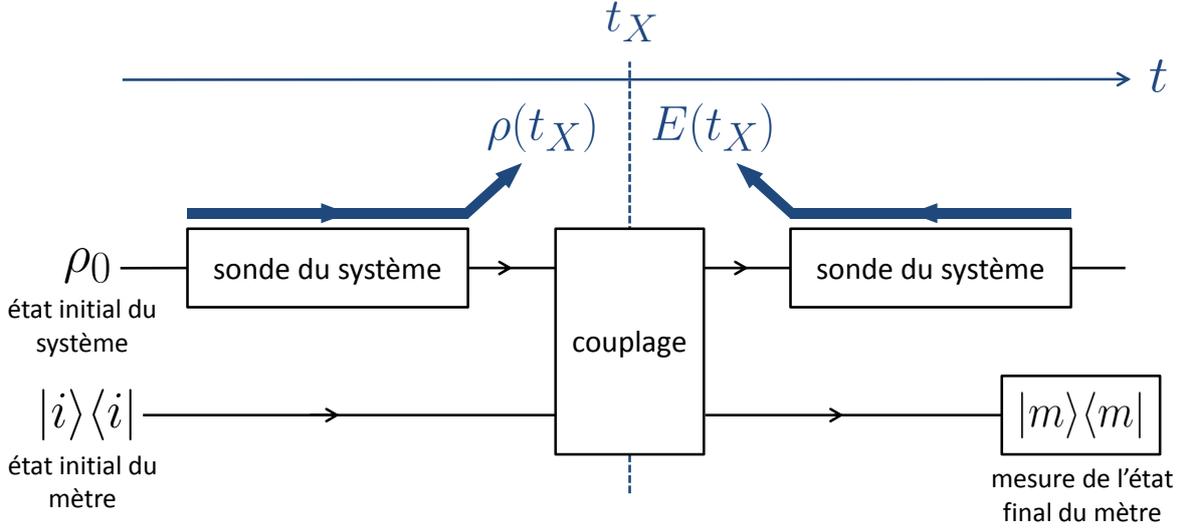


FIGURE 3 – État passé d'un système quantique. A un instant  $t_X$ , le système quantique  $\mathcal{S}$  est couplé à un mètre  $\mathcal{M}$  pour mesurer de façon indirecte une observable  $X$  de  $\mathcal{S}$ . La prédiction du résultat de la mesure est meilleure si l'on prend en compte la sonde de  $\mathcal{S}$  avant *et après* cet instant, c'est-à-dire les matrices  $\rho(t_X)$  et  $E(t_X)$ . Figure inspirée de [35].

Cette stratégie a été appliquée pour la mesure faible et continue de la « fluorescence », processus aléatoire, d'un qubit supraconducteur [44]. Le qubit est faiblement excité par un champ résonant et le signal de fluorescence est récupéré par une ligne de transmission avec laquelle il est couplé fortement. Après un temps  $T$ , le qubit est mesuré de façon projective sur le niveau  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ . Sans post-sélection de l'état final  $|f\rangle$  du qubit, on observe les oscillations de Rabi dues aux cycles d'excitation et de relaxation du système. En post-sélectionnant les signaux selon  $|f\rangle$ , on observe l'interférence entre les oscillations de Rabi provenant de l'état initial et de l'état final du qubit. La valeur moyenne de l'opérateur  $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ , proportionnelle au signal de fluorescence, peut alors prendre des valeurs plus grandes que  $1/2$ . C'est un résultat connu de l'utilisation du formalisme des mesures faibles avec post-sélection [37]. Les signaux de fluorescence avec post-sélection sont correctement prédits par le formalisme de l'état passé.

Dans notre cas, il va nous servir à avoir une meilleure estimation de l'état du mode de la cavité. Nous ne chercherons pas à mesurer une valeur faible d'aucune sorte. En effet, la méthode de l'état passé dépasse la seule application à la mesure faible d'une observable.

Elle s'applique en particulier à notre mesure quantique non-destructive du champ en cavité par une série de sondes atomiques. Le principal objet de cette thèse est de prouver que l'état passé du champ estime mieux que la matrice densité l'état réel du champ.

Ce manuscrit s'articule en quatre chapitres. Dans le premier, nous rappellerons le formalisme utilisé pour la description d'un champ quantique et nous introduirons l'équation pilote qui décrit la relaxation de l'état du champ vers un état thermique. Nous verrons ensuite le modèle de l'atome à deux niveaux puis la description du couplage de celui-ci à des champs classique et quantique. Nous finirons avec la description théorique de l'interféromètre atomique de Ramsey.

Le deuxième chapitre est consacré à la mesure en physique quantique. Nous rappellerons en particulier ce qu'est une mesure généralisée d'une observable puis nous aborderons la mesure QND du nombre de photons. Nous détaillerons l'analyse habituelle de ces mesures qui permet de construire à chaque instant la matrice densité du champ. Nous la comparerons ensuite à la méthode de l'état passé du champ et nous illustrerons les différences en ré-analysant les données de l'expérience de Guerlin *et al.* [25] où le champ contient moins de 4 photons en moyenne.

Dans le troisième chapitre, nous aborderons les aspects techniques de l'expérience. Nous verrons comment nous préparons les atomes de Rydberg circulaires que nous avons évoqués. Puis, nous présenterons la cavité supraconductrice de grande finesse et le mode du champ utilisé. Enfin, nous verrons comment nous réalisons en pratique l'interféromètre de Ramsey.

Nous décrirons, dans le quatrième et dernier chapitre, les résultats expérimentaux de mesure QND du nombre de photon avec un champ contenant initialement 12 photons en moyenne. Nous insisterons sur le gain en terme d'information que nous apporte l'état passé sur le champ réel. Nous verrons aussi qu'il permet une bien meilleure résolution des sauts quantiques qu'avec l'analyse utilisant la matrice densité seule. Nous présenterons notamment une seconde expérience où nous induisons des sauts quantiques. Nous en déduisons un critère simple pour détecter les sauts de photons dans la première expérience. Nous pourrions observer des états de Fock  $|n > 7\rangle$  et mesurer les taux des transitions  $|n\rangle \rightarrow |n - 1\rangle$  de ces états. Nous montrons ainsi que la méthode de l'état passé permet de vaincre la limite due à la périodicité de la mesure de la phase atomique sur laquelle est codée l'information de  $n$ . En effet, les nombres  $n$  et  $n' = n + 8$  sont, en principe, indistinguables.



# Chapitre I

## Éléments de théorie

Ce chapitre a pour but d'introduire brièvement les éléments de théorie nécessaires à la description des expériences d'électrodynamique quantique en cavité présentées dans ce manuscrit. Nous allons commencer par décrire un mode quantique de la lumière puis nous en présenterons quelques états importants. Nous terminerons la première partie de ce chapitre par la formalisation du couplage du mode du champ à un environnement modélisé comme un bain thermique. Nous présenterons l'équation pilote décrivant la relaxation et la décohérence du champ sous l'effet de ce couplage. Dans une deuxième partie, nous allons développer le modèle idéal du système à deux niveaux qui s'applique bien aux sondes atomiques utilisées dans nos expériences. Une fois ce modèle entre nos mains, nous allons faire interagir les atomes à deux niveaux avec de la lumière. Nous présenterons tout d'abord l'interaction entre un atome et un champ classique ce qui nous permettra de manipuler l'état interne de l'atome. Nous développerons ensuite le couplage de l'atome avec un mode quantique du champ. Nous montrerons qu'il existe deux régimes d'interaction intéressants : le régime résonant et le régime dispersif. Ce dernier présente l'intérêt tout particulier de pouvoir coder dans l'état atomique une information sur le nombre de photons présents dans le mode. Dans une dernière partie, nous présenterons le moyen de lire cette information par l'utilisation d'un interféromètre atomique de Ramsey.

### I.1 Description quantique de la lumière

Un mode du champ lumineux quantique est formellement analogue à un oscillateur harmonique quantique unidimensionnel [45]. Nous allons commencer cette section en rappelant les résultats essentiels du formalisme quantique qui s'applique à cet oscillateur et donner quelques exemples importants d'états de la lumière. Si la description que nous allons donner est valable pour le mode d'un champ propageant dans l'espace libre, nous considérons dès maintenant que l'on étudie un mode de champ en cavité. Comme ce mode n'est pas un système isolé en pratique, nous terminerons par une description formelle du couplage du mode avec son environnement.

## I.1.1 Description d'un mode du champ quantique

### I.1.1.a Hamiltonien du champ lumineux

Le Hamiltonien d'un mode du champ s'écrit comme celui d'un oscillateur harmonique quantique à une dimension :

$$H_{\text{cav}} = \hbar\omega_{\text{cav}} \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{I.1})$$

avec  $\omega_{\text{cav}} = 2\pi\nu_{\text{cav}}$  où  $\nu_{\text{cav}}$  est la fréquence du mode du champ considéré et  $\hbar = h/2\pi$ , la constante de Planck réduite.

L'opérateur  $a$  et son conjugué hermitique  $a^\dagger$  sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création d'un photon dans le mode du champ considéré.

On définit l'observable liée au nombre de photons comme :

$$\hat{N} = a^\dagger a. \quad (\text{I.2})$$

L'énergie du champ ne dépend donc que de l'énergie  $\hbar\omega_{\text{cav}}$  d'un photon et de leur nombre. Le facteur  $1/2$  restant dans I.1 représente l'énergie non nulle d'un mode vide de photons noté  $|0\rangle$ .

Puisque, de manière évidente,  $H_{\text{cav}}$  et  $\hat{N}$  commutent, ces observables partagent une même base propre d'états appelés *états nombre* ou *états de Fock* dont nous allons étudier quelques propriétés dans le paragraphe qui suit.

### I.1.1.b États nombre de photons

Les états nombre sont les états propres de  $\hat{N}$ , ils contiennent exactement  $n$  photons et on les note  $|n\rangle$ . Ils sont transformés sous l'action des opérateurs du champ  $a$ ,  $a^\dagger$  et  $\hat{N}$  de la manière suivante :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (\text{I.3})$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ .

L'opérateur champ électrique  $\hat{\mathbf{E}}$  s'exprime en fonction de  $a$  et  $a^\dagger$  :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\mathcal{E}_0\boldsymbol{\epsilon}f(\mathbf{r})a + h.c., \quad (\text{I.4})$$

où  $f(\mathbf{r})$  est la fonction de profil spatial du champ, normalisée telle que  $\max(|f(\mathbf{r})|) = 1$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$  est la polarisation du champ et  $\mathcal{E}_0$  une amplitude « par photon » dont l'expression est :

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\text{cav}}}{2\epsilon_0\mathcal{V}}}, \quad (\text{I.5})$$

où  $\mathcal{V} = \int |f(\mathbf{r})|^2 d^3r$  est le volume du mode. En utilisant I.3, on trouve aisément que la valeur moyenne de  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$  dans un état de Fock est nulle :

$$\langle n|\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|n\rangle = 0. \quad (\text{I.6})$$

Notons que leur énergie ne l'est pas :  $\langle n|H_{\text{cav}}|n\rangle = \hbar\omega_{\text{cav}}(n + 1/2)$ . Les états de Fock sont donc des états de la lumière purement quantiques. Il existe d'autres états, appelés *états cohérents*, qui redonnent des expressions classiques pour le champ électrique moyen, ils seront présentés dans le paragraphe suivant.

Toujours pour les états de Fock, on trouve que  $\langle n|\hat{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r})|n\rangle \neq 0$ , c'est à dire qu'il existe des fluctuations autour de la valeur moyenne nulle du champ électrique, notamment pour le vide de photons  $|0\rangle$ . Le couplage d'atomes à ces fluctuations du vide est à l'origine de l'émission spontanée et à un déplacement des niveaux d'énergie atomiques par effet Stark appelé *déplacement de Lamb* que nous reverrons au paragraphe I.2.3.

### I.1.1.c États cohérents

Les états cohérents ont été introduits la première fois en 1927 par Schrödinger [46] comme solutions au problème de l'oscillateur harmonique quantique dans le but de retrouver les expressions du mouvement classique de la masse oscillante. Dans les années 1960 ces états ont été utilisés comme états de la lumière dans le cadre du développement d'une théorie quantique de l'optique. Glauber a largement contribué à ce développement (on parle aussi d'*états de Glauber*) dont nous allons très brièvement rappeler certains résultats [47].

Tout d'abord, ces états, notés  $|\alpha\rangle$ , sont les états propres de l'opérateur d'annihilation :

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \alpha \in \mathbb{C}. \quad (\text{I.7})$$

Ils peuvent s'exprimer dans la base des états de Fock selon la décomposition suivante :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{I.8})$$

En utilisant le Hamiltonien indépendant du temps  $H_{\text{cav}}$  (voir équation I.1), nous en déduisons l'évolution temporelle de  $|\alpha\rangle$  :

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-i\frac{H_{\text{cav}}t}{\hbar}} |\alpha\rangle = e^{-i\frac{\omega_{\text{cav}}t}{2}} |\alpha e^{-i\omega_{\text{cav}}t}\rangle. \quad (\text{I.9})$$

Si l'on oublie le facteur de phase globale  $e^{-i\frac{\omega_{\text{cav}}t}{2}}$ , l'évolution d'un état cohérent se fait simplement à travers un terme de phase oscillant à  $\omega_{\text{cav}}$ , comme dans l'évolution d'un champ classique.

Pour finir cette courte description, nous allons extraire quelques propriétés statistiques des états  $|\alpha\rangle$ . La décomposition de ceux-ci sur la base des états nombre, révèle la statistique de Poisson du nombre de photons présents dans le champ. La probabilité  $P(n)$  d'en avoir  $n$  s'exprime comme :

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (\text{I.10})$$

Nous en déduisons le nombre moyen de photons  $\langle n \rangle$  contenus dans le mode du champ :

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (\text{I.11})$$

ainsi que la dispersion  $\Delta n$  de la distribution de  $n$ , donnée par l'expression suivante :

$$\Delta n^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|. \quad (\text{I.12})$$

Notons la différence avec les états de Fock qui contiennent un nombre exact de photons (et donc pour lesquels  $\Delta n^2 = 0$ ). Remarquons aussi que, si  $|\alpha|$  est assez grand, les fluctuations sur l'énergie du champ deviennent petites devant l'énergie moyenne. À mesure que  $|\alpha|$  augmente, ces fluctuations quantiques jouent un rôle de plus en plus négligeable, en valeur relative, et le champ devient de plus en plus classique.

## I.1.2 Couplage à l'environnement

Les systèmes quantiques ne sont, en pratique, jamais des systèmes parfaitement isolés. Les atomes peuvent se désexciter grâce au couplage avec les modes du champ électromagnétique présents (processus d'émission spontanée ou stimulée suivant que le mode est vide ou non), une cavité contenant initialement quelques photons peut les perdre au profit des différents degrés de libertés extérieurs à celle-ci (transfert à des modes de champ extérieurs, absorption par les miroirs. . .). Dans les paragraphes suivants nous allons donc voir comment décrire la relaxation et la décohérence d'un état du champ en cavité. Nous commencerons par trouver quel est l'état d'équilibre entre le système et son environnement puis nous décrirons brièvement l'évolution temporelle du champ donnée par une équation maîtresse.

### I.1.2.a État thermique du champ

On considère que les modes extérieurs à la cavité constituent un bain thermique de température  $T$ . Le mode du champ va se thermaliser progressivement avec lui.

À l'équilibre thermodynamique, la distribution du nombre de photons dans le mode suit la loi statistique de Bose-Einstein :

$$P_{\text{th}}(n) = e^{-\frac{n\hbar\omega_{\text{cav}}}{k_{\text{B}}T}} \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega_{\text{cav}}}{k_{\text{B}}T}} \right), \quad (\text{I.13})$$

où  $k_{\text{B}}$  est la constante de Boltzmann.

L'état du champ sera alors dans un état dit *thermique* et contiendra un nombre moyen de photons noté  $n_{\text{th}}$  dont l'expression est :

$$n_{\text{th}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{\text{cav}}}{k_{\text{B}}T}} - 1}. \quad (\text{I.14})$$

Nous pouvons réécrire l'équation I.13 en fonction de  $n_{\text{th}}$  :

$$P_{\text{th}}(n) = \frac{n_{\text{th}}^n}{(n_{\text{th}} + 1)^{n+1}}, \quad (\text{I.15})$$

la probabilité  $P_{\text{th}}(n)$  suit donc une progression géométrique de raison  $n_{\text{th}}/(n_{\text{th}} + 1)$ .

### I.1.2.b Relaxation, décohérence : l'équation maîtresse

Nous allons maintenant chercher à formaliser la dynamique qui mènera le mode à contenir  $n_{\text{th}}$  photons. L'environnement étant un « grand » système, la description complète du problème serait très compliquée. On peut cependant supposer que l'information du champ contenue dans l'environnement via l'intrication entre les deux systèmes est perdue en un temps très court. Elle est « diluée » rapidement dans la multitude des degrés de libertés du bain. Cette évolution à « mémoire courte » est qualifiée de markovienne [48, 45] et on peut restreindre le problème en n'utilisant que des opérateurs agissant sur le mode de la cavité. En supposant un couplage linéaire entre le mode de la cavité et son environnement, les échanges d'énergie entre les deux systèmes se font photon par photon. On décrit la variation du nombre de photons dans la cavité par les opérateurs de saut  $L_-$  et  $L_+$  [48] :

$$L_- = \sqrt{\kappa_-} a, \quad L_+ = \sqrt{\kappa_+} a^\dagger, \quad (\text{I.16})$$

avec  $\kappa_-$  et  $\kappa_+$  des coefficients qui dépendent de la température du bain. La dynamique de l'état du champ est régie par une équation maîtresse que l'on écrit sous la *forme de Lindblad* [49] :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \mathbf{L}\rho, \quad (\text{I.17})$$

$$\mathbf{L}\rho = \sum_{\mu=\{+,-\}} \left( L_\mu \rho L_\mu^\dagger - \frac{1}{2} L_\mu^\dagger L_\mu \rho - \frac{1}{2} \rho L_\mu^\dagger L_\mu \right), \quad (\text{I.18})$$

où  $\rho$  est la matrice densité du mode du champ de la cavité supraconductrice. Le premier terme de l'équation maîtresse I.17 représente l'évolution hamiltonienne du champ. Le second décrit l'action, codée dans le superopérateur  $\mathbf{L}$ , du couplage avec le bain sur l'état du mode du champ.

Intéressons nous maintenant à l'évolution du nombre de photons. Par définition des opérateurs de sauts  $L_+$  et  $L_-$ , les probabilités de gagner et perdre un photons dans le mode sont respectivement donnés par :

$$p_+ = \text{Tr} \left( L_+^\dagger L_+ \rho \right) = \kappa_+ \text{Tr} \left( a a^\dagger \rho \right) = \kappa_+ (1 + \langle n \rangle), \quad (\text{I.19})$$

$$p_- = \text{Tr} \left( L_-^\dagger L_- \rho \right) = \kappa_- \text{Tr} \left( a^\dagger a \rho \right) = \kappa_- \langle n \rangle. \quad (\text{I.20})$$

En utilisant l'argument qu'à l'équilibre thermodynamique ces probabilités de sauts quantiques sont égales, on trouve une relation entre les coefficients  $\kappa_+$  et  $\kappa_-$  :

$$\frac{\kappa_+}{\kappa_-} = \frac{n_{\text{th}}}{n_{\text{th}} + 1}. \quad (\text{I.21})$$

On introduit alors un coefficient  $\kappa$  tel que

$$\kappa_+ = n_{\text{th}} \kappa, \quad \kappa_- = (n_{\text{th}} + 1) \kappa. \quad (\text{I.22})$$

Nous utilisons ces résultats pour exprimer l'évolution de la population d'un nombre de photons  $n$  présents dans le champ en utilisant l'équation I.17, en représentation d'interaction par rapport à  $H = H_{\text{cav}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{dP(n)}{dt} &= \frac{d\langle n|\rho|n\rangle}{dt} \\ &= \kappa(n_{\text{th}} + 1)(n + 1)P(n + 1) \\ &\quad + \kappa n_{\text{th}}n P(n - 1) \\ &\quad - \left(\kappa(n_{\text{th}} + 1)n + \kappa n_{\text{th}}(n + 1)\right)P(n) . \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Nous en déduisons l'évolution du nombre moyen de photons dans le mode de la cavité :

$$\frac{d\langle \hat{N} \rangle}{dt} = -\kappa \left( \langle \hat{N} \rangle - n_{\text{th}} \right) . \quad (\text{I.24})$$

Nous retrouvons bien que l'état d'équilibre est donné par  $\langle \hat{N} \rangle = n_{\text{th}}$ . De plus, en se plaçant à température nulle, nous pouvons interpréter  $\kappa$  comme le taux de relaxation de l'énergie moyenne du champ. Nous noterons alors le temps de vie de la cavité  $T_{\text{cav}} = \kappa^{-1}$ . Il correspond aussi à la durée de vie d'un état de Fock à un photon. Pour les états nombre avec  $n > 1$ , elle sera diminuée proportionnellement au nombre de photons contenu dans le mode :  $T(n) = T_{\text{cav}}/n$ .

## I.2 Interaction de l'atome avec le champ

Dans cette section, nous allons décrire l'interaction entre lumière et atome, point central des expériences d'électrodynamique quantique en cavité. La structure interne des atomes est en général très compliquée. Cependant, on peut expérimentalement restreindre l'évolution atomique à une paire d'états réalisant ainsi le modèle simple de l'atome à deux niveaux. Cette restriction est possible dans les expériences présentées en isolant deux états dont la fréquence de transition est résonante (ou quasi-résonante) avec le mode cavité (voir III.2). Une fois le formalisme de ce modèle simple établi, nous ferons interagir l'atome à deux niveaux avec de la lumière classique puis nous décrirons le couplage de l'atome avec un mode quantique de la lumière.

### I.2.1 Atome à deux niveaux

Nous considérons les niveaux  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ , respectivement les états fondamental et excité de l'atome à deux niveaux. Par analogie avec un spin 1/2, on représente géométriquement n'importe quelle superposition de  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  comme un vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  dont l'extrémité appartient à une sphère appelée *sphère de Bloch*. En toute généralité l'état atomique et  $\mathbf{u}$  peuvent s'écrire en fonction de deux angles  $\theta$  et  $\varphi$  :

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |e\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |g\rangle , \quad (\text{I.25})$$

$$\mathbf{u} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z , \quad (\text{I.26})$$

les  $\mathbf{e}_i$  étant des vecteurs unitaires de la sphère de Bloch. Nous montrons à la figure I.1 cette représentation de Bloch.

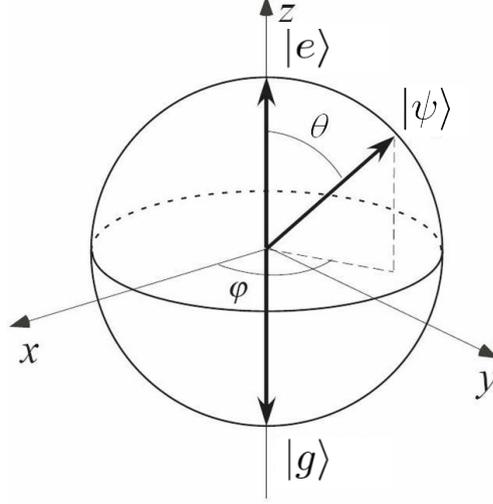


FIGURE I.1 – Représentation de la sphère de Bloch. L'état  $|\psi\rangle$  d'un système quantique à deux niveaux est représenté en toute généralité par un vecteur unitaire paramétré par les angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Il peut explorer tous les points d'une sphère de rayon unité appelée sphère de Bloch.

Toute transformation unitaire de ce *pseudospin* peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la matrice identité d'ordre 2 et des *matrices de Pauli* que l'on écrit ici dans la base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.27})$$

Une de ces transformations unitaires est l'évolution libre de l'atome qui est régie par le Hamiltonien  $H_{\text{at}}$  :

$$H_{\text{at}} = \frac{\hbar\omega_{\text{at}}}{2}\sigma_z, \quad (\text{I.28})$$

où l'on a choisi l'origine des énergies comme la moyenne des énergies absolues de  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ .

En vue de décrire le couplage de cet atome avec un champ lumineux, nous avons besoin de définir l'opérateur dipôle électrique  $\mathbf{D} = q\mathbf{R}$ . Il est non-diagonal dans la base des états de parité opposée  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  et peut donc s'écrire :

$$\mathbf{D} = d(\epsilon_a\sigma_- + \epsilon_a^*\sigma_+), \quad (\text{I.29})$$

avec  $d$  choisi réel,  $\epsilon_a$  choisi unitaire et  $\sigma_+$  (resp.  $\sigma_-$ ) l'opérateur création (resp. annihilation) d'excitation atomique définis par :

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2} = |e\rangle\langle g|, \quad \sigma_- = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2} = |g\rangle\langle e|. \quad (\text{I.30})$$

## I.2.2 Couplage de l'atome à un champ classique

### I.2.2.a Hamiltonien d'interaction

Nous soumettons l'atome à deux niveaux à un champ électrique classique  $\mathbf{E}_r$  de pulsation  $\omega_r$  dont l'expression est :

$$\mathbf{E}_r(t) = i\mathcal{E}_r \left( \boldsymbol{\epsilon}_r e^{-i(\omega_r t + \varphi_r)} - \boldsymbol{\epsilon}_r^* e^{i(\omega_r t + \varphi_r)} \right), \quad (\text{I.31})$$

où l'on a introduit l'amplitude  $\mathcal{E}_r$ , la phase  $\varphi_r$  et la polarisation  $\boldsymbol{\epsilon}_r$  du champ.

On suppose une interaction dipolaire entre l'atome et le champ, le Hamiltonien d'interaction s'écrit alors :

$$H_r = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_r(t), \quad (\text{I.32})$$

Pour écrire le Hamiltonien total de l'atome, nous nous plaçons dans le référentiel tournant à  $\omega_r$  : nous utilisons la représentation d'interaction par rapport à  $(\hbar\omega_r/2)\sigma_z$ . Nous négligeons de plus les termes d'évolution rapide (approximation dite *séculaire* ou *de l'onde tournante*). Nous obtenons dans ce cadre le Hamiltonien  $\tilde{H}$  indépendant du temps :

$$\tilde{H} = \frac{\hbar\Delta_r}{2}\sigma_z - i\frac{\hbar\Omega_r}{2} \left[ e^{-i\varphi_r}\sigma_+ - e^{i\varphi_r}\sigma_- \right], \quad (\text{I.33})$$

où  $\Delta_r = \omega_{\text{at}} - \omega_r$  est le désaccord en pulsation entre l'atome et le champ et  $\Omega_r$  est la pulsation de Rabi classique. Nous choisissons  $\Omega_r$  réelle et positive sans perte de généralité. Elle est donnée par l'expression :

$$\Omega_r = \frac{2d}{\hbar} \mathcal{E}_r \boldsymbol{\epsilon}_a^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_r, \quad (\text{I.34})$$

Nous récrivons finalement  $\tilde{H}$  sous une forme plus compacte :

$$\tilde{H} = \frac{\hbar\Omega'_r}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (\text{I.35})$$

avec  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  et

$$\Omega'_r = \sqrt{\Omega_r^2 + \Delta_r^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\Omega'_r} \left[ \Delta_r \mathbf{e}_z + \Omega_r (-\sin \varphi_r \mathbf{e}_x + \cos \varphi_r \mathbf{e}_y) \right]. \quad (\text{I.36})$$

où  $\Omega'_r$  est aussi réelle et positive.

L'état atomique évolue, après une durée  $t_{\text{int}}$  de l'interaction avec le champ classique et depuis l'état initial  $|\psi(0)\rangle$ , selon la transformation suivante [50] :

$$\begin{aligned} |\psi(t_{\text{int}})\rangle &= R_{\mathbf{n}}(\alpha) |\psi(0)\rangle, \\ &= \exp\left(-i\frac{\alpha}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\right) |\psi(0)\rangle, \\ &= \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] |\psi(0)\rangle, \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

avec  $\alpha = \Omega_r t_{\text{int}}$  et avec  $R_{\mathbf{n}}$  est l'opérateur de rotation dans l'espace de dimension 2 du pseudospin défini par :

$$R_{\mathbf{n}} = \exp\left(-i \frac{\tilde{H} t_{\text{int}}}{\hbar}\right), \quad (\text{I.38})$$

$$(\text{I.39})$$

### I.2.2.b Manipulation de l'état interne de l'atome

Le Hamiltonien  $\tilde{H}$  de l'équation I.35 est analogue à celui d'un spin 1/2 plongé dans un champ magnétique. Nous connaissons dans ce cas l'évolution du pseudospin atomique : il va entrer en précession de Larmor autour de l'axe  $\mathbf{n}$  défini par l'équation I.36. À la condition de régler le désaccord  $\Delta_r$ , la phase  $\phi_r$  et l'amplitude  $\mathcal{E}_r$ , il est possible de préparer n'importe quelle superposition d'états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ .

Dans le cas résonant ( $\Delta_r = 0$ ), le pseudospin va tourner autour d'un axe  $\mathbf{n}$  contenu dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. Pour décrire l'évolution, prenons deux exemples d'états initiaux différents :  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ . Selon l'équation I.37, après un temps d'interaction  $t_{\text{int}}$  avec le champ classique, ils deviennent :

$$|e\rangle \longrightarrow \cos \frac{\Omega_r t_{\text{int}}}{2} |e\rangle + e^{i\varphi_r} \sin \frac{\Omega_r t_{\text{int}}}{2} |g\rangle, \quad (\text{I.40})$$

$$|g\rangle \longrightarrow -e^{-i\varphi_r} \sin \frac{\Omega_r t_{\text{int}}}{2} |e\rangle + \cos \frac{\Omega_r t_{\text{int}}}{2} |g\rangle. \quad (\text{I.41})$$

Si l'on enregistre la probabilité  $P_g$  de mesurer l'atome dans l'état  $|g\rangle$ , après interaction avec le champ classique, en fonction de  $t_{\text{int}}$ , on voit apparaître des *oscillations de Rabi* classiques de la population moyenne d'un état atomique (voir figure I.2).

Un exemple important de choix de  $t_{\text{int}}$  est la préparation d'une superposition d'état de poids égaux :

$$\Omega_r t_{\text{int}} = \frac{\pi}{2}, \quad |e\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + e^{i\varphi_r} |g\rangle), \quad (\text{I.42})$$

on appelle l'application d'un tel champ une *impulsion*  $\pi/2$ .

### I.2.3 Couplage avec un champ quantique

Dans les paragraphes suivants, nous allons voir le traitement de l'interaction entre l'atome et le champ quantifié et relever les similitudes et les différences entre ce traitement et celui fait précédemment avec un champ classique. Nous terminerons par l'examen de deux cas limites de l'interaction dont celui où l'interaction est dite dispersive. C'est le régime utilisé expérimentalement dans les expériences de comptage de photons.

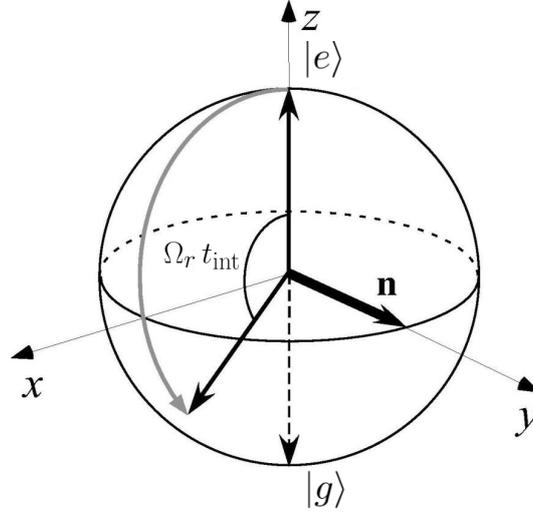


FIGURE I.2 – Oscillations de Rabi classiques. L'état interne de l'atome à deux niveaux évolue par l'interaction résonante avec un champ classique. Dans cet exemple, où la phase du champ est nulle :  $\varphi = 0$ , l'état final sera l'état initial  $|e\rangle$  tourné d'un angle  $\Omega_r t_{\text{int}}$  autour de l'axe  $\mathbf{n}$ .

### I.2.3.a Hamiltonien de Jaynes-Cummings

On se place toujours dans l'approximation dipolaire de l'interaction atome-champ, le Hamiltonien d'interaction (entièrement quantique cette fois) s'écrit :

$$H_{\text{int}} = -\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -id\mathcal{E}(\mathbf{r})(\epsilon_a \sigma_- + \epsilon_a^* \sigma_+) \cdot (\epsilon a - \epsilon^* a^\dagger). \quad (\text{I.43})$$

On utilise aussi l'approximation séculaire, déjà vue dans le cas classique. Le Hamiltonien d'interaction s'écrit finalement :

$$H_{\text{int}} = -i \frac{\hbar \Omega_0}{2} (\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger), \quad (\text{I.44})$$

avec

$$\Omega_0 = \frac{2\mathcal{E}_0 d \epsilon_a \cdot \epsilon}{\hbar}, \quad (\text{I.45})$$

qui est la *pulsation de Rabi du vide*, choisie réelle et positive. Elle caractérise le couplage entre atome et champ quantiques.

Le Hamiltonien total du système complet atome-champ est la somme des Hamiltoniens libres des systèmes individuels donnés par les équations I.28 et I.1 et de  $H_{\text{int}}$  :

$$H_{\text{JC}} = \frac{\hbar \omega_{\text{at}}}{2} \sigma_z + \hbar \omega_{\text{cav}} \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - i \frac{\hbar \Omega_0}{2} (\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger). \quad (\text{I.46})$$

Il s'agit du *Hamiltonien de Janyes-Cummings* [51]. On remarque qu'il conserve le nombre d'excitations du système et est donc diagonalisable par blocs. Le bloc qui contient  $n$  excitations s'écrit, dans la base des états non couplés  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ , comme :

$$H_n = \hbar \begin{pmatrix} \omega_{\text{cav}}(n+1) + \delta/2 & -i\Omega_0\sqrt{n+1}/2 \\ i\Omega_0\sqrt{n+1}/2 & \omega_{\text{cav}}(n+1) - \delta/2 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.47})$$

Les états propres de  $H_n$  sont les états de l'atome *habillés* par le champ dont les expressions sont :

$$|+, n\rangle = \cos \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle + \sin \frac{\theta_n}{2} |g, n+1\rangle, \quad (\text{I.48})$$

$$|-, n\rangle = \sin \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle - \cos \frac{\theta_n}{2} |g, n+1\rangle, \quad (\text{I.49})$$

avec

$$\tan \theta_n = \frac{\Omega_0\sqrt{n+1}}{\delta}. \quad (\text{I.50})$$

Leurs énergies propres ont l'expression suivante :

$$E_{\pm, n} = \hbar\omega_{\text{cav}}(n+1) \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Omega_0^2(n+1) + \delta^2}, \quad (\text{I.51})$$

elles sont représentées graphiquement à la figure I.3 en fonction de  $\delta$ .

Nous allons maintenant étudier dans les prochains paragraphes deux cas limites de l'interaction.

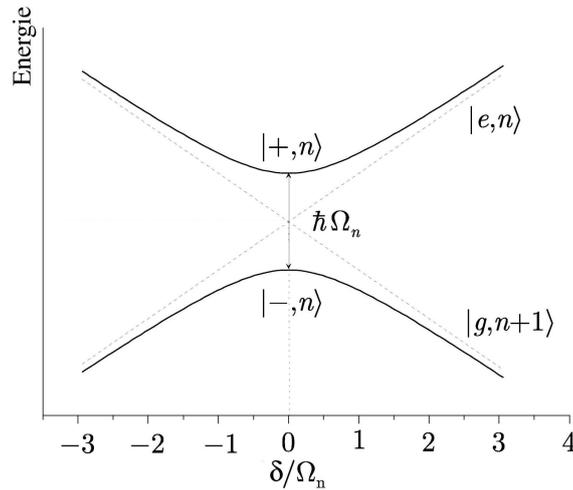


FIGURE I.3 – Énergies des états habillés  $|\pm, n\rangle$  en fonction du désaccord atome-champ  $\delta$  en unités de  $\Omega_n$ .

### I.2.3.b Cas résonant : oscillations de Rabi quantiques

Il s'agit du cas où  $\delta = 0$ , le couplage est alors maximal. Comme dans le cas où le champ est classique, l'interaction résonante va faire apparaître des oscillations de Rabi. Mais cette fois elles possèdent un caractère quantique, la pulsation caractérisant l'oscillation varie en fonction du nombre de photons présents dans le mode du champ :  $\Omega_n = \Omega_0\sqrt{n+1}$ . Comme dans le cas classique, ces oscillations sont la manifestation d'un échange cohérent d'énergie entre l'atome et le champ. Si le temps d'interaction est bien choisi, on peut préparer différents états, par exemple via une impulsion  $\pi$  :

$$\Omega_0\sqrt{n+1}t_{\text{int}} = \pi : \quad |e, n\rangle \longrightarrow |g, n+1\rangle, \quad (\text{I.52})$$

ce qui correspond à l'injection d'un photon dans le mode du champ grâce à l'atome. Si de plus on est capable de changer le temps  $t_{\text{int}}$  afin de compenser la variation du facteur  $\sqrt{n+1}$ , on peut injecter en cascade de l'énergie dans le mode d'un résonateur quantique et préparer un état de Fock particulier [52]. Il est aussi possible de combattre les effets de la relaxation et de conserver l'état de la cavité dans un état de Fock particulier grâce à une boucle de rétroaction quantique qui corrige les variations de  $n$  en utilisant des atomes qui absorbent ou émettent un photon à la fois [30].

### I.2.3.c Cas dispersif : déplacement lumineux

Le régime dispersif est atteint dès lors que  $|\delta| \gg \Omega_0\sqrt{n+1}$ . Les états propres de  $H_{\text{JC}}$  sont, dans ce cas, pratiquement confondus avec les états atome-champ non intriqués. On peut développer les énergies propres I.51 autour des énergies hors couplage selon le petit paramètre  $\Omega_0\sqrt{n+1}/\delta$ , elles deviennent alors :

$$E_{e,n} = E_{e,n}^0 + \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\delta}(n+1), \quad (\text{I.53})$$

$$E_{g,n} = E_{g,n}^0 - \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\delta}n, \quad (\text{I.54})$$

en négligeant toutes les corrections d'ordres supérieurs à 2.

Le Hamiltonien complet  $H_{\text{JC}}$  peut donc se réécrire, dans le régime dispersif, comme :

$$H_{\text{JC}}^{\text{disp}} = H_{\text{cav}} + \frac{\hbar}{2} \left[ \omega_{\text{at}} + \frac{\Omega_0^2}{2\delta} \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \right] \sigma_z, \quad (\text{I.55})$$

Cette forme présente l'interaction dispersive comme une modification des énergies atomiques par la présence de photons dans le mode du champ. On appelle cet effet le *déplacement lumineux* des niveaux d'énergies de l'atome. L'écart à la fréquence de transition hors couplage s'exprime comme :

$$\Delta\omega_{\text{at}}(n) = \frac{\Omega_0^2}{2\delta} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{I.56})$$

Un point capital pour les expériences présentées dans ce mémoire est que, si nous préparons l'atome dans une superposition d'états  $|e\rangle + |g\rangle$ , la phase de celle-ci va être modifiée selon le nombre de photons dans la cavité sans que ce dernier ne soit modifié : il n'y a pas d'échange d'énergie entre l'atome et le champ quand l'interaction est dispersive. La modification de la phase de la superposition d'états s'écrit :

$$\phi(n) = \Delta\omega_{\text{at}}(n) t_{\text{int}} = \varphi_0 \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{I.57})$$

où  $\varphi_0$  est le *déphasage par photon* :

$$\varphi_0 = \frac{\Omega_0^2}{2\delta} t_{\text{int}}, \quad (\text{I.58})$$

À condition que  $\delta$  soit suffisamment grand devant  $\Omega_0\sqrt{n+1}$ , la phase relative entre les deux niveaux atomiques dépend linéairement de  $n$ . Dans la section suivante, nous allons voir la technique interférométrique de mesure de cette phase qui est au cœur de la méthode de mesure QND du nombre de photons  $n$ .

## I.3 Compter les photons

Nous allons présenter ici l'interféromètre atomique de Ramsey qui permet d'extraire l'information sur le nombre de photons inscrite dans la phase d'une superposition d'états qui a interagi avec le champ quantique de la cavité. Une mesure directe de la phase est impossible puisqu'on détecte finalement l'état de l'atome donc son énergie. Nous présenterons brièvement l'interféromètre utilisé avant de montrer que la présence de photons dans le mode de la cavité déphase les franges d'interférences.

### I.3.1 Interférométrie atomique de Ramsey

#### I.3.1.a Un interféromètre pour atomes

L'interféromètre atomique utilisé est analogue à un interféromètre optique de Mach Zeinder. Dans ce dernier, un faisceau de lumière est divisé en deux par une lame séparatrice. Dans chacun des bras de l'interféromètre, la lumière peut acquérir une phase de manière indépendante. En recombinant le faisceau grâce à une seconde lame, on superpose les deux champs ayant accumulé une phase relative  $\Phi$ . Un détecteur (une photodiode par exemple) placé en sortie de l'interféromètre permet d'observer les interférences résultantes de la différence de phase  $\Phi$ . En faisant varier cette dernière, par exemple en changeant l'indice optique ou la longueur d'un des bras, on pourra observer des *franges d'interférences*.

Dans notre cas, nous voulons faire interférer un atome *avec lui même*, à l'instar d'un photon unique envoyé dans l'interféromètre de Mach-Zeinder que l'on vient de décrire. Par analogie avec l'interférométrie optique, nous donnons la possibilité à l'atome d'évoluer sur deux *chemins distincts* (voir figure I.4). Une impulsion  $\pi/2$  appliquée à un état atomique

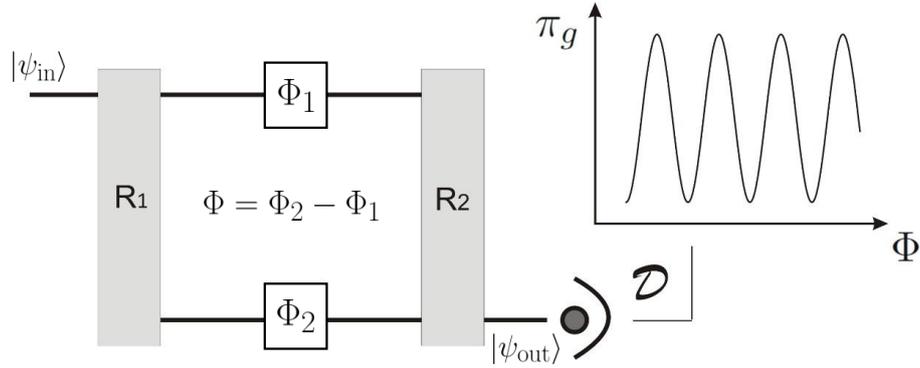


FIGURE I.4 – Schéma de l'interféromètre de Ramsey. Après une première impulsion  $\pi/2$  en R1, la superposition accumule une phase  $\Phi$ . La seconde impulsion  $\pi/2$  effectuée en R2 suivie d'une détection en  $\mathcal{D}$  de l'énergie de l'atome en sortie d'interféromètre permet l'observation de franges d'interférences quand  $\Phi$  est variée.

initial pur, prenons  $|e\rangle$ , va jouer le rôle de lame séparatrice. L'équation I.42 nous donnait la transformation de l'état  $|e\rangle$  par cette impulsion, on la réécrit ici en prenant la phase  $\varphi_r$  du champ nulle :

$$|\psi_0\rangle = |e\rangle \quad \longrightarrow \quad |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) . \quad (\text{I.59})$$

L'évolution libre de l'atome suffit à ce que la phase de la superposition d'état change : un terme de phase  $\exp(-iE_i t/\hbar)$  apparaît pour chaque état  $i$  de la superposition. Une seconde impulsion  $\pi/2$ , appliquée un temps  $T$  après la première, joue le rôle de lame recombinaison. Si nous mesurons l'état de l'atome en sortie d'interféromètre, selon la phase atomique relative acquise entre les deux « lames », on pourra trouver que l'atome a été transféré dans l'état  $|g\rangle$  sans pouvoir dire quelle impulsion aura changé l'état. Cette indistinguabilité est la source des deux « chemins » que l'atome peut prendre pendant son évolution. C'est grâce à cela que nous pouvons dire qu'il interfère avec lui-même.

