



HAL
open science

Identification and modeling of jointed structures for dynamic analysis

Hugo Festjens

► **To cite this version:**

Hugo Festjens. Identification and modeling of jointed structures for dynamic analysis. Other. Ecole Centrale Paris, 2014. English. NNT : 2014ECAP0028 . tel-01081475

HAL Id: tel-01081475

<https://theses.hal.science/tel-01081475v1>

Submitted on 8 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Présentée par Hugo FESTJENS

pour l'obtention du
GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : Science pour l'ingénieur

Laboratoire d'accueil : LISMMA-SUPMECA, EA-2336

Contribution à la caractérisation et à la modélisation du comportement dynamique des structures assemblées

Soutenue le : lundi 10 mars 2014

Devant un jury composé de :

Étienne BALMÈS
Jean-Jacques SINOÛ
Gaëtan KERSCHEN
Claude BLANZÉ
Imad TAWFIQ
Gaël CHEVALLIER
Jean-Luc DION
Cyrille STEPHAN

Président de jury
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Directeur de thèse
Co-directeur de thèse
Co-directeur de thèse
Invité

Résumé

Les liaisons boulonnées ou rivetées sont, en apparence, l'un des systèmes mécaniques parmi les plus simples qui soient. La fonction première de ces éléments est d'assurer un encastrement rigide entre les composants qu'elles assemblent. Le dimensionnement de ces pièces aux efforts statiques nominaux est un problème assez largement résolu. Néanmoins, ces composants suscitent l'intérêt des ingénieurs et chercheurs depuis plus de 50 ans. Ce paradoxe s'explique en partie par l'amortissement important que ces liaisons produisent au sein des structures. Les efforts subis par les liaisons d'assemblages provoquent le glissement partiel des interfaces de contact. Il résulte de ce glissement, une dissipation par frottement qui est une source majeure d'amortissement des structures aéronautiques. Le niveau vibratoire d'un système est directement lié à son amortissement, c'est à dire à sa capacité à dissiper ou à accumuler de l'énergie. Dans le domaine du transport, entre autres, les vibrations sont néfastes car elles nuisent au confort des usagers ou à l'intégrité des structures. Le bon dimensionnement des assemblages est donc de nature à améliorer le comportement vibratoire des systèmes mécaniques. Actuellement, les outils de calcul numériques permettent d'estimer assez précisément les modes et fréquences propres d'une structure à priori mais l'amortissement, c'est à dire le niveau vibratoire, reste une donnée mesurée, à posteriori au travers d'essais coûteux. Ceci s'explique par le caractère multi-échelle et la complexité des problèmes de contact. Ainsi, le comportement dynamique des assemblages reste un sujet d'étude très privilégié. Les travaux de cette thèse cherchent à répondre de manière pratique au besoin de produire des modèles réduits de structures assemblées pour la dynamique.

Mots clefs : Dynamique des structures assemblées, Glissement partiel, Réduction de modèle, Filtres de Kalman unscented, Modèles phénoménologiques.

Abstract

At first sight, riveted and bolted connections seem to be one of the simplest mechanical systems possible. The primary function of these elements is to provide a rigid clamping between the components they assemble. The designing of these parts to nominal static stresses is already quite mastered. However, engineers are still bothered when it comes to modeling these components which have been studied for more than 50 years. This paradox can be explained by the large damping ratios joints generate in structures. The vibration level of a system is directly related to its damping ratio, i.e. its ability to dissipate or store energy. In the field of transport, among others, vibrations are unwanted because they affect the comfort of the users or the integrity of structures. A good designing of jointed structures is likely to improve the vibration behavior of mechanical systems. Nowadays, numerical calculations allow for the computing of the modes but the damping is still measured, a posteriori, through expensive tests. This is explained by the multi-scale nature and the complexity of contact physics. That is why the dynamic behavior of assembled structures remains an area of study for researchers. The work of this thesis aims to provide practical solutions for the identification and the designing of reduced order models for the dynamics of assembled structures.

Keywords : Built-up structures, Micro-sliding, Partial sliding, Reduction order model, Unscented Kalman filters, Phenomenological models.

Publications & communications

Articles de revues :

- [1] H. Festjens, G. Chevallier, F. Renaud, J.L. Dion, and R. Lemaire. Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : A numerical study. *Applied Acoustics*, 73(11) :1121–1128, November 2012.
- [2] J.L. Dion, C. Stephan, G. Chevallier, and H. Festjens. Tracking and removing modulated sinusoidal components : A solution based on the kurtosis and the extended kalman filter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013.
- [3] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013.
- [4] H. Festjens, G. Chevallier, and J. L. Dion. Nonlinear model order reduction of jointed structures for dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7) :2100–2113, March 2014.
- [5] H. Festjens, Ben Brahim C. Stephan, C., J.L. Dion, and G. Chevallier. Are iwan models relevant to model joints? SUBMITTED.

Colloques internationaux :

- [1] J.L. Dion, G. Chevallier, N. Peyret, F. Renaud, and H. Festjens. Optimization of the spectral kurtosis for harmonic component detection. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE)*. ASME, 2011.
- [2] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. A numerical quasi-static method for the identification of frictional dissipation in bolted joints. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE)*, pages 353–358. ASME, August 2012.
- [3] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. Numerical investigations on modal microsliding dissipations in built-up structures. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 2012, pages 4769–4777. Institute of Noise Control Engineering, 2012.
- [4] G. Chevallier, H. Festjens, F. Renaud, and J.-L. Dion. Pressure measurement sensor for jointed structures. In *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, pages 383–388. Springer New York, January 2013.
- [5] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. Model order reduction of assembled structures for dynamic analysis-detc2013-12971. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE)*. ASME, 2013.

Remerciements

Ce travail de thèse n'aurait évidemment pas été possible sans la compétence et l'énergie de mes encadrants. Je souhaite les remercier tout particulièrement.

Merci à Gaël Chevallier qui m'a initié au monde de la recherche, guidé tout au long de la thèse et a su révéler mes qualités de scientifique.

Merci à Jean-luc Dion pour sa pédagogie, pour avoir guidé mes travaux et pour son envie de toujours apporter la contradiction enrichissante.

Pour ces raisons, pour leur disponibilité et leur compréhension, je veux leur faire part de toute mon estime et de mon admiration.

Je souhaite aussi remercier :

Mon jury de thèse d'avoir accepté de lire et de juger mon travail,
La direction du LISMMA de m'avoir accueilli dans les locaux de Supmeca,
Les membres académiques et industriels du projet MAIAS,
Imad Tawfic pour avoir accepté la direction de ma thèse,
Cyrille Stephan de m'avoir permis de comprendre Kalman,
Franck Renaud pour les compétences qu'il m'a transmis naturellement,
Nicolas Peyret et son microslip,
Fatma Abid de m'avoir supporté si gentiment,
Rémi Binois pour son amitié,
Véronique Da Silva et Christelle Compagnon pour leur travail,
Abdelghani Larbi et Salem Toumi pour avoir fabriqué mes manips,
Christophe Ben Brahim et Arkadiusz Kosecki pour leur aide indispensable,
Les acousticiens de travailler sur des problèmes linéaires,
L'équipe de tribologie pour leur café, leur profilomètre et leurs mots croisés.

Merci enfin à ma famille et à mes amis qui m'ont soutenus dans les nombreux moments de doutes, lors de ma soutenance, et qui eux aussi ont fortement contribué à la réussite de mon travail.

Introduction

Les liaisons boulonnées ou rivetées sont, en apparence, l'un des systèmes mécaniques parmi les plus simples qui soient. La fonction première de ces éléments est d'assurer un encastrement rigide entre les composants qu'ils assemblent. Le dimensionnement de ces pièces aux efforts statiques nominaux est un problème assez largement résolu. Néanmoins, ces composants suscitent l'intérêt des ingénieurs et chercheurs depuis plus de 50 ans. Ce paradoxe s'explique en partie par l'amortissement important que ces liaisons produisent au sein des structures.

Les efforts subis par les liaisons d'assemblages provoquent le glissement partiel des interfaces de contact. Il résulte de ce glissement, une dissipation par frottement qui est une source majeure d'amortissement des structures aéronautiques, voir [Ung73]¹, [Gro85], [GN01]. Le niveau vibratoire d'un système est directement lié à son amortissement, c'est à dire à sa capacité à dissiper ou à accumuler de l'énergie. Dans le domaine du transport, entre autres, les vibrations sont néfastes car elles nuisent au confort des usagers ou à l'intégrité des structures et des composants qu'elles embarquent. Le bon dimensionnement des assemblages est donc de nature à améliorer le comportement vibratoire des systèmes mécaniques. Actuellement, les outils de calcul numériques permettent d'estimer assez précisément les modes et fréquences propres d'une structure *a priori* mais l'amortissement, c'est à dire le niveau vibratoire, reste une donnée identifiée, à postériori au travers d'essais coûteux. Ceci s'explique par le caractère multi-échelle du phénomène de glissement partiel. Ainsi le comportement dynamique des liaisons rivetées et vissées reste un sujet d'étude très privilégié. Les travaux de cette thèse cherchent à répondre de manière pratique au besoin de produire des modèles réduits de structures assemblées pour la dynamique.

Un état de l'art est proposé dans le premier chapitre. Il y est notamment présenté le principe de mode linéarisé équivalent sous les hypothèses simplificatrices de faible non-linéarité et de découplage modal. Ce cadre est celui sous lequel se place les thèses de Heller [Hel05], Caignot [Cai09] et Peyret [Pey12]. La première partie de la thèse repose sur cette approche. Le chapitre 2 est une illustration, appliquée à un cas élémentaire, des principes fondamentaux présentés dans le premier chapitre. Les chapitres 3 et 4 présentent respectivement deux méthodes d'identification des structures au travers de

1. Voir bibliographie générale page 216

l'estimation des paramètres modaux équivalents ; l'une est une formulation de filtre de Kalman qui est appliquée aux études expérimentales, l'autre est une méthode de simulation à faible coût basée sur une écriture quasi-statique qui est appliqué au calcul éléments finis. Le chapitre suivant est une analyse de l'influence de divers paramètres physiques sur le comportement dynamique des assemblages. Cette étude expérimentale est basée sur la caractérisation de bancs d'essais élémentaires.

La seconde partie traite le problème de couplage modal. Une méthode de réduction basée sur le principe original de "sollicitations principales" constitue une alternative pragmatique à l'approche modale. Cette technique, développée au chapitre 6, permet notamment l'identification des liaisons à une échelle locale tout en conservant les principales propriétés dynamiques de la structure complète. Les mouvements principaux sont associés à des macro-modèles qui sont utilisés pour représenter le comportement global d'une liaison sous un chargement donné. Dans le dernier chapitre, une formule analytique reliant la dépendance à l'amplitude de la fréquence et de l'amortissement permet de vérifier si le modèle de Iwan peut être employé pour un cas donné. Une étude expérimentale, permettant d'évaluer l'importance du couplage modal, est finalement présentée.

Les travaux développés aux chapitres 4, 6 et 7 ont fait, ou sont en cours de faire l'objet de publications dans différentes revues scientifiques. La forme des articles est conservée ici, ce qui signifie notamment que ces chapitres sont rédigés en anglais, intègrent une courte bibliographie et peuvent être, très ponctuellement, redondants avec ce qui est présenté par ailleurs.

Le cadre de la thèse est celui de la dynamique vibratoire. Le dimensionnement des liaisons aux efforts statiques ou la fatigue et à l'endommagement des surfaces ou des matériaux n'est pas traité.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	5
Publications et conférences	7
Remerciements	9
Introduction	11
1 État de l’art	17
1.1 Introduction	18
1.2 Les différentes approches de modélisation	22
1.2.1 Modélisation du phénomène de glissement partiel	23
1.2.2 Modèles de liaison phénoménologiques	27
1.3 Études expérimentales	34
1.3.1 Comportement faiblement non-linéaire des structures	35
1.3.2 Hypothèse de découplage modal	41
1.3.3 Cas de Metherell et Diller	42
1.3.4 Problème de Goodman et Klumpp et autres cas	44
1.3.5 Techniques de traitement du signal	44
1.4 Positionnement des travaux de la thèse	47
Bibliographie du chapitre 1	48
2 Dynamique modale	55
2.1 Rhéologie associée à un mode d’une structure assemblée	56
2.2 Paramètres modaux équivalents	57
2.2.1 Balance harmonique	59
2.2.2 Calcul des paramètres équivalents	63
2.2.3 Calcul de la réponse harmonique à partir du modèle équivalent	65
Bibliographie du chapitre 2	69
3 Filtrage de Kalman	71
3.1 Estimation des paramètres modaux	72
3.2 Filtrage de Kalman	74
3.2.1 Principe	74
3.2.2 Les équations de l’algorithme de Kalman linéaire	75

Table des matières

3.2.3	Extension du filtrage de Kalman aux systèmes non-linéaires	76
3.2.4	Filtrage de Kalman étendu et <i>unscented</i>	78
3.2.5	Plusieurs capteurs - plusieurs modes (MIMO)	82
3.2.6	Initialisation du filtre de Kalman	84
3.3	Mise en œuvre et vérification de la méthode	86
3.3.1	Systèmes à un degré de liberté - mesure de déplacement	86
3.3.2	Systèmes à plusieurs degrés de libertés - mesures d'accélération bruitées	90
3.4	Conclusion	94
	Bibliographie du chapitre 3	95
4	Simulations locales	97
4.1	Préambule	98
4.2	Introduction	100
4.3	Governing equations	101
4.3.1	Computation of the linear mode basis	101
4.3.2	Model reduction	102
4.4	Amplitude-dependant mode shape	104
4.4.1	Open loop algorithm	104
4.4.2	Closed loop algorithm	105
4.5	Computation of the dynamic parameters	107
4.5.1	Computation of the dissipated energy with the use of the Masing rules	107
4.5.2	FEP and DEP	108
4.5.3	Dynamic behavior of the structure	109
4.6	Example: the lap-joint benchmark	109
4.6.1	The model	110
4.6.2	The dynamic simulation	112
4.6.3	Results	113
4.6.4	Discussion	114
4.7	Conclusion	117
	Bibliographie du chapitre 4	118
5	Essais de caractérisation	121
5.1	Bancs d'essais de caractérisation	122
5.2	Montage <i>lap-joint</i> encastré-libre	123
5.2.1	Géométrie - conditions et moyens d'essais	123
5.2.2	Résultats d'essais	125
5.2.3	Couplage modal	129
5.2.4	Répétabilité	130
5.2.5	Corrélation essais-calculs	131
5.3	Liaison SSS du SYLDA5	134
5.4	Banc d'essai <i>lap-joint</i> en H	136
5.4.1	Géométrie - conditions et moyens d'essais	136
5.4.2	Répétabilité	138
5.4.3	Résultats d'essais	140
5.4.4	Dépendance de la déformée modale à l'amplitude	142

5.5	Conclusion et perspectives	147
	Bibliographie du chapitre 5	148
6	Sollicitations principales	149
6.1	Préambule	150
6.2	Introduction	152
6.3	Reduced order formulation	153
6.4	Identification of the joint rheology	155
6.4.1	The test bench structure	155
6.4.2	The joint mode basis	156
6.4.3	Reduction on macro-models	157
6.4.4	Identification of the macro-models	158
6.4.5	Alteration of the mode shape	159
6.4.6	Inclusion of the macro-models in the whole model	160
6.5	Example: clamped-free jointed beams	161
6.5.1	The whole structure	161
6.5.2	Identification of the bolted-joint	162
6.6	Results and discussion	167
6.6.1	ROMs versus FULL order model	167
6.6.2	Validity of the PJSB	171
6.7	Conclusion	173
	Bibliographie du chapitre 6	174
7	Modèles de Iwan	177
7.1	Préambule	178
7.2	Introduction	179
7.3	Definition of a generic macro-model for joints	180
7.3.1	Test bench	180
7.3.2	Low amplitude linearization	181
7.3.3	Weak non-linear assumption	182
7.3.4	The generic form of macro-model	183
7.4	Identification of the joint dynamic	184
7.4.1	Identification of the equivalent parameters with Kalman filters	184
7.4.2	Equivalent frequency and damping properties of the Iwan oscillator	184
7.5	Experimental investigations	189
7.5.1	Experimental setup	189
7.5.2	Estimation of the equivalent parameters	192
7.5.3	Iwan oscillator versus experiments	196
7.6	Modal de-coupling assumption	200
7.6.1	Modal coupling	200
7.6.2	Experimental investigations	200
7.7	Conclusion	205
	Bibliographie du chapitre 7	206
	Conclusion et perspectives	209

Table des matières

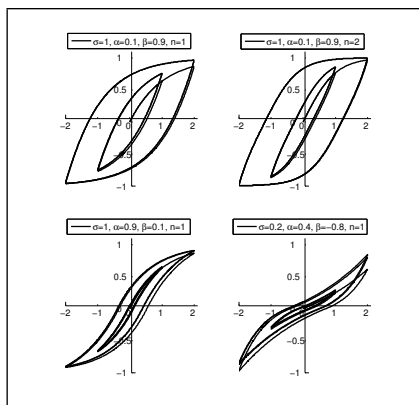
Annexe	215
Bibliographie générale	216

Chapitre 1

État de l'art

Sommaire

1.1	Introduction	18
1.2	Les différentes approches de modélisation	22
1.2.1	Modélisation du phénomène de glissement partiel	23
1.2.2	Modèles de liaison phénoménologiques	27
1.3	Études expérimentales	34
1.3.1	Comportement faiblement non-linéaire des structures	35
1.3.2	Hypothèse de découplage modal	41
1.3.3	Cas de Metherell et Diller	42
1.3.4	Problème de Goodman et Klumpp et autres cas	44
1.3.5	Techniques de traitement du signal	44
1.4	Positionnement des travaux de la thèse	47
	Bibliographie du chapitre 1	48



Résumé

Ce chapitre vise à donner les principes élémentaires de la modélisation et de l'identification des liaisons visées ou rivetées et des structures assemblées. Les objectifs et originalités de cette thèse sont replacés par rapport à l'état de l'art.

1.1 Introduction

Les liaisons d'assemblage ont pour fonction d'assembler rigidement plusieurs éléments d'une structure mécanique. Les efforts entre les pièces de liaison sont transmis au travers d'un certain nombre d'interfaces. Ces pièces sont maintenues en contact à l'aide de systèmes de vis-écrous ou de rivets. À l'échelle macroscopique, les efforts de contact entre deux surfaces nominale-ment planes résultent d'une part de la condition de non-interpénétration dans la direction normale et d'autre part de la force de frottement dans le plan tangentiel qui ne peut pas excéder une fraction de la force normale. Cette valeur maximale n'est atteinte qu'à l'état de glissement total des interfaces entre elles. Les pièces d'assemblages sont dimensionnées de façon à ce que les efforts qu'elles subissent n'engendrent pas le glissement total des interfaces. **Ainsi la dissipation par friction dans les assemblages est due au glissement partiel d'une faible portion des interfaces tandis que la majeure partie du contact reste en adhérence.**

La figure 1.1 présente l'usure de l'interface de contact d'une liaison d'assemblage. Cette détérioration est caractéristique de la dissipation d'énergie par frottement.



Figure 1.1 – Usure caractéristique d'une interface de contact signifiant la dissipation d'énergie par frottement.

La figure 1.2 est un zoom sur l'encadré blanc de la figure précédente. On y voit l'usure caractéristique d'une interface de contact autour d'un trou de vis.

Ce profil d'usure permet de présenter quelques caractéristiques élémentaires de ce phénomène de glissement partiel. Tout d'abord, rappelons que les efforts de friction ne peuvent exister que dans les zones où la force normale est non-nulle. Lorsque deux pièces sont serrées entre elles, le contact ne s'établit pas de manière uniforme mais est localisé sous les têtes de vis comme on peut le voir sur la figure 1.1. La répartition de pression de contact à l'interface peut être calculée analytiquement dans l'hypothèse de matériaux élastiques et de surfaces idéalement planes, voir [Gui97]¹, [CM77]. Ces études montrent que la pression de contact est maximale au bord du trou et qu'elle s'annule à

1. voir bibliographie partielle du chapitre page 48

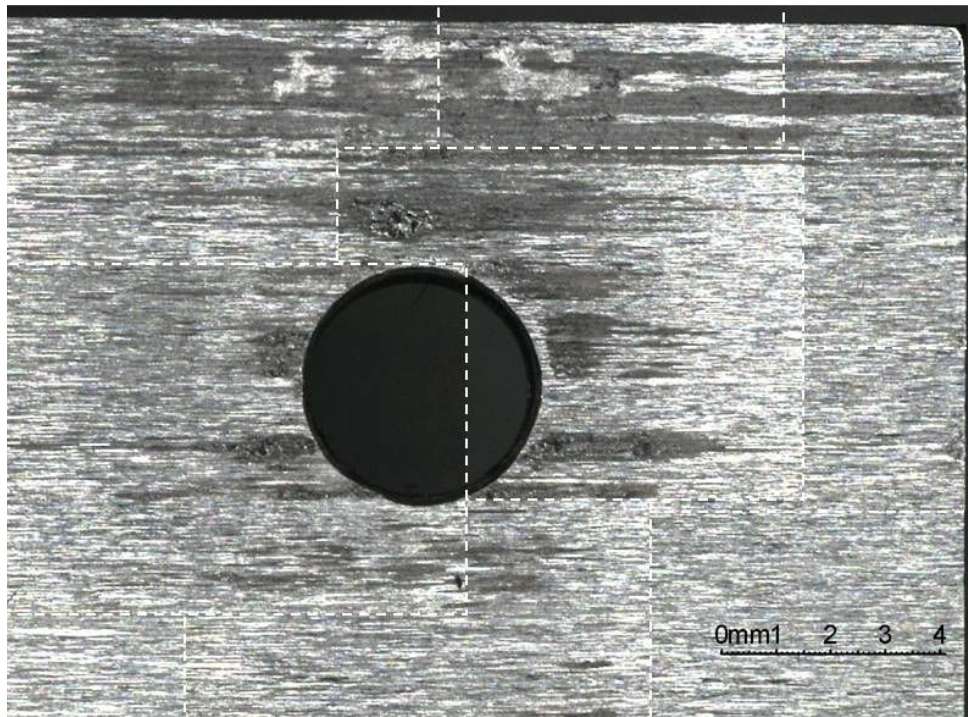


Figure 1.2 – Usure caractéristique d’une interface de contact autour d’un trou de vis.

partir d’un certain rayon à partir duquel il y a décollement des interfaces. En réalité, les surfaces de contact des pièces métalliques possèdent des défauts. On voit nettement ici que l’usure ne s’est pas produite uniformément à rayon identique mais est localisée sur les stries d’usinage.

Les efforts de contact entre deux pièces métalliques s’exercent au travers de micro-irrégularités, appelées aspérités qui sont dues à la matière elle même, aux procédés d’obtention ainsi qu’aux outils d’usinage. On distingue classiquement six différents ordres de défauts de surface, de la plus petite échelle à la plus grande :

- Ordre 6 - Les défauts du réseau cristallin : Dislocation - Échelle 1e-9m.
- Ordre 5 - Les défauts de structure cristalline : Terrasse, crête ou Décrochement - Échelle : de 1e-9 à 1e-7m.
- Ordre 4 - Les défauts localisés : marque d’outil, arrachement, fente, piqûre - Échelle : de 1e-6 à 1e-5m
- Ordre 3 - Les stries et sillons : défauts périodiques ou pseudo-périodiques - Échelle : l’écart entre les crêtes est compris entre 0,02 et 0,5 mm
- Ordre 2 - L’ondulation : idem - Échelle : l’écart entre les crêtes est compris entre 0,5 et 2,5 mm
- Ordre 1 - Les écarts de forme : défauts de planéité, de rectitude, de circularité, etc. - Échelle : macroscopique

Les échelles du contact s’étendent donc grossièrement du nanomètre au mètre. Le contact entre deux pièces métalliques ne se fait que sur une très faible

fraction de la surface nominale et ceci indépendamment de la force de serrage. Les forces de frottement héritent elles aussi de cette propriété et le glissement partiel se produit à différentes échelles au sein des interfaces de contact.

Afin de mettre en évidence le principe de glissement partiel, nous considérons désormais un essai de frottement élémentaire. La figure 1.3 présente un moyen de d'essai appelé "tribomètre de fretting" qui permet de caractériser plusieurs aspects du contact frottant notamment l'usure et la fatigue par micro-glissement. Il s'agit ici d'un contact élémentaire plan entre un pion cylindrique et une piste. L'effort normal est constant. La piste est reliée rigidement au bâti et le pion est soumis à un effort transverse appliqué à l'aide d'un pot vibrant. La figure 1.4 montre trois courbes d'hystérésis caractéristiques.

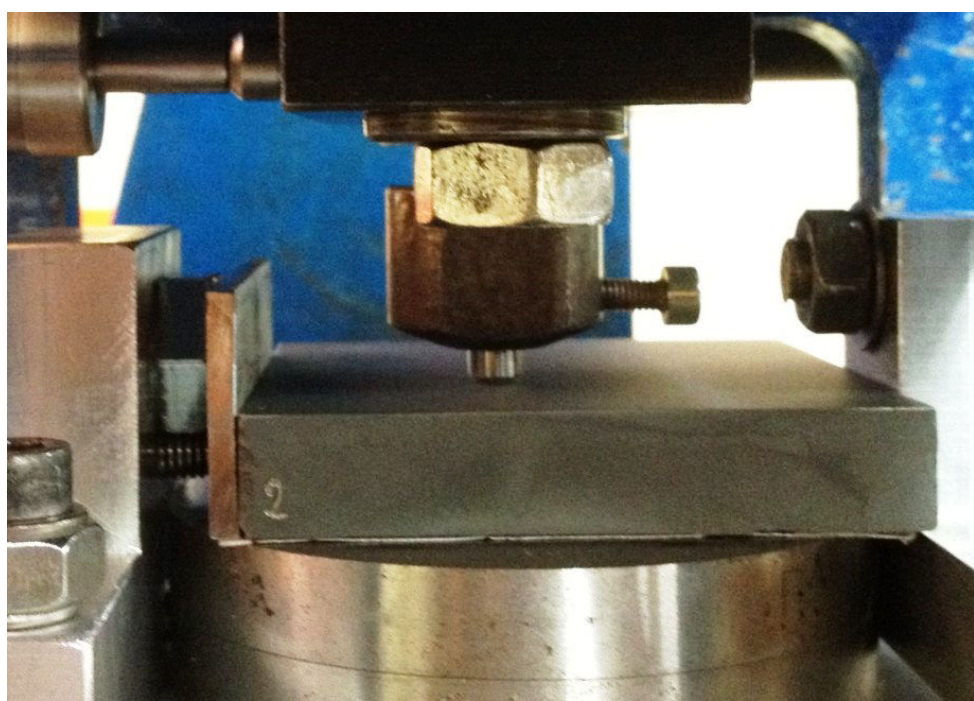


Figure 1.3 – Essai de frottement élémentaire sur tribomètre de fretting.

Ces courbes sont obtenues en traçant le régime stabilisé de la force tangentielle en fonction du déplacement du pion. Ces courbes sont obtenues en appliquant trois chargements cycliques d'amplitude différentes. Nous observons ici trois régimes de frottement : adhérence/collage - glissement partiel/mixte - glissement total/macro-glissement. Les pièces en contact soumises à un chargement tangentiel de nul à très faible sont en état d'adhérence total. En absence de glissement, la raideur de contact est constante et la force de frottement dépend linéairement de l'amplitude. Dans ce cas, les points directement en contact n'ont pas de mouvement relatif et le déplacement mesuré n'est dû qu'à l'élasticité du matériau. La dissipation, égale au travail de la force de frottement, est nulle. En réalité, même pour les amplitudes les plus faibles, il est probable que le glissement de quelques aspérités microscopiques se produise sans pour autant entraîner une quantité de dissipation mesurable.

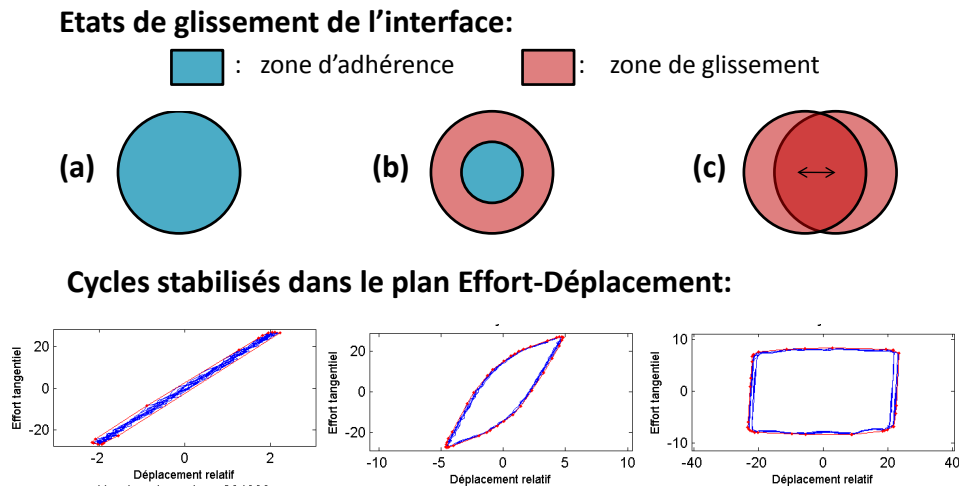


Figure 1.4 – Les différents régime du contact frottant.

Le régime de glissement partiel est visible pour des amplitudes de chargement d'amplitude supérieures. Pour ce second cas, on observe un assouplissement lié au glissement des interfaces. Cependant la perte de charge n'est que partielle puisque la raideur instantanée ne s'annule pas au cours d'un cycle. Le régime de glissement partiel se traduit physiquement par la perte d'adhérence d'une partie de l'interface. Il est courant de distinguer un régime intermédiaire appelé "micro-glissement" correspondant au glissement des micro-aspérités de la surface rugueuse sans perte d'adhérence à l'échelle macroscopique. Cet état peut être vu comme l'amorce du cas de glissement partiel. Notons cependant qu'il n'existe pas dans la littérature de frontière clairement définie entre ces deux états qui sont souvent confondus. Lorsque toutes les aspérités d'une portion de contact glissent, alors la sous partie est elle-même en état de glissement.

Le glissement total de toute l'interface est finalement obtenu lorsque toutes les sous-parties du contact sont en plein glissement. Les états d'adhérence, (de micro-glissement) de glissement partiel puis de macro-glissement sont obtenus en cascade à mesure que l'effort croit. Distinguons ici le cycle de glissement stabilisé qui sera appelé "régime" de glissement et l'état de glissement instantané. Par exemple le régime de macro-glissement passe par les trois états d'adhérence, de glissement partiel et de glissement total au cours d'un cycle.

Les efforts dynamiques responsables du glissement partiel dans les liaisons sont dus aux vibrations des structures. Les méthodes de sous-structuration associées aux méthodes éléments finis permettent aujourd'hui de calculer avec une précision importante et pour un faible coût (de temps de calcul) le comportement dynamique des structures linéaires. Les vibrations des structures assemblées résultent du couplage des parties linéaires, réductibles, pour simplifier des volumes, et des différentes zones de non-linéarité qui ne sont pas réductibles par une approche classique. Nous avons vu que les ordres de gran-

deux géométriques qui déterminent le comportement des interfaces de contact (compris entre $1e-9m$ et $1e-3m$) sont immensément moindres que celle de la structure complète (de l'ordre du mètre). Il en est de même pour les temps caractéristiques. Les grandes structures peuvent de surcroît être composées d'une grande quantité de liaisons et donc d'un nombre immense d'interfaces de contact. On mesure ainsi pourquoi il est si difficile d'intégrer le comportement des liaisons dans le calcul des vibrations de grande structures.

1.2 Les différentes approches de modélisation

Nous distinguons ici deux familles de travaux traitant du comportement dynamique des liaisons :

- La première est l'étude des efforts régissant la physique du contact. Cette approche nécessite la mesure des propriétés fondamentales des matériaux ainsi que celle des états microscopiques des surfaces en contact. Cette branche de la mécanique appelée tribologie vise à fournir des modèles indépendants de la géométrie nominale des pièces. Les modèles obtenus sont très réalistes par rapport à la physique fondamentale mais possèdent généralement un grand nombre de paramètres. On parle de modèle *a priori*, *physics-based* ou encore de modèle *white box*.
- La seconde approche consiste à construire des modèles globaux ou "macro-modèles" afin de réduire la liaison à son mouvement d'ensemble sous un chargement donné. Ces modèles ne sont généralement pas dérivés de lois fondamentales mais sont simplement basés sur l'observation empirique du comportement dynamique des liaisons. L'objectif final de ces modèles est donc de fournir une approximation acceptable des liaisons permettant le calcul à moindre coût. Les paramètres de ces modèles sont recalés à partir d'essais expérimentaux ou numériques. Les mesures de caractérisation sont le plus communément réalisées sur un banc d'essai élémentaire contenant la liaison isolée de la structure qu'elle assemble. Il est aussi possible simuler ces essais à l'aide d'un modèle *white box*. Ces modèles empiriques sont couramment appelés modèles phénoménologiques, "macro-modèles" ou encore modèles *grey box*.

Dans ce chapitre, ces deux approches complémentaires sont explicitées et les principaux travaux associés sont présentés.

1.2.1 Modélisation du phénomène de glissement partiel par la physique du contact

Travaux analytiques fondateurs et autres études analytiques

Les premiers travaux cherchant à modéliser le phénomène de glissement partiel dans les assemblages remonte aux années 50 et sont dus à Goodman et Klumpp [GK56].

Le problème de Goodman et Klumpp consiste en l'étude de deux poutres encastrées-libres serrées l'une contre l'autre sous un chargement uniforme et soumises à un effort tranchant appliqué de manière quasi-statique, voir figure 1.5 (a). Metherell et Diller [MD68] résolvent avec une approche similaire le cas de deux poutres chevauchées pré-chargées uniformément et soumises à un effort latéral, voir 1.5 (b). En anglais, ce cas d'étude est communément appelé *shear lap joint*, voir figure 1.5. Earles [Ear66] étudie aussi le régime de macro-glissement pour lequel les rivets subissent du cisaillement.

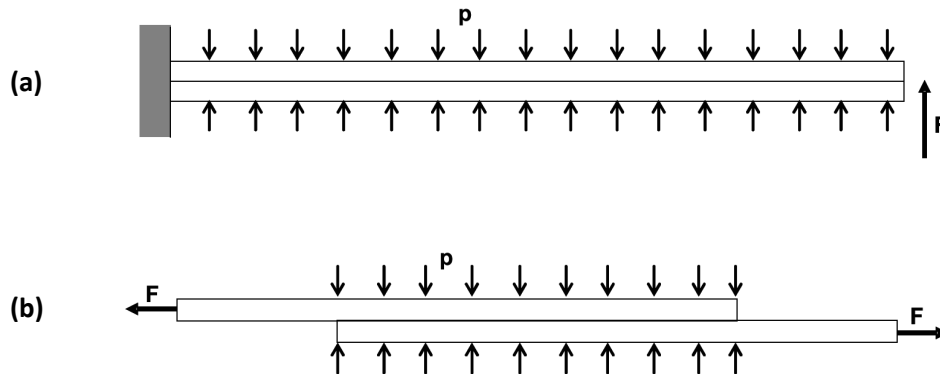


Figure 1.5 – (a) Modèle de Goodman et Klumpp (GK)- Modèle de Metherell et Diller (MD) - Source [PDCA10].

Ces études analytiques supposent l'interface de contact idéalement plane et le frottement est localement supposé suivre la loi de frottement de Coulomb. Sous l'action de l'effort (tranchant dans le premier cas (a), de traction dans le second (b)), une contrainte de cisaillement se produit le long de l'interface. Le cisaillement n'est pas uniforme et le glissement apparaît dans la zone où la contrainte tangentielle atteint la limite d'adhérence égale à la pression p multipliée par le coefficient de frottement μ . L'interface se divise donc en une zone d'adhérence au centre de la liaison et une zone de glissement aux extrémités comme on peut le voir sur la figure 1.6.

La force de friction qui résulte du contact frottant entre les deux objets élastiques dépend de l'histoire du chargement. Sous un chargement cyclique, la courbe de force tangentielle-déplacement prend la forme d'un hystéresis qui

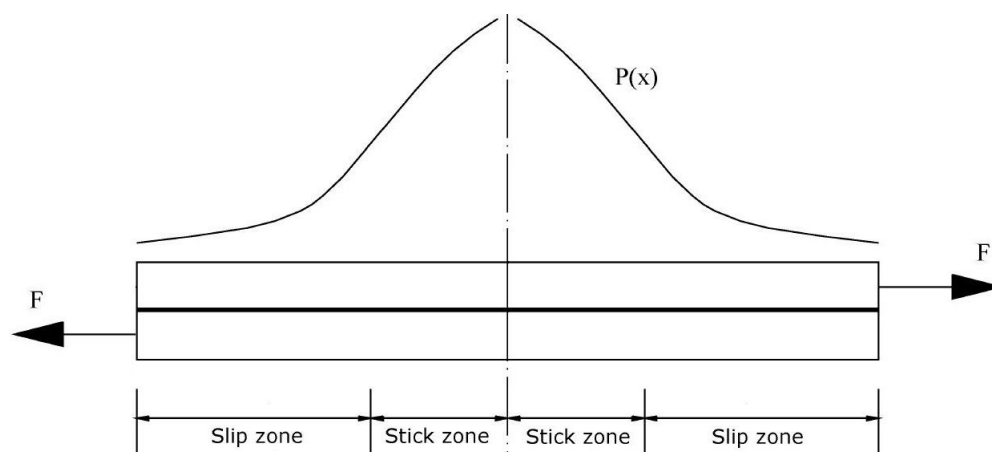


Figure 1.6 – Glissement partiel dans une interface de contact - Source [SM05].

traduit le processus de dissipation par friction. Goodman et Klumpp puis Metherell et Diller ont par ailleurs établi une relation identique liant la force appliquée et la dissipation par cycle D . Celle-ci évolue théoriquement comme le cube de la force de chargement $D \propto F^3$. Ces deux cas d'études ont fait date dans la communauté des chercheurs travaillant sur le problème de liaisons d'assemblage. L'approche analytique est encore explorée aujourd'hui, notamment avec des hypothèses plus réalistes, voir [Nan06], [DOOO08], [PDCA10]. Notons par exemple que Song [SM05] traite le problème de Metherell et Diller dans le cas d'une répartition gaussienne de pression sous tête de vis, voir figure 1.6. La dissipation par cycle apparaît dans ce cas comme une série de puissance de la force d'ordre supérieur ou égal à 3.

Le calcul analytique a l'avantage de proposer une relation directe entre effort et dissipation. Cependant cette approche est hélas restreinte à l'étude de géométries simplistes puisqu'elle consiste à modéliser la liaison comme un espace à une seule dimension. Cette approche n'est donc pas applicable dans le cas de structures industrielles qui possèdent généralement une géométrie complexe avec un grand nombre de singularités tels que des trous ou des arêtes. L'approche numérique par éléments finis permet de régler le problème géométrique.

L'approche éléments finis

Le problème de contact frottant peut être résolu avec une approche éléments finis avec l'hypothèse de non-pénétration des éléments en contact dans la direction normale et de frottement de Coulomb local dans le plan tangentiel. Les mises en équation du problème de contact les plus employées sont basées sur des méthodes de pénalisation ou de Lagrangien, voir [Cha05]. La simulation numérique par éléments finis permet d'étendre à n'importe quelle géométrie l'étude de la dissipation dans les liaisons. La publication de Chen et Deng

[CD05] compare les résultats des deux travaux analytiques précédents, figure 1.5, à un calcul éléments finis afin de montrer les limites de l'approche analytique. Quasiment en même temps et certainement indépendamment, une étude très similaire est proposée dans la thèse de Heller [Hel05]. Un certain nombre de travaux basés sur le calcul quasi-statique et l'hypothèse de frottement Coulomb ont montré la force du calcul par éléments finis pour la prédiction de la dissipation d'une liaison sous un chargement donné, voir par exemple [CWRU06], [OOM05]. Les limitations de cette approche sont principalement liées au caractère multi-échelles de la physique du contact. Tout d'abord, l'approche directe par calcul éléments finis est très coûteuse en temps de calcul. La résolution des problèmes non-linéaires nécessite classiquement une étape de recherche de solution à l'aide d'algorithmes itératifs de type Newton-Raphson. Le problème de contact demande en plus un maillage extrêmement fin des interfaces de contact, ce qui pose par ailleurs des problèmes de stabilité numérique [BRS⁺11]. D'autres algorithmes de résolutions multi-échelles peuvent être employés afin de répondre à ce problème, voir [Cai09]. Malgré la progression exponentielle des capacités de calcul, il n'est pas envisageable, au moins dans une phase de conception, de résoudre les problèmes de dynamique en intégrant la rhéologie locale tant les modèles seraient lourds et difficile à construire. Notons néanmoins que Mayer et Gaul proposent une formulation d'éléments finis de contact sans épaisseur appelé *zero-thickness elements* limités au cas de faible glissement [MG07]. Ces éléments intègrent un modèle phénoménologique de contact permettant de mailler les interfaces assez grossièrement. Ces éléments ont pour vocation de réduire le temps de calcul et donc d'être directement utilisables pour la dynamique des structures. Une revue des différentes approches de modélisation des interfaces et des liaisons notamment par éléments finis peut être trouvée dans [BRS⁺11].

La seconde grande difficulté de la modélisation est l'incertitude sur l'estimation des paramètres physiques [IP05]. Par exemple, il est communément admis qu'une donnée aussi simple que l'effort de serrage imposé par une vis est estimée (à partir du couple de serrage) avec une marge d'erreur de 20%. L'erreur la plus importante est certainement celle de l'hypothèse de frottement de Coulomb. Le frottement de Coulomb est la modélisation la plus simple de la force de frottement. Ce problème peut être en partie contourné par une analyse paramétrique, voir [Hel05] ou [RCB11]. Ce type d'étude permet généralement de borner l'espace des solutions mais reste relativement coûteuse en temps de calcul.

Le prochain chapitre propose quelques éléments de tribologies et les avancées récentes appliquées au cas de liaisons d'assemblage.

Éléments de tribologie

Le contact entre deux pièces métalliques est limité au voisinage du sommet des aspérités. Les modèles de contact rugueux sont basés sur cette assertion. Le contact entre deux aspérités est classiquement modélisé par la théorie du contact de Hertz [Her], [IDSBLC13]. Cette loi prévoit la force de réaction

entre deux sphères élastiques soumises à un chargement normal. Sous l'hypothèse de non-interpénétration, la force normale suit une loi proportionnelle à l'enfoncement à la puissance $3/2$. Les travaux de Mindlin [Min49] élargissent cette théorie au cas du contact frottant sous l'hypothèse de glissement de Coulomb. Sous un chargement normal constant et une force tangentielle croissante, un anneau de glissement se produit dans la bordure extérieure du cercle de contact comme présenté à la figure 1.4. Ainsi le phénomène de glissement partiel apparaît au sein même des aspérités en contact. La théorie de Mindlin a été mise en œuvre dans la thèse de Peyret [Pey12] pour estimer la dissipation d'une interface contenant un nombre fini d'aspérités. Peyret distingue notamment deux classes d'aspérités : celles dont les ordres de défauts sont les plus bas se comportent comme les points d'adhérence de la surface ; celles d'ordre plus élevés sont principalement responsables de la dissipation.

La modélisation des surfaces rugueuses nominale­ment planes (*i.e.* celles pour lesquelles les principaux défauts sont d'ordre 3 et 4) introduite par Greenwood et Williamson en 1966 [GW66] est largement admise [BDPH13]. Cette approche consiste à décrire les surfaces nominale­ment planes comme une collection N d'aspérités arrondies de même rayon de courbure R et de hauteur variable. La hauteur des aspérités est déterminée par une densité de probabilité assumée suivre une loi normale centrée d'écart type σ . Il existe d'autres modèles de ce type basés sur différentes normes de rugosité ou d'ondulation, voir [RV]. L'approche statistique permet de calculer la résultante de la force normale de contact sous un chargement uniforme à l'aide d'un nombre limité de paramètres d'états de surface en plus des paramètres matériaux. Par la suite, plusieurs études ont permis d'étendre cette approche statistique au cas du contact frottant, voir par exemple [Bjo97].

Cette extension permet récemment à Argatov et Butcher [AB11] de résoudre analytiquement le problème de Metherell et Diller, voir figure 1.5(b), dans le cas du contact rugueux. Farhang *et al.* [FSS11] proposent des formulations par éléments finis qui intègrent ces considérations tribologiques. L'index de plasticité permet de prendre en compte simultanément la dissipation par glissement partiel des aspérités ainsi que leur déformation plastique, voir [CEB87], [EPB11]. L'approche classique de l'étude du *fretting* vise à caractériser l'endommagement des surfaces. L'objectif des travaux de Eriten [Eri12] est de construire des modèles de surfaces recalés à partir d'essais de fretting élémentaires afin d'estimer la dissipation par micro-glissement au sein de liaison complètes.

Notons cependant que la plupart des approches tribologiques (la totalité?) supposent une hypothèse de force normale constante au cours d'un cycle de chargement. Les bancs d'essais développés dans cette thèse font état de cas pour lesquels cette hypothèse est probablement fautive. Nous pouvons aussi remarquer que l'approche statistique est limitée au cas où un nombre suffisant d'aspérités sont effectivement en contact. On peut voir sur la figure 1.2 que le frottement n'apparaît que sur un nombre relativement limité de stries d'usinage assimilables à des défauts d'ordre 2 à 3 (la largeur des stries mise en évidence par l'usure est comprise entre 0.1mm et 1mm). L'approche statis-

tique est en outre basée sur une hypothèse de pression de contact uniforme. Il est clair sur cette image que l'éloignement entre deux aspérités est d'un ordre de grandeur non-négligeable devant les gradients de contrainte sous la tête de vis. Une approche statistique peut donc être limitée par le faible nombre d'aspérités en contact pour les ordres de défauts les plus petits. Notons finalement que d'autres phénomènes complexes, de micro-impacts [JAP11] et de plasticité localisés au lieu des arrêtes de liaisons [WO08], peuvent eux aussi jouer un rôle important dans la dissipation des liaisons.

Le contact est un phénomène très complexe faisant intervenir différentes échelles de description et plusieurs phénomènes de dissipation. Ainsi la tribologie est une science fortement liée à l'expérimentation. La caractérisation des paramètres du contact nécessitent par ailleurs des moyens d'essais difficiles à mettre en œuvre et une expertise spécifique. La prédiction de la dissipation d'une liaison à partir des efforts de contact recalés à partir d'essais de fretting est une approche possible qui cependant n'est pas le sujet de cette thèse. Une approche alternative est celle des modèles phénoménologiques.

1.2.2 Modèles de liaison phénoménologiques

Revue des modèles courants

Il existe un certain nombre de macro-modèles permettant d'approcher de manière globale les problèmes de contact frottant et plus généralement les problèmes d'élasto-plasticité. La plupart de ces modèles ne sont pas dérivés de lois physiques fondamentales mais sont simplement basés sur l'observation empirique de la relation entre déplacements et efforts. Le modèle de Dahl [Dah68] a été introduit en 1968 afin de décrire de manière compacte le comportement des roulements à billes. Sous sa forme classique, c'est un modèle à deux paramètres : r_{max} est la valeur de force en glissement total et σ la raideur à l'origine. Un paramètre de pondération $0 < \gamma \leq 1$ permet aussi d'ajuster la forme de la courbe d'hystérésis. Ce modèle s'écrit sous la forme d'une équation différentielle :

$$\frac{dr}{dp} = \sigma \left(1 - \frac{r}{r_{max}} \text{sign}(\dot{p}) \right)^\gamma \quad (1.1)$$

Notons que la force r n'est pas dépendante de l'amplitude de la vitesse mais seulement de son signe. Ainsi la force de frottement ne dépend que de l'amplitude de déplacement. La figure 1.7 présente la forme des cycles de force-déplacement produit par le modèle de Dahl. On peut notamment y voir la dépendance du modèle au paramètre γ . Trois cycles d'hystérésis sont calculés à partir de l'état initial nul.

Le modèle de LuGre [DWOAL95] est une extension du modèle de Dahl qui inclut l'effet de Stribeck (*i.e.* la dépendance du coefficient de frottement à la vitesse²) et limite la dérive obtenue pour les faibles efforts. Ce modèle

2. le coefficient de frottement dynamique est plus faible que le coefficient statique. À

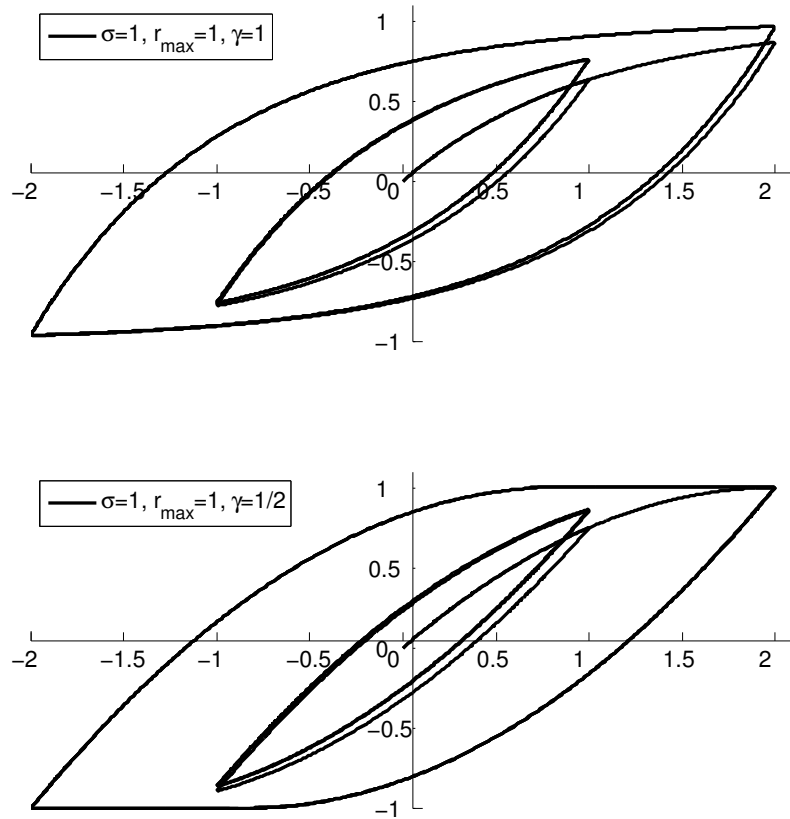


Figure 1.7 – Cycles d’hystérésis produits par le modèle de Dahl.

est particulièrement adapté pour la modélisation des problèmes de contact lubrifiés.

Le modèle de Bouc-Wen à quatre paramètres σ , α , β , n permet de produire une très large variété de forme d’hystérésis dépassant le cas des problèmes de type élasto-plastiques, voir figure 1.8. Il est notamment possible de simuler des comportements rigidifiants comme présenté dans le cadre en bas à droite. Cette grande variété de forme vaut à ce modèle d’être utilisé pour des applications très diverses (*e.g.* amortisseurs à fluide électrorhéologique ou métaux à mémoire de forme [KHN⁺07]). Dans sa formulation originale, la dérivée par rapport au temps de la force de retour hystérétique satisfait à l’équation suivante :

$$\dot{r} = \sigma \dot{p} - \alpha |\dot{p}| |r|^{n-1} r - \beta \dot{p} |r|^n \quad (1.2)$$

Notons que les paramètres du modèles de Bouc-Wen n’ont pas de sens physique évident, ce qui peut être perçu comme un défaut important. Une revue détaillée, de ces modèles peut être trouvée dans la publication, écrite en Français, de Borsotto [BB06].

partir d’une certaine vitesse de glissement ce coefficient redevient croissant en fonction de la vitesse.

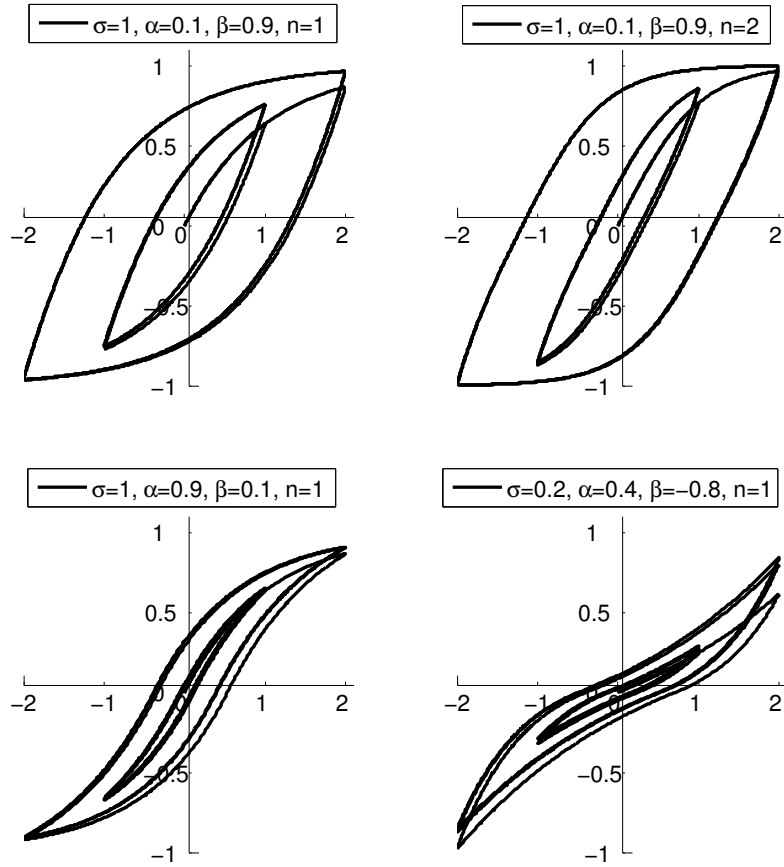


Figure 1.8 – Cycles d’hystérésis générés par le modèle de Bouc-Wen.

Ces modèles peuvent être intégrés très simplement dans un système d’équations du second ordre. Considérons par exemple la dynamique d’un oscillateur à un degré de liberté (SDOF) de masse unitaire et de raideur $\omega_\infty^2 + \sigma$. En remplaçant la raideur σ par le modèle de Dahl, on obtient le système d’équations différentielles gouvernant la dynamique de l’oscillateur de Dahl à un degré de liberté :

$$\begin{cases} \ddot{p} + \omega_\infty^2 p + r = f_e(t) \\ \dot{r} = \sigma \left(1 - \frac{r}{r_{max}} \text{sign}(\dot{p})\right)^\gamma \dot{p} \end{cases} \quad (1.3)$$

Notons que la raideur $\omega_\infty^2 + \sigma$ est la raideur à l’origine correspondant à l’état d’adhérence.

Règles phénoménologiques de Masing

À première vue, il semble que les modèles de Dahl ou de Bouc-Wen permettent de reproduire les différents états de glissement d’une interface de contact. Le faible nombre de paramètres que contiennent ces modèles et la simplicité de

leur écriture semblent en faire de très bons candidats pour la modélisation des liaisons. Cependant les courbes d'hystérésis générées par ces modèles ne respectent pas une propriété fondamentale à priori vraie dans les problèmes de type élasto-plastiques. Cette loi initialement conçue pour décrire le comportement plastique des matériaux porte le nom de **Masing** [Mas26]. **Elle prévoit qu'un cycle d'hystérésis dans le plan de contrainte-déformation peut être extrapolé à partir de la charge initiale (dite courbe *backbone*). Le chemin de l'hystérésis obtenu lors d'un chargement cyclique est une homothétie de facteur 2 de la courbe backbone (avec l'origine décalée au point d'inversion de charge).** Cette règle est identique pour le cas de la force de frottement dans le plan de force-déplacement comme schématisé sur la figure 1.9. La règle de Masing est calquée sur le comportement

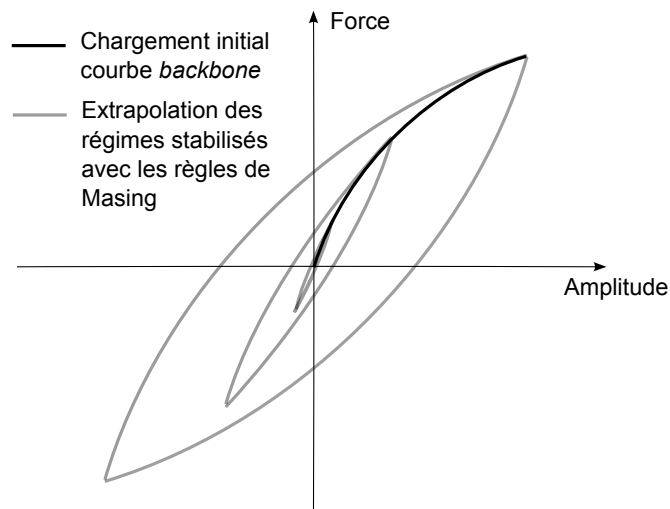
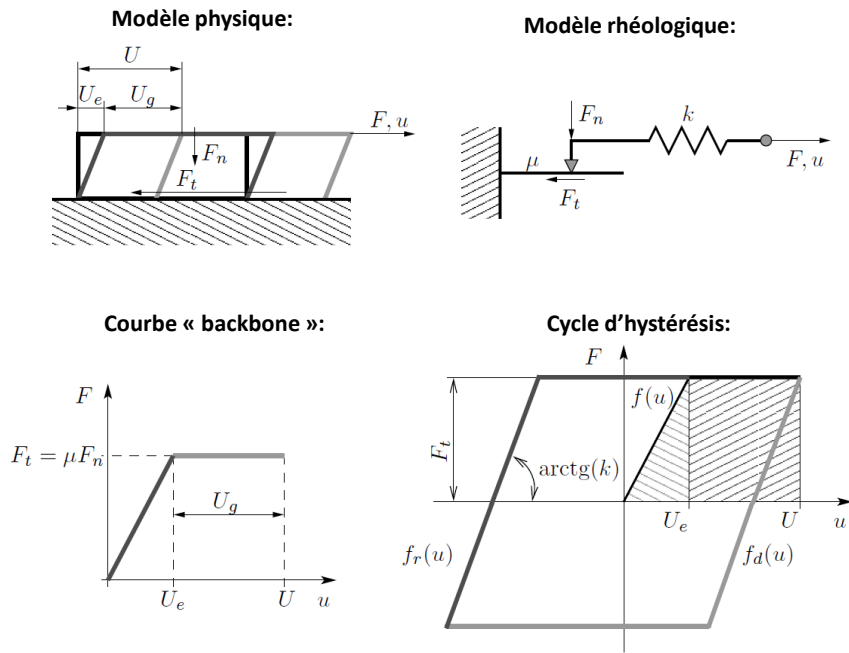


Figure 1.9 – Principe des règles de Masing.

de l'élément de Coulomb (aussi appelé élément de Masing ou élément de Jenkins). Celui-ci est composé de l'association en série du frotteur de Coulomb de coefficient de frottement μ et de la raideur σ . Comme les modèles précédents, cet élément possède une variable interne, ici p_j qui traduit la position du frotteur de Coulomb. La relation entre la force de serrage (force normale F_n), la force de frottement r , le déplacement imposé et p_j est la suivante :

$$\begin{cases} \text{si } \sigma|p - p_j| < \mu F_n, & \text{alors } r = \sigma|p - p_j| \quad \text{et } \dot{p}_j = 0 \\ \text{sinon,} & r = \mu F_n \text{sign}(p - p_j) \quad \text{et } \sigma \dot{p}_j = \sigma p - \mu F_n \text{sign}(p - p_j) \end{cases} \quad (1.4)$$

Ce modèle rhéologique élémentaire est une extension du modèle de Coulomb permettant une déformation élastique précédant le glissement. Le cycle d'hystérésis décrit par l'élément de Jenkins respecte la règle de Masing, voir figure 1.10. Ce modèle élémentaire produit deux types de régimes stabilisés : un régime d'adhérence, si l'amplitude de la force tangentielle est inférieure à la force de glissement ; un régime de macro-glissement pour les forces supérieures. Au



cours d'un cycle de glissement total, la raideur instantanée au point d'inversion est égale à la raideur d'adhérence totale. En effet, lorsque la dérivée de la force tangentielle change de signe, la surface reprend toute son adhérence. Le glissement total est obtenu de nouveau lorsque la force de friction atteint son seuil d'adhérence. La règle de Masing n'est rien de plus que ce principe élémentaire généralisé pour des cycles admettant le glissement partiel.

Nous venons par ailleurs d'indiquer un corollaire de cette loi : les cycles obtenus à différentes amplitudes sont superposables au point d'inversion. C'est cette propriété importante que ne vérifient pas les modèles de Dahl, de LuGre et de Bouc-Wen. En effet la rigidité instantanée au point d'inversion n'est pas la même que celle à l'origine. Dans le cas du modèle de Dahl par exemple, la rigidité instantanée au moment du retournement est plus importante qu'à l'origine, voir figure 1.7. Un tel comportement ne peut pas être attribué à un phénomène physiquement explicable et doit être considéré comme un défaut du modèle. L'oscillateur de Dahl n'est donc pas en mesure d'engendrer en même temps une dissipation par cycle et une fréquence de résonance cohérentes avec la physique. Ce point est explicité dans la dernière partie de cette thèse. Ce type de défaut est inhérent aux modèles empiriques qui ne sont pas formulés à partir de principes fondamentaux.

Le modèle d'Iwan

Le modèle dit d'Iwan consiste en l'association en série, en parallèle et toute les combinaisons hybrides de plusieurs éléments de Jenkins. Ce modèle est aussi

appelé modèle de Masing ou modèle de Maxwell généralisé frottant dans la communauté des automaticiens [ABLS05] (en anglais : *generalized Maxwell-slip model*). En héritage de l'élément de Jenkins, le modèle d'Iwan respecte la

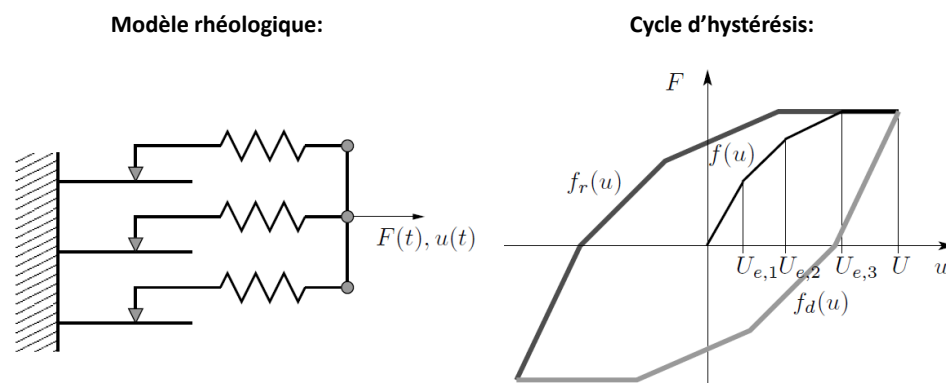


Figure 1.11 – Modèle d'Iwan - source : Thèse de Heller[Hel05].

règle de Masing. On peut trouver ce modèle sous forme discrète ou continue. Le modèle discret à N éléments, voir figure 1.11, est un modèle à $N+1$ paramètres distincts. L'unicité de ce modèle est obtenue en fixant la raideur de tous les éléments à une valeur commune σ . Le phénomène de glissement partiel est reproduit en distribuant des valeurs de force de glissement unique à chaque frotteur. Lorsqu'on applique une force croissante, les frotteurs ayant les valeurs les plus basses initient la perte d'adhérence et le glissement total est atteint lorsque tous les frotteurs glissent. Ce modèle est très proche de la physique du contact, chaque élément de Jenkins se comportant comme une aspérité.

Dans le cas du modèle d'Iwan continu, une distribution de force de glissement φ est associé à un champ continu de frotteur de Jenkins, voir [Seg01]. Les paramètres du modèle d'Iwan sont la raideur, commune à tous les éléments, et la distribution de force de glissement. Cette distribution peut être assimilée au champ de pression de contact d'une interface. Le modèle d'Iwan continu est donc une formulation équivalente au problème de Metherell et Diller généralisé (rappel : lap-joint soumis à un chargement transverse et pré-chargé selon une répartition quelconque, voir figure 1.6). Le modèle d'Iwan continu a fait l'objet d'un certain nombre de travaux analytiques visant à relier ses paramètres au cas de Metherell et Diller. Les travaux expérimentaux de Smallwood [SGC00], qui seront explicités par la suite, montrent une relation entre force appliquée F et dissipation par cycle D au sein d'une liaison similaire à celle trouvée analytiquement. Smallwood observe en effet une relation telle que $D \propto F^\alpha$ avec cependant α compris entre 2 et 3. Segalman montre que cette même relation de puissance $D \propto F^{3+\chi}$ (avec χ entre -1 et 0), peut être obtenue avec le modèle d'Iwan en parallèle en prenant une densité de frotteur de la forme $\varphi \propto \phi^\chi$ [Seg02]. Le modèle de Segalman fait aujourd'hui référence. C'est un cas particulier du modèle d'Iwan à quatre paramètres $(\chi, \phi_{max}, F_s, \beta)$: χ est le paramètre de distribution des frotteurs avant le glissement total, ϕ_{max} est une singularité qui définit le déplacement maximal admissible, F_s est la force correspondante pour laquelle le glissement total se produit et β est un

paramètre d'ajustement. Le modèle de Segalman est, selon son auteur, un modèle suffisant de liaison.

Song [SM05] établit lui aussi une relation d'équivalence entre le modèle d'Iwan en parallèle (en anglais : *series-parallel Iwan model*) et le modèle analytique du problème de Metherell et Diller avec une répartition réaliste des contraintes sous tête de vis. De même, Quinn et Segalman [QS05] ont écrit les relations équivalentes entre le modèle d'Iwan en série (en anglais : *series-series Iwan model*) et le modèle analytique de lap-joint. Argatov et butcher [AB11] relient les paramètres statistiques du contact rugueux, à une distribution singulière de frotteur pour le modèle d'Iwan parallèle [AB11].

Retenons qu'il existe des relations équivalentes entre le cas Metherell et Diller généralisé et le modèle d'Iwan. Quinn et Segalman [QS05] ont par ailleurs montré que le modèle d'Iwan en série et en parallèle possèdent elles aussi des relations équivalentes (en quasi-statique). Toutes les dispositions du modèle d'Iwan sont en fait équivalentes. En d'autres termes, **il existe une distribution du modèle d'Iwan en parallèle représentant exactement le problème de Metherell et Diller pour des liaisons de n'importe quelle géométrie**. Le principe de cette propriété est illustré dans la figure 1.12. Ainsi le modèle continu d'Iwan en parallèle est théoriquement équivalent à toutes les géométries de liaisons soumises à une force normale indépendante de l'amplitude et un chargement transverse. La simplicité du principe du modèle d'Iwan, sa grande souplesse et sa proximité avec la physique réelle explique l'intérêt grandissant que la communauté des chercheurs porte à son égard, voir notamment [SHM⁺04], [OOM05], [OOM06], [DBBK07] et [AB11]. Notons que ces études récentes visent à construire des modèles d'Iwan de liaison à partir de la géométrie (*i.e.* à priori).

Le modèle d'Iwan est donc un choix adapté pour la modélisation du comportement des liaisons. Il faut cependant noter que ce modèle repose sur l'hypothèse d'une répartition de pression de contact indépendante de l'amplitude : $p(x) = p_0(x)$. En réalité, le champ de pression dépend généralement de l'amplitude : $p(x, p) = p_0(x) + \Delta p(x, p)$. Cette dépendance est plus ou moins accentuée selon les types de chargements que la liaison subit. Par exemple, cette variation est plus forte dans le cas d'un chargement de flexion plutôt que dans le cas de Metherell et Diller. Rien ne présume donc que le modèle d'Iwan soit bel et bien capable de décrire le comportement dynamique d'une liaison soumise à des chargements qui induisent de fortes variations de la pression de contact ; *i.e.* $\Delta p(x, p)$ non négligeable devant $p_0(x)$. Notons qu'il existe des macro-modèles spécialement conçus pour les cas de poutres en flexion, voir [SHM⁺04] et [AJ07a].