Nous allons développer dans le paragraphe suivant les différentes évolutions de l'état atomique évoquées dans le but d'obtenir une expression de l'état en sortie d'interféromètre.

### I.3.1.b Phase de l'interféromètre

Nous supposons que l'atome est libre entre les deux impulsions séparées d'une durée  $T$ . Dans le référentiel tournant à la pulsation  $\omega_r$  de la source classique, l'état atomique aura évolué comme (on utilise le Hamiltonien  $H_{\text{at}}$  de l'équation I.28) :

$$|\psi_1\rangle \quad \longrightarrow \quad |\psi_2\rangle = \frac{e^{i\Delta_r T/2}}{\sqrt{2}} (e^{-i\Delta_r T}|e\rangle + |g\rangle) , \quad (\text{I.60})$$

avec, on le rapelle,  $\Delta_r = \omega_{\text{at}} - \omega_r$ . En pratique, les impulsions  $\pi/2$  sont générées par une même source classique, donc la phase de la seconde impulsion est la même que la première, soit  $\varphi_r = 0$ . L'application de cette seconde impulsion transforme l'état interne de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle \quad \longrightarrow \quad |\psi_3\rangle &= \frac{e^{i\frac{\Delta_r T}{2}}}{2} \left[ (e^{-i\Delta_r T} - 1) |e\rangle + (e^{-i\Delta_r T} + 1) |g\rangle \right] \\ &= -i \sin\left(\frac{\Delta_r T}{2}\right) |e\rangle + \cos\left(\frac{\Delta_r T}{2}\right) |g\rangle . \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

Nous en déduisons la probabilité de détecter  $|g\rangle$  en sortie de l'interféromètre :

$$P_g = |\langle g|\psi_3\rangle|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left((\omega_{\text{at}} - \omega_r)T\right) , \quad (\text{I.62})$$

formule valable dans le cas où on a préparé initialement l'atome dans l'état  $|e\rangle$ . Notons que dans les calculs précédents, nous avons négligé l'évolution de l'atome pendant la durée des impulsions  $\pi/2$ , bien plus faible que  $T$  en pratique.

Dans nos expériences, l'atome n'est pas piégé mais traverse le dispositif à une vitesse de 250 m/s. Il passe par deux cavités, contenant des champs classiques, distantes d'environ 9 cm et plutôt que d'un temps d'interrogation  $T$ , nous parlerons du temps de vol de l'atome  $t_{\text{vol}} \approx 360 \mu\text{s}$ . Nous réécrivons alors l'équation I.62 comme :

$$P_g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi_R , \quad (\text{I.63})$$

avec  $\phi_R = (\omega_{\text{at}} - \omega_r)t_{\text{vol}}$  la *phase de l'interféromètre de Ramsey*.

Nous ne changerons pas  $t_{\text{vol}}$  en modifiant la vitesse des atomes, il faudrait calibrer la préparation atomique, la détection et régler les instants des différentes impulsions etc. . . pour toutes les classes de vitesses utilisées. C'est extrêmement fastidieux et inutile pour les expériences que l'on souhaite réaliser. On peut, en revanche, changer la fréquence de la source classique  $\omega_r/(2\pi)$  ou modifier la fréquence de transition atomique  $\omega_{\text{at}}$ .

Ce dernier point est réalisable via l'application d'un champ électrique statique sur le chemin des atomes. L'*effet Stark* résultant va déplacer les niveaux d'énergie et la phase de la superposition sera altérée en conséquence. On peut écrire  $\phi_R$ , sans donner de détails sur la forme de l'effet Stark, comme :

$$\phi_R = \int_0^{t_{\text{vol}}} (\omega_{\text{at}}(t) - \omega_r) dt. \quad (\text{I.64})$$

### I.3.1.c Effet d'un champ quantique sur les franges d'interférences

Nous avons à présent, du moins théoriquement, un interféromètre à notre disposition et nous nous sommes donné les moyens de contrôler sa phase. Couplé à un détecteur d'état atomique, nous allons l'utiliser pour mesurer le nombre de photons présents dans le mode de la cavité.

Dans le cas où l'interaction entre l'atome et le champ quantique est dispersive, nous avons vu que le dipôle atomique était, si le mode contient  $n$  photons, déphasé d'une quantité :

$$\phi(n) = \varphi_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) . \quad (\text{I.65})$$

Il est pratique d'intégrer le terme de déplacement de Lamb  $\varphi_0/2$ , toujours présent, à la définition de  $\phi_R$  :

$$\phi_R \longrightarrow \phi_R = \phi_R|_{\text{libre}} + \frac{\varphi_0}{2} , \quad (\text{I.66})$$

$$\phi(n) \longrightarrow \phi(n) = n\varphi_0 , \quad (\text{I.67})$$

avec  $\phi_R|_{\text{libre}}$  la phase de l'interféromètre en l'absence de couplage, donnée par l'équation I.64.

La formule donnant l'état final en sortie de l'interféromètre depuis un état atomique initial  $|e\rangle$  (voir équation I.61) et se réécrit finalement :

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle \otimes |n\rangle &\longrightarrow \dots \\ |\psi_3\rangle \otimes |n\rangle &= -i \sin \left( \frac{\phi(n) + \phi_R}{2} \right) |e, n\rangle + \cos \left( \frac{\phi(n) + \phi_R}{2} \right) |g, n\rangle . \end{aligned} \quad (\text{I.68})$$

On en déduit la probabilité de mesurer l'état  $|g\rangle$  qui est égale à :

$$\pi(g|n, \phi_R) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\phi(n) + \phi_R) , \quad (\text{I.69})$$

La fonction  $\pi(g|n, \phi_R)$  se lit comme la probabilité de détecter l'état  $|g\rangle$  en sachant qu'il y a  $n$  photons dans le mode et qu'on a utilisé la phase de l'interféromètre  $\phi_R$ . Ce choix de notation associée aux *probabilités conditionnelles* n'est pas anodin, nous verrons pourquoi dans la suite.

La formule I.69 est donnée pour un interféromètre idéal. S'il est imparfait elle devient :

$$\pi(g|n, \phi_R) = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi(n) + \phi_R) , \quad (\text{I.70})$$

avec  $C$  le contraste des franges et  $\pi_0$  le décalage par rapport à la situation où  $\pi(g|n, \phi_R) = 1/2$  pour  $\phi(n) + \phi_R = \pi/2$  [ $\pi$ ]. Ces deux paramètres sont liés aux erreurs de préparation de l'état atomique et de détection, nous reviendrons sur ce point dans le chapitre III.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à étudier plus en détail le processus de mesure en physique quantique, sujet du prochain chapitre.

# Chapitre II

## Mesures quantiques non-destructives

Dans le premier chapitre, nous avons donné le principe du comptage des photons présents dans le mode de la cavité grâce à la mesure de l'état atomique en sortie d'un interféromètre de Ramsey dans lequel la cavité supraconductrice était placée. Nous allons maintenant rappeler la notion de mesure en mécanique quantique et nous expliquerons ce qu'est la mesure quantique non-destructive d'une observable. Nous verrons pourquoi notre mesure du nombre de photons en est une et comment nous pouvons utiliser notre interféromètre pour compter les photons sans les détruire par l'acquisition progressive de l'information extraite des sondes atomiques. Enfin, dans une dernière section, nous allons présenter la méthode d'analyse utilisant l'état passé du champ. Elle permet d'obtenir une meilleure connaissance, à chaque instant, sur la distribution du nombre de photons dans la cavité qu'avec la méthode habituelle où la distribution de photons considérée est composée des éléments diagonaux de la matrice densité.

### II.1 La mesure en physique quantique

Dans les prochains paragraphes nous allons aborder la mesure telle qu'elle est décrite dans les postulats. Nous allons rappeler ce qu'est une mesure projective d'une grandeur physique d'un système puis nous verrons le formalisme de la mesure généralisée, moins restrictive qu'une mesure projective directe du système. Enfin nous terminerons par expliquer ce qu'est une mesure non-destructive, élément clé de nos expériences de comptage du nombre de photons.

#### II.1.1 Mesure projective - mesure généralisée

Le postulat sur la mesure en physique quantique stipule qu'un système représenté par sa matrice densité  $\rho$  est modifié par la mesure selon le résultat de celle-ci. On donne :

$$O = \sum_i o_i P_i, \quad P_i = |o_i\rangle\langle o_i|, \quad \sum_i P_i = \mathbb{1}, \quad (\text{II.1})$$

$O$  étant l'observable de mesure,  $o_i$  ses valeurs propres et  $P_i$  les projecteurs sur le sous-espace propre correspondant au résultat de mesure  $i$ . L'état  $\rho$  est modifié par la mesure de  $O$ , donnant le résultat  $i$ , de la façon suivante :

$$\rho \longmapsto \rho' = \frac{P_i \rho P_i}{\pi(o_i)}, \quad \pi(o_i) = \text{Tr}(\rho P_i), \quad (\text{II.2})$$

où  $\pi(o_i)$  est la probabilité d'obtenir le résultat  $i$ . On appelle ce genre de mesure une *mesure projective* (ou *mesure de Von Neumann*) [53] car  $\rho$  est projeté dans un sous-espace propre de l'observable  $O$ . Si cette dernière est une constante du mouvement (les états  $|o_i\rangle$  sont des états stationnaires de l'évolution), il est immédiat de voir, puisque  $P_i^2 = P_i$ , qu'une seconde mesure de  $O$  donnera le même résultat que la première.

Le problème que pose cette description de la mesure est qu'elle ne rend pas compte de ce qui se passe réellement dans les expériences. Un exemple simple est la détection de lumière avec un photodétecteur [54]. On suppose que le mode de la lumière est quantique et se trouve dans l'état  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . On détecte avec la même probabilité 0 ou 1 photon. Dans le cas où l'on en détecte un, l'état du champ après la mesure n'est certainement pas  $|1\rangle$  comme nous l'indique le formalisme de la mesure projective. Le détecteur ayant absorbé le photon, le mode se trouve invariablement dans l'état vide après une telle mesure, qu'on qualifie de destructive.

Pour rendre compte de l'évolution réelle du système après une mesure, nous allons utiliser le formalisme de la *mesure généralisée* (pour plus de détails, on peut lire Haroche et Raimond [48]). Elle décrit la mesure indirecte d'un système  $\mathcal{S}$ . Dans notre cas, il s'agira du mode du champ de la cavité supraconductrice. On utilise, pour mesurer une quantité physique de  $\mathcal{S}$ , un système intermédiaire, un mètre (noté  $\mathcal{M}$ ), qui sera pour nous les sondes atomiques. Juste avant la mesure, les états de  $\mathcal{M}$  sont couplés aux états de  $\mathcal{S}$  via une évolution unitaire  $U_{\mathcal{S}\mathcal{M}}$  :

$$U_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(\rho \otimes |0^{\mathcal{M}}\rangle\langle 0^{\mathcal{M}}|)U_{\mathcal{S}\mathcal{M}}^\dagger = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger \otimes |u_i^{\mathcal{M}}\rangle\langle u_i^{\mathcal{M}}|, \quad (\text{II.3})$$

où les  $|u_i^{\mathcal{M}}\rangle\langle u_i^{\mathcal{M}}|$  sont les états du mètre et  $\rho$  (resp.  $|0^{\mathcal{M}}\rangle\langle 0^{\mathcal{M}}|$ ) est l'état de  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{M}$ ) avant intrication. Les opérateurs  $M_i$  sont des *opérateurs de Kraus* [55] à qui on demande, pour que  $\text{Tr}(\rho) = 1$  soit conservé, de respecter la relation suivante :

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathbb{1}. \quad (\text{II.4})$$

Il faut bien sûr que ces opérateurs agissent dans l'espace de Hilbert de l'état  $\rho$ . Ils ne sont cependant pas nécessairement hermitiens, au contraire des projecteurs  $P_i$ .

Afin de lire le résultat de la mesure indirecte de  $\mathcal{S}$ , on effectue une mesure projective d'une observable  $O_{\mathcal{M}}$  du mètre dont on suppose que les états propres sont les états  $|u_i^{\mathcal{M}}\rangle$ . L'état  $\rho$  est alors transformé selon l'équation :

$$\rho \longmapsto \rho' = \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\pi(i)}, \quad (\text{II.5})$$

avec  $\pi(i)$  la probabilité d'obtenir le résultat  $i$  dont l'expression est :

$$\pi(i) = \text{Tr}(M_i \rho M_i^\dagger) = \text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho) = \text{Tr}(F_i \rho) , \quad (\text{II.6})$$

où nous avons introduit les POVM (pour *Positive-Operator Valued Measure*)  $F_i = M_i^\dagger M_i$  qui sont positifs et, eux, hermitiens. Nous les utiliserons pour déterminer les probabilités de résultats de mesures dans nos expériences. Notons que nous retrouvons le formalisme des mesures projectives directes à la condition particulière d'avoir  $M_i = P_i$ .

Une mesure non lue est, dans le formalisme de la mesure généralisée, simplement décrite par la transformation suivante :

$$\rho \longmapsto \rho' = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger . \quad (\text{II.7})$$

### II.1.2 Mesure quantique non-destructive

Plusieurs problèmes peuvent apparaître quand on mesure une observable  $O$  d'un système quantique. Première chose, radicale : le système peut être détruit par la mesure (ionisation d'un atome par la mesure de son énergie, absorption d'un photon par un photodétecteur). Plus subtil est l'impossibilité de répéter la mesure et d'obtenir le même résultat. L'exemple habituel est celui d'une mesure de la position d'une particule libre (observable  $X$ ). Le Hamiltonien de l'évolution libre de la particule s'écrit  $H = P^2/2m$ , avec  $P$  l'observable liée à l'impulsion de la particule de masse  $m$ . Les observables  $X$  et  $P$  sont dites *conjuguées*, elles ne commutent pas :  $[X, P] = i\hbar$ . Cela est traduit par une inégalité de Heisenberg sur les fluctuations de  $X$  et  $P$  :  $\Delta X \Delta P \geq \hbar/2$ . Une mesure de  $X$  va donc affecter la connaissance que nous pouvons avoir sur  $P$  et, par l'évolution libre, ces fluctuations vont se recoupler à  $X$  rendant difficile la prédiction d'une seconde mesure de position. En effet, on a  $[X, H_{\text{libre}}] \neq 0$ .

Les mesures quantiques non-destructives (*QND*), dont les bases ont été posées par Braginsky et Vorontsov en 1975 [18], décrivent la mesure *répétable* d'une observable  $O_S$  d'un système  $\mathcal{S}$ . L'inégalité de Heisenberg  $\Delta O_S \Delta Q_S \geq \hbar/2$  est toujours respectée mais la mesure de  $O_S$  n'affecte pas le résultat de mesures ultérieures. L'incertitude sur  $O_S$  peut être rendue aussi petite que voulue au prix d'avoir une totale méconnaissance sur l'observable conjuguée  $Q_S$ .

Pour formaliser la mesure QND, on introduit un mètre  $\mathcal{M}$  que l'on couple avec  $\mathcal{S}$ . On mesure ensuite l'observable  $O_M$  du mètre qui contient, grâce au couplage, de l'information sur  $O_S$ . Le Hamiltonien du système  $\mathcal{S} + \mathcal{M}$  se met sous la forme :

$$H = H_S + H_M + H_I , \quad (\text{II.8})$$

avec  $H_S$  et  $H_M$  les Hamiltoniens libres de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$  et  $H_I$  le Hamiltonien d'interaction entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$ . Les conditions pour avoir une mesure QND sont les suivantes [20] :

$$\begin{aligned} [H_I, O_M] &\neq 0 , \\ [H_S, O_S] &= 0 , \\ [H_I, O_S] &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Le premier commutateur exprime simplement que  $\mathcal{M}$  acquiert de l'information sur  $\mathcal{S}$  par le couplage décrit par  $H_I$  et que son état en sort modifié. Les deux suivants expriment qu' $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  doit être une constante du mouvement : nous devons pouvoir répéter cette mesure, retrouvant à chaque fois le même résultat dès lors que le système est dans un état propre de  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  : c'est l'essence de la mesure QND. De façon évidente le système ne doit pas être détruit par la mesure.

Nos expériences réalisent ces deux aspects de non-destruction et de répétabilité de la mesure d'un système quantique, l'observable QND dans notre cas étant le nombre de photons  $\hat{N}$  qui vérifie les équations II.9 en prenant  $H_{\mathcal{S}} = H_{\text{cav}}$  (I.1),  $H_{\mathcal{M}} = H_{\text{at}}$  (I.28) et  $H_{\mathcal{I}} = H_{\text{JC}}^{\text{disp}}$  (I.55). Des sondes atomiques envoyées successivement vont pouvoir sonder un même mode du champ sans en modifier le nombre de photons. Dans le paragraphe suivant, nous allons appliquer le formalisme de la mesure QND pour nos expériences et montrer comment nous sommes capables de traduire les détections atomiques en information sur le champ de la cavité.

## II.2 Mesure QND du nombre de photons

### II.2.1 Transformation de la distribution du nombre de photons par la mesure d'une sonde atomique

Dans le cadre de la description des expériences présentées dans ce manuscrit, les opérateurs de Kraus qui permettent d'obtenir l'état final en sortie de l'interféromètre de Ramsey sont dans le cas idéal :

$$M_e = \sin\left(\frac{\phi(\hat{N}) + \phi_R}{2}\right), \quad M_g = \cos\left(\frac{\phi(\hat{N}) + \phi_R}{2}\right), \quad (\text{II.10})$$

où  $\hat{N}$  est l'opérateur nombre de photons. Nous en déduisons alors les deux POVM décrivant la mesure :

$$F_e(\hat{N}, \phi_R) = M_e^\dagger M_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\phi(\hat{N}) + \phi_R), \quad F_g = M_g^\dagger M_g = \mathbb{1} - F_e, \quad (\text{II.11})$$

où nous reconnaissons la forme de la fonction des franges de Ramsey. Nous retrouvons d'ailleurs l'équation I.69 en calculant  $P_g = \text{Tr}(F_g |n\rangle\langle n|)$ .

En prenant en compte les imperfections de l'interféromètre, nous réécrivons les  $F_i$  sous la forme suivante, que nous utiliserons pour l'analyse des mesures QND :

$$\begin{aligned} F_e(\hat{N}, \phi_R) &= \pi_0 - \frac{C}{2} \cos(\phi(\hat{N}) + \phi_R), \\ F_g(\hat{N}, \phi_R) &= \pi_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi(\hat{N}) + \phi_R), \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

où  $\pi_0$  et  $C$  sont respectivement le décalage et le contraste des franges de Ramsey introduits à l'équation I.70.

Nous supposons maintenant que les  $P(n)$  définissant la distribution du nombre de photons dans le mode sont connus. Une mesure QND de  $\hat{N}$ , dont on récupère le résultat  $i$ , va mettre à jour cette connaissance. Nous aurons alors accès à une nouvelle distribution  $P'(n)$  qui s'exprime en fonction des  $P(n)$  selon la formule suivante :

$$P'(n) = \text{Tr}(\rho'|n\rangle\langle n|) = \text{Tr}\left(\frac{M_i\rho M_i^\dagger}{\text{Tr}(F_i\rho)}|n\rangle\langle n|\right) = \frac{\text{Tr}(F_i|n\rangle\langle n|)}{\text{Tr}(F_i\rho)}\text{Tr}(\rho|n\rangle\langle n|), \quad (\text{II.13})$$

où nous avons utilisé l'équation II.5 pour trouver  $\rho'$  et le fait que les  $M_i$  sont diagonaux dans la base des états nombre pour effectuer une permutation circulaire dans l'opérateur trace. On peut réécrire la dernière équation sous une forme plus intuitive en faisant apparaître le théorème de Bayes [56] :

$$P'(n) = P(n|i, \phi_R) = \frac{\pi(i|n, \phi_R)}{\pi(i|\phi_R)}P(n). \quad (\text{II.14})$$

Remarquons que nous trouvons cette loi statistique classique qui régit l'évolution de notre connaissance sur la distribution en nombre de photons grâce au caractère QND de la mesure (qui provient de la forme diagonale des POVM dans la base des états de Fock).

Notons, comme le détecteur n'est pas parfait, qu'il arrive que la mesure soit non lue. En traçant sur l'espace des états de Fock, l'équation II.7 nous trouvons la solution intuitive qu'une mesure manquée n'a aucune incidence sur notre connaissance de  $P(n)$  :

$$P'_{\text{NL}}(n) = \sum_i F_i(n, \phi_R)P(n|i, \phi_R) = P(n), \quad (\text{II.15})$$

où nous avons utilisé la notation  $F_i(n, \phi_R) = \langle n|F_i(\hat{N}, \phi_R)|n\rangle$ . Nous parlerons dans la suite, par abus de langage, de POVM  $y$  compris pour cette fonction de  $n$  et  $\phi_R$  qui n'est pas un opérateur.

L'utilisation d'un atome à deux niveaux ne permet pas en général de répondre à la question « combien y-a-t-il de photons dans la cavité ? » après une seule détection, même idéalement. Si nous ne sommes pas limités à observer 0 ou 1 photon, alors le bit d'information transporté par un atome unique n'est pas suffisant. Contrairement à une mesure projective, l'information apportée sur l'état du champ n'est que partielle. Une mesure va modifier la distribution du nombre de photons selon la loi de Bayes II.14.

La figure II.1 présente la modification de notre connaissance par la mesure d'un atome. Dans l'exemple pris, nous supposons que nous ne connaissons rien sur le champ initial et donc que  $P(n)$  est une distribution uniforme. À une normalisation près, chaque élément  $P'(n)$  de la distribution finale est la population  $P(n)$  initiale multipliée par la probabilité  $\pi(i|n, \phi_R)$  de mesurer l'état  $|i\rangle$  conditionnée à l'utilisation de la phase de l'interféromètre  $\phi_R$  et à la présence d'exactly  $n$  photons dans le mode.

Dans l'exemple donné à la figure II.1, nous remarquons qu'après la mesure certaines populations  $P'(n)$  sont égales deux à deux. Par exemple si on détecte  $|g\rangle$ ,  $P'(3) = P'(4)$ ,  $P'(2) = P'(6)$  et  $P'(1) = P'(7)$ . Nous pouvons lever l'ambiguïté en faisant une mesure à la suite de la première avec une phase de l'interféromètre  $\phi_R$  différente.

Si on effectue un grand nombre de mesures telles qu'on vient de les décrire, et que, pour chacune d'entre elles, on utilise une phase  $\phi_R$  différente, on peut montrer que l'état du champ, après cette succession de mesures, converge vers la survie d'un seul  $|n\rangle$  [57]. Cette accumulation progressive d'information revient, dans ces conditions, à une mesure de Von Neumann et le champ se retrouve *in fine* projeté dans un état propre de l'observable  $\hat{N}$ . Les mesures suivant la projection, puisqu'elles sont QND, permettent de mesurer encore et encore le même état de la lumière.

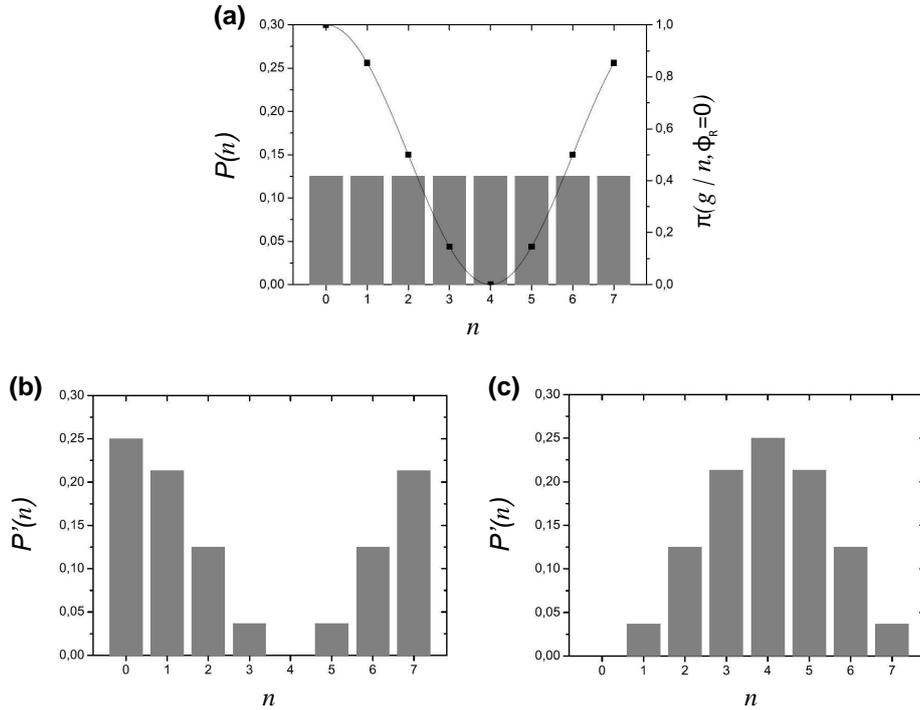


FIGURE II.1 – Transformation de la distribution du nombre de photons par la mesure d'une sonde atomique. En (a), on représente la distribution initiale  $P(n)$ , supposée uniforme. Les ronds noirs correspondent à  $\pi(g|n, \phi_R) = \text{Tr}(F_g|n\rangle\langle n|)$ . Le résultat de la détection atomique, « g » (b) ou « e » (c), va modifier la connaissance initiale selon les POVM de mesure qui dépendent de  $n$  et  $\phi_R$ . Dans l'exemple présenté, nous avons choisi  $\phi_R = 0$ .

## II.2.2 Direction de mesure du pseudospin

Nous venons de voir qu'il est nécessaire d'avoir à disposition plusieurs phases de l'interféromètre pour distinguer tous les nombres de photons accessibles. Rappelons nous que la première étape dans l'interféromètre de Ramsey est l'application d'une impulsion  $\pi/2$  à l'atome qui l'amène dans une superposition d'états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  qu'on représente dans la

sphère de Bloch par un vecteur contenu dans le plan équatorial (voir la figure I.1). Le passage à travers le mode de la cavité contenant  $n$  photons fait tourner ce vecteur d'un angle  $\phi(n)$  autour d'un axe orthogonal au plan.

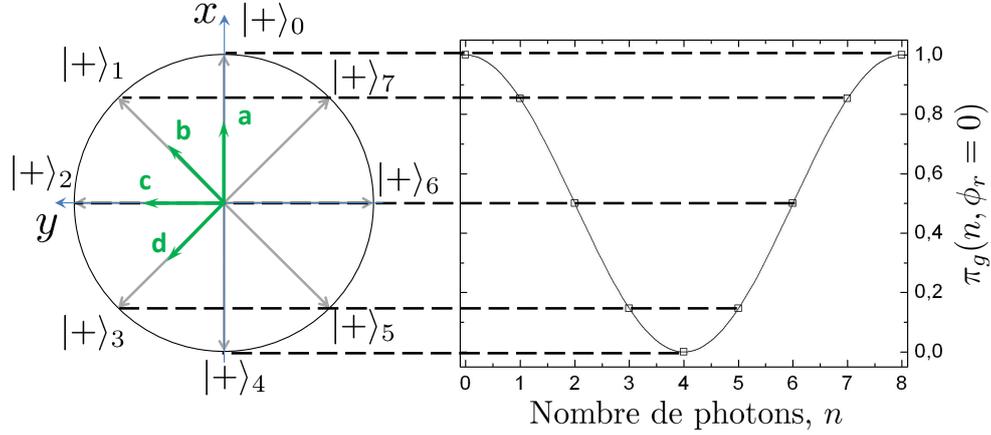


FIGURE II.2 – Directions de mesure du pseudospin atomique. À gauche : le plan équatorial de la sphère de Bloch. On y représente huit états superposés différents  $|+\rangle_n$  qui désignent chacun un nombre de photons particulier  $n$  selon leur phase  $\phi(n) = \varphi_0 n$  par rapport à l'axe  $x$  (on considère que  $\varphi_0 = \pi/4$ ). Les quatre directions de mesures utilisées pour ce choix de  $\varphi_0$  sont représentées par les vecteurs **a**, **b**, **c** et **d**. Elle sont choisies ici de manière à coïncider avec les directions  $|+\rangle_n$  pour  $n = 0$  à  $n = 3$ . À droite : les probabilités conditionnelles de détection de  $|g\rangle$  pour la direction de mesure **a** ( $\phi_R = 0$ ), proportionnelles à  $\langle S_x \rangle$ .

On peut voir le choix de la phase de l'interféromètre  $\phi_R$  comme le choix d'une direction de mesure du pseudospin dans le plan équatorial. En effet on peut réécrire l'équation I.69 comme :

$$\pi(g|n, \phi_R) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_R, \quad (\text{II.16})$$

avec  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire de la sphère de Bloch qui représente l'état atomique et  $\mathbf{u}_R$  le vecteur unitaire qui décrit la direction de mesure du pseudospin :

$$\mathbf{u} = \cos \phi(n) \mathbf{e}_x + \sin \phi(n) \mathbf{e}_y = \langle S_x \rangle \mathbf{e}_x + \langle S_y \rangle \mathbf{e}_y, \quad (\text{II.17})$$

$$\mathbf{u}_R = \cos \phi_R \mathbf{e}_x - \sin \phi_R \mathbf{e}_y, \quad (\text{II.18})$$

où  $\langle S_x \rangle$  et  $\langle S_y \rangle$  sont les espérances de mesure des composantes selon  $x$  et  $y$  du pseudospin atomique. Nous donnons un exemple de cette représentation à la figure II.2, où l'on prend le déphasage par photon  $\varphi_0 = \pi/4$  et quatre directions de mesure différentes liées à quatre nombres de photons  $n$ . On parlera donc dans le reste du manuscrit indistinctement de phase de l'interféromètre, de phase de mesure ou de direction de mesure.

Notons que  $\pi(g|n, \phi_R)$  est périodique de période  $2\pi/\varphi_0$ . Dans l'exemple de la figure II.2, où  $\phi_0 = \pi/4$ , cela signifie que les directions de mesures pour les nombres de photons  $n$  et  $n' = n + 8$  correspondent parfaitement :  $n$  et  $n'$  sont indistinguables. Expérimentalement, nous pouvons éviter cette limitation en ne travaillant qu'avec des champs qui ne puissent pas contenir des nombres de photons supérieurs à  $2\pi/\varphi_0 - 1$ , soit la condition  $n < 8$  dans notre exemple.

### II.2.3 Mesure par décimation

Nous présentons à la figure II.3 deux réalisations expérimentales [25] de la mesure du nombre de photons où  $\varphi_0 = \pi/4$  et les phases de mesures  $\phi_R$ , au nombre de quatre, sont alternées pour chaque échantillon atomique. Ces directions de mesure ont été choisies pour coïncider avec les directions désignant les nombres de photons  $n = 6, 7, 0$  et  $1$ . Dans chacune des réalisations, le champ est préparé dans le même champ cohérent contenant environ 3.8 photons en moyenne mais que nous supposons inconnu dans l'analyse. Celle-ci commence donc avec une distribution initiale  $P_0$  du nombre de photons uniforme qui correspond à une connaissance a priori minimale sur l'état du champ. Nous observons dans les deux exemples donnés que les mesures partielles successives modifient progressivement les distributions  $P$ . Dans cette expérience, l'analyse prend en compte jusqu'à  $N_{\text{at}} = 110$  atomes détectés. Après que l'atome  $j$ , avec  $j = 1 \dots N_{\text{at}}$ , est détecté, l'état du champ est décrit par la distribution  $P_j(n)$  dont l'expression est :

$$P_j(n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \prod_{i=1}^j F_i P_0(n), \quad (\text{II.19})$$

où  $F_i$  est le POVM lié à la mesure de l'atome  $i$  et  $\mathcal{N}$  un facteur de normalisation tel que  $\sum_n P_j(n) = 1$ . Nous appelons cette mesure du nombre de photons, *mesure par décimation*. Notons que la mise à jour de  $P$  n'inclut pas, ici, l'effet de la relaxation. La durée d'une fenêtre de décimation étant inférieure à  $T_{\text{cav}}$  cela n'entache pas la mesure.

L'état final, décrit par  $P_{N_{\text{at}}}$ , est différent pour chaque réalisation, ce qui reflète le caractère aléatoire du résultat de la mesure quantique. Mais une fois projeté, l'état est toujours mesuré comme étant le même ce jusqu'à la fin de la séquence correspondant à la détection du 110<sup>e</sup> atome.

### II.2.4 Trajectoires quantiques

L'analyse précédente peut être appliquée pour une série de mesures telle que la durée totale de la séquence expérimentale dépasse largement  $T_{\text{cav}}$ . À la fin d'une de ces séquences nous avons à disposition plusieurs centaines ou milliers de détections que nous allons utiliser pour retracer l'évolution temporelle du nombre moyen de photons  $\langle n \rangle$  dans le mode de la cavité.

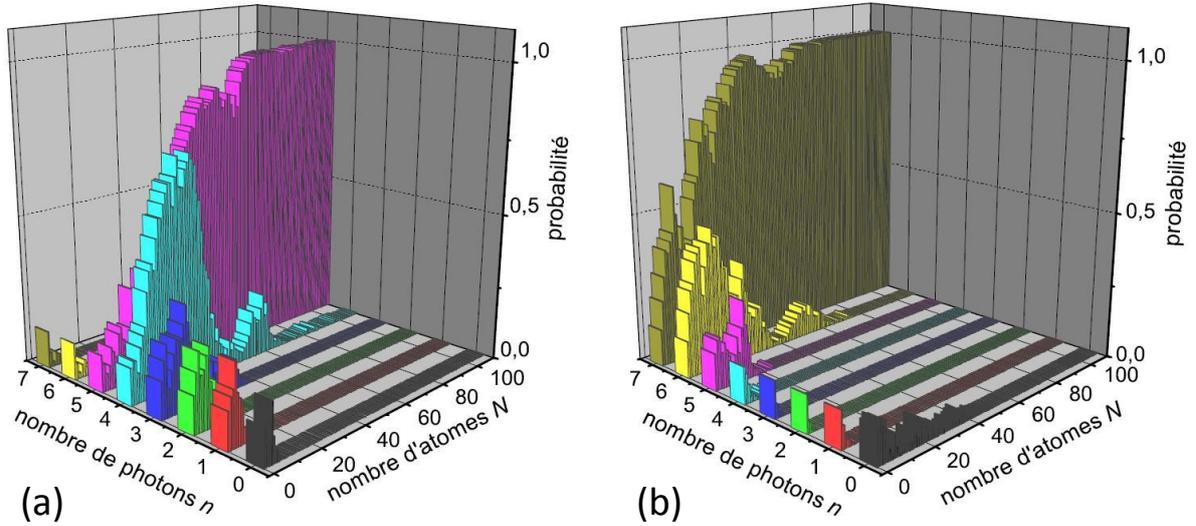


FIGURE II.3 – Mesure du nombre de photons par décimation. Les deux histogrammes en (a) et (b) montrent deux réalisations de l'expérience de mesure du nombre de photons d'un champ initialement préparé dans un même état cohérent. L'estimation de cet état du champ part d'une distribution uniforme du nombre de photons (absence d'information sur le champ). Les mesures de l'état final des  $N_{\text{at}} = 110$  sondes QND successives vont progressivement modifier notre connaissance sur les population des nombres de photons de  $n = 0$  à  $n = 7$ . L'état estimé évolue vers un des états propres de l'observable de mesure, réalisant ainsi *in fine* une mesure de Von Neumann. Le résultat de la mesure quantique donne pour (a)  $n = 5$  et pour (b),  $n = 7$ .

Dans [25], une fenêtre d'analyse glissante contenant  $N_{\text{at}} = 110$  sondes détectées est utilisée pour déterminer l'état du champ à chaque instant. Ce choix de  $N_{\text{at}}$  a été jugé suffisant pour que l'état estimé du champ, après analyse des détections d'une fenêtre de décimation, soit un état de Fock. De plus, pendant la durée nécessaire à la détection de  $N_{\text{at}}$  sondes, les effets de la relaxation sont négligeables. Par fenêtre glissante, nous entendons que nous décalons la fenêtre d'une détection atomique à chaque pas de l'analyse. Par exemple, si nous considérons la fenêtre de décimation allant du premier atome au 110<sup>e</sup>, la deuxième utilisera les détections des atomes numéros 2 à 111, la troisième les détections des atomes 3 à 112 etc...

Nous obtenons, après analyse de l'ensemble des détections de la séquence, la *trajectoire quantique du champ*. Nous en représentons un exemple à la figure II.4. En première partie de trajectoire, la mesure fait converger l'état vers un état de Fock  $|n\rangle$ , selon une probabilité qui dépend de la population  $P(n)$  de l'état cohérent initialement préparé. En faisant glisser la fenêtre de décimation le long de la série de détections, l'analyse permet de révéler les sauts quantiques qui mènent le champ vers le vide de photons par la présence de relaxation.

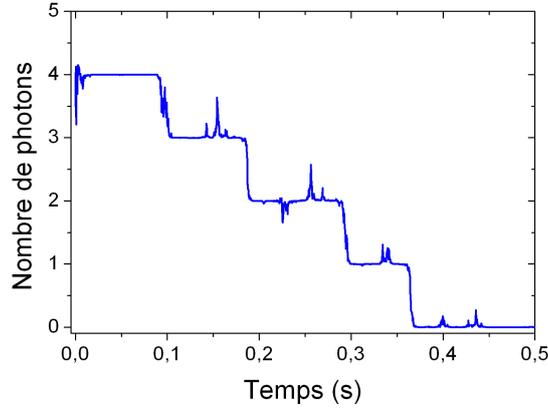


FIGURE II.4 – Évolution temporelle du nombre moyen de photons dans la cavité. À chaque instant, on utilise une fenêtre d’analyse de  $N_{\text{at}} = 110$  atomes pour déterminer  $\langle n \rangle$ . Dans un premier temps on observe la convergence vers un des états de Fock présents dans le champ cohérent initial qui contient environ 3.8 photons en moyenne. Dans cet exemple l’état converge vers  $|4\rangle$ . Le reste de l’analyse révèle la relaxation du champ et montre les sauts quantiques successifs faisant passer le nombre de photons de 4 à 0.

## II.3 L’état passé du champ

Nous allons donner dans cette section l’idée centrale des expériences présentées dans ce manuscrit : ayant à disposition un ensemble de mesures sur un système quantique, on peut mieux décrire à posteriori son état à un instant  $t$  en prenant en compte *toutes* les mesures plutôt que seulement celles antérieures à  $t$ . Nous reprenons ici la formalisation de cette idée par Gammelmark *et al.* [35] qui introduisent la *matrice d’effet*  $\hat{E}(t)$  qui contient toute l’information acquise sur l’évolution du système *après* l’instant  $t$ , jusqu’à la fin de l’expérience. On peut alors construire l’état passé du champ, noté  $\Xi(t)$  qui est défini comme la donnée des deux matrices  $\rho$  et  $\hat{E}$  :

$$\Xi(t) = (\rho(t), \hat{E}(t)) , \quad (\text{II.20})$$

Nous allons commencer par rappeler les résultats essentiels du formalisme développé dans [35] pour ensuite l’appliquer à notre cas où nous mesurons de façon non-destructive le champ de la cavité supraconductrice avec des sondes atomiques.

### II.3.1 Formalisme de l’état passé du champ

#### II.3.1.a Idée générale

Nous supposons étudier un système  $\mathcal{S}$  qui peut être sujet à une évolution hamiltonienne et à un couplage à un bain thermique. Ce système est sondé pendant un temps  $T$  (voir

figure II.5). Cette sonde est formalisée par une mesure indirecte de  $\mathcal{S}$  via un mètre  $\mathcal{M}$ , à l'instar de la mesure QND du nombre de photons par les sondes atomiques introduite dans la section précédente.

On peut, sans perte de généralité, considérer que ces mesures indirectes sont effectuées à intervalles de temps réguliers. Pour une mesure continue il suffira de faire tendre cet intervalle vers zéro. La durée de mesure  $T$  correspond alors à l'envoi de  $N$  sondes.

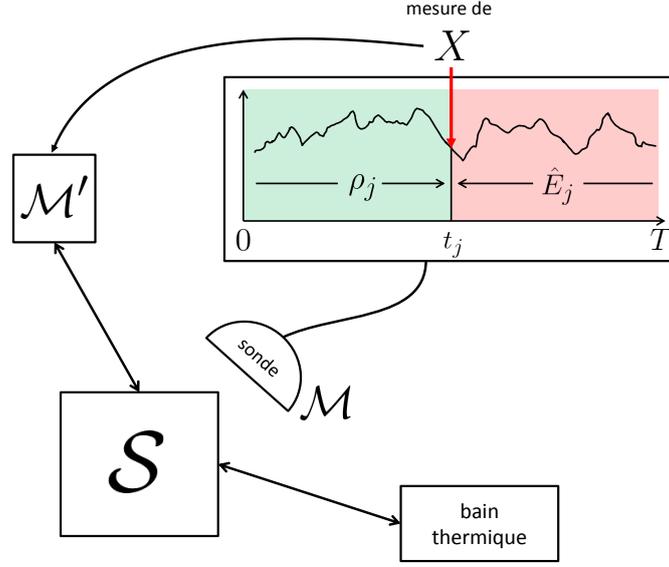


FIGURE II.5 – Principe de la méthode de l'état passé. Un système  $\mathcal{S}$  est mesuré par des sondes  $\mathcal{M}$  pendant une durée  $T$ . À un instant  $t_j$ , un mètre  $\mathcal{M}'$  se couple à  $\mathcal{S}$  et permet la mesure indirecte d'une quantité  $X$  de  $\mathcal{S}$ . On décide de ne pas lire ce résultat avant la fin de l'expérience. L'utilisation combinée de la matrice densité  $\rho_j$  et de la matrice d'effet  $\hat{E}_j$  permet d'avoir une meilleure estimation à posteriori du résultat de la mesure de  $X$  qu'avec l'utilisation seule de  $\rho_j$ . Cette figure est inspirée de [35].