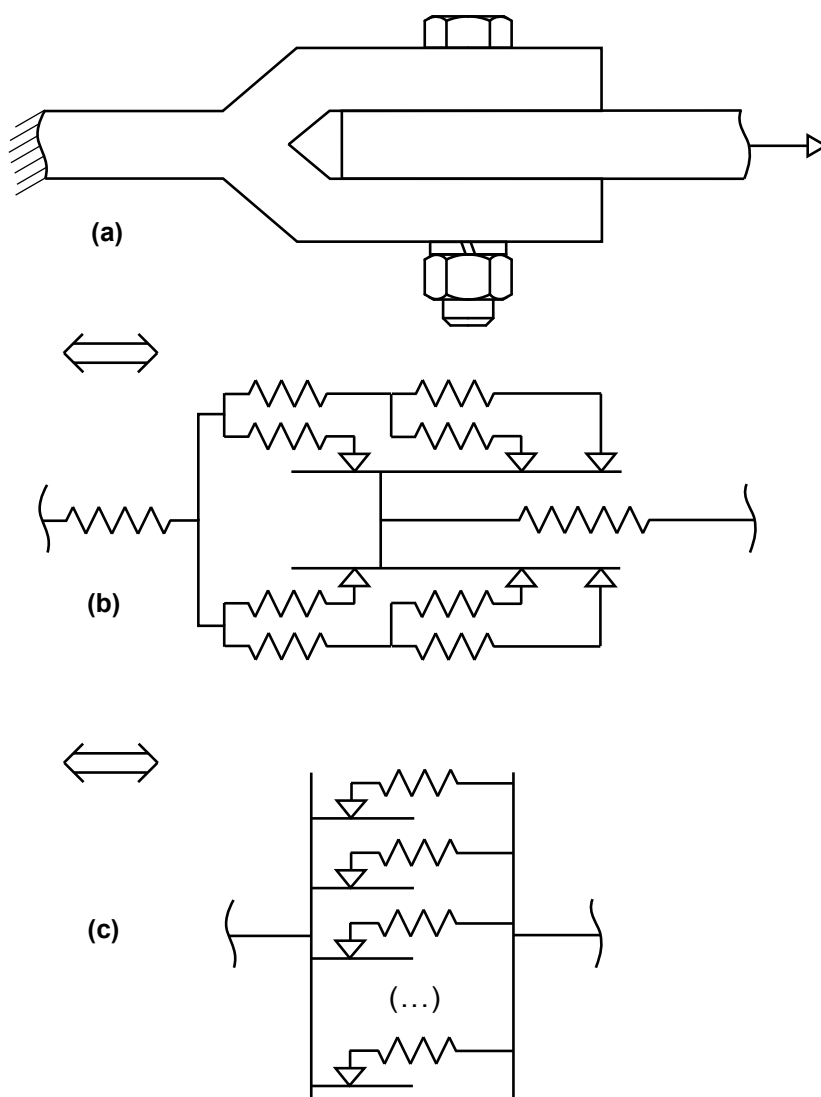


Figure 1.12 – Principe d'équivalence des modèles. (a) Modèle physique, (b) Modèle d'Iwan en disposition quelconque proche de la physique, (c) Modèle d'Iwan en disposition parallèle.

1.3 Dynamiques des assemblages et études expérimentales

Le chapitre précédent est focalisé sur le comportement quasi-statique des liaisons et des interfaces. Il est couramment admis (par les dynamiciens) que dans les couples de fréquence et d'amplitudes auxquels sont soumis les interfaces de contact sèches métal-métal, la fréquence de sollicitation n'a pas d'influence. Cette propriété est basée sur l'hypothèse de Coulomb à l'échelle locale. Le modèle d'Iwan basé sur une hypothèse de Coulomb est indépendant de la

fréquence. Ce modèle ne dépend que de l'amplitude de chargement et de son histoire.

Le chapitre présente de la dynamique des structures assemblées, de l'analyse vibratoire expérimentale et de l'identification des macro-modèles par les analyses dynamiques. Les méthodes de résolutions des problèmes de dynamique non-linéaire ne sont pas traitées dans cette étude, pour cela, se référer par exemple à [Nay08] (méthode de perturbations), [KPGV09] (méthode de shooting-continuation), [JSP10] (méthode de balance harmonique adaptative).

1.3.1 Comportement faiblement non-linéaire des structures

La figure 1.13 présente la mesure de la réponse d'une structure assemblée élémentaire à un choc au marteau. Cette structure sera explicitée dans la suite, il s'agit de deux portions de plaques composites assemblées par une liaison boulonnée, appelée liaison *SSS*, prêtée par le CNES.

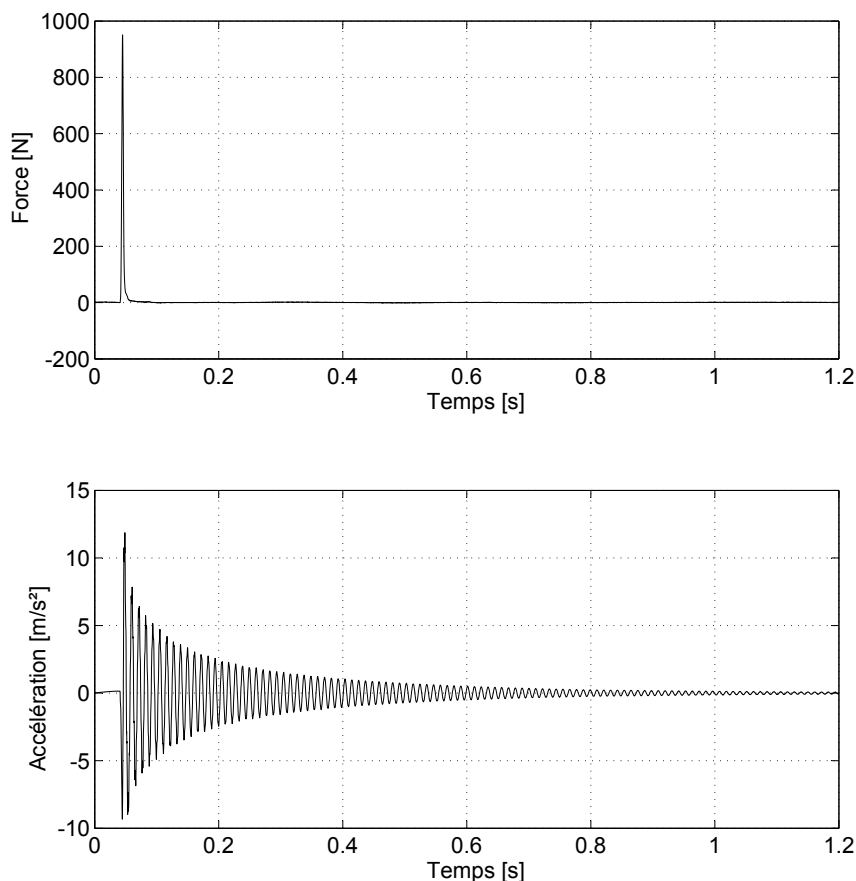


Figure 1.13 – Réponse impulsionnelle d'une structure assemblée.

La figure 1.14 présente la transformée de Fourier de ces deux signaux.

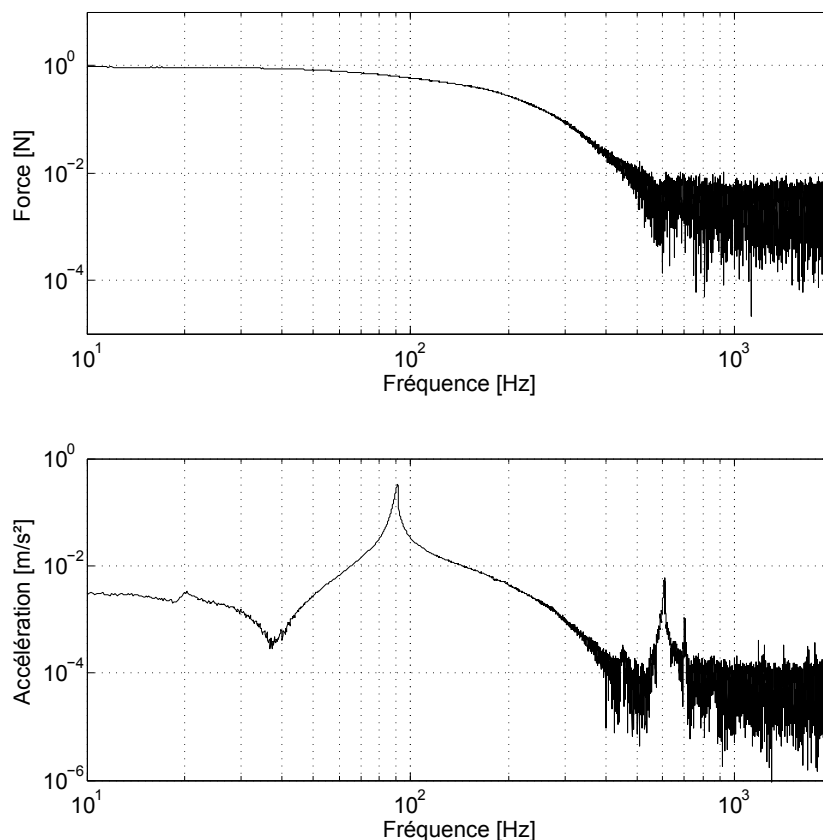


Figure 1.14 – Réponse impulsionnelle d'une structure assemblée.

La structure répond principalement sur son premier mode de flexion dont la fréquence de résonance se situe autour de 90Hz. Le pic de résonance est légèrement incliné vers la droite ce qui traduit une variation de la fréquence dans le temps et donc un comportement non-linéaire. La mesure d'accélération ne fait cependant pas apparaître d'harmoniques, ce qui est une propriété caractéristique des systèmes linéaires. Ainsi, et **bien que les lois physiques régissant le comportement local des liaisons boulonnées soient fortement non-linéaires, le comportement global de la structure assemblée ne l'est que très légèrement**. Cette propriété est vérifiée par de nombreux auteurs [SGC00], [Hel05], [Seg07]. Parallèlement, **la dépendance de la déformée modale à l'amplitude est faible [MBV01] et souvent considérée comme négligeable [Qui12]**. Ce paradoxe s'explique par le fait que les liaisons sont avant tout conçues afin de tenir aux efforts. Les liaisons d'assemblages sont surdimensionnées lorsqu'elles assurent l'intégrité des structures. Ainsi, les vibrations d'une structure assemblée ne provoquent pas l'assouplissement massif de ses liaisons. L'état de glissement total n'est jamais atteint dans l'interface d'une liaison puisqu'il correspond en réalité à la destruction de la liaison. Les vis et rivets ne sont généralement pas conçus pour supporter du cisaillement. En tout état de cause, ce cas de figure sort

du cadre d'étude de cette thèse.

La dynamique présentée à la figure 1.13 est approximativement assimilable à celle d'un oscillateur libre à un degré de liberté de la forme :

$$\ddot{p} + \omega_{\infty}^2 p + r(r_i, p, \theta, t) = 0 \quad (1.5)$$

La caractérisation de la structure élémentaire et de la liaison *SSS* consiste en l'estimation de la forme de la force r , c'est à dire sa dépendance à l'amplitude modale de vibration p , éventuellement au temps et à des variables internes p_i ainsi qu'en l'estimation de ses paramètres invariants θ et ω_{∞} . Lorsqu'on se donne la forme de la force, ou lorsqu'elle est connue, il est possible d'identifier ses paramètres de manière directe en utilisant une approche optimale. Dans le cas des structures linéaires, les paramètres à identifier sont la pulsation et l'amortissement propre. Dans le cas des structures faiblement non-linéaires, le système peut être identifié de manière indirecte en mesurant l'évolution temporelle de la pulsation propre $\omega(t)$ et de l'amortissement $\xi(t)$ de la fondamentale du mode. Les harmoniques d'ordres supérieurs sont négligés. Ces paramètres sont définis comme les **paramètres modaux équivalents**. Il s'agit de chercher les solutions de l'équation 1.5 sous la forme :

$$p(t) = p_0 e^{-\xi(t)\omega(t)t} \cos\left(\omega(t)\sqrt{1-\xi^2(t)}t + \varphi\right) = p_m(t) \cos(\Theta(t)) \quad (1.6)$$

ω et ξ ne sont pas des fonctions oscillantes. L'équation de mouvement est alors ramenée à celle d'un oscillateur amorti dont les paramètres dépendent explicitement du temps.

$$\ddot{p} + 2\xi(t)\omega(t)\dot{p} + \omega^2(t)p = 0 \quad (1.7)$$

L'identification du système consiste alors en l'estimation des fonctions de paramètres modaux équivalents. Ce type d'identification est appelé identification non-paramétrique.

La méthode de filtrage de Kalman, explicitée dans la suite, permet la caractérisation de ces fonctions de pulsation et d'amortissement. La figure 1.15 montre ces deux fonctions du temps dans le cas de la liaisons *SSS*.

Le cadre supérieur montre l'évolution temporelle de l'amplitude de vibration ramenée à l'amplitude modale ainsi que son enveloppe $p_m(t)$. L'enveloppe est l'amplitude maximale atteinte au cours d'un cycle, c'est à dire le niveau vibratoire courant. L'estimation de l'enveloppe permet de donner la dépendance des paramètres modaux équivalent au niveau vibratoire, figure 5.14.

Le phénomène de glissement partiel dans les assemblages se traduit par un assouplissement de la fréquence de résonance et une dépendance de l'amortissement au niveau vibratoire. Dans le cas des assemblages vissés ou rivetés, l'évolution de la fréquence en fonction de l'amplitude est toujours monotone décroissante. L'évolution de l'amortissement en fonction de l'amplitude n'est pas forcément monotone croissante bien que ce soit le cas le plus fréquemment rencontré.

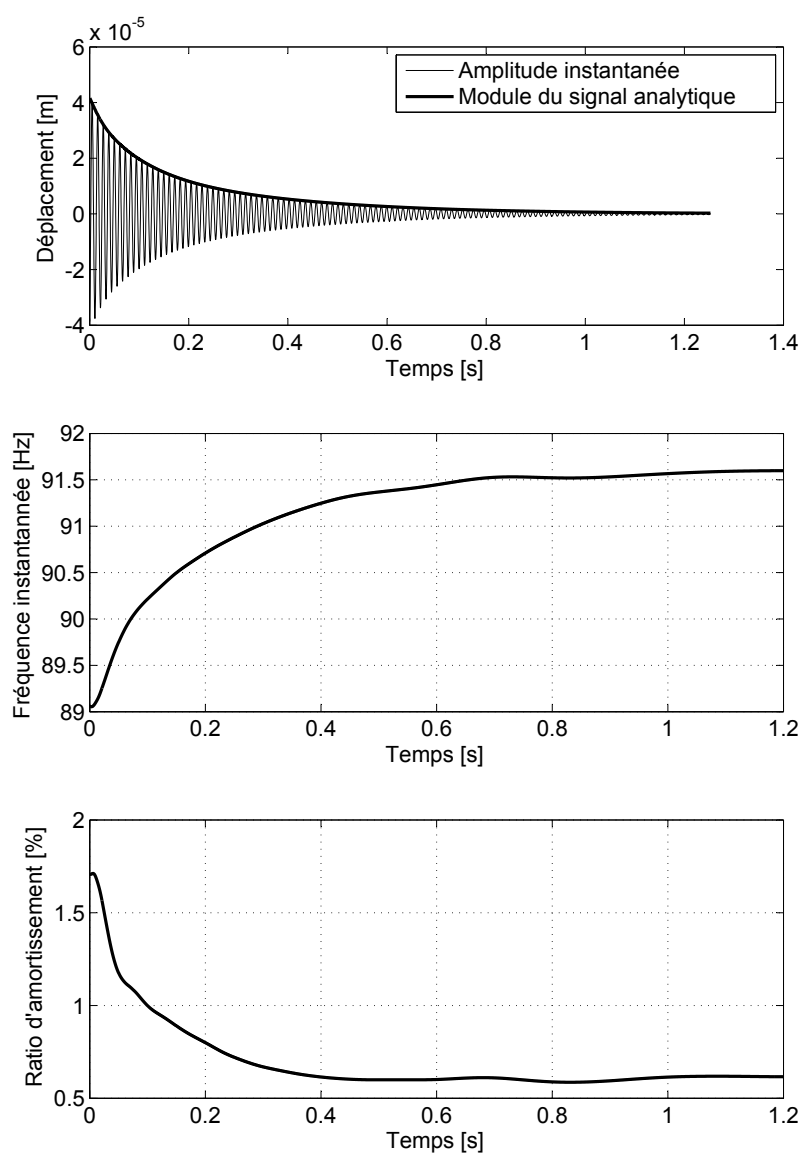


Figure 1.15 – Évolution des paramètres modaux dans le temps.

Notons que le **comportement faiblement non-linéaire des structures assemblées est tout à fait compatible avec une dépendance très forte de l'amortissement à l'amplitude de vibration**. Typiquement, les ratios d'amortissements mesurés sur les structures élémentaires prennent des valeurs autour de 0.5% aux faibles niveaux vibratoires et jusqu'à 5% pour les plus grands. Ces taux d'amortissements relativement faibles traduisent le fait que l'énergie dissipée par cycle est petite devant l'énergie vibratoire. Ainsi les efforts causants la dissipation sont faibles devant les efforts réversibles. On peut cependant mesurer l'effet que produit le décuplement du taux d'amortissement sur la fonction de réponse en fréquence d'un oscillateur à un degré de liberté sur la figure 1.17. Les faibles amortissements sont difficiles à mesurer car ils correspondent à de petites quantités d'énergie. Il est cependant néces-

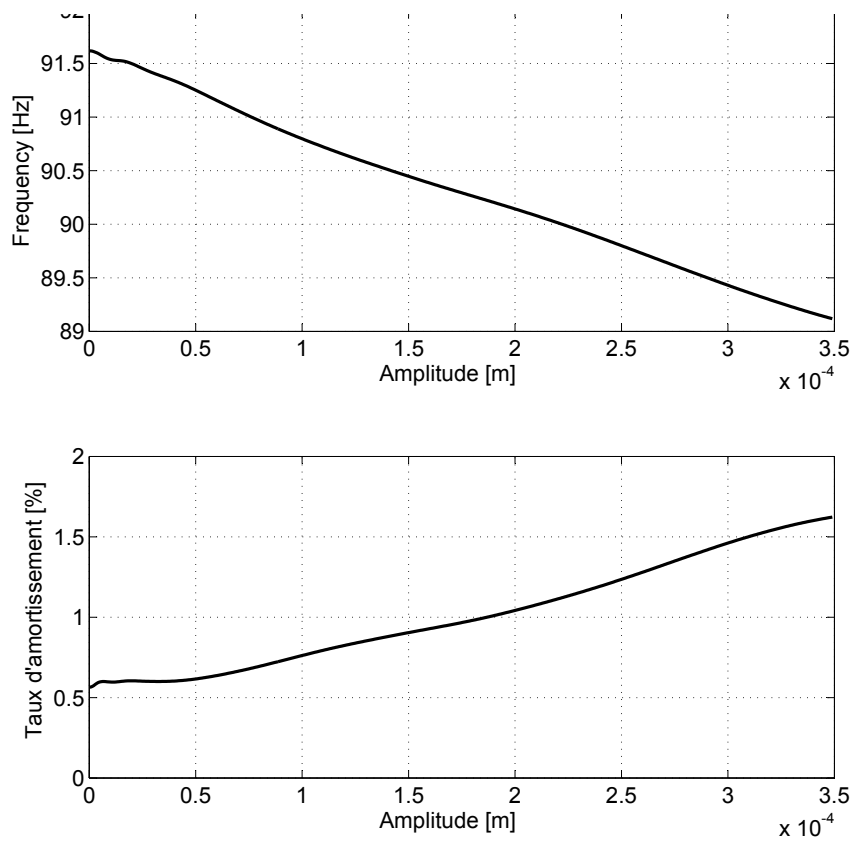


Figure 1.16 – Paramètres modaux équivalents en fonction de l’amplitude vibratoire.

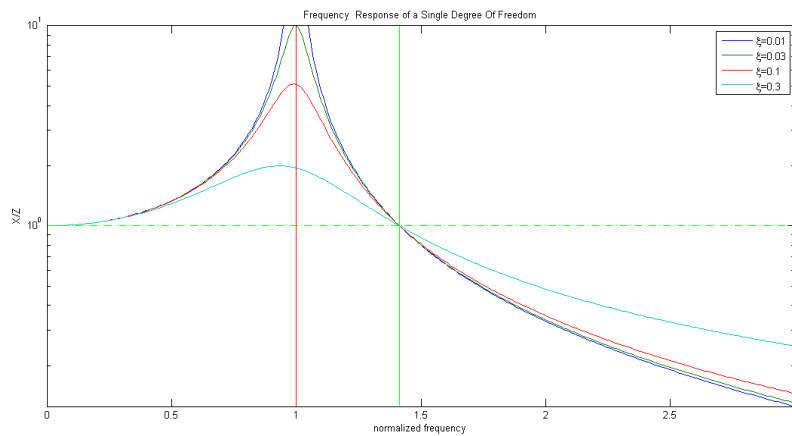


Figure 1.17 – Fonction de réponse en fréquence d’un système à un degré de liberté en fonction de l’amortissement - Source : Cours de vibration de J.L Dion (Supmeca 1ère année).

saire de mesurer ces grandeurs avec une précision importante étant donné leur impact sur l'amplitude vibratoire des structures.

L'hypothèse de faible non-linéarité peut s'étendre aux systèmes à plusieurs degrés de liberté. Dans ce cas, l'hypothèse simplificatrice de découplage modal est souvent associée afin de se ramener à une somme d'oscillateurs à un degré de liberté.

Soit \mathbf{X} le déplacement géométrique discrétisé d'une structure linéaire. L'équation non-amortie de la dynamique de cette structure s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_e \quad (1.8)$$

Les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices de masse et de raideur. Les modes réels ϕ sont les solutions de l'équation aux valeurs propres du système conservatif associé :

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

Le champ des solutions admissibles \mathbf{X} de dimension N peut être identiquement produit par la base des modes propres, soit $\mathbf{X} = \sum_i^N \phi_i q_i = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}$. Les modes propres ϕ_i sont orthogonaux par rapport à \mathbf{M} et à \mathbf{K} c'est à dire que la base modale diagonalise ces matrices (*i.e.* $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}$ et $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$ diagonales). En multipliant l'équation 1.12 par la transposée de $\mathbf{\Phi}$, le système est ainsi diagonalisé, c'est à dire qu'il peut s'écrire comme une somme d'équations à un degré de liberté découplées. Notons que la déformée d'un mode correspond aussi à un choix de normalisation. Dans le cas où les modes sont normalisés par rapport à la masse (*i.e.* $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \mathbf{I}$), l'énergie de déformation du mode i est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}\omega_i^2 q_i^2 \quad (1.10)$$

Dans une bande de fréquence finie, le système est réductible à un nombre de degré de liberté généralisé M bien plus faible que le nombre de degré de liberté du système. Les solutions du problème sont approchés par la base dite "réduite" ou "base de Ritz" :

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_i^{M < N} \phi_i q_i = \mathbf{\Phi}_r \mathbf{q}_r \quad (1.11)$$

Ce concept dépasse le cadre de la dynamique des structures. Typiquement pour des problèmes de statique, la méthode de Guyan [Guy65] permet de produire la synthèse de plusieurs modèles réduits. Dans le cas d'une structure constituée de plusieurs composants, chacun de ces composants est réduit sur une base produite par la déformation statique unitaire de certains degrés de liberté appelés nœuds maîtres. Les autres degrés de liberté sont condensés. Dans le cas de la dynamique des structures, il est nécessaire d'enrichir cette base de modes statiques en ajoutant une base de modes propres à interfaces fixes ; c'est la méthode de Craig-Bampton [BC68].

Notons que cette méthode est généralement lourde en temps de calcul car elle demande l'inversion de la quasi-totalité de la matrice de raideur. D'autres

méthodes sont basées sur des approches optimales [Bal96], ou sur le calcul de résidus [Bob02], [VDRBB⁺10]. Elles permettent d'obtenir des solutions plus performantes et à moindre coût.

1.3.2 Hypothèse de découplage modal

L'équation amortie de la dynamique d'une structure linéaire s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_e \quad (1.12)$$

\mathbf{C} désigne la matrice d'amortissement du système. En général, la matrice d'amortissement n'est pas diagonalisée par la base des modes réels. L'amortissement de Rayleigh consiste à définir la matrice d'amortissement \mathbf{C} comme combinaison linéaire de \mathbf{M} et \mathbf{K} . Cette simplification permet de rendre la base des modes propres orthogonale par rapport à \mathbf{C} . La condition d'orthogonalisation de l'amortissement est plus généralement donnée par l'équation $\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$; c'est hypothèse de Basile. Cette hypothèse correspond à un amortissement distribué sur toute la structure comme c'est le cas par exemple de l'amortissement des matériaux. Sous cette condition, le système amorti est diagonalisé sur la base des modes réels. En multipliant l'équation 1.12 par la transposée de Φ puis en notant q_i l'amplitude modale du mode i , la ligne correspondante est donnée par :

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i \ddot{q}_i + \phi_i^T \mathbf{C} \phi_i \dot{q}_i + \phi_i^t \mathbf{K} \phi_i q_i = \phi_i^t F \quad (1.13)$$

soit, en normalisant par rapport à la masse :

$$\ddot{q}_i + 2\omega_i \xi_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i \quad (1.14)$$

$$\text{avec } \omega_i^2 = \frac{\phi_i^t \mathbf{K} \phi_i}{\phi_i^t \mathbf{M} \phi_i} \text{ et } 2\omega_i \xi_i = \frac{\phi_i^t \mathbf{C} \phi_i}{\phi_i^t \mathbf{M} \phi_i} \quad (1.15)$$

Dans le cas de structures présentant de fortes zones de dissipation localisée, l'hypothèse de Basile n'est pas valable et il est possible de découpler le système linéaire sur la base de ses modes propres complexe solutions de l'équation homogène associée à l'équation 1.12. Une revue des principales méthodes d'analyses modales temporelles ou fréquentielles peut être trouvée dans [Pir13]. Cependant, même dans l'hypothèse de faible non-linéarité, nous avons vu que les amortissement modaux peuvent présenter une forte dépendance au niveau vibratoire. Cet amortissement est causé par le phénomène de glissement partiel qui est localisé aux interfaces de contact. Ce phénomène non-linéaire dépend donc de variables locales et non des amplitudes modales. Ainsi, que la base de projection soit réelle ou complexe, les équations de mouvements des modes sont couplées dans les deux cas. Une caractéristique des modes complexes est l'effet de phase : ces modes ne présentent plus de nœuds de vibration car tous les points de la structure ne vibrent pas forcément en phase. Dans le cas des structures élémentaires étudiées, de tels comportement n'ont

pu être relevés que pour des amplitudes de vibrations extrêmes pour lesquelles les hypothèses de faible non-linéarité ne tiennent plus vraiment. Ainsi nous supposons les modes réels avec, en première approche l'hypothèse de Basile. Dans ce cas, la réponse d'une structure assemblée peut être supposée comme étant la somme de composantes modale. **Dans le cas de vibrations libres amorties d'une structure assemblée, nous cherchons les solutions temporelles sous la forme :**

$$\mathbf{X}(t) = \sum_i^M p_{0,i} e^{-\xi_i(t)\omega_i(t)t} \cos\left(\omega_i(t)\sqrt{1-\xi_i^2(t)}t + \varphi_i\right) \phi_i = \sum_i^M p_{m,i}(t) \cos(\Theta_i(t)) \phi_i \quad (1.16)$$

1.3.3 Cas de Metherell et Diller

Le problème de Metherell et Diller a fait l'objet de plusieurs études expérimentales. Ces études sont assez proches de l'essai tribologique élémentaire pion-plan présenté à la figure 1.3 mais dans ce cas, les efforts transverses sont transmis au travers d'une liaison complète. Le chargement transverse peut être appliqué de manière quasi-statique à l'aide d'une poutre céramique piézoélectrique par exemple, voir [EPB11], cependant l'approche la plus employée consiste à utiliser la résonance d'un banc d'essai afin de charger fortement la liaison, voir [SGC00], [GIB11], [BRS⁺11]. Pour les raisons cités dans le sous-chapitre précédent, la raideur d'une liaison de type lap-joint dans la direction transverse est très importante et un effort important doit être appliqué pour mesurer une dissipation non-négligeable. Les bancs d'essais de résonance sont souvent composés de balourds permettant d'abaisser la fréquence de résonance et ainsi d'atteindre des amplitudes de déformation importantes comme on peut le voir sur la figure 1.18.

Le tracé de la différence de déplacement en fonction de la force tangentielle résultante fait apparaître des courbes d'hystéresis comme présenté dans la figure 1.19.

Cette courbe d'hystéresis traduit le glissement partiel de l'interface de contact. Comme prévu, la partie non-réversible de la force est très faible, comparée à la partie élastique. Dans les limites de sollicitations nominales d'une liaison, la dissipation par cycle est effectivement généralement très faible comparée à l'énergie de déformation de cette même liaison (de l'ordre d'un centième). La mesure de l'effort est effectuée à distance de l'interface de contact et l'élasticité du matériau est incorporée à la mesure. Ainsi **il n'est généralement pas possible d'identifier les macro-modèles directement à partir de la forme de l'hystéresis dans le cas des liaisons d'assemblages. C'est pourquoi l'identification des assemblages est couramment réalisée de manière indirecte en mesurant la dépendance de l'amortissement et de la fréquence du système à l'amplitude.**

Peyret *et al.* [PDCA10], [DCP13] ont conçu une géométrie de banc d'essai permettant de solliciter une interface de contact plane dans la direction transverse

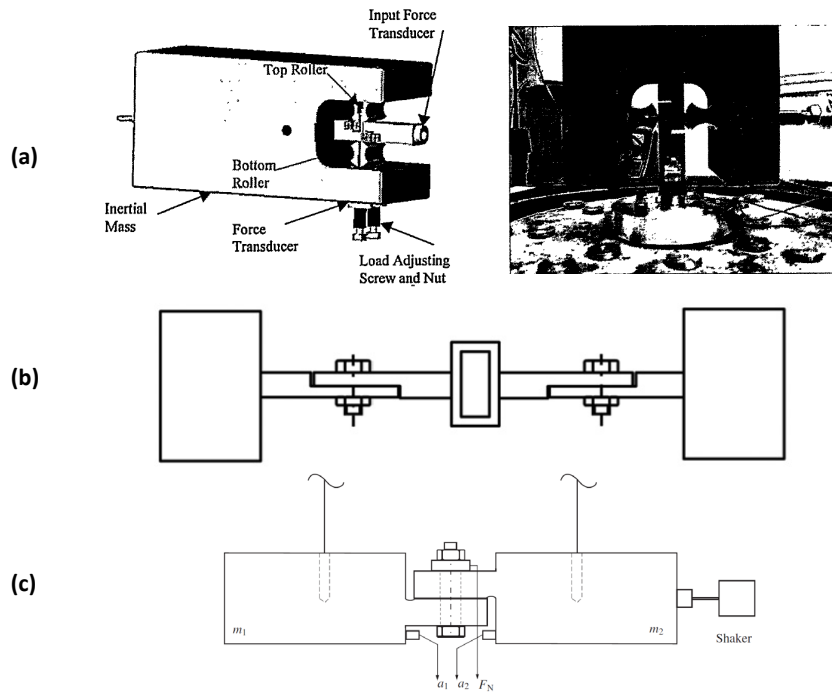


Figure 1.18 – ExpBenchGW - (a) Banc d’essai de Smallwood [SGC00] (b) Banc d’essai de Goyder [GIB11] (c) Banc d’essai de Gaul [BRS⁺11]

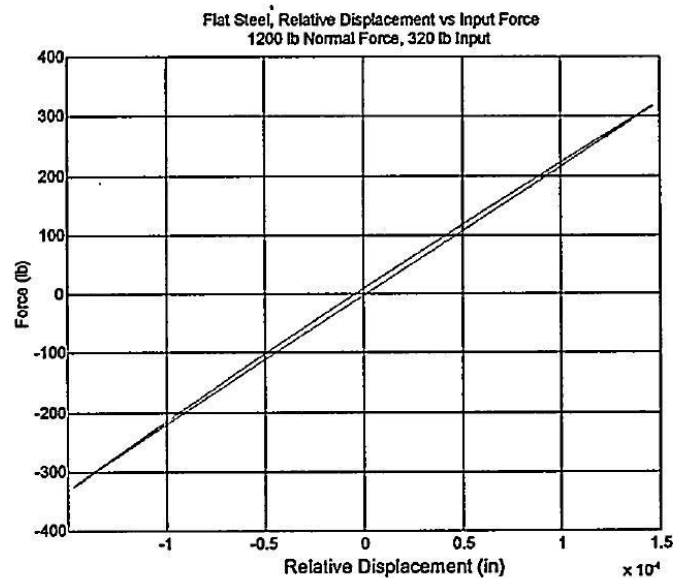


Figure 1.19 – Courbes d’hystéresis traduisant la dissipation - Source [SGC00]

sous chargement uniforme en utilisant la résonance d’une poutre en flexion. Cette étude expérimentale s’apparente fortement au cas Metherell et Diller.

1.3.4 Problème de Goodman et Klumpp et autres cas

Rappelons que le problème de Goodman et Klumpp consiste en l'étude de deux poutres encastées-libres serrées l'une contre l'autre sous un chargement uniforme et soumises à un effort tranchant appliqué de manière quasi-statique, voir figure 1.5 (a). Un grand nombre d'études expérimentales traitent le cas de poutres *lap-joint* en flexion assimilable au problème de Goodman et Klumpp, voir [MBV01], [HSM⁺04], [SHM⁺04], [JAM07], [AJ07b], [NFAB⁺08b], [CB08], [Cai09], [HFP09], [EKL⁺13], [SSAD13]. La totalité de ces études utilisent la résonance d'un banc d'essai afin de charger la liaison selon un mouvement de flexion. Notons que quelques travaux concernent le cas de dissipations dues à la rotation des poutres autour de la liaison, voir [BW77], [OOM06]. La dissipation d'une interface chargée dynamiquement dans la direction normale a aussi été étudiée [HOG02]. Une revue détaillée des différents banc d'essai utilisés peut être trouvée dans [DCP13].

Les hypothèses de faible non-linéarité associées et de découplage modal sont largement acceptées pour l'identification des structures assemblées. Une approche consiste à exciter la structure avec un choc ou par appropriation et de mesurer le décrément libre d'un mode particulier, voir [HSM⁺04], [HFP09], [EKL⁺13], [DCP13], [Cai09], [SSAD13]. Sous ces hypothèses, **le lâché permet théoriquement d'observer tous les états du système à l'aide d'une seule mesure pour toutes les amplitudes jusqu'à la plus grande** (atteinte au début de l'essai).

1.3.5 Techniques de traitement du signal

Les techniques de traitement du signal sont très nombreuses et nous nous contentons ici comme ailleurs de mentionner les travaux appliqués aux cas de structures assemblées. La forme des solutions oscillantes supposés à l'équation 1.16 suppose que les paramètres évoluent avec le temps. Il est donc nécessaire de recourir à des méthodes de traitement du signal en temps-fréquence.

Hartwigsen *et al.* [HSM⁺04] mesurent la réponse au choc d'une structure élémentaire de poutre et d'un cadre assemblé par une liaison de type *lap-joint*. Les premiers modes observés sont des modes de flexion. Les paramètres modaux de chaque mode sont obtenus à l'aide d'un filtre de Butterworth passe-bande centré autour de la fréquence de résonance. La transformée de Hilbert est appliquée au signal ainsi obtenu afin d'en obtenir le signal analytique duquel peut être extrait l'évolution de la fréquence et de l'amortissement avec le temps. Elle est encore utilisée actuellement, voir [DCP13], [SSAD13]. Cette méthode ne permet d'extraire que des variations d'amplitude (et donc d'amortissement) et de fréquence relativement lente ce qui peut dans certaines conditions poser quelques problèmes pour l'identification. Les variations les plus rapides sont de périodes égales à l'inverse de la largeur du filtre divisé par 2. Dans le cas de l'identification d'un banc d'essai élémentaire, cette méthode

est généralement suffisante.

Heller [HFP09] utilise la transformée en ondelettes pour obtenir l'identification non-paramétrique des modes d'une poutre similaire. La transformée en ondelette ne nécessite pas de phase de filtrage préliminaire. Il est cependant nécessaire de supposer que la contribution des modes voisins du mode sélectionné est nulle pour l'identification. Cette approximation est généralement satisfaite dans le cas d'une structure d'essais élémentaire.

La méthode de décomposition modale empirique (en anglais : *Empirical Mode Decomposition* ou EMD) a été utilisée par Eriten *et al.* [EKL⁺13] pour l'identification des modes de flexion d'une liaison lap-joint élémentaire. Le principe de l'EMD est de décomposer le signal en une somme de signaux élémentaires appelés modes intrinsèques à l'aide d'une technique d'interpolation. Dans le cas d'une réponse libre, les modes intrinsèques sont confondus avec les modes de la structure à identifier. Cette méthode est algorithmique : Le premier mode intrinsèque identifié correspond à la période la plus courte. Celui-ci est ensuite soustrait du signal et ainsi de suite jusqu'aux modes de plus basses fréquences. L'algorithme est arrêté à l'aide d'un critère en énergie. Cette technique de décomposition relativement récente est généralement associée à la transformée de Hilbert pour la partie d'identification, elle porte alors le nom de transformée de Hilbert-Huang, voir [HS05].

Toutes ces méthodes ont la même faiblesse : elles présentent toutes des défauts de bord. L'effet de bord se caractérise par des variations rapides du signal analytique estimé au début et à la fin de la mesure. Dans le cas de vibrations libres amorties, ce problème est très important car les amplitudes les plus importantes sont obtenues au début de la mesure. Ce défaut est accru par le fait que les amplitudes les plus importantes sont parcourues en un nombre assez faible de cycles (la décroissance de l'enveloppe étant quasi-exponentielle). Pour contourner ce problème, Heller [Hel05] propose de prolonger le signal en lui ajoutant une portion de signal supplémentaire au début de la fenêtre temporelle. Ce signal est une harmonique de phase et d'amplitude égales à celles du signal à l'origine, afin de le prolonger de manière continue. Cette méthode nécessite néanmoins la connaissance de ces deux états à l'origine ce qui est l'objectif de l'identification. Par itération successive il semble néanmoins possible d'appliquer une telle méthode.

L'approche d'identification non-paramétrique offerte par le concept de fréquence et d'amortissement équivalents permet d'analyser le comportement dynamique d'une structure. Dans une optique de modélisation, **l'identification non-paramétrique en fréquence et amortissement n'est pas suffisante. Cette approche n'est par ailleurs applicable que pour trouver les solutions du régime stabilisé sous excitation mono-fréquentielle.** Ainsi, elle ne permet pas de rendre compte de manière suffisante d'une excitation aléatoire ou plus généralement d'un régime transitoire quelconque. Ce point est argumenté dans la dernière partie de la thèse. Il est donc généralement nécessaire de caractériser la fonction de force r dans l'équation de dynamique 1.5.

Une fois la forme de la force choisie, l'approche la plus commune pour recalculer les paramètres θ du modèle consiste à minimiser, au sens des moindres carrés, l'écart entre la mesure et le modèle.

$$\min_{\theta} \|\mathbf{P}_{\text{mesure}}(\theta) - \mathbf{P}_{\text{modele}}\| \quad (1.17)$$

Cette approche optimale peut se faire dans le domaine fréquentiel, voir [BL04], [IA12], comme dans le domaine temporel.

La somme de la force r et de la force élastique $\omega^2 p$ est usuellement appelée *restoring force*. Dans le cas de formes simples, les paramètres de la force peuvent être identifiés en utilisant une méthode de lissage appelée *force state mapping*. Le principe consiste à retirer les efforts d'inertie à la mesure et de tracer la dépendance de la *restoring force* dans le plan vitesse-déplacement. Jalali *et al.* [JAM07] utilisent cette méthode associée aux moindres carrés ordinaires en se donnant une forme de type polynomiale.

Hanss *et al.* [HOG02] caractérisent la rigidité normale et l'amortissement d'une interface à l'aide d'une méthode inverse basée sur l'arithmétique floue.

Il est aussi possible d'utiliser les fonctions de fréquence et d'amortissement équivalents préalablement identifiées. Cette approche est proposée dans la thèse de Nguyen [Ngu07]. Nguyen calcule analytiquement les solutions approchées pour des non-linéarités simple de type cubique ou linéaires par morceaux à l'aide de la méthode de perturbation de Krylov-Bogoliubov [Nay08]. La distance aux courbes de fréquence et d'amortissement équivalents en fonction de l'amplitude identifiées à l'aide de la transformée en ondelettes est ensuite minimisée afin d'obtenir les paramètres optimaux. Cependant dans le cas des assemblages, l'hypothèse de force non-linéaires cubiques reste très éloignée de la physique du contact. Il est attendu que les forces réduites de la liaison produisent des cycles d'hystérésis. Pour cette raison, il est souhaitable de chercher à recalculer des forces de la forme des macro-modèles présentés au chapitre 1.2.2.

Segalman [Seg02] utilise les courbes de dissipation par cycle en fonction de l'effort appliqué pour recalculer son modèle. La relation entre dissipation et effort $D = vF^{3+\chi}$ trouvée expérimentalement par Smallwood [SGC00] produit des droites de pente $3 + \chi$ en adoptant une échelle logarithmique, voir figure 1.20

Notons que cette relation est basée sur une hypothèse de non dépendance de la déformée modale à l'amplitude. Dans ce cas, la relation entre dissipation et taux d'amortissement est directe. Ainsi Segalman recalcule son modèle à quatre paramètres en trouvant la droite qui minimise l'écart aux points mesurés.

Nouira *et al.* [NFAB⁺08a] utilisent un algorithme génétique couplé à un réseau de neurone artificiel afin de recalculer les paramètres de glissement et de raideur des frotteurs de Jenkins d'un modèle éléments finis à l'aide des paramètres modaux équivalents.

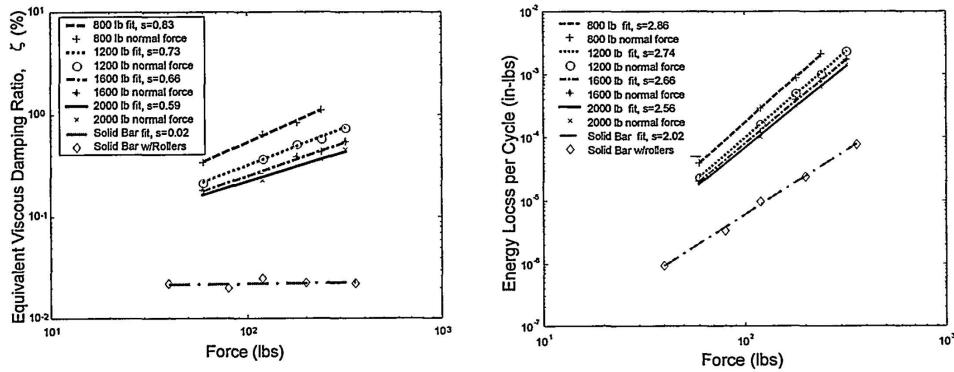


Figure 1.20 – Relation de puissance entre dissipation et effort appliqué - Source [SGC00]

1.4 Positionnement des travaux de la thèse

Le caractère faiblement non-linéaire des structures assemblées incite à étendre les méthodes de réduction des systèmes linéaires au cas présent afin d'en obtenir des modèles compacts.

La thèse se découpe en deux grandes parties.

Dans la première, on utilise une approche modale classique permettant de construire le modèle d'une grande structure. On utilise alors le principe de mode linéarisé équivalent basé sur les hypothèses simplificatrices de faible non-linéarité et de découplage modal. Les travaux développés dans les chapitres 2 à 5 sont à rapprocher des travaux de thèse de Heller [Hel05], de Caignot [Cai09] et de Peyret [Pey12]. Plusieurs outils numériques et expérimentaux originaux sont proposés pour la mesure du comportement des liaisons. Une analyse paramétrique sur une géométrie de liaison dédié à la dissipation est aussi présentée.

Les limites de l'approche modale sont discutés dans la seconde partie de la thèse (chapitres 6 et 7). Notamment, nous verrons que l'hypothèse de faible non-linéarité n'entraîne pas nécessairement le découplage des modes. Il s'agit là d'une hypothèse assez forte. Un principe original de réduction de modèle est donc présenté. La synthèse du modèle est effectuée à l'échelle d'une liaison grâce à l'espace des sollicitations principales. Cette approche permet de construire de façon bien moins coûteuse le modèle compact de la structure. Cette formulation permet en outre de s'affranchir en partie du problème de couplage modal. En cela cette seconde partie se rapproche des travaux récents de Segalman [Seg10] et Quinn [Qui12]. Nous proposons d'associer des modèles d'Iwan aux éléments d'un espace local appelé espace des sollicitations principales. Une relation entre fréquence et amortissement équivalents originale permet de vérifier que le modèle d'Iwan est bien en mesure de modéliser le comportement observé. Une étude expérimentale sur le couplage entre sollicitations est finalement présentée afin de mettre en évidence les limites inhérentes à l'utilisation des macro-modèles pour les liaisons d'assemblages.

Bibliographie du chapitre 1 : État de l'art

- [AB11] I.I. Argatov and E.A. Butcher. On the iwan models for lap-type bolted joints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(2) :347–356, March 2011.
- [ABLS05] F. Al-Bender, Vincent Lampaert, and Jan Swevers. The generalized maxwell-slip model : a novel model for friction simulation and compensation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(11) :1883–1887, 2005.
- [AJ07a] H. Ahmadian and H. Jalali. Generic element formulation for modelling bolted lap joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5) :2318–2334, July 2007.
- [AJ07b] H. Ahmadian and H. Jalali. Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2) :1041–1050, February 2007.
- [Bal96] E. Balmes. Optimal ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition. *AIAA journal*, 34(6) :1256–1260, 1996.
- [BB06] B. Borsotto and Dominique Beauvois. Les frottements : origines physiques et modèles. *Technologies & Formations*, (n°128), 2006.
- [BC68] M.C.C. Bampton and R.R. Craig, JR. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [BDPH13] N. Bouchaala, J.L. Dion, N. Peyret, and M. Haddar. Micro-slip induced damping in the contact of nominally flat surfaces. *International Journal of Applied Mechanics*, 05(01) :1350005, March 2013.
- [Bjo97] S. Bjorklund. A random model for micro-slip between nominally flat surfaces. *Journal of tribology*, 119(4) :726–732, 1997.
- [BL04] M. Böswald and M. Link. Identification of non-linear joint parameters by using frequency response residuals. In *International Conference on Noise Vibration Engineering*, pages 3121–3140, 2004.
- [Bob02] A. Bobillot. *Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d'Ariane 5*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2002.
- [BRS⁺11] S. Bograd, P. Reuss, A. Schmidt, L. Gaul, and M. Mayer. Modeling the dynamics of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(8) :2801–2826, November 2011.
- [BW77] C.F. Beards and J.L. Williams. The damping of structural

- vibration by rotational slip in joints. *Journal of Sound and Vibration*, 53(3) :333–340, August 1977.
- [Cai09] A. Caignot. *Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Cachan, 2009.
- [CB08] D Celic and M Boltezar. Identification of the dynamic properties of joints using frequency-response functions. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1-2) :158–174, October 2008.
- [CD05] W. Chen and X. Deng. Structural damping caused by micro-slip along frictional interfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(8) :1191–1211, August 2005.
- [CEB87] W. R. Chang, I. Etsion, and D. B. Bogy. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces. *Journal of Tribology*, 109(2) :257–263, April 1987.
- [Cha05] L. Champaney. Contact unilatéral entre solides élastiques. *Notes de cours 'Eléments finis' du DESS Dynamique des Structures Modernes dans leur Environnement*, 2005.
- [CM77] K. Chandrashekhara and S. K. Muthanna. Stresses in a thick plate with a circular hole under axisymmetric loading. *International Journal of Engineering Science*, 15(2) :135–146, 1977.
- [CWRU06] A.D. Crocombe, R. Wang, G. Richardson, and C.I. Underwood. Estimating the energy dissipated in a bolted spacecraft at resonance. *Computers & Structures*, 84(5-6) :340–350, January 2006.
- [Dah68] P. R Dahl. A solid friction model. Technical report, Space and Missile systems organization air force systems command, May 1968.
- [DBBK07] D.V. Deshmukh, E.J. Berger, M.R. Begley, and Uday Komragiri. Correlation of a discrete friction (iwan) element and continuum approaches to predict interface sliding behavior. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 26(2) :212–224, March 2007.
- [DCP13] J.L. Dion, G. Chevallier, and N. Peyret. Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 34(1–2) :106–115, January 2013.
- [DOOO08] O. Damisa, V.O.S. Olunloyo, C.A. Osheku, and A.A. Oyediran. Dynamic analysis of slip damping in clamped layered beams with non-uniform pressure distribution at the interface. *Journal of Sound and Vibration*, 309(3-5) :349–374, January 2008.
- [DWOAL95] C.C. De Wit, H. Olsson, K.J. Astrom, and P. Lischinsky. A new

- model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3) :419–425, 1995.
- [Ear66] S.W.E. Earles. Theoretical estimation of the frictional energy dissipation in a simple lap joint. *Journal of mechanical engineering science*, 8 :207–214, 1966.
- [EKL⁺13] M. Eriten, M. Kurt, G. Luo, D. McFarland, L. A. Bergman, and A.F. Vakakis. Nonlinear system identification of frictional effects in a beam with a bolted joint connection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39(1–2) :245–264, August 2013.
- [EPB11] M. Eriten, A.A. Polycarpou, and L.A. Bergman. Physics-based modeling for fretting behavior of nominally flat rough surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10) :1436–1450, May 2011.
- [Eri12] M. Eriten. *Multiscale physics-based modeling of friction*. PhD thesis, May 2012.
- [FSS11] K Farhang, D Segalman, and M Starr. A multiscale approach to modeling energy dissipation in lap joints : Comparison of two models. ASME, 2011.
- [GIB11] H. Goyder, P. Ind, and D. Brown. Development of a method for measuring damping in bolted joints. pages 1253–1262, January 2011.
- [GK56] L.E. Goodman and J.H. Klumpp. Analysis of slip damping with reference to turbine blade vibration, journal of applied mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 23 :421, 1956.
- [Gui97] J. Guillot. *Assemblages par Elements Filetes Modelisations et Calcul*. Ed. Techniques Ingénieur, 1997.
- [Guy65] R. Guyan. Reduction of mass and stiffness matrices. *AIAA Journal*, 3(2) :380, 1965.
- [GW66] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 295(1442) :300–319, June 1966.
- [Hel05] L. Heller. *Amortissement dans les structures assemblées*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2005.
- [Her] Heinrich Hertz. Ueber die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92 :156–171.
- [HFP09] L. Heller, E. Foltête, and J. Piranda. Experimental identification of nonlinear dynamic properties of built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 327(1-2) :183–196, October 2009.

- [HOG02] M. Hanss, S. Oexl, and L. Gaul. Identification of a bolted-joint model with fuzzy parameters loaded normal to the contact interface. *Mechanics Research Communications*, 29(2-3) :177–187, March 2002.
- [HS05] N.E. Huang and S.S. Shen. *Hilbert-Huang transform and its applications*, volume 5. World Scientific, 2005.
- [HSM⁺04] C. J. Hartwigsen, Y. Song, D. M. McFarland, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis. Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration. *Journal of Sound and Vibration*, 277(1-2) :327–351, October 2004.
- [IA12] M. Iranzad and H. Ahmadian. Identification of nonlinear bolted lap joint models. *Computers & Structures*, 96 :1–8, 2012.
- [IDSBLC13] G Inglebert, T Da Silva Botelho, and I Lemaire Caron. Théorie du contact de hertz contacts ponctuels ou linéiques. *Techniques de l'ingénieur Surfaces et thermomécanique du contact*, base documentaire : TIB463DUO.(ref. article : tri200), 2013.
- [IP05] R. A. Ibrahim and C. L. Pettit. Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners. *Journal of Sound and Vibration*, 279(3-5) :857–936, January 2005.
- [JAM07] H. Jalali, H. Ahmadian, and J.E. Mottershead. Identification of nonlinear bolted lap-joint parameters by force-state mapping. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25-26) :8087–8105, December 2007.
- [JAP11] H. Jalali, H. Ahmadian, and F. Pourahmadian. Identification of micro-vibro-impacts at boundary condition of a nonlinear beam. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3) :1073–1085, April 2011.
- [JSP10] V. Jaumouille, J.-J. Sinou, and B. Petitjean. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems—application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, 329(19) :4048–4067, September 2010.
- [KHN⁺07] N.M. Kwok, Q.P. Ha, M.T. Nguyen, J. Li, and B. Samali. Bouc–Wen model parameter identification for a MR fluid damper using computationally efficient GA. *ISA Transactions*, 46(2) :167–179, April 2007.
- [KPGV09] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, and A.F. Vakakis. Non-linear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170–194, January 2009.
- [Mas26] G. Masing. Eigenspannungen und verfestigung beim messing.

- Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics*, page 332–335, 1926. cited By (since 1996) 189.
- [MBV01] X. Ma, L. Bergman, and A. Vakakis. Identification of bolted joints through laser vibrometry. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3) :441–460, September 2001.
- [MD68] A. F. Metherell and S. V. Diller. Instantaneous energy dissipation rate in a lap joint – uniform clamping pressure. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :333–340, March 1968.
- [MG07] M.H. Mayer and L. Gaul. Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2) :724–734, February 2007.
- [Min49] R.D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16 :259–268, 1949.
- [Nan06] B.K. Nanda. Study of the effect of bolt diameter and washer on damping in layered and jointed structures. *Journal of Sound and Vibration*, 290(3-5) :1290–1314, March 2006.
- [Nay08] A.H. Nayfeh. *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [NFAB⁺08a] H. Nouria, E. Foltête, B. Ait Brik, L. Hirsinger, and S. Ballandras. Experimental characterization and modeling of microsliding on a small cantilever quartz beam. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1) :30–49, 2008.
- [NFAB⁺08b] H. Nouria, E. Foltête, B. Ait Brik, L. Hirsinger, and S. Ballandras. Experimental characterization and modeling of microsliding on a small cantilever quartz beam. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1–2) :30–49, October 2008.
- [Ngu07] T.M. Nguyen. *Dynamique non linéaire des systemes mécaniques couplés : Réduction de modele et Identification*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2007.
- [OOM05] M. Oldfield, H. Ouyang, and J.E. Mottershead. Simplified models of bolted joints under harmonic loading. *Computers & Structures*, 84(1-2) :25–33, December 2005.
- [OOM06] H. Ouyang, M.J. Oldfield, and J.E. Mottershead. Experimental and theoretical studies of a bolted joint excited by a torsional dynamic load. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(12) :1447–1455, December 2006.
- [PDCA10] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Microslip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02(02) :281, 2010.

- [Pey12] N. Peyret. *Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique*. PhD thesis, Université Paris-Est, October 2012.
- [Pir13] J. Piranda. Analyse modale expérimentale. *Techniques de l'ingénieur Vibrations en milieu industriel, mesures, surveillance et contrôle*, base documentaire : TIB424DUO.(ref. article : r6180), 2013.
- [QS05] D.D. Quinn and D.J. Segalman. Using series-series iwan-type models for understanding joint dynamics. *Journal of applied mechanics*, 72(5) :666–673, 2005.
- [Qui12] D.D. Quinn. Modal analysis of jointed structures. *Journal of Sound and Vibration*, 331(1) :81–93, January 2012.
- [RCB11] V. Roulet, L. Champaney, and P.-A. Boucard. A parallel strategy for the multiparametric analysis of structures with large contact and friction surfaces. *Advances in Engineering Software*, 42(6) :347–358, June 2011.
- [RV] F. Robbe Valloire. Statistical analysis of asperities on a rough surface. *Wear*, 249.
- [Seg01] D.J. Segalman. An initial overview of iwan modeling for mechanical joint. *Sandia report*, SAND2001-0811, 2001.
- [Seg02] D.J. Segalman. A four-parameter iwan model for lap-type joints. *Sandia report*, SAND2002-3828, 2002.
- [Seg07] D.J. Segalman. Model reduction of systems with localized nonlinearities. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2(3) :249, 2007.
- [Seg10] D.J. Segalman. A modal approach to modeling spatially distributed vibration energy dissipation. Technical report, Tech. Rep. SAND2010-4763, Sandia National Laboratories (August 2010), 2010.
- [SGC00] D.O. Smallwood, D.L. Gregory, and R.G. Coleman. Damping investigations of a simplified frictional shear joint. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (US) ; Sandia National Labs., Livermore, CA (US), 2000.
- [SHM⁺04] Y. Song, C.J. Hartwigsen, D.M. McFarland, A.F. Vakakis, and L.A. Bergman. Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted iwan beam elements. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1–2) :249–276, May 2004.
- [SM05] Y. Song and D. M. McFarland. Effect of pressure distribution on energy dissipation in a mechanical lap joint. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics journal*, 43(2) :420–425, 2005.

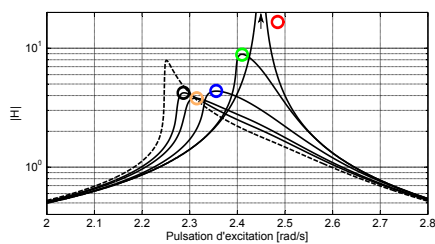
- [SSAD13] M.J. Starr, D.J. Segalman, M.S. Allen, and B.J. Deaner. Application of viscous and iwan and modal damping models to experimental measurements from bolted structures. Technical report, Sandia National Laboratories Livermore, CA; Sandia National Laboratories (SNL-NM), Albuquerque, NM (United States), 2013.
- [VDRBB⁺10] G. Vermot Des Roches, J.P. Bianchi, E. Balmes, R. Lemaire, P. Thierry, et al. Using component modes in a system design process. IMAC, Jacksonville, 2010.
- [WO08] H. Wentzel and M. Olsson. Mechanisms of dissipation in frictional joints—Influence of sharp contact edges and plastic deformation. *Wear*, 265(11–12) :1814–1819, November 2008.

Chapitre 2

Dynamique modale

Sommaire

2.1	Rhéologie associée à un mode d'une structure assemblée	56
2.2	Paramètres modaux équivalents	57
2.2.1	Balance harmonique	59
2.2.2	Calcul des paramètres équivalents	63
2.2.3	Calcul de la réponse harmonique à partir du modèle équivalent	65
	Bibliographie du chapitre 2	69



Résumé

Ce chapitre présente le principe de réduction des structures assemblées sur l'espace des modes selon le principe de linéarisation équivalente. Les concepts fondamentaux présentés dans l'introduction sont ici appliqués à un cas académique.

2.1 Rhéologie associée à un mode d'une structure assemblée

Soit \mathbf{X} le déplacement géométrique discrétisé d'une structure assemblée par une ou plusieurs liaisons. L'équation du mouvement de cette structure s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{R}(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{x}_i) = \mathbf{F}_e \quad (2.1)$$

\mathbf{R} est la force de contact aux interfaces des liaisons qui dépend d'un certain nombre de paramètres θ , de variables internes \mathbf{x}_i et éventuellement du temps. La structure comporte un nombre fini I de surfaces de contact $\sum_i^I S^i$ qui représentent une zone discontinue de l'espace géométrique de la structure. La force de contact peut s'écrire sous la forme $\mathbf{R} = [\mathbf{0} \ \mathbf{R}^{S_1} \ \dots \ \mathbf{R}^{S_i} \ \dots \ \mathbf{R}^{S_I}]$.

Sous l'hypothèse de faible non-linéarité, il est possible de définir la base modale réduite Φ du système de dimension N . On suppose cette base normalisée par rapport à la masse. En projetant l'équation 2.1 sur la base modale, on obtient N équations :

$$\ddot{p}_n + \omega_{\infty,n}^2 p_n + \sum_i^I (\phi_n^{S_i})^T \mathbf{R}^{S_i} = \phi_n^T \mathbf{F}_e := f_{e,n} \quad (2.2)$$

Ces équations sont couplées car les fonctions de force de contact dépendent du déplacement géométrique \mathbf{X} et non des amplitudes modales p_n . Dans ce chapitre, nous les considérons découplées, ce qui revient à assumer que le système suit l'hypothèse de Basile. En réalité, l'hypothèse de Basile ne concerne que les termes d'amortissement. Il s'agit ici d'une extension de cette hypothèse au cas de faibles non-linéarités.

Sous l'hypothèse de contraintes de contact constantes (*i.e.* indépendante de l'amplitude ou du temps), les efforts entre deux interfaces peuvent être modélisées par le modèle phénoménologique d'Iwan [Iwa66]. **L'association en parallèle de plusieurs modèles d'Iwan est encore un modèle d'Iwan.** Ainsi, l'équation 2.1 est assimilable à une somme d'oscillateurs d'amplitude modale $p := p_n$ à un degré de liberté de la forme :

$$\ddot{p} + \omega_{\infty}^2 p + r_{Iwan}(p, r_{int}, \theta) = f_e \quad (2.3)$$

où r prend la forme du modèle d'Iwan. **Cette force traduit la contribution de toutes les interfaces à la dissipation.** La figure 2.1 est un schéma de la rhéologie élémentaire associée à la dynamique d'un mode d'une structure assemblée.

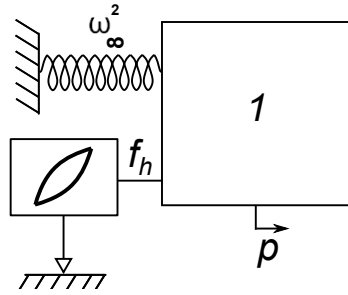


Figure 2.1 – Rhéologie associée à un mode d'une structure assemblée.

2.2 Paramètres modaux équivalents

On se donne maintenant une distribution particulière de frotteur pour laquelle le régime stabilisé produit la courbe d'hystérésis présentée à la figure 2.2.

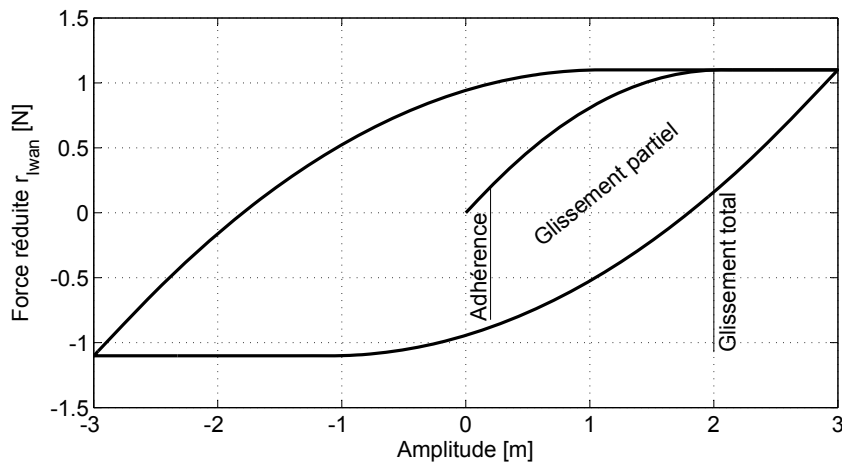


Figure 2.2 – Régime stabilisé d'un modèle d'Iwan.

Il s'agit d'un modèle d'Iwan discret comprenant 20 cellules. La raideur d'adhérence du modèle est égale au nombre de frotteurs de Jenkins multiplié par la raideur σ d'un seul élément en adhérence. Cette raideur globale est ici fixée à 1 [N/m]. Les forces de glissement des frotteurs sont réparties linéairement de façon à ce que le glissement partiel apparaisse pour une amplitude de 0.2m et le glissement total pour 2m.

Nous choisissons ici de ne pas intégrer la raideur ω_∞^2 au modèle d'Iwan. Notons qu'il est possible d'obtenir la même raideur globale en ajoutant un frotteur de Jenkins associé à une force de glissement très élevée. Cependant ce cas correspond physiquement à la destruction des liaisons, ce qui est exclu dans l'hypothèse de faible non-linéarité. La raideur linéaire correspond à la somme de toutes les zones de contact qui restent en adhérence au cours de la dynamique. Cette modélisation est en accord avec l'approche développée par

Nicolas Peyret [Pey12] qui distingue deux classes d'aspérités : Celles dont les ordres de défauts sont les plus bas se comportent comme les points d'adhérence modélisés ici par la raideur linéaire et celles d'ordre plus élevées modélisés par le modèle d'Iwan peuvent admettre un glissement total. La raideur linéaire est théoriquement atteinte pour une amplitude infinie. La valeur de la raideur est ici fixée à 5N/m . La forme de la *restoring force* est tracée à la figure 2.3. Les travaux expérimentaux de Smallwood ont permis de mettre en évidence ce type de courbe d'hystérésis dans le cas d'une liaison lap-joint chargée dans la direction axiale, voir [SGC00].

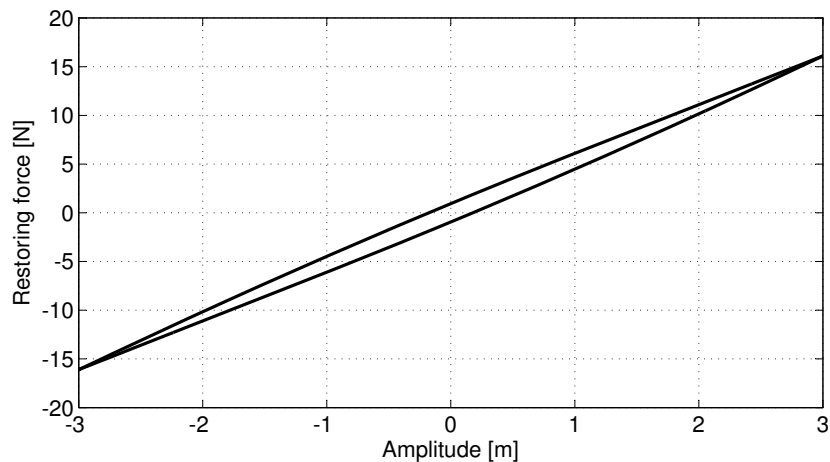


Figure 2.3 – *Restoring force* : Raideur linéaire + Modèle d'Iwan.

Le système est dans un état de glissement partiel bien que le modèle d'Iwan soit en glissement total.

Nous avons précédemment défini les paramètres modaux équivalents comme les fréquences et amortissements propres, mesurés sur la fréquence fondamentale lors des vibrations libres du système. Ces paramètres sont fonction de l'enveloppe, c'est à dire de l'amplitude maximale atteinte au cours d'un cycle. **En régime établi, ces mêmes paramètres sont obtenus lorsque le système est en quadrature de phase avec la force d'excitation.**

2.2.1 Balance harmonique

La méthode de balance harmonique est généralement employée afin de calculer le régime établi de système non-linéaire, voir [JSP10]. Celle-ci est basée sur l'hypothèse que la réponse du système, en régime établi, se décompose comme une série de Fourier. Cette technique vise à transformer l'équation différentielle de la dynamique en un problème discrétisé algébrique. Elle appartient ainsi à la famille des méthodes de Galerkin. Nous employons ici une méthode basée sur le principe de la balance harmonique pour calculer les paramètres modaux équivalents du système élémentaire d'Iwan.

On se donne une force d'excitation harmonique :

$$f_e(t) = f_m \sin(\omega t) \quad (2.4)$$

Dans l'hypothèse de faible non-linéarité, on ne garde ensuite que la fréquence fondamentale du mouvement qui est donc supposé être en quadrature de phase. On peut aussi en déduire l'accélération :

$$p(t) = p_m \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{p} = -p_m \omega^2 \cos(\omega t) \quad (2.5)$$

La *restoring force* dépend de l'amplitude et de son histoire. Elle est aussi supposée se décomposer comme une série de Fourier. En ne conservant que M composantes :

$$r(t) := \omega_\infty^2 p + r_{Iwan}(t) = \sum_m^M R_r^m \cos(m\omega t) + R_i^m \sin(m\omega t) \quad (2.6)$$

Nous omettons la composante continue, le système est supposé vibrer autour de la position nulle. Lorsque la forme de la force est simple (*i.e.* une raideur cubique), les coefficients de Fourier sont facilement calculables par intégration, avec T la période d'un cycle :

$$\forall n \begin{cases} R_r^n = \frac{2}{T} \int_0^T r(t) \cos(n\omega t) dt \\ R_i^n = \frac{2}{T} \int_0^T r(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce calcul analytique peut être envisagé dans le cas du modèle Iwan en calculant la forme de la force en régime stabilisé. Il est alors nécessaire de régulariser la fonction signe due aux frotteurs de Coulomb. Une alternative consiste à évaluer numériquement les coefficients de Fourier. La figure 2.2 est obtenue par intégration numérique en imposant le déplacement harmonique. La figure 2.4 présente l'évolution du déplacement et de la force calculée en fonction du temps pour une période.