L'état à l'instant  $t_j$  est décrit par la matrice densité  $\rho_j$  dont l'expression est :

$$\rho_j = \frac{1}{\mathcal{N}} M_{k_j} \dots M_{k_1} \rho_0 M_{k_1}^\dagger \dots M_{k_j}^\dagger, \quad (\text{II.21})$$

où  $\mathcal{N}$  est un facteur de normalisation tel que  $\text{Tr}(\rho_j) = 1$  et où  $\rho_0$  est l'état initial, à  $t = 0$ , de  $\mathcal{S}$ . Cette formule généralise l'équation II.5 dans le cas de  $j$  mesures successives.

On suppose qu'à un instant  $t_j$ , on mesure via l'utilisation d'un mètre  $\mathcal{M}'$ , différent des sondes  $\mathcal{M}$ , une quantité physique  $X$  de  $\mathcal{S}$ . La probabilité d'obtenir le résultat  $x_n$  est :

$$P_j(x_n) = \frac{\text{Tr}(\Omega_n \rho_j \Omega_n^\dagger)}{\sum_m \text{Tr}(\Omega_m \rho_j \Omega_m^\dagger)}, \quad (\text{II.22})$$

où  $\Omega_n$  est l'opérateur de Kraus de la mesure généralisée de  $X$  ayant donné le résultat  $x_n$  et où  $\rho_j$  est la matrice densité de  $\mathcal{S}$  à l'instant  $t_j$ .

Après cette mesure, on décide de ne pas lire le résultat et on continue la sonde de  $\mathcal{S}$ . La probabilité conditionnelle d'obtenir le résultat  $x_n$  connaissant les résultats de mesure  $k_{j+1}, \dots, k_N$  des sondes  $\mathcal{M}$  postérieures à l'instant  $t_j$  est donné par :

$$P_j(x_n | k_{j+1} \dots k_N) = \frac{\text{Tr}(M_{k_N} \dots M_{k_{j+1}} \Omega_n \rho_j \Omega_n^\dagger M_{k_{j+1}}^\dagger \dots M_{k_N}^\dagger)}{\sum_m \text{Tr}(M_{k_N} \dots M_{k_{j+1}} \Omega_m \rho_j \Omega_m^\dagger M_{k_{j+1}}^\dagger \dots M_{k_N}^\dagger)}, \quad (\text{II.23})$$

On réécrit cette expression sous la forme :

$$P_j(x_n | k_{j+1} \dots k_N) = \frac{\text{Tr}(\Omega_n \rho_j \Omega_n^\dagger \hat{E}_j)}{\sum_m \text{Tr}(\Omega_m \rho_j \Omega_m^\dagger \hat{E}_j)}, \quad (\text{II.24})$$

où  $\hat{E}_j$  est la matrice d'effet construite avec les résultats de sondes  $k_{j+1}$  à  $k_N$  dont l'expression est :

$$\hat{E}_j = M_{k_{j+1}}^\dagger \dots M_{k_N}^\dagger I_{\mathcal{S}} M_{k_N} \dots M_{k_{j+1}}, \quad (\text{II.25})$$

où  $I_{\mathcal{S}}$  est l'opérateur identité agissant dans le même espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  que  $\rho$  et  $\hat{E}$ . Par définition,  $\hat{E}_N = I_{\mathcal{S}}$ . Cela exprime que  $\hat{E}$  ne peut pas contenir plus d'information que celle des résultats de mesure des sondes  $\mathcal{M}$  entre  $t_j$  et  $t_N$ . En supposant que  $t_j = t_N$ , on doit nécessairement avoir :

$$P_N(x_n) = \frac{\text{Tr}(\Omega_n \rho_N \Omega_n^\dagger \hat{E}_N)}{\sum_m \text{Tr}(\Omega_m \rho_N \Omega_m^\dagger \hat{E}_N)} = \frac{\text{Tr}(\Omega_n \rho_N \Omega_n^\dagger)}{\sum_m \text{Tr}(\Omega_m \rho_N \Omega_m^\dagger)}, \quad (\text{II.26})$$

et donc  $\hat{E}_N = I_{\mathcal{S}}$  : toute l'information disponible sur l'état du champ est déjà incluse dans  $\rho_N$ .

L'état passé de  $\mathcal{S}$ ,  $\Xi = (\rho, \hat{E})$  contient alors l'ensemble de notre connaissance sur l'évolution du système et permet d'avoir une meilleure estimation du résultat de  $X$  que si nous ne considérons que les détections faites avant  $t_j$ .

### II.3.1.b Prise en compte du couplage du système avec un bain thermique

Nous pouvons établir une équation pilote pour  $\rho$ , avec la condition que le processus soit markovien, à l'instar de ce que nous avons fait pour un mode du champ électromagnétique en I.1.2 :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \mathbf{L}'\rho, \quad (\text{II.27})$$

$$\mathbf{L}'\rho = \sum_{\mu=1}^K \left( L'_\mu \rho L'_\mu{}^\dagger - \frac{1}{2} L'_\mu{}^\dagger L'_\mu \rho - \frac{1}{2} \rho L'_\mu{}^\dagger L'_\mu \right), \quad (\text{II.28})$$

où  $K$  n'est pas nécessairement égal à 2 comme dans le cas de la relaxation du champ (voir équation I.18).

La matrice d'effet  $\hat{E}$ , par la présence de ce même couplage, évolue aussi selon une équation maîtresse [35]. Elle est, dans sa forme, transposée à celle de  $\rho$  :

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \hat{E}] + \mathbf{L}'_{\mathbf{E}} \hat{E}, \quad (\text{II.29})$$

$$\mathbf{L}'_{\mathbf{E}} \hat{E} = \sum_{\mu=1}^K \left( L'_{\mu}{}^{\dagger} \hat{E} L'_{\mu} - \frac{1}{2} L'_{\mu}{}^{\dagger} L'_{\mu} \hat{E} - \frac{1}{2} \hat{E} L'_{\mu}{}^{\dagger} L'_{\mu} \right), \quad (\text{II.30})$$

où  $\tilde{t} = t - T$  donc  $d\tilde{t} = -dt$ . La figure II.6 illustre le sens de l'intégration dans le temps des équations pilotes de  $\rho$  et  $\hat{E}$ .

Cette équation décrit l'« anti-relaxation » de la matrice d'effet vers un état d'équilibre qui est proportionnel à l'identité  $I_{\mathcal{S}}$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ . On remarque en effet que  $I_{\mathcal{S}}$  est un point fixe de l'équation II.30. Notons que cette évolution ne préserve pas  $\text{Tr}(\hat{E})$  : le sens physique de  $\hat{E}$  est différent de celui de  $\rho$ . Nous présenterons à la section IV.4 quelques résultats sur l'évolution de  $\hat{E}$  par son équation maîtresse. Cela nous permet de mieux saisir quel est son rôle dans le cas où la méthode d'analyse de l'état passé est appliqué à notre système.

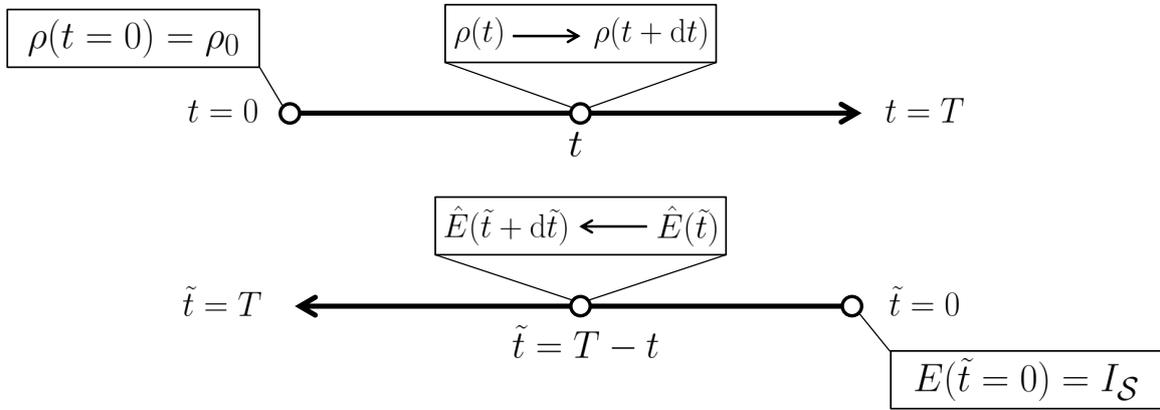


FIGURE II.6 – Intégration des équations pilotes. L'évolution de la matrice d'effet  $\hat{E}$  se fait en « remontant le temps » depuis la fin d'une réalisation de l'expérience.

Pour comprendre pourquoi  $\mathbf{L}'_{\mathbf{E}}$  est l'opérateur transposé de  $\mathbf{L}'$ , il faut se rappeler comment l'équation maîtresse pour  $\rho$  est obtenue. Le couplage du système à l'environnement peut être modélisé par l'opération quantique (*quantum map*) suivante :

$$\rho(t+dt) = \sum_{\mu=0}^K B_{\mu}(dt) \rho(t) B_{\mu}^{\dagger}(dt), \quad (\text{II.31})$$

où les  $B_\mu$  sont des opérateurs de Kraus. Sous cette forme, le couplage est décrit comme une mesure généralisée non lue. En utilisant l'approximation de Markov, on peut montrer que cette transformation mène à l'équation maîtresse II.27 avec  $L'_\mu \propto B_\mu(dt)$  (voir par exemple Haroche et Raimond [48], section 4.3). Les mises à jour par la mesure des matrices  $\rho$  et  $E$  sont aussi formalisées comme des mesures généralisées. Le rôle des opérateurs de Kraus  $M$  et  $M^\dagger$  y sont simplement échangés (« transposition »). En toute généralité, ces transformations peuvent aussi décrire le couplage à un environnement. On en déduit que l'opération quantique qui transforme  $E$  par couplage à l'environnement est de la forme :

$$E(\tilde{t} + d\tilde{t}) = \sum_{\mu=0}^K B_\mu^\dagger(d\tilde{t})E(t)B_\mu(d\tilde{t}) . \quad (\text{II.32})$$

où, par rapport à l'opération pour  $\rho$  II.31, les opérateurs  $B_\mu$  et  $B_\mu^\dagger$  sont échangés. Par conséquent, en suivant le même cheminement que pour  $\rho$ , on trouve l'équation maîtresse II.29 pour  $E$  qui est la transposée de celle pour  $\rho$ .

### II.3.1.c Application du formalisme à notre système

La transcription du formalisme de l'état passé à notre système n'est pas compliquée. Le système  $\mathcal{S}$  est naturellement le mode du champ de la cavité et les sondes  $\mathcal{M}$  pour  $\mathcal{S}$  sont les sondes atomiques à deux niveaux interagissant de façon dispersive avec le champ.

Le mètre  $\mathcal{M}'$  est, dans notre cas, un mètre fictif servant à mesurer de façon projective le nombre de photon dans la cavité :

$$\Omega_n = |n\rangle\langle n| , \quad (\text{II.33})$$

où  $|n\rangle$  est l'état de Fock qui contient exactement  $n$  photons. Dans ce cas l'équation II.24 devient :

$$P_j(n|k_{j+1} \dots k_N) = \frac{\text{Tr}(|n\rangle\langle n|\rho_j|n\rangle\langle n|\hat{E}_j)}{\sum_m \text{Tr}(|m\rangle\langle m|\rho_j|m\rangle\langle m|\hat{E}_j)} = \frac{\langle n|\rho_j|n\rangle\langle n|\hat{E}_j|n\rangle}{\sum_m \langle m|\rho_j|m\rangle\langle m|\hat{E}_j|m\rangle} . \quad (\text{II.34})$$

Nous allons changer un peu la forme de cette équation en introduisant les notations suivantes :

$$P_j(n) = \langle n|\rho_j|n\rangle , \quad (\text{II.35})$$

qui est l'expression usuelle donnant la distribution de populations de photons dans la cavité à l'instant  $t_j$  avec la connaissance de l'état initial modifié par les détections jusqu'à  $t_j$ ,

$$E_j(n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle n|\hat{E}_j|n\rangle , \quad (\text{II.36})$$

que est la « rétro-probabilité » d'avoir  $n$  photons dans la cavité à l'instant  $t_j$  et où  $\mathcal{N}$  est un facteur de normalisation. Parler de probabilité pour cette quantité est un abus

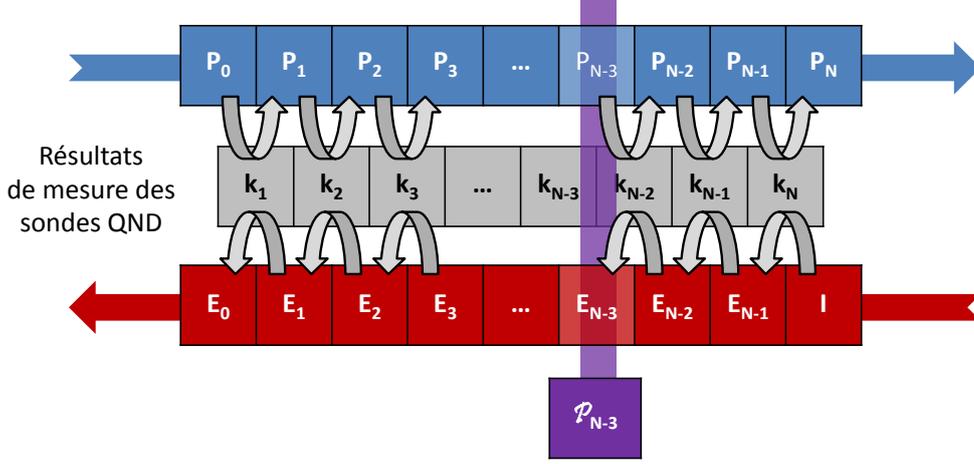


FIGURE II.7 – Évolution de  $P$  et  $E$ , construction de l'état passé du champ. Par la sonde du champ de la cavité nous obtenons une série de résultats  $k_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). La distribution de photons  $P_i$ , initialement égale à  $P_0$ , est transformée de  $P_{i-1}$  par l'information du résultat  $k_i$ . De même,  $E_i$  est construite depuis l'identité  $I$  et modifiée par l'information des résultats de mesures  $y_N$  à  $y_{i+1}$ . La distribution de photons de l'état passé du champ  $\mathcal{P}$ , donnée des deux distributions  $P$  et  $E$ , utilise donc l'ensemble de l'information acquise dans une réalisation de l'expérience.

de langage car  $Tr(E)$  n'est en général pas conservé par la « rétro-évolution ». Mais nous choisissons, pour plus de clarté, de forcer la normalisation de la distribution  $E$ . Dans la suite du manuscrit,  $E$  sera toujours normalisée sauf indication contraire. Finalement la probabilité conditionnelle  $P_j(n|k_{j+1} \dots k_N)$  se réécrit comme :

$$\mathcal{P}_j(n) = P_j(n|k_{j+1} \dots k_N) = \frac{P_j(n)E_j(n)}{\sum_n P_j(n)E_j(n)}, \quad (\text{II.37})$$

qui est la « probabilité passée » d'avoir  $n$  photons dans le mode du champ à l'instant  $t_j$ . La probabilité passée  $\mathcal{P}(n)$  est, en théorie, une meilleure estimation sur l'état du champ à postériori que celle donnée par  $P(n)$  : c'est ce que nous allons prouver au chapitre IV. La figure II.7 illustre la méthode de calcul de  $P$  et  $E$  par la prise en compte des différentes mesures de sonde aux résultats  $k_i$ .

Pour inclure, dans le calcul de  $\rho$ , la relaxation entre deux mesures de sonde QND séparées d'une durée  $dt$ , il est utile de mettre l'équation maitresse I.17 sous forme infinitésimale. Elle s'écrit :

$$\rho(t + dt) = (\mathbb{1} + dt\mathbf{L}) \rho(t). \quad (\text{II.38})$$

Cette équation est valable si  $dt$  est grand devant le temps de « mémoire » de l'environnement et petit devant le temps caractéristique de l'évolution hamiltonienne du système. De manière similaire, en partant de l'équation maîtresse II.29 pour  $\hat{E}$ , on obtient :

$$\hat{E}(\tilde{t} + d\tilde{t}) = (\mathbb{1} + d\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{E}}) \hat{E}(\tilde{t}) , \quad (\text{II.39})$$

où les opérateurs de Lindblad  $L_\mu$  dans la définition de  $\mathbf{L}_{\mathbf{E}}$  sont les mêmes que ceux utilisés pour  $\mathbf{L}$  :

$$L_- = \sqrt{\kappa(n_{\text{th}} + 1)}a , \quad L_+ = \sqrt{\kappa n_{\text{th}}}a^\dagger , \quad (\text{II.40})$$

Tout comme nous l'avons fait pour les populations  $P(n)$  à l'équation I.23, nous pouvons écrire explicitement l'évolution de la population  $E(n)$  :

$$\begin{aligned} \frac{dE(n)}{dt} &= \kappa n_{\text{th}}(n+1) E(n+1) \\ &\quad + \kappa(n_{\text{th}} + 1)n E(n-1) \\ &\quad - \left( \kappa(n_{\text{th}} + 1)n + \kappa n_{\text{th}}(n+1) \right) E(n) . \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Rappelons que l'évolution de cette pseudo-distribution ne conserve pas  $\sum_n E(n)$ . On peut montrer que le nombre de photons moyen  $\langle n \rangle_E$  de la distribution  $E$  normalisée vérifie :

$$\frac{d\langle n \rangle_E}{dt} = \kappa \left( \langle n \rangle_E + n_{\text{th}} + 1 \right) . \quad (\text{II.42})$$

Ce nombre *croît* exponentiellement avec une constante de temps égale à  $T_{\text{cav}} = \kappa^{-1}$ . C'est l'évolution inverse de  $\langle n \rangle_P(t)$ , le nombre de photons moyen de la distribution de photons usuelle (voir équation I.24).

### II.3.1.d L'analyse en pratique

Considérons l'analyse au pas  $j$  qui correspond à un temps écoulé  $t_j$  depuis l'instant de la première détection. Après la mesure de la sonde atomique  $j+1$ , nous mettons à jour  $P$  et  $E$  en deux étapes. Tout d'abord, nous prenons en compte le résultat de la mesure  $k_{j+1}$ , puis on introduit l'effet de la relaxation. Pour calculer la nouvelle distribution  $P_{j+1}$  nous utilisons la relation suivante :

$$P_{j+1} = T F_{k_{j+1}} P_j , \quad (\text{II.43})$$

où  $F_{k_{j+1}}$  est le POVM associé au résultat de mesure  $k_{j+1}$  et où  $T$  est la matrice qui représente la relaxation pendant la durée  $t_{j+1} - t_j$  séparant la détection des deux échantillons atomiques successifs. Nous définissons  $T$  en utilisant l'équation maîtresse mise sous forme infinitésimale en temps, équation II.38. L'expression de la matrice  $T$  est donc donnée par :

$$T = 1 + \tau L , \quad (\text{II.44})$$

où  $\tau = (t_{j+1} - t_j)/T_{cav}$ . C'est un petit paramètre car la durée séparant deux détections successives est bien plus petite que  $T_{cav}$ . Dans les expériences présentées au chapitre IV elle est de 86  $\mu$ s. La matrice  $L$  est composée des coefficients d'évolution des populations vus à l'équation I.23. Les éléments de  $L$  s'écrivent alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} L_{n,n-1} &= n_{th}n & n > 0 \\ L_{n,n} &= -\left((n_{th} + 1)n + n_{th}(n + 1)\right) & \forall n \\ L_{n,n+1} &= (n_{th} + 1)(n + 1) & n < n_M . \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Pour la détection de l'atome dans  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ , nous considérons les POVM  $F_e$  et  $F_g$  qui ont été définis à l'équation II.12. Nous prenons aussi en compte les cas où deux atomes sont détectés. Les POVM à deux atomes sont définis par :

$$F_{gg} = F_g^2, \quad F_{ee} = F_e^2, \quad F_{ge} = F_g F_e. \quad (\text{II.46})$$

Nous négligeons les événements où trois atomes ou plus interagissent avec le champ car le flux d'atomes traversant le dispositif est choisi assez bas pour les rendre rares. Si cela n'était pas le cas, des processus de collisions entre atomes assistées par le mode de la cavité pourraient faire s'échanger des quanta d'excitations entre atomes brouillant ainsi les franges de Ramsey et donc l'information que l'on a sur le champ [58]. On a pu montrer, par des simulations numériques, que le cas où deux atomes interagissent avec le champ est équivalent à deux atomes passant successivement dans la cavité. Ce résultat est valable car le désaccord  $\delta$  est assez grand par rapport à  $\Omega_0$  (l'interaction est dispersive). Nous en déduisons la définition des POVM à deux atomes, équation II.46, qui s'expriment comme le simple produit de deux POVM à un atome.

Passons maintenant à la mise à jour de la distribution  $E$ . Les opérations de transformation sont similaires à celles de  $P$  mais en considérant les résultats des détections dans le sens allant de la fin au début de la séquence. Pour obtenir  $E_j$ , nous utilisons la relation suivante :

$$E_j = T^\dagger F_{k_{j+1}} E_{j+1}. \quad (\text{II.47})$$

où  $T^\dagger$  encode l'effet de l'« anti-relaxation », : il s'agit de la transposée de la matrice  $T$  définie plus haut.

Nous terminons ces calculs en normalisant  $E_j$  même si ce n'est absolument pas nécessaire pour l'obtention de l'état passé du champ. Ce sera néanmoins utile pour visualiser l'évolution de cette pseudo-distribution de photons dans le temps et comprendre certains comportements de la distribution passée  $\mathcal{P}$ .

Une fois  $P_j$  et  $E_j$  à notre disposition, nous construisons  $\mathcal{P}_j$ . La population de l'état  $|n\rangle$  s'écrit :

$$\mathcal{P}_j(n) = \frac{P_j(n)E_j(n)}{\sum_n P_j(n)E_j(n)}. \quad (\text{II.48})$$

Nous considérons le champ initial comme inconnu et mettre en compétition ce qui est révélé par  $P$  et par  $\mathcal{P}$ . Cela revient à choisir d'initialiser  $\rho$  et  $E$  par la matrice identité  $I_S$  :

$$P_0 = E_N = I_S, \quad (\text{II.49})$$

**Restriction de l'espace de Hilbert** L'état du champ, en toute rigueur, évolue dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  de dimension infinie. Il faut donc, pour les calculs numériques, choisir une restriction  $\mathcal{H}_{\text{tronq}}$  de  $\mathcal{H}_S$ . Plus la restriction est petite plus les calculs sont rapides. Le choix est cependant imposé par le plus grand état de Fock que l'on puisse mesurer avec une probabilité non négligeable, il dépend donc de l'expérience réalisée.

Par conséquent, pour respecter la conservation de  $\sum_n P(n) = 1$  au cours du temps, le dernier élément de la matrice  $L$ , en bord de  $\mathcal{H}_{\text{tronq}}$ , a une expression un peu différente de II.45 :

$$L_{n_M, n_M} = -(1 + n_{\text{th}})n_M, \quad (\text{II.50})$$

où  $n_M = \dim(\mathcal{H}_{\text{tronq}}) - 1$  est le nombre maximum de photons de l'espace tronqué.

### II.3.1.e Cas sans relaxation

Si nous enlevons la relaxation du modèle alors le résultat donné par la méthode de l'état passé du champ est triviale. Tout d'abord,  $P_j(n)$  est donnée par la distribution initiale  $P_0(n)$  mise à jour par les mesures de  $t_1$  à  $t_j$  selon le produit de décimation donné à l'équation II.19. L'expression de  $E_j$  est obtenue de façon similaire :

$$E_j(n) = \prod_{i=j+1}^N F_i I, \quad (\text{II.51})$$

où l'ordre d'application des opérateurs  $F_i$  importe peu car ils sont diagonaux dans la base des états de Fock et donc commutent entre eux. On trouve alors que les populations passées de photons  $\mathcal{P}_j(n)$  ont la même valeur à chaque instant, égale au produit de décimation total de la séquence de mesures QND :

$$\mathcal{P}_j(n) = P_j(n)E_j(n) = \prod_{i=1}^N F_i P_0(n) = P_N(n) \quad \forall j, \quad (\text{II.52})$$

cette formule restant vraie dans le cas d'un interféromètre non idéal, les imperfections étant codées dans les POVM  $F_i$ . Ce résultat n'est pas surprenant car, en l'absence de relaxation, la meilleure estimation du champ est celle donnée par le maximum de mesures QND disponibles, idéalement en nombre suffisant pour pointer vers un état de Fock. La méthode de l'état passé n'apporte d'amélioration sur l'estimation de l'état du champ que si le champ réel est initialement dans un état propre de  $N$  inconnu de l'expérimentateur. Dans ce cas la distribution passée  $\mathcal{P}$  révèle l'état dès  $t = 0$ . Notons que ce cas sans relaxation, où l'utilisation du formalisme de l'état passé ne présente que peu d'intérêt, n'existe pas en pratique et l'utilisation de la méthode de Gammelmark *at al.* reste parfaitement justifiée pour l'analyse de l'évolution complexe du champ en cavité sur des temps longs devant  $T_{\text{cav}}$ .

### II.3.2 Application à l'expérience de C. Guerlin *et al.*

Nous pouvons utiliser ce nouveau formalisme pour voir sous un nouveau jour les résultats des expériences publiées dans [25]. On rappelle que l'analyse effectuée pour déterminer

l'état du champ ne prenait pas en compte la relaxation et utilisait une fenêtre de décimation glissante de 110 atomes détectés pour observer l'évolution temporelle du champ (voir II.2.4). Comme nous venons de le montrer, dans le cas sans relaxation, la méthode de l'état passé du champ n'apporte aucune information supplémentaire. Nous allons donc utiliser une autre forme d'analyse : celle que nous avons développé en II.3.1.d.

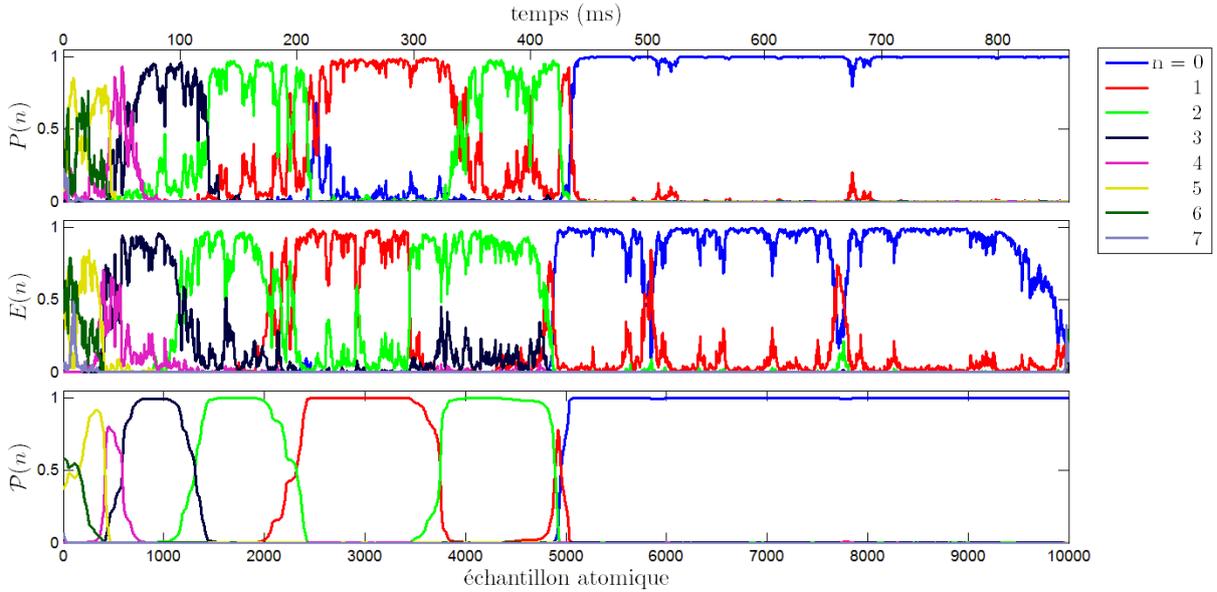


FIGURE II.8 – Application de la méthode de l'état passé aux expériences de C. Guerlin *et al.* L'encart supérieur montre l'évolution des populations  $P(n)$  et l'encart central celle des  $E(n)$ . Le produit des deux (à une normalisation près) est présenté de le cadre inférieur de la figure, il s'agit de la distribution du nombre photons de l'état passé  $\mathcal{P}(n)$ . Le bruit sur les courbes est quasi inexistant : la prise en compte de  $E$ , en plus de  $\rho$ , « lisse » l'évolution du champ estimé.

Nous obtenons alors l'évolution de  $P(n)$ ,  $E(n)$  et de  $\mathcal{P}(n)$  dans le temps. Un exemple des courbes des populations de photons des trois distributions pour une trajectoire quantique du champ est donnée figure II.8.

Le cadre supérieur de cette figure montre l'évolution de  $P(n)$ . Le bruit, clairement visible, est dû au caractère aléatoire du résultat d'une mesure de l'état atomique. En effet, la détection d'un atome dans l'état  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$  change la distribution de façon complémentaire et une seule détection peut profondément changer la distribution. Avec la prise en compte de la relaxation, les populations du nombre de photons vont relaxer, à chaque pas, légèrement vers celles de la distribution de l'état thermique. L'état ne reste donc pas dans un état de Fock pur et les changements brutaux dus à l'application des POVM favorisent l'évolution vers l'équilibre thermodynamique. Cependant, cela se fait au prix de l'introduction du bruit visible sur les courbes des populations  $P(n, t)$ .

Considérons maintenant les courbes des  $E(n, t)$  dans le cadre central de la figure II.8.

Les commentaires faits pour  $P(n, t)$  restent valables pour la distribution issue de la matrice d'effet. À chaque prise en compte d'une détection,  $E(n)$  tend à relaxer vers la distribution uniforme, point fixe du superopérateur de Lindblad  $\mathbf{L}_E$  (équation II.30). Comme l'obtention d'un résultat de détection est aléatoire, l'évolution des  $E(n, t)$  est aussi très bruitée.

Passons maintenant à la discussion des courbes représentant la distribution de population de photons passée du champ,  $\mathcal{P}(n, t)$  (cadre inférieur de la figure II.8). L'absence presque totale de bruit sur l'estimation de ces populations est absolument remarquable. En effet, une des particularité de la méthode de Gammelmark *et al.* est de faire disparaître le bruit dont nous venons de discuter. C'est assez simple à comprendre puisque la connaissance de  $E_{j'}$  contraint l'évolution de  $\mathcal{P}_j$  à  $\mathcal{P}_{j'}$ . Supposons que le champ soit dans un état de Fock  $|m\rangle$  à l'instant  $t_j$  :  $\rho_j = |m\rangle\langle m|$ . Si la matrice d'effet est telle que  $E_{j'} = |m\rangle\langle m|$  alors on sait que, très vraisemblablement, il n'y a pas eu de saut quantique entre  $t_j$  et  $t_{j'}$ , à condition que  $t_{j'} - t_j$  ne soit pas trop grand. Plus formellement, la différence entre  $\mathcal{P}_j$  et  $\mathcal{P}_{j+1}$  est très faible. Les deux distributions contiennent l'ensemble des POVM associés à toutes les mesures d'une réalisation expérimentale. En revanche, le premier est construit avec  $j$  matrices de relaxation  $T$  et  $N - j$  matrices de retro-relaxation  $T^\dagger$ , le second avec  $j + 1$  matrices  $T$  et  $N - j - 1$  matrices  $T^\dagger$ . Comme ces matrices sont très proches de l'identité, la différence entre deux pas consécutifs ne peut pas être aussi brutale que dans le cas de  $P$  et  $E$ , le bruit associé disparaît donc.

Nous remarquons aussi que l'état décrit par la distribution  $\mathcal{P}$  est à chaque instant, plus pur que celui de  $P$ . Il y a notamment des instants pour lesquels il existe  $n$  tel que  $\mathcal{P}(n) \approx 1$  alors que  $P(n) < 1$  de façon significative.

Nous voyons de même que, grâce à l'absence de bruit sur les courbes représentant les  $\mathcal{P}(n)$ , il est aussi beaucoup plus aisé de déterminer quand un saut quantique a eu lieu. Nous avons donc réalisé de nouvelles expériences similaires à celles de [25] mais avec un champ initial comportant bien plus de photons en moyenne. Notre but est d'étudier en particulier l'apport de cette nouvelle méthode d'analyse sur la résolution des états de Fock et des sauts quantiques du nombre de photons. Nous monterons aussi que la réduction de bruit apportée par la connaissance des détections futures n'est pas un simple lissage et que  $\mathcal{P}$  contient bien une information supplémentaire sur l'état réel du champ.

Mais avant de présenter ces résultats, nous allons nous intéresser aux aspects techniques de l'expérience pour mettre en pratique les mesures QND que l'on a décrites, c'est l'objet du chapitre III.

# Chapitre III

## Dispositif expérimental

Dans le chapitre II, nous avons donné l'essentiel du formalisme servant à décrire la mesure QND du nombre de photons dans une cavité. Nous avons ensuite présenté l'analyse de ces mesures utilisant l'état passé du champ qui permet d'obtenir la meilleure estimation possible sur son état à un instant donné en utilisant l'ensemble de l'information sur la sonde du champ disponible.

Nous allons maintenant présenter les aspects techniques de la réalisation d'une telle mesure. Nous commencerons par présenter le dispositif dans son ensemble, dont la forme actuelle est, en grande partie, le fruit du travail de thèse de Sébastien Gleyzes [59]. Cette courte description fera office d'introduction aux trois sections couvrant les éléments clés des expériences présentées dans ce manuscrit.

Nous allons décrire les sondes atomiques et nous verrons quels types d'états nous permettent de réaliser un système à deux niveaux. Nous nous intéresserons ensuite à la préparation de ces états particuliers et à leur détection après leur sortie de l'interféromètre de Ramsey.

Dans une deuxième section, nous présenterons la cavité supraconductrice qui contient le champ quantique que l'on veut sonder. Nous donnerons quelques détails sur la fabrication de cette cavité de grande finesse avant de décrire le mode du champ utilisé, les propriétés intrinsèques à la cavité et les caractéristiques du couplage atome-champ.

Nous terminerons ce chapitre avec la réalisation expérimentale de l'interféromètre de Ramsey. Nous donnerons quelques propriétés des cavités des *zones de Ramsey* dans lesquelles l'état de l'atome est manipulé grâce à son interaction avec un champ classique. Enfin, nous reviendrons sur le réglage de la phase de l'interféromètre et sur ses imperfections.

### III.1 Vue d'ensemble

Un schéma du dispositif expérimental est présenté figure III.1, toutes les parties vont être expliquées le long de ce chapitre. En résumé, un jet d'atomes de  $^{85}\text{Rb}$  sort d'un four chauffé à  $225^\circ\text{C}$  et est collimaté par des diaphragmes. Les atomes de vitesse  $v = 250\text{ m/s}$  sont sélectionnés parmi toutes les classes de vitesses issues du four. Dans la boîte  $B$ , dite *boîte à circulariser*, les atomes sélectionnés sont préparés dans des états de Rydberg circulaires. Ils passent ensuite à travers l'interféromètre de Ramsey composé de deux cavités de faible finesse, les zones de Ramsey  $R1$  et  $R2$ . La cavité supraconductrice  $C$  contenant le champ quantique micro-onde que l'on veut mesurer se trouve entre ces zones de Ramsey. En sortie de l'interféromètre, l'état atomique final est mesuré dans la base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  dans le détecteur  $D$ . La zone grisée du schéma cache une seconde cavité supraconductrice et une troisième zone de Ramsey qui ne sont pas utilisées dans les expériences présentées dans ce manuscrit.

L'ensemble du dispositif, de la préparation en  $B$  à la détection en  $D$ , se trouve dans un cryostat. Un premier étage de cryogénie, refroidi à l'azote liquide ( $\approx 77\text{ K}$ ), protège du rayonnement thermique une seconde partie refroidie grâce à un bain d' $^4\text{He}$  liquide ( $\approx 4\text{ K}$ ). Une partie de l'hélium liquide est injectée dans un petit réservoir sur lequel on pompe, ce qui permet de descendre la température à à environ  $1.5\text{ K}$ . Enfin, dans une dernière étape, on liquéfie de l' $^3\text{He}$  lors de son passage à travers la boîte à  $1.5\text{ K}$ . Le liquide est injecté dans une boîte sur laquelle est accrochée le cœur du dispositif. Cette boîte est pompée, permettant finalement d'atteindre une température finale d'environ  $0.8\text{ K}$ . Cela assure un très faible nombre de photons thermiques (nous attendons, en théorie,  $n_{\text{th}} = 0.05$ ) qui pourraient perturber les expérience en peuplant le mode de la cavité  $C$  ou en étant absorbés par les sondes atomiques.

Les cavités  $R1$ ,  $C$  et  $R2$  sont, de plus, enfermées dans une boîte d'écrantage en cuivre doré les protégeant des photons thermiques issus de la partie « chaude » à  $4\text{ K}$ , les atomes pouvant toujours passer grâce à des trous sous-coupure (moins de  $3\text{ mm}$ ) pour le rayonnement à résonance avec la cavité et la transition atomique, de fréquence  $\approx 51\text{ GHz}$ . Les guides d'ondes apportant la micro-onde pour les zones de Ramsey ou la cavité peuvent aussi être des sources de photons parasites. En effet, les guides descendent le long du cryostat depuis l'extérieur et le champ thermique correspond donc à une température bien plus chaude que  $0.8\text{ K}$ . Dans les tronçons des guides, au niveau du passage dans la boîte d'écrantage à  $0.8\text{ K}$ , est incluse une épaisseur d'absorbant micro-onde RAM (*Radar-absorbent Material*). Le champ arrivant dans le cœur du dispositif est donc légèrement atténué d'environ  $10\text{ dB}$ . Cela supprime les photons thermiques issus de la partie chaude des guides sans nous priver de la possibilité d'injecter un champ d'amplitude suffisante pour les expériences en un temps court, les générateurs micro-ondes étant assez puissants pour contrebalancer les pertes dues aux absorbants.

Enfin, une protection en mu-métal protège les éléments supraconducteurs (comme les surfaces de la cavité  $C$  et la boîte à circulariser  $B$  qui pourraient transiter vers une phase normale) et les atomes (sujets à l'effet Zeeman) des champs magnétiques extérieurs au cryostat.

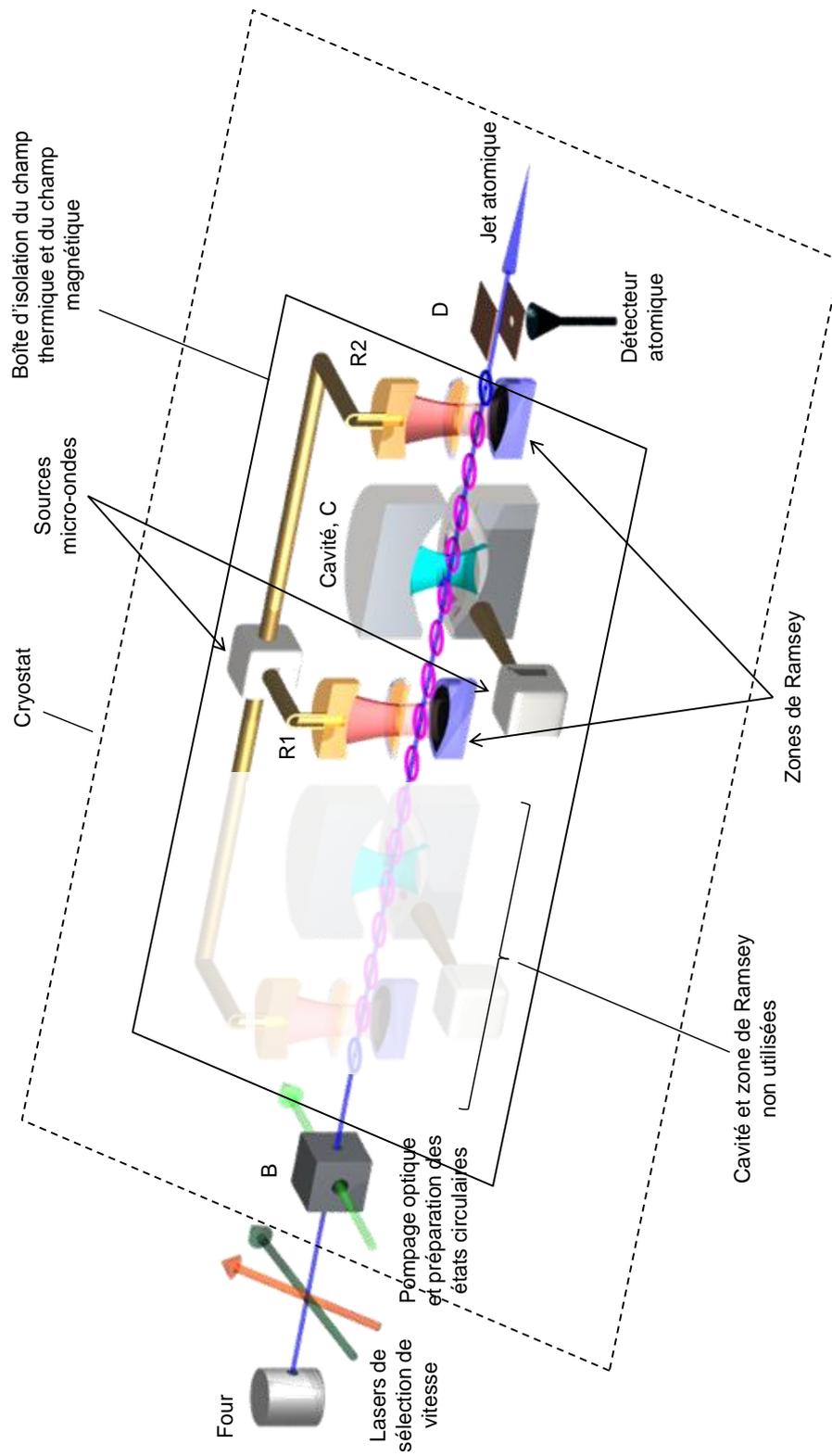


FIGURE III.1 – Montage expérimental.

## III.2 Les atomes de Rydberg circulaires

Dans le chapitre I nous avons décrit le couplage entre un champ quantique ou classique et un système atomique à deux niveaux. Grâce aux états de Rydberg circulaires, il est expérimentalement possible de se rapprocher de ce modèle à deux niveaux idéal. Ces états possèdent de nombreux avantages pour l'observation du champ : un dipôle de transition  $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  géant et un temps de vie très long. Le couplage entre le champ et l'atome est alors *fort* et l'information prélevée sur le nombre de photons présents dans le mode est préservée jusqu'à la détection, en sortie de l'interféromètre de Ramsey. Nous allons commencer par présenter ces états et leurs caractéristiques puis nous allons expliquer comment nous les produisons et sélectionnons leur vitesse. Enfin, nous nous intéresserons à la détection des états atomiques.