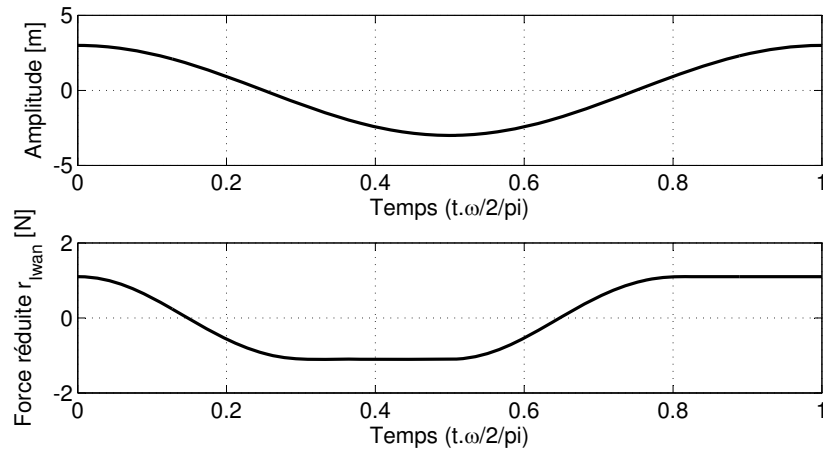


Figure 2.4 – Amplitude et force en fonction du temps sur un cycle.

L'estimation numérique des coefficients de Fourier peut être réalisée à l'aide d'une transformée de Fourier rapide de la courbe de force. Nous lui préférons ici une méthode des moindres carrés ordinaire. L'équation 2.6 discrétisée en temps (soit $\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_1 + T]$) peut être mise sous forme matricielle :

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \cos(2\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \dots & \cos(N\omega t_1) & \sin(N\omega t_1) & R_r^1 \\ \cos(\omega t_2) & \sin(\omega t_2) & \cos(2\omega t_2) & \sin(\omega t_2) & \dots & \cos(N\omega t_2) & \sin(N\omega t_2) & R_r^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & R_r^2 \\ \cos(\omega(t_1 + T)) & \sin(\omega(t_1 + T)) & \cos(2\omega(t_1 + T)) & \sin(2\omega(t_1 + T)) & \dots & \cos(N\omega(t_1 + T)) & \sin(N\omega(t_1 + T)) & R_r^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & R_r^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & R_i^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & R_i^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & R_r^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & R_i^N \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

soit

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\mathbf{R}$$

Les coefficients de Fourier \mathbf{R} sont finalement obtenus par le calcul de :

$$\mathbf{R} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{r} \quad (2.9)$$

La figure 2.5 présente la force obtenue pour différentes troncatures de la série de Fourier. Le cycle réel présente une symétrie par rapport à l'origine.

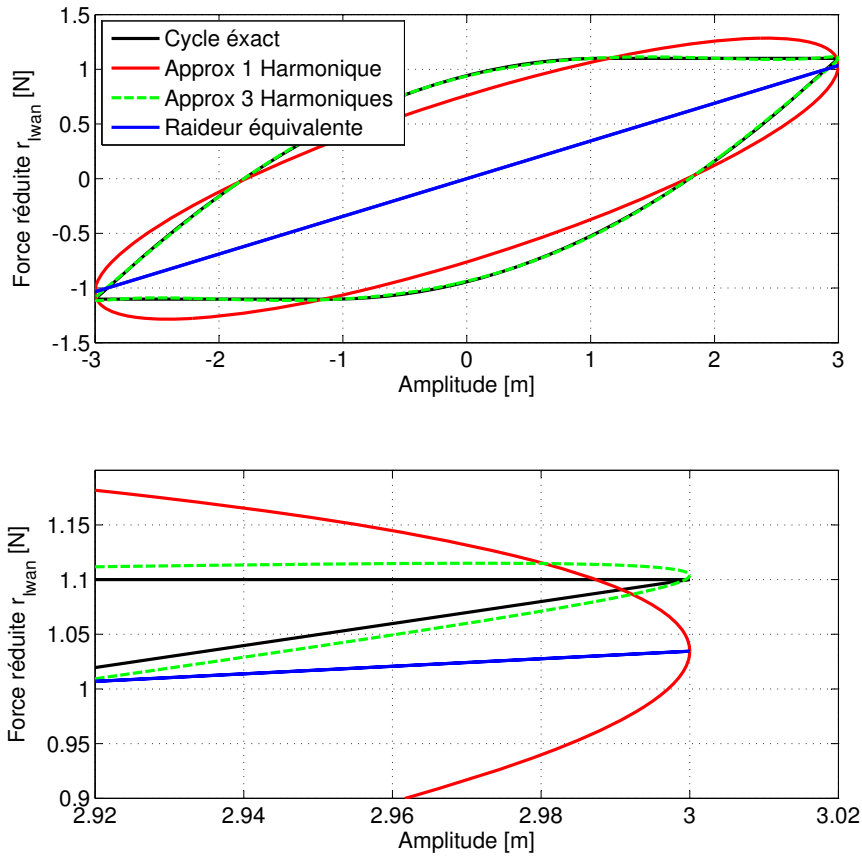


Figure 2.5 – Principe de la linéarisation équivalente.

Ainsi les harmoniques paires sont nulles. La courbe verte en pointillé présente l'estimation obtenue avec les trois premières harmoniques impaires.

Le principe de la balance harmonique est d'utiliser une expression tronquée de l'équation du mouvement et d'équilibrer les termes relatifs aux différentes composantes fréquentielles. Cette étape est appelée équilibrage harmonique. Ainsi, en ne gardant que le terme d'ordre 1 en quadrature, l'équation différentielle 2.3 est transformée en une équation algébrique simple :

$$-\omega^2 p_m + \omega_\infty^2 p_m + R_r^1(p_m) = 0 \quad (2.10)$$

2.2.2 Calcul des paramètres équivalents

La pulsation ω est celle obtenue à la quadrature de phase. Ainsi, la fréquence modale équivalente est donnée par l'équation :

$$2\pi f_{eq}(p_m) := \omega_{eq} = \omega = \sqrt{\omega_\infty^2 + \frac{R_r^1(p_m)}{p_m}} \quad (2.11)$$

Notons que la fraction $\frac{R_r^1(p_m)}{p_m}$ est la raideur équivalente du modèle d'Iwan. Cette raideur est la pente de la droite tracée à la figure 2.5. Notons que cette droite passe approximativement par les points de retournement de la force d'Iwan (cette observation sera utilisée dans le dernier chapitre de la thèse).

L'amortissement d'un système linéaire en état stabilisé peut être calculé à partir des énergies conservatives et dissipées. L'énergie dissipée par cycle D est le travail de la force de dissipation. Dans le cas d'un oscillateur linéaire de masse unitaire, de pulsation propre ω_0 et d'amortissement ξ excité à la pulsation ω , on a :

$$D = \int_{cycle} 2\xi\omega_0 \dot{p} dp = 2\xi\omega_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \omega^2 \cos^2(\omega t) dt = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0^2 p_m^2 = 4\pi\xi \frac{\omega}{\omega_0} E_p \quad (2.12)$$

E_p est l'énergie potentielle égale à l'énergie de déformation E_d du système. Notons que dans le cas de l'oscillateur d'Iwan, l'énergie de déformation n'est pas exactement égale à l'énergie potentielle. L'énergie potentielle est celle qui peut être utilisée par le système pour vibrer. Une fois que le système a quitté sa position initiale, l'équilibre statique n'est plus exactement atteint à la position nulle. Ainsi le système est légèrement précontraint à cette position d'équilibre statique. Le résidu d'énergie de déformation correspondant est alors la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie de déformation. Ce résidu est faible car la force linéaire est très importante devant la force du modèle d'Iwan. Ainsi, nous gardons cette définition pour le cas de notre oscillateur faiblement non-linéaire.

$$\xi_{eq}(p_m) = \frac{\omega}{4\pi\omega_0} \frac{D(p_m)}{E_{cons}(p_m)} = \frac{\omega}{4\pi\omega_0} \frac{D(p_m)}{E_d(p_m)} \quad (2.13)$$

En calculant la dynamique du système sur un cycle stabilisé pour différentes amplitudes de vibrations puis en résolvant l'équation 2.9, on peut calculer les énergies de déformation et d'énergies dissipées par cycle dans le cas de l'oscillateur d'Iwan présenté, voir figure 2.6.

Dans le cas d'oscillations libres ou en quadrature de phase, la pulsation du système est égale à la pulsation propre, on obtient ainsi les fonctions de paramètres équivalents en fonction de l'amplitude maximale tracée à la figure 2.7. Le phénomène de glissement partiel dans les assemblages se traduit par un assouplissement de la fréquence de résonance et une dépendance de l'amortissement au niveau vibratoire. **L'évolution de la fréquence en fonction de l'amplitude est toujours monotone décroissante** car la raideur des

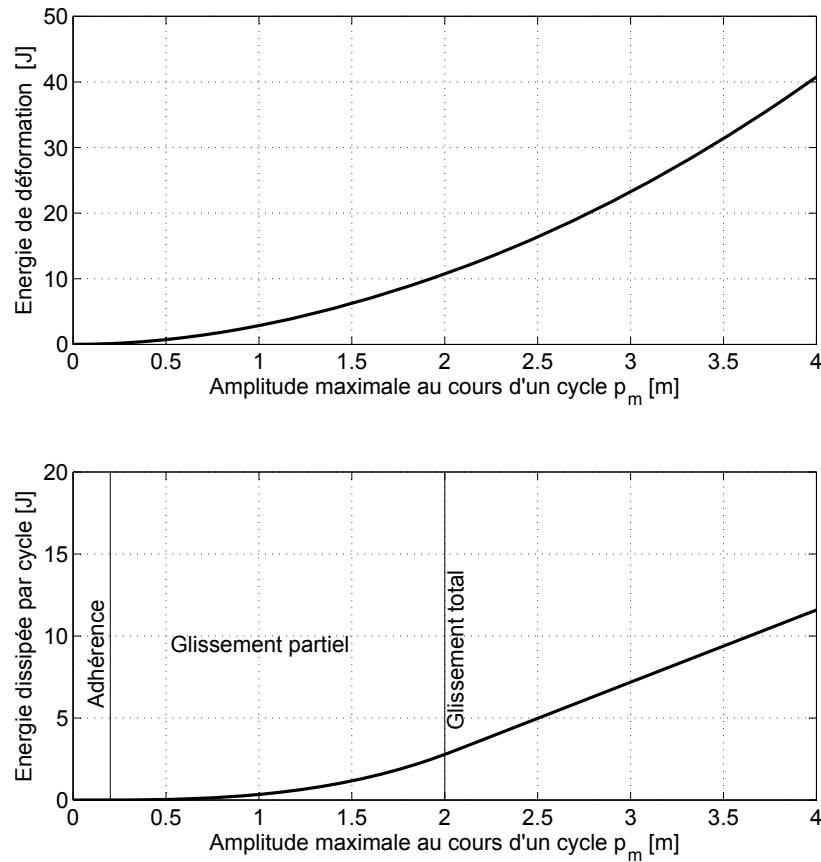


Figure 2.6 – Évolution de l'énergie de déformation et de l'énergie dissipée par cycle en fonction de l'amplitude.

interfaces décroît avec l'amplitude de vibration. **L'évolution de l'amortissement en fonction de l'amplitude est généralement croissante. Il est cependant possible d'observer une décroissance locale de la fonction taux d'amortissement avec l'amplitude.** Ce type de comportement a été observé notamment par Heller, [Hel05]. Ceci correspond physiquement au cas où une portion des interfaces est en état de glissement total tandis que l'autre reste en adhérence, indépendamment de l'augmentation de l'amplitude. Notons que la diminution du taux d'amortissement avec l'amplitude ne signifie pas nécessairement une diminution de l'énergie dissipée par cycle avec l'amplitude. Dans le cas présent, la croissance de l'énergie dissipée par cycle est linéaire alors que l'énergie de déformation évolue comme le carré de l'amplitude. Notons enfin que la pente de la fonction taux d'amortissement peut encore reprendre des valeurs positives pour des amplitudes supérieures si une nouvelle portion des interfaces perd son état d'adhérence.

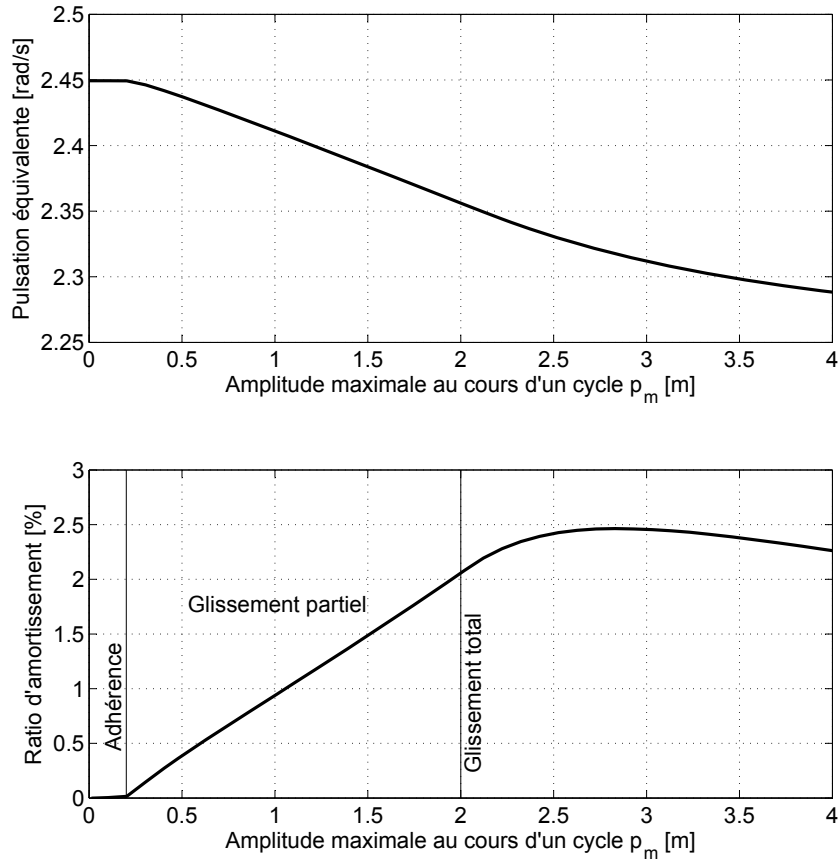


Figure 2.7 – Évolution des paramètres modaux équivalents en fonction de l’amplitude vibratoire.

2.2.3 Calcul de la réponse harmonique à partir du modèle équivalent

La connaissance des paramètres modaux équivalents permet de calculer la réponse du système à une excitation mono-fréquentielle $f_e = f_m \cos(\omega t)$. En opérant la transformée de Fourier de l’équation en paramètres équivalents, l’équation 2.3 est dans ce cas réduite à l’équation suivante :

$$(-\omega^2 + 2j\omega\xi_{eq}(p_m, \omega)\omega_{eq}(p_m) + \omega_{eq}^2(p_m))p_m = f_m \quad (2.14)$$

Il s’agit d’une équation arithmétique complexe non-linéaire qui peut être résolue à l’aide d’un algorithme d’optimisation. En minimisant le module du résidu de cette équation pour les pulsations autour de la résonance, on obtient la figure 2.8. Cette approche est employée dans le cadre d’une étude analytique par Peyret *et al.* [PDCA10].

Plusieurs transferts obtenus pour différentes forces d’excitation sont présentés. Les cercles colorés indique les correspondances entre les différentes représentations du système. Les fonctions paramètres équivalents sont représentées à la figure 2.9 et les courbes d’hystérésis à la figure 2.10.

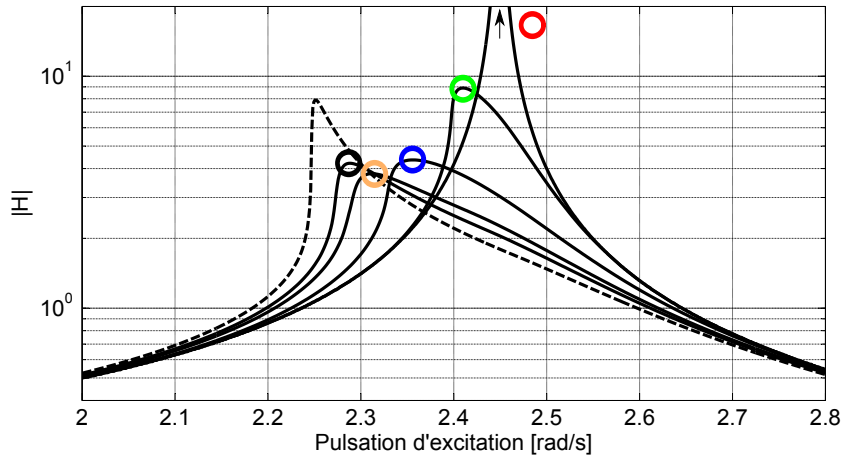


Figure 2.8 – Valeur absolue de la fonction de réponse en fréquence pour différentes forces d’excitation. Les cercles colorés indiquent la correspondance avec les figures 2.9 et 2.10.

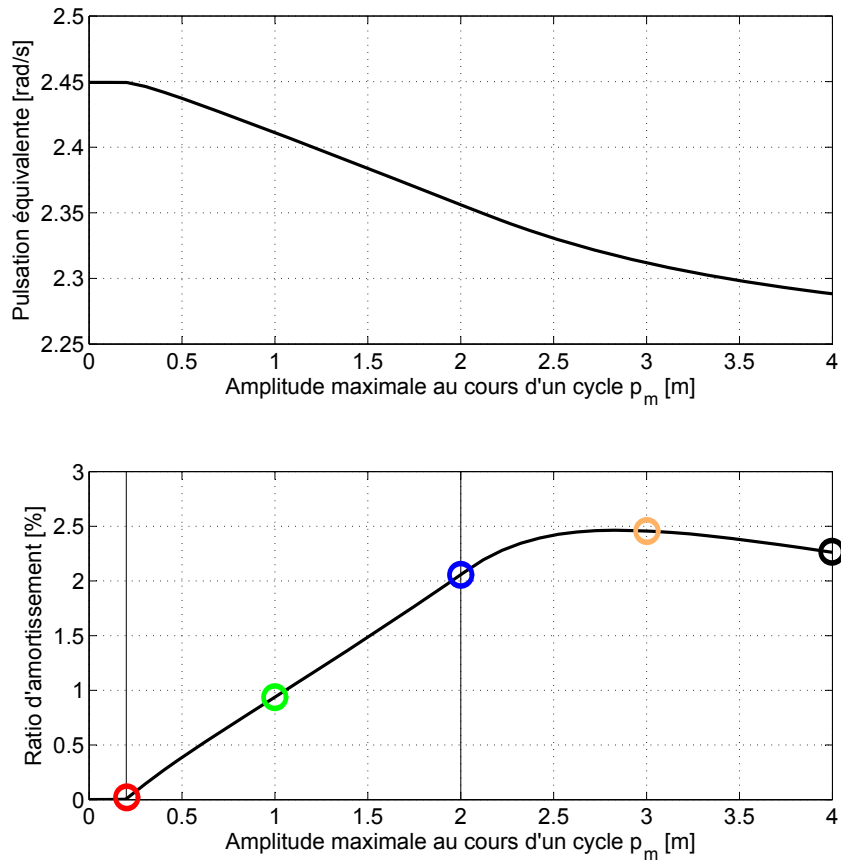


Figure 2.9 – Évolution des paramètres modaux équivalents en fonction de l’amplitude vibratoire. Les cercles colorés indiquent la correspondance avec les figures 2.8 et 2.10.

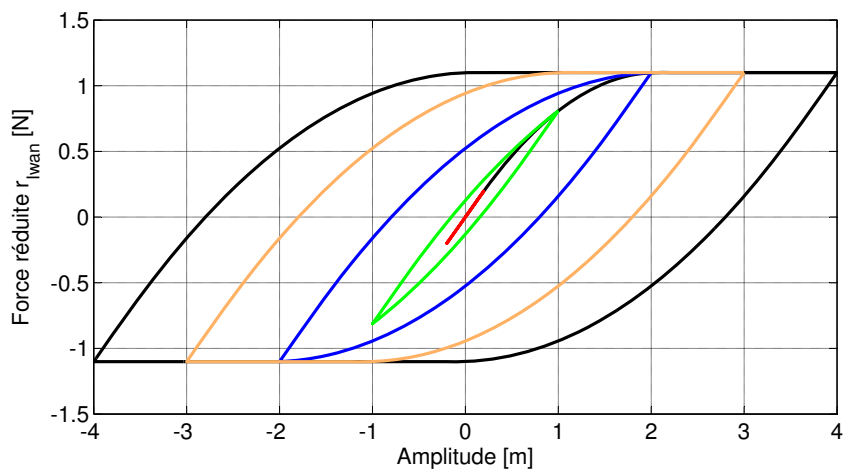


Figure 2.10 – Cycle d’hystérésis du modèle d’Iwan pour différentes amplitudes. Les couleurs indiquent la correspondance avec les figures 2.8 et 2.9.

Conclusion

Ce chapitre a présenté le principe de réduction des structures selon le principe de mode équivalent. Ce principe est basé sur deux hypothèses fondamentales : le comportement dynamique global des assemblages est faiblement non-linéaire et les modes sont découplés. L'hypothèse de découplage modal suppose que la réponse du système est égale à la somme des contributions modales calculées séparément. Sous cette hypothèse, le régime établi d'une structure assemblée peut être calculé à partir de N équations (pour N modes) du type de l'équation 2.14. **Ainsi, la réponse d'une structure assemblée à une excitation mono-harmonique peut être obtenue dès lors que les N modes (déformées modales ϕ_n (supposées indépendantes de l'amplitude) et fonctions paramètres modaux $\omega_{eq,n}$ et $\xi_{eq,n}$) sont identifiés.**

Bibliographie du chapitre 2 : Dynamique modale

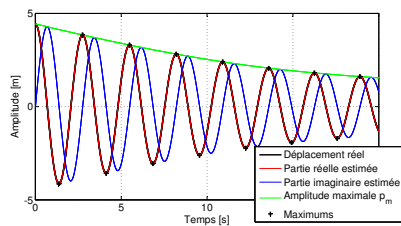
- [Hel05] L. Heller. *Amortissement dans les structures assemblées*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2005.
- [Iwa66] W.D. Iwan. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 33 :893, 1966.
- [JSP10] V. Jaumouille, J.-J. Sinou, and B. Petitjean. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems—application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, 329(19) :4048–4067, September 2010.
- [PDCA10] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Microslip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02(02) :281, 2010.
- [Pey12] N. Peyret. *Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique*. PhD thesis, Université Paris-Est, October 2012.
- [SGC00] D.O. Smallwood, D.L. Gregory, and R.G. Coleman. Damping investigations of a simplified frictional shear joint. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (US); Sandia National Labs., Livermore, CA (US), 2000.

Chapitre 3

Une formulation du Filtrage de Kalman

Sommaire

3.1	Estimation des paramètres modaux	72
3.2	Filtrage de Kalman	74
3.2.1	Principe	74
3.2.2	Les équations de l'algorithme de Kalman linéaire . .	75
3.2.3	Extension du filtrage de Kalman aux systèmes non-linéaires	76
3.2.4	Filtrage de Kalman étendu et <i>unscented</i>	78
3.2.5	Plusieurs capteurs - plusieurs modes (MIMO)	82
3.2.6	Initialisation du filtre de Kalman	84
3.3	Mise en œuvre et vérification de la méthode . . .	86
3.3.1	Systèmes à un degré de liberté - mesure de déplacement	86
3.3.2	Systèmes à plusieurs degrés de libertés - mesures d'accélération bruitées	90
3.4	Conclusion	94
	Bibliographie du chapitre 3	95



Résumé

Ce chapitre présente une formulation du filtre de Kalman adapté au cas de vibrations de structures faiblement non-linéaires en régime libre. Le développement est basé sur le principe de linéarisation équivalente présenté au chapitre précédent.

3.1 Estimation des paramètres modaux

La dynamique d'une structure faiblement non-linéaire amortie peut s'écrire comme une combinaison linéaire de modes dont les amplitudes sont fonction du temps. La contribution d'un seul mode au signal mesuré en un point donné est le produit d'une "porteuse" (de pulsation instantanée ici égale à la dérivée par rapport au temps de la phase Θ) et d'une modulation d'amplitude p_m , qui traduit l'amortissement modal. Dans le cas d'une mesure de déplacement mesuré $\mathbf{x}(t) = [x^{\text{capteur}1}(t), x^{\text{capteur}2}(t), \dots]^T$ est la partie réelle d'un signal complexe dit signal analytique. Ainsi nous cherchons à décomposer les réponses des structures étudiées sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \Re \left[\sum_{n=1}^N \Phi_n p_{m,n}(t) e^{i\Theta_m(t)} \right] \quad (3.1)$$

Φ_n est la déformée modale du mode n . Rappelons que les paramètres modaux équivalents sont supposés dépendre de l'enveloppe du signal. Il apparait ici l'intérêt d'identifier la structure sur sa réponse libre : un seul essai, de choc par exemple, permet de traverser l'ensemble des amplitudes modales et donc d'identifier l'intégralité des courbes de fréquences et d'amortissements. En contrepartie, ce signal est composé de la contribution de plusieurs modes de la structure. Au contraire, dans le cas d'une excitation mono-fréquentielle et multi-points, il est par exemple possible d'approprier la structure sur un seul mode, voir [Fol98]. Notons que certaines excitations "appropriées" (*e.g.* sinus interrompu [Hel05], [DCP13], ondelettes [Seg10]) permettent elles aussi d'observer la réponse libre d'un seul mode. Il est généralement nécessaire de décomposer le signal mesuré en chacune des contributions modales.

On cherche maintenant à se donner une définition de la fréquence et de l'amortissement propre équivalent qui soit identique pour le régime libre ou pour le régime forcé. Pour simplifier l'écriture, on se focalise sur la dynamique d'un seul mode. Sous l'hypothèse de découplage modal, les paramètres modaux équivalents d'un mode sont définis comme ceux de l'équation de la dynamique du système à un degré de liberté :

$$\ddot{p} + 2\xi(p_m)\omega_0(p_m)\dot{p} + \omega_0^2(p_m)p = \frac{f_e}{m} \quad (3.2)$$

La réponse du système à un degré de liberté est une composante de l'équation 3.1 :

$$p = p_m(t) e^{i \int \omega dt} \quad (3.3)$$

La pulsation instantanée ω est la dérivée par rapport au temps de la phase Θ . On a ainsi :

$$\dot{p} = \left(\frac{\dot{p}_m}{p_m} + i\omega \right) p \quad (3.4)$$

puis :

$$\ddot{p} = \left(\frac{\ddot{p}_m}{p_m} + i\dot{\omega} - \omega^2 + 2i\frac{\dot{p}_m}{p_m}\omega \right) p \quad (3.5)$$

Dans la suite, les courbes de fréquences et d'amortissements sont identifiées à partir de la réponse libre de la structure. En remplaçant les termes dérivés dans l'équation de la dynamique 3.2 en régime libre ($f_e = 0$), on obtient l'équation suivante :

$$\left(\frac{\ddot{p}_m}{p_m} - \omega^2 + 2\xi\omega_0 \frac{\dot{p}_m}{p_m} + \omega_0^2 \right) + i \left(\dot{\omega} + 2 \frac{\dot{p}_m}{p_m} \omega + 2\xi\omega_0\omega \right) = 0 \quad (3.6)$$

Pour chaque t , cette équation complexe est équivalente au système d'équations réelles suivant :

$$\begin{cases} \xi &= & -\frac{\dot{p}_m}{p_m\omega_0} - \frac{\dot{\omega}}{2\omega\omega_0} \\ \omega_0^2 &= & \omega^2 + 2\frac{\dot{p}_m^2}{p_m^2} + \frac{\dot{p}_m\dot{\omega}}{p_m\omega} - \frac{\ddot{p}_m}{p_m} \end{cases} \quad (3.7)$$

Ces deux formules permettent le calcul de la pulsation et de l'amortissement propre à partir de la modulation et la pulsation instantanée (et leurs dérivées) de la mesure **de déplacement**. Dans le cas d'une structure linéaire, la réponse libre permet de calculer la pulsation à partir du temps entre deux pics et l'amortissement à l'aide de la méthode de décrétement logarithmique. La méthode du décrétement n'est plus exactement valable dans le cas de structures même faiblement non-linéaires. Cette méthode directe est étendue au cas de structures assemblées par Hartwigsen [HSM⁺04]. Dans le cas où le signal est à bande étroite (*i.e.* dans le cas où un seul mode est présent dans la mesure), la transformée de Hilbert permet d'estimer le signal analytique, voir [Gir73]. En pratique, les signaux mesurés sont pollués par du bruit de mesure et surtout contiennent la contribution de plusieurs modes. Il est donc nécessaire de filtrer le signal autour de chaque mode à l'aide d'un filtre (*e.g.* filtre de Butterworth) avant de calculer la transformée de Hilbert. Il est clair que cette technique ne peut s'opérer que dans le cas où les modes sont suffisamment éloignés en fréquence.

Les vibrations d'une structure sont communément obtenues à partir de mesures d'accélération. L'amplitude instantanée de l'accélération dépend notamment de la pulsation instantanée, voir équation 3.5. Il est donc nécessaire d'intégrer la mesure d'accélération. Ces opérations de traitement des signaux (filtrages et intégrations) peuvent significativement dégrader la mesure et donc l'identification. L'opération de filtrage suppose enfin que la contribution des modes voisins est négligeable pour l'identification. Sous cette dernière hypothèse, la transformée en ondelettes permet l'estimation des paramètres modaux équivalents d'une structure sans recourir à une phase de filtrage préalable, voir [Hel05]. La décomposition selon les contribution modales peut aussi être effectuée sans filtrage à l'aide de la méthode dite de décomposition modale empirique (en anglais EMD : *Empirical Mode Decomposition*), voir [EKL⁺13].

Afin d'éviter les problèmes présentés précédemment de traitement du signal, il est préféré ici d'utiliser une méthode basée sur le filtrage de Kalman. Cette alternative très performante permet dans le même temps de décomposer et d'identifier les paramètres et les états du système.

3.2 Filtrage de Kalman

3.2.1 Principe

La technique de Filtrage de Kalman (KF) fait référence à une famille d'algorithmes permettant de suivre l'évolution temporelle de l'état d'un système dynamique du premier ordre. La définition en temps discret est basée sur le principe des moindres carrés ordinaires. Soit \mathbf{t} le vecteur temps discrétisé tel que $\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_k]$. Soit $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ le vecteur de mesure à l'instant t_k et $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}(t_k)$ l'estimation des états du système au même instant. On se donne enfin la matrice dite d'observation \mathbf{H} reliant la mesure à l'état réel \mathbf{p}_k^r du système. Il faut distinguer l'état réel de l'état estimé du système (qui sera noté \mathbf{p}_k dans la suite) et de la mesure. La mesure à l'instant t_k est supposée entachée d'un bruit de mesure ϵ_k . On a donc :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{H}\mathbf{p}_k^r + \epsilon_k \quad (3.8)$$

Nous supposons que les bruits de mesures sont centrés (*i.e.* de moyenne nulle) et décorrélés entre tous les capteurs. Dans le cas d'une distribution gaussienne par exemple, la matrice de covariance \mathbf{R} du bruit de mesure est alors une matrice diagonale de termes diagonaux égaux à la variance du bruit de mesure de chaque capteur. Notons que cette matrice est aussi inversible car le bruit de mesure est supposé non-nul.

L'estimation de l'état du système à l'instant t_k peut être effectuée sans tenir compte des états précédents en cherchant à minimiser la forme quadratique r_1 :

$$\mathbf{p}_k = \min_{\mathbf{p}} [r_1(\mathbf{p})] = \min_{\mathbf{p}} [(\mathbf{x}_k - \mathbf{H}\mathbf{p})^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_k - \mathbf{H}\mathbf{p})] \quad (3.9)$$

L'estimation \mathbf{p}_k ainsi produite est nécessairement biaisée car la mesure est bruitée. Il semble donc raisonnable d'affecter un poids à chaque mesure d'autant plus grande que le bruit de mesure est petit, soit $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}$.

Supposons maintenant que l'on dispose, en plus de la mesure à l'instant t_k , d'une estimation directe $\mathbf{p}_{k|k-1}$ de l'état \mathbf{p}_k du système. Comme son nom l'indique, cette estimation n'est pas exacte mais est entachée d'une erreur statistique donnée par la matrice dite de covariance de l'estimation $\mathbf{Q}_{k|k-1}$ supposée connue. Comme pour le bruit de mesure, l'inverse de cette matrice peut permettre la pondération de l'estimation. L'estimation basée sur $\mathbf{p}_{k|k-1}$ pondérée par $\mathbf{Q}_{k|k-1}$ consiste à minimiser la forme quadratique r_2 :

$$\mathbf{p}_k = \min_{\mathbf{p}} [r_2(\mathbf{p})] = \min_{\mathbf{p}} [(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{k|k-1})^T \mathbf{Q}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{k|k-1})] \quad (3.10)$$

La méthode du filtre de Kalman est basée sur une double estimation à la fois de la mesure au temps t_k et d'un état prévu. Dans le cas du filtre de Kalman, l'état prévu $\mathbf{p}_{k|k-1}$ est calculé à partir du temps précédent, c'est l'état au temps t_k sachant l'état au temps t_{k-1} . Cette prédiction est basée sur un modèle d'évolution propre à chaque problème qui sera détaillé par la

suite. Dans la formulation originelle du filtre de Kalman, la prédiction est généralement donnée par l'équation linéaire :

$$\mathbf{p}_{k|k-1} = \mathbf{F}\mathbf{p}_{k-1}^f + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \nu_k \quad (3.11)$$

La matrice \mathbf{F} relie l'état k à l'état précédent $k-1$ lorsque le système ne subit pas d'excitation extérieure ou commande \mathbf{u}_k . \mathbf{B} est la matrice qui relie la commande à l'état. Dans le cas d'oscillations libres cette matrice est nulle.

Il existe une erreur entre l'état prédit au travers des matrices \mathbf{F} et \mathbf{B} et l'état réel. Cette erreur est prise en compte par la variable aléatoire appelée bruit d'état ν .

Le filtre de Kalman est une estimation de l'état du système calculé comme le barycentre de la mesure \mathbf{x}_k et de la prévision $\mathbf{p}_{k|k-1}$ affecté des pertinences \mathbf{R} et $\mathbf{Q}_{k|k-1}$:

$$\mathbf{p}_k = \min_{\mathbf{p}} [r_1(\mathbf{p}) + r_2(\mathbf{p})] \quad (3.12)$$

La solution de ce problème peut être calculé analytiquement, voir [Lli05] :

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k|k-1} + \mathbf{Q}_{k|k-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}_{k|k-1}\mathbf{H}^T)^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{H}\mathbf{p}_{k|k-1}) \quad (3.13)$$

Pour simplifier cette équation, on définit la matrice dite "gain de Kalman", selon :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{Q}_{k|k-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}_{k|k-1}\mathbf{H}^T)^{-1} \quad (3.14)$$

Cette matrice est d'autant plus petite (au sens d'une norme quelconque) que \mathbf{R} est grande par rapport à $\mathbf{H}\mathbf{Q}_{k|k-1}\mathbf{H}^T$. L'équation 3.13 indique que l'estimation de l'état au temps t_k repose d'autant plus sur le modèle d'évolution que l'erreur d'estimation est petite devant la mesure, c'est à dire que le gain de Kalman est faible.

Notons que le filtre de Kalman est basé sur une approche stochastique. L'état au temps t_k est une variable aléatoire dont la distribution est estimée au travers de ses seules moyennes \mathbf{p}_k et covariances \mathbf{Q}_k . Dans le cas d'un système linéaire et d'un bruit de mesure gaussien, les transformations associées au filtrage de Kalman propagent une loi de distribution gaussienne sur les états. La distribution de probabilité des variables d'états est donc entièrement déterminée par le filtrage de Kalman. C'est pourquoi il est souvent supposé dans la littérature que les bruits de mesure suivent une distribution gaussienne.

3.2.2 Les équations de l'algorithme de Kalman linéaire

Reprenons dans l'ordre les étapes de l'algorithme de Kalman. Tout d'abord, l'état et la covariance sont prévus selon le modèle au temps t_k à partir du temps t_{k-1} , c'est **la phase de prédiction**. Le bruit d'état est imposé comme une variable aléatoire de moyenne nulle. Ainsi la prévision de l'estimation (ou moyenne) de l'état est donnée par l'équation :

$$\mathbf{p}_{k|k-1} = \mathbf{F}\mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \quad (3.15)$$

On peut en déduire la prédiction de la covariance de l'estimation :

$$\mathbf{Q}_{k|k-1} = E \left[(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k|k-1})^T (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k|k-1}) \right] \quad (3.16)$$

À cette étape \mathbf{p}_k est inconnu, cependant en développant cette équation, il est possible d'exprimer la prédiction de la covariance de l'estimation comme :

$$\mathbf{Q}_{k|k-1} = \mathbf{F}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{F}^T + \mathbf{S} \quad (3.17)$$

où \mathbf{S} est la covariance du bruit d'état. Comme pour les bruits de mesures, les bruits d'états sont supposés décorrélés et la matrice de covariance \mathbf{S} est diagonale. Les équations 3.15 et 3.17 définissent la phase de prédiction de l'estimation et de sa covariance.

La phase dite de correction est l'estimation pondérée de la prédiction et de la mesure. L'estimation est donnée par l'équation 3.13. De la même façon, on actualise la covariance de l'estimation selon :

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}\mathbf{Q}_{k|k-1} \quad (3.18)$$

Le filtre de Kalman se résume donc en deux équations de prédictions :

– Prédiction de l'estimation de l'état :

$$\mathbf{p}_{k|k-1} = \mathbf{F}\mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \quad (3.19)$$

– Prédiction de la covariance de l'estimation :

$$\mathbf{Q}_{k|k-1} = \mathbf{F}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{F}^T + \mathbf{S} \quad (3.20)$$

et deux équations de corrections :

– Correction de l'estimation de l'état :

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{H}\mathbf{p}_{k|k-1}) \quad (3.21)$$

– Correction de la covariance de l'estimation :

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}\mathbf{Q}_{k|k-1} \quad (3.22)$$

– auxquelles il faut ajouter le calcul du gain de Kalman :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{Q}_{k|k-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}_{k|k-1}\mathbf{H}^T)^{-1} \quad (3.23)$$

Le vecteur des états et la covariance initiales, \mathbf{p}_1 et \mathbf{Q}_1 sont estimés à priori.

3.2.3 Extension du filtrage de Kalman aux systèmes non-linéaires

Le filtrage de Kalman a été initialement introduit pour le suivi de trajectoire. Nous prenons donc comme premier exemple le cas du suivi de trajectoire d'un objet oscillant en régime établi. Nous supposons tout d'abord que la mesure est faite en déplacement. La méthode de filtrage de Kalman permet d'enrichir

cette mesure bruitée en utilisant la forme d'évolution attendu. Si le système étudié est un problème du second ordre, le signal doit à priori avoir une forme harmonique :

$$x(t) = \mathbb{R} \left[p_m e^{i\omega t} \right] = \mathbb{R} [a(t) + ib(t)] \quad (3.24)$$

On discrétise le temps à la fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{\Delta t}$. L'état de ce système au temps t_k peut être décrit par la partie réelle a_k et la partie imaginaire b_k du signal [DSCF13]. Ainsi l'évolution entre deux pas de temps est prévue par le modèle suivant :

$$\mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\Delta t) & -\sin(\omega\Delta t) \\ \sin(\omega\Delta t) & \cos(\omega\Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}\mathbf{p}_{k-1} \quad (3.25)$$

La matrice dite d'observation \mathbf{H} est quand à elle donnée par l'équation suivante :

$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{p}_k \quad (3.26)$$

Dans ce cas, les équations d'état et d'observation sont linéaires au vecteur d'état. Cependant la pulsation de la matrice d'état est elle même une inconnue. Il est alors possible d'inclure la pulsation au vecteur d'état. L'équation d'état n'est plus une fonction linéaire de l'état mais une fonction quelconque. Dans le cas de la réponse libre amortie d'un mode particulier, il est aussi possible d'inclure la variation d'amplitude dont l'évolution est connue. L'enveloppe du signal est fonction du temps :

$$p_m(t) = p_0 e^{\sigma(t)t} \quad (3.27)$$

Le système étant en état de vibrations libres, la commande est nulle. La fonction décrivant l'évolution d'un pas de temps à l'autre est non-linéaire. Elle est donnée par :

$$\mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ \omega_k \\ \sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos(\omega_{k-1}\Delta t)a_{k-1} - \sin(\omega_{k-1}\Delta t)b_{k-1}) e^{\sigma_{k-1}\Delta t} \\ (\sin(\omega_{k-1}\Delta t)a_{k-1} + \cos(\omega_{k-1}\Delta t)b_{k-1}) e^{\sigma_{k-1}\Delta t} \\ \omega_{k-1} \\ \sigma_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{p}_{k-1}) \quad (3.28)$$

La pulsation et l'amortissement dépendent du temps; cependant leurs évolutions temporelles sont à priori inconnues. Par défaut, nous choisissons un modèle d'évolution invariant en fonction du temps. Ce modèle est néanmoins basé sur l'hypothèse que ces paramètres varient lentement. C'est le bruit d'état qui autorise la variation effective d'un pas de temps à l'autre. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir un bruit d'état nul (centré d'écart type nul) : dans ce cas l'état du système fait totalement confiance au modèle d'évolution et la pulsation et l'amortissement restent figés à leurs valeurs initiales.

De la même façon, si le signal mesuré est une accélération $x(t) := acc(t)$, la fonction d'observation n'est plus proportionnelle à \mathbf{p}_k . L'équation 3.5 fournit la relation entre l'accélération et le déplacement en fonction de p_m , de la pulsation ω et de leurs dérivées. Nous avons introduit le paramètre σ dans le

vecteur d'état du filtre de Kalman pour traduire la décroissance de l'enveloppe du signal. Il est donc nécessaire d'exprimer l'accélération en fonction de ce paramètre. La première dérivée de l'enveloppe par rapport au temps est :

$$\dot{p}_m = (\sigma + \dot{\sigma}t)p_m \quad (3.29)$$

La seconde est :

$$\ddot{p}_m = (2\dot{\sigma} + \ddot{\sigma}t + \sigma^2 + \dot{\sigma}^2t^2 - 2\sigma\dot{\sigma}t)p_m \quad (3.30)$$

L'équation 3.5 donne donc la relation entre l'accélération et le vecteur d'état :

$$\ddot{p} = (2\dot{\sigma} + \ddot{\sigma}t + \sigma^2 + \dot{\sigma}^2t^2 - 2\sigma\dot{\sigma}t + i\dot{\omega} - \omega^2 + 2i(\sigma + \dot{\sigma}t)\omega)(a + ib) \quad (3.31)$$

Il est éventuellement possible d'intégrer au vecteur d'état les dérivées des paramètres σ et ω en supposant une accélération constante dans le modèle d'état puis par différence finie. En pratique, les termes dérivés sont négligeables. En ne gardant que les termes non dérivés, on obtient l'équation d'observation suivante :

$$x(t_k) = acc_k = (\sigma_k^2 - \omega_k^2)a_k - (2\sigma_k\omega_k)b_k = h_{acc}(\mathbf{p}_k) \quad (3.32)$$

La mesure peut aussi être effectuée par la vitesse auquel cas l'équation d'observation est :

$$x(t_k) = vit_k = \sigma_k a_k - \omega_k b_k = h_{vit}(\mathbf{p}_k) \quad (3.33)$$

Dans le cas de transformations linéaires, comme par exemple celle de l'équation 3.25, l'état \mathbf{p}_k peut aussi bien être la moyenne de l'état (comme indiqué jusqu'ici) que la variable aléatoire de l'état. Dans la formulation proposée, les transformations de prédictions (fonction \mathbf{f}) et d'observations (fonction \mathbf{h}) sont non-linéaires. Dans ce cas, le calcul des moments statistiques issus de ces transformations n'est pas direct. Il est important de distinguer le fait que **l'état estimé p_k , de même que la mesure attendue x_k aux équations 3.27 et 3.32 sont des variables aléatoires.** Le calcul des moments statistiques 1 et 2 d'une distribution issue d'une transformation non-linéaire est le sujet de la section suivante.

3.2.4 Filtrage de Kalman étendu et *unscented*

La technique originellement utilisée appelée filtre de Kalman étendu consiste à linéariser la fonction \mathbf{g} (indifféremment correspondante à \mathbf{f} ou \mathbf{h}), c'est à dire à calculer sa matrice jacobienne, voir [DSCF13].

Une alternative à ce processus de linéarisation, est la transformée *unscented*¹ développée par Julier et Uhlmann [JU04] pour le filtre de Kalman. Pour simplifier la démonstration du principe de cette méthode, nous présentons ici le cas d'une variable aléatoire à une dimension :

$$x = E[x] + \epsilon := \bar{x} + \epsilon \quad (3.34)$$

1. La traduction littérale de ce terme est "non-parfumée" ; l'origine de ce nom est liée à un déodorant, son auteur estime que les termes techniques sont acceptés tel quel même si ils sont vides de sens, voir [Uhl04] ; nous garderons cette appellation.

ϵ désigne indifféremment le bruit d'état ou de mesure. La transformation *unscented* consiste à estimer les premiers moments statistiques de la variable aléatoire résultante $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ à l'aide d'un nombre très limité de couples (x_i, w_i) appelés points *sigma*. Le calcul de l'estimation et de la variance à l'aide d'une collection de points *sigma* est défini comme suit :

$$E[g(x)] = \sum_{i=0}^p w_i g(x_i) =: \bar{g} \quad (3.35)$$

et

$$E[(g(x) - \bar{g})^2] = \sum_{i=0}^p w_i (g(x_i) - \bar{g})^2 =: \Sigma \quad (3.36)$$

L'idée originale de ce procédé se résume ainsi : (voir [JU04])

« il est plus facile d'approcher une distribution que d'approximer une fonction non-linéaire quelconque ».

La force de la méthode, qui semble presque trop simple, est démontrée en appréciant le développement limité de la fonction g autour de la moyenne \bar{x} :

$$g(x) = g(\bar{x}) + \left. \frac{dg}{d\epsilon} \right|_{\bar{x}} \epsilon + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2g}{d\epsilon^2} \right|_{\bar{x}} \epsilon^2 + \dots \quad (3.37)$$

La moyenne réelle de la distribution issue de la transformation est donc :

$$E[g(x)] = g(\bar{x}) + \left. \frac{dg}{d\epsilon} \right|_{\bar{x}} E[\epsilon] + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2g}{d\epsilon^2} \right|_{\bar{x}} E[\epsilon^2] + \dots \quad (3.38)$$

Parallèlement, on peut développer la fonction g pour les points discrets $x_i := \bar{x} + \epsilon_i$.

$$E[g(x)] = \sum_i w_i \left(g(\bar{x}) + \left. \frac{dg}{d\epsilon} \right|_{\bar{x}} \epsilon_i + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2g}{d\epsilon^2} \right|_{\bar{x}} \epsilon_i^2 + \dots \right) \quad (3.39)$$

L'identification termes à termes de ces deux équations fournit les conditions sur les points *sigma* :

$$\sum_i w_i (\bar{x} - x_i)^m = E[(\bar{x} - x_i)^k], \quad \forall m \in N \quad (3.40)$$

La fonction g est évaluée exactement. Ainsi la précision de l'estimation est d'ordre m (au sens du développement de Taylor) lorsque les m premiers moments statistiques de la distribution de départ x sont connus. Il en est de même pour l'extension aux dimensions supérieures à 1. Identiquement, on peut montrer que la précision de la covariance de la distribution d'arrivée est d'ordre m lorsque les $2m$ premiers moments statistiques de la distribution de x sont connus, voir [JU04].

Les principes de la linéarisation et de la transformation *unscented* sur lesquels reposent respectivement les filtres de Kalman étendus et *unscented* sont illustrés à la figure 3.1. Ce graphe montre le calcul de la transformation non-linéaire d'une variable aléatoire dont la distribution suit une loi normale de moyenne 4 et d'écart type 1. La transformation ou fonction g est ici un polynôme d'ordre 3.

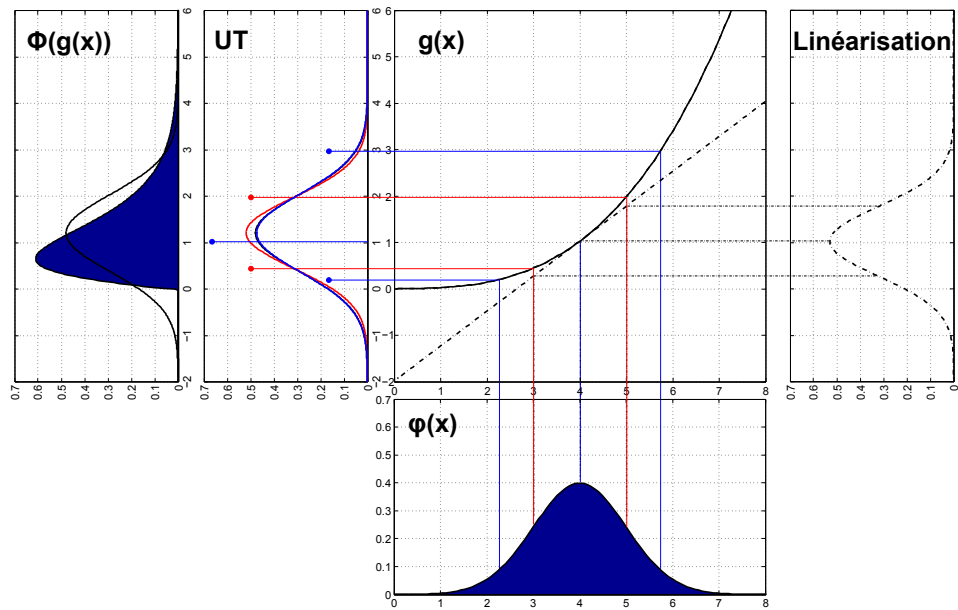


Figure 3.1 – Principe de la linéarisation et de la transformation *unscented*.

Deux collections de points *sigma* sont présentées. La première est composée de deux points *sigma*, nombre minimum nécessaire pour capturer la moyenne et la variance de la distribution $\varphi(x)$ de départ. En dimension supérieure, ce type de collection est appelé *simplexe*. Bien-sûr, les deux premiers moments d'une distribution statistique ne la caractérisent pas entièrement. En ajoutant un point, il est possible de former (avec les équations 3.40) une collection permettant de capturer l'asymétrie et l'aplatissement (*skewness* et *kurtosis* en anglais) de la distribution normale (respectivement égaux à 0 et 4). Ainsi la seconde collection est en mesure de calculer exactement la moyenne de la distribution d'arrivée (la transformation est un polynôme d'ordre 3). L'ordre de précision de l'estimation de la variance est quant à elle de 2, supérieure à celle de la collection de deux points, d'ordre 1 (seules les moyennes et variances de la distribution initiale sont exactes). La courbe noire dans le cadre à l'extrême gauche est la distribution normale "équivalente" qui possède les mêmes moyennes et variances que la distribution d'arrivée $\Phi(g(x))$ réelle.

Le tableau 1, présente les pourcentages d'erreurs commis pour le calcul de la moyenne et la variance pour les trois transformations dans le cas particulier présenté à la figure 3.1.

Transformation	Erreur sur la moyenne	Erreur sur la variance
Linéarisation	15% %	18.1 %
<i>Unscented</i> , collection 1	0%	17.2 %
<i>Unscented</i> , collection 2	0%	2.2 %

Tableau 1 : taux d'erreur de calcul des deux premier moments statistiques pour différentes méthodes de calcul.

Pour illustrer ce tableau, les distributions normales équivalentes calculées par

les différentes méthodes sont comparées dans la figure 3.2.

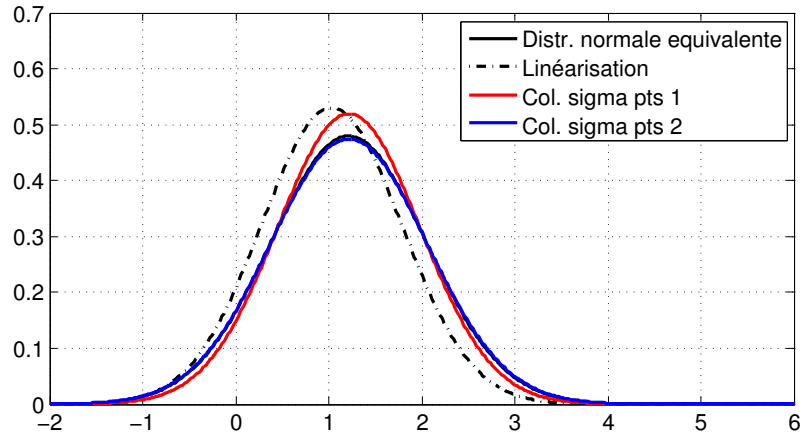


Figure 3.2 – Comparaison entre la distribution normale équivalente à la distribution réelle et les différentes transformations.

Dans le cas du filtre de Kalman, seuls les deux premiers moments statistiques de la distribution sont connus et nécessaires. La forme réelle de la densité de probabilité de départ est inconnue². Julier et Uhlmann proposent plusieurs collections de points *sigma* qui sont construites de façon à réduire l’influence des moments statistiques d’ordre supérieurs à 2. On peut voir à la figure 3.2, que les transformations *unscented* sont nettement plus précises que la linéarisation aussi bien dans le cas où la distribution est connue (courbe bleue) mais aussi lorsqu’elle est inconnue (courbe rouge). L’erreur de calcul sur les moments est généralement plus faible par la transformation *unscented* que par la linéarisation.

Cette méthode présente par ailleurs d’autres avantages par rapport à la linéarisation notamment :

- la transformation *unscented* peut s’appliquer aux fonctions non différentiables.
- La transformation *unscented* est très facile à mettre en œuvre au contraire de la linéarisation qui nécessite le calcul de la matrice jacobienne de la fonction. En pratique, celle-ci est évaluée de manière analytique ce qui peut s’avérer être une tâche assez lourde et peut donc être une source d’erreur.

Les quatre équations du filtre de Kalman linéaire doivent être adaptées au calcul par la transformation *unscented*. On trouvera le récapitulatif de la procédure de calcul dans [JU04].

². Notons au passage, qu’il n’est donc pas nécessaire de supposer le bruit de mesure gaussien puisque les transformations non-linéaires ne conservent pas cette propriété.

3.2.5 Plusieurs capteurs - plusieurs modes (MIMO)

La formulation proposée traite le cas d'une seule mesure et d'un seul mode. Il existe différentes façons d'étendre cette écriture au cas d'un filtre MIMO (pour *Multiple Inputs Multiple Outputs*), comportant plusieurs capteurs et plusieurs modes. Dans le cas d'un système à un degré de liberté, le vecteur d'état est de dimension 4. Dans le cas multi-modal à N modes, le vecteur d'état est obtenu par la concaténation des variables d'états de chaque mode, qui sera indicé comme suit pour le mode n : $\mathbf{p}_k^n = [a_k^n, b_k^n, \omega_k^n, \sigma_k^n]^T$. Le vecteur d'état est donc de dimension $4 * N$. L'hypothèse de découplage modal permet d'étendre très simplement l'équation de prédiction au cas multi-modal :

$$\mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k^1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^n \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{p}_{k-1}^1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{p}_{k-1}^n) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{p}_{k-1}^N) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Il existe plusieurs façons de prendre en compte la mesure des vibrations en plusieurs points. La première consiste à considérer les variables d'amplitudes du vecteur d'état comme celles de l'amplitude modale de chaque mode. Pour cela il est nécessaire de connaître au préalable les déformées modales, auquel cas l'équation d'observation s'écrit :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k) = \begin{bmatrix} x^1(t_k) \\ \vdots \\ x^c(t_k) \\ \vdots \\ x^C(t_k) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \Phi_n h(\mathbf{p}_k^n) \quad (3.42)$$

Les sources d'amortissement dans les structures assemblées sont localisées aux interfaces. Théoriquement, cette situation est propice à produire de la phase entre les points de mesure pour un même mode. Notons qu'il est tout à fait possible, avec cette méthode, de prendre en compte une base de modes complexes. Cependant, la phase vient de l'amortissement qui est fortement dépendante de l'amplitude. Il faudrait alors que l'on permette aussi à la phase d'évoluer en fonction de l'amplitude pour rester cohérent avec cette définition. En pratique, cette formulation nécessite donc l'identification au préalable d'un mode "moyen" dont l'interprétation est discutable, au moins dans une phase de caractérisation.

Il est certainement préférable de renoncer à identifier une amplitude modale en donnant une certaine liberté à chaque point de mesure. Pour cela, la dimension du vecteur d'état doit être augmentée. Les mesures peuvent être complètement découplées si on associe quatre degrés de liberté $[a, b, \omega, \sigma]$ à chaque point. Cependant, s'il est possible que la déformée modale dépende légèrement de l'amplitude de vibration, l'amortissement et la pulsation sont des paramètres communs à l'ensemble des points pour un mode donné. Cet observation incite

à prendre le vecteur d'état sous la forme suivante ; pour un seul mode d'indice n et C capteurs :

$$\mathbf{p}_k^n = \begin{bmatrix} a_k^{n,1} \\ b_k^{n,1} \\ \vdots \\ a_k^{n,c} \\ b_k^{n,c} \\ \vdots \\ a_k^{n,C} \\ b_k^{n,C} \\ \omega_k^n \\ \sigma_k^n \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

puis dans le cas de N modes et C capteurs :

$$\mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k^1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^n \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^N \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

La dimension du vecteur d'état ainsi obtenu est de $N(2C + 2)$. La fonction de prédiction de l'état doit être adaptée à ce nouveau vecteur, ce qui est aisé à partir de l'équation 3.28. Les états sont directement égaux aux mouvements des points de mesure (déplacement, vitesse ou accélération) dans le cas de cette formulation. L'équation d'observation s'écrit donc comme suit :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k) = \begin{bmatrix} x^1(t_k) \\ \vdots \\ x^c(t_k) \\ \vdots \\ x^C(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N h \left(\begin{bmatrix} a_k^{n,1} \\ b_k^{n,1} \\ \omega_k^n \\ \sigma_k^n \end{bmatrix} \right) \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^N h \left(\begin{bmatrix} a_k^{n,c} \\ b_k^{n,c} \\ \omega_k^n \\ \sigma_k^n \end{bmatrix} \right) \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^N h \left(\begin{bmatrix} a_k^{n,C} \\ b_k^{n,C} \\ \omega_k^n \\ \sigma_k^n \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

3.2.6 Initialisation du filtre de Kalman

La formulation du filtre de Kalman proposée³ est un système dynamique non-linéaire. Contrairement au cas d'un système linéaire, la convergence du filtre de Kalman n'est pas assurée. L'efficacité du filtre est liée à de nombreux paramètres.

L'efficacité du filtre de Kalman est tout d'abord et très fortement liée au modèle de prédiction choisi. Dans le cas de la dynamique des structures, le nombre de modes à identifier doit par exemple être adapté au système observé. Notons qu'il est aussi possible de choisir moins d'états que de modes observables. La différence entre la mesure et le modèle est alors prise en compte par le bruit de mesure.

L'initialisation du vecteur d'état et de la covariance est un critère fondamental. Dans le cas de la transformée en ondelettes, Heller [Hel05] propose de raccorder de manière continue le signal à gauche (pour les temps négatifs) avec une sinusoïde de pulsation égale à celle à l'origine. Ceci est, dans le cas du filtre de Kalman, équivalent à une initialisation exacte des états au temps zero. En pratique, l'estimation initiale se fait traditionnellement par une transformée de Fourier sur l'ensemble du signal, voir [DSCF13]. Dans notre cas, nous utilisons les paramètres modaux identifiés sur les premiers cycles du signal. Plus généralement, l'initialisation du vecteur d'état n'est pas d'une grande difficulté d'autant que le modèle de prévision est connu. Cependant, dans le cas de la mesure d'un système libre, le temps de convergence doit être le plus faible possible, celui-ci étant ajouté aux faibles temps d'acquisitions pour les amplitudes les plus grandes. Il est préférable d'initier au mieux les états du filtre pour accélérer la rapidité de la convergence.

Le premier aspect véritablement difficile du filtrage de Kalman est l'initialisation de la matrice de covariance \mathbf{Q}_1 . Cette matrice correspond aux incertitudes initiales que l'on pense faire sur les états. En supposant les erreurs sur les états découplées (ce qui est tout à fait faux), on peut initier cette matrice par une matrice diagonale avec un écart type raisonnable sur chacun des paramètres. En assumant 1% d'erreur sur l'estimation initiale de la pulsation, le terme diagonal correspondant est $Q_{1,\omega} = (0.01\omega_1)^2$. **Il est important de garder à l'esprit que si ces variances sont choisies trop grandes, l'algorithme a tendance à diverger rapidement. Inversement, si elles sont choisies trop petites, le gain de Kalman initial est nul et le filtre ne fait alors confiance qu'au modèle de prédiction ce qui conduit l'algorithme vers des valeurs biaisées.**

La matrice de covariance du bruit de mesure dépend théoriquement du rapport signal sur bruit de chaque capteur. En pratique il est nécessaire de surestimer le bruit de mesure pour rendre le filtre de Kalman plus robuste. Les bruits de mesure sont supposés décorrélés, une règle empirique consiste à prendre la diagonale de la matrice comme quelques pourcent de la variance du signal mesuré par chaque capteur.

3. On peut aussi parler des filtres de Kalman (au pluriel) associés à chaque mode.

Le second aspect posant problème pour la convergence du filtre est le bruit d'état. Dans la formulation proposée, les évolutions temporelles de la pulsation et de l'amortissement équivalents sont inconnues et le modèle les suppose constantes. Nous savons dès le départ que le modèle n'est pas en mesure de décrire complètement la mesure. Naturellement il est impossible de connaître à priori la qualité du modèle employé. Il n'a pas été possible de fournir une règle satisfaisante, cependant il est possible pour un cas particulier de trouver cette matrice par itération. De la même façon que pour la matrice de covariance de l'estimation initiale, **si les variances sont choisies trop grandes, les états ont tendance à osciller autours des valeurs réelles. Inversement, si elles sont choisies trop petites, le gain de Kalman initial s'annule et le filtre ne fait alors confiance qu'au modèle de prédiction ce qui conduit l'algorithme vers des valeurs biaisées.** Dans la pratique les variances optimales se trouvent pour des ordres de grandeurs compris entre 10^{-10} et 10^{-20} . Pour un cas particulier, les paramètres adéquats sont ceux pour lesquels les états n'oscillent pas et la mesure estimée ne s'écarte pas de la mesure réelle.

Il faut aussi garder à l'esprit que ces paramètres de bruit d'états sont d'autant plus petits que la fréquence d'échantillonnage est grande.

3.3 Mise en œuvre et vérification de la méthode

3.3.1 Systèmes à un degré de liberté - mesure de déplacement

Afin de valider la méthode présentée, nous considérons tout d'abord le cas simple d'un système à un degré de liberté pour lequel la mesure est faite en déplacement. Nous reprenons ici l'oscillateur de Iwan présenté au chapitre précédent. Rappelons qu'il s'agit d'un système à un degré de liberté, de masse unitaire, dont la raideur et l'amortissement sont régis par l'association en parallèle d'une raideur linéaire et d'un modèle de Iwan. On s'intéresse à la réponse libre de ce système obtenue après une excitation de type ondelette de Morlet de pulsation centrale égale à la pulsation de résonance du système. La réponse est simulée à l'aide de l'algorithme d'intégration numérique *ode23tb* implémenté dans *matlab* qui est réputé sans amortissement numérique. La figure 3.3 présente la force d'excitation ainsi que l'accélération calculée du système.

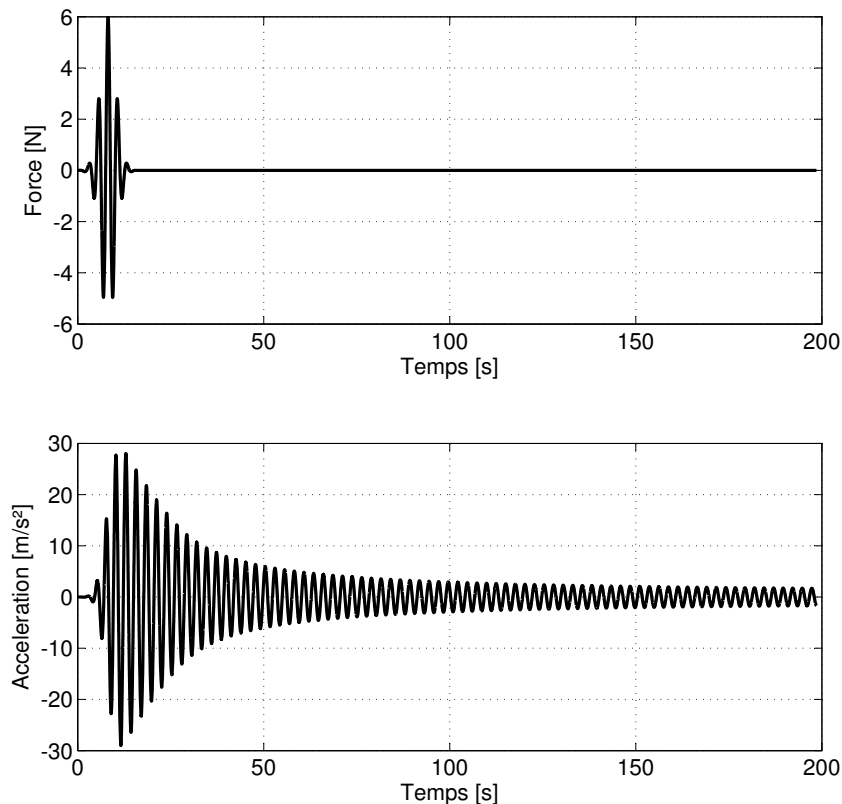


Figure 3.3 – Signaux temporel de force et d'accélération simulé.

La figure 3.4 présente les spectres fréquentiels de ces signaux calculés. Ces spectres sont obtenus à partir des valeurs absolues de la transformée de four-

rier des signaux calculées à l'aide de l'algorithme *fft*.

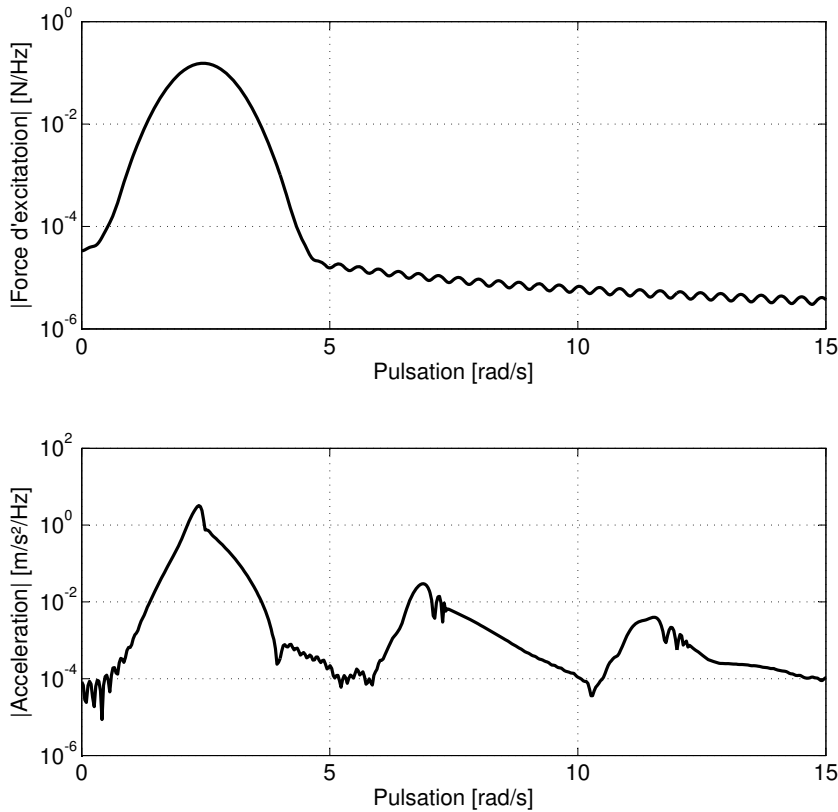


Figure 3.4 – Spectres fréquentiels des signaux de la figure 3.3.

La force excite le système sur une gamme de fréquence centrée autour de la résonance. Le signal d'accélération met en évidence le comportement non-linéaire du système. On peut par exemple noter la présence d'harmoniques dans le signal d'accélération. Le taux d'harmonique est cependant très faible : la troisième harmonique présente un niveau d'accélération environs 100 fois plus faible que la fondamentale. En déplacement, les harmoniques seraient négligeables voire inexistantes. Cette observation est en accord avec l'hypothèse de faible non-linéarité qui stipule notamment que le système peut être identifié à partir de la fondamentale.

Le filtre de Kalman mis en place précédemment correspond au cas d'un régime libre. L'origine du temps est désormais déplacée au moment où la force appliquée au système s'annule. Les états initiaux sont estimés à partir de la première pseudo-période du signal (à l'aide d'une méthode de moindre carré). Le filtre de Kalman est donc initié très proche de l'état réel du système ce qui accélère sa convergence. La figure 3.5 présente le déplacement calculé, dont l'origine est décalée au point de force nulle, ainsi que l'estimation du signal analytique par le filtre de Kalman. Cette figure se focalise sur les premiers instants de la mesure.

L'estimation des états de position du système est obtenu quasi-instantanément

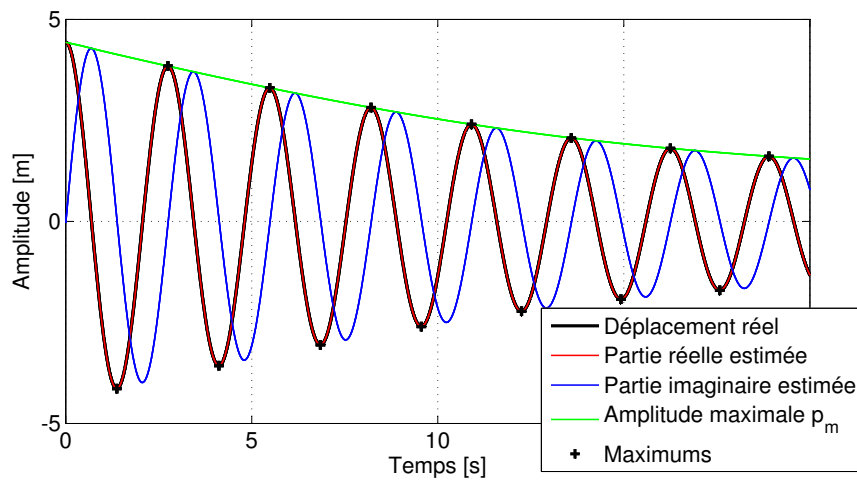


Figure 3.5 – Estimation du déplacement analytique

avec une grande précision. La méthode de moindre carré permet une très bonne estimation de ces états initiaux. Il n'en est pas de même des paramètres modaux comme on peut le voir sur la figure 3.6 qui présente l'évolution temporelle des états de pulsation et de taux d'amortissement équivalents estimés.

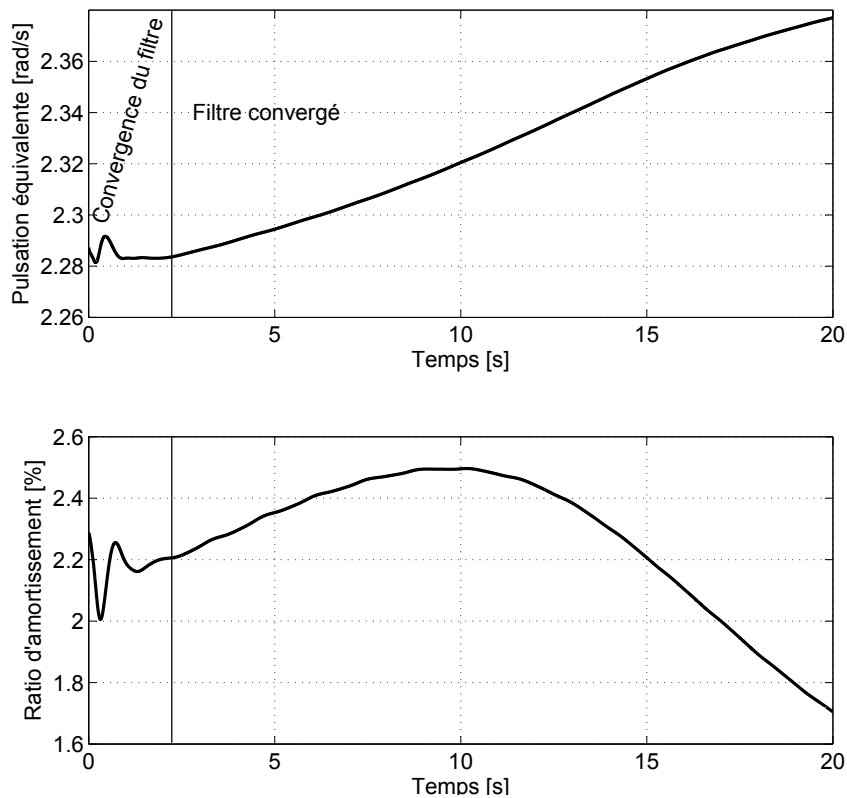


Figure 3.6 – Estimation des paramètres modaux équivalents.

Tout d'abord l'estimation des paramètres initiaux par la méthode de moindre carré est légèrement erronée. Par ailleurs, la matrice de covariance de l'estimation initiale, qui est elle-même associée à l'erreur d'estimation des paramètres initiaux, est très difficile à évaluer a priori. Ainsi, dans les premiers moments de l'estimation, les états oscillent autour des valeurs réelles du système puis le filtre est convergé comme on peut le voir sur la figure 3.6. Ensuite, lorsque le filtre est convergé, la variation des paramètres modaux est attendue puisque le système observé est non-linéaire.

Les points extrêmes de la mesure temporelle de déplacement permettent aussi de déduire une estimation directe de la pulsation puis de l'amortissement propre par la méthode du décrétement logarithmique. Notons que ce calcul est rendu possible par le fait que la mesure ne fait apparaître qu'une seule sinusoïde et qu'elle n'est pas bruitée. La figure 3.7 présente les courbes de pulsation et d'amortissement équivalentes en fonction de l'amplitude maximale de vibration p_m , obtenues par la méthode du filtrage de Kalman et par la méthode directe.

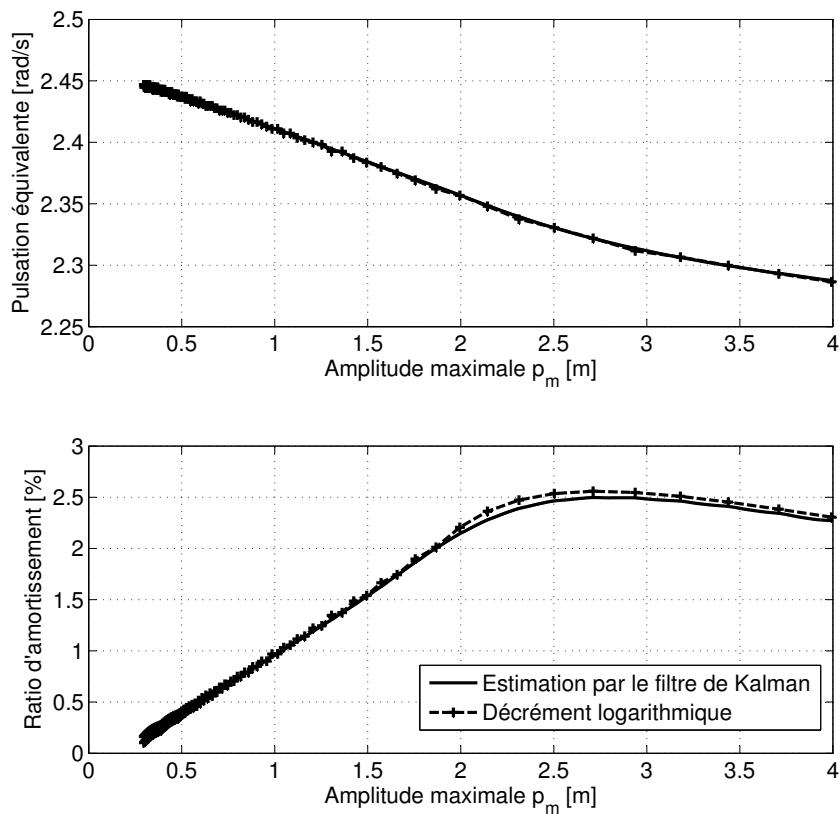


Figure 3.7 – Paramètres modaux équivalents en fonction de l'amplitude de vibration.

Les courbes de pulsation sont identiques. Le taux d'amortissement est un paramètre extrêmement sensible. Ainsi on peut observer une légère différence entre la courbe obtenue grâce à l'équation 3.7 et celle du décrétement logarithmique. Cette différence s'explique par le fait que la méthode du décrétement

logarithmique n'est exacte que pour des systèmes purement linéaires. Dans le cas de systèmes faiblement non-linéaires, il est préférable d'utiliser l'équation 3.7 bien que l'erreur commise soit généralement acceptable.

3.3.2 Systèmes à plusieurs degrés de libertés - mesures d'accélération bruitées

Pour ce second cas, on se place dans une situation souhaitée proche de la réalité d'une analyse vibratoire expérimentale. Notons que la fréquence d'échantillonnage est ici relativement importante devant la fréquence du système. Ce choix ne remet pas en cause le bon fonctionnement de la méthode. On simule une structure continue pour laquelle seuls deux modes sont excités. Pour cela, on ajoute à la réponse de l'oscillateur de Iwan, la réponse impulsionnelle d'un oscillateur linéaire de masse unitaire, de pulsation 2π et de taux d'amortissement de 0.5%. Les mesures sont dans ce cas les accélérations simulées. On suppose qu'elles sont mesurées en trois points. On se donne deux déformées modales arbitrairement données par la matrice :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{\text{Iwan}} & \Phi_{\text{lin}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1.8 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Les mesures d'accélérations sont obtenues par le produit de cette matrice et du vecteur d'accélération modal composé des deux réponses calculées pour les oscillateurs de Iwan et linéaire. Enfin, les trois mesures obtenues sont chacune polluées par la réalisation d'un bruit de mesure gaussien particulier (la covariance du bruit de mesure est diagonale) centré dont les écarts types sont calculés pour obtenir un rapport signal sur bruit égal à 50dB.

La figure 3.8 présente les premiers instants des mesures d'accélération bruitées ainsi obtenues.

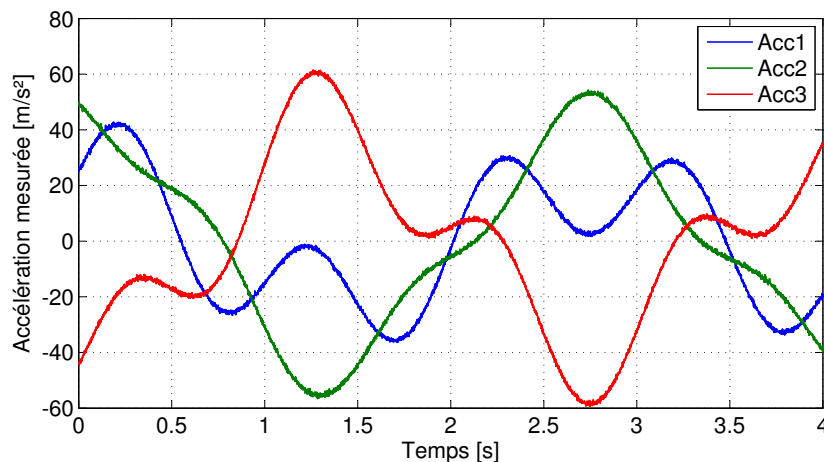


Figure 3.8 – Signaux temporels simulés en trois points de mesure.

Les figures 3.9 et 3.10 présentent l'estimation des états des deux modes pour le capteur Acc1 respectivement aux premiers instants et aux derniers instants de la mesure. La figure au-dessus compare l'accélération mesurée et celle estimée par KF. Celle en-dessous présente le déplacement estimé de chaque mode.

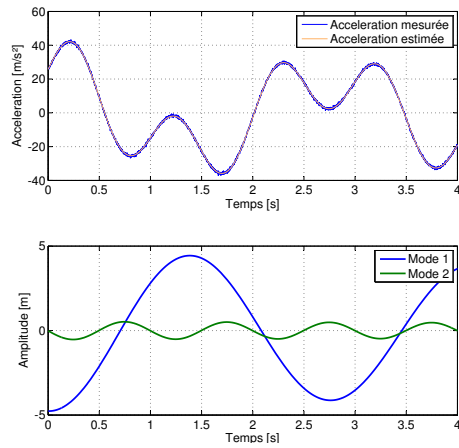


Figure 3.9 – Estimation des états (Acc1) aux premiers instants.

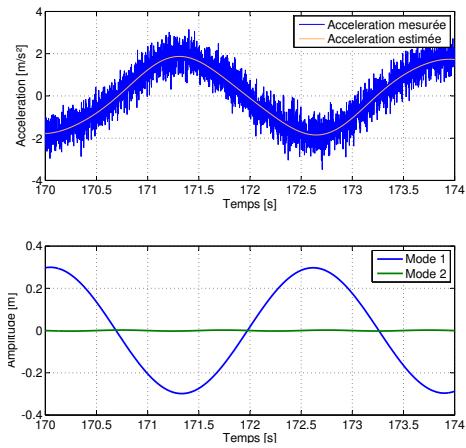


Figure 3.10 – Estimation des états (Acc1) aux derniers instants.

La figure 3.11 présente l'évolution temporelle des paramètres modaux du second mode (le mode "linéaire") estimé par le filtre de Kalman.

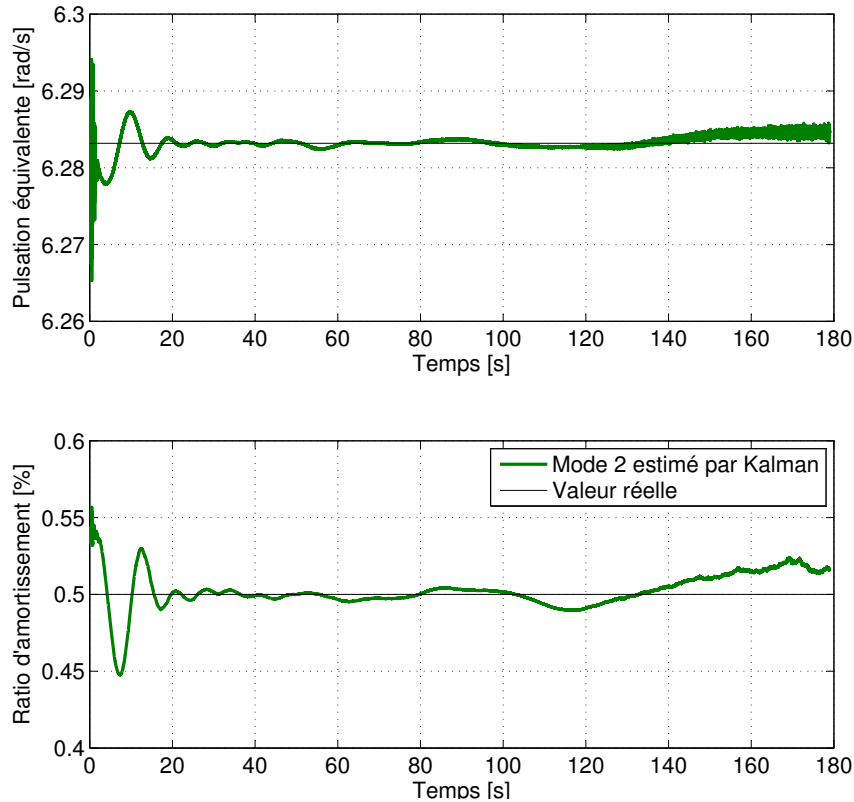


Figure 3.11 – Estimation des paramètres modaux du second mode.

On observe ici un temps de convergence du filtre de Kalman qui semble relativement long avant d'atteindre la valeur réelle. En réalité, l'estimation est d'emblée largement acceptable puisque l'erreur est de l'ordre du millième de Hertz en fréquence et de 0.05% d'amortissement (absolu). Le filtre commence à diverger à la fin de la mesure car l'amplitude du second mode est noyé dans le bruit de mesure comme on peut le constater à la figure 3.10. Dans le cas d'une mesure réelle, la limite de sensibilité de l'accéléromètre peut faire disparaître la présence du mode.

La figure 3.12 présente les courbes de pulsation et d'amortissement équivalentes en fonction de l'amplitude maximale de vibration p_m , obtenue pour le premier mode (courbe bleue).

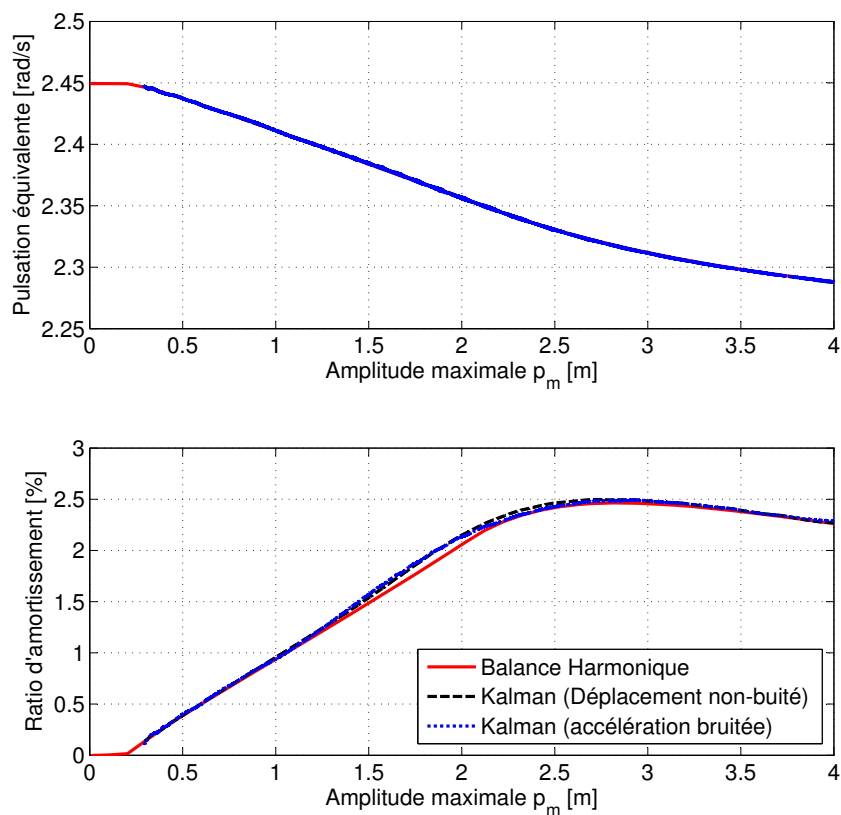


Figure 3.12 – Estimation des paramètres modaux équivalents du premier mode.

Ce type d'évolution est typique de ce qu'on observe dans le cas de structures réelles. Cette figure présente aussi les courbes obtenues avec la mesure de déplacement non-bruitée d'un seul mode par la méthode de filtrage de Kalman ainsi que celle calculée au chapitre précédent par la méthode de balance harmonique numérique. Les courbes de pulsation sont identiques.

Ici encore on observe une légère différence entre la courbe d'amortissement prévues par le calcul issu du chapitre précédent (courbe rouge) et celles identifiées à partir du modèle simulé en réponse libre (courbes noire et bleue). Cependant, cette erreur est d'une part acceptable (inférieure à 0.2% d'amor-

tissement) et doit certainement être attribuée au calcul de l'amortissement effectué au chapitre précédent (comme le ratio de l'énergie dissipée sur l'énergie de déformation). Auquel cas, l'identification par la méthode du filtrage de Kalman n'est pas entachée d'erreur puisqu'elle n'utilise pas cette définition. Cette erreur peut aussi s'expliquer par d'autres causes dont les effets peuvent se cumuler (ce qui rend difficile son interprétation), à savoir :

- Un amortissement numérique généré par le solveur *ode23t*.
- L'hypothèse de faible non-linéarité et les simplifications qu'elle engendre dans le système d'état à identifier. Par exemple, on ne peut pas exclure un transfert d'énergie de la fréquence fondamentale vers les harmoniques supérieures.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé une formulation du filtre de Kalman adapté au cas de vibrations de structures faiblement non-linéaires en régime libre. La formulation proposée permet l'identification directe des paramètres modaux équivalents sans aucun recours à des méthodes de filtrage classique ou d'intégration préalable. En outre, cette méthode permet de décomposer la contribution de chaque mode sans aucune hypothèse de proximité fréquentielle. Enfin, la méthode converge très rapidement, ce qui est un critère très important dans le cas d'oscillations libres amorties. La contrepartie de la performance du filtrage de Kalman est la difficulté de sa mise en œuvre notamment en ce qui concerne la définition des matrices de covariances.

La méthode a été validée pour le cas d'un oscillateur à plusieurs degrés de liberté dont la dynamique est basée sur une formulation proche de la physique. L'estimation des paramètres équivalents par la méthode de filtrage de Kalman à partir de la mesure de déplacement ou bien à partir de la mesure d'accélération donne des résultats identiques. La cohérence des résultats obtenus par le filtrage de Kalman avec ceux obtenus au chapitre précédent valide la méthode présentée.

Bibliographie du chapitre 3 : Filtrage de Kalman

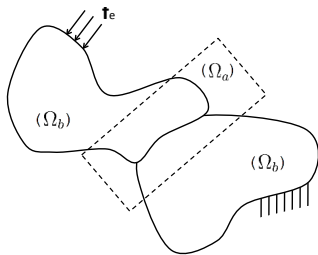
- [DCP13] J.L. Dion, G. Chevallier, and N. Peyret. Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 34(1–2) :106–115, January 2013.
- [DSCF13] J.L. Dion, C. Stephan, G. Chevallier, and H. Festjens. Tracking and removing modulated sinusoidal components : A solution based on the kurtosis and the extended kalman filter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013.
- [EKL⁺13] M. Eriten, M. Kurt, G. Luo, D. McFarland, L. A. Bergman, and A.F. Vakakis. Nonlinear system identification of frictional effects in a beam with a bolted joint connection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39(1–2) :245–264, August 2013.
- [Fol98] E. Foltête. Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires. *These de doctorat, UFR des sciences et techniques de l'université de Franche-Comté*, 1998.
- [Gir73] C. Giraudon. Signal analytique et signal exponentiel. ISMA, Nice, France, 1973.
- [Hel05] L. Heller. *Amortissement dans les structures assemblées*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2005.
- [HSM⁺04] C. J. Hartwigsen, Y. Song, D. M. McFarland, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis. Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration. *Journal of Sound and Vibration*, 277(1-2) :327–351, October 2004.
- [JU04] S.J. Julier and J.K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3) :401–422, 2004.
- [Lli05] M. Llibre. Moindres carrés et kalman. <http://michel1.llibre.pagesperso-orange.fr/docs/kalman-std.pdf>, 2005.
- [Seg10] D.J. Segalman. A modal approach to modeling spatially distributed vibration energy dissipation. Technical report, Tech. Rep. SAND2010–4763, Sandia National Laboratories (August 2010), 2010.
- [Uhl04] J.K. Uhlmann. First-hand :the unscented transform. *First-Hand histories of IEEE*, 2004.

Chapitre 4

Un outil numérique pour la simulations locales des liaisons

Sommaire

4.1	Préambule	98
4.2	Introduction	100
4.3	Governing equations	101
4.3.1	Computation of the linear mode basis	101
4.3.2	Model reduction	102
4.4	Amplitude-dependant mode shape	104
4.4.1	Open loop algorithm	104
4.4.2	Closed loop algorithm	105
4.5	Computation of the dynamic parameters	107
4.5.1	Computation of the dissipated energy with the use of the Masing rules	107
4.5.2	FEP and DEP	108
4.5.3	Dynamic behavior of the structure	109
4.6	Example: the lap-joint benchmark	109
4.6.1	The model	110
4.6.2	The dynamic simulation	112
4.6.3	Results	113
4.6.4	Discussion	114
4.7	Conclusion	117
	Bibliographie du chapitre 4	118



Résumé

Ce chapitre présente une méthode quasi-statique pour le calcul des paramètres équivalents modaux à partir d'un modèle éléments finis. Il s'agit d'une méthode alternative aux simulations dynamiques classiques dont le coût est important.

4.1 Préambule

Le chapitre précédent traite de l'identification expérimentale des paramètres modaux équivalents d'une structure assemblée. L'analyse expérimentale est une méthode de caractérisation coûteuse à mettre en œuvre et entièrement à posteriori de la phase de conception. Pour des besoins de dimensionnement et d'optimisation évidents, on doit aussi être en mesure d'estimer ces paramètres en amont de la production à partir de modèles numériques. C'est le propos de ce chapitre.

Les modèles de structures assemblées dont la vocation est de fournir une estimation correcte de la dissipation énergétique par frottement doivent nécessairement pouvoir reproduire convenablement le phénomène physique qu'est le contact¹. Pour cela, il est nécessaire de construire des modèles très raffinés aux endroits de contacts. La manière la plus directe d'en extraire les paramètres dynamiques est de reproduire numériquement l'essai de caractérisation expérimental. Cependant, les différences d'échelle (en espace et en temps) entre la dynamique du contact et celle d'une grande structure ne permettent pas dans la pratique (c'est à dire sans y consacrer un coût prohibitif) de calculer la réponse temporelle d'un tel modèle. Les méthodes de recherche de solutions de régimes établis destinées aux systèmes non-linéaires (*e.g.* méthodes de perturbation, méthode de tir ou balance harmonique) ne sont, en l'état actuel des choses, ni applicables ni dédiées aux systèmes dépassant une centaine d'éléments non-linéaires.

Parallèlement, nous avons déjà évoqué le comportement paradoxalement quasi-linéaire des structures assemblées bien que les lois régissant le contact soient très fortement non-linéaires. La tentation de travailler dans l'espace des modes de la grande structure est donc forte. Ce chapitre étudie l'idée d'utiliser les modes de la structure linéarisée comme conditions aux limites sur un modèle détaillé réduit aux seules liaisons. L'hypothèse de Masing est aussi exploitée afin de réduire le nombre de calculs à réaliser. Le principe de cette méthode est présenté dans la thèse de Heller [Hel05]. Il s'agit ici de reprendre les équations de la dynamique afin de proposer une formulation générique non-linéaire pour le calcul de l'amortissement ainsi que celui de la fréquence équivalente. Aussi nous proposons une formulation basée sur l'énergie de déformation qui est adaptée aux cas de comportement non-linéaires.

Deux algorithmes sont proposés ; le premier est basé sur l'hypothèse de couplage faible, c'est à dire que les déformées modales sont supposées constantes. Sous cette hypothèse, la méthode aboutit à une formulation quasi-statique corrigée (l'inertie est prise en compte), ce qui, de fait, filtre les comportements en très haute fréquence responsables de la lenteur des calculs dynamiques par intégration temporelle. Le second est un algorithme en boucle fermée intégrant une itération de correction de la déformée modale.

L'intérêt premier de ce développement est le faible coût de calcul qu'il né-

1. Ceci n'est pas le sujet de ce chapitre (ni celui de cette thèse), on pourra se référer aux nombreux travaux sur le sujet cités dans le chapitre d'introduction.

cessite. Aussi dans le cas de l'algorithme en boucle ouverte, la méthode peut facilement s'adapter à n'importe quel "solveur" de problème de MMC avec contact et frottement. Par exemple, le cas présenté a été résolu à l'aide du logiciel *Abaqus*.

Ce travail a fait l'objet d'une publication dans la revue *International Journal of Mechanical Sciences* en 2013 [FCD13]. La forme de l'article a été conservée, c'est la raison pour laquelle ce chapitre est rédigé en anglais.

4.2 Introduction

Under a dynamic load, riveted and bolted joints are known to give rise to high damping ratios and moderate decrease of resonant frequency with amplitude in assembled structures. This so-called micro-slip phenomenon is known to be caused by the partial sliding of the contact interfaces in joints, see [GK56], [Gro85] [GN01], [PDCA10]. A large number of models assuming Coulomb friction have been developed to describe the dissipation of energy in joints. Among the most famous benchmarks, one can mention the Goodman and Klumpp clamped beams with a longitudinal interface [GK56], the Metherell and Diller sandwich beams preloaded with a pure transverse force [MD68] and the Earles shear lap-joints [Ear66]. In order to get the frictional dissipation over a cycling load, these authors used an analytical approach to solve the model equations with constant and uniformly distributed normal stresses and this approach is still being investigated today, see [PDCA10] and [Nan06] [DOOO08] These studies have been extended to nonuniformly distributed normal stress with the use of the finite element method, see Chen and Deng [CD05] and Heller [Hel05]. In all these models, the joint is loaded with an axial force F , and the evolution of the interfacial stresses and slippage are assumed to be quasi-static. Frictional dissipation is then given with respect to loading cycles.

In general, the slip in joints is due to the dynamic magnification in the proximity of the resonance. Several experimental studies have investigated the dynamic non-linear behaviour of jointed structures close to resonance for uniformly [DCP13] and nonuniformly [HFP09] distributed normal stress. The classical lap-joint benchmark fitted with two beams connected with a bolted joint in its center has been experimentally investigated [TC88], [HSM⁺04], [JAM07]. The main difference with the previous works relies on the fact that the stresses applied to the lap joint are due to modal displacements of the structure. In this specific case as for most real vibrations, the joint is dynamically stressed in both axial and normal directions. Under linear assumption the use of modal coordinates is useful to reduce the size of vibrational problems, the extension to weak non-linear dynamics is investigated today [Qui12], [Seg10] The purpose of this work is to extend the former quasi-static approach to modal solicitations through the use of the finite element method.

It has been observed that after a number of repetitive loading cycles, the response of a bolted joint structure, may lead to a stabilized state called limit cycle. In the case of an assumed linear structure, this limit cycle is known. Nowadays a large number of methods allows to compute non-linear dynamics. We can especially mention the harmonic balance or shooting methods [PVS⁺09] associated with continuation techniques. These methods allow for the computation of **a limited number of non-linear degrees of freedom**. One of the strategies investigated to model a mechanical joint consists in reducing it to a small number of degrees of freedom by building a macro-model of it [Seg02], so that these non-linear methods can be applied, see [AJ07] or [JSP10]. The

(experimentally) identified parameters in these macro-models are specific to the chosen configuration. In a design context, the aim can be to search for the best geometrical or material configuration by doing a parametric analysis which is not possible with macro-models since their parameters are not directly linkable to the configuration. In this case one needs to have a detailed finite element model of the joint. This strategy has been investigated with an assumed local Coulomb law for friction see [CWRU06] or [RCB11]. The meso [WO08] and micro-geometry [EPB11] of the contact interfaces in joints is often critical for the estimation of frictional dissipation and so a large number of degree of freedom should be kept in the model in order to be predictive. However the computational cost of a classic non-linear dynamic analysis, even if it is associated with substructuring techniques, generally does not allow to take into account a large number of non-reducible non-linear elements.

The goal of the presented method is to identify the evolution of the dynamic properties of an assembled structure (resonant frequencies and damping) along with the amplitude of vibration. It is based on a corrected quasi-static analysis associated with the Masing hypothesis. This description simplifies the modelling of hysteretic behaviors of joints. Using this method, the considerable numerical expense due to the non-linear dynamic can be avoided while still giving sufficiently accurate computations by keeping a **detailed model of the joints**. The non-linear modes being considered separately, any coupling effects that can exist in non-linear dynamics are neglected.

The governing equations and development of the method are detailed in the first section. In order to improve the simulation, two modal shapes correction methods are developed in the second section. Masing assumptions are discussed in the third. The method is finally investigated on a lap-joint benchmark and results are discussed.

4.3 Governing equations

We consider a linear structure fitted with one or several non-linear joints subjected to a dynamic excitation. Using a finite element formulation, one can write the non-linear dynamic equation of the problem :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) = \mathbf{f}_e \quad (4.1)$$

Where \mathbf{M} and \mathbf{K} denote, respectively, the mass and stiffness matrices. \mathbf{u} is the nodal displacements vector, \mathbf{f}_e the external forces and \mathbf{f}_{NL} denotes the nodal contact and friction forces which may depends on internal variables \mathbf{r} .

4.3.1 Computation of the linear mode basis

The first step of the method consists in a linearization of the macro-size model of the assembled structure in order to compute its linear modes. This step

can be conducted on a model with a rough mesh of the joints. The static equilibrium \mathbf{u}_0 is the solution of the static problem :

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_0 + \mathbf{f}_{\text{NL}} = \mathbf{P} \quad (4.2)$$

\mathbf{P} denotes the clamping force. Contact stiffness is linearized around \mathbf{u}_0 by calculating its Jacobian matrix to get a linearized stiffness matrix :

$$\mathbf{K}_{\text{lin-Low}} = \mathbf{K} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{u}_0} \quad (4.3)$$

\mathbf{v} denotes a small variation around the static equilibrium ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$).

An eigenvalue extraction can be conducted since the problem has been linearized :

$$(\mathbf{K}_{\text{lin-Low}} - \mathbf{S}^2\mathbf{M})\Psi = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

We get the linear modes basis Ψ and natural angular frequencies \mathbf{S} . Since this linear mode basis is obtained from the linearization of the contact around the static equilibrium, it stands for low-energy vibrations as shown in figure 4.1. Alternatively, a linearized stiffness matrix can also be found for higher

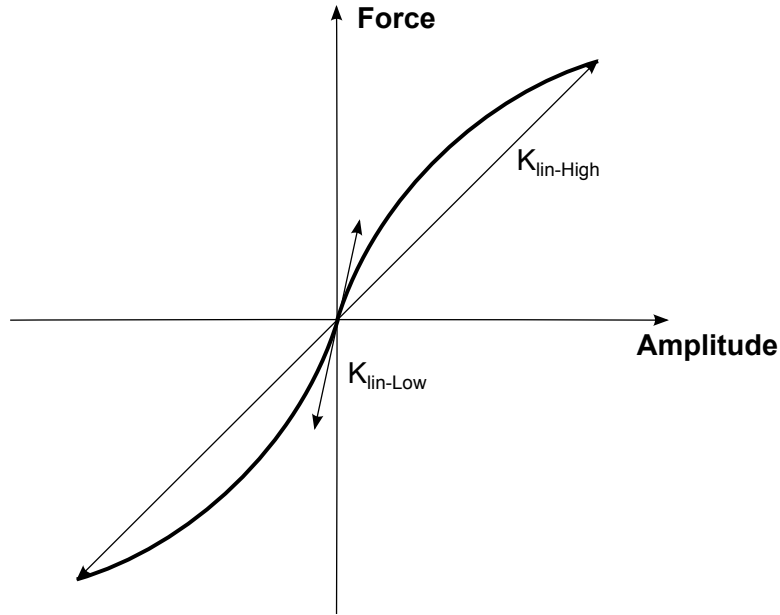


Figure 4.1 – linearization of the non-linear force

amplitudes.

4.3.2 Model reduction

The whole structure can be split into two substructures as shown figure 4.2 :

- An assumed linear domain Ω_b that undergoes the external force \mathbf{f}_e .

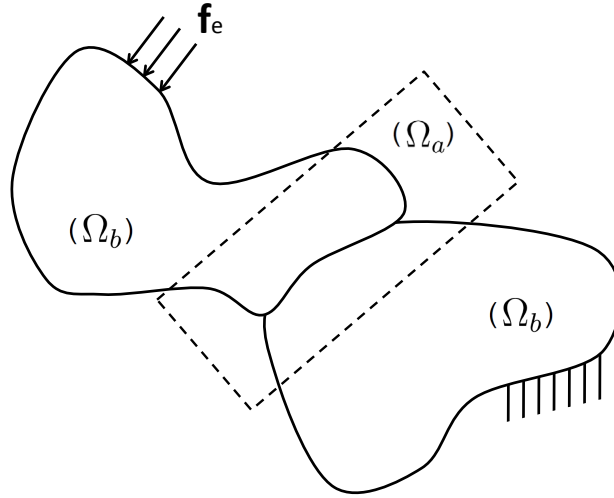


Figure 4.2 – the model is sub-structured in two domains : the localized non-linear domain (joints) Ω_a and the linear domain Ω_b

- The domains **around** the joints Ω_a , that undergoes the external bolt clamping forces and the non linear contact forces $\mathbf{f}_{NL} = \mathbf{f}_{clamping} + \mathbf{f}_{contact}$. The nodal displacements vector can be divided as $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_a; \mathbf{u}_b]^T$ as it is shown figure 4.2. Then, equation 4.1 is rewritten as the following coupled equations :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{u}}_a + \mathbf{M}_{ab}\ddot{\mathbf{u}}_b + \mathbf{K}_{aa}\mathbf{u}_a + \mathbf{K}_{ab}\mathbf{u}_b + \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{u}_a) = \mathbf{0} & (a) \\ \mathbf{M}_{bb}\ddot{\mathbf{u}}_b + \mathbf{M}_{ba}\ddot{\mathbf{u}}_a + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{u}_b + \mathbf{K}_{ba}\mathbf{u}_a = \mathbf{f}_e & (b) \end{cases} \quad (4.5)$$

It is firstly assumed that mode shapes of the structure are only altered in the domain Ω_a by the weak non-linear behavior of the joints. This assumption is extensively discussed in the following section. Under this assumption, the linearized structure basis Ψ can be used as "boundary conditions" on the domain Ω_a . The sub-structuring presented in figure 4.2 is not carried out the same way than for Craig-Bampton reduction. Actually, the domain Ω_a is not only limited to the non-linear degrees of freedom, but extend to the region "close" to the joint. Thus the admissible displacement field in Ω_a is enlarged. We consider (ω, Φ) , one of the mode of the linear modal basis. The nodal displacement in the linear domain is $\mathbf{u}_b = \Phi_b q$ where q denotes the modal amplitude. In this case, inertial forces are $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{M}\Phi q$. Equation 4.5a becomes :

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{u}_a + \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{u}_a) = (\omega^2 \mathbf{M}_{aa}\Phi_a - \mathbf{K}_{ab}\Phi_b)q \quad (a) \quad (4.6)$$

The solution of this equation is \mathbf{u}_a ; Φ is an element of the linear modes basis Ψ which has been previously computed. \mathbf{M}_{ab} is neglected here since mass matrix coupled terms are often neglected by numerical integration in FEM but these terms can also be kept. In this equation, all the degrees of freedom belong to the domain Ω_a . The problem has been reduced to the joint only. Acceleration terms no longer exist in equation 4.6 : the problem has also been reduced to quasi-static. This quasi-static evolution is consistent with a Coulomb friction modelling.

4.4 Amplitude-dependant mode shape

The partial slippage that takes place in joint interfaces during vibration is characterized by a slight decrease of the contact stiffness with amplitude of excitation [Seg10]. The greater the magnitude of vibration is, the smaller the gripping surface is. In practice, the situation where the effective joint stiffness would massively decrease would be equivalent to a destruction of the joint. Since joints are firstly designed to maintain the integrity of structures, it is assumed that the softening due to micro-sliding is moderate in the case of bolted connections. As a result, the mode shapes of assembled structures are often assumed to be weakly amplitude-dependent [Qui12]. Under this so-called weak non-linear assumption, the hereby method is founded on the intuition that mode shapes are only affected in the region close to the local contact interfaces. As a result, it is needed to at least consider an amplitude-dependent mode shape in the region close to the contact interfaces. In this section two algorithms are proposed. The first one allows to deal with the case of this weak non-linearity assumption when the mode shape is assumed to vary only in the domain of the joints (Ω_a). The second one extends the correction of the mode shape to the whole domain.

For both approaches, the instantaneous amplitude will be given with respect to the instantaneous strain energy which is particularly convenient in the case of amplitude-dependent mode shapes. The solution of equation 4.6 is the displacement field in the domain Ω_a that should correspond to the strain energy $e = \frac{1}{2}(\Phi q)^T \mathbf{K}(\Phi q)$. However, since the solution of eq.4.6 is not exactly the mode shape, the strain energy has varied and the displacement is denoted $\mathbf{u}_a(\Phi, e+\epsilon)$ where ϵ denotes the energy residual. For convenience, $\mathbf{u}_a(\Phi, e+\epsilon)$ is replaced by $\mathbf{u}_a(e+\epsilon)$ by keeping in mind that an unique amplitude-dependent mode Φ is considered.

4.4.1 Open loop algorithm

The problem is solved by increasing the strain energy by a fixed δe between two steps, thus $e_n = e_{n-1} + \delta e$. The initialisation of $\mathbf{u}_a(e_n)$ and boundary conditions $\mathbf{u}_b(e_n)$ at step n are deduced from step $n-1$ by considering the straightforward continuation :

$$\mathbf{u}(e_n) = \alpha \mathbf{u}(e_{n-1}) \text{ with } \alpha^2 = \frac{e_n}{e_{n-1}} \quad (4.7)$$

This updating ensure that $\mathbf{u}(e_n)^T \mathbf{K} \mathbf{u}(e_n) = \alpha^2 \mathbf{u}(e_{n-1})^T \mathbf{K} \mathbf{u}(e_{n-1}) = e_n$. Since linear assumption applies for low energy, the first iteration is given by $\mathbf{u}(e^1) = \mathbf{u}(\delta e) = \Phi \delta q$, (thus $\delta q^2 = \delta e / \Phi \mathbf{K} \Phi$).

In the case of non-linear dynamic, the angular frequency is not constant. The angular frequency must be replaced by the ratio of strain energy and kinetic energy. In the case of a linear structure, the angular frequency is

$\omega^2 = (\Phi^T \mathbf{K} \Phi) / (\Phi^T \mathbf{M} \Phi)$. Generalized to the non-linear case, equation 4.6 is finally rewritten as :

$$\mathbf{K}_{aa} \mathbf{u}_a(e_n + \epsilon) + \mathbf{f}_{NL} = \frac{\mathbf{u}(e_n)^T \mathbf{K} \mathbf{u}(e_n)}{\mathbf{u}(e_n)^T \mathbf{M} \mathbf{u}(e_n)} \mathbf{M}_{aa} \mathbf{u}_a(e_n) - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{u}_b(e_n) \quad (a) \quad (4.8)$$

The solution of this equation is the corrected mode shape $\mathbf{u}(e_n + \epsilon) = [\mathbf{u}_a(e_n + \epsilon), \mathbf{u}_b(e_n)]^T$ at the updated energy $e_n + \epsilon = \mathbf{u}(e_n + \epsilon)^T \mathbf{K} \mathbf{u}(e_n + \epsilon)$. The assumption of weak non-linearity can be checked by making sure that $\epsilon < \epsilon_{Tol} = 1\% \delta e$. A scheme of the incrementation is presented figure 4.3 and a flowchart of the algorithm is presented figure 4.6. This method is an open loop algorithm so the solution is assumed to be reached at first step. This approach is straightforward and fast and can easily be implemented on commercial solvers. On the other hand such systems are known to generate drift. However, for small to moderate non-linear cases (*i.e.* for most assembled structure problems), the potential drift generated with such approach should be acceptable.

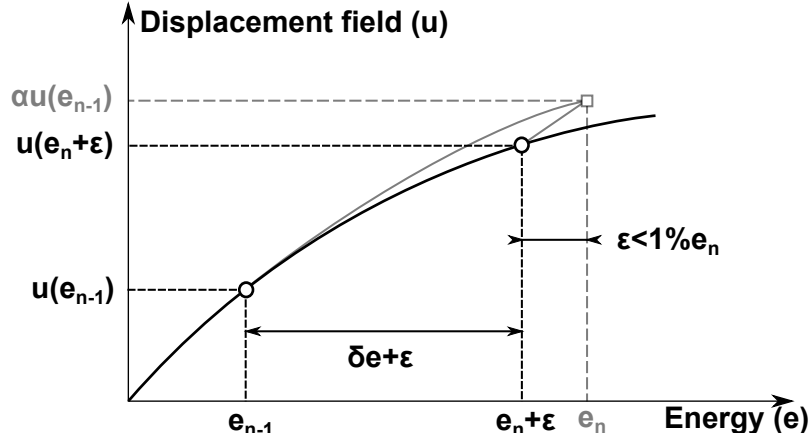


Figure 4.3 – Iteration of the method under the assumption of weak non-linearity

4.4.2 Closed loop algorithm

4.4.2.1 Energy residual

In this section, a closed loop algorithm is presented. The insight is to extend the same approach that was used for the domain Ω_a , to the whole structure. Equation (5b) is not exactly satisfied by the solution of eq.4.8. The residual mode shape in domain Ω_b can also be computed. The solution of eq.4.8 is now used as the boundary conditions for the static problem in domain Ω_b . Besides, the inertial forces $\mathbf{M}_{bb} \ddot{\mathbf{u}}_b$ in domain Ω_b are approximated by $-\omega^2 \mathbf{M}_{bb} \mathbf{u}_b$. Thus, the corrected mode shape $\mathbf{u}_b(e + \epsilon)$ is the solution of :

$$(\mathbf{K}_{bb} - \frac{\mathbf{u}(e_n)^T \mathbf{K} \mathbf{u}(e_n)}{\mathbf{u}(e_n)^T \mathbf{M} \mathbf{u}(e_n)} \mathbf{M}_{bb}) \mathbf{u}_b(e + \epsilon) = -\mathbf{K}_{ba} \mathbf{u}_a(e + \epsilon) \quad (b) \quad (4.9)$$

This equation requires the use of a direct linear solver or the computing of the inverse of the matrix $\mathbf{C} = (\mathbf{K}_{\mathbf{bb}} - \frac{\mathbf{u}(e_n)^T \mathbf{K} \mathbf{u}(e_n)}{\mathbf{u}(e_n)^T \mathbf{M} \mathbf{u}(e_n)} \mathbf{M}_{\mathbf{bb}})$ that can be extremely CPU time consuming for large systems even if this matrix is usually very sparse.

4.4.2.2 Enhanced basis

To avoid such heavy computation, an enhanced basis made of a predetermined set of corrector vectors can be constructed and used. This set is computed by considering different load cases in the contact interfaces corresponding to different amplitudes. Indeed, the evolution of the contact pressure during the movement can be inferred from the linear mode shape. For instance, a "high amplitude" vector can be computed by tying the different areas where the contact is likely to occur for high amplitude. Thus, this appropriate enhancement vector $\Phi_{\mathbf{High}}$ is the solution of the linearized eigenstate problem eq.4.4 where $\mathbf{K}_{\mathbf{lin-High}}$ is computed from this high amplitude contact state. The corresponding linearization is shown figure 4.1. The enhanced basis $\mathbf{\Pi} = [\Phi_{\mathbf{Low}}, \Phi_{\mathbf{High}}]$ is then orthonormalized with regard to the mass matrix ($\mathbf{\Pi}_{\perp}^T \mathbf{M} \mathbf{\Pi}_{\perp} = \mathbf{I}$).

The actual deformation at energy e , is assumed to be somewhere "between" the low and the high energy mode shapes. More precisely, the real deformation is approximated by a linear combination of the vectors of this enhanced basis. The optimal solution $\tilde{\mathbf{p}}$ is the one that minimize the norm of eq 4.9 :

$$\min(\|\mathbf{K}_{\mathbf{ba}} \mathbf{u}_{\mathbf{a}}(e + \epsilon) + \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{b}} \mathbf{p}\|) \quad (4.10)$$

The optimal solution of this problem can be computed directly in the case of the quadratic norm using the ordinary least square. This estimated linear combination is :

$$\tilde{\mathbf{p}} = -(\mathbf{\Pi}_{\mathbf{b}}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{b}})^{-1} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{b}}^T \mathbf{C}^T \mathbf{K}_{\mathbf{ba}} \mathbf{u}_{\mathbf{a}}(e + \epsilon) \quad (4.11)$$

Note that the dimension of the square matrix $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{b}}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{b}}$ is 2. Thus, instead of solving eq.4.9 directly, which can be very time consuming, the solution of this equation is approximated by $\mathbf{u}(e + \epsilon) = \mathbf{\Pi} \tilde{\mathbf{p}}$.

4.4.2.3 Convergence of modal shape

In the closed loop algorithm, the modal shape is also corrected in the domain Ω_b which means that the convergence of the solution is not reached at first step. Once a solution is found it is used as a new initialisation for equations 4.6 and 4.9, as shown figure 4.4, with the same continuation of equation 4.7. A flowchart of the algorithm is presented in figure 4.7.

The solution for the energy e is reached when the energy residual ϵ is below the predetermined tolerance ϵ_{Tol} . The convergence of this algorithm should be provided by the decreasing of $|\epsilon|$. This algorithm is intended for the larger

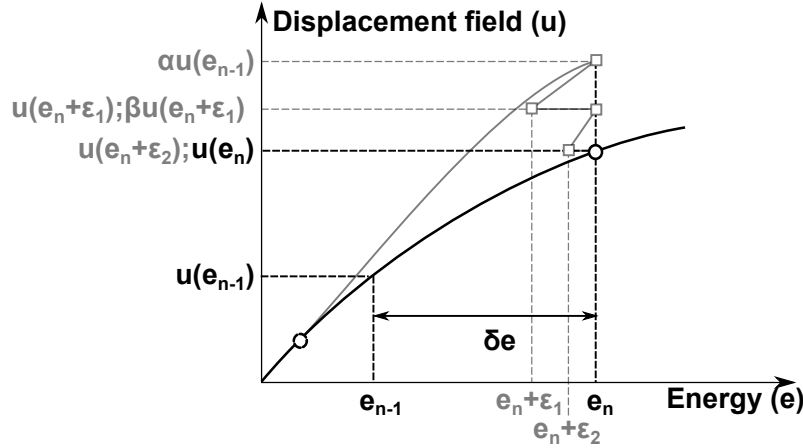


Figure 4.4 – Iteration of the method in the case of the closed loop algorithm

non-linearities that cannot be covered by the open loop algorithm. Note that this algorithm can be seen as a non-linear dynamic system. As such, the stability of this algorithm is not guaranteed and the convergence cannot be proved for any case and has not been investigated so far.

4.5 Computation of the dynamic parameters

4.5.1 Computation of the dissipated energy with the use of the Masing rules

The dissipated energy $D(e_{n-1} \rightarrow e_n)$ between the steps $n - 1$ and n is the work of the friction force from the state $\mathbf{u}(e_{n-1})$ to the state $\mathbf{u}(e_n)$:

$$D(e_{n-1} \rightarrow e_n) = \int_{\mathbf{u}(e_{n-1})}^{\mathbf{u}(e_n)} \mathbf{f}_{NL} d\mathbf{u}_t \quad (4.12)$$

It is computed by numerical integration. The conservative total energy of the system is equal to the maximum of the strain energy in a cycle $E = e_{max}$. To avoid the computing of a complete cycle for each energy E , it is assumed that the hysteretic behaviors of the joint follows the Masing rules [Mas26]. This description simplifies the modelling of hysteretic behaviors by assuming that a full cycle in a force-amplitude hysteresis can be extrapolated from the initial loading (so-called backbone curve) as shown figure 4.5. The hysteretic path obtained during cyclic loading are assumed to be of the same form as the backbone curve except for an expansion by a factor of two (with the origin shifted to the loading reversal point). The Masing's assumptions are often made in the case of jointed structures, see [WO08] or [AB11], since these rules are observed by most macro-model used to model mechanical joints, such

as any combination of Jenkins elements, see [Hel05] or [Seg10]. Besides, the finite element model of a jointed structure that assume local Coulomb friction can be seen as an Iwan's series-parallel model [Seg02] (in the case where the normal pressure is maintained constant). As a result, it is assumed that the model is consistent with the Masing rules. According to these assumptions, the dissipated energy over a cycle of amplitude E is extrapolated from the dissipated energy over the initial loading :

$$D(E) = 4 \sum_{n=1}^{n, e_n=E} D(e_{n-1} \rightarrow e_n) \quad (4.13)$$

Masing rules are of interest since they allow a large decrease in the number of computations : It is only needed to compute the loading from zero to the maximum amplitude e_{max} to get the dissipated energy over a full cycle $D(E)$ for all $E \leq e_{max}$.

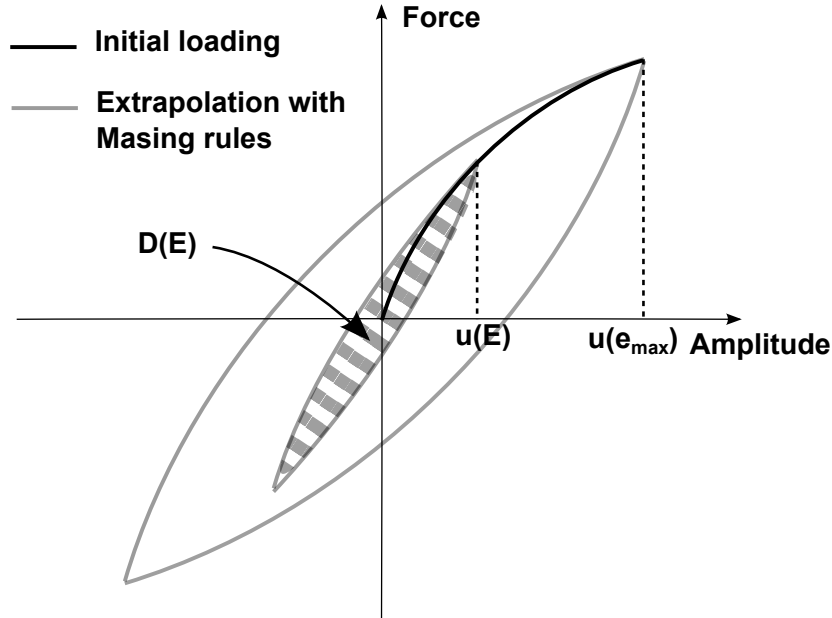


Figure 4.5 – Masing principle. The hysteretic paths obtained during cyclic loading are assumed to be of the same form as the backbone curve except for an expansion by a factor of two (with the origin shifted to the loading reversal point)

4.5.2 FEP and DEP

The aim of the method is to get the evolution of the resonant frequencies and damping with total conservative-energy E of an assembled structure (respectively *frequency-energy plots* (FEP) and *damping-energy plots* (DEP)) This computing can be post-treated.

The frequency is computed as the ratio of the strain energy and the kinetic at total energy E :

$$f_p(E) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mathbf{u}(E)^T \mathbf{K} \mathbf{u}(E)}{\mathbf{u}(E)^T \mathbf{M} \mathbf{u}(E)}} \quad (4.14)$$

It is also convenient to give an equivalent damping ratio, instead of a dissipated energy per cycle. In the case of a linear and viscously damped system, the modal damping is the ratio of the dissipated energy and the total conservative energy. A generalisation to an amplitude-dependent damping ratio can be computed as :

$$\xi(E) = \frac{D(E)}{4\pi E} \quad (4.15)$$

4.5.3 Dynamic behavior of the structure

The dynamic steady-state response of the structure to an harmonic load \mathbf{f}_e , of angular frequency ω , can be obtained from the computed FEP and DEP under several assumptions :

- Like for linear case, the system is reduced on N uncoupled modes so the displacement of the structure is assumed to be $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k(E_k)$, where $\mathbf{u}_k(E_k)$ denotes the shape of the mode Φ_k for energy E_k .
- The response of the structure is assumed to be composed exclusively of the first harmonic. In frequency domain, $\mathbf{u}(E(t))$ is replaced by $\hat{\mathbf{u}}(E(\omega)) = \mathbf{u}(E(\omega))e^{j\varphi(\omega)}$, where $\hat{\mathbf{u}}$ denotes the complex amplitude \mathbf{u} . φ_k denotes the phase between force and mode k . This assumption is justified in the case of weak non-linearity.
- For each mode Φ_k , an “equivalent” amplitude-dependent hysteretic damping $\eta_k = 2\xi_k$ (frequency-independent) is assumed.

Under these assumptions, equation 4.1 is simplified to N non-linear single degree of freedom systems :

$$(\mathbf{K}(1 + j\eta_k) - \mathbf{M}\omega^2)\mathbf{u}_k e^{j\varphi_k} = \mathbf{f}_e, \forall k \in [1 : N] \quad (4.16)$$

Multiplied by \mathbf{u}_k^T , the previous equation becomes :

$$\omega_k^2(E_k)(1 + j2\xi_k(E_k)) - \omega^2 = \frac{\mathbf{u}_k^T(E_k)\mathbf{f}_e e^{-j\varphi_k}}{\mathbf{u}_k^T(E_k)\mathbf{M}\mathbf{u}_k(E_k)}, \forall k \in [1 : N] \quad (4.17)$$

The solutions $(E_k(\omega), \varphi_k(\omega))$ of these non-linear algebraic equations are obtained with an optimization technique.

4.6 Example : the lap-joint benchmark

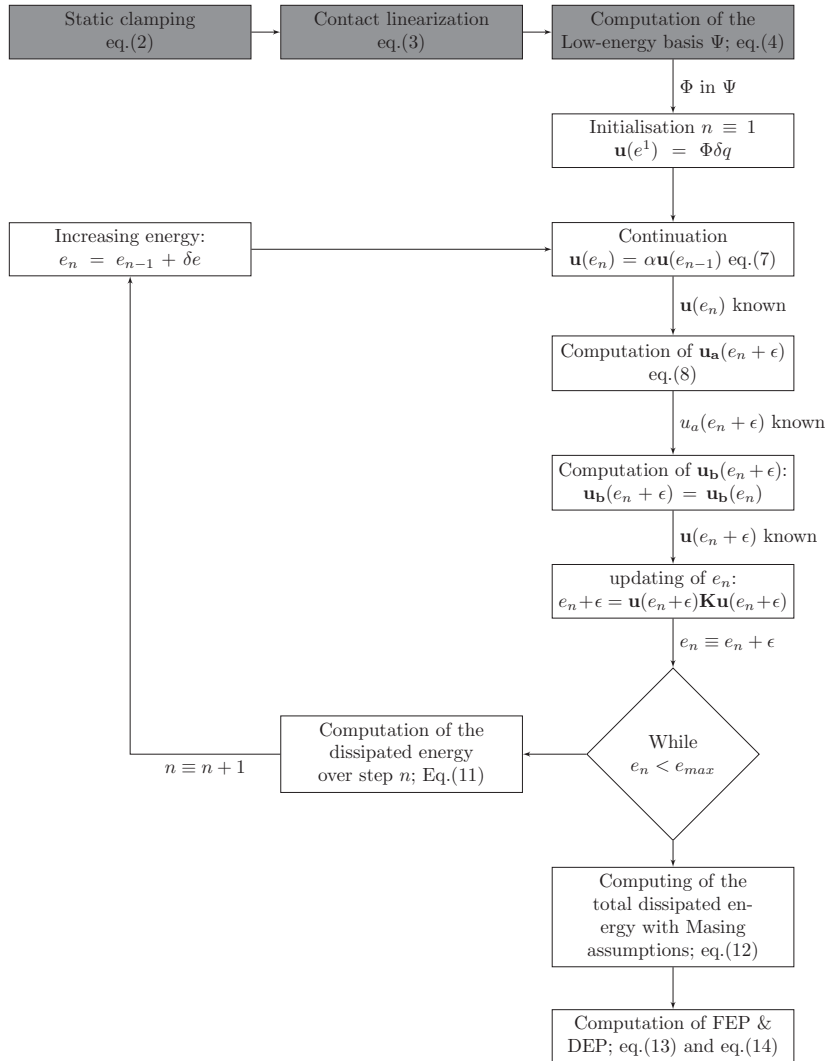


Figure 4.6 – Flowchart of the open loop algorithm (for weak to moderate non-linear problems) : Gray boxes means that the computing is done on the macro-size model.

4.6.1 The model

The method is investigated on a clamped-free lap-joint benchmark depicted in figure 4.8. The structure consists of a 300mm×25mm×5mm beam made of steel (Young modulus is 210 Gpa and poisson’s ratio is 0.3) with a lap joint at the bottom. According to the presented method, two finite element models have been carried out.

- The macro-size model of the whole structure which is dedicated to the computing of the linear modes basis is roughly meshed (around 6000 quadratic

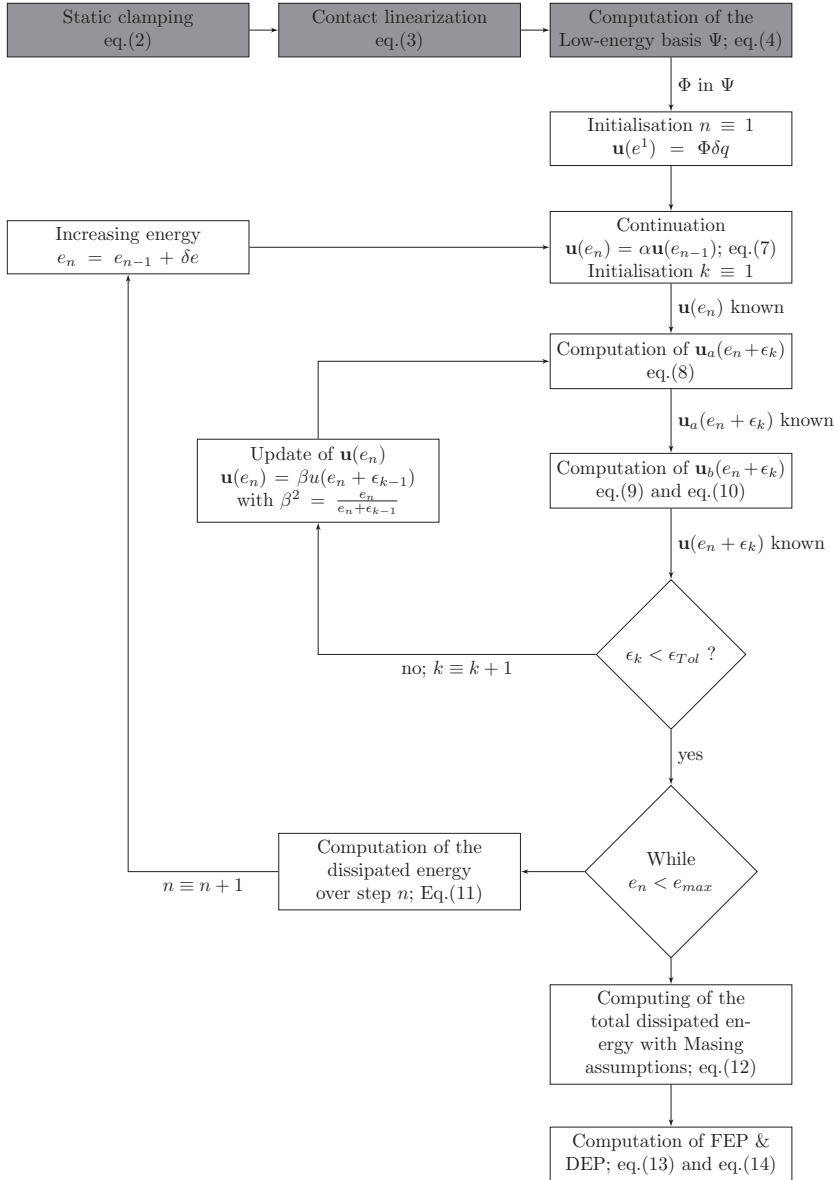


Figure 4.7 – Flowchart of the closed loop algorithm : Gray boxes means that the computing is done on the macro-size model.

- tetrahedron elements) and fitted with a linearized contact.
- The bolted-joint model (Ω_a domain only) is meshed with around 10.000 quadratic tetrahedron elements, see figure 4.8. Normal contact force is governed by a ABAQUS "hard contact" (Lagrangian contact). Friction is modelled with the Coulomb law with a constant friction coefficient $\mu = 0.3$ and using a penalty method with an elastic slip fixed to $0.1\mu m$. This non-linear contact law is only considered at the interface between the two beams. The bolt clamping force is simulated with a preloaded spring. The pre-

sented study does not aim to focus on the contact problem itself and can be adapted to all the different techniques for the modelling of unilateral contact (penalty [GB89], Lagrange multipliers [HR09], thin layer elements [BRS⁺11] or zero thickness elements [MG07]).

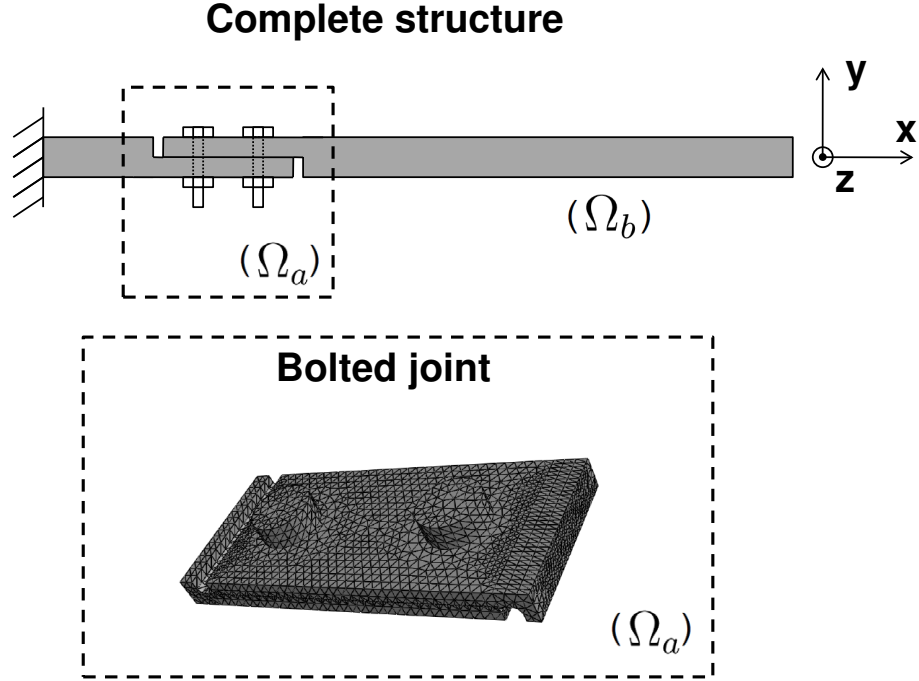


Figure 4.8 – The lap-joint benchmark

The presented method, in the case of the weak non-linearity assumption, has been investigated on the first vertical bending mode Φ (around z) of this lap-joint benchmark for three different bolt pressures (500N, 1000N and 2000N).

4.6.2 The dynamic simulation

In order to check the method, the obtained results can be compared with a dynamic simulation. This simulation consists in the free response of the whole structure initialised with the linear mode shape with a displacement of the top of the beam equal to 5 mm (y direction).

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t=0) = \Phi q_{\text{max}}, \text{ with } \Phi^T \mathbf{K} \Phi q_{\text{max}}^2 = 2e_{\text{max}} \\ \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.18)$$

This system is the numerical equivalent to the experimental stopped sinus, see [DCP13]. Since the global non-linear behavior is moderate, the free response is expected to be almost exclusively composed of the first bending

mode. This analysis is computed with the implicit integration scheme of the Abaqus/standard solver. The finite element model is the same detailed model in the domain of the joint Ω_a and meshed with approximatively 5000 quadratic tetrahedron elements in the domain Ω_b ; 15.000 quadratic tetrahedron elements in total count for this model. The instantaneous energies (strain-energy, kinetic-energy, total energy E) obtained with this dynamic simulation are plotted figure 4.9 in the case of the first vertical bending mode Φ . Figure 4.9 also shows the sum of the dissipated energy since the beginning of the simulation.

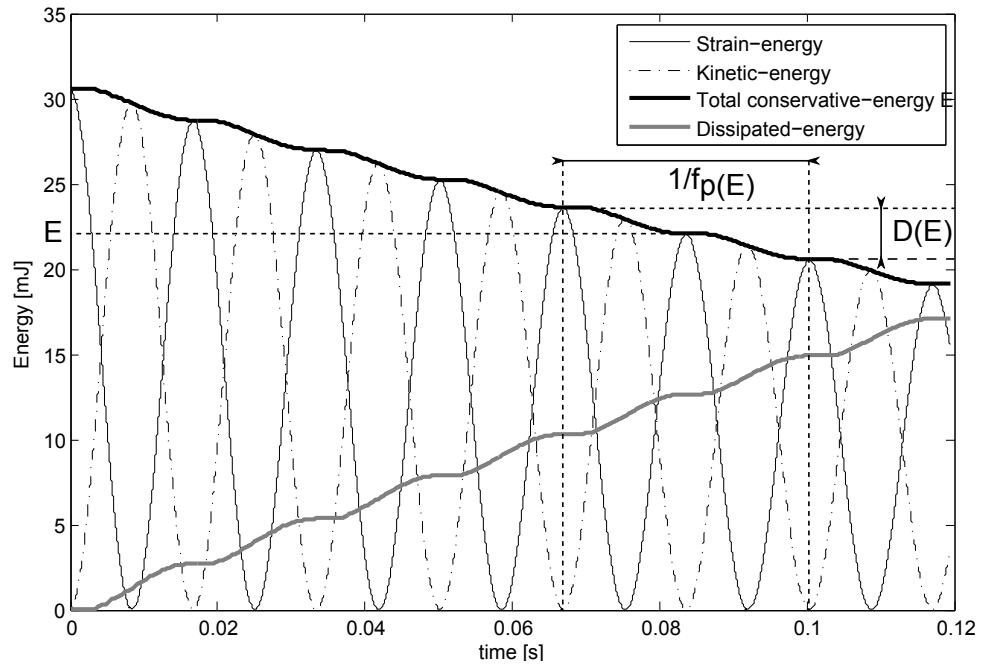


Figure 4.9 – Instantaneous energies of the free response of the lap-joint initialized with the first vertical bending mode Φ : strain-energy, kinetic-energy, total energy E obtained by dynamic simulation for a tightening force of 500N

The total conservative-energy is dissipated by frictional dissipation. The numerical damping, that could lead to an overestimation of the actual dissipation, induced by numerical integration is very low in this simulation since the dissipated energy computed from the work of the friction force is almost equal to the loss of total conservative-energy.