### III.2.1 Un système atomique à deux niveaux

Les états de Rydberg sont des états pour lesquels le nombre quantique principal  $n$  est très élevé. L'électron de valence se trouve très loin du noyau en comparaison de la situation où l'atome se trouve dans son état fondamental. On qualifie alors l'atome d'hydrogénoïde car la structure des niveaux d'énergie ressemble à celle de l'hydrogène [17].

Nous allons utiliser des états de Rydberg particuliers dits *circulaires* [60]. En plus d'avoir un nombre quantique  $n$  très grand, ces états sont de moments angulaire et magnétique maximaux :  $l = |m| = n - 1$ . Leur appellation de « circulaires » provient de la forme toroïdale de la fonction d'onde de l'électron. Ces états, que l'on note  $|nC\rangle$ , ont des propriétés remarquables qui correspondent bien aux résultats du modèle de Bohr :

- Leur énergie est donné par la formule de Rydberg :

$$E_n = -\frac{R_y}{n^2}, \quad (\text{III.1})$$

où  $R_y \approx 13.6 \text{ eV}$  est la constante de Rydberg légèrement modifiée pour prendre en compte la masse du noyau de  $^{85}\text{Rb}$ . Nous en déduisons la fréquence de transition  $\omega_n/2\pi$  entre deux états circulaires  $|(n-1)C\rangle$  et  $|nC\rangle$  :

$$\omega_n \approx 2\frac{R_y}{\hbar} \frac{1}{n^3}. \quad (\text{III.2})$$

- La rayon moyen de l'orbite de l'électron est noté  $r_n$  et vaut :

$$r_n = n^2 a_0, \quad (\text{III.3})$$

où  $a_0 = 0.53\text{Å}$  est le rayon de Bohr. Le dipôle moyen de la transition  $|(n-1)C\rangle \leftrightarrow |nC\rangle$  est donc donné par l'expression :

$$\mathbf{d}_n = q r_n = q |\langle nC | \mathbf{R} | (n-1)C \rangle| = n^2 q a_0 \boldsymbol{\epsilon}, \quad (\text{III.4})$$

où  $q$  est la charge de l'électron et  $\boldsymbol{\epsilon}$  la direction du dipôle.

- Le taux d'émission spontanée de l'état  $|nC\rangle$  dans l'espace libre (c'est à dire sans limites géométriques pour les modes de champ, comme dans une cavité) est donné par :

$$\Gamma_n = \frac{\omega_n^3 d_n^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \propto \frac{1}{n^5}, \quad (\text{III.5})$$

Le temps de vie  $T_{\text{at},n}$  de l'état  $|nC\rangle$  est simplement obtenu par la relation  $T_{\text{at},n} = \Gamma_n^{-1}$ .

Nous cherchons à avoir un temps de vie et un dipôle de transition les plus grands possibles pour que l'atome se couple fortement au champ. Dans nos expériences nous utilisons les niveaux circulaires  $n = 50$  et  $n = 51$  (voir la figure III.2). On les identifie aux états  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  utilisés dans le premier chapitre :

$$|g\rangle \equiv |50C\rangle; \quad |e\rangle \equiv |51C\rangle, \quad (\text{III.6})$$

Ils ont les propriétés suivantes, calculées depuis les définitions données plus haut :

- La fréquence de transition entre ces états est dans le domaine des micro-ondes, elle vaut  $\nu_{\text{at}} \approx 51.099$  GHz. La transition peut être rendue résonante avec la cavité, voir le paragraphe III.3.1.
- Le dipôle de la transition  $|(n-1)C\rangle \leftrightarrow |nC\rangle$  est  $d_{50} = 1776 ea_0$ . Ce dipôle géant fait de ces états d'excellentes antennes pour le champ que l'on compte sonder.
- Les états  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  ont respectivement une durée de vie  $T_{\text{at},g} = 28.5$  ms et  $T_{\text{at},e} = 31.5$  ms.

Utiliser des états de Rydberg circulaires avec  $n \gg 50$  nous permettrait d'utiliser des états de plus grande durée de vie mais cela poserait plusieurs problèmes. Tout d'abord, la sensibilité aux inhomogénéités du champ statique croît comme  $n^7$ , le contraste des franges de Ramsey serait donc réduit. Ensuite, augmenter  $n$  signifierait diminuer la fréquence de transition atomique. Étant donné la température du cœur de l'expérience, le nombre de photons thermiques à cette nouvelle fréquence serait plus important.

Comment accède-t-on à ces états circulaires ? Ce n'est pas évident car ils sont dégénérés avec les états de même  $n$  mais de moments angulaire et magnétique moindres. On lève la dégénérescence entre l'état circulaire et les autres états, dits *elliptiques*, de la multiplicité  $n$  par effet Stark grâce à l'application d'un champ électrique statique. Si la symétrie sphérique est brisée, il subsiste néanmoins une symétrie cylindrique autour de l'axe de quantification défini par le champ statique. Les nombres  $n$  et  $m$  restent de bons nombres quantiques mais pas  $l$ . On introduit le nombre quantique parabolique  $n_1$  tel que  $0 \leq n_1 \leq n - |m| - 1$ . La structure d'une multiplicité  $n$  est schématisée à la figure III.3 qui montre en outre toutes les étapes de préparation des atomes que nous allons décrire dans les paragraphes suivants.

La levée de dégénérescence par effet Stark entre l'état circulaire  $|nC\rangle$  et les états elliptiques immédiatement voisins  $|n, n_1, m = n - 2\rangle$  est d'environ 100 MHz/(V/cm). Les fréquences des transitions  $|(n-1)C\rangle \leftrightarrow |nC\rangle$  et  $|(n-1)C\rangle \leftrightarrow |n, n_1 = 1, m = n - 3\rangle$  restent cependant identiques. C'est un problème puisque nous ne voulons qu'une seule

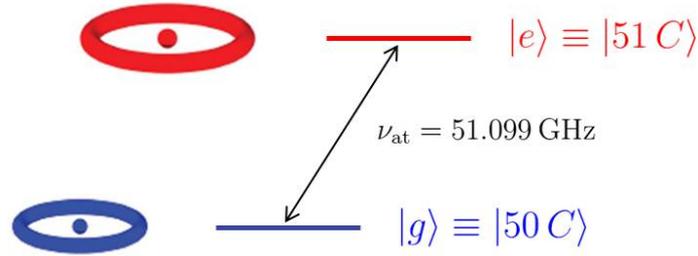


FIGURE III.2 – Atome à deux niveaux. Les rôles des deux niveaux de ce modèle idéal sont joués par les états de Rydberg circulaires  $|50 C\rangle$  et  $|51 C\rangle$  de l’atome de  $^{85}\text{Rb}$ . La fréquence de transition tombe dans le domaine des micro-ondes et vaut  $\nu_{\text{at}} \approx 51.099$  GHz.

transition résonante avec le champ de la cavité. Le système à deux niveaux est sauvé par les éléments de matrice du couplage dipolaire qui sont bien plus grands pour les transitions circulaire-circulaire que pour les transitions circulaire-elliptique. Dans le cas de la transition  $|50 C\rangle \longleftrightarrow |51 C\rangle$ , la force du couplage est 65 fois plus grande que pour la transition  $|50 C\rangle \longleftrightarrow |n = 51, n_1 = 1, m = 47\rangle$ .

L’effet Stark linéaire évoqué plus haut n’affecte pas la différence d’énergie entre les niveaux  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ . En revanche, il existe un effet Stark quadratique différentiel qui sépare les niveaux d’une énergie supplémentaire proportionnelle au carré de l’amplitude du champ électrique statique appliqué à l’atome. La variation résultante est d’environ  $-255 \text{ kHz}/(\text{V}/\text{cm})^2$ . Avec des champs de l’ordre de quelques V/cm il est donc possible de modifier  $\nu_{\text{at}}$  de façon à changer notablement la phase accumulée par une superposition d’états atomiques dans l’interféromètre de Ramsey. C’est un des moyens à notre disposition pour modifier la direction de mesure du pseudospin atomique (voir III.4.2).

Notons que pour que ces états circulaires survivent et ne soient pas mélangés avec les états elliptiques de la même multiplicité, il faut impérativement maintenir un champ directeur, sans introduire de gradients trop importants, tout au long du parcours des atomes [61]. Le montage actuel tient compte de cette contrainte [59].

### III.2.2 Préparation et détection

**Pompage optique** Nous utilisons des atomes de  $^{85}\text{Rb}$ . Ils sont issus d’une enceinte, un four, que l’on chauffe à  $225^\circ\text{C}$ . Ils en sortent par un trou de  $0.7 \text{ mm}$  de diamètre. Une série de diaphragmes et l’entrée de la boîte à circulariser (de diamètre  $0.7 \text{ mm}$ ) permet la collimation du jet atomique.

Lors de l’étape de sélection de vitesse (voir plus bas), les atomes sont préparés par pompage optique dans l’état  $|5S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle$ . Grâce à trois transitions optiques, l’atome

atteint l'état de Rydberg  $|52f, m = 2\rangle$  (voir figure III.3) :

$$|5S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle \xrightarrow{780 \text{ nm}} |5P_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle, \quad (\text{III.7})$$

$$|5P_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle \xrightarrow{776 \text{ nm}} |5D_{5/2}, F = 5, m_F = 5\rangle, \quad (\text{III.8})$$

$$|5D_{5/2}, F = 5, m_F = 5\rangle \xrightarrow{1.26 \text{ }\mu\text{m}} |52f, m = 2\rangle. \quad (\text{III.9})$$

**Circularisation et purification** Une fois les atomes préparés dans l'état  $|52f, m = 2\rangle$ , ils passent dans la boîte à circulariser ( $B$  à la figure III.1). Ils y sont transférés dans des états de Rydberg circulaires  $|52f, m = 51\rangle$  après une étape appelée *circularisation*. En premier lieu, on lève la dégénérescence de la multiplicité  $n = 52$  par l'application d'un champ électrique statique (*Stark switching*, étape 2 à la figure III.3). L'action combinée d'une rampe de champ électrique et d'une impulsion radio-fréquence de polarisation linéaire ( $\nu_{RF} \approx 255 \text{ MHz}$ ) permet de réaliser un passage adiabatique rapide permettant à l'atome de gagner les 49 quanta de moment angulaire nécessaires à l'accession au niveau circulaire (étape 3 de la figure III.3). Nous levons la dégénérescence entre transitions RF  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  en appliquant un champ magnétique, parallèle au champ électrique statique directeur, d'environ 18 G dans la boîte à circulariser. Ce champ reste confiné dans la boîte grâce au niobium supraconducteur qui la compose (par effet Meissner), il risquerait autrement de perturber la phase supraconductrice du niobium de la cavité ou de brouiller la cohérence atomique à cause des inhomogénéités spatiales du champ (effet Zeeman dépendant de la position de l'atome).

Le processus de circularisation est efficace mais il peut subsister des états elliptiques à l'issue de celui-ci. Une étape de *purification* (étape 4, figure III.3) est nécessaire afin d'avoir presque 100% des atomes dans un état circulaire. Nous soumettons les atomes à une impulsion micro-onde qui adresse la seule transition  $|52C\rangle \longleftrightarrow |50C\rangle$  à deux photons de fréquence  $\approx 49.7 \text{ GHz}$ . Elle est effectuée en présence d'un grand champ électrique qui permet de mettre hors résonance les transitions entre l'état  $|52C\rangle$  et états elliptiques. À la sortie de la boîte à circulariser, une paires d'électrodes permet d'ioniser les états  $|52C\rangle$  non transférés et les éventuels états elliptiques résiduels de la multiplicité  $n = 52$ , qui pourraient être détectés comme des états circulaires.

**Nombre d'atomes préparés et taux de répétition** Pour atteindre un état de Rydberg, les atomes sont excités par des laser. La préparation atomique ne produit pas de façon déterministe un nombre  $n_{\text{at}}$  précis d'atomes. Ce nombre suit en réalité une distribution statistique de Poisson :

$$P(n_{\text{at}}) = e^{-\overline{n_{\text{at}}}} \frac{\overline{n_{\text{at}}}^{n_{\text{at}}}}{n_{\text{at}}!} \quad (\text{III.10})$$

où  $\overline{n_{\text{at}}}$  est le nombre moyen d'atomes préparés. On parle alors de *paquet* ou d'*échantillon* atomique.

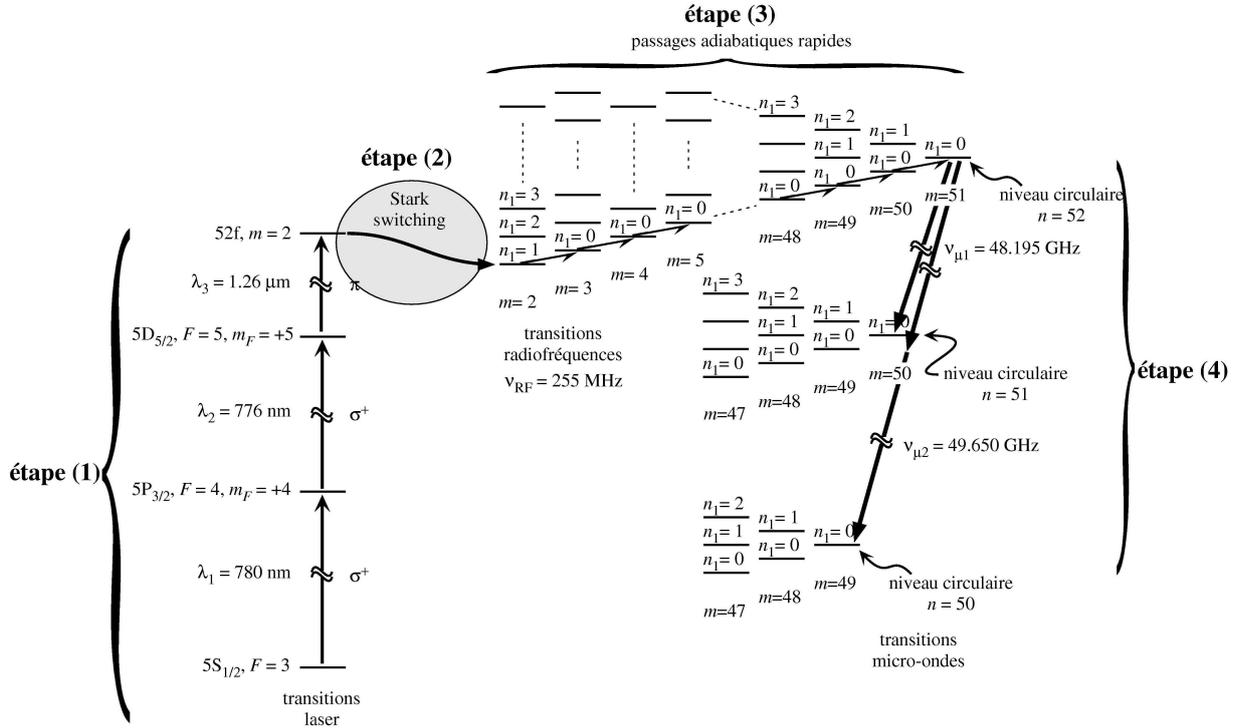


FIGURE III.3 – Préparation de l’atome dans un état de Rydberg circulaire. (1) Trois transitions optiques transfèrent les atomes de l’état  $|5S_{1/2}, F=3\rangle$  dans l’état de Rydberg  $|52f, m=2\rangle$ . (2) L’application d’un champ électrique statique « ouvre » la multiplicité  $n=52$ . (3) Les atomes sont soumis à une rampe de champ électrique combinée à un champ radio-fréquence  $\nu_{\text{RF}} \approx 255 \text{ MHz}$ . Il en résulte un transfert adiabatique rapide qui transfère les atomes dans l’état circulaire  $|52C\rangle$ . Une dernière étape (4), appelée purification, permet d’obtenir finalement l’état  $|e\rangle \equiv |51C\rangle$  ou  $|g\rangle \equiv |50C\rangle$  avec une grande pureté.

Ce nombre est contrôlé par la taille, la durée d’allumage et la puissance des lasers ainsi que par le flux d’atomes sortants du four. En pratique, nous nous arrangeons pour avoir  $N_{\text{det}} \approx 0.3$  atomes détectés en moyenne par paquet.

La séquence de préparation qui dure environ  $70 \mu\text{s}$  pour chaque échantillon atomique limite son taux de répétition. Dans les expériences présentées, nous attendons un temps  $T_{\text{prep}} = 86 \mu\text{s}$  entre deux préparations successives.

**Sélection en vitesse** Il est nécessaire de sélectionner très finement la vitesse des atomes. En effet, plus la distribution des vitesses sera large, plus la dispersion spatiale, dans l’axe du jet atomique, sera grande au niveau des zones de Ramsey et du détecteur, situés à des distances de l’ordre de la dizaine de centimètres après la zone de préparation. Une des conséquences de cette dispersion est la diminution du contraste de l’interféromètre. Pour

cette sélection en vitesse, deux lasers à 780 nm supplémentaires sont utilisés. La sélection en vitesse est schématisée à la figure III.4.

Un premier laser, appelé dépompeur, allumé en continu, est résonant avec la transition  $|5S_{1/2}, F = 3\rangle \longleftrightarrow |5P_{3/2}, F = 3\rangle$  quelle que soit la vitesse des atomes issus du four. Une fois dans l'état  $|5P_{3/2}, F = 3\rangle$ , les atomes peuvent se désexciter soit vers  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ , où ils deviennent transparents pour le laser, soit vers  $|5S_{1/2}, F = 3\rangle$ , auquel cas le cycle recommence.

Les atomes croisent ensuite le faisceau du laser repompeur qui a une fréquence désaccordée de  $\Delta\omega = 2\pi \cdot 145\text{MHz}$  par rapport à la transition  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \longleftrightarrow |5P_{3/2}, F = 3\rangle$ . Le faisceau du repompeur fait un angle  $\theta \approx 60^\circ$  avec le jet atomique et seuls les atomes ayant la vitesse  $v = \lambda_{\text{rep}} \Delta\omega / (2\pi \cos \theta)$  (avec  $\lambda_{\text{rep}} \approx 780\text{ nm}$ ) qui compense, par effet Doppler, le désaccord  $\Delta\omega$  pourront être excités vers le niveau  $|5P_{3/2}, F = 3\rangle$ . Ils se désexcitent ensuite, éventuellement après plusieurs cycles, vers le niveau  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ .

Remarquons qu'une autre classe de vitesse  $v'$  peut être repompée vers  $|5S_{1/2}, F = 3\rangle$  en passant par le niveau  $|5P_{3/2}, F = 2\rangle$ , le laser étant désaccordé de  $\Delta\omega' \neq \Delta\omega$  par rapport à cette transition. Cette vitesse, dont l'expression est  $v' = \lambda_{\text{rep}} \Delta'\omega / (2\pi \cos \theta)$ , vaut environ 350 m/s.

Pour se débarrasser de la classe de vitesse parasite et affiner la sélection, on ajoute à la sélection Doppler une sélection en temps de vol. Elle consiste à allumer pendant un temps court (de quelques  $\mu\text{s}$ ) le laser repompeur et le laser du premier échelon de l'excitation Rydberg. Les deux faisceaux lasers croisent le jet atomique en deux points séparés d'une distance  $D$ . Si on appelle  $t_{\text{sel}}$  le temps qui sépare les deux impulsions laser, alors la vitesse sélectionnée sera simplement égale à  $v_{\text{sel}} = D/t_{\text{sel}}$ . Nous réglons la sélection de vitesse de façon à ce que les sondes atomiques utilisées pour les mesures QND traversent le dispositif à une vitesse de 250 m/s. La figure III.5 montre les distributions de vitesses obtenues expérimentalement pour les différentes étapes de la sélection.

Il faut choisir les durées des impulsions telles que la largeur de la distribution des vitesses reste raisonnable et que le nombre d'atomes excités soit suffisant. On utilise typiquement des impulsions de 4 à 8  $\mu\text{s}$  pour les deux lasers ce qui correspond à 0.2-0.3 atome détectés par échantillon et une largeur de la distribution des vitesses de 2-4 m/s.

Notons que l'impulsion laser du premier échelon d'excitation nous sert de référence temporelle pour les séquences expérimentales.

**Détection** À la fin du dispositif se trouve un détecteur d'état atomique par ionisation. Le principe est simple : les atomes passent entre deux électrodes où l'on applique une différence de potentiel électrique (voir figure III.6 a.). Le champ créé, s'il est suffisamment intense, va ioniser les atomes. Les électrons produits sont attirés vers des lentilles électrostatiques permettant la focalisation de leurs trajectoires vers un multiplicateur d'électrons. Le signal de détection amplifié est envoyé à un compteur qui est capable de restituer l'information du nombre de détections entre deux instants. Comme l'énergie d'un atome dans un état de Rydberg n'est pas très loin du seuil d'ionisation, il suffit de créer, pour les états qu'on utilise, un champ de l'ordre de la centaine de V/cm.

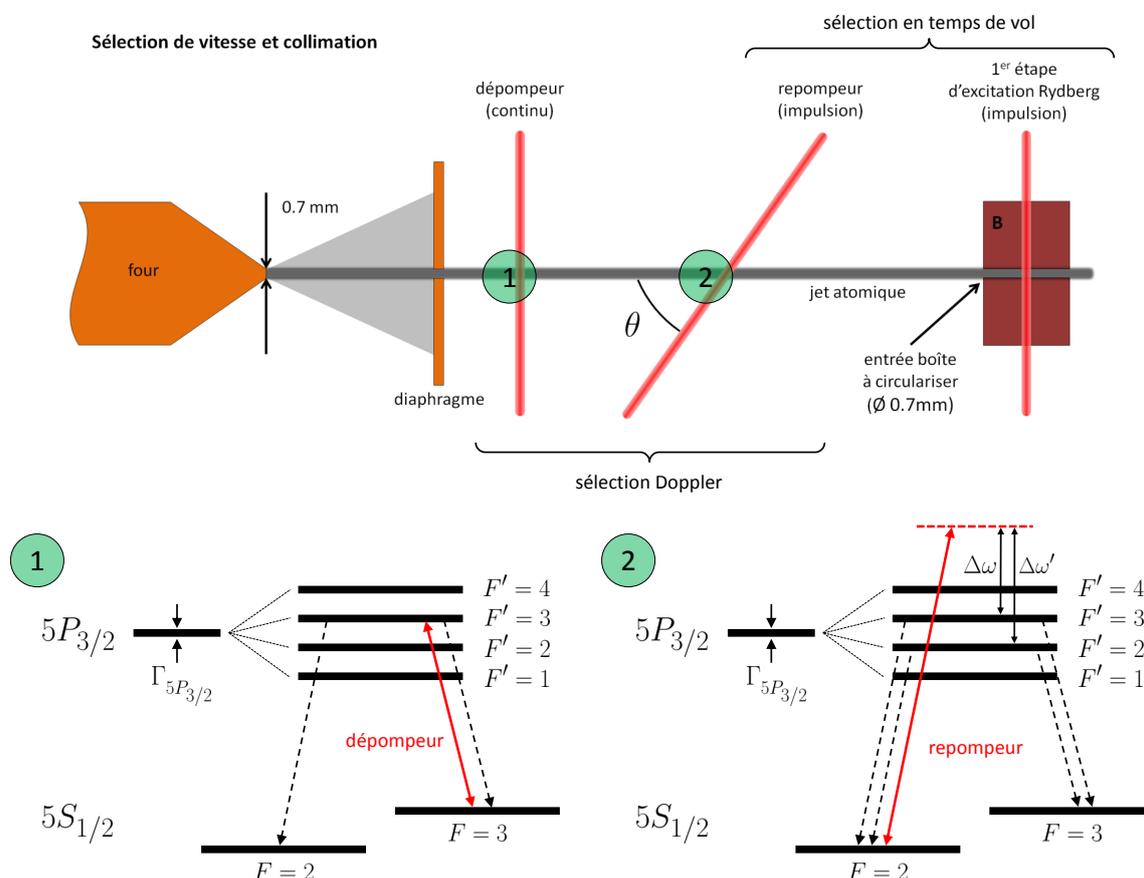


FIGURE III.4 – Sélection de la vitesse des atomes. Les atomes de  $^{85}\text{Rb}$  sortent d'un four et sont collimatés par des diaphragmes. Le laser dépompeur, transfère de façon continue les atomes du jet dans l'état  $|5P_{1/2}, F=3\rangle$ . Plus loin, un laser repompeur, qui fait un angle  $\theta$  avec le jet atomique, transfère les atomes dans l'état  $|5S_{1/2}, F=3\rangle$  à la condition qu'ils aient la bonne vitesse pour compenser le décalage en fréquence du laser  $\Delta\omega/2\pi$ . On parle de sélection par effet Doppler. Enfin, pour affiner la distribution de vitesse obtenue, on ajoute une sélection en temps de vol. Elle est réalisée en ajustant le délai  $t_{\text{sel}}$  qui sépare les impulsions, de quelques  $\mu\text{s}$  chacune, du repompeur et du laser du premier échelon d'excitation Rydberg.

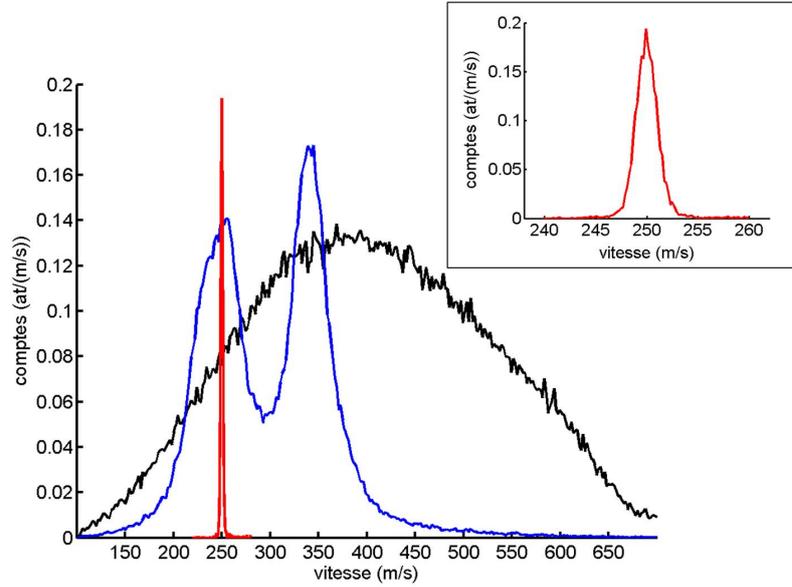


FIGURE III.5 – Distribution de vitesse des atomes. Les trois courbes montrent le nombre de détections d’atomes dans le niveau  $|52f, m = 2\rangle$  en fonction de leur vitesse. En noir, la distribution des vitesses des atomes telle qu’elle est en sortie du four. En bleu, la même distribution après avoir activé la sélection Doppler. Elle est large et possède deux pics correspondants aux deux classes de vitesses sélectionnées par le laser repompeur. Enfin, en rouge, visible aussi dans l’encart, la distribution finale, après avoir ajouté la sélection en temps de vol. Sa largeur est d’un peu plus de 2 m/s pour des lasers allumés pendant 4  $\mu$ s.

Pour discriminer les différents états, on applique une rampe de potentiel à la cathode en gardant le potentiel de l’anode fixe. Le champ électrique augmentant dans le temps va ioniser des états circulaires de plus en plus liés. La rampe dure environ 20  $\mu$ s, les atomes de vitesse  $v = 250$  m/s parcourent pendant ce temps une distance inférieure au diamètre du trou du détecteur (de 6 mm) à travers lequel les électrons, produits lors de l’ionisation, passent, accélérés par les lentilles. Nous pouvons donc détecter l’ensemble des niveaux qui nous intéressent ( $|52C\rangle$ ,  $|51C\rangle$  et  $|50C\rangle$ ) et les discriminer suivant les instants auxquels ils sont ionisés.

La figure III.6 b. montre une superposition de courbes moyennes de détection pour les trois états circulaires évoqués. Les signaux obtenus ne sont pas infiniment fins : ils possèdent une largeur intrinsèque (due, entre autres, au caractère aléatoire de l’instant d’ionisation [62]) et sont légèrement élargis par l’inévitable dispersion spatiale des atomes au niveau du détecteur. Il faut donc définir des fenêtres temporelles de détection telles qu’un électron détecté dans une fenêtre particulière corresponde à la mesure de l’état associé. Nous remarquons cependant que les courbes ne sont pas parfaitement séparées. Ce recouvrement, s’il est trop important, peut réduire le contraste des franges de Ramsey et provoquer leur décalage (défini à l’équation I.70). En réglant convenablement les fenêtres

il est possible en pratique de rendre cet effet petit.

Nous terminons ce paragraphe en disant un mot sur l'efficacité intrinsèque du multiplicateur d'électrons. Elle a été mesurée comme étant égale à  $\epsilon_{\text{det}} \approx 0.3$ . Cette faible efficacité est due au vieillissement du multiplicateur. Il n'a pas été possible de le remplacer avant la réalisation des expériences présentées ici. C'est une des principales limites du dispositif : elle a pour effet de diminuer le taux d'acquisition de l'information sur le champ et empêche la résolution d'états de Fock dont la durée de vie est plus courte que le temps nécessaire à la décimation de la distribution de photons censé révéler l'état.

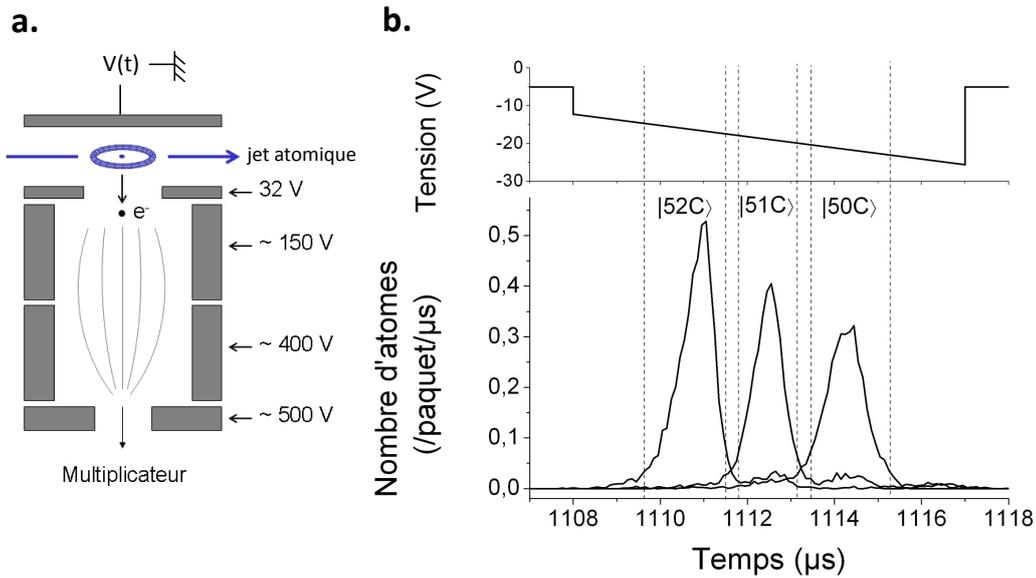


FIGURE III.6 – Détection de l'état atomique. Le détecteur est schématisé en **a**. Après que l'atome soit ionisé par un champ électrique statique, l'électron produit est accéléré par une série de lentilles électrostatiques et arrive finalement sur un multiplicateur d'électron qui produit un signal de détection mesurable. En **b**, partie supérieure, est représentée la rampe de potentiel appliquée à la cathode. En **b**, partie inférieure, on peut voir les signaux moyens obtenus pour différents états ionisés. La largeur des pics oblige à établir des fenêtres de détection dans lesquelles l'arrivée d'un électron correspondra à l'ionisation d'un état particulier. Elles sont symbolisées par les lignes en pointillés noirs.

### III.3 La cavité de grande finesse

Notre cavité Fabry-Perot supraconductrice est une véritable boîte à photons micro-onde capable de les conserver pendant une durée très longue, de l'ordre du dixième de seconde. Ce temps est largement suffisant pour pouvoir sonder successivement le champ avec des centaines d'atomes avant que la relaxation n'entre en jeu.

Nous allons voir dans cette section quelles sont les caractéristiques de la cavité, en disant quelques mots sur sa conception, et du mode du champ choisi. Nous la terminerons en expliquant comment nous contrôlons la fréquence de résonance de la cavité.

### III.3.1 La cavité et le mode du champ utilisé

**Caractéristiques et fabrication** Les deux miroirs formant la cavité Fabry-Perot sont des substrats en cuivre usinés de façon à ce que la qualité de surface soit excellente pour éviter les pertes par diffraction et par diffusion. Après usinage, une couche de Niobium, métal supraconducteur, de  $12\ \mu\text{m}$  est ajoutée par pulvérisation cathodique magnétron<sup>1</sup> sur la surface des miroirs [64]. L'environnement cryogénique assure que le métal est dans sa phase supraconductrice ce qui donne aux surfaces des miroirs une très grande réflectivité dans le domaine micro-onde.

La cavité est en géométrie ouverte. Cela permet d'éviter aux sondes atomiques d'être soumises à de grands gradients de champ, à l'entrée et la sortie de la cavité, qui pourraient détruire la cohérence atomique voire rendre impossible leur maintien dans un état circulaire.

**Choix du mode** On montre à la figure III.7 une coupe de la cavité. Les centres des miroirs, considérés sphériques dans un premier temps, sont séparés d'une distance  $d \approx 28\ \text{mm}$  et leur rayon de courbure est  $R \approx 40\ \text{mm}$ . Le mode du champ que l'on considère est, dans l'approximation paraxiale, un mode transverse électromagnétique  $\text{TEM}_{qnm}$  [65]. Le mode est choisi gaussien ( $n = m = 0$ ) et impair ( $q = 9$ ) pour avoir un ventre, donc un couplage maximal, au centre de la cavité où les atomes passent.

La longueur d'onde du champ est  $\lambda = 2d/q \approx 5.87\ \text{mm}$  ce qui correspond à une fréquence de résonance  $\nu_{\text{cav}} \approx 51.1\ \text{GHz}$ . Cette dernière peut être rendue égale à la fréquence de transition entre les deux états du système à deux niveaux atomique (voir plus loin).

Le profil spatial du champ électrique est donné par l'expression :

$$\mathcal{E}(r, z) \equiv \mathcal{E}_0 f(r, z) = \mathcal{E}_0 \tilde{f}(r, z) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}, \quad (\text{III.11})$$

avec  $\tilde{f}(r, z)$  une fonction de profil telle qu'au centre de la cavité  $\tilde{f}(r, z = 0) = 1$ . La largeur  $w$  du profil est donnée par l'expression suivante :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}; \quad w_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{d(2R - d)}, \quad (\text{III.12})$$

où  $w_0 \approx 6\ \text{mm}$  est le *waist* du champ, la largeur du profil à  $1/e$  du maximum de  $\mathcal{E}$ .

---

1. La chambre à pulvérisation provient du CEA où elle était utilisée pour produire des cavités d'accélérateurs à particules [63]. Elle se trouve désormais dans notre laboratoire où il est prévu de tester le procédé de pulvérisation afin de trouver une méthode systématique pour obtenir de bonnes cavités.

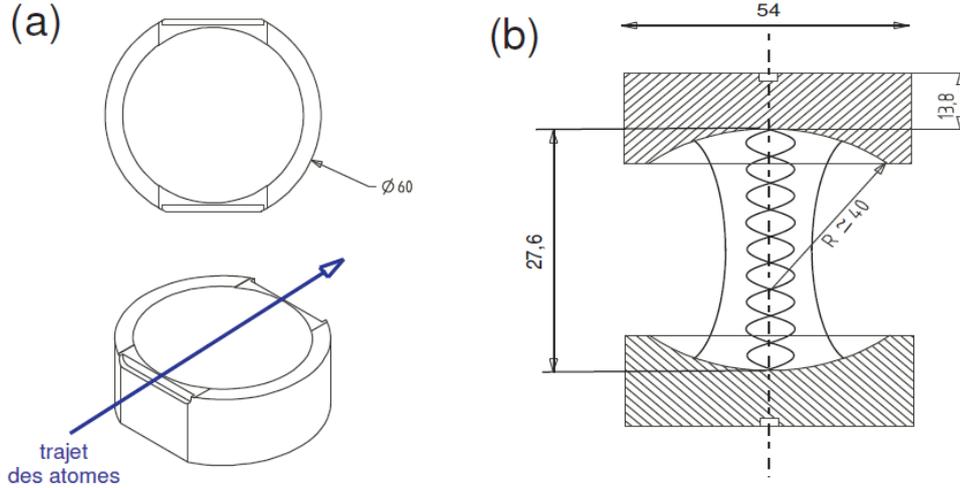


FIGURE III.7 – Cavité supraconductrice. La cavité est composée de deux miroirs toriques, schématisés en (a). Les atomes passent au centre de la cavité où se trouve un ventre de l'onde stationnaire, voir la coupe en (b). Le mode du champ est défini par la géométrie de la cavité. Nous considérons le mode  $\text{TEM}_{900}$ , le profil spatial transverse du champ est alors gaussien.

**Petit mode, fort couplage** Le volume du mode est obtenu en intégrant la fonction de profil  $f(\mathbf{r}) = f(r, z)$  :

$$\mathcal{V} \approx 770 \text{ mm}^3 . \quad (\text{III.13})$$

L'amplitude du champ par photon vue au chapitre I (équation I.5) vaut alors :

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\text{cav}}}{2\epsilon_0\mathcal{V}}} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ V/m} . \quad (\text{III.14})$$

La valeur de  $\mathcal{E}_0$  est remarquablement élevée ce qui a des conséquences sur la force du couplage atome-champ.

En se rappelant l'expression de pulsation de Rabi du vide  $\Omega_0$  (équation I.45), qui est la mesure de ce couplage, on déduit de III.11 qu'entre les miroirs, pour  $z = 0$ ,  $\Omega_0$  aura aussi un profil gaussien :

$$\Omega_0(r, z = 0) = \Omega_0 e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} , \quad (\text{III.15})$$

où  $\Omega_0$  est le couplage maximum, proportionnel à l'élément de dipôle, géant, de la transition  $|e\rangle \longleftrightarrow |g\rangle$  et au champ par photon  $\mathcal{E}_0$ . Le couplage est donc très important, on obtient expérimentalement  $\Omega_0 \approx 45.9 \text{ kHz}$ . L'écart avec la valeur attendue,  $\Omega_0 = 49 \text{ kHz}$  est probablement dû au passage du jet légèrement décalé par rapport au centre du mode.

**Présence de deux modes orthogonaux du champ** Si la cavité était parfaitement de symétrie cylindrique, il existerait deux modes dégénérés de polarisations linéaires orthogonales et de même fréquence. En pratique, la symétrie est toujours brisée à cause des imperfections de fabrication. Pour *contrôler* la levée de dégénérescence, on fabrique volontairement des miroirs légèrement toriques. Les deux rayons de courbures choisis restent très proches l'un de l'autre :  $R_1 \approx 39.4$  cm et  $R_2 \approx 40.6$  cm. Cela induit cependant une différence de fréquence de résonance d'environ 1.2 MHz entre les deux modes orthogonaux. C'est largement suffisant puisque cette valeur est bien plus grande que  $\Omega_0$ . Dans nos expériences, nous utilisons le mode de basse fréquence sans se soucier du second mode, très désaccordé par rapport à la transition atomique.

### III.3.2 Facteur de qualité du résonateur

**Facteur de qualité - Finesse** Grâce à la qualité de surface des miroirs et la couche de métal supraconducteur, la cavité possède une finesse remarquable. Il est possible de mesurer le taux de relaxation d'un champ cohérent préalablement injecté par diffraction sur les bords des miroirs de cette cavité ouverte [64]. On déduit de cette observation le temps de vie d'un photon  $T_{\text{cav}}$  introduit dans le chapitre I. S'il a pu atteindre jusqu'à 130 ms précédemment [25], il est de 65 ms pour la cavité utilisée dans les expériences présentées dans ce mémoire. Le facteur de qualité  $Q$  et la finesse  $\mathcal{F}$  de la cavité actuelle peut être liée à  $T_{\text{cav}}$  grâce aux relations suivantes [65] :

$$Q = \frac{\nu_{\text{cav}}}{\Delta\nu_{\text{cav}}} = 2\pi\nu_{\text{cav}}T_{\text{cav}} = 2,1 \cdot 10^{10} ; \quad \mathcal{F} = Q/q = 2,3 \cdot 10^9 , \quad (\text{III.16})$$

où  $q = 9$  est l'ordre du mode utilisé. Ce sont des valeurs considérables, de l'ordre de ce qu'on peut obtenir de mieux pour des cavités micro-onde en géométrie fermée [66].

**Temps de vie et régime de couplage fort** Le temps de vie de la cavité  $T_{\text{cav}}$  et la durée de vie des états atomiques  $T_{\text{at}}$  (voir paragraphe III.2.1), sont bien plus grands que le temps typique de l'évolution interne de l'atome sous l'effet de l'interaction avec le champ, donné par  $2\pi\Omega_0^{-1} \approx 21 \mu\text{s}$ . L'atome et le champ peuvent donc échanger de l'énergie pendant de nombreux cycles de Rabi sans que la cohérence ne soit perdue par des effets de relaxation. Le couplage est donc *fort*.

### III.3.3 Contrôle de la fréquence de résonance

**Contrôle de la longueur de la cavité** Avant de placer la cavité dans le cryostat, la distance entre miroirs est réglée grossièrement, à quelques  $\mu\text{m}$  près, à l'aide de cales en cuivre qui permettent de choisir la fréquence de résonance de la cavité avec une précision de l'ordre de 5 MHz [59]. Une fois le dispositif mis à froid, il est possible de régler finement la longueur de la cavité. Nous utilisons des cales piézoélectriques qui permettent de modifier  $\nu_{\text{cav}}$  d'environ 2.37 kHz/V sur une plage de 5 MHz.

**Changer le désaccord atome-champ** Notons que, s'il est possible de changer la distance entre miroirs pour changer  $\nu_{\text{cav}}$ , nous ne le faisons pas pendant une séquence expérimentale. En effet, la cavité met du temps à se stabiliser après un changement de tension des cales piézoélectriques et l'établissement de cette tension prend trop de temps à l'échelle d'une expérience. Cependant, pour certaines séquences, il est nécessaire de pouvoir changer le désaccord atome-champ  $\delta = \omega_{\text{at}} - \omega_{\text{cav}}$  afin de passer d'un régime d'interaction à un autre (dispersif vers résonant et inversement). Au lieu de changer  $\nu_{\text{cav}}$  nous allons plutôt modifier la fréquence de transition atomique  $\nu_{\text{at}}$  par effet Stark quadratique via l'application d'un champ électrique statique dans la cavité : un des miroirs est mis à la masse et on peut changer le potentiel du second. L'amplitude de l'effet est de  $-255 \text{ kHz}/(\text{V}/\text{cm})^2$ .

**Mesure de la fréquence de résonance** Pour pouvoir préparer l'état initial du champ, nous avons besoin de connaître la fréquence de résonance de la cavité. Pour mesurer  $\nu_{\text{cav}}$ , nous utilisons la séquence suivante :

- On tente d'injecter par diffraction sur les bords des miroirs un champ micro-onde classique de fréquence  $\nu_r$  provenant d'une source précise et stable. Le mode du champ ne pourra être peuplé que si le spectre de l'impulsion comprend la fréquence de la cavité  $\nu_{\text{cav}}$ .
- Nous envoyons ensuite une série d'atomes résonants, préparés dans l'état  $|g\rangle$ , qui vont absorber les photons éventuellement injectés.
- La séquence est répétée en utilisant une autre fréquence  $\nu_r$ .