4.6.3 Results

Figure 4.10 shows a comparison between both computed dissipated-energy per cycle D , versus the total conservative energy. Of course, in the case of the dynamic analysis, the total energy E is not constant over a period/cycle because of the frictional dissipation. The mean value over the cycle of the total conservative-energy is used for the horizontal axes of figures 4.10 and 4.11.

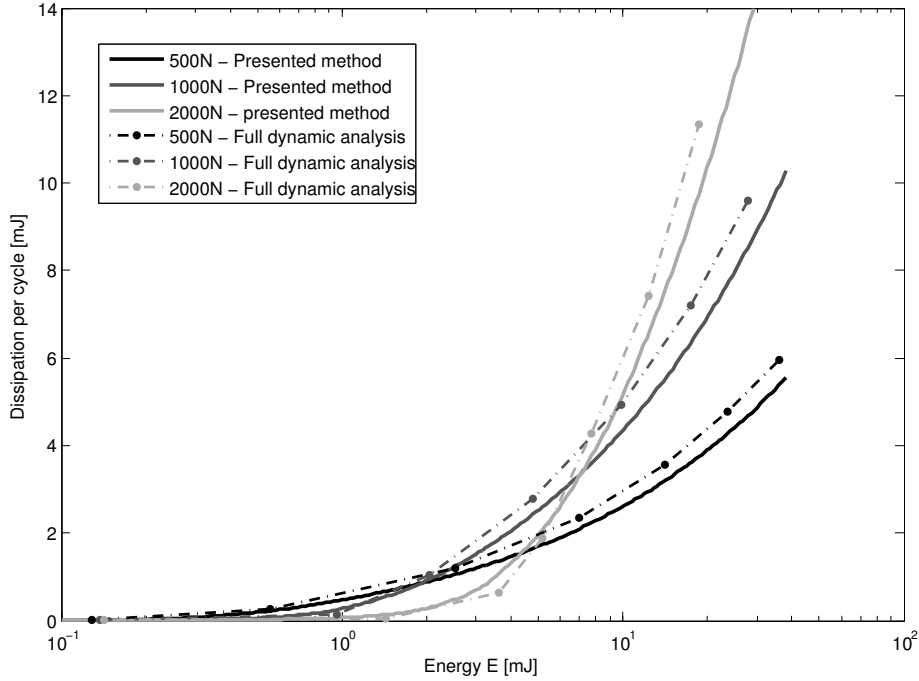


Figure 4.10 – Dissipated energy per cycle along with total energy E for the first bending mode of the lap-joint benchmark. A comparison of the dissipation computed with the presented method using the open loop algorithm (solid line) and the full dynamic analysis (Dashed lines) for three tightening forces.

Figure 4.11 shows a comparison of the computed FEP and DEP of the first vertical bending mode Φ for three different bolt pressures. The frequency of the low energy mode computed with eq.4.4 is also plotted. In the case of the dynamic analysis, the frequency is computed by looking at the time spent between three maximums of strain-energy (strain energy has two maximums in a period). In order to have a clear and vivid idea of the problem, the magnitude of vibration, in figure 4.11, is also given with respect to the peak displacement of the top of the beam in the case of the normal mode shape. It is related to the total energy thanks to : $u_{\text{top}} = \Phi_{\text{top}}q = \Phi_{\text{top}}\sqrt{\frac{2E}{\Phi^T\mathbf{K}\Phi}}$.

4.6.4 Discussion

The Damping-Energy Plots and the Frequency-Energy Plots computed with the open loop algorithm are very close to those computed with the full dynamic simulations. First, the principal trends of the evolution of damping and frequency along with amplitude are respected : Magnitude are globally very close, shapes are identical and maxima are located at the same energies for both computings. The main error is the frequency for low vibrational energy.

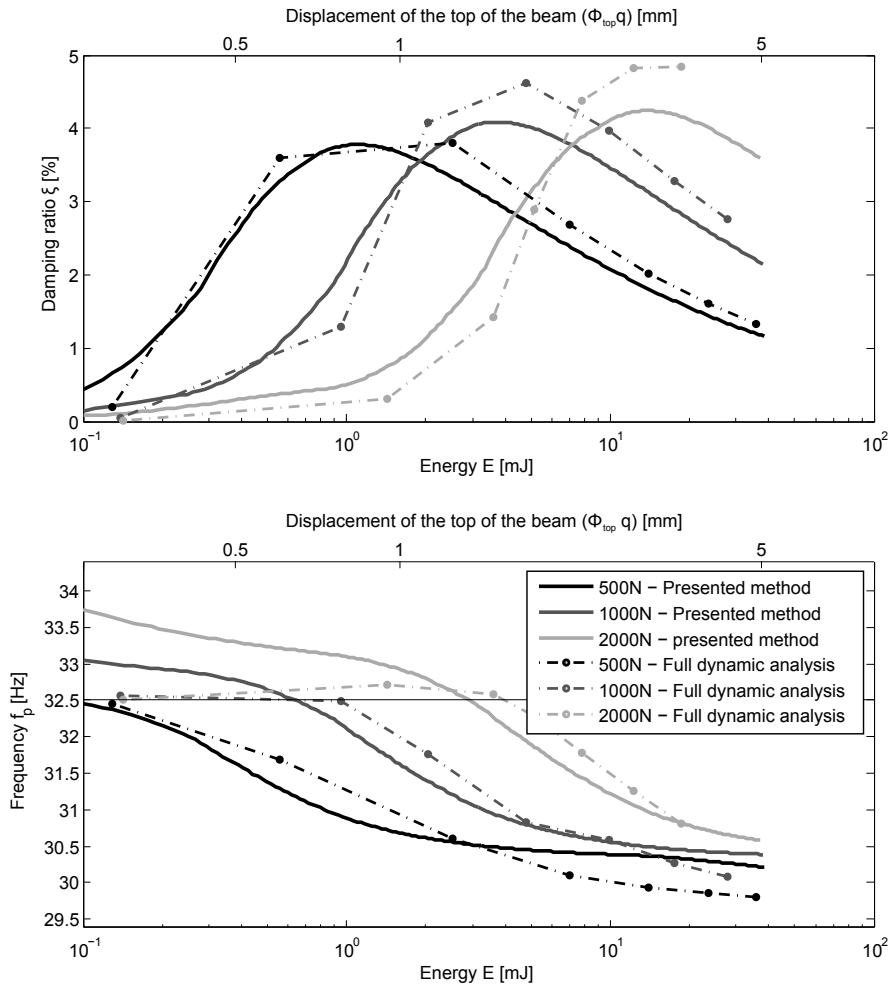


Figure 4.11 – Damping-Energy Plots and Frequency-Energy Plots of the first bending mode of the lap-joint benchmark. A comparison of the dynamic parameters computed with the presented method using the open loop algorithm (solid line) and the full dynamic analysis (Dashed lines) for three tightening forces. The frequency of the Low Energy mode computed with eq.4.4 is also plotted

A part of the total computed strain energy is due to the tightening force, and cannot be easily subtracted, which may explain these differences for low energies. However, as the vibrational energy increases this tightening strain energy becomes negligible. Similarly, even if this problem looks significant in the case of the lap-joint benchmark, the tightening strain energy should be negligible compared to the vibrational energy in the case of a real massive structure. Besides, the frequency of the low energy mode computed using eq.4.3 makes the error measurable.

In this example the structure is fitted with only one bolted joint. Generally, the domain Ω_a does not need to be restricted to a located area. Thus, the method can be used for a structure fitted with several joints. In the case

of the presented lap-joint model, the computing cost of the presented quasi-static analysis was approximatively 20 times less important than the complete dynamical analysis. In the case of a real structure, this ratio should even be smaller since the domain Ω_a is generally a smaller part of the total volume of the structure than in case of the presented lap-joint structure.

4.7 Conclusion

Industrial companies face a growing need for the geometry of joints to maximize the dissipated energy by friction and ensure an acceptable softening. However detailed finite-element models for joints cannot be taken into account with classic dynamic analysis because of the high computational cost involved by non-linear dynamics. As a result, the impact of the geometry of joints cannot be studied in an industrial calculation process. This work has been motivated by this need. The presented method is based on a quasi-static formulation from which result an open loop algorithm. As a result, it requires low computational costs and can easily be implemented on commercial solvers. It is adapted for the systems that shows small to moderate non-linear behaviors such as assembled structures. A closed loop algorithm intended for larger non-linear problems is also presented. The method is investigated on a realistic finite element of a lap-joint structure. It is shown that the proposed method is an accurate enough design tool for the estimation of the dynamic properties of assembled structures.

Bibliographie du chapitre 4 : Simulations locales

- [AB11] I.I. Argatov and E.A. Butcher. On the iwan models for lap-type bolted joints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(2) :347–356, March 2011.
- [AJ07] H. Ahmadian and H. Jalali. Generic element formulation for modelling bolted lap joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5) :2318–2334, July 2007.
- [BRS⁺11] S. Bograd, P. Reuss, A. Schmidt, L. Gaul, and M. Mayer. Modelling the dynamics of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(8) :2801–2826, November 2011.
- [CD05] W. Chen and X. Deng. Structural damping caused by micro-slip along frictional interfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(8) :1191–1211, August 2005.
- [CWRU06] A.D. Crocombe, R. Wang, G. Richardson, and C.I. Underwood. Estimating the energy dissipated in a bolted spacecraft at resonance. *Computers & Structures*, 84(5-6) :340–350, January 2006.
- [DCP13] J.L. Dion, G. Chevallier, and N. Peyret. Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 34(1–2) :106–115, January 2013.
- [DOOO08] O. Damisa, V.O.S. Olunloyo, C.A. Osheku, and A.A. Oyediran. Dynamic analysis of slip damping in clamped layered beams with non-uniform pressure distribution at the interface. *Journal of Sound and Vibration*, 309(3-5) :349–374, January 2008.
- [Ear66] S.W.E. Earles. Theoretical estimation of the frictional energy dissipation in a simple lap joint. *Journal of mechanical engineering science*, 8 :207–214, 1966.
- [EPB11] M. Eriten, A.A. Polycarpou, and L.A. Bergman. Physics-based modeling for fretting behavior of nominally flat rough surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10) :1436–1450, May 2011.
- [FCD13] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013.
- [GB89] J. Gwinner and B. Brosowski. A penalty approximation for a unilateral contact problem in non-linear elasticity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 11(4) :447–458, July 1989.
- [GK56] L.E. Goodman and J.H. Klumpp. Analysis of slip damping with

- reference to turbine blade vibration, journal of applied mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 23 :421, 1956.
- [GN01] L. Gaul and R. Nitsche. The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Reviews*, 54(2) :93–106, March 2001.
- [Gro85] M. Groper. Microslip and macroslip in bolted joints. *Experimental Mechanics*, 25(2) :171–174, June 1985.
- [Hel05] L. Heller. *Amortissement dans les structures assemblées*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2005.
- [HFP09] L. Heller, E. Foltête, and J. Piranda. Experimental identification of nonlinear dynamic properties of built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 327(1-2) :183–196, October 2009.
- [HR09] Patrick Hild and Yves Renard. A stabilized lagrange multiplier method for the finite element approximation of contact problems in elastostatics. *Numerische Mathematik*, 115(1) :101–129, November 2009.
- [HSM⁺04] C. J. Hartwigsen, Y. Song, D. M. McFarland, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis. Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration. *Journal of Sound and Vibration*, 277(1-2) :327–351, October 2004.
- [JAM07] H. Jalali, H. Ahmadian, and J.E. Mottershead. Identification of nonlinear bolted lap-joint parameters by force-state mapping. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25-26) :8087–8105, December 2007.
- [JSP10] V. Jaumouille, J.-J. Sinou, and B. Petitjean. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems—application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, 329(19) :4048–4067, September 2010.
- [Mas26] G. Masing. Eigenspannungen und verfestigung beim messing. *Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics*, page 332–335, 1926. cited By (since 1996) 189.
- [MD68] A. F. Metherell and S. V. Diller. Instantaneous energy dissipation rate in a lap joint – uniform clamping pressure. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :333–340, March 1968.
- [MG07] M.H. Mayer and L. Gaul. Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2) :724–734, February 2007.
- [Nan06] B.K. Nanda. Study of the effect of bolt diameter and washer on damping in layered and jointed structures. *Journal of Sound and Vibration*, 290(3-5) :1290–1314, March 2006.

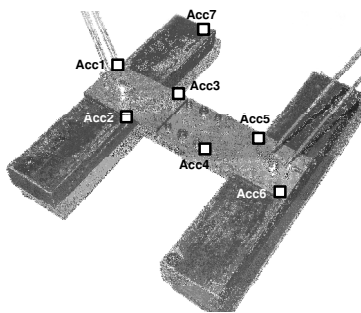
- [PDCA10] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Microslip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02(02) :281, 2010.
- [PVS⁺09] M. Peeters, R. Vigié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Nonlinear normal modes, part II : toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :195–216, January 2009.
- [Qui12] D.D. Quinn. Modal analysis of jointed structures. *Journal of Sound and Vibration*, 331(1) :81–93, January 2012.
- [RCB11] V. Roulet, L. Champaney, and P.-A. Boucard. A parallel strategy for the multiparametric analysis of structures with large contact and friction surfaces. *Advances in Engineering Software*, 42(6) :347–358, June 2011.
- [Seg02] D.J. Segalman. A four-parameter iwan model for lap-type joints. *Sandia report*, SAND2002-3828, 2002.
- [Seg10] D.J. Segalman. A modal approach to modeling spatially distributed vibration energy dissipation. Technical report, Tech. Rep. SAND2010-4763, Sandia National Laboratories (August 2010), 2010.
- [TC88] J.-S. Tsai and Y.-F. Chou. The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint. *Journal of Sound and Vibration*, 125(3) :487–502, September 1988.
- [WO08] H. Wentzel and M. Olsson. Mechanisms of dissipation in frictional joints—Influence of sharp contact edges and plastic deformation. *Wear*, 265(11–12) :1814–1819, November 2008.

Chapitre 5

Essais de caractérisation

Sommaire

5.1	Bancs d'essais de caractérisation	122
5.2	Montage <i>lap-joint</i> encastré-libre	123
5.2.1	Géométrie - conditions et moyens d'essais	123
5.2.2	Résultats d'essais	125
5.2.3	Couplage modal	129
5.2.4	Répétabilité	130
5.2.5	Corrélation essais-calculs	131
5.3	Liaison SSS du SYLDA5	134
5.4	Banc d'essai <i>lap-joint</i> en H	136
5.4.1	Géométrie - conditions et moyens d'essais	136
5.4.2	Répétabilité	138
5.4.3	Résultats d'essais	140
5.4.4	Dépendance de la déformée modale à l'amplitude . .	142
5.5	Conclusion et perspectives	147
	Bibliographie du chapitre 5	148



Résumé

Ce chapitre rapporte les résultats d'essais de caractérisation de quelques structures assemblées particulières. Rappelons que la dissipation au sein d'une liaison dépend de sa géométrie, de ses paramètres physiques et du chargement qu'elle subie. À ce titre, les résultats présentés ici n'ont d'intérêt que de manière qualitative.

5.1 Bancs d'essais de caractérisation

On se borne ici à donner les formes d'évolutions des paramètres modaux équivalents des premiers modes de petites structures que nous appelons banc-d'essai de caractérisation. La liaison ainsi étudiée est vue comme un composant ou un sous-domaine restreint d'une structure complète. La littérature sur le sujet est très fournie. Le cas de Goodman et Klumpp (poutre en flexion) et celui de Metherell et Diller (poutre en traction compression) sont les plus étudiés. Expérimentalement, le premier est bien plus simple à mettre en œuvre que le second (ce qui explique la très grande liste des travaux sur ce cas) du fait de la raideur très importante d'une poutre dans la direction axiale. Le procédé le plus courant consiste à utiliser la résonance d'une structure élémentaire intégrant une liaison et des balourds comme présenté sur la figure 5.1. La structure du banc-d'essai est conçue de façon à ce que l'un de ses

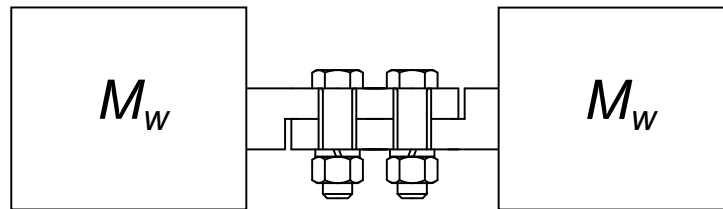


Figure 5.1 – Banc d'essai de caractérisation.

modes (généralement le premier) charge la liaison selon le chargement élémentaire souhaité. Ainsi en excitant cette structure à une fréquence proche de la résonance du mode, la réponse de la structure élémentaire permet de caractériser la liaison pour un chargement donné. Il suffit ensuite d'identifier la dépendance à l'amplitude des paramètres modaux équivalents. Les résultats présentés ici sont obtenus à l'aide de la méthode de filtrage de Kalman.

Les modes du banc doivent être suffisamment éloignés et dans la mesure du possible ne doivent pas être en rapport harmoniques. Sous l'hypothèse de faible non linéarité, nous écartons ainsi les possibles transferts d'énergie entre un mode basse fréquence et un mode de plus haute fréquence. La dynamique du banc d'essai élémentaire excité près de la résonance d'un mode est ainsi assimilable à celle d'un oscillateur à un degré de liberté découplé des autres modes.

Évidemment, il est pratiquement bien plus simple d'étudier ces petites structures qu'une grande structure aéronautique par exemple. Aussi, dans une optique de dimensionnement ou d'optimisation, il peut être intéressant de ne s'intéresser qu'à une liaison particulière. Les conclusions obtenues ici sont

néanmoins généralisables¹ à une majorité de structures assemblées, y compris celles assemblées par un nombre de liaisons plus important que celui des petites structures étudiées.

Trois géométries de liaisons de type *lap-joint* ont été étudiées. Au contraire de certains travaux académiques dont le but est de reproduire un contact idéalisé ou simplifié, ce montage présente l'intérêt d'être technologiquement assez proche des liaisons telles qu'elles existent au sein des structures industrielles. Nous savons par exemple que la pression de contact sous la tête de vis charge l'interface de contact de manière non-uniforme. Cette répartition de charge joue un rôle de premier plan sur le comportement du contact. Ainsi, nous faisons le choix d'étudier les liaisons telles qu'elles sont avec leurs défauts et caractéristiques techniques spécifiques. Le premier banc d'essai est le cas de la poutre présentée au chapitre précédent.

5.2 Montage *lap-joint* encastré-libre

5.2.1 Géométrie - conditions et moyens d'essais

Le premier montage étudié est composé de deux poutres en acier rectangulaires de 25mm par 5mm assemblées par deux boulonnages de type M6. La structure est montée en condition "encastrée-libre" et sa longueur totale est de 300mm. Un épaulement, de profondeur égal à la moitié de l'épaisseur de la poutre, est usiné (fraisage puis rectification). L'intérêt de cette géométrie est d'ordre pratique : elle permet construire facilement une poutre monolithique de même dimension. La figure 5.2 présente la géométrie du montage ainsi qu'une photo des poutres réalisées.

La poutre est montée en condition de limite encastrée libre. Une attention toute particulière a été portée à l'encastrement pour qu'il soit suffisamment rigide et surtout qu'il engendre une dissipation la plus faible possible. Afin de limiter cet effet indésirable, la poutre est fortement serrée et collée dans un étau massif.

On ne s'intéresse ici qu'au premier mode de flexion autour de l'axe z de la poutre. Une analyse modale numérique permet de tracer la forme de la déformée modale, figure 5.3. Ce mode permet de charger la liaison selon une déformation de flexion. Le moment de flexion du premier mode est maximal à la base de la poutre. Ainsi la liaison est placée à la base du montage pour augmenter l'effort subit par la liaison.

L'excitation se fait au marteau de choc et on mesure les vibrations avec un accéléromètre situé au sommet de la poutre. Un schéma ainsi qu'une photo du montage expérimental est présenté sur la figure 5.4.

Le serrage des deux systèmes de vis-écrous M6 est assuré au moyen d'un tournevis dynamométrique à déclenchement. Pour ne pas affecter la pression

1. Au titre de l'équation (2) du chapitre "Dynamique modale"

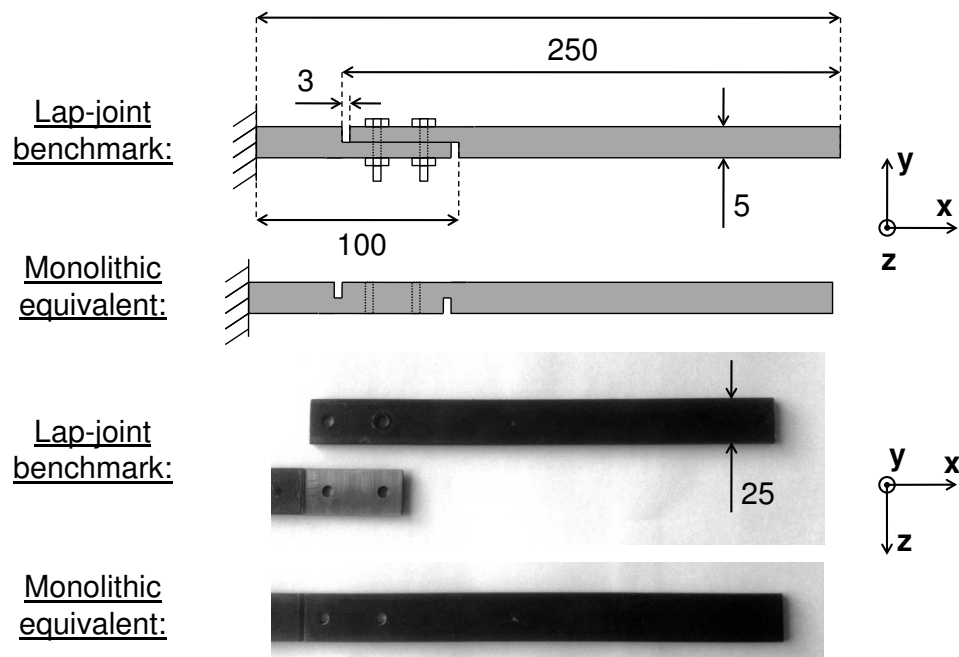


Figure 5.2 – Poutre *lap-joint* et poutre monolithique.

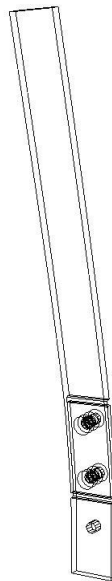


Figure 5.3 – Premier mode de la structure en condition de limite encastré-libre.

de serrage et limiter le nombre de capteurs qui peuvent être une source de dissipation intempestive, la force de serrage n'est pas mesurée directement. Celle-ci est mesurée sur un autre montage témoin au moyen d'un capteur de force annulaire. La géométrie de ce montage témoin est identique. Le couple de serrage permettant d'atteindre la force voulue est mesuré et ce même couple est appliqué au montage *lap-joint*. La relation entre le couple de serrage et la

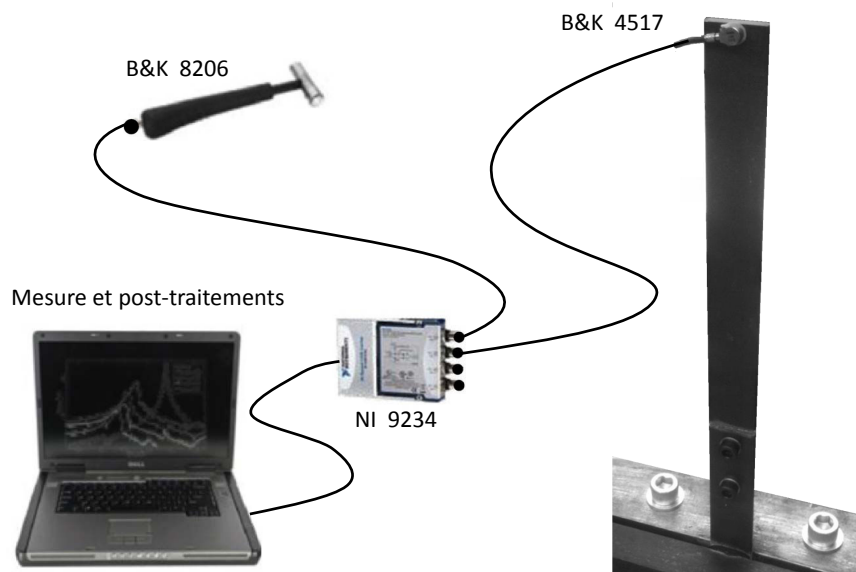


Figure 5.4 – Moyens de mesure.

force appliquée est approximativement linéaire de pente 0.4Nm pour 250N . Nous étudions cinq configurations de serrage. Quatre configurations pour lesquelles le serrage est identique pour les deux vis : 250N , 500N , 1000N et 2000N et une dernière configuration hybride pour laquelle la force de serrage de la vis supérieure est de 250N et celle de la vis inférieure de 2000N .

La poutre monolithique est installée dans la même configuration que celle de la poutre assemblée. Notamment, les vis d'assemblage sont montées.

5.2.2 Résultats d'essais

On choque fortement la structure, dans la direction transverse (selon la direction y), au sommet afin d'obtenir des amplitudes de vibrations importantes. La figure 5.5 présente la transformée de Fourier des signaux de force d'impact et d'accélération mesurés dans le cas où le serrage est de 1000N sur les deux vis. Le gain de la réponse impulsionnelle fait apparaître les premier deux modes de flexion autour de l'axe z sur la bande de fréquence $10\text{-}1000\text{Hz}$. Il existe un autre mode de flexion autour de l'axe y dans cet intervalle qui n'est pas excité (ni observable).

On observe un taux d'harmonique quasiment négligeable, ce qui confirme l'hypothèse de faible non-linéarité. Ce taux d'harmonique est légèrement supérieur pour les configurations moins fortement serrées.

La méthode de filtrage de Kalman permet ensuite d'estimer les courbes de

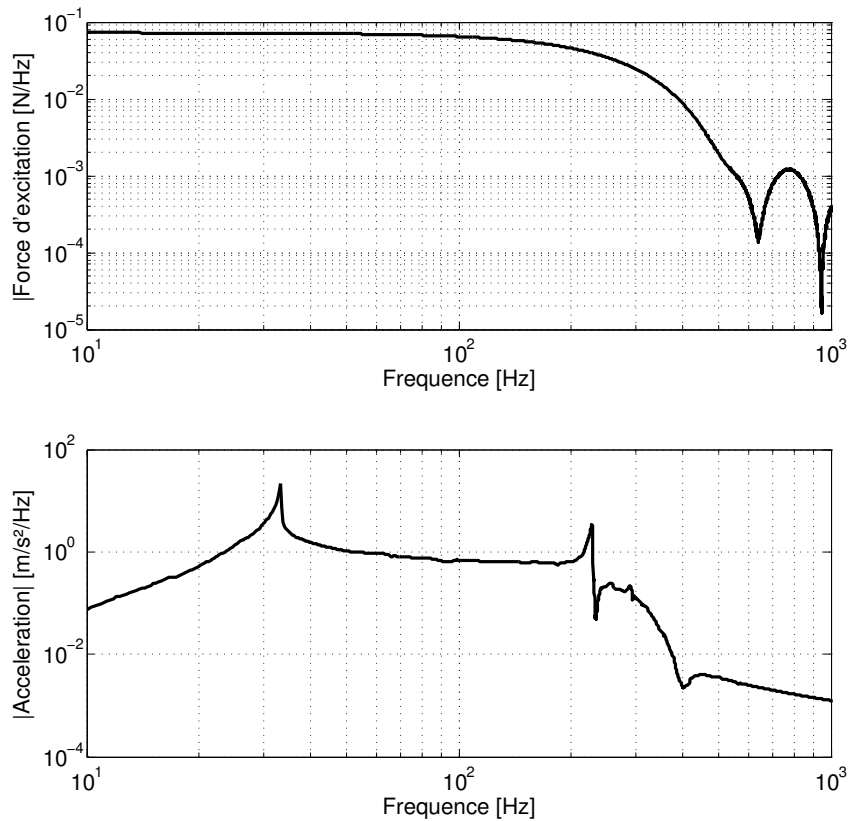


Figure 5.5 – Valeurs absolues des transformées de Fourier des signaux de force et d'accélération

fréquence et d'amortissement équivalents pour ces deux modes. La figure 5.6 présente les paramètres du premier mode en fonction du module du signal analytique estimé (*i.e.* le déplacement maximal atteint au cours d'un cycle), pour les cinq configurations de serrage ainsi que dans le cas de la poutre monolithique.

L'écart entre les courbes de la poutre monolithique et celles de la poutre assemblée prouve que le comportement présenté est bien le fait de la liaison d'assemblage.

La poutre assemblée en flexion présente un comportement similaire pour toutes les configurations de serrage. Tout d'abord, le ratio d'amortissement estimé croît avec l'amplitude puis atteint une valeur maximale (qui semble relativement indépendante du serrage) avant de décroître. La décroissance de la courbe d'amortissement ne traduit pas une diminution de la dissipation par cycle avec l'amplitude, mais le fait que la dissipation croît moins vite que l'énergie de déformation. Le maximum n'est pas atteint pour les serrages importants dans la gamme d'amplitude appliquée.

Au contraire, l'amplitude pour laquelle cette valeur maximale d'amortisse-

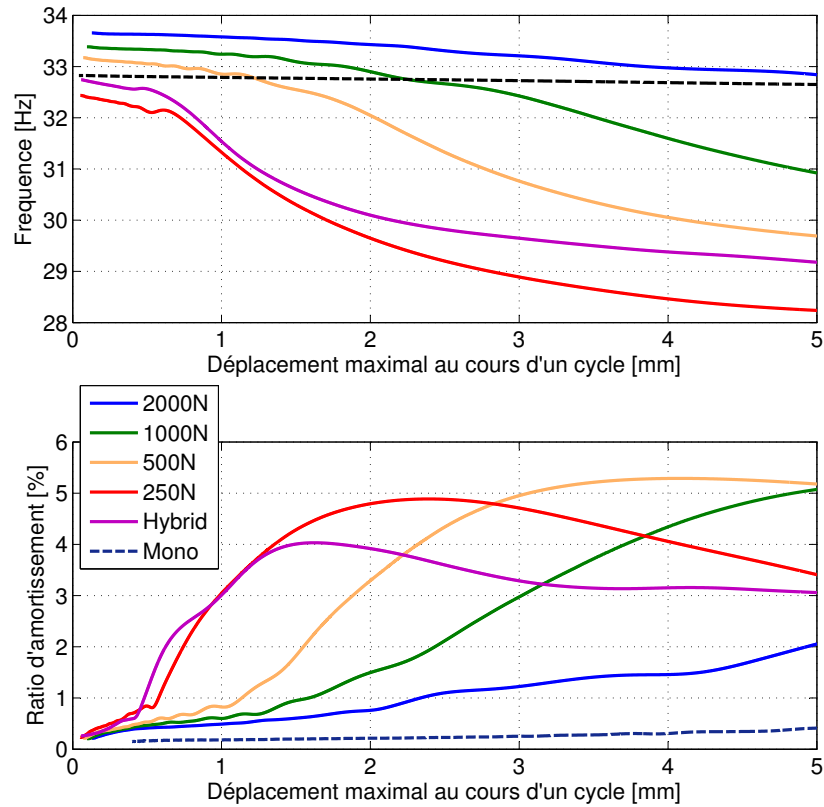


Figure 5.6 – Influence de la force de serrage sur les paramètres équivalents du premier mode de la structure lap-joint.

ment est atteinte est directement liée à la force de serrage. Ceci s’explique simplement par la loi de Coulomb : La force de glissement permettant le glissement d’une zone localisée est d’autant plus importante que la force normale (le serrage) est importante.

Parallèlement, la structure a un comportement assouplissant c’est à dire que la raideur décroît avec l’amplitude de vibration. Ce caractère non-linéaire est lié à la perte d’adhérence de l’interface de contact à mesure que l’amplitude de vibration croît. La variation en fréquence est d’autant plus forte que le serrage est faible. Cette observation est aussi valable pour la raideur à l’origine. En effet, plus le serrage est important, plus la fréquence de résonance à faible amplitude est importante.

Les courbes de fréquence et d’amortissement de la poutre monolithique permettent de juger de la qualité de l’encastrement et des sources de perturbation autres que celles de la liaison. Les paramètres modaux sont quasiment indépendants de l’amplitude ce qui correspond à un comportement linéaire. Il faut remarquer que la fréquence de résonance de la poutre monolithique est inférieure à celle de poutre assemblée, contrairement à ce qu’on devrait attendre.

Il s'agit ici d'une erreur de fabrication. L'épaisseur de la poutre est légèrement inférieure à 5mm et inégale. Finalement, les rainures usinées à 2.5mm sont trop profondes sur la poutre monolithique et la poutre est plus souple qu'espérée.

L'amortissement résiduel pour les valeurs d'amplitude proches de zero est environ de 0.2% dans le cas de la poutre monolithique, relativement indépendant de l'amplitude et compris entre 0.3% et 0.4% dans le cas de la poutre assemblée. Cette observation tend à montrer que **l'amortissement induit par le régime de micro-glissement, régime pour lequel le glissement n'est obtenu qu'à l'échelle des aspérités pour de faibles valeurs d'amplitudes, est faible devant celui induit par le régime de meso-glissement (échelle de l'ordre du dixième de millimètre) obtenu pour les amplitudes plus importantes.** Cette observation permet de croire que la dissipation dans les assemblages peut être évaluée au moyen de simulations éléments finis avec une hypothèse de frottement de Coulomb selon par exemple la méthode proposée au chapitre précédent.

5.2.3 Couplage modal

Le choc appliqué au sommet de la poutre excite le second mode de la poutre assemblée comme on peut le voir sur la figure 5.5. En réalité si l'accélération du second mode est comparable au premier, le déplacement est bien plus faible car sa fréquence est bien plus élevée. Les courbes de fréquence et d'amortissement estimées du second mode sont tracées sur la figure 5.7.

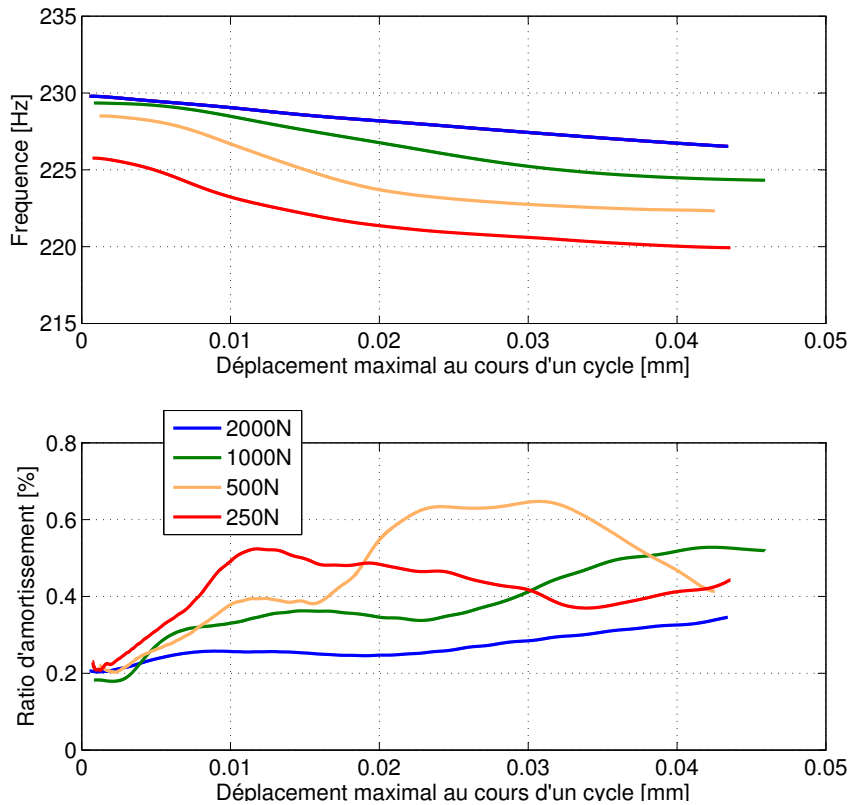


Figure 5.7 – Estimation des paramètres équivalents du second mode de la structure *lap-joint*.

L'énergie dissipée par cycle par frottement est d'autant plus grande que le déplacement est important. Ainsi, les taux d'amortissement mesurés sont très faibles. Cependant, la dépendance des paramètres à l'amplitude est non-négligeable bien que le déplacement du mode soit extrêmement faible. Il est donc probable que les courbes obtenues traduisent un phénomène de couplage. Les courbes identifiées, dans le cas où le second mode aurait été excité seul seraient probablement bien moins dépendantes du temps et donc de l'amplitude apparente. Ce phénomène est étudié dans le dernier chapitre de la thèse. Nous chercherons par la suite à faire en sorte de n'exciter qu'un seul mode du banc d'essai à la fois pour limiter le phénomène de couplage. Nous faisons l'hypothèse qu'un mode n'est affecté par un autre que si son amplitude est d'ordre au moins aussi importante. Dans le cas présent, cette hypothèse revient à dire que si les courbes du second mode sont fortement affectées par le premier mode, l'inverse n'est pas vrai.

5.2.4 Répétabilité

Une courte campagne d'essais a été menée afin d'estimer la répétabilité de la procédure de serrage. Pour cela, entre chaque mesure, les deux vis-écrous sont dévissés puis revissés l'une après l'autre. Les deux pièces sont constamment maintenues en contact, ce qui permet de garder un positionnement relatif des interfaces assez rigoureusement identique entre chaque mesure. Pour chacune des configurations de serrage, la figure 5.8 présente les courbes de fréquence et d'amortissement estimées pour quatre différentes mesures.

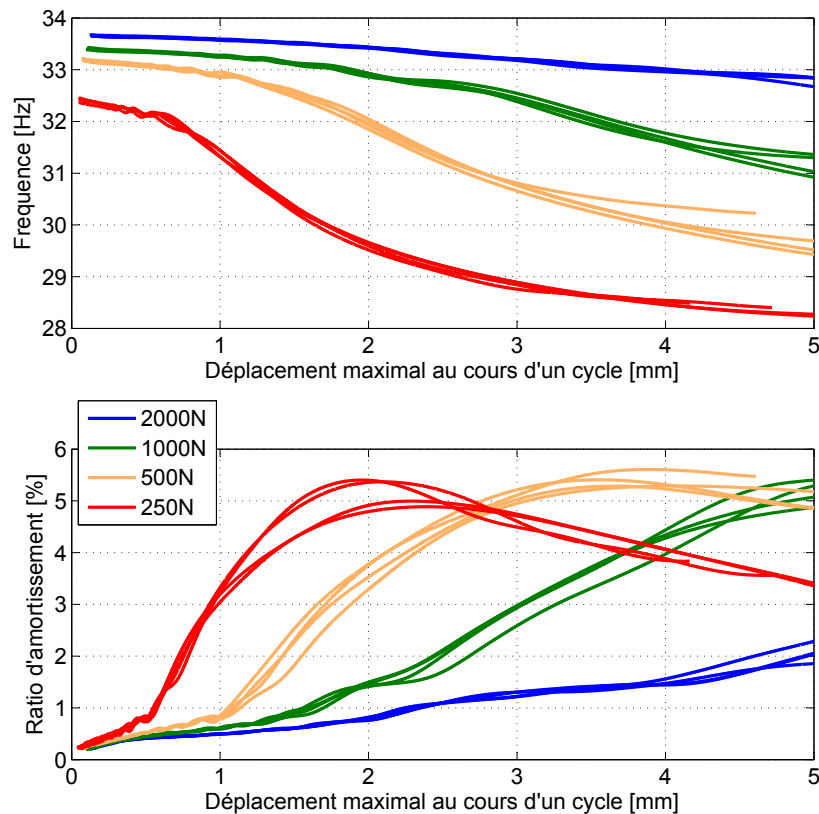


Figure 5.8 – Répétabilité de la procédure de serrage.

Les courbes estimées se superposent relativement bien, ce qui traduit une certaine répétabilité de la procédure de serrage. Les courbes correspondantes aux serrages 250N et 1000N font apparaître un léger saut ce qui, au moment des essais, n'avait pas suscité d'intérêt. Ce défaut est en partie expliqué dans la suite de ce chapitre.

5.2.5 Corrélation essais-calculs

Les résultats obtenus par la simulation pour la poutre de même géométrie sont rappelés sur la figure 5.9. Dans la simulation, la rotation de la poutre à la base

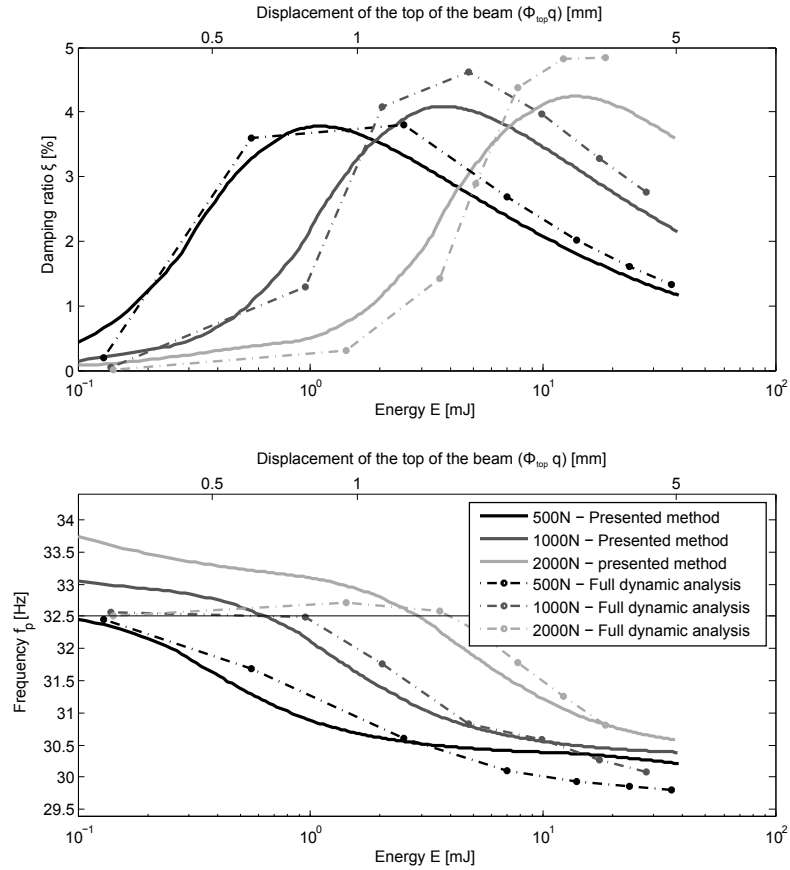


Figure 5.9 – Paramètres modaux équivalents calculé par la simulation.

est libérée. La condition de limite de rotation nulle est en réalité remplacée par une raideur de torsion ce qui permet de recalibrer les courbes de fréquences². Cette modélisation est physiquement valable car elle permet de tenir compte de la souplesse de l'encastrement. La corrélation entre essais et calculs est excellente si l'on tient compte du fait que le contact frottant est modélisé par une simple loi de frottement de Coulomb locale. En effet, les tendances d'évolutions des paramètres de fréquence et d'amortissement modaux sont vérifiées aussi bien en ce qui concerne la dépendance à l'amplitude que celle à l'effort de serrage. Aussi, la valeur maximale du taux d'amortissement ($\sim 4\%$) est tout à fait comparable à celle observée expérimentalement ($\sim 5\%$).

Les amplitudes pour lesquelles le taux d'amortissement maximal est atteint sont plus faibles dans le cas de la simulation qu'en réalité. Ceci peut s'expliquer par plusieurs raisons :

². Ce détail n'a pas été mentionné dans l'article pour en simplifier la lecture. L'assouplissement engendré n'a qu'une importance très relative au regard des résultats présentés.

- La raideur de torsion des vis a été négligée ce qui peut entraîner une légère sous-évaluation de la souplesse de la liaison.
- Le coefficient de frottement choisi $\mu = 0.3$ est trop faible. Cependant, dans le cas d'un contact acier-acier, cette valeur est au contraire considérée comme la limite supérieure.
- Les défauts de surface locaux d'ordre 1 ou 2 (échelle macroscopique) jouent un rôle non-négligeable. Nous supposons que la modélisation du frottement local par la loi de Coulomb permet de tenir compte des défauts d'ordre élevée. Cette hypothèse est certainement d'autant plus fausse que l'ordre de défaut est bas.

Une tentative a été menée afin d'évaluer cette dernière hypothèse. Pour cela, les défauts de surface de chacune des deux pièces ont été mesurés à l'aide d'un profilomètre optique puis intégrés dans un modèle éléments finis reprenant la géométrie réelle de chaque pièce. Dans le cas d'une approche analytique, Peyret a montré le rôle important que jouent les défauts d'ordre bas, voir [Pey12]. Le profil de la surface mesurée de l'un des deux spécimens est présenté sur la figure 5.10.

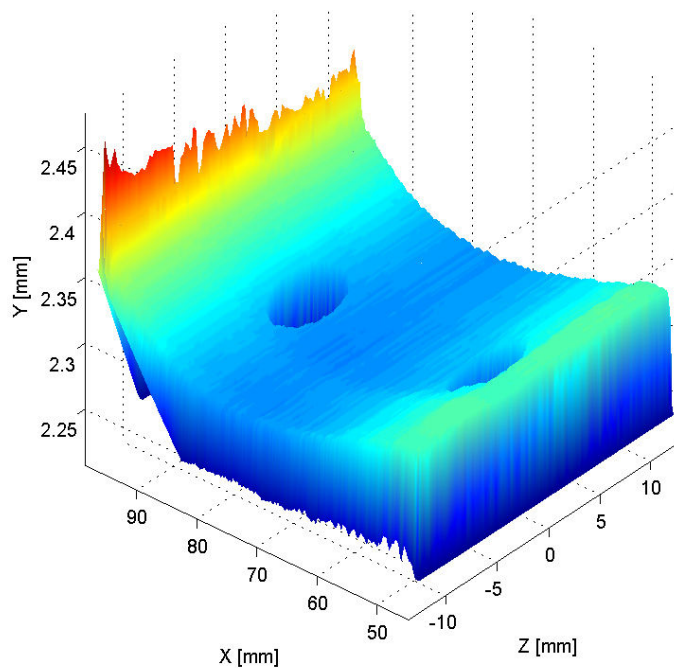


Figure 5.10 – Profil de la surface réelle.

Le défaut d'ordre 1 respecte une contrainte de planéité de 0.1mm. La surface de contact réelle est comprise entre les hauteurs 2.25 et 2.35 (la zone colorée en jaune et rouge correspond à la base de l'épaulement).

La résolution de ces mesures est d'un point tous les 0.1mm, dans les deux directions du plan de contact. Seul les défauts de formes d'ordres 1 et 2 ne doivent être retenus. Pour cela, un filtre gaussien 2D de coupure 0.8mm (ISO 11562) a été appliqué aux mesures.

La figure 5.11 présente un aperçu détaillé de la mesure filtrée.

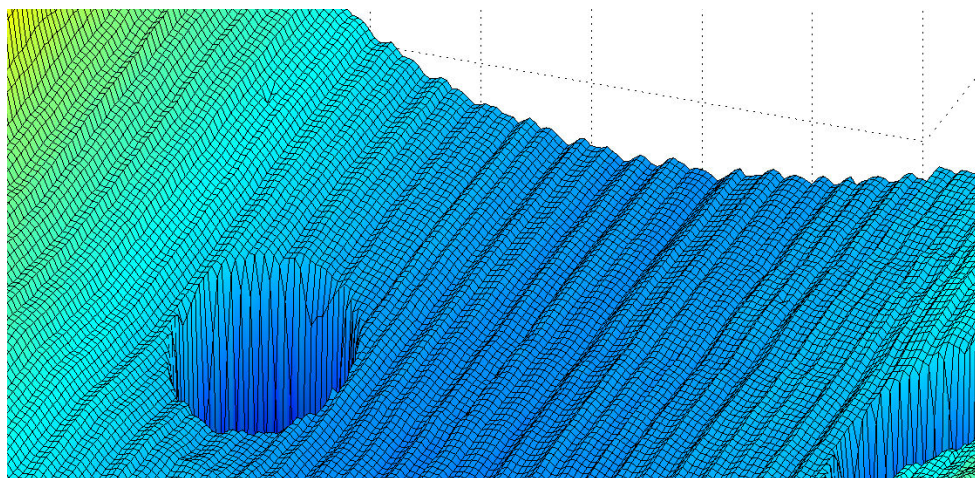


Figure 5.11 – Aperçu détaillé de la surface réelle - Défauts d'ondulations.

Cette figure fait apparaître l'ondulation (ordre 2) de la surface qui est due à l'opération d'usinage de la surface.

Le plan moyen de la surface réelle est défini. On interpole ensuite la mesure aux nœuds d'un maillage préalablement construit à partir de la géométrie nominale. La hauteur des points est finalement modifiée pour prendre en compte ces défauts. La distance moyenne entre deux nœuds du maillage est fixée à 0.2mm. Le maillage du modèle éléments finis ainsi modifié est présenté sur la figure 5.12 Par manque de temps, cette voie n'a pas pu fournir de

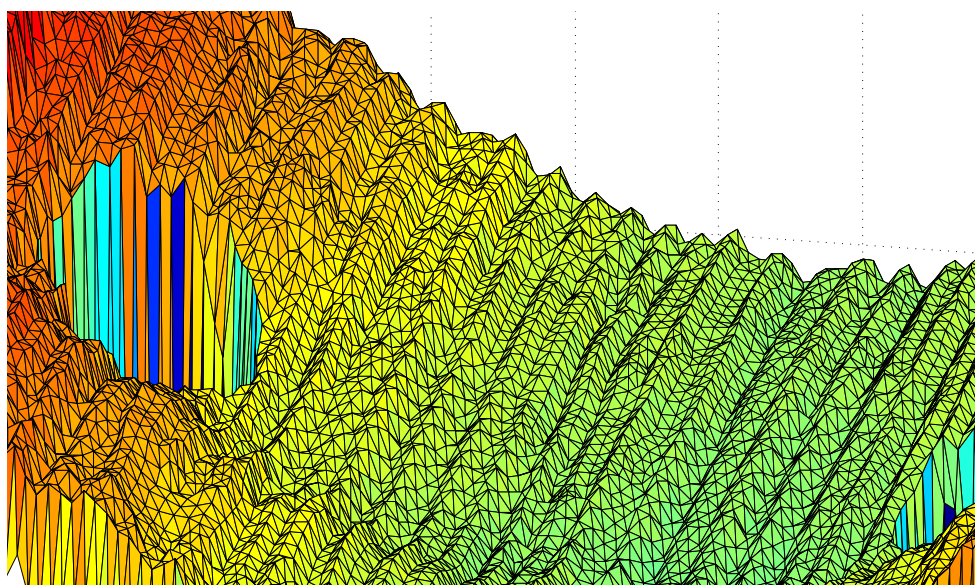


Figure 5.12 – Interpolation de la surface réelle par les points du maillage du modèle éléments finis.

résultats. Notons seulement que la convergence du calcul du problème semble

plus difficile à obtenir que dans le cas de la géométrie nominale. Cette piste reste intéressante pour étudier l'influence des défauts d'ordre 1 ou 2. Bien sur cette approche est exclue dans le cadre d'un processus de calcul systématique, tant son coût est important.

5.3 Banc d'essai de la liaison boulonnée SSS du SYLDA5

Le Cnes a mis a disposition du projet MAIAS une portion d'une liaison boulonnée du système SYLDA5 (SYstème de Lancement Double sur Ariane 5). Cette liaison appelée SSS contient le cordon pyrotechnique qui permet de séparer le SYLDA5 du lanceur avant le lancement de la charge utile basse. Cet assemblage boulonné est représenté dans la figure 5.13.

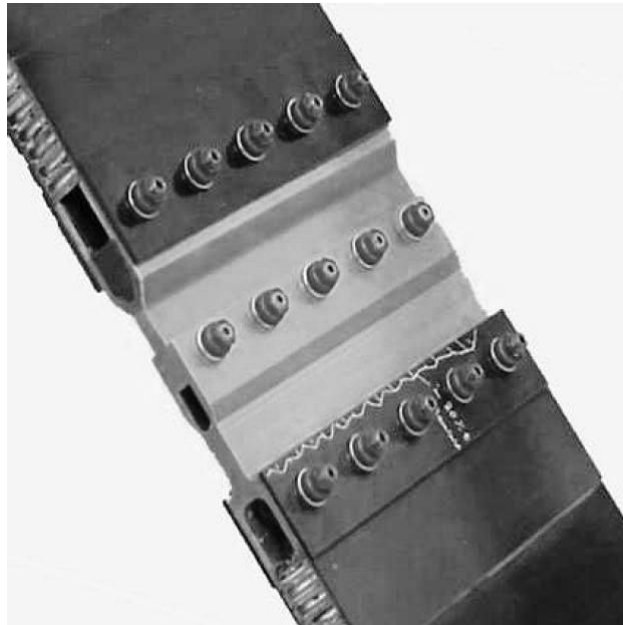


Figure 5.13 – Liaison boulonnée SSS du SYLDA5

Cette liaison a fait l'étude des travaux de Caignot [Cai09] qui l'a soumis notamment à un chargement de flexion pure. Ce chargement est, selon Caignot, le principal chargement que subit la liaison au sein du lanceur.

Le cas d'étude présent se rapproche d'un cas de flexion simple. Le montage est composé de la liaison et de masses d'inertie attachées aux deux extrémités libres de la poutre, comme représenté à la figure 5.1. Le premier mode de flexion de la poutre libre. Les conditions aux limites libres sont obtenues en suspendant la structure avec des câbles qui sont fixées à proximité des nœuds de vibration du mode étudié. De la même façon que pour l'étude précédente, un marteau de choc est utilisé pour exciter la structure. Le marteau est assez lourd et l'embout assez souple pour n'exciter quasiment que le premier mode.

Ainsi tout phénomène de couplage est à peu près exclu. Le décrément de la structure libre est mesuré à l'aide de deux accéléromètres placés au centre de la poutre.

Pour cette étude, trois configurations de serrage sont considérées. Les cinq vis au centre de la poutre sont serrées au tournevis dynamométrique avec des couples de 1Nm, 3Nm puis 4Nm (une erreur de manipulation a conduit à la perte des mesures à 2Nm). La figure 5.14 présente les courbes des paramètres modaux équivalents estimés.

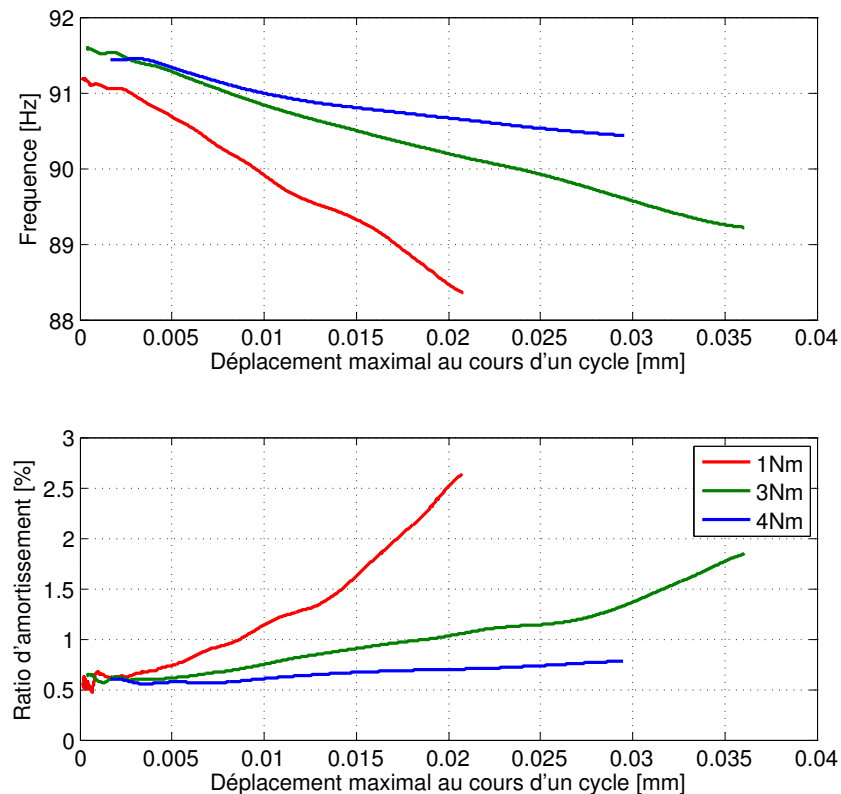


Figure 5.14 – Paramètres modaux équivalents identifiés.

La liaison SSS présente des caractéristiques d'évolution de la fréquence et de l'amortissement tout à fait similaire à celle de la liaison précédente. Aussi cette analyse paramétrique montre une dépendance au serrage comparable. Le taux d'amortissement tend vers une valeur autour de 0.5% pour les faibles amplitudes. Cette valeur, relativement élevée, est en partie due au matériau en nid d'abeille qui compose la poutre. Ce type de composite possède un amortissement intrinsèque plus important que celui des métaux.

5.4 Banc d'essai *lap-joint* en H

5.4.1 Géométrie - conditions et moyens d'essais

Le banc d'essai *lap-joint* en H est composé de masses sismiques et d'une plaque assemblée par une liaison composée de six boulons. Cette structure est conçue pour charger la liaison de deux manières différentes : selon un chargement de torsion axiale et un chargement de flexion. Une photo du montage est donnée sur la figure 5.15.



Figure 5.15 – Banc d'essai *lap-joint* en H.

Les poutres sont en acier. La structure est assemblée par deux boulons M6 au centre de la liaison et quatre boulons M4 à proximité des arrêtes. Le serrage est assuré au moyen de clefs et de tournevis dynamométriques. Les couples de serrage appliqués sont respectivement de 15 Nm pour les boulons M6 et de compris entre 0.5Nm et 2Nm pour les boulons M4. Les masses sismiques sont collées et serrées avec des boulons M10 à chaque extrémité de la structure. Le serrage des boulons M10 est réalisé avec des couples largement supérieurs que ceux de la liaison. Les interfaces de contact avec les masses sismiques sont collées, ce permet d'assurer une rigidité et une dissipation très faible dans cette partie de l'assemblage. Les dimensions de la structure sont données en annexe.

Les deux premiers modes de cette structure sont envisagées. Une analyse modale numérique à l'aide d'un modèle éléments finis permet de calculer les formes modales attendues, voir figure 5.16. L'amplitude du champ de déplacement est représenté du blanc (pas de déplacement) au noir (déplacement maximum).

Les deux premiers modes de la structure ont deux nœuds de vibrations communs aux lieux où les lignes vibratoires (en pointillés sur la figure) se croisent.

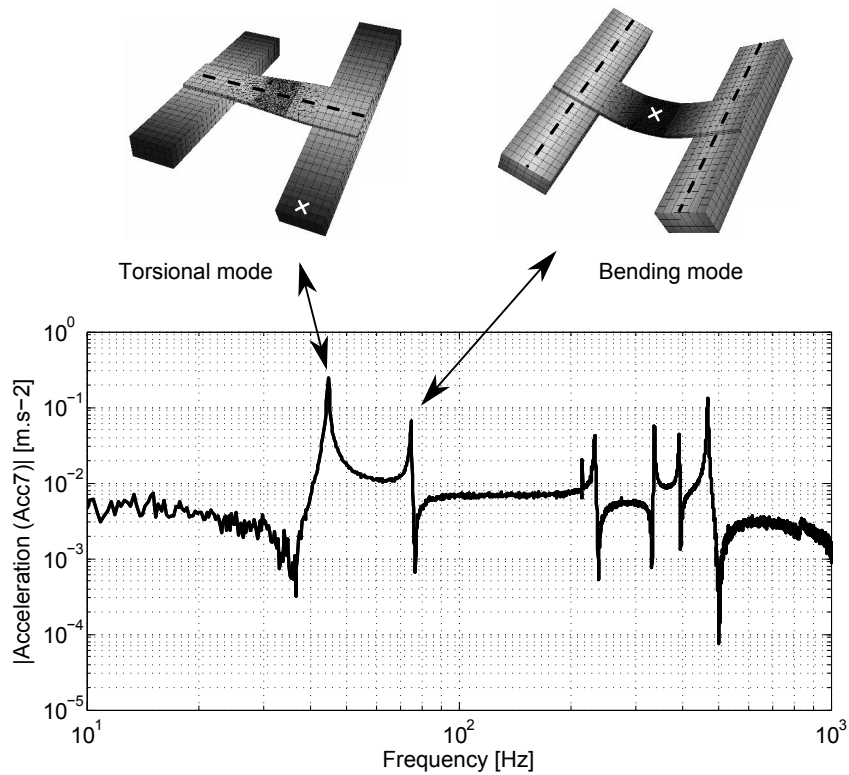


Figure 5.16 – Réponse impulsionnelle.

Ainsi les conditions aux limites libres peuvent être obtenues en suspendant la structure à l'aide de câbles en nylon en ces points. Les mouvements du banc d'essai sont mesurés à l'aide de sept accéléromètres le long de la structure comme représenté sur la figure 7.5.

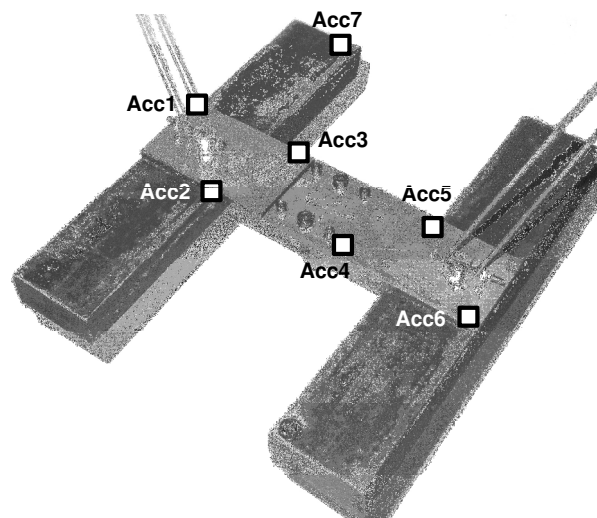


Figure 5.17 – Moyens d'essais.

5.4.2 Répétabilité

Le serrage des vis M6 est maintenu à l'aide d'écrous JPB system spécialement réalisés pour le projet MAIAS. Ces écrous sont conçus afin de ne pas pouvoir se dévisser. Une photo de ces écrous est présentée sur la figure 5.18.

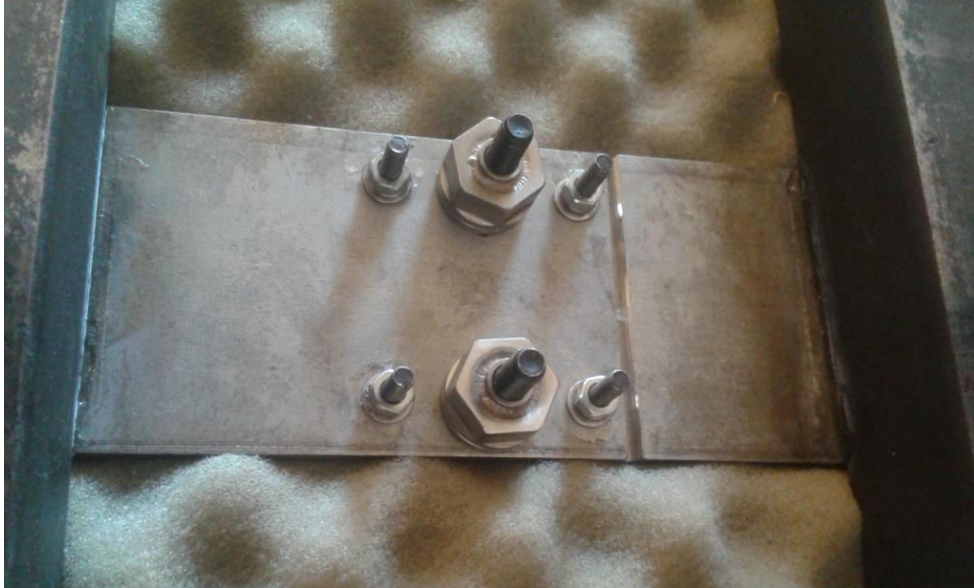


Figure 5.18 – Écrous JPB system.

Les têtes de vis M6 qui ne sont pas démontées³ sont maintenues par un point de colle. Les vis M4 sont équipées de rondelle Grower de manière à empêcher le desserrage du montage. Ainsi, pour cette expérience, le risque de dé-serrage des vis est particulièrement limité. Pour autant, les mesures ont permis de mettre en évidence un phénomène *d'adaptation* de la structure juste après le montage.

La figure 5.19 présente les paramètres du mode de flexion identifiés aux premier, second, cinquième et dixième chocs sur la structure. Les courbes estimées au premier choc diffèrent assez largement des suivantes. Les courbes se stabilisent ensuite vers une position d'équilibre. Cette observation peut s'expliquer par une adaptation de la structure à ses conditions initiales de montage. Smallwood fait état d'une observation similaire [SGC00]. Selon lui, le mauvais alignement des éléments de l'assemblage peut donner lieu à une répartition de la pression de contact, ce qui pourrait expliquer la différence notable d'amortissement mesuré ici. Il est aussi possible que les écrous se déserrant légèrement lors du premier choc. Ce phénomène n'est pas systématique et la figure 5.19 présente le cas le plus flagrant de ce phénomène. Pour limiter l'effet d'adaptation, et au regard de la stabilisation qui semble s'opérer après quelques chocs, la structure est systématiquement choquée après le montage et avant les mesures présentées par la suite.

3. Le serrage des vis M6 est maintenu à 15Nm pour tous les essais

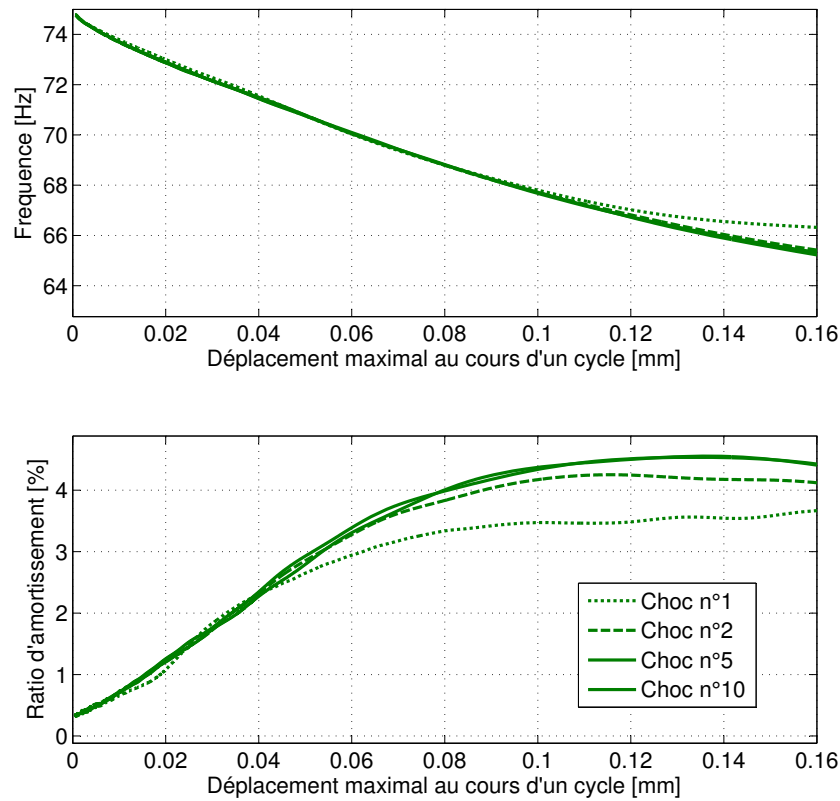


Figure 5.19 – Adaptation de la structure.