Nous obtenons alors typiquement la courbe de la figure III.8 où la largeur du pic d'absorption est limitée par la durée de l'injection. Même s'il est techniquement possible de résoudre le pic jusqu'à être limité par la largeur intrinsèque de la résonance, cette calibration est suffisante. En effet, dans les expériences présentées ici, la durée de l'injection initiale de champ micro-onde est de l'ordre de quelques micro-secondes,.

## III.4 L'interféromètre de Ramsey en pratique

Élément central de notre appareil de mesure du nombre de photons, l'interféromètre atomique de Ramsey est constitué de deux cavités de faible finesse encadrant la cavité supraconductrice (voir le schéma de la figure III.1). Nous allons tout d'abord présenter ces cavités puis nous expliquerons comment régler la phase de l'interféromètre. Enfin, nous évoquerons les causes de la réduction de contraste des franges de Ramsey.

### III.4.1 Des cavités de faible finesse pour manipuler l'état atomique

Les zones de Ramsey ont été développées pendant le travail de thèse de Sebastien Gleyzes. Pour plus de détails on peut lire [59]. Les cavités remplissent trois critères :

- Avoir un mode suffisamment bien défini spatialement pour qu'un seul atome à la fois puisse interagir avec le champ présent dans la cavité.

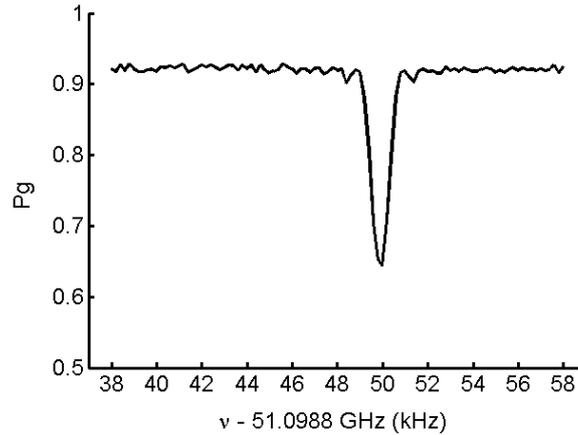


FIGURE III.8 – Mesure de la fréquence de résonance de la cavité. On envoie une impulsion micro-onde de fréquence  $\nu_r$  (ici, de durée 1 ms) qui peuple le mode de la cavité si  $\nu_{\text{cav}}$  est contenue dans le spectre de l'impulsion. On envoie ensuite des atomes résonants préparés dans  $|g\rangle$  pour absorber le champ éventuellement présent. Dans l'exemple présenté, la largeur du pic d'absorption ( $\approx 1$  kHz) est limitée par la durée de l'impulsion.

- Empêcher que le taux d'émission spontanée de l'atome ne soit trop augmenté par la présence de la cavité (c'est l'*effet Purcell* que l'on va décrire dans la suite).
- Assurer que le champ interagissant avec les atomes soit de nature classique et non quantique.

La solution est celle schématisée à la figure III.9. Une zone de Ramsey est composée de deux cavités. Une première, de bon facteur de qualité ( $Q \approx 1000$ ), sert de cavité de filtrage pour définir correctement le mode spatial. Elle est de géométrie fermée et est formée par deux miroirs : un miroir sphérique en cuivre recouvert d'or et un miroir plan créé par une fine couche d'or déposée sur une plaque de silice. Cette fine couche n'est pas parfaitement réfléchissante et permet le passage de la micro-onde dans la cavité traversée par les atomes.

Cette seconde cavité a un facteur de qualité moindre, de l'ordre de quelques dizaines, afin d'éviter que l'émission spontanée de l'atome ne soit trop amplifiée par effet Purcell [67]. En effet, le facteur Purcell quantifiant cette augmentation est donné par :

$$\Gamma = \Gamma_0 \frac{3}{4\pi^2} \frac{Q\lambda^3}{V}, \quad (\text{III.17})$$

avec  $Q$  le facteur de qualité du mode,  $V$  son volume,  $\lambda$  la longueur d'onde du champ et  $\Gamma_0$  le taux d'émission spontanée dans l'espace libre. La formule est valide si le taux d'amortissement du champ de la cavité traversée par les atomes est très grand [48]. C'est la faible réflectivité du second miroir, recouvert de graphite, qui permet d'avoir des pertes très importantes. La micro-onde transmise est absorbée par un absorbant RAM (Radar-absorbent Material).

En plus de garantir un facteur de Purcell faible, le fort taux d'amortissement est la cause de la nature classique du champ et ce malgré le faible volume du mode contenant

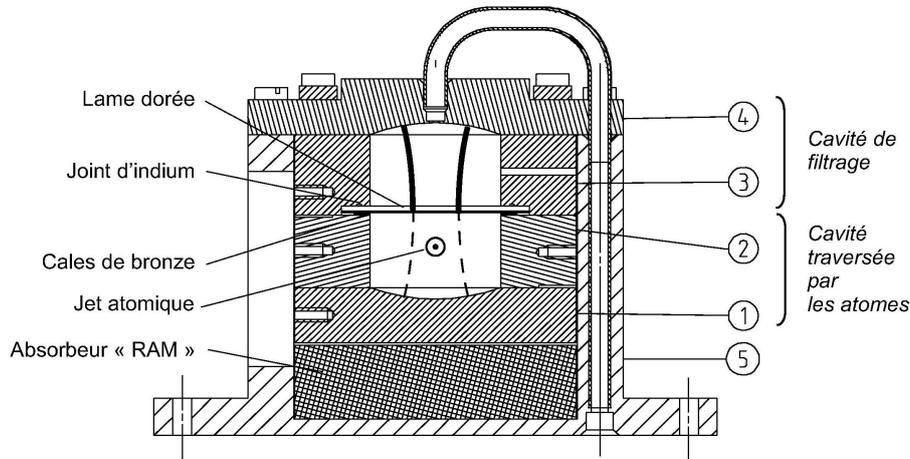


FIGURE III.9 – Zone de Ramsey. La partie supérieure est une cavité de filtrage de suffisamment bonne finesse pour bien définir spatialement le mode du champ. Nous pouvons y injecter un champ micro-onde grâce à un trou de couplage dans un des miroirs. Une partie est transmise par une lame dorée séparant cette première cavité de la seconde, où les atomes passent. Elle est, au contraire de la cavité de filtrage, de faible facteur de qualité, ce qui permet de réduire l'augmentation du taux d'émission spontanée de l'atome par effet Purcell et de s'assurer que le champ présent est de nature classique : il y a très peu de photons dans le mode à la fois et ils sont renouvelés constamment.

un faible nombre de photons. L'explication réside dans la perte et le renouvellement très fréquent des photons [68]. Si cela n'était pas le cas, le champ, alors quantique, des cavités Ramsey contiendrait une information sur l'état atomique après couplage ce qui brouillerait les franges d'interférence.

### III.4.2 Régler la phase de l'interféromètre

Pour bien distinguer tous les nombres de photons accessibles à la mesure, il est nécessaire de pouvoir changer la phase de l'interféromètre  $\phi_R$  pendant une séquence expérimentale. Nous avons évoqué dans le chapitre II deux façons de changer  $\phi_R$  : en variant soit la fréquence de la source micro-onde  $\nu_r = \omega_r/2\pi$  soit la fréquence de transition de l'atome  $\nu_{at} = \omega_{at}/2\pi$  par effet Stark.

La première méthode repose sur l'accumulation par la source d'une phase  $\omega_r t_{vol}$  pendant le temps de vol  $t_{vol}$  de l'atome entre les zones de Ramsey  $R1$  et  $R2$ . En variant la fréquence de la source on peut donc changer la phase relative entre les deux impulsions  $\pi/2$  nécessaires à l'interférométrie atomique (voir I.3.1). Les atomes qui traversent le dispositif ont une vitesse de 250 m/s, ils parcourent donc les 9 cm qui séparent les deux zones de Ramsey en 360  $\mu$ s. On en déduit qu'il faut juste une variation de 2.8 kHz de la fréquence de la source (pour rappel,  $\nu_r \approx 51.1$  GHz) pour faire varier la phase relative des impulsions de  $2\pi$ .

La fréquence de Rabi classique du couplage entre l'atome et le champ des zones de Ramsey est mesurée comme étant de l'ordre de 100 kHz. Avec une variation de  $\nu_r$  de quelques kHz, l'interaction atome-champ classique reste résonante. De plus, il est toujours possible d'injecter de la micro-onde de fréquence un peu décalée de la résonance des cavités Ramsey étant données leurs finesses relativement faibles. Il existe cependant un problème avec cette méthode : la communication avec le générateur micro-onde se fait par protocole GPIB pour lequel chaque commande prend un temps de l'ordre de la milliseconde. Il est donc impossible de changer  $\nu_r$  entre deux échantillons atomiques séparés de  $T_{\text{prep}} = 86 \mu\text{s}$ .

La seconde méthode consiste à changer la fréquence de transition atomique grâce à l'application d'un champ statique sur leur chemin. Ce champ, créé dans la zone de Ramsey  $R2$ , déplace  $\nu_{\text{at}}$  d'environ  $-255 \text{ kHz}/(\text{V}/\text{cm})^2$  et est commutable plus rapidement que  $T_{\text{prep}}$ . La distance typique entre électrodes étant de 1 cm, il suffit d'une différence de potentiel de quelques dizaines de mV pour créer une différence de phase appréciable.

### III.4.3 Imperfections expérimentales

Rappelons l'équation donnant la probabilité de mesurer l'état  $|g\rangle$  en sortie d'interféromètre :

$$\pi(g|n, \phi_R) = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi(n) + \phi_R) . \quad (\text{III.18})$$

Le contraste  $C < 1$  peut avoir plusieurs origines. La principale est due à la dispersion spatiale des atomes dans le dispositif. En effet, le champ électrique, appliqué pour le choix de la direction de mesure  $\phi_R$ , dans la seconde zone de Ramsey n'est pas complètement homogène. Il en résulte une dispersion de la phase  $\phi_R$  qui conduit à une diminution de  $C$ .

La détection erronée d'un état est une autre cause de la baisse de contraste et aussi la raison de la présence du décalage  $\pi_0$  de l'équation III.18. On entend par « détection erronée » l'obtention d'un résultat de mesure qui ne reflète pas l'état réel de l'atome ionisé dans le détecteur. C'est en effet possible si les fenêtres de détection ne peuvent pas discriminer parfaitement chacun des états atomiques finaux, voir figure III.6.

Avoir un contraste faible ne signifie pas ne pas pouvoir obtenir d'information sur le champ de la cavité. En revanche la rapidité d'acquisition de cette information est affectée. En présence de relaxation, la compétition entre la rapidité de mesure et le temps de décroissance du champ peut jouer en notre défaveur si le contraste n'est pas assez élevé. En effet, nous ne pourrions pas bien distinguer des nombres de photons élevés  $n$  si leur temps de vie  $T_{\text{cav}}/n$  est plus court que le temps nécessaire à la mesure par décimation révélant l'état  $|n\rangle$ .



# Chapitre IV

## Résultats expérimentaux

Au chapitre II nous avons présenté la méthode de l'« état passé » du champ qui, à la différence de la matrice densité, contient *toute* l'information disponible après une réalisation expérimentale. En particulier nous avons observé l'absence de bruit sur les courbes des populations  $\mathcal{P}(n, t)$  de la distribution « passée » du nombre photons. Dans ce chapitre, nous allons présenter deux expériences de mesure QND du champ et utiliser cette méthode d'analyse afin de montrer sa supériorité sur la méthode standard.

La première expérience consiste à mesurer un champ qui contient initialement 12 photons en moyenne. En analysant les résultats des mesures de sondes atomiques nous pouvons reconstruire l'évolution dans le temps des distributions de photons  $P$  et  $\mathcal{P}$  obtenues respectivement avec la matrice densité et avec l'état passé. Nous verrons que l'absence de bruit sur les courbes de  $\mathcal{P}(n, t)$  est le signe d'une meilleure estimation de l'état réel du champ. Nous extrairons notamment l'entropie moyenne des distributions au cours du temps et la fidélité des états quantiques par rapport à des états de Fock. Nous calculerons aussi les corrélations entre distributions construites depuis deux sous-ensembles de résultats de détections formés à partir d'un seul. Cela revient à effectuer deux mesures indépendantes d'un *même* champ quantique.

Grâce à l'absence de bruit sur les courbes de  $\mathcal{P}(n, t)$ , nous pouvons mieux définir les sauts quantiques. Nous présenterons une seconde expérience où nous préparons un atome résonant afin d'injecter un photon dans le mode. Nous constaterons que les sauts sont très bien définis temporellement. Nous en déduirons un critère simple pour détecter les sauts de photons apparaissant dans les trajectoires quantiques de la première expérience. Nous montrerons que nous pouvons, avec un excellent accord avec la théorie, mesurer le temps de vie d'états de Fock, y compris pour  $n \geq 8$  qui constitue la limite de mesure avec la méthode d'analyse standard.

Avant de présenter les résultats expérimentaux, nous allons décrire les différentes calibrations du dispositif nécessaires à la mise en œuvre des expériences de mesure QND du nombre de photons.

## IV.1 Calibrations

### IV.1.1 Franges de Ramsey

L'étape de calibration de l'interféromètre nous permet de définir les différentes phases de l'interféromètre nécessaires à la mesure QND du champ. En pratique, il s'agit de régler les potentiels de la zone de Ramsey  $R2$  afin de varier de façon contrôlée la phase du dipôle atomique. La probabilité d'obtenir l'atome dans l'état  $|g\rangle$  en sortie d'interféromètre (voir équation I.70), pour une cavité vide de photon, est donnée par l'expression :

$$P_g(\phi_R) = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos \phi_R, \quad (\text{IV.1})$$

qui est la fonction représentant les franges de Ramsey obtenues expérimentalement en variant  $\phi_R$ , la phase de l'interféromètre donnée par l'équation I.64. La séquence de calibration des franges de Ramsey se déroule selon les étapes suivantes :

- Nous envoyons des atomes résonants dans l'état  $|g\rangle$  pour absorber les éventuels photons présents dans la cavité. À la fin de cette *procédure d'effacement du champ*, la cavité est vide.
- Nous préparons ensuite des sondes QND qui vont interagir avec le champ vide de photons. On utilise quatre réglages de potentiels pour les électrodes de  $R2$ , correspondants à quatre directions de mesure **a**, **b**, **c** et **d** que nous alternons dans cet ordre.
- Après avoir envoyé 30 échantillons atomiques pour chaque motif **a**, **b**, **c**, **d**, on change la fréquence  $\omega_r/2\pi$  de la source micro-onde pour faire varier la phase de l'interféromètre  $\phi_R$  et on recommence la séquence.

En moyennant quelques réalisations de la séquence de calibration, nous obtenons les courbes de la figure IV.1. Nous ajustons le décalage  $\pi_0$ , les phases relatives  $\phi_i - \phi_j$  entre franges et pour chacune d'entre elle un contraste  $C$ . Nous trouvons les phases relatives suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_b - \phi_a &= (0.260 \pm 0.004)\pi, \\ \phi_c - \phi_b &= (0.250 \pm 0.004)\pi, \\ \phi_d - \phi_c &= (0.254 \pm 0.004)\pi. \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Les autres paramètres d'ajustement trouvés sont :

$$\begin{aligned} C_a &= 0.713 \pm 0.005, & C_b &= 0.724 \pm 0.005, \\ C_c &= 0.715 \pm 0.005, & C_d &= 0.700 \pm 0.005, \\ \pi_0 &= 0.533 \pm 0.001. \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Le déphasage par photon étant réglé comme  $\varphi_0 \approx \pi/4$  (voir IV.1.2), nous avons choisi un angle d'environ  $\pi/4$  entre les directions de mesures. Cela nous permettra de bien définir les premiers états de Fock, pour  $n < 8$ , et de résoudre plus rapidement les sauts quantiques dus à la relaxation et à l'apparition de photons thermiques dans le mode.

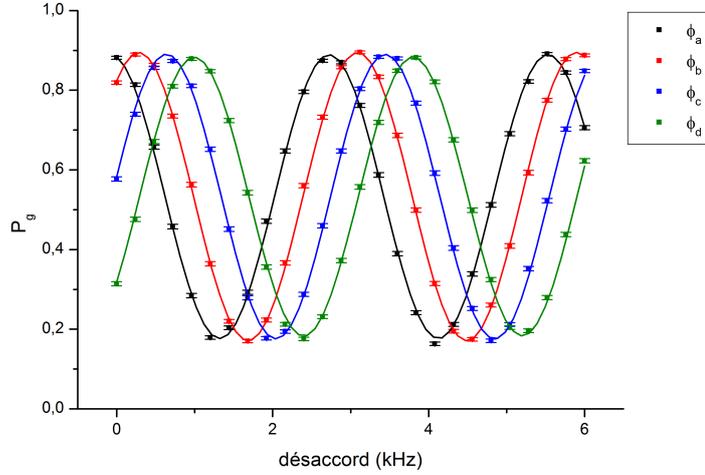


FIGURE IV.1 – Calibration des franges de Ramsey. Nous choisissons quatre réglages de potentiels pour les miroirs de  $R2$ , correspondant aux phases de l'interféromètre  $\phi_a$ ,  $\phi_b$ ,  $\phi_c$  et  $\phi_d$ , pour obtenir les quatre franges présentées à cette figure.

### IV.1.2 Déphasage par photon et champ thermique

**Calibration du déphasage par photon** Le déphasage  $\phi(n)$  entrant dans la définition des POVM utilisés lors des analyses des mesures QND (voir équation II.12), il est nécessaire de le connaître avec suffisamment de précision. Nous avons vu au II.2.2, qu'une mesure QND du champ par les atomes était équivalente à mesurer les espérances des composantes  $S_x$  et  $S_y$  du pseudospin atomique après interaction avec le champ de la cavité supraconductrice. La direction vers laquelle pointe le vecteur représentant ce pseudospin dans la sphère de Bloch dépend du nombre de photons présents dans le mode. La répartition angulaire de ce vecteur, contenu dans le plan équatorial de la sphère, révèle donc les directions coïncidant avec la présence d'exactly  $n$  photons dans la cavité. Cette mesure, qui s'appelle *tomographie de spin*, est simplement réalisée en analysant les résultats des détections de centaines de sondes QND interagissant avec un champ cohérent contenant initialement quelques photons en moyenne.

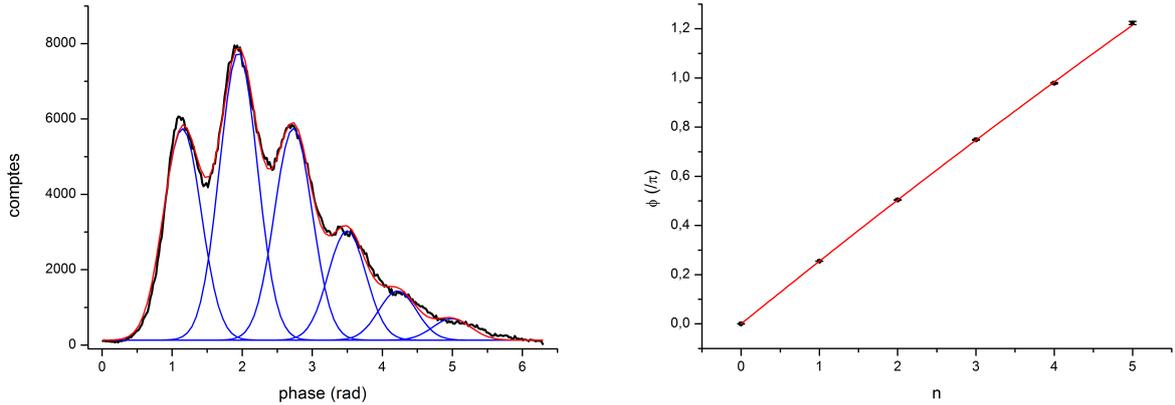
La mesure se présentant comme une série de résultats de détections, nous utilisons une fenêtre d'analyse glissante contenant un nombre fixé d'atomes *détectés* (typiquement 40 ou 60) pour estimer la direction du pseudospin. Ce nombre est choisi tel que la direction du spin moyen soit bien défini et pointe vers un nombre de photon particulier avant que la relaxation n'entre en jeu. Il y a en général, dans cet ensemble, des atomes détectés pour les quatre directions de mesures choisies. On peut alors construire, pour chaque fenêtre, les moyennes  $\langle S_x \rangle$  et  $\langle S_y \rangle$  et donc une direction du pseudospin, donnée par l'angle  $\phi = \arctan(\langle S_y \rangle / \langle S_x \rangle)$ . En accumulant une statistique de plusieurs milliers de réalisations expérimentales, nous obtenons l'histogramme des angles  $\phi$  présenté à la figure IV.2a. Nous ajustons aux points

expérimentaux une somme de gaussiennes de même largeur, visibles aussi sur le même graphique.

Nous déduisons de la séparation angulaire des pics gaussiens le déphasage  $\phi(n)$ . La courbe obtenue est présentée à la figure IV.2b. Nous ajustons une parabole à cette courbe, autorisant ainsi un écart à la situation décrite jusqu'ici, où  $\phi(n)$  était simplement proportionnel à  $n$ . On pose alors  $\phi(n) = \varphi_0 n + \varphi_{\text{NL}} n^2$ . Le coefficient non-linéaire  $\varphi_{\text{NL}}$  apparaît si le régime dispersif n'est pas parfaitement obtenu. Comme, pour varier  $\varphi_0 = \Omega_0^2 t_{\text{int}} / (2\delta)$ , nous changeons le désaccord atome-champ  $\delta$  (l'amplitude du couplage est définie par la position du jet atomique à travers le mode de la cavité et le temps d'interaction est fixé dès lors que la vitesse des atomes est choisie), le régime d'interaction se rapproche de plus en plus du régime résonant lorsqu'on augmente  $\varphi_0$ . Dans notre cas, où nous choisissons  $\varphi_0 \approx \pi/4$  (nous avons  $\delta \approx 250$  kHz), le terme quadratique reste faible, l'ajustement donne en effet :

$$\varphi_0 = (0.258 \pm 0.001)\pi , \quad (\text{IV.4})$$

$$\varphi_{\text{NL}} = -(0.0030 \pm 0.0003)\pi . \quad (\text{IV.5})$$



(a) Histogramme des phases du pseudospin.

(b) Calibration du déphasage par photon.

FIGURE IV.2 – Tomographie du pseudospin. En IV.2a, nous montrons la distribution angulaire du pseudospin après interaction avec un champ cohérent initial contenant en moyenne 3.5 photons. La structure en pics est le signe de la quantification du champ. Nous ajustons aux points expérimentaux (en noir) une somme de gaussiennes de même largeur (tracées individuellement en bleu). Nous montrons aussi la courbe cumulée représentée par la ligne discontinue rouge. Nous reportons les centres de ces gaussiennes en IV.2b et obtenons le déphasage par photon  $\phi(n)$  pour  $n = 0$  à  $n = 5$ .

**Calibration du nombre de photons thermiques** Si nous effectuons la même calibration sans injecter aucun champ initial, le mode de la cavité est alors dans l'état thermique

contenant  $n_{\text{th}}$  photons. La tomographie de spin donne alors la courbe de la figure IV.3. Nous déduisons la valeur de  $n_{\text{th}}$  de l'ajustement par deux pics gaussiens (un correspondant à  $|n = 0\rangle$  et l'autre à  $|n = 1\rangle$ ) de la distribution des angles du pseudospin trouvée expérimentalement. Il est visiblement inutile de considérer des nombres de photons plus élevés. Si on appelle la hauteur des pics trouvés  $A_0$  et  $A_1$  respectivement alors  $n_{\text{th}} = A_1/(A_0 + A_1)$ . On trouve finalement  $n_{\text{th}} \approx 0.074 \pm 0.002$ . L'écart avec la valeur théorique,  $n_{\text{th}} = 0.05$  pour un environnement à  $0.8 K$ , peut être due à l'injection de photons par les sondes QND, ce qui est très rare mais pas impossible.

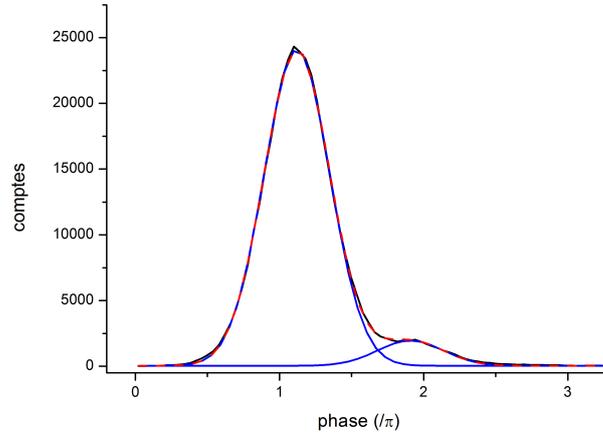


FIGURE IV.3 – Calibration du champ thermique. Cette courbe est obtenue en faisant la tomographie du pseudospin après obtention des résultats d'une expérience de mesure QND du champ thermique. L'amplitude relative des pics visibles, correspondant à  $|n = 0\rangle$  et  $|n = 1\rangle$ , nous renseigne sur le nombre moyen de photons contenu dans ce champ, on trouve  $n_{\text{th}} \approx 0.074 \pm 0.002$ .

### IV.1.3 Injection initiale

Pour les premières expériences de mesure QND du champ de la cavité, que nous allons présenter à la section IV.2, nous aurons besoin d'un champ initial cohérent. Pour préparer cet état nous injectons de la micro-onde dans le mode du champ de la cavité par diffraction sur les bords des miroirs à l'aide d'un générateur classique différent de celui utilisé pour les impulsions Ramsey. Nous calibrons cette injection en mesurant le déphasage induit en moyenne par le champ sur la superposition d'état atomique lors de son passage à travers le mode de la cavité. Les étapes de cette calibration sont les suivantes :

- Nous injectons un champ cohérent dans le mode de la cavité. L'amplitude  $\alpha$  de ce champ dépend linéairement de la durée de l'injection (voir [48], p.116) :  $\alpha = \gamma t_{\text{inj}}$ , avec  $\gamma$  le taux d'injection que nous cherchons à mesurer.

- Nous envoyons ensuite 20 sondes QND interagir avec ce champ. Une seule direction de mesure est utilisée et nous choisissons la fréquence  $\omega_r/2\pi$  de la source Ramsey de telle façon à ce que  $P_g$  soit maximale dans le vide de photons, soit  $\phi_R = 0 [2\pi]$ . La probabilité de mesurer l'atome dans l'état  $|g\rangle$  en sortie de l'interféromètre est fonction de l'amplitude  $\alpha$ .
- Nous recommençons la séquence avec différents temps d'injection  $t_{inj}$ .

Une courbe typique, obtenue à la suite de cette séquence, est représentée à la figure IV.4. La variation de  $P_g$  en fonction de  $t_{inj}$  a une forme analytique, on ajuste aux points expérimentaux la fonction théorique donnée par l'expression :

$$P_g^{th}(t_{inj}) = \pi_0 + \frac{C}{2} e^{\gamma t_{inj}(\cos \varphi_0 - 1)} \cos(\gamma t_{inj} \sin \varphi_0 + \phi_R), \quad (IV.6)$$

où  $C$  et  $\pi_0$  sont le contraste et le décalage de la frange correspondant à la direction de mesure utilisée,  $\varphi_0$  est le déphasage par photon et  $\phi_R = 0$  par choix de réglage. Le seul paramètre ajustable est donc  $\gamma$ . Dans l'exemple donné à la figure IV.4, on trouve que  $\gamma = 0.137 \mu\text{s}^{-1}$ , ce qui correspond à un temps d'injection de  $7.30 \mu\text{s}$  pour préparer un état cohérent contenant un photon en moyenne.

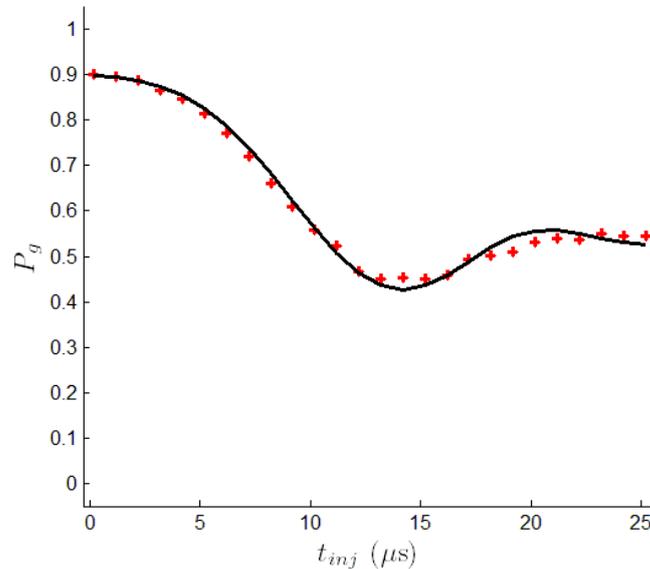


FIGURE IV.4 – Calibration de l'injection micro-onde. En fixant la direction de mesure, on enregistre la probabilité de trouver l'atome dans l'état  $|g\rangle$  en sortie d'interféromètre en fonction de l'amplitude  $\alpha = \gamma t_{inj}$  du champ cohérent injecté initialement dans la cavité. La ligne continue noire représente l'ajustement aux points expérimentaux par la fonction de l'équation IV.6.

## IV.2 Mesure QND du nombre de photons

La première expérience que nous allons présenter est une mesure QND du champ de la cavité. Nous allons en premier lieu détailler la séquence puis nous verrons comment sont effectuées en pratique les analyses standard et de l'état passé. Nous donnerons un exemple de trajectoire quantique pour étudier les différences des résultats utilisant l'une et l'autre analyse. Nous montrerons ensuite que l'état passé contient plus d'informations sur l'état réel du champ : nous comparerons l'entropie moyenne des distributions  $P$  et  $\mathcal{P}$  et nous étudierons les corrélations entre les analyses de sous-ensembles de résultats de détections d'un même champ réel. Nous terminerons cette section en montrant que les états donnés par  $\mathcal{P}$  possèdent une fidélité supérieure aux états de Fock que ceux de  $P$ .

### IV.2.1 Séquence expérimentale

La structure de la séquence est assez simple : on commence par absorber les photons éventuellement présents dans le mode de la cavité avec des atomes résonants (procédure d'effacement du champ). Nous injectons ensuite un champ cohérent contenant environ 12 photons en moyenne. C'est la principale différence avec l'expérience de Guerlin *et al.*, vue au chapitre II, où le champ ne contenait initialement que 3.5 photon en moyenne. Nous avons maintenant accès à de plus grands états de Fock. Après la préparation du champ initial, on envoie successivement des milliers de sondes QND, en alternant la phase de l'interféromètre. Elles vont nous permettre de révéler l'évolution du champ de la cavité au cours du temps.

Nous choisissons de préparer 7000 échantillons atomiques, le nombre moyen d'atomes détectés par échantillon est de  $N_{\text{det}} = 0.28$ . Deux échantillons successifs sont séparés de  $T_{\text{prep}} = 86 \mu\text{s}$  pour éviter que la préparation et les impulsions micro-ondes des zones de Ramsey appliquées ne soient pas vues par une autre échantillon que celui à qui elles sont destinées.

Entre la détection du premier et du dernier échantillon il s'écoule donc 602 ms, ce qui correspond à un peu plus de neuf fois le temps de vie de la cavité  $T_{\text{cav}}$ . À la fin de la séquence, le mode du champ aura donc atteint l'équilibre thermique et contiendra en moyenne  $n_{\text{th}} = 0.074$  photon.

Le déphasage par photon a été réglé tel que  $\varphi_0 \approx \pi/4$ . Nous utilisons les quatre phases de l'interféromètre  $\phi_a, \phi_b, \phi_c$  et  $\phi_d$  issues de la calibration décrite au paragraphe IV.1.1 et nous choisissons  $\phi_a = \pi/2$ . Ces phases sont utilisées alternativement pour les sondes successives. Comme le nombre d'atomes présents dans un échantillon est aléatoire cela revient à avoir un choix aléatoire de la phase de mesure.

Le choix des phases est tel que la sensibilité aux premiers nombres de photons est maximale. En effet d'après l'équation I.70,  $\pi(g|n = i, \phi_R = \phi_i) \approx 0.5$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  (le réglage des phases est dit à « mi-frange »). La moindre variation du nombre de photon changera de façon importante la statistique de détection et l'analyse résoudra mieux les sauts de photons.

À l'issue de l'expérience, nous avons à disposition 6000 réalisations de la mesure du

champ par 7000 sondes QND. L'analyse des résultats de détection que nous utilisons a été détaillée au paragraphe II.3.1.d.

Nous choisissons une restriction  $\mathcal{H}_{\text{tronq}}$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  dans lequel évolue l'état du champ telle que  $\dim(\mathcal{H}_{\text{tronq}}) = n_M + 1 = 25$ . Nous allons donc étudier l'évolution du mode du champ contenant entre  $n = 0$  et  $n = n_M = 24$ . Le champ cohérent initial injecté en début de séquence contenant en moyenne 12 photons, la probabilité de trouver plus de 24 photons en début de trajectoire est très faible, inférieur à  $10^{-3}$ . Le choix  $\dim(\mathcal{H}_{\text{tronq}}) = 25$  est donc parfaitement justifié, utiliser une dimension supérieure augmenterait les temps de calculs sans rien apporter à l'analyse.

## IV.2.2 Un exemple de trajectoire quantique de l'état du champ

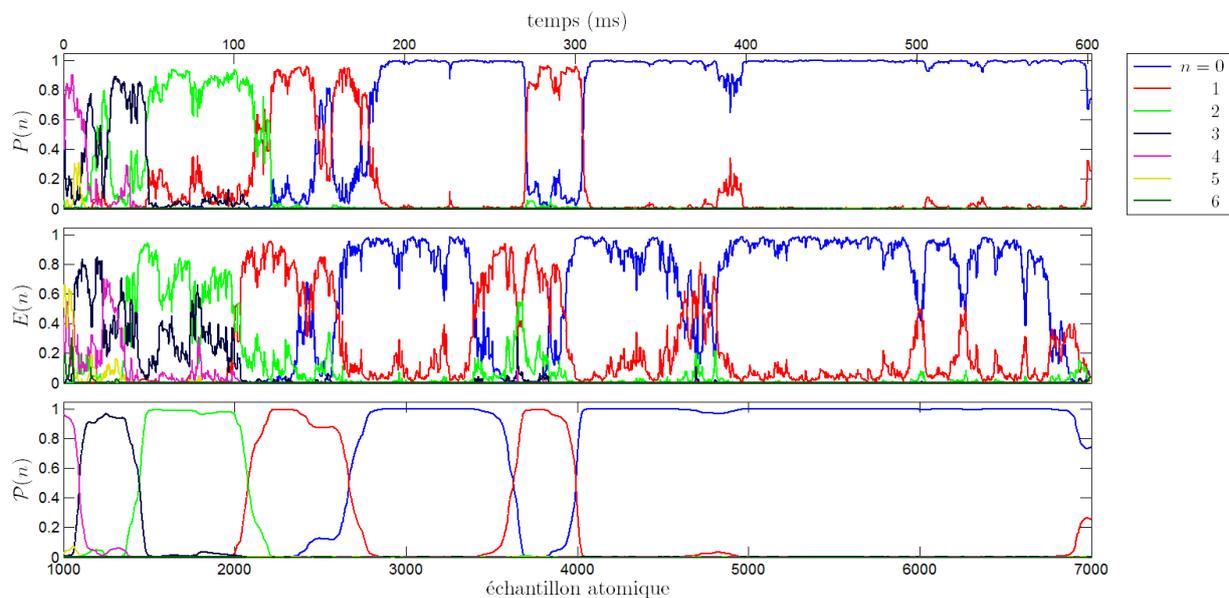
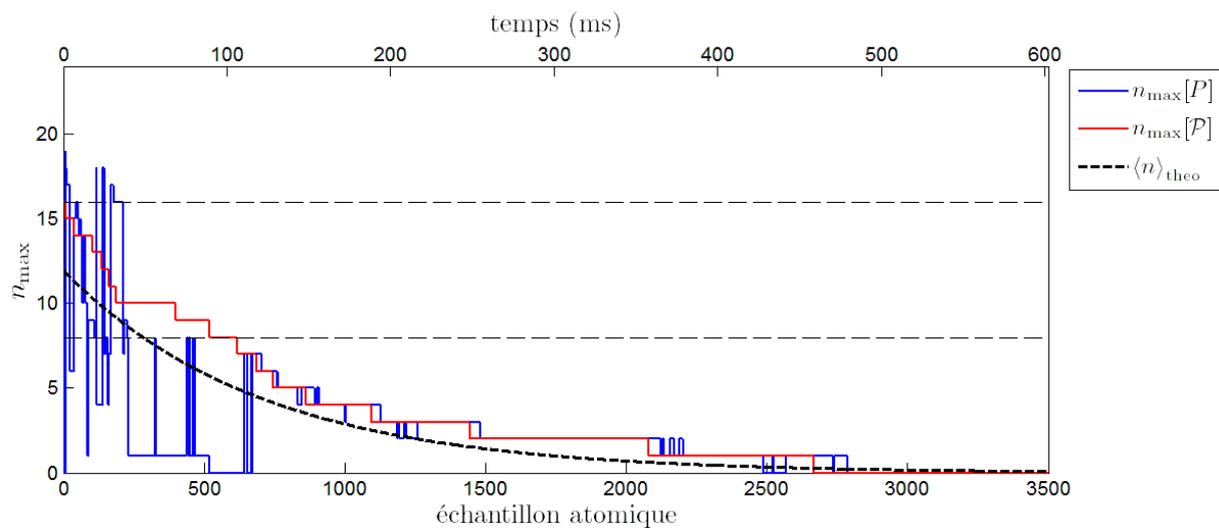
Nous présentons à la figure IV.5 une des trajectoires quantiques du champ parmi les 6000 réalisées. Nous y montrons l'évolution dans le temps des trois distributions  $P$ ,  $E$  et  $\mathcal{P}$ .

La première chose que nous remarquons sur cette figure est, comme dans l'exemple vu précédemment au II.3.2, la différence du niveau de bruit entre les traces des  $P(n)$  et les  $\mathcal{P}(n)$ . La force de l'utilisation l'état passé du champ est, nous l'avions déjà évoqué, de « lisser » l'évolution du champ grâce à la connaissance des résultats de sondes « futures ». Connaître l'état « futur » permet de savoir si un saut du nombre de photon a eu lieu ou non. En revanche, les erreurs de détections perturbent toujours l'évaluation de  $\mathcal{P}$ . Le résultat est une pureté diminuée de l'état de Fock vers lequel semble pointer la distribution. Néanmoins, la pureté de l'état donné par  $\mathcal{P}$  est visiblement meilleure que celle de  $P$ . Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

À la figure IV.5b, nous montrons le nombre de photons le plus probable  $n_{\text{max}}$  défini par  $A(n_{\text{max}}) = \max(A(n))$ , où  $A = P$  ou  $\mathcal{P}$ . Nous remarquons que  $n_{\text{max}}$  pour  $P$  est mal défini en début de trajectoire. C'est tout à fait normal car son état initial dans l'analyse est une distribution uniforme. Il faut donc attendre quelques centaines d'échantillons atomiques pour que le processus de décimation fasse finalement converger l'état du champ vers un état de Fock particulier. La compétition sévère entre la rapidité de l'acquisition de l'information et la durée de vie des états de Fock  $T_n \approx T_{\text{cav}}/n$  fait que l'état donné par  $P$  est loin d'être un état de Fock pur.

De plus, il est très intéressant d'observer ce qui se passe entre les échantillons 300 et 700. Les distributions  $\mathcal{P}$  et  $P$  sont en profond désaccord. Quand  $n_{\text{max}}[\mathcal{P}] = 8$ , on voit que  $n_{\text{max}}[P] = 0$  et quand  $n_{\text{max}}[P] = 9$  on remarque que  $n_{\text{max}}[\mathcal{P}] = 1$ . Cela signifie que l'analyse standard distingue mal les états tels que  $n \geq 2\pi/\varphi_0 = 8$ . En effet, si l'on oublie le terme non linéaire du déphasage par photon, les directions du pseudospin, après interaction avec un champ contenant 0 ou 8 photons, sont dégénérées. Idem si la cavité contient 1 ou 9 photons. C'est exactement ce cas que manque l'analyse standard dans l'exemple donné. C'est un aspect très intéressant de la méthode de l'état passé : elle permet d'aller au delà de certaines restrictions de l'appareil de mesure.

Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer qu'effectivement l'information contenue dans  $\mathcal{P}$  est meilleure que celle de  $P$ . Nous allons comparer les entropies moyennes des

(a) Populations des nombres de photons à partir du 1000<sup>e</sup> échantillon atomique

(b) Nombre de photon le plus probable

FIGURE IV.5 – Exemple de trajectoire quantique du champ. En (a) nous montrons la distribution du nombre de photons à partir du 1000<sup>e</sup> échantillon pour plus de visibilité. Nous pouvons y voir trois cadres où l'on peut observer l'évolution des populations  $P(n)$  (cadre du haut),  $E(n)$  (cadre du milieu) et  $\mathcal{P}(n)$  (cadre du bas). En (b) nous traçons le nombre de photons le plus probable au cours du temps pour les distributions  $P$  et  $\mathcal{P}$  et, pour référence, le nombre moyen de photon attendu  $\langle n \rangle_{\text{theo}} = 12 \exp(-t(n_{\text{th}} + 1)/T_{\text{cav}})$ . Les deux lignes horizontales en pointillés noirs représentent les deux premières périodes de POVM de mesure :  $n = 8$  et  $n = 16$ .

distributions pour montrer que celle de l'état passé est la plus faible. Nous étudierons ensuite un moyen de montrer que cette réduction est bien le signe que l'état passé contient plus d'information sur l'état réel que la distribution standard  $P$ .

## IV.2.3 Une meilleure information sur l'état du champ

### IV.2.3.a Entropie moyenne des distributions du nombre de photons

Nous allons commencer par quantifier la quantité d'information portée par les distributions de photons considérées. Nous allons utiliser pour cela l'entropie de Shannon définie par :

$$S[A] = - \sum_{n=0}^{\infty} A(n) \log(A(n)), \quad (\text{IV.7})$$

où  $A$  peut être la distribution  $P$ ,  $E$  ou  $\mathcal{P}$ .