Caignot a réalisé une étude sur l'évolution de l'amortissement de la liaison SSS en flexion pure après 1, 15 puis 40 000 cycles, voir [Cai09]. Pour un faible nombre de cycles, Caignot observe le même phénomène d'adaptation. Pour un très grand nombre de cycles, ses travaux montrent le rodage de la liaison du à la modification de l'état des surfaces en contact. L'usure de la liaison du banc d'essai en H est indéniable, voir la figure 1 de l'introduction, cependant ce phénomène n'est pas étudié ici.

5.4.3 Résultats d'essais

Afin de limiter le phénomène de couplage modal, les modes de flexion et de torsion sont excités séparément. Cette opération peut être réalisée à l'aide d'un marteau de choc en frappant la structure en des points particuliers. La figure 5.16 présente les points de chocs particulier (indiqués par une croix blanche sur les déformées). Ces points sont placés au croisement du lieu de plus grande amplitude d'un mode et d'une ligne de vibration de l'autre. Les essais sont analysés tout de suite après la mesure afin de vérifier que le choc est porté à l'endroit adéquat.

La figure 5.20 présente les paramètres du mode de torsion en fonction du module du signal analytique estimé, pour les quatre configurations de serrage ainsi que dans le cas où seules les vis M6 assurent l'assemblage (indiquée 0Nm ; les vis M4 ont été retirés). Les paramètres sont donnés en fonction de la mesure au point Acc6.

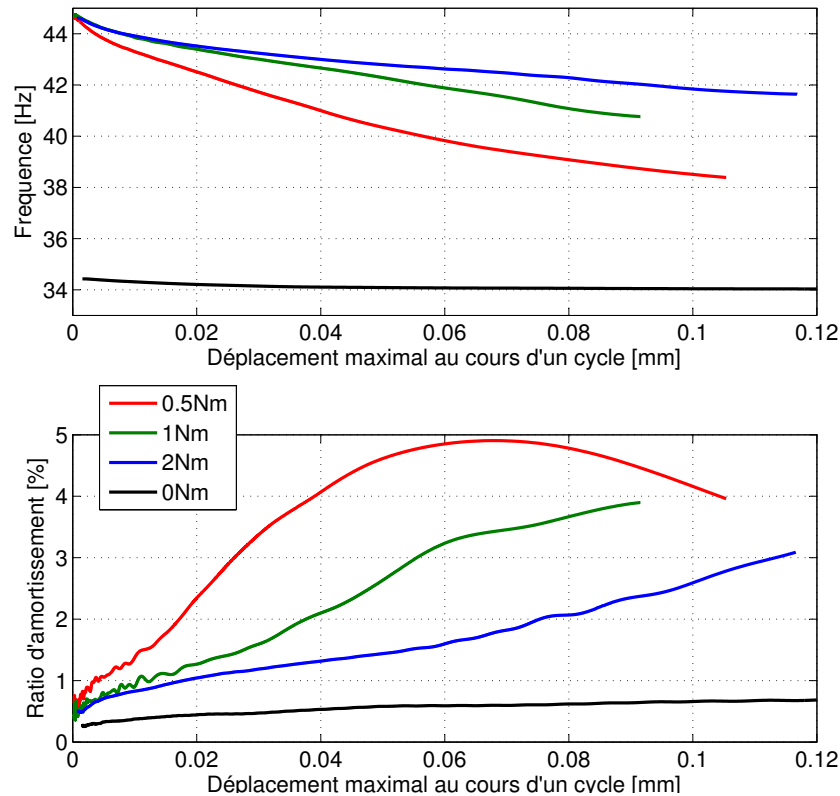


Figure 5.20 – Paramètres équivalents du mode de torsion.

La figure 5.21 présente les paramètres du mode de flexion en fonction du module du signal analytique estimé, pour les quatre configurations de serrage ainsi que dans le cas où les vis M4 ont été retirés.

Pour ces deux cas de charge, on observe un comportement similaire au cas de la poutre *lap-joint* encastree libre. Tout d'abord le ratio d'amortissement

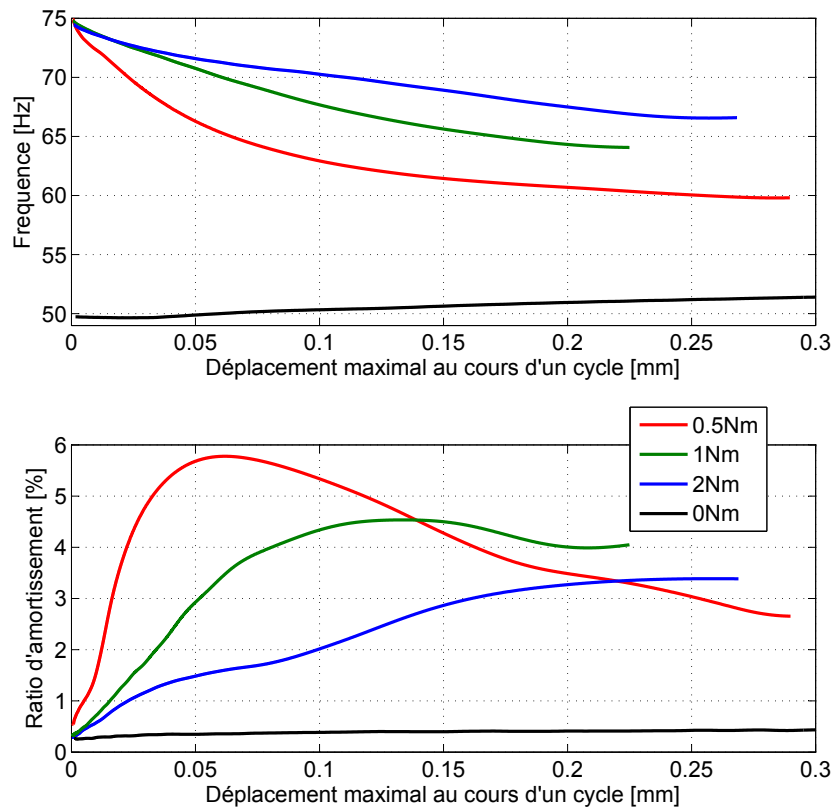


Figure 5.21 – Paramètres équivalents du mode de flexion.

estimé croît avec l'amplitude puis atteint éventuellement une valeur maximale avant de décroître. L'amplitude pour laquelle cette valeur maximale d'amortissement est atteinte est directement liée à la force de serrage : plus le montage est déserré, plus la dissipation est importante pour de faibles amplitudes. Aussi, la structure a un comportement d'autant plus assouplissant que le serrage est faible.

5.4.4 Dépendance de la déformée modale à l'amplitude

L'assouplissement de la liaison entraîne une variation de la déformée modale. Les figures 5.22 et 5.23 présentent la dépendance de la déformée à l'amplitude de vibration respectivement des modes de torsion et de flexion. La déformée modale est obtenue en calculant le module instantané du signal analytique estimé pour chaque capteur. Notons que seule la fondamentale du signal est conservée. Finalement la déformée obtenue est normalisée puis le signe de chaque point est adapté de façon à obtenir la forme attendue. Une erreur relative est aussi présentée. Celle-ci est obtenue en calculant la différence entre un vecteur de déformée moyen⁴ et la déformée instantanée.

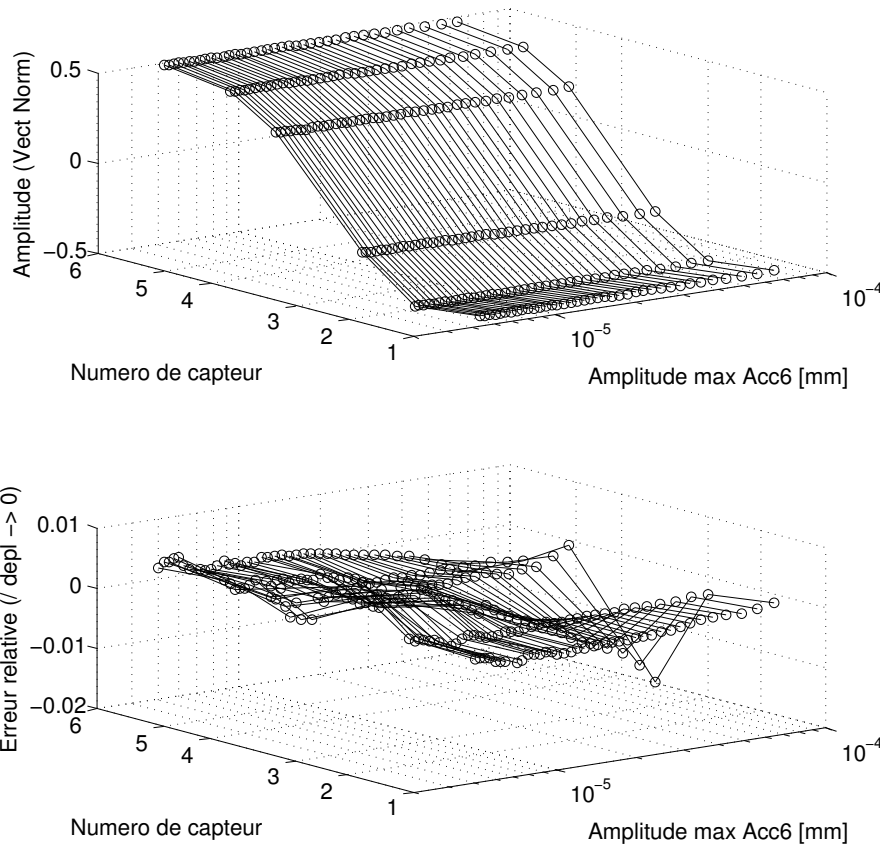


Figure 5.22 – Dépendance de la déformée du mode de torsion à l'amplitude.

Les variations de déformées modales sont d'un ordre de grandeur comparable pour les trois configurations de serrage présenté. On retrouve cependant le même type de comportement que précédemment, à savoir plus le montage est serré moins la déformée modale semble être affectée par la variation d'ampli-

4. Ce vecteur moyen est la première déformée de la décomposition en valeurs singulière de la mesure présentée.

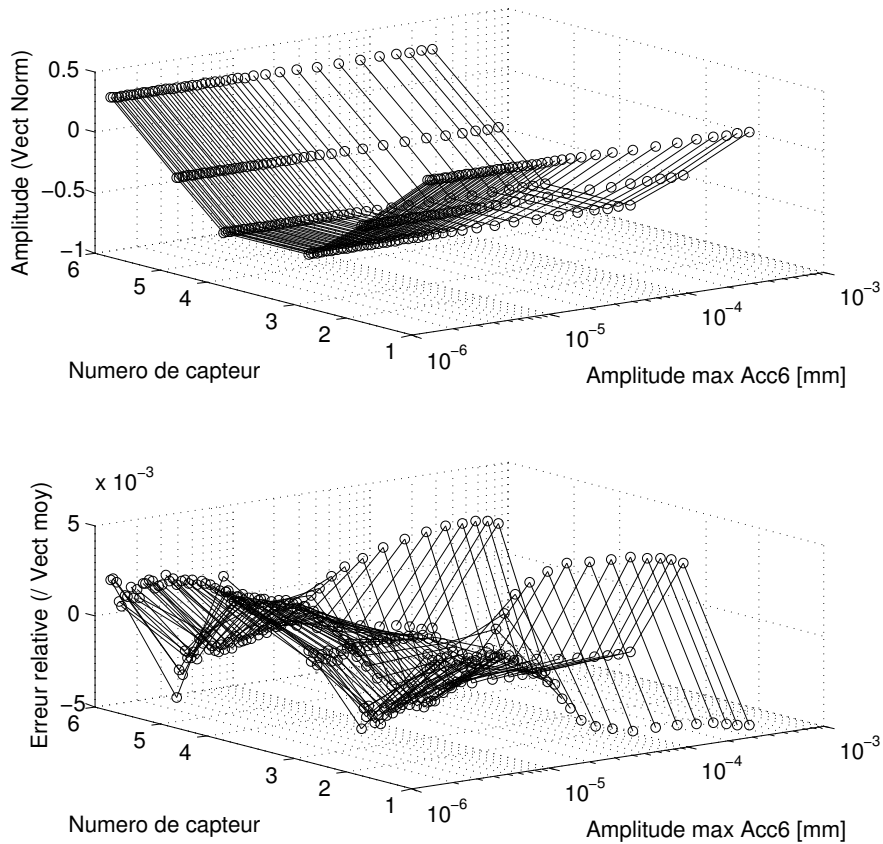


Figure 5.23 – Dépendance de la déformée du mode de flexion à l'amplitude.

tude. Dans le cas présenté, le serrage des vis M4 est de 1Nm.

Les figures 5.24 et 5.25 présentent une comparaison des déformées modales estimées à la plus faible et à la plus grande amplitude mesurée.

Ces figures font apparaître une variation relativement légère des déformées modales à l'amplitude. Cependant il est assez difficile d'interpréter ces résultats tout d'abord parce que seule la fondamentale du mode est retenue.

Une seconde batterie d'essais au pot vibrant a été réalisée avec notamment comme objectif d'évaluer le caractère non-linéaire de la structure. La structure est connectée à un pot vibrant électromagnétique avec une tige flexible au point de mesure 7. Un capteur de force est fixé entre la tige et la structure. La tige a une rigidité de flexion négligeable devant la raideur de la structure mais sa raideur en compression est suffisante pour appliquer des efforts importants. La masse du capteur de force et de la partie mobile du pot vibrant n'est pas négligeable au regard de la masse de la structure. Ainsi la structure est légèrement dissymétrique tout comme ses déformées modales. La figure 5.26 présente les fonctions d'accélérences (accélération/force (capteur 0)) obtenues à l'aide d'une excitation aléatoire de type bruit blanc. Chaque mode de la structure est ensuite excité séparément à l'aide d'une excitation mono-

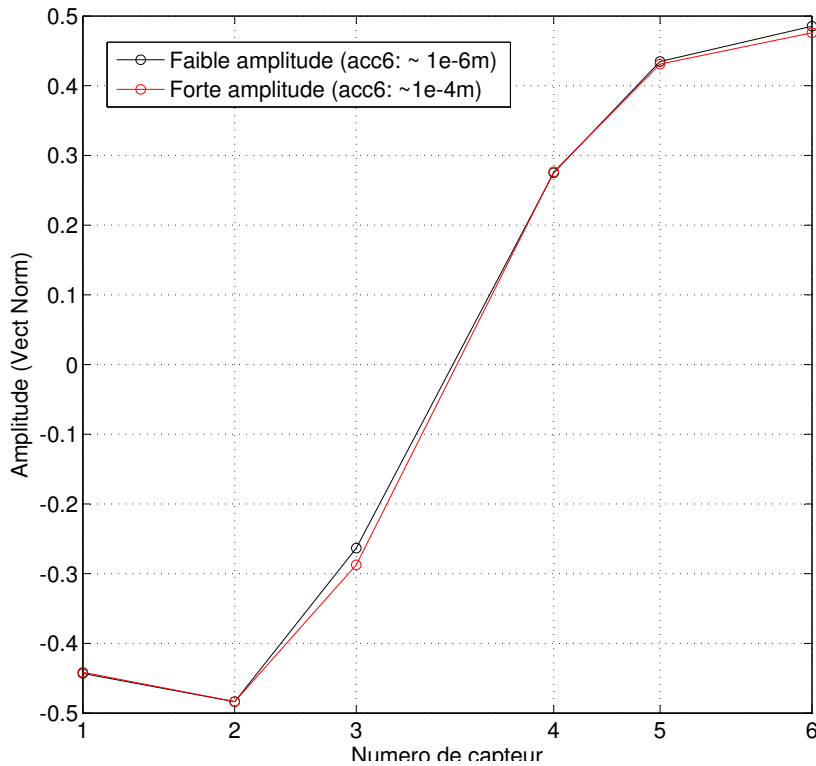


Figure 5.24 – Comparaison des déformées du mode de torsion à faible et grande amplitude.

harmonique. Les amplitudes de force employées permettent ici d’atteindre des amplitudes de vibration supérieures à celles présentées précédemment. Le comportement non-linéaire étant d’autant plus marqué que l’amplitude de vibration est grande, l’étude ainsi réalisée vise ainsi à valider le caractère faiblement non-linéaire des assemblages. La fréquence d’excitation est choisie légèrement inférieure au lieu de quadrature de phase de chaque mode⁵. Les figures 5.27 et 5.28 montrent quelques périodes des signaux d’accélération mesurés en régime établis.

La proximité immédiate d’anti-résonances explique la présence des déphasages importants entre les capteurs. Pour les deux modes, les signaux d’accélération contiennent un certain taux d’harmoniques. Notons néanmoins que les taux d’harmoniques auraient été nettement plus faibles si la mesure avait été faite en déplacement. On peut relever une certaine asymétrie par rapport à l’origine probablement engendrée par le caractère également asymétrique du contact unilatéral. Le taux d’harmonique (HR) de chaque signal d’accélération est calculé en estimant le rapport entre l’amplitude de crête du fondamental a_1 et la somme des quatre premières harmoniques $[a_2, a_3, a_4, a_5]$:

$$\text{HR} = \frac{\sum_{i=2}^5 a_i}{a_1} \quad (5.1)$$

5. Initialement, l’idée était d’avoir un rapport entre mesure et bruit de mesure de la force d’excitation qui ne soit pas trop faible

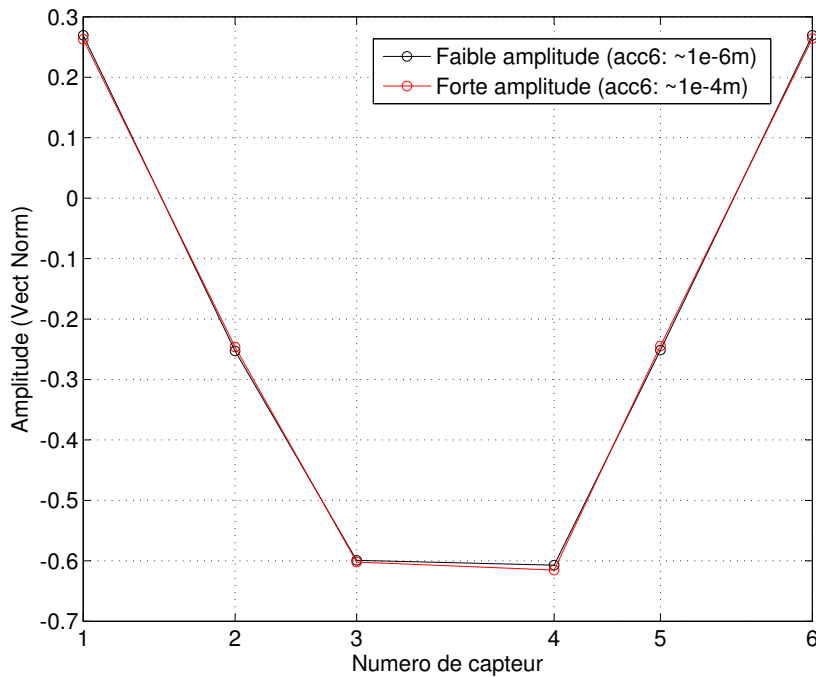


Figure 5.25 – Comparaison des déformées du mode de torsion à faible et grande amplitude.

Le tableau 2, montre les taux d'harmonique calculés pour les différents capteurs.

n°accéléromètre	Mode de torsion	Mode de flexion
1	6.64 %	3.10 %
2	5.27 %	2.62 %
3	19.04 %	2.50 %
4	17.39 %	4.87 %
5	8.02 %	6.25 %
6	5.63 %	2.21 %
7	2.05 %	1.28 %

Tableau 2 : taux d'harmoniques mesurés pour chaque capteur

Les accéléromètres 3 et 4, placés au dessus de la zone de contact, ont des taux d'harmoniques bien supérieurs aux autres. Inversement, le point de mesure 7, qui est le plus éloigné de la liaison, présente les taux d'harmoniques les plus faibles. Les taux d'harmoniques sont globalement d'autant plus importants que la mesure est *proche* de la liaison. Bien que le contact soit un phénomène fortement non-linéaire, les mouvements de hautes fréquences locaux sont filtrés à l'échelle globale de la structure. On peut aussi voir ici une justification du paradoxe plusieurs fois mentionné précédemment. L'hypothèse de faible-non-linéarité est donc adaptée dans le cadre d'une approche de type *macro-modèle*.

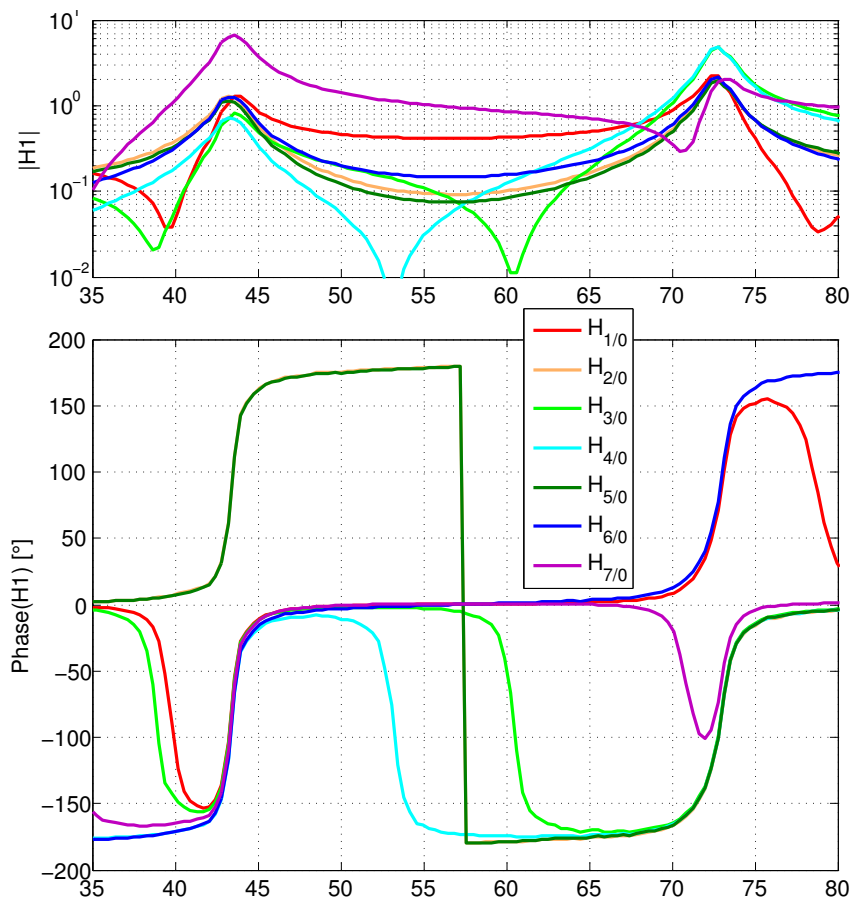


Figure 5.26 – Fonctions d'accélérences aux différents points de mesure.

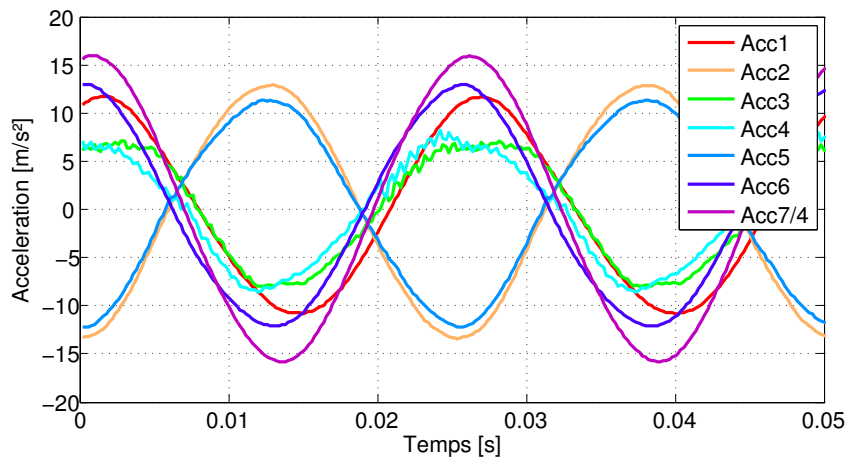


Figure 5.27 – Signaux temporels d'accélérences mesurés pour le mode de torsion en régime stabilisé.

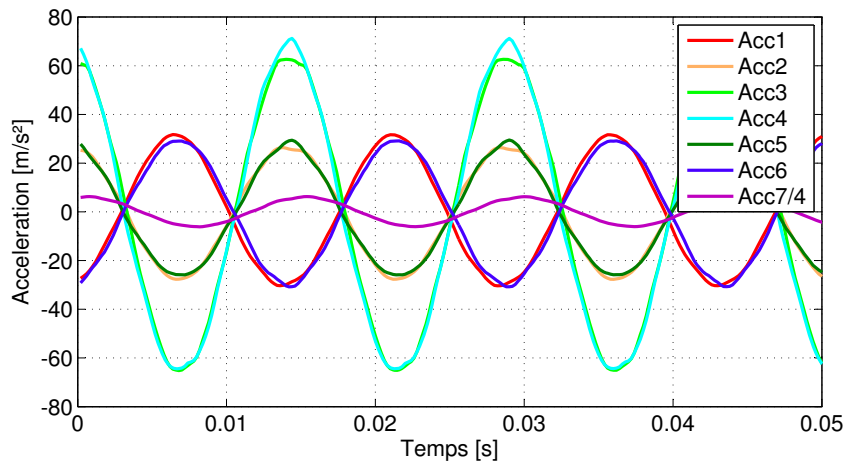


Figure 5.28 – Signaux temporels d'accélérations mesurés pour le mode de flexion en régime stabilisé.

5.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a présenté l'étude expérimentale de petites structures appelées bancs de caractérisations. Ces systèmes élémentaires ont permis quelques analyses paramétriques.

Nous avons confirmé que le rôle du phénomène de glissement partiel est prépondérant dans le comportement dissipatif des assemblages. Cette affirmation a été prouvée en comparant le comportement dynamique d'un assemblage à une structure monolithique de même géométrie.

Le rôle de la force de serrage est clairement identifié. Notons que la force limite qui permet d'initier de glissement est, selon le modèle de Coulomb, le produit du coefficient de glissement et de la force normale (la force de serrage). Autrement dit, le rôle du coefficient de glissement⁶ sur la dynamique est certainement comparable à celui du serrage. L'utilisation de procédé de traitement de surface est donc de nature à améliorer (ou à détériorer) le comportement dynamique d'une structure assemblée.

L'influence des défauts d'ordres 1 et 2 n'a pas pu être démontré.

L'hypothèse de faible non-linéarité est validée par la faible présence d'harmonique des réponses mesurées, par l'assouplissement modéré, ainsi que par la faible dépendance de la déformée modale à l'amplitude.

Les essais de répétabilité semblent indiquer une adaptation des assemblages aux conditions initiales.

6. Rappelons qu'on utilise cette définition moyenne permettant de simplifier le comportement réel des interfaces dont la force est déterminée par les défauts de surface.

Bibliographie du chapitre 5 : Essais de caractérisation

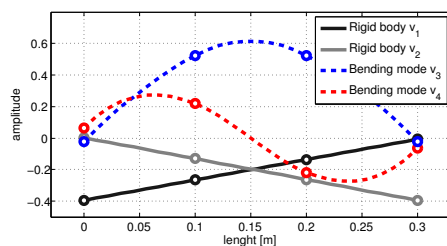
- [Cai09] A. Caignot. *Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Cachan, 2009.
- [Pey12] N. Peyret. *Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique*. PhD thesis, Université Paris-Est, October 2012.
- [SGC00] D.O. Smallwood, D.L. Gregory, and R.G. Coleman. Damping investigations of a simplified frictional shear joint. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (US); Sandia National Labs., Livermore, CA (US), 2000.

Chapitre 6

Réduction des assemblages sur l'espace des sollicitations principales

Sommaire

6.1	Préambule	150
6.2	Introduction	152
6.3	Reduced order formulation	153
6.4	Identification of the joint rheology	155
6.4.1	The test bench structure	155
6.4.2	The joint mode basis	156
6.4.3	Reduction on macro-models	157
6.4.4	Identification of the macro-models	158
6.4.5	Alteration of the mode shape	159
6.4.6	Inclusion of the macro-models in the whole model	160
6.5	Example: clamped-free jointed beams	161
6.5.1	The whole structure	161
6.5.2	Identification of the bolted-joint	162
6.6	Results and discussion	167
6.6.1	ROMs versus FULL order model	167
6.6.2	Validity of the PJSB	171
6.7	Conclusion	173
	Bibliographie du chapitre 6	174



Résumé

Ce chapitre présente un principe de synthèse de modèle basé sur l'utilisation d'une base locale. Les éléments de cette base appelés sollicitations principales sont associés à des rhéologies de Iwan.

6.1 Préambule

Dans le chapitre 3, la liaison est définie comme un sous-domaine légèrement étendu autour des zones de contact entre deux pièces d'assemblages. La liaison est vue comme un composant dont le comportement peut être étudié en lui appliquant différents cas de charges. L'étude de bancs d'essais de caractérisation a permis d'observer le comportement des liaisons lorsqu'elles sont soumises à différentes sollicitations-types (traction, flexion, torsion, etc.). Si les mouvements d'une structure sont décomposés sur l'espace des modes propres, alors ces modes peuvent être vus comme autant de cas de charge appliqués à une liaison donnée.

Prenons pour exemple le cas d'une grande structure qui possède M modes dans la gamme de fréquence d'intérêt. Cette structure est assemblée par L liaisons. Si on cherche à fournir un modèle *à priori* de la structure en projetant la dynamique sur l'espace des modes, alors le nombre de cas de charge à considérer est au moins de $L * M$. Ce nombre ne tient pas compte des couplages modaux. En pratique, il n'est possible de construire le modèle d'une grande structure assemblée qu'au travers d'une analyse modale expérimentale *à posteriori*.

Le domaine d'une liaison ne représente qu'une très faible portion de celui de la structure entière. Ainsi, **les modes d'une grande structure peuvent être localement colinéaires à l'échelle d'une liaison d'assemblage**. Les modes sont donc susceptibles de solliciter une même liaison de manière identique. Deux modes localement colinéaires sont donc couplés.

Par ailleurs, puisque les modes sont localement colinéaires, **il existe une base de dimension N inférieure à celle de la base des modes propres et suffisante pour engendrer l'ensemble des mouvements de la liaison**. Ce chapitre est basé sur cette assertion. Nous proposons de projeter le déplacement d'une liaison sur ce sous-espace local de faible dimension. La base de ces sollicitations élémentaires permet de coupler les modes, ce qui est légitimement attendu. Si on suppose que les L liaisons ont la même géométrie, le nombre de cas de charge à considérer est réduit à N : Le calcul des éléments de la base principale est basé sur le principe de décomposition en valeurs singulières. Considérons, sous hypothèse de faible non-linéarité, la matrice des modes propres de la structure complète :

$$\begin{array}{c} \text{DDLs} \end{array} \begin{array}{c} \text{Modes propres} \\ \left[\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^1 & \phi_2^1 & \dots & \phi_M^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 & \dots & \phi_M^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^L & \phi_2^L & \dots & \phi_M^L \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right] \end{array} \quad (6.1)$$

On regroupe ensuite les déformées modales de chacune des liaisons dans la matrice \mathbf{A} , dont le nombre de lignes est le nombre de degré de liberté géométrique des liaisons (commun pour toutes) et le nombre de colonnes est $L * M$.

$$\mathbf{A} = [\phi_1^1 \dots \phi_M^1, \phi_1^2 \dots \phi_M^2 \dots \phi_1^L \dots \phi_M^L] \quad (6.2)$$

Les N premières valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ sont les sollicitations principales. Notons qu'il est nécessaire de retirer les mouvements de corps rigide de cet espace au préalable. Ce point est explicité dans le chapitre.

Il faut aussi souligner que **les modèles en fréquences et amortissements équivalents ne permettent de rendre compte que du cas d'une excitation mono-harmonique**. C'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser le modèle de Iwan pour traiter le cas général. Les N mouvements généralisés sont donc associés à N oscillateurs de Iwan. Le modèle est ensuite recalé sur un banc d'essais expérimental ne comportant que la liaison, à partir des courbes de fréquence et d'amortissement équivalent. Ce dernier point est abordé dans ce chapitre et approfondi dans le chapitre 6.

Ce travail est paru en mars 2014 dans la revue *Journal of Sound and Vibration* sous le titre "*Nonlinear Model Order Reduction of Jointed Structures for Dynamic Analysis*" et possède un DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.11.039>, [FCD14]. La forme du manuscrit a été conservée, c'est la raison pour laquelle ce chapitre est rédigé en anglais.

6.2 Introduction

Reduced Order Models (ROM) are generally built in order to make simulation processes faster. These methods are very useful as a part of an optimization process using a high fidelity Finite Element (FE) model parametrized by design variables or as a part of the acceleration process for simulations with a high number of Degrees of Freedoms (DoFs). For an optimization, it is interesting to build a reduced parametric model of a small size, while for an acceleration process, design parameters are useless but accuracy is the main goal. We focus on the framework of optimization even if this paper refers to the modelling step only.

Numerous methods are available to achieve this goal. We can classify the model reduction methods into two groups : the first one aims to provide a basis, spanning a subspace which belongs to the space of solutions, to link the variables of the full order models to a smaller number of variables. Such methods are often called Ritz methods or "kinematic methods" (KM). The second group aims to identify a macro-model able to provide accurate results for selected Dofs of the full order models. We will call these methods "identification methods". Sometimes, in an optimization framework, both methods are used : the first one to reduce the number of variables and the second one to build a ROM which is parametric, see for example Filomeno et al. [FCBKL08]. To reduce the complex systems constituted with several components, it is rather commonplace to reduce each component with KM and to make the synthesis of the system, see for example Craig [BC68] or Guyan [Guy65]. The way to build the Ritz basis has been widely discussed in the previous work and we can consider two methods : modal approaches and optimal approaches based on proper orthogonal decomposition, see for example Balmès [Bal96].

Non-linear problems involve specific model order reduction techniques, see for example Kerschen et al. [KPGV09]. In this paper, we focus on localized non-linearities. For such kind of problems, there are dedicated methods such as the one developed by Amsallem et al. [AZF12]. In this paper, we are specifically interested in jointed structures which have non-linearities localized at the joints. These joints cause energy dissipation due to micro-slip in contact and softening effects that play an important role in the dynamic behavior of the global structure, see [PDCA10], [GN01].

Our purpose is to improve the methods developed by Quinn [Qui12] and Segalman [Seg10] by giving an hybrid ROM formulation which is based on both experimental and numerical identification. Since the actual physics taking place at the joint interfaces is very complex [WO08], high fidelity FE models of joints are generally hardly predictive. The low frequency dynamic of the local domain of a joint is proposed to be approximated in a low-dimensional subspace generated by macro-models (also called gray boxes or low-order models) which are experimentally identified. This local basis couples together the global modes of the structure which is an important feature of non-linear structures. The linear part of the structure is assumed to be well described by FE model.

Governing equations and principles are detailed in the two first sections. Then the ROM formulation is investigated on a jointed structure. Results are presented and compared to the full order models and assumptions are discussed in the last section.

6.3 Reduced order formulation

We consider a structure Λ fitted with one or several joints subjected to a dynamic excitation. Using a FE formulation, the non-linear dynamic equation of the problem can be written as :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{f}_e \quad (6.3)$$

where \mathbf{M} and \mathbf{K} respectively denote the mass and stiffness matrices. \mathbf{x} is the nodal displacements vector, \mathbf{f}_e the external forces and \mathbf{f}_c denotes the nodal contact and friction non-linear forces which may depend on internal variables \mathbf{r} .

The whole structure can be split into two substructures as shown in figure 6.1 :

- An assumed linear domain Λ_b .
- The domain Λ_a of the joints, that is submitted to the external bolt clamping forces and the non-linear contact forces $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_{\text{clamping}} + \mathbf{f}_{\text{contact}}$ and the external forces \mathbf{f}_e . In the following developments, we will only consider one joint but the extension to several joints is straightforward.

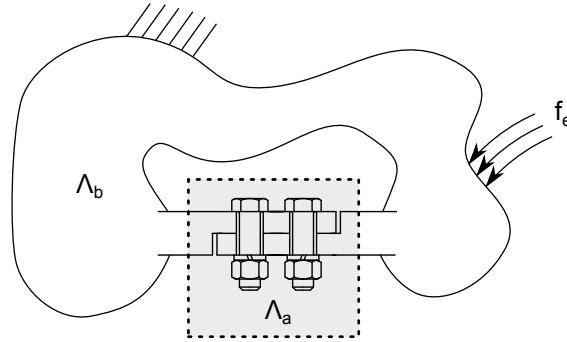


Figure 6.1 – The sub-structuring - It is not carried out the same way as for the Craig-Bampton reduction. Actually, the domain Λ_a is not only limited to the non-linear DoFs, but extend to the region *around* the joint ; Λ_b is assumed to behave linearly.

According to this sub-structuring, equation 6.3 can be written as :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_a \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{f}_e \quad (6.4)$$

Coupled terms of the mass matrix are neglected here since they are often neglected by numerical integration in FEM but these terms can also be kept. The sub-structuring presented in figure 6.1 is not carried out the same way than for Craig-Bampton reduction [BC68]. Actually, the Λ_a domain is not only limited to the non-linear Dofs, but extend to the region *around* the joint. Non-linearities in real joints have a local extent and thus Λ_a contains both non-linear and linear elements. In practice, the Λ_a domain must also be extended to the nodes where the external forces are applied but afterwards Λ_a refers only to the "joint domain".

The reduction process of the presented method mainly relies on the following assumption :

Assumption 1 : The displacements \mathbf{x}_a in the joint domain Λ_a , generated by the low frequency dynamic of the whole structure can be approximated by a small size basis \mathbf{V} referred as the "Principal Joint Strains Basis" (PJSB) :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{V}\mathbf{p} \quad (6.5)$$

Since bolted joints must ensure the integrity of structures, they are generally not designed to allow macroscopic motions. As a result, even if joints shows softening effects that can distort the mode shapes of the structure, the local basis \mathbf{V} is still generally suitable to generate the principal movements that the joint may carry out. The definition and the use of the basis \mathbf{V} will be justified in the following section. The vector \mathbf{p} denotes the generalized coordinates for amplitude of joint modes. The whole displacement vector is reduced to :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x}_b \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Upsilon} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x}_b \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Of course, to reduce the size of the problem, a Ritz basis can be built in the linear domain Λ_b too. Any KM can be considered. In this paper, the displacement in domain Λ_b is let unreduced since it is not the point of this work. The projection of equation 6.3 on the generalized coordinates yields :

$$\boldsymbol{\Upsilon}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Upsilon} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{pmatrix} + \boldsymbol{\Upsilon}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Upsilon} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{f}_c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Upsilon}^T \mathbf{f}_e \quad (6.7)$$

The mass matrix in the final set of generalized coordinates is :

$$\boldsymbol{\Upsilon}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{M}_{aa} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{bb} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

The stiffness matrix in the final set of generalized coordinates is :

$$\boldsymbol{\Upsilon}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{K}_{aa} \mathbf{V} & \mathbf{V}^T \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} \mathbf{V} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

6.4 Identification of the joint rheology

6.4.1 The test bench structure

Theoretically, the "best" Ritz base for \mathbf{V} should be obtained using optimal approaches based on Singular Value Decomposition (SVD). The obtained singular vectors could be applied to the joint using a high fidelity FE. However, these numerical models are generally hardly predictive since the actual physics taking place at the joint interfaces is very complex and hard to update. Indeed, there is many multiscale parameters and uncertainties that prevent an accurate modelling of the joints. Main characteristics can still be extracted from such simulations and adapted methods allows a fast computing of these models, see [FCD13].

Rather than using numerical simulations, the joint should generally be identified onto an experimental rig. Besides, the behavior of the joint shall be extracted regardless of the other non-linearities that may exist in the whole structure. The generic test bench that is proposed here consists of the same bolted joint Λ_a in the whole structure fitted with two seismic weights at the free ends as depicted in figure 6.2.

The use of macro-models to model this kind of elementary structure remains a challenge since its behavior depends on the direction of the load it undergoes. Segalman [Seg02] uses parallel series Iwan systems to model the behavior of lap-type joints under axial load. Song [SHM⁺04] and Ahmadian [AJ07] have developed macro-models that are able to reproduce the bending behavior of jointed beams. **The identified joint macro-models are always implicitly combined with a loading/strain direction.** The PJSB contains the principal strains that the joint undergo.

We impose three criteria to determine this basis :

- This basis should properly generate the low dynamic movements of the structure Λ in the local domain Λ_a . Thus this basis should especially include the rigid motions of the joint.
- The contact forces should ideally be uncoupled in \mathbf{V} .
- The identification of the elements of \mathbf{V} using a test bench which is only composed of the studied joint should be experimentally feasible.

The reduction formulation is based on the intuition that the design of a test bench can be such that its first modes under free-free conditions satisfy the criteria mentioned above.

The generic setup pictured in figure 6.2 is based on practical facts : first, the free-free conditions are easily reproducible in experimental conditions and give a very low additional damping compared to, *e.g.*, clamped conditions. Otherwise, the added weights act like seismic masses and lower the natural frequencies of the bench structure and so a larger modal amplitude can be obtained.

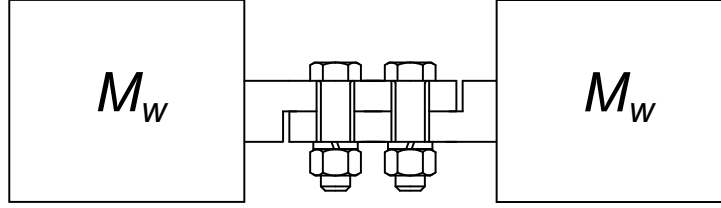


Figure 6.2 – The identification of the joint behavior is performed on an experimental test bench. This bench contains the same bolted joint as in the whole structure fitted with two seismic weights at the free ends.

6.4.2 The joint mode basis

In this section, we consider the free dynamic of this bench structure. Its mass and stiffness matrices, respectively \mathbf{M}_{aa}^e and \mathbf{K}_{aa}^e , are the same of the whole matrix minus the Boundary Terms :

$$\mathbf{M}_{aa} = \mathbf{M}_{aa}^e + \mathbf{M}_{aa}^{BT} \quad \text{and} \quad \mathbf{K}_{aa} = \mathbf{K}_{aa}^e + \mathbf{K}_{aa}^{BT} \quad (6.10)$$

The boundary elements are the elements between domain Λ_a and Λ_b . Note that the forces between these two domains are only applied through these elements.

The free dynamic of the test bench is non-linear :

$$(\mathbf{M}_w + \mathbf{M}_{aa}^e)\ddot{\mathbf{x}}_a + \mathbf{K}_{aa}^e \mathbf{x}_a + \mathbf{f}_c = \mathbf{0} \quad (6.11)$$

In this equation, the mass of the seismic weights is taken into account thanks to the mass matrix \mathbf{M}_w . \mathbf{V} is defined as the first solutions of the free motion of the test bench for very low amplitude (when all the sliders are stuck) :

$$(\mathbf{K}_{aa}^e + \mathbf{K}_j - \Omega_a^2(\mathbf{M}_w + \mathbf{M}_{aa}^e))\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (6.12)$$

Where \mathbf{K}_j denotes the Jacobian matrix of \mathbf{f}_c at $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ which correspond to the linearization of the contact law for very low vibrational amplitude. As a result, the contact force can be decomposed according to :

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{K}_j \mathbf{x}_a + \mathbf{f}_{NL} \quad (6.13)$$

\mathbf{f}_{NL} is null at zero amplitude.

Actually, the basis \mathbf{V} should be measured with low energy experimental modal analysis : equation 6.13, which is the numerical equivalent, is given for a better understanding. Under experimental conditions the movements of the structure are measured on a finite number of points \mathbf{x}_{mes} . In order to estimate

the motion at all FE Dofs of domain Λ_a , shape expansion methods can be carried out, see [Bal00]. If the model is accurate enough, the mass and stiffness matrices should be approximatively diagonalized by \mathbf{V} . Besides its vectors are chosen normalized to the mass matrix :

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M}_{aa}^e \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{M}_w \mathbf{V} = \mathbf{1} \quad (6.14)$$

The mass matrix of the whole structure (equation 6.8) is computed from this identification.

6.4.3 Reduction on macro-models

The projection of equation 6.11 on \mathbf{V} yields :

$$\mathbf{V}^T (\mathbf{M}_w + \mathbf{M}_{aa}^e) \mathbf{V} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{V}^T (\mathbf{K}_j + \mathbf{K}_{aa}^e) \mathbf{V} \mathbf{p} + \mathbf{V}^T \mathbf{f}_{NL} = \mathbf{0} \quad (6.15)$$

The non-linear joint force \mathbf{f}_{NL} is defined in the nodal space. Its projection on the PJSB generally couples together the generalized displacements \mathbf{p} contrary to the mass and stiffness matrices, respectively $(\mathbf{M}_w + \mathbf{M}_{aa}^e)$ and $(\mathbf{K}_j + \mathbf{K}_{aa}^e)$ which are diagonalized by \mathbf{V} . The identification of the coupled terms of the force in the mode space is hard to carry out since these coupled terms may depend on a quasi-infinite number of parameters such as the amplitudes, the instantaneous frequencies and even the phases of modes. In other words, the exact behavior of joints cannot be reduced without any loss. As a result we are led to consider the following assumption :

Assumption 2 : If two macro-models of the same joint are associated with deformations vectors which are **LOCALLY** orthogonal, then these two models are uncoupled

Note that assumption 2 is generally not true since the local physics that stand in the contact interfaces is strongly non-linear and, above all, depends on the local forces. Nevertheless it is a better approximation than the projection on the modes of the whole structure. It is indeed very commonplace to extend the Ritz method to weak non-linear dynamic using the modal DoFs. However, the firsts modes of the whole structure have long wavelengths, *i.e.* normal modes may be **LOCALLY** collinear in the domain of the joint Λ_a . As a result these modes induce the same distortion in the joint so they should share the same internal state.

Note that when the PJSB can be reduced to an unique load direction of the joint, assumption 2 is not necessary. In this case it is possible to formulate and identify an unique hysteretic constitutive model as it done in the recent work of Quinn [Qui12]. When the size of the PJSB is more than one, it is needed to use multiple hysteretic constitutive models. Nevertheless, the admissible movements of the joint in the low frequency range are generated by a basis of a much smaller dimension than the modes of the whole structure. Thus, in the case where assumption 2 is not respected, it may be possible to consider coupling effects between the two or three PJSB vectors (not counting rigid

body motions) rather than considering the coupling between the numerous elements of the mode basis. In the following developments, assumption 2 is considered to be respected.

Finally, the PJSB may also have to be enhanced, but the vibrational energy of these enhancement vectors is also assumed to be very weak compared to the elements of the PJSB. As a results each of them can be associated with a DoF which is considered to be non-dissipative and behave linearly.

6.4.4 Identification of the macro-models

Under assumption 2, equation 6.15 is approximated by N non-linear single DoFs :

$$\mathbf{v}_i^T (\mathbf{M}_w + \mathbf{M}_{aa}^e) \mathbf{v}_i \ddot{p}_i + \mathbf{v}_i^T (\mathbf{K}_j + \mathbf{K}_{aa}^e) \mathbf{v}_i p_i + f_i^h(p_i, r_i) = \mathbf{0}, \quad \forall i \in [1, N] \quad (6.16)$$

Where \mathbf{v}_i and p_i are respectively the i^{th} component of \mathbf{V} and \mathbf{p} . The non-linear part of the restoring force f_i^h is thus assumed to only depend on p_i and an internal variable r_i . Therefore each element of \mathbf{V} is associated with a macro-model, depicted in figure 6.3. These macro-models are composed of a modal mass of value equal to $\mathbf{v}_i^T (\mathbf{M}_w + \mathbf{M}_{aa}^e) \mathbf{v}_i = 1$ and the restoring force is driven by the hysteretic force f_i^h and a linear spring of stiffness k_i . The hysteretic force is driven by a proper elasto-plastic hysteretic formulation (*e.g.* Luge, Bouc-Wen or Iwan models) in order to model the microsliding phenomenon that occurs in the joint.

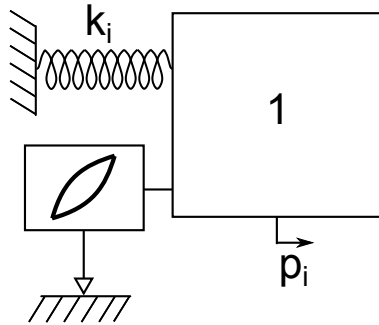


Figure 6.3 – The generic macro-model associated with each component of the PJSB.

The proposed generic rheology is believed to be able to accurately fit most type of joint sollicitation even bending modes, see [Hel05], since it is close to the actual physical behavior of jointed structures. The choice to use a parallel linear spring is based on experimental observations : jointed structures can show a decreasing damping ratio along with the increasing amplitude of vibration. This situation corresponds to the case where the hysteretic model is in a macro-sliding mode.

The experimental identification of this macro-model is performed according to the following procedure :

- First the basis \mathbf{V} is measured for low amplitude, with modal analysis. A linear FE model of the joint is updated from this analysis in order to compute the entire \mathbf{V} matrix.
- Under suitable excitation (*e.g.* "harmonic appropriation" [DCP13] or wavelet excitation [Qui12]), the structure is appropriated on a single mode with a strong amplitude and the free decay of this assumed single mode is measured. Since the mode shapes of the test bench are slightly affected by the non-linearity, the estimated state of the amplitude \hat{p}_i at time t is obtained with Ordinary Least Squares method (OLS) :

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = (\mathbf{V}_{\text{mes}}^T \mathbf{V}_{\text{mes}})^{-1} \mathbf{V}_{\text{mes}}^T \mathbf{x}_{\text{mes}}(t) \quad (6.17)$$

\mathbf{V}_{mes} is the PJSB at measuring points or its mass weighted equivalent. This point is discussed in the following section.

- Finally, the parameters α of the macro-model are to be updated from those measurements. This specific problem might be tricky but it is not the point of this paper. The identification process is performed in broad outline by finding the optimal solution that best fits the measured free responses. Indeed, the free response contains all the observable states of the non-linear model. The optimal parameters $\hat{\alpha}$ are those that solve the following problem :

$$\min_{\alpha} \|\mathbf{p}_{\text{model}}(\alpha, t) - \hat{\mathbf{p}}(t)\|_2 \quad (6.18)$$

Where $\mathbf{p}_{\text{model}}$ is the, numerically solved, solution of equation 6.16. The global minimum can be obtained using local optimization technique, such as Levenberg-Marquardt [Mor78], provided that the initial parameters are chosen close enough to the solution. For instance, a good estimation of the model parameters can be found by fitting the analytically calculated (from the model) and the measured instantaneous frequency and damping curves.

6.4.5 Alteration of the mode shape

The i^{th} identified macro-model is the association of a non-linear equation, in which current state is the amplitude $p := p_i$, and a deformation vector $\mathbf{v} := \mathbf{v}_i$. The components of this vector do not depend on the amplitude whereas the mode shape of the test bench shall be affected by the non-linearity. The principle of assumption 1 is based on the principle that joints are firstly designed in order to maintain the integrity of structures and thus cannot allow a massive decrease of their stiffness : the non-linear part of the contact force $\mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{x}_{\mathbf{a}})$ is weak compared to its linear part $\mathbf{K}_{\mathbf{j}}\mathbf{x}_{\mathbf{a}}$. The amplitude of deformation \mathbf{v} that best fits the actual measured deformation, in the sense of the quadratic norm, is the OLS solution, equation 6.17.

For large amplitudes, the actual deformation of the test bench is composed of \mathbf{v} at modal amplitude p plus a slight alteration $\mathbf{e}(p)$:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{a}} = \mathbf{v}p + \mathbf{e}(p) , \text{ with } \mathbf{e}(p_i \rightarrow 0) = \mathbf{0} \quad (6.19)$$

\mathbf{e} is assumed to be a monotonic function of p , i.e the maximum error is found for large amplitude. The exact projection of the dynamic equation 7.1 on \mathbf{v} , yields :

$$\mathbf{v}^T(\mathbf{M}_w + \mathbf{M}_{aa}^e)(\mathbf{v}\ddot{p} + \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2}) + \mathbf{v}^T(\mathbf{K}_j + \mathbf{K}_{aa}^e)(\mathbf{v}p + \mathbf{e}(p)) + \mathbf{v}^T \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{v}p + \mathbf{e}(p), r_i) = \mathbf{v}^T \mathbf{f}_e \quad (6.20)$$

When choosing vector \mathbf{v} normalized to the mass matrix, equation 6.20 becomes :

$$\ddot{p} + \omega_\infty^2 p + f_v = \mathbf{v}^T \mathbf{f}_e \quad (6.21)$$

The projected force f_v is determined by :

$$f_v = \mathbf{v}^T \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{v}p + \mathbf{e}(p), r) + \mathbf{v}^T(\mathbf{K}_j + \mathbf{K}_{aa}^e)\mathbf{e}(p) + \mathbf{v}^T(\mathbf{M}_w + \mathbf{M}_{aa}^e) \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} \quad (6.22)$$

Note that the terms of this equation (except the last one) only depends on the amplitude p and its history r . The last terms also depends on the two firsts derivatives of p , i.e the frequency of excitation. Most elasto-plastic models are frequency independent. However, the amplitude of the error is only important when the structure is excited with large amplitude. In practice, the projected force is identified for the frequencies close to the resonance of the test bench. As a result, this error can be minimized if the resonant frequencies of the bench are close to those of the whole structure.

Otherwise, the error induced by the added weight $\mathbf{v}^T \mathbf{M}_w \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2}$ can be almost cancelled if the measurement for the estimation of the amplitude (equation 6.17) is performed close to the added masses.

6.4.6 Inclusion of the macro-models in the whole model

The same joint assembles the whole structure and the test bench. Several components of equation 6.35 are updated from the identification of the macro-models :

- The first component of the stiffness matrix (equation 6.9) is replaced by the identified linear part of the restoring force :

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{K}_{aa} \mathbf{v}_i := k_i + \mathbf{v}_i^T \mathbf{K}_{aa}^{BT} \mathbf{v}_i \quad (6.23)$$

- The boundary elements between the domain Λ_a and Λ_b are supposed to be linear. Thus, the boundary terms of the non-linear force are null. The projection of the non-linear contact force of the whole model on \mathbf{v}_i is :

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{F}_{NL} := f_i^h \quad (6.24)$$

- The first component of the mass matrix of the whole structure of equation equation 6.8 is replaced also according to :

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{M}_{aa} \mathbf{v}_i := 1 + \mathbf{v}_i^T (\mathbf{M}_{aa}^{BT} - \mathbf{M}_w) \mathbf{v}_i \quad (6.25)$$

Note that the restoring force only depends on the displacement in the border of domain Λ_a . The forces between domain Λ_a and Λ_b are applied through the boundary elements as well. As a result, the inner part of domain Λ_a does not even have to be meshed since it is completely replaced by the identified macro-models. In practice, v_i is only measured in a finite number of points. However the displacement field must be known at least at all the nodes of the border. The motion of these Dofs can be estimated via shape expansion methods [Bal00].

6.5 Example : clamped-free jointed beams

6.5.1 The whole structure

The presented method is investigated on a numerical example but the identification process is carried out as for an experimental investigation; *i.e.* in order to be easily reproduced by anybody, the full order models of the considered structures (the joint test bench and the "whole" structure) are presented but they are used as black boxes. The considered whole structure, depicted in figure 6.4, is a clamped-free 1000mm×60mm×5mm steel ($E=210\text{e}9\text{Gpa}$; $\varphi=7500\text{kg.m-3}$) beam assembled with a bolted-joint at its middle. The flexural behavior of this structure is investigated.

The linear part of its FEM is composed of 10 hermitian 2D beam elements governed by Bernoulli formulation. The j^{th} element has two transverse displacement DoFs denoted u_j and u_{j+1} and two rotational DoFs denoted θ_j and θ_{j+1} . h and L_e are respectively section height and element length. The joint domain Λ_a is modelled with 3 beam elements (n°4,5,6). The rest of the structure is the Λ_b domain.

Non-linearities in real joints have a local extent and thus Λ_a contains both non-linear as well as linear elements. Its second element (fifth element in the whole structure) is fitted with a non-linear hysteretic model which is largely inspired from the work of Song [SHM⁺04]. This model, referred to as an Adjusted Iwan Beam Element (AIBE), relies on the reduction of the 2D linear elastic beam element to rigid bars and linear springs $k_{1\text{lin}} = 12EI/L_e^3$ and $k_{2\text{lin}} = 4EI/L_e h^2$, where I denotes the quadratic moment of the beam. The adjusted Iwan beam element is obtained by replacing these two springs with one-dimensional hysteretic models. This model has been recently used in association with the LuGre model [JSP10]. The properties of this model are given by the following relations :

$$k_1 = \frac{1}{2}k_{1\text{lin}}; \quad k_2 = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}k_{2\text{lin}}); \quad 3\sigma = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}k_{2\text{lin}}) \quad (6.26)$$

The extensional deformations of the two cells are given by :

$$\Delta_1 = \frac{L_e}{2}(\theta_5 + \theta_6) + (u_5 - u_6) \quad (6.27)$$

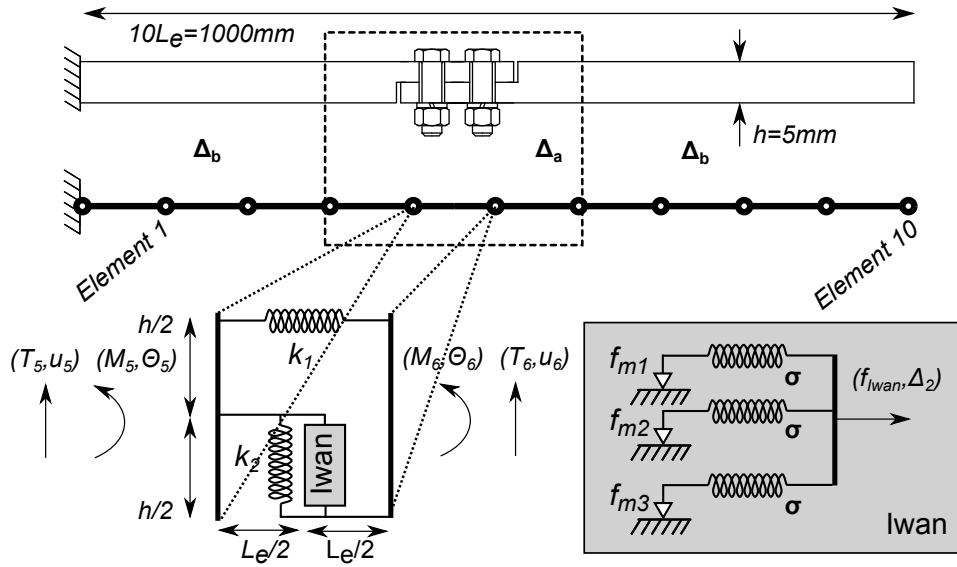


Figure 6.4 – The whole assembled structure Λ and its FULL order model (FULL); The identification process is carried out as for an experimental investigation : The full order model is presented here but it is used as a black box, *i.e.* for which only experimental outputs/inputs data are available.

$$\Delta_2 = \frac{h}{2}(\theta_5 - \theta_6) \quad (6.28)$$

In the presented model, the second spring is replaced by a three Jenkins elements Iwan model. The rheological representation of Iwan model is presented in the gray box in figure 6.4. The hysteretic Iwan force is driven by equation 6.29, see [Seg02] for details.

$$f_{Iwan}(\Delta_2, r_2) = \sum_{j=1}^3 f_j(\Delta_2, r_2), \quad \text{with } f_j = \begin{cases} \sigma \Delta_2 & \text{if } |f_j| < f_{mj} \\ f_{mj} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.29)$$

This hysteretic model depends on the deformation history of Δ_2 represented by the internal variable r_2 . The three slider strengths f_m are linearly spaced between 66.7N and 233.3N.

According to Song formulation, restoring shear forces T_5 , T_6 and bending moments M_5 , M_6 are related to DoFs by :

$$\begin{pmatrix} T_5 \\ M_5 \\ T_6 \\ M_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \Delta_1 \\ k_1 \Delta_1 + \frac{h}{2} f_{Iwan}(\Delta_2, r_2) \\ -k_1 \Delta_1 \\ k_1 \Delta_1 - \frac{h}{2} f_{Iwan}(\Delta_2, r_2) \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

6.5.2 Identification of the bolted-joint

The reduction process starts with the identification of the bolted-joint behavior. It is performed on a numerical test bench which contains the bolted-joint

domain Λ_a (*i.e.* 3 elements - 8 Dofs) and added weights of mass $M_w = 6\text{kg}$ and inertia moment $J_0 = 1.3 \cdot 10^{-3}\text{kg.m}^2$ at free ends in free-free conditions as depicted in figure 6.2. The basis \mathbf{V} contains the first eigenmodes of this linearized structure (when all the sliders are stuck and the joint behave like a linear beam) : the two rigid body modes \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 and the two first bending modes \mathbf{v}_3 and \mathbf{v}_4 as depicted in figure 6.5. The displacement and rotational Dofs of the numerical test bench are denoted, from left to right, $[u_1, \theta_1, u_2, \theta_2, u_3, \theta_3, u_4, \theta_4]$.

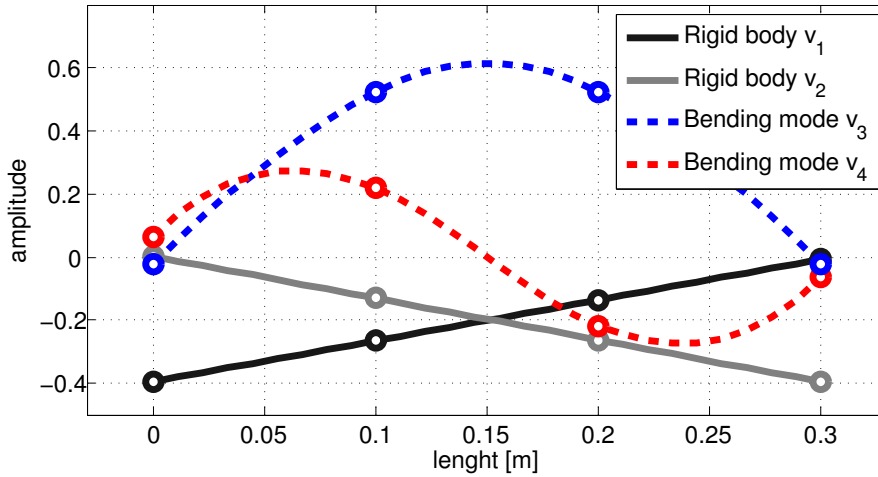


Figure 6.5 – The Joint Mode Basis (PJSB); The local sub-space Λ_a of the whole structure Λ is projected on this reduced basis.

In general, the number of elements which has to be kept into the PJSB should be estimated with a SVD analysis of the measured vibration of sub-domain Λ_a .

The two rigid body modes do not distort the joint, thus the corresponding single DoF resonators have zero restoring force :

$$[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]^T \mathbf{K}_{aa}^e [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2] = \mathbf{0} \quad [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]^T \mathbf{F}_{NL} = \mathbf{0} \quad (6.31)$$

The identification of the two macro-models associated with the two first bending modes \mathbf{v}_3 and \mathbf{v}_4 is carried out the same way, according to the procedure detailed in section 6.4.4 : The identification of the mode \mathbf{v}_3 is only presented here. The test bench is appropriated on this mode by exciting the structure with a sinusoidal force of frequency close to the resonance until a limit cycle is reached. The excitation is then shut and the free decay of this assumed single mode is measured, see [DCP13]. The natural frequency of the first bending mode is $f_3 = 41\text{Hz}$. The resonant frequency is amplitude-dependent, thus the appropriate frequency of excitation is chosen equal to the resonant frequency for maximum used amplitude $f_e = 36.5\text{Hz}$. The vibrations are measured at the free ends of the test bench :

$$\mathbf{x}_{\text{mes}} = [u_1, \theta_1, u_4, \theta_4]^T \quad (6.32)$$

Of course it does not seem realistic to measure rotations but multiple translations are more likely hence the need to expand. Figure 6.6 shows the free decay of the structure after appropriation on \mathbf{v}_3 . The time evolution of the differences of rotation $\theta_4 - \theta_1$ is presented. For large amplitude, the stiffness

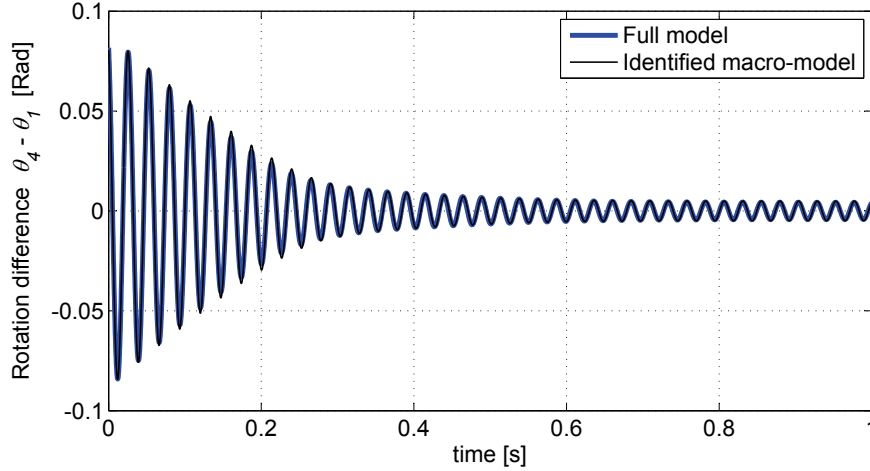


Figure 6.6 – Identification of the macro-model ; The identified macro-model very precisely fits the measured dynamics.

of the bolted joint is locally reduced. As a result, the deformed shape of the test bench is not linear to the mode shape \mathbf{v}_3 as shown in figure 6.7. However the softening effect is still captured through the variation of frequency with amplitude. Besides, measuring and computing the OLS estimation of the amplitude p_3 at the free ends gives a quasi-exact assessment of the real shape in the boundaries of Λ_a where the internal forces between Λ_a and Λ_b are computed in the whole structure.

As expected, the OLS estimation is exact for low amplitudes as shown in figure 6.8.

The generic equivalent one DoF model depicted in figure 6.3 is fitted with an Iwan model of 3 Jenkins elements. Generally the Iwan model doesn't need an important number of Jenkins elements to accurately fit the measured properties of joints [Seg02]. The parameters of this model are directly identified from the OLS estimation of amplitude p_3 of the free response. The identified parameters of the macro-model are :

$$k_3 = 5.254 \cdot 10^4; \quad \sigma = 4.65 \cdot 10^3; \quad f_m = [1.57, 3.23, 4.21] \quad (6.33)$$

The identified macro-model very precisely fits the measured dynamic as shown in figure 6.6. The obtained hysteretic force is depicted in figure 6.9.

The linear-equivalent dynamic properties of the identified macro-model associated with \mathbf{v}_3 are depicted in figure 6.10. The plotted amplitude-dependent frequency $f_3(p_{3\max})$ and damping ratio $\xi_3(p_{3\max})$ are the linear equivalents in the sense that the steady-states of peak amplitude $p_{3\max}$ are the same than

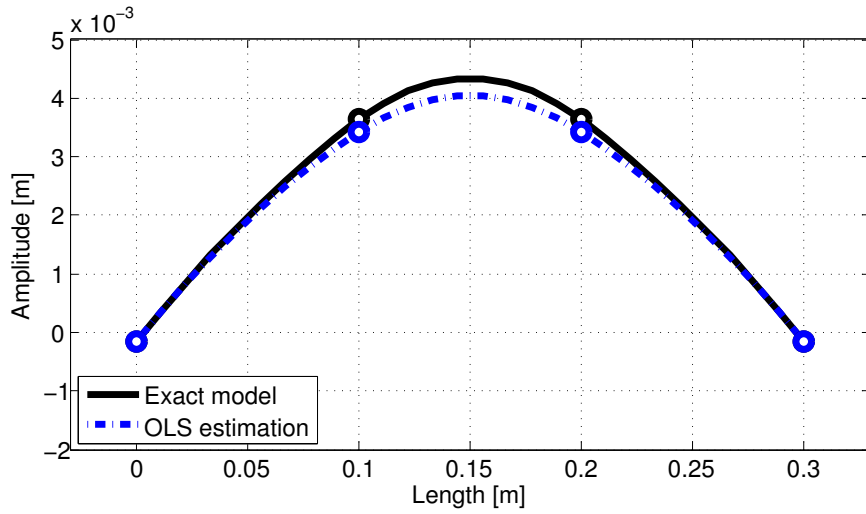


Figure 6.7 – Ordinary least square estimation of the actual shape for large amplitude; The instantaneous estimation of p_3 is carried out through this estimation.

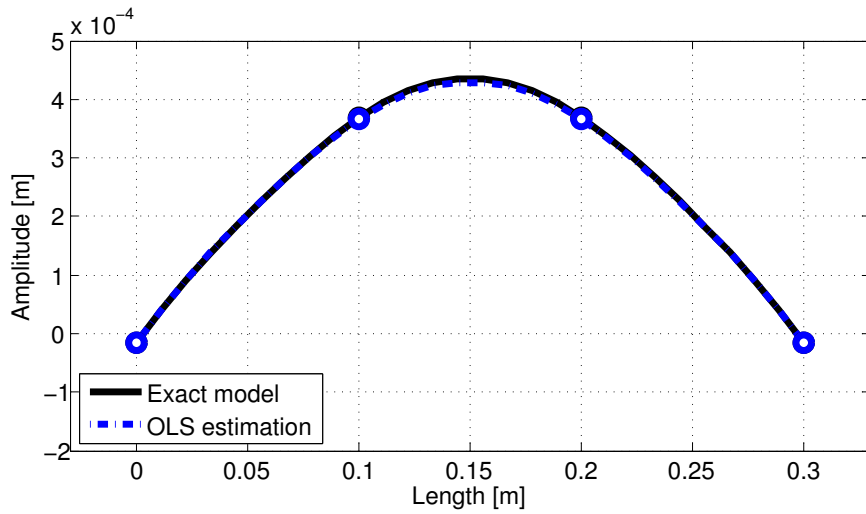


Figure 6.8 – Ordinary least square estimation of the actual shape for low amplitude; The instantaneous estimation of p_3 is carried out through this estimation.

those obtained with the linear system of equation 6.34.

$$\ddot{p}_3 + 2\xi_3(p_{3\max})\omega_3(p_{3\max})\dot{p}_3 + \omega_3^2(p_{3\max})p_3 = f_e \quad (6.34)$$

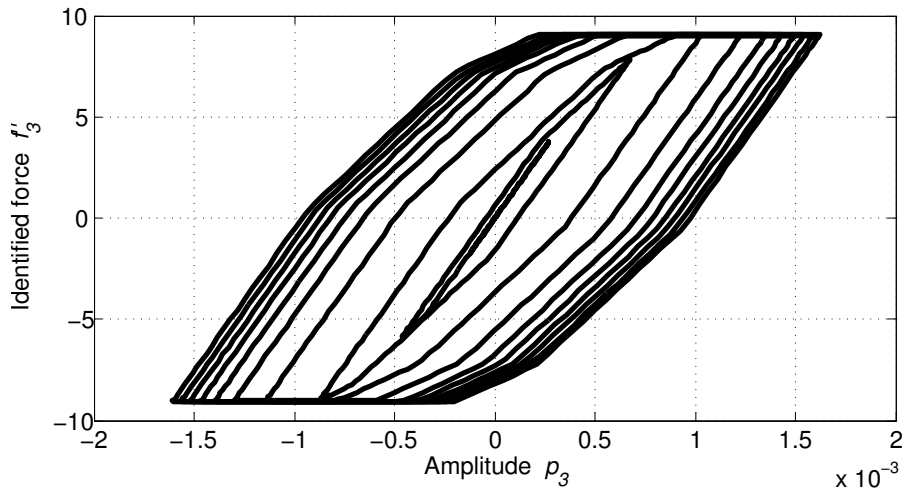


Figure 6.9 – Identified hysteretic force f_3^h .

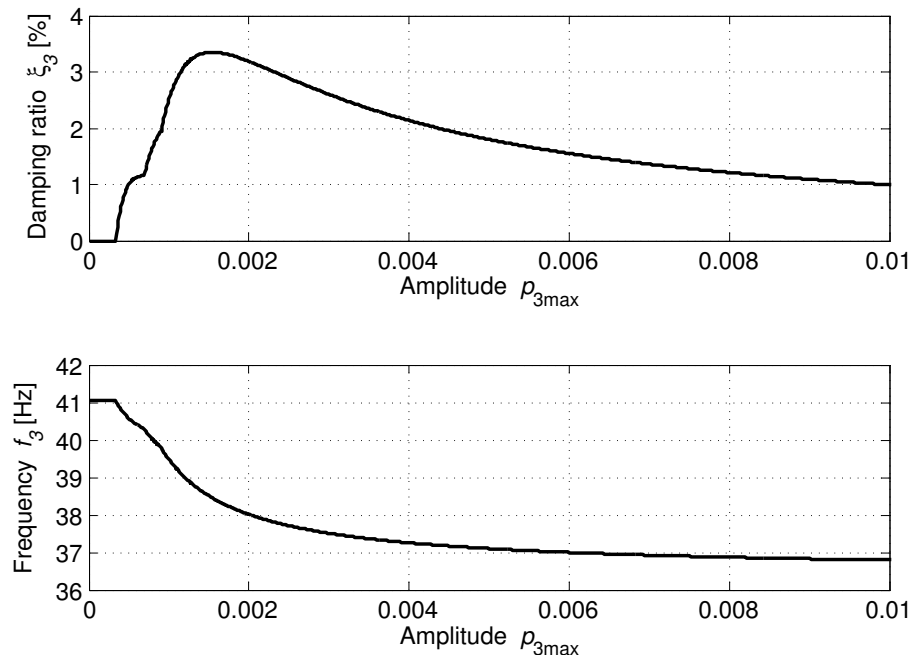


Figure 6.10 – Linear-equivalent dynamic properties of the identified macro-model.

Finally, the full order model is reduced to :

$$\Upsilon^T M \Upsilon \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{pmatrix} + \Upsilon^T \mathbf{K} \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (k_3 - \mathbf{v}_3^T \mathbf{K}_{aa}^e \mathbf{v}_3) p_3 + f_3^h(p_3, r_3) \\ (k_4 - \mathbf{v}_4^T \mathbf{K}_{aa}^e \mathbf{v}_4) p_4 + f_4^h(p_4, r_4) \\ 0 \end{pmatrix} = \Upsilon^T \mathbf{f}_e \quad (6.35)$$

6.6 Results and discussion

6.6.1 ROMs versus FULL order model

The proposed reduced order formulation is now referred as ROM2. In this section, it is compared with the common Ritz-Rayleigh reduction, referred as ROM1, which is based on the assumption that the modes of the whole structure are uncoupled. In this formulation, the nodal displacements are approximated by a linear combination of the modes of the whole structure :

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}\mathbf{q} \quad (6.36)$$

The Ritz basis $\mathbf{\Phi}$ is the solution of the linearized problem when all the sliders are stuck. Equation 6.3 is approximated by N uncoupled non-linear single DoF resonators :

$$\mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_i \ddot{q}_i + \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi}_i q_i + \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{\Phi}_i q_i, r_i) = \mathbf{0}, \quad \forall i \in [1, N] \quad (6.37)$$

Note that, in the case of ROM1, there is actually no identification process : The exact joint force is directly used and projected. This simulation is equivalent to the case where the reduced non-linear forces are exactly identified ; *i.e.* no error is made from identification.

Two load cases are computed to investigate the free and the forced response of the ROMs and to compare with the full order model. In both load cases, the excitation force is applied at the top of the structure (node 11).

In the first load case, a Morlet wavelet of frequency close to the resonance of the first mode $\mathbf{\Phi}_1$ is applied. The free decay, measured at the excitation point is depicted in figure 6.11.

As expected ROM1 mainly fits the exact solution since the structure is appropriated on the first mode only. However, the linear mode does not take into account the local softening effect which leads to an underestimation of the actual strain undergone by the joint. As a result, ROM1 response is less damped than the full order model response. **In contrast, ROM2 is able to take into account the local softening effect and the solution is almost exact.** This is due to the local formulation of ROM2.

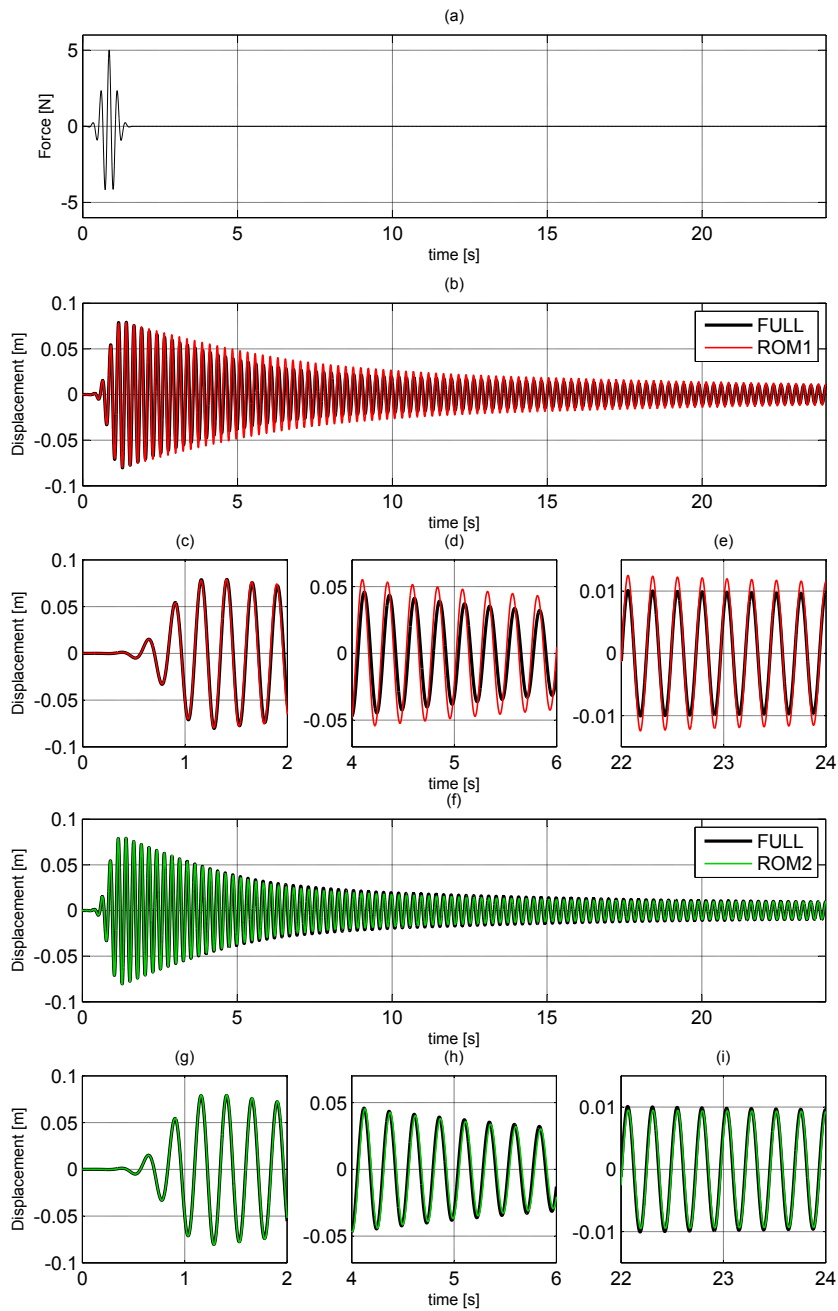


Figure 6.11 – LOAD CASE 1 - (a) : Excitation force ; (b),(c),(d),(e) : Measured displacement for FULL order model and ROM1 ; (f),(g),(h),(i) : Measured displacement for FULL order model and ROM2.

For the second load case a sinusoidal force of frequency close to the one of the second mode Φ_2 is applied until the steady-state regime is reached. Then the same wavelet excitation of load case 1 is applied and the transient response is observed. The response of the structure is depicted in figure 6.12.

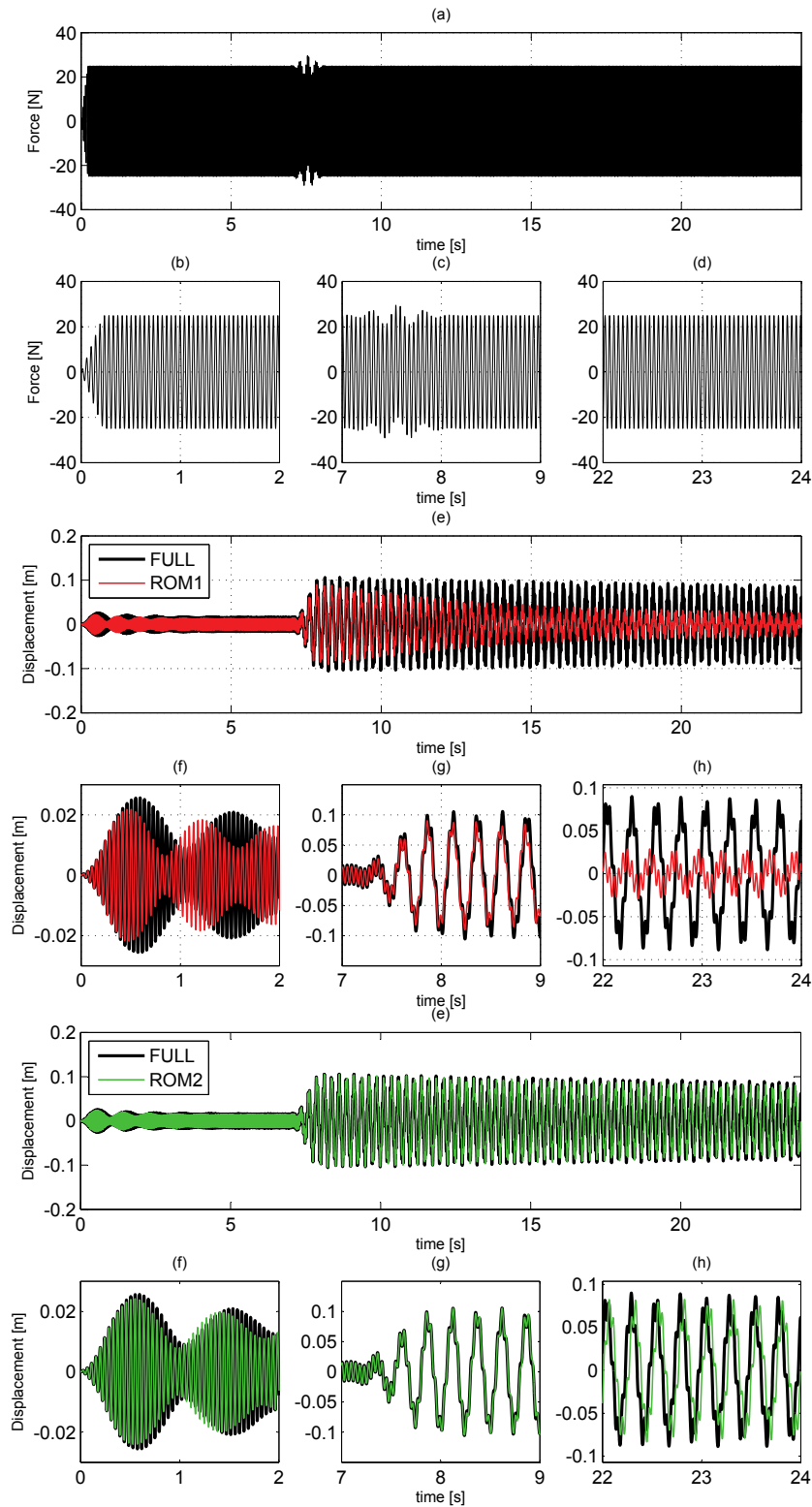


Figure 6.12 – LOAD CASE 2 - (a),(b),(c),(d) : Excitation force; (e),(f),(g),(h) : Measured displacement for FULL order model and ROM1;(i),(j),(k),(l) : Measured displacement for FULL order model and ROM2.

The response of the structure is multi-modal. This load case highlights the coupling effects that may occur in jointed structures. The global amplitude of ROM1 decreases faster than the full order model. This ROM1 stands for the situation where no coupling effect is considered. In that case, the total dissipated energy per time is linearly combined :

$$\begin{aligned} D_{\text{ROM1}}(\Phi_1 q_1 + \Phi_2 q_2) &= D_{\text{ROM1}}(\Phi_1 q_1) + D_{\text{ROM1}}(\Phi_2 q_2) \\ &\neq D_{\text{FULL}}(\Phi_1 q_1 + \Phi_2 q_2) \end{aligned} \quad (6.38)$$

This ROM1 is not able to take into account the actual coupling effect due to non-linear damping predicted by the full order model. On the contrary, ROM2 is able to take into account this effect as shown in figure 6.12. So, in the case where modes are considered uncoupled, the strain energy seen by the joint is strongly underestimated. In the load case 2, the considered RMS amplitude on each mode of ROM1 locally corresponds to the amplitude $p_3 = 1.5 \cdot 10^{-3}$ in figure 6.10, where the damping is maximum. In contrast to it, ROM2 accurately fits the expected response of the structure since the coupling effect is considered.

ROM1 may strongly underestimate the actual amplitude of vibration. In a conception process, this situation can lead to an under-dimensioning of the structure. The presented load case 2 may correspond to excessively severe conditions, but in general, the actual dissipation generated by joint depends on the real amplitude. As a result, the projection on a global Ritz basis is not suitable contrary to the use of a local basis.

6.6.2 Validity of the PJSB

In this section, the assumption that the normal basis of the test bench is able to generate the low dynamic movements of the structure Λ in the local domain Λ_a is checked. The minimum angle Θ_1 between the exact deformation at time t in Λ_a , *i.e.* $\mathbf{x}_a(t)$, and the subspace \mathbf{W} generated by the PJSB, estimates the error due to the reduction. The minimum angle is defined as :

$$\Theta_1(t) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}} \left\{ \arccos \left(\frac{\langle \mathbf{x}_a(t), \mathbf{v} \rangle}{\| \mathbf{x}_a(t) \| \| \mathbf{v} \|} \right) \right\} \quad (6.39)$$

The minimum angle between the exact deformation and the subspace generated by the two first modes of the whole structure restricted to the sub-domain Λ_a , namely Φ_{a1} and Φ_{aa} , is also computed. The numerical estimation of the minimum angle is carried out thanks to the matlab function *subspace*. Figure 6.13 and 6.14 shows the computed minimum angles respectively for the first and the second load case. The largest amplitudes are pictured.

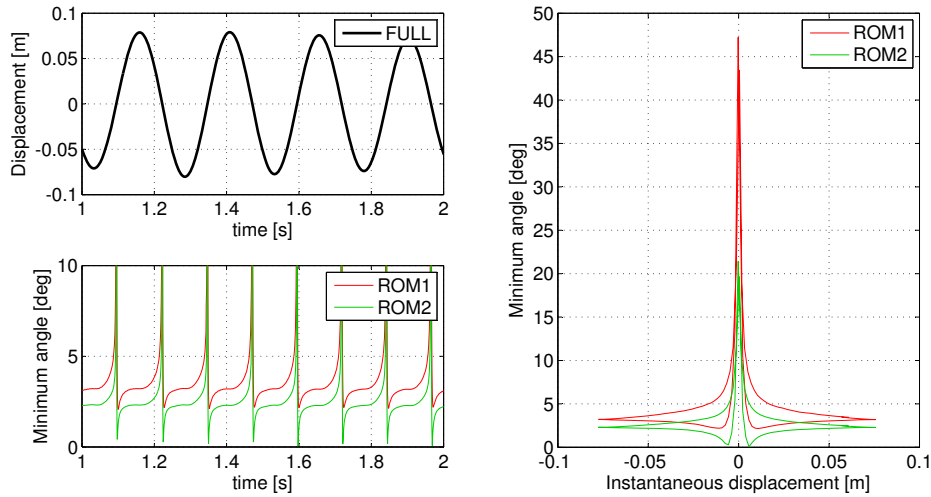


Figure 6.13 – Instantaneous minimum angle between the exact deformation and the subspace generated by the PJSB and the whole structure mode basis restricted to the sub-domain Λ_a ; First load case between time $t=1$ and $t=2$ sec

As pictured in figure 6.13, the maximum error is found near zero amplitude and thus can be attributed to a wrong conditioning. This does not affect the quality of the result since the minimum angle stays at a really low level for medium to high amplitudes. Besides, these figures focus on the shape error in the domain of the joint where this error is expected to be the highest. As a result the proposed projection offers a very good approximation of the exact deformation at any time even in the domain of the joint.

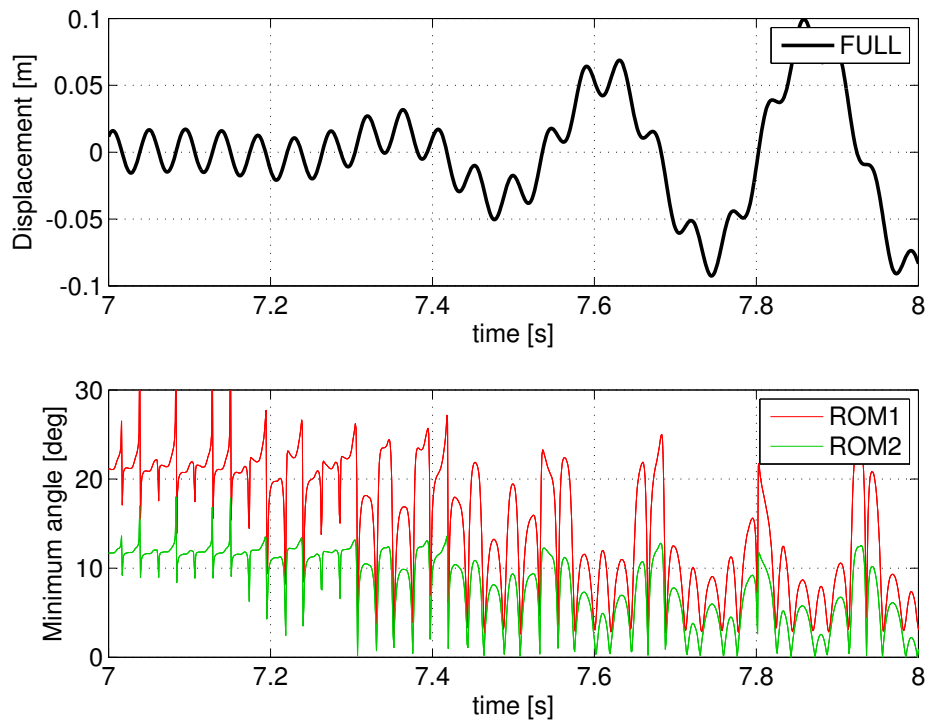


Figure 6.14 – Instantaneous minimum angle between the exact deformation and the subspace generated by the PJSB and the whole structure mode basis restricted to the sub-domain Λ_d ; Second load case between time $t=7$ and $t=8$ sec

6.7 Conclusion

This paper provides a pragmatic and accurate way for the simulation of jointed structures. The method is founded on the intuition that the modes of a "local" basis is adequate to generate the principal movements that the joints may carry out under low frequency dynamic excitations. The proposed formulation couples together the modes of the whole structure. It also keeps a geometrical meaning and thus the reduced order model is able to take into account the local damping as well as softening effects induced by joints. The formulation also enables to take into account FE models of any realistic geometry. Finally the joints macro-models are directly updated from experimental data. As a result, the obtained models are very light but nevertheless accurate formulations for assembled structures.

Bibliographie du chapitre 6 : Sollicitations principales

- [AJ07] H. Ahmadian and H. Jalali. Generic element formulation for modelling bolted lap joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5) :2318–2334, July 2007.
- [AZF12] D. Amsallem, M.J. Zahr, and C. Farhat. Nonlinear model order reduction based on local reduced-order bases. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(10) :891–916, 2012.
- [Bal96] E. Balmes. Optimal ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition. *AIAA journal*, 34(6) :1256–1260, 1996.
- [Bal00] E. Balmes. Review and evaluation of shape expansion methods. In *SPIE proceedings series*, pages 555–561. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2000.
- [BC68] M.C.C. Bampton and R.R. Craig, JR. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [DCP13] J.L. Dion, G. Chevallier, and N. Peyret. Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 34(1–2) :106–115, January 2013.
- [FCBKL08] R. Filomeno Coelho, P. Breitkopf, and C. Knopf-Lenoir. Model reduction for multidisciplinary optimization - application to a 2d wing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(1) :29–48, 2008.
- [FCD13] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013.
- [FCD14] H. Festjens, G. Chevallier, and J. L. Dion. Nonlinear model order reduction of jointed structures for dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7) :2100–2113, March 2014.
- [GN01] L. Gaul and R. Nitsche. The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Reviews*, 54(2) :93–106, March 2001.
- [Guy65] R. Guyan. Reduction of mass and stiffness matrices. *AIAA Journal*, 3(2) :380, 1965.
- [Hel05] L. Heller. *Amortissement dans les structures assemblées*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2005.
- [JSP10] V. Jaumouille, J.-J. Sinou, and B. Petitjean. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems—application to bolted structures.

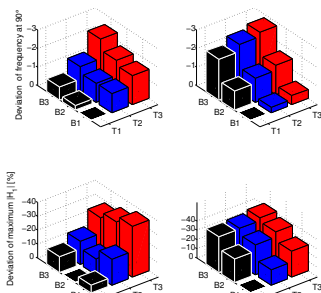
- Journal of Sound and Vibration*, 329(19) :4048–4067, September 2010.
- [KPGV09] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, and A.F. Vakakis. Non-linear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170–194, January 2009.
- [Mor78] Jorge J. Moré. The levenberg-marquardt algorithm : Implementation and theory. In G. A. Watson, editor, *Numerical Analysis*, number 630 in Lecture Notes in Mathematics, pages 105–116. Springer Berlin Heidelberg, January 1978.
- [PDCA10] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Microslip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02(02) :281, 2010.
- [Qui12] D.D. Quinn. Modal analysis of jointed structures. *Journal of Sound and Vibration*, 331(1) :81–93, January 2012.
- [Seg02] D.J. Segalman. A four-parameter iwan model for lap-type joints. *Sandia report*, SAND2002-3828, 2002.
- [Seg10] D.J. Segalman. A modal approach to modeling spatially distributed vibration energy dissipation. Technical report, Tech. Rep. SAND2010–4763, Sandia National Laboratories (August 2010), 2010.
- [SHM⁺04] Y. Song, C.J. Hartwigsen, D.M. McFarland, A.F. Vakakis, and L.A. Bergman. Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted iwan beam elements. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1–2) :249–276, May 2004.
- [WO08] H. Wentzel and M. Olsson. Mechanisms of dissipation in frictional joints—Influence of sharp contact edges and plastic deformation. *Wear*, 265(11–12) :1814–1819, November 2008.

Chapitre 7

Modèles de Iwan

Sommaire

7.1	Préambule	178
7.2	Introduction	179
7.3	Definition of a generic macro-model for joints . .	180
7.3.1	Test bench	180
7.3.2	Low amplitude linearization	181
7.3.3	Weak non-linear assumption	182
7.3.4	The generic form of macro-model	183
7.4	Identification of the joint dynamic	184
7.4.1	Identification of the equivalent parameters with Kalman filters	184
7.4.2	Equivalent frequency and damping properties of the Iwan oscillator	184
7.5	Experimental investigations	189
7.5.1	Experimental setup	189
7.5.2	Estimation of the equivalent parameters	192
7.5.3	Iwan oscillator versus experiments	196
7.6	Modal de-coupling assumption	200
7.6.1	Modal coupling	200
7.6.2	Experimental investigations	200
7.7	Conclusion	205
	Bibliographie du chapitre 7	206



Résumé

Les modèles de Iwan permettent de modéliser la physique du problème de Metherell and Diller. On se demande ici si il est possible d'étendre ce modèle à d'autres cas de charges. L'hypothèse de découplage modal, qui est un principe fondamental pour l'utilisation de ce type de modèles, est étudiée expérimentalement.

7.1 Préambule

Le chapitre précédent s'intéresse au choix de l'espace de projection du problème de dynamique. Les sollicitations principales dans l'espace géométrique permettent de reproduire le comportement global d'une liaison à l'aide d'un faible nombre de degrés de liberté. Ces mouvements généralisés "locaux" sont associés à des rhéologies basées sur le modèle de Iwan.

Ce chapitre vise à évaluer la capacité de ce modèle pour reproduire le comportement dynamique d'un assemblage. Pour cela, la rhéologie de l'oscillateur de Iwan est développée afin de fournir une relation liant les paramètres modaux de fréquence et d'amortissement. La formule semi-analytique obtenue permet d'évaluer, à partir de caractéristiques facilement mesurables, la proximité du modèle de Iwan aux mesures.

Le comportement dynamique d'une liaison dépend du type de chargement c'est pourquoi il est nécessaire d'associer un modèle de Iwan différent à chacune des sollicitations principales. Cette modélisation repose sur l'hypothèse de découplage modal qui est aussi étudiée dans ce chapitre au travers d'une étude expérimentale.

Ce travail a été soumis en novembre 2013 à la revue *mechanical systems and signal processing* sous le titre "*Are Iwan Models Relevant To Model Joints ?*". La forme du manuscrit a été conservée dans ce chapitre, c'est la raison pour laquelle il est rédigé en anglais.

7.2 Introduction

Under dynamic loads, riveted and bolted joints are known to give rise to high damping ratios and moderate softening behaviors in assembled structures. The underlying phenomenon, called partial-slip or micro-slip, is known to be caused by the partial sliding at contact interfaces, see [GK56], [Gro85] [GN01], [PDCA10].

The modelling of this non-linear phenomenon with finite element models (FEM) still remains a challenge. Most of the difficulties are related to the multi-scale nature of contact interfaces. First, the behavior of joints depends both on the macro and the micro geometry of surfaces. The real contact patch in joint interfaces is unknown but nevertheless plays a significant role on the actual stiffness of interfaces and on the frictional energy dissipation [AB11]. Joints may also undergo other complex phenomena due to contact such as micro-impact and local plastic deformations [WO08]. Besides, the estimation of local parameters cannot be performed directly because the instrumentation cannot be placed without changing the system. As a result the uncertainty associated with the identification of parameters that govern the contact physics is large. Otherwise, the characteristic times of contact are generally much lower than those of the assembled structure in the frequency range of interest. As a result, the modelling of contact is a source of expensive simulation times and numerical stability problems [BRS⁺11]. Despite all these limitations, such simulations still allow for the investigation of the main trends of joint dynamics and thus it is useful in the framework of optimal design. In regard to it, quasi-static assumption is adapted for cheap CPU-time investigations of joint dynamics, see [FCD13].

On the contrary, in the framework of Model Order Reduction (MOR) for simulations, it is necessary to describe mechanical joints with a small number of Degrees of Freedom (DoF). For instance, the Metherell and Diller (MD) problem [MD68] has been the source of a large number of works which aimed to give a low order model of it. The MD problem deals with a bolted lap-joint submitted to a quasi-static lateral force under the assumption of Coulomb friction and an uniform contact pressure. Metherell and Diller showed a power-law relationship between the applied force F and dissipation per cycle $D \propto F^\alpha$ with $\alpha = 3$. Smallwood's experimental investigations [SGC00] revealed a similar relationship with $2 < \alpha = 3 + \chi < 3$. Segalman showed that such a behavior can be obtained with the continuous Iwan model [Iwa66] (also called Masing or BPII model) assuming a power-law distribution of sliders, see [Seg02]. Other works established the Iwan distribution associated with the generalised (*i.e.* with realist bold pressure field) MD problem, see [SM05], [QS05] Argatov and Butcher gave the Iwan distribution associated with the MD problem with a tribological modelling of rough contact [AB11]. These studies revealed that **the continuous Iwan model is an equivalent formulation to the generalised MD problem when the joint is preloaded by a time-independent preload and oscillated by small transversal displacement.**

Generally, the assumption that the normal stress field is amplitude independent (*i.e.* time-independent) is not verified. For instance, when subjected to a bending motion, the pressure in the contact patch of a joint depends on the magnitude of the applied torque. **In this case, Iwan model is not in accordance with physics.** Song [SM05] and Ahmadian [AJ07a] proposed lumped models of joints dedicated to the specific case of bending motions. The purpose of this work is to investigate a generic formulation based on Iwan model. If the Iwan model is still relevant for the modelling of joints when subjected to any load case, then the model would allow for a generic modelling of joints.

In the following section, a generic one Dof oscillator based on Iwan model is developed. In the third section, a semi-analytical formula gives a straightforward condition required for a system to be modelled using Iwan model. This equation gives the relationship between the frequency and damping properties of a system. In section 4, a lap-joint structure is subjected to bending and torsional motions. The estimated frequency and damping properties of the structure are extracted with Kalman filtering. The obtained curves are used to see if the structure is in accordance with the proposed model.

Like all model of this type, when used for structural dynamic, the mode decoupling assumption is taken. In the last section, this assumption is questioned. The random response excitation is studied in order to exhibit the limitations associated with the use of macro-models for joints.

7.3 Definition of a generic macro-model for joints

7.3.1 Test bench

First, the behavior of a jointed structure under a mono-harmonic excitation is studied. The random response is investigated in the last part of the paper.

In the literature, experimental investigations on joints most commonly result from the dynamic magnification of the resonance of a small structure, see [MBV01], [AJ07b],[HSM⁺04],[Hel05], [Cai09], [GIB11]. Likewise, the deformations applied to joints are supposed to be generated by the resonances of a small structure that we call test bench. Figure 7.1 shows a typical configuration. This type of experimental bench is composed of a bolted connection, beams or plates and heavy "seismic" masses. When excited close to resonances, the first modes of this test bench under free-free conditions generate elementary deformations of the joint. Free-free conditions are chosen since a very low amount of parasitic damping is wished. The masses lower the resonant frequencies and thus, large amplitudes can be reached.

Note that the test rig is a way to identify the behavior of a joint under a specific load case. The joint is generally intended to assemble the elements of

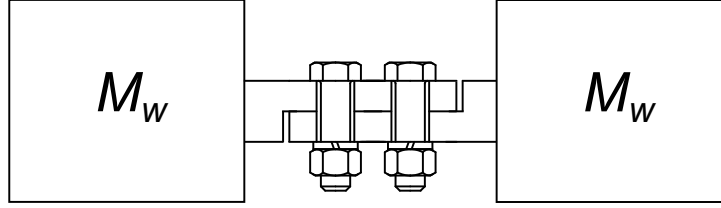


Figure 7.1 – A typical test bench setup

a larger structure than just a test structure. As a result, the design of the test bench should be such that its first modes load the joint the same way than the larger structure does.

7.3.2 Low amplitude linearization

Consider the dynamics of the test bench. Using a discrete formulation, the dynamic equation of this small structure can be written in a matrix form :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{f}_e \quad (7.1)$$

where \mathbf{x} , \mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} respectively denote the displacement vector, the mass matrix, the damping matrix and the stiffness matrix. Vector \mathbf{f}_e is the external force applied to the structure. The contact force $\mathbf{f}_c(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ depends on the actual displacement and its history denoted by the variable \mathbf{r} .

For low amplitudes, the non-linear part of the contact force is assumed to be negligible, and the structure can be considered to behave linearly. It is assumed that even if the joint dynamics is locally governed by non-linear laws, the reduced behavior of the joint can be linearized around zero amplitude, *i.e.* \mathbf{f}_e is distributed to the damping and stiffness matrices.

Friction dissipations are localized at contact interfaces. As a result, even in the assumption of linear damping, the damping operator may not match Caughey assumption $\mathbf{C} = \sum_i \alpha_i \mathbf{M}^i + \beta_i \mathbf{K}^i$ (also referred to as Rayleigh or Basile hypothesis) and the mode basis may be complex. Specific method dedicated to the identification of complex structure can be employed [Fol98]. It is assumed that real vector is good enough in the case of structure like the one depicted in 7.1 and moderate damping. Thus, when the structure is excited at a low amplitudes, the displacement of the structure can be reduced to the real eigenvector basis \mathbf{V} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{p} \quad (7.2)$$

\mathbf{p} denotes the modal coordinates. When excited close to the resonance of one

mode \mathbf{v} , the dynamic equation of the test bench reduces to :

$$\ddot{p} + 2\xi\omega_0\dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{f}_e}{m} \quad (7.3)$$

where ω_0 , ξ and m respectively denote the natural angular frequency, the modal damping ratio and the modal mass. The mode shape can be estimated from the experimental Frequency Response Function (FRF) obtained at low amplitude using experimental modal analysis methods. Even if the mass matrix is not available, the experimental mode shapes can still be scaled to unit modal masses (*i.e.* $\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} = m = 1$) by using the relationship between residues and mode shapes.

Choosing \mathbf{v} normalized to the mass matrix yields :

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{v} = \omega_0^2 \quad (7.4)$$

7.3.3 Weak non-linear assumption

On picture 7.2, a typical evolution of the angular frequency versus the amplitude of vibration is plotted. ω_∞ is the asymptotic limit of the angular frequency at very large amplitude. In the assumption of partial sliding, a part of the contact patch is never sliding over a cycle. The linearisation of the stiffness matrix at large amplitude gives $\mathbf{K}_\infty = \mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{contact}}}{\partial \mathbf{x}}_{\mathbf{x} \rightarrow \infty}$. The corresponding angular frequency is :

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K}_\infty \mathbf{v} = \omega_\infty^2 \quad (7.5)$$

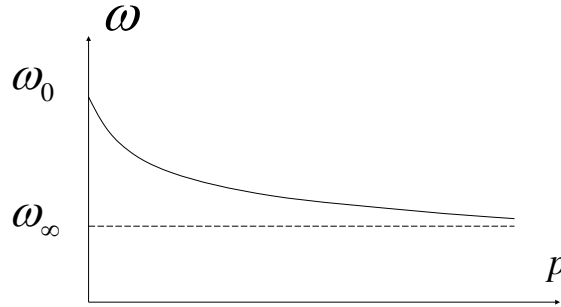


Figure 7.2 – A typical evolution of the angular frequency versus vibration amplitude

The constant modal shape can be extended for large motions as long as the assumption of weak non-linearity is still relevant. Joints are firstly designed in order to maintain the integrity of structures and thus cannot allow for a massive decrease of the stiffness (*i.e.* $\omega_0 - \omega_\infty < 0.1\omega_0$). As a result for large amplitudes, the following hypothesis, referred to as the weak non-linear behavior of joints, is considered : **The deformation of the test bench structure for large amplitudes near a resonance is assumed to be well approximated by the mode shape \mathbf{v} identified at low amplitude of vibration.** The non-linear behavior of the structure is taken into

account thanks to the reduced non-linear force but the mode shape alteration is neglected.

7.3.4 The generic form of macro-model

Under this assumption, the joint dynamics is finally reduced to a one degree of freedom resonator of amplitude p :

$$\ddot{p} + \omega_{\infty}^2 p + f_h(p, r) = f_e \quad (7.6)$$

In order to reproduce the elasto-plastic behavior of the joint, the non-linear force f_h can be reduced with a hysteretic law such as Dahl [Dah68], LuGre [DWOAL95] or Iwan model [Iwa66]. A schematic representation of this resonator is pictured in figure 7.3.

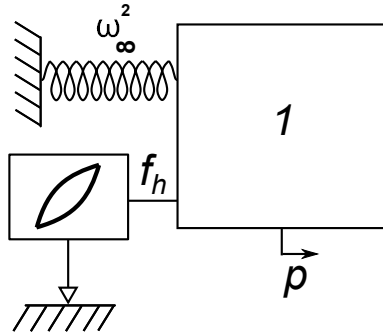


Figure 7.3 – The generic macro-model is a one degree of freedom resonator fitted with a unit mass and a hysteretic restoring force.

The continuous formulation of the parallel-series Iwan model has been largely investigated in the literature, see [AB11], [SM05], [Seg01], [Seg02]. This model is in accordance with the real physics taking place at contact interfaces in the case of the MD problem. As such, it is adapted for the modelling of joints. Quinn and Segalman showed that the parallel-series formulation is equivalent to the series-series formulation under quasi-static assumption [QS05]. More generally all Iwan dispositions are equivalent. The restoring force f_r is now assumed to be derived from the parallel-series Iwan model. Note that the linear part of the restoring force is taken into account by the Iwan model.

The amplitude that governs the dynamic of this Iwan oscillator is the modal coordinate p . It is associated with the shape \mathbf{v} . This formulation allows for the identification of a joint subjected to a given load. The identified model can be used for larger structure by considering the joint as a component of it, see [FCD13].

7.4 Identification of the joint dynamic

7.4.1 Identification of the equivalent parameters with Kalman filters

This section focuses on the experimental identification of the test bench. Using an appropriate force excitation, the structure bench is excited on a unique mode. The free decay of this mode enable to identify its equivalent frequency and damping properties. A feature of weakly non-linear structures is that each mode mainly responds on the first harmonic of the resonant frequency. The equivalent modal parameters are those estimated from the first harmonic. The measured signals are generally polluted by noise and a small contribution of other modes. The contribution of a mode can be extracted from the signal using Butterworth zero phase filtering [HSM⁺04], the wavelet transform [HFP09], the empirical mode decomposition [EKL⁺13] or Kalman Filtering (KF) [DSCF13].

In this paper the KF method is used. KF refers to a family of algorithms that track the temporal evolution of a system by estimating the two first central moments of its states. The linear KF and the Extended KF (EKF) have been widely used over the past decades in the case of discrete systems. KF methods are performed in order to compute the optimal estimations of the system according to an expected shape of solution. In the present case, the time evolution is assumed to be pseudo-harmonic. The used KF formulation is built in order to minimize the quadratic norm between the analytically integrated signals (the measured signals are accelerations) and the expected movements at each measuring point. For each mode m , the analytical signal is estimated at each measuring point i and two additional states, that are common for all points, governs the evolution of the instantaneous frequency and damping terms. The instantaneous state of mode m at point i , is :

$$x_{m,i}(t) = X_{m,i} \exp((- \xi_m(t) \omega_m(t) + j \omega_m(t) \sqrt{1 - \xi_m(t)^2}) t) \quad (7.7)$$

The KF identify the evolution with amplitude of the equivalent frequency and damping properties of each mode. The used process is based on the method previously presented in [DSCF13]. In the present work, the "Unscented" KF (UKF) formulation is used, see [JU04] for details. The method is very effective and converges very fast which is an important feature for the study of transient responses.

7.4.2 Equivalent frequency and damping properties of the Iwan oscillator

In this section, Iwan oscillator properties are investigated thanks to a cyclic steady state regime of peak amplitude p_m .

- The equivalent angular frequency of the macro-model is the root of the ratio between the equivalent stiffness and the mass of the model :

$$\omega_{\text{Iwan}}^2(p_m) = \frac{k_{eq}(\theta, p_m)}{m} \quad (7.8)$$

Theoretically, the slight alteration of the mode shape with amplitude generates the dependence of the modal mass to the modal coordinate. It is assumed that the non-linear effects are only supported by the stiffness. In the case where mode shapes are normalized to the mass matrix, the mass of the model is equal to 1.

- The equivalent damping of the macro-model at peak amplitude p_m is the ratio between the dissipated energy per cycle D and the total conservative energy E of the model :

$$\xi_{\text{Iwan}}(p_m) = \frac{D(p_m)}{4\pi E(p_m)} = \frac{D(p_m)}{2\pi k_{eq}(p_m) p_m^2} \quad (7.9)$$

The dissipation per cycle is the work of the friction force. The total conservative energy is equal to the maximum of strain energy over a cycle which is equal to the equivalent stiffness times the square of the amplitude divided by two.

The equivalent stiffness is estimated thanks to the force-displacement curve as shown in figure 7.4. The stiffness is approximated by the ratio between the maximum force and the maximum amplitude over a cycle of peak amplitude p_m :

$$k_{eq} = \frac{f_r(p_m)}{p_m} \quad (7.10)$$

The actual equivalent stiffness should be estimated from the first term of Fourier expansion of the Iwan force. Figure 7.4 compares the equivalent stiffness computed from Fourier expansion and the approximated definition for different amplitudes. The equation 7.10 slightly overestimates the stiffness. However, the error is only significant for extremely large amplitudes when full sliding regime is obtained, see $k(3)$ in fig 7.4. This case is not expected under the weak non-linear assumption.

The parallel-series Iwan model is a parallel association of Jenkins elements. The i th Jenkins elements is the series association of a linear spring of stiffness σ and a Coulomb slider of breaking force $f_i = \sigma p_i$. The continuous Iwan model has an infinite number of Jenkins sliders arranged according to a continuous breaking forces density $\phi(f_i)$. Iwan [Iwa66] derived the force to a monotonic pulls from the distribution :

$$\frac{\partial^2 f_r}{\partial p^2} = -\varphi(p) \quad (7.11)$$

The parameter σ is removed from the equations by considering the maximum displacement distribution $\varphi(p_i)$ instead of the breaking force distribution $\phi(f_i)$, see [Seg02]. The dissipation per forcing cycle of maximum amplitude p_m is related to the distribution by :

$$D(p_m) = 4 \int_0^{p_m} p(p_m - p)\varphi(p)dp \quad (7.12)$$

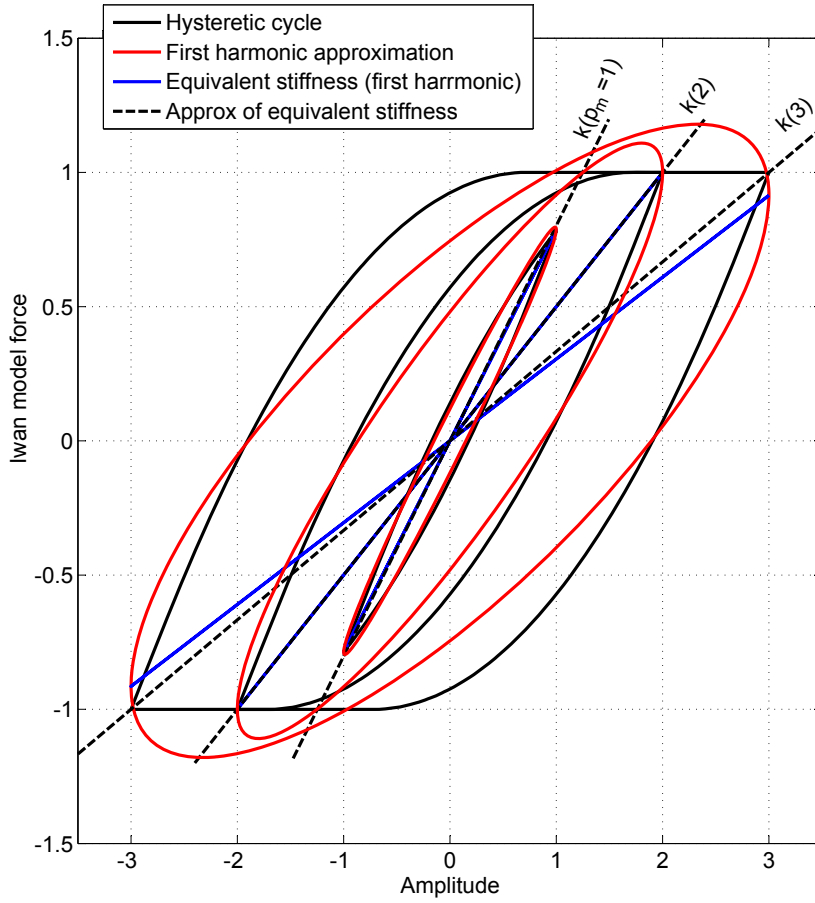


Figure 7.4 – How the equivalent stiffness is calculated. This approximation allows for an analytical formulation.

After two integration by parts, the dissipation per cycle is derived from equation 7.11 and 7.12 into :

$$D(p_m) = 8 \int_0^{p_m} f_r(p) dp - 4p_m f_r(p_m) \quad (7.13)$$

In [Seg02], Segalman assumed a power law distribution of the force. The relationship between the dissipation per cycle and the force is generally unknown. In order to keep any possible shape of the force distribution, the integral is numerically integrated using a trapezoidal approximation. A linear sampling on N points is considered from zero to the largest amplitude considered p_m^{max} . The n^{th} increment is given by :

$$p_m^n = \frac{n}{N} p_m^{max} \quad (7.14)$$

The restoring force at zero amplitude is null. Thus, equation 7.13 is discretized as :

$$D(p_m^n) = \frac{4(1-n)p_m^n f_r(p_m^n)}{n} + \frac{8p_m^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f_r(p_m^k) \quad (7.15)$$

Replacing the restoring force by the angular frequency according to equation 7.10 and 7.8 into equation 7.15 yields :

$$D(p_m^n) = \frac{4(1-n)(p_m^n)^2 \omega_{\text{Iwan}}^2(p_m^n)}{n} + \frac{8p_m^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} p_m^k \omega_{\text{Iwan}}^2(p_m^k) \quad (7.16)$$

Finally, the relationship between the damping ratio and the angular frequency is derived from equation 7.9 as :

$$\xi_{\text{Iwan}}(p_m^n) = \frac{2(1-n)}{\pi n} + \frac{4}{\pi n^2 \omega_{\text{Iwan}}^2(p_m^n)} \sum_{k=1}^{n-1} k \omega_{\text{Iwan}}^2(p_m^k) \quad (7.17)$$

This formula allows to compute the damping curve that should be obtained by a Iwan oscillator knowing the evolution of the angular frequency with the amplitude.

Similarly, a frequency curve can be obtained from an experimentally identified damping curve. This is obtained with equation 7.17 from $n = 2$ to $n = N$:

This triangular matrix is not singular since all its diagonal terms are strictly positive.

The evolution of the angular frequency can be deduced from the damping ratio when ω_0 ($= \omega_{Iwan}(p_m^1)$) is known, *i.e.* the damping curve is not related to the absolute frequency but to the relative softening of the system.

7.5 Experimental investigations

7.5.1 Experimental setup

The dynamic behavior of joints is studied thanks to the experimental rig depicted in figure 7.5 referred to as the "H-bench". This small structure consists of two beams connected by a lap-joint and two seismic masses. The beams are made of steel and the dimensions of the structure are given in the appendices. Seismic masses and beams are glued together and tightened with M10 bolts on each side of the structure. The glue associated with a strong clamping of the M10 bolts ensure a very weak dissipation and high stiffness of these joints. The lap-joint is assembled with two M6 bolts in the center of the structure and four M4 bolts close to the edges.

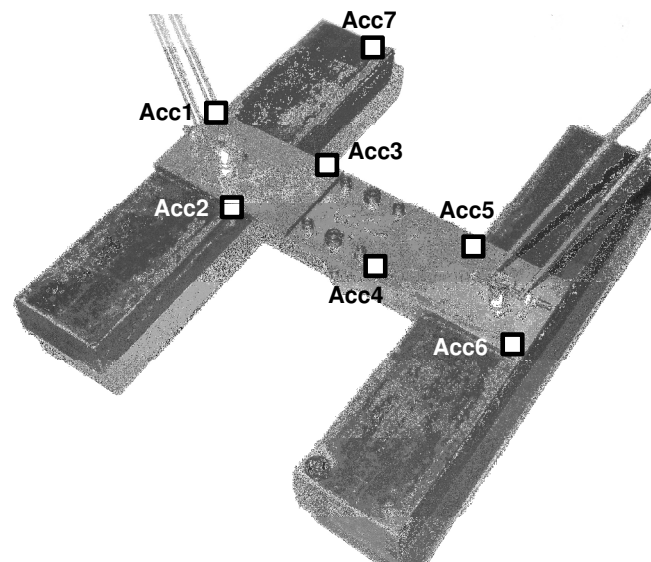


Figure 7.5 – A picture of the H test-bench

This bench is designed to load the joint according to a torsional and/or a bending motion thanks to the two first modes. A linear FEM allows to compute these two modes in free boundary conditions. The first mode (Torsional load

denoted T) and the second mode (Bending load denoted B) are depicted in figure 7.6.

The expected resonant frequencies are far enough and are not in a harmonic ratio. The magnitude of the displacement field is pictured from white (no displacement) to black (maximum displacement). According to this simulation, the two first modes have two common vibrational nodes where the vibrational lines (highlighted by the dashed lines) intersect. The free boundary conditions are obtained by hanging the structure with nylon cables at these points. Extensive repeatability tests were performed before experiments to assure reproducibility of the free boundary conditions. The acceleration of the test bench is measured at six points along the beam and an additional point is measured at the end of the seismic mass as depicted in figure 7.5. A hammer impact at point 1 allows for the computing of the low amplitude mass-normalized modal basis \mathbf{V} . Figures 7.6, 7.7 and 7.8, respectively show the measured acceleration response at point 7, and the identified shapes of the torsional and the flexural modes.

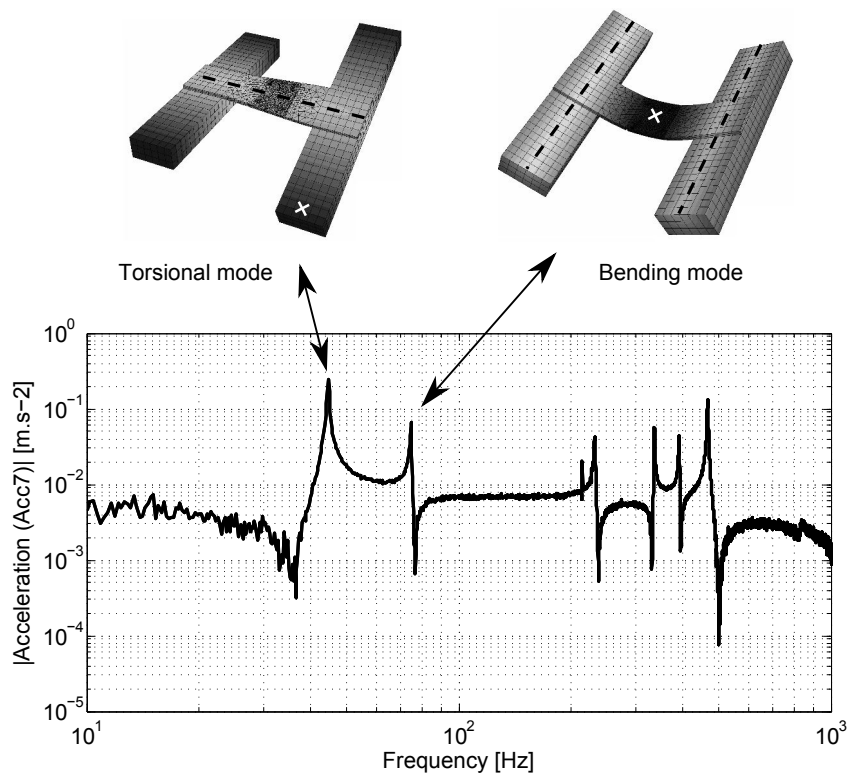


Figure 7.6 – Acceleration frequency response (Acc7) to low amplitude hammer hit

At low amplitude, the resonant frequency of the first mode T, is 44.5Hz. The frequency of the second mode B, is 76.7Hz. The two first experimental mode shapes are depicted in figures 7.7 and 7.8. The third mode, which has a natural frequency of 232Hz, is the second bending mode of the structure. In figure 7.7, the sign of the measured shape has been corrected as if all the accelerometers

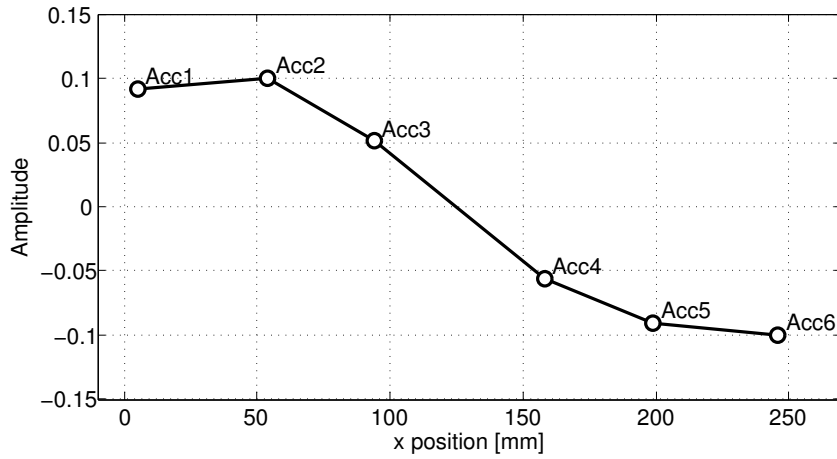


Figure 7.7 – Experimental mass-normalised mode shape of the torsional mode

were on the same side of the beam. This correction is made to highlight the torsional motion.

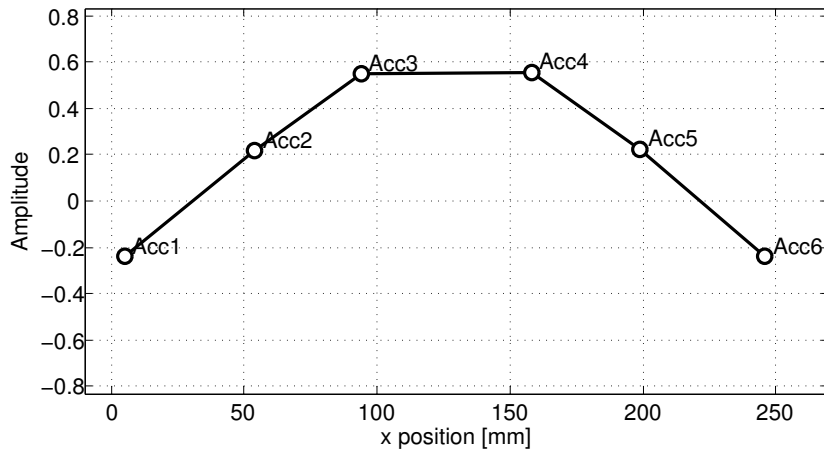


Figure 7.8 – Experimental mass-normalised mode shape of the bending mode

7.5.2 Estimation of the equivalent parameters

The H-bench is designed so it can be excited on each mode separately with an impact hammer. A white cross shows the hit position used for each mode in figure 7.6. The impact points are placed at the intersection of the largest amplitude on the mode and the vibrational line of the other. The mass of the hammer and the flexibility of its tip are chosen in order to have a cutting frequency just over the second mode ($\sim 100Hz$). The structure is strongly hit and the free decay of one of these two mode can be observed.

The identification process is now only detailed in the case of the bending mode. For the identification part, this case was the "worst" because it was one for which the pollution of the higher modes was the highest. The exact same process is used for the torsional mode in the following sections. Figure 7.9 shows the free decay of the bending mode measured at measuring points 6. The low dynamic rigid motions due to the free boundary conditions are remo-

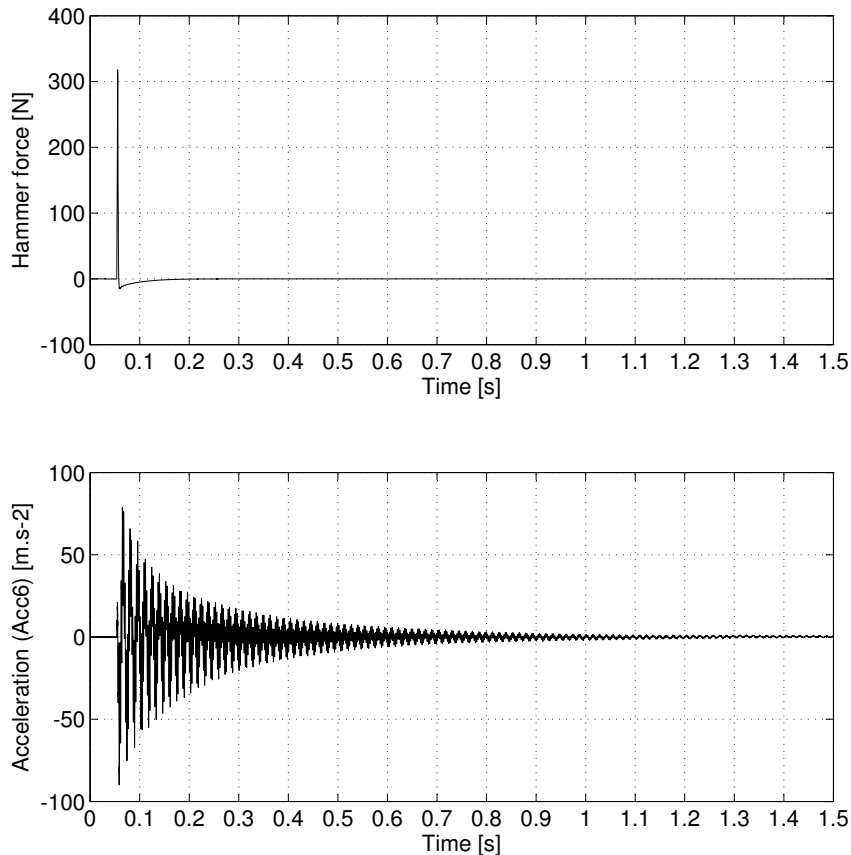


Figure 7.9 – Acceleration time response (Acc6) to heavy hammer hit

ved from signals using a Butterworth high-pass filters of orders 4 and cutoff frequency 5Hz. The structure responds with large vibration amplitudes so the joint undergoes large distortions. Figure 7.10 shows the Fourier transform of the measured force and acceleration at point 6.

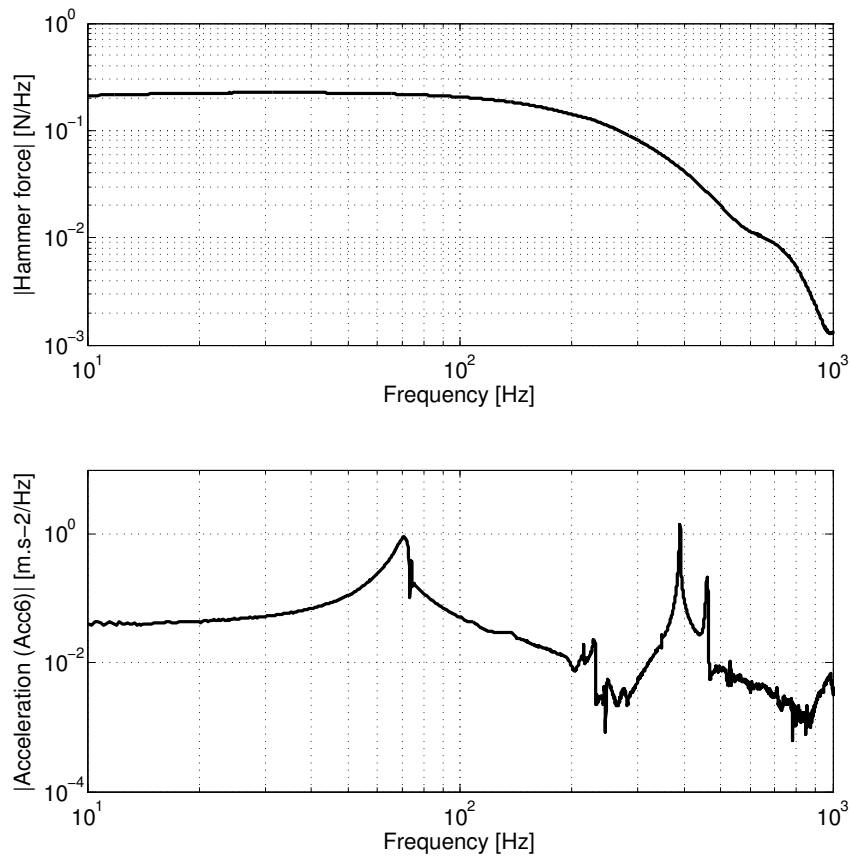


Figure 7.10 – Acceleration response to heavy hammer hit in frequency domain ; measured at point 6

Note that the torsional mode is not excited at all thanks to the location of the hammer hit. Besides the harmonic ratio is extremely low. Two modes (natural frequencies : 389Hz and 461Hz) are somewhat excited and non-negligible amplitudes are observed in the acceleration signals. Nevertheless, the displacement amplitudes of these modes are very weak compared to the amplitude of the studied mode. It is assumed that these modes are not coupled with the bending mode.

From the measured signals, it is necessary to extract the contribution of the bending mode. The previously presented KF method allows for it by estimating the current modal amplitude, frequency and equivalent damping ratio of these three modes. Figure 7.11 shows the first periods of the measured acceleration at point 6 and the Kalman estimation. The signal is decomposed into the contribution of three modes. The frequency and damping states of a mode are common for all measuring points. The use of several accelerometers improve the robustness of the algorithm and the identification.

The fidelity of the estimated amplitude is extremely high. The formulation of these Kalman filters is based on an analytical description of signal so the

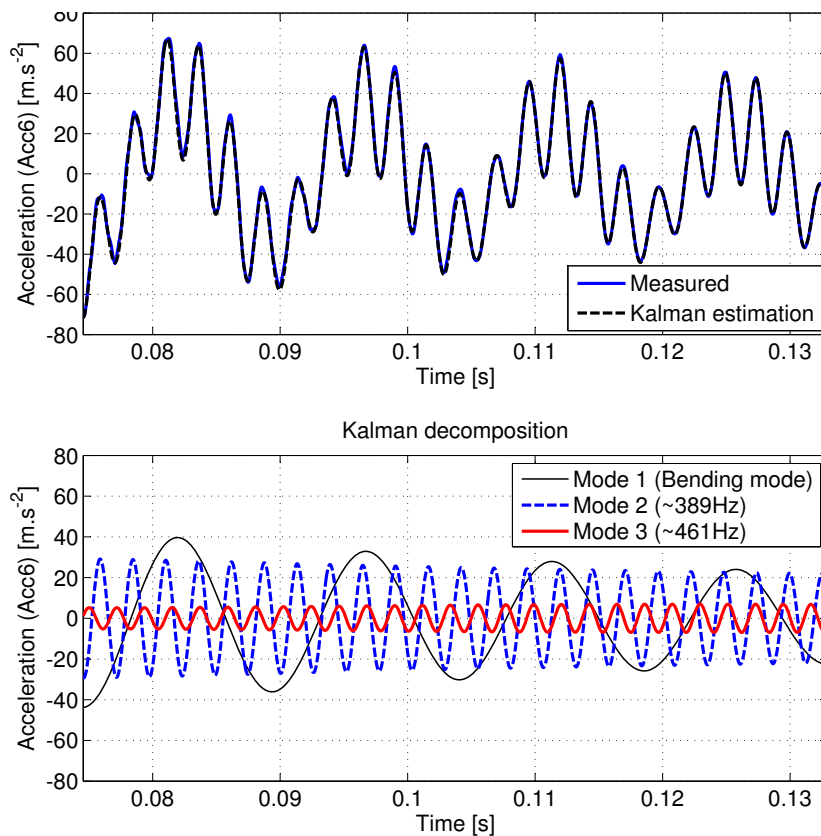


Figure 7.11 – The first periods of the measured acceleration (Acc6) - Kalman estimation and decomposition of the signals - The measured response is decomposed according to the contribution of each mode.

imaginary part of the real signal (*i.e.* the Hilbert transform of the real signal) is estimated too. Figure 7.12 shows the first periods of the estimated analytical signal of the first mode.

The estimation of the instantaneous modulus and phase is performed directly by the Kalman filters using the data of accelerometers 1 to 6. Based on the previously identified mass-normalised mode shape, pictured in figure 7.8, and a double integration over time, the estimated instantaneous frequency and damping ratio can be given in terms of the modal amplitude of the bending mode.