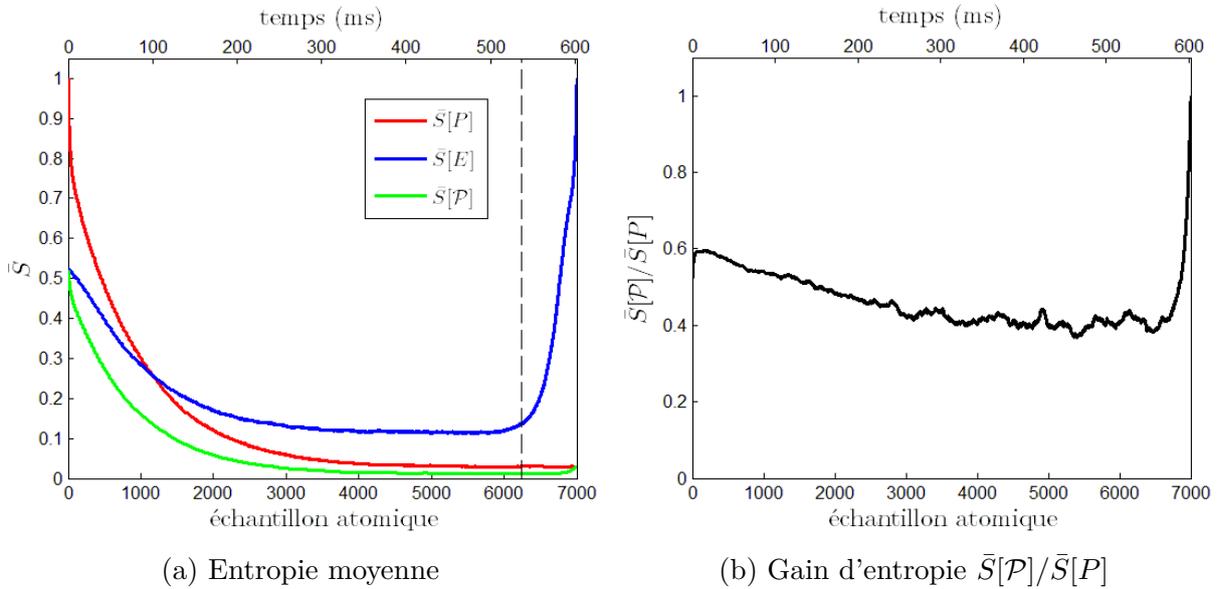


FIGURE IV.6 – Comparaison des entropies. En IV.6a, on montre les entropies moyennes des trois distributions  $P$ ,  $E$  et  $\mathcal{P}$  normalisées à l'entropie maximum accessible dans l'espace de Hilbert tronqué  $\mathcal{H}_{\text{tronq}}$ . On observe que, tout au long de la séquence,  $\bar{S}[\mathcal{P}] \leq \bar{S}[P]$ . La distribution  $\mathcal{P}$  contient donc plus d'information sur l'état du champ que  $P$ . La ligne en pointillés noirs marque le temps  $T_{\text{cav}}$  avant la fin de l'expérience. Le gain en terme d'entropie moyenne,  $\bar{S}[\mathcal{P}]/\bar{S}[P]$ , est tracé en IV.6b. Il est d'environ un facteur 2 sur l'ensemble de la séquence.

La figure IV.6a montre les entropies moyennes des distributions  $P$ ,  $E$  et  $\mathcal{P}$  en fonction du nombre d'échantillons atomiques passés dans le dispositif. Les courbes sont normalisées par

rapport à l'entropie de la distribution uniforme dans l'espace  $\mathcal{H}_{\text{tronq}}$ , qui est la distribution initiale de  $P$  et  $E$  dans l'analyse :

$$S[\bar{P}(0)] = S[E(N_{\text{éch}})] = - \sum_{n=0}^{n_M} \frac{1}{n_M + 1} \log \left( \frac{1}{n_M + 1} \right) \approx 1.40, \quad (\text{IV.8})$$

c'est la valeur maximale de l'entropie d'une distribution dans  $\mathcal{H}_{\text{tronq}}$ , elle marque l'information minimum disponible sur le champ.

L'entropie moyenne  $\bar{S}[P]$  diminue ensuite progressivement au cours de la séquence. C'est bien sur dû, pour les premières centaines d'échantillons, à la décimation de la distribution qui finit par faire converger l'état décrit vers un état de Fock. Puis, au fur et à mesure que le mode du champ se vide de ses photons par le couplage avec le bain thermique, les sauts quantiques deviennent de moins en moins probables ce qui permet en moyenne d'augmenter la pureté de l'état décrit par  $P$  et donc de diminuer  $\bar{S}[P]$ .

Les mêmes observations peuvent être faites pour  $\bar{S}[E]$  : nous observons, entre les échantillons 6000 et 7000, une variation importante de l'entropie qui marque la décimation progressive de  $E$  pendant une durée de l'ordre de  $T_{\text{cav}}$ . Aux environs du 3000<sup>e</sup> échantillon,  $\bar{S}[E]$  croît à cause des sauts de photons de plus en plus nombreux qui empêchent la distribution de représenter un état de Fock de grande pureté. Comme l'absence régulière d'atomes détectés produit un bruit plus important sur  $E$  que sur  $P$  (voir la trajectoire individuelle de la figure IV.5), l'entropie moyenne de  $E$  est plus grande que celle des autres distributions sur l'ensemble de la séquence.

Comparons maintenant  $\bar{S}[P]$  et  $\bar{S}[\mathcal{P}]$ . Nous remarquons que l'entropie moyenne de l'état passée du champ est la plus faible. Par construction de  $\mathcal{P}$  on a bien sûr  $\bar{S}[\mathcal{P}(0)] = \bar{S}[E(0)]$  et  $\bar{S}[\mathcal{P}(N_{\text{éch}})] = \bar{S}[P(N_{\text{éch}})]$ . Mais ce sont les seuls points où  $\bar{S}[\mathcal{P}]$  n'est pas strictement inférieure à  $\bar{S}[P]$ . Pour mieux se rendre compte du gain en terme de quantité d'information, on trace le rapport  $\bar{S}[\mathcal{P}]/\bar{S}[P]$  à la figure IV.6b. Nous observons qu'on gagne environ un facteur 2 sur l'entropie moyenne des distributions du nombre de photons grâce à l'état passé du champ et ce sur l'ensemble de la durée de la séquence.

### IV.2.3.b Corrélations entre sous-ensembles de détections

Une façon de montrer que le gain d'entropie de  $\mathcal{P}$  par rapport à  $P$  est révélateur de l'apport d'une information supplémentaire réelle sur l'état du champ est de comparer les résultats d'analyses de deux ensembles de mesures de sondes QND ayant interagi avec un *même* champ quantique. En pratique, on ne peut, bien sûr, pas répéter l'expérience avec la certitude d'avoir un champ qui évolue exactement de la même façon que lors d'une première réalisation. Nous tirons alors profit de la propriété QND des sondes atomiques : elles ne modifient pas le champ avec lequel elles interagissent en injectant ou en absorbant des photons. On peut donc créer deux sous-ensembles  $D_1$  et  $D_2$  de résultats de détections à partir d'un même ensemble  $D_0$  qui contient toutes les détections d'une répétition de l'expérience, dans l'ordre de leur obtention. Nous pouvons considérer que  $D_1$  et  $D_2$  contiennent les résultats de deux mesures indépendantes d'un même champ. Nous regardons ensuite

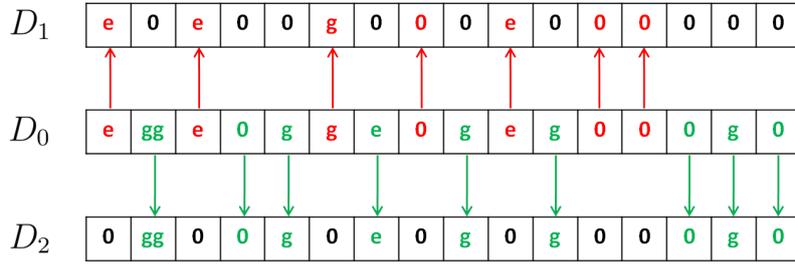


FIGURE IV.7 – Sous-ensembles de résultats de détections. Les résultats de détections  $D_0$  d'une réalisation de l'expérience sont inclus, de façon aléatoire, dans l'un ou l'autre des deux sous-ensembles  $D_1$  et  $D_2$  avec une même probabilité, égale à  $1/2$ .

les corrélations entre les distributions  $P_1$  et  $P_2$ , ainsi qu'entre  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , tirées de l'analyse de chacun des deux sous-ensembles.

La figure IV.7 montre la façon dont nous construisons les sous-ensembles  $D_1$  et  $D_2$  à partir de  $D_0$ . Pour chaque élément de  $D_0$ , on détermine aléatoirement dans quel sous-ensemble il sera copié. La probabilité d'inclusion dans l'un ou l'autre des sous-ensembles est égale à  $1/2$ . Prenons, par exemple, l'élément  $j$  de  $D_0$  et supposons qu'il corresponde à la détection d'un atome dans l'état  $|e\rangle$ . Un tirage aléatoire détermine, toujours par exemple, que l'élément va être copié dans  $D_1$ . Alors, l'élément  $j$  de  $D_1$  sera une détection dans  $|e\rangle$  et l'élément  $j$  de  $D_2$  sera, lui, une absence de détection qui ne change pas la distribution de photon.

La conséquence de cette partition des résultats de sonde du champ est un taux d'acquisition de l'information réduit de moitié pour  $D_1$  et  $D_2$  par rapport à  $D_0$ . Nous obtenons donc des trajectoires individuelles plus bruitées dans le cas de l'analyse des sous-ensemble. Un exemple d'une telle trajectoire quantique est présenté à la figure IV.8.

Pour quantifier les corrélations entre sous-ensembles, nous allons utiliser l'écart quadratique moyen entre deux distributions  $A_1$  et  $A_2$  au même instant  $t_j$  :

$$\sigma[A(t_j)] = \sqrt{\frac{1}{n_M + 1} \sum_{n=0}^{n_M} (A_1(n, t_j) - A_2(n, t_j))^2}, \quad (\text{IV.9})$$

où  $A$  peut être la distribution  $P$  ou  $\mathcal{P}$ .

Nous obtenons les courbes de la figure IV.9 en moyennant les écarts  $\sigma$  entre chaque paire de distributions sur les 6000 réalisations de l'expérience. En ce qui concerne la majeure partie de la séquence, après le passage d'environ 1200 échantillons atomiques, nous observons que les corrélations sont plus importantes entre  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  qu'entre  $P_1$  et  $P_2$ .

La différence en début de séquence peut s'expliquer facilement. Nous pourrions croire que, pour les premiers instants,  $P$  décrit mieux le champ réel que  $\mathcal{P}$  mais il n'en est rien. En effet, pour l'analyse,  $P(n, t = 0)$  est une distribution uniforme pour toutes les trajectoires et pour les deux sous-ensembles  $D_1$  et  $D_2$ . L'écart entre  $P_1(n, t)$  et  $P_2(n, t)$  est donc nul

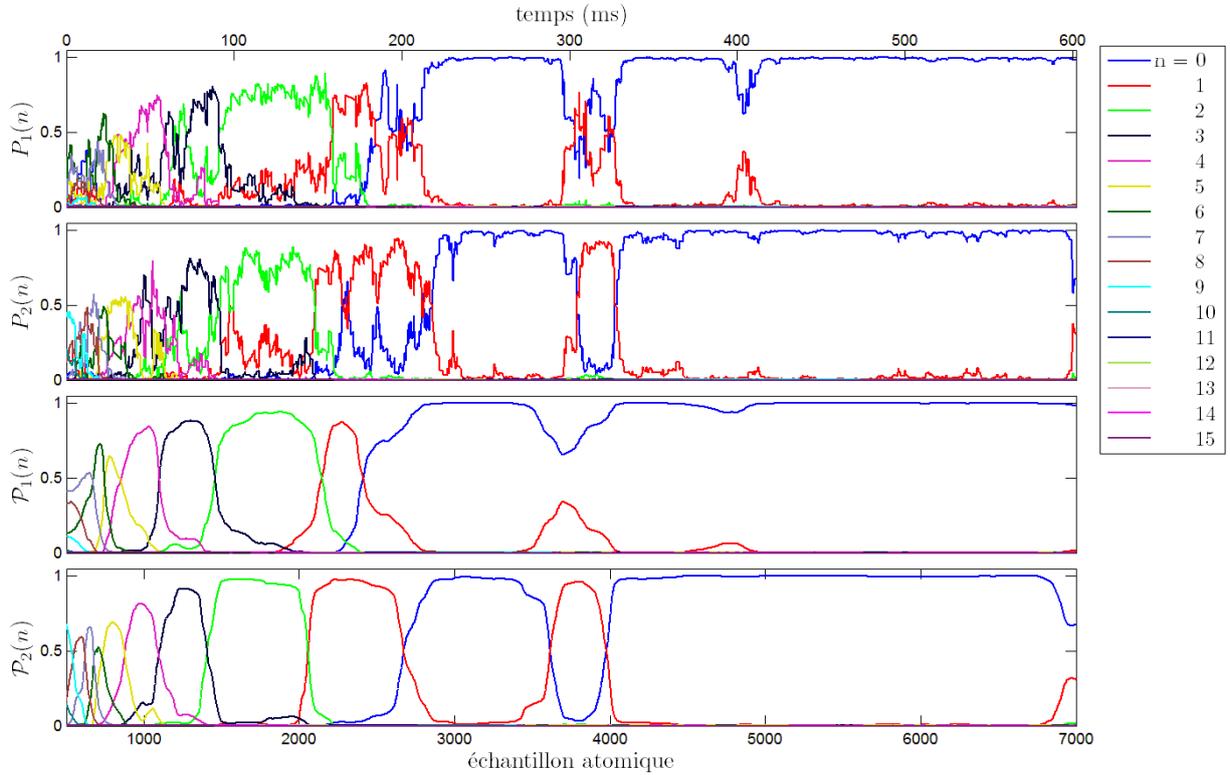


FIGURE IV.8 – Corrélations entre sous-ensembles de détection : trajectoire individuelle. L'analyse indépendante des deux sous-ensembles de détection  $D_1$  et  $D_2$  provenant de la sonde d'un même champ quantique révèle les corrélations entre distributions du nombre de photons. Nous présentons ici  $P_1$  et  $P_2$  ainsi que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , l'indice 1 ou 2 correspondant au sous-ensemble à partir duquel elles sont générées. Les différences notables entre couples de distributions sont dues au faible nombre d'atomes détectés par sous-ensemble, moitié moins important que pour l'ensemble complet de détection  $D_0$ .

à  $t = 0$  et faible tant que les distributions, encore larges, n'ont pas convergé vers un état de Fock. En ce qui concerne  $\bar{\sigma}[\mathcal{P}]$ , puisque  $\mathcal{P}$  décrit un état bien plus proche en moyenne d'un état de Fock en début de trajectoire que celui décrit par  $P$ , la moindre variation entre  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  fait augmenter significativement la valeur de  $\bar{\sigma}[\mathcal{P}]$ . Or en début de trajectoire les sauts quantiques sont nombreux.

En conclusion de cette analyse de corrélations, nous avons prouvé que le niveau de bruit inférieur sur les traces individuelles et que l'entropie moyenne réduite par rapport à la distribution standard  $P$  ne provient donc pas d'un simple effet de lissage par un filtre passe-bas. L'état passé du champ est donc bien une meilleure estimation de l'état du champ réel.

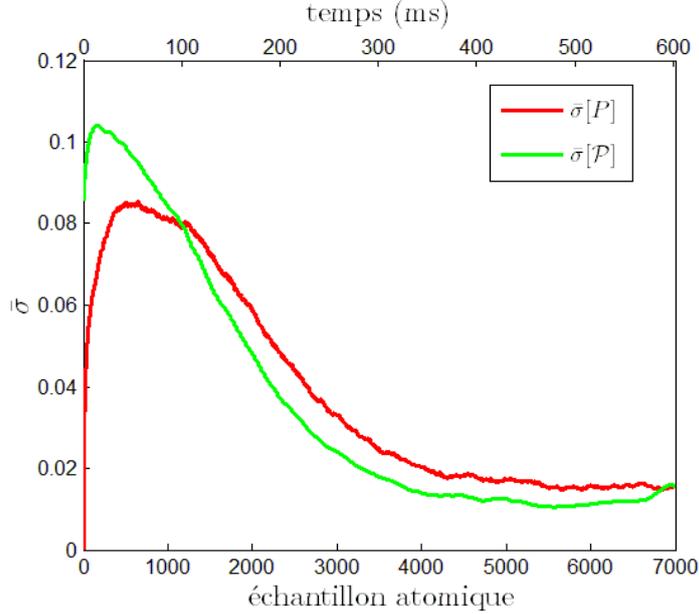


FIGURE IV.9 – Écart quadratique moyen entre distributions des deux sous-ensembles de détection. L'écart quadratique moyen entre les états passés du champ  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  est plus faible qu'entre  $P_1$  et  $P_2$ , preuve que l'estimation du champ par  $\mathcal{P}$  est plus proche de l'état réel que ne l'est  $P$ . L'observation inverse en début de courbe est dû à un biais causé par l'analyse. L'état initial de  $P$  étant la distribution uniforme pour toutes les trajectoires, l'écart type est donc nul. À l'inverse les états donnés par  $\mathcal{P}$  en début de séquence sont bien plus piqués que ceux de  $P$  alors que les sauts quantiques sont très fréquents, donc naturellement  $\langle \sigma[\mathcal{P}] \rangle > \langle \sigma[P] \rangle$  entre les échantillons 0 et 1200.

### IV.2.3.c Fidélité des états du champ par rapport aux états de Fock

Si l'entropie nous renseigne sur la quantité d'information globale de la distribution, il est intéressant de comparer directement les distributions du nombre de photons  $P$  et  $\mathcal{P}$ . Nous trions, à un instant particulier de la séquence, l'ensemble des distributions selon la règle suivante : une distribution décrit un état de Fock cible  $|n_{\text{cible}}\rangle$  si son nombre de photons moyen  $\langle n \rangle$  est compris dans l'intervalle  $]n_{\text{cible}} - 0.5, n_{\text{cible}} + 0.5[$ . Nous supposons que les distributions que nous voulons révéler sont assez piquées pour que ce critère soit valide.

Nous montrons aux figures IV.10 et IV.11 les distributions moyennes (triées selon la règle précédente) au 800<sup>e</sup> échantillon atomique, ce qui correspond à une durée de 68.8 ms passée depuis le début de la séquence. Le champ qui avait initialement un nombre moyen de photons égal à 12, n'en a plus que 4.2 à cet instant. Nous choisissons cet instant afin que la décimation initiale soit suffisante pour que la distribution  $P$  soit proche d'un état de Fock. Pour certains états cibles, la distribution  $P$  n'est pas représentée car aucune ou trop

peu d'occurrences ( $< 10$ ) ont été trouvées. Ce n'est pas le cas pour l'état passé qui nous permet d'observer des états qui ne sont pas définis par la méthode usuelle. Nous pouvons notamment mesurer  $n \geq 8$  (voir la figure IV.11).

Dans les autres cas, où la comparaison est possible, la supériorité de l'état passé du champ est flagrante. Les distributions  $\mathcal{P}$  sont nettement plus piquées et bien plus symétriques que les distributions  $P$ . Ces dernières présentent d'ailleurs encore des artéfacts de décimation causés par la périodicité des POVM : on voit que les nombres de photons autour de  $n_{\text{cible}} \pm 8$  sont aussi peuplés. Nous reportons, à la figure IV.12, les fidélités  $P(n_{\text{cible}})$  et  $\mathcal{P}(n_{\text{cible}})$  pour  $n_{\text{cible}} = 0 \dots 12$  et les écarts types des distributions moyennes  $\sigma_P$  et  $\sigma_{\mathcal{P}}$  pour une comparaison plus aisée. Quand la comparaison est possible, nous constatons que, par rapport à  $P$ , la distribution  $\mathcal{P}$  a une fidélité aux états de Fock environ 50% plus importante et a une dispersion trois à quatre fois moindre.

## IV.3 Résolution des sauts quantiques

Dans les sections précédentes, nous avons évoqué la possibilité de mieux résoudre les sauts du nombre de photons et c'est sur ce point que nous allons nous attarder ici. Nous commencerons par décrire et analyser les résultats d'une expérience où nous injectons un photon à un instant précis de la séquence grâce à l'envoi d'un atome résonant. Enfin, nous retournerons aux résultats des expériences de mesure QND utilisés dans les sections précédentes et nous exploiterons la meilleure détermination de l'instant des sauts du nombre de photons avec  $\mathcal{P}$  afin d'en tirer des propriétés intéressantes, impossibles à obtenir avec l'analyse standard, comme le taux des transitions  $n \rightarrow n - 1$  jusqu'à  $n = 14$ .

### IV.3.1 Sauts quantiques induits

La séquence de l'expérience de résolution de sauts quantiques provoqués est assez proche de celle de la section IV.2. Nous commençons par effectuer une procédure d'effacement du champ. Une fois le mode vide de photons, nous préparons une série de 4000 sondes QND pour lesquelles on utilise alternativement les quatre réglages de l'interféromètre déjà utilisés à la précédente expérience. Ces sondes interagissent avec le champ de la cavité qui relaxe vers l'état thermique contenant  $n_{\text{th}} = 0.074$  photon le long de cette première étape de mesure QND.

Une durée  $T_{\text{prepr}}$  (on rappelle que  $T_{\text{prepr}} = 86 \mu\text{s}$ ) après la préparation de la dernière des 4000 sondes, nous préparons un échantillon atomique afin d'injecter un photon dans le mode du champ. En supposant que le paquet contienne un atome, ce dernier se trouve dans l'état  $|g\rangle$  à l'issue de la préparation dans la boîte à circulariser. Il est ensuite soumis à une impulsion micro-onde  $\pi$  dans la zone de Ramsey  $R1$  et en sort donc dans l'état  $|e\rangle$ . Avant son passage à travers le mode de la cavité supraconductrice, nous appliquons aux miroirs une différence de potentiel. Le champ électrique statique ainsi créé permet de déplacer les niveaux atomiques afin que l'interaction atome-champ soit résonante (le champ statique modifie la fréquence  $\omega_{\text{at}}/2\pi$  par effet Stark quadratique, voir III.3.3). L'atome a alors une

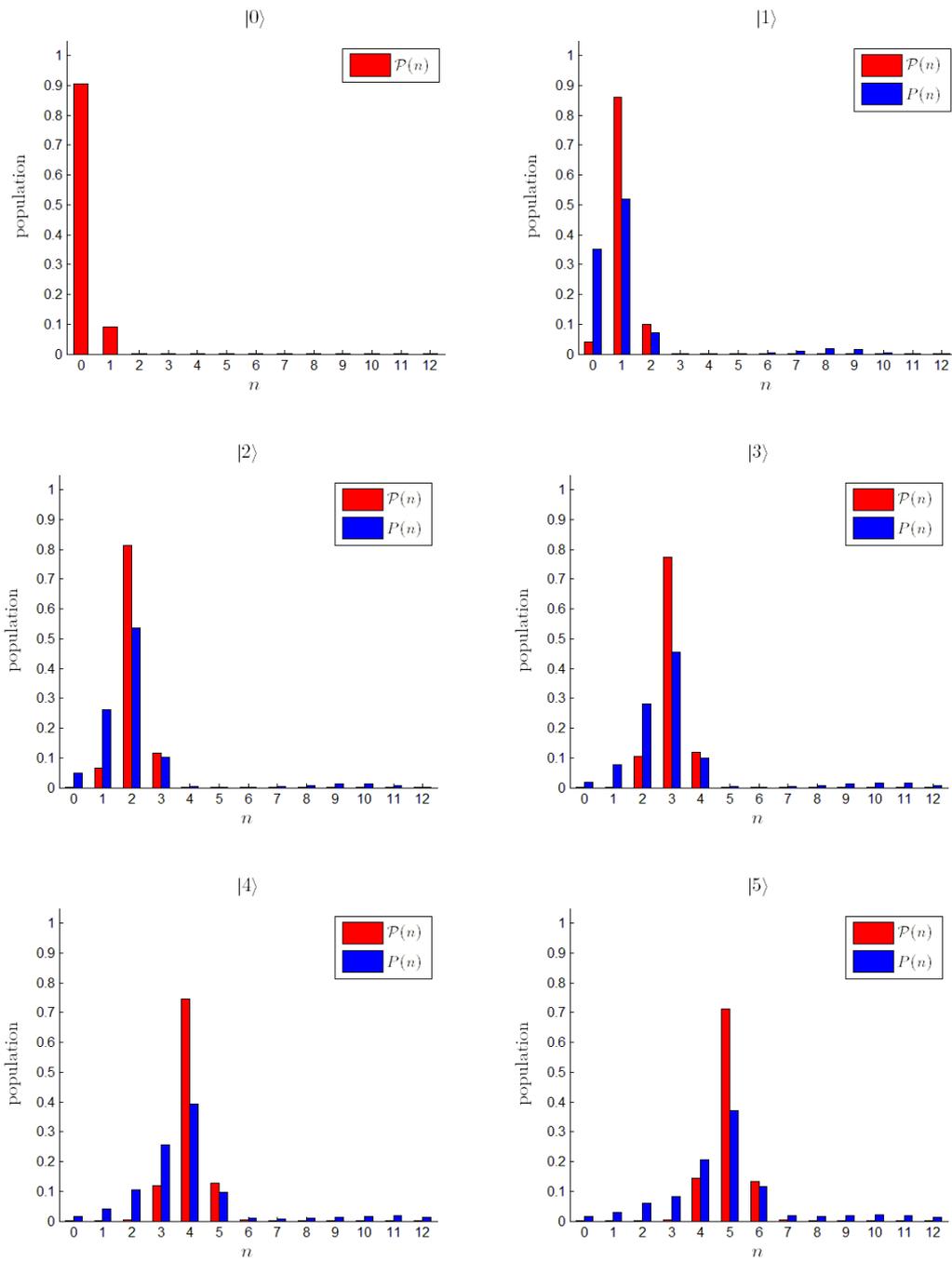


FIGURE IV.10 – Distributions moyennes d'états de Fock, de 0 à 5 photons, prises à  $t = 68.8$  ms.

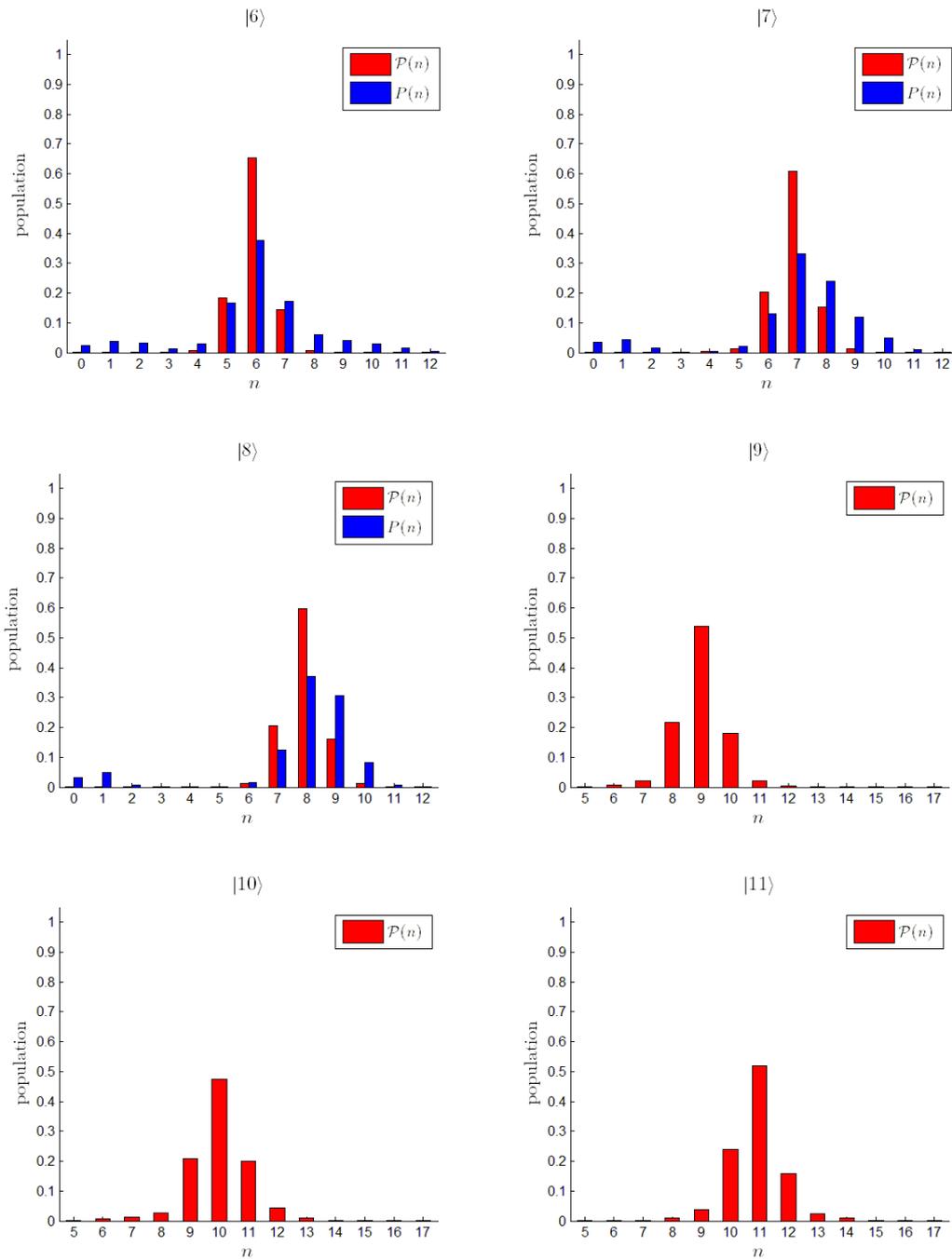


FIGURE IV.11 – Distributions moyennes d'états de Fock, de 6 à 12 photons, prises à  $t = 68.8$  ms. L'état passé du champ permet de mesurer des états inaccessibles à la matrice densité (pour  $n = 9$  à 12).

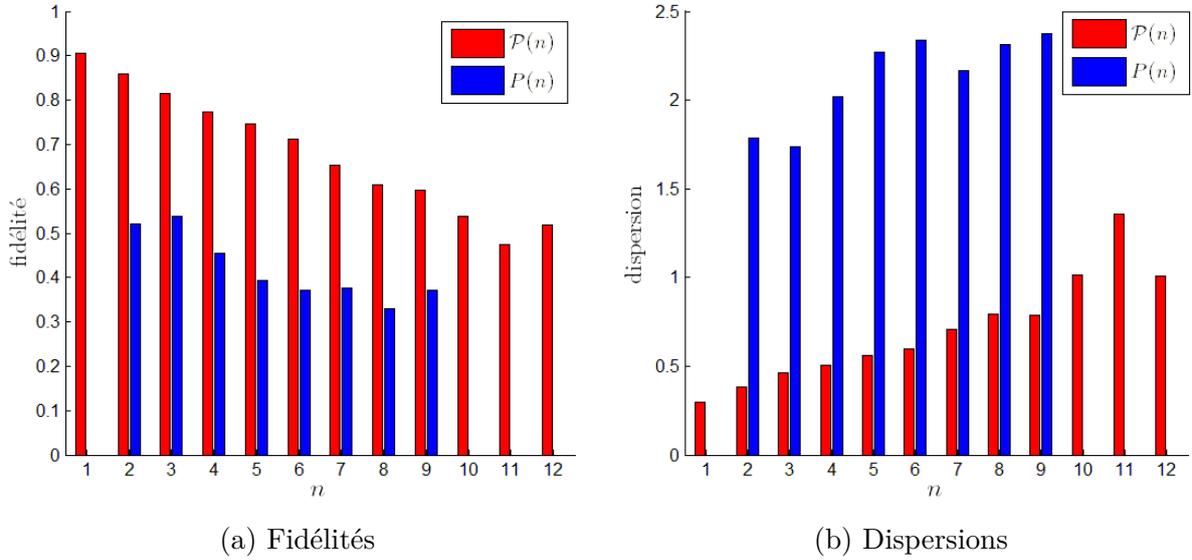


FIGURE IV.12 – Fidélité et dispersion des distributions du nombre de photons. Nous reportons ici les valeurs des fidélités et écarts types des distributions moyennes  $P$  et  $\mathcal{P}$  prises à l’instant  $t = 68.8$  ms (voir figures IV.10 et IV.11).

certaine probabilité d’injecter un photon qui dépend du temps de traversée du mode et de la force du couplage  $\Omega_0$  (voir I.2.3.b).

À la suite de cette (éventuelle) injection, nous préparons une seconde série de 4000 sondes QND. La durée qui sépare les préparations de l’atome résonant et du premier échantillon du second bloc QND est de  $T_{\text{prep}}$ . À la fin de cette dernière étape, le champ est de nouveau dans un état thermique.

Parmi les 16320 réalisations de cette expérience, nous sélectionnons celles pour lesquelles l’atome résonant a été détecté dans l’état  $|g\rangle$ . On obtient un sous-ensemble de 2962 séquences de 8000 résultats de détections de sondes QND que nous analysons selon la procédure décrite en II.3.1.d. Nous négligeons l’évolution du champ entre la détection de la dernière sonde du premier bloc QND et la première sonde du second bloc. La figure IV.13 montre le nombre de photons moyen au voisinage du saut provoqué pour une des réalisations sélectionnées.

Nous pouvons faire plusieurs remarques en étudiant ces courbes. Tout d’abord, il est encore flagrant de constater la quasi absence de bruit sur la courbe liée à l’état passé du champ. Cela permet de bien mieux définir « à l’œil » le moment d’apparition du saut. D’autre part, nous pouvons expliquer l’ordre dans lequel les trois distributions révèlent le saut. Il est évident que  $P$  ne peut pas évoluer tant que l’analyse des résultats de mesure d’un certain nombre d’échantillons atomiques (de l’ordre de la centaine) ne confirme l’apparition d’un saut. Le nombre moyen que l’on déduit de cette distribution,  $\langle n \rangle_P$ , ne peut donc croître qu’après l’instant de l’injection. À l’inverse,  $E$  est construite par l’accumulation de l’information venant des détections prises en « remontant le temps » dans la

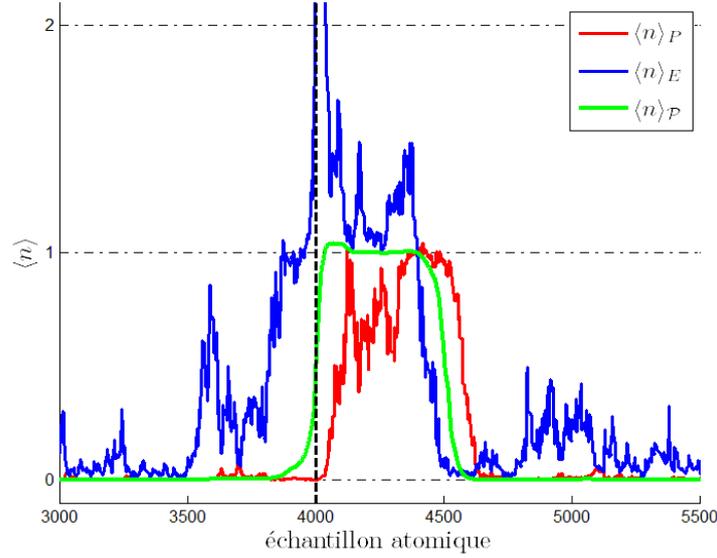


FIGURE IV.13 – Saut de photon visible dans une trajectoire individuelle. On représente ici les nombres de photons moyens tirés des distributions  $P$ ,  $E$  et  $\mathcal{P}$ . Le saut est visible sur les trois courbes  $\langle n \rangle_A$  où  $A = P, E, \mathcal{P}$ . On remarque la quasi absence de bruit sur  $\langle n \rangle_{\mathcal{P}}$  qui, contrairement à  $\langle n \rangle_P$ , nous permet de définir l'instant du saut sur une trajectoire individuelle. De plus,  $\langle n \rangle_{\mathcal{P}}$  indique bien plus précisément l'instant réel du saut représenté par la ligne en pointillés noirs.

séquence. Donc  $\langle n \rangle_E$  croît avant le saut provoqué. Enfin, puisque l'état passé du champ contient la connaissance de  $P$  et  $E$ , il est naturel de constater que  $\langle n \rangle_{\mathcal{P}}$  évolue à un instant intermédiaire de  $\langle n \rangle_P$  et  $\langle n \rangle_E$  beaucoup plus proche de l'instant réel du saut.

Nous construisons ensuite la moyenne de  $\langle n \rangle$  prise sur l'ensemble des 2962 trajectoires sélectionnées, on la note  $\langle n \rangle_m$ . Nous obtenons les courbes de la figure IV.14. Nous observons à nouveau l'ordre d'indication du saut donné par les courbes de  $\langle n \rangle_m$  pour chacune des distributions. Après le saut, les courbes décroissent, signe de la relaxation du champ vers l'état thermique. Le niveau de fond pour les courbes  $\langle n \rangle_{m,P}$  et  $\langle n \rangle_{m,\mathcal{P}}$ , qui fluctue entre 0.06 et 0.075, correspond bien au nombre de photons thermiques donné par la calibration.

Nous ajustons, entre les échantillons 4500 et 8000, aux courbes  $\langle n \rangle_{m,P}$  et  $\langle n \rangle_{m,\mathcal{P}}$  de la figure IV.14, une fonction  $f$  de la forme :

$$f(t) = \langle n_{\text{inj}} \rangle e^{-t(n_{\text{th}}+1)/\tau} + n_{\text{th}} \quad (\text{IV.10})$$

où  $\langle n_{\text{inj}} \rangle$  est le nombre moyen de photons injectés et  $\tau/(n_{\text{th}} + 1)$  la constante de temps de la décroissance. Nous faisons une référence explicite au nombre de photons thermiques  $n_{\text{th}}$  car l'expression du temps de vie de l'état  $|n = 1\rangle$  à température non nulle est  $T_1 =$

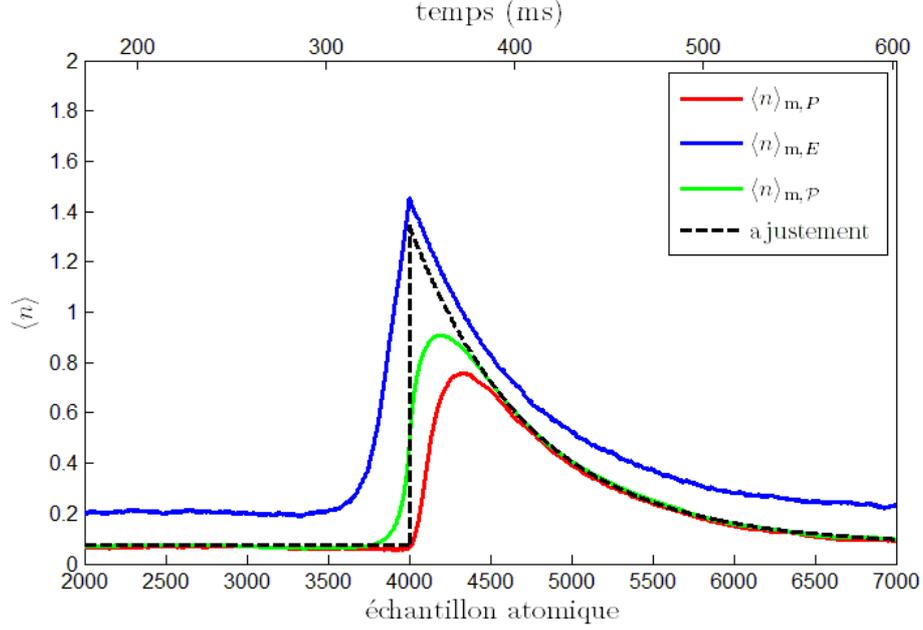


FIGURE IV.14 – Nombre de photons moyen à l’instant du saut induit. Nous pouvons voir l’évolution de  $\langle n \rangle_m$  pour chacune des distributions, la moyenne étant réalisée sur des trajectoire sélectionnées si l’atome résonant est détecté dans l’état  $|g\rangle$ . Après le saut, les courbes de  $\langle n \rangle_{m,P}$  et  $\langle n \rangle_{m,\mathcal{P}}$  décroissent exponentiellement. La ligne en pointillés noirs indique  $\langle n \rangle = n_{th}$  avant le saut, au 4000<sup>e</sup> échantillon. Après le saut, la ligne représente un ajustement de la courbe de  $\mathcal{P}$  par une fonction exponentielle décroissante.

$T_{cav}/(n_{th} + 1)$ . Nous trouvons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \langle n_{inj} \rangle_P &= 1.253 \pm 0.003, & \langle n_{inj} \rangle_{\mathcal{P}} &= 1.273 \pm 0.003, \\ \tau_P &= (67.6 \pm 0.1) \text{ ms}, & \tau_{\mathcal{P}} &= (69.5 \pm 0.1) \text{ ms}. \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

Les temps typiques de décroissance de l’énergie du champ,  $\tau_P$  et  $\tau_{\mathcal{P}}$ , sont très proches de la valeur attendue qui n’est autre que  $T_{cav}$ .

Remarquons que nous injectons effectivement un peu plus de 1.2 photon en moyenne alors que nous ne préparons qu’un échantillon d’atome résonant. Nous pouvons comprendre  $\langle n_{inj} \rangle > 1$  en se rappelant qu’il est possible de préparer plus d’un atome à la fois et donc que ces atomes multiples peuvent transférer en même temps leur quantum d’excitation au mode du champ. Un calcul numérique prenant en compte l’efficacité de détection, la probabilité d’injection, le nombre moyen d’atomes détectés et la possibilité d’avoir, au plus, 2 atomes par échantillon donne une valeur du nombre de photons injectés  $\langle n_{inj} \rangle_{calc} = 1.22$ . Pour calculer  $\langle n_{inj} \rangle_{calc}$ , nous ne considérons que les réalisations où l’on détecte l’atome injecteur dans l’état  $|g\rangle$ . La valeur de  $\langle n_{inj} \rangle_{calc}$  est très proche des valeurs expérimentales  $\langle n_{inj} \rangle_P$  et  $\langle n_{inj} \rangle_{\mathcal{P}}$ .

Nous pouvons faire une dernière remarque importante sur l'instant moyen de détection du saut quantique par l'état passé du champ. On peut voir à la figure IV.14 que la courbe de  $\langle n \rangle_{\mathcal{P}}$  croise l'instant du saut (marqué par la ligne en pointillés noirs) à  $\langle n \rangle_{\mathcal{P}} \approx 0.5$ . C'est à dire à l'instant précis où  $P(1) > P(0)$ , en négligeant les populations  $P(n \geq 2)$ . Étant donné le faible bruit sur les courbes *individuelles*, nous trouvons là un bon indicateur de l'apparition d'un saut. Nous allons utiliser ce critère dans le paragraphe suivant quand nous chercherons à caractériser le temps de vie d'états de Fock. Notons qu'avec l'analyse standard, le saut est détectable seulement après qu'il se soit réellement produit. De plus, les traces individuelles de  $P$  sont si bruitées que cela rend impossible de donner un critère simple et objectif quant à la résolution de l'instant d'un saut.