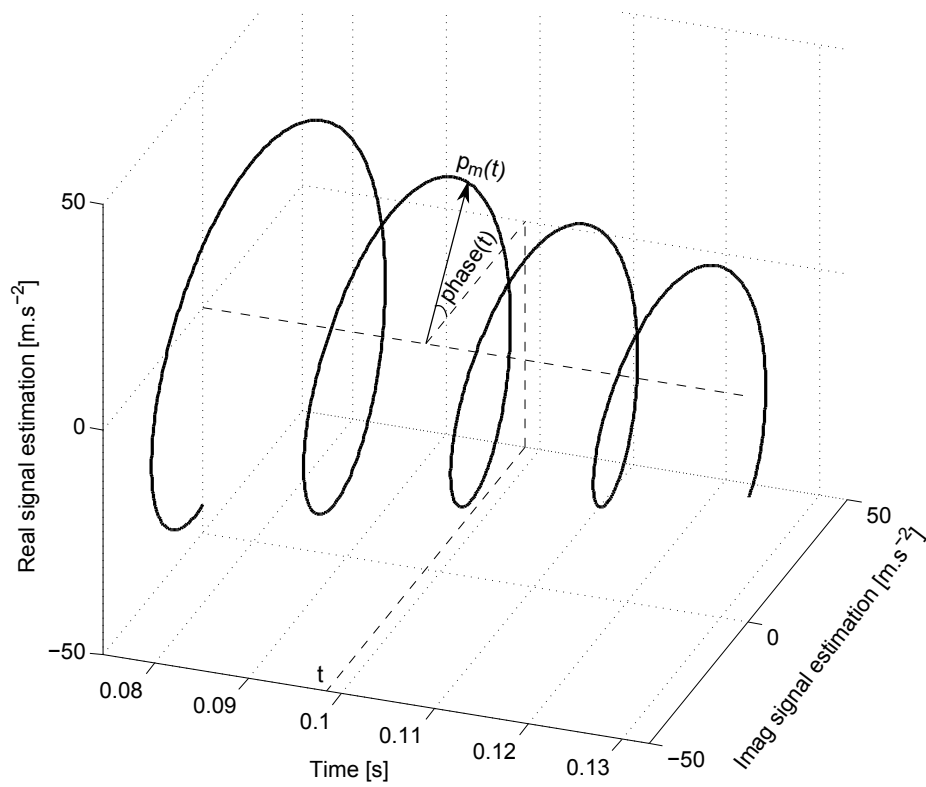


Figure 7.12 – The first periods of the estimated analytical amplitude of the first mode (Bending mode)

7.5.3 Iwan oscillator versus experiments

In order to evaluate the robustness of the model, three tightening configurations are studied on the H bench structure. The four M4 bolts are clamped with a torque of 0.5Nm, 1Nm or 2Nm. For all configurations, M6 bolts are clamped with a torque of 15Nm. The identification process is achieved the same way for all configurations. Figure 7.13 and 7.14 respectively show the evolution of the damping ratio and frequency along with the amplitude at point 6 of respectively the torsional mode and the bending mode.

Equations 7.17 and 7.18 give a straightforward way to evaluate the ability of Iwan oscillator to model the dynamic behavior of the system. From equation 7.17 and the experimentally identified frequency curve, a damping curve is computed (referred to as the "Iwan model from frequency" curves in figures 7.13 and 7.14). The similar approach is carried out from equation 7.18 and the experimentally identified damping curve to compute the frequency curve that is in accordance with the Iwan model (referred to as the Iwan model from damping curve).

At near-zero amplitudes, the damping is not null contrary to expected in the model. This small damping is probably caused by micro-sliding between contact asperities at very low amplitude or other sources such as material damping or due to the experimental boundary conditions. This "parasitic" damping is taken into account thanks to an assumed constant damping terms ξ_0 . This constant coefficient is identified by choosing the one that minimize the quadratic norm between the measured curves and those calculated from the model.

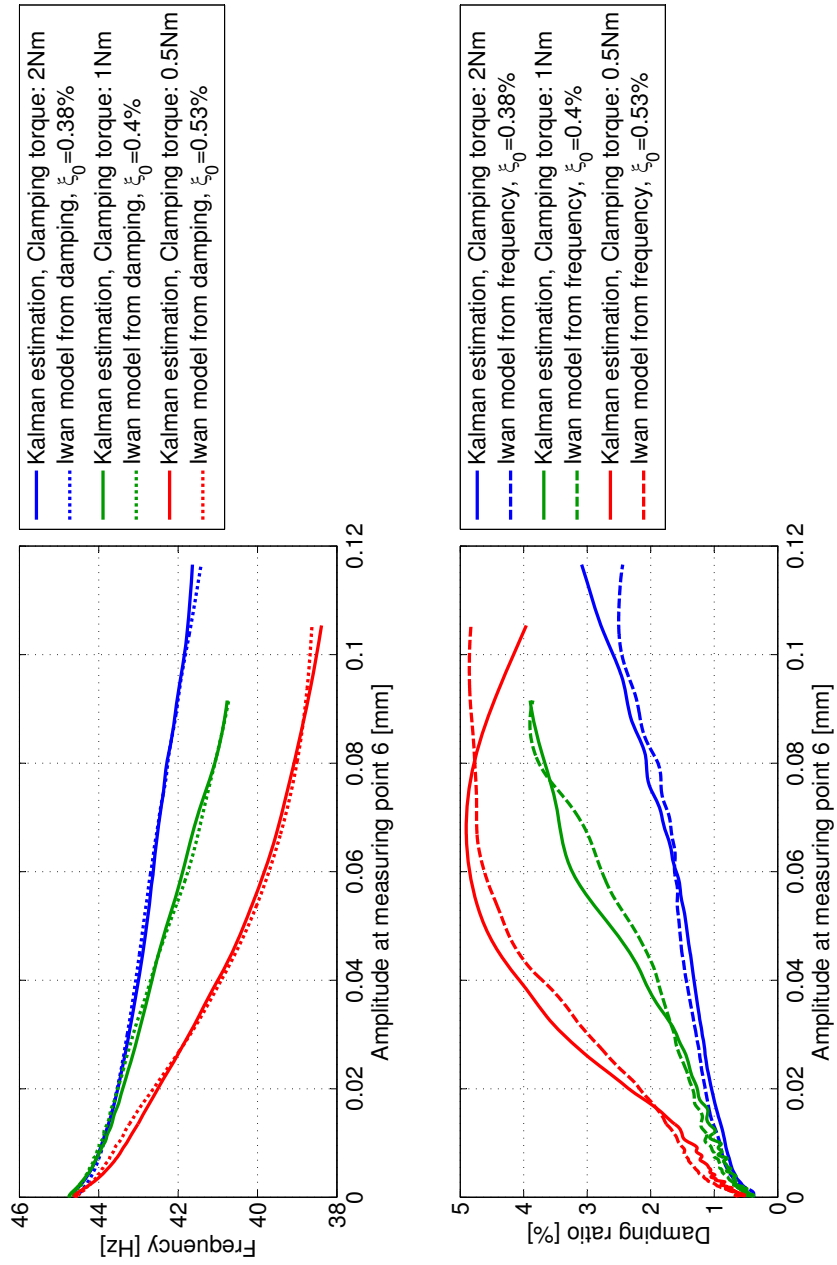


Figure 7.13 – Torsional mode - Evolution of frequency and damping ratio with peak modal amplitude estimated with the Kalman filtering method

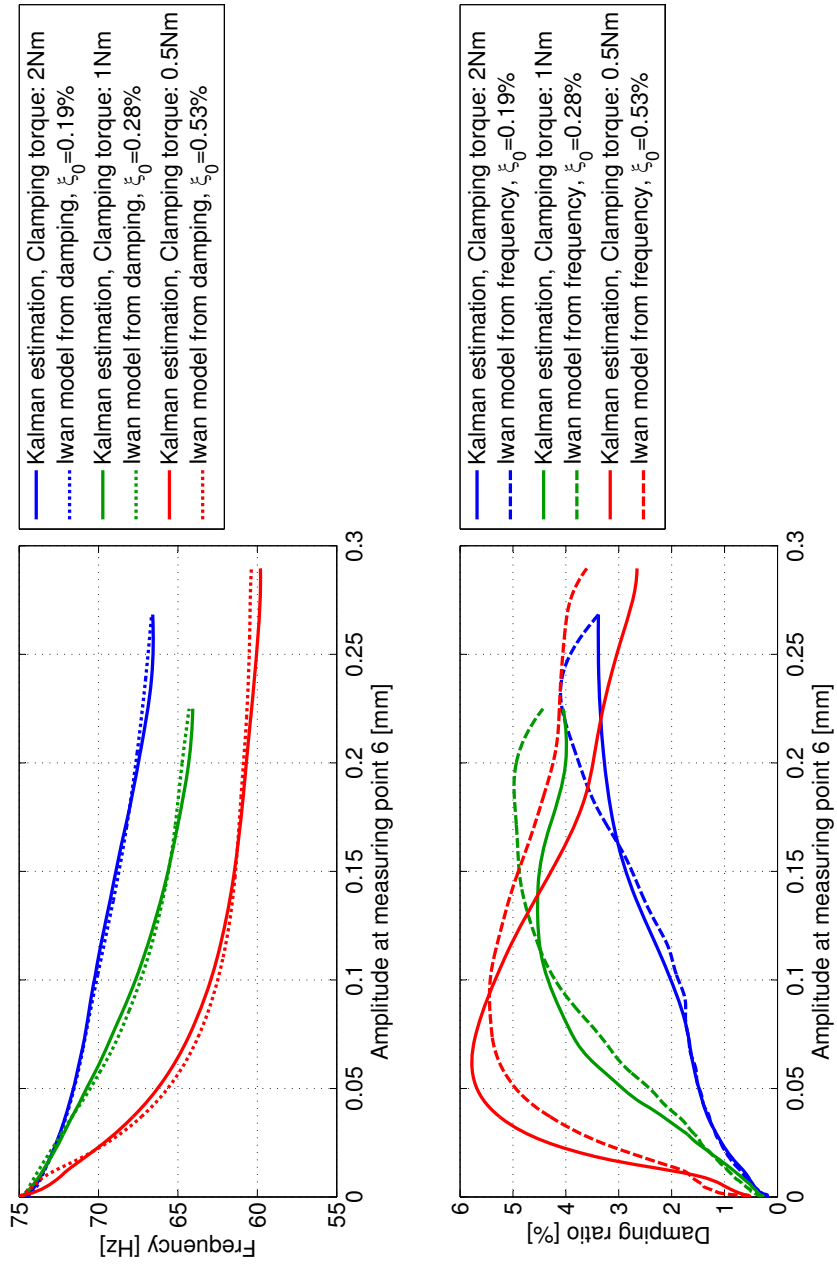


Figure 7.14 – Bending mode - Evolution of frequency and damping ratio with peak modal amplitude estimated with the Kalman filtering method

The frequency curves computed from the identified damping curves very closely fit the identified frequency curves for all configurations. The sensitivity of the damping ratio parameters reveals higher distances between the damping curves computed from the identified frequency curves, and the identified damping curves. Nevertheless these results show that the fundamental characteristics of the system are reproduced by the Iwan model.

This observation is unexpected looking at the wear of the contact surface of the lap-joint. Indeed an important part of the wear is located at the edges as highlighted by the white rectangles in figure 7.15. This wear confirms that the contact pressure field, that is initially located around the bolts and null at the edges, is altered as the amplitude increases. Finally equations 7.17 and 7.18 have allowed to know if Iwan oscillator was good enough to fit the observed behavior.

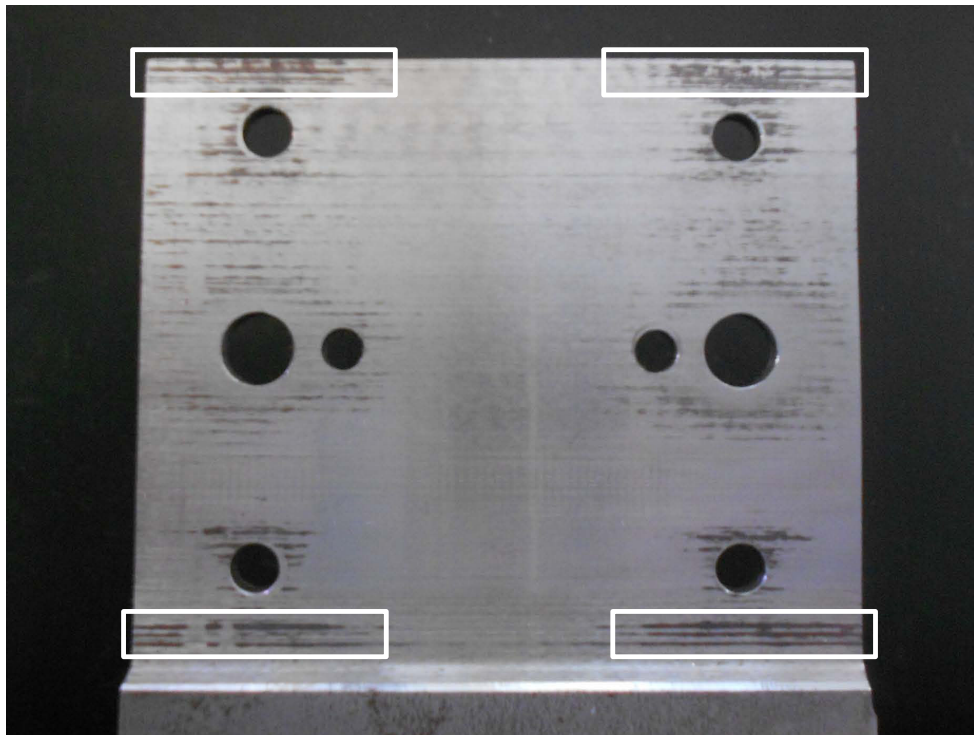


Figure 7.15 – The wear of the contact surface

7.6 Modal de-coupling assumption

7.6.1 Modal coupling

In the previous section, it is shown that the Iwan model is able to reproduce the global behavior of an elementary jointed structure under a monotonic excitation. In larger structures, bolted connections undergo several of these loads simultaneously. The first assumption made in this paper was to consider that all the deformations undergone by the joint can be generated using Ritz decomposition. At the same time, it is rather commonplace to assume the de-coupling between the elements of the Ritz basis (see *e.g.* [Hel05],[Cai09] or [Seg07]) : **The projection of the restoring force on an element \mathbf{v} of the modal basis only depends on the modal coordinate associated with this element.**

Of course, this hypothesis is theoretically not verified since the occurrence of sliding depends on local tangential forces, *i.e.* not on generalised motions. This assumption is made for practical reasons : Today, there is no macro-model that is able to take into account the case of multi-mode excitations. Besides, the experimental identification of this hypothetical model is virtually impossible for more than two modes since these terms may depend on the amplitudes, frequencies and phases of each mode. For these practical reasons, **the use of macro-model for the simulation of multi-frequency excitation (*e.g.* random response) relies on the validity of this hypothesis.**

7.6.2 Experimental investigations

The coupling between the first torsional and the first bending modes of the H-bench structure is investigated. Coupling forces between these two modes depends on the amplitudes, frequencies and phases of each mode. For this reason, the random vibration of the structure is studied and the obtained response is a mean value in terms of amplitude and phase. The structure is connected to an electromagnetic-shaker with a flexible rod at point 7. A force transducer is fixed between the rod and the structure. The excitation force is controlled in order to enforce a given PSD acceleration at the exciting point. The servo control system, which ensures the PSD set, is composed of a computer with the *vibration research software* provided by B&K. The servo chain is depicted in figure 7.16. The idea of this experiment is to consider the evolution of the transfer function of a given mode when increasing the amplitude of the other one. If the modal de-coupling assumption is true, the transfer function of a given mode only depends on its own amplitude.

The results are obtained once the wanted PSD set is stabilised. The two first modes of the structure are excited on a bandwidth centred around their natural frequency spanning $\pm 20\%$ of the central frequency. For each mode, 3 constant PSD amplitudes are considered as it is shown in figure 7.17. The

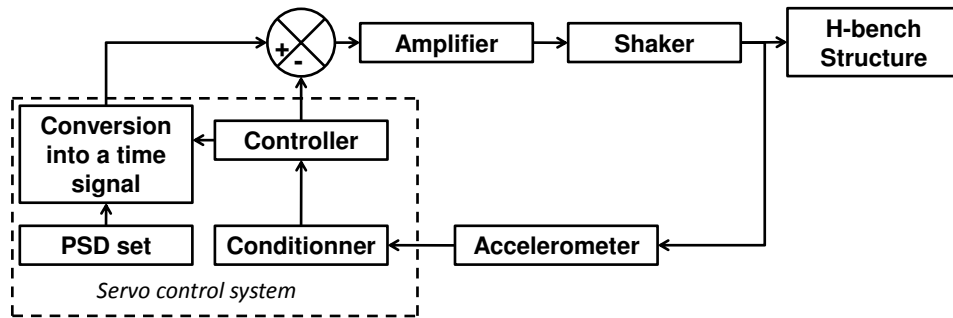


Figure 7.16 – The servo-control system ensure the wanted PSD sets

pictured PSD sets are the weighted autospectra of the controlled acceleration (Acc7) using 200 blocks windowed by Hanning windows. The obtained frequency resolution is 0.34Hz. The amplitudes are respectively denoted 1, 2 and 3 for low, medium and large amplitudes. TIFJ denotes the PSD set for which the torsional mode is excited with PSD amplitude $n^{\circ}I$ and the bending mode with PSD amplitude $n^{\circ}J$.

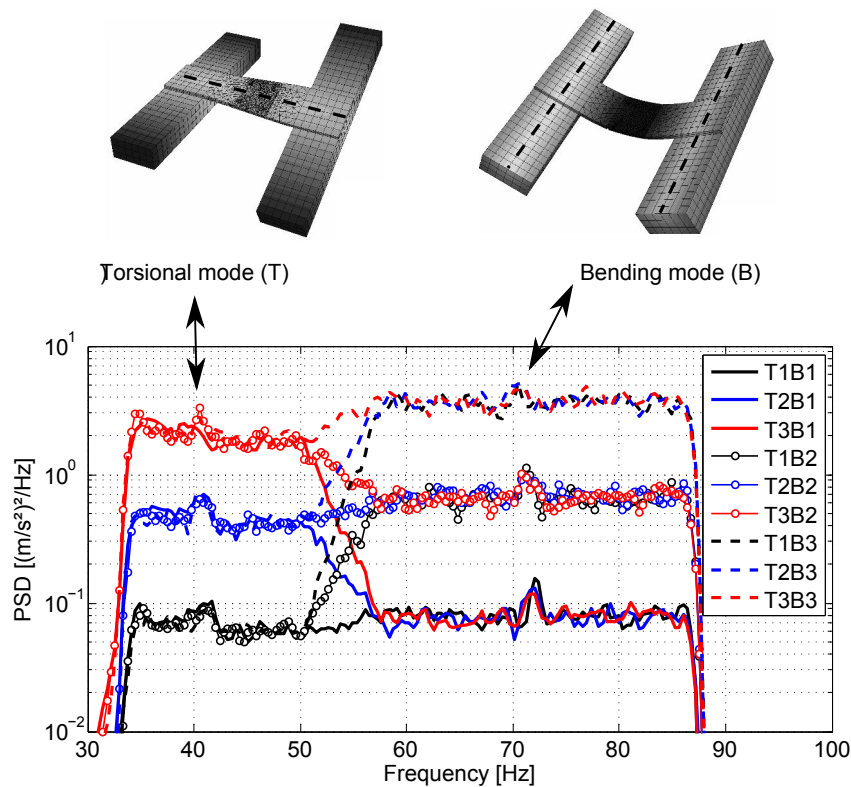


Figure 7.17 – 9 acceleration PSD sets are applied in turn to the structure at point 7.

In order to consider the coupling effects, the 9 PSD combinations are applied, in turn, to the structure.

The transfer function estimator H_1 between the excitation force F_7 and acceleration A_6 (with Acc6) is considered.

$$H_1(j\omega) = \frac{A_6(j\omega)F_7^*(j\omega)}{F_7(j\omega)F_7^*(j\omega)} \quad (7.19)$$

Figure 7.18 and 7.19 shows the Bode diagrams of H_1 for the frequencies respectively around the torsional and the bending mode for the 9 PSD sets. Since the larger amplitude 3 is relatively severe for both modes, bolts may slightly loose during operation. In order to avoid this situation, the responses of the structure, before and after the test campaign, are compared.

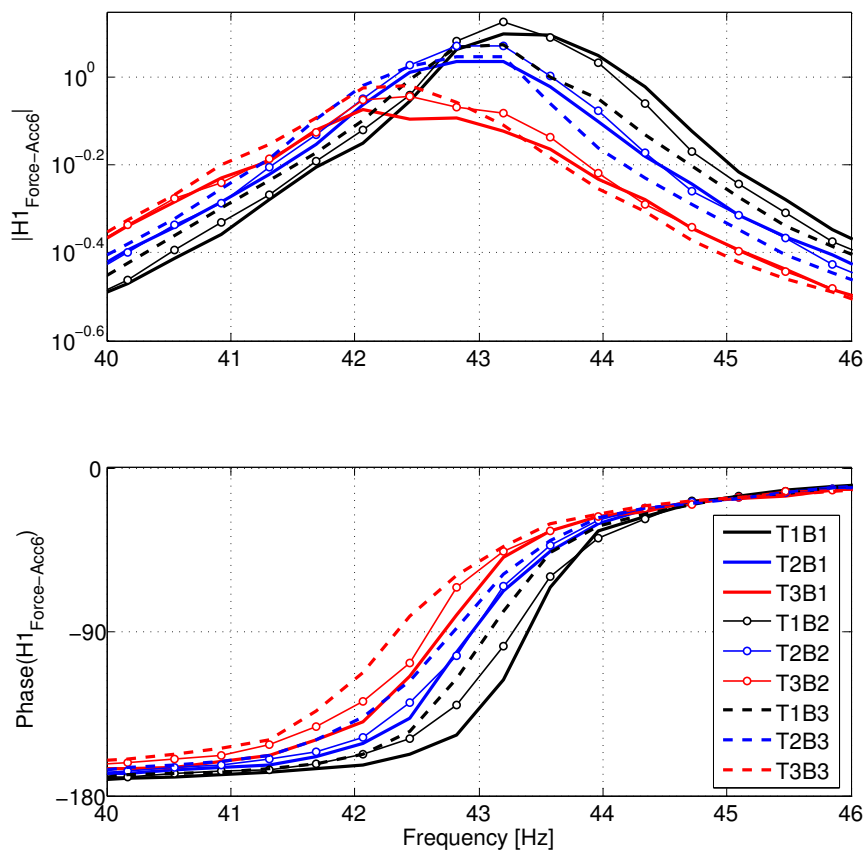


Figure 7.18 – Bode diagram of the Torsional mode for different PSD sets. This figure illustrate the modal coupling which is observable by looking at the evolution of the response for constant T amplitude (curves with the same color).

In graph 7.18, the coupling effects are observable by looking at the evolution of the response for constant T amplitude (curves with the same color).

In graph 7.19, the coupling effects are observable by looking at the evolution of the response for constant B amplitude (curves with the same shape).

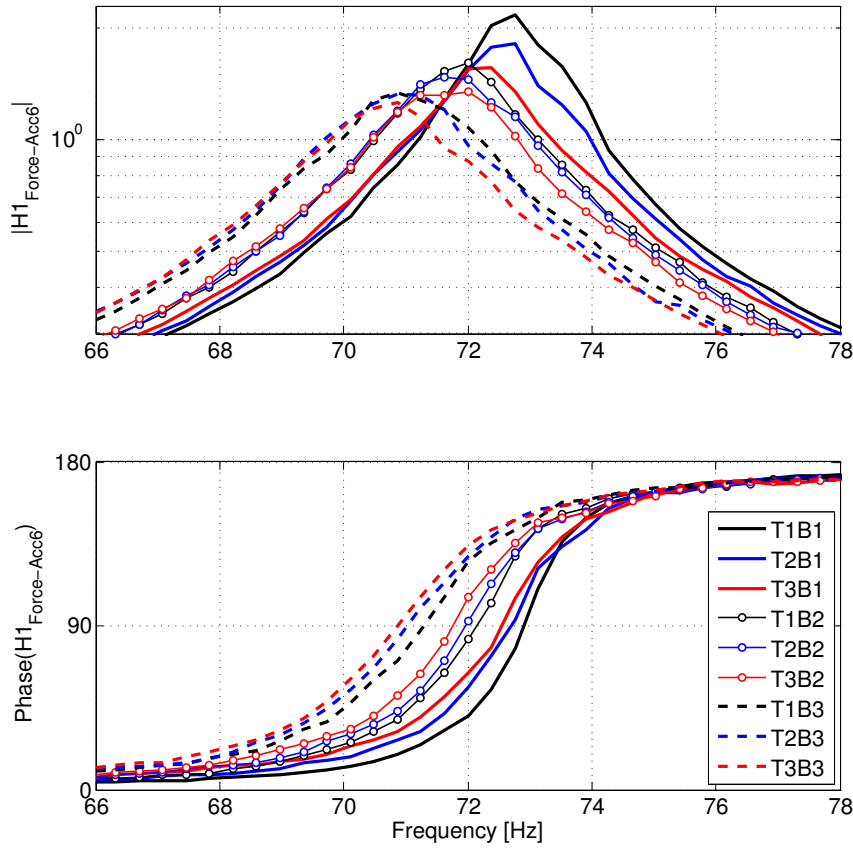


Figure 7.19 – Bode diagram of the Bending mode for different PSD sets. This figure shows the modal coupling which is observable by looking at the evolution of the response for constant B amplitude (curves with the same shape).

These results clearly shows that the modal-decoupling assumption is not confirmed. Specifically, in graph 7.18, the transfer function of the torsional mode is not independent of the amplitude of the bending mode. Similarly, in graph 7.19, the transfer function of the bending mode is not independent of the amplitude of the torsional mode. In order to evaluate the "amount of coupling effect", the evolution of frequency and absolute value at quadrature to the amplitudes of the modes are considered within the following ratios :

- the difference of frequency at quadrature $\Delta_f(TiFj) = 100 * \frac{|f_{TiFj}^{quad}| - \max_{i,j}(|f_{TiFj}^{quad}|)}{\max_{i,j}(|f_{TiFj}^{quad}|)}$
- the difference of the absolute value of the transfer response function at quadrature $\Delta_{|H|}(TiFj) = 100 * \frac{|H_{TiFj}^{quad}| - \max_{i,j}(|H_{TiFj}^{quad}|)}{\max_{i,j}(|H_{TiFj}^{quad}|)}$

These ratios are plotted in figure 7.20 for the two considered resonances.

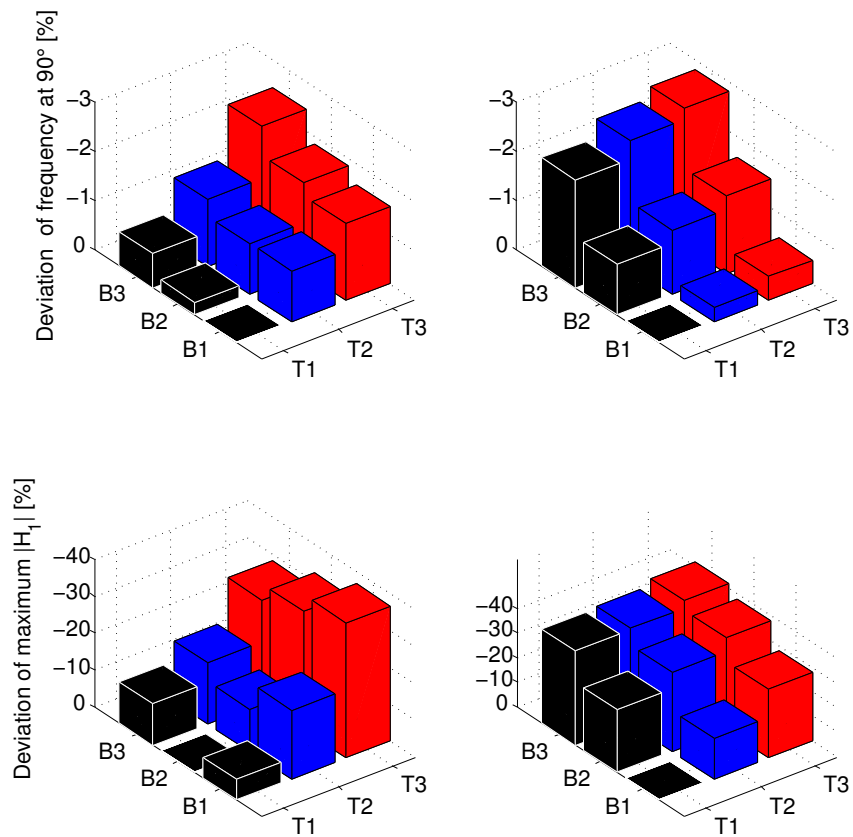


Figure 7.20 – Deviation ratio of frequency and absolute value at quadrature with the amplitudes of the modes

This graph shows that the torsional mode plays a more important role on the response of the joint around 43Hz than the bending mode does, both in terms of resonant frequencies and amplitudes. Similarly, the same behavior is observed on the response of the joint around 72Hz (see graph 7.19) : the amplitude of the bending mode plays a more important role than the torsional mode.

Nevertheless, the overall result shows that the coupling effects are **not negligible**. These coupling effects are actually expected since the local physics of the contact interfaces is strongly non-linear and depends on the local forces.

7.7 Conclusion

This paper focus on the use of macro-model for jointed structures. A generic formulation is investigated to obtain the relationship between the frequency and damping parameters of an Iwan oscillator. The obtained semi-analytical formulae allows to know if a system is consistent with the Iwan model, using easily identifiable properties. In the case of mono-harmonic excitations, the results suggest that the generic model is adapted to model the dynamic behavior of joints under any kind of loading case. On the contrary, it is shown that the frequency and damping properties of a mode depends on the amplitude of the other ones. These coupling effects are a serious limitation to the use of macro-models for joints. In the presented definition, mode shapes are considered unaltered by the amplitude of vibration. The presented results suggest a need for models in which the restoring force simultaneously depends on the amplitude of several modes.

Bibliographie du chapitre 7 : Modèles de Iwan

- [AB11] I.I. Argatov and E.A. Butcher. On the iwan models for lap-type bolted joints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(2) :347–356, March 2011.
- [AJ07a] H. Ahmadian and H. Jalali. Generic element formulation for modelling bolted lap joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5) :2318–2334, July 2007.
- [AJ07b] H. Ahmadian and H. Jalali. Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2) :1041–1050, February 2007.
- [BRS⁺11] S. Bograd, P. Reuss, A. Schmidt, L. Gaul, and M. Mayer. Modeling the dynamics of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(8) :2801–2826, November 2011.
- [Cai09] A. Caignot. *Prédiction par essais virtuels de l’amortissement dans les structures spatiales*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Cachan, 2009.
- [Dah68] P. R Dahl. A solid friction model. Technical report, Space and Missile systems organization air force systems command, May 1968.
- [DSCF13] J.L. Dion, C. Stephan, G. Chevallier, and H. Festjens. Tracking and removing modulated sinusoidal components : A solution based on the kurtosis and the extended kalman filter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013.
- [DWOAL95] C.C. De Wit, H. Olsson, K.J. Astrom, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3) :419–425, 1995.
- [EKL⁺13] M. Eriten, M. Kurt, G. Luo, D. McFarland, L. A. Bergman, and A.F. Vakakis. Nonlinear system identification of frictional effects in a beam with a bolted joint connection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39(1–2) :245–264, August 2013.
- [FCD13] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013.
- [Fol98] E. Foltête. Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires. *These de doctorat, UFR des sciences et techniques de l’université de Franche-Comté*, 1998.
- [GIB11] H. Goyder, P. Ind, and D. Brown. Development of a method for measuring damping in bolted joints. pages 1253–1262, January 2011.

- [GK56] L.E. Goodman and J.H. Klumpp. Analysis of slip damping with reference to turbine blade vibration, journal of applied mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 23 :421, 1956.
- [GN01] L. Gaul and R. Nitsche. The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Reviews*, 54(2) :93–106, March 2001.
- [Gro85] M. Groper. Microslip and macroslip in bolted joints. *Experimental Mechanics*, 25(2) :171–174, June 1985.
- [Hel05] L. Heller. *Amortissement dans les structures assemblées*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2005.
- [HFP09] L. Heller, E. Foltête, and J. Piranda. Experimental identification of nonlinear dynamic properties of built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 327(1-2) :183–196, October 2009.
- [HSM⁺04] C. J. Hartwigsen, Y. Song, D. M. McFarland, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis. Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration. *Journal of Sound and Vibration*, 277(1-2) :327–351, October 2004.
- [Iwa66] W.D. Iwan. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 33 :893, 1966.
- [JU04] S.J. Julier and J.K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3) :401–422, 2004.
- [MBV01] X. Ma, L. Bergman, and A. Vakakis. Identification of bolted joints through laser vibrometry. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3) :441–460, September 2001.
- [MD68] A. F. Metherell and S. V. Diller. Instantaneous energy dissipation rate in a lap joint – uniform clamping pressure. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :333–340, March 1968.
- [PDCA10] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Microslip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02(02) :281, 2010.
- [QS05] D.D. Quinn and D.J. Segalman. Using series-series iwan-type models for understanding joint dynamics. *Journal of applied mechanics*, 72(5) :666–673, 2005.
- [Seg01] D.J. Segalman. An initial overview of iwan modeling for mechanical joint. *Sandia report*, SAND2001-0811, 2001.
- [Seg02] D.J. Segalman. A four-parameter iwan model for lap-type joints. *Sandia report*, SAND2002-3828, 2002.
- [Seg07] D.J. Segalman. Model reduction of systems with localized non-

- linearities. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2(3) :249, 2007.
- [SGC00] D.O. Smallwood, D.L. Gregory, and R.G. Coleman. Damping investigations of a simplified frictional shear joint. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (US); Sandia National Labs., Livermore, CA (US), 2000.
- [SM05] Y. Song and D. M. McFarland. Effect of pressure distribution on energy dissipation in a mechanical lap joint. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics journal*, 43(2) :420–425, 2005.
- [WO08] H. Wentzel and M. Olsson. Mechanisms of dissipation in frictional joints—Influence of sharp contact edges and plastic deformation. *Wear*, 265(11–12) :1814–1819, November 2008.

Conclusion et perspectives

Le principe de glissement partiel et l'amortissement que ce phénomène engendre au sein des structures boulonnées ou rivetées est un vieux sujet d'étude amorcé il y a plus de cinquante ans. Cependant, la littérature sur le sujet est relativement peu fournie avant la fin des années 90. Cette problématique suscite aujourd'hui un vif intérêt qui peut être mis en évidence par le nombre croissant de thèses, d'articles de revues ou de conférences et d'ateliers dédiés à ce sujet. Notons par exemple la constitution récente d'une communauté de scientifiques, principalement conduite par les laboratoires de Sandia et de l'Imperial college de Londres, qui ont notamment organisés trois sessions depuis 2006 intitulées "*Workshop on Jointed Structures*", la dernière ayant eu lieu en 2012 à la conférence de l'ASME IDETC/CIE à Chicago. En France, on peut citer les travaux de thèse de Heller [Hel05], de Caignot [Cai09], de Peyret [PDCA10] et de Jaumouillé [JSP10]. Notons qu'il existe aussi un intérêt croissant pour le problème connexe de modélisation de l'amortissement des pieds d'aubes de turbines, voir [Nac02].

Les travaux de cette thèse ont été soutenus par le pôle de compétitivité AsTech au travers du projet FUI MAIAS (Maîtrise des Amortissement Induit dans les ASsemblages) dans lequel sont impliqués, outre Supmeca, l'école des Arts et Métiers, EADS Innovation Works, l'ONERA, le CNES, la SOPEMEA, SD Tools ainsi qu'un certain nombre de PME spécialisées dans le secteur de l'aéronautique. Notons que la thématique est largement soutenue, avec le secteur de l'aérospatial (CNES), par l'industrie aéronautique (EADS, Onera) mais aussi par le secteur de l'énergie nucléaire (Sandia, CEA).

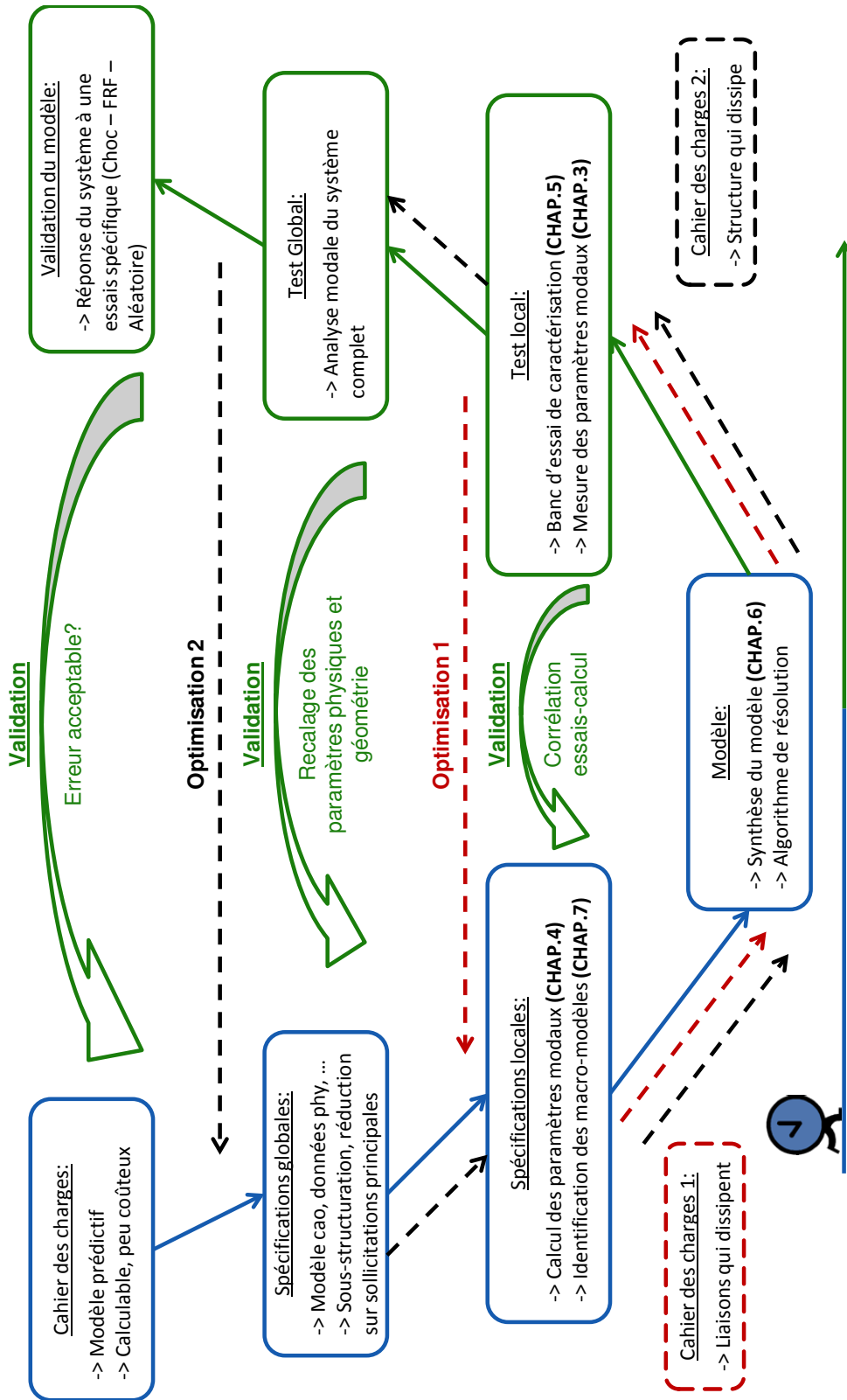
La caractérisation des amortissements propres permet d'estimer le niveau vibratoire d'une structure sous un chargement donné, ce qui bien sûr est essentiel pour le dimensionnement en fatigue vibratoire. Cette propriété est aussi fondamentale pour les problématiques de stabilité telles que rencontrées dans le cas du crissement de frein ou encore celle du problème de flotteur en aviation. Dans le premier cas, la fonction d'amortissement est généralement prise en charge par l'utilisation de matériaux viscoélastiques, voir [FCR⁺12]. Ces matériaux sont susceptibles d'engendrer un amortissement très important mais sont limités par la gamme de température pour laquelle ils peuvent être employés. Dans le cas des structures aéronautiques et aérospatiales les températures sont extrêmes et l'amortissement vibratoire est en grande partie dû au phénomène de glissement partiel dans les liaisons ce qui explique l'intérêt de cette industrie pour le sujet.

La prédiction de l'amortissement des structures assemblées *a priori*, c'est à dire lors de la phase de conception, est un objectif difficile à atteindre. Les travaux de la présente thèse ont été motivés par le souhait de répondre à ce problème d'une manière assez globale et notamment de faire le lien entre la caractérisation de la rhéologie locale d'une liaison et le modèle complet d'une grande structure. L'amortissement induit par micro-glissement est dépendant de l'amplitude vibratoire. Il est donc nécessaire de mettre en œuvre les principes dédiés aux systèmes non-linéaires aussi bien pour l'identification que pour la modélisation.

L'identification expérimentale a été traitée par une formulation originale du filtre de Kalman adapté au cas de vibrations des structures faiblement non-linéaires en régime libre. Cette technique a été mise en œuvre afin de réaliser une analyse paramétrique du comportement de bancs d'essais. Une méthode de caractérisation numérique basée sur une formulation quasi-statique a aussi été proposée. Elle vise à offrir une alternative peu coûteuse pour l'estimation des courbes de fréquences et d'amortissement. Les résultats présentés montrent une assez bonne corrélation entre essais et calculs.

L'originalité de la thèse réside aussi dans la formulation en modèle réduit. En pratique, l'approche modale classique ne peut pas être mise en œuvre dans le cas d'un modèle *a priori* car celle-ci nécessite le calcul des dissipations de chaque liaison pour chaque mode. Aussi, la dissipation induite au sein d'une liaison est liée aux variables locales. Ainsi, il n'est généralement pas possible de découpler les équations de mouvement dans une approche de réduction de modèle avec des mouvements généralisés. La présence de couplages modaux rend cette méthode théoriquement inutilisable pour les excitations autres que mono-fréquentielles. La méthode de réduction proposée est basée sur l'association de déformées locales principales associées à des rhéologies de Iwan. Cette formulation permet une caractérisation moins coûteuse des modèles qui par ailleurs sont en mesure de prendre en compte les effets de non-linéarité tels que l'assouplissement, la dépendance de l'amortissement aux niveaux vibratoires ainsi que les couplages modaux. Il a finalement été montré expérimentalement que le modèle de Iwan est, si ce n'est exactement représentatif de la physique locale, tout à fait adapté à la modélisation des liaisons.

Le schéma proposé à la page suivante est un aperçu ordonné de différents travaux la thèse. Il s'agit d'un diagramme basé sur le modèle du cycle en V. Les chapitres y sont ordonnés afin de fournir un processus de construction d'un modèle réduit de structure assemblé.



Vers la conception d'une liaison amortissante ?

La dissipation au sein des assemblages est un phénomène bénéfique pour l'intégrité d'une structure car elle permet de limiter le niveau vibratoire de celle-ci. Cependant, ce comportement dissipatif s'accompagne nécessairement d'un effet d'assouplissement qui au contraire n'est pas désirable. Cette particularité est propre au phénomène de contact glissant.

L'assouplissement d'une liaison est d'autant plus grand que la dissipation qu'elle engendre est importante. La forme de l'assouplissement joue aussi un rôle déterminant, si bien qu'il n'est généralement pas possible de déterminer un taux d'amortissement à partir d'un taux d'assouplissement. La figure 7.21 présente les courbes caractéristiques de plusieurs oscillateurs de Iwan dont le point commun est une diminution de la fréquence de résonance de 10% à l'amplitude 1.

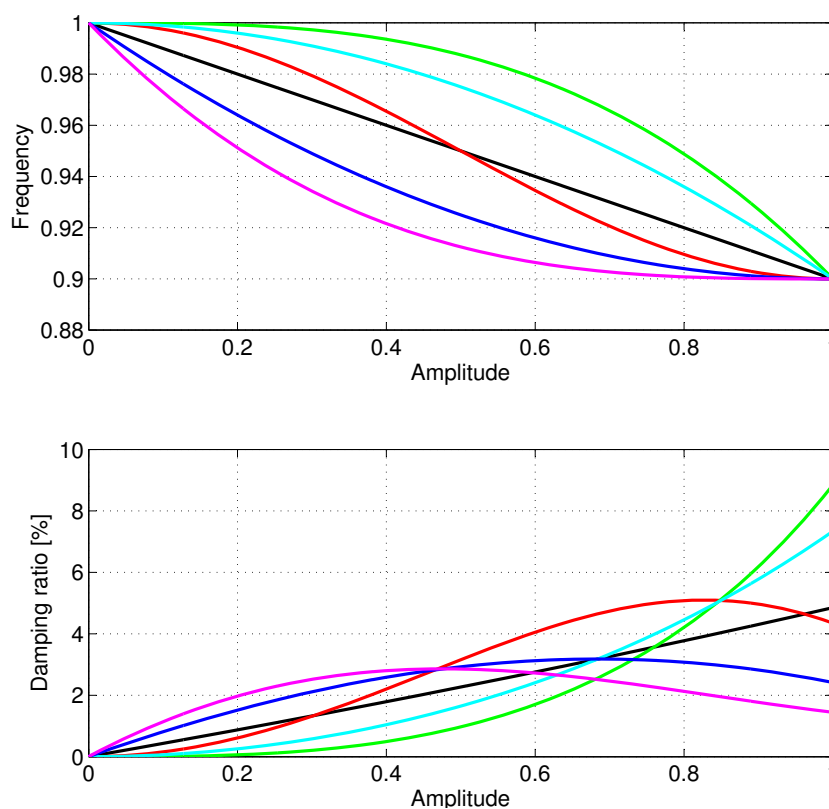


Figure 7.21 – Relation entre assouplissement et amortissement.

On se donne ici plusieurs formes quelconques d'évolution de la fréquence et les courbes d'amortissement sont calculées à partir de la formule 7.17. La valeur du taux d'amortissement à l'amplitude 1 dépend de la forme de la courbe de fréquence.

Rien n'exclut à priori une forme d'évolution plutôt qu'une autre (tant que la fréquence est décroissante monotone en fonction de l'amplitude). Nous avons vu qu'il est possible de "régler" le comportement d'une liaison en jouant sur

certaines paramètres tels que le serrage pour passer d'une configuration à une autre. Typiquement, les configurations correspondantes aux courbes vertes et cyans sur la figure 7.21 sont très serrées comparativement à celles des courbes bleues foncées et roses. Dans tous les cas, les caractéristiques d'amortissement et d'assouplissement sont couplées.

La liaison du banc d'essais en H a été conçue pour concilier ces caractéristiques contradictoires du point de vue de la conception. La géométrie proposée permet de découpler les fonctions de dissipation et de sécurité. Les deux vis M6 sont fortement serrées (15Nm) comparativement aux vis M4 dont le serrage est inférieur à 2Nm. Il est attendu que la rigidité de la zone de contact sous les têtes de vis M6 ne soit pas affectée par l'amplitude de vibration. Cette hypothèse est validée par les courbes noires indiquées 0Nm dans les figures 5.20 et 5.21. La configuration 0Nm correspond au cas où les vis M4 sont retirées et seules les vis M6 assurent le maintien de la liaison. Évidemment la raideur globale de la liaison est plus faible (environ deux fois plus faible) qu'avec les vis M4, mais cette raideur est assurée même dans le cas où les autres points de contact seraient en régime de glissement total. L'assouplissement est ainsi maîtrisé car la limite basse de la raideur est connue.

Les taux d'amortissement mesurés dans la configuration 0Nm sont très faibles. Le phénomène de glissement partiel est donc très majoritairement localisé sous les têtes de vis M4. Dans la mesure où une certaine rigidité de liaison est assurée, il est alors possible d'envisager d'appliquer toute sorte de couple de serrage aux vis M4. Les faibles serrages ont permis d'engendrer des taux d'amortissement importants aux faibles et moyennes amplitudes. Cette caractéristique peut être exploitée afin d'assurer un niveau vibratoire bas dans les conditions nominales de vibration d'une structure. Les forts serrages assurent un taux d'amortissement important pour les conditions d'amplitudes fortes. Des configurations hybrides avec différents serrages, comme présenté sur la figure 5.6 doivent être considérées car elle permettent d'assurer un taux d'amortissement important quel que soit l'amplitude de vibration.

Une autre caractéristique importante, et non-souhaitable, du phénomène de glissement partiel est l'usure des pièces de contact. La géométrie de la liaison en H peut être améliorée en remplaçant les vis M4 par des points de contact discrets comme représenté sur la figure 7.22.

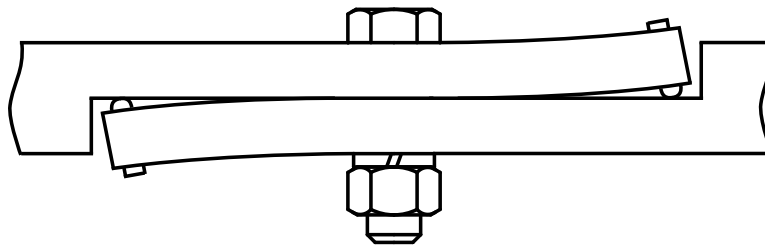


Figure 7.22 – Schéma de principe d'une liaison à vocation dissipative.

Technologiquement, cette fonction peut être assurée par des vis de type poin-teau. Le préchargement des points de contact est assuré par la déformation

(exagérée sur le dessin) des pièces assemblées.

Ce type de contact très localisé présente aussi l'avantage d'être très bien connu des tribologues, voir figure 1.3. La localisation de la zone d'usure en un nombre limité de points bien identifiés permet ainsi de maîtriser la détérioration de la liaison. Le choix de matériaux ou de revêtement adaptés permet aussi d'user principalement les vis (qui peuvent facilement être remplacées) plutôt que les pièces assemblées. L'identification de ce type de contact dont la géométrie est connue est bien plus aisée que dans le cas d'une surface de contact réputée plane pour laquelle les défauts sont inconnus. Enfin la modélisation des contacts ponctuels ne nécessite pas autant de ressources que dans le cas d'un contact surfacique. La construction d'un modèle pour représenter la dynamique d'une liaison de ce type semble assez aisée comparée aux modèles alambiqués qui ont été développés dans cette thèse. L'effort considérable que nécessite la mise en place des modèles de liaisons de géométries ordinaires laisse penser qu'il serait intéressant de concevoir et de mettre en place, en certains points stratégiques, des liaisons dédiées à une fonction amortissante maîtrisée.

Annexe

Dimensions de la liaison H

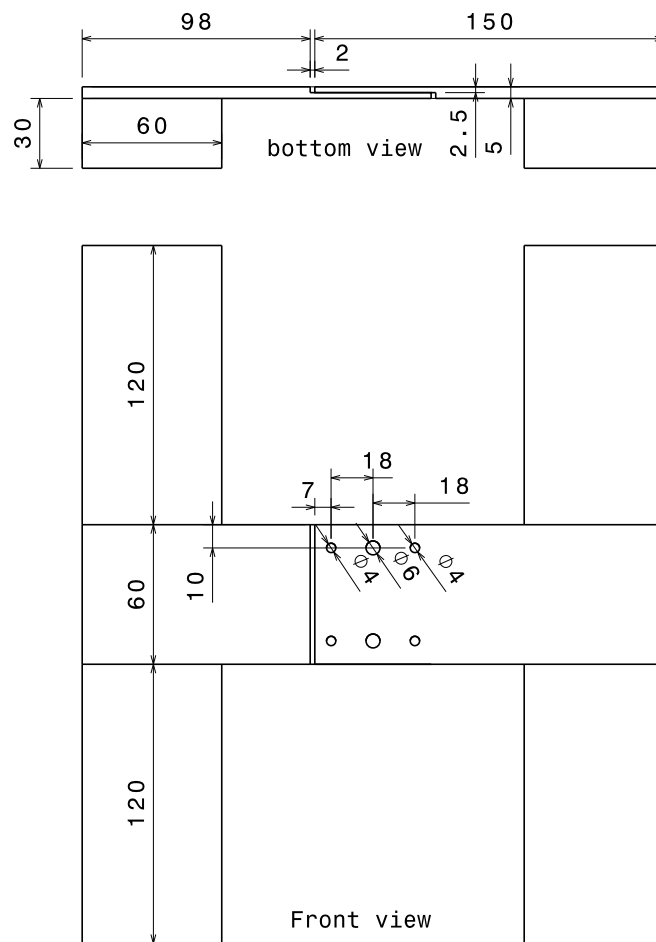


Figure 7.23 – Dimensions de la structure.

Bibliographie générale

- [AB11] I.I. Argatov and E.A. Butcher. On the iwan models for lap-type bolted joints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(2) :347–356, March 2011.
- [ABLS05] F. Al-Bender, Vincent Lampaert, and Jan Swevers. The generalized maxwell-slip model : a novel model for friction simulation and compensation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(11) :1883–1887, 2005.
- [AJ07a] H. Ahmadian and H. Jalali. Generic element formulation for modelling bolted lap joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5) :2318–2334, July 2007.
- [AJ07b] H. Ahmadian and H. Jalali. Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2) :1041–1050, February 2007.
- [AZF12] D. Amsallem, M.J. Zahr, and C. Farhat. Nonlinear model order reduction based on local reduced-order bases. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(10) :891–916, 2012.
- [Bal96] E. Balmes. Optimal ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition. *AIAA journal*, 34(6) :1256–1260, 1996.
- [Bal00] E. Balmes. Review and evaluation of shape expansion methods. In *SPIE proceedings series*, pages 555–561. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2000.
- [BB06] B. Borsotto and Dominique Beauvois. Les frottements : origines physiques et modèles. *Technologies & Formations*, (n°128), 2006.
- [BC68] M.C.C. Bampton and R.R. Craig, JR. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [BDPH13] N. Bouchaala, J.L. Dion, N. Peyret, and M. Haddar. Micro-slip induced damping in the contact of nominally flat surfaces. *International Journal of Applied Mechanics*, 05(01) :1350005, March 2013.
- [Bjo97] S. Bjorklund. A random model for micro-slip between nominally flat surfaces. *Journal of tribology*, 119(4) :726–732, 1997.
- [BL04] M. Böswald and M. Link. Identification of non-linear joint parameters by using frequency response residuals. In *International Conference on Noise Vibration Engineering*, pages 3121–3140, 2004.

- [Bob02] A. Bobillot. *Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d'Ariane 5*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2002.
- [BRS⁺11] S. Bograd, P. Reuss, A. Schmidt, L. Gaul, and M. Mayer. Modeling the dynamics of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(8) :2801–2826, November 2011.
- [BW77] C.F. Beards and J.L. Williams. The damping of structural vibration by rotational slip in joints. *Journal of Sound and Vibration*, 53(3) :333–340, August 1977.
- [Cai09] A. Caignot. *Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Cachan, 2009.
- [CB08] D. Celic and M. Boltezar. Identification of the dynamic properties of joints using frequency-response functions. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1-2) :158–174, October 2008.
- [CD05] W. Chen and X. Deng. Structural damping caused by microslip along frictional interfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(8) :1191–1211, August 2005.
- [CEB87] W. R. Chang, I. Etsion, and D. B. Bogy. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces. *Journal of Tribology*, 109(2) :257–263, April 1987.
- [CFRD13] G. Chevallier, H. Festjens, F. Renaud, and J.-L. Dion. Pressure measurement sensor for jointed structures. In *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, pages 383–388. Springer New York, January 2013.
- [Cha05] L. Champaney. Contact unilatéral entre solides élastiques. *Notes de cours 'Eléments finis' du DESS Dynamique des Structures Modernes dans leur Environnement*, 2005.
- [CM77] K. Chandrashekhara and S. K. Muthanna. Stresses in a thick plate with a circular hole under axisymmetric loading. *International Journal of Engineering Science*, 15(2) :135–146, 1977.
- [CWRU06] A.D. Crocombe, R. Wang, G. Richardson, and C.I. Underwood. Estimating the energy dissipated in a bolted spacecraft at resonance. *Computers & Structures*, 84(5-6) :340–350, January 2006.
- [Dah68] P. R. Dahl. A solid friction model. Technical report, Space and Missile systems organization air force systems command, May 1968.
- [DBBK07] D.V. Deshmukh, E.J. Berger, M.R. Begley, and Uday Komaragiri. Correlation of a discrete friction (iwan) element and continuum approaches to predict interface sliding behavior. *Eu-*

- ropean Journal of Mechanics - A/Solids*, 26(2) :212–224, March 2007.
- [DCP⁺11] J.L. Dion, G. Chevallier, N. Peyret, F. Renaud, and H. Festjens. Optimization of the spectral kurtosis for harmonic component detection. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE)*. ASME, 2011.
- [DCP13] J.L. Dion, G. Chevallier, and N. Peyret. Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 34(1–2) :106–115, January 2013.
- [DOOO08] O. Damisa, V.O.S. Olunloyo, C.A. Osheku, and A.A. Oyediran. Dynamic analysis of slip damping in clamped layered beams with non-uniform pressure distribution at the interface. *Journal of Sound and Vibration*, 309(3–5) :349–374, January 2008.
- [DSCF13] J.L. Dion, C. Stephan, G. Chevallier, and H. Festjens. Tracking and removing modulated sinusoidal components : A solution based on the kurtosis and the extended kalman filter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013.
- [DWOAL95] C.C. De Wit, H. Olsson, K.J. Astrom, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3) :419–425, 1995.
- [Ear66] S.W.E. Earles. Theoretical estimation of the frictional energy dissipation in a simple lap joint. *Journal of mechanical engineering science*, 8 :207–214, 1966.
- [EKL⁺13] M. Eriten, M. Kurt, G. Luo, D. McFarland, L. A. Bergman, and A.F. Vakakis. Nonlinear system identification of frictional effects in a beam with a bolted joint connection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39(1–2) :245–264, August 2013.
- [EPB11] M. Eriten, A.A. Polycarpou, and L.A. Bergman. Physics-based modeling for fretting behavior of nominally flat rough surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10) :1436–1450, May 2011.
- [Eri12] M. Eriten. *Multiscale physics-based modeling of friction*. PhD thesis, May 2012.
- [FCBKL08] R. Filomeno Coelho, P. Breitkopf, and C. Knopf-Lenoir. Model reduction for multidisciplinary optimization - application to a 2d wing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(1) :29–48, 2008.
- [FCD12a] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. Numerical investigations on modal microsliding dissipations in built-up structures. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference*

- Proceedings*, volume 2012, pages 4769–4777. Institute of Noise Control Engineering, 2012.
- [FCD12b] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. A numerical quasi-static method for the identification of frictional dissipation in bolted joints. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE)*, pages 353–358. ASME, August 2012.
- [FCD13a] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. Model order reduction of assembled structures for dynamic analysis-detc2013-12971. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE)*. ASME, 2013.
- [FCD13b] H. Festjens, G. Chevallier, and J.L. Dion. A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013.
- [FCD14] H. Festjens, G. Chevallier, and J. L. Dion. Nonlinear model order reduction of jointed structures for dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7) :2100–2113, March 2014.
- [FCR⁺12] H. Festjens, G. Chevallier, F. Renaud, J.L. Dion, and R. Lemaire. Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : A numerical study. *Applied Acoustics*, 73(11) :1121–1128, November 2012.
- [Fol98] E. Foltête. Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires. *These de doctorat, UFR des sciences et techniques de l'université de Franche-Comté*, 1998.
- [FSDCED] H. Festjens, Ben Brahim C. Stephan, C., J.L. Dion, and G. Chevallier. Are iwan models relevant to model joints? SUBMITTED.
- [FSS11] K Farhang, D Segalman, and M Starr. A multiscale approach to modeling energy dissipation in lap joints : Comparison of two models. ASME, 2011.
- [GB89] J. Gwinner and B. Brosowski. A penalty approximation for a unilateral contact problem in non-linear elasticity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 11(4) :447–458, July 1989.
- [GIB11] H. Goyder, P. Ind, and D. Brown. Development of a method for measuring damping in bolted joints. pages 1253–1262, January 2011.
- [Gir73] C. Giraudon. Signal analytique et signal exponentiel. ISMA, Nice, France, 1973.

- [GK56] L.E. Goodman and J.H. Klumpp. Analysis of slip damping with reference to turbine blade vibration, journal of applied mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 23 :421, 1956.
- [GN01] L. Gaul and R. Nitsche. The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Reviews*, 54(2) :93–106, March 2001.
- [Gro85] M. Groper. Microslip and macroslip in bolted joints. *Experimental Mechanics*, 25(2) :171–174, June 1985.
- [Gui97] J. Guillot. *Assemblages par Elements Filetes Modelisations et Calcul*. Ed. Techniques Ingénieur, 1997.
- [Guy65] R. Guyan. Reduction of mass and stiffness matrices. *AIAA Journal*, 3(2) :380, 1965.
- [GW66] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 295(1442) :300–319, June 1966.
- [Hel05] L. Heller. *Amortissement dans les structures assemblées*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2005.
- [Her] Heinrich Hertz. Ueber die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92 :156–171.
- [HFP09] L. Heller, E. Foltête, and J. Piranda. Experimental identification of nonlinear dynamic properties of built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 327(1-2) :183–196, October 2009.
- [HOG02] M. Hanss, S. Oexl, and L. Gaul. Identification of a bolted-joint model with fuzzy parameters loaded normal to the contact interface. *Mechanics Research Communications*, 29(2-3) :177–187, March 2002.
- [HR09] Patrick Hild and Yves Renard. A stabilized lagrange multiplier method for the finite element approximation of contact problems in elastostatics. *Numerische Mathematik*, 115(1) :101–129, November 2009.
- [HS05] N.E. Huang and S.S. Shen. *Hilbert-Huang transform and its applications*, volume 5. World Scientific, 2005.
- [HSM⁺04] C. J. Hartwigsen, Y. Song, D. M. McFarland, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis. Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration. *Journal of Sound and Vibration*, 277(1-2) :327–351, October 2004.
- [IA12] M. Iranzad and H. Ahmadian. Identification of nonlinear bolted lap joint models. *Computers & Structures*, 96 :1–8, 2012.

- [IDSBLC13] G Inglebert, T Da Silva Botelho, and I Lemaire Caron. Théorie du contact de hertz contacts ponctuels ou linéiques. *Techniques de l'ingénieur Surfaces et thermomécanique du contact*, base documentaire : TIB463DUO.(ref. article : tri200), 2013.
- [IP05] R. A. Ibrahim and C. L. Pettit. Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners. *Journal of Sound and Vibration*, 279(3-5) :857–936, January 2005.
- [Iwa66] W.D. Iwan. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 33 :893, 1966.
- [JAM07] H. Jalali, H. Ahmadian, and J.E. Mottershead. Identification of nonlinear bolted lap-joint parameters by force-state mapping. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25-26) :8087–8105, December 2007.
- [JAP11] H. Jalali, H. Ahmadian, and F. Pourahmadian. Identification of micro-vibro-impacts at boundary condition of a nonlinear beam. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3) :1073–1085, April 2011.
- [JSP10] V. Jaumouille, J.-J. Sinou, and B. Petitjean. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems—application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, 329(19) :4048–4067, September 2010.
- [JU04] S.J. Julier and J.K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3) :401–422, 2004.
- [KHN⁺07] N.M. Kwok, Q.P. Ha, M.T. Nguyen, J. Li, and B. Samali. Bouc–Wen model parameter identification for a MR fluid damper using computationally efficient GA. *ISA Transactions*, 46(2) :167–179, April 2007.
- [KPGV09] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, and A.F. Vakakis. Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170–194, January 2009.
- [Lli05] M. Llibre. Moindres carrés et kalman. <http://michel.llibre.pagesperso-orange.fr/docs/kalman-std.pdf>, 2005.
- [Mas26] G. Masing. Eigenspannungen und verfestigung beim messing. *Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics*, page 332–335, 1926. cited By (since 1996) 189.
- [MBV01] X. Ma, L. Bergman, and A. Vakakis. Identification of bolted

- joints through laser vibrometry. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3) :441–460, September 2001.
- [MD68] A. F. Metherell and S. V. Diller. Instantaneous energy dissipation rate in a lap joint – uniform clamping pressure. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :333–340, March 1968.
- [MG07] M.H. Mayer and L. Gaul. Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2) :724–734, February 2007.
- [Min49] R.D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16 :259–268, 1949.
- [Mor78] Jorge J. Moré. The levenberg-marquardt algorithm : Implementation and theory. In G. A. Watson, editor, *Numerical Analysis*, number 630 in Lecture Notes in Mathematics, pages 105–116. Springer Berlin Heidelberg, January 1978.
- [Nac02] Samuel Nacivet. *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. PhD thesis, Ecole doctorale de mécanique de lyon, 2002.
- [Nan06] B.K. Nanda. Study of the effect of bolt diameter and washer on damping in layered and jointed structures. *Journal of Sound and Vibration*, 290(3-5) :1290–1314, March 2006.
- [Nay08] A.H. Nayfeh. *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [NFAB⁺08a] H. Nouira, E. Foltête, B. Ait Brik, L. Hirsinger, and S. Ballandras. Experimental characterization and modeling of microsliding on a small cantilever quartz beam. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1) :30–49, 2008.
- [NFAB⁺08b] H. Nouira, E. Foltête, B. Ait Brik, L. Hirsinger, and S. Ballandras. Experimental characterization and modeling of microsliding on a small cantilever quartz beam. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1–2) :30–49, October 2008.
- [Ngu07] T.M. Nguyen. *Dynamique non linéaire des systemes mécaniques couplés : Réduction de modele et Identification*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2007.
- [OOM05] M. Oldfield, H. Ouyang, and J.E. Mottershead. Simplified models of bolted joints under harmonic loading. *Computers & Structures*, 84(1-2) :25–33, December 2005.
- [OOM06] H. Ouyang, M.J. Oldfield, and J.E. Mottershead. Experimental and theoretical studies of a bolted joint excited by a torsional dynamic load. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(12) :1447–1455, December 2006.

- [PDCA10] N. Peyret, J.-L. Dion, G. Chevallier, and P. Argoul. Microslip induced damping in planar contact under constant and uniform normal stress. *International Journal of Applied Mechanics*, 02(02) :281, 2010.
- [Pey12] N. Peyret. *Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique*. PhD thesis, Université Paris-Est, October 2012.
- [Pir13] J. Piranda. Analyse modale expérimentale. *Techniques de l'ingénieur Vibrations en milieu industriel, mesures, surveillance et contrôle*, base documentaire : TIB424DUO.(ref. article : r6180), 2013.
- [PVS⁺09] M. Peeters, R. Viguié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Nonlinear normal modes, part II : toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :195–216, January 2009.
- [QS05] D.D. Quinn and D.J. Segalman. Using series-series iwan-type models for understanding joint dynamics. *Journal of applied mechanics*, 72(5) :666–673, 2005.
- [Qui12] D.D. Quinn. Modal analysis of jointed structures. *Journal of Sound and Vibration*, 331(1) :81–93, January 2012.
- [RCB11] V. Roulet, L. Champaney, and P.-A. Boucard. A parallel strategy for the multiparametric analysis of structures with large contact and friction surfaces. *Advances in Engineering Software*, 42(6) :347–358, June 2011.
- [RV] F. Robbe Valloire. Statistical analysis of asperities on a rough surface. *Wear*, 249.
- [Seg01] D.J. Segalman. An initial overview of iwan modeling for mechanical joint. *Sandia report*, SAND2001-0811, 2001.
- [Seg02] D.J. Segalman. A four-parameter iwan model for lap-type joints. *Sandia report*, SAND2002-3828, 2002.
- [Seg07] D.J. Segalman. Model reduction of systems with localized nonlinearities. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2(3) :249, 2007.
- [Seg10] D.J. Segalman. A modal approach to modeling spatially distributed vibration energy dissipation. Technical report, Tech. Rep. SAND2010-4763, Sandia National Laboratories (August 2010), 2010.
- [SGC00] D.O. Smallwood, D.L. Gregory, and R.G. Coleman. Damping investigations of a simplified frictional shear joint. Technical

- report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (US) ; Sandia National Labs., Livermore, CA (US), 2000.
- [SHM⁺04] Y. Song, C.J. Hartwigsen, D.M. McFarland, A.F. Vakakis, and L.A. Bergman. Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted iwan beam elements. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1–2) :249–276, May 2004.
- [SM05] Y. Song and D. M. McFarland. Effect of pressure distribution on energy dissipation in a mechanical lap joint. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics journal*, 43(2) :420–425, 2005.
- [SSAD13] M.J. Starr, D.J. Segalman, M.S. Allen, and B.J. Deaner. Application of viscous and iwan and modal damping models to experimental measurements from bolted structures. Technical report, Sandia National Laboratories Livermore, CA ; Sandia National Laboratories (SNL-NM), Albuquerque, NM (United States), 2013.
- [TC88] J.-S. Tsai and Y.-F. Chou. The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint. *Journal of Sound and Vibration*, 125(3) :487–502, September 1988.
- [Uhl04] J.K. Uhlmann. First-hand :the unscented transform. *First-Hand histories of IEEE*, 2004.
- [Ung73] E.E. Ungar. The status of engineering knowledge concerning the damping of built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 26(1) :141–154, January 1973.
- [VDRBB⁺10] G. Vermot Des Roches, J.P. Bianchi, E. Balmes, R. Lemaire, P. Thierry, et al. Using component modes in a system design process. IMAC, Jacksonville, 2010.
- [WO08] H. Wentzel and M. Olsson. Mechanisms of dissipation in frictional joints—Influence of sharp contact edges and plastic deformation. *Wear*, 265(11–12) :1814–1819, November 2008.