Nous souhaitons connaître la précision avec laquelle nous pouvons détecter un saut. Dans les 2962 trajectoires sélectionnées pour l'expérience de résolution d'un saut du nombre de photon induit, nous observons souvent l'apparition de photons thermiques dans le mode. Nous ne souhaitons considérer que les sauts  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  qui sont dus à l'injection par l'atome résonant. Parmi les trajectoires sélectionnées, pour éviter le plus possible de prendre en compte les sauts thermiques, nous considérons le saut détecté le plus proche de l'instant du saut réel et nous ne gardons que les occurrences où la transition trouvée est  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ . Nous définissons le moment d'apparition d'un saut comme le moment où la population majoritaire de la distribution  $\mathcal{P}$  devient celle de l'état  $|n = 1\rangle$ . C'est à dire quand on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(0) &= \max(\mathcal{P}(n, t)) , \\ \mathcal{P}(1) &= \max(\mathcal{P}(n, t + \Delta t)) , \end{aligned} \tag{IV.12}$$

alors nous disons qu'un photon est apparu à l'instant  $t + \Delta t$ . Nous représentons à la figure IV.15 l'histogramme des temps  $t_{\text{saut}}$  d'apparition d'un saut.

Nous observons que la distribution est assez fine et centrée sur un temps proche de  $t_{\text{saut}} = 0$ . Cependant il y a un bruit de fond qui rend difficile le calcul de la largeur de la distribution. Ce fond correspond à l'apparition de photons thermiques. Nous choisissons de tronquer cette distribution entre les instants  $t_{\text{saut}} = -15$  ms et  $t_{\text{saut}} = 15$  ms, seulement 7% des  $t_{\text{saut}}$  se trouvent en dehors de ces limites. La valeur moyenne  $\langle t_{\text{saut}} \rangle$  et la dispersion  $\sigma_{\text{saut}}$  de l'instant du saut sont alors :

$$\langle t_{\text{saut}} \rangle = 0.4 \text{ ms} , \quad \sigma_{\text{saut}} = 4.4 \text{ ms} . \tag{IV.13}$$

Nous trouvons que 76% des temps  $t_{\text{saut}}$  se trouvent dans l'intervalle  $[\langle t_{\text{saut}} \rangle - \sigma_{\text{saut}} ; \langle t_{\text{saut}} \rangle + \sigma_{\text{saut}}]$ . La valeur de  $\sigma_{\text{saut}}$  nous donne une indication sur la précision avec laquelle nous pouvons résoudre les sauts quantiques. Nous en déduisons que nous pourrions mesurer les temps de vie des états de Fock à  $\approx 4$  ms près ce qui limite la résolution des états de Fock à  $n = 14$ .

En conclusion, l'analyse exploitant l'état passé du champ permet de bien mieux définir l'instant réel d'un saut à défaut de le faire plus rapidement qu'avec l'analyse standard. Nous allons nous servir de cet avantage pour trouver les taux des transitions descendantes d'états de Fock pour  $n > 7$ .

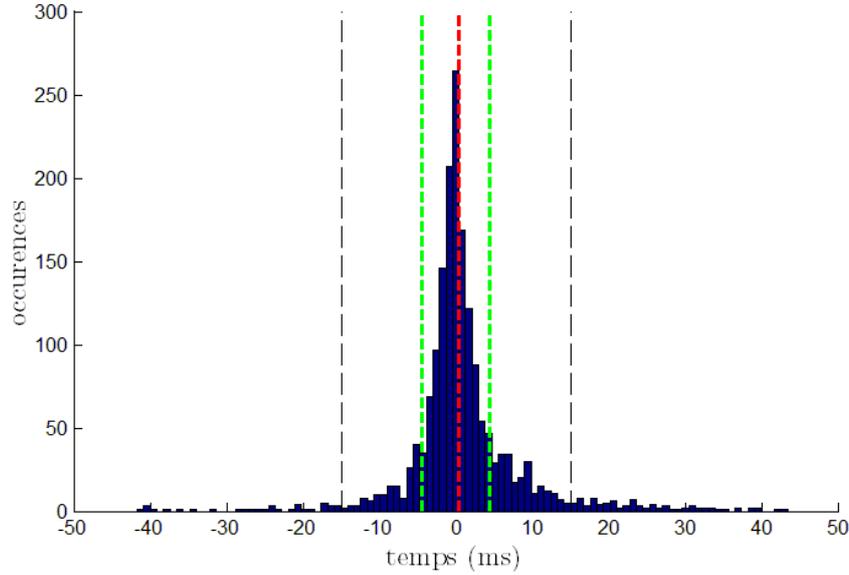


FIGURE IV.15 – Distribution des instants de détection du saut quantique. Une barre de l’histogramme fait 0.86 ms, soit 10 échantillons atomiques, de large. Les lignes en pointillés noirs délimitent la troncation de la distribution. La moyenne et la dispersion de cette dernière sont représentées respectivement par les lignes en pointillés rouge et verts.

### IV.3.2 Sauts quantiques de nombres de photons élevés

Nous avons vu au paragraphe précédent un critère simple de détection de saut du nombre de photons. Nous allons l’utiliser pour déterminer expérimentalement le taux de transition d’états de Fock vers l’état inférieur.

Pour chacune des 6000 trajectoires réalisées, nous allons chercher l’ensemble des sauts quantiques qui peuvent avoir lieu le long des séquences. La condition de changement d’état est très simple : dès que le nombre de photon majoritaire dans la distribution  $\mathcal{P}$  change alors il y a un saut du nombre de photons. Plus formellement, on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n_1) &= \max(\mathcal{P}(n, t)) , \\ \mathcal{P}(n_2) &= \max(\mathcal{P}(n, t + \Delta t)) , \end{aligned} \tag{IV.14}$$

si  $n_1 \neq n_2$  alors on dit qu’il y a eu un saut quantique entre  $t$  et  $t + \Delta t$  et que l’état du champ est passé d’un état de Fock qui contenait  $n_1$  photons à un autre contenant  $n_2$  photons. Nous ajoutons à ce critère quelques restrictions :

- Si on détecte deux sauts ou plus dans un temps de moins de  $5T_{\text{prep}}$ , on ne comptabilise que le premier saut. Ce filtre est là pour éviter les « faux positifs » lors de l’évolution de la distribution causée par des détections erronées et le bruit quantique de détection.
- La détection de sauts débute au 500<sup>e</sup> échantillon atomique. Nous évitons ainsi le début des trajectoires où beaucoup de sauts quantiques ont lieu. En effet, on y

mesure les états de Fock de  $n$  les plus élevés, qui ont une durée de vie  $T_n \approx T_{\text{cav}}/n$  d'autant plus faible que  $n$  est grand.

- Nous ne comptabilisons pas le dernier état de Fock de la trajectoire pour le calcul des durées de vie puisque son temps de « survie » est tronqué par la durée finie de la séquence.

La figure IV.16 montre la détection de saut du nombre de photons sur  $\mathcal{P}$ , telle qu'on vient de la définir, pour la trajectoire individuelle déjà présentée à la figure IV.5.

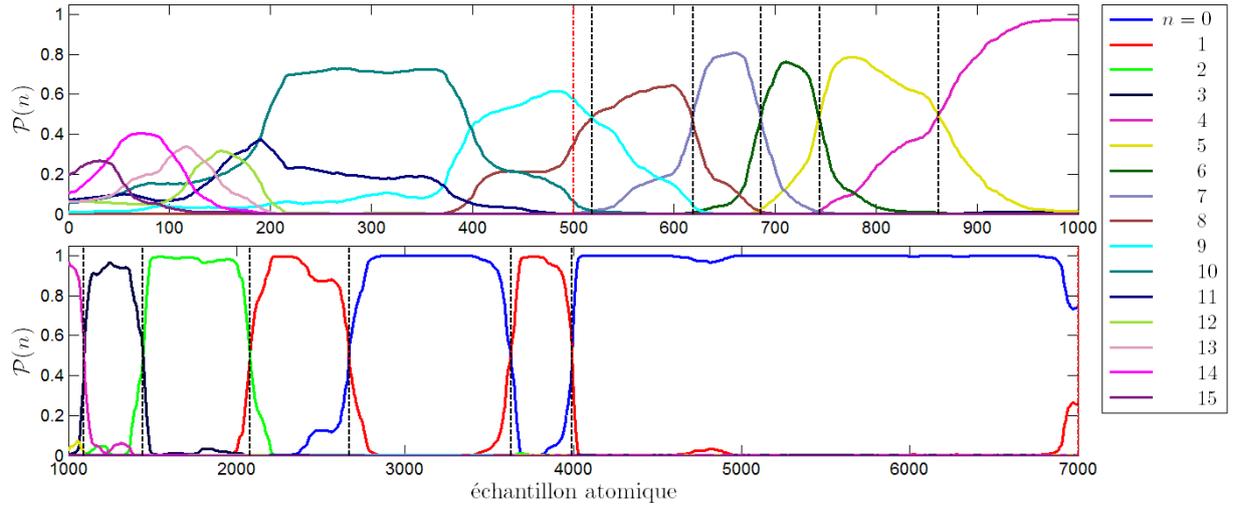


FIGURE IV.16 – Détection de sauts quantiques. Cette figure illustre la procédure simple de détection de sauts décrite dans le texte. Chaque saut est représenté par une ligne verticale en pointillés noirs. Les lignes en pointillés rouges montre, dans le cadre supérieur, le début de la détection, et, dans le cadre inférieur, sa fin.

Une fois tous les temps d'apparition de sauts quantiques obtenus, nous pouvons déterminer la durée de « survie » d'un état de Fock donné. Nous ne considérons que les sauts descendants d'un quantum dans l'échelle des états Fock, c'est à dire tels que  $n_1 \rightarrow n_2 = n_1 - 1$ . En effet, étant donné la faible valeur de  $n_{\text{th}}$ , les sauts montants sont extrêmement rares pour  $n > 0$ . De plus, la durée de vie attendue pour l'état  $|0\rangle$  avant un saut vers  $|1\rangle$  est d'environ 1.3s, durée deux fois plus grande que celle d'une réalisation de l'expérience. Impossible alors de définir correctement ces sauts.

Revenons à la mesure des durées de vie des états de Fock. Pour chacun d'entre eux, nous déterminons les instants  $t_{n,0}$  des sauts, montants ou descendants, qui amènent l'état du champ dans l'état  $|n\rangle$  et les instants  $t_{n,\downarrow}$  des sauts descendants apparaissant ensuite. Nous calculons, à partir de ces instants, les temps de survie des états  $|n\rangle$  :  $t_n = t_{n,\downarrow} - t_{n,0}$ .

Nous construisons la fonction de répartition de  $t_n$ ,  $F_n(t_n)$ , qui est définie comme la proportion des états  $|n\rangle$  ayant survécu jusqu'à l'instant  $t_n$ . Puisque la population de l'état  $n$  évolue en moyenne comme  $P(n, t) = \exp(-t/T_n)$  sous l'effet de la relaxation, alors  $F_n$  suit la même loi de décroissance exponentielle :  $F_n(t) = \exp(-t/T_n)$ . On peut voir à la

figure IV.17 la répartition expérimentale des temps de survie  $t_n$  avant l'apparition d'un saut descendant pour les états de Fock de  $n = 0$  à  $n = 14$ .

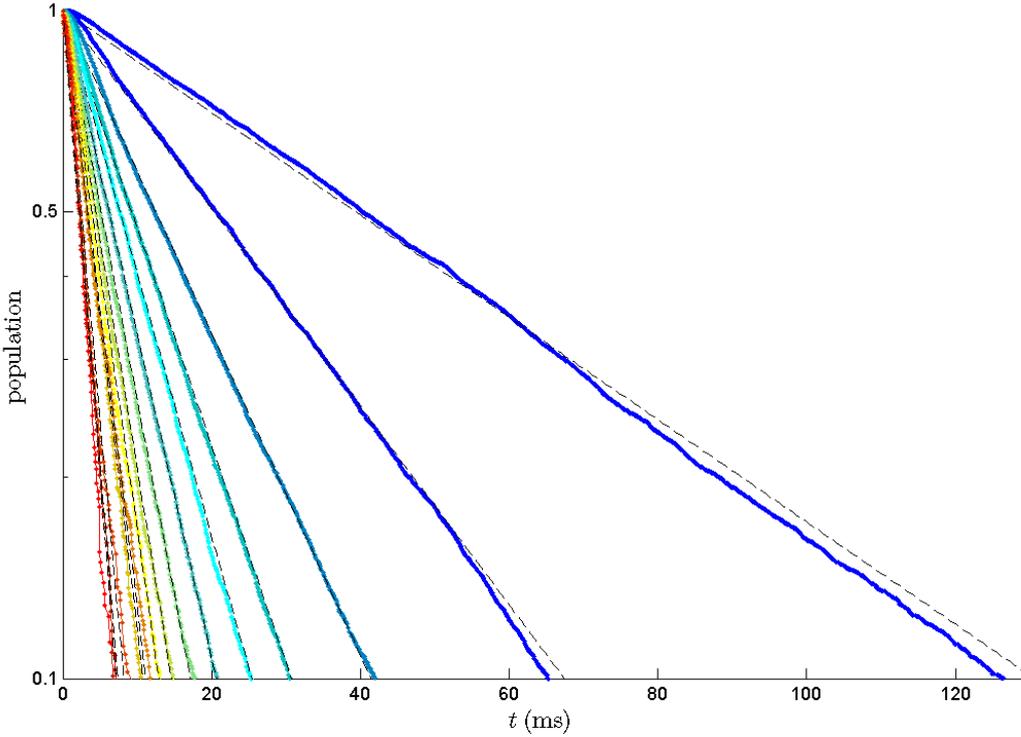


FIGURE IV.17 – Répartition de la durée de vie des états de Fock. Nous présentons les fonctions de répartition  $F_n(t_n)$  des durées de « survie »  $t_n$ , avant un saut descendant, pour  $n = 1$  à 14. La couleur la moins chaude est associée à  $n = 1$ , la plus chaude à  $n = 14$ . Nous ajustons à chacune de ces courbes une fonction exponentielle décroissante pour trouver la durée de vie moyenne de l'état correspondant. Elles sont représentées par les lignes en pointillés noirs. Notons que l'axe des ordonnées est en échelle logarithmique et nous ne représentons que, pour des raisons de clarté,  $F_n(t_n) \geq 0.1$ .

À chacune des courbes expérimentales nous ajustons la fonction exponentielle décroissante  $\exp(-t_n/T_n)$  pour déterminer  $\kappa_n = T_n^{-1}$ , le taux de la transition descendante  $|n\rangle \rightarrow |n-1\rangle$ . La figure IV.18 compare les  $\kappa_n$  trouvés aux valeurs théoriques  $\kappa_n^{th}$  dont l'expression est :

$$\kappa_n^{th} = T_{cav}^{-1}n(n_{th} + 1). \quad (IV.15)$$

L'accord entre valeurs expérimentales et théoriques est bon. Les points expérimentaux commencent à dévier des valeurs théoriques pour  $n > 11$  mais restent compatibles étant donnée l'erreur faite sur la détermination de l'instant des sauts quantiques. Il semble que les

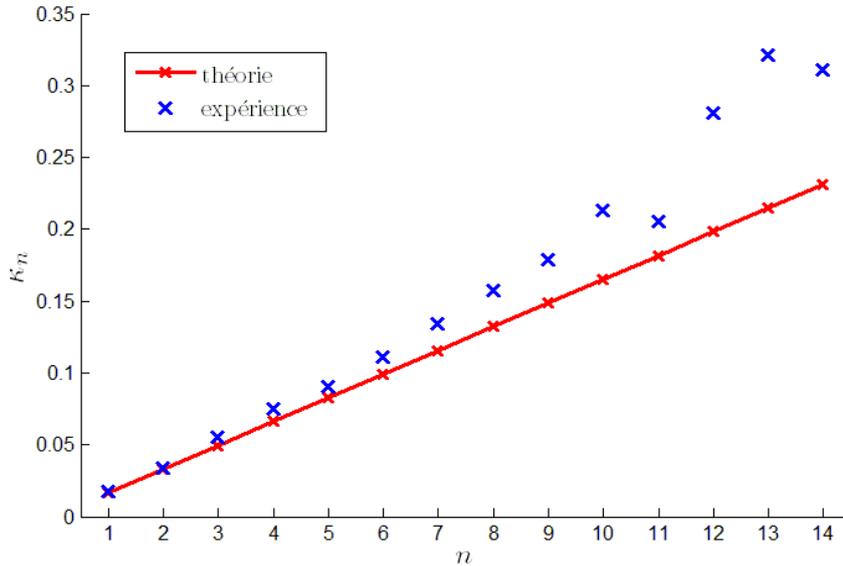


FIGURE IV.18 – Taux de transitions  $n \rightarrow n - 1$ . Nous comparons les taux  $\kappa_n$  trouvés par les ajustements aux fonctions de répartition de la figure IV.17 aux valeur théoriques  $T_n = T_{\text{cav}}/n$ . L'accord est bon, même pour des états qui sont tout simplement impossibles d'accès par la méthode d'analyse usuelle.

taux mesurés soient systématiquement plus élevés que la valeur attendue. Une explication peut être que si l'état de Fock que l'on cherche à mesurer ne vit pas assez longtemps pour que la décimation soit efficace, on ne peut que sous-estimer sa durée de vie. Par conséquent les taux de sauts d'états de Fock de nombre de photons élevés sont surestimés.

Il est important de noter nous sommes capables de dévoiler des propriétés intéressantes d'états que l'analyse standard ne peut pas résoudre en raison du caractère périodique des POVM. Nous avons, en effet, déjà vu la difficulté pour  $P$  de distinguer  $n$  de  $n' = n + 2\pi/\varphi_0$ . L'état passé contourne encore cette limitation puisque nous pouvons mesurer avec justesse les taux de transitions descendantes d'états  $|n \geq 8\rangle$ .

Pour terminer, nous pouvons prouver que la successions des états trouvés dans chacune des trajectoires de l'état passé du champ est tout à fait logique. À la figure IV.19 nous représentons la probabilité de saut vers l'état  $|n_1 + 1\rangle$  ou  $|n_1 - 1\rangle$  en partant de l'état  $|n_1\rangle$  (nous prenons en compte aussi bien les sauts descendants que les sauts montants). Nous remarquons que le saut le plus probable est indiscutablement le saut qui fait passer  $|n_1\rangle$  à  $|n_2 = n_1 - 1\rangle$ . C'est en principe aussi le cas avec l'analyse standard mais, ici, on remarque que cette observation est valable même pour  $n \geq 8$ . Quant à  $n = 0$ , le seul saut possible est, bien sûr, celui qui fait passer l'état du champ du vide à l'état  $|n = 1\rangle$ , par l'apparition d'un photon thermique dans le mode.

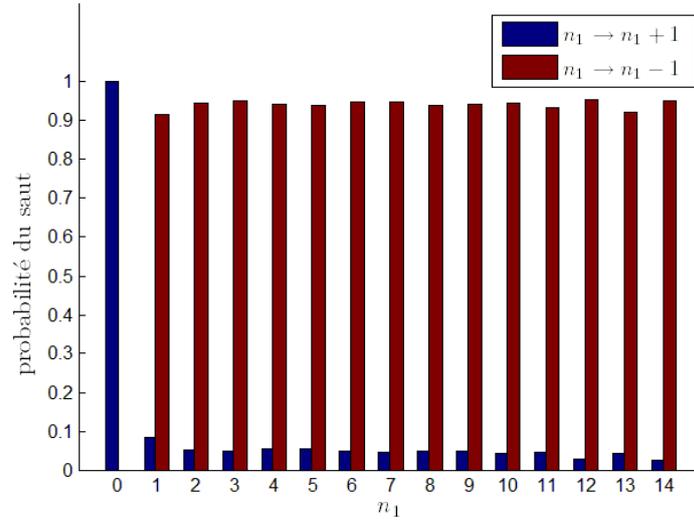


FIGURE IV.19 – Ordre des sauts quantiques. La figure montre la probabilité de saut vers un état  $|n_1\rangle \pm 1$  depuis l'état  $|n_1\rangle$ . Nous observons que, pour  $n > 0$ , l'immense majorité des sauts sont descendants. Pour le cas  $n = 0$ , la seule possibilité est l'apparition d'un photon thermique qui fait passer l'état dans  $|n = 1\rangle$ .

## IV.4 Sens physique de la matrice d'effet

Dans sa définition donnée dans [35], la matrice d'effet  $\hat{E}$  est un objet mathématique qui, conjointement avec la matrice densité  $\rho$ , sert à construire l'état passé du champ. Le sens physique de  $\hat{E}$  est bien distinct de celui de  $\rho$ , cette dernière permettant de retrouver l'habituelle distribution du nombre de photons  $P(n)$ . Par exemple, en théorie,  $\text{Tr}(\hat{E})$  n'est pas conservée par l'équation d'évolution de  $\hat{E}$  (II.29). Dans l'analyse des résultats des expériences présentées aux sections précédentes, nous avons forcé la normalisation de la pseudo-distribution de photons  $E$ , composée des éléments diagonaux de la matrice  $\hat{E}$ . Nous avons étudié l'évolution de cette distribution dans une séquence expérimentale et nous l'avons utilisée pour mieux comprendre certains comportements de la distribution passée  $\mathcal{P}$ . Nous proposons ici une expérience pour faire ressortir le sens physique de la matrice d'effet  $\hat{E}$  et comprendre son équation d'évolution. Nous allons voir, qu'en l'absence de toute information autre que la présence de relaxation entre deux instants, que  $\hat{E}$  permet très concrètement d'obtenir une estimation correcte de l'état du champ à un instant antérieur dans le cas où aucune information de détection n'est disponible.

Supposons qu'à un instant  $t_1$ , l'état du champ soit décrit par la matrice densité  $\rho(t_1)$  connue de l'expérimentateur. Par exemple,  $\rho(t_1)$  peut représenter un état cohérent si nous avons injecté initialement un champ micro-onde dans la cavité. De plus, nous supposons avoir calculé la matrice d'effet à un instant  $t_2 > t_1$ . Entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , nous pouvons avoir obtenu des résultats de détections de sondes atomiques. Nous choisissons de ne pas en

tenir compte. Grâce au caractère QND de la mesure, c'est équivalent à ne pas avoir sondé le champ entre ces deux instants : une mesure non lue n'a pas d'effet sur la distribution de photons estimée. En résolvant l'équation pilote II.29 il est possible de rétro-propager  $E$  depuis  $t_2$  jusqu'à  $t_1$  (voir l'annexe A pour la résolution de l'équation pilote). Avec la connaissance de  $P(t_1)$  et  $E(t_1)$ , nous calculons la distribution passée de photon  $\mathcal{P}(t_1)$ . Nous allons montrer que, connaissant  $E(t_2)$ ,  $\mathcal{P}(t_1)$  est une bien meilleure estimation du champ que  $P(t_1)$ .

Nous allons utiliser les données de l'expérience présentée en IV.2. Pour rappel, elle consiste en la mesure QND répétée d'un champ contenant initialement 12 photons en moyenne. Nous choisissons le temps  $t_2 = 215$  ms correspondant au 2500<sup>e</sup> échantillon atomique. À cet instant, le champ contient en moyenne environ  $\bar{n}_2 = 0.4$  photons.

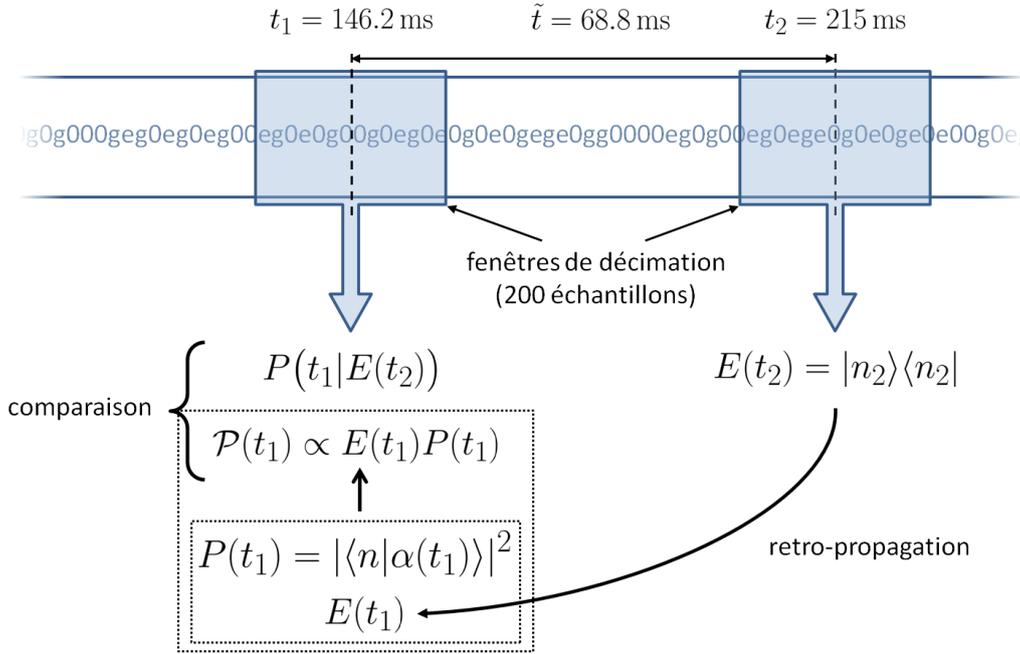


FIGURE IV.20 – Analyse de la retro-propagation de  $E$ . La distribution  $E(t_2)$  est trouvée par décimation dans une fenêtre d'analyse contenant 200 échantillons atomiques. Nous sélectionnons que les distributions pour lesquelles il existe  $n_2$  tel que  $E(t_2, n_2) \geq 0.9$ , c'est à dire que  $E(t_2, n_2)$  décrit avec une grande fidélité un état de Fock contenant  $n_2$  photons. Pour les trajectoires sélectionnées nous extrayons  $P(t_1|E(t_2, n_2))$  en utilisant une fenêtre de décimation similaire à la précédente. Nous voulons comparer cette distribution, expérimentale, avec la distribution passée de photons  $\mathcal{P}(t_1)$  calculée avec  $E(t_1)$  obtenue en retro-propageant  $E(t_2, n_2)$  jusqu'à  $t_1$  et  $P(t_1)$  déduit du champ cohérent initial.

Nous analysons les résultats de détections contenus dans une fenêtre de 200 échantillons centrée sur  $t_2$  (voir figure IV.20). Nous effectuons une simple décimation, sans prise en

compte de la relaxation. Le choix de la largeur de cette fenêtre est un compromis entre une taille assez grande pour que la décimation fasse converger le champ vers un état de Fock et assez petite pour que l'effet de la relaxation, toujours présente dans l'évolution du champ réel, soit négligeable. Ce second point est renforcé par le choix de  $t_2$  qui assure un faible nombre moyen de photons dans le mode, donc une probabilité relativement faible d'avoir des sauts quantiques dans l'intervalle de la fenêtre. Enfin, comme cette dernière est centrée sur l'instant  $t_2$ , l'état trouvé par la décimation reflète le champ réel le plus fidèlement possible.

Nous définissons  $E(t_2)$  comme la distribution du nombre de photons trouvée après cette décimation sans relaxation. En effet, nous souhaitons tester ici la validité de l'équation pilote pour  $E$ . Par conséquent nous voulons être le plus objectif possible et ne pas l'inclure dans le calcul de  $E(t_2)$ . Il n'est pas incorrect de procéder de la sorte. Nous avons vu, au paragraphe II.3.1.e, qu'en l'absence de relaxation  $P$  et  $E$  étaient effectivement des simples produits de décimation.

Pour chacune des 6000 réalisations de l'expérience nous ne considérons que les trajectoires pour lesquelles la distribution  $E(t_2)$  décrit un état de Fock  $|n_2\rangle$  avec une grande fidélité, c'est à dire quand  $E(t_2, n_2) \geq 0.9$ . Pour chacune des trajectoires sélectionnées, nous réalisons une seconde décimation autour de l'instant  $t_1$ . L'analyse est effectuée de la même façon que la première, sans prise en compte de la relaxation, avec une fenêtre centrée sur  $t_1$  et contenant 200 échantillons atomiques. Nous obtenons ainsi la distribution  $P(t_1|E(t_2, n_2))$  conditionnée à la post-sélection  $E(t_2) = \delta_{n, n_2}$  où  $\delta$  est le symbole de Kronecker.

Nous comparons ensuite les distributions  $P(t_1)$ , qui décrit l'état cohérent à  $\bar{n}_1 \approx 1.3$  photons en moyenne,  $\mathcal{P}(t_1) \propto P(t_1)E(t_1)$  et  $P(t_1|E(t_2, n_2))$ , voir la figure IV.20. Les résultats pour  $n_2 = 0, 1$  et  $2$  sont visibles à la figure IV.21. Notons que  $\mathcal{P}(t_1)$  est construite à partir de la distribution  $E(t_2)$  trouvée à la fin de la décimation et pas simplement avec  $E(n_2, t_2) = \delta_{n, n_2}$  ( $E(t_2)$  ne représente pas un état de Fock pur) :

$$\mathcal{P}(n, t_1) = \frac{1}{\mathcal{N}} P(n, t_1) \sum_{m=0}^{N_H-1} E(n, t_1|E(m, t_2)) , \quad (\text{IV.16})$$

où  $\mathcal{N}$  est un facteur de normalisation,  $N_H$  la taille de l'espace de Hilbert tronqué pour l'analyse et  $E(n, t_1|E(m, t_2))$  est la population du nombre de photon  $n$  de la distribution  $E(t_1)$  retro-propagée depuis  $E(m, t_2)$  grâce à la solution de l'équation pilote A.20.

Nous remarquons que, dans les trois cas, la distribution  $\mathcal{P}(t_1)$  est une bien meilleure estimation des distributions post-sélectionnées  $P(t_1|E(n_2, t_2))$  que  $P(t_1)$ . La différence qui subsiste entre les distributions  $\mathcal{P}(t_1)$  et  $P(t_1|E(n_2, t_2))$  peuvent être dues à une calibration imparfaite des POVM utilisés pour la décimation et à l'effet résiduel de la relaxation pendant la durée de la fenêtre d'analyse. La conséquence est un état estimé  $E(t_2)$  moins proche de l'état réel que l'on ne croit. Ces imperfections se retrouvent dans l'état retro-propagé  $E(t_1)$ . Par exemple, le fait que  $n = 0$  soit plus peuplé que prévu dans la distribution  $P(t_1|E(n_2, t_2))$  est probablement dû à une distribution sélection  $E(t_2)$  contenant vraisemblablement plus de  $n = 0$  que ce qui est trouvé. Les mêmes imperfections peuvent aussi

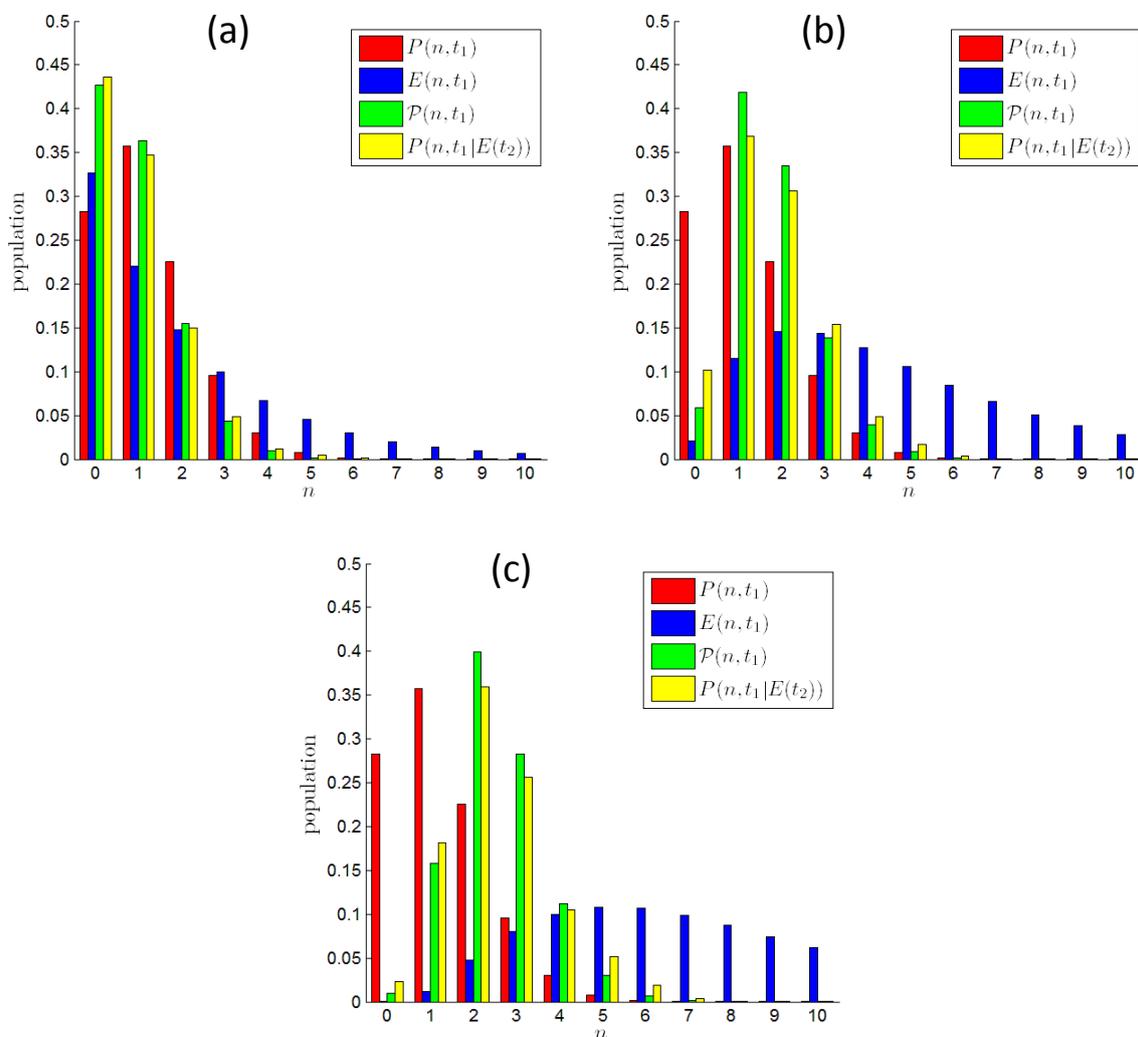


FIGURE IV.21 – Résultats expérimentaux de l'analyse de la matrice d'effet. Nous comparons les distributions moyennes  $\mathcal{P}(t_1)$  et  $P(t_1|E(t_2, n_2))$  pour trois états de Fock  $|n_2\rangle$  de post-sélection :  $|0\rangle$  en (a),  $|1\rangle$  en (b) et  $|2\rangle$  en (c). Pour comparaison, nous montrons aussi  $P(t_1)$  qui est calculée depuis la distribution initiale  $P(0)$ . Les distributions moyennes présentées sont construites avec 3058 trajectoires pour  $n_2 = 0$ , 1044 pour  $n_2 = 1$  et 278 pour  $n_2 = 2$ .

altérer directement l'estimation de  $P(t_1|E(n_2, t_2))$ . Cependant, la comparaison reste très claire et nous montrons ainsi que non seulement la matrice d'effet contient une réelle information sur l'état du champ que nous avons fait ressortir dans cette analyse et que, de plus, nous comprenons la dynamique d'évolution de  $E$  qu'est l'anti-relaxation décrite par l'équation maîtresse II.29.

# Conclusion

Nous avons présenté dans ce manuscrit une nouvelle façon d’analyser les résultats de mesures quantiques non-destructives successives du nombre  $n$  de photons présents dans une cavité micro-onde de grande finesse. Dans les précédentes expériences de l’équipe, nous n’utilisons que la matrice densité  $\rho$  pour estimer l’état du champ et observer son évolution dans le temps. Elle est construite par l’accumulation progressive de l’information sur  $n$  provenant de la détection de sondes atomiques entre le début de l’expérience et un instant  $t$ . En plus de la matrice densité nous calculons désormais la matrice d’effet  $E$  en utilisant les résultats de détection depuis la fin d’une réalisation de l’expérience jusqu’à ce même instant  $t$  (en « remontant le temps »). La donnée de ces deux matrices forme l’état passé du champ qui contient donc toute l’information obtenue à la suite d’une réalisation expérimentale.

La première expérience présentée consiste en la mesure QND d’un champ initialement cohérent et contenant 12 photons en moyenne. Il relaxe ensuite au cours du temps à cause du couplage du mode du champ à un bain thermique. Nous avons comparé les distributions du nombre de photons provenant de la matrice densité seule,  $P$ , et de l’état passé du champ,  $\mathcal{P}$ . Les courbes des populations  $\mathcal{P}(n, t)$  sont très peu bruitées en comparaison de celles de la distribution usuelle  $P$ . Cet effet est la conséquence directe de la prise en compte, à chaque instant, des événements ultérieurs.

Nous avons ensuite montré que l’entropie moyenne de la distribution passée  $\mathcal{P}$  était à chaque instant inférieure à celle de la distribution  $P$ . Pour prouver que  $\mathcal{P}$  est effectivement une meilleure estimation de l’état réel du champ et pas simplement un lissage passif, nous avons scindé en deux chaque réalisation de l’expérience de mesure QND du champ. Les corrélations entre les distributions passées des deux sous-ensembles étaient plus importantes que celles entre distributions standards. Nous en avons conclu que l’état passé, plutôt que la matrice densité, représentait plus fidèlement l’état réel du champ.

L’absence de bruit sur les trajectoires individuelles du champ nous ont permis de résoudre avec précision les saut quantiques. Nous avons présenté une seconde expérience dans laquelle un saut quantique est provoqué grâce à l’envoi d’un atome résonant. Nous avons trouvé que l’instant d’apparition de ce saut était particulièrement bien défini. Nous en avons tiré un critère simple et objectif pour détecter un saut de photon. Nous avons utilisé ce critère pour analyser les séquences de la première expérience afin de déterminer les taux des transitions  $|n\rangle \rightarrow |n-1\rangle$  de  $n = 1$  à  $n = 14$ . La méthode de l’état passé nous a permis de dépasser les limites de mesures imposées par la périodicité des POVM et donc

de pouvoir observer des états de Fock avec  $n > 7$  qu'il est impossible de résoudre avec une analyse n'utilisant que la matrice densité.

Nous avons aussi tenté de donner un sens physique à la matrice d'effet qui est, à priori, un objet mathématique servant uniquement à former l'état passé d'un système. Nous avons résolu l'équation pilote de  $E$  et nous nous sommes servis des solutions pour rétro-propager  $E$  à partir d'états de Fock en l'absence de détections de sondes atomiques. En utilisant une nouvelle fois les résultats de la première expérience, nous avons montré que l'estimation du champ obtenue en utilisant cette rétro-propagation était correcte.

## Perspectives

La principale limitation rencontrée lors de la réalisation des expériences présentées dans ce manuscrit est la faible efficacité de détection. Le détecteur vieillissant va prochainement être remplacé : son efficacité, et donc le taux d'acquisition de l'information sur  $n$ , sera triplée. De plus, de nouvelles cavités vont être produites dans le but d'obtenir le plus grand  $T_{\text{cav}}$  possible. Des temps de vie de l'ordre de la centaine de ms ont déjà été atteints et il n'est pas impossible que l'on puisse battre le record de 130 ms. Nous profiterons de l'ouverture du cryostat pour effectuer d'autres réparations et modifications (reconnexion de certaines électrodes, renouvellement de la zone de préparation atomique...). Nous pensons obtenir ainsi un meilleur contraste de l'interféromètre et une meilleure pureté des états atomiques préparés.

Avec un plus grand temps de vie de la cavité et une plus grande rapidité d'obtention de l'information sur le champ nous aurons accès à des états de Fock  $|n\rangle$  avec  $n$  bien plus élevé que ce que l'on a pu observer dans les expériences que nous avons présentées ici. Nous pourrions atteindre des nombres de photons qui couvrent plusieurs périodes des POVM et mesurer leur temps de vie. Bien entendu, nous pouvons utiliser l'état passé dans d'autres expériences tirant aussi profit des modifications mentionnées.

Grâce à la méthode développée dans ce manuscrit nous pouvons mieux résoudre le champ initial. Il est donc possible d'utiliser cet avantage pour estimer l'état du champ après l'avoir déplacé depuis le vide de photons. L'utilisation de l'état passé du champ permettrait donc d'améliorer la reconstruction de la distribution de Wigner, qui représente l'état du champ, par la mesure QND de  $n$  ou de la parité de l'état.

Lors de la présentation du dispositif, nous avons vu qu'il était possible d'installer une seconde cavité. Avec deux modes séparés spatialement nous pourrions créer des états intriqués délocalisés du champ. Il sera notamment possible de créer des états NOON, du type  $|\psi\rangle = |N\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + |0\rangle_1 \otimes |N\rangle_2$ , où  $|n\rangle_i$  correspond à l'état de Fock contenant  $n$  photons dans le mode  $i = 1, 2$ . En envoyant des sondes QND et en analysant les résultats de mesure de leurs états finaux avec la méthode de l'état passé, nous pourrions déterminer plus efficacement quel état initial était présent et nous en observerons l'évolution notamment lorsque les deux cavités n'ont pas le même temps de vie. Nous en déduisons ainsi la dynamique de relaxation de ces états non locaux.

L'état passé du champ peut aussi être utilisé afin de ré-analyser à posteriori les trajectoires du champ obtenues dans des expériences de rétroaction quantique. Dans ces der-

nières, le mode du champ évolue sous l'effet du couplage à l'environnement et est estimé en temps réel par l'analyse des résultats de détection des sondes atomiques. Pour conserver le champ dans un état de Fock particulier nous pouvons appliquer deux types corrections : par un petit déplacement du champ ou par l'émission/absorption d'un photon grâce à l'envoi d'un atome résonant. Avec l'aide de l'état passé du champ, nous pourrons constater et corriger les défauts de la boucle de rétroaction. Par exemple, nous pourrons déterminer expérimentalement quel est le meilleur critère d'arrêt de la boucle. Toujours par exemple, nous serons capables de remarquer une éventuelle dérive de l'amplitude des injections micro-ondes en constatant une différence entre le déplacement mesuré et le déplacement demandé.

Très généralement, nous pourrons vérifier si certains paramètres ont varié dans des expériences de mesure QND du champ. Nous surveillerons en particulier les POVM, c'est-à-dire les phases de l'interféromètre utilisées et le déphasage par photon. Nous pourrons détecter et suivre au cours du temps les variations en observant les anomalies sur l'état estimé de notre système. À chaque instant, nous définirons une fenêtre d'analyse constituée de résultats de mesures précédentes pour y construire l'état passé du champ. Si, par exemple, la phase de l'interféromètre dérive, l'état, au lieu de pointer un état de Fock particulier, sera un mélange d'états nombre que nous pourrons révéler avec précision. Pour déterminer cette variation de phase, nous utiliserons un critère qui peut être de minimiser l'entropie de l'état passé trouvé dans la fenêtre. Nous en déduirons comment adapter, en temps réel, l'analyse pour continuer à estimer fidèlement l'état réel du champ.



# Annexe A

## Résolution de l'équation pilote de la matrice d'effet

Nous allons chercher à calculer la matrice d'état  $E(t_1)$  à partir de  $E(t_2)$  où  $t_2 > t_1$ . Nous supposons qu'aucune information provenant des détections atomiques n'est disponible entre ces deux instants. Il nous faut alors résoudre l'équation pilote II.29 pour  $E$ .

Après avoir donné la solution générale de l'équation, nous donnerons la solution  $E(t_1)$  lorsque  $E(t_2)$  décrit un état de Fock. Nous étudierons plus en détail les exemples  $n = 0$  et  $n = 1$ . Les calculs que nous allons présenter dans le prochain paragraphe ont été effectués par Bruno Peaudecerf<sup>1</sup>.

**Solution de l'équation maîtresse pour la matrice d'effet** Si nous souhaitons obtenir la distribution  $E(t_1)$  avec la seule connaissance de  $E(t_2)$ , il nous faut résoudre l'équation maîtresse pour  $\hat{E}$ . Cette équation fait appel aux opérateurs de saut  $L_-$  et  $L_+$  qui s'expriment en fonction des opérateurs création et annihilation de photons dans le mode du champ considéré  $a^\dagger$  et  $a$  :

$$L_- = \sqrt{n_{\text{th}}\kappa} a, \quad L_+ = \sqrt{(n_{\text{th}} + 1)\kappa} a^\dagger. \quad (\text{A.1})$$

où  $\kappa = 1/T_{\text{cav}}$  et  $n_{\text{th}}$  est le nombre moyen de photons dans l'état d'équilibre thermique du mode du champ. On réécrit l'équation maîtresse II.29 pour  $\hat{E}$ , en faisant apparaître explicitement  $a$  et  $a^\dagger$  :

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{E}}{d\tilde{t}} = -\frac{1 + n_{\text{th}}}{2} (a^\dagger a \hat{E} + \hat{E} a^\dagger a - 2a^\dagger \hat{E} a) - \frac{n_{\text{th}}}{2} (a a^\dagger \hat{E} + \hat{E} a a^\dagger - 2a \hat{E} a^\dagger), \quad (\text{A.2})$$

où  $\tilde{t} = t_2 - t$ . Pour résoudre cette équation, nous allons utiliser les *fonctions caractéristiques quantiques*  $\mathcal{C}_p$  [69]. La fonction caractéristique d'ordre  $p$  de la matrice d'effet  $\hat{E}$  s'écrit :

$$\mathcal{C}_p^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}(\hat{E} D(\lambda)) e^{p|\lambda|^2/2}, \quad (\text{A.3})$$

---

1. B. Peaudecerf, note interne. Un article est en cours de préparation à l'heure où ces lignes sont écrites.

où  $D(\lambda) = \exp(\lambda a^\dagger - \lambda^* a)$  est l'opérateur déplacement du mode du champ qui transforme l'état vide en état cohérent d'amplitude  $\lambda$  :  $D(\lambda)|0\rangle = |\lambda\rangle$ . On obtient, par exemple, les fonctions dans l'ordre normal ( $p = 1$ ) et anti-normal ( $p = -1$ ) :

$$\mathcal{C}_1^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}\left(\hat{E}e^{\lambda a^\dagger}e^{-\lambda^* a}\right), \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{C}_{-1}^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}\left(\hat{E}e^{-\lambda^* a}e^{\lambda a^\dagger}\right), \quad (\text{A.5})$$

le terme « ordre » dénote l'arrangement des opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$  qui ne commutent pas entre eux. L'ordre normal étant défini par le placement des opérateurs d'annihilation à droite de ceux de création.

Nous pouvons transformer l'équation A.2 en y faisant apparaître la fonction  $\mathcal{C}_p^{[\hat{E}]}$ . On obtient, après quelques calculs (certaines transformations nécessaires sont trouvées à l'appendice 12 de [69]) :

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d\mathcal{C}_p^{[\hat{E}]}}{d\tilde{t}} = \mathcal{C}_p^{[\hat{E}]} + \frac{1}{2} \left( \lambda^* \frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \mathcal{C}_p^{[\hat{E}]} - \frac{1}{2} (p + 1 + 2n_{\text{th}}) |\lambda|^2 \mathcal{C}_p^{[\hat{E}]} . \quad (\text{A.6})$$

Pour simplifier l'expression précédente, nous introduisons la fonction  $\mathcal{C}'^{[\hat{E}]}$  définie par la relation suivante :

$$\mathcal{C}'^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*, \tilde{t}) = e^{-\kappa\tilde{t}} \mathcal{C}_{-2n_{\text{th}}-1}^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*, \tilde{t}) . \quad (\text{A.7})$$

Notons que l'équation A.3 nous donne :

$$\mathcal{C}_{-2n_{\text{th}}-1}^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*, \tilde{t}) = e^{-|\lambda|^2(n_{\text{th}}+1)} \mathcal{C}_1^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*, \tilde{t}) , \quad (\text{A.8})$$

Après avoir utilisé la fonction  $\mathcal{C}'^{[\hat{E}]}$  dans l'équation A.6, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d\mathcal{C}'^{[\hat{E}]}}{d\tilde{t}} = \frac{1}{2} \left( \lambda^* \frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \mathcal{C}'^{[\hat{E}]} . \quad (\text{A.9})$$

On peut montrer ([69]) que la solution de cette équation est la fonction  $\mathcal{C}'^{[\hat{E}]}$  qui vérifie :

$$\mathcal{C}'_1^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*, \tilde{t}) = \mathcal{C}'_1^{[\hat{E}]}(\lambda e^{\kappa\tilde{t}/2}, \lambda^* e^{\kappa\tilde{t}/2}, 0) . \quad (\text{A.10})$$

On remplace alors  $\mathcal{C}'_1^{[\hat{E}]}$  par son expression en fonction de  $\mathcal{C}_1^{[\hat{E}]}$  en utilisant les équations A.7 et A.8 pour obtenir finalement la solution de l'équation A.6 :

$$\mathcal{C}_1^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*, \tilde{t}) = e^{\kappa\tilde{t}} e^{-|\lambda|^2(n_{\text{th}}+1)(\exp(\kappa\tilde{t})-1)} \mathcal{C}_1^{[\hat{E}]}(\lambda e^{\kappa\tilde{t}/2}, \lambda^* e^{\kappa\tilde{t}/2}, 0) . \quad (\text{A.11})$$

Nous souhaitons maintenant obtenir l'évolution de la distribution  $E$  au cours du temps. En première étape, on introduit  $M_E(\mu, \tilde{t})$ , la fonction génératrice des moments de  $E$ , dont l'expression, en fonction des populations  $E(n, \tilde{t})$ , est :

$$M_E(\mu, \tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n, \tilde{t}) (1 - \mu)^n . \quad (\text{A.12})$$

Comme son nom l'indique, elle permet d'extraire les différents moments de la distribution  $E$ , en effet :

$$\left(- (1 - \mu) \frac{d}{d\mu}\right)^m M_E(\mu, \tilde{t}) \Big|_{\mu=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n^m E(n, \tilde{t}) = \langle n^m \rangle_E(\tilde{t}), \quad (\text{A.13})$$

Nous pouvons aussi l'utiliser afin de retrouver les populations  $E(n, \tilde{t})$  :

$$E(n, \tilde{t}) = \frac{1}{n!} \left(- \frac{d}{d\mu}\right)^n M_E(\mu, \tilde{t}) \Big|_{\mu=1}. \quad (\text{A.14})$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer  $M_E$  en fonction de  $\mathcal{C}_1^{[\hat{E}]}$ , dont nous venons de trouver la solution. On trouve dans [69] l'expression recherchée :

$$M_E(\mu, \tilde{t}) = \frac{1}{\pi\mu} \int d^2\lambda \mathcal{C}_1^{[\hat{E}]}(\lambda, \lambda^*, \tilde{t}) e^{-|\lambda|^2/\mu}. \quad (\text{A.15})$$

Nous avons désormais tous les outils en main pour retrouver l'ensemble des éléments de la distribution  $E$  à partir de la fonction caractéristique de l'état à  $t = t_2$ . Nous allons, dans le prochain paragraphe, donner celle représentant un état de Fock et étudier les résultats de la retro-propagation.

**Solution pour un état de Fock quelconque** En utilisant la définition A.3, on peut montrer que la fonction caractéristique de la matrice d'effet représentant l'état de Fock  $\hat{E} = |m\rangle\langle m|$  a pour expression :

$$\mathcal{C}_1^{\hat{E}=|m\rangle\langle m|}(\lambda, \lambda^*) = \mathcal{L}_m(|\lambda|^2), \quad (\text{A.16})$$

où  $\mathcal{L}_m$  est le  $m$ -ième polynôme de Laguerre, défini par la somme suivante :

$$\mathcal{L}_m(x) = \sum_{p=0}^m (-1)^p \frac{m!}{p!^2 (m-p)!} x^p. \quad (\text{A.17})$$

L'équation A.11 nous donne alors la fonction caractéristique de  $\hat{E}$  pour tout instant  $\tilde{t}$ , en sachant qu'initialement  $\hat{E} = |m\rangle\langle m|$  :

$$\mathcal{C}_1^{[\hat{E}=|m\rangle\langle m|]}(\lambda, \lambda^*, \tilde{t}) = e^{\kappa\tilde{t}} e^{-|\lambda|^2(n_{\text{th}}+1)(\exp(\kappa\tilde{t})-1)} \mathcal{L}_m(|\lambda|^2 e^{\kappa\tilde{t}}). \quad (\text{A.18})$$

On trouve, en utilisant la relation précédente dans l'équation A.15, la fonction génératrice des moments  $M_E$  correspondante, pour chaque instant  $\tilde{t}$  :

$$M_E(\mu, \tilde{t} | \hat{E} = |m\rangle\langle m|) = \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p}{\mu} \left( \frac{e^{\kappa\tilde{t}}}{N + 1/\mu} \right)^{p+1} \frac{m!}{p!(m-p)!}. \quad (\text{A.19})$$

Grâce à l'équation A.14, on trouve l'expression des populations  $E(n, \tilde{t})$  :

$$E(n, \tilde{t} | \hat{E} = |m\rangle\langle m|) = \frac{N^n}{(N+1)^{n+1}} \times \dots \sum_{p=0}^m \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \frac{m!}{p!(m-p)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n+p-k)!}{n!(p-k)!} e^{(p+1)\kappa\tilde{t}} \frac{(N+1)^{k-p}}{N^k}, \quad (\text{A.20})$$

où la distribution n'est pas normalisée et où  $N$  a pour expression :

$$N = (1 + n_{\text{th}})(e^{\kappa\tilde{t}} - 1). \quad (\text{A.21})$$

**Solution pour  $m = 0$**  L'équation A.20 est trop complexe pour être utile en dehors de calculs numériques. Pour la discussion nous allons donner les expressions de  $M_E$  et  $E$  dans le cas où  $m = 0$  :

$$M_E(\mu, \tilde{t}) = \frac{e^{\kappa\tilde{t}}}{1 + \mu N}, \quad (\text{A.22})$$

$$E(n, \tilde{t}) = e^{\kappa\tilde{t}} \frac{N^n}{(1+N)^{n+1}} \quad (\text{A.23})$$

$$E_{\text{norm}}(n, \tilde{t}) = \frac{N^n}{(1+N)^{n+1}}, \quad (\text{A.24})$$

où la distribution  $E$  n'étant pas normalisée et  $E_{\text{norm}}$  l'est ; on rappelle que  $N$  dépend aussi du temps  $\tilde{t}$ . Remarquons que la distribution  $E_{\text{norm}}$  est une suite géométrique de raison  $N/(1+N)$  et que le nombre de photons moyen, égal à  $N = (1 + n_{\text{th}})(e^{\kappa\tilde{t}} - 1)$ , croît exponentiellement avec une constante de temps égale à  $T_{\text{cav}}$ . Cette distribution est donc identique à celle décrivant un état thermique qui contient un nombre moyen de photons  $N$  croissant avec le temps.

Si on s'intéresse à des temps  $\tilde{t}$  tels que  $\tilde{t} \gg T_{\text{cav}}$ , on trouve que les populations  $E(n, \tilde{t})$  deviennent :

$$E(n, \tilde{t} \gg T_{\text{cav}}) \approx \frac{1}{1 + n_{\text{th}}}, \quad (\text{A.25})$$

la distribution  $E$  tend donc vers une distribution uniforme, ce qui est prévu par la théorie (voir II.3).

On suppose que le champ se trouve initialement dans un état cohérent, donc :

$$P(n, \tilde{t}) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}, \quad (\text{A.26})$$

avec  $\bar{n}$ , le nombre de photons moyen de la distribution  $P$  à l'instant  $\tilde{t}$ . En utilisant la relation précédente et l'équation A.24, on en déduit la distribution passée de photons à l'instant  $\tilde{t}$  :

$$\mathcal{P}(n, \tilde{t}) = \frac{1}{\mathcal{N}} P(n, \tilde{t}) E(n, \tilde{t}) = \frac{e^{\kappa\tilde{t}} e^{-\bar{n}}}{\mathcal{N}(1+N)} \left( \frac{N}{1+N} \right)^n \frac{1}{n!}, \quad (\text{A.27})$$

où  $\mathcal{N}$  est un facteur de normalisation. Après calcul de  $\mathcal{N}$ , on obtient finalement :

$$\mathcal{P}(n, \tilde{t}) = e^{\bar{n}_{\mathcal{P}}} \frac{\bar{n}_{\mathcal{P}}^n}{n!}, \quad (\text{A.28})$$

on reconnaît la distribution de photon d'un état cohérent qui contient en moyenne  $\bar{n}_{\mathcal{P}}$  photons, avec :

$$\bar{n}_{\mathcal{P}} = \bar{n} \frac{N}{1+N}. \quad (\text{A.29})$$

On trouve donc une distribution suivant la même loi statistique que  $P$  mais avec un nombre de photon moyen plus faible car, clairement,  $\bar{n}_{\mathcal{P}} \leq \bar{n}$ . Nous pouvons tout à fait le comprendre : nous considérons les trajectoires pour lesquelles  $E$  indique que le mode du champ est dans l'état vide de photons à  $t = t_2$ . Il est donc plus probable d'avoir eu dans le passé un champ d'autant plus proche de l'état vide que  $\tilde{t}$  est proche de 0. La figure A.1 montre les trois distributions  $P$ ,  $E$  et  $\mathcal{P}$  trouvées dans le cas  $m = 0$  et avec  $n_{\text{th}} = 0.074$ .

En utilisant la définition de  $N$ , équation A.21, on obtient les distributions aux limites  $\tilde{t} = 0$  et  $\tilde{t} \gg T_{\text{cav}}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n, \tilde{t} = 0) &= \delta_{n,0}, \\ \mathcal{P}(n, \tilde{t} \gg T_{\text{cav}}) &\approx P(n, \tilde{t}), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

où  $\delta_{n,0}$  est le symbole de Kronecker tel que  $\delta_{n,0} = 1$  si  $n = 0$  et  $\delta_{n,0} = 0$  sinon. La première équation exprime simplement que le choix  $E = |0\rangle\langle 0|$  force  $\mathcal{P} = |0\rangle\langle 0|$ . La seconde équation suggère que le « temps de mémoire » de cette post-sélection est donné par le temps de vie de la cavité : si  $\tilde{t} \gg T_{\text{cav}}$  alors la distribution passée du champ est simplement égale à la distribution  $P(n)$  habituelle. L'information des détections futures n'a plus d'incidence sur la détermination de  $\mathcal{P}$ .

**Solution pour  $m = 1$**  Nous allons maintenant nous intéresser au cas  $m = 1$ , nous procédons de la même façon que dans le paragraphe précédent. La fonction génératrice des moments est :

$$M_E(\mu, \tilde{t}) = \frac{e^{\kappa\tilde{t}}}{1 + \mu N} \left( 1 - \frac{\mu e^{\kappa t}}{1 + \mu N} \right). \quad (\text{A.31})$$

On en déduit la distribution  $E$  pour tout temps  $\tilde{t} < t_2$  :

$$E(n, \tilde{t}) = \frac{e^{\kappa\tilde{t}}}{1 + n_{\text{th}}(1 - e^{-\kappa\tilde{t}})} \frac{N^{n-1}}{(1+N)^{n+1}} \left( n + n_{\text{th}}N(1 - e^{-\kappa\tilde{t}}) \right). \quad (\text{A.32})$$

Nous considérons ici aussi une distribution  $P$  décrivant un champ cohérent (équation A.26), on trouve alors que la distribution  $\mathcal{P}$ , à l'instant  $\tilde{t}$ , s'exprime comme :

$$\mathcal{P}(n, \tilde{t}) = \frac{n + n_{\text{th}}N(1 - e^{-\kappa\tilde{t}})}{\bar{n}_{\mathcal{P}} + n_{\text{th}}N(1 - e^{-\kappa\tilde{t}})} \exp\left(\bar{n} \frac{N}{1+N}\right) \left(\bar{n} \frac{N}{1+N}\right)^n \frac{1}{n!}, \quad (\text{A.33})$$

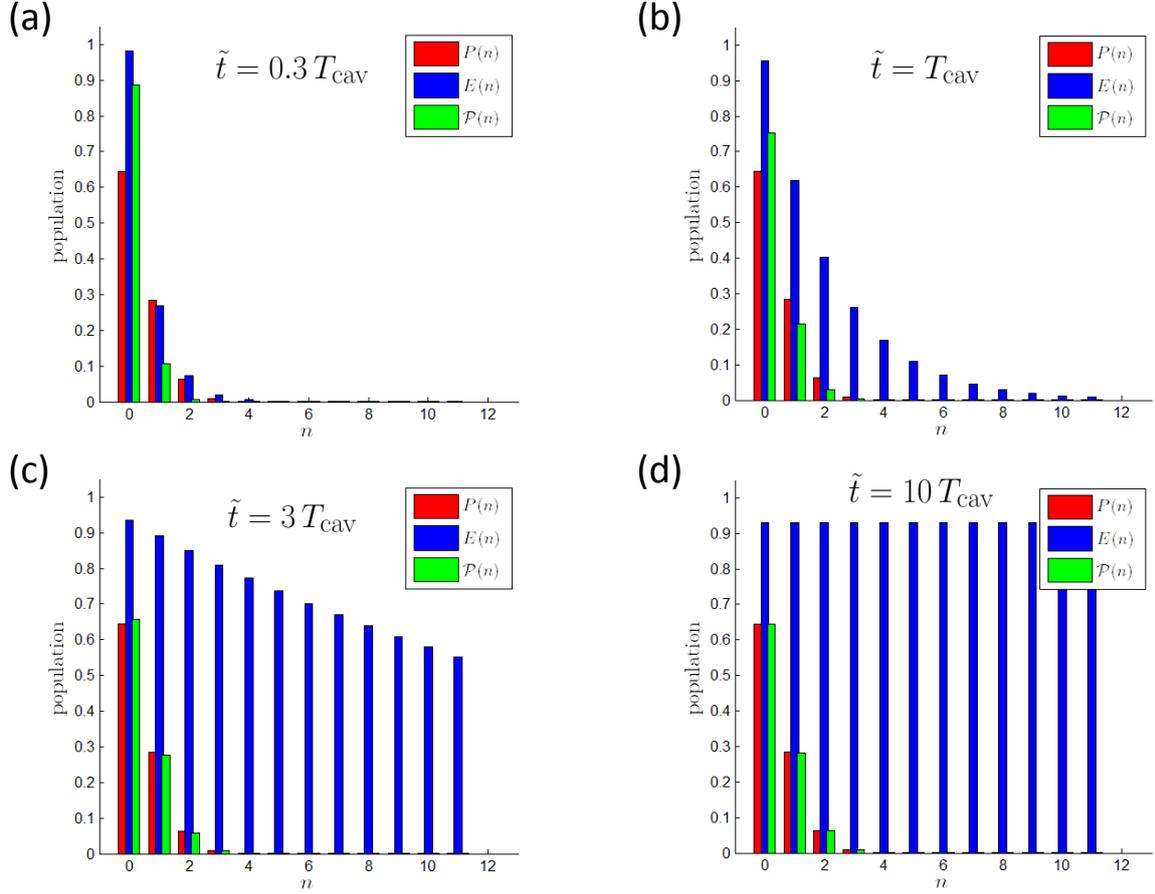


FIGURE A.1 – Résultats théoriques pour  $m = 0$ . Les quatre histogrammes montrent les distributions  $P$ ,  $E$  et  $\mathcal{P}$  à différents instants  $\tilde{t}$ . Plus  $\tilde{t}$  est grand, plus  $\mathcal{P}$  se rapproche de la distribution de Poisson  $P$  et, inversement, si  $\tilde{t} \ll T_{\text{cav}}$ ,  $\mathcal{P}$  est proche de la distribution  $E$ . Pour calculer ces distributions, nous avons pris  $n_{\text{th}} = 0.074$  et un nombre moyen de photons  $\langle n \rangle_P = 0.4$ . À mesure que  $\tilde{t}$  croit,  $E$  se rapproche d'une distribution uniforme avec  $E(n) = 1/(1 + n_{\text{th}})$ . On remarque qu'en (d)  $E$  est très proche de cette limite et on trouve  $E(n) = 1/(1 + 0.074) = 0.931$ .

avec  $\bar{n}_{\mathcal{P}}$  défini à l'équation A.29 qui n'est pas, dans ce cas, le nombre moyen de photons. Il est instructif de s'intéresser au cas particulier où  $n_{\text{th}} = 0$ , la précédente équation devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n = 0, \tilde{t}) &= 0, \\ \mathcal{P}(n \geq 1, \tilde{t}) &= \exp\left(\bar{n} \frac{N}{1+N}\right) \left(\bar{n} \frac{N}{1+N}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

À température nulle et en sachant qu'à  $t = t_2$ , le champ a été post-sélectionné dans l'état de Fock  $m = 1$ , il est impossible d'avoir 0 photon pour des temps  $t < t_2$ , c'est en toute logique qu'on obtient le résultat précédent. On obtient le même résultat en partant de n'importe quel  $m$  : la population des nombres de photons  $n < m$  restera nul pour tout temps  $\tilde{t}$  si  $n_{\text{th}} = 0$ .

La distribution définie à l'équation A.34 décrit un champ cohérent tronqué et avec un nombre moyen de photons :

$$\bar{n}_{\mathcal{P}} = 1 + \bar{n} \left(1 - e^{-\kappa \tilde{t}}\right), \quad (\text{A.35})$$

qui est simplement décalé par rapport à la valeur  $\bar{n}$ , obtenue depuis  $P$ , même si  $\tilde{t} \gg T_{\text{cav}}$ . Ce résultat est surprenant car il reste toujours une information de la post-sélection aussi lointaine soit-elle. Il faut cependant garder à l'esprit que ce résultat est obtenu à température nulle et dès que  $n_{\text{th}} = \epsilon$ , avec  $\epsilon$  positif mais arbitrairement proche de 0, la mémoire de la post-sélection sera limitée et on aura, pour  $\tilde{t}$  assez grand,  $\mathcal{P} \approx P$ .

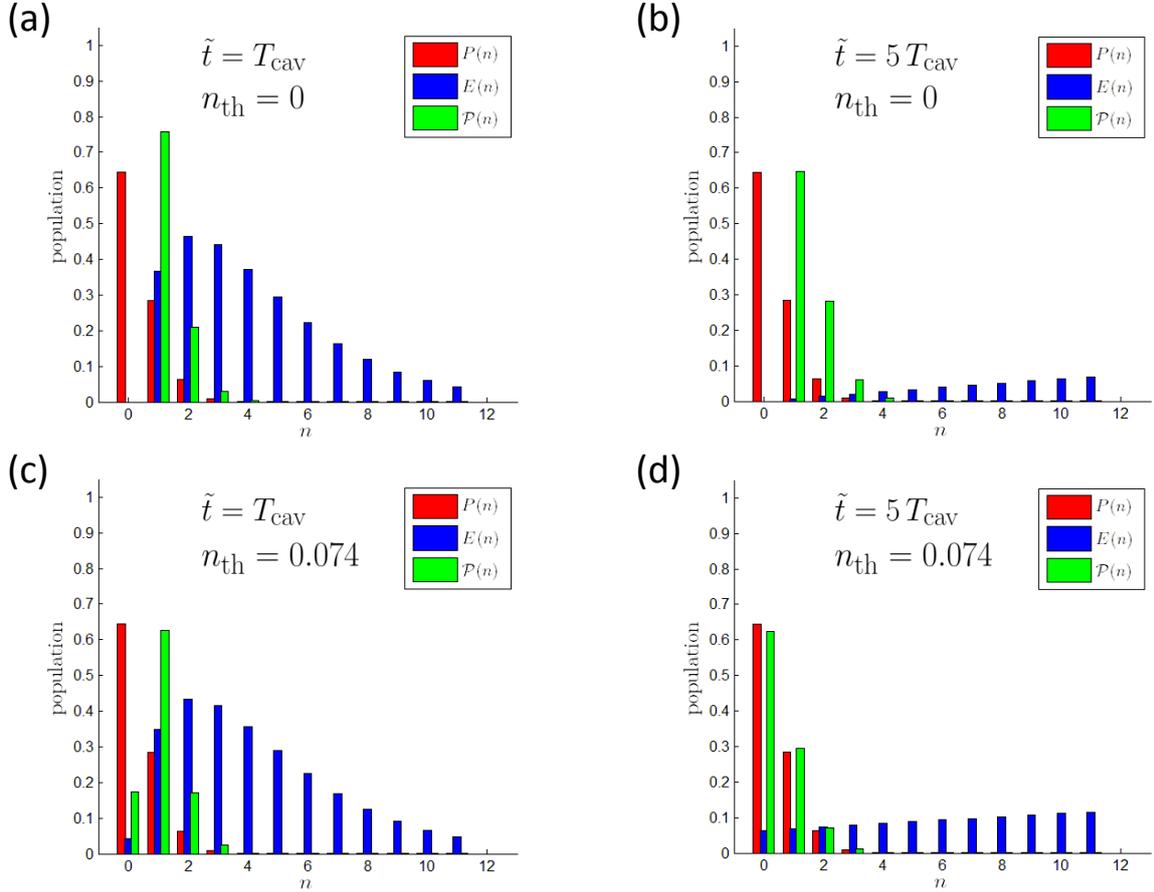


FIGURE A.2 – Résultats théoriques pour  $m = 1$ . Dans cet exemple nous comparons les distributions  $P$ ,  $E$  et  $\mathcal{P}$  à deux instants  $\tilde{t} = T_{\text{cav}}$  et  $\tilde{t} = 5 T_{\text{cav}}$  et pour deux valeurs de  $n_{\text{th}}$ . Dans le cas où  $\tilde{t} = T_{\text{cav}}$ , la post-sélection impose une faible population dans l'état  $|0\rangle$ , en (c), nulle dans le cas  $n_{\text{th}} = 0$ , en (a). En (d), on peut voir que, quand  $\tilde{t}$ , devient grand devant  $T_{\text{cav}}$ , la distribution  $E$  se rapproche d'une distribution uniforme et  $\mathcal{P} \approx P$  comme dans le cas  $m = 0$ . En revanche, dans le cas  $n_{\text{th}} = 0$ , en (b), il est impossible d'obtenir  $E(0) \neq 0$  à n'importe quel instant. La distribution  $\mathcal{P}$  est alors similaire à  $P$  mais avec un nombre de photon moyen plus grand d'exactly  $m = 1$  quantum.

# Bibliographie

- [1] A. EINSTEIN. “Über einen die erzeugung und verwandlung des liches betreffenden heuristischen gesichtspunkt”. *Annalen der Physik*, **322**, n° 6, 132 (1905). URL <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053220607>.
- [2] E. SCHRÖDINGER. “Are there quantum jumps ? : Part II”. *Br. J. Philos. Sci.*, **III**, 233 (1952).
- [3] P. G. MERLI, G. F. MISSIROLI, et G. POZZI. “On the statistical aspect of electron interference phenomena”. *American Journal of Physics*, **44**, n° 3, 306 (1976). URL <http://scitation.aip.org/content/aapt/journal/ajp/44/3/10.1119/1.10184>.
- [4] A. TONOMURA, J. ENDO, T. MATSUDA, T. KAWASAKI, et H. EZAWA. “Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern”. *American Journal of Physics*, **57**, n° 2, 117 (1989). URL <http://link.aip.org/link/?AJP/57/117/1>.
- [5] D. WINELAND, P. EKSTROM, et H. DEHMELT. “Monoelectron oscillator”. *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 1279 (Nov 1973). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.31.1279>.
- [6] W. NEUHAUSER, M. HOHENSTATT, P. E. TOSCHEK, et H. DEHMELT. “Localized visible ba+ mono-ion oscillator”. *Phys. Rev. A*, **22**, 1137 (Sep 1980). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.22.1137>.
- [7] W. M. ITANO et D. J. WINELAND. “Precision measurement of the ground-state hyperfine constant of mg+25”. *Phys. Rev. A*, **24**, 1364 (Sep 1981). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.24.1364>.
- [8] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY, et N. ROSEN. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Phys. Rev.*, **47**, 777 (May 1935). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>.
- [9] J. S. BELL. “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”. *Physics*, **1**, 195 (1964).
- [10] A. ASPECT, P. GRANGIER, et G. ROGER. “Experimental tests of realistic local theories via bell’s theorem”. *Phys. Rev. Lett.*, **47**, n° 7, 460 (Aug 1981).
- [11] A. ASPECT, J. DALIBARD, et G. ROGER. “Experimental test of bell’s inequalities using time- varying analyzers”. *Phys. Rev. Lett.*, **49**, n° 25, 1804 (Dec 1982).
- [12] A. ASPECT, P. GRANGIER, et G. ROGER. “Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment : A new violation of bell’s inequalities”. *Phys. Rev. Lett.*, **49**, n° 2, 91 (Jul 1982).

- [13] R. FEYNMAN. “Simulating physics with computers”. *International Journal of Theoretical Physics*, **21**, n° 6-7, 467 (1982). URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02650179>.
- [14] M. A. NIELSEN et I. L. CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press (2000).
- [15] P. W. SHOR. “Algorithms for quantum computation : discrete logarithms and factoring”. Dans *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, p. 124–134. IEEE Computer Society, Washington, DC, USA (1994). URL <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1398518.1399018>.
- [16] L. M. K. VANDERSYPEN, M. STEFFEN, G. BREYTA, C. S. YANNONI, M. H. SHERWOOD, et I. L. CHUANG. “Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance”. *Nature*, **414**, n° 6866, 883 (12 2001). URL <http://dx.doi.org/10.1038/414883a>.
- [17] T. GALLAGHER. *Rydberg Atoms*. Cambridge Monographs on Atomic, Molecular and Chemical Physics. Cambridge University Press (1994).
- [18] V. B. BRAGINSKY et Y. I. VORONTSOV. “Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique”. *Soviet Physics Uspekhi*, **17**, n° 5, 644 (1975). URL <http://stacks.iop.org/0038-5670/17/i=5/a=R02>.
- [19] K. S. THORNE, R. W. P. DREVER, C. M. CAVES, M. ZIMMERMANN, et V. D. SANDBERG. “Quantum nondemolition measurements of harmonic oscillators”. *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 667 (Mar 1978). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.667>.
- [20] C. M. CAVES, K. S. THORNE, R. W. P. DREVER, V. D. SANDBERG, et M. ZIMMERMANN. “On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. issues of principle”. *Rev. Mod. Phys.*, **52**, 341 (Apr 1980). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.52.341>.
- [21] P. GRANGIER, J. A. LEVENSON, et J.-P. POIZAT. “Quantum non-demolition measurements in optics”. *Nature*, **396**, 537 (1998).
- [22] P. GRANGIER, J.-F. M. C. ROCH, et G. ROGER. “Observation of backaction-evading measurement of an optical intensity in a three-level atomic nonlinear system”. *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 1418 (Mar 1991). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.1418>.
- [23] J.-F. ROCH, K. VIGNERON, P. GRELU, A. SINATRA, J.-P. POIZAT, et P. GRANGIER. “Quantum nondemolition measurements using cold trapped atoms”. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 634 (Jan 1997). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.634>.
- [24] S. GLEYZES, S. KUHR, C. GUERLIN, J. BERNU, S. DELÉGLISE, U. B. HOFF, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity”. *Nature*, **446**, 297 (2007).
- [25] C. GUERLIN, J. BERNU, S. DELÉGLISE, C. SAYRIN, S. GLEYZES, S. KUHR, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting”. *Nature*, **448**, 889 (2007).

- [26] S. DELÉGLISE, I. DOSTENKO, C. SAYRIN, J. BERNU, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence”. *Nature*, **455**, 510 (2008).
- [27] M. BRUNE, J. BERNU, C. GUERLIN, S. DELÉGLISE, C. SAYRIN, S. GLEYZES, S. KUHR, I. DOSTENKO, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Process tomography of field damping and measurement of fock state lifetimes by quantum nondemolition photon counting in a cavity”. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 240402 (Dec 2008). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.240402>.
- [28] B. PEAUDECERF, C. SAYRIN, X. ZHOU, T. RYBARCZYK, S. GLEYZES, I. DOSTENKO, J. M. RAIMOND, M. BRUNE, et S. HAROCHE. “Quantum feedback experiments stabilizing fock states of light in a cavity”. *Phys. Rev. A*, **87**, 042320 (Apr 2013). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.042320>.
- [29] C. SAYRIN, I. DOSTENKO, X. ZHOU, B. PEAUDECERF, T. RYBARCZYK, S. GLEYZES, P. ROUCHON, M. MIRRAHIMI, H. AMINI, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states”. *Nature*, **477**, 73 (2011).
- [30] X. ZHOU, I. DOSTENKO, B. PEAUDECERF, T. RYBARCZYK, C. SAYRIN, S. GLEYZES, J. M. RAIMOND, M. BRUNE, et S. HAROCHE. “Field locked to a fock state by quantum feedback with single photon corrections”. *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 243602 (Jun 2012). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.243602>.
- [31] B. PEAUDECERF, T. RYBARCZYK, S. GERLICH, S. GLEYZES, J.-M. RAIMOND, S. HAROCHE, I. DOSTENKO, et M. BRUNE. “Adaptive quantum nondemolition measurement of a photon number”. *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 080401 (Feb 2014). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.080401>.
- [32] C. SAYRIN. *Préparation et stabilisation d’un champ non classique en cavité par rétroaction quantique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2011).
- [33] X. ZHOU. *Champ asservi sur un état de Fock par rétroaction quantique utilisant des corrections à photon unique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2012).
- [34] B. PEAUDECERF. *Mesure adaptative non destructive du nombre de photons dans une cavité*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2013).
- [35] S. GAMMELMARK, B. JULSGAARD, et K. MØLMER. “Past quantum states of a monitored system”. *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 160401 (Oct 2013). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.160401>.
- [36] Y. AHARONOV, P. G. BERGMANN, et J. L. LEBOWITZ. “Time symmetry in the quantum process of measurement”. *Phys. Rev.*, **134**, B1410 (Jun 1964). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.134.B1410>.
- [37] Y. AHARONOV, D. Z. ALBERT, et L. VAIDMAN. “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100”. *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1351 (Apr 1988). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.1351>.

- [38] Y. AHARONOV, P. S., et T. J. “A time-symmetric formulation of quantum mechanics”. *Physics Today*, **63**, 27 (2010).
- [39] J. DRESSEL, M. MALIK, F. M. MIATTO, A. N. JORDAN, et R. W. BOYD. “Colloquium : Understanding quantum weak values : Basics and applications”. *Rev. Mod. Phys.*, **86**, 307 (Mar 2014). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.307>.
- [40] B. SVENSSON. “Pedagogical review of quantum measurement theory with an emphasis on weak measurements”. *Quanta*, **2**, n° 1 (2013). URL <http://quanta.ws/ojs/index.php/quanta/article/view/12>.
- [41] N. W. M. RITCHIE, J. G. STORY, et R. G. HULET. “Realization of a measurement of a "weak value"”. *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 1107 (Mar 1991). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.1107>.
- [42] J. LUNDEEN, B. SUTHERLAND, A. PATEL, C. STEWART, et C. BAMBER. “Direct measurement of the quantum wavefunction”. *Nature*, **474**, n° 7350, 188 (2011).
- [43] H. M. WISEMAN. “Weak values, quantum trajectories and the cavity-QED experiment on wave-particle correlation”. *Phys. Rev. A*, **65**, 032111 (Feb 2002). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.032111>.
- [44] P. CAMPAGNE-IBARCQ, L. BRETHERAU, E. FLURIN, A. AUFFÈVES, F. MALLET, et B. HUARD. “Observing interferences between past and future quantum states in resonance fluorescence”. *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 180402 (May 2014). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.180402>.
- [45] C. COHEN-TANNOUJJI, J. DUPONT-ROC, et G. GRYNBERG. *An introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley (1992).
- [46] E. SCHRÖDINGER. *Collected papers on wave mechanics*. Chelsea Publishing Company (1978).
- [47] R. J. GLAUBER. “Coherent and incoherent states of the radiation field”. *Physical Review*, **131**, n° 6, 2766 (1963).
- [48] S. HAROCHE et J.-M. RAIMOND. *Exploring the Quantum*. Oxford Graduate Texts (2006).
- [49] G. LINDBLAD. “On the generators of quantum dynamical semigroups”. *Communications in Mathematical Physics*, **48**, 119 (1976).
- [50] C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU, et F. LALOË. *Mécanique quantique*. Hermann (1997).
- [51] E. JAYNES et F. CUMMINGS. “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser”. *Proceedings of the IEEE*, **51**, n° 1, 89 (1963). URL <http://dx.doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [52] M. HOFHEINZ, E. M. WEIG, M. ANSMANN, R. C. BIALCZAK, E. LUCERO, M. NEELEY, A. D. O’CONNELL, H. WANG, J. M. MARTINIS, et A. N. CLELAND. “Generation of fock states in a superconducting quantum circuit”. *Nature*, **454**, n° 7202, 310 (juillet 2008). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature07136>.

- [53] J. VON NEUMANN. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press (1955).
- [54] S. HAROCHE. “Mesures quantiques non destructives”. Dans *Cours de Physique Quantique, Collège de France* (2007-2008).
- [55] K. KRAUS. *States, effects and operations*. Springer, Berlin (1983).
- [56] M. BAYES et M. PRICE. “An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. by the late rev. mr. bayes, f. r. s. communicated by mr. price, in a letter to john canton, a. m. f. r. s.” *Philosophical Transactions*, **53**, 370 (1763). <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/53/370.full.pdf+html>, URL <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/53/370.short>.
- [57] M. BAUER et D. BERNARD. “Convergence of repeated quantum non demolition measurement and wave-function collapse”. *Physical Review A*, **84** (2011).
- [58] S. OSNAGHI, P. BERTET, A. AUFFEVEES, P. MAIOLI, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Coherent control of an atomic collision in a cavity”. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 037902 (Jun 2001). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.037902>.
- [59] S. GLEYZES. *Vers la préparation de cohérences quantiques mésoscopiques : réalisation d'un montage à deux cavités supraconductrices*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2006).
- [60] R. G. HULET et D. KLEPPNER. “Rydberg atoms in "circular" states”. *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 1430 (Oct 1983). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1430>.
- [61] M. GROSS et J. LIANG. “Is a circular rydberg atom stable in a vanishing electric field?” *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 3160 (Dec 1986). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.3160>.
- [62] J. HARE. *Étude théorique et expérimentale des atomes de Rydberg circulaires : vers une mesure directe de la constante de Rydberg en unités de fréquence*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (1991).
- [63] P. BOSLAND, A. ASPART, E. JACQUES, et M. RIBEAUDEAU. “Preparation and rf tests of l-band superconducting niobium-coated copper cavities”. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, **9**, n° 2, 896 (1999).
- [64] S. KUHR, S. GLEYZES, C. GUERLIN, J. BERNU, U. B. HOFF, S. DELÉGLISE, S. OSNAGHI, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, S. HAROCHE, E. JACQUES, P. BOSLAND, et B. VISENTIN. “Ultrahigh finesse fabry-pérot superconducting resonator”. *Applied Physics Letters*, **90**, 164101 (2007).
- [65] J. D. JACKSON. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 3 édition (1999).
- [66] S. BRATTKE, B. T. VARCOE, et H. WALTHER. “Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics”. *Physical Review Letters*, **86**, n° 16, 3534 (2001).

- [67] E. M. PURCELL. “Spontaneous emission probabilities at radio frequencies”. *Physical Review*, **69**, 681 (1946).
- [68] J. I. KIM, K. M. FONSECA ROMERO, A. M. Horiguti, L. DAVIDOVICH, M. C. NEMES, et A. F. R. DE TOLEDO PIZA. “Classical behavior with small quantum numbers : The physics of Ramsey interferometry of Rydberg atoms”. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4737 (1999). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.4737>.
- [69] S. M. BARNETT et P. M. RADMORE. *Methods in Theoretical Quantum Optics*. Clarendon Press (2002).



# Application de la méthode de l'« état passé » à la mesure quantique non-destructive du nombre de photons dans une cavité

**Résumé** Nous étudions expérimentalement l'évolution d'états nombre du champ micro-onde contenu dans une cavité Fabry-Perot de grande finesse. Pour sonder le champ, nous envoyons un par un des atomes de Rydberg circulaires qui interagissent de manière dispersive avec le mode du champ. Grâce à un interféromètre atomique de Ramsey, nous mesurons le nombre de photons  $n$  de façon non-destructive. L'estimation usuelle de l'état du champ à l'instant  $t$  est issue de l'analyse des résultats de mesure obtenus avant  $t$ . Dans ce manuscrit, nous présentons la méthode de l'« état passé » qui utilise l'ensemble complet des mesures des sondes avant et après  $t$ . L'état passé du champ est une meilleure estimation de l'état réel que ne l'est la matrice densité. La quasi absence de bruit sur les trajectoires quantiques individuelles du champ permet la résolution efficace, à posteriori, des sauts quantiques. De plus, l'état passé permet d'aller au-delà la limite principale de notre mesure QND liée à la périodicité de la mesure interférométrique. Nous pouvons désormais observer des états de Fock avec  $n \geq 8$ , inaccessibles par la méthode d'analyse habituelle, et nous mesurons leurs taux de relaxation.

**Mots-clés** CQED, mesure quantique non-destructive, état passé, états de Fock, atomes de Rydberg circulaires, interféromètre de Ramsey.

## Past quantum state method applied to the quantum non-demolition measurement of the photon number in a cavity

**Abstract** We experimentally study the evolution of photon-number states of a microwave field stored in a very high finesse Fabry-Perot cavity. To probe the field, we send one by one circular Rydberg atoms which interact dispersively with the cavity mode. Using the Ramsey interferometry technique, we perform a quantum non-demolition measurement of the photon number  $n$ . The standard estimate of the field's state at time  $t$  is based on the analysis of all measurements performed before this time. In this manuscript, we present the implementation of the “past quantum state” analysis which uses the complete ensemble of the probes detection results obtained both before and after time  $t$ . The past state is a better estimate of the real field state than the density matrix. The almost noiseless reconstructed quantum trajectories make the resolution of quantum jumps of the field more efficient. Furthermore, the past state method allows us to remove the main restriction of our QND measurement related to its interferometric periodicity. We are now able to observe photon number states with  $n \geq 8$ , which were inaccessible with the standard analysis, and measure their decay rates.

**Keywords** CQED, quantum non-demolition measurement, past state, Fock states, circular Rydberg states, Ramsey interferometer.